Problem: Circle – Bài Tập: Đường Tròn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 15 tháng 10 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set $\mathbb{Q}$ of circles [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

1 ([BBN23], p. 99). *Tại sao các nan hoa của bánh xe đạp dài bằng nhau?*

2 ([BBN23], H1, p. 101). *Có bao nhiêu đường tròn bán kính R đi qua 1 điểm cho trước? Tâm các đường tròn đó nằm ở đâu?*

3 ([BBN23], H2, p. 101). *Qua 3 điểm bất kỳ có luôn vẽ được 1 đường tròn?*

4 ([BBN23], H3, p. 101). *Vẽ đường tròn nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính.*

5 ([BBN23], H4, p. 101). *Tính đường kính của các đường tròn $(O;2R),(O;aR)$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $a>0$.*

6 ([BBN23], H5, p. 101). Đ/S? *(a) Dây vuông góc với đường kính thì bị đường kính chia làm đôi. (b) Dây vuông góc với đường kính thì chia đôi đường kính. (c) Đường kính đi qua trung điểm 1 dây thì vuông góc với dây ấy. (d) Đường trung trực của 1 dây là trục đối xứng của đường tròn.*

7 ([BBN23], VD1, p. 101). *Chứng minh: (a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Nếu 1 tam giác có 1 cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông (đường kính là cạnh huyền). (c) Các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn.*

8 ([BBN23], VD2, p. 102). *Khi nào thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm: (a) trong tam giác? (b) ngoài tam giác?*

9 ([BBN23], VD3, p. 102). *Cho ΔABC có $AB=13$ cm, $BC=5$ cm, $CA=12$ cm. Xác định tâm & tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

10 ([BBN23], VD4, p. 103). *Cho đường tròn đường kính AB, điểm M bất kỳ. Chứng minh M nằm trong đường tròn khi & chỉ khi $\widehat{AMB}>90^\circ$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex.

11 ([BBN23], VD5, p. 103). *Cho đường tròn (O, R) & 2 điểm A, B nằm trong đường tròn. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B & nằm hoàn toàn bên trong (O).*

12 ([BBN23], VD6, p. 103). *Có 1 miếng bìa hình tròn bị khoét đi 1 lỗ thủng cũng hình tròn. Dùng kéo cắt (theo 1 đường thẳng) để chia đôi miếng bìa đó.*

13 ([BBN23], VD7, p. 104). *Cho đoạn thẳng AB, điểm M thuộc đoạn AB. Dựng 2 đường tròn đường kính AB & đường kính BM. 1 đường thẳng d vuông góc với AB tại N cắt đường tròn đường kính AB tại E, F, cắt đường tròn đường kính BM tại P, Q. Chứng minh: (a) $PE = QF$. (b) $\widehat{PMB} > \widehat{EAB}$.*

14 ([BBN23], VD8, p. 104). *Cho đường tròn (O, R) & điểm A nằm ngoài đường tròn. Dựng qua A cát tuyến cắt đường tròn tại B, C sao cho B là trung điểm AC.*

15 ([BBN23], VD9, p. 105). *Cho đường tròn $(O, 6\text{cm})$, 2 dây $AB \parallel CD$. (a) Chứng minh $AC = BD, AD = BC$. (b) Tính khoảng cách từ O đến AC, biết khoảng cách tư O đến AB là 2 cm, khoảng cách từ O đến CD là 4 cm.*

16 ([BBN23], 4.1., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A, đường trung tuyến AM, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Trên tia AM lấy 3 điểm D, E, F sao cho $AD = 9$ cm, $AE = 11$ cm, $AF = 10$ cm. Xác định vị trí của mỗi điểm D, E, F đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

17 ([BBN23], 4.2., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Từ điểm M bất kỳ trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.*

18 ([BBN23], 4.3., p. 106). *Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{C} = 90°$. So sánh AC, BD.*

19 ([BBN23], 4.4., p. 106). *Cho đường tròn đường kính AB, C, D là 2 điểm khác nhau thuộc đường tròn, C, D không trùng với A, B. 2 điểm E, F thuộc đường tròn sao cho $CE \perp AB, DF \perp AB$. Chứng minh CF, ED, AB đồng quy.*

20 ([BBN23], 4.5., p. 106). *Cho đường tròn (O, R) & dây $AB = 2a$, $a < R$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Tính AD theo a, R.*

21 ([BBN23], 4.6., p. 106). *Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{C} + \widehat{D} = 90°$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BD, DC, CA. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.*

22 ([BBN23], 4.7., p. 106). *Cho ΔABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết $BC = 24, AC = 20$. Tính chiều cao AH & bán kính (O).*

23 ([BBN23], 4.8., p. 106). *Cho đường tròn (O, R) & dây AB. Kéo dài AB về phía B lấy điểm C sao cho $BC = R$. Chứng minh $\widehat{AOC} = 180° - 3\widehat{ACO}$.*

24 ([BBN23], 4.9., p. 106). *Cho đường tròn (O, R) & điểm A nằm ngoài đường tròn. Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn sao cho đoạn MA là ngắn nhất, dài nhất.*

25 ([BBN23], 4.10., p. 107). *Cho đường tròn (O, R) & điểm P nằm bên trong nó. 2 dây AB, CD thay đổi luôn đi qua P & vuông góc với nhau. Chứng minh $AB^2 + CD^2$ là đại lượng không đổi.*

26 ([BBN23], 4.11., p. 107). *Cho đường tròn (O, R), đường kính AB, E là điểm nằm trong đường tròn, AE cắt đường tròn tại C, BE cắt đường tròn tại D. Chứng minh $AE \cdot AC + BE \cdot BD = 4R^2$.*

27 ([BBN23], 4.12., p. 107). *Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh 4 hình tròn có đường kính AB, BC, CD, DA phủ kín miền tứ giác $ABCD$.*

28 ([BBN23], 4.13., p. 107). *Cho nửa đường tròn đường kính AB & điểm M nằm trong nửa đường tròn. Chỉ bằng thước kẻ, dựng qua M đường thẳng vuông góc với AB.*

29 ([Tuy23], Thí dụ 5, pp. 113–114). *Trên đường tròn (O, R) đường kính AB lấy 1 điểm C. Trên tia AC lấy điểm M sao cho C là trung điểm AM. (a) Xác định vị trí của điểm C để AM lớn nhất. (b) Xác định vị trí của điểm C để $AM = 2R\sqrt{3}$. (c) Chứng minh khi C di động trên đường tròn (O) thì điểm M di động trên 1 đường tròn cố định.*

30 ([Tuy23], 36., p. 114). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao $AH = BC = a$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

31 ([Tuy23], 37., p. 114). *Cho ΔABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh: các đường tròn $(AFE), (BFD), (C$ bằng nhau & cùng đi qua 1 điểm. Xác định điểm chung đó.*

32 ([Tuy23], 38., p. 114). *Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 1, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Gọi R_1 & R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các $\Delta ABC, \Delta ABD$. Chứng minh: $\dfrac{1}{R_1^2} + \dfrac{1}{R_2^2} = 4$.*

33 ([Tuy23], 39., p. 115). *Cho hình bình hành $ABCD$, cạnh AB cố định, đường chéo $AC = 2$ cm. Chứng minh điểm D di động trên 1 đường tròn cố định.*

34 ([Tuy23], 40., p. 115). *Cho đường tròn (O, R) & 1 dây BC cố định. Trên đường tròn lấy 1 điểm A ($A \not\equiv B$, $A \not\equiv C$). Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh khi A di động trên đường tròn (O) thì điểm G di động trên 1 đường tròn cố định.*

35 ([Tuy23], 41., p. 115). *Trong mặt phẳng cho $2n+1$ điểm, $n \in \mathbb{N}$, sao cho 3 điểm bất kỳ nào cũng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh: trong các điểm này có ít nhất $n+1$ điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.*

36 ([Tuy23], 42., p. 115). *Cho hình bình hành $ABCD$, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ đường tròn tâm O cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Xác định dạng của tứ giác $MNPQ$.*

37 ([Tuy23], 43., p. 115). *2 người chơi 1 trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt đặt lên 1 chiếc bàn hình tròn 1 cái cốc. Ai là người cuối cùng đặt được cốc lên bàn thì người đó thắng cuộc. Muốn chắc thắng thì phải chơi theo "chiến thuật" nào? (các chiếc cốc đều như nhau).*

38 ([Bìn23], VD8, p. 95). *Cho hình thang cân $ABCD$. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.*

39 ([Bìn23], 50., p. 95). *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), $AC = 40$ cm, $BC = 48$ cm. Tính khoảng cách từ O đến BC.*

40 ([Bìn23], 51., p. 96). *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), cạnh bên bằng b, đường cao $AH = h$. Tính bán kính của đường tròn (O).*

41 ([Bìn23], 52., p. 96). *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong ΔAMC hoặc O nằm giữa A & M. Gọi I là trung điểm AC. Chứng minh: (a) Chu vi ΔIMC lớn hơn $2R$. (b) Chu vi ΔABC lớn hơn $4R$.*

42 ([Bìn23], 53., p. 96). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Kẻ 3 đường thẳng DD', EE', FF' sao cho $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$. Chứng minh 3 đường thẳng DD', EE', FF' đồng quy.*

43 ([Bìn23], 54., p. 96). *Cho 3 điểm A, B, C bất kỳ & đường tròn $(O;1)$. Chứng minh tồn tại 1 điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho $MA + MB + MC \geq 3$.*

44 ([Bìn+23], VD1, p. 20). *Cho đường tròn (O), đường kính AB, 2 dây AC, BD. Chứng minh $AC \parallel BD \Leftrightarrow CD$ là đường kính.*

45 ([Bìn+23], VD2, p. 20). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD song song với nhau. Gọi E, F là trung điểm AB, CD. Chứng minh E, F, O thẳng hàng.*

46 ([Bìn+23], VD3, p. 20). *Dựng 1 đường tròn nhận đoạn thẳng AB cho trước làm dây cung có bán kính r cho trước.*

47 ([Bìn+23], VD4, p. 21). *Cho đường tròn (O, R) & dây AB. Kéo dài AB về phía B lấy điểm C sao cho $BC = R$. Chứng minh $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$.*

48 ([Bìn+23], VD5, p. 21). *Cho ΔABC. Từ trung điểm 3 cạnh kẻ các đường vuông góc với 2 cạnh kia tạo thành 1 lục giác. Chứng minh diện tích ΔABC gấp 2 lần diện tích lục giác.*

49 ([Bìn+23], VD6, p. 21). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD kéo dài cắt nhau tại điểm M ở ngoài đường tròn. Gọi H, E là trung điểm AB, CD. Chứng minh $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$.*

50 ([Bìn+23], VD7, p. 22). *Cho đường tròn (O) & điểm A nằm trong đường tròn, $A \neq O$. Tìm trên đường tròn điểm M sao cho $\widehat{OMA}$ lớn nhất.*

51 ([Bìn+23], VD8, p. 22). *Cho đường tròn (O), A, B, C là 3 điểm trên đường tròn sao cho $AB = AC$. Gọi I là trung điểm AC, G là trọng tâm của ΔABI. Chứng minh $OG \perp BI$.*

52 ([Bìn+23], VD9, p. 23). *Dựng ΔABC. Biết $\widehat{A} = \alpha < 90^\circ$, đường cao $BH = h$ & trung tuyến $CM = m$.*

53 ([Bìn+23], VD10, p. 23). *Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O, r), $AB = r\sqrt{3}$, $AC = r\sqrt{2}$. Giải ΔABC.*

54 ([Bìn+23], VD11, p. 23). *Cho đoạn thẳng BC cố định, I là trung điểm BC, điểm A trên mặt phẳng sao cho $AB = BC$. Gọi H là trung điểm AC, đường thẳng AI cắt đường thẳng BH tại M. Chứng minh M nằm trên 1 đường tròn cố định khi A thay đổi.*

55 ([Bìn+23], VD12, p. 24). *Cho hình chữ nhật ABCD, kẻ $BH \perp AC$. Trên cạnh AC, CD lấy 2 điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{DN}{CD}$. Chứng minh 4 điểm B, C, M, N nằm trên 1 đường tròn.*

56 ([Bìn+23], VD13, p. 24). *Cho đường tròn (O, R), dây $AB = 2a$, $a < R$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Tính AD theo a, R.*

57 ([Bìn+23], VD14, p. 25). *Cho đường tròn (O, R), đường kính AB, điểm E nằm trong đường tròn, AE cắt đường tròn tại C, BE cắt đường tròn tại D. Chứng minh $AE \cot AC + BE \cdot BD$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm E.*

58 ([Bìn+23], VD15, p. 25). *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh 4 hình tròn có đường kính AB, BC, CD, DA phủ kín miền tứ giác ABCD.*

59 ([Bìn+23], 4.1., p. 26). *Tính cạnh của tam giác đều, bát giác đều, n-giác đều nội tiếp đường tròn (O, R).*

60 ([Bìn+23], 4.2., p. 26). *Cho đường tròn (O), điểm P ở trong đường tròn. Xác định dây lớn nhất & dây ngắn nhất đi qua P.*

61 ([Bìn+23], 4.3., p. 26). *Cho đường tròn (O), 2 bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Kẻ tia phân giác của $\widehat{AOB}$, cắt đường tròn ở D, M là điểm chuyển động trên cung nhỏ AB, từ M kẻ $MH \perp OB$ cắt OD tại K. Chứng minh $MH^2 + KH^2$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm M.*

62 ([Bìn+23], 4.4., p. 26). *Chứng minh bao giờ cũng chia được 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân, trong đó có 3 tam giác bằng nhau.*

63 ([Bìn+23], 4.5., p. 26). *Cho đường tròn (O), 1 dây cung EF có khoảng cách từ tâm O đến dây là d. Dựng 2 hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn, 2 đỉnh còn lại nằm trên dây EF. Tính hiệu của 2 cạnh hình vuông đó theo d.*

64 ([Bìn+23], 4.6., p. 26). *Cho 2 đường tròn đồng tâm. Dựng 1 dây cắt 2 đường tròn theo thứ tự tại A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.*

65 ([Bìn+23], 4.7., p. 26). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O, R), $AB = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $AC = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Giải ΔABC.*

66 ([Bìn+23], 4.8., p. 26). *Cho hình thoi $ABCD$. Gọi R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD. Tính cạnh của hình thoi $ABCD$ theo R_1, R_2.*

67 ([Bìn+23], 4.9., p. 26). *Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi 1 trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 điểm được tô cùng 1 màu mà khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng 1.*

68 ([Bìn+23], 4.10., p. 26). *Cho đường tròn (O, R) & dây AB cố định. Từ điểm C thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành $CABD$. Chứng minh giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành $CABD$ nằm trên 1 đường tròn cố định.*

2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

69 ([BBN23], H1, p. 109). *Giải thích kết luận "Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn" dựa vào so sánh khoảng cách từ tâm đến dây.*

70 ([BBN23], H2, p. 109). *Cho đường tròn (O), 2 dây $AB \parallel CD$ & $AB = CD$, A, D cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?*

71 ([BBN23], H3, p. 109). *Cho 1 đường tròn (O, R) & dây CD thay đổi nhưng có độ dài bằng a không đổi. Tập hợp các trung điểm dây CD là đường nào?*

72 ([BBN23], H4, p. 110). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O & cát tuyến $ABCD$. So sánh AB, CD.*

73 ([BBN23], VD1, p. 110). *Cho đường tròn (O, R) & 1 điểm M nằm trong đường tròn. Vẽ qua M 2 dây AB, CD sao cho $AB \perp OM$. (a) So sánh độ dài 2 dây AB, CD. (b) Chứng minh $\widehat{ODM} < \widehat{OBM}$. (c) Xác định vị trí của dây đi qua M sao cho độ dài của nó là nhỏ nhất, lớn nhất.*

74 ([BBN23], VD2, p. 111). *Cho 2 dây MN, EF bằng nhau & cắt nhau tại 1 điểm A nằm trong đường tròn. Chứng minh $ME = NF$.*

75 ([BBN23], VD3, p. 111). *Cho nửa đường tròn đường kính AB. Trên đoạn thẳng AB lấy 2 điểm C, D sao cho $AC = BD$. Từ C, D kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại M, N. (a) Chứng minh tứ giác $CMND$ là hình thang vuông. (b) Xác định vị trí của M, N để $CM + DN$ nhỏ nhất.*

76 ([BBN23], VD4, p. 112). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD kéo dài cắt nhau tại điểm M ở ngoài đường tròn. Gọi H, E lần lượt là trung điểm AB, CD. Chứng minh: $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$.*

77 ([BBN23], 5.1., p. 112). *Cho đường tròn (O) có tâm O nằm trên đường phân giác $\widehat{xIy}$, (O) cắt tia Ix ở A, B, cắt tia Iy ở C, D. Chứng minh $AB = CD$.*

78 ([BBN23], 5.2., p. 112). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O, bán kính $r_1 > r_2$. Từ điểm M trên (O, r_1) vẽ 2 dây ME, MF theo thứ tự cắt (O, r_2) tại A, B & C, D. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB, CD. Biết $AB > CD$. So sánh: (a) ME, MF. (b) MH, MK.*

79 ([BBN23], 5.3., p. 112). *Cho đường tròn tâm O, bán kính* 5 cm *& dây $AB =$* 8 cm. *(a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB. (b) Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI =$* 1 cm. *Kẻ dây CD đi qua I & vuông góc với AB. Chứng minh $AB = CD$.*

80 ([BBN23], 5.4., p. 112). *Cho đường tròn tâm O đường kính AB & dây CD. 2 đường vuông góc với CD tại C, D tương ứng cắt AB ở M, N. Chứng minh $AM = BN$.*

81 ([BBN23], 5.5., p. 113). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD bằng nhau & cắt nhau tại điểm I nằm trong đường tròn. Chứng minh: (a) IO là tia phân giác của 1 trong 2 góc tạo bởi 2 đường thẳng AB, CD. (b) Điểm I chia AB, CD thành 2 cặp đoạn thẳng bằng nhau đôi một.*

82 ([BBN23], 5.6., p. 113)**.** *Cho đường tròn* $(O, 6\text{cm})$ *&* 2 *dây* $AB = 8, CD = 10$*. Gọi* M *là trung điểm* AB*,* N *là trung điểm* CD*. (a) So sánh* $\widehat{OMN}, \widehat{ONM}$ *trong trường hợp 2 dây* AB, CD *không song song. (b) So sánh diện tích* $\Delta OCD, \Delta OAB$*.*

83 ([BBN23], 5.7., p. 113)**.** *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB *& dây* CD *cắt đường kính* AB *tại* I*. Hạ* AH, BK *vuông góc với* CD*. Chứng minh* $CH = DK$*.*

84 ([BBN23], 5.8., p. 113)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *cắt nhau tại* A, B*. Qua* A *kẻ 2 cát tuyến* CAF, DAE*,* $C, D \in (O)$*,* $E, F \in (O')$*, sao cho* $\widehat{CAB} = \widehat{EAB}$*. Chứng minh* $CF = DE$*.*

85 ([BBN23], 5.9., p. 113)**.** *Cho* ΔABC *cân tại* A *nội tiếp đường tròn* (O)*. Gọi* I *là trung điểm của* AC*,* G *là trọng tâm của* ΔABI*. Chứng minh* $OG \perp BI$*.*

86 ([BBN23], 5.10., p. 113)**.** *Cho* ΔABC *nhọn nội tiếp đường tròn* (O, r)*, biết* $AB = r\sqrt{3}, AC = r\sqrt{2}$*. Giải* ΔABC*.*

87 ([Bìn23], VD9, p. 96)**.** *Cho* ΔABC *nhọn nội tiếp đường tròn* (O)*. Điểm* M *bất kỳ thuộc cung* BC *không chứa* A*. Gọi* D*,* E *theo thứ tự là các điểm đối xứng với* M *qua* AB*,* AC*. Tìm vị trí của* M *để* DE *lớn nhất.*

88 ([Bìn23], VD10, p. 97)**.** *Cho* (O) *bán kính* $OA = 11$ cm*. Điểm* M *thuộc bán kính* OA *& cách* O 7 cm*. Qua* M *kẻ dây* CD *dài* 18 cm*. Tính* MC*,* MD *với* $MC < MD$*.*

89 ([Bìn23], VD11, p. 97)**.** *Cho* (O) *bán kính* 15 cm*, điểm* M *cách* O 9 cm*. (a) Dựng dây* AB *đi qua* M *& dài* 26 cm*. (b) Có bao nhiêu dây đi qua* M *& có độ dài là 1 số nguyên* cm*?*

90 ([Bìn23], 55., p. 98)**.** *Tứ giác* $ABCD$ *có* $\widehat{A} = \widehat{C} = 90°$*. (a) Chứng minh* $AC \le BD$*. (b) Trong trường hợp nào thì* $AC = BD$*?*

91 ([Bìn23], 56., p. 98)**.** *Cho* (O) *đường kính* AB*, 2 dây* AC*,* AD*. Điểm* E *bất kỳ trên đường tròn,* H*,* K *lần lượt là hình chiếu của* E *trên* AC*,* AD*. Chứng minh* $HK \le AB$*.*

92 ([Bìn23], 57., p. 98)**.** *Cho* (O)*, dây* $AB = 24$ cm*, dây* $AC = 20$ cm *(*$\widehat{BAC} < 90°$ *& điểm* O *nằm trong* $\widehat{BAC}$*). Gọi* M *là trung điểm* AC*. Khoảng cách từ* M *đến* AB *bằng* 8 cm*. (a) Chứng minh* ΔABC *cân tại* C*. (b) Tính bán kính đường tròn.*

93 ([Bìn23], 58., p. 98)**.** *Cho* (O) *bán kính* 5 cm*, 2 dây* AB *&* CD *song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng* 8 cm *&* 6 cm*. Tính khoảng cách giữa 2 dây.*

94 ([Bìn23], 59., p. 98)**.** *Cho* (O)*, đường kính* $AB = 13$ cm*. Dây* CD *dài* 12 cm *vuông góc với* AB *tại* H*. (a) Tính* AH*,* BH*. (b) Gọi* M*,* N *lần lượt là hình chiếu của* H *trên* AC*,* BC*. Tính diện tích tứ giác* $CMHN$*.*

95 ([Bìn23], 60., p. 99)**.** *Cho nửa đường tròn tâm* O *đường kính* AB*, dây* CD*. Gọi* H*,* K *lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ* A*,* B *đến* CD*. (a) Chứng minh* $CH = DK$*. (b) Chứng minh* $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$*. (c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác* $AHKB$*, biết* $AB = 30$ cm*,* $CD = 18$ cm*.*

96 ([Bìn23], 61., p. 99)**.** *Cho* ΔABC*, 3 đường cao* AD, BE, CF*. Đường tròn đi qua* D*,* E*,* F *cắt* BC*,* CA*,* AB *lần lượt tại* M*,* N*,* P*. Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ* M *vuông góc với* BC*, kẻ từ* N *vuông góc với* AC*, kẻ từ* P *vuông góc với* AB *đồng quy.*

97 ([Bìn23], 62., p. 99)**.** ΔABC *cân tại* A *nội tiếp* (O)*. Gọi* D *là trung điểm* AB*,* E *lfa trọng tâm của* ΔACD*. Chứng minh* $OE \perp CD$*.*

3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

98 ([BBN23], H1, p. 116)**.** *Đường thẳng & đường tròn có thể có 3 điểm chung không?*

99 ([BBN23], H2, p. 116)**.** *Cho đường tròn* $(O, a$ cm$)$ *& 1 đường thẳng* d *cắt đường tròn tại 2 điểm* A, B*. Gọi* H *là trung điểm của* AB*. Tìm khoảng giá trị của* OH*.*

100 ([BBN23], H3, p. 116)**.** *Qua 1 điểm nằm trong đường tròn có thể kẻ được tiếp tuyến với đường tròn này không?*

101 ([BBN23], H4, p. 116)**.** *Qua 1 điểm ở trên đường tròn có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn đó?*

102 ([BBN23], H5, p. 116)**.** *Tập hợp tâm các đường tròn* (O, R) *tiếp xúc với đường thẳng* d *cố định là đường nào?*

103 ([BBN23], VD1, p. 116)**.** *Cho đường tròn* (O, R) *tiếp xúc với đường thẳng* d *tại* A*. Trên đường thẳng* d *lấy điểm* M*. Vẽ đường tròn* (M, MA) *cắt* (O, R) *tại điểm thứ 2 là* $B \neq A$*. Chứng minh* MB *là tiếp tuyến của* (O, R)*.*

104 ([BBN23], VD2, p. 117)**.** *Cho hình thang* $ABCD$*,* $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$*, có* I *là trung điểm* AB *&* $\widehat{CID} = 90°$*. Chứng minh* CD *là tiếp tuyến của đường tròn đường kính* AB*.*

105 ([BBN23], VD3, p. 117)**.** *Cho đường tròn* (O)*, đường kính* AB*. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ* AB *vẽ 2 tiếp tuyến* Ax, By *với đường tròn. 1 đường thẳng* d *tiếp xúc với đường tròn tại* E*, cắt* Ax, By *theo thứ tự tại* M, N*. (a) Chứng minh tích* $AM \cdot BN$ *không đổi khi* d *thay đổi. (b) Xác định vị trí của* d *để* $AM + BN$ *nhỏ nhất.*

106 ([BBN23], VD4, p. 118). *Cho đường tròn (I) nội tiếp ΔABC vuông tại A, $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh $S_{ABC} = BD \cdot CD$.*

107 ([BBN23], VD5, p. 118). *Cho tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh tiếp xúc với đường tròn (O), đồng thời tất cả các cạnh kéo dài của nó tiếp xúc với đường tròn (O'). Chứng minh 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.*

108 ([BBN23], VD6, p. 118). *Cho hình vuông $ABCD$. Tia Ax quay xung quanh A, luôn nằm trong $\widehat{BAD}$. 2 tia phân giác của $\widehat{BAx}, \widehat{DAx}$ lần lượt cắt BC, CD tại M, N. Chứng minh MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.*

109 ([BBN23], VD7, p. 119). *Cho đường tròn $(O, 5 \text{ cm})$ & 1 điểm A nằm ngoài đường tròn. Dựng 1 cát tuyến đi qua A, cắt đường tròn theo 1 dây dài 8 cm.*

110 ([BBN23], VD8, p. 119). *Trong các tam giác vuông có cùng cạnh huyền, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

111 ([BBN23], 6.1., p. 120). *Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. 1 đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M. Từ A, B hạ AE, BF vuông góc với d, $E, F \in d$. (a) Chứng minh $AE + BF$ không đổi khi M chạy trên nửa đường tròn. (b) Kẻ $MD \perp AB$. Chứng minh $MD^2 = AE \cdot BF$. (c) Xác định vị trí của M để tích $AE \cdot BF$ lớn nhất.*

112 ([BBN23], 6.2., p. 120). *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O, r)$ đồng tâm, $R > r$. Từ điểm $A \in (O, r)$ kẻ 2 tiếp tuyến với (O, r), 2 tiếp điểm là M, N. 2 tiếp tuyến đó cắt (O, R) tương ứng tại B, C. (a) Chứng minh $AB = AC$. (b) Chứng minh $AO \perp BC$. (c) Tính diện tích ΔABC theo R, r.*

113 ([BBN23], 6.3., p. 120). *Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Tại A, B kẻ 2 tiếp tuyến Ax, By với đường tròn. Trên Ax, By lấy lần lượt 2 điểm M, N sao cho $AM = BN$. Chứng minh hoặc $AB \parallel MN$ hoặc AB đi qua trung điểm của MN.*

114 ([BBN23], 6.4., p. 120). *Cho ΔABC. Đường tròn (I) nội tiếp & đường tròn (J) bàng tiếp trong $\widehat{A}$ của tam giác tiếp xúc với BC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh M, N đối xứng nhau qua trung điểm BC.*

115 ([BBN23], 6.5., p. 120). *Cho 2 đường thẳng $d \parallel d'$. 1 đường tròn (O) tiếp xúc với d, d' tương ứng tại C, D, điểm A cố định trên d, nằm ngoài (O). Chỉ dùng êke, tìm trên d' điểm B sao cho AB là tiếp tuyến của (O).*

116 ([BBN23], 6.6., p. 120). *Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O, R), kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn, B, C là 2 tiếp điểm. 1 điểm M bất kỳ trên đường thẳng đi qua 2 trung điểm P, Q của AB, AC. Kẻ tiếp tuyến MK của (O). Chứng minh $MK = MA$.*

117 ([BBN23], 6.7., p. 121). *Từ 1 điểm A ở ngoài đường tròn (O, R) kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với đường tròn, MO cắt tia AN tại E, NO cắt tia AM tại F. (a) Chứng minh $EF \parallel MN$. (b) Biết $OA = 7, R = 5$, tính khoảng cách từ A đến MN.*

118 ([BBN23], 6.8., p. 121). *Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Điểm M di động trên nửa đường tròn đó, $M \neq A, M \neq B$. Vẽ đường tròn (M) tiếp xúc với AB tại H. Từ A, B kẻ 2 tiếp tuyến AC, BD với (M), C, D là 2 tiếp điểm. (a) Chứng minh C, M, D thẳng hàng. (b) Chứng minh CD là tiếp tuyến của (O). (c) Giả sử CD cắt AB tại K. Chứng minh $OA^2 = OB^2 = OH \cdot OK$.*

119 ([BBN23], 6.9., p. 121). *Cho đường tròn (O), đường kính AB, dây $CD \perp OA$ tại $H \in OA$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua H, DA' cắt BC tại I. Chứng minh: (a) $DI \perp BCm$ $HI = HC$. (b) HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $A'B$.*

120 ([BBN23], 6.10., p. 121). *Cho đường tròn (O) & điểm A cố định nằm trên đường tròn đó. Kẻ tiếp tuyến xAy với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. (a) Chứng minh M, O, trọng tâm, trực tâm ΔAMB thẳng hàng. (b) Gọi H là trực tâm của ΔAMB. Chứng minh tứ giác $OAHB$ là hình thoi. (c) Tìm tập hợp các điểm H khi M thay đổi.*

121 ([BBN23], 6.11., p. 121). *Cho 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng xy, AB không vuông góc với xy. Tìm điểm $M \in xy$ sao cho MB là phân giác của góc giữa 2 đường thẳng AM, xy.*

122 ([BBN23], 6.12., p. 121). *Cho đường thẳng xy & 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với xy. Tìm trên xy điểm M sao cho $\widehat{BMy} = 2\widehat{AMx}$.*

123 ([BBN23], 6.13., p. 121). *Tứ giác $ABCD$ có 4 cạnh tiếp xúc với 1 đường tròn & 2 đường chéo của nó vuông góc với nhau. Chứng minh 1 trong 2 đường chéo là trục đối xứng của tứ giác.*

124 ([BBN23], 6.14., p. 121). *Trong các ΔABC có chung đáy BC & có cùng diện tích S, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

125 ([BBN23], 6.15., p. 122). *Đường tròn (O, r) nội tiếp ΔABC. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với 3 cạnh của tam giác & chia tam giác thành 3 tam giác nhỏ. Gọi r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính của đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh $r_1 + r_2 + r_3 = r$.*

126 ([BBN23], 6.16., p. 122). *Cho đường tròn (I) nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB tại D. Chứng minh: ΔABC vuông tại $C \Leftrightarrow AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$.*

127 ([BBN23], 6.17., p. 122). *Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các tam giác tạo bởi 2 cạnh liên tiếp & 1 đường chéo ta vẽ các đường tròn nội tiếp. Chứng minh các tiếp điểm của chúng với 2 đường chéo tạo thành 1 hình chữ nhật.*

128 ([BBN23], 6.18., p. 122)**.** *Cho $\widehat{xOy}$, 2 điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên Ox, Oy sao cho chu vi ΔOAB không đổi. Chứng minh AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.*

129 ([BBN23], 6.19., p. 122)**.** *Cho $\widehat{xOy} = 90°$, đường tròn (I) tiếp xúc với 2 cạnh Ox, Oy lần lượt tại A, B. 1 tiếp tuyến của (I) tại điểm E cắt Ox, Oy lần lượt tại C, D, $C \in OA, D \in OB$. Chứng minh: $\frac{1}{3}(OA + OB) < CD < \dfrac{1}{2}(OA + OB)$.*

130 ([BBN23], 6.20., p. 122)**.** *Cho đường tròn (O) & điểm M ngoài đường tròn. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với (O). Vẽ đường tròn (M, MA). (a) Chứng minh OA, OB là 2 tiếp tuyến của đường tròn (M, MA). (b) Giả sử OM cắt (M, MA) tại E, F, E nằm giữa O, M. Chứng minh $\widehat{OAE} = \widehat{AFM}$.*

131 ([BBN23], p. 123)**.** *Chứng minh: (a) Mọi đa giác đều luôn ngoại tiếp được 1 đường tròn, i.e., tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác đều. (b) Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được 1 đường tròn $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$.*

132 ([Bìn23], VD12, p. 99)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$, đường cao AH. Điểm E đối xứng với B qua H. Đường tròn có đường kính EC cắt AC ở K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn.*

133 ([Bìn23], VD13, p. 100)**.** *Cho 1 hình vuông 8×8 gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm O của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần & che lấp hoàn toàn)?*

134 ([Bìn23], 63., pp. 100–101)**.** *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M thuộc nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh M là trung điểm CD. (b) Chứng minh $AB = BC + AD$. (c) Giả sử $\widehat{AOM} \ge \widehat{BOM}$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác BCDE. (d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác ABCD có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính R của nửa đường tròn đã cho.*

135 ([Bìn23], 64., p. 101)**.** *Cho ΔABC cân tại A, I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔBIC. (b) Gọi H là trung điểm BC, IK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{HI}{HK}$.*

136 ([Bìn23], 65., p. 101)**.** *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax & nửa đường tròn nằm cùng phía đối với AB), điểm C thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O & vuông góc với AC cắt Ax tại M. Gọi I là giao điểm của MB & CH. Chứng minh $IC = IH$.*

137 ([Bìn23], 66., p. 101)**.** *Cho hình thang vuông ABCD, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, có $\widehat{BMC} = 90°$ với M là trung điểm AD. Chứng minh: (a) AD là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC. (b) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AD.*

138 ([Bìn23], 67., p. 101)**.** *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường vuông góc với OC, cắt nửa đường tròn tại D & E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của $(C; CD)$.*

139 ([Bìn23], 68., p. 101)**.** *Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi d, d' lần lượt là 2 tiếp tuyến tại A, B của đường tròn, $C \in d$ bất kỳ. Đường vuông góc với OC tại O cắt d' tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (O).*

140 ([Bìn23], 69., p. 101)**.** *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn. Qua C kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia Ax, By song song với nhau, cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.*

141 ([Bìn23], 70., pp. 101–102)**.** *Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn, A là tiếp điểm. Điểm M bất kỳ thuộc d. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BM, cắt d tại N. (a) Chứng minh tích $AM \cdot AN$ không đổi khi điểm M chuyển động trên đường thẳng d. (b) Tìm* GTNN *của MN.*

142 ([Bìn23], 71., p. 102)**.** *Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = \alpha$, đường cao $AH = h$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính h. 1 tiếp tuyến bất kỳ ($\ne BC$) của đường tròn (A) cắt 2 tia AB, AC theo thứ tự tại B', C'. (a) Chứng minh $S_{ABC} = S_{AB'C'}$. (b) Trong các ΔABC có $\widehat{A} = \alpha$ & đường cao $AH = h$, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?*

143 ([Bìn+23], 1, p. 28)**.** *Chứng minh: Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì $\widehat{BIC} = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.*

144 ([Bìn+23], 2, p. 28)**.** *Chứng minh: Nếu I nằm trong ΔABC & $\widehat{BIC} = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2}$, $\widehat{AIC} = 90° + \dfrac{\widehat{B}}{2}$ thì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.*

145 ([Bìn+23], 3, p. 28)**.** *Chứng minh: Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{A}$ của ΔABC thì $\widehat{BJC} = 90° - \dfrac{\widehat{A}}{2}$.*

146 ([Bìn+23], 4, p. 28)**.** *Cho ΔABC, đặt $BC = a, CA = b, AB = c$, $a + b + c = 2p$, r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích ΔABC. Chứng minh: $r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2} = (p - b)\tan\dfrac{B}{2} = (p - c)\tan\dfrac{C}{2}$, $S = pr$.*

147 ([Bìn+23], 5, p. 28). *Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, AC tại F, E. Chứng minh: $AE = AF = \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.*

148 ([Bìn+23], VD1, p. 29). *Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$, đường tròn (I) tiếp xúc với 2 cạnh Ox, Oy tại A, B. 1 tiếp tuyến của đường tròn (I) tại điểm E cắt Ox, Oy tại C, D.*

149 ([Bìn+23], VD2, p. 29). *Cho $\widehat{xOy}$, 2 điểm A, B lần lượt chuyển động trên Ox & Oy sao cho chu vi ΔOAB không đổi. Chứng minh AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.*

150 ([Bìn+23], VD3, p. 29). *Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm E trên cạnh BC & điểm F trên cạnh CD sao cho $AB = 3BE = 2DF$. Chứng minh EF tiếp xúc với cung tròn tâm A, bán kính AB.*

151 ([Bìn+23], VD4, p. 30). *Cho đường tròn (O, R), & đường thẳng a cắt đường tròn tại A, B. Gọi M là điểm trên a & nằm ngoài đường tròn, qua M kẻ 2 tiếp tuyến MC, MD. Chứng minh khi M thay đổi trên a, đường thẳng CD luôn đi qua 1 điểm cố định.*

152 ([Bìn+23], VD5, p. 31). *Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I dựng đường thẳng vuông góc với IA cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh: (a) $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BI^2}{CI^2}$. (b) $BM \cdot AC + CN \cdot AB + AI^2 = AB \cdot AC$.*

153 ([Bìn+23], VD6, p. 31). *Cho ΔABC, D, E, F theo thứ tự là 3 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với 3 cạnh BC, CA, AB, H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh DH là tia phân giác của $\widehat{BHC}$.*

154 ([Bìn+23], VD7, p. 32). *Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. D, E lần lượt là giao điểm của đường thẳng BI, CI với cạnh AC, AB. Chứng minh ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow BI \cdot CI = \frac{1}{2}BD \cdot CF$.*

155 ([Bìn+23], VD8, p. 32). *Cho đường tròn (O, R) & điểm M cách tâm O 1 khoảng bằng $3R$. Từ M kẻ 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại A, B, gọi I, E lần lượt là trung điểm MA, MB. Tính khoảng cách từ O đến IE.*

156 ([Bìn+23], VD9, p. 33). *Cho ΔABC cân tại A. Gọi O là trung điểm BC, dựng đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại D, E. M là điểm chuyển động trên cung nhỏ $\widehat{DE}$, tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh: (a) $BC^2 = 4BP \cdot CQ$. Từ đó xác định vị trí của M để diện tích ΔAPQ đạt* GTLN. *(b) Nếu $BC^2 = 4BP \cdot CQ$ thì PQ là tiếp tuyến.*

157 ([Bìn+23], VD10, p. 34). *Cho đường tròn (O), điểm M ở ngoài đường tròn. Qua M kẻ 2 tiếp tuyến cắt đường tròn tại A, B, $MA > MB$, gọi CD là đường kính vuông góc với AB, đường thẳng MC, MD cắt đường tròn tại E, K, giao điểm của DE, CK là H, I là trung điểm MH. Chứng minh IE, IK là 2 tiếp tuyến của đường tròn (O).*

158 ([Bìn+23], VD11, p. 34). *Cho ΔABC, đường cao AH. Gọi AD, AE là đường phân giác của 2 góc $\widehat{BAH}, \widehat{CAH}$. Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp ΔABC trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE.*

159 ([Bìn+23], VD12, p. 35). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, 3 tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi M là trung điểm AC, đường thẳng MI cắt cạnh AB tại N, đường thẳng DF cắt đường cao AH của ΔABC tại P. Chứng minh ΔANP cân.*

160 ([Bìn+23], VD13, p. 36). *Tính $\widehat{A}$ của ΔABC, biết đỉnh B cách đều tâm 2 đường tròn bàng tiếp của $\widehat{A}, \widehat{B}$ của ΔABC.*

161 ([Bìn+23], VD14, p. 36). *Cho ΔABC có $AB = 2AC$ & đường phân giác AD. Gọi r, r_1, r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta ABD$. Chứng minh $AD = \dfrac{pr}{3}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{2}{r_2}\right) - p$ với p là nửa chu vi ΔABC.*

162 ([Bìn+23], VD15, p. 37). *Cho đường tròn (O) & điểm A cố định nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB & cát tuyến qua A cắt đường tròn tại C, D, $AC < AD$. Hỏi trọng tâm ΔBCD chạy trên đường nào khi cát tuyến ACD thay đổi?*

163 ([Bìn+23], 5.1., p. 38). *Cho nửa đường tròn bán kính $AB = 2R$. C là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ C đến AB là h. Tính bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC theo R, h.*

164 ([Bìn+23], 5.2., p. 38). *Cho ΔABC, D là điểm trên BC. Đường tròn nội tiếp ΔABD tiếp xúc với cạnh BC tại E, đường tròn nội tiếp ΔADC tiếp xúc với cạnh BC tại F, đồng thời 2 đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng $d \neq BC$, đường thẳng d cắt AD tại I. Chứng minh $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.*

165 ([Bìn+23], 5.3., p. 38). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính BH cắt cạnh AB tại M, đường tròn đường kính HC cắt cạnh AC tại N. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính BH, CH.*

166 ([Bìn+23], 5.4., p. 38). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao AK. Gọi H là trực tâm ΔABC, đường tròn đường kính AH cắt 2 cạnh AB, AC tại D, E. Chứng minh KD, KE là 2 tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.*

167 ([Bìn+23], 5.5., p. 38). *Cho đường tròn (O) & điểm M ở ngoài đường tròn. Từ M kẻ tiếp tuyến MA, MB với đường tròn, A, B là 2 tiếp điểm, tia OM cắt đường tròn tại C, tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến MA, MB tại P, Q. Chứng minh diện tích ΔMPQ lớn hơn $\frac{1}{2}$ diện tích ΔABC.*

168 ([Bìn+23], 5.6., p. 38). *Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh a, đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh a bằng h, xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

169 ([Bìn+23], 5.7., p. 38). *Cho ΔABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với IA cắt 2 cạnh AB, AC tại D, E. Chứng minh $\dfrac{BD}{CE} = \left(\dfrac{IB}{IC}\right)^2$.*

170 ([Bìn+23], 5.8., p. 38). *Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C. Từ A kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O), M, N là 2 tiếp điểm. Đường thẳng MN cắt AO tại H, gọi E là trung điểm BC. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔOHE nằm trên 1 đường thẳng cố định.*

171 ([Bìn+23], 5.9., p. 39). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 30^\circ$, BC là cạnh nhỏ nhất. Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O, I là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp ΔABC. Chứng minh $OI = DE$ & $OI \perp DE$.*

172 ([Bìn+23], 5.10., p. 39). *Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (I, r), kẻ các tiếp tuyến với đường tròn & song song với 3 cạnh ΔABC. Các tiếp tuyến này tạo với 3 cạnh ΔABC thành 3 tam giác nhỏ, gọi diện tích 3 tam giác nhỏ là S_1, S_2, S_3 & diện tích ΔABC là S. Tìm* GTNN *của biểu thức $\dfrac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.*

173 ([Bìn+23], 5.11., p. 39). *Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, I_A là tâm đường tròn bàng tiếp $\widehat{A}$ & M là trung điểm BC. Gọi H, D là hình chiếu của I, I_A trên cạnh BC. Chứng minh M là trung điểm DH, từ đó suy ra đường thẳng MI đi qua trung điểm AH.*

174 ([Bìn+23], 5.12., p. 39). *Cho đường tròn (O, r) & điểm A cố định trên đường tròn. Qua A dựng tiếp tuyến d với đường tròn (O, r). M là điểm chuyển động trên d, từ M kẻ tiếp tuyến đến đường tròn (O, r) có tiếp điểm là $B \neq A$. Tâm của đường tròn ngoại tiếp & trực tâm của ΔAMB chạy trên đường nào?*

175 ([Bìn+23], 5.13., p. 39). *Cho nửa đường tròn đường kính AB, từ điểm M trên đường tròn kẻ tiếp tuyến d. Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên d. Chứng minh $AH + BK$ không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AH, BK, AB.*

176 ([Bìn+23], 5.14., p. 39). *Cho ΔABC, điểm M trong tam giác, gọi H, D, E là hình chiếu của M thứ tự trên BC, CA, AB. Xác định vị trí của M sao cho giá trị của biểu thức $\dfrac{BC}{MH} + \dfrac{CA}{MD} + \dfrac{AB}{ME}$ đạt* GTNN.

177 ([Bìn+23], 5.15., p. 39). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi O, I là tâm đường tròn ngoại & nội tiếp ΔABC. Biết ΔBIO vuông tại I. Chứng minh $\dfrac{BC}{5} = \dfrac{CA}{4} = \dfrac{AB}{3}$.*

4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn

178 ([BBN23], H1, p. 126). *Cho ΔABC. 2 đường tròn $(B, AB), (C, AC)$ có thể tiếp xúc nhau được không?*

179 ([BBN23], H2, p. 126). Đ/S? *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O', r)$ có $R > r$. (a) Nếu $OO' < R + r$ thì 2 đường tròn cắt nhau. (b) Nếu $OO' = R - r$ thì 2 đường tròn tiếp xúc nhau. (c) Nếu 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau thì $OO' = R + r$. (d) Nếu $OO' > R + r$ thì 2 đường tròn ngoài nhau.*

180 ([BBN23], VD1, p. 127). *Cho đường tròn (O, OA) & đường tròn (O', OA). (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O), (O')$. (b) Dây AD của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở C. Chứng minh $AC = CD$.*

181 ([BBN23], VD2, p. 127). *Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O, R), (O', R')$ trong 2 trường hợp: (a) $R = 6, R' = 4, d = OO' = 2$. (b) $R = 5, R' = 3, d = 6$.*

182 ([BBN23], VD3, p. 127). *Cho 2 đường tròn $(O, 6), (O', 8)$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Tính độ dài dây chung AB & khoảng cách từ O đến AB.*

183 ([BBN23], VD4, p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc với nhau tại A. Qua A vẽ cát tuyến cắt $(O), (O')$ lần lượt tại $M \neq A, N \neq A$. Chứng minh 2 tiếp tuyến với $(O), (O')$ lần lượt tại M, N song song với nhau.*

184 ([BBN23], VD5, p. 128). *Cho ΔABC cân tại A. (a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp trong $\widehat{A}$ & đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc nhau tại 1 điểm thuộc BC. (b) Tính bán kính của 2 đường tròn, biết $AB = 8, BC = 6$.*

185 ([BBN23], VD6, p. 129). *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O', R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, $M \in (O), N \in (O')$. Tiếp tuyến chung tại A của 2 đường tròn cắt MN tại E. (a) Chứng minh E là trung điểm của MN. (b) Chứng minh ΔAMN vuông & MN tiếp xúc với đường tròn đường kính OO'. (c) Tính MN, biết bán kính của $(O), (O')$ lần lượt là $R = 4, R' = 5$.*

186 ([BBN23], VD7, p. 129). *Cho ΔABC. Dựng 3 đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau.*

187 ([BBN23], VD8, p. 130). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ngoài nhau, AB, CD là 2 tiếp tuyến chung ngoài, đường thẳng AD cắt $(O), (O')$ theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $AM = DN$.*

188 ([BBN23], VD9, p. 130). *Cho 2 đường tròn $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$ cắt nhau tại A, B, O_1, O_2 nằm khác phía đối với AB. 1 cát tuyến PAQ quay quanh A. Lấy $P \in (O_1), Q \in (O_2)$ sao cho A nằm giữa P, Q. Xác định vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp: (a) PQ có độ dài lớn nhất. (b) Chu vi ΔBPQ đạt* GTLN. *(c) Diện tích ΔBPQ đạt* GTLN.

189 ([BBN23], 7.1., p. 131). *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O', R')$, độ dài đường nối tâm $OO' = d$. Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn vào bảng:*

R	R'	d	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
7 cm	2 cm	10 cm	
7 cm	3 cm	4 cm	
6 cm	2 cm	7 cm	

190 ([BBN23], 7.2., p. 131). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B, O, O' nằm khác phía đối với AB. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C & cắt (O') tại D. Cát tuyến EAF cắt (O) tại E, cắt (O') tại F. (a) Chứng minh $\widehat{CEB} = \widehat{DFB} = 90°$. (b) Chứng minh $OO' \parallel CD$. Tính CD biết $AB = 9.6$ cm, $OA = 8$ cm, $O'A = 6$ cm. (c) Dựng qua A cát tuyến EAF, $E \in (O), F \in (O')$, sao cho $AE = AF$.*

191 ([BBN23], 7.3., p. 132). *Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi 3 tiếp điểm $(O_1), (O_2)$ là A, $(O_2, (O_3)$ là B, $(O_3), (O_1)$ là C. 2 tia AB, AC kéo dài cắt (O_3) lần lượt tại P, Q. Chứng minh P, Q, O_3 thẳng hàng.*

192 ([BBN23], 7.4., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O, 2$ cm$)$ & $(O', 3$ cm$)$ có khoảng cách giữa 2 tâm là* 6 cm. *Gọi E, F tương ứng là giao của tiếp tuyến chung trong & ngoài với đường thẳng OO'. (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn. (b) Tính độ dài đoạn EF.*

193 ([BBN23], 7.5., p. 132). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O. 1 đường tròn (O') cắt đường tròn nhỏ tâm O lần lượt tại A, B & cắt đường tròn còn lại lần lượt tại C, D. Chứng minh $AB \parallel CD$.*

194 ([BBN23], 7.6., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O', r)$ cắt nhau ở A, B sao cho O, O' thuộc 2 nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng 1 cát tuyến PAQ, $P \in (O, R), Q \in (O', r)$, sao cho A nằm giữa P, Q & $2AP = AQ$.*

195 ([BBN23], 7.7., p. 132). *Cho 2 đường tròn bằng nhau $(O), (O')$ có bán kính R cắt nhau tại A, B. Từ O, O' dựng $Ox, O'y$ song song với nhau & cùng thuộc nửa mặt phẳng bở OO', 2 tia này cắt (O) tại C & (O') tại D. Gọi C' đối xứng với C qua O, D' đối xứng với D qua O'. (a) Chứng minh $CD', OO', C'D$ đồng quy. (b) Tìm tập hợp trung điểm M của CD khi $Ox, O'y$ thay đổi. (c) Tính góc hợp bởi tiếp tuyến tại A của (O) với OO' biết $OO' = \frac{3}{2}R$.*

196 ([BBN23], 7.8., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O, 3$ cm$)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O', 1$ cm$)$ tại A. Vẽ 2 bán kính $OB, O'C$ song song với nhau thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ OO'. (a) Tính $\widehat{BAC}$. (b) Gọi I là giao điểm của BC, OO'. Tính độ dài OI.*

197 ([BBN23], 7.9., p. 132). *Cho đường tròn $(O, R), (I, 2R)$ đi qua O. 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn này là ADB, AEC. (a) Xác định dạng & giải ΔABC. (b) Xác định dạng & giải tứ giác $BDEC$.*

198 ([BBN23], 7.10., p. 133). *Cho 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại H, K. Đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A, cắt (O_2) tại $B \neq H$, O_2H cắt (O_1) tại C & cắt (O_2) tại $D \neq H$. Chứng minh 3 đường thẳng AC, BD, HK đồng quy tại 1 điểm.*

199 ([BBN23], 7.11., p. 133). *Cho 2 đường tròn $(O, R), (O', R')$ tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài AB, $A \in (O, R)$, $B \in (O', R')$. Đường tròn (I, r) tiếp xúc với AB & 2 đường tròn $(O, R), (O', R')$. Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{R'}}$.*

200 ([BBN23], 7.12., p. 133). *Cho ΔABC. Vẽ 3 đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau tại M, N, P. Chứng minh đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P là đường tròn nội tiếp ΔABC.*

201 ([BBN23], 7.13., p. 133). *Cho 1 tứ giác. Vẽ các đường tròn có đường kính là 4 cạnh của tứ giác đó. Chứng minh 4 đường thẳng chứa các dây chung của 4 đường tròn cắt nhau tạo thành 1 hình bình hành.*

202 ([BBN23], 7.14., p. 133). *Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ bằng nhau & ở ngoài nhau. Dựng 1 đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc tiếp xúc trong) với cả 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$.*

203 ([BBN23], 7.15., p. 133). *Cho 3 đường tròn không biết tâm, tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C. Tìm tâm của chúng chỉ bằng thước thẳng.*

204 ([BBN23], 7.16., p. 133). *Cho đường tròn (O) & đường thẳng d không cắt (O). Gọi $P \in d$ là điểm cố định. Dựng đường tròn (K) tiếp xúc với (O) & tiếp xúc với d tại P.*

205 ([Bìn+23], VD1, p. 42). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B. Qua A kẻ cát tuyến CAD & EAF, $C, E \in (O)$, $D, F \in (O')$, sao cho AB là phân giác của $\widehat{CAF}$. Chứng minh $CD = EF$.*

206 ([Bìn+23], VD2, pp. 42–43). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & 4 đường tròn $(A,R_A),(B,R_B),(C,R_C),(D,R_D)$ sao cho $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$. Gọi d_1,d_3 là 2 tiếp tuyến chung ngoài của $(A,R_A),(C,R_C)$, d_2,d_4 là 2 tiếp tuyến chung ngoài của $(B,R_B),(D,R_D)$. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường thẳng d_1,d_2,d_3,d_4.*

207 ([Bìn+23], VD3, p. 43). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ ngoài nhau, AB,CD là 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn, đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M, cắt đường tròn (O') tại N. Chứng minh $AM = DN$.*

208 ([Bìn+23], VD4, p. 44). *Cho 3 đường tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$ tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi các tiếp điểm của $(O_1),(O_2)$ là A, của $(O_2),(O_3)$ là B, của $(O_3),(O_1)$ là C. AB,AC kéo dài cắt đường tròn (O_3) tại Q,P. Chứng minh P,O_3,Q thẳng hàng.*

209 ([Bìn+23], VD5, p. 44). *Cho 2 đường tròn $(O,R),(O',R')$ tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài AB, $A\in(O),B\in(O')$. Đường tròn (I,r) tiếp xúc với AB & 2 đường tròn $(O),(O')$. Chứng minh: (a) $AB = 2\sqrt{RR'}$. (b) $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{R'}}$.*

210 ([Bìn+23], VD6, p. 45). *Cho 3 đường tròn $(A,a),(B,b),(C,c)$ tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm D của đường tròn $(A,a),(B,b)$, kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn (C,c) tại M,N. Tính MN theo a,b,c.*

211 ([Bìn+23], VD7, p. 45). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại A,B. Trong nửa mặt phẳng bờ OO' có chứa điểm B, kẻ 2 bán kính $OC \parallel O'D$. Chứng minh B là trực tâm của ΔACD.*

212 ([Bìn+23], VD8, p. 46). *Cho 2 đường tròn $(O,R),(O',R')$ tiếp xúc ngoài tại A, $\widehat{xOy} = 90°$ thay đổi luôn đi qua A, cắt đường tròn $(O,R),(O',R')$ tại B,C. Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Xác định vị trí của B,C để AH có độ dài lớn nhất.*

213 ([Bìn+23], VD9, p. 47). *Cho 2 đường tròn $(O,R),(O',R')$, $R > R'$ cắt nhau tại A,B. Kẻ đường kính AC & đường kính AD. Tính độ dài BC,BD biết $CD = a$.*

214 ([Bìn+23], VD10, p. 47). *Cho ΔABC. Tìm điểm M sao cho $\Delta MAB,\Delta MBC,\Delta MCA$ có chu vi bằng nhau.*

215 ([Bìn+23], VD11, p. 48). *Cho đường tròn (O) & dây cung AB. M là điểm trên AB. Dựng đường tròn (O_1) qua A,M & tiếp xúc với (O), đường tròn (O_2) qua B,M & tiếp xúc với (O), 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là N. Chứng minh $\widehat{MNO} = 90°$.*

216 ([Bìn+23], VD12, p. 48). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong CD & tiếp tuyến chung ngoài AB, $A,C\in(O)$, $B,D\in(O')$. Chứng minh AC,BD,OO' đồng quy.*

217 ([Bìn+23], VD13, p. 49). *Dựng 2 đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là 2 điểm A,B cho trước, sao cho 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm M cho trước.*

218 ([Bìn+23], 6.1., p. 50). *Cho đường tròn (O,R) ngoại tiếp ΔABC đều. Đường tròn (O') tiếp xúc với 2 cạnh AB,AC & đường tròn (O,R). Tính khoảng cách từ O' đến B theo R.*

219 ([Bìn+23], 6.2., p. 50). *Cho nửa đường tròn đường kính AB, điểm C trên nửa đường tròn sao cho $CA < CB$, H là hình chiếu của C trên AB. Gọi I là trung điểm CH, đường tròn $(I,CH/2)$ cắt nửa đường tròn tại D & cắt 2 cạnh CA,CB thứ tự tại M,N, đường thẳng CD cắt AB tại E. Chứng minh: (a) $CMHN$ là hình chữ nhật. (b) E,I,M,N thẳng hàng.*

220 ([Bìn+23], 6.3., p. 50). *Cho 3 đường tròn O_1,O_2,O_3 có cùng bán kính R cắt nhau tại điểm O cho trước. A,B,C là 3 giao điểm còn lại của 3 đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔABC có bán kính R.*

221 ([Bìn+23], 6.4., p. 50). *3 đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm O, từng đôi cắt nhau tại điểm thứ 2 là A,B,C. Chứng minh O là trực tâm ΔABC.*

222 ([Bìn+23], 6.5., p. 50). *Cho 2 đường tròn $(O_1),(O_2)$ cắt nhau tại A,B, kẻ dây AM của đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường tròn (O_2) tại A, kẻ dây AN của (O_2) tiếp xúc với đường tròn (O_1) tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = AB$. Chứng minh 4 điểm A,M,N,D nằm trên 1 đường tròn.*

223 ([Bìn+23], 6.6., p. 50). *Cho đường tròn (O,R), 1 điểm A trên đường tròn & đường thẳng d không đi qua A. Dựng đường tròn tiếp xúc với (O,R) tại A & tiếp xúc với đường thẳng d.*

224 ([Bìn+23], 6.7., p. 51). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ có cùng bán kính R sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại A,B. Tính bán kính của đường tròn tâm I tiếp xúc với 2 cung nhỏ $\widehat{AO},\widehat{AO'}$ đồng thời tiếp xúc với OO'.*

225 ([Bìn+23], 6.8., p. 51). *Cho đường tròn (O) & dây AB cố định, điểm M tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng AB. Qua A,M dựng đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Qua B,M dựng đường tròn tâm J tiếp xúc với (O) tại B. 2 đường tròn tâm I,J cắt nhau tại điểm thứ 2 N. Chứng minh MN luôn đi qua 1 điểm cố định.*

226 ([Bìn+23], 6.9., p. 51). *Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a cho trước & 2 tia Ax,By vuông góc với AB, nằm về cùng 1 phía đối với AB. Gọi $(O),(O')$ là 2 đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời: (a) (O) tiếp xúc với (O'). (b) Đường tròn (O) tiếp xúc với Ax,AB. (c) Đường tròn (O') tiếp xúc với By & tiếp xúc với BA. Tính* GTLN *của diện tích hình thang $HOO'E$, trong đó H,E là hình chiếu của O,O' trên AB.*

227 ([Bìn+23], 6.10., p. 51). *Cho 2 đường tròn $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. 1 đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$. Giả sử MN là đường kính của đường tròn (O) sao cho $MN \parallel OO'$. Gọi H là giao điểm của MO_2,NO_1. Chứng minh điểm H thuộc 1 đường thẳng cố định.*

5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

228 ([Bìn23], VD14, p. 102)**.** *Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB & 2 tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By lần lượt tại C, D. Gọi N là giao điểm của AD & BC. Chứng minh $MN \perp AB$.*

229 ([Bìn23], VD15, p. 103)**.** *Cho (O), điểm K nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ 2 tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB tại E. Chứng minh: (a) $\Delta KBC \backsim \Delta OBE$. (b) $CK \perp OE$.*

230 ([Bìn23], 72., p. 103)**.** *Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Vẽ 2 tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn & tia $Oz \perp AB$, 3 tia Ax, By, Oz cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Gọi E là điểm bất kỳ của nửa đường tròn. Qua E vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax, By, Oz theo thứ tự ở C, D, M. Chứng minh khi điểm E thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì: (a) Tích $AC \cdot BD$ không đổi. (b) Điểm M chạy trên 1 tia. (c) Tứ giác $ACDB$ có diện tích nhỏ nhất khí nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.*

231 ([Bìn23], 73., p. 104)**.** *Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về 1 phía của AB 2 tia $Ax \parallel By$. (a) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với đoạn thẳng AB & tiếp xúc với 2 tia Ax, By. (b) Tính $\widehat{AOB}$. (c) Gọi 3 tiếp điểm của đường tròn (O) với Ax, By, AB theo thứ tự là M, N, H. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AB. (d) Tìm vị trí của 2 tia Ax, By để $HM = HN$?*

232 ([Bìn23], 74., p. 104)**.** *Cho hình thang vuông $ABCD$, $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, tia phân giác của $\widehat{C}$ đi qua trung điểm I của AD. (a) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IA). (b) Cho $AD = 2a$. Tính $AB \cdot CD$ theo a. (c) Gọi H là tiếp điểm của BC với đường tròn (I). K là giao điểm của AC, BD. Chứng minh $KH \parallel CD$.*

233 ([Bìn23], 75., p. 104)**.** *Cho đường tròn tâm O có đường kính AB, điểm D nằm trên đường tròn. 2 tiếp tuyến của đường tròn tại A, D cắt nhau ở C. Gọi E là hình chiếu của D trên AB, gọi I là giao điểm của BC, DE. Chứng minh $ID = IE$.*

234 ([Bìn23], 76., p. 104)**.** *Cho ΔABC cân tại A, O là trung điểm BC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại H, K. 1 tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt 2 cạnh AB, AC ở M, N. (a) Cho $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$. Tính $\widehat{MON}$. (b) Chứng minh OM, ON chia tứ giác $BMNC$ thành 3 tam giác đồng dạng. (c) Cho $BC = 2a$. Tính $BM \cdot CN$. (d) Tìm vị trí tiếp tuyến MN để $BM + CN$ nhỏ nhất.*

235 ([Bìn23], 77., p. 104)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $BH = 20$ cm, $CH = 45$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ 2 tiếp tuyến BM, CN với đường tròn, $M \neq H, N \neq H$ là 2 tiếp điểm. (a) Tính diện tích tứ giác $BMNC$. (b) Gọi K là giao điểm của CN, AH. Tính AK, KN. (c) Gọi I là giao điểm của AM, BC. Tính IB, IM.*

236 ([Bìn23], 78., p. 105)**.** *Cho đường tròn $(O, 6$ cm$)$. 1 điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn vuông góc với nhau, B, C là 2 tiếp điểm. Trên 2 cạnh AB, AC của $\widehat{A}$, lấy 2 điểm D, E sao cho $AD = 4$ cm, $AE = 3$ cm. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

237 ([Bìn23], 79., p. 105)**.** *Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Với tâm B & bán kính a, vẽ cung AC nằm trong hình vuông. Qua điểm E thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung AC, cắt AD, CD theo thứ tự tại M, N. (a) Tính chu vi ΔDMN. (b) Tính số đo $\widehat{MBN}$. (c) Chứng minh $\frac{2a}{3} < MN < a$.*

238 ([Bìn23], 80., p. 105)**.** *Cho hình vuông $ABCD$. 1 đường tròn tâm O tiếp xúc với 2 đường thẳng AB, AD & cắt mỗi cạnh BC, CD thành 2 đoạn thẳng có độ dài* 2 cm, 23 cm. *Tính bán kính đường tròn.*

6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác

7 Miscellaneous

Tài liệu

[BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.