

Problem: Algebraic & Rational Fractions

Bài Tập: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 23 tháng 11 năm 2023

Mục lục

1	Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	1
2	Operations \pm on Algebraic Fractions – Phép \pm Các Phân Thức Đại Số	3
3	Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số	4
4	Miscellaneous	4
	Tài liệu	4

1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

1 ([Tuy23], VD20, p. 28). (a) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$. Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$. (b) Cho $a, b, c, d, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \alpha$. Rút gọn phân thức $B = \frac{ax^2 + bxy + ay^2}{cx^2 + dxy + cy^2}$.

2 ([Tuy23], 141., p. 29). So sánh: (a) $\frac{201 - 200}{201 + 200}$ & $\frac{201^2 - 200^2}{201^2 + 200^2}$. (b) $\frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$ & $\frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$.

3 (Mở rộng [Tuy23], 141a., p. 29). Biện luận theo các tham số $a, b \in \mathbb{R}$ để so sánh $A = \frac{a - b}{a + b}$ & $B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

4 ([Tuy23], 142., p. 29). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$: (a) $A = \frac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}$ không tối giản. (b) $B = \frac{6n + 1}{8n + 1}$ tối giản. (c) $C = \frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản. (d) Có thể mở rộng từ \mathbb{N} lên \mathbb{Z} được không?

5 ([Tuy23], 143., p. 29). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a) $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$. (b) $B = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1)$.

Rút gọn phân thức:

6 ([Tuy23], 144., p. 29). (a) $A = \frac{n!}{(n - 1)!(n + 1)}$. (b) $\frac{(n + 1)! - n!}{(n + 1)! + n!}$.

7 ([Tuy23], 145., p. 29). (a) $A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2y^2 + 1}$. (b) $B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2y - x^2z + y^2z - y^3}$.

8 ([Tuy23], 146., p. 29). (a) $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$. (b) $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$. (c) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

9 ([Tuy23], 147., p. 29). (a) $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$. (b) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.

10 ([Tuy23], 148., p. 29). Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

- 11** ([Tuy23], 149., p. 30). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x + y + z = 0$. Rút gọn phân thức: (a) $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$. (b) $B = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$.
- 12** ([Tuy23], 150., p. 30). Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Rút gọn phân thức $A = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$.
- 13** ([Bin+21], VD5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau: $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2}$
 $\mathcal{E} \frac{a + b}{a - b}$ với $a \neq b$ $\mathcal{E} a \neq 3b$.
- 14** ([Bin+21], VD5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức $\frac{(3x + 2)(x + 5)}{4(3x + 2)}$ \mathcal{E} $\frac{x + 5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp sau: (a) $x \in \mathbb{N}$. (b) $x \in \mathbb{Z}$. (c) $x \in \mathbb{Q}$.
- 15** ([Bin+21], VD5.3, p. 39). So sánh $C = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$ với $D = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$.
- 16** ([Bin+21], VD5.4, p. 40). Chứng minh: $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1 + a^{2^i})$, i.e., $1 + a + a^2 + \dots + a^{63} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{32})$.
- 17** ([Bin+21], VD5.5, p. 40). Rút gọn phân thức: $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$.
- 18** ([Bin+21], VD5.6, p. 40). Rút gọn phân thức: $B = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$.
- 19** ([Bin+21], 5.1, p.. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong các trường hợp: (a) $\frac{A}{3x - 2} = \frac{15x^2 + 10x}{9x^2 - 4}$.
(b) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{A} = \frac{x - 2}{2x - 3}$. (c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + 4x + 4}{A}$. (d) $\frac{2x + 1}{x^3 + x^2 - x + 2} = \frac{A}{x^3 + 1}$.
- 20** ([Bin+21], 5.2, p.. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó \mathcal{E} có tử thức là đa thức B cho sau đây: (a) $\frac{2x - 5}{3x^2 + 4}$ $\mathcal{E} B = 2x^2 - 3x - 5$. (b) $\frac{(x + 1)(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 + 3x + 2)}$ $\mathcal{E} B = x - 2$.
- 21** ([Bin+21], 5.3, p.. 41). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$. (b) $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$. (c) $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$.
- 22** ([Bin+21], 5.4, p.. 41). Rút gọn: (a) $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$. (b) $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$. (c) $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$.
- 23** ([Bin+21], 5.5, p.. 41). Rút gọn phân thức sau:
(a) $Q = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}$. (b) $R = \frac{3x^2 + 5xy - 2y^2}{3x^2 - 7xy + 2y^2}$. (c) $S = \frac{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}{x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12}$. (d) $T = \frac{x^6 - y^6}{x^6 + 2x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^6}$.
- 24** ([Bin+21], 5.6, p.p. 41–42). Rút gọn:
(a) $A = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^4 - a^2 + 4a - 4}$. (b) $B = \frac{a^3 - 3a + 2}{2a^3 - 7a^2 + 8a - 3}$. (c) $C = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca}$. (d) $D = \frac{a^3 - 7a + 6}{a^2(a + 3)^3 - 4a(a + 3)^3 + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$.
(e) $E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}$.
- 25** ([Bin+21], 5.7, p.. 42). Rút gọn phân thức sau:
(a) $A = \frac{xy^2 - xz^2 - y^3 + yz^2}{x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)}$. (b) $B = \frac{x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)}{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}$.
- 26** ([Bin+21], 5.8, p.. 42). Rút gọn phân thức sau:
(a) $A = \frac{(x + y + z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx}{9xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3}$. (b) $B = \frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - x)^2}$. (c) $C = \frac{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}$.
- 27** ([Bin+21], 5.9, p.. 42). Rút gọn phân thức sau với $n \in \mathbb{N}^*$:
(a) $\frac{(n + 2)!}{n!(n + 2)(n + 3)}$. (b) $\frac{n!}{n! + (n - 1)!}$. (c) $\frac{(n + 3)! - (n + 2)!}{(n + 2)! + (n + 3)!}$.
- 28** ([Bin+21], 5.10, p.. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$:
(a) $\frac{3n + 2}{4n + 3}$. (b) $\frac{12n + 1}{2(10n + 1)}$. (c) $\frac{2n + 3}{2n^2 + 4n + 1}$.

29 ([Bin+21], 5.11, p.. 42). Chứng minh phân số $\frac{n^7 + 2n^2 + n + 2}{n^8 + n^2 + 2n + 2}$ không tối giản, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

30 ([Bin+21], 5.12, p.. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức: $P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$.

31 ([Bin+21], 5.13, p.. 42). Rút gọn phân thức:

(a) $\frac{|x-2| + |x-1| + x}{2x^2 - 7x + 3}$ với $x < 1$. (b) $\frac{|x-4||x-5|}{x^3 - 9x^2 + 20x}$ với $4 < x < 5$.

32 ([Bin+21], 5.14, p.. 43). Rút gọn phân thức sau:

(a) $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) + 1}{x^2 + 7x + 11}$. (b) $U = \frac{x^3 - 53x + 88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + 16}$.

33 ([Bin+21], 5.15, p.. 43). Cho $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ & $x, y, z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$.

34 ([Bin+21], 5.16, p.. 43). Cho $ax + by + cz = 0$. Rút gọn phân thức: $V = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$.

35 ([Bin+21], 5.17, p.. 43). Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh: $\frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = 3$.

36 ([Bin+21], 5.18, p.. 43). Chứng minh: $\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2zt + 2xy - t^2}{x + y - z - t} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - 2zt + 2xz - t^2}{x - y + z - t}$.

37 ([Bin+21], 5.19., p. 43). Rút gọn: $X = \frac{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4)(14^4 + 4)}{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4)(16^4 + 4)}$.

2 Operations \pm on Algebraic Fractions – Phép \pm Các Phân Thức Đại Số

38 ([Tuy22], VD17, p. 41, [Tuy23], VD21, p. 30). Tính: $A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

39 ([Tuy22], 164a., p. 43, [Tuy23], VD22, p. 31). Tính hợp lý: (a) $A(x, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (b) $A(x, 99)$.

40 ([Tuy22], VD18, p. 41). Tính: $A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$.

41 ([Tuy22], 161., p. 42, [Tuy23], 151., pp. 31–32). Tính: (a) $\frac{x^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{(x^2 - y^2)(x+y)}$. (b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$. (c) Mở rộng kết quả này.

42 ([Tuy22], 163., pp. 42–43, [Tuy23], 152., p. 32). Tính: (a) $A = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} + \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$. (b) $B = \frac{yz}{(x+y)(y+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

43 ([Tuy22], 164b., p. 43, [Tuy23], 153., p. 32). (a) Tính $A = \frac{a}{x^2 + ax} + \frac{a}{x^2 + 3ax + 2a^2} + \frac{a}{x^2 + 5ax + 6a^2} + \dots + \frac{a}{x^2 + 19ax + 90a^2} + \frac{1}{x + 10a}$. (b) Mở rộng kết quả này.

44 ([Tuy22], 162., p. 42). Tính: (a) $\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$. (b) $\frac{1}{(y-z)(x^2 + xz - y^2 - yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2 + xy - z^2 - zx)} + \frac{1}{(x-y)(z^2 + yz - x^2 - xy)}$.

45 ([Tuy22], 165., p. 43, [Tuy23], 154., p. 32). Cho $A = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{xy} + \frac{(x+1)(y+1)}{xyz} + \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyzt}$. Chứng minh có thể viết A dưới dạng 1 phân thức có tử & mẫu đều là tích của 4 nhân tử.

46 ([Tuy22], 167., p. 43). Cho $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Tính $x^2 + y^2 + z^2$.

47 ([Tuy22], 166., p. 43, [Tuy23], 155., p. 32). Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Tính $S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

48 ([Tuy22], 168., p. 43, [Tuy23], 156., p. 32). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, $x + y + z = 0$. Tính: (a) $A = \frac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{y^2}{y^2 - z^2 - x^2} + \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2}$. (b) $B = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2}$.

49 ([Tuy22], 169., p. 43, [Tuy23], 157., p. 32). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$. Chứng minh trong 3 số x, y, z tồn tại 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.

50 ([Tuy22], 170., p. 43, [Tuy23], 159., p. 32). Cho $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính AB .

51 ([Tuy23], 159., p. 32). 1 tổ dự định sản xuất x sản phẩm trong 12 giờ. Nhưng thực tế trong 9 giờ tổ đã sản xuất vượt mức dự định là 3 sản phẩm. Viết biểu thức biểu diễn số sản phẩm đó tổ đó sản xuất vượt dự định trong mỗi giờ.

3 Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số

4 Miscellaneous

Tài liệu

- [Bìn+21] Vũ Hữu Bình, Trần Hữu Nam, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2021, p. 264.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 326.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.