Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.tex.
- *A Substitution & Its Application To Prove Inequalities – 1 Cách Đổi Biến & Ứng Dụng Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.tex.

Mục lục

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Basic

Resources – Tài nguyên.

- [AQ25]. Nguyễn Tuấn Anh, Cao Minh Quang. *Bất Đẳng Thức Dưới Góc Nhìn của Các Bổ Đề.*
- [HLP52]. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities.*
- [DCA20]. Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9.*
- Phạm Kim Hùng. *Sáng Tạo Bất Đẳng Thức.*
- [KH22]. Phan Huy Khải, Đoàn Thanh Hương. *Các Phương Pháp Hiệu Quả Giải Bài Toán Về Bất Đẳng Thức & Giá Trị Lớn Nhất Nhỏ Nhất.*
- Trần Phương. *Những Viên Kim Cương Của Bất Đẳng Thức.*
- [Sơn+25]. Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10.*
- Nguyễn Văn Huyện's WordPress blog. The Simplest Solution Is The Best Solution.
- Lê Việt Hải's WordPress blog.

1.1 Motivation

Question 1. *Why do we need to learn elementary inequality in Elementary Mathematics? – Tại sao chúng ta cần học bất đẳng thức sơ cấp ở Toán Sơ Cấp?*

Answer. Some reasons:

1. To sharp computation skills on algebraic manipulations – Để mài bén kỹ năng tính toán về các biến đổi đại số.
2. To become better at mathematics – Để trở nên giỏi Toán hơn.
3. To become mathematical analyst – Để trở thành nhà Toán học về Giải tích .
4. To become mathematical optimist – Để trở thành nhà Toán học về Tối ưu.

See also [Tao07]. □

1.2 2-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 2 biến

1. Sum $S(a,b) = S_1(a,b) \coloneqq a+b$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 2 biến a,b, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}S(a,b)$.
2. Product $P(a,b) \coloneqq ab$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 2 biến a,b, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a = b = \sqrt{P(a,b)}$.
3. Sum of squares $S_2(a,b) \coloneqq a^2+b^2$.

- Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 2 biến a,b, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=\sqrt{\frac{1}{2}S_2(a,b)}$.

4. Sum of cubes $S_3(a,b) \coloneqq a^3+b^3$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 2 biến a,b, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=\sqrt[3]{\frac{1}{2}S_3(a,b)}$.
5. Sum of nth powers $S_n(a,b) \coloneqq a^n+b^n$, $\forall n\in\mathbb{R}$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 2 biến a,b, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=\sqrt[n]{\frac{1}{2}S_n(a,b)}$.

1.3 3-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 3 biến

1. Sum $S(a,b,c)=S_1(a,b,c) \coloneqq a+b+c$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}S(a,b,c)$.
2. $A(a,b,c) \coloneqq ab+bc+ca$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\sqrt{\frac{1}{3}A(a,b,c)}$.
3. Product $P(a,b,c) \coloneqq abc$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\sqrt[3]{P(a,b,c)}$.
4. Sum of squares $S_2(a,b,c) \coloneqq a^2+b^2+c^2$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\sqrt{\frac{1}{3}S_2(a,b,c)}$.
5. Sum of cubes $S_3(a,b,c) \coloneqq a^3+b^3+c^3$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\sqrt[3]{\frac{1}{3}S_3(a,b,c)}$.
6. Sum of nth powers $S_n(a,b,c) \coloneqq a^n+b^n+c^n$, $\forall n\in\mathbb{R}$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa 3 biến a,b,c, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $a=b=c=\sqrt[n]{\frac{1}{3}S_n(a,b,c)}$.

1.4 n-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức n biến

1. Sum – tổng $S(x_1,\ldots,x_n)=S_1(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i = x_1+x_2+\cdots+x_n$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa n biến x_i, $i=1,\ldots,n$, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $x_i=\frac{1}{n}S(x_1,\ldots,x_n)$, $\forall i=1,\ldots,n$.
2. Arithmetic mean $\bar{x} \coloneqq \frac{1}{n}S(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$. Wikipedia/arithmetic mean.
3. Product $P(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \prod_{i=1}^n x_i = x_1x_2\cdots x_n$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa n biến x_i, $i=1,\ldots,n$, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $x_i=\sqrt[n]{P(x_1,\ldots,x_n)}$, $\forall i=1,\ldots,n$.
4. Sum of squares $S_2(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.
   - Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa n biến x_i, $i=1,\ldots,n$, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $x_i=\sqrt{\frac{1}{n}S_2(x_1,\ldots,x_n)}$, $\forall i=1,\ldots,n$.
5. Sum of cubes $S_3(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i^3 = x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$.

- Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa n biến x_i, $i = 1, \ldots, n$, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $x_i = \sqrt[3]{\frac{1}{n}S_3(x_1, \ldots, x_n)}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

6. Sum of mth powers $S_m(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \sum_{i=1}^n x_i^m = x_1^m + x_2^m + \cdots + x_n^m$.

- Với các bất đẳng thức có vai trò bình đẳng giữa n biến x_i, $i = 1, \ldots, n$, nhiều khả năng xảy ra giá trị cực đại (GTNN, GTLN) đạt được khi $x_i = \sqrt[m]{\frac{1}{n}S_m(x_1, \ldots, x_n)}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

2 Some Elementary Algebraic Inequalities – 1 Số Bất Đẳng Thức Đại Số Sơ Cấp

Resources – Tài nguyên.

1. [PQ17, Chap. 1, §1.1: Các bất đẳng thức đại số quan trọng]. TẠ DUY PHƯỢNG, HOÀNG MINH QUÂN. *Phương Trình Bậc 3 với Các Hệ Thức Hình Học & Lượng Giác Trong Tam Giác.*
2. [HLP52]. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA. *Inequalities.*

Định nghĩa 1 (2 dãy đơn điệu)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, 2 dãy số thực $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n$ được gọi là* sắp cùng thứ tự *(hoặc* cùng chiều*) nếu cả 2 dãy cùng tăng, i.e., $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ & $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$, hoặc cùng giảm, i.e., $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ & $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$. 2 dãy được gọi là* sắp ngược thứ tự *(hoặc* ngược chiều*) nếu 1 dãy tăng & 1 dãy giảm.*

Bổ đề 1 (Bổ đề về dãy đơn điệu)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, 2 dãy số thực $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$. Giả sử $(x_i)_{i=1}^n$ là 1 hoán vị của $(b_i)_{i=1}^n$.*

(i) Nếu $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n$ sắp cùng thứ tự thì $\sum_{i=1}^n a_ib_i \ge \sum_{i=1}^n a_ix_i \ge \sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}$.

(i) Nếu $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n$ sắp ngược thứ tự thì $\sum_{i=1}^n a_ib_i \le \sum_{i=1}^n a_ix_i \le \sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}$.
Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ 1 trong 2 dãy là dãy hằng hoặc $x_i = b_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Hệ quả 1. *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, nếu $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ & $(x_i)_{i=1}^n$ là 1 hoán vị của $(a_i)_{i=1}^n$ thì $\sum_{i=1}^n a_i^2 \ge \sum_{i=1}^n a_ix_i$.*

Hệ quả 2. *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, nếu $(a_i)_{i=1}^n \subset (0, \infty)$ & $(x_i)_{i=1}^n$ là 1 hoán vị của $(a_i)_{i=1}^n$ thì $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} \ge n$.*

Định lý 1 (Bất đẳng thức Bunyakovsky)**.** *Với Với $n \in \mathbb{N}^\star$, mọi bộ $2n$ số thực a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$,*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \tag{B}$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ tồn tại số $t \in \mathbb{R}$ sao cho $b_i = ta_i$ hoặc $a_i = tb_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Định lý 2 (Bất đẳng thức Chebyshev)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$:*

(i) Với 2 dãy đơn điệu cùng chiều $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \le n\sum_{i=1}^n a_ib_i. \tag{Ch1}$$

(ii) Với 2 dãy đơn điệu trái chiều $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$, $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \ge n\sum_{i=1}^n a_ib_i. \tag{Ch2}$$

Trong cả 2 dạng, dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ hoặc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Định lý 3 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz, bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân, bất đẳng thức AM–GM)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_i \in [0, \infty)$, $\forall i = 1, \ldots, n$,*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall a_i \in [0, \infty), \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow$ hoặc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Định lý 4 (Bất đẳng thức Nesbit)**.** *Với $a, b, c \in (0, \infty)$,*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}. \tag{Nesbit}$$

Định lý 5 (Bất đẳng thức Schwarz)**.** *Với $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in (0,\infty)$, $\forall i = 1,\ldots,n$:*

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}. \tag{Schwarz}$$

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow$ hoặc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Định lý 6 (Bất đẳng thức Bernoulli)**.** *Với $x \in (-1,\infty)$,*

$$(1+x)^\alpha \begin{cases} \le 1+\alpha x & \text{if } \alpha \in [0,1],\\ \ge 1+\alpha x & \text{if } \alpha \in (-\infty,0]\cup[1,\infty), \end{cases} \tag{Bernoulli}$$

2.1 AM–GM & Cauchy–Schwarz inequalities – Bất đẳng thức trung bình cộng–trung bình nhân & bất đẳng thức Cauchy–Schwarz

Resources – Tài nguyên.

1. [Vin+18, Chap. 3: AM–GM & Cauchy–Schwarz, pp. 55–80]. Lê Anh Vinh, Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Tuấn Hải Đăng, Phạm Đức Hiệp, Nguyễn Thế Hoàn, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Quang Hùng, Phạm Việt Hùng, Hoàng Đỗ Kiên, Nguyễn Văn Linh, Lê Phúc Lữ, Trần Đăng Phúc, Nguyễn Văn Quý, Hà Hữu Cao Trình, Nguyễn Huy Tùng. *Định Hướng Bồi Dưỡng Học Sinh Năng Khiếu Toán.*

1. *Tìm phản ví dụ để chứng minh bất đẳng thức AM–GM sai khi có ít nhất 1 số âm trong các số đã cho.*

Giải. Khi $n = 2$, chọn $(a,b) = (-1,0)$ hoặc $(a,b) = (-1,-1)$. □

Proposition 1. *The following inequalities hold:*

$$a+b \ge (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{a^n b}{b^n}},\ \forall a,b \in [0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \tag{1}$$

$$a+b \ge (m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}},\ \forall a,b \in [0,\infty),\ \forall m,n \in \mathbb{N}^\star, \tag{2}$$

$$a+b+c \ge (m+n+p)\sqrt[m+n+p]{\frac{a^m b^n c^p}{m^m n^n p^p}},\ \forall a,b,c \in [0,\infty),\ \forall m,n,p \in \mathbb{N}^\star, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge \left(\sum_{i=1}^n m_i\right)\sqrt[\sum_{i=1}^n m_i]{\prod_{i=1}^n \frac{a^{m_i}}{m_i^{m_i}}},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in [0,\infty),\ \forall m_i \in \mathbb{N}^\star,\ \forall i = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

3 Introduction to Inequality

Definition 1 (Inequality)**.** *"In mathematics, an* inequality *is a relation which makes a non-equal comparison between 2 numbers or other mathematical expressions.*

It is used most often to compare 2 numbers on the number line by the size. There are several different notations used to represent different kinds of inequalities: The notation $a < b$ means that a is *less than* b. The notation $a > b$ means that a is *greater than* b. In either case, a is not equal to b. These relations are known as *strict inequalities*, meaning that a is strictly less than or strictly greater than b. Equivalence is excluded.

In contrast to strict inequalities, there are 2 types of inequality relations that are not strict: The notation $a \le b$ means that a is *less than or equal to* b (or, equivalently, at most b, or not greater than b). The notation $a \ge b$ means that a is *greater than or equal to* b (or, equivalently, at least b, or not less than b).

The relation *not great than* can also be represented by $a \not> b$, the symbol for "greater than" bisected by a slash, "not". The same is true for *not less than* & $a \not< b$.

The notation $a \ne b$ means that a is not equal to b; this *inequation* sometimes is considered a form of strict inequality. It does not say that one is greater than the other; it does not even require a,b to be member of an ordered set.

In engineering science, less formal use of the notation is to state that 1 quantity is "much greater" than another, normally by several orders of magnitude. The notation $a \ll b$ means that a is *much less than* b. The notation $a \gg b$ means that a is *much greater than* b. This implies that the lesser value can be neglected with little effect on the accuracy of an approximation (e.g., the case of ultrarelativistic limit in physics).

In all of the cases above, any 2 symbols mirroring each other are symmetrical; $a < b$ & $b > a$ are equivalent, etc." – Wikipedia/inequality (mathematics)

3.1 Properties on the number line $\mathbb{R}$

4 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

2 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

3. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \ge p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \ge 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

4 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

5. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \ge q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \ge 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

6 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in [0, \infty),\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

7. *Với bộ $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_ia_i \ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n \ge m\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \ge 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

5 Miscellaneous

8 ([Sơn+25], Bổ đề 1.1, p. 5)**.** *Chứng minh: $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

9 ([Sơn+25], Bổ đề 1.2, p. 5)**.** *Chứng minh: $3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

10 ([Sơn+25], Bổ đề 1.3, p. 6)**.** *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

11 ([Sơn+25], Bổ đề 1.4, p. 6)**.** *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

12 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_n},\ \text{i.e., } \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

13 ([Sơn+25], Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh: $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a, b \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

14 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

15 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \le \sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i \ge 0,\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

16 ([Sơn+25], Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

17 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

6 Warm-up – Khởi động

The general structure of a problem on inequality is given by:

Problem 1. *Let x_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ satisfy the condition $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ & $C^\star(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. Prove that: (a) $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0$. (b) $B(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. (c) Find the minimum & maximum of $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ & $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.*

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

18. *Cho các biến x_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ thỏa mãn điều kiện $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$. Chứng minh: (a) $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0$. (b) $B(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. (c) Tìm* GTNN *&* GTLN *của biểu thức $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ & $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.*

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các *biểu thức cần tìm cực trị* A, B & đặc biệt là các *đẳng thức điều kiện* $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ & *bất đẳng thức điều kiện* $C^\star(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$.

7 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Ý nghĩa hình học: Diện tích hình vuông thì không âm. Diện tích của hình vuông bằng $0 \Leftrightarrow$ hình vuông đó suy biến thành 1 điểm. Cụ thể, công thức tính diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$. Khi đó $S = a^2 \ge 0$, $\forall a \ge 0$ & $S = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

19. *Chứng minh:*

$$4ab \le 2(|ab|+ab) \le (a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2 \le 2(a^2+b^2),\ \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

1st chứng minh. (a) $4ab \le 2(|ab|+ab) \Leftrightarrow 2ab \le 2|ab| \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (b) $2(|ab|+ab) \le (a+b)^2 \Leftrightarrow 2|ab|+2ab \le a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 2|ab| \le a^2+b^2 \Leftrightarrow (|a|-|b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. (c) $(a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (d) $(|a|+|b|)^2 \le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow (|a|-|b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. □

2nd chứng minh. (d) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số a^2 & b^2: $a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$, □

Lưu ý 1. *Trị tuyệt đối của 1 số thực không nhỏ hơn số thực đó, i.e., $|x| \ge x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $|x| = x \Leftrightarrow x \ge 0$.*

20. *Bất đẳng thức $(a+b)^2 \ge 4|ab|$ đúng khi nào?*

21 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2+2ab+b^2-4ab = a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a+b)^2 \ge (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (vì $a,b \ge 0$ nên $a+b \ge 0$ & $2\sqrt{ab} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 2. *Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:* $\boxed{0 \le a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R}}$*. Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:* $\boxed{0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b},\ \forall a,b \in \mathbb{R}}$*. Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.*

3rd proof. Đặt $x := \sqrt{a}, y := \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$. "$=$" $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 3. *Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:* $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \geq 0}$.

22. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \geq 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

23 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc},\ \forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \geq 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

24. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \geq 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

25 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

26. *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$. Với bộ $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_ia_i \geq m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n \geq m\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \geq 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

8 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

27 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23)**.** *Cho $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.*

1st proof. Vì $x, y > 0$ nên $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, được: $\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\sqrt{x}, \sqrt{y}$, được: $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4$. "$=$" $\Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. □

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ & $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = 4.$$

"$=$" $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min_{x,y\in\mathbb{R},\, x,y>0} A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. □

Nhận xét 1. *"Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã "làm trội" $\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$ bằng cách vận dụng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ để dùng điều kiện tổng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, từ đó được $\sqrt{xy} \geq 4$. Lần thứ 2 ta đã "làm giảm" tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ để dùng kết quả $\sqrt{xy} \geq 4$. Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài."* – [Tuy23, p. 24]

Lưu ý 4. *TXĐ của A chỉ là $D_A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$, nhưng để điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ có nghĩa thì cần thêm $x \neq 0,\ y \neq 0$, nên ta cần xét A trên tập hợp $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\} \subset D_A$. Hơn nữa, nếu viết* GTNN *của biểu thức $A = A(x, y)$ trên tập $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ 1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là $\min_{x,y\in\mathbb{R},\, x,y>0} A(x, y)$ hoặc $\min_{(x,y)\in D} A(x, y)$ hoặc $\min_{x,y\in\mathbb{R},\, x,y>0} A$ như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là $\min A$ như trong 1st proof.*

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

28. *Cho $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m > 0$, $m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

29. *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m > 0$, $a, b, m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

30. *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0$, $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

31. *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0$, $a_i, m \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

32 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$.*

Giải. ĐKXĐ: $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$. $A^2 = 3x-5+7-3x+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \le 2+(3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow A \le 2$ ($A \ge 0$ vì $\sqrt{3x-5} \ge 0$, $\sqrt{7-3x} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow 3x-5 = 7-3x \Leftrightarrow x = 2$. Mặt khác, $A^2 = 2+2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \ge 2$. "=" $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. Vậy $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$ & $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. □

33 (mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Biện luận theo các tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ để tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$.*

34 ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 25)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x-9}}{5x}$.*

35 ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 25)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{3x^4+16}{x^3}$. A có* GTLN *không?*

36 ([Tuy23], Ví dụ 13, p. 26)**.** *Cho $0 < x < 2$, tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{9x}{2-x} + \dfrac{2}{x}$.*

37 ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 27)**.** *Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y}$.*

38 ([Tuy23], 63., p. 28)**.** *Cho $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a, x, y > 0$, $x + y = 2a$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.*

39 ([Tuy23], 64., p. 28)**.** *Tìm* GTLN *của biểu thức $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$.*

40 ([Tuy23], 65., p. 28)**.** *Cho $x + y = 15$, tìm* GTNN, GTLN *của biểu thức $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$.*

41 ([Tuy23], 66., p. 28)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{2x^2-6x+5}{2x}$ với $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.*

42 ([Tuy23], 67., p. 28)**.** *Cho $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a, b, x > 0$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$.*

43 ([Tuy23], 68., p. 28)**.** *Cho $x \in \mathbb{R}$, $x \ge 0$, tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$.*

44 ([Tuy23], 69., p. 28)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x+6\sqrt{x}+36}{\sqrt{x}+3}$.*

45 ([Tuy23], 70., p. 28)**.** *Cho $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x^3+2000}{x}$.*

46 ([Tuy23], 71., p. 28)**.** *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ & $x + y \ge 6$. Tìm* GTNN *của biểu thức: $A = 5x + 3y + \dfrac{12}{x} + \dfrac{16}{y}$.*

47 ([Tuy23], 72., p. 29)**.** *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$ & $xy = 5$, tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x^2+1.2xy+y^2}{x-y}$.*

48 ([Tuy23], 73., p. 29)**.** *Cho $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, tìm* GTLN *của biểu thức $A = 4x + \dfrac{25}{x-1}$.*

49 ([Tuy23], 74., p. 29)**.** *Cho $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{4}{x}$.*

50 ([Tuy23], 75., p. 29)**.** *Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z \ge 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = a$. (a) Tìm* GTLN *của biểu thức $A = xy + yz + zx$. (b) Tìm* GTNN *của biểu thức $B = x^2 + y^2 + z^2$.*

51 ([Tuy23], 76., p. 29)**.** *Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \ge 12$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{\sqrt{x}}$.*

52 ([Tuy23], 77., p. 29). *Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = a$. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{a}{y}\right)\left(1 + \frac{a}{z}\right)$.

53 ([Tuy23], 78., p. 29). *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

54 ([Tuy23], 79., p. 29). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$ & $x > 0$. Tìm* GTLN *của biểu thức $B = x^2y^3$.*

55 ([DCA20], Ví dụ 1.5.1, p. 73, TS PTNK ĐHQG Tp HCM 2006). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y = 2$. Chứng minh $xy(x^2+y^2) \le 2$.*

1st chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức $ab \le \frac{1}{4}(a + b)^2$ ở (5), có: $xy(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2 + y^2) \le \frac{1}{8}[2xy + (x^2 + y^2)]^2 = \frac{1}{8}(x + y)^4 = 2$. "=" $\Leftrightarrow x + y = 2$ & $2xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + y = 2$ & $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

2nd chứng minh. Sử dụng *kỹ thuật đồng bậc*, cần chứng minh $8xy(x^2 + y^2) \le (x + y)^4$ (cả 2 vế đều là bậc 4). Bất đẳng thức này đúng vì $8xy(x^2+y^2) \le (x+y)^4 \Leftrightarrow 8xy(x^2+y^2) \le x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \Leftrightarrow x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^4 \ge 0$ hiển nhiên đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow x = y$ & $x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau:

56. *Cho $x, y, m \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y = m$. Biện luận theo tham số m để tìm* GTLN & GTNN *của: (a) $A = xy(x^2 + y^2)$. (b) $B = xy(x^3 + y^3)$. (c) $B = xy(x^4 + y^4)$. (d*) $x^ay^a(x^b + y^b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.*

9 Uncategorized

57 ([Sơn+25], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh: $4ab \le (a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \ge 0$, $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2 \ge 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

58 ([Sơn+25], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh: $3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \ge 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b = c$. □

59 ([Sơn+25], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \ge 0$, $\forall a, b > 0$. "=" $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

60 ([Sơn+25], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

61 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \ge \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \le \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right), \ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

62 ([Sơn+25], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh: $\sqrt{a + b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a + b)}$, $\forall a, b \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

63 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh: $\sqrt{a + b + c} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{3(a + b + c)}$, $\forall a, b, c \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

64 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số). *Chứng minh: $\sqrt{a_1 + \cdots + a_n} \le \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1 + \cdots + a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i}, \ \forall a_i \ge 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

65 ([Sơn+25], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh: $a^3 + b^3 \ge ab(a + b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2 \ge 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

66 ([Sơn+25], mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh: $a^4 + b^4 \ge ab(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

10 Methods in Proving Inequalities – Các Phương Pháp Chứng Minh Bất Đẳng Thức

10.1 Phương pháp chọn điểm rơi

10.2 Change of variables – Phương pháp đổi biến

10.3 Undefined Coefficient Technique (UCT) – Kỹ thuật hệ số bất định

67. *Cho* $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_i \in (0,\infty)$, $i = 1,2,\ldots,n$ *thỏa* $S(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i = S \in (0,\infty)$. *Tìm điều kiện cần & đủ của* $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ *để*

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 \ge \gamma x + \delta, \ \forall x \in (0,S), \\ \dfrac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 = \gamma x + \delta \Leftrightarrow x = \dfrac{S}{n} = \bar{x}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra các bất đẳng thức có dạng

$$\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_1^2} + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 \ge \gamma \sum_{i=1}^n x_i + n\delta = \gamma S + n\delta,$$
$$\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_1^2} + \beta \sum_{i=1}^n x_i^2 = \gamma \sum_{i=1}^n x_i + n\delta = \gamma S + n\delta \Leftrightarrow x_i = \bar{x} = \frac{S}{n}, \ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đặc biệt với $n = 2$ *&* $n = 3$*:*

$$m\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + n(a^2+b^2+c^2) \ge p(a+b+c) + 3q = pS + 3q, \tag{6}$$
$$m\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + n(a^2+b^2+c^2) = p(a+b+c) + 3q = pS + 3q \Leftrightarrow a = b = c = \frac{S}{3}. \tag{7}$$

68 ([Sơn+25], VD4.1, p. 76)**.** *Cho* $a,b,c > 0$, $a+b+c = 3$. *Chứng minh* $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \ge 5$.

Hint. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{3}x^2 \ge -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2(x^2+6x+3)}{3x^2} \ge 0, \forall x > 0.$

69. *Cho* $a,b,c > 0$, $a^2+b^2+c^2 = S_2$. *Tìm điều kiện cần & đủ của* $m,n,p,q \in \mathbb{R}$ *để*

$$mx + \frac{n}{x} \ge px^2 + q, \ \forall x \in (0,\sqrt{S_2}).$$

Từ đó suy ra các bất đẳng thức có dạng

$$m(a+b+c) + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge p(a^2+b^2+c^2) + 3q = pS_2 + 3q,$$
$$m(a+b+c) + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = p(a^2+b^2+c^2) + 3q = pS_2 + 3q \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{\frac{S_2}{3}}.$$

70 ([Sơn+25], VD4.2, p. 77)**.** *Cho* $a,b,c > 0$, $a^2+b^2+c^2 = 3$. *Chứng minh* $2(a+b+c) + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \ge 9$.

Hint. $2x + \dfrac{1}{x} \ge \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) \le 0, \forall x \in (0,\sqrt{3}).$

71 ([Sơn+25], VD4.3, p. 78)**.** *Cho* $a,b,c > 0$ *thỏa* $a^3+b^3+c^3 = 3$. *Chứng minh* $4\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + 5(a^2+b^2+c^2) \ge 27$.

Hint. $\dfrac{4}{x} + 5x^2 \ge 2x^3 + 7 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2-x-4) \le 0, \forall x \in (0,\sqrt[3]{3}).$

72 ([Sơn+25], VD4.4, p. 79)**.** *Cho* $a,b,c > 0$, $a^2+b^2+c^2 = 3$. *Chứng minh* $\dfrac{a}{b^2+c^2} + \dfrac{b}{c^2+a^2} + \dfrac{c}{a^2+b^2} \ge \dfrac{3}{2}$.

Hint. $\dfrac{x}{3-x^2} \ge \dfrac{x^2}{2}, \forall x \in (0,\sqrt{3}).$

73 ([Sơn+25], VD4.5, p. 80)**.** *Cho* $x,y,z > 0$ *thỏa* $x+y+z = 3$. *Tìm* GTNN *của* $A = \sqrt{x^2-xy+y^2} + \sqrt{y^2-yz+z^2} + \sqrt{z^2-zx+x^2}$.

Hint. $\sqrt{x^2-xy+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2}\ge\frac{1}{2}(x+y)$.

74. *Tìm điều kiện cần & đủ của $m,n\in\mathbb{R}$ theo $a,b,c\in\mathbb{R}$ để $\sqrt{ax^2+bxy+cy^2}\ge mx+ny$, $\forall x,y\in(\alpha,\beta)$.*

75 ([Sơn+25], VD4., p.)**.**

76 ([Sơn+25], VD4., p.)**.**

77 ([Sơn+25], VD4., p.)**.**

10.4 Phương pháp đồng bậc chứng minh bất đẳng thức

10.5 Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky

10.6 Phương pháp miền giá trị

10.7 Phương pháp dồn biến

10.8 Phương pháp phản chứng

10.9 Phương pháp làm trội

10.10 Tangent method – Phương pháp tiếp tuyến

Giả thiết trong các bất đẳng thức sử dụng được phương pháp tiếp tuyến để chứng minh nên có dạng tổng, i.e., $a+b=S_1$, $a+b+c=S_1$, $\sum_{i=1}^n a_i=S_1$ bởi vì:

Định lý 7. *Nếu $y=ax+b=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$ là tiếp tuyến của đường cong $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0,f(x_0))$ & nếu M không phải là điểm uốn, thì luôn tồn tại 1 khoảng D chứa x_0 sao cho $\forall x\in D$, $f(x)\ge ax+b$ hoặc $f(x)\le ax+b$. Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow x=x_0$.*

Định lý 8. *Khi $y=ax+b$ là tiếp tuyến của $f(x)$ tại M thì ta có biểu diễn $f(x)-(ax+b)=(x-x_0)^kg(x)$ với $k\ge2$.*

Sign. Dấu hiệu để có thể sử dụng phương pháp tiếp tuyến là bài toán có thể đưa được về dạng $A=\sum_{i=1}^n f(a_i)$ & đoán được khả năng tìm tiếp tuyến với $y=f(x)$ tại (các) điểm rơi nào đó.

78 ([KH22], VD1, p. 265)**.** *Cho $a,b,c,d\in(0,\infty)$, $a+b+c+d=1$. Tìm* GTNN *của $A=6(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)$.*

79 ([KH22], VD2, p. 266)**.** *Cho $a,b,c\in[-\frac{3}{4},\infty)$, $a+b+c=1$. Tìm* GTLN *của $A=\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}$.*

Giải. Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=f(x)\coloneqq\frac{x}{x^2+1}$ tại điểm $x_0=\dfrac{1}{3}$: $y=T_f(x)\coloneqq\dfrac{36x+3}{50}$. Có $f(x)-T_f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{36x+3}{50}=-\dfrac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)}\le0$, $\forall x\in[-\frac{3}{4},\infty)$ nên $f(x)\le T_f(x)$, $\forall x\in[-\frac{3}{4},\infty)$, $f(x)=T_f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{-3}{4}\vee x=\dfrac{1}{3}$. Suy ra $A=f(a)+f(b)+f(c)\le T_f(a)+T_f(b)+T_f(c)=\dfrac{36(a+b+c)+9}{50}=\dfrac{9}{10}$, $A=\dfrac{9}{10}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$. $\max A=\dfrac{9}{10}$, $A=\dfrac{9}{10}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$. □

80 ([KH22], VD3, p. 267)**.** *Cho $a,b,c\in(0,\infty)$, $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm* GTNN *của $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(a+b+c)$.*

81 ([KH22], VD1, p. 265)**.**

11 Applications of Inequalities – Ứng Dụng của Bất Đẳng Thức

11.1 Ứng dụng để rút gọn biểu thức

11.2 Ứng dụng vào dạng toán liên quan định lý Viète

11.3 Ứng dụng vào giải phương trình & hệ phương trình vô tỷ

12 Miscellaneous

Tài liệu

[AQ25] Nguyễn Tuấn Anh and Cao Minh Quang. *Bất Đẳng Thức Dưới Góc Nhìn của Các Bổ Đề*. Nhà Xuất Bản Thông Tin & Truyền Thông, 2025, p. 345.

[DCA20] Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, and Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 280.

[HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. 2nd ed. Cambridge, at the University Press, 1952, pp. xii+324.

[KH22] Phan Huy Khải and Đoàn Thanh Hương. *Các Phương Pháp Hiệu Quả Giải Bài Toán Về Bất Đẳng Thức & Giá Trị Lớn Nhất Nhỏ Nhất*. Nhà Xuất Bản Dân Trí, 2022, p. 298.

[PQ17] Tạ Duy Phượng and Hoàng Minh Quân. *Phương Trình Bậc 3 với Các Hệ Thức Hình Học & Lượng Giác Trong Tam Giác*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2017, p. 448.

[Sơn+25] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2025, p. 143.

[Tao07] Terence Tao. "What is good mathematics?" In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 44.4 (2007), pp. 623–634. ISSN: 0273-0979. DOI: 10.1090/S0273-0979-07-01168-8. URL: https://doi.org/10.1090/S0273-0979-07-01168-8.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.

[Vin+18] Lê Anh Vinh, Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Tuấn Hải Đăng, Phạm Đức Hiệp, Nguyễn Thế Hoàn, Nguyễn Huy Hoàng, Trần Quang Hùng, Phạm Việt Hùng, Hoàng Đỗ Kiên, Nguyễn Văn Linh, Lê Phúc Lữ, Trần Đăng Phúc, Nguyễn Văn Quý, Hà Hữu Cao Trình, and Nguyễn Huy Tùng. *Định Hướng Bồi Dưỡng Học Sinh Năng Khiếu Toán*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2018, pp. vi+650.