

Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions

Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 8 năm 2023

Mục lục

1	Tính Đơn Điệu của Hàm Số	1
2	Cực Trị của Hàm Số	2
3	GTLN & GTNN của Hàm Số	2
	Tài liệu	2

1 Tính Đơn Điệu của Hàm Số

Bài toán 1 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 1, p. 5). Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0, 1]$.

Bài toán 2 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 2, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.

Bài toán 3 (Quỳnh et al., 2022, H1, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Bài toán 4 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 3, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Bài toán 5 (Quỳnh et al., 2022, H2, p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$.

Bài toán 6 (Quỳnh et al., 2022, 1., p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. (c) $y = x + \frac{3}{x}$. (d) $y = x - \frac{2}{x}$. (e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (f) $y = \sqrt{4-x^2}$.

Bài toán 7 (Quỳnh et al., 2022, 2., p. 7). Chứng minh: (a) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số $y = \frac{-x^2-2x+3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Bài toán 8 (Quỳnh et al., 2022, 3., p. 8). Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên \mathbb{R} : (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$. (b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.

Bài toán 9 (Quỳnh et al., 2022, 4., p. 8). Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} ?

Bài toán 10 (Quỳnh et al., 2022, 5., p. 8). Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài toán 11 (Quỳnh et al., 2022, 6., p. 8). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$. (b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$. (c) $y = \frac{x^2-8x+9}{x-5}$. (d) $y = \sqrt{2x-x^2}$. (e) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$. (f) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$.

Bài toán 12 (Quỳnh et al., 2022, 7., p. 8). Chứng minh hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài toán 13 (Quỳnh et al., 2022, 8., pp. 8-9). Chứng minh bất đẳng thức: (a) $\sin x < x, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0; \sin x > x, \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$. (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. (c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0; \sin x < x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$.

Bài toán 14 (Quỳnh et al., 2022, 9., p. 9). Chứng minh: $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bài toán 15 (Quỳnh et al., 2022, 10., p. 9). Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

2 Cực Trị của Hàm Số

Bài toán 16 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

Bài toán 17 (Quỳnh et al., 2022, H1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.*

Bài toán 18 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 2, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$.*

Bài toán 19 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 3, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

Bài toán 20 (Quỳnh et al., 2022, H2, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2\sin 2x - 3$.*

Bài toán 21 (Quỳnh et al., 2022, 11., pp. 16–17). *Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$. (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (d) $f(x) = |x|(x + 2)$. (e) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$. (f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.*

Bài toán 22 (Quỳnh et al., 2022, 12., p. 17). *Tìm cực trị của hàm số: (a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$. (b) $y = \sqrt{8 - x^2}$. (c) $y = x - \sin 2x + 2$. (d) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.*

Bài toán 23 (Quỳnh et al., 2022, 13., p. 17). *Tìm 4 hệ số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$, và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.*

Bài toán 24 (Quỳnh et al., 2022, 14., p. 17). *Xác định 3 hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1, 0)$.*

Bài toán 25 (Quỳnh et al., 2022, 15., p. 17). *Chứng minh với mọi giá trị của m , hàm số $y = \frac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.*

3 GTLN & GTNN của Hàm Số

Tài liệu

Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Doan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng (2022). *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 231.