

Problem: Multivariate Polynomial – Bài Tập: Đa Thức Nhiều Biến

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 23 tháng 11 năm 2023

Mục lục

1	Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến	1
2	Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến	1
3	Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến	3
4	Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	3
5	Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường	6
6	Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác	8
7	Số Chính Phương	9
8	Miscellaneous	10
	Tài liệu	10

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến

- 1 ([Tuy23], VD1, p. 4). Cho 3 biểu thức $A = \frac{4xy}{x^2 - 2xy + y^2}$, $B = x^2 - 2xy + y^2$, $C = -4xy$. (a) Cho biết biểu thức nào là đơn thức nhiều biến, là đa thức nhiều biến? (b) Với $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, chứng minh 2 biểu thức B, C có cùng 1 giá trị.
- 2 ([Tuy23], 1., p. 5). Cho đơn thức $A = -2mx^3y^4$, m là hằng. Cho biết: (a) Hệ số & phần biến của đơn thức A . (b) Bậc của đơn thức A đối với từng biến & đối với tập hợp các biến.
- 3 ([Tuy23], 2., p. 5). Cho $x^2 = 3$, $y^2 = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của đa thức $A = x^4 - x^2y^2 + y^4$.
- 4 ([Tuy23], 3., p. 5). Tìm các đơn thức đồng dạng trong 5 đơn thức sau ($a \neq 0$ là hằng): $P = \frac{4}{5}x^4y^3xy$, $Q = \frac{2}{3}a^3x^3y^2x^2y$, $R = 6a^2x^2y^4ax^3$, $M = -10$, $N = \frac{7}{6}$.
- 5 ([Tuy23], 4., p. 5). Cho 3 đơn thức nhiều biến: $A = ab^2x^4y^3$, $B = ax^4y^3$, $C = b^2x^4y^3$. Các đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu: (a) a, b là hằng $\neq 0$ còn x, y là biến. (b) $a \neq 0$ là hằng còn b, x, y là biến. (c) $b \neq 0$ là hằng còn a, x, y là biến.
- 6 ([Tuy23], 5., p. 5). Cho biểu thức $A = \frac{-4ax^2y^5}{(b+1)^3}$. Trong 3 trường hợp sau đây, trường hợp nào A là đơn thức? (a) a, b là hằng. (b) a là hằng. (c) b là hằng. Trong trường hợp đó, cho biết hệ số & bậc của đơn thức đối với mỗi biến & đối với tập hợp của biến.

2 Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến

- 7 ([Tuy23], VD2, p. 6). Cho 2 đơn thức $A = 3m^2x^2y^3z$, $B = 12x^2y^3z$ ($m \neq 0$ là hằng). (a) Tính hiệu $A - B$. (b) Xác định m để giá trị của 2 đơn thức A, B luôn bằng nhau với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 8 ([Tuy23], VD3, p. 6). Cho 3 đa thức $A = 8a - 9b$, $B = 5b - c$, $C = 3c - 2a$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}$. Không thực hiện phép tính, cho biết tích ABC có giá trị là số chẵn hay lẻ?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

- 9 ([Tuy23], 6., p. 7). Cho 2 đa thức $A = 3x^4 - 2x^3y + 5xy^3 - y^4$, $B = -8x^4 + 2x^3y - 9x^2y^2 - xy^3 + 4y^4$. Tính tổng $A + B$ & hiệu $A - B$ bằng 2 cách: Cộng trừ theo hàng ngang. Cộng trừ theo cột dọc.
- 10 ([Tuy23], 7., p. 7). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $8 \cdot 2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0. (b) $3^{n+3} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+5} - 7 \cdot 2^n : 25$. (c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n : 300$.
- 11 ([Tuy23], 8., p. 7). Viết tích $31 \cdot 5^2$ thành tổng của 3 lũy thừa cơ số 5 với số mũ là 3 số tự nhiên liên tiếp.
- 12 ([Tuy23], 9., p. 7). Viết 2 số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức có 2 biến x, y : (a) \overline{xyz} . (b) $\overline{xyy5}$.
- 13 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho đa thức $P = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$. biết a, b là hằng & đa thức P có bậc 3, tìm a, b .
- 14 ([Tuy23], 11., p. 7). Tính tổng $S = \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{ba} - \overline{bac}$.
- 15 ([Tuy23], 12., p. 7). Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.
- 16 ([Tuy23], 13., p. 7). Cho 3 đa thức $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$, $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$. Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 17 ([Tuy23], 14., p. 7). Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$. (a) Thu gọn A . (b) Tìm x để $A = 2$.
- 18 ([Tuy23], 15., p. 7). Tính giá trị của 2 đa thức sau biết $x - y = 0$. (a) $A = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$. (b) $B = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3$.
- 19 ([Tuy23], 16., p. 7). Cho 2 đa thức $A = xyz - xy^2 - xz^2$, $B = y^3 + z^3$. Chứng minh nếu $x - y - z = 0$ thì A, B là 2 đa thức đối nhau.
- 20 ([Tuy23], 17., p. 7). Tính giá trị của đa thức $A = 4x^4 + 7x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.
- 21 ([Bin23], VD1, p. 3). (a) Xác định dấu của c biết $2a^3bc$ trái dấu với $-3a^5b^3c^2$. (b) Mở rộng.
- 22 ([Bin23], VD2, p. 3). Tính hợp lý giá trị biểu thức $A = 2 \cdot \frac{1}{135} \cdot \frac{1}{651} - \frac{1}{105} \cdot 3 \cdot \frac{650}{651} - \frac{4}{315 \cdot 651} + \frac{4}{105}$ bằng cách thay số bởi chữ.
- 23 ([Bin23], VD3, p. 3). Tìm các số có 3 chữ số sao cho hiệu của số ấy & số gồm 3 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là 1 số chính phương.
- 24 ([Bin23], VD4, p. 3). Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với 3 hằng số $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết $P(2) = P(3) = 0$. Tính $P(5) - P(0)$.
- 25 ([Bin23], VD5, p. 4). Chứng minh đẳng thức $(x - a)(y - a)(z - a) = xyz + a^2(x + y + z) - a(xy + yz + zx) - a^3$.
- 26 ([Bin23], 1., p. 4). Rút gọn biểu thức $(2x - 3y) - (x - 2y)$ với $x = a^2 + 2ab + b^2$, $y = a^2 - 2ab + b^2$.
- 27 ([Bin23], 2., p. 4). Xác định đa thức A biết $A + 6x^2 - 4xy = 7x^2 - 8xy + y^2$.
- 28 ([Bin23], 3., p. 4). Chứng minh: (a) Tổng của 1 số tự nhiên có 2 chữ số với số gồm 2 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là 1 số chia hết cho 11. (b) Hiệu của 1 số tự nhiên có 2 chữ số với số gồm 2 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại là 1 số chia hết cho 9.
- 29 ([Bin23], 4., p. 4). Tìm các số tự nhiên có 2 chữ số sao cho tổng của số ấy & số viết theo thứ tự ngược lại là 1 số chính phương.
- 30 ([Bin23], 5., p. 4). Tìm số tự nhiên \overline{abc} , $a > b > c > 0$ sao cho $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 666$.
- 31 ([Bin23], 6., p. 4). Có số tự nhiên \overline{abc} nào mà tổng $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ là 1 số chính phương không?
- 32 ([Bin23], 7., p. 4). (a) Tìm số tự nhiên chia hết cho 7 có 3 chữ số biết tổng các chữ số của số đó bằng 14. (b) Tìm số tự nhiên chia hết cho 7 có 3 chữ số khác nhau & tổng các chữ số chia hết cho 7.
- 33 ([Bin23], 8., p. 4). (a) Tìm số tự nhiên \overline{abc} có 3 chữ số khác nhau sao cho $3a + 5b = 8c$. (b) Tìm số tự nhiên \overline{abc} có 3 chữ số khác nhau & khác 0 sao cho \overline{abc} bằng trung bình cộng của $\overline{bca}, \overline{cab}$.
- 34 ([Bin23], 9., p. 4). Tìm các số tự nhiên có 2 chữ số sao cho số đó bằng: (a) 6 lần tích các chữ số của số đó. (b) 2 lần tích các chữ số của số đó.
- 35 ([Bin23], 10., p. 4). Tìm số tự nhiên \overline{abcd} sao cho số đó chia hết cho tích của $\overline{ab}, \overline{cd}$.
- 36 ([Bin23], 11., p. 4). 2 đơn thức $-3x^4y, 5x^2y^3$ có thể cùng giá trị dương không?
- 37 ([Bin23], 12., p. 4). Chứng minh 3 đơn thức $-\frac{1}{4}x^3y^4, -\frac{4}{5}x^4y^3, \frac{1}{2}xy$ không thể cùng có giá trị âm.
- 38 ([Bin23], 13., p. 5). 2 đơn thức $-2a^5b^2, 3a^2b^6$ cùng dấu. Tìm dấu của a .
- 39 ([Bin23], 14., p. 5). 4 đơn thức $ad, -bc, -ac, -bd$ có thể cùng có giá trị âm không?

40 ([Bin23], 15., p. 5). Rút gọn biểu thức $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

41 ([Bin23], 16., p. 5). Cho $a+b+c=2p$. (a) Chứng minh đẳng thức $2bc+b^2+c^2-a^2=4p(p-a)$. (b) Viết & chứng minh các đẳng thức tương tự.

42 ([Bin23], 17., p. 5). Cho $a+b+c=0$. Chứng minh $A=B=C$ với $A=a(a+b)(a+c)$, $B=b(b+c)(b+a)$, $C=c(c+a)(c+b)$.

43 ([Bin23], 18., p. 5). Xét 2 ví dụ: $53 \cdot 57 = 3021$, $72 \cdot 78 = 5616$. Xây dựng quy tắc nhân nhằm 2 số có 2 chữ số, trong đó các chữ số hàng chục bằng nhau, còn các chữ số hàng đơn vị có tổng bằng 10.

44 ([Bin23], 19., p. 5). (a) Tìm đa thức $P(x)$ có các hệ số là số tự nhiên nhỏ hơn 10 sao cho $P(10) = 520$. (b) Tìm đa thức $P(x)$ có các hệ số là số tự nhiên nhỏ hơn 4 sao cho $P(4) = 156$.

3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến

45 ([Tuy23], VD4, p. 8). Cho 3 đơn thức $A = -3xy^3$, $B = 8xy^2$, $C = \frac{5}{3}x^2y$. Chứng minh 3 đơn thức này không thể cùng có giá trị dương.

46 ([Tuy23], VD5, p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x+y)(x+y+2) - 2(x+1)(y+1) + 2 = x^2y^2$.

47 ([Tuy23], VD6, p. 9). Tìm giá trị của biểu thức $A = (5x^5 + 5x^4) : 5x^2 - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 12) : (2x - 4)$ tại $x = -2$.

48 ([Tuy23], 18., p. 9). Cho biểu thức $E = x(x-y) + y(x+y) - (x+y)(x-y) - 2y^2$. Với mọi giá trị của x, y thì giá trị của biểu thức E là 1 số âm hay là 1 số dương?

49 ([Tuy23], 19., p. 9). Cho $xy = 1$. Chứng minh đẳng thức $x(y+1) + y(x+1) = (x+1)(y+1)$.

50 ([Tuy23], 20., p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) = x^4-y^4$.

51 ([Tuy23], 21., p. 9). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết: (a) $7x^{n+2}y^n : 4x^3y^4$. (b) $-\frac{2}{3}x^{2n}y^7 : \frac{4}{9}x^{n+3}y^n$.

52 ([Tuy23], 22., p. 10). Tìm x, y biết: $[(x-2y)(x-7y) - (x-2y)(x+2y)] : (x-2y) = 18$.

53 ([Tuy23], 23., p. 10). Tìm giá trị của biểu thức $A = (3x^4 - x^2 - 2x) : (3x^2 + 3x + 2) + (x^4 - x^2) : (x^2 - x)$ tại $x = -5$.

54 ([Tuy23], 24., p. 10). Không làm phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong 3 trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{101} + x^{102} + x^{103} + 51$, $g(x) = x + 1$. (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 17$, $g(x) = x - 2$. (c) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x + 30$, $g(x) = x + 5$.

55 ([Tuy23], 25., p. 10). Tìm các giá trị của m, n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.

56 ([Tuy23], 26., p. 10). Chứng minh đa thức $f(x) = (x^2 + 4x - 20)^{51} + (x^3 - 2x - 22)^{50} - 2$ chia hết cho đa thức $x - 3$.

57 ([Tuy23], 27., p. 10). Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ & dư $x + 6$. Tìm đa thức B .

58 ([Tuy23], 28., p. 10). Cho đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho 2 đa thức $x - 2$ & $x + 1$. Tính $2a - 3b$.

59 ([Tuy23], 29., p. 10). Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 19$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.

4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

60 ([Tuy23], VD7, p. 11). Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Tính giá trị của 3 biểu thức: $x - y, x^2 + y^2, x^3 + y^3$.

61 ([Tuy23], VD8, p. 12). Tìm GTNN của biểu thức $A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$.

62 ([Tuy23], 30., p. 12). Chứng minh đẳng thức: (a) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1$. (b) $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$.

63 (Mở rộng [Tuy23], 30., p. 12). Tính: (a) $\prod_{i=1}^n (2^{2^i} + 1) = (2+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1) \cdots (2^{2^n}+1)$, $\prod_{i=m}^n (2^{2^i} + 1) = (2^{2^m} + 1)(2^{2^{m+1}} + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)$. (b) $\prod_{i=1}^n (a^{2^i} + 1)$, $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + 1)$. (c) $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + b^{2^i})$.

64 ([Tuy23], 31., p. 12). Tính hợp lý, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$: (a) $\frac{258^2 - 242^2}{254^2 - 246^2}$. (b) $263^2 + 74 \cdot 263 + 37^2$. (c) $136^2 - 92 \cdot 136 + 46^2$. (d) $(50^2 + 48^2 + 46^2 + \cdots + 2^2) - (49^2 + 47^2 + 45^2 + \cdots + 1^2)$.

65 ([Tuy23], 32., p. 12). Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2$. Chứng minh a, b là 2 số đối nhau.

66 ([Tuy23], 33., p. 12). Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$. Tìm hệ thức liên hệ giữa 4 số a, b, x, y .

67 ([Tuy23], 34., p. 12). Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh $a = b = c$.

68 ([Tuy23], 35., p. 12). Chứng minh không có $x, y \in \mathbb{R}$ nào thỏa mãn đẳng thức: (a) $3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$. (b) $4x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 78 = 0$.

69 ([Tuy23], 36., p. 12). Cho $a \in \mathbb{N}$. Chứng minh đẳng thức $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Áp dụng để tính nhẩm $35^2, 85^2, 105^2$.

70 ([Tuy23], 37., p. 13). Chứng minh: (a) Biểu thức $A = x^2 + x + 1$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$. (b) Biểu thức $B = x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. (c) Biểu thức $C = 4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm $\forall x \in \mathbb{R}$. (d) Tìm các biểu thức bậc 2 luôn dương dương, luôn luôn âm tương tự.

71 ([Tuy23], 38., p. 13). Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = 25x^2 + 3y^2 - 10x + 11$. (b) $B = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$. (c) $C = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6)$.

72 ([Tuy23], 39., p. 13). Tìm GTLN của biểu thức: (a) $2x - x^2$. (b) $B = 19 - 6x - 9x^2$.

73 ([Tuy23], 40., p. 13). Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16. (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu bình phương của chúng chia hết cho 24.

74 ([Tuy23], 41., p. 13). Cho $x > y > 0$, $x - y = 7$, $xy = 60$. Không tính x, y , tính: (a) $x^2 - y^2$. (b) $x^4 + y^4$.

75 ([Tuy23], 42., p. 13). Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: (a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 4(p - b)(p - c)$. (b) $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

76 ([Tuy23], 43., p. 13). Cho $a = m^2 + n^2, b^2 = m^2 - n^2, c = 2mn$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2$.

77 ([Tuy23], 44., p. 13). Tính giá trị biểu thức: (a) $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ với $x = -103$. (b) $B = x^3 - 15x^2 + 75x$ với $x = 25$. (c) $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = -3$.

78 ([Tuy23], 45., p. 13). Cho $x - y = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$.

79 ([Tuy23], 46., p. 13). Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

80 ([Tuy23], 47., p. 13). Rút gọn biểu thức $A = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2$.

81 ([Tuy23], 48., p. 13). Cho $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0, (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$. Tìm x, y .

82 ([Tuy23], 49., p. 13). Chứng minh: $742^3 - 692^3 : 200$. (b) $685^3 + 315^3 : 25000$.

83 ([Tuy23], 50., p. 13). Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$.

84 ([Tuy23], 51., p. 13). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh: (a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. (b) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.

85 ([Tuy23], 52., p. 14). Xác định 2 hệ số a, b để đa thức $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của 1 đa thức.

86 ([Tuy23], 53., p. 14). Cho $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

87 ([Tuy23], 54., p. 14). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong 3 biểu thức sau có giá trị dương: $x = (a - b + c)^2 + 8ab, y = (a - b + c)^2 + 8bc, z = (a - b + c)^2 - 8ca$.

88 ([Tuy23], 55., p. 14). Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x - 3)^2$. (b) $(3x - 4y)^{20}$.

89 ([Tuy23], 56., p. 14). Đa thức $(x + 2)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x . Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x = a, y = b$, trong đó a, b là 2 số thực dương, $a - b = 1$. Tìm a, b .

90 ([Tuy23], 57., p. 14). Tính: (a) $(x + 2)^5$. (b) $(x - 1)^6$. (c) $(x - 1)^5$.

91 ([Tuy23], 58., p. 14). Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.

92 ([Tuy23], 59., p. 14). Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.

93 ([Bin23], VD6, p. 5). Chứng minh số 3599 viết được dưới dạng tích của 2 số tự nhiên khác 1.

94 ([Bin23], VD7, p. 5). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $x + 15, x - 74$ là 2 số chính phương.

95 ([Bin23], VD8, p. 6). Chứng minh biểu thức $A = x^2 + 2(x + 1)^2 + 3(x + 2)^2 + 4(x + 3)^2$ viết được dưới dạng tổng các bình phương của 2 biểu thức.

96 ([Bin23], VD9, p. 6). Tìm GTNN của tổng $a + b + c + d$ biết $\frac{a}{2} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = \frac{d}{b + 8}$.

97 ([Bin23], VD10, p. 6). Cho $x + y + z = 0, xy + yz + zx = 0$. Chứng minh $x = y = z$.

98 ([Bin23], VD11, p. 6, tổng các số chính phương đan dấu). (a) Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$. (b) Tính $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (-1)^n n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

99 ([Bin23], VD12, p. 7). Cho $x + y = a + b, x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Chứng minh $x^3 + y^3 = a^3 + b^3$.

- 100 ([Bin23], VD13, p. 7). (a) Cho $a - b = 1, a^3 - b^3 = 1$. Tính a, b . (b) Cho $a + b = m, a - b = n$. Tính $ab, a^3 - b^3$ theo m, n .
- 101 ([Bin23], 20., p. 7). Tính: (a) $\frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$. (b) $\frac{437^2 - 363^2}{537^2 - 463^2}$.
- 102 ([Bin23], 21., p. 7). So sánh $A = 26^2 - 24^2, B = 27^2 - 25^2$.
- 103 ([Bin23], 22., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $4(x+1)^2 + (2x-1)^2 - 8(x-1)(x+1) = 11$.
- 104 ([Bin23], 23., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a) $2x(2x-1)^2 - 3x(x+3)(x-3) - 4x(x+1)^2$. (b) $(a-b+c)^2 - (b-c)^2 + 2ab - 2ac$. (c) $(3x+1)^2 - 2(3x+1)(3x+5) + (3x+5)^2$. (d) $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$. (e) $(a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - 2(b-c)^2$. (f) $(a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2$. (g) $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2$.
- 105 ([Bin23], 24., p. 8). Tính $A = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 97^2 - 98^2 - 99^2 + 100^2$.
- 106 ([Bin23], 25., p. 8). Cho $a^2 + b^2 + c^2 = m$. Tính giá trị biểu thức $A = (2a+2b-c)^2 + (2b+2c-a)^2 + (2c+2a-b)^2$ theo m .
- 107 ([Bin23], 26., p. 8). Viết số dưới dạng tích của 2 số tự nhiên khác 1: (a) 899. (b) 9991.
- 108 ([Bin23], 27., p. 8). Chứng minh hiệu $7778^2 - 2223^2$ là 1 số gồm toàn các chữ số như nhau.
- 109 ([Bin23], 28., p. 8). Xác định đa thức $P(x)$ thỏa $P(x-1) = x^2 - 4x + 7$.
- 110 ([Bin23], 29., p. 8). Chứng minh hằng đẳng thức: (a) $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$. (b) $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.
- 111 ([Bin23], 30., p. 8). Cho $a^2 - b^2 = 4c^2$. Chứng minh hằng đẳng thức $(5a-3b+8c)(5a-3b-8c) = (3a-5b)^2$.
- 112 ([Bin23], 31., p. 8). Chứng minh nếu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ với $x, y \in \mathbb{R}^*$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
- 113 ([Bin23], 32., p. 8). Chứng minh nếu $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ với $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ thì $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.
- 114 ([Bin23], 33., p. 8). Cho $(a+b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Chứng minh $a = b$.
- 115 ([Bin23], 34., p. 8). Chứng minh $a = b = c$ nếu: (a) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. (b) $(a+b+c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. (c) $(a+b+c)^2 = 3(ab + bc + ca)$.
- 116 ([Bin23], 35., p. 8). Viết biểu thức dưới dạng tổng của 3 bình phương: (a) $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$. (b) $2(a-b)(c-b) + 2(b-a)(c-a) + 2(b-c)(a-c)$.
- 117 ([Bin23], 36., p. 8). Tính giá trị biểu thức $a^4 + b^4 + c^4$ biết $a + b + c = 0$ và: (a) $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. (b) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 = m \in \mathbb{R}$.
- 118 ([Bin23], 37., p. 8). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4$ bằng mỗi biểu thức: (a) $2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$. (b) $2(ab + bc + ca)^2$. (c) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$.
- 119 ([Bin23], 38., p. 8). Chứng minh biểu thức luôn luôn có giá trị dương với mọi giá trị của biến: (a) $9x^2 - 6x + 2$. (b) $x^2 + x + 1$. (c) $2x^2 + 2x + 1$.
- 120 ([Bin23], 39., p. 9). Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = x^2 - 3x + 5$. (b) $B = (2x-1)^2 + (x+2)^2$.
- 121 ([Bin23], 40., p. 9). Tìm GTLN của biểu thức: (a) $A = 4 - x^2 + 2x$. (b) $B = 4x - x^2$.
- 122 ([Bin23], 41., p. 9). Tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + y^2 - x - y - xy$.
- 123 ([Bin23], 42., p. 9). Chứng minh: (a) Nếu $p, p^2 + 8$ là 2 số nguyên tố thì $p^2 + 2$ cũng là số nguyên tố. (b) Nếu $p, 8p^2 + 1$ là 2 số nguyên tố thì $2p + 1$ cũng là số nguyên tố.
- 124 ([Bin23], 43., p. 9). Chứng minh 999991, 1000027 là 2 hợp số.
- 125 ([Bin23], 44., p. 9). Tính: (a) $(x-2)^3 - x(x+1)(x-1) + 6x(x-3)$. (b) $(x-2)(x^2 - 2x + 4)(x+2)(x^2 + 2x + 4)$.
- 126 ([Bin23], 45., p. 9). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết: (a) $(x-3)(x^2 + 3x + 9) + x(x+2)(2-x) = 1$. (b) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6(x-1)^2 = -10$.
- 127 ([Bin23], 46., p. 9). Rút gọn biểu thức: (a) $(a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$. (b) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$.
- 128 ([Bin23], 47., p. 9). Chứng minh hằng đẳng thức: (a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$. (b) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
- 129 ([Bin23], 48., p. 9). Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

130 ([Bin23], 49., p. 9). Cho $x + y = a, xy = b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $a^2 \geq 4b$. Tính giá trị biểu thức theo a, b : (a) $x^2 + y^2$. (b) $x^3 + y^3$. (c) $x^4 + y^4$. (d) $x^5 + y^5$.

131 ([Bin23], 50., p. 9). (a) Cho $x + y = 1$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3 + 3xy$. (b) Cho $x - y = 1$. Tính giá trị biểu thức $x^3 - y^3 - 3xy$.

132 ([Bin23], 51., p. 9). Cho $a + b = 1$. Tính giá trị biểu thức $A = a^3 + b^3 + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b)$.

133 ([Bin23], 52., p. 9). (a) Cho $x + y = 2, x^2 + y^2 = 10$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$. (b) Cho $x + y = a, x^2 + y^2 = b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $2b \geq a^2$. Tính giá trị biểu thức $x^3 + y^3$ theo a, b .

134 ([Bin23], 53., p. 9). Cho $a + b + c = 4, a^2 + b^2 + c^2 = 30$. Tính giá trị biểu thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

135 ([Bin23], 54., p. 9). Cho $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 1$. Tính abc .

136 ([Bin23], 55., p. 9). Cho $x + y = 1, ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2) = ab$. Biết $xy \neq 0$, chứng minh $a = b$.

137 ([Bin23], 56., p. 9). Chứng minh nếu $a + b = c$ thì $a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$.

138 ([Bin23], 57., pp. 9–10). Chứng minh: (a) Nếu n là tổng của 2 số chính phương thì $2n$ cũng là tổng của 2 số chính phương. (b) Nếu $2n$ là tổng của 2 số chính phương thì n cũng là tổng của 2 số chính phương. (c) Nếu n là tổng của 2 số chính phương thì n^2 cũng là tổng của 2 số chính phương. (d) Nếu m, n đều là tổng của 2 số chính phương thì tích mn cũng là tổng của 2 số chính phương.

139 ([Bin23], 58., p. 10). Mỗi số sau là bình phương của số tự nhiên nào? (a) $A = \underbrace{9 \dots 9}_n \underbrace{0 \dots 0}_n 25$. (b) $B = \underbrace{9 \dots 9}_n \underbrace{8 \dots 0}_n 1$. (c) $C = \underbrace{4 \dots 4}_n \underbrace{8 \dots 8}_{n-1} 9$. (d) $D = \underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{2 \dots 2}_{n+1} 5$. (e) $E = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} - \underbrace{2 \dots 2}_n$. (f) $F = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} + \underbrace{4 \dots 4}_n + 1$.

140 ([Bin23], 59., p. 10). (a) Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_n, b = \underbrace{1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1} 5}$. Chứng minh $ab + 1$ là số chính phương. (b) Cho 1 dãy số có số hạng đầu là 16, các số hạng sau là số tạo thành bằng cách viết chèn số 15 vào chính giữa số hạng liền trước: 16, 1156, 111556, ... Chứng minh mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

141 ([Bin23], 60., p. 10). Chứng minh $ab + 1$ là số chính phương với $a = \underbrace{1 \dots 1}_n 2, b = \underbrace{1 \dots 1}_n 4$.

142 ([Bin23], 61., p. 10). Chứng minh $\forall a \in \mathbb{N}$, tồn tại $b \in \mathbb{N}$ sao cho $ab + 4$ là số chính phương.

143 ([Bin23], 62., p. 10). Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_{2n}, b = \underbrace{1 \dots 1}_{n+1}, c = \underbrace{6 \dots 6}_n$. Chứng minh $a + b + c + 8$ là số chính phương.

144 ([Bin23], 63., p. 10). Chứng minh a là số chính phương nếu $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn: (a) $a^2 + b^2 = 2a(2a + b)$. (b) $a^2 + b^2 + 2ab = 6a + 2b - 1$.

145 ([Bin23], 64., p. 10). Cho $a, b, c \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Chứng minh: (a) $ab + bc + ca$ là số chính phương. (b) ab, bc, ca là 3 số chính phương.

146 ([Bin23], 65., p. 10). Tìm số chính phương lớn nhất nhỏ hơn $\underbrace{1 \underbrace{0 \dots 0}_{20} 1}_{20} \underbrace{0 \dots 0}_{21} 84$.

147 ([Bin23], 66., p. 10). (a) Chứng minh biểu thức $10^{150} + 5 \cdot 10^{50} + 1$ không là lập phương của 1 số tự nhiên. (b) Chứng minh tích 3 số nguyên dương liên tiếp không là lập phương của 1 số tự nhiên.

148 ([Bin23], 67., p. 10). Chứng minh số $A = \frac{1}{3} \left(\underbrace{1 \dots 1}_{3n} - \underbrace{3 \dots 3}_n \underbrace{0 \dots 0}_n \right)$ là lập phương của 1 số tự nhiên.

149 ([Bin23], 68., p. 10). Chia 27 quả cân có khối lượng 10, 20, 30, ..., 270 g thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau.

150 ([Bin23], 69., p. 10). (a) Chia 18 quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, \dots, 18^2$ g thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau. (b) Chia 27 quả cân có khối lượng $1^2, 2^2, \dots, 27^2$ g thành 3 nhóm có khối lượng bằng nhau.

5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường

151 ([Tuy23], VD9, p. 15). Cho $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$, thỏa $9x(x - y) - 10(y - x)^2 = 0$. Chứng minh $x = 10y$.

152 ([Tuy23], VD10, p. 15). Cho $A = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh $A > 0$.

153 ([Tuy23], 60., p. 16). Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $5x(x - 2y) + 2(2y - x)^2$. (b) $7x(y - 4)^2 - (4 - y)^3$. (c) $(4x - 8)(x^2 + 6) - (4x - 8)(x + 7) + 9(8 - 4x)$.

154 ([Tuy23], 61., p. 16). Chứng minh: (a) $43^2 + 43 \cdot 17 : 60$. (b) $27^5 - 3^{11} : 80$.

155 ([Tuy23], 62., p. 16). Tìm 1 số biết 3 lần bình phương của nó đúng bằng 2 lần lập phương của số ấy.

156 ([Tuy23], 63., p. 16). Có $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nào thỏa mãn đồng thời: x

$$\begin{cases} x^3 + xyz = 957, \\ y^3 + xyz = 795, \\ z^3 + xyz = 579. \end{cases}$$

157 ([Tuy23], 64., p. 16). Chứng minh số $\underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{2 \dots 2}_n$ là tích 2 số nguyên liên tiếp.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

158 ([Tuy23], 65., p. 16). (a) $100x^2 - (x^2 + 25)^2$. (b) $(x - y + 5)^2 - 2(x - y + 5) + 1$.

159 ([Tuy23], 66., p. 16). $(x^2 + 4y^2 - 5)^2 - 16(x^2y^2 + 2xy + 1)$.

160 ([Tuy23], 67., p. 16). Chứng minh: (a) $21^{10} - 1 : 200$. (b) $39^{20} + 39^{13} : 40$. (c) $2^{60} + 5^{30} : 41$. (d) $2025^{2027} + 2027^{2025} : 2026$.

161 ([Tuy23], 68., p. 16). Cho $n \in \mathbb{N}$ lẻ. Chứng minh $24^n + 1 : 25$ nhưng $24^n + 1 \not\vdots 23$.

162 ([Tuy23], 69., p. 16). Cho $a \in \mathbb{N}$ lẻ, $a > 1$. Chứng minh $(a - 1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1 : a - 2$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

163 ([Tuy23], 70., p. 16). (a) $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$. (b) $x^3 - x^2 - 5x + 125$. (c) $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$. (d) $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$.

164 ([Tuy23], 71., p. 16). (a) $x^4 - 25x^2 + 20x - 4$. (b) $x^2(x^2 - 6) - x^2 + 9$. (c) $ab(x^2 + y^2) - xy(a^2 + b^2)$.

165 ([Tuy23], 72., p. 16). Tìm các cặp số $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $x - y = xy - 1$.

166 ([Tuy23], 73., p. 16). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ sao cho $x^2 - y = y^2 - x$. Tính giá trị biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$.

167 ([Tuy23], 74., p. 16). Cho $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c-d}{d-a}$. Chứng minh $a = c$ hoặc $a + c = b + d$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

168 ([Tuy23], 75., p. 17). (a) $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$. (b) $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$. (c) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.

169 ([Tuy23], 76., p. 17). (a) $(xy + 4)^2 - 4(x + y)^2$. (b) $(ab - xy)^2 - (bx - ay)^2$. (c) $(x^2 + 8x - 34)^2 - (3x^2 - 8x - 2)^2$.

170 ([Tuy23], 77., p. 17). (a) $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 - 4b^2$. (b) $a(b^2 - c^2) - b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$. (c) $a^5 + b^5 - (a + b)^5$.

171 ([Tuy23], 78., p. 17). Chứng minh: (a) $999^4 + 999$ tận cùng 3 chữ số 0. (b) $49^5 - 49 : 100$.

172 ([Tuy23], 79., p. 17). Chứng minh: (a) Lập phương của 1 số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6. (b) Nếu tổng của 3 số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.

173 ([Tuy23], 80., p. 17). Cho $a \neq \pm b, a(a + b)(a + c) = b(b + c)(b + a)$. Chứng minh $a + b + c$.

174 ([Tuy23], 81., p. 17). Cho $x^2y - y^2x + x^2z - z^2x + y^2z + z^2y = 2xyz$. Chứng minh trong 3 số x, y, z ít nhất cũng có 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.

175 ([Tuy23], 82., p. 17). 1 tập hợp gồm $n \in \mathbb{N}$ số nguyên dương khác nhau có tổng là 360, $n > 2$. Chia tập hợp này thành 2 tập hợp con của A, B sao cho chúng không có phần tử chung, tập hợp A gồm có 2 phần tử, tập hợp B gồm các phần tử còn lại. Hỏi có tồn tại hay không cách chia như trên để tích các phần tử của A bằng tổng các phần tử của B .

176 ([Bin23], VD14, p. 11). Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$.

177 ([Bin23], VD15, p. 11). Cho $a + b + c = 0$. Rút gọn biểu thức $A = a^3 + b^3 + c(a^2 + b^2) - abc$.

178 ([Bin23], VD16, p. 11). Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

179 ([Bin23], VD17, p. 11). (a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. (b) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$. (c) Cho $a^3 + b^3 + 3ab = 1$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

180 ([Bin23], VD18, p. 11). Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$. (b) $8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3$.

181 ([Bin23], VD19, p. 12). Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$.

182 ([Bin23], VD20, p. 12). Xét hằng đẳng thức $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Lần lượt cho x bằng 1, 2, ..., n rồi cộng từng vế n đẳng thức thu được để tính giá trị biểu thức $S(n) = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

183 ([Bin23], VD21, pp. 12–13). (a) Cho $A(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh $A(n) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$. (b) Áp dụng để tính $S_2(n) = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

184 ([Bin23], 70., p. 13). (a) $(ab-1)^2 + (a+b)^2$. (b) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. (c) $x^3 - 4x^2 + 12x - 27$. (d) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$. (e) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

185 ([Bin23], 71., p. 13). (a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$. (b) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$. (c) $x^2(1-x^2) - 4 - 4x^2$. (d) $(1+2x)(1-2x) - x(x+2)(x-2)$. (e) $x^2 + y^2 - x^2y^2 + xy - x - y$.

186 ([Bin23], 72., p. 13). Chứng minh $199^3 - 199 : 200$.

187 ([Bin23], 73., p. 13). Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ biết $a^4 + b^4 = a^5 + b^5 = a^6 + b^6$.

188 ([Bin23], 74., p. 13). Tính giá trị biểu thức $A = x^6 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x$ biết $x^3 - x = 6$.

189 ([Bin23], 75., p. 13). Tính $x + y$ biết $x^3 + y^3 + 4xy = x^2 + y^2 + 4$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

190 ([Bin23], 76., p. 13). (a) $a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ca) + c(a^2 + b^2 + ab)$. (b) $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$. (c) $a(a+2b)^3 - b(2a+b)^3$.

191 ([Bin23], 77., pp. 13–14). (a) $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c)$. (b) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$. (c) $(a+b)(a^2 - b^2) + (b+c)(b^2 - c^2) + (c+a)(c^2 - a^2)$. (d) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$. (e) $a^3(c-b^2) + b^3(a-c^2) + c^3(b-a^2) + abc(abc-1)$.

192 ([Bin23], 78., p. 14). (a) $a(b+c)^2(b-c) + b(c+a)^2(c-a) + c(a+b)^2(a-b)$. (b) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$. (c) $a^2b^2(a-b) + b^2c^2(b-c) + c^2a^2(c-a)$. (d) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 2abc - a^3 - b^3 - c^3$. (e) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.

193 ([Bin23], 79., p. 14). (a) $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3$. (b) $abc - (ab+bc+ca) + a+b+c-1$.

194 ([Bin23], 80., p. 14). Chứng minh nếu $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ thì tồn tại 2 trong 3 số a, b, c bằng nhau.

195 ([Bin23], 81., p. 14). Chứng minh: (a) Nếu $a^2 + b^2 = 2ab$ thì $a = b$. (b) Nếu $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ & $a, b, c > 0$ thì $a = b = c$. (c) Nếu $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$ & $a, b, c, d > 0$ thì $a = b = c = d$.

196 ([Bin23], 82., p. 14). Chứng minh: (a) Nếu $ab + bc + ca = 1$ thì $1 + a^2 = (a+b)(a+c)$. (b) Nếu $a + b + c = 1$ thì $a + bc = (a+b)(a+c)$. (c) Nếu $m = a + b + c$ thì $(am+bc)(bm+ca)(cm+ab) = (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.

197 ([Bin23], 83., p. 14). Cho $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$. Chứng minh $ab + cd = 0$.

198 ([Bin23], 84., p. 14). Xét hằng đẳng thức $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Lần lượt cho x bằng $1, 2, \dots, n$ rồi cộng từng vế n đẳng thức thu được để tính giá trị biểu thức $S_1(n) = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$.

199 ([Bin23], 85., p. 14). (a) Tính $S_3(n) = \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$. (b) Chứng minh $S_3(n) = S_1^2(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

200 ([Bin23], 86., p. 14). Tính: (a) $A(n) = \sum_{i=1}^n i(i+2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + n(n+2)$. (b) $B(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$. (c) $C(n) = \sum_{i=1}^n i(i+1)(2i+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(2n+1)$.

6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác

Phân tích đa thức thành nhân tử:

201 ([Tuy23], VD11, p. 17). $A = 4x^2 - 8x + 3$.

202 ([Tuy23], VD12, p. 18). $A = 4x^4 + y^4$.

203 ([Tuy23], VD13, p. 18). $A = (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27$.

204 ([Tuy23], VD14, p. 19). Phân tích đa thức thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên: $A = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

205 ([Tuy23], 83., p. 19). (a) $3x^2 - 11x + 6$. (b) $8x^2 + 10x - 3$. (c) $8x^2 - 2x - 1$.

206 ([Tuy23], 84., p. 19). (a) $6x^2 + 7xy + 2y^2$. (b) $9x^2 - 9xy - 4y^2$. (c) $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$.

207 ([Tuy23], 85., p. 19). (a) $x^3 + x + 2$. (b) $x^3 - 2x - 1$. (c) $x^3 + 3x^2 - 4$.

208 ([Tuy23], 86., p. 19). (a) $x^3y^3 + x^2y^2 + 4$. (b) $x^3 + 3x^2y - 9xy^2 + 5y^3$.

209 ([Tuy23], 87., p. 20). (a) $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$. (b) $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 36$. (c) $x^8y^8 + x^4y^4 + 1$.

210 ([Tuy23], 88., p. 20). (a) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2$. (b) $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

211 ([Tuy23], 89., p. 20). (a) $x^4 + y^4 + (x + y)^4$. (b) $2(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)^2 - (x^2 + 2x)^2$.

212 ([Tuy23], 90., p. 20). (a) $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz$. (b) $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z - x)$. (c) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

213 ([Tuy23], 91., p. 20). Cho $a \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $a^5 - a : 30$.

214 ([Tuy23], 92., p. 20). Cho $x > y > z$. Chứng minh biểu thức $A = x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ luôn luôn dương.

215 ([Tuy23], 93., p. 20). Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa $(x + y)(y + z)(z + x) = 8xyz$. Chứng minh $x = y = z$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

216 ([Tuy23], 94., p. 20). (a) $x^4 + 5x^3 + 10x - 4$. (b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

217 ([Tuy23], 95., p. 20). (a) $x^7 + x^2 + 1$. (b) $x^8 + x + 1$.

218 ([Tuy23], 96., p. 20). (a) $x^5 + x^4 + 1$. (b) $x^{10} + x^5 + 1$.

219 ([Tuy23], 97., p. 20). Cho $x \in \mathbb{Z}$. Chứng minh $x^{200} + x^{100} + 1 : x^4 + x^2 + 1$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

220 ([Tuy23], 98., p. 20). (a) $A = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4$. (b) $B = (12x^2 - 12xy + 3y^2) - 10(2x - y) + 8$.

221 ([Tuy23], 99., p. 20). (a) $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$. (b) $B = (a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3$.

222 ([Tuy23], 100., p. 20). (a) Chứng minh: $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$. (b) Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (b - c - a)^3 + (c - a - b)^3$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

223 ([Tuy23], 101., p. 20). (a) $A = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$. (b) $B = (x^2 + 4x - 3)^2 - 5x(x^2 + 4x - 3) + 6x^2$. (c) $C = (x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

224 ([Tuy23], 102., p. 20). $2(x^2 - 6x + 1)^2 + 5(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$.

225 ([Tuy23], 103., p. 21). Cho $A = 4(x - 2)(x - 1)(x + 4)(x + 8) + 25x^2$. Chứng minh A không có giá trị âm.

226 ([Tuy23], 104., p. 21). Cho đa thức $A = 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x - 1$. Phân tích A thành tích của 1 nhị thức bậc nhất với 1 đa thức bậc 3 có hệ số nguyên sao cho hệ số cao nhất của đa thức bậc 3 là 1.

227 ([Tuy23], 105., p. 21). Cho đa thức $A = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$. Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên.

228 ([Tuy23], 106., p. 21). Cho đa thức $A = x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5$. Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên & các hệ số cao nhất đều mang dấu dương.

7 Số Chính Phương

229 ([Tuy23], VD15, p. 22). Chứng minh $A = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} - 8 \cdot \underbrace{1 \dots 1}_n + 1$ là 1 số chính phương.

230 ([Tuy23], VD16, p. 22). Chứng minh: (a) Tổng của 3 số chính phương liên tiếp không là 1 số chính phương. (b) Tổng $S = \sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 30^2$ không là 1 số chính phương.

231 ([Tuy23], 107., p. 23). Có 2 số chính phương nào mà: (a) Có tổng bằng 4567? (b) Có hiệu bằng 7654?

232 ([Tuy23], 108., p. 23). Chứng minh tổng của 20 số chính phương liên tiếp không thể là số chính phương.

233 ([Tuy23], 109., p. 23). Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng đơn vị đều bằng 6 còn chữ số hàng chục thì khác nhau. Chứng minh tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó cũng là 1 số chính phương.

234 ([Tuy23], 110., p. 23). Cho $a, b, c \neq 0$ là các chữ số. (a) Tính tổng S của tất cả các số có 3 chữ số tạo thành bởi cả 3 chữ số a, b, c . (b) Chứng minh S không phải là số chính phương.

235 ([Tuy23], 111., p. 23). Tìm 1 số chính phương có 4 chữ số biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

236 ([Tuy23], 112., p. 23). Chứng minh nếu $n + 1, 2n + 1$ đều là số chính phương thì $n : 24$.

237 ([Tuy23], 113., p. 23). Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết trong 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng & 1 mệnh đề sai: (a) n có chữ số tận cùng là 2. (b) $n + 20$ là 1 số chính phương. (c) $n - 69$ là 1 số chính phương.

- 238** ([Tuy23], 114., p. 23). Cho a là tổng của 2 số chính phương. Chứng minh: (a) $2a$ cũng là tổng của 2 số chính phương. (b) a^2 cũng là tổng của 2 số chính phương.
- 239** ([Tuy23], 115., p. 23). Cho a, b, c, d là 4 số chính phương. Chứng minh $(a+b)(c+d)$ là tổng của 2 số chính phương.
- 240** ([Tuy23], 116., p. 23). Cho $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = y + z$. Chứng minh $2(xy + xz - yz)$ là tổng của 3 số chính phương.
- 241** ([Tuy23], 117., p. 23). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa $a - b = c + d$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ luôn là tổng của 3 số chính phương.
- 242** ([Tuy23], 118., p. 23). Cho 2 số chính phương liên tiếp. Chứng minh tổng của 2 số đó cộng với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ.
- 243** ([Tuy23], 119., p. 24). Cho $a_n = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$. (a) Tính a_{n+1} . (b) Chứng minh $a_n + a_{n+1}$ là 1 số chính phương.
- 244** ([Tuy23], 120., p. 24). Cho a là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Chứng minh $a + 1$ là 1 số chính phương.
- 245** ([Tuy23], 121., p. 24). (a) Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_n 5, b = \underbrace{1 \dots 1}_n 9$. Chứng minh $ab + 4$ là 1 số chính phương. (b) Cho $a = \underbrace{1 \dots 1}_n, b = \underbrace{10 \dots 0}_{n-2} 11, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh $ab + 4$ là 1 số chính phương.
- 246** ([Tuy23], 122., p. 24). Cho $A = \underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{5 \dots 5}_n + 1$. Chứng minh A là 1 số chính phương.
- 247** ([Tuy23], 123., p. 24). Chứng minh: (a) $A = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} + \underbrace{4 \dots 4}_n + 1, n \in \mathbb{N}$ là số chính phương. (b) $B = \underbrace{1 \dots 1}_{2n} + \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} + \underbrace{6 \dots 6}_n + 8, n \in \mathbb{N}$ là số chính phương.
- 248** ([Tuy23], 124., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ là 1 số chính phương.
- 249** ([Tuy23], 125., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 + 1234$ là 1 số chính phương.
- 250** ([Tuy23], 126., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $2^n + 2^4 + 2^7$ là 1 số chính phương.
- 251** ([Tuy23], 127., p. 24). Tìm tất cả $n \in \mathbb{N}$ sao cho $n^2 + 2x + 200$ là 1 số chính phương.
- 252** ([Tuy23], 128., p. 24). Cho $A = p^4$ với p là 1 số nguyên tố. (a) Số A có các ước dương nào? (b) Tìm các giá trị của p để tổng các ước dương của A là 1 số chính phương.
- 253** ([Tuy23], 129., p. 24). Cho $a, b \in \mathbb{N}^*$ thỏa $ab + 1$ là 1 số chính phương. Chứng minh tồn tại $c \in \mathbb{N}^*$ sao cho $ac + 1, bc + 1$ đều là số chính phương.

8 Miscellaneous

- 254** ([Tuy23], VD17, p. 25). Phân tích đa thức thành nhân tử: $A = (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) + 15$.
- 255** ([Tuy23], VD19, p. 26). Chứng minh $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 : 9, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 256** ([Tuy23], 130., p. 27). Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $ab = 1, ax + by = 2$. Chứng minh $xy \leq 1$.
- 257** ([Tuy23], 131., p. 27). Chứng minh $A = x(x - y)(x + y)(x + 2y) + y^4$ là bình phương của 1 đa thức.
- 258** ([Tuy23], 132., p. 27). Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $x + y + z = 0$. Chứng minh: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$.
- 259** ([Tuy23], 133., p. 27). Cho $x, y \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Chứng minh x, y là 2 số đối nhau.
- 260** ([Tuy23], 134., p. 27). Cho $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Chứng minh: (a) $20^n - 1$ là hợp số. (b) $1000^n + 1$ là hợp số.
- 261** ([Tuy23], 135., p. 27). Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $A = x^9 - x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$. (b) $B = x^7 + x^5 + 1$.
- 262** ([Tuy23], 136., p. 27). Cho $x^2 - y^2 = 1$. Tính giá trị biểu thức $A = 2(x^6 - y^6) - 3(x^4 + y^4)$.
- 263** ([Tuy23], 137., p. 27). Tìm số dư của phép chia $S : 5$ với $S = \sum_{i=1}^8 i^n = 1^n + 2^n + \dots + 8^n$ với $n \in \mathbb{N}, n$ lẻ.
- 264** ([Tuy23], 138., p. 27). Cho a là 1 số chính phương, $m \in \mathbb{N}$ tùy ý. Chứng minh bao giờ cũng có $n \in \mathbb{N}$ sao cho $a + mn$ là 1 số chính phương.
- 265** ([Tuy23], 139., p. 27). Cho $x, y \in \mathbb{Z}$. Chứng minh: (a) $A = (x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) + 9$ là 1 số chính phương. (b) $B = (x - y)(x - 2y)(x - 3y)(x - 4y) + y^4$ là 1 số chính phương.
- 266** ([Tuy23], 140., p. 27). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. (b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$.

Tài liệu

[Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 8 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 212.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.