

Problem: Multivariate Polynomial – Bài Tập: Đa Thức Nhiều Biến

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 24 tháng 10 năm 2023

Mục lục

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến	1
2 Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến	1
3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến	2
4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	3
5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường	4
6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác	5
7 Số Chính Phương	6
8 Miscellaneous	7
Tài liệu	7

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến

- 1 ([Tuy23], VD1, p. 4). Cho 3 biểu thức $A = \frac{4xy}{x^2 - 2xy + y^2}$, $B = x^2 - 2xy + y^2$, $C = -4xy$. (a) Cho biết biểu thức nào là đơn thức nhiều biến, là đa thức nhiều biến? (b) Với $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, chứng minh 2 biểu thức B, C có cùng 1 giá trị.
- 2 ([Tuy23], 1., p. 5). Cho đơn thức $A = -2mx^3y^4$, m là hằng. Cho biết: (a) Hệ số & phần biến của đơn thức A . (b) Bậc của đơn thức A đối với từng biến & đối với tập hợp các biến.
- 3 ([Tuy23], 2., p. 5). Cho $x^2 = 3$, $y^2 = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của đa thức $A = x^4 - x^2y^2 + y^4$.
- 4 ([Tuy23], 3., p. 5). Tìm các đơn thức đồng dạng trong 5 đơn thức sau ($a \neq 0$ là hằng): $P = \frac{4}{5}x^4y^3xy$, $Q = \frac{2}{3}a^3x^3y^2x^2y$, $R = 6a^2x^2y^4ax^3$, $M = -10$, $N = \frac{7}{6}$.
- 5 ([Tuy23], 4., p. 5). Cho 3 đơn thức nhiều biến: $A = ab^2x^4y^3$, $B = ax^4y^3$, $C = b^2x^4y^3$. Các đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu: (a) a, b là hằng $\neq 0$ còn x, y là biến. (b) $a \neq 0$ là hằng còn b, x, y là biến. (c) $b \neq 0$ là hằng còn a, x, y là biến.
- 6 ([Tuy23], 5., p. 5). Cho biểu thức $A = \frac{-4ax^2y^5}{(b+1)^3}$. Trong 3 trường hợp sau đây, trường hợp nào A là đơn thức? (a) a, b là hằng. (b) a là hằng. (c) b là hằng. Trong trường hợp đó, cho biết hệ số & bậc của đơn thức đối với mỗi biến & đối với tập hợp của biến.

2 Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến

- 7 ([Tuy23], VD2, p. 6). Cho 2 đơn thức $A = 3m^2x^2y^3z$, $B = 12x^2y^3z$ ($m \neq 0$ là hằng). (a) Tính hiệu $A - B$. (b) Xác định m để giá trị của 2 đơn thức A, B luôn bằng nhau với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 8 ([Tuy23], VD3, p. 6). Cho 3 đa thức $A = 8a - 9b$, $B = 5b - c$, $C = 3c - 2a$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}$. Không thực hiện phép tính, cho biết tích ABC có giá trị là số chẵn hay lẻ?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

- 9 ([Tuy23], 6., p. 7). Cho 2 đa thức $A = 3x^4 - 2x^3y + 5xy^3 - y^4$, $B = -8x^4 + 2x^3y - 9x^2y^2 - xy^3 + 4y^4$. Tính tổng $A + B$ & hiệu $A - B$ bằng 2 cách: Cộng trừ theo hàng ngang. Cộng trừ theo cột dọc.
- 10 ([Tuy23], 7., p. 7). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $8 \cdot 2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0. (b) $3^{n+3} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+5} - 7 \cdot 2^n : 25$. (c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n : 300$.
- 11 ([Tuy23], 8., p. 7). Viết tích $31 \cdot 5^2$ thành tổng của 3 lũy thừa cơ số 5 với số mũ là 3 số tự nhiên liên tiếp.
- 12 ([Tuy23], 9., p. 7). Viết 2 số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức có 2 biến x, y : (a) $\overline{xy\bar{z}}$. (b) $\overline{yxy5}$.
- 13 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho đa thức $P = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$. biết a, b là hằng & đa thức P có bậc 3, tìm a, b .
- 14 ([Tuy23], 11., p. 7). Tính tổng $S = \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{ba} - \overline{bac}$.
- 15 ([Tuy23], 12., p. 7). Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.
- 16 ([Tuy23], 13., p. 7). Cho 3 đa thức $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$, $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$. Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 17 ([Tuy23], 14., p. 7). Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$. (a) Thu gọn A . (b) Tìm x để $A = 2$.
- 18 ([Tuy23], 15., p. 7). Tính giá trị của 2 đa thức sau biết $x - y = 0$. (a) $A = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$. (b) $B = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3$.
- 19 ([Tuy23], 16., p. 7). Cho 2 đa thức $A = xyz - xy^2 - xz^2$, $B = y^3 + z^3$. Chứng minh nếu $x - y - z = 0$ thì A, B là 2 đa thức đối nhau.
- 20 ([Tuy23], 17., p. 7). Tính giá trị của đa thức $A = 4x^4 + 7x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.

3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến

- 21 ([Tuy23], VD4, p. 8). Cho 3 đơn thức $A = -3xy^3$, $B = 8xy^2$, $C = \frac{5}{3}x^2y$. Chứng minh 3 đơn thức này không thể cùng có giá trị dương.
- 22 ([Tuy23], VD5, p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x + y)(x + y + 2) - 2(x + 1)(y + 1) + 2 = x^2y^2$.
- 23 ([Tuy23], VD6, p. 9). Tìm giá trị của biểu thức $A = (5x^5 + 5x^4) : 5x^2 - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 12) : (2x - 4)$ tại $x = -2$.
- 24 ([Tuy23], 18., p. 9). Cho biểu thức $E = x(x - y) + y(x + y) - (x + y)(x - y) - 2y^2$. Với mọi giá trị của x, y thì giá trị của biểu thức E là 1 số âm hay là 1 số dương?
- 25 ([Tuy23], 19., p. 9). Cho $xy = 1$. Chứng minh đẳng thức $x(y + 1) + y(x + 1) = (x + 1)(y + 1)$.
- 26 ([Tuy23], 20., p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$.
- 27 ([Tuy23], 21., p. 9). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết: (a) $7x^{n+2}y^n : 4x^3y^4$. (b) $-\frac{2}{3}x^{2n}y^7 : \frac{4}{9}x^{n+3}y^n$.
- 28 ([Tuy23], 22., p. 10). Tìm x, y biết: $[(x - 2y)(x - 7y) - (x - 2y)(x + 2y)] : (x - 2y) = 18$.
- 29 ([Tuy23], 23., p. 10). Tìm giá trị của biểu thức $A = (3x^4 - x^2 - 2x) : (3x^2 + 3x + 2) + (x^4 - x^2) : (x^2 - x)$ tại $x = -5$.
- 30 ([Tuy23], 24., p. 10). Không làm phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong 3 trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{101} + x^{102} + x^{103} + 51$, $g(x) = x + 1$. (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 17$, $g(x) = x - 2$. (c) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x + 30$, $g(x) = x + 5$.
- 31 ([Tuy23], 25., p. 10). Tìm các giá trị của m, n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.
- 32 ([Tuy23], 26., p. 10). Chứng minh đa thức $f(x) = (x^2 + 4x - 20)^{51} + (x^3 - 2x - 22)^{50} - 2$ chia hết cho đa thức $x - 3$.
- 33 ([Tuy23], 27., p. 10). Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ & dư $x + 6$. Tìm đa thức B .
- 34 ([Tuy23], 28., p. 10). Cho đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho 2 đa thức $x - 2$ & $x + 1$. Tính $2a - 3b$.
- 35 ([Tuy23], 29., p. 10). Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 19$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.

4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

- 36** ([Tuy23], VD7, p. 11). Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Tính giá trị của 3 biểu thức: $x - y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$.
- 37** ([Tuy23], VD8, p. 12). Tìm GTNN của biểu thức $A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$.
- 38** ([Tuy23], 30., p. 12). Chứng minh đẳng thức: (a) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1$. (b) $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$.
- 39** (Mở rộng [Tuy23], 30., p. 12). Tính: (a) $\prod_{i=1}^n (2^{2^i} + 1) = (2 + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1)(2^{2^3} + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)$, $\prod_{i=m}^n (2^{2^i} + 1) = (2^{2^m} + 1)(2^{2^{m+1}} + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)$. (b) $\prod_{i=1}^n (a^{2^i} + 1)$, $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + 1)$. (c) $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + b^{2^i})$.
- 40** ([Tuy23], 31., p. 12). Tính hợp lý, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$: (a) $\frac{258^2 - 242^2}{254^2 - 246^2}$. (b) $263^2 + 74 \cdot 263 + 37^2$. (c) $136^2 - 92 \cdot 136 + 46^2$. (d) $(50^2 + 48^2 + 46^2 + \cdots + 2^2) - (49^2 + 47^2 + 45^2 + \cdots + 1^2)$.
- 41** ([Tuy23], 32., p. 12). Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2$. Chứng minh a, b là 2 số đối nhau.
- 42** ([Tuy23], 33., p. 12). Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$. Tìm hệ thức liên hệ giữa 4 số a, b, x, y .
- 43** ([Tuy23], 34., p. 12). Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh $a = b = c$.
- 44** ([Tuy23], 35., p. 12). Chứng minh không có $x, y \in \mathbb{R}$ nào thỏa mãn đẳng thức: (a) $3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$. (b) $4x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 78 = 0$.
- 45** ([Tuy23], 36., p. 12). Cho $a \in \mathbb{N}$. Chứng minh đẳng thức $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Áp dụng để tính nhẩm $35^2, 85^2, 105^2$.
- 46** ([Tuy23], 37., p. 13). Chứng minh: (a) Biểu thức $A = x^2 + x + 1$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$. (b) Biểu thức $B = x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. (c) Biểu thức $C = 4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm $\forall x \in \mathbb{R}$. (d) Tìm các biểu thức bậc 2 luôn dương, luôn âm tương tự.
- 47** ([Tuy23], 38., p. 13). Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = 25x^2 + 3y^2 - 10x + 11$. (b) $B = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$. (c) $C = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6)$.
- 48** ([Tuy23], 39., p. 13). Tìm GTLN của biểu thức: (a) $2x - x^2$. (b) $B = 19 - 6x - 9x^2$.
- 49** ([Tuy23], 40., p. 13). Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16. (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu bình phương của chúng chia hết cho 24.
- 50** ([Tuy23], 41., p. 13). Cho $x > y > 0$, $x - y = 7$, $xy = 60$. Không tính x, y , tính: (a) $x^2 - y^2$. (b) $x^4 + y^4$.
- 51** ([Tuy23], 42., p. 13). Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: (a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 4(p - b)(p - c)$. (b) $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
- 52** ([Tuy23], 43., p. 13). Cho $a = m^2 + n^2, b^2 = m^2 - n^2, c = 2mn$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2$.
- 53** ([Tuy23], 44., p. 13). Tính giá trị biểu thức: (a) $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ với $x = -103$. (b) $B = x^3 - 15x^2 + 75x$ với $x = 25$. (c) $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = -3$.
- 54** ([Tuy23], 45., p. 13). Cho $x - y = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$.
- 55** ([Tuy23], 46., p. 13). Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.
- 56** ([Tuy23], 47., p. 13). Rút gọn biểu thức $A = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2$.
- 57** ([Tuy23], 48., p. 13). Cho $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0, (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$. Tìm x, y .
- 58** ([Tuy23], 49., p. 13). Chứng minh: $742^3 - 692^3 : 200$. (b) $685^3 + 315^3 : 25000$.
- 59** ([Tuy23], 50., p. 13). Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$.
- 60** ([Tuy23], 51., p. 13). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh: (a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. (b) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.
- 61** ([Tuy23], 52., p. 14). Xác định 2 hệ số a, b để đa thức $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của 1 đa thức.
- 62** ([Tuy23], 53., p. 14). Cho $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.
- 63** ([Tuy23], 54., p. 14). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong 3 biểu thức sau có giá trị dương: $x = (a - b + c)^2 + 8ab, y = (a - b + c)^2 + 8bc, z = (a - b + c)^2 - 8ca$.
- 64** ([Tuy23], 55., p. 14). Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x - 3)^2$. (b) $(3x - 4y)^{20}$.
- 65** ([Tuy23], 56., p. 14). Đa thức $(x + 2)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x . Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x = a, y = b$, trong đó a, b là 2 số thực dương, $a - b = 1$. Tìm a, b .
- 66** ([Tuy23], 57., p. 14). Tính: (a) $(x + 2)^5$. (b) $(x - 1)^6$. (c) $(x - 1)^5$.
- 67** ([Tuy23], 58., p. 14). Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.
- 68** ([Tuy23], 59., p. 14). Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.

5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường

69 ([Tuy23], VD9, p. 15). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, thỏa $9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0$. Chứng minh $x = 10y$.

70 ([Tuy23], VD10, p. 15). Cho $A = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh $A > 0$.

71 ([Tuy23], 60., p. 16). Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $5x(x - 2y) + 2(2y - x)^2$. (b) $7x(y - 4)^2 - (4 - y)^3$. (c) $(4x - 8)(x^2 + 6) - (4x - 8)(x + 7) + 9(8 - 4x)$.

72 ([Tuy23], 61., p. 16). Chứng minh: (a) $43^2 + 43 \cdot 17 : 60$. (b) $27^5 - 3^{11} : 80$.

73 ([Tuy23], 62., p. 16). Tìm 1 số biết 3 lần bình phương của nó đúng bằng 2 lần lập phương của số ấy.

74 ([Tuy23], 63., p. 16). Có $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nào thỏa mãn đồng thời: x

$$\begin{cases} x^3 + xyz = 957, \\ y^3 + xyz = 795, \\ z^3 + xyz = 579. \end{cases}$$

75 ([Tuy23], 64., p. 16). Chứng minh số $\underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{2 \dots 2}_n$ là tích 2 số nguyên liên tiếp.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

76 ([Tuy23], 65., p. 16). (a) $100x^2 - (x^2 + 25)^2$. (b) $(x - y + 5)^2 - 2(x - y + 5) + 1$.

77 ([Tuy23], 66., p. 16). $(x^2 + 4y^2 - 5)^2 - 16(x^2y^2 + 2xy + 1)$.

78 ([Tuy23], 67., p. 16). Chứng minh: (a) $21^{10} - 1 : 200$. (b) $39^{20} + 39^{13} : 40$. (c) $2^{60} + 5^{30} : 41$. (d) $2025^{2027} + 2027^{2025} : 2026$.

79 ([Tuy23], 68., p. 16). Cho $n \in \mathbb{N}$ lẻ. Chứng minh $24^n + 1 : 25$ nhưng $24^n + 1 \not\vdots 23$.

80 ([Tuy23], 69., p. 16). Cho $a \in \mathbb{N}$ lẻ, $a > 1$. Chứng minh $(a - 1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1 : a - 2$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

81 ([Tuy23], 70., p. 16). (a) $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$. (b) $x^3 - x^2 - 5x + 125$. (c) $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$. (d) $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$.

82 ([Tuy23], 71., p. 16). (a) $x^4 - 25x^2 + 20x - 4$. (b) $x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9$. (c) $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$.

83 ([Tuy23], 72., p. 16). Tìm các cặp số $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $x - y = xy - 1$.

84 ([Tuy23], 73., p. 16). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ sao cho $x^2 - y = y^2 - x$. Tính giá trị biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$.

85 ([Tuy23], 74., p. 16). Cho $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c-d}{d-a}$. Chứng minh $a = c$ hoặc $a + c = b + d$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

86 ([Tuy23], 75., p. 17). (a) $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$. (b) $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$. (c) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.

87 ([Tuy23], 76., p. 17). (a) $(xy + 4)^2 - 4(x + y)^2$. (b) $(ab - xy)^2 - (bx - ay)^2$. (c) $(x^2 + 8x - 34)^2 - (3x^2 - 8x - 2)^2$.

88 ([Tuy23], 77., p. 17). (a) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$. (b) $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$. (c) $a^5 + b^5 - (a + b)^5$.

89 ([Tuy23], 78., p. 17). Chứng minh: (a) $999^4 + 999$ tận cùng 3 chữ số 0. (b) $49^5 - 49 : 100$.

90 ([Tuy23], 79., p. 17). Chứng minh: (a) Lập phương của 1 số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6. (b) Nếu tổng của 3 số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.

91 ([Tuy23], 80., p. 17). Cho $a \neq \pm b, a(a + b)(a + c) = b(b + c)(b + a)$. Chứng minh $a + b + c$.

92 ([Tuy23], 81., p. 17). Cho $x^2y - y^2x + x^2z - z^2x + y^2z + z^2y = 2xyz$. Chứng minh trong 3 số x, y, z ít nhất cũng có 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.

93 ([Tuy23], 82., p. 17). 1 tập hợp gồm $n \in \mathbb{N}$ số nguyên dương khác nhau có tổng là 360, $n > 2$. Chia tập hợp này thành 2 tập hợp con của A, B sao cho chúng không có phần tử chung, tập hợp A gồm có 2 phần tử, tập hợp B gồm các phần tử còn lại. Hỏi có tồn tại hay không cách chia như trên để tích các phần tử của A bằng tổng các phần tử của B .

6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác

Phân tích đa thức thành nhân tử:

94 ([Tuy23], VD11, p. 17). $A = 4x^2 - 8x + 3$.

95 ([Tuy23], VD12, p. 18). $A = 4x^4 + y^4$.

96 ([Tuy23], VD13, p. 18). $A = (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27$.

97 ([Tuy23], VD14, p. 19). *Phân tích đa thức thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên: $A = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

98 ([Tuy23], 83., p. 19). (a) $3x^2 - 11x + 6$. (b) $8x^2 + 10x - 3$. (c) $8x^2 - 2x - 1$.

99 ([Tuy23], 84., p. 19). (a) $6x^2 + 7xy + 2y^2$. (b) $9x^2 - 9xy - 4y^2$. (c) $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$.

100 ([Tuy23], 85., p. 19). (a) $x^3 + x + 2$. (b) $x^3 - 2x - 1$. (c) $x^3 + 3x^2 - 4$.

101 ([Tuy23], 86., p. 19). (a) $x^3y^3 + x^2y^2 + 4$. (b) $x^3 + 3x^2y - 9xy^2 + 5y^3$.

102 ([Tuy23], 87., p. 20). (a) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$. (b) $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 36$. (c) $x^8y^8 + x^4y^4 + 1$.

103 ([Tuy23], 88., p. 20). (a) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2$. (b) $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

104 ([Tuy23], 89., p. 20). (a) $x^4 + y^4 + (x + y)^4$. (b) $2(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)^2 - (x^2 + 2x)^2$.

105 ([Tuy23], 90., p. 20). (a) $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz$. (b) $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z + x)$. (c) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

106 ([Tuy23], 91., p. 20). *Cho $a \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a^5 - a : 30$.*

107 ([Tuy23], 92., p. 20). *Cho $x > y > z$. Chứng minh biểu thức $A = x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ luôn luôn dương.*

108 ([Tuy23], 93., p. 20). *Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa $(x + y)(y + z)(z + x) = 8xyz$. Chứng minh $x = y = z$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

109 ([Tuy23], 94., p. 20). (a) $x^4 + 5x^3 + 10x - 4$. (b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

110 ([Tuy23], 95., p. 20). (a) $x^7 + x^2 + 1$. (b) $x^8 + x + 1$.

111 ([Tuy23], 96., p. 20). (a) $x^5 + x^4 + 1$. (b) $x^{10} + x^5 + 1$.

112 ([Tuy23], 97., p. 20). *Cho $x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $x^{200} + x^{100} + 1 : x^4 + x^2 + 1$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

113 ([Tuy23], 98., p. 20). (a) $A = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4$. (b) $B = (12x^2 - 12xy + 3y^2) - 10(2x - y) + 8$.

114 ([Tuy23], 99., p. 20). (a) $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$. (b) $B = (a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3$.

115 ([Tuy23], 100., p. 20). (a) *Chứng minh: $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.* (b) *Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (b - c - a)^3 + (c - a - b)^3$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

116 ([Tuy23], 101., p. 20). (a) $A = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$. (b) $B = (x^2 + 4x - 3)^2 - 5x(x^2 + 4x - 3) + 6x^2$. (c) $C = (x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

117 ([Tuy23], 102., p. 20). $2(x^2 - 6x + 1)^2 + 5(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$.

118 ([Tuy23], 103., p. 21). *Cho $A = 4(x - 2)(x - 1)(x + 4)(x + 8) + 25x^2$. Chứng minh A không có giá trị âm.*

119 ([Tuy23], 104., p. 21). *Cho đa thức $A = 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x - 1$. Phân tích A thành tích của 1 nhị thức bậc nhất với 1 đa thức bậc 3 có hệ số nguyên sao cho hệ số cao nhất của đa thức bậc 3 là 1.*

120 ([Tuy23], 105., p. 21). *Cho đa thức $A = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$. Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên.*

121 ([Tuy23], 106., p. 21). *Cho đa thức $A = x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5$. Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên & các hệ số cao nhất đều mang dấu dương.*

7 Số Chính Phương

122 ([Tuy23], VD15, p. 22). Chứng minh $A = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} - 8 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_n + 1$ là 1 số chính phương.

123 ([Tuy23], VD16, p. 22). Chứng minh: (a) Tổng của 3 số chính phương liên tiếp không là 1 số chính phương. (b) Tổng $S = \sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 30^2$ không là 1 số chính phương.

124 ([Tuy23], 107., p. 23). Có 2 số chính phương nào mà: (a) Có tổng bằng 4567? (b) Có hiệu bằng 7654?

125 ([Tuy23], 108., p. 23). Chứng minh tổng của 20 số chính phương liên tiếp không thể là số chính phương.

126 ([Tuy23], 109., p. 23). Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng đơn vị đều bằng 6 còn chữ số hàng chục thì khác nhau. Chứng minh tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó cũng là 1 số chính phương.

127 ([Tuy23], 110., p. 23). Cho $a, b, c \neq 0$ là các chữ số. (a) Tính tổng S của tất cả các số có 3 chữ số tạo thành bởi cả 3 chữ số a, b, c . (b) Chứng minh S không phải là số chính phương.

128 ([Tuy23], 111., p. 23). Tìm 1 số chính phương có 4 chữ số biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

129 ([Tuy23], 112., p. 23). Chứng minh nếu $n + 1, 2n + 1$ đều là số chính phương thì $n : 24$.

130 ([Tuy23], 113., p. 23). Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết trong 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng & 1 mệnh đề sai: (a) n có chữ số tận cùng là 2. (b) $n + 20$ là 1 số chính phương. (c) $n - 69$ là 1 số chính phương.

131 ([Tuy23], 114., p. 23). Cho a là tổng của 2 số chính phương. Chứng minh: (a) $2a$ cũng là tổng của 2 số chính phương. (b) a^2 cũng là tổng của 2 số chính phương.

132 ([Tuy23], 115., p. 23). Cho a, b, c, d là 4 số chính phương. Chứng minh $(a + b)(c + d)$ là tổng của 2 số chính phương.

133 ([Tuy23], 116., p. 23). Cho $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = y + z$. Chứng minh $2(xy + xz - yz)$ là tổng của 3 số chính phương.

134 ([Tuy23], 117., p. 23). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa $a - b = c + d$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ luôn là tổng của 3 số chính phương.

135 ([Tuy23], 118., p. 23). Cho 2 số chính phương liên tiếp. Chứng minh tổng của 2 số đó cộng với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ.

136 ([Tuy23], 119., p. 24). Cho $a_n = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$. (a) Tính a_{n+1} . (b) Chứng minh $a_n + a_{n+1}$ là 1 số chính phương.

137 ([Tuy23], 120., p. 24). Cho a là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Chứng minh $a + 1$ là 1 số chính phương.

138 ([Tuy23], 121., p. 24). (a) Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_n 5, b = \underbrace{1 \dots 1}_n 9$. Chứng minh $ab + 4$ là 1 số chính phương. (b) Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_n, b = \underbrace{10 \dots 0}_{n-2} 11, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh $ab + 4$ là 1 số chính phương.

139 ([Tuy23], 122., p. 24). Cho $A = \underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{5 \dots 5}_n + 1$. Chứng minh A là 1 số chính phương.

140 ([Tuy23], 123., p. 24). Chứng minh: (a) $A = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} + \underbrace{4 \dots 4}_n + 1, n \in \mathbb{N}$ là số chính phương. (b) $B = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} + \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} + \underbrace{6 \dots 6}_n + 8, n \in \mathbb{N}$ là số chính phương.

141 ([Tuy23], 124., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là 1 số chính phương.

142 ([Tuy23], 125., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 + 1234$ là 1 số chính phương.

143 ([Tuy23], 126., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2^n + 2^4 + 2^7$ là 1 số chính phương.

144 ([Tuy23], 127., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 + 2x + 200$ là 1 số chính phương.

145 ([Tuy23], 128., p. 24). Cho $A = p^4$ với p là 1 số nguyên tố. (a) Số A có các ước dương nào? (b) Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là 1 số chính phương.

146 ([Tuy23], 129., p. 24). Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa $ab + 1$ là 1 số chính phương. Chứng minh tồn tại $c \in \mathbb{N}^*$ sao cho $ac + 1, bc + 1$ đều là số chính phương.

8 Miscellaneous

- 147** ([Tuy23], VD17, p. 25). *Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) + 15$.*
- 148** ([Tuy23], VD19, p. 26). *Chứng minh $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 : 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.*
- 149** ([Tuy23], 130., p. 27). *Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $ab = 1, ax + by = 2$. Chứng minh $xy \leq 1$.*
- 150** ([Tuy23], 131., p. 27). *Chứng minh $A = x(x - y)(x + y)(x + 2y) + y^4$ là bình phương của 1 đa thức.*
- 151** ([Tuy23], 132., p. 27). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $x + y + z = 0$. Chứng minh: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$.*
- 152** ([Tuy23], 133., p. 27). *Cho $x, y \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Chứng minh x, y là 2 số đối nhau.*
- 153** ([Tuy23], 134., p. 27). *Cho $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh: (a) $20^n - 1$ là hợp số. (b) $1000^n + 1$ là hợp số.*
- 154** ([Tuy23], 135., p. 27). *Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $A = x^9 - x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$. (b) $B = x^7 + x^5 + 1$.*
- 155** ([Tuy23], 136., p. 27). *Cho $x^2 - y^2 = 1$. Tính giá trị biểu thức $A = 2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4)$.*
- 156** ([Tuy23], 137., p. 27). *Tìm số dư của phép chia $S : 5$ với $S = \sum_{i=1}^8 i^n = 1^n + 2^n + \dots + 8^n$ với $n \in \mathbb{N}, n$ lẻ.*
- 157** ([Tuy23], 138., p. 27). *Cho a là 1 số chính phương, $m \in \mathbb{N}$ tùy ý. Chứng minh bao giờ cũng có $n \in \mathbb{N}$ sao cho $a + mn$ là 1 số chính phương.*
- 158** ([Tuy23], 139., p. 27). *Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: (a) $A = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) + 9$ là 1 số chính phương. (b) $B = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)(x - 4y) + y^4$ là 1 số chính phương.*
- 159** ([Tuy23], 140., p. 27). *Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. (b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$.*

Tài liệu

- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.