

Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions
Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.tex.
- *Problem & Solution: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập & Lời Giải: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.tex.

Mục lục

1 Monotonicity of Function – Tính Đơn Điều của Hàm Số 2

2 Maximum & Minimum of Function – GTLN & GTNN của Hàm Số 3

3 Graph of a Function & Some Graph Transformations – Đồ Thị của Hàm Số & 1 Số Phép Biến Đổi Đồ Thị 4

3.1 Phép tịnh tiến hệ tọa độ 5

4 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số 6

5 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số 7

5.1 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức 7

5.1.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 1 $y = ax + b, a \neq 0$ 7

5.1.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 2 $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ 7

5.1.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ 7

5.1.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c, a \neq 0$ 8

5.1.5 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ [x] 8

5.2 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ 8

5.2.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0, ad - bc \neq 0$ 8

5.2.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, a \neq 0, a' \neq 0$ & tử thức \nmid mẫu thức 8

5.2.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{a'x^2 + b'x + c}, a \neq 0, a' \neq 0$ & mẫu thức \nmid tử thức 8

5.2.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, a \neq 0, a' \neq 0$, tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung 9

5.2.5 Miscellaneous 9

5.3 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị 9

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

5.3.1	Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị hàm số	9
5.3.2	Họ đường cong phụ thuộc tham số	9
5.3.3	Ứng dụng đồ thị hàm số trong các bài toán biện luận số nghiệm của phương trình	9
6	Miscellaneous	10
	Tài liệu	10

1 Monotonicity of Function – Tính Đơn Điều của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §1, pp. 5–14]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. HD3. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Dạng toán 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến & nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

Cách giải. Nhìn vào đồ thị, từ trái sang phải, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi lên là khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi xuống là khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$. \square

- 1 ([Quỳ+22], VD1, p. 5). Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0, 1]$.
- 2 ([Quỳ+22], VD2, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.
- 3 ([Quỳ+22], H1, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.
- 4 ([Quỳ+22], VD3, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$.
- 5 ([Quỳ+22], H2, p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$.
- 6 ([Quỳ+22], 1., p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. (c) $y = x + \frac{3}{x}$. (d) $y = x - \frac{2}{x}$. (e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (f) $y = \sqrt{4-x^2}$.
- 7 ([Quỳ+22], 2., p. 7). Chứng minh: (a) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số $y = \frac{-x^2-2x+3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.
- 8 ([Quỳ+22], 3., p. 8). Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên \mathbb{R} : (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$. (b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.
- 9 ([Quỳ+22], 4., p. 8). Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} ?
- 10 ([Quỳ+22], 5., p. 8). Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .
- 11 ([Quỳ+22], 6., p. 8). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$. (b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$. (c) $y = \frac{x^2-8x+9}{x-5}$. (d) $y = \sqrt{2x-x^2}$. (e) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$. (f) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$.
- 12 ([Quỳ+22], 7., p. 8). Chứng minh hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .
- 13 ([Quỳ+22], 8., pp. 8–9). Chứng minh bất đẳng thức: (a) $\sin x < x, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0; \sin x > x, \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$. (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. (c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \mathbb{R}, x > 0; \sin x < x - \frac{x^3}{6}, \forall x \in \mathbb{R}, x < 0$.
- 14 ([Quỳ+22], 9., p. 9). Chứng minh: $\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 15 ([Quỳ+22], 10., p. 9). Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?

2 Maximum & Minimum of Function – GTLN & GTNN của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §2, pp. 15–20]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

16 ([Quỳ+22], VD1, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

17 ([Quỳ+22], H1, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.

18 ([Quỳ+22], VD2, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$.

19 ([Quỳ+22], VD3, p. 16). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

20 ([Quỳ+22], H2, p. 16). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x - 3$.

21 ([Quỳ+22], 11., pp. 16–17). Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$. (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (d) $f(x) = |x|(x + 2)$. (e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2$. (f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

22 ([Quỳ+22], 12., p. 17). Tìm cực trị của hàm số: (a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$. (b) $y = \sqrt{8 - x^2}$. (c) $y = x - \sin 2x + 2$. (d) $y = 3 - 2 \cos x - \cos 2x$.

23 ([Quỳ+22], 13., p. 17). Tìm 4 hệ số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$, & đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.

24 ([Quỳ+22], 14., p. 17). Xác định 3 hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ & đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1, 0)$.

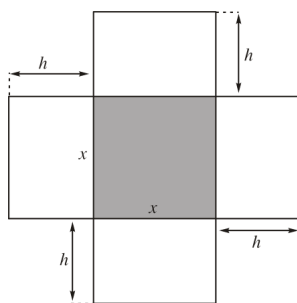
25 ([Quỳ+22], 15., p. 17). Chứng minh với mọi giá trị của m , hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại & cực tiểu.

26 ([Quỳ+22], VD1, p. 18). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

27 ([Quỳ+22], VD2, p. 19). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

28 ([Quỳ+22], H, p. 19). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1, +\infty)$.

29 ([Quỳ+22], VD3, p. 20). 1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, chiều cao là h cm, & có thể tích là 500 cm^3 . (a) Biểu diễn h theo x . (b) Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x . (c) Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

30 ([Quỳ+22], VD4, p. 21). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $[0, 2]$.

31 ([Quỳ+22], 16., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

32 ([Quỳ+22], 17., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2, 3]$. (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4, 0]$. (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0, +\infty)$. (d) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2, 4]$. (e) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0, 1]$. (f) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0, 2]$.

33 ([Quỳ+22], 18., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$. (b) $\cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

34 ([Quỳ+22], 19., p. 22). Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Đặt 1 hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , 2 đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên 2 cạnh AC, AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất & tìm GTLN đó.

35 ([Quỳ+22], 20., p. 22). Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ g. Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

36 ([Quỳ+22], 21., p. 23). Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. (b) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. (c) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$. (d) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.

37 ([Quỳ+22], 22., p. 23). Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{x^2+mx-1}{x-1}$ có cực đại & cực tiểu.

38 ([Quỳ+22], 23., p. 23). Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng mg). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.

39 ([Quỳ+22], 24., p. 23). Cho parabol $(P): y = x^2$ & điểm $A(-3, 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

40 ([Quỳ+22], 25., p. 23). 1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là 1 hằng số, E được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

41 ([Quỳ+22], 26., pp. 23–24). Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0, 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . (a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600. (d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0, 25]$.

42 ([Quỳ+22], 27., p. 24). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ trên đoạn $[-3, 1]$. (b) $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. (c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. (d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

43 ([Quỳ+22], 28., p. 24). Trong các hình chữ nhật có chu vi là 40 cm, xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

3 Graph of a Function & Some Graph Transformations – Đồ Thị của Hàm Số & 1 Số Phép Biến Đổi Đồ Thị

[1] Đồ thị hàm số: Nếu f là 1 hàm số có miền xác định D (also $D_f, \text{dom}(f)$) thì đồ thị hàm số f là tập hợp các cặp sắp thứ tự $G_f := \{(x, f(x)); x \in D\}$, i.e., đồ thị của f bao gồm tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $y = f(x)$ & x thuộc vào miền xác định của f ; đôi khi cũng gọi đồ thị đó là 1 *đường cong* (curve), đặc biệt khi miền xác định là 1 khoảng, đoạn. [2]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$, $p, q \in (0, \infty)$. Phép tịnh tiến song song với trục tọa độ: Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$, xuống dưới q đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$, sang trái p đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x + p)$, sang phải p đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x - p)$. Phép đối xứng song song với trục tọa độ: Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Oy , được đồ thị hàm số $y = f(-x)$. Nếu lấy phần (G^r) của (G) nằm bên phải (right) của trục Oy hợp với ảnh của (G^r) qua phép đối xứng qua trục Oy , được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$. Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Ox , được đồ thị hàm số $y = -f(x)$. Nếu lấy phần (G^a) của (G) nằm bên trên (above) trục Ox hợp với ảnh của (G^b) – phần của (G) nằm bên dưới (below) trục Ox – qua phép đối xứng qua trục Ox , được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy : (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $M(a, b)$, với $a, b \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với trục đối xứng $d: y = ax + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị của hàm số nào?

45. Trong không gian tọa độ $Oxyz$: (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $M(a, b, c)$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $z = f(x, y)$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với mặt phẳng trục đối xứng $(P): ax + by + cz + d = 0$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $z = f(x, y)$ là đồ thị của hàm số nào?

46 (Mở rộng phép tịnh tiến & phép đối xứng cho không gian Euclid \mathbb{R}^d). Trong không gian tọa độ $d \in \mathbb{N}^*$ (d : dimension) chiều $Ox_1x_2\dots x_d$: (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $A(a_1, a_2, \dots, a_d)$, với $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, d$, của đồ thị hàm số $x_d = f(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với siêu phẳng $d-1$ -chiều trục đối xứng $H: x_n = \sum_{i=1}^{d-1} b_i x_i$, với $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, d$, của đồ thị hàm số $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{d-1})$ là đồ thị của hàm số nào?

3.1 Phép tịnh tiến hệ tọa độ

47 ([Quỳ+22], VD, p. 26). Cho đường cong (C) có phương trình: $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2, -1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong (C).

48 ([Quỳ+22], H, p. 26). (a) Tìm tọa độ đỉnh I của parabol (P) có phương trình là $y = 2x^2 - 4x$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ IXY.

49 ([Quỳ+22], 29., p. 27). Xác định đỉnh I của mỗi parabol (P) sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 3x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$. (c) $y = x - 4x^2$. (d) $y = 2x^2 - 5$.

50 ([Quỳ+22], 30., p. 27). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số đã cho biết hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong (C). (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh trên khoảng $(-\infty, 1)$ đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của (C) & trên khoảng $(1, +\infty)$ đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

Hint. Trên khoảng $(-\infty, 1)$, đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

51 ([Quỳ+22], 31., p. 27). Cho đường cong (C) có phương trình $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ & điểm $I(-2, 2)$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của (C).

52 ([Quỳ+22], 32., p. 28). Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \frac{3x-2}{x+1}$.

53 ([Quỳ+22], 33., p. 28). Cho đường cong (C) có phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x-x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ & điểm I có tọa độ (x_0, y_0) thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong (C).

54 ([Quỳ+20], VD1, p. 7). Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2; -1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

55 ([Quỳ+20], 1., p. 9). Xác định đỉnh I của mỗi parabol (P) sau đây. Viết công thức chuyển tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 4x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$. (c) $y = x - x^2$. (d) $y = x^2 + 3x + 2$.

56 ([Quỳ+20], 2., p. 9). Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số, biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C). (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty; 1)$, đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của (C) & trên khoảng $(1; +\infty)$, đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.

57 ([Quỳ+20], 3., p. 9). Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \frac{3x-1}{x+1}$. (c) $y = (x-2)^3 - 1$. (d) $y = x^3 - 3x + 2$.

58 ([Quỳ+20], 4., p. 10). Cho đường cong (C) có phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x-x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$, & điểm I có tọa độ $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến vector \vec{OI} & phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

59 ([Quỳ+20], 5., p. 10). (a) Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |x|$. (b) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm số $y = |x-3|$. (c) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.

60 ([Quỳ+20], 6., p. 10). Từ đồ thị (G) của hàm số $y = x^2 - 2x$, suy ra đồ thị hàm số: (a) $y = |x^2 - 2x|$. (b) $y = 2x^2 - 4x$. (c) $y = |x|(x-2)$.

61 ([Quỳ+20], 7., p. 10). Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, suy ra đồ thị các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin 2x$ bằng các phép biến đổi đồ thị thích hợp.

4 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §3, pp. 21–27]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. 1. 2. 3. 4. 5.

62 ([Quỳ+22], VD1, p. 31). Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

63 ([Quỳ+22], VD2, p. 31). Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

64 ([Quỳ+22], H1, p. 32). Tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{5-3x^2}{1-x^2}$.

65 ([Quỳ+22], VD3, p. 33). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$.

66 ([Quỳ+22], H1, p. 33). Chứng minh đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

67 ([Quỳ+22], VD4, p. 34). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

68 ([Quỳ+22], H3, p. 35). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x-2}$.

69 ([Quỳ+22], 34., p. 35). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{x-2}{3x+2}$. (b) $y = \frac{-2x-2}{x+3}$. (c) $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$.
(d) $y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$. (e) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$. (f) $y = \frac{x}{x^3+1}$.

70 ([Quỳ+22], 35., p. 35). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2x-1}{x^2} + x - 3$. (b) $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$. (c) $y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$.
(d) $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$.

71 ([Quỳ+22], 36., p. 36). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \sqrt{x^2-1}$. (b) $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. (c) $y = x + \sqrt{x^2+1}$.
(d) $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

72 ([Quỳ+22], 37., p. 36). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = x + \sqrt{x^2-1}$. (b) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$. (c) $y = \sqrt{x^2+4}$. (d) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

73 ([Quỳ+22], 38., p. 36). (a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị (C) của 3 hàm số $y = f_1(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-3}$,
 $y = f_2(x) = \frac{x^2+x-4}{x+2}$, $y = f_3(x) = \frac{x^2-8x+19}{x-5}$. (b) Xác định giao điểm I của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ
tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} . (c) Viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là
tâm đối xứng của đường cong (C).

74 ([Quỳ+20], VD1, p. 12). Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

75 ([Quỳ+20], VD2, p. 12). Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

76 ([Quỳ+20], H1, p. 13). Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x^2}{1-x^2}$.

77 ([Quỳ+20], VD3, p. 14). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + \frac{x}{x^2+1}$.

78 ([Quỳ+20], H1, p. 14). Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$.

79 ([Quỳ+20], VD4, p. 15). Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

80 ([Quỳ+20], 8., p. 15). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$. (b) $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$. (c) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$.
(d) $y = \frac{x^2-3x+5}{2x+1}$. (e) $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$. (f) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

81 ([Quỳ+20], 9., p. 15). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \sqrt{x^2-1}$. (b) $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. (c) $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

82 ([Quỳ+20], 10., p. 15). Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. (b) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$. (c) $y = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

83 ([Quỳ+20], 11., p. 16). (a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. (b) Xác định giao điểm I của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector \vec{OI} . (c) Viết phương trình đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).

84 ([Quỳ+20], 12., p. 16). Cho (C_m) là đường cong có phương trình $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$. (a) Tìm m để tiệm cận xiên của (C_m) đi qua $A(1; 1)$. (b) Tìm m để giao điểm của 2 tiệm cận nằm trên đường cong $(P): y = x^2 + 3$.

85 ([Quỳ+20], 13., p. 16). Cho $(C): y = \frac{x^2 + x}{x - 2}$. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M bất kỳ trên (C) đến 2 tiệm cận của (C) bằng 1 hằng số.

86 ([Quỳ+20], 14., p. 16). Tìm những điểm trên đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

5 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §4, pp. 28–44]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

87 ([Quỳ+22], VD1, p. 37). Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$.

5.1 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức

Dạng toán 2. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ với hàm số f cho trước có thể chứa tham số.

88 ([Quỳ+20], VD1, p. 17). Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

5.1.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 1 $y = ax + b$, $a \neq 0$

89. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc nhất $y = f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

5.1.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 2 $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

90. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số / tam thức bậc 2 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

5.1.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

91. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 3 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

92 ([Quỳ+20], VD2, p. 19). Cho hàm số bậc 3 $y = x^3 - 3x^2 + mx$ với m là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số có điểm cực đại, cực tiểu. Trong trường hợp đó, viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.

93 ([Quỳ+20], 15., p. 22). (a) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có 2 điểm cực trị là $(1; -7)$, $(2, -8)$. Xác định $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. (b) Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ luôn cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại đúng 2 điểm phân biệt với mọi giá trị m .

94 ([Quỳ+20], 16., p. 23). Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ với m là tham số thực. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

95 ([Quỳ+20], 18., p. 23). Cho hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m - 1)x - 1$ với m là tham số. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$. (b) Xác định tất cả các giá trị m để hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

96 ([Quỳ+20], 19., p. 23). Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số (C). (b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1; -13)$.

97 ([Quỳ+20], 20., p. 23). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ với tham số m . (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho khi $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

5.1.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$

98. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

99 ([Quỳ+20], VD3, p. 19). Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C_m) với m là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$. (b) Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng 32.

100 ([Quỳ+20], 17., p. 23). Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số trên. (b) Dựa vào đồ thị trên, biện luận theo m số nghiệm của phương trình lượng giác $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$.

101 ([Quỳ+20], 21., p. 23). Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị (C). (b) Trên đồ thị (C) lấy 2 điểm phân biệt là A & B có hoành độ lần lượt là a, b . Tìm điều kiện của a, b để tiếp tuyến tại (C) tại các điểm A & B song song với nhau.

5.1.5 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ [\star]

102 (\star). Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4 $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.

5.2 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ

5.2.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

103. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

104 ([Quỳ+20], VD1, p. 24). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số. (b) Gọi M là 1 điểm di động trên (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt 2 đường tiệm cận tại A & B . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn AB .

105 ([Quỳ+20], 22., p. 29). Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ac \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ có tâm đối xứng là $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$ & đi qua góc tọa độ. Xác định tung độ của điểm có hoành độ là 1 thuộc đồ thị.

106 ([Quỳ+20], 23., p. 29). (a) Chứng minh rằng $\forall m \neq 1$ thì đồ thị của hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ luôn tiếp xúc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. (b) Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x + 2m+2}{x+2}$ tiếp xúc với đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2 - 8x$.

107 ([Quỳ+20], 25., pp. 29–30). Cho hàm số $y = \frac{x}{4(x-3)}$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị của hàm số đã cho. (b) Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại 2 điểm A, B & diện tích ΔOAB là $\frac{3}{8}$.

108 ([Quỳ+20], 26., p. 30). Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x+3}$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Với mỗi điểm M bất kỳ thuộc (C), tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ M đến 2 trục tọa độ.

5.2.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & tử thức \nmid mẫu thức

109. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & tử thức không chia hết cho mẫu thức.

110 ([Quỳ+20], VD2, p. 27). Cho hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Biết rằng A & B là 2 điểm phân biệt trên đồ thị sao cho tiếp tuyến tại 2 điểm này song song với nhau. Chứng minh rằng A, B đối xứng với nhau qua tâm đối xứng của đồ thị (C).

111 ([Quỳ+20], 27., p. 30). Cho hàm số $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Tìm tọa độ điểm M thuộc đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận nhỏ nhất.

5.2.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & mẫu thức \nmid tử thức

112. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, & mẫu thức không chia hết cho tử thức.

5.2.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung

113. Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, & tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung.

114 ([Quỳ+20], 24., p. 29). (a) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$ trong đó $p \neq 0$, $p^2 + q^2 = 1$. Tìm tất cả các giá trị p, q sao cho khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là $\sqrt{10}$. (b) Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$ luôn có 2 điểm cực trị & khoảng cách giữa chúng không đổi.

5.2.5 Miscellaneous

115 ([Quỳ+20], 28., p. 30). Cho hàm số $y = \frac{(x-1)^3 + a + 1}{x}$. (a) Tìm các giá trị của a để đồ thị của hàm số có 3 cực trị & chứng minh rằng với các giá trị đó thì các cực trị này sẽ nằm trên 1 parabol cố định. (b) Chứng minh rằng $\forall a \in \mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+x+1}$ luôn có 3 điểm uốn thẳng hàng.

5.3 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị

5.3.1 Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị hàm số

116 ([Quỳ+20], VD1, p. 31). Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

117 ([Quỳ+20], VD2, p. 31). Chứng minh rằng $\forall a \in \mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ luôn có 3 điểm thẳng hàng.

5.3.2 Họ đường cong phụ thuộc tham số

118 ([Quỳ+20], VD3, p. 32). Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$ (C_m). (a) Tìm điểm cố định của họ (C_m) khi m thay đổi. (b) Tìm m để (C_m) cắt $y = 0$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

119 ([Quỳ+20], VD4, p. 33). Cho hàm số $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$ (C_m). (a) Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, (C_m) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng. (b) Với giá trị nào của m thì (C_m) có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa 3 điểm cố định nói trong câu (a).

120 ([Quỳ+20], VD5, p. 34). Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x + m}$ ($m \neq 0$). Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng mà đồ thị không thể đi qua khi m thay đổi.

121 ([Quỳ+20], VD6, p. 35). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1 - m^2$ (C_m). Tìm m để (C_m) có 2 điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

122 ([Quỳ+20], VD7, p. 35). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng (d): $x - 2y - 5 = 0$.

123 ([Quỳ+20], VD8, p. 36). Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm phương trình đường cong (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng (d) có phương trình $y = 2$.

5.3.3 Ứng dụng đồ thị hàm số trong các bài toán biện luận số nghiệm của phương trình

124 ([Quỳ+20], VD9, p. 36). Biện luận số nghiệm của phương trình sau theo tham số m : $x^3 - 3x + 2 = m$.

125 ([Quỳ+20], VD10, p. 37). Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $4|x|^3 - 3|x| = m$.

126 ([Quỳ+20], VD11, p. 37). Tìm m để phương trình sau có 1 nghiệm duy nhất: $x^3 - x^2 = mx - 1$.

127 ([Quỳ+20], H3, p. 38). Tìm tất cả các giá trị m sao cho phương trình $x^3 - x^2 = (m^2 + m)x - 1$ có nghiệm duy nhất.

128 ([Quỳ+20], 29., p. 39). Cho (C_m) có phương trình $y = x^3 + (m-1)x - (m+3)x - 1$. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$. (b) Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị. (c) Tìm những cặp điểm nguyên trên (C) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ & không nằm trên đường thẳng đó.

129 ([Quỳ+20], 30., p. 39). Cho họ đường cong (C_m): $y = \frac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$. (b) Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị hàm số. (c) Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng 2 đường của họ (C_m) đi qua.

130 ([Quỳ+20], 31., p. 39). Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). (a) Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua 1 điểm cố định khi m thay đổi. (b) Tìm m sao cho (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

131 ([Quỳ+20], 32., p. 39). Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ (C). (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị (C). (b) Tìm 2 điểm $A, B \in (C)$ & đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x - 1$.

132 ([Quỳ+20], 33., p. 39). Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (6-m)x + 4}{mx + 2}$. Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định duy nhất. Xác định tọa độ của điểm đó.

133 ([Quỳ+20], 34., p. 39). Cho hàm số $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho. (b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{(x-1)^2}{|x+2|} = m$.

134 ([Quỳ+20], 35., p. 39). Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $4|x|^3 - 3|x| - 1 = mx - m$.

6 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCI, pp. 45–48]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Tài liệu

- [Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.
- [Quỳ+22] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng. *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 231.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 95.