

Problem: Vector – Bài Tập: Vector

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Vector – Bài Tập: Vector.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.tex.

- *Problem & Solution: Vector – Bài Tập & Lời Giải: Vector.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.tex.

Mục lục

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector	1
2 Scalar Product – Tích Vô Hướng	2
Tài liệu	3

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

1 ([Hải+22], VD1, p. 59). Cho đoạn thẳng AB & I là trung điểm của AB . Chứng minh: (a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M .

2 ([Hải+22], VD2, p. 59). Cho $\triangle ABC$ & điểm M nằm giữa B, C . Chứng minh:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC} + \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB}.$$

3 ([Hải+22], VD3, p. 60). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm G . (b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M .

4 ([Hải+22], VD4, p. 60). Cho $\triangle ABC$ & 1 điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh: $S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

5 ([Hải+22], VD5, p. 61). Cho $\triangle ABC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh: $a\overrightarrow{MD} + b\overrightarrow{MC} + c\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (với a, b, c là độ dài các cạnh BC, AC, AB).

6 ([Hải+22], VD6, p. 61). Cho $\triangle ABC$ & điểm P bất kỳ. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trên các tia PA_1, PB_1, PC_1 lần lượt lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\frac{PX}{PA_1} = \frac{PY}{PB_1} = \frac{PZ}{PC_1} = k$. Chứng minh: (a) AX, BY, CZ đồng quy tại T .

(b) P, T, G thẳng hàng & $\frac{TG}{PG} = \left| \frac{3k}{2+k} \right|$.

7 ([Hải+22], VD7, p. 62). Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm L thỏa mãn $a^2 \overrightarrow{LA} + b^2 \overrightarrow{LB} + c^2 \overrightarrow{LC} = \vec{0}$. Điểm L như vậy gọi là điểm Lemoine của $\triangle ABC$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Hải+22], VD8, p. 62). Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. PA, PB, PC cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1 . (a) Chứng minh: A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy. (b) Lấy điểm A_4 thuộc BC sao cho QA_4 song song với PA . Xác định các điểm B_4 & C_4 tương tự A_4 . Chứng minh: Q là trọng tâm của $\Delta A_4B_4C_4$.

9 ([Hải+22], VD9, p. 64). Cho ΔABC . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh: $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

10 ([Hải+22], VD10, p. 64). Cho ΔABC có $\hat{A} = 90^\circ$ & các đường phân giác BE & CF . Đặt $\vec{u} = (AB + BC + CA)\overrightarrow{BC} + BC\overrightarrow{EF}$. Chứng minh: giá của \vec{u} vuông góc với BC .

11 ([Hải+22], 8.1., p. 65). Cho vector \vec{u} có 2 phương khác nhau, chứng minh $\vec{u} = \vec{0}$.

12 ([Hải+22], 8.2., p. 65). Cho ΔABC có M & N lần lượt là trung điểm của AB & AC . Lấy P đối xứng với M qua N . Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

13 ([Hải+22], 8.3., p. 65). Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O , trực tâm H . Lấy K đối xứng với O qua BC . Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$.

14 ([Hải+22], 8.4., p. 65). Cho 2 vector \vec{a} & \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Chứng minh: 2 vector \vec{a} & \vec{b} có giá vuông góc.

15 ([Hải+22], 8.5., p. 65). Cho ΔABC & ΔDEF thỏa mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. Chứng minh: ΔABC & ΔDEF có cùng trọng tâm.

16 ([Hải+22], 8.6., p. 65). Cho 2 vector \vec{a} & \vec{b} thỏa mãn \vec{a} có giá vuông góc với giá của vector $\vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$.

17 ([Hải+22], 8.7., p. 65). Cho ΔABC & điểm P thỏa mãn $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}|, |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$. Chứng minh: $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.

18 ([Hải+22], 8.8., p. 65). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) . Cho $(O), B, C$ cố định & A di chuyển trên đường tròn (O) . BE, CF là 2 đường cao của ΔABC . Giả sử có vector \vec{u} thỏa mãn $\frac{|\overrightarrow{EF} - \vec{u}|^2}{EF^2} + \frac{|\overrightarrow{OA} - \vec{u}|^2}{OA^2} = 1$. Chứng minh $\frac{1}{EF^2} - \frac{1}{|\vec{u}|^2}$ luôn không đổi khi A thay đổi.

19 ([Hải+22], 8.9., p. 65). Cho ΔABC có các phân giác trong AD, BE, CF . Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE . (a) Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy tại điểm P thỏa mãn hệ thức: $a(b+c)\overrightarrow{PA} + b(c+a)\overrightarrow{PB} + c(a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. (b) Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC . Định vector \vec{u} thỏa mãn $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NA}}{a} + \frac{\overrightarrow{NB}}{b} + \frac{\overrightarrow{NC}}{c}$. Gọi Q là trung điểm ON , trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh: PQ song song hoặc trùng với giá của vector \vec{u} .

2 Scalar Product – Tích Vô Hướng

20 ([Hải+22], VD1, p. 75). (a) Cho đoạn AB & điểm M . Chứng minh $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2)$. (b) Cho đoạn thẳng AB, CD . Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(AD^2 - AC^2 + BD^2 - BC^2)$. (c) Chứng minh $AB \perp CD \Leftrightarrow AD^2 - AC^2 = BD^2 - BC^2$.

21 ([Hải+22], VD2, p. 76). Cho ΔABC . Lấy I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ với $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Chứng minh: (a) $\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 = \frac{\beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2 + \alpha\beta AB^2}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$. (b) $\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)PI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2$ với mọi điểm P . (c) $PI^2 = \frac{\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2}{\alpha + \beta + \gamma} - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$ với mọi điểm P .

22 ([Hải+22], VD3, p. 77). Cho \vec{a}, \vec{b} không cùng phương. Tìm \vec{u} thỏa $\vec{a} \cdot \vec{u} = \alpha, \vec{b} \cdot \vec{u} = \beta$.

23 ([Hải+22], VD4, p. 77). Cho ΔABC đều có trọng tâm O & điểm M bất kỳ. Chứng minh: (a) $\cos \widehat{AOM} + \cos \widehat{BOM} + \cos \widehat{COM} = 0$. (b) $\cos^2 \widehat{AOM} + \cos^2 \widehat{BOM} + \cos^2 \widehat{COM} = \text{const}$. (c) $\cos^4 \widehat{AOM} + \cos^4 \widehat{BOM} + \cos^4 \widehat{COM} = \text{const}$.

24 ([Hải+22], BD, p. 77). Cho ΔABC đều. (a) Điểm N nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh $AN^4 + BN^4 + CN^4$ không đổi. (b) Chứng minh $AN^4 + BN^4 + CN^4 = 18R^4 + 3(ON^2 - R^2)(ON^2 + 5R^2)$ với mọi điểm N . (c) Từ đó suy ra $AN^4 + BN^4 + CN^4 < 18R^4 \Leftrightarrow N$ nằm trong (O) , $AN^4 + BN^4 + CN^4 = 18R^4 \Leftrightarrow N \in (O)$, $AN^4 + BN^4 + CN^4 > 18R^4 \Leftrightarrow N$ nằm ngoài (O) .

25 ([Hải+22], VD5, p. 79). Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng d đi qua O & cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Chứng minh $\frac{1}{OD^4} + \frac{1}{OE^4} + \frac{1}{OF^4} = \text{const}$.

26 ([Hải+22], VD6, p. 79). Cho 3 vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ (mô hình vector của tam giác đều) & \vec{u} là vector bất kỳ. Chứng minh: (a) $\cos(\vec{u}, \vec{a}) + \cos(\vec{u}, \vec{b}) + \cos(\vec{u}, \vec{c}) = 0$. (b) $\cos^2(\vec{u}, \vec{a}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{b}) + \cos^2(\vec{u}, \vec{c}) = \frac{3}{2}$. (c) $\cos^4(\vec{u}, \vec{a}) + \cos^4(\vec{u}, \vec{b}) + \cos^4(\vec{u}, \vec{c}) = \frac{9}{8}$. (d) Tính $\cos^{2n}(\vec{u}, \vec{a}) + \cos^{2n}(\vec{u}, \vec{b}) + \cos^{2n}(\vec{u}, \vec{c})$ với $n \in \mathbb{N}$.

27 ([Hải+22], VD7, p. 79). Cho $\triangle ABC$ đều & M, N bất kỳ. M_a, M_b, M_c lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB . N_a, N_b, N_c lần lượt là hình chiếu của N lên BC, CA, AB . Chứng minh $M_a N_a^2 + M_b N_b^2 + M_c N_c^2 = \frac{3}{2} MN^2$.

28 ([Hải+22], 10.1., p. 79). Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G . E, F nằm trên đường thẳng GC, GB sao cho $EF \parallel BC$, AG cắt $(ABF), (ACE)$ tại N, M . Chứng minh $FM = EN$.

29 ([Hải+22], 10.3., p. 80). Cho $\triangle ABC$ có DEF là tam giác Ceva của điểm P bất kỳ. L, K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle PCA, \triangle PAB$. Lấy $S \in KL$ thỏa $DS \perp EF$. Đường trung trực của BC cắt KL tại T . Chứng minh S, T đối xứng qua trung điểm KL .

30 ([Hải+22], 10.4., p. 80). Cho $\triangle ABC$, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F . Điểm P di chuyển trên EF, PB cắt CA tại M , MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N . Chứng minh đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua 1 điểm cố định khi P di chuyển.

31 ([Hải+22], 10.5., p. 80). Cho $\triangle ABC$ & điểm $I(\alpha, \beta, \gamma)$ ở trong tam giác với mọi điểm P trong mặt phẳng. Chứng minh $\alpha PA \cdot IA + \beta PB \cdot IB + \gamma PC \cdot IC \geq \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2$.

32 ([Hải+22], 10.6., p. 80). Cho $\triangle ABC$ & điểm P bất kỳ nằm trong tam giác. A', B', C' lần lượt là hình chiếu của P xuống đoạn BC, CA, AB & (I, r) là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Tìm GTNN của biểu thức $PA' + PB' + PC' + \frac{PI^2}{2r}$.

33 ([Hải+22], 10.7., p. 80). Cho $\triangle ABC$ với 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c . A', B', C' di chuyển trên 3 đường thẳng BC, CA, AB . Tìm cực trị của $\frac{B'C'^3}{m_a} + \frac{C'A'^3}{m_b} + \frac{A'B'^3}{m_c}$.

34 ([Hải+22], 10.8., p. 80). Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , I là tâm đường tròn nội tiếp, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . Chứng minh $MA + 2OI \geq MB + MC \geq MA - 2OI$.

35 ([Hải+22], 10.9., p. 80). Cho $\triangle ABC$, trực tâm H , bán kính đường tròn ngoại tiếp R . Với mọi M trên mặt phẳng, tìm GTNN của biểu thức $MA^3 + MB^3 + MC^3 - \frac{3}{2} R \cdot MH^2$.

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.