

Problem: Trigonometry In Triangles

Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary-STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem_set_Q_of_trigonometry.pdf).¹ [TeX]².

Mục lục

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông | 1 |
| 2 | Miscellaneous | 2 |
| | Tài liệu | 2 |

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. $\triangle ABC$ vuông tại A : $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, $b' := CH$, $c' := BH$, $h := AH$.

Tính chất. [1] $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. [2] Định lý Pythagore thuận & đảo: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. [3] $h^2 = b'c'$. [4] $ah = bc = 2S_{ABC}$. [5] $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bin23], Ví dụ 1, p. 84). Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.

Giải. Kẻ $BE \parallel AC$, $E \in CD$. Gọi BH là đường cao của hình thang. $BE \parallel AC$ & $AC \perp BD \Rightarrow BE \perp BD$. Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle BDH$ vuông tại H : $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm. Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ vào $\triangle BDE$ vuông tại B : $DE = \frac{BD^2}{DH} = \frac{15^2}{9} = \frac{225}{9} = 25$ cm. $AB \parallel CE$ & $AC \parallel BE \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CE \Rightarrow AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$ cm². \square

Bài toán 2 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 85). Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

Giải. Gọi AH, BK là 2 đường cao của hình thang $ABCD$. Đặt $x := AB = AH = BK$. Tứ giác $ABKH$ có $AB \parallel HK$, $AH \parallel BK$ (vì $AH \perp CD$ & $BK \perp CD$) nên $ABKH$ là hình bình hành, mà $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật, kết hợp với $AB = AH$, suy ra $ABKH$ là hình vuông, nên $HK = AB = x$ (1). $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AD = BC$ & $\widehat{C} = \widehat{D}$, suy ra $\triangle AHD = \triangle BKC$ (2 tam giác vuông lần lượt tại H, K , trường hợp cạnh huyền–góc nhọn³) $\Rightarrow DH = CK$ (2). Từ (1) & (2), suy ra: $DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{10 - x}{2} \Rightarrow CH = CK + HK = \frac{10 - x}{2} + x = \frac{10 + x}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng $h^2 = b'c'$ cho $\triangle ACD$ vuông tại A (đường chéo $AC \perp AD$: giả thiết): $AH^2 = DH \cdot CH \Leftrightarrow x^2 = \frac{10 + x}{2} \cdot \frac{10 - x}{2} = \frac{100 - x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{100}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Vậy đường cao của hình thang $ABCD$ bằng $2\sqrt{5}$ cm. \square

Bài toán 3 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 85). Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

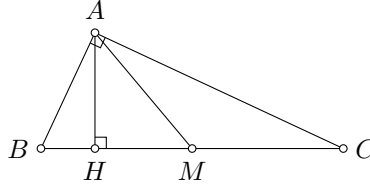
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary-STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary-STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

³Hoặc có thể lý luận: $\triangle AHD = \triangle BKC$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông) vì 2 tam giác vuông này có $AD = BC$ (2 cạnh bên của hình thang cân $ABCD$) & $AH = BK$ (cùng bằng chiều cao của hình thang $ABCD$).

Giải. Xét $\triangle ABC$, $AB < AC$, M là trung điểm BC , $AH \perp BC$, $H \in BC$, như hình:



Đặt $x := AM$, $BC = 2AM = 2x$, $AH = AM - 7 = x - 7$. Áp dụng định lý Pythagore & hệ thức lượng $bc = ah$ cho $\triangle ABC$ vuông tại A : $b^2 + c^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2$, $bc = ah = 2x(x - 7)$. Giải hệ phương trình:⁴

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4x^2, \\ bc = 2x(x - 7). \end{cases}$$

Có $a + b + c = 72 \Leftrightarrow b + c = 72 - a = 72 - 2x$. Từ hệ phương trình vừa thu được: $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4x^2 + 4x(x - 7) = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 2x + 4x^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 4x^2 + 260x - 72^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0 \Leftrightarrow x = 16 \vee x = -81$ (loại vì $x > 0$) $\Rightarrow x = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = x(x - 7) = 16(16 - 7) = 144 \text{ cm}^2$. \square

2 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

⁴Xem cách giải của dạng tổng quát của hệ phương trình này ở bài viết sau của tác giả: *Problem & Solution: System of Equations of 2 Variables – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình 2 Biến*: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/miscellaneous/system_of_equations_2_variables/problem/NQBH_system_of_equations_2_variables_problem.pdf.