Một cách đổi biến và ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức

Nguyễn Quản Bá Hồng

20.08.2013

Tóm tắt nội dung

Chuyên đề trình bày về một cách đổi biến đặc biệt, được giới thiệu trong quyển *Problems from the book*, nguồn [1]. Đồng thời, khai thác và mở rộng để tăng phạm vi ứng dụng cho phương pháp này.

1 Tổng quan về đề tài nghiên cứu

1.1 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Đề tài nghiên cứu này đề cập đến một phương pháp nhỏ, rất cơ bản trong chứng minh bất đẳng thức. Đó là phương pháp đổi biến (hay thường được gọi là đặt ẩn phụ). Nhưng trong chuyên đề này, chúng ta sẽ không thảo luận tất cả các cách, các phương pháp đổi biến, mà chỉ thảo luận riêng về một cách đổi biến trong số các cách đó mà thôi. Tuy nhiên, để mở ra cái nhìn rộng hơn cho đề tài, chúng tôi sẽ dành phần cuối trong chuyên đề này để tổng hợp các cách đổi biến hay trong giải toán đại số nói chung và trong chứng minh bất đẳng thức nói riêng. Và thêm một phần nữa để nêu ra một số bài toán hay có thể sử dụng phương pháp này để giải.
Cũng để phân biệt rõ ràng với các phương pháp khác, chúng tôi sẽ gọi đối tượng nghiên cứu trong chuyên đề này là cách đổi biến X. Ký hiệu này được sử dụng chung cho toàn bộ chuyên đề.

Phạm vi nghiên cứu: Vấn đề về *phạm vi* hay *khả năng ứng dụng* của một phương pháp, một kỹ thuật chứng minh thường được quan tâm đến rất nhiều. Chẳng hạn đối với một phương pháp, kỹ thuật nào đó, ta thường quan tâm để phạm vi ứng dụng của nó. Nó có thể giải được những bài toán như thế nào? Giải được nhiều bài toán hay không? Có thể đối phó được các bài toán khó hay không? Đối với bài toán như thể nào thì phương pháp đó trở nên vô dụng? Rất nhiều câu hỏi! Rõ ràng chúng ta đang quan tâm đến sự hiệu quả và *phạm vi ứng dụng* của một phương pháp.
Trong chuyên đề này, chúng tôi cũng hết sức quan tâm vấn đề đó. Đối với mảng đặc biệt như bất đẳng thức. Phương pháp nào cũng mang tính tương đối cả. Tùy vào bài toán cụ thể, mỗi phương pháp sẽ có hiệu quả nhất định. Có nhiều

bài toán khó, phải sử dụng đến phương pháp hiện đại mới có thể giải quyết được, trong khi các phương pháp truyền thống thì chẳng giúp được gì. Nhưng lại có những bài toán khác, chỉ có thể sử dụng phương pháp truyền thống mới có thể cho một lời giải ngắn và đẹp được, trong khi các phương pháp hiện đại trở nên vụng về và nặng nề về tính toán. Tất cả đều mang tính tuyệt đối! Quan trọng là chúng ta sử dụng các phương pháp đó như thế nào?
Một tư tưởng nhỏ của chuyên đề này mà chúng tôi muốn thể hiện, đó là *cải tiến những phương pháp đã có, để tăng hiệu quả, và phạm vi ứng dụng*. Mục đích của chúng tôi là:

1. Cải tiến những công cụ đơn giản.
2. Xây dựng công cụ mới từ những công cụ đã có.

Với hai mục đích này, chúng tôi sẽ cải tiến, tức là mở rộng và tổng quát một cách đổi biến đã được giới thiệu trong [1] để mở rộng phạm vi ứng dụng cho nó. Tiếp theo, từ cách đổi biến này, chúng tôi sẽ xây dựng một số phương pháp, kỹ thuật chứng minh mới. Suốt chuyên đề, các nhận xét sẽ giúp mọi người theo dõi hiệu quả và phạm vi ứng dụng của từng đối tượng được trình bày.

1.2 Cách trình bày đề tài nghiên cứu

Khi thực hiện chuyên đề này, chúng tôi mong muốn chuyên đề thật tự nhiên, logic và rõ ràng, nên sẽ trình bày theo mạch suy nghĩ. Thay vì cho bài toán và giải, chúng ta sẽ phát biểu vấn đề xuất phát, đặt vấn đề, giải quyết vấn đề, và cuối cùng là rút ra bài học kinh nghiệm từ những vấn đề đó.

1.3 Các vấn đề liên quan

Phần nhỏ này sẽ nêu ra một số điều quan trọng được tác giả chú trọng trong chuyên đề:

Tính thuần nhất: Theo [13], thì
"... Tính thuần nhất bậc, (đồng bậc, thuần nhất) là một tiêu chuẩn đầu tiên phải tính đến khi so sánh các đại lượng. Các bất đẳng thức cổ điển ta đã biết như bất đẳng thức giữa trung các đại lượng trung bình, Cauchy, Holder, Minkowski, Chebyshev,..., đều là các bất đẳng thức dạng đồng bậc..."
Chuyên đề này rất chú trọng đến tính thuần nhất bậc. Và quan trọng hơn, cách đổi biến được nghiên cứu trong chuyên đề này có tác dụng làm thuần nhất các bất đẳng thức không thuần nhất có điều kiện. Chúng ta sẽ hiểu rõ hơn vấn đề này ở các phần tiếp theo.

Kỹ thuật chuẩn hóa: Kỹ thuật này ngược lại với *thuần nhất hóa* bất đẳng thức. Đối với các bất đẳng thức thuần nhất, đôi khi phải chuẩn hóa để thêm điều kiện cụ thể nào đó thì mới có thể dễ dàng chứng minh được.

2 Các kết quả và ký hiệu được sử dụng trong chuyên đề

2.1 Bất đẳng thức AM - GM.

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2.2 Bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Cho 2 dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$.

2.3 Bất đẳng thức Schur.

Cho các số thực không âm a, b, c. Nếu $r \geq 0$ thì:

$$a^r (a - b)(a - c) + b^r (b - c)(b - a) + c^r (c - a)(c - b) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = 0, b = c$ hoặc $b = 0, c = a$ hoặc $c = 0, a = b$.

3 Giới thiệu về một cách đổi biến.

3.1 Giới thiệu chung về phương pháp đổi biến.

Nói về phương pháp đổi biến, hiện nay, có rất nhiều tài liệu về phương pháp này. Chẳng hạn như một số tài liệu được quan tâm nhiều nhất hiện nay như:

1. Võ Thành Văn, *Phương pháp đổi biến pqr và bất đẳng thức Schur.*
2. Bùi Việt Anh, *Phương pháp đổi biến GLA.* Geometrize Algebra.
3. Võ Quốc Bá Cẩn, *Phương pháp pqr.* nguồn [7]
4. Nguyễn Việt Hùng, *Đổi biến để chứng minh bất đẳng thức*. Kỷ yếu Chương trình Gặp Gỡ Toán Học năm 2011.
5. Nguyễn Văn Mậu, *Áp dụng phương pháp lượng giác để chứng minh bất đẳng thức Đại số*. Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ.

6. Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc 3 và các hệ thức lượng trong tam giác.* NXB Giáo Dục.

Những phương pháp vừa được nêu đều là phương pháp đổi biến cả. Nhưng mỗi phương pháp trong các phương pháp trên đều đòi hỏi một số kỹ thuật nhất định.

Chẳng hạn như với phương pháp đổi biến pqr , chúng ta cần phải nhớ khá nhiều kết quả về các đẳng thức đại số để biến đổi nhanh và một số kết quả cơ bản của phương pháp. Và đặc biệt trong 4), chúng ta phải trang bị thêm các định lý mạnh khác nữa. Còn đối với phương pháp đổi biến GLA (Sử dụng phương pháp hình học hóa đại số). Có thể nói đây là một phương pháp khá cầu kỳ, phải nhớ khá nhiều kết quả cũng như phải thành thạo trong việc biến đổi.

Các phương pháp trên đều là các phương pháp mạnh trong chứng minh bất đẳng thức. Nhưng theo quan điểm của chúng tôi, các phương pháp trên nặng về tính toán hơn kỹ thuật, cũng như nặng về tính chuyên nghiệp hơn tính sáng tạo trong chứng minh bất đẳng thức. Khi thực hiện đề tài này, chúng tôi đã chú trọng rất nhiều vào tính sáng tạo, mục đích là làm cách nào đó, có thể sử dụng những công cụ đơn giản nhất, cơ bản nhất, vào việc giải các bài toán khó. Làm như vậy mới thể hiện được tính sáng tạo cho đề tài.
Ngoài ra, chúng tôi cũng chú trọng việc xây dựng các ý tưởng mới hơn việc sử dụng đi, sử dụng lại những phương pháp cũ.

3.1.1 Một số nhận xét về phương pháp đổi biến

Phương pháp đổi biến có rất nhiều ứng dụng trong tất cả những bộ phận của Toán học. Chẳng hạn như đại số (phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức,...), giải tích (tích phân, nguyên hàm,...), số học,... đều có sử dụng ít nhiều đến phương pháp này.

Khi còn học THCS, chúng ta đã biết các cách đặt ẩn phụ để giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh các đẳng thức, hoặc biến đổi các hằng đẳng thức, khai thác các đẳng thức để giải quyết các bài toán thuần về đại số nào đấy. Nhìn chung, ở giai đoạn này, phương pháp đổi biến khá được ưa chuộng. Bằng chứng là trong các cuộc thi học sinh giỏi các cấp THCS, các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ chuyên, luôn có sự hiện diện của một câu phương trình, hệ phương trình, hoặc chứng minh bất đẳng thức trong đề thi. Từ đó, xuất hiện khá nhiều các tài liệu về "phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình, hệ phương trình", hay "đổi biến để chứng minh bất đẳng thức", phục vụ cho các kỳ thi này.

Đến khi lên THPT, các bài toán về phương trình, hệ phương trình càng đa dạng hơn. Đặc biệt, sự xuất hiện của các công cụ mạnh như đạo hàm, hàm số đã làm chúng ta lờ đi phương pháp hết sức cơ bản này.

Trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi THPT, các câu phương trình, hệ phương trình, bất đẳng thức sử dụng phương pháp đổi biến vẫn thường được ưa chuộng. Lý do rất đơn giản, học sinh thường quá lạm dụng các công cụ mạnh như khảo sát hàm số, các định lý của giải tích, mà quên đi những kỹ thuật, phương pháp cơ bản, nên thường bị sa lầy, hoặc mất quá nhiều thời gian vào các câu này.

Ngoài ứng dụng trong giải phương trình, hệ phương trình. Phương pháp đổi biến còn có ứng dụng nhiều trong lượng giác và giải tích. Chẳng hạn với các biểu thức lượng giác, ta thường biểu diễn chúng theo biến $t = \tan\frac{x}{2}$ để thuận tiện cho việc tính toán. Sử dụng phương pháp đổi biến thích hợp có thể giúp ta tính nhanh các tích phân. Ngoài ra còn nhiều ứng dụng khác nữa.

Nhận xét: Đây là một công cụ cơ bản, giúp ta có thể tính và biến đổi các biểu thức dễ dàng hơn, thay đổi cách nhìn về bài toán. Nếu bài toán khó nhìn, ta có thể sử dụng phương pháp đổi biến, biến bài toán về dạng dễ nhìn hơn. Ngoài ra, phương pháp này còn cho phép ta khai thác *các mối quan hệ nội tại, ràng buộc giữa các đối tượng* trong một bài toán. Các mối quan hệ nội tại này rất quan trọng, chúng tạo nên phần khó của bài toán. Muốn giải được một bài toán, trước hết, ta phải tìm hiểu yếu tố này của bài toán đó, từ đó, mới có thể đưa ra các lập luận và các đánh giá phù hợp.

Trong chuyên đề đề này, chúng tôi muốn đề cập tới ứng dụng của phương pháp đổi biến trong chứng minh bất đẳng thức. Đây là một đề tài hết sức cũ, bởi vì nó cơ bản. Xu hướng hiện nay của lĩnh vực bất đẳng thức, là tìm ra các phương pháp hiện đại, có thể giải quyết hàng loạt các bài toán về bất đẳng thức, (đây cũng là xu hướng chung, chứ không riêng gì mảng bất đẳng thức). Cho nên, các phương pháp cũ, cổ điển vẫn ở đó, chưa được khai thác nhiều.

Giới thiệu: Chúng tôi muốn bàn về một cách đổi biến hay, đã xuất hiện trong [1] và trên các diễn đoàn toán học. Đó là 2 kết quả sau:

1. Nếu $ab + bc + ca + abc = 4$ thì có cách đổi biến $a = \frac{2x}{y+z}, b = \frac{2y}{z+x} c = \frac{2z}{x+y}$.
2. Nếu $a + b + c + 2 = abc$ thì có cách đổi biến $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$.

Hai cách đổi biến này đã được trình bày kỹ trong [1].

Mục đích của chúng tôi là mở rộng 2 cách đổi biến trên thành nhiều kết quả mạnh hơn, có thể ứng dụng nhiều hơn trong chứng minh bất đẳng thức.

Trước khi bước vào nội dung chính của chuyên đề này, chúng tôi muốn nêu ra một số nhận định về phương pháp đổi biến, cũng như lý do chúng tôi chọn phương pháp này làm đề tài nghiên cứu của mình.

3.1.2 Một số nhận xét về phương pháp đổi biến trong chứng minh bất đẳng thức.

Trước hết, đây là một phương pháp hết sức cơ bản, không đòi hỏi kiến thức gì cả, chỉ cần nhớ một số kết quả về đẳng thức mà chúng ta đã học ở THCS để đổi biến là được. Điều này khá nhẹ nhàng, và rất thích hợp với những người mới bắt đầu tiếp cận với bất đẳng thức.

Thứ hai, đó là ưu điểm của phương pháp đổi biến so với các phương pháp khác. Trong chuyên đề này, chúng tôi sẽ giới thiệu các ví dụ mà chúng tôi đã cố gắng chọn lọc, để mọi người có thể thấy rằng, với các bài toán như thế này, thì phương pháp mạnh tỏ ra vô hiệu, trong khi phương pháp đổi biến cơ bản lại phát huy tác dụng.

Đương nhiên là không phải chúng tôi "ép", sáng tạo ra các ví dụ này để chỉ có thể thực hiện phương pháp đổi biến. Chúng tôi muốn dùng phương pháp này giải quyết lại các vấn đề đã có sẵn, với tư tưởng hoàn toàn khác với các lời giải đã được trình bày trước đây. Để chuyên đề mang tính khách quan, và thể hiện được tầm ứng dụng của phương pháp đổi biến đang đề cập, chúng tôi sẽ trích dẫn các bài toán về bất đẳng thức trong các cuộc thi của các nước.

Ngoài tính đơn giản, phương pháp đổi biến còn có một ưu điểm khác, đó là khả năng xử lý giả thiết bài toán một cách triệt để. Đối với một bất đẳng thức có điều kiện ràng buộc giữa các biến, nếu biết tận dụng phương pháp này một cách thích hợp, chúng ta có thể làm giả thiết của bài toán trở nên đơn giản hơn, thậm chí có thể triệt tiêu hoàn toàn giả thiết của bài toán. Tại sao cần phải xử lý giả thiết? Xem lại phần ở trên, giả thiết, hay điều kiện ràng buộc giữa các biến trong bài toán chứng minh bất đẳng thức ở đây chính là mối quan hệ nội tại giữa các biến trong bài toán. Điều kiện này thường tạo nên phần khó cho các bài bất đẳng thức. Nếu khai thác được điều kiện thì khả năng chứng minh được bất đẳng thức đó sẽ cao hơn. Còn nếu không khai thác, mà triệt tiêu hẳn? Có thể sẽ dễ hơn nữa. Đó là tác dụng chính của phương pháp đổi biến mà chúng tôi muốn đề cập trong chuyên đề này.

Cuối cùng, hãy lưu ý rằng phương pháp đổi biến chỉ sử dụng các đẳng thức, hoàn toàn không trải qua đánh giá hay sử dụng bất đẳng thức nào. Cho nên, phương pháp này chỉ tác động lên hình thức của bài toán, không ảnh hưởng gì đến tính đúng sai của nó. Điều này cũng làm ta yên tâm hơn, vì bất đẳng thức thu được sau khi đổi biến sẽ không bị ngược dấu.

Tiếp theo chúng ta cùng bước vào nội dung chính của chuyên đề này. Đó là Một cách đổi biến và ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức. Đầu tiên, chúng tôi sẽ giới thiệu lại 2 cách đổi biến mà tác giả Titu Andreescu và Gabriel Dospinescu đã trình bày trong [1]. Nhưng để chuyên đề được tự nhiên và các ý tưởng khai thác được liên tục, chúng tôi xin trình bày lại 2 cách đổi biến này và nguồn gốc hình thành của nó.

3.2 Vấn đề xuất phát

Để bắt đầu, chúng ta hãy tìm hiểu về nguồn gốc của cách đổi biến đang đề cập bằng một bài toán tương đối khó, của tác giả Gabriel Dospinescu, (tham khảo trong [1]).

Ví dụ 1 *(Gabriel Dospinescu)*
Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$ Chứng minh:

$$abc(a-1)(b-1)(c-1) \leq 8$$

Nhận xét: Bài toán được phát biểu dưới một hình thức đơn giản, nhưng lại kèm theo một điều kiện khó chịu $abc = a + b + c + 2$! Điều kiện này làm cho bài toán trở nên khó tiếp cận, vì ta chưa thực sự hiểu các mối liên hệ ràng buộc giữa a, b, c nên khó mà có những đánh giá hợp lý. Nói riêng về bài toán này một chút, nó là một bài toán tương đối khó, thực sự thì không có quá nhiều lời giải cho bài toán này. Đa số các lời giải đều sử dụng các công cụ mạnh để tiếp cận, và chứng minh cũng tương đối phức tạp.

Chúng ta hãy cùng tham khảo lời giải đẹp đẽ sau đây, và tìm hiểu tác giả đã xử lý giả thiết $abc = a + b + c + 2$ như thế nào?

Lời giải: Từ giả thiết $abc = a + b + c + 2$, ta có thể đặt các số a, b, c như sau (với các số $x, y, z > 0$):

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành :

$$(x+y)(y+z)(z+x)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq 8x^2y^2z^2$$

Nếu x, y, z không phải là độ dài của ba cạnh một tam giác thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, bởi vì $VT \leq 0 \leq VF$ (trong các số $x+y-z, y+z-x, z+x-y$ có tối đa một số không dương, có thể chứng minh nhận xét này bằng cách sắp xếp thứ tự các biến)
Xét trường hợp còn lại : x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.
Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Khi đó, ta có đẳng thức :

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = \frac{x^2y^2z^2}{(x+y+z)R^2}$$

Chú ý rằng, trong một tam giác bất kỳ, ta có bất đẳng thức$9R^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$, nên ta cần chứng minh :

$$8(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 9(x+y)(y+z)(z+x)$$

Chứng minh bất đẳng thức cuối:

$$9(x+y)(y+z)(z+x) \leq \frac{8}{3}(x+y+z)^3 \leq 8(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Nhận xét: Bước đặt ẩn x, y, z (biến mới) đã xử lý nhanh chóng giả thiết ban đầu $abc = a+b+c+2$ (phần khó khăn nhất của bài toán). Và nếu để ý, ngoài tác dụng xử lý giả thiết, cách đặt này còn chuyển bất đẳng thức cần chứng minh sang một bất đẳng thức thuần nhất, dễ tiếp cận hơn bất đẳng thức ban đầu rất nhiều. Như vậy, bước đặt ẩn x, y, z chính là mấu chốt của lời giải trên.

Sau khi đã hiểu tác dụng của cách đổi biến trong lời giải trên đây, ta sẽ tìm hiểu ý tưởng và nguồn gốc của cách đổi biến đó.
Quan sát lại lời giải trên, bước đầu tiên, tác giả đã chuyển các biến a, b, c sang x, y, z . Bước chuyển này không tự nhiên chút nào. Tại sao lại biết có một cách đặt như vậy ?
Với giả thiết $abc = a+b+c+2$ thì có cách đặt $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$, ngoài ra, còn cách đặt nào nữa hay không ? Và với các giả thiết khác, có cách đặt nào tương tự như vậy hay không ?...
Bài toán trên thực sự đã làm nảy sinh nhiều câu hỏi, xoay quanh vấn đề *giả thiết và đổi biến*. Chúng ta sẽ lần lượt trả lời các câu hỏi trên, và tìm hiểu sâu hơn về các phương pháp đổi biến tương tự như vậy. Nhưng để thật tự nhiên, đầu tiên, ta sẽ tìm hiểu nguồn gốc của cách đổi biến trong lời giải trên.

Ý tưởng về mối liên hệ giữa đẳng thức và phương pháp đổi biến
Trước hết, với cách đặt $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$, nếu ta thay a, b, c bởi các biểu thức này vào giả thiết $abc = a+b+c+2$ thì ta sẽ thu được một đẳng thức :

$$\frac{x+y}{z} . \frac{y+z}{x} . \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + 2$$

Một cách đổi biến sẽ thỏa mãn giả thiết nếu đẳng thức thu được khi thay cách đổi biến ấy vào giả thiết là đúng. Trong lập luận này, có một mối liên hệ giữa cách đổi biến và đẳng thức. Rõ ràng với mỗi cách đổi biến, ta sẽ thu được một đẳng thức tương ứng. Điều này gợi cho ta suy nghĩ : Muốn tìm hiểu nguồn gốc của một cách đổi biến thì phải bắt đầu từ các đẳng thức.

Ý tưởng trên được cụ thể bằng sơ đồ sau :
Sơ đồ thuận : Nếu đã có cách đổi biến, ta sẽ tìm được một đẳng thức.
A :
Bước 1: Giả thiết (điều kiện ràng buộc a, b, c).
Bước 2: Thay mỗi số a, b, c lần lượt bởi $f(x,y,z), f(y,z,x), f(z,x,y)$.
Bước 3: Kiểm tra xem cách đặt ở bước 2 có thỏa mãn không, bằng cách thay

chúng vào giả thiết ở bước 1 để thu được một đẳng thức đúng.

Đảo quá trình trong sơ đồ trên lại:
Sơ đồ đảo
A':
Bước 1: Từ đẳng thức đúng của các biến x, y, z bất kỳ.
Bước 2: Đặt $f(x, y, z), f(y, z, x), f(z, x, y)$ bới các số a, b, c.
Bước 3: Thu được điều kiện ràng buộc của a, b, c.

Nhận xét: Sơ đồ đảo trên đây có vẻ tự nhiên hơn. Vì ta biết phải xuất phát từ một đẳng thức đúng nào đấy, và phải thực hiện những công việc biến đổi để thu được các cách đổi biến tương ứng.

Việc thực hiện sơ đồ đảo trên đây tương đối rõ ràng và nhẹ nhàng. Ý tưởng của nó rất đơn giản, nhưng mang lại nhiều hiệu quả bất ngờ. Chúng ta sẽ sử dụng nó để xây dựng các cách đổi biến.

Vấn đề nghiên cứu: *Sử dụng các hằng đẳng thức để xây dựng phương pháp đổi biến.*

3.3 Giới thiệu về một cách đổi biến

Để cho tiện, chúng tôi gọi 2 cách đổi biến đã được trình bày trong phần đầu và các khai thác, mở rộng của 2 cách đổi biến này, gộp chung lại, gọi là cách đổi biến X . Trong chuyên đề này, chúng tôi muốn trình bày một cách chi tiết về việc xây dựng cách đổi biến X. Và cách trình bày cách đổi biến này, sẽ không phải theo lối lý thuyết – bài tập thông thường, mà là vấn đề - xây dựng phương pháp giải quyết.

Để hiểu hơn về điều này, chúng ta sẽ cùng nhau xây dựng cách đổi biến X, xuất phát từ việc xây dựng phương pháp giải quyết vấn đề đã được trình bày trong phần trước.

Xây dựng cách đổi biến X
Ta sẽ giải quyết vấn đề trong phần trước lần lượt theo 3 bước đã trình bày.
Bước 1:
Xét đẳng thức tầm thường sau:

$$\frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$$

Đẳng thức trên là hiển nhiên đúng
Viết đẳng thức này lại dưới dạng sau:

$$\frac{1}{1+\frac{y+z}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z+x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x+y}{z}} = 1$$

Việc viết lại như vậy làm thể hiện rõ các hàm $f(x,y,z), f(y,z,x), f(z,x,y)$
Bước 2: *Đặt các hàm bởi các biến số mới.*
Đến đây, ta có thể đặt

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$$

Khi đó, ta thu được:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$$

Bước 3: *Thu được mối quan hệ của a, b, c*
Đừng ngạc nhiên là vì đẳng thức có dạng tổng các phân thức này lại tương đương với giả thiết của ví dụ 1 ở phần trước :

$$abc = a + b + c + 2$$

Công việc trên đây thực sự đơn giản, vì ngoài những biến đổi đại số đơn thuần ra, ta không cần phải làm gì khác.
Từ các xây dựng như trên, ta có kết quả hiển nhiên sau :

Kết quả 1:
Nếu tồn tại các số x, y, z sao cho các số a, b, c thỏa mãn

$$a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$$

thì $abc = a + b + c + 2$.

Thế còn điều ngược lại thì sao. Điều ngược lại cũng đúng, và đây cũng là một kết quả rất đẹp, có nhiều ứng dụng trong chuyên đề này.

Mệnh đề 1:
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$ thì $\exists m, n, p > 0$:

$$a = \frac{n+p}{m}, b = \frac{p+m}{n}, c = \frac{m+n}{p}$$

Từ Mệnh đề trên, nếu ta nghịch đảo các biến a, b, c , ta sẽ được mệnh đề sau:

Mệnh đề 2:
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$ thì $\exists m, n, p > 0$:

$$a = \frac{m}{n+p}, b = \frac{n}{p+m}, c = \frac{p}{m+n}$$

Nhận xét: Mệnh đề trên được xuất phát từ đẳng thức:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{m}{n+p}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{n}{p+m}}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{p}{m+n}}} = 1$$

Tương tự, ta cũng có kết quả sau:

Kết quả 2:
Nếu tồn tại các số x, y, z sao cho các số a, b, c thỏa mãn:

$$a = \frac{x}{y+z}, b = \frac{y}{z+x}, c = \frac{z}{x+y}$$

thì $ab + bc + ca + 2abc = 1$.

Câu hỏi đặt ra là :
Ngoài các giả thiết $abc = a + b + c + 2$ và $ab + bc + ca + 2abc = 1$, liệu còn giả thiết tương tự nào khác có thể đổi biến hay không? Chúng ta sẽ tìm hiểu câu trả lời câu hỏi này qua bài toán sau đây.

Bài toán này từng là đề thi quốc gia của Ấn Độ (năm 1998) và Việt Nam (năm 1996). Và giả thiết của nó gợi cho chúng ta nhiều ý tưởng về việc mở rộng phạm vi của cách đổi biến X .

Ví dụ 2 *(India MO 1998, Vietnam MO 1996)*
Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn:

$$ab + bc + ca + abc = 4$$

Chứng minh:

$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

Nhận xét: Bài toán này cũng có một giả thiết khó chịu khác, tương tự hai giả thiết trong hai mệnh đề 1 và 2, đó là $ab + bc + ca + abc = 4$. . Giả thiết này cũng chưa gợi cho ta ý tưởng nào. Nhưng nếu để ý kỹ trong phần trước, giả thiết $abc = a + b + c + 2$ và $ab + bc + ca + 2abc = 1$ có thể viết dưới dạng tổng các phân thức. Thế giả thiết này có tính chất như vậy không.
Rất may là có. Sau một số phép biến đổi thông thường, ta có thể viết $ab + bc + ca + abc = 4$ dưới dạng sau:

$$\frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} = 1$$

Số 1 dưới mẫu đã trở thành số 2, và điều này gợi cho chúng ta ý tưởng mở rộng đầu tiên cho các mệnh đề 1 và 2, đó là thay đổi số dưới mẫu thức.

Ý tưởng Xây dựng các kết quả mở rộng cho các mệnh đề 1 và mệnh đề 2.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ mở rộng các mệnh đề 1 và 2 trên đây, để thu được các kết quả mạnh hơn.

4 Phát triển và mở rộng

Phần này trình bày các ý tưởng mở rộng các mệnh đề 1 và 2 ở phần trước. Và nêu ra các bài toán ứng dụng các ý tưởng này để tiếp cận.

4.1 Mở rộng bước đầu

Tóm tắt Phần này sẽ xây dựng một số mệnh đề tương tự 2 mệnh đề trong phần trước. Các mệnh đề mở rộng trong phần này đều nói về các kết quả với 3 biến số. Cần hiểu rõ các ý tưởng của phần này trước khi sang phần mở rộng cho n biến số.

4.1.1 Xây dựng các mệnh đề

Xét biểu thức tổng quát hơn của biểu thức ở phần trước, có dạng:

$$\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}+\frac{1}{k+c}=1$$

Có thể viết lại thành:

$$k^3-3k^2+(k^2-2k)(a+b+c)+(k-1)(ab+bc+ca)+abc=0$$

Cũng hoàn toàn tương tự, suy ra $\exists x,y,z$ sao cho:

$$\frac{1}{k+a}=\frac{x}{x+y+z},\frac{1}{k+b}=\frac{y}{x+y+z},\frac{1}{k+c}=\frac{z}{x+y+z}$$

Từ đó, ta có được mệnh đề tổng quát sau.

Mệnh đề 3:
Nếu a,b,c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}+\frac{1}{k+c}=1$$

thì $\exists m,n,p>0$ sao cho:

$$a=\frac{m+n+p}{m}-k,b=\frac{m+n+p}{n}-k,c=\frac{m+n+p}{p}-k$$

Cho k nhận một số giá trị, ta thu được các hệ quả của mệnh đề tổng quát trên. Hơn nữa, ta có thể thay a,b,c bởi $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ để thu được các hệ quả tương ứng. Sử dụng các đẳng thức, ta sẽ thiết lập được các mệnh đề tương ứng. Cụ thể như sau:
Với đẳng thức :

$$\frac{1}{2+\frac{n+p-m}{m}}+\frac{1}{2+\frac{p+m-n}{n}}+\frac{1}{2+\frac{m+n-p}{p}}=1$$

Ta thu được mệnh đề sau:

Mệnh đề 4
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$, thì $\exists m, n, p > 0$ sao cho

$$a = \frac{-m+n+p}{m}, b = \frac{m-n+p}{n}, c = \frac{m+n-p}{p}$$

Trong đó m, n, p là độ dài ba cạnh của một tam giác.
Với đẳng thức

$$\frac{1}{2+\frac{2m}{n+p}} + \frac{1}{2+\frac{2n}{p+m}} + \frac{1}{2+\frac{2p}{m+n}} = 1$$

Ta thu được mệnh đề sau:

Mệnh đề 5:
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$, thì $\exists m, n, p > 0$ sao cho

$$a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m} c = \frac{2p}{m+n}$$

Với đẳng thức

$$\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{m}{n+p-m}}} + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{n}{p+m-n}}} + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{p}{m+n-p}}} = 1$$

Ta thu được mệnh đề sau:

Mệnh đề 6:
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn$a + b + c + 1 = 4abc$, thì $\exists m, n, p > 0$ sao cho

$$a = \frac{m}{n+p-m}, b = \frac{n}{p+m-n}, c = \frac{p}{m+n-p}$$

Với đẳng thức:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{n+p}{2m}}} + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{p+m}{2n}}} + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{m+n}{2p}}} = 1$$

Ta thu được mệnh đề sau:

Mệnh đề 7:
Nếu các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c + 1 = 4abc$, thì $\exists m, n, p > 0$ sao cho

$$a = \frac{n+p}{2m}, b = \frac{p+m}{2n}, c = \frac{m+n}{2p}$$

Trên đây là một số kết quả mở rộng ban đầu, trước khi tiếp tục mở rộng, chúng ta cùng tìm hiểu ứng dụng của các mệnh đề trên trong chứng minh bất đẳng thức bằng một loạt các bài toán có giả thiết lạ được đề cập trong phần tiếp theo ngay sau đây.

4.1.2 Ứng dụng của các mệnh đề trong giải toán.

Phần này trình bày một số bài toán có thể sử dụng các mệnh đề trên để tiếp cận. Và nêu lên một số cách giải khác cho các bài toán này để tìm hiểu sự khác biệt với cách đổi biến được giới thiệu.
Trước hết, chúng ta cùng giải lại ví dụ 2 ở phần trước dựa vào các mệnh đề đã xây dựng.
Chúng ta có 2 cách giải, cách thứ nhất sử dụng mệnh đề 4 và cách thứ 2 sử dụng mệnh đề 3. Hãy tìm hiểu sự khác biệt trong hai cách chứng minh này.

Chứng minh 1 ví dụ 2 (Sử dụng mệnh đề 4)
Bỏ qua trường hợp đơn giản $abc = 0$, xét các số a, b, c dương.
Với các số a, b, c dương, áp dụng mệnh đề 4, suy ra $\exists m, n, p > 0$

$$a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}$$

Sao cho $x, y, z > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{m}{n+p} + \frac{n}{p+m} + \frac{p}{m+n} \geq \frac{2mn}{(p+m)(p+n)} + \frac{2np}{(m+n)(m+p)} + \frac{2pm}{(n+p)(n+m)}$$

Biến đổi, thu được:

$$m(m-n)(m-p) + n(n-p)(n-m) + p(p-m)(p-n) \geq 0$$

Đây là bất đẳng thức Schur quen thuộc, suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Chứng minh 2 ví dụ 2 (Sử dụng mệnh đề 3)
Theo mệnh đề 3, dễ thấy ta cần phải chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\begin{gathered}\tfrac{m+n-p}{p} + \tfrac{n+p-m}{m} + \tfrac{p+m-n}{n} \geq \\ \geq \tfrac{m+n-p}{p}\tfrac{n+p-m}{m} + \tfrac{n+p-m}{m}\tfrac{p+m-n}{n} + \tfrac{p+m-n}{n}\tfrac{m+n-p}{p}\end{gathered}$$

Tương đương với:

$$2mn(m+n) + 2np(n+p) + 2pm(p+m) \geq m^3 + n^3 + p^3 + 9mnp$$

Như vậy nếu bất đẳng thức này đúng thì ta có điều phải chứng minh.
Để ý rằng bất đẳng thức trên không phải đúng với mọi bộ số $m, n, p > 0$, mà nó chỉ đúng khi m, n, p là độ dài 3 cạnh của một tam giác (suy ra từ $a, b, c > 0$).
Ta có bổ đề sau (do cũng là bài toán ứng dụng phương pháp đổi biến, nên ta có thể xem bổ đề này là ví dụ 3)

Ví dụ 3:
Cho m, n, p là độ dài 3 cạnh của một tam giác.
Chứng minh:

$$2mn(m+n)+2np(n+p)+2pm(p+m) \geq m^3+n^3+p^3+9mnp$$

CHỨNG MINH:
Bằng cách đặt $a=n+p-m, b=p+m-n, c=m+n-p$, do m, n, p là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên suy ra $a, b, c>0$. . Từ cách đặt này, ta có thể dễ dàng biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành bất đẳng thức Schur quen thuộc.
Bổ đề được chứng minh. Bài toán trên cũng được chứng minh.

Nhận xét: So sánh 2 lời giải trên của ví dụ 2, thì lời giải 1 tốt hơn (lời giải 2 cần phải sử dụng bổ đề). Cả 2 lời giải đều sử dụng ý tưởng đổi biến để giải, nhưng khác nhau ở điều kiện của các biến mới (lời giải 1: $m, n, p>0$, lời giải 2: m, n, p là độ dài 3 cạnh của một tam giác).

Thay a, b, c trong bài toán trên bới $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, ta có bài toán sau:

Ví dụ 4 (Vietnamese IMO Training Camp 2010)
Cho a, b, c là các số thục dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c+1=4abc$.
Chứng minh:

$$ab+bc+ca \geq a+b+c$$

Sử dụng các mệnh đề trên, ta có thể giải các bài toán sau:

4.1.3 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1: Với giả thiết $ab+bc+ca+2abc=1$, (đều là các số dương)
Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1. Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 4(a+b+c)$. (Mircea Lascu, Marian Tetiva).
2. Chứng minh: $abc \leq 1/8$.
3. Chứng minh: $ab+bc+ca \geq 3/4$
4. Chứng minh: $\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{3(b+1)(c+1)}$
5. Chứng minh: $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \leq 2\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}$
6. Chứng minh: $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c} \leq \sqrt[4]{12(a+1)(b+1)(c+1)}$

7. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+10abc \geq 2$

Hướng dẫn Sử dụng mệnh đề 2 để chứng minh.

Bài toán 2: Với giả thiết $a+b+c+2=abc$, a,b,c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1. Chứng minh: $2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \leq a+b+c+6$. (Mathlinks)
2. Chứng minh: $abc(a-1)(b-1)(c-1) \leq 8$. (Gabriel Dospinescu).
3. Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 4\left(a+b+c\right)$.
4. Chứng minh: $ab+bc+ca \geq 2\left(a+b+c\right)$.
5. Chứng minh: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}$.

Hướng dẫn: Sử dụng mệnh đề 1 để chứng minh.

Bài toán 3: Với giả thiết $ab+bc+ca+abc=4$, a,b,c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1. Chứng minh: $a+b+c+abc \geq 4$
2. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+abc+8 \geq 4\left(a+b+c\right)$.
3. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2-3 \geq 2\left(\sqrt{2}+1\right)\left(a+b+c-3\right)$
4. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+28 \geq 8\left(a+b+c\right)+7abc$

Hướng dẫn: Sử dụng mệnh đề 4 và mệnh đề 5 để chứng minh.

Bài toán 4: Với giả thiết $a+b+c+abc=4$, a,b,c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

1. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+12 \geq 5\left(ab+bc+ca\right)$.
2. Chứng minh: $3\left(a^2+b^2+c^2\right)+13\left(ab+bc+ca\right) \geq 48$.
3. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2\left(ab+bc+ca\right)$

Hướng dẫn: Sử dụng mệnh đề 6 và mệnh đề 7 để chứng minh.

4.2 Một ứng dụng bất ngờ khác

Nếu ở trong phần trước, chúng ta dùng phương pháp đổi biến để chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về dạng thuần nhất, thì trong phần này, chúng ta sẽ đi ngược lại với ý tưởng trên, tức là chuyển bất đẳng thức thuần nhất (và các bất đẳng thức không thuần nhất khác) về dạng bất đẳng thức có điều kiện. Lúc này, chúng ta sẽ phải kết hợp với các phương pháp khác để hoàn tất lời giải. Đương nhiên, công cụ chính của phần này vẫn là đổi biến, nhưng theo hướng nhìn ngược lại.

4.2.1 Các ví dụ

Ta sẽ lật ngược vấn đề lại một chút.
Ở phần trước, nếu gặp một bất đẳng thức có điều kiện $xy+yz+z\text{x}+2xyz=1$, ta sẽ có cách đổi biến $x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$, để thu được một bất đẳng thức thuần nhất.

Nếu ngược lại, có một bất đẳng thức thuần nhất đối xứng 3 biến a, b, c. Ta có thể đặt $x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$ để chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức 3 biến x, y, z với điều kiện $xy+yz+z\text{x}+2xyz=1$.

Chúng ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của "ý tưởng đảo" này trong các bài toán sau.
Trước hết các biểu thức $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ gợi cho ta nhớ đến bất đẳng thức Nesbitt - một bất đẳng thức cơ bản có nhiều ứng dụng.

Ví dụ (Bất đẳng thức Nesbitt)
Với $a, b, c>0$, chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh
Đặt $x=\frac{b+c}{a}, y=\frac{c+a}{b}, z=\frac{a+b}{c}$, theo mệnh đề 2, ta có $xy+yz+zx+2xyz=1$.
Cần chứng minh $x+y+z \geq \frac{3}{2}$. . Ta có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phản chứng.
Giả sử $x+y+z<\frac{3}{2}$, suy ra $xy+yz+zx<\frac{3}{4}$ và $2xyz<\frac{1}{4}$.
Dẫn theo $xy+yz+zx+2xyz<\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$.
Nhưng điều này mâu thuẫn với $xy+yz+zx+2xyz=1$. Suy ra $x+y+z \geq \frac{3}{2}$.
Bất đẳng thức Nesbitt được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: Ý tưởng trong cách chứng minh trên khá độc đáo. Sự kết hợp giữa phương pháp phản chứng và cách đổi biến X đã phát huy tác dụng ngoài mong muốn. Lời giải trên không có gì quá đặc biệt, nhưng sự đơn giản của nó đã làm ta thực sự bất ngờ. Không ngờ lại có một cách chứng minh dựa vào phản chứng như vậy.

Sự kết hợp giữa việc đổi biến tạo mới (có điều kiện) và phương pháp phản chứng

Sự kết hợp giữa phương pháp phản chứng và cách đổi biến trên đây không phải ngẫu nhiên mà có. Bởi vì khi đặt $x = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}$ như vậy, chúng ta đã phát vỡ tính thuần nhất của bất đẳng thức cần chứng minh, và thay vào đó, ta lại làm bài toán xuất hiện một điều kiện mới, tương đối phức tạp là $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Vậy ta cần phải chứng minh một bất đẳng thức mới, có điều kiện phức tạp, nhưng kết quả cần chứng minh lại đơn giản. Đó là điều làm ta nghĩ ngay đến phương pháp phản chứng để xử lý bất đẳng thức mới này. Một ý tưởng khác nảy sinh từ quá trình đổi biến trên, đó là phương pháp đổi biến mà chúng tôi đã nhắc đến ở phần đầu chuyên đề này. Giả thiết $xy + yz + zx + 2\text{x}yz = 1$ cho ta một mối liên hệ giữa đại lượng $xy + yz + zx$ và đại lượng xyz. . Như vậy, nếu sử dụng phương pháp đổi biến pqr , ta chỉ cần xử lý với hai biến mà thôi, điều này sẽ làm cho phương pháp đổi biến pqr trở nên "gần gũi" hơn. Nhưng chúng tôi sẽ không tìm hiểu sâu vào vấn đề này. Bởi vì còn nhiều mở rộng khác cho cách đổi biến X đang chờ đợi ta khai thác nữa. Nên để kết thúc mục này, chúng tôi xin nêu ra một số bài toán ứng dụng. Các bài toán sau đây đều có thể giải bằng phương pháp đổi biến kết hợp với phương pháp phản chứng.

4.2.2 Một số bài toán áp dụng

1. (Viet Nam Team Selection Test 2006)
Chứng minh với các số thực $a, b, c \in [1, 2]$, ta có bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

2. (Titu Andreescu, Zuming Feng, USA MO 2003)
Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

3. (Japan MO 1997)
Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

4. (Hy Lạp MO 2007)
Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.
Chứng minh

$$\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

4.3 Tiếp tục mở rộng

Phần này lần lượt khai thác và mở rộng cách đổi biến X theo nhiều hướng khác nhau, mục đích là mở rộng phạm vi ứng dụng của cách đổi biến này.
Để bắt đầu, ta hãy xét lại biểu thức đã được đề cập trong phần trước:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$$

Thực hiện các ý tưởng mở rộng thông thường, như đổi hệ số, tổng quát số mũ, tăng số biến, tổng quát số biến,... Chúng ta sẽ xây dựng các kết quả mở rộng cho các mệnh đề 1 và mệnh đề 2 ở phần trước theo thứ tự sau:

1. Mở rộng số mũ của các biến dưới mẫu thức.
2. Mở rộng hệ số của các biến dưới mẫu thức.
3. Mở rộng cho các hàm một biến dưới mẫu thức.
4. Mở rộng cho hai biến dưới mẫu thức.
5. Mở rộng cho các hàm hai biến dưới mẫu thức.
6. Mở rộng cho ba biến dưới mẫu thức.
7. Mở rộng cho hàm ba biến dưới mẫu thức.
8. Mở rộng từ ba biến sang n biến số.
9. Mở rộng cách đổi biến.

Mỗi ý tưởng mở rộng trên sẽ trình bày theo thành một vấn đề, và trong mỗi vấn đề, chúng tôi sẽ đề xuất phương pháp đặt ẩn phụ cho cách đổi biến X, cùng một số bài toán ứng dụng cho phương pháp tương ứng trong vấn đề đó.
Chúng ta hãy cùng bắt đầu với ý tưởng mở rộng số mũ các biến.

4.3.1 Vấn đề 1

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), k là số thực, n là số nguyên dương cho trước:

$$\frac{1}{k+a^n}+\frac{1}{k+b^n}+\frac{1}{k+c^n}=1$$

hoặc

$$\frac{1}{k+\sqrt[n]{a}}+\frac{1}{k+\sqrt[n]{b}}+\frac{1}{k+\sqrt[n]{c}}+=1$$

Ý tưởng: Đối với các bất đẳng thức có giả thiết dạng này, ta cũng làm tương tự, và lưu ý rằng: cách đổi biến

$$\frac{1}{k+a^n}=\frac{x^n}{x^n+y^n+z^n},\frac{1}{k+b^n}=\frac{y^n}{x^n+y^n+z^n},\frac{1}{k+c^n}=\frac{z^n}{x^n+y^n+z^n}$$

Sẽ giúp bất đẳng thức thu được "dễ nhìn" hơn cách đổi

$$\frac{1}{k+a^n}=\frac{x}{x+y+z},\frac{1}{k+b^n}=\frac{y}{x+y+z},\frac{1}{k+c^n}=\frac{z}{x+y+z}$$

Ta sẽ hiểu hơn về nhận định trên qua bài toán sau đây.

Ví dụ 5: (Crux mathematicorum)
Cho các số thực dương $a,b,c>1$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$$

Chứng minh:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\leq 1$$

Nhận xét: bài toán này được lấy trong [4] và lời giải chính của bài toán này là sử dụng kỹ thuật Phân tách Chebyshev kết hợp với phương pháp phản chứng. Lời giải này sáng về mặt ý tưởng, nhưng đòi hỏi người giải phải thành thạo về phân tách Chebyshev. Chúng tôi không thạo mấy về việc phân tách này, nên chúng tôi sẽ tiếp cận bài toán trên theo cách đổi biến X đã giới thiệu.

Chứng minh 1: (Sử dụng cách đổi biến X đã giới thiệu)
Từ giả thiết

$$\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$$

Sử dụng kết quả ở trên. Suy ra :

$$\exists m,n,p>0:$$

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{m^2}{m^2+n^2+p^2};\frac{1}{b^2-1}=\frac{n^2}{m^2+n^2+p^2};\frac{1}{c^2-1}=\frac{p^2}{m^2+n^2+p^2}$$

Hay

$$a=\sqrt{\frac{2m^2+n^2+p^2}{m^2}};b=\sqrt{\frac{m^2+2n^2+p^2}{n^2}};c=\sqrt{\frac{m^2+n^2+2p^2}{p^2}}$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{m}{m+\sqrt{2m^2+n^2+p^2}}+\frac{n}{n+\sqrt{m^2+2n^2+p^2}}+\frac{p}{p+\sqrt{m^2+n^2+2p^2}}\le 1$$

Sử dụng đánh giá $4\left(2m^2+n^2+p^2\right)\ge (2m+n+p)^2$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{m}{4m+n+p}+\frac{n}{m+4n+p}+\frac{p}{m+n+4p}\le\frac{1}{2}$$

Sử dụng kỹ thuật tìm thêm bớt, ta có

$$\frac{1}{4}-\frac{m}{4m+n+p}=\frac{n+p}{4\left(4m+n+p\right)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{m+n}{m+n+4p}+\frac{n+p}{n+p+4m}+\frac{p+m}{p+m+4n}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum\frac{m+n}{4p+m+n}\ge\frac{4(m+n+p)^2}{\sum\left(4p+m+n\right)\left(m+n\right)}$$

Do vậy, cần chứng minh:

$$\frac{4(m+n+p)^2}{\sum\left(4p+m+n\right)\left(m+n\right)}\ge 1$$

Biến đổi tương đương, thu được:

$$m^2+n^2+p^2\ge mn+np+pm$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên, phép chứng minh của chúng ta hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Nhận xét: Lời giải trên thực sự là một lời giải đơn giản. Bởi nó chỉ sử dụng các bất đẳng thức thông thường, như bất đẳng thức AM – GM và bất đẳng thức Cauchy Schwarz. Một lần nữa, việc vận dụng cách đổi biến X đã trở thành chìa khóa giải quyết vấn đề.
Xin nói thêm là bài toán trên có một điểm rất đặc biệt. Đó là cả giả thiết và kết quả cần chứng minh của nó đều có dạng tổng phân thức. Sự đặc biệt này giúp nó có một lời giải khác, vẫn là sử dụng cách đổi biến X, nhưng kết hợp thêm phản chứng. Ta sẽ gặp lại bài toán này trong phần tiếp theo.

Sau đây là một số bài toán áp dụng. Ý tưởng chứng minh hoàn toàn tương tự.

Một số bài toán áp dụng
1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.
Chứng minh:

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1$$

3. Tìm hằng số dương k tốt nhất sao cho với mọi a,b,c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2+\sqrt[k]{a}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{b}} + \frac{1}{2+\sqrt[k]{c}} \geq 1$$

Tiếp theo, ta sẽ mở rộng vấn đề bằng cách thay đổi hệ số của các biến dưới mẫu thức.

4.3.2 Vấn đề 2

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), k là số thực cho trước:

$$\frac{1}{ma+n} + \frac{1}{mb+n} + \frac{1}{mc+n} = 1$$

Ý tưởng
Đẳng thức trên tương đương:
$n^3 - 3n^2 + (mn^2 - 2mn)(a + b + c) + (m^2n - m^2)(ab + bc + ca) + m^3abc = 0$
Cách đổi biến hoàn toàn tương tự, ta có $\exists x, y, z > 0$ sao cho

$$\frac{1}{ma+n} = \frac{x}{x+y+z}, \frac{1}{mb+n} = \frac{y}{x+y+z}, \frac{1}{mc+n} = \frac{z}{x+y+z}$$

Suy ra cách biểu diễn a, b, c theo x, y, z.

4.3.3 Vấn đề 3

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), k là số thực cho trước:

$$\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} + \frac{1}{f(c)} = 1$$

(Trong đó $f(a), f(b), f(c) > 0$).

Nhận xét: Cách đổi biến hoàn toàn tương tự, ta có $\exists x, y, z > 0$ sao cho

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{m}{m+n+p}, \frac{1}{f(b)} = \frac{n}{m+n+p}, \frac{1}{f(c)} = \frac{p}{m+n+p}$$

Một số bài toán áp dụng
1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$
Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{5a+4}} + \frac{1}{\sqrt{5b+4}} + \frac{1}{\sqrt{5c+4}} \leq 1$$

2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$
Chứng minh:

$$\frac{1}{1+\sqrt{3a+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{3b+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{3c+1}} \leq 1$$

3. (Korean Mathematical Olympiad 1998)
Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = xyz$.
Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Tiếp theo, ta sẽ mở rộng vấn đề bằng cách mở rộng mẫu thức thành các biểu thức 2 biến.

4.3.4 Vấn đề 4

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), x, y, z là số thực cho trước:

$$\frac{1}{xa+yb+z} + \frac{1}{xb+yc+z} + \frac{1}{xc+ya+z} = 1$$

Nhận xét Cách đổi biến tương tự, cần giải hệ phương trình ẩn a, b, c :

$$xa+yb+z = \frac{m+n+p}{m}, xb+yc+z = \frac{m+n+p}{n}, xc+ya+z = \frac{m+n+p}{p}$$

Một số bài toán áp dụng
1. x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.
Chứng minh

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \le 1$$

2.(USA Mathematical Olympiad 1997)
Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$$

3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt[3]{abc} = r \le 1$.
Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{3}{1+2r}$$

4. (Romania Junior Balkan Team Selection Tests 2007)
Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \ge 1$$

Chứng minh

$$a+b+c \ge ab+bc+ca$$

4.3.5 Vấn đề 5

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), x, y, z là số thực cho trước:

$$\frac{1}{f(a,b)} + \frac{1}{f(b,c)} + \frac{1}{f(c,a)} = 1$$

Trong đó, f là một hàm 2 biến.
Nhận xét: Cách đổi biến X, ta có $\exists m, n, p > 0$ sao cho:

$$\frac{1}{f(a,b)} = \frac{p}{m+n+p}, \frac{1}{f(b,c)} = \frac{m}{m+n+p}, \frac{1}{f(c,a)} = \frac{n}{m+n+p}$$

Một số bài toán áp dụng
1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2 = 1$
Chứng minh:

$$\frac{1}{5-6ab} + \frac{1}{5-6bc} + \frac{1}{5-6ca} \le 1$$

2. (Crux mathematicorum)
Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
Chứng minh:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

4. Cho 3 số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.
Chứng minh:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{5}{2}$$

5.(Crux mathematicorum)
Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3.
Chứng minh

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}$$

6. Chứng minh. Với các số thực không âm tùy ý có tổng bằng 3.

$$\frac{1}{c^2+a+b} + \frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} \leq 1$$

4.3.6 Vấn đề 6

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), x, y, z, k là số thực cho trước:

$$\frac{1}{xa+yb+zc+k} + \frac{1}{xb+yc+za+k} + \frac{1}{xc+ya+zb+k} = 1$$

Nhận xét: Để đổi biến, cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xa+yb+zc = \frac{m+n+p}{m} - k \\ xb+yc+za = \frac{m+n+p}{n} - k \\ xc+ya+zb = \frac{m+n+p}{p} - k \end{cases}$$

Một số bài toán áp dụng
1.(đề thi đại học khối D 2007)
Cho $x, y, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}$$

4.3.7 Vấn đề 7

Với a, b, c là các số thực dương (có thể mở rộng ra cho tập số thực), x, y, z, k là số thực cho trước:

$$\frac{1}{f(a,b,c)} + \frac{1}{f(b,c,a)} + \frac{1}{f(c,a,b)} = 1$$

Trong đó, f là một hàm 3 biến.

Nhận xét: Cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{f(a,b,c)} = \frac{x}{x+y+z} \\ \frac{1}{f(b,c,a)} = \frac{y}{x+y+z} \\ \frac{1}{f(c,a,b)} = \frac{z}{x+y+z} \end{cases}$$

Một số bài toán áp dụng
1. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$
Chứng minh

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{1}{4c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. (Bất đẳng thức Nesbitt)
Cho a, b, c dương, thì:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

3. (USA Mathematical Olympiad 1998)
Chứng minh với mọi số thực dương a, b, c:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq 1$$

4.4 Đổi biến kết hợp với phương pháp phản chứng trong chứng minh bất đẳng thức.

4.4.1 Ý tưởng kết hợp

Xét dạng toán sau:
Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$f(a,b,c) = 0$$

Chứng minh bất đẳng thức:

$$g(a,b,c) \geq 0$$

Ý tưởng tiếp cận
Để giải bài toán trên, ta có thể lập luận như sau.
Ý TƯỞNG 1
Ta có thể tăng, (hoặc giảm) các số a, b, c sao cho $g(a, b, c) < 0$.
có thể giả sử là tăng các số a, b, c (trường hợp giảm tương tự) để thu được $g(a, b, c) < 0$
Khi đó, ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) > 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c | g(a, b, c) < 0\}$$

hoặc

$$f(a, b, c) < 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c | g(a, b, c) < 0\}$$

Để suy ra mâu thuẫn. Từ đó, bất đẳng thức $g(a, b, c) \geq 0$ được chứng minh.

Ý TƯỞNG 2
Cũng tương tự như ý tưởng trên.
Ta có thể tăng, (hoặc giảm) các số a, b, c sao cho $g(a, b, c) < 0$.
có thể giả sử là tăng các số a, b, c (trường hợp giảm tương tự) để thu được $g(a, b, c) \leq 0$
Khi đó, ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) \geq 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c | g(a, b, c) < 0\}$$

hoặc

$$f(a, b, c) \leq 0, \forall a, b, c \in D = \{a, b, c | g(a, b, c) < 0\}$$

Để suy ra mâu thuẫn. Từ đó, bất đẳng thức $g(a, b, c) \geq 0$ được chứng minh. Và cần quan tâm tới đẳng thức $f(a, b, c) = 0$ xảy ra với giá trị nào của bộ (a, b, c). Cụ thể hơn, ta cần $f(a, b, c) = 0$ chỉ khi $g(a, b, c) = 0$. Vì nếu $f(a, b, c) = 0$ khi $g(a, b, c) < 0$ thì coi như ta không được gì.

Nhận xét: Cũng có thể thay đổi giả thiết bài toán trên thành $f(a, b, c) > 0$ hoặc $f(a, b, c) < 0$ hoặc $f(a, b, c) \geq 0$ hoặc $f(a, b, c) \leq 0$. Khi đó, giả thiết phản chứng sẽ mang dấu ngược lại.

4.4.2 Các ví dụ

Chúng ta hãy cùng tìm hiểu ứng dụng của phương pháp trên đây.
Trước hết, ta nhắc lại ví dụ đã đề cập ở phần trước.

Ví dụ 6: (Crux mathematicorum)

Cho các số thực dương $a, b, c > 1$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1$$

Chứng minh

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1$$

Lời giải 2 (Sử dụng phương pháp phản chứng)
Giả sử

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

Khi đó, cần chứng minh

$$\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} \geq 1$$

Sử dụng mệnh đề ở phần trước, suy ra cần chứng minh bất đẳng thức sau với $m, n, p > 0$.

$$\frac{m^2}{(m+n+p)(n+p-m)} + \frac{n^2}{(m+n+p)(p+m-n)} + \frac{p^2}{(m+n+p)(m+n-p)} \geq 1$$

Bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

$$\frac{m^2}{n+p-m} + \frac{n^2}{p+m-n} + \frac{p^2}{m+n-p} \geq \frac{(m+n+p)^2}{m+n+p} \geq m+n+p$$

Nhận xét Một lời giải hết sức ấn tượng: rất nhẹ nhàng, chỉ cần biến đổi mà thôi.

4.4.3 Một số bài toán áp dụng

1. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 3$
Chứng minh

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = 3$
Chứng minh

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1$$

3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$ thì:

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+c+a}} + \frac{c}{\sqrt{7+a+b}} \geq 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+a^2+b^2}} \geq 1$$

4. (Berkeley math. Circle)
Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

5. (Moldova Team Selection Test 2005)
Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ thì:

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

4.5 Mở rộng cho n biến số

Chúng ta cùng tiếp tục ý tưởng mở rộng cho cách đổi biến đang xây dựng. Trong phần này, chúng tôi muốn trình bày về ý tưởng mở rộng ra cho n biến (thực sự là một mở rộng mang tính tổng quát) và một số bài toán có thể sử dụng cách đổi biến này để giải.
Sau đây là mở rộng :

4.5.1 Vấn đề 8.

Mở rộng cho n biến
Với n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1+k} + \frac{1}{a_2+k} + ... + \frac{1}{a_n+k} = 1$$

Nhận xét Cách đổi biến như sau:
Luôn $\exists b_1, b_2, ..., b_n > 0$ sao cho:

$$\frac{1}{a_i+k} = \frac{b_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}, \forall i = \overline{1,n}$$

Hay có thể viết dưới dạng

$$a_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j}{b_i} - k$$

Điều kiện:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > kb_i, \forall i = \overline{1, n}.$$

4.5.2 Các ví dụ

Ví dụ 7: (CWMO 2005)
Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn

$$\frac{1}{4+a} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{4+c} + \frac{1}{4+d} + \frac{1}{4+e} = 1$$

Chứng minh

$$\frac{a}{4+a^2} + \frac{b}{4+b^2} + \frac{c}{4+c^2} + \frac{d}{4+d^2} + \frac{e}{4+e^2} \le 1$$

Lời giải 1 Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev. Lời giải được trình bày trong [4], trang 38. Ý tưởng của lời giải này là sử dụng phương pháp Phân tách Chebyshev.
Chúng ta cùng tìm lời giải khác cho bài toán này.
Lời giải 2 Tương tự như bài trước, suy ra

$$\exists A, B, C, D, E : a = \frac{B + C + D + E - 3A}{A}$$

b, c, d, e tương tự.
Điều kiện

$$a = \frac{B + C + D + E}{A} - 3 > 0$$

Sử dụng BĐT AM-GM:

$$\frac{a}{4+a^2} \le \frac{a}{2a+3}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{2a+3} + \frac{b}{2b+3} + \frac{c}{2c+3} + \frac{d}{2d+3} + \frac{e}{2e+3} \le 1$$

Ta có:

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{2a+3}=\frac{3}{2(2a+3)}=\frac{3A}{2[2(B+C+D+E)-3A]}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\sum\frac{A}{2\left(B+C+D+E\right)-3A}\geq 1$$

Đến đây, sử dụng BĐT Cauchy Schwarz, ta được:

$$\sum\frac{A}{2\left(B+C+D+E\right)-3A}\geq\frac{\left(\sum A\right)^2}{-3\sum A^2+4\sum\limits_{sym}AB}$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$4\sum A^2\geq 2\sum_{sym}AB$$

Bất đẳng thức này dễ dàng chứng minh theo BĐT AM-GM. Do đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=1$.

Sau đây là 2 ví dụ hoàn toàn tương tự., có thể sử dụng kỹ thuật phân tách Chebyshev hoặc cách đổi biến X để giải.

Ví dụ 8: Giả sử các số thực dương $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$
Chứng minh

$$\frac{1}{11+a^2}+\frac{1}{11+b^2}+\frac{1}{11+c^2}+\frac{1}{11+d^2}\leq\frac{1}{3}$$

Ví dụ 9: Cho $a,b,c,d,e\geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$.
Chứng minh

$$\frac{1}{7-2a}+\frac{1}{7-2b}+\frac{1}{7-2c}+\frac{1}{7-2d}+\frac{1}{7-2e}\leq 1$$

Sau đây là một loạt các bài toán có thể sử dụng cách đổi biến trên để giải.

4.5.3 Một số bài toán áp dụng

1. (Titu Andresscu, Gabriel Dospinesscu)
Giả sử các số thực dương $x_1,x_2,...,x_n$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n}=\frac{n}{2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_j}.$$

2. (Romanian Team Selection Test)
Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 ... a_n = 1$
Chứng minh:

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1$$

3. Nếu $a_1 a_2 ... a_n = r^n \leq 1$ thì:

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq \frac{n}{n-1+r^n}$$

4. Nếu $a_1 a_2 ... a_n = r^n \leq 1$ và $k \geq n-1$ thì:

$$\frac{1}{k+a_1} + \frac{1}{k+a_2} + ... + \frac{1}{k+a_n} \leq \frac{n}{k+1}$$

5. Giả sử rằng $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + ... + \frac{1}{a_n+1} = 1$$

Chứng minh

$$a_1 a_2 ... a_n \leq (n-1)^n$$

6. (Tổng quát IMO 2001 Pro.A2) Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương có tích bằng 1.
Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+(n^2-1)a_n}} \geq 1$$

7. (MOP)
Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$$

Chứng minh

$$\frac{1}{n-1+a_1} + \frac{1}{n-1+a_2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n} \leq 1$$

8. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + ... + \frac{1}{1+a_n^2} = 1$$

Chứng minh

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq (n-1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

9. (Romanian Team Selection Test)
Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$$

Chứng minh

$$\frac{1}{n-1+a_1^2} + \frac{1}{n-1+a_2^2} + ... + \frac{1}{n-1+a_n^2} \leq 1$$

10. (Tổng quát USAMO 1998)
Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1
Chứng minh

$$\frac{1}{1+x_1+x_2+...+x_{n-1}} + \frac{1}{1+x_2+...+x_n} + ... + \frac{1}{1+x_n+x_1+...+x_{n-2}} \leq 1$$

11. (Latvia 2002)
Cho 4 số dương a, b, c, d thoả mãn:

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1$$

Chứng minh

$$abcd \geq 3$$

12. Cho các số thực không âm a, b, c, d, e thoả mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5$$

Chứng minh

$$\frac{1}{7-2a} + \frac{1}{7-2b} + \frac{1}{7-2c} + \frac{1}{7-2d} + \frac{1}{7-2e} \leq 1$$

13. Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn $a_1a_2...a_n = 1$.
Chứng minh

$$\frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_1}} + \frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_2}} + ... + \frac{1}{1+\sqrt{1+4n(n-1)a_1}} \geq \frac{1}{2}$$

14. Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$
Chứng minh

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j}{(1-x_i)(1-x_j)} \geq \frac{n}{2(n-1)}$$

15. Cho $n \geq 3$ là một số tự nhiên cho trước và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thoả mãn $a_1 a_2 ... a_n = 1$
Chứng minh

$$\frac{1}{n-2+a_1+a_2} + \frac{1}{n-2+a_2+a_3} + \frac{1}{n-2+a_n+a_1} \leq 1$$

16. Cho các số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2$
Chứng minh

$$\frac{1}{2+x_1^2} + \frac{1}{2+x_2^2} + ... + \frac{1}{2+x_n^2} \geq \frac{3n-2}{6}$$

17. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thoả mãn $a_1 a_2 ... a_n = 1$
Nếu $0 < p < \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$
Chứng minh

$$\frac{1}{(1+pa_1)^2} + \frac{1}{(1+pa_2)^2} + ... + \frac{1}{(1+pa_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$$

18. (China Team Selection Test 2004)
Cho $x, y, z, t > 0$ và $xyzt = 1$.
Chứng minh

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \geq 1$$

19. (Viet Nam MO)
Các số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} 1$$

Chứng minh

$$x_1 x_2 ... x_n \geq (n-1)^n$$

21. $a, b, c > 0$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}} \geq \sqrt{3}$$

22. (Tổng quát IMO 2001. Pro.A2)
Cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$. Đặt $y_i = x_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} ... x_n$
Chứng minh

$$\frac{x_1}{\sqrt[n-1]{x_1^{n-1} + (n^{n-1}-1)y_1}} + \frac{x_2}{\sqrt[n-1]{x_2^{n-1} + (n^{n-1}-1)y_2}} + ... + \frac{x_n}{\sqrt[n-1]{x_n^{n-1} + (n^{n-1}-1)y_n}} \geq 1$$

23. (India 1995)
Giả sử các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng 1.

Chứng minh

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+...+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

24. (Romanian IMO Team Selection Test 1998)
Với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ có tích bằng 1.
Chứng minh

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+...+\frac{1}{n-1+a_n}\leq 1$$

25. (Vasile Cirtoaje)
Cho các số thực không âm a, b, c, d có tổng bằng 4.
Chứng minh

$$\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bc\mathrm{d}}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\leq 1$$

26. (Phạm Kim Hùng)
Giả sử $a, b, c, d \geq 0$ với $a^2+b^2+c^2+d^2=4$
Chứng minh

$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab}\leq 2$$

27. Chứng minh rằng nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực nhỏ hơn n^2+1 và có tổng bằng n^3 thì:

$$\sqrt{\frac{n^2+1}{a_1}-1}+\sqrt{\frac{n^2+1}{a_2}-1}+...+\sqrt{\frac{n^2+1}{a_n}-1}\leq 1$$

28. Chứng minh rằng nếu $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0$ thì:

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+...+\frac{1}{1+x_n^2}\leq\frac{n^3}{n^2+1}$$

29. Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1a_2...a_n = 1, \forall i = \overline{1,n}$ và k là một hằng số dương tùy ý sao cho $k \geq n-1$, ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{k+a_1}+\frac{1}{k+a_2}+...+\frac{1}{k+a_n}\leq\frac{n}{k+1}$$

30. Chứng minh rằng nếu các số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ có tổng bằng n thì bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{x_1}{k+x_1^2}+\frac{x_2}{k+x_2^2}+...+\frac{x_n}{k+x_n^2}\leq\frac{n}{k+1}$$

Trong đó $k = k_n = \frac{n^2+2n-2-2\sqrt{(n^2-1)(2n-1)}}{(n-2)^2}$ khi $n \geq 3$ và $k = \frac{1}{3}$ khi $n = 2$
Ngoài ra hãy chứng minh đó là các giá trị tốt nhất của k_n.

31. (Mathlinks Contest)
Tìm hằng số $k = k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số $x_1, x_2, ..., x_n; x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$ và $x_1 x_2 ... x_n = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1 + k_n x_n}} \leq n - 1$$

32. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + ... + \frac{1}{1 + x_n^2} = 1$$

Chứng minh

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq (n - 1)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)$$

33. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$.
Chứng minh

$$\frac{1}{1 + ab + bc + ca} + \frac{1}{1 + bc + cd + da} + \frac{1}{1 + \mathrm{c}d + da + db} + \frac{1}{1 + da + ab + b\mathrm{d}} \leq 1$$

34. (China Mathematical Olympiad 2003)
Cho các số $x_1, x_2, ..., x_5 \geq 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{1}{1+x_i} = 1$
Chứng minh

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i}{4 + x_i^2} \leq 1$$

35. (AMM 1996)
Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}$$

Chứng minh

$$\frac{1}{1 + (n - 1)\, x_1} + \frac{1}{1 + (n - 1)\, x_2} + ... + \frac{1}{1 + (n - 1)\, x_n} \geq 1$$

$$\frac{1}{n - 1 + x_1} + \frac{1}{n - 1 + x_2} + ... + \frac{1}{n - 1 + x_n} \leq 1$$

36. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2 + a^2} + \frac{1}{2 + b^2} + \frac{1}{2 + c^2} + \frac{1}{2 + d^2} = \frac{1}{2}$$

Chứng minh

$$abcd \geq ab + ac + ad + bc + cd + db$$

37. (Algebraic Inequalities - Old and New method)
Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 2$
Chứng minh

$$\frac{1}{3a^2+1} + \frac{1}{3b^2+1} + \frac{1}{3c^2+1} + \frac{1}{3d^2+1} \geq \frac{16}{7}$$

38. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$
Chứng minh

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-ad} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-bd} + \frac{1}{1-cd} \leq 8$$

39. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$
Chứng minh

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}$$

40. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh

$$\frac{a+b+c}{2} + 2\left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2}$$

4.6 Kết hợp đổi biến với các phương pháp khác

Ngoài ý tưởng kết hợp giữa cách đổi biến X với phương pháp phản chứng đã trình bày ở phần trước. Chúng ta có thể kết hợp cách đổi biến này với nhiều phương pháp khác nữa. Chẳng hạn như kết hợp với phương pháp quy nạp, phương pháp hàm số, phương pháp sử dụng đa thức đối xứng.
Nhìn một cách tổng quát, khi kết hợp các phương pháp lại với nhau. Cần phải lưu ý một số điều sau:

1. *Cần phải hiểu tác dụng của mỗi phương pháp:* Điều này rất quan trọng, nếu hiểu rõ được tác dụng của từng phương pháp, chúng ta có thể linh hoạt sử dụng và kết hợp lại với nhau để tăng hiệu quả chứng minh.

2. *Trình tự của việc sử dụng các phương pháp:* Khi sử dụng kết hợp các phương pháp với nhau để chứng minh, cần biết thứ tự sử dụng của chúng. Có trường hợp việc sử dụng các phương pháp này độc lập với nhau, ta không quan tâm nhiều đến thứ tự thực hiện các phương pháp đó. Còn trong một số trường hợp khác, thứ tự thực hiện lại ảnh hưởng nhiều đến việc chứng minh. Chúng ta cần phải hiểu rõ tác dụng của mỗi phương pháp chứng minh (điều này đã đề cập ở trên) để biết được thứ tự thực hiện chúng để phát huy hiệu quả mong muốn.

3. *Kết hợp với một số bổ đề:* Khi giải một bài toán, ta thường đặt ra câu hỏi là bài toán này có giống bài toán nào đã gặp hay chưa, có phương pháp nào quen thuộc có thể sử dụng với bài toán này hay không? Việc đặt ra câu hỏi như vậy chính là sự liên kết các bài toán lại với nhau. Ý tưởng đơn giản này tỏ ra rất hữu hiệu khi giải toán. Đặc biệt là các bài toán đòi hỏi phải chứng minh nhiều kết quả mới suy ra được đpcm. Cần nhớ một số bổ đề, các kết quả quen thuộc, hay hệ quả của các định lý để xử lý nhanh.

4.7 Một số vấn đề khác

Chúng ta có thể thay a, b, c bởi $f(a, b, c), f(b, c, a), f(c, a, b)$thu được các hệ quả của các vấn đề trên. Chẳng hạn ta có thể thay (a, b, c) bởi $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ để thu được các kết quả như:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1$$

$$\frac{a}{1+ka} + \frac{b}{1+kb} + \frac{c}{1+kc} = 1$$

Ngoài ra, có thể điều chỉnh hệ số của các biến trong một đẳng thức bằng cách đặt ka, kb, kc.
Trong thực tế, có một số giả thiết rắc rối, phức tạp, nhưng thực chất chúng chỉ là hệ quả của các kết quả trên. Nếu biết đặt ẩn một cách thích hợp, chúng ta sẽ quy bài toán về một trong những dạng quen thuộc trên.

Một số bài toán áp dụng
1. (Balkan Mathematical Olympiad)
Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$
Chứng minh

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + ... + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}$$

2. (Cezar Lupu)
Giả sử $a, b, c > 0$ thỏa mãn

$$a + b + c \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Chứng minh

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{3}{2}$$

5 Nhìn vấn đề theo hướng Lượng giác

6 Nhìn vấn đề theo hướng Đa thức

7 Nhìn vấn đề theo hướng Hình học

8 Nhìn vấn đề theo hướng Số học

9 Phụ lục 1: Tổng hợp các cách đổi biến khác

9.1 Một số cách đổi biến cho một biến số

Phần này giới thiệu một số phép thế lượng giác thường dùng khi gặp các bất đẳng thức một biến số, hoặc nhiều biến nhưng các biến độc lập với nhau.
Với một biến x bất kỳ, ta có thể sử dụng lượng giác để đổi biến, cụ thể như sau:
Với số thực $x \in [a, b]$, có thể đặt:
Đổi biến 1. $x = \frac{b-a}{2}\cos t + \frac{b+a}{2}, t \in [0, \pi]$

Đổi biến 2. $x = \frac{b-a}{2}\sin t + \frac{b+a}{2}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi biến 3. $x = (b-a)\cos^2 t + a, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Đổi biến 4. $x = \tan t, t \in [\arctan a, \arctan b]$

Nhận xét chungsau các cách đặt trên, bất đẳng thức cần chứng minh có thể quy về một biến t. Lúc này, có thể sử dụng các công cụ khảo sát hàm để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên khoảng xác định cho trước.

Đổi biến 5.
Với $x \in [-1, 1]$, có thể đặt

$$\left[\begin{array}{c} x = \cos t, t \in [0, \pi]. \\ x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Với $x \in [-a, a]$, có thể đặt

$$\left[\begin{array}{c} x = a\cos t, t \in [0, \pi]. \\ x = a\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Nhận xét Các kết quả về đẳng thức, bất đẳng thức về các hàm lượng giác rất dồi dào. Với cách đặt lượng giác như trên, ta có thể chuyển bất đẳng thức cần chứng minh về các kết quả lượng giác quen thuộc. Để biết thêm về các kết quả đó, có thể tham khảo quyển sách Chuyên đề Luyện Thi Đại Học: Hệ Thức Lượng Giác, [12] một quyển sách tập hợp khá đầy đủ các kết quả về hàm số lượng giác.

9.2 Một số cách đổi biến cho ba biến số bị ràng buộc bởi điều kiện

Tóm tắt Phần này giới thiệu một số cách đổi biến với 3 biến số. Từng mục trong phần này sẽ bao gồm điều kiện ràng buộc của các biến và các cách đổi biến cho điều kiện đó.

Đổi biến 6. Điều kiện $abc = 1$
Đây là một trong những điều kiện thường gặp nhất trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Điều kiện này thường giấu đi tính đối xứng của các biến, tạo sự khó khăn cho bài toán. Chúng ta có thể tiếp cận các bất đẳng thức có điều kiện như thế này bằng một trong các cách sau đây (mỗi cách sẽ có một hiệu quả riêng)
Cách 1

$$a = \tfrac{x}{y}, b = \tfrac{y}{z}, c = \tfrac{z}{x}.$$
$$a = \tfrac{y}{x}, b = \tfrac{z}{y}, c = \tfrac{x}{z}.$$

Nhận xét Cách đổi biến này thường làm mất đi tính hoán vị và làm xuất hiện tính đối xứng của bất đẳng thức. Cần phần biệt hiệu quả của hai cách đổi này, bởi vì chiều hoán vị của hai cách đặt này là ngược nhau.
Cách 2

$$a = \frac{x^2}{yz}, b = \frac{y^2}{zx}, c = \frac{z^2}{xy}$$

Nhận xét Thông thường, cách đổi này làm ảnh hưởng đến sự trội giữa tử thức và mẫu thức trong các bất đẳng thức có dạng phân thức. Và cách đổi này cũng có hiệu quả với các bất đẳng thức chứa căn nữa.
Tương tự, ta cũng có kết quả tổng quát hơn cho n biến số:

Đổi biến 7. Điều kiện $a_1a_2...a_n = 1$
Cách 1

$$a_i = \tfrac{b_i}{b_{i+1}}, i = \overline{1, n}$$
$$a_i = \tfrac{b_{i+1}}{b_i}, i = \overline{1, n}$$

Cách 2

$$a_i = \tfrac{b_i^k}{b_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k}}$$
$$a_i = \tfrac{b_{i+1}b_{i+2}...b_{i+k}}{b_i^k}$$

Nhận xét tương tự vấn đề 6, cách đổi 7.1 tỏ ra hiệu quả với các bất đẳng thức hoán vị, còn cách đổi 7.2 hiệu quả với các bất đẳng thức có chứa căn bậc k.

Đổi biến 8. Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, $a, b, c > 0$.
Cách 1

$$a = \sin\frac{A}{2}, b = \sin\frac{B}{2}, c = \sin\frac{C}{2}.A + B + C = \pi$$

CÁCH 2

$$a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C. A + B + C = \pi$$

Nhận xét Hai cách đổi biến lượng giác này giúp ta thuận tiện biến đổi nhiều biểu thức, và có thể vận dụng các kết quả có sẵn để chứng minh.
CÁCH 3

$$a = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}, b = \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}, c = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}$$

CÁCH 4

$$a = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}, b = \sqrt{\frac{z\text{x}}{(y+z)(y+x)}}, c = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$$

CÁCH 5

$$a = \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}, b = \frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}, c = \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}$$

Với x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác
CÁCH 6

$$a = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, b = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}, c = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác
Nhận xét Các cách đặt này gợi ý cho ta ý tưởng sử dụng phương pháp hình học để chứng minh bất đẳng thức. Và cũng từ cách đặt này, chúng ta cũng có thể sáng tác một số bất đẳng thức hình học nữa.

Đổi biến 9. Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$, $a, b, c > 0$.
CÁCH 1

$$a = 2\cos A, b = 2\cos B, c = 2\cos C. A + B + C = \pi$$

CÁCH 2

$$a = \frac{y^2+z^2-x^2}{yz}, b = \frac{z^2+x^2-y^2}{zx}, c = \frac{x^2+y^2-z^2}{xy}$$

Với x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác
Tương tự

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc = a^2b^2c^2$$

Đổi biến 10. Điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$, $\max\{|a|, |b|, |c|\} \geq 2$

$$\exists x, y, z \in R^*, xyz = 1 : a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y} c = z + \frac{1}{z}$$

Nhận xét Cách đổi biến này khá ấn tượng. Ta thu được điều kiện mới là $xyz = 1$, điều kiện này gợi cho ta có thể sử dụng cách đổi biến 6 để tiếp cận bài toán.

Đổi biến 11. Điều kiện $a + b + c = abc$, $a, b, c > 0$
CÁCH 1
$$a = \tan \mathrm{A}, b = \tan B, c = \tan C$$
CÁCH 2
$$a = \cot \frac{A}{2}, b = \cot \frac{B}{2}, c = \cot \frac{C}{2}$$
CÁCH 3
$$a = \tan n\mathrm{A}, b = \tan nB, c = \tan nC$$
CÁCH 4
$$a = \cot \frac{(2n+1)A}{2}, b = \cot \frac{(2n+1)B}{2}, c = \cot \frac{(2n+1)C}{2}$$

Nhận xét Cả 4 cách đổi biến trên đều sử dụng lượng giác. Điều kiện tổng bằng tích này còn gợi cho ta ý tưởng sử dụng phương pháp *pqr* để tiếp cận.

Đổi biến 12. Điều kiện $ab + bc + ca = 1$, $a, b, c > 0$
CÁCH 1
$$a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}$$
CÁCH 2
$$a = \cot \mathrm{A}, b = \cot B, c = \cot C$$
CÁCH 3
$$a = \cot nA, b = \cot nB, c = \cot nC$$
CÁCH 4
$$a = \tan \frac{(2n+1)A}{2}, b = \tan \frac{(2n+1)B}{2}, c = \tan \frac{(2n+1)C}{2}$$

Đổi biến 13. Điều kiện $a + b + c + 2 = abc$, $a, b, c > 0$
$$a = \frac{n+p}{m}, b = \frac{p+m}{n}, c = \frac{m+n}{p}$$

Đổi biến 14. Điều kiện $ab + bc + ca + 2abc = 1$, $a, b, c > 0$
$$a = \frac{m}{n+p}, b = \frac{n}{p+m}, c = \frac{p}{m+n}$$

Đổi biến 15. Điều kiện $ab + bc + ca + abc = 4$, $a, b, c > 0$
CÁCH 1
$$a = \frac{n+p-m}{m}, b = \frac{p+m-n}{n}, c = \frac{m+n-p}{p}$$
CÁCH 2
$$a = \frac{2m}{n+p}, b = \frac{2n}{p+m}, c = \frac{2p}{m+n}$$

Đổi biến 16. Điều kiện $a+b+c+1=4abc$, $a,b,c>0$.
Nghịch đảo điều kiện trước

Đổi biến 17. Điều kiện $\frac{1}{k+a}+\frac{1}{k+b}+\frac{1}{k+c}=1$.

$$a=\frac{m+n+p}{m}-k, b=\frac{m+n+p}{n}-k, c=\frac{m+n+p}{p}-k$$

Đổi biến 18. Điều kiện $a+b+c+abc=0$

$$a=\frac{x-y}{x+y}, b=\frac{y-z}{y+z}, c=\frac{z-x}{z+x}$$

Đổi biến 19. Điều kiện $ab+bc+ca=-1$

$$a=\frac{x+y}{x-y}, b=\frac{y+z}{y-z}, c=\frac{z+x}{z-x}$$

Nhận xét cách đặt này được suy ra từ một đẳng thức khá đẹp của đại số. Và ứng dụng của đẳng thức này, khá tiêu biểu và đẹp mắt, là các bất đẳng thức của Đào Hải Long.
Các bất đẳng thức đặc biệt này sẽ được giới thiệu trong phần tiếp theo.

Đổi biến 20. Chuyển đổi giữa các đại lượng với nhau:

$$\left(\sqrt{\tfrac{yz}{(x+y)(x+z)}}, \sqrt{\tfrac{zx}{(y+z)(y+x)}}, \sqrt{\tfrac{xy}{(z+x)(z+y)}}\right)$$
$$\left(\sin\tfrac{A}{2}, \sin\tfrac{B}{2}, \sin\tfrac{C}{2}\right)$$
$$(\cos A, \cos B, \cos C)$$

Đổi biến 21. Chuyển đổi giữa các đại lượng với nhau:

$$\left(\sqrt{\tfrac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}, \sqrt{\tfrac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}, \sqrt{\tfrac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}\right)$$
$$\left(\cos\tfrac{A}{2}, \cos\tfrac{B}{2}, \cos\tfrac{C}{2}\right)$$

Đổi biến 22. Điều kiện $a^2+b^2+c^2=1+2abc$.
Cách 1

$$a=\sin\frac{4n+3}{2}A, b=\sin\frac{4n+3}{2}B, c=\sin\frac{4n+3}{2}C$$

Cách 2

$$a=\cos 2\mathrm{n}A, b=\cos 2\mathrm{n}B, c=\cos 2\mathrm{n}C$$

Nhận xét Tham khảo các BĐT hàm $\sin x$ để có nhiều kết quả hơn cho vấn đề này.

Đổi biến 23. Điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=1$.
Cách 1
$$a=\sin\frac{4n+1}{2}A, b=\sin\frac{4n+1}{2}B, c=\sin\frac{4n+1}{2}C$$
Cách 2
$$a=\cos(2n+1)A, b=\cos(2n+1)B, c=\cos(2n+1)C$$

Một số cách đổi biến mới
Tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu một số điều kiện tương đối lạ. Nhưng nếu để ý kỹ, các điều kiện này được suy ra từ các tính chất của các hàm số lượng giác. Xin nêu ra ở đây để tham khảo.

Đổi biến 24. Điều kiện $a^2+b^2+c^2=2\left(ab\sqrt{1-c^2}+bc\sqrt{1-a^2}+ca\sqrt{1-b^2}\right)$.
$$a=\sin A, b=\sin B, c=\sin C$$

Đổi biến 25. Điều kiện
$$a\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+b\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-a^2}+c\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}=abc$$
$$a=\sin A, b=\sin B, c=\sin C$$

Đổi biến 26. Điều kiện
$$ab\sqrt{1-c^2}+bc\sqrt{1-a^2}+ca\sqrt{1-b^2}=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$
$$a=\sin\frac{A}{2}, b=\sin\frac{B}{2}, c=\sin\frac{C}{2}$$

Đổi biến 27. Điều kiện
$$a^2+b^2+c^2+3abc=a\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+b\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-a^2}+c\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$$
$$a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C$$

Đổi biến 28. Điều kiện
$$a^2+b^2+c^2+ab\sqrt{1-c^2}+bc\sqrt{1-a^2}+ca\sqrt{1-b^2}=3\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}+3$$
.
$$a=\sin A, b=\sin B, c=\sin C$$

Đổi biến 29. Điều kiện
$$a\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+b\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-a^2}+c\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}=1+abc$$
$$a=\sin\frac{A}{2}, b=\sin\frac{B}{2}, c=\sin\frac{C}{2}$$

Đổi biến 30. Điều kiện
$$ab\sqrt{1-c^2}+bc\sqrt{1-a^2}+ca\sqrt{1-b^2}=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}+1$$

$$a=\cos\frac{A}{2}, b=\cos\frac{B}{2}, c=\cos\frac{C}{2}$$

Đổi biến 31. Điều kiện

$$ab\sqrt{1-c^2}+bc\sqrt{1-a^2}+ca\sqrt{1-b^2}=\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}-\frac{1}{2}$$

$$a=\sin\frac{A}{3}, b=\sin\frac{B}{3}, c=\sin\frac{C}{3}$$

Đổi biến 32. Điều kiện

$$a\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}+b\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-a^2}+c\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}=abc-\frac{1}{2}$$

$$a=\cos\frac{A}{3}, b=\cos\frac{B}{3}, c=\cos\frac{C}{3}$$

Nhận xét Các điều kiện trên có một dấu hiệu chung làm ta nghĩ ngay đến cách đặt lượng giác. Đó là sự hiện diện của các phần tử $\sqrt{1-a^2}, \sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-c^2}$
Tiếp theo là một số điều kiện có liên quan đến hàm số $\tan x$ và $\cot x$.

Đổi biến 33. Điều kiện $a+b+c+ab+bc+ca=1+abc$
Cách 1

$$a=\tan\frac{A}{4}, b=\tan\frac{B}{4}, c=\tan\frac{C}{4}$$

Cách 2

$$a=\cot\frac{A}{4}, b=\cot\frac{B}{4}, c=\cot\frac{C}{4}$$

Đổi biến 34. Điều kiện $a+b+c+\sqrt{3}(ab+bc+ca)=\sqrt{3}+abc$

$$a=\tan\frac{A}{3}, b=\tan\frac{B}{3}, c=\tan\frac{C}{3}$$

Đổi biến 35. Điều kiện $\sqrt{3}(a+b+c)+ab+bc+ca=1+\sqrt{3}abc$

$$a=\cot\frac{A}{3}, b=\cot\frac{B}{3}, c=\cot\frac{C}{3}$$

Đổi biến 36. Điều kiện $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=a+b+c$
Cách 1

$$a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}$$

Cách 2

$$a=\cot \mathrm{A}, b=\cot B, c=\cot C$$

Đổi biến 37. Điều kiện

$$\frac{1-(a+b+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}-\frac{1+a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)}=\frac{4abc}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}$$

$$a = \tan\frac{A}{2}, b = \tan\frac{B}{2}, c = \tan\frac{C}{2}$$

Đổi biến 38. Điều kiện

$$\sum\frac{1}{(1-a)(1-b)}+\sum\frac{1}{(1+a)(1+b)} = 1+\sum\frac{1}{(1+a)(1-b)}+\sum\frac{1}{(1-a)(1+b)}$$

$$a = \tan\frac{A}{4}, b = \tan\frac{B}{4}, c = \tan\frac{C}{4}$$

9.3 Một số cách đổi biến cho n biến số bị ràng buộc bởi điều kiện

10 Phụ lục 2: Một số bài toán hay có thể sử dụng phương pháp đổi biến đề chứng minh

Phần này đưa ra một số bất đẳng thức có giả thiết đặc biệt như đã giới thiệu ở phần trước.

1. Cho $x, y, z > 1$ thỏa mãn:

$$(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) = 8$$

Chứng minh

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq 1$$

Hướng dẫn Đặt

$$x = \frac{abc}{b^3+c^3+abc}, y = \frac{abc}{c^3+a^3+abc}, z = \frac{abc}{a^3+b^3+abc}$$

2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn:$xy+yz+zx = xyz$
Chứng minh

$$(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) \leq 8$$

Hướng dẫn Tương tự bài toán trên.
3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z = xyz$.
Chứng minh

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq 2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)$$

Hướng dẫn Cách đổi biến 11.
4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+\sqrt{4x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{4y+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{4z+1}}=\frac{1}{2}$$

Chứng minh

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn Vấn đề 3.
5. (Titu Andreescu, Gazêt Matematica)
Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$\left|a^2+b^2+c^2-4\right|=abc$$

Chứng minh

$$(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2)\geq 0$$

Hướng dẫn
6. (Gabriel Dospinescu)
Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$
Chứng minh

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\geq(x+2)(y+2)(z+2)$$

7. (Marian Tetiva)
Cho các số $a, b, c \geq 2$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=abc+4$.
Chứng minh

$$a+b+c+ac+bc\geq 2\sqrt{(a+b+c+3)(a^2+b^2+c^2-3)}$$

8.(USA MO 2001)
Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$
Chứng minh

$$0\leq ab+bc+ca-abc\leq 2$$

9. (Vasile Cartoaje)
Với $a, b, c > 0$ đặt

$$x=a+\frac{1}{b}, y=b+\frac{1}{c}, z=c+\frac{1}{a}$$

Chứng minh

$$xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)$$

10. (Vasile Cartoaje)
Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$
Chứng minh

$$\frac{a}{a+2} + \frac{b}{b+2} + \frac{c}{c+2} \leq 1$$

11. (Vasile Cartoaje)
Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$
Chứng minh:

$$\frac{a-1}{b+c} + \frac{b-1}{c+a} + \frac{c-1}{a+b} \geq 0$$

11 Phụ lục 3: Sử dụng đẳng thức để chứng minh bất đẳng thức. Các đẳng thức hữu ích

12 Tổng kết chuyên đề

12.1 Các kết quả đạt được

12.2 Hạn chế

12.3 Đề xuất hướng khắc phục

Tài liệu

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu. *Problems from the book*. Chapter: *Two useful substitutions. Equations and beyond.*

[2] Vasile Cirtoaje. *Algebraic Inequalities*. GIL Publishing House.

[3] Hoojo Lee. *Topics in inequalities*. Version 2005 and 2006.

[4] Mathias Bæk Tejs Knudsen. *The UVW method*. Mathlinks.

[5] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh. *Sử dụng phương pháp AM-GM để chứng minh bất đẳng thức*. NXB Đại học Sư phạm.

[6] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh. *Sử dụng phương pháp Cauchy Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*. NXB Đại học Sư phạm.

[7] Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Thị Hằng. *Bất đẳng thức hiện đại.*

[8] Võ Thành Văn. *Bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến pqr.*

[9] Phạm Kim Hùng. *Sáng tạo bất đẳng thức*. NXB Tri Thức.

[10] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Vasile Cîrtoaje. *Phân loại và phương pháp giải toán bất đẳng thức*. NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[11] Đoàn Quỳnh (Chủ biên). *Tài liệu chuyên toán giải tích 12*. NXB Giáo dục.

[12] Trần Phương. *Chuyên đề luyện thi đại học: Hệ thức lượng giác*. NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[13] Phạm Văn Thuận. *Bất đẳng thức dạng thuần nhất bậc.*

[14] Trần Phương. *Những viên kim cương trong bất đẳng thức Toán học*. NXB Tri thức.

[15] Diến đàn toán học. *Kỹ thuật phân tách bất đẳng thức Chebyshev.*

[16] Art of Problem Solving.forum. *Useful Algebraic Manipulations and Factorizations Thread.*

[17] Art of Problem Solving.forum. *Something about UVW – Method.*

[18] Art of Problem Solving.forum. *Chebyshev for three sequences.*

[19] Art of Problem Solving.forum. *The UVW - method.*