

Problem: Root – Bài Tập: Căn Thúc

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 31 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set Q of circles \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/set_Q_of_circles.pdf).¹ [\[TeX\]](#)².

Mục lục

1 Bất Phương Trình	1
1.1 Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối	1
2 Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ	2
3 Căn Thúc Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A$	3
4 Miscellaneous	3
Tài liệu	3

1 Bất Phương Trình

Ta xét các dạng bất đẳng thức & bất phương trình được sử dụng nhiều để tìm điều kiện xác định (ĐKXD) của căn thức bậc 2 & tổng quát hơn là căn thức bậc chẵn (căn thức bậc lẻ luôn xác định miễn là biểu thức dưới dấu căn có nghĩa, không nhất thiết phải không âm như căn bậc chẵn bắt buộc).

1.1 Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Với $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ là 1 hàm số biến x , có $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$:

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a, |f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a, |f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -a, \\ f(x) > a, \end{cases}, |f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -a, \\ f(x) \geq a. \end{cases}$$

Để giải bất phương trình tích, ta thường sử dụng:

Định lý 1 (Dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$). *Nhị thức $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, cùng dấu với a với mọi giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức (i.e., $a(ax + b) > 0$, $\forall x > -\frac{b}{a}$), trái dấu với a với mọi giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức (i.e., $a(ax + b) < 0$, $\forall x < -\frac{b}{a}$).*

- ([Bin23], Ví dụ 1, p. 5). *Giải bất phương trình bậc 2: (a) $x^2 - 4x - 5 < 0$. (b) $x^2 - 2x - 1 > 0$. (c) $2x^2 - 6x + 5 > 0$.*
- ([Bin23], 1., p. 6). *Giải bất phương trình bậc 2: (a) $x^2 - 4x - 21 > 0$. (b) $x^2 - 4x + 1 < 0$. (c) $3x^2 - x + 1 > 0$. (d) $2x^2 - 5x + 4 < 0$.*
- (Giải bất phương trình bậc nhất tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình: (a) $ax + b > 0$. (b) $ax + b < 0$. (c) $ax + b \leq 0$. (d) $ax + b \geq 0$.*
- (Giải bất phương trình bậc nhất chứa trị tuyệt đối dạng tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình: (a) $|ax + b| > c$. (b) $|ax + b| < c$. (c) $|ax + b| \leq c$. (d) $|ax + b| \geq c$.*
- (Giải bất phương trình bậc 2 tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình: (a) $ax^2 + bx + c > 0$. (b) $ax^2 + bx + c < 0$. (c) $ax^2 + bx + c \leq 0$. (d) $ax^2 + bx + c \geq 0$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex.

6 (Giải bất phương trình bậc 2 chứa trị tuyệt đối dạng tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) $|ax^2 + bx + c| > d$. (b) $|ax^2 + bx + c| < d$. (c) $|ax^2 + bx + c| \leq d$. (d) $|ax^2 + bx + c| \geq d$.

7 (Giải bất phương trình dạng tích tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, với $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) Bất phương trình bậc nhất dạng tích tổng quát: $a(x - x_0) > 0$, $a(x - x_0) < 0$, $a(x - x_0) \leq 0$, $a(x - x_0) \geq 0$. (b) Bất phương trình bậc 2 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2$, $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$. (c) Bất phương trình bậc 3 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \geq 0$. (d) Bất phương trình bậc 4 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \geq 0$. (e*) Bất phương trình bậc $n \in \mathbb{N}^*$ dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) > 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) < 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) \leq 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) \geq 0$, trong đó sử dụng ký hiệu tích $\prod_{i=1}^n (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

8 (Programming: Solve general inequations of product-form). *Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải các bất phương trình $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$, với $P(x) := a \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.*

- **Input.** Dòng 1: Số bộ test. Dòng 2: $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Dòng 3: n số thực không nhất thiết phân biệt chưa được sắp xếp thứ tự: x_1, x_2, \dots, x_n .
- **Output.** 4 tập nghiệm của 4 bất phương trình $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$.
- **Sample.**

polynomial_inequation.inp	polynomial_inequation.out
2	P(x) > 0: x < 2
1 -1.5	P(x) < 0: x > 2
2	P(x) <= 0: x >= 2
2 100	P(x) >= 0: x <= 2
3 -4	P(x) > 0: x < -4 or x > 3
	P(x) < 0: -4 < x < 3
	P(x) <= 0: -4 <= x <= 3
	P(x) >= 0: x <= -4 or x >= 3

2 Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Ở Toán 7 (xem, e.g., [Thá+23, §5, pp. 27–29]), ta đã biết dạng biểu diễn thập phân của số hữu tỷ là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, dạng biểu diễn thập phân của số vô tỷ là vô hạn không tuần hoàn. Số hữu tỷ $a \in \mathbb{Q}$ nào cũng viết được dưới dạng $a = \frac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Tổng, hiệu, tích, thương của 2 số hữu tỷ (số chia $\neq 0$) là 1 số hữu tỷ vì:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0.$$

9 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 7). *Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. \square

10 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 7). *Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là 2 số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là 2 số hữu tỷ.*

11 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 7). *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.*

12 ([Bin23], 2., p. 8). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$.*

13 ([Bin23], 3., p. 8). *Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b$, a^2 , & b^2 là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).*

14 ([Bin23], 4., p. 8). *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.*

15 ([Bin23], 5., p. 8). *(a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?*

16 ([Bin23], 6*, pp. 8–9). *(a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ & $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

3 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 7 Tập 1*. Tái bản lần thứ 1. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.