

Problem: Plane Geometry – Bài Tập: Hình Học Phẳng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 29 tháng 1 năm 2024

Mục lục

1	Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng	1
2	Line segment – Đoạn Thẳng	3
2.1	Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng	5
2.2	Compute length of a segment – Tính độ dài 1 đoạn thẳng	6
3	Ray – Tia	6
3.1	Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia	7
4	Angle – Góc	7
4.1	Số đo góc	8
4.2	2 góc bù nhau, phụ nhau	9
4.3	2 góc kề nhau	9
4.4	Tia phân giác của 1 góc	10
5	Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác	11
6	Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc	11
7	Đếm Số. Đếm Hình	12
	Tài liệu	13

1 Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng

[1] 3 hình hình học không định nghĩa: mặt phẳng, điểm, đường thẳng. Điểm được đặt tên bằng chữ cái in hoa, e.g., $A, B, C, D, \dots, M, N, P, Q, \dots, X, Y, Z$. Đường thẳng được đặt tên bằng chữ cái in thường, e.g., $a, b, c, d, \dots, m, n, p, q, \dots, x, y, z$. [2] Về vị trí của điểm & đường thẳng: Với 1 đường thẳng bất kỳ, có vô số điểm thuộc đường thẳng đó & có vô số điểm không thuộc đường thẳng đó. Điểm A thuộc đường thẳng d ký hiệu là $A \in d$. Điểm B không thuộc đường thẳng d ký hiệu là $B \notin d$. [3] Tiên đề về sự xác định đường thẳng: Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt. Khi 1 đường thẳng đi qua 2 điểm A, B , có đường thẳng AB hoặc đường thẳng BA . 1 quan hệ hình học được định nghĩa: 3 điểm thẳng hàng. Khi 3 điểm A, B, C cùng thuộc 1 đường thẳng thì chúng *thẳng hàng*. Nếu 3 điểm A, B, C không cùng thuộc bất cứ 1 đường thẳng nào thì chúng *không thẳng hàng*. [4] 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào. [5] Với 2 đường thẳng bất kỳ thì giữa chúng hoặc có 1 điểm chung (2 đường thẳng cắt nhau), hoặc không có điểm chung nào (2 đường thẳng song song), hoặc có vô số điểm chung (2 đường thẳng trùng nhau). [6] Tính chất về thứ tự của 3 điểm trên đường thẳng: Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 điểm & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại. [3] 1 quan hệ hình học không định nghĩa: Điểm nằm giữa 2 điểm khác. [7] Với 3 điểm A, B, C thẳng hàng mà điểm B không nằm giữa 2 điểm A, C , điểm C không nằm giữa 2 điểm A, B , thì điểm A phải nằm giữa 2 điểm B, C . [8] Với 3 điểm A, B, C thẳng hàng mà 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với điểm C & 2 điểm A, C nằm cùng phía đối với điểm B , thì điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . [9] Nếu điểm A nằm giữa 2 điểm B, C mà điểm M nằm giữa 2 điểm A, B & điểm N nằm giữa 2 điểm A, C thì điểm A nằm giữa 2 điểm M, N .

SGK: [Thá+23, §1, p. 79]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. SBT: [Thá23]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

1 ([Thá23], 11., p. 88). *Bác Long có 10 cây cảnh quý, bác muốn trồng thành 5 hàng, mỗi hàng 4 cây. Vẽ sơ đồ để trồng 10 cây đó.*

2 ([Thá23], 12., p. 88). *Xếp 9 viên bi thành: (a) 8 hàng, mỗi hàng có 3 viên; (b) 10 hàng, mỗi hàng có 3 viên.*

*e-mail: nguyenquanhong@gmail.com, website: <https://nqbh.github.io>, Ben Tre City, Vietnam.

- 3 ([Tuy23], VD8, p. 87, [Bin23], 1., p. 65). Cho 4 điểm A, B, C, D sao cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng; 3 điểm B, C, D cũng thẳng hàng. Hỏi 4 điểm A, B, C, D có thẳng hàng không? Vì sao?
4. Trên mặt phẳng, cho n điểm $A_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Giả sử 3 điểm bất kỳ trong số chúng đều thẳng hàng. Hỏi n điểm đó có thẳng hàng không?
5. Trên mặt phẳng, cho n điểm $A_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Giả sử 3 điểm A_i, A_{i+1}, A_{i+2} thẳng hàng $\forall i = 1, 2, \dots, n - 2$. Hỏi n điểm đó có thẳng hàng không?
- 6 ([Tuy23], VD9, p. 88). Trên đường thẳng a lấy 4 điểm M, N, P, Q theo thứ tự đó. Hỏi: (a) Điểm N nằm giữa 2 điểm nào? (b) Điểm P không nằm giữa 2 điểm nào?
- 7 ([Tuy23], VD10, p. 88). Cho trước 12 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi: (a) Vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu thay 12 điểm bằng n điểm, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, thì vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 8 ([Tuy23], 38., p. 88). Vẽ 5 điểm C, D, E, F, G không thẳng hàng nhưng 3 điểm C, D, E thẳng hàng; 3 điểm E, F, G thẳng hàng.
- 9 ([Tuy23], 39., p. 89). Trái Đất quay quanh Mặt Trời; Mặt Trăng quay quanh Trái Đất. Mặt Trời chiếu sáng tới Trái Đất & Mặt Trăng. Khi 3 thiên thể này thẳng hàng thì xảy ra nhật thực hoặc nguyệt thực (là hiện tượng Mặt Trời hoặc Mặt Trăng đang sáng bỗng nhiên bị che lấp & tối đi). Hỏi: (a) Khi xảy ra nhật thực thì Mặt Trăng ở vị trí nào? (b) Khi xảy ra nguyệt thực thì Trái Đất ở vị trí nào?
- 10 ([Tuy23], 40., p. 89). Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm 2 đường chéo. Qua O , vẽ 2 đường thẳng a, b sao cho a cắt cạnh AB, CD lần lượt tại M, N , b cắt cạnh AD, BC lần lượt tại E, F . Có bao nhiêu trường hợp 1 điểm nằm giữa 2 điểm khác? Kể ra tất cả các trường hợp đó.
- 11 ([Tuy23], 41., p. 89). Theo bài toán trước, ta có thể trồng 9 cây thành 8 hàng, mỗi hàng 3 cây. Vẽ sơ đồ trồng 9 cây thành: (a) 9 hàng, mỗi hàng 3 cây; (b) 10 hàng, mỗi hàng 3 cây.
- 12 ([Tuy23], 42., p. 89). Cho trước 2 điểm A, B . (a) Vẽ đường thẳng m đi qua A, B ; (b) Vẽ đường thẳng n đi qua A nhưng không đi qua B ; (c) Vẽ đường thẳng p không có điểm chung nào với đường thẳng m .
- 13 ([Tuy23], 43., p. 89). Cho trước 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xác định điểm M sao cho 3 điểm M, A, B thẳng hàng; 3 điểm M, C, D thẳng hàng.
- 14 ([Tuy23], 44., p. 89). Cho 3 điểm C, O, D thẳng hàng. Biết điểm C không nằm giữa 2 điểm O, D , điểm O không nằm giữa 2 điểm C, D . Hỏi trong 3 điểm đã cho, điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 15 ([Tuy23], 45., p. 89). Cho 3 điểm A, B, C trong đó không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại. Hỏi 3 điểm A, B, C có thẳng hàng không?
- 16 ([Tuy23], 46., p. 89). Cho trước 6 điểm. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi: (a) Nếu trong 6 điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu trong 6 điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 17 ([Tuy23], 47., p. 89). Giải bóng đá vô địch quốc gia hạng chuyên nghiệp có 16 đội tham gia đấu vòng tròn 2 lượt đi & về. Tính tổng số trận đấu.
- 18 ([Tuy23], 48., p. 89). Cho trước n điểm, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Biết số đường thẳng vẽ được là 36, tính giá trị của n .
- 19 ([Tuy23], 49., p. 89). Cho 11 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi: (a) Nếu trong số đó không có 3 đường thẳng nào cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng? (b) Nếu trong 11 đường thẳng đó có đúng 5 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng?
- 20 ([Tuy23], 50., p. 90). Cho trước n điểm, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Tìm n biết nếu có thêm 1 điểm (không thẳng hàng với bất kỳ 2 điểm nào trong số n điểm đã cho) thì số đường thẳng vẽ được tăng thêm là 8.
- 21 ([Tuy23], 51., p. 90). Cho trước 13 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Nếu ta bớt đi 4 điểm thì số đường thẳng vẽ được giảm đi bao nhiêu?
- 22 ([Tuy23], 52., p. 90). Cho trước n điểm, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng, tính n .
- 23 ([Bin23], VD1, p. 64). Cho 2 đường thẳng cắt nhau. Nếu vẽ thêm 1 đường thẳng thứ 3 cắt cả 2 đường thẳng trên thì số giao điểm của các đường thẳng thay đổi như thế nào?
- 24 ([Bin23], VD2, p. 64). Giải thích vì sao 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào.
- 25 ([Bin23], 2., p. 65). Vẽ 5 điểm A, B, C, D, O sao cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm B, C, D thẳng hàng, 3 điểm C, D, O không thẳng hàng. (a) A, B, D có thẳng hàng không? Vì sao? (b) Kể các đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm trong 5 điểm nói trên. Kể tên các đường thẳng trong hình vẽ (các đường thẳng trùng nhau chỉ kể là 1 đường thẳng).

- 26 ([Bin23], 3., p. 65). Cho các điểm A, B, C, D, E thuộc cùng 1 đường thẳng theo thứ tự ấy. Điểm C nằm giữa 2 điểm nào? Điểm C không nằm giữa 2 điểm nào?
- 27 ([Bin23], 4., p. 65). Cho A, B, C là 3 điểm thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu A không nằm giữa B & C , B không nằm giữa A & C ?
- 28 ([Bin23], 5., p. 65). Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó điểm B nằm giữa 2 điểm A & C , điểm B nằm giữa A & D . Có thể khẳng định điểm D nằm giữa B & C không?
- 29 ([Bin23], 6., p. 65). (a) Xếp 10 điểm thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 điểm. (b) Xếp 7 điểm thành 6 hàng, mỗi hàng có 3 điểm. (c) Người ta trồng 12 cây thành 6 hàng, mỗi hàng có 4 cây. Vẽ sơ đồ vị trí của 12 cây đó.
- 30 ([BC23], VD1.1, p. 6). Vẽ 5 điểm A, B, C, M, N trong đó 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm A, B, M không thẳng hàng & 3 điểm A, B, N thẳng hàng. (a) Giải thích vì sao vẽ được như vậy. (b) Chứng minh 4 điểm A, B, C, N cùng thuộc 1 đường thẳng d . (c) Đ/S? $A \in d, B \notin d, M \in d, N \notin d$. (d) 2 đường thẳng AN, BC có phân biệt không? 2 đường thẳng AB, MN trùng nhau không? (e) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp 2 điểm trong số 5 điểm đó.
- 31 ([BC23], VD1.2, p. 7). (a) Cho 4 điểm phân biệt. Cứ qua 2 điểm, vẽ được 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng. (b) Qua 5 điểm vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng?
- 32 ([BC23], VD1.3, p. 9). Cho 5 điểm A, B, C, D, E, F lần lượt cùng thuộc 1 đường thẳng d . (a) C nằm giữa 2 điểm nào? (b) B nằm giữa 2 điểm nào? (c) E không nằm giữa 2 điểm nào?
- 33 ([BC23], VD1.4, p. 9). Cho 5 điểm A, B, C, D, E, F . Biết 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm B, C, E thẳng hàng, 3 điểm C, E, F thẳng hàng. Chứng minh 5 điểm A, B, C, D, E, F thẳng hàng.

2 Line segment – Đoạn Thẳng

[1] Đoạn thẳng AB là hình gồm 2 điểm A, B & tất cả các điểm nằm giữa A, B . Đoạn thẳng AB còn gọi là đoạn thẳng BA . 2 điểm A, B là 2 *mút* (hoặc 2 *đầu*) của đoạn thẳng AB . Mỗi đoạn thẳng có 1 độ dài. Độ dài đoạn thẳng là 1 số lớn hơn 0. [2] Có thể so sánh 2 đoạn thẳng bằng cách so sánh độ dài của chúng. [3] 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm O . Điểm O gọi là *giao điểm* của 2 đoạn thẳng AB, CD , viết $AB \cap CD = \{O\}$. Điểm O nằm giữa 2 điểm A, B , điểm O nằm giữa 2 điểm C, D . [4] Đoạn thẳng AB & tia Ox cắt nhau tại điểm I , gọi là *giao điểm* của tia Ox & đoạn thẳng AB , viết $Ox \cap AB = \{I\}$. Điểm I nằm giữa 2 điểm A, B , 2 tia OI, Ox trùng nhau. [5] Đoạn thẳng AB & đường thẳng xy cắt nhau tại điểm K , gọi là *giao điểm* của đường thẳng xy & đoạn thẳng AB , viết $xy \cap AB = \{K\}$. Điểm K nằm giữa 2 điểm A, B , 2 tia Kx, Ky đối nhau. [6] Tính chất cộng các đoạn thẳng: Nếu điểm M nằm giữa A, B thì $AM + MB = AB$. Tổng quát: Nếu $A_1 A_2 \dots A_n = A_1 A_n$, i.e., độ dài đường gấp khúc $A_1 A_2 \dots A_n$ bằng độ dài đoạn thẳng $A_1 A_n$ thì A_1, A_2, \dots, A_n thẳng hàng theo thứ tự ấy. Nếu $AM + MB = AB$ thì M nằm giữa 2 điểm A, B . Nếu A, B thuộc tia Ox & $OA < OB$ thì A nằm giữa O, B . See [Wikipedia/line segment](#).

- 34 ([Bin23], VD7, p. 68). Chứng minh nếu 2 điểm A, B cùng thuộc tia Ox & $OA < OB$ thì điểm A nằm giữa 2 điểm O, B .
- 35 ([Bin23], VD8, p. 69). Cho đoạn thẳng $AB = 3$ cm. Điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 1$ cm. Tính đoạn thẳng AC .
- 36 ([Bin23], 15., p. 69). Cho đoạn thẳng AB . Trên tia đối của tia AB lấy C , trên tia đối của tia BA lấy D sao cho $BD = AC$. Chứng minh $BC = AD$.
- 37 ([Bin23], 16., p. 69). Cho đoạn thẳng AB có độ dài 8 cm. Trên tia AB lấy C sao cho $AC = 2$ cm, trên tia BA lấy D sao cho $BD = 3$ cm. Tính CB, CD .
- 38 ([Bin23], 17., p. 69). Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm. Tính AC .
- 39 ([Bin23], 18., p. 69). Trên tia Ox , vẽ 2 điểm A, B sao cho $OA = a, OB = b$. Điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = \frac{1}{2}BC$. Tính OC .
- 40 ([Bin23], 19., p. 69, triangle number). Gọi $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, là số điểm trên mặt phẳng sao cho chúng tạo thành 1 tam giác đều có cạnh bằng $n - 1$ đơn vị & 2 điểm gần nhau (không có điểm nào ở giữa 2 điểm đó trong số T_n điểm đó) thì cách nhau 1 đơn vị. Tìm công thức các số tam giác T_n .

See, e.g., [Wikipedia/số tam giác](#), [Wikipedia/triangle number](#). [Bin23, 20., p. 70].

- 41 ([Bin23], VD9, p. 70). Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh $AM = BM = \frac{1}{2}AB$.
- 42 ([Bin23], VD10, p. 71). Cho đoạn thẳng AB có độ dài a . Trên tia AB lấy M sao cho $AM = \frac{a}{2}$. Chứng minh M là trung điểm AB .
- 43 ([Bin23], VD11, p. 71). Cho đoạn thẳng $OA = a$, điểm B nằm trong đoạn thẳng OA sao cho $OB = b$. M, N, I lần lượt là trung điểm OA, OB, AB . Tính IM, IN theo a, b .

- 44 ([Bin23], 21., p. 71). Cho $\triangle ABC$, 2 đường trung tuyến BD, CE cắt nhau ở K . Kẻ đoạn thẳng DE . Đo độ dài rồi cho biết mỗi cạnh của $\triangle KDE$ bằng nửa cạnh nào của $\triangle KBC$.
- 45 ([Bin23], 22., p. 71). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm, điểm C nằm giữa A, B , 2 điểm D, E lần lượt là trung điểm AC, CB . Tính DE .
- 46 ([Bin23], 23., p. 71). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm, điểm C nằm giữa A, B sao cho $AC = 2$ cm, 2 điểm D, E lần lượt là trung điểm AC, CB . I là trung điểm DE . Tính DE, CI .
- 47 ([Bin23], 24., p. 71). Cho 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự ấy. M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . (a) Biết $AC = 4$ cm, $BD = 6$ cm, tính MN . (b) Biết $MN = 5$ cm, tính $AC + BD$.
- 48 ([Bin23], 25., p. 71). Cho đoạn thẳng AB với O là trung điểm. Điểm C thuộc đoạn thẳng OB , $OC = 1$ cm. Tính $CA - CB$.
- 49 ([Bin23], 26., p. 72). Cho đoạn thẳng AB , điểm C nằm trong đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AC . Biết $OB = 3$ cm. Tính $AB + BC$.
- 50 ([Bin23], 27., p. 72). (a) Cho đoạn thẳng $AB = 2a$, điểm C nằm giữa A, B , 2 điểm M, N lần lượt là trung điểm AC, BC . Chứng minh $MN = a$. (b) Kết quả (a) còn đúng không nếu điểm C thuộc đường thẳng AB ?
- 51 ([Bin23], 28., p. 72). Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB có $CA = a, CB = b$. I là trung điểm AB . Tính IC .
- 52 ([Bin23], 29., p. 72). Cho điểm C thuộc đường thẳng AB nhưng không thuộc đoạn thẳng AB . Biết $CA = a, CB = b$. I là trung điểm AB . Tính IC .
- 53 ([Bin23], 30., p. 72). Trên tia Ox có 2 điểm A, B , $OA = a, OB = b$. I là trung điểm AB . Tính OI .
- 54 ([Bin23], 31., p. 72). Cho điểm O nằm trong đoạn thẳng AB có $OA = a, Ob = b$. M, N, I lần lượt là trung điểm OA, OB, AB . Tính IM, IN .
- 55 ([BC23], VD1.11, p. 13). Vẽ 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm I . Kể tên các đoạn thẳng.
- 56 ([BC23], VD1.12, p. 13). Cho 2 đường thẳng phân biệt AB, CD . Biết đường thẳng AB cắt đoạn thẳng CD ở đường thẳng CD cắt đoạn thẳng AB . Chứng minh đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng CD .
- 57 ([BC23], VD1.13, p. 14). 2 đường thẳng d, d' cắt nhau tại O . Lấy 4 điểm A, B, M, N trên đường thẳng d' sao cho O nằm giữa A, B , B nằm giữa O, M , N nằm giữa O, A . d có cắt 3 đoạn thẳng AB, AM, AN không?
- 58 ([BC23], VD1.14, p. 15). Cho 4 điểm A, B, C, D . Qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Nếu không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (b) Nếu có 3 điểm thẳng hàng, giả sử là A, B, C , đếm số đoạn thẳng. (c) Xét trường hợp cả 4 điểm thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (d) Trong trường hợp 4 điểm thuộc đường thẳng xy , tính số đoạn thẳng, tia.
- 59 ([BC23], VD1.15, p. 16). Qua 2 điểm vẽ được 1 ở chỉ 1 đường thẳng. (a) Cho 3 điểm không thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong 3 điểm đó? (b) Cho 4 điểm, 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó? (c) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó?
- 60 ([BC23], VD1.16, p. 17). Cho 50 điểm. Vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 điểm trong 50 điểm đó nếu: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng? (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng? (c) Có đúng 10 điểm thẳng hàng. (d) Có đúng n điểm thẳng hàng với $n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 50$.
- 61 ([BC23], VD1.17, p. 18). Cho n điểm mà không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Biết $n = 123$. Tính số đường thẳng vẽ được. (b) Biết số đường thẳng vẽ được là 378. Tính số điểm n . (c) Số đường thẳng có thể là 2012 không?
- 62 ([BC23], VD1.18, p. 19). Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng khác nhau. (a) Có thể vẽ 4 đường thẳng đôi một cắt nhau sao cho số giao điểm của các đường thẳng là 1, 2, 3 không? (b) Tính số giao điểm vẽ được nhiều nhất.
- 63 ([BC23], VD1.19, p. 19). Biết bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau ở không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của các đường thẳng nếu có n đường thẳng: (a) $n \in \{3, 4, 5\}$. (b) $n = 100$. (c) Xét trường hợp tổng quát $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 64 ([BC23], 1.1., pp. 20–21). Cho 6 điểm A, B, C, O, M, N sao cho A, B, C không thẳng hàng, A, B, O thẳng hàng, O, C, M thẳng hàng, C, M, N thẳng hàng. (a) Chứng minh O, C, M, N cùng thuộc 1 đường thẳng. (b) 2 đường thẳng MN, AB trùng nhau không? (c) Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số được thẳng được vẽ ở liệt kê.
- 65 ([BC23], 1.2., p. 21). Chứng minh 5 điểm A, B, C, M, N thẳng hàng biết A, B, M thẳng hàng, B, C, N thẳng hàng, A, M, N thẳng hàng.
- 66 ([BC23], 1.3., p. 21). Cho 4 điểm A, B, C, M trong đó B nằm giữa A, C , M nằm giữa A, B . Trong 3 điểm B, C, M , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 67 ([BC23], 1.4., p. 21). Cho 2 tia AM, AN đối nhau. (a) Lấy điểm B sao cho điểm N nằm giữa 2 điểm A, B . A có nằm giữa 2 điểm M, N không? (b) Lấy điểm $C \neq A$ nằm giữa 2 điểm M, N . C có nằm giữa B, M không? (c) Trong 3 điểm A, B, C , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?

- 68** ([BC23], 1.5., p. 21). Cho 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) Đếm số đoạn thẳng & liệt kê. (b) Nếu 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng nhưng không theo thứ tự đó, đếm số đoạn thẳng. (c) Lấy điểm O không thuộc đường thẳng AB . Nối điểm O với A, B, C, D . Đếm số đoạn thẳng.
- 69** ([BC23], 1.6., p. 21). Cho n đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường nào đồng quy. (a) Tính số giao điểm của các đường thẳng khi $n = 124$. (b) Tìm n để số giao điểm bằng 124.
- 70** ([BC23], 1.7., p. 21). Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Tính số đường thẳng vẽ được khi $n = 24$. (b) Tìm n để số đường thẳng bằng 240.
- 71** ([BC23], 1.8., p. 21). Cho n điểm, nối từng cặp 2 điểm. (a) Tính số đoạn thẳng khi $n = 100$. (b) Tìm n để số đoạn thẳng bằng tổng các số từ 1 đến 99.
- 72** ([BC23], 1.9., p. 21). 5 đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
- 73** ([BC23], VD2.1, p. 22). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Lấy điểm M thuộc đường thẳng AB mà $BM = 2$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
- 74** ([BC23], VD2.2, p. 22). Cho đoạn thẳng $AB = a$. Lấy điểm M thuộc đường thẳng AB mà $BM = b$. Tính độ dài đoạn thẳng AM theo $a, b \in (0, \infty)$.
- 75** ([BC23], VD2.3, p. 23). Cho C là 1 điểm thuộc đoạn thẳng AB & không trùng với 2 điểm A, B . A có nằm giữa B, C không?
- 76** ([BC23], VD2.4, p. 24). 3 điểm A, B, C có thẳng hàng không nếu: (a) $AB = 2, BC = 7, AC = 5$? (b) $AB = 3, BC = 7, AC = 5$? (c) Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Tìm điều kiện của $a, b, c \in (0, \infty)$ để: (i) A, B, C thẳng hàng. (ii) A, B, C không thẳng hàng.
- 77** ([BC23], VD2.5, p. 24). Cho độ dài 3 đoạn thẳng $BC = a, CA = b, AB = c$. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại biết: $0 < \min\{b, c\} \leq \max\{b, c\} < a$ nhưng $a < b + c$?
- 78** ([BC23], 2.1., p. 25). Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự đó cùng thuộc 1 đường thẳng xy . (a) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng xy & liệt kê. (b) Chỉ ra các đoạn thẳng là tổng các đoạn thẳng khác.
- 79** ([BC23], 2.2., p. 25). Cho 3 điểm A, B, C mà độ dài của 3 đoạn thẳng thỏa mãn $AB + BC > AC$. Có thể kết luận A, B, C không thẳng hàng không?
- 80** ([BC23], 2.3., p. 25). A, B, C có thẳng hàng không nếu: (a) $AB = \frac{1}{2}, BC = \frac{1}{3}, CA = \frac{1}{6}$? (b) $AB = 5, BC = 11, CA = 7$?
- 81** ([BC23], 2.4., p. 25). Cho A, B, C thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu: (a) $AB = 2, BC = 13, CA = 11$? (b) $AC = 7, BC = 11$?
- 82** ([BC23], 2.5., p. 25). Cho A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) So sánh AB, CD biết $AC = BD$. (b) So sánh AC, BD biết $AB = CD$.
- 83** ([BC23], 2.6., p. 25). A, B, O thuộc đường thẳng xy . Tính độ dài đoạn thẳng AB biết $OA + OB = a, OA - OB = b, 0 < b < a$.
- 84** ([BC23], 2.7., p. 25). Cho đoạn thẳng $AB = 5$. Trên tia BA lấy M sao cho $AM = 2$. (a) Trong 3 điểm A, B, M , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại? (b) Tính độ dài đoạn thẳng BM . (c) Lấy điểm N thuộc tia đối của tia BA sao cho $BN = 1$. Tính MN .
- 85** ([BC23], 2.8., p. 25). Cho đoạn thẳng $AB = 7$ & điểm M nằm giữa A, B sao cho $BM = 5$. Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = 7$. Chứng minh $AM = BN$.

2.1 Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng

[1] Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B & cách đều A, B . Điểm M cách đều A, B có nghĩa là độ dài 2 đoạn thẳng MA, MB bằng nhau: $MA = MB$. Trung điểm của đoạn thẳng AB còn được gọi là *điểm chính giữa* của đoạn thẳng AB . Mỗi đoạn thẳng chỉ có 1 trung điểm duy nhất. [2] Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì M nằm giữa 2 điểm A, B & $MA = MB$. [3] Tính chất trung điểm: Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì: (i) $AM = BM = \frac{1}{2}AB$. (ii) Các đoạn thẳng có chung 1 trung điểm: Cho 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng xy theo thứ tự đó. Nếu biết các đoạn thẳng AD, BC có chung trung điểm thì $AB = CD, AC = BD$. [4] Dấu hiệu trung điểm (nhận biết trung điểm của 1 đoạn thẳng): (i) Nếu trên đoạn thẳng AB tồn tại 1 điểm M sao cho $AM = \frac{1}{2}AB$ (hoặc $BM = \frac{1}{2}AB$) thì điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB . (ii) Cho 4 điểm A, B, C, D thuộc đường thẳng xy theo thứ tự đó. Nếu $AB = CD$ thì AD, BC có chung 1 trung điểm. Nếu $AC = BD$ thì AD, BC có chung 1 trung điểm.

86 ([BC23], VD3.1, p. 28). Cho 2 tia đối nhau Ox, Ox' . (a) Trên tia Ox lấy A sao cho $OA = 6$. Trên tia Ox' lấy B sao cho $OB = 6$. Chứng minh O là trung điểm đoạn thẳng AB . (b) Lấy C thuộc tia Ox' sao cho $OC = 3$. C là trung điểm của cá đoạn thẳng nào?

87 ([BC23], VD3., p. 28). Trên tia Ox lấy 3 điểm A, B, C sao cho $OA = 3, OB = 6, OC = 9$. (a) Trên tia Ox có bao nhiêu đoạn thẳng mà các điểm đầu là 2 trong số 4 điểm A, B, C, O & liệt kê. (b) Trong 4 điểm A, B, C, O , điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng đã liệt kê. (c) Chứng minh OC, AB có chung 1 trung điểm.

88 ([BC23], VD3.3, p. 29). Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB , C, D lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng AM, BM . E, G lần lượt là trung điểm của MC, MD . AB, EF có chung 1 trung điểm không?

89 ([BC23], VD3.4, p. 30). Ghi 5 điểm O, A, B, C, D tại các điểm biểu diễn số $0, 1, -2, -4, 4$ trên trục số. Có các điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng có điểm đầu là 2 trong số 5 điểm đã cho?

2.2 Compute length of a segment – Tính độ dài 1 đoạn thẳng

[1] Nếu M thuộc đoạn thẳng AB thì $AM + MB = AB$. [2] Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

90 ([BC23], VD3.5, p. 31). Cho đoạn thẳng AB & 1 điểm C nằm giữa 2 điểm A, B . M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . (a) Biết $AB = 20$. Tính độ dài đoạn thẳng MN . (b) Giả sử $MN = a$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

91 ([BC23], VD3.6, p. 32). Trên đường thẳng xy đặt điểm O . Lấy 2 điểm A, B thuộc đường thẳng xy sao cho $OA = a, OB = b, 0 < b < a$, trong đó O nằm giữa A, B . (a) Tính độ dài đoạn thẳng AB . (b) M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN . (c) C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tính độ dài đoạn thẳng OC . (d) 2 đoạn thẳng MC, AN có chung 1 trung điểm không?

92 ([BC23], VD3.7, pp. 32–33). Trên đường thẳng xy đặt điểm O . Lấy $A, B \in xy$ sao cho $OA = a, OB = b, 0 < b < a$, trong đó B nằm giữa O, A . (a) Tính độ dài đoạn thẳng AB . (b) M, N lần lượt là trung điểm OA, OB . Tính độ dài đoạn thẳng MN . (c) C là trung điểm đoạn thẳng AB . Tính độ dài đoạn thẳng OC . (d) 2 đoạn thẳng MC, AN có chung 1 trung điểm không?

93 ([BC23], VD3.8, p. 34). (a) Trên đường thẳng xy đặt 2 điểm A, B . O là trung điểm của AB . Lấy $M \in xy, M \notin \{A, B, O\}$. So sánh 2 đoạn thẳng MA, MB . (b) Trên đường thẳng xy đặt 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng xy sao cho $MB < \min\{MA, MC\}$.

94 ([BC23], 3.1., p. 36). Lấy 5 điểm A, B, C, D, E trên tia Ox sao cho $OA = 3, OB = 5, OC = 7, OD = 11, OE = 13$. (a) Điểm nào là trung điểm của đoạn thẳng nào? (b) Các đoạn thẳng nào có chung 1 trung điểm?

95 ([BC23], 3.2., p. 36). Cho O thuộc đường thẳng xy . Lấy A thuộc tia Ox mà $OA = 5$, B thuộc tia Oy mà $OB = 8$. Giả sử C thuộc tia Oy sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . (a) Tính độ dài đoạn thẳng BC . (b) Lấy điểm D thuộc tia Ox sao cho $OD = 8$. Chứng minh 2 đoạn thẳng AC, BD có chung 1 trung điểm.

96 ([BC23], 3.3., p. 36). Trên đoạn thẳng $AC = 12$, lấy B sao cho $AB = 5$. (a) Tính độ dài đoạn thẳng MN biết 2 điểm M, N lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng AB, BC . (b) Lấy điểm D thuộc tia đối của tia CA sao cho $CD = 7$. Chứng minh C là trung điểm đoạn thẳng BD . (c) N có là trung điểm đoạn thẳng MK nếu K là trung điểm đoạn thẳng CD không?

97 ([BC23], 3.4., p. 37). Cho 2 tia đối nhau Ox, Ox' . Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 1, OB = 7$. Trên tia Ox' lấy C sao cho $OC = 5$. A có là trung điểm của đoạn thẳng BC không?

98 ([BC23], 3.5., p. 37). Cho 4 điểm A, C, D, B theo thứ tự thuộc đường thẳng xy . Biết $AB = 6, AC = 2, CD = 1$. Chứng minh D là trung điểm đoạn thẳng AB .

99 ([BC23], 3.6., p. 37). Trên đường thẳng xy đặt 3 điểm O, A, B . Giả sử $OA = a, OB = a + b$. Tính khoảng cách giữa trung điểm M của OA & trung điểm N của OB .

100 ([BC23], 3.7., p. 37). Trên đường thẳng xy đặt 4 điểm phân biệt A, B, C, D theo thứ tự đó sao cho $AB = 60, BC = 20, CD = 60$. Các cặp đoạn thẳng nào có chung trung điểm?

101 ([BC23], 3.8., p. 37). Cho C thuộc tia đối của tia AB hoặc tia đối của tia BA . Chứng minh $CM = \frac{1}{2}(AC + BC)$ với M là trung điểm đoạn thẳng AB .

102 ([BC23], 3.9., p. 37). Cho đoạn thẳng $AA_0 = 1$. (a) Lấy A_1 là trung điểm đoạn thẳng AA_0 . Tính tỷ số $\frac{AA_0}{AA_1}$. (b) Tương tự, lấy các điểm $A_2, A_3, \dots, A_{2012}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AA_1, AA_2, \dots, AA_{2021}$. Đặt $S := \sum_{i=1}^{2012} \frac{AA_0}{AA_i} = \frac{AA_0}{AA_1} + \frac{AA_0}{AA_2} + \dots + \frac{AA_0}{AA_{2012}}$. So sánh S, S^{2013} .

3 Ray – Tia

[1] Hình gồm điểm O & 1 phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O gọi là 1 tia gốc O . Tia Ox còn gọi là 1 nửa đường thẳng gốc O . Tia Ox không bị giới hạn về phía x . [2] 2 tia chung gốc Ox, Oy tạo thành đường thẳng xy gọi là 2 tia đối nhau. Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của 2 tia đối nhau. [3] Cho 2 tia chung gốc Ox, Oy , có: hoặc đó là 2 tia đối nhau, hoặc là 2 tia trùng nhau, hoặc là 2 tia không đối nhau, không trùng nhau. [4] Về thứ tự của 3 điểm trên 1 đường thẳng: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, nếu 2 tia AB, AC đối nhau thì điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . [5] Về sự xác định tia: Nếu điểm A nằm giữa 2 điểm B, C thì 2 tia AB, AC đối nhau, 2 tia BA, BC trùng nhau, 2 tia CA, CB trùng nhau.

103 ([Bin23], VD3, p. 66). Cho 3 điểm A, B, C trong đó 2 tia BA, BC đối nhau. Trong 3 điểm A, B, C điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?

104 ([Bin23], VD4, p. 66). Điểm B nằm giữa 2 điểm A, C . Tìm các tia đối nhau, trùng nhau.

105 ([Bin23], VD5, p. 66). Cho 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa 2 đầu của mỗi đoạn thẳng. (a) Kể tên các đoạn thẳng. (b) Điểm O là điểm chung của 2 đoạn thẳng nào?

[Bin23, VD6, p. 66, 14., p. 68].

106 ([Bin23], 7., p. 67). O là 1 điểm của đường thẳng xy . Vẽ điểm A thuộc tia Ox , vẽ 2 điểm B, C thuộc tia Oy sao cho C nằm giữa B, O . (a) Đếm số tia, số đoạn thẳng. (b) Kể tên các cặp tia đối nhau.

107 ([Bin23], 8., p. 67). Cho 5 điểm A, B, C, M, N thỏa điểm C nằm giữa A, B , điểm M nằm giữa A, C , điểm N nằm giữa B, C . (a) Tia CM, CN trùng với tia nào? (b) Vì sao điểm C nằm giữa M, N ?

108 ([Bin23], 9., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . Vì sao điểm B nằm giữa A, D ?

109 ([Bin23], 10., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D nằm giữa 2 điểm B, C . Điểm D có nằm giữa A, B không?

110 ([Bin23], 11., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D thuộc tia BC & không trùng B . Điểm B có nằm giữa A, D không?

111 ([Bin23], 12., p. 67). Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Vẽ đường thẳng a không đi qua A, B, C sao cho đường thẳng a : (a) Cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . (b) Không cắt mỗi đoạn thẳng AB, BC, CA .

112 ([Bin23], 13., p. 67). (a) Vẽ 6 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác. (b) Vẽ 8 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.

113 ([BC23], VD1.5, p. 10). Cho điểm O thuộc đường thẳng xx' . Lấy 2 điểm A, B thuộc tia Ox sao cho A nằm giữa B, O . Đếm số tia. Đếm số cặp tia đối nhau.

114 ([BC23], VD1.6, p. 11). Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Đặt tên đường thẳng BC là xx' , đường thẳng CA là yy' & đường thẳng AB là zz' . Liệt kê các cặp tia đối nhau, trùng nhau.

115 ([BC23], VD1.7, p. 11). Cho 3 điểm A, B, C . (a) Khi nào 2 tia BA, BC đối nhau? (b) Khi nào 2 tia CA, CB trùng nhau? (c) Khi nào 2 tia AB, AC không là 2 tia đối nhau & cùng không là 2 tia trùng nhau?

116 ([BC23], VD1.8, p. 12). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C . Điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . C có nằm giữa A, D không?

117 ([BC23], VD1.9, p. 12). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, D & điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . C có nằm giữa A, B không?

118 ([BC23], VD1.10, p. 12). Cho điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . Biết M nằm giữa A, B , N nằm giữa A, C . A có nằm giữa M, N không?

3.1 Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia

[1] Hình gồm đường thẳng a & 1 phần mặt phẳng bị chia ra bởi a gọi là 1 nửa mặt phẳng bờ a . 2 nửa mặt phẳng (I), (II) có chung bờ a gọi là 2 nửa mặt phẳng đối nhau. [2] Mỗi đường thẳng a chia mặt phẳng thành 2 phần: Nếu 2 điểm A, B thuộc 1 phần thì đường thẳng a không cắt đoạn thẳng AB . Nếu 2 điểm A, B thuộc 2 phần khác nhau thì đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB . [3] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 3 tia Ox, Oy, Oz chung gốc O . Nếu có điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy , $A \neq O, B \neq O$, mà tia Oz cắt đoạn thẳng AB tại điểm I nằm giữa A, B thì tia Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy . [4] Nếu 2 tia Ox, Oy đối nhau thì mọi tia Oz khác Ox, Oy đều nằm giữa 2 tia Ox, Oy . [5] Dấu hiệu đường thẳng cắt đoạn thẳng: ĐỊNH LÝ PASCH VỀ TAM GIÁC: Có 3 điểm A, B, C không thẳng hàng & không điểm nào thuộc đường thẳng a . Nếu đường thẳng a cắt đoạn thẳng BC thì đường thẳng a hoặc cắt đoạn thẳng AB hoặc cắt đoạn thẳng AC . [6] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 2 tia Oy, Oz cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox . Biết tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz . Nếu tia Om nằm giữa 2 tia Oy, Oz , hoặc tia Om nằm giữa 2 tia Ox, Oy , thì tia Om nằm giữa 2 tia Ox, Oz .

119 ([BC23], VD4.1, p. 40). Cho 4 điểm O, A, B, C trong đó A, B, C thẳng hàng. Biết A không nằm giữa B, C , B không nằm giữa A, C . (a) Trong 3 tia OA, OB, OC , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Vẽ tia Om là tia đối của tia OC , $M \neq O$. Trong 3 tia OA, OB, OM , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

4 Angle – Góc

[1] Góc là 1 hình gồm 2 tia chung gốc. Gốc chung của tia gọi là đỉnh của góc, 2 tia gọi là 2 cạnh của góc. Có nhiều cách ký hiệu 1 góc, e.g., góc xOy , góc MON , góc O , $\angle xOy$, \widehat{xOy} , \widehat{MON} . [2] Góc bẹt là góc có 2 cạnh là 2 tia đối nhau. [3] Để vẽ góc thì vẽ đỉnh & vẽ 2 cạnh của góc. Dùng thước đo góc để đo độ lớn của 1 góc.

120 ([Bin23], VD12, p. 72). Cho đường thẳng a & 3 điểm A, B, C sao cho a không cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?

121 ([Bin23], VD1, p. 73). Cho 5 tia chung gốc OA, OB, OC, OD, OE . Kể tên các góc.

122 ([Bin23], 32., p. 73). Cho 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a , trong đó a cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?

- 123** ([Bin23], 33., p. 73). Cho 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a sao cho a cắt đoạn thẳng AB , không cắt đoạn thẳng BC . a có cắt đoạn thẳng AC không?
- 124** ([Bin23], 34., p. 73). 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a . Chứng minh hoặc đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong 3 đoạn thẳng AB, BC, CA , hoặc đường thẳng a chỉ cắt 2 trong 3 đoạn thẳng đó.
- 125** ([Bin23], 35., p. 73). 4 điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a . Chứng minh a hoặc không cắt, hoặc cắt 3, hoặc cắt 4 đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD .
- 126** ([Bin23], 36., p. 73). Cho góc bẹt xOy , vẽ 3 tia Oa, Ob, Oc thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ xy . Đếm số góc \angle kể tên chúng.
- 127** ([BC23], VD4.2, p. 41). Đếm số góc tạo bởi: (a) 3 tia chung gốc OA, OB, OC theo thứ tự đó. (b) 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD theo thứ tự đó. (c) 5 tia chung gốc OA, OB, OC, OD, OE theo thứ tự đó. (d) 100 tia chung gốc. (e) $n \in \mathbb{N}^*$ tia chung gốc.
- 128** ([BC23], 4.1., p. 42). Lấy 2 điểm M, N trên tia Ox và P thuộc Oy là tia đối của tia Ox , M, N, P khác O . (a) Liệt kê các tia có trên đường thẳng xy . (b) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng xy và liệt kê. (c) O thuộc các đoạn thẳng nào?
- 129** ([BC23], 4.2., p. 42). Cho A, B, C không thuộc đường thẳng a . (a) a có thể cắt chỉ 1 trong 3 đoạn thẳng AB, BC, CA được không? (b) Biết a không cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?
- 130** ([BC23], 4.3., pp. 42–43). Cho đường thẳng a . (a) Nếu 4 điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a , hỏi a có thể cắt bao nhiêu đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD ? (b) Nếu 4 điểm A, B, C, D không thuộc đường thẳng a mà đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB, AC, CD thì a có cắt đoạn thẳng AD không?
- 131** ([BC23], 4.4., p. 43). Cho M nằm giữa 2 điểm A, B . Lấy O không thuộc đường thẳng AB . Vẽ 3 tia OA, OB, OM . (a) Trong 3 tia OA, OB, OM thì tia nào không nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Lấy N sao cho A nằm giữa O, N . Trong 2 tia OM, ON thì tia nào cắt đoạn thẳng BN ?
- 132** ([BC23], 4.5., p. 43). Cho 3 điểm A, B, C nằm ngoài đường thẳng a . (a) Biết a cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không? (b) Chứng minh nếu đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB và không cắt đoạn thẳng AC thì a sẽ cắt đoạn thẳng BC .

4.1 Số đo góc

[1] Mỗi góc có 1 số đo, số đo của mỗi góc $\leq 180^\circ$. Đơn vị của góc là độ, phút, giây. Các góc đặc biệt: góc nhọn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, góc vuông $\alpha = 90^\circ$, góc tù $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, góc bẹt $\alpha = 180^\circ$. [2] So sánh 2 góc bằng cách so sánh các số đo của chúng. [3] Nếu tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$. [4] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu có đẳng thức về góc $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz . [5] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu 2 tia Oy, Oz cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox & có $\widehat{xOy} < \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz .

133 ([Bin23], VD14, p. 74). Cho tia Oc nằm giữa 2 tia Oa, Ob không đối nhau, tia Om nằm giữa tia Oa, Oc , tia On nằm giữa 2 tia Ob, Oc . Tia Oc có nằm giữa 2 tia Om, On không?

134 ([Bin23], VD15, p. 74). Chứng minh nếu 1 đường thẳng không đi qua các đỉnh của 1 tam giác và cắt 1 cạnh của tam giác ấy thì nó cắt 1 và chỉ 1 trong 2 cạnh còn lại.

135 ([Bin23], VD16, p. 74). Cho góc tù AOB . Vẽ 2 tia OC, OD nằm trong góc AOB sao cho AOC, BOD là 2 góc vuông. Chứng minh: (a) $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$. (b) $\widehat{AOB}, \widehat{COD}$ bù nhau.

136 ([Bin23], 37., p. 75). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D thuộc tia BC và không trùng B , điểm O nằm ngoài đường thẳng AC . Trong 3 tia OA, OB, OD , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

137 ([Bin23], 38., p. 75). Cho 2 tia Oa, Ob không đối nhau. Trên tia Oa lấy $A \neq O$, trên tia Ob lấy $B \neq O$. 1 điểm C bất kỳ nằm giữa A, B . Vẽ điểm M sao cho điểm O nằm giữa C, M . (a) Chứng minh tia OC nằm giữa 2 tia OA, OB . (b) Trong 3 tia OA, OB, OM , có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại không? Phát biểu thành 1 tính chất.

138 ([Bin23], 39., p. 75). Có thể khẳng định trong 3 tia chung gốc, bao giờ cũng có 1 tia nằm giữa 2 tia còn lại không?

139 ([Bin23], 40., p. 75). 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau ở O . Biết $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 5^\circ$. Tính $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}, \widehat{AOD}$.

140 ([Bin23], 41., p. 75). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, D , điểm O nằm ngoài đường thẳng AD . Biết $\widehat{AOD} = 80^\circ, \widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính \widehat{BOD} .

141 ([Bin23], 42., p. 75). Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$, vẽ tia Oz thỏa $\widehat{yOz} = 30^\circ$. (a) Tia Oz có xác định duy nhất không? (b) Tính \widehat{xOz} trong từng trường hợp.

142 ([Bin23], 43., p. 75). 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau ở O . Biết $\widehat{AOC} = 70^\circ$. Tính $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}$.

143 ([Bin23], 44., p. 75). Tính góc tạo bởi kim giờ và kim phút của đồng hồ lúc: (a) 2:10. (b) 10:42.

144 ([Bin23], 45., p. 76). Cho $\triangle ABC$, D nằm giữa A, C , E nằm giữa A, B . Chứng minh đường thẳng BD cắt đoạn thẳng CE , đường thẳng CE cắt đoạn thẳng BD .

145 ([Bin23], 46., p. 76). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh bao giờ cũng vẽ được 1 đường thẳng không đi qua 3 đỉnh của $\triangle ABC$ & cắt cả 3 tia AB, BC, CA .

146 ([Bin23], 47., p. 76). Cho điểm O nằm trong $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) Tia BO cắt đoạn thẳng AC tại 1 điểm D nằm giữa A, C . (b) Điểm O nằm giữa B, D . (c) Trong 3 tia OA, OB, OC , không có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại.

147 ([BC23], VD5.1, p. 44). Cho 3 tia Ox, Oy, Oz . Tính \widehat{yOz} nếu: (a) Tia Ox nằm giữa 2 tia Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 80^\circ, \widehat{xOz} = 30^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$.

148 ([BC23], VD5.2, p. 45). Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ, \widehat{yOz} = 80^\circ, \widehat{zOx} = 35^\circ$. Trong 3 tia Ox, Oy, Oz thì tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

4.2 2 góc bù nhau, phụ nhau

[1] 2 góc kề nhau là 2 góc có 1 cạnh chung & 2 cạnh còn lại nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung. [2] 2 góc phụ nhau là 2 góc có tổng số đo bằng 90° . 2 góc bù nhau là 2 góc có tổng số đo bằng 180° . [3] 2 góc kề bù là 2 góc vừa kề nhau, vừa bù nhau. [4] Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia Ox , bao giờ cũng vẽ được 1 & chỉ 1 tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = \alpha$. [5] Dấu hiệu về tia đối nhau: Nếu $\widehat{xOy}, \widehat{yOz}$ kề nhau mà $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ thì tia Ox, Oz đối nhau. [6] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Cho 2 tia đối nhau Ox, Oy & 2 điểm A, B thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy . Biết $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta$. Nếu $\alpha + \beta > 180^\circ$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia OA, OB . Nếu $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ thì tia Ox nằm giữa 2 tia OA, OB .

149 ([BC23], VD5.3, p. 47). Cho góc bẹt xOy . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ xy , vẽ 3 tia OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOx} = 35^\circ, \widehat{BOx} = \frac{1}{2}\widehat{AOx}, \widehat{COy} = \frac{1}{2}\widehat{AOy}$. Tính \widehat{BOC} .

150 ([BC23], 5.1., p. 48). Cho 3 tia chung gốc Ox, Oy, Oz sao cho tia đối của tia Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy . Chứng minh $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOx} = 360^\circ$.

151 ([BC23], 5.2., p. 48). Cho $\widehat{xOy} = 180^\circ$. Vẽ 2 tia OM, ON cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ xy sao cho $\widehat{MOx} = \alpha, \widehat{NOy} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Tính \widehat{MON} .

152 ([BC23], 5.3., p. 48). Cho $\widehat{xOy} = 105^\circ, \widehat{xOz} = 125^\circ$. Tính \widehat{yOz} .

153 ([BC23], 5.4., p. 48). Cho 3 tia chung gốc OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = 40^\circ, \widehat{AOC} = 35^\circ$. (a) Tính \widehat{BOC} . (b) Vẽ tia OD là tia đối của tia OA . Tính $\widehat{BOD}, \widehat{COD}$.

154 ([BC23], 5.5., p. 48). Cho 3 đường thẳng AM, BN, CD đồng quy tại O . (a) Liệt kê các góc kề với \widehat{AOD} . (b) Liệt kê các góc kề bù với \widehat{AOD} . (c) Tìm các góc bằng nhau.

155 ([BC23], 5.6., p. 48). Cho 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O . Tính $\widehat{BOC}, \widehat{BOD}$ nếu: (a) $\widehat{AOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. (b) Biết $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$.

156 ([BC23], 5.7., p. 48). Cho 2 tia đối nhau OA, OB . Chứng minh 2 tia OM, ON đối nhau, biết 2 tia OM, ON nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB mà $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$.

4.3 2 góc kề nhau

157 ([Bin23], VD17, p. 76). Chứng minh: (a) Nếu 2 góc kề nhau có 2 cạnh ngoài là 2 tia đối nhau thì 2 góc đó bù nhau. (b) Nếu 2 góc kề nhau mà bù nhau thì 2 cạnh ngoài của chúng là 2 tia đối nhau.

158 ([Bin23], VD18, p. 77). Cho 3 tia chung gốc OA, OB, OC . Tính \widehat{BOC} biết: (a) $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 30^\circ$. (b) $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 80^\circ$. (c) $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

159 ([Bin23], 48., p. 78). Cho 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy ở O , trong đó tia OB nằm giữa 2 tia OA, OC . Kể tên các góc kề với \widehat{AOB} .

160 ([Bin23], 49., p. 78). Cho 2 tia Ox, Oy đối nhau. Trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Ox , vẽ 2 tia Om, On sao cho $\widehat{xOm} = 70^\circ, \widehat{yOn} = 70^\circ$. Chứng minh 2 tia Om, On đối nhau.

161 ([Bin23], 50., p. 78). Cho $\widehat{xOy}, \widehat{xOz}$ kề nhau. Tính \widehat{yOz} biết: (a) $\widehat{xOy} = 40^\circ, \widehat{xOz} = 140^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = 50^\circ, \widehat{xOz} = 70^\circ$. (c) $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 130^\circ$. (d) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

162 ([Bin23], 51., p. 78). Cho 3 tia Ox, Oy, Oz . Tính \widehat{yOz} biết: (a) $\widehat{xOy} = 60^\circ, \widehat{xOz} = 40^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 100^\circ$. (c) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

163 ([Bin23], 52., p. 78). Cho 4 tia OA, OB, OC, OD tạo thành 4 góc AOB, BOC, COD, DOA không có điểm trong chung. Tính số đo mỗi góc ấy biết: (a) $\widehat{BOC} = 3\widehat{AOB}, \widehat{COD} = 5\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = 6\widehat{AOB}$. (b) $\widehat{BOC} = a\widehat{AOB}, \widehat{COD} = b\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = c\widehat{AOB}$ với $a, b, c > 0$.

164 ([Bin23], 52., p. 78). Cho 3 góc AOB, BOC, COD không có điểm trong chung & đều có số đo bằng α . Tính \widehat{AOD} .

4.4 Tia phân giác của 1 góc

[1] OM là tia phân giác của $\widehat{AOB} \Leftrightarrow$ Tia OM nằm giữa 2 tia OA, OB & $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. Đường thẳng chứa tia phân giác của 1 góc là đường phân giác của góc đó. Mỗi góc không là góc bẹt chỉ có 1 tia phân giác. [2] Nếu tia OM là phân giác của \widehat{AOB} thì: Tia OM nằm giữa 2 tia OA, OB , $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. [3] Tính chất phân giác của 1 góc: (i) Nếu OM là tia phân giác của \widehat{AOB} thì $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. (ii) Cho 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD xếp theo thứ tự đó mà $\widehat{AOD} < 180^\circ$. Nếu $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$ có chung tia phân giác OM thì $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. [4] Dấu hiệu nhận biết tia phân giác của 1 góc: (i) Nếu trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia OA vẽ 2 tia OB, OM sao cho $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ thì OM là tia phân giác của \widehat{AOB} . (ii) Cho 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD xếp theo thứ tự đó sao cho $\widehat{AOD} < 180^\circ$. Nếu $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ thì $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$ có chung tia phân giác.

165 ([BC23], VD6.1, p. 51). Cho 2 điểm A, B nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Ox . (a) Biết $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 30^\circ$. Chứng minh tia Ox là tia phân giác của \widehat{AOB} . (b) Cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 130^\circ$. Tia Ox có là tia phân giác của \widehat{AOB} ? (c) Cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. Tìm điều kiện của α để tia Ox là tia phân giác của \widehat{AOB} .

166 ([BC23], VD6.2, p. 52). Cho góc bẹt \widehat{AOB} . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 2 tia OM, OC sao cho $\widehat{AOM} = 50^\circ, \widehat{BOC} = 80^\circ$. Chứng minh tia OM là tia phân giác của \widehat{AOC} .

167 ([BC23], VD6.3, p. 52). Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ xy , vẽ 4 tia OA, OB, OC, OD sao cho $\widehat{AOx} = 30^\circ, \widehat{BOx} = 60^\circ, \widehat{COx} = 90^\circ, \widehat{DOx} = 120^\circ$. Tìm các tia phân giác của các góc.

168 ([BC23], VD6.4, p. 53). Cho $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$ không kề nhau. (a) Vẽ hình biết $\widehat{AOx} = 38^\circ, \widehat{BOx} = 112^\circ$. Trong 3 tia OA, OB, Ox , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Tính \widehat{AOB} . (c) Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOB} . Tính \widehat{MOx} . (d) Cho $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Tìm điều kiện giữa α, β để tia OA nằm giữa 2 tia OB, Ox . Tính \widehat{MOx} theo α, β .

169 ([BC23], VD6.5, p. 54). Cho $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$ kề nhau. Biết $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$. Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOB} . Tính \widehat{MOx} theo α, β .

170 ([BC23], VD6.6, p. 55). Cho $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ kề nhau. (a) Vẽ hình biết $\widehat{AOC} = 54^\circ, \widehat{BOC} = 118^\circ$. (b) Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOC} & tia phân giác ON của \widehat{BOC} . Tính \widehat{MON} . (c) Giả sử $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$. Tìm điều kiện của α, β để $\widehat{MON} = 45^\circ, \widehat{MON} = 90^\circ$, biết $0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$.

171 ([BC23], VD6.7, p. 56). Cho $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$. Biết $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Vẽ 2 tia phân giác OM, ON của $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$. Tính \widehat{MON} theo α, β .

172 ([BC23], VD6.8, p. 57). Vẽ $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ kề với \widehat{AOB} . (a) Tính tổng số đo $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$. (b) Chứng minh 2 tia phân giác OM, OM' của $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$ đối nhau.

173 ([BC23], 6.1., p. 58). Cho $\widehat{xOy} = 70^\circ$. Vẽ 2 tia phân giác OM, ON lần lượt của $\widehat{xOy}, \widehat{MOx}$. Tính $\widehat{MOy}, \widehat{MON}, \widehat{NOy}$.

174 ([BC23], 6.2., p. 58). Cho 2 tia đối nhau OA, OB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 2 tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = 140^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$. Tia OC có là tia phân giác của \widehat{BOD} ?

175 ([BC23], 6.3., pp. 58–59). Cho $\widehat{AOD} = 120^\circ$. Vẽ 2 tia OB, OC cùng thuộc 1 nửa mặt phẳng bờ chứa 2 tia OA, OD sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD}$. (a) Tìm các tia phân giác của các góc. (b) Nếu OM là tia phân giác của \widehat{AOD} thì OM có là tia phân giác của \widehat{BOC} ?

176 ([BC23], 6.4., p. 59). Cho $\widehat{AOB} = 80^\circ$. Vẽ tia OC nằm giữa 2 tia OA, OB sao cho $\widehat{AOC} = 30^\circ$. Vẽ tia OD nằm giữa 2 tia OA, OB sao cho $\widehat{COD} = 10^\circ$. OD có là tia phân giác của \widehat{AOB} ?

177 ([BC23], 6.5., p. 59). Trên đường thẳng xy lấy 1 điểm O . Vẽ $\widehat{AOx} = 90^\circ, \widehat{MOy} = 45^\circ$. (a) Nếu 2 tia OA, OM cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ xy thì tia OM có là tia phân giác của \widehat{AOy} ? (b) Chứng minh nếu 2 tia OA, OM nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy thì $\widehat{AOM} = \widehat{MOx}$. Trong trường hợp này tia OM có là tia phân giác của \widehat{AOx} ?

178 ([BC23], 6.6., p. 59). Cho 3 góc chung đỉnh $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$. Chứng minh tia đối của tia OA là tia phân giác của \widehat{BOC} .

179 ([BC23], 6.7., p. 59). Cho $\widehat{AOB} = 35^\circ$. Vẽ $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ cùng kề với \widehat{AOB} . Vẽ Ox, Oy là 2 tia phân giác của $\widehat{AOA'}, \widehat{BOB'}$. (a) Chứng minh 2 tia Ox, Oy không đối nhau. (b) Tính \widehat{AOB} để 2 tia Ox, Oy đối nhau.

180 ([BC23], 6.8., p. 59). Cho $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ cùng không kề với \widehat{AOB} . Vẽ 2 tia OM, OM' lần lượt là tia phân giác của $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$. (a) 2 tia OM, OM' đối nhau không? (b) Tính số đo góc hợp bởi các tia phân giác của $\widehat{AOB}, \widehat{BOA'}$.

181 ([BC23], 6.9., p. 59). Cho \widehat{BAC} . Vẽ \widehat{CAM} kề với \widehat{BAC} sao cho $\widehat{CAM} = \widehat{BAM} = \alpha$. (a) Chứng minh $\alpha \geq 90^\circ$. (b) Chứng minh tia AM là tia đối của tia phân giác của \widehat{BAC} .

5 Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác

[1] Đường tròn tâm O , bán kính R là hình gồm các điểm cách O 1 khoảng bằng R , ký hiệu $(O; R) := S_R(O) = \partial B_R(O) = \{M \in \mathbb{R}^2 | OM = R\}$. [2] Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn & các điểm nằm bên trong đường tròn: $B_R(O) := \{M \in \mathbb{R}^2 | OM \leq R\}$. [3] 2 điểm $A, B \in (O; R)$ chia đường tròn thành 2 cung tròn. Đoạn thẳng nối 2 điểm A, B là dây cung. Dây đi qua tâm là đường kính. [4] Tam giác ABC là hình gồm 3 đoạn thẳng AB, BC, CA khi 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, i.e., $\Delta ABC := AB \cup BC \cup CA, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2, C \notin AB$.

182 ([BC23], VD7.1, p. 60). Cho 5 điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O) . Đếm số dây cung, số cung tạo bởi 2 trong 5 điểm đó.

183 ([BC23], VD7.2, p. 61). Trên cạnh AC của ΔABC lấy điểm M . Vẽ đoạn thẳng BM . Tính \widehat{CBM} , biết $\widehat{ABC} = 70^\circ, \widehat{ABM} = 30^\circ$.

184 ([BC23], VD7.3, p. 61). Cho điểm M không thuộc đường thẳng xy . Lấy $A, B \in xy$ thì tồn tại 1 tam giác có đỉnh là điểm M & 2 đỉnh còn lại là 2 điểm A, B . (a) Nếu có thêm 1 điểm thứ 3 cũng thuộc đường thẳng xy thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là M & 2 đỉnh còn lại là 2 trong 3 điểm thuộc xy ? (b) Nếu có 100 điểm trên xy thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là M & 2 đỉnh còn lại là 2 trong số 100 điểm thuộc xy ?

185 ([BC23], VD7.4, pp. 61–62). (a) Vẽ ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ, AC = 9$. (b) Trên tia AC lấy điểm M sao cho $AM = 2$, trên tia CA lấy điểm D sao cho $CD = 5$. Chứng minh M là trung điểm đoạn thẳng AD . (c) Vẽ 2 đoạn thẳng BM, BD . Đếm số tam giác & liệt kê. (d) $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$ là góc của các tam giác nào? (e) Tìm các góc kề bù với $\widehat{BMC}, \widehat{BDC}$.

186 ([BC23], VD7.5, p. 62). Cho 6 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đoạn thẳng & tô đoạn thẳng đó bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 6 điểm đã cho & có các cạnh cùng được tô màu xanh hoặc cùng màu đỏ.

187 ([BC23], 7.1., p. 63). Cho ΔABC . Trên cạnh BC lấy 3 điểm D, I, K . Kẻ 3 đoạn thẳng BD, BI, BK . Liệt kê các tam giác.

188 ([BC23], 7.2., p. 63). Cho ΔABC . Lấy D, E lần lượt thuộc 2 cạnh AC, AB . 2 đoạn thẳng BD, CE giao nhau tại O . Nối AO . Đếm số tam giác.

189 ([BC23], 7.3., p. 63). Cho ΔABC . Đường thẳng a cắt cạnh AB tại D nằm giữa A, B , cắt cạnh AC tại E nằm giữa A, C . a có cắt cạnh BC không?

190 ([BC23], 7.4., p. 63). Cho A, B, C, D, E nằm trên 1 đường tròn. Nối từng cặp điểm. Đếm số tam giác & liệt kê.

6 Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc

191 ([Bin23], VD19, p. 78). (a) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng.

192 ([Bin23], VD20, p. 79). Trên mặt phẳng có 4 đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?

193 ([Bin23], VD21, p. 80). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Nối từng cặp 2 điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng. (a) Đếm số đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Đếm số đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. (c) Tính n biết có tất cả 1770 đoạn thẳng.

194 ([Bin23], VD22, p. 80). Cho ΔABC , D, E lần lượt nằm trong cạnh AC, AB , K là giao điểm của BD, CE . Kẻ đoạn thẳng DE . Đếm số tam giác.

195 ([Bin23], VD23, p. 81). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Vẽ n tia chung gốc. Đếm số góc.

196 ([Bin23], 54., p. 81). Cho n điểm A_1, A_2, \dots, A_n trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. (a) Kể tên các đường thẳng nếu $n = 4$. (b) Tính số đường thẳng nếu $n = 20$. (c) Tính số đường thẳng theo n . (d) Tính n biết số đường thẳng kẻ được là 1128. (e) Số đường thẳng có thể bằng 2004 không?

197 ([Bin23], 55., p. 81). Cho 100 điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.

198 ([Bin23], 56., p. 81). Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Biết có tất cả 105 đường thẳng. Tính n .

199 ([Bin23], 57., p. 81). Cho 4 điểm, bất cứ 2 điểm nào cũng có ít nhất 1 đường thẳng đi qua. Có thể có bao nhiêu đường thẳng?

200 ([Bin23], 58., p. 81). (a) Cho 3 đường thẳng cắt nhau đôi một. Có thể có bao nhiêu giao điểm? (b) Vẽ 3 đường thẳng sao cho số giao điểm (của 2 hoặc 3 đường thẳng) lần lượt là 0, 1, 2, 3.

201 ([Bin23], 59., p. 81). Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.

- 202** ([Bin23], 60., p. 81). Cho n đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Biết số giao điểm của đường thẳng đó là 780. Tính n .
- 203** ([Bin23], 61., p. 81). Cho 10 điểm. Nối từng cặp điểm trong 10 điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính số đoạn thẳng mà 2 mút thuộc tập 10 điểm đã cho, nếu trong các điểm đã cho: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng.
- 204** ([Bin23], 62., p. 82). Cho n điểm. Nối từng cặp điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính n biết có tất cả 435 đoạn thẳng.
- 205** ([Bin23], 63., p. 82). 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền. (a) 2 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (b) 3 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (c) 4 đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền? (d) $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền?
- 206** ([Bin23], 64., p. 82). Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a & 1 điểm nằm ngoài a . Đếm số tam giác có 3 đỉnh trong 11 điểm đó.
- 207** ([Bin23], 65., p. 82). Cho $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$. Trên tia Ox lấy 3 điểm không trùng O là A, B, C . Trên tia Oy lấy 4 điểm không trùng O là D, E, F, G . Đếm số tam giác mà 3 đỉnh nằm trong 8 điểm O, A, B, C, D, E, F, G .
- 208** ([Bin23], 66., p. 82). (a) Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n . (b) Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả m góc. Tính n theo m .
- 209** (Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng tổng quát). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (a) Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng. (b) Cho n điểm trong đó có đúng 1 bộ m điểm thẳng hàng với nhau, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng. (c) Cho n điểm trong đó có đúng m bộ điểm thẳng hàng với nhau lần lượt nằm trên các đường thẳng a_1, a_2, \dots, a_m . Biết đường thẳng a_i có đúng a_i điểm trong n điểm đã cho thẳng hàng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng.

7 Đếm Số. Đếm Hình

- 210** ([Bin23], VD24, p. 82). Đếm số số tự nhiên có 3 chữ số, các chữ số khác nhau, lập từ 3 trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.
- 211** ([Bin23], VD25, p. 83). Đếm số cách sắp xếp nhất, nhì, ba trong: (a) 6 đội bóng thi đấu. (b) $n \in \mathbb{N}$ đội bóng thi đấu.
- 212** ([Bin23], VD26, p. 83). Đếm số cách gọi tên tam giác có 3 đỉnh là A, B, C .
- 213** ([Bin23], VD27, p. 83). Đếm số cách giao hoán các thừa số của tích $abcd$.
- 214** ([Bin23], VD28, p. 84). Đếm số cách sắp xếp 5 người ngồi: (a) Trên 1 ghế dài. (b) Xung quanh 1 bàn tròn.
- 215** ([Bin23], VD29, p. 84). Đếm số đoạn thẳng mà 2 đầu mút là 2 trong 5 điểm đã cho.
- 216** ([Bin23], VD30, p. 84). Cho 9 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.
- 217** ([Bin23], VD31, p. 85). Trong số 4 học sinh giỏi Văn & 9 học sinh giỏi Toán, lập ra 1 nhóm gồm 7 học sinh, trong đó có ít nhất 2 học sinh giỏi Văn. Đếm số cách lập nhóm.
- 218** ([Bin23], VD32, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy. (c) Đếm số cách xếp m bi đen, n bi trắng thành 1 dãy với $m, n \in \mathbb{N}$.
- 219** ([Bin23], VD33, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy.
- 220** ([Bin23], VD34, p. 86). Đếm số số tự nhiên không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.
- 221** ([Bin23], VD35, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.
- 222** ([Bin23], VD36, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.
- 223** ([Bin23], 67., p. 87). Dùng 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 để: (a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, trong đó các chữ số khác nhau? Tính tổng các số được lập. (b) Lập được bao nhiêu số chẵn, số lẻ có 5 chữ số khác nhau? (c) Lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, trong đó 2 chữ số kề nhau phải khác nhau? (d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn?
- 224** ([Bin23], 68., p. 87). Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên: (a) Gồm 5 chữ số khác nhau? (b) Gồm 4 chữ số khác nhau. (c) Gồm 3 chữ số khác nhau. (d) Gồm 3 chữ số có thể giống nhau.
- 225** ([Bin23], 69., pp. 87–88). Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau thỏa 1 trong các điều kiện: (a) $\not\equiv 2$. (b) $\equiv 2$. (c) $\equiv 5$.
- 226** ([Bin23], 70., p. 88). (a) Dùng 3 chữ số 1, 2, 7 có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho 2 chữ số 2, 7 có mặt 1 lần, còn chữ số 1 có mặt 3 lần? (b) Như (a) nếu thêm điều kiện các số phải đếm lớn hơn 20000.

- 227 ([Bin23], 71., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các số 1, 2, 3 & : 9?
- 228 ([Bin23], 72., p. 88). Đếm số tự nhiên có 11 chữ số, gồm 5 chữ số 1 & 6 chữ số 2 sao cho đọc xuôi & đọc ngược đều giống nhau.
- 229 ([Bin23], 73., p. 88). Đếm số số tự nhiên có không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.
- 230 ([Bin23], 74., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số mà tích các chữ số bằng 24.
- 231 ([Bin23], 75., p. 88). Đếm số số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng tích các chữ số đó.
- 232 ([Bin23], 76., p. 88). Cho 10 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.
- 233 ([Bin23], 77., p. 88). Có n điểm trên mặt phẳng. Có tất cả 91 đoạn thẳng nối 2 trong n điểm đó. Tính n .
- 234 ([Bin23], 78., p. 88). Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 153 góc. Tính n .
- 235 ([Bin23], 79., p. 88). Đếm số cách gọi tên: (a) Hình vuông $ABCD$. (b) Đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 236 ([Bin23], 80., p. 88). Cho hình vuông 4×4 . Đếm số hình chữ nhật, số hình vuông.
- 237 ([Bin23], 81., p. 88). Có 12 điểm trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.
- 238 ([Bin23], 82., p. 88). Cho $\widehat{x\hat{A}y} \neq 180^\circ$. Trên tia Ax lấy 6 điểm khác A , trên tia Ay lấy 5 điểm khác A . Trong 12 điểm này, kể cả điểm A , 2 điểm nào cũng được nối với nhau bởi 1 đoạn thẳng. Đếm số tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm đó.
- 239 ([Bin23], 83., p. 89). Có 9 đội bóng tham dự 1 giải bóng đá, mỗi đội phải đấu 2 trận với mỗi đội khác, ở sân nhà & ở sân khách. Đếm số trận đấu.
- 240 ([Bin23], 84., p. 89). Có 2 viên bi đỏ giống nhau, 8 viên bi xanh giống nhau. Đếm số cách xếp thành 1 hàng gồm cả 10 viên bi.
- 241 ([Bin23], 85., p. 89). 1 ô tô có 8 chỗ, kể cả chỗ của người lái xe. Đếm số cách xếp chỗ 8 người trên xe, biết trong đó có 2 người biết lái xe.
- 242 ([Bin23], 86., p. 89). Có 2 cặp bạn ngồi trên 1 ghế băng có 4 chỗ để chụp ảnh. Đếm số cách sắp xếp sao cho 2 người cùng cặp phải ngồi cạnh nhau.
- 243 ([Bin23], 87., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn A, B, C, D, E ngồi trên 1 ghế dài sao cho A, B ngồi cạnh nhau.
- 244 ([Bin23], 88., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn A, B, C, D, E ngồi xung quanh 1 bàn tròn sao cho A, B ngồi cạnh nhau.
- 245 ([Bin23], 89., p. 89). 1 nhóm 5 bạn gồm 3 nam, 2 nữ xếp thành 1 hàng ngang để chụp ảnh, sao cho 2 bạn nữ không đứng cạnh nhau. Đếm số cách sắp xếp.
- 246 ([Bin23], 90., p. 89). Đếm số cách chọn 3 tấm ảnh từ 6 tấm ảnh khác nhau.
- 247 ([Bin23], 91., p. 89). Đếm số cách lập nhóm 3 người từ 1 tổ 10 người để làm nhiệm vụ trực nhật.
- 248 ([Bin23], 92., p. 89). 1 tổ học sinh có 5 nam, 3 nữ. Đếm số cách lập nhóm 5 người gồm 3 nam, 2 nữ.
- 249 ([Bin23], 93., p. 89). Đếm số cách chia 8 chiếc kẹo cho 3 người để ai cũng được nhận kẹo.

Tài liệu

- [BC23] Vũ Hữu Bình and Đàm Hiếu Chiến. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 6. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 108.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ 2. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 152.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá23] Đỗ Đức Thái. *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.