

# Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 10 tháng 11 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_10/function\\_graph/problem/NQBH\\_function\\_graph\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_10/function\\_graph/problem/NQBH\\_function\\_graph\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.tex).

- *Problem & Solution: Function & Graph – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số & Đồ Thị*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_10/function\\_graph/solution/NQBH\\_function\\_graph\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_10/function\\_graph/solution/NQBH\\_function\\_graph\\_solution.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.tex).

## Mục lục

1	General Function – Đại Cương Về Hàm Số	1
2	2nd-Order Function – Hàm Số Bậc 2	2
3	Solvable Equations via Quadratic Equations – Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2	3
4	Ứng Dụng của Hàm Số Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức & Tìm GTLN, GTNN	3
5	Miscellaneous	3
Tài liệu		3
Resources – Tài nguyên.		

1. [Hải+25]. PHAN VIỆT HẢI, TRẦN QUANG HÙNG, NINH VĂN THU, PHẠM ĐÌNH TÙNG. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10. Tập 2*.

## 1 General Function – Đại Cương Về Hàm Số

### Abbreviations – Viết tắt

1. TXD: Tập xác định.

1 ([Hải+25], VD1, p. 5). Công thức tính chu vi & diện tích hình tròn  $P = 2\pi r, S = \pi r^2$  có là hàm số không?

2 ([Hải+25], VD2, p. 6). Tìm TXD của hàm số  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ .

3. Biện luận theo 4 tham số  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  TXD của hàm số  $f(x) = \sqrt{ax + \sqrt{bx + c + d}}$ .

4 ([Hải+25], VD3, p. 6). Chứng minh hàm số  $f(x) = x^2$  đồng biến trên  $[0, +\infty)$  & nghịch biến trên  $(-\infty, 0]$ .

5. Biện luận theo 3 tham số  $a, b, c \in \mathbb{R}$  các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ .

6 ([Hải+25], VD4, p. 7). Chứng minh hàm  $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$  là hàm chẵn trên TXD của nó.

7 ([Hải+25], VD5, p. 7). Chứng minh hàm  $f(x) = (e^x + e^{-x}) \cos x$  là hàm chẵn trên TXD của nó.

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Hải+25], VD6, p. 7). Chứng minh hàm  $f(x) = \cos x$  có chu kỳ cơ sở là  $2\pi$ .

Tồn tại các hàm tuần hoàn nhưng không có chu kỳ cơ sở.

9 ([Hải+25], VD7, p. 7). Tìm chu kỳ cơ sở của hàm Dirichlet

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (1)$$

10 ([Hải+25], VD8, p. 7). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ . Chứng minh hàm số  $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$  tuần hoàn trên  $\mathbb{R}$  khi & chỉ khi  $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ .

11 ([Hải+25], VD9, p. 7). Chứng minh hàm số  $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$  không tuần hoàn trên  $\mathbb{R}$ .

12 ([Hải+25], VD10, p. 8). Cho 2 hàm số  $f(x) = x^2 + 5, g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ . Tính  $f(g(x))$ .

13 ([Hải+25], 17.1., p. 8). Tìm TXD của hàm số:  $f(x) = \frac{|x+1|}{(x-3)\sqrt{2x-1}}, g(x) = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}, h(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$ .

14 ([Hải+25], 17.2., p. 8). 2 hàm số  $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = 1$  có bằng nhau không?

15 ([Hải+25], 17.3., p. 8). Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ . Tính  $f_n(x)$  với  $f_1(x) := f(x), f_n(x) := f(f_{n-1}(x))$ .

16 ([Hải+25], 17.4., p. 8). Cho  $f(x)$  là 1 hàm bất kỳ với TXD  $\mathbb{R}$ . Chứng minh  $f(x)$  luôn biểu diễn được 1 cách duy nhất dưới dạng tổng của 1 hàm số chẵn & 1 hàm số lẻ.

17 ([Hải+25], 17.5., p. 8). Cho  $f(x)$  là 1 hàm tuần hoàn bất kỳ với TXD  $\mathbb{R}$  & chu kỳ cơ sở là  $T$ . Tìm chu kỳ cơ sở của hàm số  $y(x) = f(ax+b), a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ .

18 ([Hải+25], 17.6., p. 8). Cho  $f(x)$  là 1 hàm bất kỳ với TXD  $D$ . Giả sử tồn tại  $a \in \mathbb{R}^*$  thỏa  $f(x+a) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ . Chứng minh  $f(x)$  là hàm tuần hoàn.

19 ([Hải+25], 17.7., p. 8). Cho  $a \in \mathbb{R}^*, f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa  $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2}, \forall x > 0$ . Chứng minh  $f(x)$  là hàm tuần hoàn.

20 ([Hải+25], 17.8., p. 8). Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , thỏa  $f(x+3) \leq f(x)+3, f(x+2) \geq f(x)+2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $g(x) := f(x) - x$  là hàm tuần hoàn.

## 2 2nd-Order Function – Hàm Số Bậc 2

[1] Định nghĩa. Hàm số bậc 2 là hàm số có dạng  $y = ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ : 3 hệ số, có TXD  $D = \mathbb{R}$ . [2] Bảng biến thiên của hàm số bậc 2: Khi  $a > 0, x: -\infty \rightarrow -\frac{b}{2a} \rightarrow +\infty, y: +\infty \searrow -\frac{\Delta}{4a} \nearrow +\infty$ . Khi  $a < 0, x: -\infty \rightarrow -\frac{b}{2a} \rightarrow +\infty, y: -\infty \nearrow -\frac{\Delta}{4a} \searrow -\infty$ . [3] Tính chất của đồ thị của hàm số bậc 2: (i) có đỉnh  $I\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ . (ii) Quay bề lõm lên trên khi  $a > 0$ , quay bề lõm xuống dưới khi  $a < 0$ . (iii) Có trục đối xứng là đường thẳng  $x = -\frac{b}{2a}$  đi qua đỉnh  $I$  & song song với trục tung  $Oy$ . [4] GTLN, GTNN.

21 ([Hải+25], VD1, p. 10). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{N}^*$  để hàm số  $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$  đồng biến trên khoảng  $(4, 2018)$ .

22 ([Hải+25], VD2, p. 11). Cho parabol  $(P)$  đi qua  $A(-1, 4), B(3, 4)$ . Tìm phương trình trục đối xứng của  $(P)$ .

23 ([Hải+25], VD3, p. 11). Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = 5x^2 + 2x + 1$  trên đoạn  $[-2, 2]$ .

24 ([Hải+25], VD4, p. 11). Cho 2 parabol có phương trình  $y = x^2 + x + 1, y = 2x^2 - x - 2$ . Biết 2 parabol cắt nhau tại 2 điểm  $A, B$  với  $x_A < x_B$ . Tính  $AB$ .

25 ([Hải+25], VD5, p. 11). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  trong nửa khoảng  $[-10, -4]$  để đường thẳng  $d: y = -(m+1)x + m + 2$  cắt parabol  $(P): y = x^2 + x - 2$  tại 2 điểm phân biệt nằm về cùng 1 phía đối với trục tung.

26 ([Hải+25], VD6, p. 12). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  để phương trình  $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$  có 4 nghiệm phân biệt.

27 ([Hải+25], VD7, p. 13). Biết  $S = (a, b)$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt đồ thị hàm số  $y = |x^2 - 4x + 3|$  tại 4 điểm phân biệt. Tìm  $a + b$ .

28 ([Hải+25], VD8, p. 13). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số  $f(x) = x^2 + (2m-1)x + m^2$  luôn nhận giá trị dương.

29 ([Hải+25], VD9, p. 13). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số  $f(x) = (m-1)x^2 + 2x + 1$  luôn nhận giá trị âm.

30 ([Hải+25], VD10, p. 14). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số  $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

31 ([Hải+25], VD11, p. 14). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để  $\frac{(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4m+1}{2x^2+1} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

32 ([Hải+25], VD12, p. 14). Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0. \end{cases}$$

33 ([Hải+25], 18.1., p. 15). Gọi  $M$  là điểm cố định mà parabol  $(P_m) : y = x^2 + 3mx + 6m + 1$  luôn đi qua với mọi giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$ . Tính tổng khoảng cách từ  $M$  đến 2 trục tọa độ.

34 ([Hải+25], 18.2., p. 15). Cho parabol  $(P) : y = x^2 - 2(m-1)x - 2$  với tham số  $m \in \mathbb{R}$ . Tìm quỹ tích đỉnh của  $(P)$  khi  $m$  thay đổi.

35 ([Hải+25], 18.3., p. 15). Cho parabol  $(P) : y = x^2 - mx$  & đường thẳng  $(d) : y = (m+2)x + 1$  với tham số  $m \in \mathbb{R}$ . Khi  $(P), (d)$  cắt nhau tại 2 điểm  $M \neq N$ , tìm tập hợp trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$ .

36 ([Hải+25], 18.4., p. 15). 1 chiếc ăng-ten chảo parabol có chiều cao  $h = 0.5$  m & đường kính miệng  $d = 4$  m. Mặt cắt qua trục là 1 parabol dạng  $y = ax^2$ . Biết  $a = \frac{m}{n}$  với  $m, n \in \mathbb{N}^*$  nguyên tố cùng nhau. Tính  $m - n$ .

37 ([Hải+25], 18.5., p. 15). Khi 1 quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo của quả bóng là 1 cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth với  $t$  là thời gian, tính bằng giây, kể từ khi quả bóng được đá lên;  $h$  là độ cao, tính bằng mét, của quả bóng. Giả thiết quả bóng được đá lên từ độ cao 1.2 m. Sau đó 1 s, nó đạt độ cao 8.5 m & 2 s sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6 m. Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên?

38 ([Hải+25], 18.6., p. 15). Cho parabol  $(P) : y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$  & đường thẳng  $(d) : y = mx + m^2$ ,  $m$  là tham số. Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại 2 điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$ .

39 ([Hải+25], 18.7., p. 15). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{R}$  để GTNN của hàm số  $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$  trên đoạn  $[0, 1]$  là 1.

40 ([Hải+25], 18.8., p. 16). Cho hàm số  $f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$ . Đặt  $m := \min_{x \in [-1, 1]} f(x)$ ,  $M := \max_{x \in [-1, 1]} f(x)$ ,  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị  $m \in \mathbb{R}$  để  $M - m = 8$ . Tính tổng bình phương của các phần tử thuộc  $S$ .

41 ([Hải+25], 18.9., p. 16). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  thuộc  $[1, 2018]$  để bất phương trình  $x^2 + 2x|x+2| - 2 \leq m$  thỏa mãn  $\forall x \in [-4, 1]$ .

42 ([Hải+25], 18.10., p. 16). Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $|x|\sqrt{x^2+4}|x|+4 = m$  có 6 nghiệm phân biệt là khoảng  $(a, b)$ . Tính  $a + b$ .

43 ([Hải+25], 18.11., p. 16). Cho hàm số  $f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1}$ . Tìm tất cả  $m \in \mathbb{R}$  để TXĐ của  $f(x)$  là  $\mathbb{R}$ .

44 ([Hải+25], 18.12., p. 16). Đếm số giá trị  $m \in \mathbb{Z}$  để hàm số  $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m+3}$  có TXĐ là  $\mathbb{R}$ .

45 ([Hải+25], 18.13., p. 16). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để bất phương trình  $\frac{(m-3)x^2 - 2(m-1)x + 4m-1}{3x^2+1} \leq -1$  vô nghiệm.

46 ([Hải+25], 18.14., p. 16). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để bất phương trình nghiệm đúng  $\forall x \in \mathbb{R}$ : (a)  $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ . (b)  $\frac{-x^2 + 8x - 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} > 0$ .

### 3 Solvable Equations via Quadratic Equations – Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

### 4 Ứng Dụng của Hàm Số Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức & Tìm GTLN, GTNN

### 5 Miscellaneous

### Tài liệu

[Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.