

Problem: Elementary Computer Science – Bài Tập Tin Học Sơ Cấp

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problems in Elementary Computer Science – Bài Tập Tin Học Sơ Cấp*.

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_computer_science/problem/NQBH_elementary_computer_science_problem.pdf.

TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_computer_science/problem/NQBH_elementary_computer_science_problem.tex.

- *Problem & Solution: Elementary Computer Science – Bài Tập & Lời Giải: Tin Học Sơ Cấp*.

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_computer_science/problem/NQBH_elementary_computer_science_solution.pdf.

TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_computer_science/problem/NQBH_elementary_computer_science_solution.tex.

Mục lục

1 Basic – Cơ Bản	2
1.1 Elementary algebra – Đại số sơ cấp	2
1.2 Vector, matrix, system of algebraic equations – Vector, ma trận, hệ phương trình đại số	4
1.3 Function – Hàm số	4
1.4 Polynomials, interpolation polynomials – Đa thức, đa thức nội suy	4
1.5 Differentiation & derivative – Phép tính vi phân & đạo hàm	5
1.6 Integration & integral – Phép tính tích phân & tích phân	5
1.7 Nonlinear system – Phương trình phi tuyến	5
1.8 Optimization – Tối ưu hóa	5
1.9 Differential equations – Phương trình vi phân	5
1.10 Probability & Statistics – Xác suất & Thống kê	6
1.11 Document managing & processing – Quản lý & xử lý văn bản	6
1.12 Technology – Bài toán kỹ thuật	6
2 Number Theory – Số Học	6
3 CSES Problem Set	10
3.1 Introductory Problems	10
3.2 Mathematics	16
Tài liệu	17

General structure – Cấu trúc tổng quát

1 (General structure of a programming problem). (a) *Viết thuật toán, vẽ lưu đồ, & viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ để:

- Tính
- Tìm
- Xác định

(b) *Mở rộng & tổng quát bài toán.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Basic – Cơ Bản

1.1 Elementary algebra – Đại số sơ cấp

2 ([DT06], VD1, p. 14). (a) Cho $A = x^2 + y^2, B = x + y + A, C = xy + A - B^2$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính A, B, C . (b) Mở rộng bài toán cho $A_i(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ với $i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}^*$, là các đa thức 2 biến x, y . (c) Mở rộng bài toán cho $A_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ với $i = 1, 2, \dots, n$, là các đa thức hệ số thực với $n \in \mathbb{N}^*$ biến số $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

See also:

- Problem: Algebraic Expression – Bài Tập: Biểu Thức Đại Số.

Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 7/algebraic expression/problem: [pdf¹][TeX²].

- Problem & Solution: Algebraic Expression – Bài Tập & Lời Giải: Biểu Thức Đại Số.

Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 7/algebraic expression/solution: [pdf³][TeX⁴].

3 ([DT06], VD2, p. 15). (a) Tìm GTLN $\max\{a, b, c\}$ & GTNN $\min\{a, b, c\}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. (b) Mở rộng bài toán cho $n \in \mathbb{N}^*$ số a_1, a_2, \dots, a_n .

4 ([DT06], VD3, p. 16). (a) Tính giá trị của hàm số $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^3 & \text{if } 0 \leq x - y \leq 10, \\ x^2 + y^2 & \text{if } x - y < 0, y \geq 0, \\ (x - y)^2 & \text{else.} \end{cases}$$

(b) Mở rộng bài toán cho các hàm số tương tự.

5 ([DT06], VD4, p. 17). (a) Tìm nghiệm của phương trình bậc ≤ 2 có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. (b) Mở rộng bài toán cho phương trình bậc 3, bậc 4. (c) Mở rộng bài toán cho các phương trình đa thức có thể giải được nhờ quy về phương trình bậc 2, 3.

See also:

- Problem: 2nd-Order Function. Quadratic Equation – Bài Tập: Hàm Số Bậc 2 $y = ax^2$. Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0$.

Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 9/2nd-order function, quadratic equation/problem: [pdf⁵][TeX⁶].

- Problem & Solution: 2nd-Order Function. Quadratic Equation – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số Bậc 2 $y = ax^2$. Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0$.

Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 9/2nd-order function, quadratic equation/solution: [pdf⁷][TeX⁸].

6 ([DT06], VD5, p. 18). Tính tổng $S = \sum_{i=1}^{100} x_i$ với $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, 100$. (b) Mở rộng bài toán cho các tổng tương tự.

7 ([DT06], VD6, p. 19). Tính giá trị của đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ với hệ số thực $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, \dots, n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ bằng cách sử dụng thuật toán Horner.

8 ([DT06], VD7, p. 21). Tính giá trị hàm số mũ e^x với $x = a$ với sai số $\varepsilon > 0$ cho trước bằng cách sử dụng khai triển Taylor của hàm e^x .

9 ([DT06], VD8, p. 22). Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 20x^2 + 14x - 4 = 0$ với giá trị đầu (initial value) $x_0 = 0.8$.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression/problem/NQBH_algebraic_expression_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression/problem/NQBH_algebraic_expression_problem.tex.

³URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression/problem/NQBH_algebraic_expression_solution.pdf.

⁴URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/algebraic_expression/problem/NQBH_algebraic_expression_solution.tex.

⁵URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/2nd_order_function/problem/NQBH_2nd_order_function_problem.pdf.

⁶URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/2nd_order_function/problem/NQBH_2nd_order_function_problem.tex.

⁷URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/2nd_order_function/solution/NQBH_2nd_order_function_solution.pdf.

⁸URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/2nd_order_function/solution/NQBH_2nd_order_function_solution.tex.

10 ([DT06], VD9, p. 23). Giải hệ phương trình tuyến tính cấp n có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

See also:

- Problem: System of 1st-Order Equations – Bài Tập: Hệ Phương Trình Bậc Nhất $Ax = b$.
Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 9/system of 1st-order equations/problem: [pdf⁹][TeX¹⁰].
 - Problem & Solution: System of 1st-Order Equations – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình Bậc Nhất $Ax = b$.
Folder: Elementary STEM & Beyond/Elementary Mathematics/grade 9/system of 1st-order equations/solution: [pdf¹¹][TeX¹²].
 - Problem: Trigonometry in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác. URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
- 11 ([DT06], 10., p. 27). Tính tổ hợp chập k trong n phần tử C_n^k .
- 12 ([DT06], 11., p. 27). Tính tích của n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
- 13 ([DT06], 12., p. 27). Tính giá trị của biểu thức $A = \sum_{i=1}^{100} x_i + \prod_{i=1}^{100} x_i$.
- 14 ([DT06], 13., p. 27). Xác định các số dương trong chuỗi số x_1, x_2, \dots, x_n .
- 15 ([DT06], 14., p. 27). Tính trung bình số học của các phần tử trong chuỗi số x_1, x_2, \dots, x_n trong đoạn $[a, b]$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- 16 ([DT06], 15., p. 27). Tính 100 số Fibonacci đầu tiên.
- 17 ([DT06], 16., p. 27). Tìm số lớn nhất trong dãy số x_1, x_2, \dots, x_n .
- 18 ([DT06], 17., p. 27). Tính các phần tử của tam giác Pascal tới C_{100}^{100} .
- 19 ([DT06], 18., p. 27). Gọi x_1, x_2, \dots, x_n là lượng cholesterol trung bình của người đến khám bệnh. Người khỏe có lượng cholesterol nhỏ hơn tiêu chuẩn $x < A$. Xác định số người không mắc bệnh & lượng cholesterol trung bình của người bệnh.
- 20 ([DT06], 19., p. 27). Viết các hoán vị với 5 số 1, 2, 3, 4, 5.
- 21 ([DT06], 20., p. 27). Xếp các số theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần.
- 22 ([DT06], 21., p. 27). Lập danh bạ điện thoại 5 số.
- 23 ([DT06], 22., p. 27). Cho $a, b, c > 0$ bất kỳ. Nếu 3 số đó có thể là chiều dài 3 cạnh của 1 tam giác, tính chu vi & diện tích tam giác đó.
- 24 ([DT06], 23., p. 28). Tính $n!$ với $n \in \mathbb{Z}$.
- 25 ([DT06], 24., p. 28). Tìm ước chung lớn nhất ƯCLN của 2 số.
26. Tìm bội chung nhỏ nhất BCNN của 2 hay nhiều số.
- 27 ([DT06], 25., p. 28). Tính tổng & tích của 1 chuỗi số biết giá trị đầu & số các số hạng của chuỗi.
- 28 ([DT06], 26., p. 28). Tính tổng của chuỗi $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
- 29 ([DT06], 27., p. 28). Xác định các số nguyên tố trong đoạn $[1, n]$ với $n \in \mathbb{N}$ cho trước.
- 30 ([DT06], 28., p. 28). Tính $y = \log_a x$ với cơ số $a > 0$ bất kỳ.

⁹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/problem/NQBH_system_1st_order_equations_problem.pdf.

¹⁰URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/problem/NQBH_system_1st_order_equations_problem.tex.

¹¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/solution/NQBH_system_1st_order_equations_solution.pdf.

¹²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/solution/NQBH_system_1st_order_equations_solution.tex.

1.2 Vector, matrix, system of algebraic equations – Vector, ma trận, hệ phương trình đại số

31 ([DT06], 29., p. 28). Thực hiện phép cộng, trừ, tích vô hướng, tích vector đối với 2 vector trong không gian 3 chiều.

32 ([DT06], 30., p. 28). Tính tích vô hướng của 2 vector n chiều $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

33 ([DT06], 31., p. 28). Cho 2 vector n chiều $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Tính vector $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ có các thành phần được xác định như sau:

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x_i + y_i < a, \\ x_i + y_i & \text{if } x_i + y_i \geq a, \\ (x_i + y_i)^2 & \text{if } x_i + y_i \leq 0, \end{cases} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

ℰ tích tích vô hướng $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$.

34 ([DT06], 32., p. 28). Tính ma trận chuyển vị của ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

35 ([DT06], 33., p. 28). Xác định phần tử lớn nhất ℰ phần tử nhỏ nhất trong ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$.

36 ([DT06], 34., p. 28). Tìm ma trận tổng $C = A + B$.

37 ([DT06], 35., p. 28). Tìm ma trận tích $C = AB$.

38 ([DT06], 36., p. 28). Tính định thức D của hệ phương trình tuyến tính bậc $n \in \mathbb{N}^*$.

39 ([DT06], 37a., p. 28). Tính ma trận nghịch đảo.

40 ([DT06], 37b., p. 28). Giải hệ phương trình đại số tuyến tính bậc $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp khử Gauss.

1.3 Function – Hàm số

41 ([DT06], 38., p. 29). Vẽ đồ thị hàm số theo từng điểm.

42 ([DT06], 39., p. 29). Vẽ đồ thị hàm số, thực hiện dịch chuyển tọa độ ℰ vẽ các điểm.

43 ([DT06], 40., p. 29). Xác định hàm số theo đồ thị hàm số.

44 ([DT06], 41., p. 29). Tính giá trị liên tiếp của hàm số $y_i = \sin e^{x_i}$ trong đó $x_i := a + i(b - a)$, $i = 1, 2, \dots, 100$ với $a, b \in \mathbb{R}$ cho trước.

45 ([DT06], 42., p. 29). Tính các giá trị của hàm số $y_i = e^{x_i} + \sin x_i$ với $x_i = a + hi$, $i = 1, 2, \dots, n$.

46 ([DT06], 43., p. 29). Tính $\sqrt[n]{x}$.

47 ([DT06], 44., p. 29). Lập chương trình tính toán các lượng phức: cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa các số phức.

48 ([DT06], 45., p. 29). Lập chương trình đổi radian ra độ.

49 ([DT06], 46., p. 29). Lập chương trình đổi độ ra radian.

50 ([DT06], 47., p. 29). Tính giá trị của 2 hàm số sinh $x, \cosh x$.

51 ([DT06], 48., p. 29). Tính giá trị hàm số $y = a^x$.

1.4 Polynomials, interpolation polynomials – Đa thức, đa thức nội suy

52 ([DT06], 49., p. 29). Tính giá trị của đa thức Chebyshev bậc $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \\ U_n(x) := \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{2^n \sqrt{1-x^2}}.$$

53 ([DT06], 50., p. 29). Tính giá trị của đa thức Legendre bậc $n \in \mathbb{N}^*$

$$L_n(x) = A_n \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} C_n^k x^{n-k}.$$

54 ([DT06], 51., p. 29). Tính giá trị của đa thức Laguerre:

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}).$$

55 ([DT06], 52., p. 30). Tính giá trị của đa thức Hermite:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (2)$$

56 ([DT06], 53., p. 30). Cho bảng các giá trị (x_i, y_i) . Tìm đa thức nội suy Lagrange.

57 ([DT06], 54., p. 30). Cho bảng các giá trị (x_i, y_i) . Tìm ma trận nội suy Lagrange.

58 ([DT06], 55., p. 30). Tìm đa thức nội suy Newton. Tính giá trị của đa thức nội suy tại điểm x_0 theo công thức Newton.

59 ([DT06], 56., p. 30). Xác định trị số của đa thức nội suy tại điểm x_0 theo công thức Horner.

60 ([DT06], 57., p. 30). Tính tổng 2 đa thức.

61 ([DT06], 58., p. 30). Nhân 2 đa thức.

62 ([DT06], 59., p. 30). Chia 2 đa thức.

1.5 Differentiation & derivative – Phép tính vi phân & đạo hàm

63 ([DT06], 60., p. 30). Tìm đạo hàm cấp $m \in \mathbb{N}$ của đa thức $P(x)$.

64 ([DT06], 61., p. 30). Tìm đạo hàm cấp $m \in \mathbb{N}$ của đa thức nội suy Newton.

65 ([DT06], 62., p. 30). Tìm đạo hàm 1 biến.

66 ([DT06], 63., p. 30). Tìm gradient ∇ hàm nhiều biến.

67 ([DT06], 64., p. 30). Tìm giá trị của đạo hàm cấp $m \in \mathbb{N}$ của đa thức $P(x)$ tại điểm $x_0 \in \mathbb{R}$.

68 ([DT06], 65., p. 30). Tìm đạo hàm cấp 2 của hàm theo $x_i x_j$ tại 1 điểm theo công thức đạo hàm có bước biến đổi $\mathcal{O}(1)$ quá trình ngoại suy.

1.6 Integration & integral – Phép tính tích phân & tích phân

69 ([DT06], 66., p. 30). Tính tích phân xác định bằng phương pháp Simpson.

70 ([DT06], 67., p. 30). Tính tích phân xác định bằng phương pháp hình thang.

71 ([DT06], 68., p. 30). Tính tích phân kép trong miền D bằng phương pháp Gauss–Legendre.

72 ([DT06], 69., p. 30). Tính tích phân kép bằng phương pháp Romberg.

1.7 Nonlinear system – Phương trình phi tuyến

73 ([DT06], 70., p. 31). Giải phương trình phi tuyến bằng phương pháp chia đôi cung.

74 ([DT06], 71., p. 31). Giải phương trình phi tuyến bằng phương pháp lặp cát tuyến.

75 ([DT06], 72., p. 31). Giải phương trình phi tuyến bằng phương pháp lặp Newton.

1.8 Optimization – Tối ưu hóa

76 ([DT06], 73., p. 31). Tìm cực trị của hàm số bằng phương pháp tiết diện vàng.

77 ([DT06], 74., p. 31). Tìm cực trị của hàm nhiều biến bằng phương pháp gradient.

78 ([DT06], 75., p. 31). Tìm cực trị của hàm 1 biến.

1.9 Differential equations – Phương trình vi phân

79 ([DT06], 76., p. 31).

80 ([DT06], 77., p. 31).

81 ([DT06], 78., p. 31).

82 ([DT06], 79., p. 31).

1.10 Probability & Statistics – Xác suất & Thống kê

83 ([DT06], 80., p. 31).

84 ([DT06], 81., p. 31).

85 ([DT06], 82., p. 31).

86 ([DT06], 83., pp. 31–32).

1.11 Document managing & processing – Quản lý & xử lý văn bản

87 ([DT06], 84., p. 32).

88 ([DT06], 85., p. 32).

89 ([DT06], 86., p. 32).

90 ([DT06], 87., p. 32).

91 ([DT06], 88., p. 32).

92 ([DT06], 89., p. 32).

93 ([DT06], 90., p. 32).

94 ([DT06], 91., p. 32).

1.12 Technology – Bài toán kỹ thuật

95 ([DT06], 92., p. 32).

2 Number Theory – Số Học

96 ([Huy24], p. 6, số thân thiện – friendly number). (a) Tìm tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số mà khi đảo trật tự của 2 chữ số đó sẽ thu được 1 số nguyên tố cùng nhau với số đã cho. (b) Mở rộng bài toán cho số tự nhiên có n chữ số với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

97 ([Huy24], p. 13, cấp số cộng – arithmetic progression). (a) Tìm các số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số. 3 chữ số này, theo thứ tự từ trái qua phải tạo thành 1 cấp số cộng. (b) Mở rộng bài toán cho số tự nhiên (không nhất thiết phải lẻ) có n chữ số với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

98 ([Huy24], p. 17, cấp số nhân – geometric progression). (a) Tìm các số tự nhiên gồm 3 chữ số. 3 chữ số này, theo thứ tự từ trái qua phải tạo thành 1 cấp số nhân với công bội $q \in \mathbb{N}^*$. (b) Mở rộng bài toán cho số tự nhiên có n chữ số với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

99 ([Tru23], 1., p. 13, HSG Lớp 10 Vĩnh Phúc 2020–2021, Square – Hình vuông). (a) Cho n điểm có tọa độ là các số nguyên trên hệ trục tọa độ Oxy. Tìm diện tích hình vuông nhỏ nhất có các cạnh song song với các trục tọa độ sao cho tất cả các điểm đã cho đều thuộc hình vuông đó (điểm nằm trên cạnh hình vuông cũng được coi là thuộc hình vuông đó).

- Input. Dòng 1: chứa số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq n \leq 20$, là số lượng điểm có tọa độ là các số nguyên. n dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 2 số nguyên $x, y \in \mathbb{Z}$, $1 \leq x, y \leq 100$, là tọa độ của mỗi điểm.

- Output. Ghi diện tích hình vuông nhỏ nhất tìm được.

- Sample.

square.inp	square.out
3	16
3 4	
5 7	
4 3	

(b) Mở rộng bài toán từ ‘hình vuông’ sang ‘hình chữ nhật’, & từ ‘tọa độ nguyên’ sang ‘tọa độ thực’: (i) Cho n điểm có tọa độ là các số thực trên hệ trục tọa độ Oxy. Tìm diện tích hình vuông, hình chữ nhật, hình chữ nhật “nguyên” nhỏ nhất có các cạnh song song với các trục tọa độ sao cho tất cả các điểm đã cho đều thuộc hình chữ nhật đó (điểm nằm trên cạnh hình chữ nhật cũng được coi là thuộc hình chữ nhật đó), trong đó hình vuông, hình chữ nhật “nguyên” lần lượt là các hình vuông & hình chữ nhật có các tọa độ của 4 đỉnh là 8 số nguyên.

100 ([Tru23], 2., pp. 13–14, HSG Lớp 10 Vĩnh Phúc 2020–2021, Divisible by 3 – Chia hết cho 3). Cho dãy a gồm n số nguyên dương. Cho biết có bao nhiêu cặp số trong dãy có tổng chia hết cho 3, i.e., đếm xem có bao nhiêu cặp chỉ số i, j , $1 \leq i < j \leq n$, sao cho $a_i + a_j \div 3$.

- **Input.** Dòng 1: 1 số nguyên duy nhất n , $1 \leq n \leq 10^5$. Dòng 2: Ghi n số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n , $1 \leq a_i \leq 10^5$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, là các phần tử của dãy.
- **Output.** 1 dòng duy nhất ghi số lượng cặp số của dãy a có tổng chia hết cho 3.
- **Sample.**

div3.inp	div3.out	Giải thích
5 3 6 9 12	3	3 cặp số tìm được có chỉ số: (1, 4), (2, 3), (3, 5).
4 3 6 9 12	6	6 cặp số tìm được có chỉ số: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4).

101 ([Tru23], 3., p. 14, HSG Lớp 10 Vĩnh Phúc 2020–2021, Delete element – Xóa phần tử). Cho dãy gồm n số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n với $1 \leq a_i \leq 3$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Có bao nhiêu cách để xóa đi 1 số phần tử của dãy (không xóa phần tử nào cũng được coi là 1 cách) mà vẫn giữ nguyên thứ tự ban đầu để được 1 dãy mới thỏa mãn 2 yêu cầu sau: (i) Dãy còn ít nhất 3 phần tử. (ii) Phần tử đầu tiên của dãy có giá trị 1, tiếp theo là 1 số phần tử có giá trị là 2 (ít nhất có 1 số 2), & kết thúc bằng đúng 1 phần tử có giá trị là 3. E.g., các dãy 1, 2, 2, 3 & 1, 2, 3 thỏa mãn yêu cầu, các dãy 1, 2, 3, 3 & 1, 1, 2, 3 không thỏa mãn yêu cầu.

- **Input.** Dòng 1: 1 số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 10^6$, là số lượng phần tử của dãy. Dòng 2: Ghi n số nguyên dương a_1, a_2, \dots, a_n là giá trị của các phần tử của dãy ban đầu.
- **Output.** Gồm 1 dòng duy nhất là số cách xóa để được dãy mới thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Do số lượng cách xóa phần tử có thể rất lớn nên chỉ cần ghi ra số lượng cách xóa sau khi chia lấy dư cho $10^9 + 7$.
- **Sample.**

delete_element.inp	delete_element.out
8 1 2 1 2 3 1 2 3	15

102 ([Tru23], 1., p. 15, HSG Lớp 11 Vĩnh Phúc 2020–2021, Game button – Trò chơi bấm nút). Người chơi đang tham gia 1 trò chơi như sau: Có 2 nút bấm A, B , trên nút A có ghi số m_A , trên nút B có ghi số m_B . Ở mỗi lượt chơi, người chơi phải chọn bấm 1 trong 2 nút & sẽ nhận được số điểm thưởng bằng với số ghi trên nút đó, sau đó số trên nút bấm giảm đi 1 đơn vị. Hỏi sau 2 lượt chơi, số điểm thưởng lớn nhất mà người chơi có thể nhận được là bao nhiêu?

- **Input.** 1 dòng duy nhất ghi 2 số nguyên dương m_A, m_B với $3 \leq A, B \leq 20$, tương ứng với 2 số ghi trên 2 nút A & B .
- **Output.** Ghi số điểm thưởng lớn nhất mà người chơi có thể nhận được sau 2 lượt chơi.
- **Sample.**

game_button.inp	game_button.out	Giải thích
5 3	9	Bấm 2 lần nút A & sẽ có tổng điểm thưởng: $5 + 4 = 9$.

103 ([Tru23], 2., p. 15, HSG Lớp 11 Vĩnh Phúc 2020–2021, Count number – Đếm số). Cho 4 số nguyên dương a, b, c, d . Đếm xem có bao nhiêu số nguyên dương $x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn các điều kiện sau: (i) $a \leq x \leq b$. (ii) $x \nmid c$. (iii) $x \nmid d$.

- **Input.** 1 dòng duy nhất ghi 4 số a, b, c, d , $1 \leq a, b \leq 10^{18}$, $1 \leq c, d \leq 10^9$.
- **Output.** 1 dòng duy nhất ghi số lượng số nguyên dương $x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện đề bài.
- **Sample.**

count_number.inp	count_number.out	Giải thích
4 9 2 3	2	Chỉ có số 5 & 7 thỏa mãn điều kiện đề bài.

104 ([Tru23], 3., p. 16, HSG Lớp 11 Vĩnh Phúc 2020–2021, Reverse & reverse – Lật qua lật lại). Cho dãy a gồm $n \in \mathbb{N}^*$ phần tử $1, 2, \dots, n$. Người ta thực hiện trên dãy số này đúng k lần 2 thao tác sau: (i) Đầu tiên, đảo ngược thứ tự (lật đối xứng) đoạn phần tử có chỉ số từ u đến v . (ii) Tiếp theo, đảo ngược thứ tự (lật đối xứng) đoạn phần tử có chỉ số từ l đến r . Với u, v, l, r là các hằng số cho trước. Đưa ra dãy a sau khi thực hiện k lần 2 thao tác nói trên.

- **Input.** Dòng 1: 2 số nguyên dương $n, k \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq 100$, $1 \leq k \leq 10^9$. Dòng 2: gồm 2 số nguyên dương u, v , $1 \leq u < v \leq n$. Dòng 3: gồm 2 số nguyên dương l, r , $1 \leq l < r \leq n$.

- Output. Ghi trên n dòng, dòng thứ i ghi giá trị của phần tử thứ i của dãy a sau khi thực hiện k lần 2 thao tác nói trên, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.
- Sample.

reverse_reverse.inp	reverse_reverse.out	Giải thích
7 2	1	Dãy ban đầu:
2 5	2	1 2 3 4 5 6 7
3 7	4	Lần 1:
	3	1 5 4 3 2 6 7
	5	1 5 7 6 2 3 4
	7	Lần 2:
	6	1 2 6 7 5 3 4
		1 2 4 3 5 7 6

105 ([Tru23], 3., p. 17, HSG Lớp 12 Vĩnh Phúc 2020–2021, Max gift – Chọn quà mắc nhất). Cuối năm công ty tổ chức phát qua cho nhân viên. Có $n \in \mathbb{N}^*$ gói quà với giá trị khác nhau được xếp liên tiếp thành 1 hàng, trong đó gói quà thứ i có giá trị là a_i . Mỗi nhân viên chỉ được chọn 2 gói quà liên tiếp. Mr. Bean là người may mắn được chọn đầu tiên. Giúp Mr. Bean chọn ra 2 gói quà liên tiếp có giá trị lớn nhất.

- Input. Dòng 1: chứa số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq n \leq 10^6$. Dòng 2: Giá trị của n gói quà, $1 \leq a_i \leq 10^3$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, mỗi giá trị cách nhau bởi dấu cách.
- Output. 1 dòng duy nhất chứa tổng giá trị quà lớn nhất chọn được.
- Sample.

max_gift.inp	max_gift.out
5	9
1 3 5 4 2	

106 ([Tru23], 2., pp. 17–18, HSG Lớp 12 Vĩnh Phúc 2020–2021, Decrease value – Giảm giá trị). 1 ngày rảnh rỗi, Mr. Bean chơi trò chơi với các con số. Mr. Bean lấy 1 số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$ rồi thực hiện không giới hạn số lần thao tác “Chọn 1 chữ số x của n rồi giảm n đi x đơn vị”. Hỏi Mr. Bean phải thực hiện ít nhất bao nhiêu thao tác như vậy để giảm số n về 0. E.g., $n = 27$, Mr. Bean sẽ thực hiện 5 thao tác để biến đổi: (i) Chọn $x = 7 \rightarrow n = 27 - 7 = 20$. (ii) Chọn $x = 2 \rightarrow n = 20 - 2 = 18$. (iii) Chọn $x = 8 \rightarrow n = 18 - 8 = 10$. (iv) Chọn $x = 1 \rightarrow n = 10 - 1 = 9$. (v) Chọn $x = 9 \rightarrow n = 9 - 9 = 0$.

- Input. 1 dòng: 1 số nguyên dương duy nhất n , $1 \leq n \leq 10^6$.
- Output. 1 dòng duy nhất ghi số thao tác ít nhất để biến đổi n về 0.
- Sample.

decrease_value.inp	decrease_value.out
27	5

107 ([Tru23], 3., p. 18, HSG Lớp 12 Vĩnh Phúc 2020–2021, Difference degree of substrings – Xâu con phân biệt). 1 lần Mr. Bean được bạn gái gửi cho 1 dãy ký tự S độ dài n chỉ gồm các chữ cái in hoa ($'A', \dots, 'Z'$). Bạn gái nhờ Mr. Bean xác định “độ phân biệt” của dãy ký tự trên. Trong đó độ phân biệt của dãy ký tự là số nguyên dương l nhỏ nhất sao cho tất cả các xâu con của S độ dài l là đôi một phân biệt. E.g., với $n = 7$, $S = 'ABCDABC'$ thì $l = 4$ do tất cả các xâu con độ dài 4 đều phân biệt. Giúp Mr. Bean việc đó.

- Input. Dòng 1: số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leq 100$. Dòng 2: chứa xâu ký tự S .
- Output. Gồm 1 dòng duy nhất ghi 1 số nguyên duy nhất là “độ phân biệt” của dãy ký tự S .
- Sample.

diff_substring.inp	diff_substring.out
7	4
ABCDABC	

108 ([Tru23], 4., p. 18, HSG Lớp 12 Vĩnh Phúc 2020–2021, Ants meet – Kiến tha mồi). Trên đường đi làm về Mr. Bean quan sát thấy 2 ổ kiến cách nhau 1 khoảng l đơn vị. Các con kiến đang tha mồi về 2 tổ trên đường thẳng nối 2 tổ kiến với nhau. Các con kiến khi tha mồi về tổ nào thì ở lại tổ đó. Nếu 2 con kiến gặp nhau trên đường đi thì cả 2 sẽ đổi hướng di chuyển.

Giả sử đường nối giữa 2 tổ kiến được gắn tọa độ từ 0 đến l . Tổ thứ nhất ở vị trí 0 & tổ thứ 2 ở vị trí l . Ở thời điểm Mr. Bean quan sát có n con kiến đang tha mồi về tổ. Con thứ i xuất phát ở tọa độ x_i , mang lượng mồi khối lượng w_i & có hướng di chuyển d_i . Nếu $d_i = 1$ thì con kiến thứ i đang di chuyển theo hướng 0 về l , $d_i = -1$ thì con kiến thứ i đang di chuyển theo chiều ngược lại. Tất cả các con kiến có tốc độ di chuyển bằng nhau & bằng 1 đơn vị đo độ dài trên giây.

Gọi t là thời điểm sớm nhất tính từ thời điểm quan sát mà tổng lượng mồi được tha về 2 tổ đạt ít nhất $\frac{1}{2}$ tổng lượng mồi của đàn kiến. Mr. Bean đếm được trong thời gian đó các con kiến gặp nhau đúng x lần, tính cả lần gặp nhau ở thời điểm t . Hỏi x bằng bao nhiêu?

- **Input.** Dòng 1: 2 số nguyên dương $n, l \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq 5 \cdot 10^4$, $1 \leq l \leq 10^9$. Dòng 2, ..., $n+1$: Dòng $i+1$ ghi 3 số nguyên w_i, x_i, d_i , $1 \leq w_i \leq 10^3$, $d_i = \pm 1$, $0 \leq x_i \leq l$, các số x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, đôi một phân biệt. Các số nguyên cách nhau 1 dấu cách.
- **Output.** 1 dòng duy nhất chứa số nguyên $x \in \mathbb{N}^*$ là số lần gặp nhau của các cặp kiến.
- **Sample.**

ant_meet.inp	ant_meet.out
3 5 1 1 1 2 2 -1 3 3 -1	2

Giải thích: Thời điểm 0.5, kiến 1 gặp kiến 2 ở tọa độ 1.5, kiến 1 đổi hướng thành -1 , kiến 2 đổi hướng thành 1. Thời điểm 1, kiến 2 gặp kiến 3 ở tọa độ 2, kiến 2 đổi hướng thành -1 , kiến 3 đổi hướng thành 1. Thời điểm 2: kiến 1 về đến tổ ở tọa độ 0. Thời điểm 3: kiến 2 về đến tổ ở tọa độ 0, lúc này lượng mồi đạt được ở 2 tổ là 3, bằng $\frac{1}{2}$ tổng lượng mồi của cả 3 kiến.

109 ([[Tru23](#)], 1., p. 20, HSG Lớp 12 Nam Định 2020–2021, Nearly perfect number – Số gần hoàn hảo). 1 số nguyên dương $a \in \mathbb{N}^*$ được gọi là số “gần hoàn hảo” nếu thỏa mãn điều kiện: $2a \leq k$ với k là tổng các ước số của a , e.g., 12 là 1 số “gần hoàn hảo” vì $2 \cdot 12 < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12$ ($24 < 28$).

- **Input.** Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq 10^4$. n dòng tiếp theo, mỗi dòng là 1 số nguyên dương có giá trị $\leq 10^6$.
- **Output.** Dòng đầu tiên ghi số lượng số “gần hoàn hảo”. Các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 1 số “gần hoàn hảo”, số gặp trước thì viết trước.
- **Sample.**

near_perfect_number.inp	near_perfect_number.out
5 8 16 12 6 7	2 12 6

110 ([[Tru23](#)], 2., pp. 20–21, HSG Lớp 12 Nam Định 2020–2021, Special number – Số đặc biệt). Cho 1 dãy gồm n số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n . Đếm & đưa ra số đặc biệt trong dãy a . Số đặc biệt là số chỉ xuất hiện đúng 1 lần trong dãy số.

- **Input.** Dòng đầu tiên là số $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq 10^6$. n dòng tiếp theo, dòng thứ i là số a_i , $|a_i| \leq 10^9$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.
- **Output.** Dòng đầu tiên ghi số lượng số đặc biệt. Các dòng tiếp theo, mỗi dòng ghi 1 số đặc biệt tính từ đầu dãy a .
- **Sample.**

special_number.inp	special_number.out
8 9 9 7 7 6 11 9 5	3 6 11 5

111 ([Tru23], 3., p. 21, HSG Lớp 12 Nam Định 2020–2021, Game of gifts – Trò chơi tặng quà). 1 công ty có tổ chức trò chơi, tặng $n \in \mathbb{N}^*$ gói quà đã được chuẩn bị theo giá trị phần quà từ thấp đến cao, để tri ân cho n khách hàng. Công ty đó đã chuẩn bị 1 chiếc hộp đựng n mảnh giấy, mỗi mảnh giấy được bí mật ghi 1 mã hóa gồm nhiều ký tự số & chữ. Mỗi khách hàng được chọn 1 mảnh giấy trong chiếc hộp đó. Viết chương trình tặng quà từ thấp đến cao theo số lượng các ký tự số của mã hóa trong tờ giấy, nếu số lượng ký tự số trong mã hóa bằng nhau thì khách hàng chọn trước được tặng quà trước.

- Input. Dòng đầu tiên chứa số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq n \leq 10^4$. n dòng tiếp theo, mỗi dòng chứa 1 mã hóa không dài quá 255 ký tự tương ứng cho từng khách hàng.
- Output. Thứ tự tặng quà của trò chơi này cho n khách hàng trên.
- Sample.

game_gift.inp	game_gift.out
5	G2Chuc
N123456Cao	A89Dat
A89Dat	L512Ket
G2Chuc	E3689Qua
L512Ket	N123456Cao
E3689Qua	

112 ([Tru23], 4., pp. 21–22, HSG Lớp 12 Nam Định 2020–2021, Work – Công việc). Trong 1 dây chuyền làm việc của công ty có n công nhân làm n việc. Người ta đánh số cho công nhân từ 1 đến n theo thứ tự đứng trong dây chuyền. Thời gian hoàn thành 1 công việc của người thứ i là t_i phút. Mỗi người cần làm xong công việc của mình nhưng được quyền làm tối đa 2 việc. Vì thế họ có thể phối hợp với người đứng ngay trước mình cùng làm, nếu người thứ i & người thứ $i + 1$ phối hợp thì thời gian làm xong việc cho 2 người là p_i . Tìm phương án sao cho n công việc đều hoàn thành với thời gian ít nhất.

- Input. Dòng 1 ghi số n , $1 < n \leq 10^6$. Dòng 2 ghi thời gian làm xong việc của từng công nhân tương ứng trong dây chuyền t_1, t_2, \dots, t_n , $1 \leq t_i \leq 60$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Dòng 3 ghi $n - 1$ số thời gian cùng làm tương ứng cho số cặp công nhân nếu phối hợp p_1, p_2, \dots, p_{n-1} , $1 \leq p_i \leq 100$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.
- Output. 1 số duy nhất ghi tổng thời gian hoàn thành công việc ít nhất của n công nhân.
- Sample.

work.inp	work.out
5	17
2 5 7 8 4	
3 9 10 10	

3 CSES Problem Set

3.1 Introductory Problems

Problem 1 (Weird Algorithm). Consider an algorithm that takes as input a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$. If n is even, the algorithm divides it by 2, & if n is odd, the algorithm multiplies it by 3 & adds 1. The algorithm repeats this, until n is 1. E.g., the sequence for $n = 3$ is as follows: $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Your task is to simulate the execution of the algorithm for a given value of n .

- Input. The only input line contains an integer $n \in \mathbb{Z}$.
- Output. Print a line that contains all values of n during the algorithm.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

weird_algorithm.inp	weird_algorithm.out
3	3 10 5 16 8 4 2 1

Source: [CSES Problem Set/weird algorithm](#), & [Laa20, Sect. 1.3, pp. 5–7].

Problem 2 (Missing Number). You are given all numbers between $1, 2, \dots, n$ except one. Your task is to find the missing number.

- Input. The 1st input line contains a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$. The 2nd line contains $n - 1$ numbers. Each number is distinct & between 1 & n (inclusive).

- Output. *Print the missing number.*
- Constraints. $2 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$.
- Sample.

missing_number.inp	missing_number.out
5 2 3 1 5	4

Source: [CSES Problem Set/missing number](#).

Problem 3 (Repetitions). *You are given a DNA sequence: a string consisting of characters A, C, G, & T. Your task is to find the longest repetition in the sequence. This is a maximum-length substring containing only 1 type of character.*

- Input. *The only input line contains a string of $n \in \mathbb{N}^*$ characters.*
- Output. *Print 1 integer: the length of the longest repetition.*
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

repetition.inp	repetition.out
ATTCTGGGA	3

Source: [CSES problem Set/repetition](#).

Problem 4 (Nondecreasing Array). *You are given an array of n integers. You want to modify the array so that it is non-decreasing, i.e., every element is at least as large as the previous element. On each move, you may increase the value of any element by 1. What is the minimum number of moves required?*

- Input. *The 1st input line contains an integer n : the size of the array. The 2nd line contains n integers x_1, x_2, \dots, x_n : the contents of the array.*
- Output. *Print the minimum number of moves.*
- Constraints. $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$, $1 \leq x_i \leq 10^9$.
- Sample.

nondecreasing_array.inp	nondecreasing_array.out
5 3 2 5 1 7	5

Source: [CSES problem Set/increasing array](#).

Problem 5 (Permutations). *A permutation of integers $1, 2, \dots, n$ is called beautiful if there are no adjacent elements whose difference is 1. Given n , construct a beautiful permutation if such a permutation exists.*

- Input. *The only input line contains an integer n .*
- Output. *Print a beautiful permutation of integers $1, 2, \dots, n$. If there are several solutions, you may print any of them. If there are no solutions, print "no solution".*
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

permutations.inp	permutations.out
5	4 2 5 3 1
3	NO SOLUTION

Source: [CSES problem Set/permutations](#).

Problem 6 (Number Spiral). A number spiral is an infinite grid whose upper-left square has number 1. Here are the 1st 5 layers of the spiral:

1	2	9	10	25
4	3	8	11	24
5	6	7	12	23
16	15	14	13	22
17	18	19	20	21

Your task is to find out the number in row y & column x .

- Input. The 1st input line contains an integer t : the number of tests. After this, there are t lines, each containing integers y, x .
- Output. For each test, print the number in row y & column x .
- Constraints. $1 \leq t \leq 10^5$, $1 \leq x, y \leq 10^9$.
- Sample.

number_spiral.inp	number_spiral.out
3	8
2 3	1
1 1	15
4 2	

Source: [CSES problem Set/number spiral](#).

Problem 7 (2 Knights). Your task is to count for $k = 1, 2, \dots, n$ the number of ways 2 knights can be placed on a $k \times k$ chessboard so that they do not attack each other.

- Input. The only input line contains a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$.
- Output. Print n integers: the results.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^4$.
- Sample.

knight.inp	knight.out
8	0
	6
	28
	96
	252
	550
	1056
	1048

Source: [CSES problem Set/2 knights](#).

Problem 8 (2 Sets). Your task is to divide the numbers $1, 2, \dots, n$ into 2 sets of equal sum.

- Input. The only input line contains a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$.
- Output. Print “yes”, if the division is possible, & “no” otherwise. After this, if the division is possible, print an example of how to create the sets. 1st, print the number of elements in the 1st set followed by the elements themselves in a separate line, & then, print the 2nd set in a similar way.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

set2.inp	set2.out
7	yes
	4
	1 2 4 7
	3
	3 5 6
6	no

Source: [CSES problem Set/2 sets](#).

Problem 9 (Bit String). Your task is to calculate the number of bit strings of length n . E.g., if $n = 3$, the correct answer is 8, because the possible bit strings are 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, & 111.

- Input. The only input line contains a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$.
- Output. Print the result modulo $10^9 + 7$.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

bit_string.inp	bit_string.out
3	8

Source: [CSES problem Set/bit string](#).

Problem 10 (Trailing Zeros). Your task is to calculate the number of trailing zeros in the factorial $n!$, e.g., $20! = 2432902008176640000$ & it has 4 trailing zeroes.

- Input. The only input line contains a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$.
- Output. Print the number of trailing zeros in $n!$.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^9$.
- Sample.

trailing_zero.inp	trailing_zero.out
20	4

Source: [CSES problem Set/trailing zeroes](#).

Problem 11 (Coin Piles). You have 2 coin piles containing a & b coins. On each move, you can either remove 1 coin from the left pile & 2 coins from the right pile, or 2 coins from the left pile & 1 coin from the right pile. Your task is to efficiently find out if you can empty both the piles.

- Input. The 1st input line has an integer t : the number of tests. After this, there are t lines, each of which has 2 integers a & b : the numbers of coins in the piles.
- Output. For each test, print “yes” if you can empty the piles & “no” otherwise.
- Constraints. $1 \leq t \leq 10^5$, $0 \leq a, b \leq 10^9$.
- Sample.

max_gift.inp	max_gift.out
3	yes
2 1	no
2 2	yes
3 3	

Source: [CSES problem Set/coin piles](#).

Problem 12 (Palindrome Reorder). Given a string, your task is to reorder its letters in such a way that it becomes a palindrome (i.e., it reads the same towards & backwards).

- Input. The only input line has a string of length n consisting of characters A-Z.
- Output. Print a palindrome consisting of the characters of the original string. You may print any valid solution. If there are no solutions, print “no solution”.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

palindrome_reorder.inp	palindrome_reorder.out
AAAACACBA	AACABACAA

Source: [CSES problem Set/palindrome reorder](#).

Problem 13 (Gray Code). A Gray code is a list of all 2^n bit strings of length n , where any 2 successive strings differ in exactly 1 bit (i.e., their Hamming distance is 1). Your task is to create a Gray code for a given length n .

- Input. The only input line has a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$.
- Output. Print 2^n lines that describe the Gray code. You can print any valid solution.
- Constraints. $1 \leq n \leq 10^6$.
- Sample.

gray_code.inp	gray_code.out
2	00 01 11 10

Source: [CSES problem Set/gray code](#).

Problem 14 (Tower of Hà Nội). The Tower of Hanoi game consists of 3 stacks (left, middle, & right) & n round disks of different sizes. Initially, the left stack has all the disks, in increasing order of size from top to bottom. The goal is to move all the disks to the right stack using the middle stack. On each move you can move the uppermost disk from a stack to another stack. In addition, it is not allowed to place a larger disk on a smaller disk. Your task is to find a solution that minimizes the number of moves.

- Input. The only input line has a positive integer $n \in \mathbb{N}^*$: the number of disks.
- Output. 1st print a positive integer $k \in \mathbb{N}^*$: the minimum number of moves. After this, print k lines that describe the moves. Each line has 2 integers $a, b \in \{1, 2, 3\}$: you move a disk from stack a to stack b .
- Constraints. $1 \leq n \leq 16$.
- Sample.

.inp	.out
2	3 1 2 1 3 2 3

Source: [CSES problem Set/tower of Hà Nội](#).

Problem 15 (Creating Strings). Given a string, your task is to generate all different strings that can be created using its characters.

- Input. The only input line has a string of length $n \in \mathbb{N}^*$. Each character is between a–z.
- Output. 1st print a positive integer $k \in \mathbb{N}^*$: the number of strings. Then print k lines: the strings in alphabetical order.
- Constraints. $1 \leq n \leq 8$.
- Sample.

create_string.inp	create_string.out
aabac	20 aaabc aaacb aabac aabca aacab aacba abaac abaca abcaa acaab acaba acbaa baaac baaca bacaa bcaaa caaab caaba cabaa cbaaa

Source: [CSES problem Set/creating strings](#).

Problem 16 (Apple Division). *There are n apples with known weights. Your task is to divide the apples into 2 groups so that the difference between the weights of the groups is minimal.*

- **Input.** *The first input line has an integer $n \in \mathbb{N}^*$: the number of apples. The next line has n integers p_1, p_2, \dots, p_n : the weight of each apple.*
- **Output.** *Print 1 integer: the minimum difference between the weights of the groups.*
- **Constraints.** $1 \leq n \leq 20$, $1 \leq p_i \leq 10^9$.
- **Sample.**

apple_division.inp	apple_division.out
5 3 2 7 4 1	1

Explanation: Group 1 has weights 2, 3, 4 (total weight 9), & group 2 has weights 1 & 7 (total weight 8).

Source: [CSES problem Set/apple division](#).

Problem 17 (Chessboard & Queens). *Your task is to place 8 queens on a chessboard so that no 2 queens are attacking each other. As an additional challenge, each square is either free or reserved, & you can only place queens on the free squares. However, the reserved squares do not prevent queens from attacking each other. How many possible ways are there to place the queens?*

- **Input.** *The input has 8 lines, and each of them has 8 characters. Each square is either free (.) or reserved (*).*
- **Output.** *Print 1 integer: the number of ways you can place the queens.*
- **Sample.** *Input:*

```

.....
.....
..*.....
.....
.....
.....**
...*.....
.....

```

Output: 65

Source: [CSES problem Set/chessboard & queens](#).

Tài liệu

- [DT06] Lê Văn Doanh and Trần Khắc Tuấn. *101 Thuật Toán & Chương Trình Bài Toán Khoa Học Kỹ Thuật & Kinh Tế Bằng Ngôn Ngữ Turbo-Pascal*. In lần thứ 10. Nhà Xuất Bản Khoa Học & Kỹ Thuật, 2006, p. 268.
- [Huy24] Nguyễn Xuân Huy. *Sáng Tạo Trong Thuật Toán & Lập Trình. Tập 1*. Tái bản lần 10. Nhà Xuất Bản Thông Tin & Truyền Thông, 2024, p. 371.
- [Laa20] Antti Laaksonen. *Guide to Competitive Programming: Learning & Improving Algorithms Through Contests*. 2nd edition. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer, 2020, pp. xv+309.
- [Tru23] Vương Thành Trung. *Tuyển Tập Đề Thi Học Sinh Giỏi Cấp Tỉnh Trung Học Phổ Thông Tin Học*. Tài liệu lưu hành nội bộ, 2023, p. 235.