

Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 7 năm 2024

Mục lục

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1 Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác | 1 |
| 2 Giải Tam Giác | 1 |
| 3 Miscellaneous | 2 |
| Tài liệu | 2 |

1 Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

- [1] $\forall \alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, $\sin \alpha \in [-1; 1]$, $\cos \alpha \in [-1; 1]$. [2] $\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \Leftrightarrow \alpha$ nhọn. $\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (90^\circ; 180^\circ) \Leftrightarrow \alpha$ tù.
- [3] Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ hay $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [4] Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ hay $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.
- [5] Công thức tính diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1. Cho $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$. Tìm các khoảng giá trị của α để các hàm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ lần lượt bằng 0, âm, dương.
- 2 ([Hải+22], BD1, p. 22). Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Chứng minh $AD^2 < bc$.
- 3 ([Hải+22], VD1, p. 22). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , 2 phân giác trong BE, CF cắt đường cao AH lần lượt tại P, Q . M là trung điểm BC . Chứng minh $PE + QF < AM$.
- 4 ([Hải+22], VD2, p. 22). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , $D \in AB$ thỏa $BH = BD = CD$. Chứng minh $\frac{AD}{BD} = \sqrt[3]{2} - 1$.
- 5 ([Hải+22], VD3, p. 23). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a+b+c)$.
- 6 ([Hải+22], BD1, p. 23). $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 2\hat{B}$. Chứng minh $a^2 = b^2 + bc$.
- 7 ([Hải+22], VD4, p. 23). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy $D \in AC$ thỏa $\hat{C} = 2\widehat{CBD}$. Chứng minh $AB + AD = BC \Leftrightarrow \hat{C} = 30^\circ$ hoặc $\hat{C} = 45^\circ$.
- 8 ([Hải+22], VD5, p. 23). Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Giả sử $\hat{B} + \widehat{AMC} = 90^\circ$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông hoặc cân.
- 9 ([Hải+22], VD6, p. 24). Cho $\triangle ABC$, tâm đường tròn nội tiếp I . IA, IB, IC cắt (ABC) lần lượt tại D, E, F . Chứng minh $\frac{1}{S_{DBC}} + \frac{1}{S_{EAC}} + \frac{1}{S_{FAB}} \geq \frac{9}{S_{ABC}}$.

2 Giải Tam Giác

- [1] Cho a, b, c : áp dụng định lý cosin: $\hat{A} = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\hat{B} = \arccos \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\hat{C} = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [2] Cho b, c, \hat{A} : áp dụng định lý cosin: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, $\hat{B} = \arccos \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\hat{C} = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [3] Cho a, \hat{B}, \hat{C} : $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C}$, áp dụng định lý sin: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$.

*e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, website: <https://nqbh.github.io>, Bến Tre, Việt Nam.

10. Chứng minh công thức Heron.
11. Nếu chỉ cho số đo 3 góc của 1 tam giác, có thể giải tam giác đó không? Nếu có thì mô tả tập nghiệm các tam giác thỏa mãn.
12. Nếu cho trước độ dài 2 cạnh & số đo 1 góc không nằm giữa 2 cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?
13. Nếu cho trước độ dài 1 cạnh & số đo 2 góc không cùng kề với cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?
- 14 (Program: Solve triangle). (a) Nêu các bộ 3 yếu tố cần cho trước về cạnh & góc của 1 tam giác để tam giác đó có thể giải được. (b) Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.
15. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tìm công thức tính độ dài 3 đường trung tuyến & 6 góc tạo bởi 3 đường trung tuyến đó.
16. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tìm công thức tính độ dài 3 đường phân giác.
17. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tìm công thức tính độ dài 3 đường cao & 6 góc tạo bởi 3 đường cao đó.

3 Miscellaneous

18.

Tài liệu

- [Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.