Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions
Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.tex.

- *Problem & Solution: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập & Lời Giải: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.tex.

Mục lục

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Monotonicity of Function – Tính Đơn Điệu của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §1, pp. 5–14]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. HD3. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Dạng toán 1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến & nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.*

Cách giải. Nhìn vào đồ thị, từ trái sang phải, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi lên là khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi xuống là khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$. □

1 ([Quỳ+22], VD1, p. 5). *Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0, 1]$.*

2 ([Quỳ+22], VD2, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.*

3 ([Quỳ+22], H1, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.*

4 ([Quỳ+22], VD3, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$.*

5 ([Quỳ+22], H2, p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$.*

6 ([Quỳ+22], 1., p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. (c) $y = x + \frac{3}{x}$. (d) $y = x - \frac{2}{x}$. (e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (f) $y = \sqrt{4-x^2}$.*

7 ([Quỳ+22], 2., p. 7). *Chứng minh: (a) Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.*

8 ([Quỳ+22], 3., p. 8). *Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$: (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$. (b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.*

9 ([Quỳ+22], 4., p. 8). *Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?*

10 ([Quỳ+22], 5., p. 8). *Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.*

11 ([Quỳ+22], 6., p. 8). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$. (b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$. (c) $y = \dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. (d) $y = \sqrt{2x-x^2}$. (e) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$. (f) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2x$.*

12 ([Quỳ+22], 7., p. 8). *Chứng minh hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

13 ([Quỳ+22], 8., pp. 8–9). *Chứng minh bất đẳng thức: (a) $\sin x < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$. (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. (c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.*

14 ([Quỳ+22], 9., p. 9). *Chứng minh: $\sin x + \tan x > 2x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

15 ([Quỳ+22], 10., p. 9). *Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?*

2 Maximum & Minimum of Function – GTLN & GTNN của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §2, pp. 15–20]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

16 ([Quỳ+22], VD1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

17 ([Quỳ+22], H1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.*

18 ([Quỳ+22], VD2, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$.*

19 ([Quỳ+22], VD3, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

20 ([Quỳ+22], H2, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2\sin 2x - 3$.*

21 ([Quỳ+22], 11., pp. 16–17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-1$. *(b)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-10$. *(c)* $f(x)=x+\frac{1}{x}$. *(d)* $f(x)=|x|(x+2)$. *(e)* $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+2$. *(f)* $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

22 ([Quỳ+22], 12., p. 17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $y=x\sqrt{4-x^2}$. *(b)* $y=\sqrt{8-x^2}$. *(c)* $y=x-\sin 2x+2$. *(d)* $y=3-2\cos x-\cos 2x$.

23 ([Quỳ+22], 13., p. 17). *Tìm 4 hệ số* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *của hàm số* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *sao cho hàm số* f *đạt cực tiểu tại điểm* $x=0$, $f(0)=0$, *& đạt cực đại tại điểm* $x=1$, $f(1)=1$.

24 ([Quỳ+22], 14., p. 17). *Xác định 3 hệ số* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *sao cho hàm số* $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ *đạt cực trị bằng* 0 *tại điểm* $x=-2$ *& đồ thị của hàm số đi qua điểm* $A(1,0)$.

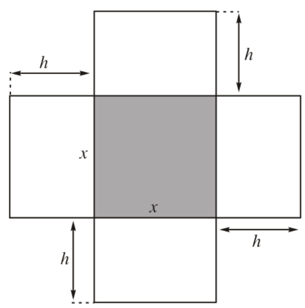
25 ([Quỳ+22], 15., p. 17). *Chứng minh với mọi giá trị của* m, *hàm số* $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ *luôn có cực đại & cực tiểu.*

26 ([Quỳ+22], VD1, p. 18). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

27 ([Quỳ+22], VD2, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x^3-3x+3$ *trên đoạn* $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

28 ([Quỳ+22], H, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$ *trên khoảng* $(1,+\infty)$.

29 ([Quỳ+22], VD3, p. 20). *1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:*



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, *chiều cao là* h cm, *& có thể tích là* 500 cm^3. *(a) Biểu diễn* h *theo* x. *(b) Tìm diện tích* $S(x)$ *của mảnh các tông theo* x. *(c) Tìm giá trị của* x *sao cho* $S(x)$ *nhỏ nhất.*

30 ([Quỳ+22], VD4, p. 21). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x^3-3x+3$ *trên đoạn* $[0,2]$.

31 ([Quỳ+22], 16., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

32 ([Quỳ+22], 17., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $f(x)=x^2+2x-5$ *trên đoạn* $[-2,3]$. *(b)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-4$ *trên đoạn* $[-4,0]$. *(c)* $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *trên khoảng* $(0,+\infty)$. *(d)* $f(x)=-x^2+2x+4$ *trên đoạn* $[2,4]$. *(e)* $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$ *trên đoạn* $[0,1]$. *(f)* $f(x)=x-\frac{1}{x}$ *trên nửa khoảng* $(0,2]$.

33 ([Quỳ+22], 18., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$. *(b)* $\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$.

34 ([Quỳ+22], 19., p. 22). *Cho* ΔABC *đều cạnh* a. *Dựng 1 hình chữ nhật* $MNPQ$ *có cạnh* MN *nằm trên cạnh* BC, *2 đỉnh* P,Q *theo thứ tự nằm trên 2 cạnh* AC,AB *của tam giác. Xác định vị trí của điểm* M *sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất & tìm* GTLN *đó.*

35 ([Quỳ+22], 20., p. 22). *Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có* n *con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng* $P(n)=480-20n$ g. *Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?*

36 ([Quỳ+22], 21., p. 23). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. *(b)* $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$. *(c)* $f(x)=\sqrt{5-x^2}$. *(d)* $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

37 ([Quỳ+22], 22., p. 23). *Tìm giá trị của* m *để hàm số* $f(x)=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ *có cực đại & cực tiểu.*

38 ([Quỳ+22], 23., p. 23). *Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức* $G(x)=0.025x^2(30-x)$, *trong đó* x *là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (*x *được tính bằng* mg*). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.*

39 ([Quỳ+22], 24., p. 23). *Cho parabol $(\mathcal{P}): y = x^2$ & điểm $A(-3,0)$. Xác định điểm M thuộc parabol $(\mathcal{P})$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.*

40 ([Quỳ+22], 25., p. 23). *1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là* 300 km. *Vận tốc dòng nước là* 6 km/h. *Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v* km/h *thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là 1 hằng số, E được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.*

41 ([Quỳ+22], 26., pp. 23–24). *Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0,1,2,\ldots,25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0,25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. (a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600. (d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0,25]$.*

42 ([Quỳ+22], 27., p. 24). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ trên đoạn $[-3,1]$. (b) $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. (c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. (d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.*

43 ([Quỳ+22], 28., p. 24). *Trong các hình chữ nhật có chu vi là* 40 cm*, xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.*

3 Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ

44 ([Quỳ+22], Ví dụ, p. 26). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình: $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2,-1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

45 ([Quỳ+22], H, p. 26). *(a) Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $(\mathcal{P})$ có phương trình là $y = 2x^2 - 4x$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY.*

46 ([Quỳ+22], 29., p. 27). *Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathcal{P})$ sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 3x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$. (c) $y = x - 4x^2$. (d) $y = 2x^2 - 5$.*

47 ([Quỳ+22], 30., p. 27). *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác điểm I thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số đã cho biết hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$. (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathcal{C})$ tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh trên khoảng $(-\infty,1)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của $(\mathcal{C})$ & trên khoảng $(1,+\infty)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

Hint. Trên khoảng $(-\infty,1)$, đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

48 ([Quỳ+22], 31., p. 27). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ & điểm $I(-2,2)$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của $(\mathcal{C})$.*

49 ([Quỳ+22], 32., p. 28). *Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.*

50 ([Quỳ+22], 33., p. 28). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = ax + b + \dfrac{c}{x - x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ & điểm I có tọa độ (x_0, y_0) thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

51 ([Quỳ+20], VD1, p. 7). *Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2;-1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).*

52 ([Quỳ+20], **1.**, p. 9). *Xác định đỉnh I của mỗi parabol (P) sau đây. Viết công thức chuyển tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 4x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$. (c) $y = x - x^2$. (d) $y = x^2 + 3x + 2$.*

53 ([Quỳ+20], **2.**, p. 9). *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số, biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C). (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty;1)$, đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của (C) & trên khoảng $(1;+\infty)$, đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

54 ([Quỳ+20], **3.**, p. 9). *Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \frac{3x-1}{x+1}$. (c) $y = (x-2)^3 - 1$. (d) $y = x^3 - 3x + 2$.*

55 ([Quỳ+20], **4.**, p. 10)**.** *Cho đường cong (C) có phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x-x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$, & điểm I có tọa độ $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến vector $\overrightarrow{OI}$ & phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).*

56 ([Quỳ+20], **5.**, p. 10)**.** *(a) Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |x|$. (b) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm sô $y = |x-3|$. (c) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.*

57 ([Quỳ+20], **6.**, p. 10)**.** *Từ đồ thị (G) của hàm số $y = x^2 - 2x$, suy ra đồ thị hàm số: (a) $y = |x^2 - 2x|$. (b) $y = 2x^2 - 4x$. (c) $y = |x|(x-2)$.*

58 ([Quỳ+20], **7.**, p. 10)**.** *Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, suy ra đồ thị các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin 2x$ bằng các phép biến đổi đồ thị thích hợp.*

4 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §3, pp. 21–27]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. 1. 2. 3. 4. 5.

59 ([Quỳ+22], VD1, p. 31)**.** *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.*

60 ([Quỳ+22], VD2, p. 31)**.** *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.*

61 ([Quỳ+22], H1, p. 32)**.** *Tiệm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5-3x^2}{1-x^2}$.*

62 ([Quỳ+22], VD3, p. 33)**.** *Tìm tiệm cận xiêng của đồ thị hàm số $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.*

63 ([Quỳ+22], H1, p. 33)**.** *Chứng minh đường thẳng $y = 2x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$.*

64 ([Quỳ+22], VD4, p. 34)**.** *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.*

65 ([Quỳ+22], H3, p. 35)**.** *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$.*

66 ([Quỳ+22], 34., p. 35)**.** *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{x-2}{3x+2}$. (b) $y = \dfrac{-2x-2}{x+3}$. (c) $y = x + 2 - \dfrac{1}{x-3}$. (d) $y = \dfrac{x^2-3x+4}{2x+1}$. (e) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. (f) $y = \dfrac{x}{x^3+1}$.*

67 ([Quỳ+22], 35., p. 35)**.** *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{2x-1}{x^2} + x - 3$. (b) $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$. (c) $y = \dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$. (d) $y = \dfrac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$.*

68 ([Quỳ+22], 36., p. 36)**.** *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \sqrt{x^2-1}$. (b) $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. (c) $y = x + \sqrt{x^2+1}$. (d) $y = \sqrt{x^2+x+1}$.*

69 ([Quỳ+22], 37., p. 36)**.** *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = x + \sqrt{x^2-1}$. (b) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$. (c) $y = \sqrt{x^2+4}$. (d) $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.*

70 ([Quỳ+22], 38., p. 36)**.** *(a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị $(\mathcal{C})$ của 3 hàm số $y = f_1(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$, $y = f_2(x) = \dfrac{x^2+x-4}{x+2}$, $y = f_3(x) = \dfrac{x^2-8x+19}{x-5}$. (b) Xác định giao điểm I của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$. (c) Viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

71 ([Quỳ+20], VD1, p. 12)**.** *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$.*

72 ([Quỳ+20], VD2, p. 12)**.** *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.*

73 ([Quỳ+20], H1, p. 13)**.** *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x^2}{1-x^2}$.*

74 ([Quỳ+20], VD3, p. 14)**.** *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + \frac{x}{x^2+1}$.*

75 ([Quỳ+20], H1, p. 14). *Chứng minh rằng đường thẳng* $y = x + 1$ *là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $y = \frac{x^2}{x-1}$.

76 ([Quỳ+20], VD4, p. 15). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

77 ([Quỳ+20], **8.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \frac{2x-3}{3x-2}$. *(b)* $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$. *(c)* $y = \frac{x+2}{x^2-1}$. *(d)* $y = \frac{x^2-3x+5}{2x+1}$. *(e)* $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$. *(f)* $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

78 ([Quỳ+20], **9.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. *(c)* $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

79 ([Quỳ+20], **10.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2+x+1}$. *(b)* $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$. *(c)* $y = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

80 ([Quỳ+20], **11.**, p. 16). *(a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị* (C) *của hàm số* $y = \frac{x^2+x}{x-2}$. *(b) Xác định giao điểm* I *của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overrightarrow{OI}$. *(c) Viết phương trình đường cong* (C) *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra rằng* I *là tâm đối xứng của đường cong* (C).

81 ([Quỳ+20], **12.**, p. 16). *Cho* (C_m) *là đường cong có phương trình* $y = \frac{2x^2+(m+1)x-3}{x+m}$. *(a) Tìm* m *để tiệm cận xiên của* (C_m) *đi qua* $A(1;1)$. *(b) Tìm* m *để giao điểm của 2 tiệm cận nằm trên đường cong* (P): $y = x^2 + 3$.

82 ([Quỳ+20], **13.**, p. 16). *Cho* (C): $y = \frac{x^2+x}{x-2}$. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm* M *bất kỳ trên* (C) *đến 2 tiệm cận của* (C) *bằng 1 hằng số.*

83 ([Quỳ+20], **14.**, p. 16). *Tìm những điểm trên đường cong* (C) *có phương trình* $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ *sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.*

5 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §4, pp. 28–44]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

84 ([Quỳ+22], VD1, p. 37). *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị* $(\mathcal{C})$ *của hàm số* $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$.

5.1 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức

Dạng toán 2. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *với hàm số* f *cho trước có thể chứa tham số.*

85 ([Quỳ+20], VD1, p. 17). *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

5.1.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 1 $y = ax + b$, $a \neq 0$

86. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc nhất* $y = f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

5.1.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 2 $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

87. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số /tam thức bậc 2* $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

5.1.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

88. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 3* $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

89 ([Quỳ+20], VD2, p. 19). *Cho hàm số bậc 3* $y = x^3 - 3x^2 + mx$ *với* m *là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số ứng với* $m = 0$. *(b) Tìm tất cả các giá trị của tham số* m *sao cho đồ thị của hàm số có điểm cực đại, cực tiểu. Trong trường hợp đó, viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.*

90 ([Quỳ+20], **15.**, p. 22). *(a) Biết rằng đồ thị của hàm số* $y = (3a^2-1)x^3 - (b^3+1)x^2 + 3c^2x + 4d$ *có 2 điểm cực trị là* $(1;-7)$, $(2,-8)$. *Xác định* $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *(b) Chứng minh rằng đồ thị hàm số* $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ *luôn cắt đường thẳng* $y = x + 1$ *tại đúng 2 điểm phân biệt với mọi giá trị* m.

91 ([Quỳ+20], **16.**, p. 23). *Cho hàm số* $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ *với* m *là tham số thực. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi* $m = 0$. *(b) Tìm tất cả các giá trị của tham số* m *để hàm số đã cho nghịch biến trên* $(0;+\infty)$.

92 ([Quỳ+20], **18.**, p. 23). *Cho hàm số* $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ *với* m *là tham số. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi* $m = 1$. *(b) Xác định tất cả các giá trị* m *để hàm số* $y = f(x)$ *không có cực trị.*

93 ([Quỳ+20], **19.**, p. 23). *Cho hàm số* $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ *có đồ thị* (C). *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* (C). *(b) Viết phương trình tiếp tuyến của* (C) *đi qua điểm* $A(-1;-13)$.

94 ([Quỳ+20], **20.**, p. 23). *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ *với tham số* m. *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho khi* $m = 0$. *(b) Tìm tất cả các giá trị* m *để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.*

5.1.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$

95. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4 dạng trùng phương* $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

96 ([Quỳ+20], VD3, p. 19)**.** *Cho hàm số* $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C_m) *với* m *là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số khi* $m = 1$. *(b) Tìm* m *để đồ thị* (C_m) *có 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng* 32.

97 ([Quỳ+20], **17.**, p. 23)**.** *Cho hàm số* $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$. *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số trên. (b) Dựa vào đồ thị trên, biện luận theo* m *số nghiệm của phương trình lượng giác* $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ *với* $x \in [0;\pi]$.

98 ([Quỳ+20], **21.**, p. 23)**.** *Cho hàm số* $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ *có đồ thị* (C). *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị* (C). *(b) Trên đồ thị* (C) *lấy 2 điểm phân biệt là* A *&* B *có hoành độ lần lượt là* a, b. *Tìm điều kiện của* a, b *để tiếp tuyến tại* (C) *tại các điểm* A *&* B *song song với nhau.*

5.1.5 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ [$\star$]

99 ($\star$)**.** *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4* $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

5.2 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ

5.2.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

100. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số nhất biến* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

101 ([Quỳ+20], VD1, p. 24)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{2x+1}{x-1}$. *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số. (b) Gọi* M *là 1 điểm di động trên* (C). *Tiếp tuyến tại* M *của đồ thị* (C) *cắt 2 đường tiệm cận tại* A *&* B. *Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn* AB.

102 ([Quỳ+20], **22.**, p. 29)**.** *Biết rằng đồ thị hàm số* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ac \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ *có tâm đối xứng là* $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$ *& đi qua gốc tọa độ. Xác định tung độ của điểm có hoành độ là 1 thuộc đồ thị.*

103 ([Quỳ+20], **23.**, p. 29)**.** *(a) Chứng minh rằng* $\forall m \neq 1$ *thì đồ thị của hàm số* $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ *luôn tiếp xúc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. (b) Tìm* m *để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $y = \frac{x^2+(m+2)x+2m+2}{x+2}$ *tiếp xúc với đường cong* $(C): y = x^3 - 3x^2 - 8x$.

104 ([Quỳ+20], **25.**, pp. 29–30)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x}{4(x-3)}$ *có đồ thị* (C). *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị của hàm số đã cho. (b) Tìm tọa độ điểm* $M \in (C)$ *sao cho tiếp tuyến của* (C) *tại* M *cắt 2 trục tọa độ* Ox, Oy *lần lượt tại 2 điểm* A, B *& diện tích* ΔOAB *là* $\frac{3}{8}$.

105 ([Quỳ+20], **26.**, p. 30)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x-1}{2x+3}$ *có đồ thị* (C). *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Với mỗi điểm* M *bất kỳ thuộc* (C), *tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ* M *đến 2 trục tọa độ.*

5.2.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & tử thức $\not\vdots$ mẫu thức

106. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ *& tử thức không chia hết cho mẫu thức.*

107 ([Quỳ+20], VD2, p. 27)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ *có đồ thị* (C). *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Biết rằng* A *&* B *là 2 điểm phân biệt trên đồ thị sao cho tiếp tuyến tại 2 điểm này song song với nhau. Chứng minh rằng* A, B *đối xứng với nhau qua tâm đối xứng của đồ thị* (C).

108 ([Quỳ+20], **27.**, p. 30)**.** *Cho hàm số* $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$. *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Tìm tọa độ điểm* M *thuộc đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ* M *đến 2 đường tiệm cận nhỏ nhất.*

5.2.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & mẫu thức $\not\vdots$ tử thức

109. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, *& mẫu thức không chia hết cho tử thức.*

5.2.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung

110. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, *& tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung.*

111 ([Quỳ+20], **24.**, p. 29)**.** *(a) Cho hàm số* $y = \frac{x^2+px+q}{x^2+1}$ *trong đó* $p \neq 0$, $p^2 + q^2 = 1$. *Tìm tất cả các giá trị* p, q *sao cho khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là* $\sqrt{10}$. *(b) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$ *thì đồ thị của hàm số* $y = \frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ *luôn có 2 điểm cực trị & khoảng cách giữa chúng không đổi.*

5.2.5 Miscellaneous

112 ([Quỳ+20], **28.**, p. 30)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(x-1)^3+a+1}{x}$. *(a) Tìm các giá trị của a để đồ thị của hàm số có 3 cực trị & chứng minh rằng với các giá trị đó thì các cực trị này sẽ nằm trên 1 parabol cố định. (b) Chứng minh rằng* $\forall a \in \mathbb{R}$, *đồ thị của hàm số* $y = \frac{x+a}{x^2+x+1}$ *luôn có 3 điểm uốn thẳng hàng.*

5.3 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị

5.3.1 Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị hàm số

113 ([Quỳ+20], VD1, p. 31)**.** *Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số* $y = x^3 - 3x + 2$.

114 ([Quỳ+20], VD2, p. 31)**.** *Chứng minh rằng* $\forall a \in \mathbb{R}$, *đồ thị của hàm số* $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ *luôn có 3 điểm thẳng hàng.*

5.3.2 Họ đường cong phụ thuộc tham số

115 ([Quỳ+20], VD3, p. 32)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$ (C_m). *(a) Tìm điểm cố định của họ* (C_m) *khi m thay đổi. (b) Tìm m để* (C_m) *cắt* $y = 0$ *tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.*

116 ([Quỳ+20], VD4, p. 33)**.** *Cho hàm số* $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$ (C_m). *(a) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$, (C_m) *luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng. (b) Với giá trị nào của m thì* (C_m) *có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa 3 điểm cố định nói trong câu (a).*

117 ([Quỳ+20], VD5, p. 34)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(3m+1)x-(m^2-m)}{x+m}$ $(m \neq 0)$. *Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng mà đồ thị không thể đi qua khi m thay đổi.*

118 ([Quỳ+20], VD6, p. 35)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1 - m^2$ (C_m). *Tìm m để* (C_m) *có 2 điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.*

119 ([Quỳ+20], VD7, p. 35)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$. *Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng (d):* $x - 2y - 5 = 0$.

120 ([Quỳ+20], VD8, p. 36)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{2x+1}{x-2}$ *có đồ thị* (C). *Tìm phương trình đường cong* (C') *đối xứng với* (C) *qua đường thẳng* (d) *có phương trình* $y = 2$.

5.3.3 Ứng dụng đồ thị hàm số trong các bài toán biện luận số nghiệm của phương trình

121 ([Quỳ+20], VD9, p. 36)**.** *Biện luận số nghiệm của phương trình sau theo tham số m:* $x^3 - 3x + 2 = m$.

122 ([Quỳ+20], VD10, p. 37)**.** *Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $4|x|^3 - 3|x| = m$.

123 ([Quỳ+20], VD11, p. 37)**.** *Tìm m để phương trình sau có 1 nghiệm duy nhất:* $x^3 - x^2 = mx - 1$.

124 ([Quỳ+20], H3, p. 38)**.** *Tìm tất cả các giá trị m sao cho phương trình* $x^3 - x^2 = (m^2+m)x - 1$ *có nghiệm duy nhất.*

125 ([Quỳ+20], **29.**, p. 39)**.** *Cho* (C_m) *có phương trình* $y = x^3 + (m-1)x - (m+3)x - 1$. *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị* (C) *của hàm số khi* $m = 1$. *(b) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$, *hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị. (c) Tìm những cặp điểm nguyên trên* (C) *đối xứng với nhau qua đường thẳng* $y = x$ *& không nằm trên đường thẳng đó.*

126 ([Quỳ+20], **30.**, p. 39)**.** *Cho họ đường cong* (C_m): $y = \frac{-x^2+mx-m^2}{x-m}$. *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị* (C) *của hàm số khi* $m = 1$. *(b) Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị hàm số. (c) Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng 2 đường của của họ* (C_m) *đi qua.*

127 ([Quỳ+20], **31.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2+4m+1)x - 4m(m+1)$ (C_m). *(a) Chứng minh rằng* (C_m) *luôn đi qua 1 điểm cố định khi m thay đổi. (b) Tìm m sao cho* (C_m) *cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.*

128 ([Quỳ+20], **32.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x^2}{x-1}$ (C). *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị* (C). *(b) Tìm 2 điểm* $A, B \in (C)$ *& đối xứng nhau qua đường thẳng* $y = x - 1$.

129 ([Quỳ+20], **33.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{2x^2+(6-m)x+4}{mx+2}$. *Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$, *đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định duy nhất. Xác định tọa độ của điểm đó.*

130 ([Quỳ+20], **34.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$. *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho. (b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $\frac{(x-1)^2}{|x+2|} = m$.

131 ([Quỳ+20], **35.**, p. 39)**.** *Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:* $4|x|^3 - 3|x| - 1 = mx - m$.

6 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCI, pp. 45–48]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.

[Quỳ+22] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng. *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 231.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 95.