Problem: Exponentiation & Logarithm – Bài Tập: Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarith

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Exponentiation & Logarithm – Bài Tập: Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarith.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiation_logarithm/problem/NQBH_exponentiation_logarithm_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiation_logarithm/problem/NQBH_exponentiation_logarithm_problem.tex.
- *Problem & Solution: Exponentiation & Logarithm – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số Mũ & Hàm Số Logarith.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiation_logarithm/solution/NQBH_exponentiation_logarithm_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/exponentiation_logarithm/solution/NQBH_exponentiation_logarithm_solution.tex.

Mục lục

1 Exponentiation with Real Exponent – Lũy Thừa Với Số Mũ Thực

Định lý 1 (So sánh các lũy thừa cùng cơ số)**.** $\forall m,n\in\mathbb{Z}$, $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$, $\forall a > 1$; $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$, $\forall a\in(0,1)$.

1 ([Nam+23], p. 143)**.** *Cho* $a,b\in(0,\infty)$. *Rút gọn biểu thức* $A = \dfrac{a^{\frac{11}{5}}b^2 + a^2b^{\frac{11}{5}}}{\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b}}$.

2 ([Nam+23], VD1, p. 144)**.** *Cho* $x > 0$. *Viết biểu thức* $f(x) = \sqrt[7]{x^3\sqrt[5]{x^2}}$ *dưới dạng lũy thừa của 1 số với số mũ hữu tỷ.*

3 ([Nam+23], VD2, p. 144)**.** *Cho* $a > 0$. *Chứng minh* $\dfrac{1}{a^{\frac14}+a^{\frac18}+1} + \dfrac{1}{a^{\frac14}-a^{\frac18}+1} - \dfrac{2\left(a^{\frac14}-1\right)}{a^{\frac12}-a^{\frac14}+1} = \dfrac{4}{a+\sqrt{a}+1}$.

4 ([Nam+23], VD1, p. 144, IsraelNO2015)**.** *Chứng minh* $\left(\dfrac{76}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{77}-\sqrt[3]{75}}-\sqrt[3]{5775}} + \dfrac{1}{\dfrac{76}{\sqrt[3]{77}+\sqrt[3]{75}}+\sqrt[3]{5775}}\right)^3 \in\mathbb{N}$.

5 ([Nam+23], 1., p. 144)**.** *Chứng minh* $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = 2$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

6 ([Nam+23], 2., p. 144). *So sánh* $\sqrt[3]{7}+\sqrt{15}, \sqrt{10}+\sqrt[3]{28}$.

7 ([Nam+23], 3., p. 144). *Cho* $a\in(0,\infty)$. *Viết biểu thức* $f(a)=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a^3\sqrt[5]{a^{12}}}}}:a^{-\frac{4}{5}}$ *dưới dạng lũy thừa của 1 số với số mũ hữu tỷ.*

8 ([Nam+23], 4., p. 144). *Cho* $x,y\in(0,\infty)$. *Viết biểu thức* $A=\sqrt[5]{\frac{y^7}{x^3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}\sqrt{\frac{x^5}{y^7}}}}$ *dưới dạng lũy thừa của 1 số với số mũ hữu tỷ.*

9 ([Quỳ+20], Ví dụ 1, p. 42). *Không dùng máy tính, so sánh* $99^{100}+100^{100}$ *&* 101^{100}.

Giải. Có $99^{100}+100^{100}\le 2\cdot 100^{100}$, cần chứng minh $2\cdot 100^{100}<101^{100}$. Thật vậy, theo bất đẳng thức Bernoulli: $\left(\frac{101}{100}\right)^{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}>1+100\cdot\frac{1}{100}=2\Rightarrow 2\cdot 100^{100}<101^{100}$. Do đó $99^{100}+100^{100}<101^{100}$. □

"Các bất đẳng thức dạng này khá yếu & thường khi giải bất phương trình mũ, ta sẽ dùng các đánh giá trung gian đưa về cùng số mũ hoặc cùng cơ số rồi so sánh dựa vào định lý 1." – [Quỳ+20, p. 42]

"In mathematics, *Bernoulli's inequality* (named after Jacob Bernoulli) is an inequality that approximates exponentiations of $1+x$. It is often employed in real analysis. It has several useful variants:

- $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>-1$. The inequality is strict if $x\ne 0$ & $r\ge 2$.
- $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $r\,\vdots\,2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
- $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\ge -2$.
- $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in[1,\infty)$, $x\ge -1$. The inequalities are strict if $x\ne 0$ & $r\notin\{0,1\}$.
- $(1+x)^r\le 1+rx$, $\forall r\in[0,1]$, $x\ge -1$." – Wikipedia/Bernoulli's inequality

Định lý 2 (Bernoulli's inequality). $(1+x)^r\ge 1+rx$, $\forall r\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>-1$.

10 (Mở rộng [Quỳ+20], Ví dụ 1, p. 42). *So sánh* $m^n+(m+1)^n$ *&* $(m+2)^n$.

11 ([Quỳ+20], Ví dụ 2, p. 42). *Chứng minh:*

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^4+b^4+c^4}{2}\frac{a^3+b^3+c^3}{3},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a+b+c=0.$$

12 ([Quỳ+20], H1, p. 42). *Với những giá trị nguyên dương nào của n thì* $\sum_{i=1}^9 i^n=1^n+2^n+\cdots+9^n<10^n$*?*

13 ([Quỳ+20], Ví dụ 3, p. 43). *Chứng minh:* $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=const$, $\forall x\in[4,8]$.

Giải. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=|\sqrt{x-4}+2|+|\sqrt{x-4}-2|=\sqrt{x-4}+2+2-\sqrt{x-4}=4$, $\forall x\in[4,8]$, trong đó $|\sqrt{x-4}-2|=2-\sqrt{x-4}$ vì $x\le 8$, nên $\sqrt{x-4}\le\sqrt{8-4}=2$. □

14 (Mở rộng [Quỳ+20], Ví dụ 3, p. 43). *Biện luận theo tham số a để rút gọn biểu thức* $A=\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}+\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}$ *&* $B=\sqrt{x+2a\sqrt{x-a^2}}-\sqrt{x-2a\sqrt{x-a^2}}$.

15 ([Quỳ+20], H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức* $M=\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}$.

Phân tích. Dưới dấu $\sqrt[3]{\cdot}$ là biểu thức có dạng $A\sqrt{2}+B\sqrt{3}$, ta nghĩ ngay đến $(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^3=2a^3\sqrt{2}+6a^2b\sqrt{3}+9ab^2\sqrt{2}+3b^3\sqrt{3}=(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}$. Đồng nhất hệ số: $2a^3+9ab^2=11$ & $6a^2b+3b^3=9$, suy ra $a=b=1$, hay $11\sqrt{2}\pm 9\sqrt{3}=(\sqrt{2}\pm\sqrt{3})^3$.

Giải. $M=\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}+\sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$. □

Từ phân tích trên, ta có 1 mở rộng của bài toán vừa giải như sau:

16 (Mở rộng [Quỳ+20], H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

$$A=\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}-(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}},\ \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Giải. $A=\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}+(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(2a^3+9ab^2)\sqrt{2}-(6a^2b+3b^3)\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^3}+\sqrt[3]{(a\sqrt{2}-b\sqrt{3})^3}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+a\sqrt{2}-b\sqrt{3}=2a\sqrt{2}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$. □

Lưu ý 1. *Kết quả rút gọn của biểu thức A chỉ phụ thuộc vào mỗi tham số a, & độc lập với tham số b.*

Mở rộng hơn nữa bằng cách thay $\sqrt{2},\sqrt{3}$ bởi $\sqrt{m},\sqrt{n}$:

17 (Mở rộng [Quỳ+20], H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

Mở rộng hơn nữa bằng cách thay $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$ bởi $\sqrt[n]{\cdot}$.

18 (Mở rộng [Quỳ+20], H2, p. 43). *Rút gọn biểu thức*

2 Logarithm

3 Exponentiation. Logarithm – Hàm Số Mũ. Hàm Số Logarith

4 Exponential & Logarithmic Equation, Inequation – Phương Trình, Bất Phương Trình Mũ & Logarith

1 số tính chất cơ bản của phương trình mũ & logarithm:

- Phương trình $a^x = m$, $0 < a \neq 1$. Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm. Nếu $m > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \log_a m$.
- Phương trình $\log_a x = m$, $0 < a \neq 1$ luôn có nghiệm duy nhất là $x = a^m$.

4.1 Phương trình có dạng $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

"*Cách giải chung*:

- Nếu $a = b$ thì theo tính chất của hàm số mũ, ta có $f(x) = g(x)$, đưa bài toán về dạng đơn giản hơn – *phương pháp đưa về cùng cơ số*.
- Nếu $a \neq b$ thì lấy logarith cơ số a (hoặc b) 2 vế đưa về $f(x) = \log_a b \cdot g(x)$. Do $\log_a b$ cũng là 1 hằng số nên tính chất của phương trình này cũng tương tự trường hợp $a = b$." – [Quỳ+20, p. 71]

19 ([Quỳ+20], Ví dụ 1, p. 71)**.** *Giải phương trình: (a)* $(5^{x+2})^{x+1} + (5^x)^{x+3} = (2^{x+1})^{x+5} - 6(2^{x+6})^x$. *(b)* $(10 + 6\sqrt{3})^{2\sin x} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^{\sin 4x}}$. *(c)* $\left(\frac{8}{3}\right)^{x^2-x+1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2x^2-3x+2}\left(\frac{5}{7}\right)^{3x^2-4x+3}\left(\frac{7}{2}\right)^{4x^2-5x+4} = 210^{(x-1)^2}$.

20 ([Quỳ+20], H1, p. 72)**.** *(a) Giải các phương trình sau:* $2^x \cdot 3^x \cdot 4^{x^2} = 4 \cdot 36^{\frac{x}{x+1}}$. *(b) Với* $a > 1$*, giải phương trình* $\left(\frac{a}{a^2+1}\right)^x\left(\frac{a^2-1}{a^2-1}\right)^{2x} = 6$.

5 Miscellaneous

Tài liệu

[Nam+23] Trần Hữu Nam, Trần Minh Hiền, Cao Minh Quang, Nguyễn Tiên Tiến, and Nguyễn Văn Xá. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 11: Đại Số, Giải Tích, Thống Kê, Xác Suất*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 296.

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.