

# Problem: Circle – Bài Tập: Đường Tròn

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 14 tháng 3 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

Latest version:

- *Problem: Circle – Bài Tập: Đường Tròn.*  
URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/circle/problem/NQBH\\_circle\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf).
- *Problem & Solution: Circle – Bài Tập & Lời Giải: Đường Tròn.*  
URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/circle/solution/NQBH\\_circle\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/solution/NQBH_circle_solution.pdf).

## Mục lục

1	Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn . . . . .	2
2	Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây . . . . .	4
3	Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn . . . . .	6
4	Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn . . . . .	10
5	Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau . . . . .	14
6	Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác . . . . .	14
7	Đường Tròn Bàng Tiếp Tam Giác . . . . .	16
8	Đường Tròn & Phép Vị Tự . . . . .	16
9	Dựng Hình . . . . .	16
10	Toán Cực Trị 1 . . . . .	18
11	Góc ở Tâm. Số Đo Cung. Liên Hệ Giữa Cung & Dây . . . . .	19
12	Góc Nội Tiếp . . . . .	20
13	Góc Tạo Bởi Tia Tiếp Tuyến & Dây Cung . . . . .	22
14	Góc Có Đỉnh Ở Bên Trong, Bên Ngoài Đường Tròn . . . . .	24
15	Cung Chứa Góc . . . . .	25
16	Tứ Giác Nội Tiếp . . . . .	26
17	Hệ Điểm Đồng Viên . . . . .	31
	17.1 Chứng minh hệ điểm cách đều 1 điểm . . . . .	31
	17.2 Sử dụng quỹ tích cung chứa góc . . . . .	32
	17.3 Dựa vào sự xác định đường tròn để chứng minh hệ điểm đồng viên . . . . .	33
18	Đường Tròn Ngoại Tiếp, Nội Tiếp Đa Giác . . . . .	33
19	Độ Dài Đường Tròn, Cung Tròn. Diện Tích Hình Tròn, Hình Quạt Tròn . . . . .	34

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

20 Quy Tích . . . . .	37
21 Dựng Hình . . . . .	38
22 Toán Cực Trị 2 . . . . .	39
23 Miscellaneous . . . . .	40
Tài liệu . . . . .	42

## 1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

- 1 ([BBN23a], p. 99). Tại sao các nan hoa của bánh xe đạp dài bằng nhau?
- 2 ([BBN23a], H1, p. 101). Có bao nhiêu đường tròn bán kính  $R$  đi qua 1 điểm cho trước? Tâm các đường tròn đó nằm ở đâu?
- 3 ([BBN23a], H2, p. 101). Qua 3 điểm bất kỳ có luôn vẽ được 1 đường tròn?
- 4 ([BBN23a], H3, p. 101). Vẽ đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm đường kính.
- 5 ([BBN23a], H4, p. 101). Tính đường kính các đường tròn  $(O; 2R), (O; aR), \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ .
- 6 ([BBN23a], H5, p. 101). Đ/S? (a) Dây vuông góc với đường kính thì bị đường kính chia làm đôi. (b) Dây vuông góc với đường kính thì chia đôi đường kính. (c) Đường kính đi qua trung điểm 1 dây thì vuông góc với dây ấy. (d) Đường trung trực của 1 dây là trục đối xứng của đường tròn.
- 7 ([BBN23a], VD1, p. 101). Chứng minh: (a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Nếu 1 tam giác có 1 cạnh là đường kính đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông (đường kính là cạnh huyền). (c) Các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn.
- 8 ([BBN23a], VD2, p. 102). Khi nào thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm: (a) trong tam giác? (b) ngoài tam giác?
- 9 ([BBN23a], VD3, p. 102). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 13$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CA = 12$  cm. Tìm tâm  $\mathcal{O}$  tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 10 ([BBN23a], VD4, p. 103). Cho đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $M$  bất kỳ. Chứng minh  $M$  nằm trong đường tròn khi & chỉ khi  $\widehat{AMB} > 90^\circ$ .
- 11 ([BBN23a], VD5, p. 103). Cho đường tròn  $(O; R)$  & 2 điểm  $A, B$  nằm trong đường tròn. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn  $(C)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  & nằm hoàn toàn bên trong  $(O)$ .
- 12 ([BBN23a], VD6, p. 103). Có 1 miếng bìa hình tròn bị khoét đi 1 lỗ thủng cũng hình tròn. Dùng kéo cắt (theo 1 đường thẳng) để chia đôi miếng bìa đó.
- 13 ([BBN23a], VD7, p. 104). Cho đoạn thẳng  $AB$ , điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$ . Dựng 2 đường tròn đường kính  $AB$  & đường kính  $BM$ . 1 đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AB$  tại  $N$  cắt đường tròn đường kính  $AB$  tại  $E, F$ , cắt đường tròn đường kính  $BM$  tại  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $EP = FQ$ . (b)  $\widehat{BMP} > \widehat{BAE}$ .
- 14 ([BBN23a], VD8, p. 104). Cho đường tròn  $(O; R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Dựng qua  $A$  cát tuyến cắt đường tròn tại  $B, C$  sao cho  $B$  là trung điểm  $AC$ .
- 15 ([BBN23a], VD9, p. 105). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$ , 2 dây  $AB \parallel CD$ . (a) Chứng minh  $AC = BD, AD = BC$ . (b) Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $AC$  biết khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$  là 2 cm, khoảng cách từ  $O$  đến  $CD$  là 4 cm.
- 16 ([BBN23a], 4.1., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Trên tia  $AM$  lấy 3 điểm  $D, E, F$  sao cho  $AD = 9$  cm,  $AE = 11$  cm,  $AF = 10$  cm. Tìm vị trí của mỗi điểm  $D, E, F$  đối với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 17 ([BBN23a], 4.2., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Từ điểm  $M$  bất kỳ trên cạnh  $BC$  kẻ  $MD \perp AB, ME \perp AC$ . Chứng minh 5 điểm  $A, D, M, H, E$  đồng viên
- 18 ([BBN23a], 4.3., p. 106). Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ . So sánh  $AC, BD$ .
- 19 ([BBN23a], 4.4., p. 106). Cho đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C, D$  là 2 điểm khác nhau thuộc đường tròn,  $C, D$  không trùng với  $A, B$ . 2 điểm  $E, F$  thuộc đường tròn sao cho  $CE \perp AB, DF \perp AB$ . Chứng minh  $CF, ED, AB$  đồng quy.
- 20 ([BBN23a], 4.5., p. 106). Cho đường tròn  $(O; R)$  & dây  $AB = 2a, a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính  $AD$  theo  $a, R$ .
- 21 ([BBN23a], 4.6., p. 106). Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BD, DC, CA$ . Chứng minh  $M, N, P, Q$  đồng viên

- 22 ([BBN23a], 4.7., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AH$  cắt  $(O)$  ở  $D$ . Biết  $BC = 24$ ,  $AC = 20$ . Tính chiều cao  $AH$  & bán kính  $(O)$ .
- 23 ([BBN23a], 4.8., p. 106). Cho đường tròn  $(O; R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACD}$ .
- 24 ([BBN23a], 4.9., p. 106). Cho đường tròn  $(O; R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Tìm vị trí của điểm  $M$  trên đường tròn sao cho đoạn  $MA$  là ngắn nhất, dài nhất.
- 25 ([BBN23a], 4.10., p. 107). Cho đường tròn  $(O; R)$  & điểm  $P$  nằm bên trong nó. 2 dây  $AB, CD$  thay đổi luôn đi qua  $P$  & vuông góc với nhau. Chứng minh  $AB^2 + CD^2$  là đại lượng không đổi.
- 26 ([BBN23a], 4.11., p. 107). Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường kính  $AB$ ,  $E$  là điểm nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cdot AC + BE \cdot BD = 4R^2$ .
- 27 ([BBN23a], 4.12., p. 107). Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .
- 28 ([BBN23a], 4.13., p. 107). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  & điểm  $M$  nằm trong nửa đường tròn. Chỉ bằng thước kẻ, dựng qua  $M$  đường thẳng vuông góc với  $AB$ .
- 29 ([Tuy23], VD5, pp. 113–114). Trên đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$  lấy 1 điểm  $C$ . Trên tia  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $C$  là trung điểm  $AM$ . (a) Tìm vị trí của điểm  $C$  để  $AM$  lớn nhất. (b) Tìm vị trí của điểm  $C$  để  $AM = 2R\sqrt{3}$ . (c) Chứng minh khi  $C$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $M$  di động trên 1 đường tròn cố định.
- 30 ([Tuy23], 36., p. 114). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH = BC = a$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 31 ([Tuy23], 37., p. 114). Cho  $\triangle ABC$ .  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Chứng minh: các đường tròn  $(AFE), (BFD), (CDE)$  bằng nhau & cùng đi qua 1 điểm. Tìm điểm chung đó.
- 32 ([Tuy23], 38., p. 114). Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh 1, 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ .  $R_1$  &  $R_2$  lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các  $\triangle ABC, \triangle ABD$ . Chứng minh:  $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = 4$ .
- 33 ([Tuy23], 39., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , cạnh  $AB$  cố định, đường chéo  $AC = 2$  cm. Chứng minh điểm  $D$  di động trên 1 đường tròn cố định.
- 34 ([Tuy23], 40., p. 115). Cho đường tròn  $(O; R)$  & 1 dây  $BC$  cố định. Trên đường tròn lấy 1 điểm  $A$  ( $A \neq B, A \neq C$ ).  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Chứng minh khi  $A$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $G$  di động trên 1 đường tròn cố định.
- 35 ([Tuy23], 41., p. 115). Trong mặt phẳng cho  $2n + 1$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ , sao cho 3 điểm bất kỳ nào cũng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh: trong các điểm này có ít nhất  $n + 1$  điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.
- 36 ([Tuy23], 42., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  cắt các đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt ở  $M, N, P, Q$ . Tìm dạng của tứ giác  $MNPQ$ .
- 37 ([Tuy23], 43., p. 115). 2 người chơi 1 trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt đặt lên 1 chiếc bàn hình tròn 1 cái cốc. Ai là người cuối cùng đặt được cốc lên bàn thì người đó thắng cuộc. Muốn chắc thắng thì phải chơi theo “chiến thuật” nào? (các chiếc cốc đều như nhau).
- 38 ([Bin23a], VD8, p. 95). Cho hình thang cân  $ABCD$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.
- 39 ([Bin23a], 50., p. 95). (a) Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $AC = 40$  cm,  $BC = 48$  cm. Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $BC$ . (b) Mở rộng cho  $AC = b, BC = a$ .
- 40 ([Bin23a], 51., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , cạnh bên bằng  $b$ , đường cao  $AH = h$ . Tính bán kính đường tròn  $(O)$ .
- 41 ([Bin23a], 52., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $M$  là trung điểm  $BC$ . Giả sử  $O$  nằm trong  $\triangle AMC$  hoặc  $O$  nằm giữa  $A$  &  $M$ .  $I$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh: (a) Chu vi  $\triangle IMC$  lớn hơn  $2R$ . (b) Chu vi  $\triangle ABC$  lớn hơn  $4R$ .
- 42 ([Bin23a], 53., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Kẻ 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  sao cho  $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$ . Chứng minh 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  đồng quy.
- 43 ([Bin23a], 54., p. 96). Cho 3 điểm  $A, B, C$  bất kỳ & đường tròn  $(O; 1)$ . Chứng minh tồn tại 1 điểm  $M$  nằm trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $MA + MB + MC \geq 3$ .
- 44 ([Bin+23], VD1, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, BD$ . Chứng minh  $AC \parallel BD \Leftrightarrow CD$  là đường kính.
- 45 ([Bin+23], VD2, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  song song với nhau.  $E, F$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $E, F, O$  thẳng hàng.
- 46 ([Bin+23], VD3, p. 20). Dựng 1 đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm dây cung có bán kính  $r$  cho trước.

- 47 ([Bin+23], VD4, p. 21). Cho đường tròn  $(O; R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$ .
- 48 ([Bin+23], VD5, p. 21). Cho  $\triangle ABC$ . Từ trung điểm 3 cạnh kẻ các đường vuông góc với 2 cạnh kia tạo thành 1 lục giác. Chứng minh diện tích  $\triangle ABC$  gấp 2 lần diện tích lục giác.
- 49 ([Bin+23], VD6, p. 21). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn.  $H, E$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$ .
- 50 ([Bin+23], VD7, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  nằm trong đường tròn,  $A \neq O$ . Tìm trên đường tròn điểm  $M$  sao cho  $\widehat{OMA}$  lớn nhất.
- 51 ([Bin+23], VD8, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$ ,  $A, B, C$  là 3 điểm trên đường tròn sao cho  $AB = AC$ .  $I$  là trung điểm  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .
- 52 ([Bin+23], VD9, p. 23). Dựng  $\triangle ABC$ . Biết  $\widehat{A} = \alpha < 90^\circ$ , đường cao  $BH = h$  & trung tuyến  $CM = m$ .
- 53 ([Bin+23], VD10, p. 23). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O; r)$ ,  $AB = r\sqrt{3}$ ,  $AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 54 ([Bin+23], VD11, p. 23). Cho đoạn thẳng  $BC$  cố định,  $I$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $A$  trên mặt phẳng sao cho  $AB = BC$ .  $H$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $AI$  cắt đường thẳng  $BH$  tại  $M$ . Chứng minh  $M$  nằm trên 1 đường tròn cố định khi  $A$  thay đổi.
- 55 ([Bin+23], VD12, p. 24). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , kẻ  $BH \perp AC$ . Trên cạnh  $AC, CD$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{CD}$ . Chứng minh  $B, C, M, N$  nằm trên 1 đường tròn.
- 56 ([Bin+23], VD13, p. 24). Cho đường tròn  $(O; R)$ , dây  $AB = 2a$ ,  $a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính  $AD$  theo  $a, R$ .
- 57 ([Bin+23], VD14, p. 25). Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $E$  nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cot AC + BE \cdot BD$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $E$ .
- 58 ([Bin+23], VD15, p. 25). Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .
- 59 ([Bin+23], 4.1., p. 26). Tính cạnh của tam giác đều, bát giác đều,  $n$ -giác đều nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .
- 60 ([Bin+23], 4.2., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $P$  ở trong đường tròn. Tìm dây lớn nhất & dây ngắn nhất đi qua  $P$ .
- 61 ([Bin+23], 4.3., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 bán kính  $OA, OB$  vuông góc với nhau. Kẻ tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ , cắt đường tròn ở  $D$ ,  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $AB$ , từ  $M$  kẻ  $MH \perp OB$  cắt  $OD$  tại  $K$ . Chứng minh  $MH^2 + KH^2$  có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .
- 62 ([Bin+23], 4.4., p. 26). Chứng minh bao giờ cũng chia được 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân, trong đó có 3 tam giác bằng nhau.
- 63 ([Bin+23], 4.5., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 dây cung  $EF$  có khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây là  $d$ . Dựng 2 hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn, 2 đỉnh còn lại nằm trên dây  $EF$ . Tính hiệu của 2 cạnh hình vuông đó theo  $d$ .
- 64 ([Bin+23], 4.6., p. 26). Cho 2 đường tròn đồng tâm. Dựng 1 dây cắt 2 đường tròn theo thứ tự tại  $A, B, C, D$  sao cho  $AB = BC = CD$ .
- 65 ([Bin+23], 4.7., p. 26). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ ,  $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $AC = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 66 ([Bin+23], 4.8., p. 26). Cho hình thoi  $ABCD$ .  $R_1$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $R_2$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$ . Tính cạnh của hình thoi  $ABCD$  theo  $R_1, R_2$ .
- 67 ([Bin+23], 4.9., p. 26). Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi 1 trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 điểm được tô cùng 1 màu mà khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng 1.
- 68 ([Bin+23], 4.10., p. 26). Cho đường tròn  $(O; R)$  & dây  $AB$  cố định. Từ điểm  $C$  thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành  $CABD$ . Chứng minh giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành  $CABD$  nằm trên 1 đường tròn cố định.

## 2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

- 69 ([BBN23a], H1, p. 109). Giải thích kết luận “Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn” dựa vào so sánh khoảng cách từ tâm đến dây.

- 70** ([BBN23a], H2, p. 109). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB \parallel CD$  &  $AB = CD$ ,  $A, D$  cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình gì?
- 71** ([BBN23a], H3, p. 109). Cho 1 đường tròn  $(O; R)$  & dây  $CD$  thay đổi nhưng có độ dài bằng  $a$  không đổi. Tập hợp các trung điểm dây  $CD$  là đường nào?
- 72** ([BBN23a], H4, p. 110). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$  & cát tuyến  $ABCD$ . So sánh  $AB, CD$ .
- 73** ([BBN23a], VD1, p. 110). Cho đường tròn  $(O; R)$  & 1 điểm  $M$  nằm trong đường tròn. Vẽ qua  $M$  2 dây  $AB, CD$  sao cho  $AB \perp OM$ . (a) So sánh độ dài 2 dây  $AB, CD$ . (b) Chứng minh  $\widehat{ODM} < \widehat{OBM}$ . (c) Tìm vị trí của dây đi qua  $M$  sao cho độ dài của nó là nhỏ nhất, lớn nhất.
- 74** ([BBN23a], VD2, p. 111). Cho 2 dây  $MN, EF$  bằng nhau & cắt nhau tại 1 điểm  $A$  nằm trong đường tròn  $(O; R)$ . Chứng minh  $EM = FN$  hoặc  $EN = FM$ .
- 75** ([BBN23a], VD3, p. 111). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy 2 điểm  $C, D$  sao cho  $AC = BD$ . Từ  $C, D$  kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại  $M, N$ . (a) Chứng minh tứ giác  $CMND$  là hình thang vuông. (b) Tìm vị trí của  $M, N$  để  $CM + DN$  nhỏ nhất.
- 76** ([BBN23a], VD4, p. 112). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn.  $H, E$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh:  $AB < CD \Leftrightarrow HM < EM$ .
- 77** ([BBN23a], 5.1., p. 112). Cho đường tròn  $(O)$  có tâm  $O$  nằm trên đường phân giác  $\widehat{xIy}$ ,  $(O)$  cắt tia  $Ix$  ở  $A, B$  sao cho  $A$  nằm giữa  $B, I$ , cắt tia  $Iy$  ở  $C, D$  sao cho  $C$  nằm giữa  $D, I$ . Chứng minh: (a)  $AB = CD$ . (b)  $IA = IC, IB = ID$ .
- 78** ([BBN23a], 5.2., p. 112). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$ , bán kính  $r_1 > r_2$ . Từ điểm  $M$  trên  $(O; r_1)$  vẽ 2 dây  $ME, MF$  theo thứ tự cắt  $(O; r_2)$  tại  $A, B$  &  $C, D$ .  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Biết  $AB > CD$ . So sánh: (a)  $ME, MF$ . (b)  $MH, MK$ .
- 79** ([BBN23a], 5.3., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính 5 cm & dây  $AB = 8$  cm. (a) Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$ . (b) Lấy điểm  $I$  trên dây  $AB$  sao cho  $AI = 1$  cm. Kẻ dây  $CD$  đi qua  $I$  & vuông góc với  $AB$ . Chứng minh  $AB = CD$ .
- 80** ([BBN23a], 5.4., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$ . 2 đường vuông góc với  $CD$  tại  $C, D$  tương ứng cắt  $AB$  ở  $M, N$ . Chứng minh  $AM = BN$ .
- 81** ([BBN23a], 5.5., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  bằng nhau & cắt nhau tại điểm  $I$  nằm trong đường tròn. Chứng minh: (a)  $IO$  là tia phân giác của 1 trong 2 góc tạo bởi 2 đường thẳng  $AB, CD$ . (b) Điểm  $I$  chia  $AB, CD$  thành 2 cặp đoạn thẳng bằng nhau đôi một.
- 82** ([BBN23a], 5.6., p. 113). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$  & 2 dây  $AB = 8, CD = 10$ .  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $CD$ . (a) So sánh  $\widehat{OMN}, \widehat{ONM}$  trong trường hợp 2 dây  $AB, CD$  không song song. (b) So sánh diện tích  $\triangle OCD, \triangle OAB$ .
- 83** ([BBN23a], 5.7., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  tại  $I$ . Hạ  $AH, BK$  vuông góc với  $CD$ . Chứng minh  $CH = DK$ .
- 84** ([BBN23a], 5.8., p. 113). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ 2 cát tuyến  $CAF, DAE$ ,  $C, D \in (O)$ ,  $E, F \in (O')$ , sao cho  $\widehat{CAB} = \widehat{EAB}$ . Chứng minh  $CF = DE$ .
- 85** ([BBN23a], 5.9., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $I$  là trung điểm của  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .
- 86** ([BBN23a], 5.10., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O; r)$  biết  $AB = r\sqrt{3}, AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 87** ([Bin23a], VD9, p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ .  $D, E$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $AB, AC$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $DE$  lớn nhất.
- 88** ([Bin23a], VD10, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính  $OA = 11$  cm. Điểm  $M$  thuộc bán kính  $OA$  & cách  $O$  7 cm. Qua  $M$  kẻ dây  $CD$  dài 18 cm. Tính  $MC, MD$  với  $MC < MD$ .
- 89** ([Bin23a], VD11, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính 15 cm, điểm  $M$  cách  $O$  9 cm. (a) Dựng dây  $AB$  đi qua  $M$  & dài 26 cm. (b) Có bao nhiêu dây đi qua  $M$  & có độ dài là 1 số nguyên cm?
- 90** ([Bin23a], 55., p. 98). Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ . (a) Chứng minh  $AC \leq BD$ . (b) Trong trường hợp nào thì  $AC = BD$ ?
- 91** ([Bin23a], 56., p. 98). Cho  $(O)$  đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, AD$ . Điểm  $E$  bất kỳ trên đường tròn,  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  trên  $AC, AD$ . Chứng minh  $HK \leq AB$ .
- 92** ([Bin23a], 57., p. 98). Cho  $(O)$ , dây  $AB = 24$  cm, dây  $AC = 20$  cm ( $\widehat{BAC} < 90^\circ$  & điểm  $O$  nằm trong  $\widehat{BAC}$ ).  $M$  là trung điểm  $AC$ . Khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  bằng 8 cm. (a) Chứng minh  $\triangle ABC$  cân tại  $C$ . (b) Tính bán kính đường tròn.
- 93** ([Bin23a], 58., p. 98). Cho  $(O)$  bán kính 5 cm, 2 dây  $AB$  &  $CD$  song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng 8 cm & 6 cm. Tính khoảng cách giữa 2 dây.



- 94 ([Bin23a], 59., p. 98). Cho  $(O)$ , đường kính  $AB = 13$  cm. Dây  $CD$  dài 12 cm vuông góc với  $AB$  tại  $H$ . (a) Tính  $AH, BH$ . (b)  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AC, BC$ . Tính diện tích tứ giác  $CMHN$ .
- 95 ([Bin23a], 60., p. 99). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$ .  $H, K$  lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ  $A, B$  đến  $CD$ . (a) Chứng minh  $CH = DK$ . (b) Chứng minh  $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$ . (c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác  $AHKB$  biết  $AB = 30$  cm,  $CD = 18$  cm.
- 96 ([Bin23a], 61., p. 99). Cho  $\triangle ABC$ , 3 đường cao  $AD, BE, CF$ . Đường tròn đi qua  $D, E, F$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt ở  $M, N, P$ . Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ  $M$  vuông góc với  $BC$ , kẻ từ  $N$  vuông góc với  $AC$ , kẻ từ  $P$  vuông góc với  $AB$  đồng quy.
- 97 ([Bin23a], 62., p. 99).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp  $(O)$ .  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trọng tâm của  $\triangle ACD$ . Chứng minh  $OE \perp CD$ .

### 3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

- 98 ([BBN23a], H1, p. 116). Đường thẳng & đường tròn có thể có 3 điểm chung không?
- 99 ([BBN23a], H2, p. 116). Cho đường tròn  $(O, a$  cm) & 1 đường thẳng  $d$  cắt đường tròn tại 2 điểm  $A, B$ .  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm khoảng giá trị của  $OH$ .
- 100 ([BBN23a], H3, p. 116). Qua 1 điểm nằm trong đường tròn có thể kẻ được tiếp tuyến với đường tròn này không?
- 101 ([BBN23a], H4, p. 116). Qua 1 điểm ở trên đường tròn có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn đó?
- 102 ([BBN23a], H5, p. 116). Tập hợp tâm các đường tròn  $(O; R)$  tiếp xúc với đường thẳng  $d$  cố định là đường nào?
- 103 ([BBN23a], VD1, p. 116). Cho đường tròn  $(O; R)$  tiếp xúc với đường thẳng  $d$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $d$  lấy điểm  $M$ . Vẽ đường tròn  $(M, MA)$  cắt  $(O; R)$  tại điểm thứ 2 là  $B \neq A$ . Chứng minh  $MB$  là tiếp tuyến của  $(O; R)$ .
- 104 ([BBN23a], VD2, p. 117). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ , có  $I$  là trung điểm  $AB$  &  $\widehat{CID} = 90^\circ$ . Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AB$ .
- 105 ([BBN23a], VD3, p. 117). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ . Trong cùng nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với đường tròn. 1 đường thẳng  $d$  tiếp xúc với đường tròn tại  $E$ , cắt  $Ax, By$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Chứng minh tích  $AM \cdot BN$  không đổi khi  $d$  thay đổi. (b) Tìm vị trí của  $d$  để  $AM + BN$  nhỏ nhất.
- 106 ([BBN23a], VD4, p. 118). Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Giả sử  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh  $S_{ABC} = BD \cdot CD$ .
- 107 ([BBN23a], VD5, p. 118). Cho tứ giác  $ABCD$  có tất cả các cạnh tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ , đồng thời tất cả các cạnh kéo dài của nó tiếp xúc với đường tròn  $(O')$ . Chứng minh 2 đường chéo của tứ giác  $ABCD$  vuông góc với nhau.
- 108 ([BBN23a], VD6, p. 118). Cho hình vuông  $ABCD$ . Tia  $Ax$  quay xung quanh  $A$ , luôn nằm trong  $\widehat{BAD}$ . 2 tia phân giác của  $\widehat{BAx}, \widehat{DAx}$  lần lượt cắt  $BC, CD$  tại  $M, N$ . Chứng minh  $MN$  luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.
- 109 ([BBN23a], VD7, p. 119). Cho đường tròn  $(O, 5$  cm) & 1 điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Vẽ 1 cát tuyến đi qua  $A$ , cắt đường tròn theo 1 dây dài 8 cm.
- 110 ([BBN23a], VD8, p. 119). Trong các tam giác vuông có cùng cạnh huyền, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- 111 ([BBN23a], 6.1., p. 120). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ . 1 đường thẳng  $d$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $M$ . Từ  $A, B$  hạ  $AE, BF$  vuông góc với  $d$ ,  $E, F \in d$ . (a) Chứng minh  $AE + BF$  không đổi khi  $M$  chạy trên nửa đường tròn. (b) Kẻ  $MD \perp AB$ . Chứng minh  $MD^2 = AE \cdot BF$ . (c) Tìm vị trí của  $M$  để tích  $AE \cdot BF$  lớn nhất.
- 112 ([BBN23a], 6.2., p. 120). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O; r)$  đồng tâm,  $R > r$ . Từ điểm  $A \in (O; r)$  kẻ 2 tiếp tuyến với  $(O; r)$ , 2 tiếp điểm là  $M, N$ . 2 tiếp tuyến đó cắt  $(O; R)$  tương ứng tại  $B, C$ . (a) Chứng minh  $AB = AC$ . (b) Chứng minh  $AO \perp BC$ . (c) Tính diện tích  $\triangle ABC$  theo  $R, r$ .
- 113 ([BBN23a], 6.3., p. 120). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  khác đường kính. Tại  $A, B$  kẻ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với đường tròn. Trên  $Ax, By$  lấy lần lượt 2 điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Chứng minh hoặc  $AB \parallel MN$  hoặc  $AB$  đi qua trung điểm của  $MN$ .
- 114 ([BBN23a], 6.4., p. 120). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp & đường tròn  $(J)$  bàng tiếp trong  $\widehat{A}$  của tam giác tiếp xúc với  $BC$  theo thứ tự tại  $M, N$ . Chứng minh  $M, N$  đối xứng nhau qua trung điểm  $BC$ .
- 115 ([BBN23a], 6.5., p. 120). Cho 2 đường thẳng  $d \parallel d'$ . 1 đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $d, d'$  tương ứng tại  $C, D$ , điểm  $A$  cố định trên  $d$ , nằm ngoài  $(O)$ . Chỉ dùng êke, tìm trên  $d'$  điểm  $B$  sao cho  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 116 ([BBN23a], 6.6., p. 120). Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn,  $B, C$  là 2 tiếp điểm. 1 điểm  $M$  bất kỳ trên đường thẳng đi qua 2 trung điểm  $P, Q$  của  $AB, AC$ . Kẻ tiếp tuyến  $MK$  của  $(O)$ . Chứng minh  $MK = MA$ .

**117** ([BBN23a], 6.7., p. 121). Từ 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AM, AN$  với đường tròn,  $MO$  cắt tia  $AN$  tại  $E$ ,  $NO$  cắt tia  $AM$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $EF \parallel MN$ . (b) Biết  $OA = 7, R = 5$ , tính khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$ .

**118** ([BBN23a], 6.8., p. 121). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB = 2R$ . Điểm  $M$  di động trên nửa đường tròn đó,  $M \neq A, M \neq B$ . Vẽ đường tròn  $(M)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $H$ . Từ  $A, B$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AC, BD$  với  $(M)$ ,  $C, D$  là 2 tiếp điểm. (a) Chứng minh  $C, M, D$  thẳng hàng. (b) Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ . (c) Giả sử  $CD$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh  $OA^2 = OB^2 = OH \cdot OK$ .

**119** ([BBN23a], 6.9., p. 121). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , dây  $CD \perp OA$  tại  $H \in OA$ .  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $H$ ,  $DA'$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Chứng minh: (a)  $DI \perp BC$  và  $HI = HC$ . (b)  $HI$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $A'B$ .

**120** ([BBN23a], 6.10., p. 121). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định nằm trên đường tròn đó. Kẻ tiếp tuyến  $xAy$  với đường tròn. Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $M$ , kẻ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn. (a) Chứng minh  $M, O$ , trọng tâm, trực tâm  $\triangle AMB$  thẳng hàng. (b)  $H$  là trực tâm của  $\triangle AMB$ . Chứng minh tứ giác  $OAHB$  là hình thoi. (c) Tìm tập hợp các điểm  $H$  khi  $M$  thay đổi.

**121** ([BBN23a], 6.11., p. 121). Cho 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với đường thẳng  $xy$ ,  $AB$  không vuông góc với  $xy$ . Tìm điểm  $M \in xy$  sao cho  $MB$  là phân giác của góc giữa 2 đường thẳng  $AM, xy$ .

**122** ([BBN23a], 6.12., p. 121). Cho đường thẳng  $xy$  & 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Tìm trên  $xy$  điểm  $M$  sao cho  $\widehat{BMx} = 2\widehat{AMx}$ .

**123** ([BBN23a], 6.13., p. 121). Tứ giác  $ABCD$  có 4 cạnh tiếp xúc với 1 đường tròn & 2 đường chéo của nó vuông góc với nhau. Chứng minh 1 trong 2 đường chéo là trục đối xứng của tứ giác.

**124** ([BBN23a], 6.14., p. 121). Trong các  $\triangle ABC$  có chung đáy  $BC$  & có cùng diện tích  $S$ , tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

**125** ([BBN23a], 6.15., p. 122). Đường tròn  $(O; r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  song song với 3 cạnh của tam giác & chia tam giác thành 3 tam giác nhỏ.  $r_1, r_2, r_3$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh  $r_1 + r_2 + r_3 = r$ .

**126** ([BBN23a], 6.16., p. 122). Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc với cạnh  $AB$  tại  $D$ . Chứng minh:  $\triangle ABC$  vuông tại  $C \Leftrightarrow AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$ .

**127** ([BBN23a], 6.17., p. 122). Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các tam giác tạo bởi 2 cạnh liên tiếp & 1 đường chéo ta vẽ các đường tròn nội tiếp. Chứng minh các tiếp điểm của chúng với 2 đường chéo tạo thành 1 hình chữ nhật.

**128** ([BBN23a], 6.18., p. 122). Cho  $\widehat{xOy}$ , 2 điểm  $A, B$  theo thứ tự chuyển động trên  $Ox, Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

**129** ([BBN23a], 6.19., p. 122). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $A, B$ . 1 tiếp tuyến của  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $C, D$ ,  $C \in OA, D \in OB$ . Chứng minh:  $\frac{1}{3}(OA + OB) < CD < \frac{1}{2}(OA + OB)$ .

**130** ([BBN23a], 6.20., p. 122). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $M$  ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MA, MB$  với  $(O)$ . Vẽ đường tròn  $(M, MA)$ . (a) Chứng minh  $OA, OB$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn  $(M, MA)$ . (b) Giả sử  $OM$  cắt  $(M, MA)$  tại  $E, F$ ,  $E$  nằm giữa  $O, M$ . Chứng minh  $\widehat{OAE} = \widehat{AFM}$ .

**131** ([BBN23a], p. 123). Chứng minh: (a) Mọi đa giác đều luôn ngoại tiếp được 1 đường tròn, i.e., tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác đều. (b) Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp được 1 đường tròn  $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$ .

**132** ([Bin23a], VD12, p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ , đường cao  $AH$ . Điểm  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $H$ . Đường tròn có đường kính  $EC$  cắt  $AC$  ở  $K$ . Chứng minh  $HK$  là tiếp tuyến của đường tròn.

**133** ([Bin23a], VD13, p. 100). Cho 1 hình vuông  $8 \times 8$  gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm  $O$  của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần & che lấp hoàn toàn)?

**134** ([Bin23a], 63., pp. 100–101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn. Qua  $M$  vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn.  $D, C$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh  $M$  là trung điểm  $CD$ . (b) Chứng minh  $AB = BC + AD$ . (c) Giả sử  $\widehat{AOM} \geq \widehat{BOM}$ , gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  với nửa đường tròn. Tìm dạng của tứ giác  $BCDE$ . (d) Tìm vị trí của điểm  $M$  trên nửa đường tròn sao cho tứ giác  $ABCD$  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính  $R$  của nửa đường tròn đã cho.

**135** ([Bin23a], 64., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Tìm vị trí tương đối của đường thẳng  $AC$  với đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle BIC$ . (b)  $H$  là trung điểm  $BC$ ,  $IK$  là đường kính đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$ .

**136** ([Bin23a], 65., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $Ax$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn ( $Ax$  & nửa đường tròn nằm cùng phía đối với  $AB$ ), điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Đường thẳng qua  $O$  & vuông góc với  $AC$  cắt  $Ax$  tại  $M$ .  $I$  là giao điểm của  $MB, CH$ . Chứng minh  $IC = IH$ .

**137** ([Bin23a], 66., p. 101). Cho hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ , có  $\widehat{BMC'} = 90^\circ$  với  $M$  là trung điểm  $AD$ . Chứng minh: (a)  $AD$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $BC$ . (b)  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $AD$ .

**138** ([Bin23a], 67., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Qua trung điểm  $M$  của  $CH$ , kẻ đường vuông góc với  $OC$ , cắt nửa đường tròn tại  $D \in E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của  $(C; CD)$ .

**139** ([Bin23a], 68., p. 101). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ .  $d, d'$  lần lượt là 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của đường tròn,  $C \in d$  bất kỳ. Đường vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt  $d'$  tại  $D$ . Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**140** ([Bin23a], 69., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn. Qua  $C$  kẻ tiếp tuyến  $d$  với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia  $Ax, By$  song song với nhau, cắt  $d$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $DE$ .

**141** ([Bin23a], 70., pp. 101–102). Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ .  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn,  $A$  là tiếp điểm. Điểm  $M$  bất kỳ thuộc  $d$ . Qua  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BM$ , cắt  $d$  tại  $N$ . (a) Chứng minh tích  $AM \cdot AN$  không đổi khi điểm  $M$  chuyển động trên đường thẳng  $d$ . (b) Tìm GTNN của  $MN$ .

**142** ([Bin23a], 71., p. 102). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{A} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $h$ . 1 tiếp tuyến bất kỳ ( $\neq BC$ ) của đường tròn  $(A)$  cắt 2 tia  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $B', C'$ . (a) Chứng minh  $S_{ABC} = S_{AB'C'}$ . (b) Trong các  $\triangle ABC$  có  $\widehat{A} = \alpha$  & đường cao  $AH = h$ , tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?

**143** ([Bin+23], 1, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  thì  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ .

**144** ([Bin+23], 2, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  nằm trong  $\triangle ABC$  &  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ ,  $\widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$  thì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**145** ([Bin+23], 3, p. 28). Chứng minh: Nếu  $J$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$  thì  $\widehat{BJC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ .

**146** ([Bin+23], 4, p. 28). Cho  $\triangle ABC$ , đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,  $a + b + c = 2p$ ,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2}$ ,  $S = pr$ .

**147** ([Bin+23], 5, p. 28). Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $F, E$ . Chứng minh:  $AE = AF = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .

**148** ([Bin+23], VD1, p. 29). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh  $Ox, Oy$  tại  $A, B$ . 1 tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $C, D$ .

**149** ([Bin+23], VD2, p. 29). Cho  $\widehat{xOy}$ , 2 điểm  $A, B$  lần lượt chuyển động trên  $Ox$  &  $Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

**150** ([Bin+23], VD3, p. 29). Cho hình vuông  $ABCD$ , lấy điểm  $E$  trên cạnh  $BC$  & điểm  $F$  trên cạnh  $CD$  sao cho  $AB = 3BE = 2DF$ . Chứng minh  $EF$  tiếp xúc với cung tròn tâm  $A$ , bán kính  $AB$ .

**151** ([Bin+23], VD4, p. 30). Cho đường tròn  $(O; R)$ , & đường thẳng  $a$  cắt đường tròn tại  $A, B$ .  $M$  là điểm trên  $a$  & nằm ngoài đường tròn, qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MC, MD$ . Chứng minh khi  $M$  thay đổi trên  $a$ , đường thẳng  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

**152** ([Bin+23], VD5, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  dựng đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$ . (b)  $BM \cdot AC + CN \cdot AB + AI^2 = AB \cdot AC$ .

**153** ([Bin+23], VD6, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D, E, F$  lần lượt là 3 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $EF$ . Chứng minh  $DH$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$ .

**154** ([Bin+23], VD7, p. 32).  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .  $D, E$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $BI, CI$  với cạnh  $AC, AB$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow BI \cdot CI = \frac{1}{2}BD \cdot CF$ .

**155** ([Bin+23], VD8, p. 32). Cho đường tròn  $(O; R)$  & điểm  $M$  cách tâm  $O$  1 khoảng bằng  $3R$ . Từ  $M$  kẻ 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O; R)$  tại  $A, B$ , gọi  $I, E$  lần lượt là trung điểm  $MA, MB$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $IE$ .

**156** ([Bin+23], VD9, p. 33). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ .  $O$  là trung điểm  $BC$ , dựng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $D, E$ .  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $\widehat{DE}$ , tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $M$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt ở  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$ . Từ đó xác định vị trí của  $M$  để diện tích  $\triangle APQ$  đạt GTLN. (b) Nếu  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$  thì  $PQ$  là tiếp tuyến.

**157** ([Bin+23], VD10, p. 34). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến cắt đường tròn tại  $A, B$ ,  $MA > MB$ , gọi  $CD$  là đường kính vuông góc với  $AB$ , đường thẳng  $MC, MD$  cắt đường tròn tại  $E, K$ , giao điểm của  $DE, CK$  là  $H$ ,  $I$  là trung điểm  $MH$ . Chứng minh  $IE, IK$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .



- 158** ([Bin+23], VD11, p. 34). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ .  $AD, AE$  là đường phân giác của 2 góc  $\widehat{BAH}, \widehat{CAH}$ . Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$ .
- 159** ([Bin+23], VD12, p. 35). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , 3 tiếp điểm trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ .  $M$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $MI$  cắt cạnh  $AB$  tại  $N$ , đường thẳng  $DF$  cắt đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$  tại  $P$ . Chứng minh  $\triangle ANP$  cân.
- 160** ([Bin+23], VD13, p. 36). Tính  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$  biết đỉnh  $B$  cách đều tâm 2 đường tròn bàng tiếp của  $\widehat{A}, \widehat{B}$  của  $\triangle ABC$ .
- 161** ([Bin+23], VD14, p. 36). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2AC$  & đường phân giác  $AD$ .  $r, r_1, r_2$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ . Chứng minh  $AD = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$  với  $p$  là nửa chu vi  $\triangle ABC$ .
- 162** ([Bin+23], VD15, p. 37). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $AB$  & cát tuyến qua  $A$  cắt đường tròn tại  $C, D$ ,  $AC < AD$ . Hỏi trọng tâm  $\triangle BCD$  chạy trên đường nào khi cát tuyến  $ACD$  thay đổi?
- 163** ([Bin+23], 5.1., p. 38). Cho nửa đường tròn bán kính  $AB = 2R$ .  $C$  là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  là  $h$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  theo  $R, h$ .
- 164** ([Bin+23], 5.2., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  là điểm trên  $BC$ . Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $E$ , đường tròn nội tiếp  $\triangle ADC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $F$ , đồng thời 2 đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng  $d \neq BC$ , đường thẳng  $d$  cắt  $AD$  tại  $I$ . Chứng minh  $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .
- 165** ([Bin+23], 5.3., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Đường tròn đường kính  $BH$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ , đường tròn đường kính  $HC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $N$ . Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính  $BH, CH$ .
- 166** ([Bin+23], 5.4., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AK$ .  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ , đường tròn đường kính  $AH$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $KD, KE$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AH$ .
- 167** ([Bin+23], 5.5., p. 38). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn,  $A, B$  là 2 tiếp điểm, tia  $OM$  cắt đường tròn tại  $C$ , tiếp tuyến tại  $C$  cắt tiếp tuyến  $MA, MB$  tại  $P, Q$ . Chứng minh diện tích  $\triangle MPQ$  lớn hơn  $\frac{1}{2}$  diện tích  $\triangle ABC$ .
- 168** ([Bin+23], 5.6., p. 38). Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh  $a$ , đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh  $a$  bằng  $h$ , xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- 169** ([Bin+23], 5.7., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $\frac{BD}{CE} = \left( \frac{IB}{IC} \right)^2$ .
- 170** ([Bin+23], 5.8., p. 38). Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $B, C$ . Từ  $A$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AM, AN$  với đường tròn  $(O)$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm. Đường thẳng  $MN$  cắt  $AO$  tại  $H$ , gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh khi đường tròn  $(O)$  thay đổi tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OHE$  nằm trên 1 đường thẳng cố định.
- 171** ([Bin+23], 5.9., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $BC$  là cạnh nhỏ nhất. Trên  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BD = CE = BC$ .  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $OI = DE$  &  $OI \perp DE$ .
- 172** ([Bin+23], 5.10., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(I; r)$ , kẻ các tiếp tuyến với đường tròn & song song với 3 cạnh  $\triangle ABC$ . Các tiếp tuyến này tạo với 3 cạnh  $\triangle ABC$  thành 3 tam giác nhỏ, gọi diện tích 3 tam giác nhỏ là  $S_1, S_2, S_3$  & diện tích  $\triangle ABC$  là  $S$ . Tìm GTNN của biểu thức  $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$ .
- 173** ([Bin+23], 5.11., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp,  $I_A$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\widehat{A}$  &  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $H, D$  là hình chiếu của  $I, I_A$  trên cạnh  $BC$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $DH$ , từ đó suy ra đường thẳng  $MI$  đi qua trung điểm  $AH$ .
- 174** ([Bin+23], 5.12., p. 39). Cho đường tròn  $(O; r)$  & điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Qua  $A$  dựng tiếp tuyến  $d$  với đường tròn  $(O; r)$ .  $M$  là điểm chuyển động trên  $d$ , từ  $M$  kẻ tiếp tuyến đến đường tròn  $(O; r)$  có tiếp điểm là  $B \neq A$ . Tâm của đường tròn ngoại tiếp & trực tâm của  $\triangle AMB$  chạy trên đường nào?
- 175** ([Bin+23], 5.13., p. 39). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , từ điểm  $M$  trên đường tròn kẻ tiếp tuyến  $d$ .  $H, K$  là hình chiếu của  $A, B$  trên  $d$ . Chứng minh  $AH + BK$  không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính  $HK$  luôn tiếp xúc với  $AH, BK, AB$ .
- 176** ([Bin+23], 5.14., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  trong tam giác, gọi  $H, D, E$  là hình chiếu của  $M$  thứ tự trên  $BC, CA, AB$ . Tìm vị trí của  $M$  sao cho giá trị của biểu thức  $\frac{BC}{MH} + \frac{CA}{MD} + \frac{AB}{ME}$  đạt GTNN.
- 177** ([Bin+23], 5.15., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại & nội tiếp  $\triangle ABC$ . Biết  $\triangle BIO$  vuông tại  $I$ . Chứng minh  $\frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}$ .

## 4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn

**178** ([BBN23a], H1, p. 126). Cho  $\Delta ABC$ . 2 đường tròn  $(B, AB), (C, AC)$  có thể tiếp xúc nhau được không?

**179** ([BBN23a], H2, p. 126). Đ/S? Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  có  $R > r$ . (a) Nếu  $OO' < R + r$  thì 2 đường tròn cắt nhau. (b) Nếu  $OO' = R - r$  thì 2 đường tròn tiếp xúc nhau. (c) Nếu 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau thì  $OO' = R + r$ . (d) Nếu  $OO' > R + r$  thì 2 đường tròn ngoài nhau.

**180** ([BBN23a], VD1, p. 127). Cho đường tròn  $(O, OA)$  & đường tròn  $(O', OA)$ . (a) Tìm vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(O), (O')$ . (b) Dây  $AD$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(O')$  ở  $C$ . Chứng minh  $AC = CD$ .

**181** ([BBN23a], VD2, p. 127). Tìm vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  trong 2 trường hợp: (a)  $R = 6, R' = 4, d = OO' = 2$ . (b)  $R = 5, R' = 3, d = 6$ .

**182** ([BBN23a], VD3, p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O, 6), (O', 8)$  cắt nhau tại  $A, B$  sao cho  $OA$  là tiếp tuyến của  $(O')$ . Tính độ dài dây chung  $AB$  & khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$ .

**183** ([BBN23a], VD4, p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc với nhau tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M \neq A, N \neq A$ . Chứng minh 2 tiếp tuyến với  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M, N$  song song với nhau.

**184** ([BBN23a], VD5, p. 128). Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ . (a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp trong  $\hat{A}$  & đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  tiếp xúc nhau tại 1 điểm thuộc  $BC$ . (b) Tính bán kính 2 đường tròn biết  $AB = 8, BC = 6$ .

**185** ([BBN23a], VD6, p. 129). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $MN, M \in (O), N \in (O')$ . Tiếp tuyến chung tại  $A$  của 2 đường tròn cắt  $MN$  tại  $E$ . (a) Chứng minh  $E$  là trung điểm của  $MN$ . (b) Chứng minh  $\Delta AMN$  vuông &  $MN$  tiếp xúc với đường tròn đường kính  $OO'$ . (c) Tính  $MN$  biết bán kính  $(O), (O')$  lần lượt là  $R = 4, R' = 5$ .

**186** ([BBN23a], VD7, p. 129). Cho  $\Delta ABC$ . Dựng 3 đường tròn tâm  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài nhau.

**187** ([BBN23a], VD8, p. 130). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau,  $AB, CD$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài, đường thẳng  $AD$  cắt  $(O), (O')$  theo thứ tự tại  $M, N$ . Chứng minh  $AM = DN$ .

**188** ([BBN23a], VD9, p. 130). Cho 2 đường tròn  $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$  cắt nhau tại  $A, B, O_1, O_2$  nằm khác phía đối với  $AB$ . 1 cát tuyến  $PAQ$  quay quanh  $A$ . Lấy  $P \in (O_1), Q \in (O_2)$  sao cho  $A$  nằm giữa  $P, Q$ . Tìm vị trí của cát tuyến  $PAQ$  trong mỗi trường hợp: (a)  $PQ$  có độ dài lớn nhất. (b) Chu vi  $\Delta BPQ$  đạt GTLN. (c) Diện tích  $\Delta BPQ$  đạt GTLN.

**189** ([BBN23a], 7.1., p. 131). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$ , độ dài đường nối tâm  $OO' = d$ . Tìm vị trí tương đối của 2 đường tròn vào bảng:

$R$	$R'$	$d$	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
7 cm	2 cm	10 cm	
7 cm	3 cm	4 cm	
6 cm	2 cm	7 cm	

**190** ([BBN23a], 7.2., p. 131). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B, O, O'$  nằm khác phía đối với  $AB$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $(O)$  tại  $C$  & cắt  $(O')$  tại  $D$ . Cát tuyến  $EAF$  cắt  $(O)$  tại  $E$ , cắt  $(O')$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $\widehat{CEB} = \widehat{DFB} = 90^\circ$ . (b) Chứng minh  $OO' \parallel CD$ . Tính  $CD$  biết  $AB = 9.6$  cm,  $OA = 8$  cm,  $O'A = 6$  cm. (c) Dựng qua  $A$  cát tuyến  $EAF, E \in (O), F \in (O')$ , sao cho  $AE = AF$ .

**191** ([BBN23a], 7.3., p. 132). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. 3 tiếp điểm  $(O_1), (O_2)$  là  $A, (O_2), (O_3)$  là  $B, (O_3), (O_1)$  là  $C$ . 2 tia  $AB, AC$  kéo dài cắt  $(O_3)$  lần lượt ở  $P, Q$ . Chứng minh  $P, Q, O_3$  thẳng hàng.

**192** ([BBN23a], 7.4., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O, 2$  cm) &  $(O', 3$  cm) có khoảng cách giữa 2 tâm là 6 cm.  $E, F$  tương ứng là giao của tiếp tuyến chung trong & ngoài với đường thẳng  $OO'$ . (a) Tìm vị trí tương đối của 2 đường tròn. (b) Tính độ dài đoạn  $EF$ .

**193** ([BBN23a], 7.5., p. 132). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$ . 1 đường tròn  $(O')$  cắt đường tròn nhỏ tâm  $O$  lần lượt ở  $A, B$  & cắt đường tròn còn lại lần lượt ở  $C, D$ . Chứng minh  $AB \parallel CD$ .

**194** ([BBN23a], 7.6., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  cắt nhau ở  $A, B$  sao cho  $O, O'$  thuộc 2 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ . Dựng 1 cát tuyến  $PAQ, P \in (O; R), Q \in (O'; r)$ , sao cho  $A$  nằm giữa  $P, Q$  &  $2AP = AQ$ .

**195** ([BBN23a], 7.7., p. 132). Cho 2 đường tròn bằng nhau  $(O), (O')$  có bán kính  $R$  cắt nhau tại  $A, B$ . Từ  $O, O'$  dựng  $Ox, O'y$  song song với nhau & cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ  $OO'$ , 2 tia này cắt  $(O)$  tại  $C$  &  $(O')$  tại  $D$ .  $C'$  đối xứng với  $C$  qua  $O, D'$  đối xứng với  $D$  qua  $O'$ . (a) Chứng minh  $CD', OO', C'D$  đồng quy. (b) Tìm tập hợp trung điểm  $M$  của  $CD$  khi  $Ox, O'y$  thay đổi. (c) Tính góc hợp bởi tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$  với  $OO'$  biết  $OO' = \frac{3}{2}R$ .

- 196** ([BBN23a], 7.8., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O, 3 \text{ cm})$  tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(O', 1 \text{ cm})$  tại  $A$ . Vẽ 2 bán kính  $OB, O'C$  song song với nhau thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $OO'$ . (a) Tính  $\widehat{BAC}$ . (b)  $I$  là giao điểm của  $BC, OO'$ . Tính độ dài  $OI$ .
- 197** ([BBN23a], 7.9., p. 132). Cho đường tròn  $(O; R), (I; 2R)$  đi qua  $O$ . 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn này là  $ADB, AEC$ . (a) Tìm dạng  $\mathcal{E}$  giải  $\triangle ABC$ . (b) Tìm dạng  $\mathcal{E}$  giải tứ giác  $BDEC$ .
- 198** ([BBN23a], 7.10., p. 133). Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $H, K$ . Đường thẳng  $O_1H$  cắt  $(O_1)$  tại  $A$ , cắt  $(O_2)$  tại  $B \neq H$ ,  $O_2H$  cắt  $(O_1)$  tại  $C$  & cắt  $(O_2)$  tại  $D \neq H$ . Chứng minh 3 đường thẳng  $AC, BD, HK$  đồng quy tại 1 điểm.
- 199** ([BBN23a], 7.11., p. 133). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A \in (O; R)$ ,  $B \in (O'; R')$ . Đường tròn  $(I; r)$  tiếp xúc với  $AB$  & 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$ . Chứng minh:  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .
- 200** ([BBN23a], 7.12., p. 133). Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ 3 đường tròn tâm  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài nhau tại  $M, N, P$ . Chứng minh đường tròn đi qua 3 điểm  $M, N, P$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .
- 201** ([BBN23a], 7.13., p. 133). Cho 1 tứ giác. Vẽ các đường tròn có đường kính là 4 cạnh của tứ giác đó. Chứng minh 4 đường thẳng chứa các dây chung của 4 đường tròn cắt nhau tạo thành 1 hình bình hành.
- 202** ([BBN23a], 7.14., p. 133). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  bằng nhau & ở ngoài nhau. Dựng 1 đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc tiếp xúc trong) với cả 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$ .
- 203** ([BBN23a], 7.15., p. 133). Cho 3 đường tròn không biết tâm, tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A, B, C$ . Tìm tâm của chúng chỉ bằng thước thẳng.
- 204** ([BBN23a], 7.16., p. 133). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không cắt  $(O)$ .  $P \in d$  là điểm cố định. Dựng đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với  $(O)$  & tiếp xúc với  $d$  tại  $P$ .
- 205** ([Bin23a], VD20, p. 112). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $BC$ ,  $B \in (O), C \in (O')$ . (a) Tính  $\widehat{BAC}$ . (b) Tính  $BC$ . (c)  $D$  là giao điểm của  $CA$  với  $(O)$ ,  $D \neq A$ . Chứng minh 3 điểm  $B, O, D$  thẳng hàng. (d) Tính  $AB, AC$ .
- 206** ([Bin23a], VD21, p. 112). Cho điểm  $B$  nằm giữa  $A, C$  sao cho  $AB = 14 \text{ cm}$ ,  $BC = 28 \text{ cm}$ . Vẽ về 1 phía của  $AC$  3 nửa đường tròn tâm  $I, K, O$  có đường kính theo thứ tự  $AB, BC, CA$ . Tính bán kính đường tròn  $(M)$  tiếp xúc ngoài với 2 nửa đường tròn  $(I), (K)$  & tiếp xúc trong với nửa đường tròn  $(O)$ .
- 207** ([Bin23a], VD22, p. 114). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có cùng bán kính, cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ cát tuyến chung  $DAE$  của 2 đường tròn,  $D \in (O), E \in (O')$ . Chứng minh  $BD = BE$ .
- 208** ([Bin23a], VD23, p. 114). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài  $AB, CD$ ,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Tiếp tuyến chung trong  $GH$  cắt  $AB, CD$  lần lượt ở  $E, F$ ,  $G \in (O), H \in (O')$ . Chứng minh: (a)  $AB = EF$ . (b)  $EG = FH$ .
- 209** ([Bin23a], 109., p. 115). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R)$  cắt nhau tại  $A, B$ . Đoạn nối tâm  $OO'$  cắt 2 đường tròn  $(O), (O')$  theo thứ tự ở  $C, D$ . Tính  $R$  biết  $AB = 24 \text{ cm}$ ,  $CD = 12 \text{ cm}$ .
- 210** ([Bin23a], 110., p. 115). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R)$  cắt nhau tại  $A, B$ , với  $\widehat{OAO'} = 90^\circ$ . Vẽ cát tuyến chung  $MAN$ ,  $M \in (O), N \in (O')$ . Tính  $AM^2 + AN^2$  theo  $R$ .
- 211** ([Bin23a], 111., p. 115). Cho 3 đường tròn tâm  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính & cùng đi qua 1 điểm  $I$ . 3 giao điểm khác  $I$  của 2 trong 3 đường tròn đó là  $A, B, C$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$ . (b)  $I$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 212** ([Bin23a], 112., pp. 115–116). Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn tâm  $O$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AO$ .  $CD$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $C \in (O), D \in (A)$ . Đoạn nối tâm  $OA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $H$ . Chứng minh  $DH$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 213** ([Bin23a], 113., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Vẽ hình bình hành  $OBO'C$ . Chứng minh  $ACOO'$  là hình thang cân.
- 214** ([Bin23a], 114., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . (a) Nêu cách dựng cát tuyến chung  $CAD$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ , sao cho  $A$  là trung điểm  $CD$ . (b) Tính  $CD$  biết  $OO' = 5 \text{ cm}$ ,  $OA = 4 \text{ cm}$ ,  $O'A = 3 \text{ cm}$ .
- 215** ([Bin23a], 115., p. 116). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ . 2 điểm  $A, B$  theo thứ tự di chuyển trên 2 tia  $Ox, Oy$  sao cho  $OA + OB = k$  với hằng số  $k$ . Vẽ 2 đường tròn  $(A, OB), (B, OA)$ . (a) Chứng minh 2 đường tròn  $(A), (B)$  luôn cắt nhau. (b)  $M, N$  là 2 giao điểm của 2 đường tròn  $(A), (B)$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 216** ([Bin23a], 116., p. 116). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $BC$ ,  $B \in (O), C \in (O')$ . (a) Cho  $R = 3 \text{ cm}$ ,  $r = 1 \text{ cm}$ . Tính  $AB, AC$ . (b) Cho  $AB = 19.2 \text{ cm}$ ,  $AC = 14.4 \text{ cm}$ . Tính  $R, r$ .
- 217** ([Bin23a], 117., p. 116). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc nhọn &  $(O_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(O_2)$ ,  $(O_2)$  tiếp xúc ngoài với  $(O_3)$ . Biết bán kính 2 đường tròn  $(O_1), (O_3)$  là  $a, b$ . Tính bán kính đường tròn  $(O_2)$ .

**218** ([Bin23a], 118., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ ,  $AC$  là đường kính của đường tròn  $(O')$ ,  $DE$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $D \in (O), E \in (O')$ ,  $K$  là giao điểm của  $BD, CE$ . (a) Tứ giác  $ADKE$  là hình gì? (b) Chứng minh  $AK$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn  $(O), (O')$ . (c)  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $MK \perp DE$ .

**219** ([Bin23a], 119., pp. 116–117). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .  $BC, DE$  là 2 tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $B, D \in (O)$ . (a) Chứng minh  $BDEC$  là hình thang cân. (b) Tính diện tích hình thang  $BDEC$ .

**220** ([Bin23a], 120., p. 117). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài nhau.  $AB$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $A \in (O), B \in (O')$ . (a) Tính độ dài  $AB$ . (b) Cho  $R = 36$  cm,  $r = 9$  cm. Tính bán kính đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với đường thẳng  $AB$  & tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn  $(O), (O')$ .

**221** ([Bin23a], 121., p. 117). Trong 1 hình thang cao có 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau, mỗi đường tròn tiếp xúc với 2 cạnh bên & tiếp xúc với 1 đáy của hình thang. Biết bán kính 2 đường tròn đó bằng 2 cm, 8 cm. Tính diện tích hình thang.

**222** ([Bin23a], 122., p. 117). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với 2 cạnh  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Chứng minh 3 điểm  $M, O, N$  thẳng hàng. (b) Tính bán kính đường tròn  $(O')$  theo  $R$ .

**223** ([Bin23a], 123., p. 117). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc 2 cạnh  $AB, AC$ . Tính bán kính đường tròn  $(O')$  theo  $R$ .

**224** ([Bin23a], 124., p. 117). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . 2 dây  $BC, BD$  của đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O')$  lần lượt ở  $E, F$ .  $I$  là giao điểm của  $EF, AB$ . Chứng minh  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .

**225** ([Bin23a], 125., p. 117). Cho 3 đường tròn bán kính  $r$  tiếp xúc ngoài đôi một. Tính bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường tròn đó.

**226** ([Bin23a], 126., p. 117). Cho đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ về 1 phía của đường kính  $AB$  2 tia tiếp tuyến  $Am, Bn$ .  $(I), (K)$  là 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau & tiếp xúc ngoài đường tròn  $(O)$ , trong đó đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với tia  $Am$ , đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với tia  $Bn$ .  $x, y$  là bán kính của 2 đường tròn  $(I), (K)$ . Chứng minh  $R = 2\sqrt{xy}$ .

**227** ([Bin23a], 127., p. 117). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .  $OC$  là bán kính vuông góc với  $AB$ ,  $d$  là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại  $C$ .  $(I)$  là đường tròn tiếp xúc trong với nửa đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với đường kính  $AB$ . Chứng minh điểm  $I$  cách đều đường thẳng  $d$  & điểm  $O$ .

**228** ([Bin23a], 128., p. 118). Cho nửa đường tròn  $(O)$  với đường kính  $AB = 2R$ .  $OE$  là bán kính vuông góc với  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(C)$  có đường kính  $OE$ .  $(D)$  là đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(C)$ , tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với đoạn thẳng  $OB$ . Tính bán kính của  $(D)$ .

**229** ([Bin23a], 129., p. 118). Cho điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ ,  $AC = 4$  cm,  $BC = 8$  cm. Vẽ về 1 phía của  $AB$  2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $AC, AB$ . Tính bán kính của đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 nửa đường tròn đó & tiếp xúc với đoạn thẳng  $AB$ .

**230** ([Bin23a], 130., p. 118). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính của đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $AB, AC$  & tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**231** ([Bin23a], 131., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O, 9$  cm),  $(O', 3$  cm) tiếp xúc ngoài nhau. 1 đường thẳng bị 2 đường tròn đó cắt tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.

**232** ([Bin23a], 132., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau,  $OO' = 65$  cm.  $AB$  là tiếp tuyến chung ngoài,  $CD$  là tiếp tuyến chung trong,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Tính bán kính 2 đường tròn  $(O), (O')$  biết  $AB = 63$  cm,  $CD = 25$  cm.

**233** ([Bin23a], 133., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $AB$  & tiếp tuyến chung trong  $EF$ ,  $A, E \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . (a)  $M$  là giao điểm của  $AB, EF$ . Chứng minh  $\triangle AOM \sim \triangle BMO'$ . (b) Chứng minh  $AE \perp BF$ . (c)  $N$  là giao điểm của  $AE, BF$ . Chứng minh 3 điểm  $O, N, O'$  thẳng hàng.

**234** ([Bin23a], 134., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Qua  $O$ , kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn  $(O')$ , chúng cắt đường tròn  $(O)$  tại  $A, B$ . Qua  $O'$ , kẻ 2 tia tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$ , chúng cắt đường tròn  $(O')$  ở  $C, D$ . Chứng minh  $A, B, C, D$  là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.

**235** ([Bin23a], 135., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O; r)$ ,  $R > r$ . Dây  $BC$  của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại  $D, E$ .  $EA$  là đường kính của đường tròn nhỏ. Chứng minh  $AD^2 + BD^2 + CD^2 = 2(R^2 + r^2)$ .

**236** ([Bin23a], 136–137., p. 119). 2 dây  $ABC \parallel CD$  của đường tròn  $(O)$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$ . Biết đường kính của đường tròn  $(O')$  bằng 7 cm, tính bán kính của đường tròn  $(O)$  khi: (a)  $AB = 10$  cm,  $CD = 24$  cm. (b)  $AB = 6$  cm,  $CD = 8$  cm.

**237** ([Bin+23], VD1, p. 42). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ cát tuyến  $CAD$  &  $EAF$ ,  $C, E \in (O)$ ,  $D, F \in (O')$ , sao cho  $AB$  là phân giác của  $\widehat{CAF}$ . Chứng minh  $CD = EF$ .



- 238** ([Bin+23], VD2, pp. 42–43). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  & 4 đường tròn  $(A; R_A), (B; R_B), (C; R_C), (D; R_D)$  sao cho  $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$ .  $d_1, d_3$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(A; R_A), (C; R_C)$ ,  $d_2, d_4$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(B; R_B), (D; R_D)$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường thẳng  $d_1, d_2, d_3, d_4$ .
- 239** ([Bin+23], VD3, p. 43). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau,  $AB, CD$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn, đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , cắt đường tròn  $(O')$  tại  $N$ . Chứng minh  $AM = DN$ .
- 240** ([Bin+23], VD4, p. 44). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. các tiếp điểm của  $(O_1), (O_2)$  là  $A$ , của  $(O_2), (O_3)$  là  $B$ , của  $(O_3), (O_1)$  là  $C$ .  $AB, AC$  kéo dài cắt đường tròn  $(O_3)$  tại  $Q, P$ . Chứng minh  $P, O_3, Q$  thẳng hàng.
- 241** ([Bin+23], VD5, p. 44). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A \in (O), B \in (O')$ . Đường tròn  $(I; r)$  tiếp xúc với  $AB$  & 2 đường tròn  $(O), (O')$ . Chứng minh: (a)  $AB = 2\sqrt{RR'}$ . (b)  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .
- 242** ([Bin+23], VD6, p. 45). Cho 3 đường tròn  $(A, a), (B, b), (C, c)$  tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm  $D$  của đường tròn  $(A, a), (B, b)$ , kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn  $(C, c)$  tại  $M, N$ . Tính  $MN$  theo  $a, b, c$ .
- 243** ([Bin+23], VD7, p. 45). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại  $A, B$ . Trong nửa mặt phẳng bờ  $OO'$  có chứa điểm  $B$ , kẻ 2 bán kính  $OC \parallel O'D$ . Chứng minh  $B$  là trực tâm của  $\triangle ACD$ .
- 244** ([Bin+23], VD8, p. 46). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ ,  $\widehat{xOy} = 90^\circ$  thay đổi luôn đi qua  $A$ , cắt đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tại  $B, C$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Tìm vị trí của  $B, C$  để  $AH$  có độ dài lớn nhất.
- 245** ([Bin+23], VD9, p. 47). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$ ,  $R > R'$  cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ đường kính  $AC$  & đường kính  $AD$ . Tính độ dài  $BC, BD$  biết  $CD = a$ .
- 246** ([Bin+23], VD10, p. 47). Cho  $\triangle ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $\triangle MAB, \triangle MBC, \triangle MCA$  có chu vi bằng nhau.
- 247** ([Bin+23], VD11, p. 48). Cho đường tròn  $(O)$  & dây cung  $AB$ .  $M$  là điểm trên  $AB$ . Dựng đường tròn  $(O_1)$  qua  $A, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , đường tròn  $(O_2)$  qua  $B, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $N$ . Chứng minh  $\widehat{MNO} = 90^\circ$ .
- 248** ([Bin+23], VD12, p. 48). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong  $CD$  & tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Chứng minh  $AC, BD, OO'$  đồng quy.
- 249** ([Bin+23], VD13, p. 49). Dựng 2 đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là 2 điểm  $A, B$  cho trước, sao cho 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm  $M$  cho trước.
- 250** ([Bin+23], 6.1., p. 50). Cho đường tròn  $(O; R)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$  đều. Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với 2 cạnh  $AB, AC$  & đường tròn  $(O; R)$ . Tính khoảng cách từ  $O'$  đến  $B$  theo  $R$ .
- 251** ([Bin+23], 6.2., p. 50). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $C$  trên nửa đường tròn sao cho  $CA < CB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ .  $I$  là trung điểm  $CH$ , đường tròn  $(I, CH/2)$  cắt nửa đường tròn tại  $D$  & cắt 2 cạnh  $CA, CB$  thứ tự tại  $M, N$ , đường thẳng  $CD$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $CMHN$  là hình chữ nhật. (b)  $E, I, M, N$  thẳng hàng.
- 252** ([Bin+23], 6.3., p. 50). Cho 3 đường tròn  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính  $R$  cắt nhau tại điểm  $O$  cho trước.  $A, B, C$  là 3 giao điểm còn lại của 3 đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  có bán kính  $R$ .
- 253** ([Bin+23], 6.4., p. 50). 3 đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm  $O$ , từng đôi cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $A, B, C$ . Chứng minh  $O$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 254** ([Bin+23], 6.5., p. 50). Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $A, B$ , kẻ dây  $AM$  của đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_2)$  tại  $A$ , kẻ dây  $AN$  của  $(O_2)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_1)$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = AB$ . Chứng minh  $A, M, N, D$  nằm trên 1 đường tròn.
- 255** ([Bin+23], 6.6., p. 50). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 1 điểm  $A$  trên đường tròn & đường thẳng  $d$  không đi qua  $A$ . Dựng đường tròn tiếp xúc với  $(O; R)$  tại  $A$  & tiếp xúc với đường thẳng  $d$ .
- 256** ([Bin+23], 6.7., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có cùng bán kính  $R$  sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại  $A, B$ . Tính bán kính đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với 2 cung nhỏ  $\widehat{AO}, \widehat{AO'}$  đồng thời tiếp xúc với  $OO'$ .
- 257** ([Bin+23], 6.8., p. 51). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$  cố định, điểm  $M$  tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng  $AB$ . Qua  $A, M$  dựng đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Qua  $B, M$  dựng đường tròn tâm  $J$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $B$ . 2 đường tròn tâm  $I, J$  cắt nhau tại điểm thứ 2  $N$ . Chứng minh  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 258** ([Bin+23], 6.9., p. 51). Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$  cho trước & 2 tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ , nằm về cùng 1 phía đối với  $AB$ .  $(O), (O')$  là 2 đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời: (a)  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$ . (b) Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $Ax, AB$ . (c) Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $By$  & tiếp xúc với  $BA$ . Tính GTLN của diện tích hình thang  $HOO'E$ , trong đó  $H, E$  là hình chiếu của  $O, O'$  trên  $AB$ .
- 259** ([Bin+23], 6.10., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O_1; R_1), (O_2; R_2)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . 1 đường tròn  $(O)$  thay đổi tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn  $(O_1; R_1), (O_2; R_2)$ . Giả sử  $MN$  là đường kính đường tròn  $(O)$  sao cho  $MN \parallel OO'$ .  $H$  là giao điểm của  $MO_2, NO_1$ . Chứng minh điểm  $H$  thuộc 1 đường thẳng cố định.

## 5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

**260** ([Bin23a], VD14, p. 102). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Qua điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt  $Ax, By$  lần lượt ở  $C, D$ .  $N$  là giao điểm của  $AD$  &  $BC$ . Chứng minh  $MN \perp AB$ .

**261** ([Bin23a], VD15, p. 103). Cho  $(O)$ , điểm  $K$  nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ 2 tiếp tuyến  $KA, KB$  với đường tròn ( $A, B$  là 2 tiếp điểm). Kẻ đường kính  $AOC$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $\triangle KBC \sim \triangle OBE$ . (b)  $CK \perp OE$ .

**262** ([Bin23a], 72., p. 103). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Vẽ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với nửa đường tròn & tia  $Oz \perp AB$ , 3 tia  $Ax, By, Oz$  cùng phía với nửa đường tròn đối với  $AB$ .  $E$  là điểm bất kỳ của nửa đường tròn. Qua  $E$  vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  $Ax, By, Oz$  theo thứ tự ở  $C, D, M$ . Chứng minh khi điểm  $E$  thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì: (a) Tích  $AC \cdot BD$  không đổi. (b) Điểm  $M$  chạy trên 1 tia. (c) Tứ giác  $ACDB$  có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

**263** ([Bin23a], 73., p. 104). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Vẽ về 1 phía của  $AB$  2 tia  $Ax \parallel By$ . (a) Dựng đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với đoạn thẳng  $AB$  & tiếp xúc với 2 tia  $Ax, By$ . (b) Tính  $\widehat{AOB}$ . (c) 3 tiếp điểm của đường tròn  $(O)$  với  $Ax, By, AB$  lần lượt là  $M, N, H$ . Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $AB$ . (d) Tìm vị trí của 2 tia  $Ax, By$  để  $HM = HN$ ?

**264** ([Bin23a], 74., p. 104). Cho hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ , tia phân giác của  $\widehat{C}$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AD$ . (a) Chứng minh  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(I, IA)$ . (b) Cho  $AD = 2a$ . Tính  $AB \cdot CD$  theo  $a$ . (c)  $H$  là tiếp điểm của  $BC$  với đường tròn  $(I)$ .  $K$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh  $KH \parallel CD$ .

**265** ([Bin23a], 75., p. 104). Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB$ , điểm  $D$  nằm trên đường tròn. 2 tiếp tuyến của đường tròn tại  $A, D$  cắt nhau ở  $C$ .  $E$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AB$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $BC, DE$ . Chứng minh  $ID = IE$ .

**266** ([Bin23a], 76., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $O$  là trung điểm  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $H, K$ . 1 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  ở  $M, N$ . (a) Cho  $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ . Tính  $\widehat{MON}$ . (b) Chứng minh  $OM, ON$  chia tứ giác  $BMNC$  thành 3 tam giác đồng dạng. (c) Cho  $BC = 2a$ . Tính  $BM \cdot CN$ . (d) Tìm vị trí tiếp tuyến  $MN$  để  $BM + CN$  nhỏ nhất.

**267** ([Bin23a], 77., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $BH = 20$  cm,  $CH = 45$  cm. Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AH$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $BM, CN$  với đường tròn,  $M \neq H, N \neq H$  là 2 tiếp điểm. (a) Tính diện tích tứ giác  $BMNC$ . (b)  $K$  là giao điểm của  $CN, AH$ . Tính  $AK, KN$ . (c)  $I$  là giao điểm của  $AM, BC$ . Tính  $IB, IM$ .

**268** ([Bin23a], 78., p. 105). Cho đường tròn  $(O, 6$  cm). 1 điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn vuông góc với nhau,  $B, C$  là 2 tiếp điểm. Trên 2 cạnh  $AB, AC$  của  $\widehat{A}$ , lấy 2 điểm  $D, E$  sao cho  $AD = 4$  cm,  $AE = 3$  cm. Chứng minh  $DE$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**269** ([Bin23a], 79., p. 105). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Với tâm  $B$  & bán kính  $a$ , vẽ cung  $AC$  nằm trong hình vuông. Qua điểm  $E$  thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung  $AC$ , cắt  $AD, CD$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Tính chu vi  $\triangle DMN$ . (b) Tính số đo  $\widehat{MBN}$ . (c) Chứng minh  $\frac{2a}{3} < MN < a$ .

**270** ([Bin23a], 80., p. 105). Cho hình vuông  $ABCD$ . 1 đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với 2 đường thẳng  $AB, AD$  & cắt mỗi cạnh  $BC, CD$  thành 2 đoạn thẳng có độ dài 2 cm, 23 cm. Tính bán kính đường tròn.

## 6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác

**271** ([Bin23a], VD16, p. 105). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với cạnh  $AB$  tại  $D$ . Tính  $\widehat{C}$  biết  $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$ .

**272** ([Bin23a], VD17, p. 106).  $\triangle ABC$  có chu vi 80 cm ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  song song với  $BC$  cắt  $AB, AC$  theo thứ tự ở  $M, N$ . (a) Biết  $MN = 9.6$  cm. Tính  $BC$ . (b) Biết  $AC - AB = 6$  cm. Tính  $AB, BC, CA$  để  $MN$  có GTLN.

**273** ([Bin23a], VD18, p. 107).  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp 1 tam giác vuông &  $h$  là đường cao ứng với cạnh huyền. Chứng minh  $2 < \frac{h}{r} < 2.5$ .

**274** ([Bin23a], 81., p. 107). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 15$  cm,  $AC = 20$  cm.  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Tính khoảng cách từ  $I$  đến đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$ .

**275** ([Bin23a], 82., p. 107). Tính 3 cạnh của tam giác vuông ngoại tiếp đường tròn biết: (a) Tiếp điểm trên cạnh huyền chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng 5 cm, 12 cm. (b) 1 cạnh góc vuông bằng 20 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6 cm.

**276** ([Bin23a], 83., p. 107). Tính diện tích tam giác vuông biết 1 cạnh góc vuông bằng 12 cm, tỷ số giữa bán kính 2 đường tròn nội tiếp & ngoại tiếp tam giác đó bằng 2 : 5.

**277** ([Bin23a], 84., p. 107). Cho 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm, diện tích bằng 24 cm<sup>2</sup>. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.

**278** ([Bin23a], 85., p. 107). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB = 5$ . Tính  $AC, BC$  biết số đo chu vi  $\triangle ABC$  bằng số đo diện tích  $\triangle ABC$ .

**279** ([Bin23a], 86., pp. 107–108). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A, đường cao AH.  $(O; r), (O_1, r_1), (O_2, r_2)$  lần lượt là 3 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ABH, \triangle ACH$ . (a) Chứng minh  $r + r_1 + r_2 = AH$ . (b) Chứng minh  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ . (c) Tính độ dài  $O_1O_2$  biết  $AB = 3$  cm,  $AC = 4$  cm.

**280** ([Bin23a], 87., p. 108). Đường tròn  $(O; r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . 3 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  song song với 3 cạnh của  $\triangle ABC$  cắt từ  $\triangle ABC$  thành 3 tam giác nhỏ.  $r_1, r_2, r_3$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh  $r_1 + r_2 + r_3 = r$ .

**281** ([Bin23a], 88., p. 108). Đường tròn tâm I nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt ở D, E, F. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AD, DF lần lượt ở M, N. Chứng minh M là trung điểm EN.

**282** ([Bin23a], 89., p. 108).  $\triangle ABC$  vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tính 3 cạnh  $\triangle ABC$  theo r biết  $IG \parallel AC$ .

**283** ([Bin23a], 90., p. 108).  $\triangle ABC$  vuông tại A có  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm. I là tâm của đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tính IG.

**284** ([Bin23a], 91., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . D, E, F lần lượt là tiếp điểm trên 3 cạnh BC, AB, AC. H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh  $\widehat{BHE} = \widehat{CHF}$ .

**285** ([Bin23a], 92., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 40$  cm,  $BC = 48$  cm. O, I lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính: (a) Bán kính đường tròn nội tiếp. (b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp. (c) Khoảng cách OI.

**286** ([Bin23a], 93., p. 108). Tính 3 cạnh 1 tam giác cân biết bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6 cm, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 12.5 cm.

**287** ([Bin23a], 94., p. 108). Bán kính của đường tròn nội tiếp 1 tam giác bằng 2 cm, tiếp điểm trên 1 cạnh chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng 4 cm, 6 cm. Giải tam giác.

**288** ([Bin23a], 95., p. 108). Tính 3 góc của 1 tam giác vuông biết tỷ số giữa 2 bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp bằng  $\sqrt{3} + 1$ .

**289** ([Bin23a], 96., pp. 108–109). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với BC tại D. Vẽ đường kính DN của đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại N cắt AB, AC lần lượt ở I, K. (a) Chứng minh  $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$ . (b) F là giao điểm của AN, BC. Chứng minh  $BD = CF$ .

**290** ([Bin23a], 97., p. 109). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  đều. 1 tiếp tuyến của đường tròn cắt 2 cạnh AB, AC lần lượt ở M, N. (a) Tính diện tích  $\triangle AMN$  biết  $BC = 8$  cm,  $MN = 3$  cm. (b) Chứng minh  $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM \cdot AN$ . (c) Chứng minh  $\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN} = 1$ .

**291** ([Bin23a], 98., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ .  $(I)$  là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với CI tại I cắt AC, AB lần lượt ở M, N. Chứng minh: (a)  $AM \cdot BN = IM^2 = IN^2$ . (b)  $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ .

**292** ([Bin23a], 99., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC < AB$ . Trên 2 cạnh AB, AC lấy 2 điểm D, E sao cho  $BD = CE = BC$ . O, I lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  bằng OI.

**293** ([Bin23a], 100., p. 109). R, r lần lượt là 2 bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp 1 tam giác vuông có diện tích S. Chứng minh  $R + r \geq \sqrt{2S}$ .

**294** ([Bin23a], 101., p. 109). Trong các  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ , chiều cao tương ứng bằng h, tam giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất?

**295** ([Bin23a], 102., p. 109). Trong các tam giác vuông ngoại tiếp cùng 1 đường tròn, tam giác nào có đường cao ứng với cạnh huyền lớn nhất?

**296** ([Bin23a], 103., p. 109). (a) Cho đường tròn  $(I; r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $IA + IB + IC \geq 6r$ . (b) Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . P, Q, N lần lượt là tâm của 3 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BOC, \triangle COA, \triangle AOB$ . Chứng minh  $OP + OQ + ON \geq 3R$ .

**297** ([Bin23a], 104., p. 109). Độ dài 3 đường cao của  $\triangle ABC$  là các số tự nhiên, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh  $\triangle ABC$  đều & tính độ dài 3 đường cao của  $\triangle ABC$ .

**298** ([Bin23a], 105., p. 110).  $h_a, h_b, h_c$  là 3 đường cao ứng với 3 cạnh a, b, c của 1 tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh: (a)  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ . (b)  $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$ . Khi nào xảy ra đẳng thức?

## 7 Đường Tròn Bàng Tiếp Tam Giác

**299** ([Bin23a], VD19, p. 110). Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh các tiếp điểm trên cạnh  $BC$  của đường tròn bàng tiếp trong  $\widehat{A}$  & của đường tròn nội tiếp đối xứng với nhau qua trung điểm của  $BC$ .

**300** ([Bin23a], 106., p. 111).  $a, b, c$  lần lượt là 3 cạnh của  $\triangle ABC$ ,  $h_a, h_b, h_c$  là 3 đường cao tương ứng,  $R_a, R_b, R_c$  là bán kính 3 đường tròn bàng tiếp tương ứng,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $p$  là nửa chu vi  $\triangle ABC$ ,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Chứng minh: (a)  $S = R_a(p - a) = R_b(p - b) = R_c(p - c)$ . (b)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$ . (c)  $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$ .

**301** ([Bin23a], 107., p. 111). Tính cạnh huyền của 1 tam giác vuông biết  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $R$  là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.

**302** ([Bin23a], 108., p. 111). Cho  $\triangle ABC$ .  $(P), (Q), (R)$  lần lượt là 3 đường tròn bàng tiếp trong  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ . (a) tiếp điểm của  $(Q), (R)$  trên đường thẳng  $BC$  lần lượt là  $E, F$ . Chứng minh  $CE = BF$ . (b)  $H, I, K$  lần lượt là tiếp điểm của 3 đường tròn  $(P), (Q), (R)$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ . Nếu  $AH = BI = CK$  thì  $\triangle ABC$  là tam giác gì?

## 8 Đường Tròn & Phép Vị Tự

**303** ([Bin23a], VD24, p. 120). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC$  ở  $D$ .  $M, E$  lần lượt là trung điểm  $BC, AD$ . (a)  $DN$  là đường của đường tròn  $(O)$ ,  $F$  là tiếp điểm trên  $BC$  của đường tròn  $(O')$  bàng tiếp trong  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$ . Chứng minh 3 điểm  $A, N, F$  thẳng hàng. (b) Chứng minh 3 điểm  $E, O, M$  thẳng hàng.

**304** ([Bin23a], 138., p. 120). Cho 2 đường tròn  $(I; r), (K; r)$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O; R)$  theo thứ tự tại  $A, B$ .  $C$  là 1 điểm thuộc đường tròn  $(O)$ ,  $CA$  cắt đường tròn  $(I)$  tại điểm  $D$ ,  $BC$  cắt đường tròn  $(K)$  tại điểm  $E$ . Chứng minh  $DE \parallel AB$ .

**305** ([Bin23a], 139., p. 121). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ ,  $R > R'$ . Vẽ 2 bán kính  $OB \parallel O'B'$ ,  $B, B'$  thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ  $OO'$ . 2 đường thẳng  $BB', OO'$  cắt nhau tại  $K$ . (a) Tính  $\widehat{BAB'}$ . (b) Tính  $OK$  theo  $R, R'$ . (c) Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn trên cũng đi qua điểm  $K$ . (d) Khi 2 bán kính  $OB, O'B'$  di chuyển thì trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABB'$  di chuyển trên đường nào?

**306** ([Bin23a], 140., p. 121). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  cắt nhau tại  $A, B$ ,  $R > R'$ . Tiếp tuyến chung ngoài  $CD$  cắt  $OO'$  ở  $K$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ .  $E$  là giao điểm thứ 2 của  $AK$  & đường tròn  $(O')$ . Chứng minh  $AC \parallel ED$ .

## 9 Dựng Hình

**307** ([Bin23a], VD25, p. 122). Dựng đường tròn đi qua 1 điểm cho trước & tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc cho trước.

**308** ([Bin23a], VD26, p. 124). Cho  $\triangle ABC$  có  $B, C$  là 2 góc nhọn. Dựng đường thẳng vuông góc với  $BC$  chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

**309** ([Bin23a], VD27, p. 125). Cho hình vuông  $ABCD$ . Dựng đường kính đi qua  $C$  cắt 2 tia  $AB, AD$  theo thứ tự ở  $M, N$  sao cho  $MN$  có độ dài bằng  $k$  cho trước.

**310** ([Bin23a], 141., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$  với 2 bán kính  $OA, OB$  &  $O, A, B$  không thẳng hàng. Dựng dây  $CD$  sao cho 2 bán kính  $OA, OB$  chia dây  $CD$  thành 2 phần bằng nhau.

**311** ([Bin23a], 142., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc đường kính ấy. Dựng dây  $DE \perp AB$  sao cho  $AD \perp EC$ .

**312** ([Bin23a], 143., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$  & 2 điểm  $A, B$  nằm bên ngoài đường tròn. Dựng 2 đường thẳng theo thứ tự đi qua  $A, B$  song song với nhau & cắt đường tròn  $(O)$  tạo thành 2 dây bằng nhau.

**313** ([Bin23a], 144., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không giao với đường tròn. Dựng điểm  $M \in d$  sao cho nếu vẽ 2 tiếp tuyến  $MC, MD$  với đường tròn thì  $\widehat{COD} = 130^\circ$ .

**314** ([Bin23a], 145., p. 127). Qua điểm  $M$  nằm bên trong đường tròn  $(O)$  & không trùng  $O$ , dựng dây  $AB$  sao cho  $MA - MB = a$ ,  $a$  là độ dài cho trước.

**315** ([Bin23a], 146., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  bằng nhau, tiếp xúc ngoài tại  $B$ , có 2 đường kính theo thứ tự là  $AB, BC$ . Dựng đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $D$ , cắt  $(O')$  ở  $E, F$  sao cho  $E$  là trung điểm của  $DF$ .

**316** ([Bin23a], 147., p. 127). Dựng tam giác vuông biết độ dài 2 đường trung tuyến ứng với 2 cạnh góc vuông.

**317** ([Bin23a], 148., p. 127). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\widehat{A} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .

**318** ([Bin23a], 149., p. 127). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $AC - AB = d$ , đường cao  $AH = h$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .



- 319** ([Bin23a], 150., p. 127). Cho 2 điểm  $O, O'$  nằm về 1 phía của đường thẳng  $d$ . Dụng 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài sao cho tiếp tuyến chung ngoài song song với  $d$ .
- 320** ([Bin23a], 151., p. 127). Cho đường tròn  $(I)$  & đường thẳng  $m$  không giao nhau, điểm  $A$  thuộc đường tròn. Dụng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(I)$  tại  $A$  & tiếp xúc với đường thẳng  $m$ .
- 321** ([Bin23a], 152., p. 127). Cho đường tròn  $(I)$  & đường thẳng  $m$  không giao nhau, điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $m$ . Dụng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường thẳng  $m$  tại  $C$  & tiếp xúc với đường tròn  $(I)$ .
- 322** ([Bin23a], 153., p. 127). Cho 2 đường thẳng  $a, b$  cắt nhau & điểm  $A$  nằm ngoài 2 đường thẳng ấy. Dụng đường tròn  $(A)$  cắt 2 đường thẳng  $a, b$  tạo thành 2 dây có tổng bằng  $2k$ .
- 323** ([Bin23a], 154., p. 127). Cho  $\widehat{xOy}$  & điểm  $M$  nằm trong góc đó. Dụng đường thẳng đi qua  $M$  cắt 2 cạnh của góc ở  $A, B$  sao cho  $OA + OB = k$ .
- 324** ([Bin23a], 155., p. 127). Dụng tam giác cân biết độ dài của đoạn nối 2 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với 2 cạnh bên & đường cao  $h$  ứng với cạnh bên.
- 325** ([Bin23a], 156., p. 127). Cho 3 điểm  $H, D, M$  thẳng hàng theo thứ tự ấy, trong đó  $HD = 2, DM = 3$ . Dụng  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  nhận  $AH$  là đường cao,  $AD$  là đường phân giác,  $AM$  là trung tuyến.
- 326** ([Bin23a], 157., p. 128). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $D$  là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh huyền. (a)  $E$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle AHM$ . Chứng minh  $MD = ME$  bằng cách tính 2 tỷ số  $\frac{ME}{MF}, \frac{MD}{MF}$  theo 3 cạnh  $\triangle ABC$ . (b) Suy ra cách dựng  $\triangle ABC$  vuông biết 3 điểm  $H, D, M$  theo thứ tự thuộc 1 đường thẳng.
- 327** ([Bin23a], 158., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dụng điểm  $M \in xy$  sao cho nếu vẽ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn  $(O)$  thì  $\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$ .
- 328** ([Bin23a], 159., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dụng điểm  $A \in xy$  sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ  $A$  đến 2 đường tròn nhận  $xy$  là đường thẳng chứa tia phân giác.
- 329** ([Bin23a], 160., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dụng hình vuông  $ABCD$  có  $A \in (O), C \in (O'), B, D \in xy$ .
- 330** ([Bin23a], 161., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . Dụng đường thẳng đi qua  $A$  bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng  $a$ .
- 331** ([Bin23a], 162., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dụng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây bằng nhau.
- 332** ([Bin23a], 163., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dụng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có tổng bằng  $a$ .
- 333** ([Bin23a], 164., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dụng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng  $a$ .
- 334** ([Bin23a], 165., p. 128). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A \neq O$  nằm bên trong đường tròn. Dụng dây  $BC$  đi qua  $A$  sao cho  $AB = 2AC$ .
- 335** ([Bin23a], 166., p. 128). Cho 2 đường tròn tâm  $O$ , điểm  $A$  thuộc đường tròn lớn. Dụng dây  $AB$  của đường tròn lớn sao cho đường tròn nhỏ chia  $AB$  thành 3 phần bằng nhau.
- 336** ([Bin23a], 167., p. 128). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Dụng điểm  $H$  thuộc đoạn thẳng ấy sao cho  $AH \cdot BH = a^2$  với  $a$  là 1 độ dài cho trước.
- 337** ([Bin23a], 168., p. 129). Dụng hình vuông có diện tích bằng diện tích 1 hình thang cho trước.
- 338** ([Bin23a], 169., p. 129). Dụng tam giác đều có diện tích bằng diện tích 1 tam giác cho trước.
- 339** ([Bin23a], 170., p. 129). Dụng  $\triangle ABC$  biết 2 cạnh  $AB = c, AC = b$ , đường phân giác  $AD = d$ .
- 340** ([Bin23a], 171., p. 129). Cho  $\triangle ABC$ . Dụng đường thẳng song song với  $BC$  chia  $\triangle ABC$  thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- 341** ([Bin23a], 172., p. 129). Cho 1 hình thang. Dụng đường thẳng song song với 2 đáy chia hình thang thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- 342** ([Bin23a], 173., p. 129). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ . Dụng đường thẳng  $EF$  song song với 2 đáy,  $E \in AD, F \in BC$ , sao cho  $BE \parallel DF$ .
- 343** ([Bin23a], 174., p. 129). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ .  $BB'$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn. Dụng điểm  $M$  nằm trên nửa đường tròn sao cho  $MA$  bằng khoảng cách từ  $M$  đến  $BB'$ .

## 10 Toán Cực Trị 1

- 344** ([Bin23a], VD28, p. 130). Cho điểm  $A$  nằm bên trong dải tạo bởi 2 đường thẳng song song  $d \parallel d'$ . Đặt điểm  $B \in d, C \in d'$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  & có diện tích nhỏ nhất.
- 345** ([Bin23a], VD29, p. 131). Cho  $\widehat{x'Oy'}$  & điểm  $M$  nằm trong góc. Đặt đường thẳng đi qua  $M$  cắt  $Ox', Oy'$  lần lượt ở  $A, B$  sao cho tổng  $OA + OB$  có GTNN.
- 346** ([Bin23a], VD30, p. 131). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ , tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến  $ADE$  bất kỳ. Vẽ dây  $CK \parallel DE$ . Tìm vị trí của cát tuyến  $ADE$  để  $\triangle AKE$  có diện tích lớn nhất.
- 347** ([Bin23a], 175., p. 132). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ . Đặt điểm  $C \in (O)$  sao cho  $\triangle C$  có diện tích lớn nhất, trong đó  $CH$  là đường cao của  $\triangle ABC$ ,  $CE, CF$  là 2 đường phân giác của  $\triangle CHA, \triangle CHB$ .
- 348** ([Bin23a], 176., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A \neq O$  nằm bên trong đường tròn. Đặt điểm  $B \in (O)$  sao cho  $\widehat{OBA}$  có số đo lớn nhất.
- 349** ([Bin23a], 177., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn. Đặt đường thẳng đi qua  $A$ , cắt đường tròn ở  $B, C$  sao cho tổng  $AB + AC$  có GTLN.
- 350** ([Bin23a], 178., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không giao nhau. Đặt điểm  $M \in d$  sao cho nếu kẻ 2 tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn thì  $AB$  có độ dài nhỏ nhất.
- 351** ([Bin23a], 179., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Qua  $A$ , dựng 2 tia vuông góc với nhau sao cho chúng cắt 2 đường tròn  $(O), (O')$  lần lượt ở  $B, C$  tạo thành  $\triangle ABC$  có diện tích lớn nhất.
- 352** ([Bin23a], 180., p. 132). Cho đoạn thẳng  $AB$ , 2 tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$  & nằm về 1 phía của  $AB$ . Đặt 2 đường tròn  $(I), (K)$  tiếp xúc ngoài với nhau, tiếp xúc với đoạn  $AB$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với tia  $Ax$ , đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với tia  $By$  sao cho tứ giác  $CIKD$  có diện tích lớn nhất với  $C, D$  lần lượt là 2 tiếp điểm của 2 đường tròn  $(I), (K)$  với  $AB$ .
- 353** ([Bin23a], 181., p. 133). Cho  $\widehat{xAy}$ , đường tròn  $(O)$  nằm trong góc ấy. Đặt điểm  $M \in (O)$  sao cho tổng các khoảng cách từ  $M$  đến 2 cạnh của góc có GTNN.
- 354** ([Bin23a], 182., p. 133). Cho đường tròn  $(O, 2)$  & đường thẳng  $d$  đi qua  $O$ . Đặt điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ  $A$  tới đường tròn cắt  $d$  tại  $B, C$  tạo thành  $\triangle ABC$  có diện tích nhỏ nhất.
- 355** ([Bin23a], 183., p. 133). Cho  $\widehat{xOy}$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh của góc tại  $A, B$ . Đặt tiếp tuyến với cung nhỏ  $AB$  của đường tròn  $(I)$  cắt 2 cạnh của góc tại  $C, D$  sao cho: (a)  $CD$  có độ dài nhỏ nhất. (b)  $\triangle OCD$  có diện tích lớn nhất.
- 356** ([Bin23a], 184., p. 133). (a) Cho  $\widehat{xOy}$  & điểm  $M$  nằm bên trong góc đó. Đặt đường thẳng đi qua  $M$  cắt 2 cạnh của góc ở  $A, B$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  bằng  $2p$ . (b) Cho  $\widehat{xOy}$ . Đặt 2 điểm  $C, D$  lần lượt nằm trên  $Ox, Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OCD$  bằng  $2p$  cho trước &  $\triangle OCD$  có diện tích lớn nhất.
- 357** ([Bin23a], 185., p. 133). Cho  $\widehat{xOy}$  & 1 điểm  $M$  nằm bên trong góc đó. Đặt đường thẳng đi qua  $M$  cắt  $Ox, Oy$  ở  $A, B$  sao cho  $\triangle OAB$  có chu vi nhỏ nhất.
- 358** ([Bin23a], 186., p. 133). Cho đoạn thẳng  $AD$  & trung điểm của nó. Đặt  $\triangle ABC$  nhận  $AD$  là đường cao,  $H$  là trực tâm sao cho  $BC$  có độ dài nhỏ nhất.
- 359** ([Bin23a], 187., p. 133). Cho đường tròn  $(O)$ . Đặt điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho đường vuông góc với  $OA$  tại  $O$  tạo thành với 2 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ  $A$  1 tam giác có diện tích nhỏ nhất.
- 360** ([Bin23a], 188., p. 133). Chứng minh trong các tam giác có cùng chu vi, tam giác đều có diện tích lớn nhất.
- 361** ([Bin23a], 189., p. 133). Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt chuyển động trên 2 cạnh  $BC, CD$  sao cho  $\widehat{MAN} = 45^\circ$ . (a) Chứng minh khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$  & chu vi  $\triangle CMN$  không đổi. (b) Đặt 2 điểm  $M, N$  để  $MN$  có độ dài nhỏ nhất. (c) Chứng minh khi  $MN$  có độ dài nhỏ nhất thì  $\triangle CMN$  có diện tích lớn nhất.
- 362** ([Bin23a], 190., p. 133). Cho hình vuông  $ABCD$ . Đặt đường thẳng đi qua  $C$  cắt 2 tia  $AB, AD$  tại 2 điểm  $M, N$  sao cho đoạn thẳng  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 363** ([Bin23a], 191., p. 134). Cho điểm  $C$  thuộc tia phân giác của  $\widehat{A}$ . Đặt đường thẳng đi qua  $C$  cắt 2 cạnh của  $\widehat{A}$  tại 2 điểm  $M, N$  sao cho đoạn thẳng  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 364** ([Bin23a], 192., p. 134). (a) Chứng minh trong các  $\triangle ABC$  có diện tích  $S$  & có số đo  $\widehat{A}$  không đổi, tam giác có cạnh  $BC$  nhỏ nhất là tam giác cân tại  $A$ . (b) Cho  $\triangle ABC$ . Đặt điểm  $M$  thuộc tia  $AB$ , điểm  $N$  thuộc tia  $AC$  sao cho  $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$  &  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 365** ([Bin23a], 193., p. 134). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $MN$ . Đặt hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp nửa đường tròn với  $A, D \in MN, B, C$  thuộc nửa đường tròn, sao cho hình chữ nhật đó: (a) Có diện tích lớn nhất. (b) Có chu vi lớn nhất.
- 366** ([Bin23a], p. 134, Golden ratio – Tỷ lệ vàng  $\varphi$ ). Cho 1 đoạn thẳng có độ dài  $a$ . Đặt đoạn thẳng có độ dài  $x$  sao cho  $x$  bằng trung bình nhân của đoạn thẳng đã cho  $a$  & phần còn lại  $a - x$ .
- 367** ([Bin23a], p. 136). Dùng thước & compa, chia 1 đường tròn thành 5 phần bằng nhau.

## 11 Góc ở Tâm. Số Đo Cung. Liên Hệ Giữa Cung & Dây

[1] Cho đường tròn  $(O; R)$ ,  $\widehat{AOB} = \alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ : góc ở tâm. Nếu  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , cung nhỏ  $\widehat{AmB}$  có số đo cung  $s\widehat{AmB} = \alpha$ , cung lớn  $\widehat{AnB}$  có số đo cung  $s\widehat{AnB} = 360^\circ - \alpha$ . Nếu  $\alpha = 0^\circ$ , cung không có số đo  $0^\circ$  & cung cả đường tròn có số đo  $360^\circ$ . Nếu  $\alpha = 180^\circ$ , 2 cung  $\widehat{AmB}, \widehat{AnB}$  là 2 nửa đường tròn với  $s\widehat{AmB} = s\widehat{AnB} = 180^\circ$ . [2] Trên cùng 1 đường tròn  $(O; R)$  hoặc trên 2 đường tròn bằng nhau  $(O; R), (O'; R), O \neq O'$ ,  $s\widehat{AB} = s\widehat{CD} \Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Leftrightarrow AB = CD$ ,  $s\widehat{AB} < s\widehat{CD} \Leftrightarrow \widehat{AB} < \widehat{CD} \Leftrightarrow AB < CD$ . Tính chất này không còn đúng khi xét trên 2 đường tròn không bằng nhau  $(O; R), (O', R')$  với  $R \neq R'$ . [3]  $B \in \widehat{AC} \Rightarrow s\widehat{AB} + s\widehat{BC} = s\widehat{AC}$ . [4] 2 cung chắn giữa 2 dây song song thì bằng nhau.

**368** ([BBN23b], H1, p. 76). Đ/S? Nếu sai, sửa cho đúng. (a) 2 cung tròn bằng nhau thì có cùng số đo. (b) 2 cung tròn có số đo bằng nhau thì bằng nhau. (c) Trong 2 cung tròn, cung nào có số đo lớn hơn thì lớn hơn. (d) Trong 2 cung tròn trên 1 đường tròn, cung nào có số đo nhỏ hơn thì nhỏ hơn.

**369** ([BBN23b], H2, p. 76). Đường tròn  $(O; 1)$  có dây cung  $AB = \sqrt{2}$ . Tính  $\widehat{AOB}$ .

**370** ([BBN23b], H3, p. 76). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 70^\circ$ . Sắp xếp tăng:  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ .

**371** ([BBN23b], VD1, p. 76). Trong 1 đường tròn. Chứng minh: (a) Đường kính vuông góc với 1 dây cung thì chia đôi cung căng dây. (b) Đảo lại, đường kính đi qua điểm chính giữa của 1 cung thì vuông góc với dây căng cung.

**372** ([BBN23b], VD2, p. 77). 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $P$ . Biết  $\widehat{APB} = 50^\circ$ . Tính số đo cung lớn  $AB$ .

**373** ([BBN23b], VD3, p. 77). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 2 dây  $AB, CD$  sao cho  $\widehat{AOB} = 120^\circ, \widehat{COD} = 60^\circ$ . Chứng minh  $CD < AB < 2CD$ .

**374** ([BBN23b], VD4, p. 78). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .  $M, N$  lần lượt chạy trên 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R')$  bắt đầu từ  $A$  cùng chiều kim đồng hồ sao cho  $s\widehat{AM} = s\widehat{AN}$ . Chứng minh  $A, M, N$  thẳng hàng.

**375** ([BBN23b], VD5, p. 78). Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây cung  $AB = R\sqrt{2}$ .  $M$  là điểm chính giữa cung nhỏ  $AB$ . Tính độ dài  $AM$  theo  $R$ .

**376** ([BBN23b], 1.1., p. 79). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $\widehat{A} = 70^\circ$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . So sánh 3 cung nhỏ  $AB, AC, BC$ .

**377** ([BBN23b], 1.2., p. 79). Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây cung  $AB = R\sqrt{3}$ .  $M$  là điểm chính giữa cung nhỏ  $AB$ . Tính độ dài  $AM$  theo  $R$ .

**378** ([BBN23b], 1.3., p. 79). Cho đường tròn  $(O; R), \left(O; \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ . Tiếp tuyến của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại  $A, B$ . Tính số đo cung nhỏ  $AB$  của  $(O; R)$ .

**379** ([BBN23b], 1.4., p. 79). Từ điểm  $A$  trên đường tròn  $(O; 1)$  đặt liên tiếp các cung có dây là  $AB = 1, BC = \sqrt{3}, CD = \sqrt{2}$ . Chứng minh: (a)  $AC$  là đường kính của  $(O)$ . (b)  $\triangle ACD$  vuông cân.

**380** ([BBN23b], 1.5., p. 79). Cho đường tròn  $(O; R)$  & dây  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là điểm chính giữa 2 cung nhỏ  $AB$ , cung lớn  $AB$ ,  $P$  là trung điểm dây cung  $AB$ . (a) Chứng minh  $M, N, O, P$  thẳng hàng. (b) Tìm số đo cung nhỏ  $AB$  để tứ giác  $ABMO$  là hình thoi.

**381** ([BBN23b], 1.6., p. 79). Cho đường tròn  $(O; R)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ .  $D, E, F$  lần lượt là tiếp điểm của đường tròn với cạnh  $BC, CA, AB$ . Biết  $\frac{s\widehat{EF}}{3} = \frac{s\widehat{FD}}{4} = \frac{s\widehat{DE}}{5}$ . Tính số đo 3 góc  $\triangle ABC$ .

**382** ([BBN23b], 1.7., p. 79). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Vẽ đường cao  $AH$ , cắt đường tròn tại 1 điểm thứ 2 là  $D$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, AC$ . Chứng minh  $OM = \frac{1}{2}CD, ON = \frac{1}{2}BD$ .

**383** ([BBN23b], p. 80, dựng ngũ, thập giác đều bằng phép chia hoàng kim). Cho  $A \in (O; R)$ , đường kính  $BK \perp OA$ , dựng  $C$  là trung điểm  $OA$ . Dựng cung tròn tâm  $C$  bán kính  $CB$  cắt tia  $AO$  tại  $E$ . Chứng minh  $OE$  là cạnh của hình thập giác đều &  $BE$  là cạnh của ngũ giác đều.

**384** ([Tuy23], VD11, p. 127). Chứng minh nếu 1 tiếp tuyến song song với 1 dây thì tiếp điểm chia đôi cung căng dây.

**385** ([Tuy23], 70., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  vuông góc tại  $A$ ,  $AB = \frac{1}{2}BC$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Chứng minh  $s\widehat{EF} : s\widehat{FD} : s\widehat{DE} = 3 : 4 : 5$ .

**Định lý 1** (Dựng hình). Nếu  $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 3$  thỏa  $(m, n) = 1$  thì phương trình  $mx + ny = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{mn} = \frac{x}{n} + \frac{y}{m}$  có nghiệm nguyên, suy ra nếu dựng được đa giác đều  $m$  cạnh &  $n$  cạnh thì dựng được đa giác đều  $mn$  cạnh.

**386** ([BBN23b], p. 81). Trên mặt phẳng đã cho 1 đường tròn & tâm của nó. Chỉ bằng compa, chia đường tròn thành 4 phần bằng nhau.

**387** ([Tuy23], 71., p. 127). Từ 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O; R)$  vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $B, C$  là 2 tiếp điểm, chúng tạo với nhau 1 góc  $\alpha$ . Trên cung nhỏ  $\widehat{BC}$  lấy 1 điểm  $D$ . Tiếp tuyến tại  $D$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$ . 2 tia  $OE, OF$  cắt đường tròn tại  $M, N$ . (a) Chứng minh cung nhỏ  $\widehat{MN}$  có số đo không đổi. (b) Muốn cho  $\widehat{MN} = 60^\circ$  thì điểm  $A$  phải cách  $O$  1 khoảng bao nhiêu?

**388** ([Tuy23], 72., p. 127). Cho  $\triangle ABC, \widehat{B} = 60^\circ$ , đường trung tuyến  $AM$ , đường cao  $CH$ . Vẽ đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BHM$ . Chứng minh  $\widehat{BM} = \widehat{MH} = \widehat{HB}$ .

**389** ([Tuy23], 73., p. 128). Từ 1 điểm  $A$  trên đường tròn  $(O; 1)$ , đặt liên tiếp các cung  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}$  có 3 dây căng cung bằng  $1, \sqrt{3}, \sqrt{2}$ . Chứng minh: (a)  $AC$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ . (b)  $\triangle ACD$  vuông cân.

**390** ([Tuy23], 74., p. 128). Cho đường tròn  $(O; R)$ , dây  $AB = R\sqrt{3}$ . Vẽ đường kính  $CD \perp AB$ ,  $C$  thuộc cung lớn  $AB$ . Trên cung  $AC$  lấy 1 điểm  $M$ . Vẽ dây  $AN \parallel CM$ . Tính  $MN$ .

**391** ([Tuy23], 75., p. 128). Trên đường tròn  $(O)$ , lấy 1 số cung sao cho bất kỳ 2 cung nào cũng không có điểm chung & tổng số đo các cung đó nhỏ hơn  $180^\circ$ . Chứng minh trên các cung còn lại, có thể tìm được 2 điểm  $A, B$  sao cho  $A, B, O$  thẳng hàng.

**392** ([Bin23b], VD31, p. 83). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . 2 điểm  $C, D$  di chuyển trên đường tròn sao cho  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . Trong trường hợp nào thì dây  $CD$  có độ dài không đổi?

**393** ([Bin23b], 194., p. 84). Tính bán kính của đường tròn  $(O)$  biết dây  $AB$  của đường tròn có độ dài bằng  $2a$  & khoảng cách từ điểm chính giữa của cung  $AB$  đến dây  $AB$  bằng  $h$ .

**394** ([Bin23b], 195., p. 84). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2$  cm, dây  $CD \parallel AB$ ,  $C \in \widehat{AD}$ . Tính độ dài các cạnh của hình thang  $ABDC$  biết chu vi hình thang bằng 5 cm.

**395** ([Bin23b], 196., p. 84). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 20$  cm.  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm  $H$  thuộc bán kính  $OA$  sao cho  $OH = 6$  cm. Đường vuông góc với  $OA$  tại  $H$  cắt nửa đường tròn ở  $D$ . Vẽ dây  $AE \parallel CD$ .  $K$  là hình chiếu của  $E$  trên  $AB$ . Tính diện tích  $\triangle AEK$ .

**396** ([Bin23b], 197., p. 84). Cho  $\triangle ABC$  đều có diện tích  $S$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên 3 cung  $AB, BC, CA$ , lấy lần lượt 3 điểm  $A', B', C'$  sao cho 3 cung  $\widehat{AA'}, \widehat{BB'}, \widehat{CC'}$  đều có số đo bằng  $30^\circ$ . Tính diện tích phần chung của  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ .

**397** ([Bin23b], 198., p. 84).  $R, r$  lần lượt là bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp 1 tam giác. Chứng minh  $R \geq 2r$ .

## 12 Góc Nội Tiếp

[1] Cho đường tròn  $(O; R)$ ,  $\angle BAC$ : góc nội tiếp chắn cung  $\widehat{BC}$  thì  $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ . [2] Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau. [3] Các góc nội tiếp cùng chắn 1 cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau. [4] Góc nội tiếp  $\leq 90^\circ$  có số đo bằng nửa số đo góc ở tâm cùng chắn 1 cung. [5] Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

**398** ([BBN23b], H1, p. 83). Đ/S? Nếu sai, sửa cho đúng. (a) Trong 1 đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn 1 cung thì bằng nhau. (b) Trong 1 đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn 1 dây thì bằng nhau. (c) Trong 1 đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn 1 cung. (d) Trong 1 đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau thì chắn các cung bằng nhau.

**399** ([BBN23b], H3, p. 83). Cho  $BD$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ ,  $\widehat{BAC} = 40^\circ$ . Tính  $\widehat{CBD}$ .

**400** ([BBN23b], VD1, p. 83). Cho  $\triangle ABC$  có  $AD$  là đường phân giác. Vẽ đường tròn tâm  $O$  đi qua  $A, D$  đồng thời tiếp xúc với  $BC$  tại  $E$ . Đường tròn này cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$ . Chứng minh: (a)  $EF \parallel BC$ . (b)  $\triangle AED \sim \triangle ADC, \triangle AFD \sim \triangle ADB$ . (c)  $AC \cdot AE = AB \cdot AF = AD^2$ .

**401** ([BBN23b], VD2, p. 84). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $AB < AC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $BD, CE$  là 2 đường cao của  $\triangle ABC$ . (d) là tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn  $(O; R)$ ,  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $B, C$  trên (d). Chứng minh: (a)  $\triangle AMB \sim \triangle CDB$ . (b)  $\frac{AB}{AC} = \frac{AM \cdot BE}{AN \cdot CD}$ .

Hint. Để chứng minh  $\frac{x}{y} = \frac{ab}{cd}$ , cần tìm 2 cặp tam giác đồng dạng mà có thể suy ra được  $\frac{x}{m} = \frac{a}{c}, \frac{m}{y} = \frac{b}{d}$ .

**402** ([BBN23b], VD3, p. 85). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 2 dây  $AB \perp CD$ ,  $C$  nằm trên cung nhỏ  $AB$ . Chứng minh  $BC^2 + AD^2 = 4R^2$ .

**403** ([BBN23b], VD4, p. 85). Từ 1 điểm  $M$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MB, MD$  & 1 cát tuyến cắt đường tròn tại  $A, C$ ,  $A$  nằm giữa  $M, C$ . Chứng minh: (a)  $\triangle MBA \sim \triangle MCB$ . (b)  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ .

**404** ([BBN23b], 2.1., p. 86). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . 1 đường thẳng (d) tiếp xúc với  $(O), (O')$  lần lượt tại  $B, C$ . (a) Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông. (b)  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $AM$  là tia tiếp tuyến chung của 2 đường tròn. (c) Chứng minh  $\widehat{OMO'} = 90^\circ$ . (d) 2 tia  $BA, CA$  lần lượt cắt  $(O), (O')$  tại  $D, E$ . Chứng minh diện tích  $\triangle ADE$  bằng diện tích  $\triangle ABC$ .



405 ([BBN23b], 2.2., p. 86). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$  sao cho 2 tâm  $O, O'$  nằm về 2 phía khác nhau đối với đường thẳng  $AB$ . Đường thẳng  $(d)$  quay quanh  $B$  cắt  $(O), (O')$  tại  $C, D$  sao cho  $B$  nằm giữa  $C, D$ . (a) Chứng minh  $\widehat{ACD}, \widehat{ADC}$  không đổi. (b) Tìm vị trí đường thẳng  $(d)$  để  $CD$  dài nhất.

406 ([BBN23b], 2.3., p. 86). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB > AC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tia phân giác của  $\widehat{BAC}$  cắt đường tròn tại  $E \neq A$ . Kẻ đường kính  $DE$  của  $(O)$ . Chứng minh  $2\widehat{DEA} = \widehat{ACB} - \widehat{ABC}$ .

407 ([BBN23b], 2.4., p. 86). Cho đường tròn  $(O; R)$  có 2 đường kính  $AB \perp CD$ .  $I$  là trung điểm  $OA$ . Qua  $I$  vẽ dây cung  $MQ \perp OA$ ,  $M \in \widehat{AC}, Q \in \widehat{AD}$ . Kẻ dây  $MP \perp MQ$ . (a) Chứng minh tứ giác  $PMIO$  là hình thang vuông &  $O, P, Q$  thẳng hàng. (b) Tính  $\widehat{MBA}$ . (c)  $H$  là giao điểm của  $AP, MQ$ . Chứng minh  $MH \perp MQ = MP^2$ .

408 ([BBN23b], 2.5., p. 86). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . 1 tiếp tuyến chung tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$ , tiếp xúc với  $(O')$  tại  $D$ . Vẽ đường tròn  $(K)$  ngoại tiếp  $\triangle ACD$ , đường tròn này cắt đường thẳng  $AB$  tại điểm thứ 2 là  $E$ . Chứng minh tứ giác  $BCED$  là hình bình hành.

409 ([BBN23b], 2.6., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ,  $AB < AC$ , nội tiếp đường tròn tâm  $O$ .  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ . Kẻ đường kính  $AD$  của  $(O)$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành. (b)  $\triangle AHO$  cân.

410 ([BBN23b], 2.7., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm 1 điểm  $D$  ở trong tam giác sao cho  $\widehat{DBA} = \widehat{DAC} = \widehat{DCB}$ .

411 ([BBN23b], 2.8., p. 86). Từ điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  & cát tuyến  $ADE$ . Kẻ dây cung  $EN \parallel BC$ .  $I$  là giao điểm của  $DN, BC$ . Chứng minh  $BI = CI$ .

412 ([BBN23b], p. 87). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 dây  $AB$  cố định.  $M$  là điểm nằm giữa  $A, B$ . Vẽ dây  $CD$  đi qua  $M$ . Tìm vị trí của  $M$  để tích  $MC \cdot MD$  lớn nhất.

413 ([BBN23b], p. 87). Cho đường tròn  $(O)$  có dây cung  $AB$  không đi qua tâm. Có thể dựng được điểm  $M$  trên cung lớn  $AB$  sao cho  $2MA = 3MB$  không?

414 ([Tuy23], VD12, p. 129). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .  $C$  là 1 điểm cố định trên đường tròn & điểm  $M$  di động trên đường tròn đó,  $M, O, C$  không thẳng hàng. 2 đường thẳng  $CM, AB$  cắt nhau tại  $D$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OMD$  luôn đi qua 2 điểm cố định.

415 ([Tuy23], VD13, p. 130). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Qua  $A$  vẽ tiếp tuyến  $xy$ . Từ  $B$  vẽ  $BM \parallel xy$ ,  $M \in AC$ . Chứng minh: (a)  $AB^2 = AM \cdot AC$ . (b)  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCM$ .

416 ([Tuy23], 76., p. 131). Cho  $\triangle ABC$  trực tâm  $H$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Chứng minh  $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2 = 4R^2$ .

417 ([Tuy23], 77., p. 131). Trên 1 nửa đường tròn đường kính  $AB$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $s\widehat{AM} = s\widehat{BN} < 90^\circ$ . 2 dây  $AN, BM$  cắt nhau tại  $I$ . Biết  $\widehat{AIM} = \alpha = 90^\circ$ , tính tỷ số diện tích  $\triangle MNI, \triangle ABI$ .

418 ([Tuy23], 78., p. 131). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $B$  vẽ 1 cát tuyến cắt 2 đường tròn này lần lượt tại  $M, N$ . (a) Chứng minh  $\triangle AMN$  luôn đồng dạng với chính nó. (b) Tìm vị trí của  $MN$  để  $\triangle AMN$  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó nếu  $\widehat{AOO'} = 120^\circ$ .

419 ([Tuy23], 79., pp. 131–132). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . 3 đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ , cắt đường tròn lần lượt tại  $A', B', C'$ . (a) Chứng minh  $A', B', C'$  lần lượt đối xứng với  $H$  qua  $BC, CA, AB$ . (b) Chứng minh 3 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle HAB, \triangle HBC, \triangle HCA$  có bán kính bằng nhau. (c) Khi  $BC$  cố định, đỉnh  $A$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì trực tâm  $H$  di động trên đường nào?

420 ([Tuy23], 80., p. 132). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Gọi giao điểm của  $IA, IB, IC$  với  $(I)$  lần lượt là  $A', B', C'$ . Chứng minh  $A'D, B'E, C'F$  đồng quy.

421 ([Tuy23], 81., p. 132). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên cung nhỏ  $\widehat{BC}$  lấy 1 điểm  $M$ . (a) Chứng minh  $MB + MC = MA$ . (b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $MA$  với  $BC$ . Chứng minh  $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MH}$ .

422 ([Tuy23], 82., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , 1 điểm  $H$  cố định trên  $AB$ . Từ  $B$  vẽ tiếp tuyến  $xy$  & trên  $xy$  lấy điểm  $K$  di động. Vẽ đường tròn  $(K; KH)$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $C, D$ . Chứng minh đường thẳng  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

423 ([Bin23b], VD32, p. 85).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  có  $AB = 8$  cm,  $AC = 15$  cm, đường cao  $AH = 5$  cm. Tính bán kính đường tròn.

424 ([Bin23b], VD33, p. 85). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ , gọi  $(I; r)$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $H$  là tiếp điểm của  $AB$  với đường tròn  $(I)$ ,  $D$  là giao điểm của  $AI$  với đường tròn  $(O)$ ,  $DK$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ .  $d$  là độ dài  $OI$ . Chứng minh: (a)  $\triangle AHI \sim \triangle KCD$ . (b)  $DI = DB = DC$ . (c)  $IA \cdot ID = R^2 - d^2$ . (d) (định lý Euler)  $d^2 = R^2 - 2Rr$ .

425 ([Bin23b], 199., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $BC = a, CA = b, AB = c$  & nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Chứng minh  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

- 426** ([Bin23b], 200., p. 86). Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB = 12$  cm. 1 đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $M$  & cắt tiếp tuyến của đường tròn tại  $B$  ở  $N$ .  $I$  là trung điểm  $MN$ . Tính  $AM$  biết  $AI = 13$  cm.
- 427** ([Bin23b], 201., p. 86). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ .  $I$  là trung điểm  $OB$ . Tia  $CI$  cắt đường tròn ở  $E$ ,  $EA$  cắt  $CD$  ở  $K$ . Tính  $DK$ .
- 428** ([Bin23b], 202., p. 86). Cho nửa đường tròn đường kính  $BC$ . 2 điểm  $M, N$  thuộc nửa đường tròn sao cho  $\widehat{BM} = \widehat{MN} = \widehat{NC}$ . 2 điểm  $D, E$  thuộc đường kính  $BC$  sao cho  $BD = DE = EC$ .  $A$  là giao điểm của  $MD, NE$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  đều.
- 429** ([Bin23b], 203., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 3 đường cao  $AD, BE, CF$  cắt đường  $(O)$  lần lượt ở  $M, N, K$ . Chứng minh:  $\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF} = 4$ .
- 430** ([Bin23b], 204., p. 87). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  có dây  $CD \perp AB$ . Điểm  $M \in (O)$  bất kỳ,  $MC$  không song song với  $AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $MD, AB$ ,  $F$  là giao điểm của  $MC, AB$ . Chứng minh  $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF}$ .
- 431** ([Bin23b], 205., p. 87). Qua điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ cát tuyến  $ABC$ .  $E$  là điểm chính giữa cung  $BC$ ,  $DE$  là đường kính của đường tròn.  $AD$  cắt đường tròn tại  $I$ ,  $IE$  cắt  $BC$  tại  $K$ . Chứng minh  $AC \perp BK = AB \cdot KC$ .
- 432** ([Bin23b], 206., p. 87). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , bán kính  $OC = R$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt thuộc 2 cung  $AC, BC$ .  $E, G$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N$  trên  $AB$ .  $F, H$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N$  trên  $OC$ . Chứng minh  $EF = GH$ .
- 433** ([Bin23b], 207., p. 87). Trong đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , vẽ 3 dây  $AA' \parallel BC, BB' \parallel AC, CC' \parallel AB$ . Trên 3 cung  $AA', BB', CC'$ , lấy 3 cung  $AD, BE, CF$  lần lượt bằng  $\frac{1}{3}$  các cung trên. Chứng minh  $\triangle DEF$  đều.
- 434** ([Bin23b], 208., p. 87). 2 đường cao  $BH, CK$  của  $\triangle ABC$  cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt ở  $D, E$ . Tính  $\widehat{A}$  biết  $DE$  là đường kính đường tròn.
- 435** ([Bin23b], 209., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $H$  là trực tâm,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . (a) Chứng minh  $AI$  là tia phân giác  $\widehat{OAH}$ . (b) Cho  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ , chứng minh  $IO = IH$ .
- 436** ([Bin23b], 210., p. 87). Tính  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$  biết khoảng cách từ  $A$  đến trực tâm  $\triangle ABC$  bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 437** ([Bin23b], 211., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . 1 điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BC$ . (a) Chứng minh  $MA = MB + MC$ . (b)  $D$  là giao điểm của  $MA, BC$ . Chứng minh  $\frac{DM}{BM} + \frac{DM}{CM} = 1$ . (c) Tính  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  theo  $R$ .
- 438** ([Bin23b], 212., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  có  $\widehat{B} = 54^\circ, \widehat{C} = 18^\circ$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Chứng minh  $AC - AB = R$ .
- 439** ([Bin23b], 213., pp. 87–88). 2 đường tròn  $(O; R), (O'; R)$  cắt nhau ở  $A, B$ . 1 đường thẳng  $d \parallel OO'$  cắt 2 đường tròn này tại  $C, D, E, F$  theo thứ tự trên  $d$ ,  $C, E \in (O), D, F \in (O')$ . (a) Chứng minh  $CDO'O$  là hình bình hành. (b) Tính  $CD$  biết  $AB = a$ . (c) Chứng minh  $\widehat{CAD}$  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng  $d$ ,  $d$  luôn luôn song song với  $OO'$ .
- 440** ([Bin23b], 214., p. 88). Cho điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . 2 điểm  $D, E$  thuộc nửa đường tròn đó sao cho  $HC$  là tia phân giác của  $\widehat{DHE}$ . Chứng minh  $CH^2 = DH \cdot EH$ .
- 441** ([Bin23b], 215., p. 88). 1 đường tròn  $(O)$  đi qua đỉnh  $A$  & 2 trung điểm  $D, E$  của 2 cạnh  $AB, AC$  của  $\triangle ABC$  sao cho  $BC$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $K$ . Chứng minh  $KA^2 = KB \cdot KC$ .
- 442** ([Bin23b], 216., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5, BC = 7, CA = 6$ . Chứng minh tồn tại 1 điểm  $E$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho 3 độ dài  $AE, BE, CE$  là 3 số tự nhiên.
- 443** ([Bin23b], 217., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$ . Chứng minh  $AB^2 - AM^2 = MB \cdot MC$  (bằng cách vẽ đường tròn  $(A, AB)$ ).
- 444** ([Bin23b], 218., p. 88). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $AD$ . Chứng minh  $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$  (bằng cách vẽ giao điểm  $E$  của  $AD$  với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ).
- 445** ([Bin23b], 219., p. 88). 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt di chuyển trên 2 đường tròn  $(O), (O')$  sao cho chiều từ  $A$  đến  $M$  & từ  $A$  đến  $N$  trên 2 đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ & 2 cung  $\widehat{AM}, \widehat{AN}$  có số đo bằng nhau. Chứng minh đường trung trực của  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

## 13 Góc Tạo Bởi Tia Tiếp TUYẾN & Dây CUNG

**[1]** Cho đường tròn  $(O; R)$ ,  $Ax$ : tia tiếp tuyến,  $AB$ : dây cung,  $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{AB}$ . **[2]** Trong 1 đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến & dây cung & góc nội tiếp cùng chắn 1 cung thì bằng nhau.

446 ([Tuy23], 83., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Vẽ dây  $AC$  của đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O')$  & dây  $AD$  của đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ . Chứng minh: (a)  $BC \cdot BD = AB^2$ . (b)  $\frac{BC}{BD} = \frac{AC^2}{AD^2}$ .

447 ([Tuy23], 84., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . 1 tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với  $(O)$  tại  $C$  & tiếp xúc với đường tròn  $(O')$  tại  $D$ . Đường tròn  $(I)$  ngoại tiếp  $\triangle ACD$  cắt đường thẳng  $AB$  tại 1 điểm thứ 2 là  $E$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = 180^\circ$ . (b) Tứ giác  $BCED$  là hình bình hành.

448 ([Tuy23], 85., p. 132). Cho đường tròn  $(O; \sqrt{22})$ .  $M$  là 1 điểm bên ngoài đường tròn,  $N$  là 1 điểm bên trong đường tròn. Đoạn thẳng  $MN$  cắt đường tròn tại  $A$ . Biết  $AM = AN = 3, ON = 2$ . Tính độ dài tiếp tuyến  $MT$  với đường tròn.

449 ([Tuy23], 86., p. 133). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy 1 điểm  $M$ . Từ  $M$  vẽ tia  $Mx$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $C$ .  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . (a) Chứng minh  $CA, CB$  là 2 tia phân giác của 2 góc tạo bởi tiếp tuyến  $Mx$  với tia  $CH$ . (b) Cho  $AM = a, CM = 2a$ . Tính  $AB, CH$ .

450 ([Tuy23], 87., p. 133). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Trên cung  $\widehat{BC}$  lấy 1 điểm  $M$ . Trên tia  $AM$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = BM$ . (a) Chứng minh  $\triangle CMN$  vuông cân. (b) Qua  $N$  vẽ đường thẳng  $d \perp AM$ . Chứng minh  $d$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

451 ([Tuy23], 88., p. 133). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên cung nhỏ  $\widehat{BC}$  lấy 1 điểm  $M$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , cắt 3 dây  $MA, MB, MC$  lần lượt tại  $A', B', C'$ . (a) Chứng minh  $\triangle A'B'C'$  đều. (b) Từ  $A, B, C$  vẽ 3 tiếp tuyến  $AD, BE, CF$  với đường tròn  $(I)$ . Chứng minh  $AD = BE + CF$ .

452 ([Bin23b], VD34, p. 89). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Đường nối tâm  $OO'$  cắt  $(O), (O')$  tại  $A, B, C, D$  theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $EF$ ,  $E \in (O), F \in (O')$ .  $M$  là giao điểm của  $AE, DF$ ,  $N$  là giao điểm của  $BE, CF$ . Chứng minh: (a)  $MENF$  là hình chữ nhật. (b)  $MN \perp AD$ . (c)  $MA \cdot ME = MD \cdot MF$ .

453 ([Bin23b], VD35, p. 89). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$ . Dây  $BD$  của  $(O)$  song song với  $AC$ ,  $E$  là giao điểm của  $AD$  với  $(O)$ ,  $I$  là giao điểm của  $BE, C$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm  $AC$ .

454 ([Bin23b], 220., p. 90). Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đi qua  $A$  & tiếp xúc với  $BC$  tại  $B$ . Kẻ dây  $BD \parallel AC$ .  $I$  là giao điểm của  $CD$  với  $(O)$ . Chứng minh  $\widehat{IAB} = \widehat{IBC} = \widehat{ICA}$ .

455 ([Bin23b], 221., p. 90). Cho đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Dây  $BC$  của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại  $H$ .  $D, E$  lần lượt là giao điểm  $\neq A$  của  $AB, AC$  với đường tròn nhỏ. Chứng minh: (a)  $DE \parallel BC$ . (b)  $AH$  là tia phân giác  $\widehat{BAC}$ .

456 ([Bin23b], 222., p. 90). Cho điểm  $B$  thuộc đoạn thẳng  $AC$ . Vẽ về 1 phía của  $AC$  3 nửa đường tròn có đường kính  $AC, AB, BC$  có tâm lần lượt là  $O, O_1, O_2$ .  $EF$  là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn  $(O_1), (O_2)$ ,  $E \in (O_1), F \in (O_2)$ . Đường vuông góc với  $AC$  tại  $B$  cắt nửa đường tròn  $(O)$  ở  $D$ . Chứng minh  $BEDF$  là hình chữ nhật.

457 ([Bin23b], 223., p. 90). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(A)$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $C, D$ . Kẻ dây  $BN$  của  $(O)$ , cắt  $(A)$  tại điểm  $E$  ở bên trong  $(O)$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{CEN} = \widehat{EDN}$ . (b)  $NE^2 = NC \cdot ND$ .

458 ([Bin23b], 224., p. 91).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O, 2.5 \text{ cm})$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $C$  cắt tia phân giác của  $\widehat{B}$  tại  $K$ . Tính  $BK$  biết  $BK$  cắt  $AC$  tại  $D$ ,  $BD = 4 \text{ cm}$ .

459 ([Bin23b], 225., p. 91). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo cắt nhau ở  $E$ . Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABE, \triangle CDE$ . Tìm điều kiện của tứ giác để 2 đường tròn tiếp xúc nhau.

460 ([Bin23b], 226., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến tại  $A$  cắt  $BC$  ở  $I$ . (a) Chứng minh  $\frac{BI}{CI} = \frac{AB^2}{AC^2}$ . (b) Tính  $IA, IC$  biết  $AB = 20 \text{ cm}$ ,  $BC = 24 \text{ cm}$ ,  $CA = 28 \text{ cm}$ .

461 ([Bin23b], 227., p. 91). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua  $A, B$  biết đoạn tiếp tuyến kẻ từ  $D$  đến đường tròn đó bằng 4 cm.

462 ([Bin23b], 228., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường trung trực của  $AB$  cắt  $BC$  ở  $K$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACK$ .

463 ([Bin23b], 229., p. 91). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , có  $BD^2 = AB \cdot CD$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$  tiếp xúc với  $BC$ .

464 ([Bin23b], 230., p. 91). Cho hình bình hành  $ABCD$ ,  $\widehat{A} \leq 90^\circ$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD$  cắt  $AC$  ở  $E$ . Chứng minh  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABE$ .

465 ([Bin23b], 231., p. 91). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . tiếp Kẻ tiếp tuyến chung  $CC'$ ,  $C \in (O), C' \in (O')$ , kẻ đường kính  $COD$ .  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $OO'$  với  $C'D, CC'$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{EAF} = 90^\circ$ ,  $A, C, C'$  nằm cùng phía đối với  $OO'$ . (b)  $FA$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACC'$ .

466 ([Bin23b], 232., p. 91). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ , trong đó tiếp tuyến chung  $CD$  song song với cát tuyến chung  $EBF$ ,  $C, E \in (O)$ ,  $D, F \in (O')$ ,  $B$  nằm giữa  $E, F$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $AD, AC$  với  $EF$ .  $I$  là giao điểm của  $CE, DF$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ICD = \triangle BCD$ . (b)  $IB$  là đường trung trực của  $MN$ .



## 14 Góc Có Đỉnh Ở Bên Trong, Bên Ngoài Đường Tròn

[1] Số đo góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo 2 cung bị chắn. [2] Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo 2 cung bị chắn. Định lý vẫn đúng trong trường hợp 1 cạnh hoặc 2 cạnh của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn là tiếp tuyến. [3] Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $MN$ . 3 điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm ngoài, nằm trên, nằm trong đường tròn,  $A, B, C$  cùng nằm trên 1 nửa mặt phẳng bờ  $MN$ :  $\widehat{MAN} < \widehat{MBN} < \widehat{MCN}$ . [4]  $\widehat{BEC}$ : góc có đỉnh ở bên trong đường tròn  $(O; R)$  chắn 2 cung  $\widehat{DmA}, \widehat{BnC}$ :  $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{DmA} + \text{sđ}\widehat{BnC})$ . [5]  $\widehat{BEC}$ : góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn  $(O; R)$  chắn 2 cung nhỏ  $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ :  $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}|\text{sđ}\widehat{AB} - \text{sđ}\widehat{CD}|$ .

467 ([BBN23b], VD1, p. 89). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C \in \widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC} < \widehat{AC}$ . Tiếp tuyến tại  $C$  của nửa đường tròn cắt đường thẳng  $AB$  tại  $D$ . Biết  $\triangle ACD$  cân tại  $C$ . Tính  $\widehat{ADC}$ .

468 ([BBN23b], VD2, p. 90). Cho đường tròn  $(O; R)$  có dây  $AB = R\sqrt{3}$ . Trên cung lớn  $AB$  lấy dây  $CD = R$ ,  $C \in \widehat{BD}$ . Chứng minh  $AC \perp BD$ .

469 ([BBN23b], VD3, p. 90). Cho đường tròn  $(O; R)$ . 2 đường kính  $AB \perp CD$ .  $M$  là điểm chính giữa của cung  $BC$ . Dây  $AM$  cắt  $OC$  tại  $E$ . Tia  $CM$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $N$ . (a) Chứng minh  $\triangle CEM$  cân. (b) Chứng minh  $BN = BC$ . (c) Tính diện tích  $\triangle BCN$  theo  $R$ .

470 ([BBN23b], VD4, p. 91). Trên đường tròn  $(O)$  lấy  $A, B, C, D$  theo thứ tự sao cho  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ .  $I$  là giao điểm của  $BD, AC$ . Biết  $\widehat{BIC} = 70^\circ$ , tính  $\widehat{ABD}$ .

471 ([BBN23b], 3.1., p. 91). Cho điểm  $P$  ở ngoài đường tròn  $(O)$ . Kẻ cát tuyến  $PAB, PCD$  với đường tròn,  $A$  nằm giữa  $P, B$ ;  $C$  nằm giữa  $P, D$ . Lấy  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BD$ . Biết  $\text{sđ}\widehat{BD} = 100^\circ$ , tính  $\widehat{APC} + \widehat{AMC}$ .

472 ([BBN23b], 3.2., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Lấy  $D \in \widehat{AB}$  không chứa  $C$ , lấy  $E \in \widehat{AC}$  không chứa  $B$  sao cho  $DE \parallel BC$ . Tia  $AE$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $AD \perp AF = AB \cdot AC$ . (b) Tìm vị trí của  $D$  để  $CD \parallel AE$ .

473 ([BBN23b], 3.3., p. 91). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 dây  $AB$ . Vẽ đường kính  $CD \perp AB$ ,  $D$  thuộc cung nhỏ  $AB$ . Trên cung nhỏ  $BC$  lấy 1 điểm  $M$ . 2 đường thẳng  $CM, DM$  cắt đường thẳng  $AB$  lần lượt tại  $E, F$ . Tiếp tuyến của đường tròn tại  $M$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $N$ . (a) Chứng minh  $N$  là trung điểm của  $EF$ . (b) Tìm vị trí của điểm  $M$  để  $\triangle AEM$  cân tại  $M$ .

474 ([BBN23b], 3.4., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . 2 tiếp tuyến tại  $B, C$  của đường tròn  $(O)$  cắt nhau tại  $M$ . Biết  $\widehat{BAC} = 2\widehat{BMC}$ . Tính  $\widehat{BAC}$ .

475 ([BBN23b], 3.5., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  biết  $\widehat{BOC} = 90^\circ$ . Vẽ đường tròn tâm  $I$  đường kính  $BC$ , cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Chứng minh  $MN = R$ .

476 ([Tuy23], VD14, p. 134). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . Trên 2 cung  $AB$  lần lượt lấy 2 điểm  $M, N$ . 2 tia  $AM, NB$  cắt nhau tại  $C$ . 2 tia  $AN, MB$  cắt nhau tại  $D$ . Biết  $\widehat{ACN} = \widehat{ADM}$ , chứng minh  $AB \perp CD$ .

477 ([Tuy23], 89., p. 135). Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . 3 tia  $AI, BI, CI$  cắt đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Dây  $EF$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $DI = DB$ . (b)  $AM = AN$ . (c)  $I$  là trực tâm  $\triangle DEF$ .

478 ([Tuy23], 90., p. 135). Từ 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ tiếp tuyến  $AB$  & cát tuyến  $ACD$ . Tia phân giác  $\widehat{BAC}$  cắt  $BC, BD$  lần lượt tại  $M, N$ . Vẽ dây  $BF \perp MN$ , cắt  $MN$  tại  $H$ , cắt  $CD$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $\triangle BMN$  cân. (b)  $FD^2 = FB \cdot FE$ .

479 ([Tuy23], 91., p. 135). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ . Trên đường kính  $AB$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = R\sqrt{2}$ . Vẽ dây  $CF$  đi qua  $E$ . Tiếp tuyến của đường tròn tại  $F$  cắt đường thẳng  $CD$  tại  $M$ , vẽ dây  $AF$  cắt  $CD$  tại  $N$ . Chứng minh: (a)  $MF \parallel AC$ . (b) Tia  $CF$  là tia phân giác  $\widehat{BCD}$ . (c)  $MN, OD, OM$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác vuông.

480 ([Tuy23], 92., p. 135). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Đường phân giác trong & ngoài của  $\hat{A}$  cắt đường thẳng  $BC$  lần lượt tại  $D, E$ . Biết  $AD = AE$ ,  $AB = 1.4, C = 4.8$ , tính  $R$ .

481 ([Tuy23], 93., p. 135). Cho đa giác lồi 100 đỉnh. Chứng minh có thể chọn ra 3 đỉnh trong số 100 đỉnh của đa giác mà đường tròn đi qua 3 đỉnh đó sẽ chứa tất cả các đỉnh còn lại của đa giác.

482 ([Tuy23], 94., p. 135). Cho 2 đường thẳng  $a, b$  cắt nhau tại 1 điểm ở ngoài phạm vi tờ giấy. Làm thế nào đo được góc nhọn giữa 2 đường thẳng đó nếu trong tay chỉ có 1 thước đo góc với bán kính đủ dùng.

483 ([Bin23b], VD36, p. 92). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $D$  di chuyển trên cung  $AC$ .  $E$  là giao điểm của  $AC, BD$ ,  $F$  là giao điểm của  $AD, BC$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{AFB} = \widehat{ABD}$ . (b)  $AE \cdot BF$  không đổi.

484 ([Bin23b], 233., p. 92). Tứ giác  $ABCD$  có 2 góc  $\hat{B}, \hat{D}$  tù. Chứng minh  $AC > BD$ .

485 ([Bin23b], 234., p. 92). Cho đường tròn  $(O, 2 \text{ cm})$ , 2 bán kính  $OA \perp OB$ .  $M$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ .  $C$  là giao điểm của  $AM, OB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $OA$ . Tính diện tích hình thang  $OHMC$ .

486 ([Bin23b], 235., p. 92).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 3 điểm  $M, N, P$  là điểm chính giữa của 3 cung  $AB, BC, CA$ .  $D$  là giao điểm của  $MN, AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $PN, AC$ . Chứng minh  $DE \parallel BC$ .

487 ([Bin23b], 236., p. 93). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $M, N, P$  lần lượt là tâm của 3 đường tròn bàng tiếp trong 3 góc  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ .  $K$  là điểm đối xứng với  $I$  qua  $O$ . Chứng minh  $K$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNP$ .



## 15 Cung Chứa Góc

[1]  $A, B$  cố định,  $\widehat{AMB} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ) \Rightarrow$  Quỹ tích điểm  $M$  là 2 cung  $\widehat{AmB}, \widehat{Am'B}$  chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn  $AB$ . Nếu  $\alpha = 90^\circ$ , quỹ tích điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$ . [2] Bài toán quỹ tích: *Phần thuận*: Mọi điểm có tính chất  $\mathcal{T}$  đều thuộc hình  $\mathcal{H}$ . *Phần đảo*: Mọi điểm thuộc hình  $\mathcal{H}$  đều có tính chất  $\mathcal{T}$ . *Kết luận*: Quỹ tích các điểm  $M$  có tính chất  $\mathcal{T}$  là hình  $\mathcal{H}$ .

488. (a) Cho  $\triangle ABC$  có cạnh  $BC$  cố định,  $A$  thay đổi sao cho  $\widehat{A} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$  cố định, điểm  $M$  thỏa mãn  $\widehat{MBC} = \widehat{ABC}, \widehat{MCB} = \widehat{ACB}$  với  $x \in (0, \infty)$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$ . (b) Mở rộng bài toán cho tứ giác.

489 ([BBN23b], H1, p. 93). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  có cạnh  $AB$  cố định, điểm  $C$  chuyển động trên  $(O)$ , đường cao  $AH$ . Tìm quỹ tích điểm  $H$ .

490 ([BBN23b], H2, p. 93). Cho đoạn thẳng  $AB$  & 2 điểm  $M, N$  phân biệt nằm ngoài đường thẳng  $AB$ .  $A, B, M, N$  thuộc cùng 1 đường tròn nếu: A.  $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ . B.  $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$ . C.  $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ ,  $M, N$  nằm khác phía đối với  $AB$ . D.  $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$ ,  $M, N$  nằm cùng phía đối với  $AB$ .

491 ([BBN23b], VD1, p. 93). Cho đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Điểm  $C$  di chuyển trên đường tròn  $(O)$ .  $M$  là giao điểm 3 đường phân giác của  $\triangle ABC$ .  $M$  di chuyển trên đường nào?

492 ([BBN23b], VD2, p. 94). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Vẽ đường cao  $AH$ . Trên  $HC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $HM = HA$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = AB$ . Chứng minh  $A, B, M, N$  đồng viên

493 ([BBN23b], VD3, p. 94, dựng hình bằng quỹ tích tương giao). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = 3, \widehat{BAC} = 55^\circ$ , trung tuyến  $AM = 2.5$ .

494 ([BBN23b], VD4, p. 95). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Trên nửa đường tròn lấy 2 điểm  $C, D$  ( $C \in \widehat{AD}$ ) di động thỏa mãn  $\widehat{CD} = 90^\circ$ . 2 tia  $AC, BD$  cắt nhau tại  $M$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$ .

495 ([BBN23b], 4.1., p. 95). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Tìm tập hợp các trung điểm  $M$  của dây  $AB$  khi điểm  $B$  di động trên đường tròn.

496 ([BBN23b], 4.2., p. 95). Cho nửa đường tròn tâm  $O$ , đường kính  $AB$ . Điểm  $H$  di động trên đoạn  $OA$ . Qua  $H$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$ , cắt nửa đường tròn tại  $M$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle OHM$ . Chứng minh khi  $H$  di động thì  $I$  luôn thuộc 1 đường tròn cố định.

497 ([BBN23b], 4.3., p. 95). Cho đoạn thẳng  $BC = 8$  cố định. 1 điểm  $A$  di động luôn nhìn  $B, C$  dưới 1 góc  $60^\circ$ . Tính bán kính cung chứa góc chứa điểm  $A$  dựng trên đoạn  $BC$ .

498 ([BBN23b], 4.4., p. 95). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = 3, \widehat{BAC} = 50^\circ$ , đường cao  $AH = 2.5$ .

499 ([BBN23b], 4.5., p. 95). Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{A} < 90^\circ$ . Đường tròn  $(A; AB)$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $E$ . Đường tròn  $(C; BC)$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh: (a)  $DE = DK$ . (b)  $A, C, D, E, K$  đồng viên

500 ([BBN23b], 4.6., p. 96). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = 3, \widehat{BAC} = 50^\circ$ , đường trung tuyến  $BM = 2.5$ .

501 ([BBN23b], 4.7., p. 96). Tìm điểm  $M$  thuộc cung chứa góc  $\alpha$  dựng trên đoạn  $AB$  sao cho  $\triangle ABM$  có chu vi lớn nhất.

502 ([BBN23b], 4.8., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ . Trên cung nhỏ  $AC$  lấy điểm  $M$ .  $I, K$  lần lượt là trung điểm  $AM, AB$ , đường thẳng  $IK$  cắt đường thẳng  $CM$  tại  $H$ . Tìm quỹ tích điểm  $H$ .

503 ([BBN23b], p. 96). 1 người thợ muốn làm 1 cái bàn hình bán nguyệt. Để kiểm tra xem công việc đã hoàn hảo chưa, người thợ dùng 1 cái thước vuông. How?

504 ([Tuy23], VD15, p. 136). Cho nửa đường tròn  $(O; R)$ , đường kính  $AB$ , dây  $CD$  thay đổi nhưng luôn có độ dài bằng  $R$  trong đó  $C \in \widehat{AD}$ . 2 đường thẳng  $AC, BD$  cắt nhau tại  $M$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M$ .

505 ([Tuy23], 95., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 2 điểm  $M, N$  lần lượt di động trên 2 cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AM = CN$ .  $I$  là giao điểm của  $BN, CM$ . Chứng minh  $B, C, I, O$  đồng viên

506 ([Tuy23], 96., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc với 3 cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Tia  $AO$  cắt  $DE$  tại  $H$ . (a) Chứng minh  $B, D, F, H, O$  đồng viên (b) Cho  $AB$  cố định,  $\widehat{A} = \alpha$  không đổi,  $C$  di động. Chứng minh  $DE$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

507 ([Tuy23], 97., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . Tìm trên cung lớn  $\widehat{AB}$  1 điểm  $M$  sao cho chu vi  $\triangle ABM$  lớn nhất.

508 ([Tuy23], 98., p. 138). Cho trước điểm  $A$  trên đường thẳng  $xy$ , 2 điểm  $C, D$  thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $xy$ . Tìm trên  $xy$  1 điểm  $B$  sao cho  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ .

509 ([Tuy23], 99., p. 138). Cho nửa đường tròn  $(O; R)$ , dây  $AB = R\sqrt{3}$ . Điểm  $C$  di động trên cung nhỏ  $AB$ . Vẽ đường tròn tâm  $C$  tiếp xúc với  $AB$ . Từ  $A, B$  vẽ 2 tiếp tuyến khác  $AB$  với  $(C)$ , chúng cắt nhau tại  $M$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M$ .

- 510** ([Tuy23], 100., p. 138). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ tia  $Ax$  cắt 2 đường tròn  $(O), (O')$  lần lượt tại  $B, C$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $M$  của  $BC$  khi tia  $Ax$  quay quanh  $A$ .
- 511** ([Tuy23], 101., p. 138). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , 1 điểm  $C$  di động trên nửa đường tròn. Vẽ  $\triangle ACD$  đều với  $D$  thuộc nửa mặt phẳng bờ  $AC$  không chứa  $B$ . Tìm quỹ tích trung điểm  $M$  của  $CD$ .
- 512** ([Tuy23], 102., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , 1 điểm  $C$  di động trên đường tròn.  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Trên bán kính  $OC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = CH$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M$ .
- 513** ([Tuy23], 103., p. 138). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB$  cố định, đường cao  $AH$ . Biết  $AH = BC$ . Tìm quỹ tích của điểm  $C$ .
- 514** ([Bin23b], VD37, p. 93). Từ điểm  $M$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ cát tuyến  $MAB$  đi qua  $O$  & 2 tiếp tuyến  $MC, MD$ .  $K$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh: (a)  $B, C, M, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $MK \perp AB$ .
- 515** ([Bin23b], 237., p. 94). Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{A} < 90^\circ$ . Đường tròn  $(A, AB)$  cắt đường thẳng  $BC$  ở điểm thứ 2  $E$ . Đường tròn  $(C, BC)$  cắt đường thẳng  $AB$  ở điểm thứ 2  $K$ . Chứng minh: (a)  $DE = DK$ . (b) 5 điểm  $A, C, D, E, K$  thuộc cùng 1 đường tròn.
- 516** ([Bin23b], 238., p. 94). Qua điểm  $M$  thuộc cạnh đáy  $BC$  của  $\triangle ABC$  cân, kẻ 2 đường thẳng song song với 2 cạnh bên, chúng cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $DE$ . Chứng minh: (a) Điểm  $I$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b) Khi điểm  $M$  di chuyển trên cạnh  $BC$  thì đường thẳng  $IM$  đi qua 1 điểm cố định.
- 517** ([Bin23b], 239., p. 94). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có đường cao  $AD$ , điểm  $M$  nằm giữa  $B, C$ . Đường trung trực của  $BM$  cắt  $AB$  ở  $E$ , đường trung trực của  $CM$  cắt  $AC$  ở  $F$ .  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $EF$ ,  $I$  là giao điểm của  $MN, AD$ . Chứng minh 5 điểm  $A, B, C, I, N$  thuộc cùng 1 đường tròn.
- 518** ([Bin23b], 240., p. 94). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $O$  là giao điểm của 2 đường chéo. Trên tia  $OA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = OB$ . Trên tia  $OB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $ON = OA$ . Chứng minh: (a)  $C, D, M, N$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $\widehat{ACN} = \widehat{BDM}$ .
- 519** ([Bin23b], 241., p. 94). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB < AC$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB, BC$  ở  $D, E$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ .  $K$  là giao điểm của  $MN, AI$ . Chứng minh: (a)  $C, E, I, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $D, E, K$  thẳng hàng.
- 520** ([Bin23b], 242., p. 94). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $H, M$  phân biệt & thuộc cạnh  $BC$ , thỏa mãn  $\widehat{BAH} = \widehat{MAC}$ . Chứng minh  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ .

## 16 Tứ Giác Nội Tiếp

- [1]  $A, B, C, D \in (O)$  (theo thứ tự đó)  $\Leftrightarrow ABCD$ : tứ giác nội tiếp  $\Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ . [2] Tứ giác nội tiếp có tổng 2 góc đối diện bằng  $180^\circ$ .
- 521** ([BBN23b], H1, p. 97). Tứ giác nội tiếp được đường tròn? (a) Hình thang. (b) Hình bình hành. (c) Hình chữ nhật. (d) Hình thoi.
- 522** ([BBN23b], H2, p. 97). Cho  $\triangle ABC$  có  $AD, BE, CF$  là 3 đường cao,  $H$  là trực tâm của tam giác. Đếm số lượng tứ giác nội tiếp có trong hình.
- 523** ([BBN23b], VD1, p. 98). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$  sao cho  $\widehat{OAO'} > 90^\circ$ . Đường thẳng  $OA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $C$  & cắt đường tròn  $(O')$  tại điểm thứ 2 là  $E$ . Đường thẳng  $AO'$  cắt đường tròn  $(O')$  tại điểm thứ 2 là  $D$  & cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $F$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $CDEF, EFOO'$  nội tiếp. (b)  $B, E, F, O, O'$  đồng viên (c)  $A$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BEF$ .
- 524** ([BBN23b], VD2, p. 98). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . 2 dây  $AC, BD$  của đường tròn  $(O')$  cắt nhau tại  $K$ . Đường thẳng  $AC$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $E$ . Đường thẳng  $BD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $F$ . Chứng minh  $CD \parallel EF$ .
- 525** ([BBN23b], VD3, p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ , đường cao  $AH$ . Kẻ  $HM \perp AB, HN \perp AC$ .  $I$  là trung điểm  $BC$ .  $MN$  cắt  $AH, AI$  tại  $O, K$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $BCNM, HOKI$  nội tiếp. (b)  $\frac{1}{AK} = \frac{1}{BH} + \frac{1}{CH}$ .
- 526** ([BBN23b], VD4, p. 100, định lý Plotémée). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .
- 527** ([BBN23b], 5.1., p. 101). Cho đường tròn  $(O)$ , dây cung  $AB$ . Từ  $A, B$  vẽ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Lấy điểm  $M$  trên dây  $AB$ . Qua  $M$  vẽ 1 đường thẳng vuông góc với  $OM$  cắt đường thẳng  $Ax, By$  lần lượt tại  $C, D$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $AOMC, DOMB$  nội tiếp. (b)  $M$  là trung điểm  $CD$ .

**528** ([BBN23b], 5.2., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  nhọn. 2 đường cao  $BD, CE$  cắt nhau tại  $H$ .  $F$  đối xứng với  $H$  qua trung điểm  $M$  của  $BC$ . (a) Chứng minh tứ giác  $ABFC$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ) đường kính  $AF$ . (b) Đường thẳng  $FH$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại điểm thứ 2 là  $G$ . Chứng minh  $A, D, E, G, H$  đồng viên.

**529** ([BBN23b], 5.3., p. 101). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ) có  $AB = BD$ . Tiếp tuyến của ( $O$ ) tại  $A$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $Q$ .  $R$  là giao điểm của 2 đường thẳng  $AB, CD$ . (a) Chứng minh tứ giác  $AQRC$  nội tiếp. (b) Chứng minh  $AD \parallel QR$ .

**530** ([BBN23b], 5.4., p. 101). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AD = 4$ . Biết  $AB = BC = 1$ . Tính  $CD$ .

**531** ([BBN23b], 5.5., p. 101). Từ điểm  $I$  ở ngoài đường tròn ( $O$ ) vẽ 2 tiếp tuyến  $IA, IB$  đến đường tròn ( $O$ ) với 2 tiếp điểm  $A, B$ .  $M$  là trung điểm  $IB$ ,  $AM$  cắt ( $O$ ) tại  $K \neq A$ .  $C$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ . (a) Chứng minh  $AB^2 = 2AK \cdot AM$ . (b) Tứ giác  $IKBC$  nội tiếp.

**532** ([BBN23b], 5.6., p. 101). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB < AC$ , nội tiếp đường tròn ( $O; R$ ). Kẻ đường kính  $AD$ . Vẽ tiếp tuyến với đường tròn tại  $D$  cắt tia  $BC$  tại  $S$ . Tia  $SO$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ .  $H$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $OHDS$  nội tiếp. (b)  $OM = ON$ .

**533** ([BBN23b], 5.7., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn ( $O; R$ ) đường kính  $AI$ .  $E, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, OI$ . Chứng minh: (a)  $\triangle BEK$  cân. (b) Tứ giác  $AEKC$  nội tiếp.

**534** ([BBN23b], p. 102, bài toán 3 điểm). Cho 3 điểm  $A, B, C$  & 3 góc  $\alpha, \beta, \gamma$ . Tìm 1 điểm  $H$  thỏa  $\widehat{BHC} = \alpha, \widehat{CHA} = \beta, \widehat{AHB} = \gamma$ .

**535** ([Tuy23], VD16, p. 139). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB < AC$ , đường trung tuyến  $AD$ , đường phân giác  $AE$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ . Chứng minh  $BM = CN$ .

**536** ([Tuy23], 104., p. 140). Tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn có  $AB = BC$ . 1 đường tròn ( $O$ ) đi qua  $B, D$  cắt 2 đường thẳng  $AD, CD$  lần lượt tại  $E, F$ . Chứng minh  $OB \perp EF$ .

**537** ([Tuy23], 105., p. 140). Cho 2 đường tròn ( $O$ ), ( $O'$ ) cắt nhau tại  $A, B$ . Tia  $OA$  cắt đường tròn ( $O'$ ) tại  $C$ , tia  $O'A$  cắt đường tròn ( $O$ ) tại  $D$ . Chứng minh: (a) Tứ giác  $OO'CD$  nội tiếp đường tròn. (b)  $B, C, D, O, O'$  đồng viên

**538** ([Tuy23], 106., p. 141). Chứng minh nếu  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp thì  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

**539** ([Tuy23], 107., p. 141). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo vuông góc với nhau tại  $O$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  trên 4 cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $MNPQ$  nội tiếp đường tròn.

**540** ([Tuy23], 108., p. 141). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo vuông góc, nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ . Cho biết dạng của tứ giác  $MNPQ$ .

**541** ([Tuy23], 109., p. 141). Cho hình vuông  $ABCD$ , điểm  $M$  trên cạnh  $AB$ . Đường thẳng qua  $C$  & vuông góc với  $CM$  cắt 2 tia  $AB, AD$  lần lượt tại  $E, F$ , tia  $CM$  cắt đường thẳng  $AD$  tại  $N$ . Chứng minh: (a) 2 tứ giác  $AMCF, ANEC$  nội tiếp đường tròn. (b)  $CM + CN = EF$ .

**542** ([Tuy23], 110., p. 141). Cho hình vuông  $ABCD$ , 2 điểm  $E, F$  di động lần lượt nằm giữa  $B, C$  &  $C, D$  sao cho  $\widehat{EAF} = 45^\circ$ . 2 đoạn thẳng  $AE, AF$  lần lượt cắt  $BD$  tại  $M, N$ . Vẽ  $AH \perp EF$ . Chứng minh: (a) 3 đường thẳng  $AH, FM, EN$  đồng quy. (b) Đường thẳng  $EF$  luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định. (c) Diện tích  $\triangle AMN$  bằng diện tích tứ giác  $MNFE$ .

**543** ([Tuy23], 111., p. 141). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  di động, trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $N$  sao cho  $BM = CN$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .

**544** ([Tuy23], 112., p. 141). Cho 2 điểm  $O, P$  cố định. 1 góc  $\widehat{xOy}$  có số đo bằng  $60^\circ$  quay quanh điểm  $O$  sao cho điểm  $P$  luôn nằm trong góc đó.  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $P$  trên  $Ox, Oy$ . Đường thẳng  $PK$  cắt  $Ox$  tại  $A$ , đường thẳng  $PH$  cắt  $Oy$  tại  $B$ . (a) Chứng minh  $HK, AB$  có độ dài không đổi. (b)  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OP, AB$ . Chứng minh tứ giác  $MKNH$  nội tiếp đường tròn. (c) Chứng minh trung điểm  $I$  của  $HK$  di động trên 1 đường tròn cố định.

**545** ([Tuy23], 113., pp. 141–142). Cho đường tròn ( $O; R$ ), đường kính  $AB$  cố định & 1 đường kính  $CD$  quay quanh  $O$ . 2 đường thẳng  $AC, AD$  cắt tiếp tuyến tại  $B$  của đường tròn tại  $E, F$ . (a) Chứng minh tứ giác  $CDFE$  nội tiếp đường tròn. (b)  $P$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $CDFE$ . Chứng minh điểm  $P$  di động trên 1 đường thẳng cố định.

**546** ([Tuy23], 114., p. 142). Cho  $\triangle ABC$  vuông góc tại  $A$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Điểm  $D$  thuộc tia đối của tia  $BA$ , điểm  $E$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $BD = CE = BC$ .  $M$  là 1 điểm trên cung  $\widehat{BC}$  không chứa  $A$ . (a) Chứng minh  $MA + MB + MC \leq DE$ . (b) Tìm vị trí của điểm  $M$  để  $MA + MB + MC = DE$ .

**547** ([Tuy23], VD17, p. 142). Cho  $\widehat{xAy}$ . Trên tia  $Ax$  lấy 1 điểm  $B$  cố định, trên tia  $Ay$  lấy điểm  $C$  di động. Vẽ đường tròn ( $O$ ) nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc với 3 cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $D, E, F$ . 2 đường thẳng  $DE, OA$  cắt nhau tại  $G$ . Chứng minh: (a)  $B, D, F, G, O$  đồng viên (b) Đường thẳng  $DE$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

**548** ([Tuy23], VD18, p. 143). Từ 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn ( $O$ ), vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với ( $O$ ). Lấy điểm  $D$  nằm giữa  $B, C$ . Qua  $D$  vẽ 1 đường thẳng vuông góc với  $OD$  cắt  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$ , cắt đường tròn tại  $M, N$ . (a) Chứng minh  $ME = NF$ . (b) Khi điểm  $D$  di động trên  $BC$ , chứng minh đường tròn ( $AEF$ ) luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .



- 549** ([Tuy23], VD19, p. 144). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên đường tròn lấy 1 điểm  $M$  bất kỳ.  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên 3 đường thẳng  $BC, CA, AB$ . (a) (Đường thẳng Simpson) Chứng minh 3 điểm  $D, E, F$  cùng nằm trên 1 đường thẳng. (b)  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên tiếp tuyến  $Ax$  của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $MH \cdot MD = ME \cdot MF$ .
- 550** ([Tuy23], VD20, p. 145). Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . 1 đường thẳng  $xy$  quay quanh  $O$  cắt 2 cạnh  $AD, BC$  lần lượt tại  $M, N$ . Trên  $CD$  lấy điểm  $K$  sao cho  $DK = DM$ .  $H$  là hình chiếu của  $K$  trên  $xy$ . Tìm quỹ tích của điểm  $H$ .
- 551** ([Tuy23], VD21, p. 146). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $AB < AC$ , điểm  $D$  di động trên cạnh  $BC$ . Vẽ  $DE \perp AB, DF \perp AC$ . Tìm vị trí điểm  $D$  để  $EF$ : (a) Ngắn nhất. (b) Dài nhất.
- 552** ([Tuy23], 115., p. 147). Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ . Vẽ  $AH \perp BD, CK \perp BD$ . Biết  $AH = 2, BH = 1, DH = 3$ . Tính  $CK$ .
- 553** ([Tuy23], 116., p. 147). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp nửa đường tròn đường kính  $AD$ , 2 đường chéo  $AC, BD$  cắt nhau tại  $O$ . Vẽ  $OH \perp AD$ . Chứng minh  $O$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BCH$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OD$ . Chứng minh  $B, C, H, M, N$  đồng viên
- 554** ([Tuy23], 117., p. 147). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  với  $AB < AC$ . Trên cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy 2 điểm  $D, E$ . Vẽ  $DH \perp BC, EK \perp BC$ . Biết  $HK = \frac{1}{2}BC$ . Chứng minh đường tròn  $(ADE)$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .
- 555** ([Tuy23], 118., p. 147). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $F, E$ .  $H$  là hình chiếu của  $B$  trên  $CO$ ,  $K$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BO$ . Chứng minh  $E, F, H, K$  thẳng hàng.
- 556** ([Tuy23], 119., p. 147). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $C$  cố định nằm giữa  $A, B$ . Lấy  $D$  trên nửa đường tròn. Qua  $D$  vẽ 1 đường thẳng vuông góc với  $CD$  lần lượt cắt 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  tại  $M, N$ .  $P$  là giao điểm của  $AD, CM$ ,  $Q$  là giao điểm của  $BD, CN$ . Chứng minh: (a)  $PQ \parallel AB$ . (b)  $CM \cdot CN \geq 2CA \cdot CB$ .
- 557** ([Tuy23], 120., p. 148). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  di động trên đáy  $BC$ . Vẽ hình bình hành  $ADME$ ,  $D \in AC, E \in AB$ .  $N$  đối xứng với  $M$  qua đường thẳng  $DE$ . Chứng minh điểm  $N$  di động trên 1 cung tròn cố định.
- 558** ([Tuy23], 121., p. 148). Cho đường tròn  $(O; R), (O'; R'), R > R'$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A$ . Đường kính qua  $A$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $B$  & cắt đường tròn  $(O')$  tại  $C$ . 1 điểm  $I$  di động giữa  $A, C$ . Qua  $I$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt tại  $E, F$  sao cho  $E, F$  thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $AB$ . 2 đường thẳng  $BE, CF$  cắt nhau tại  $M$ . Tìm quỹ tích của điểm  $M$ .
- 559** ([Tuy23], 122., p. 148). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $M$  là 1 điểm trên cung  $\widehat{ABC}$ . Vẽ  $MD \perp BC, ME \perp CA, MF \perp AB$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $EF$  dài nhất.
- 560** ([Bin23b], VD38, p. 95).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  có  $AB = 8$  cm,  $AC = 15$  cm, đường cao  $AH = 5$  cm,  $H$  nằm ngoài cạnh  $BC$ . Tính  $R$ .
- 561** ([Bin23b], VD39, p. 95). Chứng minh chân các đường vuông góc kẻ từ 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác đến 3 cạnh của tam giác ấy nằm trên 1 đường thẳng.
- 562** ([Bin23b], VD40, p. 96). Qua điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ cát tuyến  $ABC$  với  $(O)$ . 2 tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $B, C$  cắt nhau ở  $K$ . Qua  $K$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AO$ , cắt  $AO$  tại  $H$  & cắt  $(O)$  tại  $E, F$ ,  $E$  nằm giữa  $K, F$ .  $M$  là giao điểm của  $OK, BC$ . Chứng minh: (a)  $EMOF$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $AE, AF$  là 2 tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 563** ([Bin23b], 243., pp. 96–97). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Lấy điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $\widehat{ABI} = \widehat{C}$ . Đường tròn  $(O)$  đường kính  $IC$  cắt  $BI$  ở  $D$  & cắt  $BC$  ở  $M$ . Chứng minh: (a)  $CI$  là tia phân giác của  $\widehat{DCM}$ . (b)  $DA$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 564** ([Bin23b], 244., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ ,  $D$  là điểm nằm giữa  $I, C$ .  $E, F$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Chứng minh  $E, F$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AID$ .
- 565** ([Bin23b], 245., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , đường phân giác  $AD$ .  $H, K$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Chứng minh  $OH = OK$ .
- 566** ([Bin23b], 246., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Chứng minh: (a)  $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$ . (b)  $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ .
- 567** ([Bin23b], 247., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $AD$ , trực tâm  $H$ .  $AM, AN$  là 2 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm. Chứng minh: (a)  $AMDN$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $M, H, N$  thẳng hàng.
- 568** ([Bin23b], 248., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ , đường cao  $AH$ . Chứng minh: (a)  $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$ . (b)  $S = \frac{abc}{4R}$  với  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ .
- 569** ([Bin23b], 249., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . 3 tia phân giác của  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  cắt  $(O)$  lần lượt ở  $D, E, F$ . Chứng minh: (a)  $2AD > AB + AC$ . (b)  $AD + BE + CF$  lớn hơn chu vi  $\triangle ABC$ .



**570** ([Bin23b], 250., pp. 97–98). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tia phân giác của  $\widehat{A}$  cắt  $BC$  ở  $D$ , cắt  $(O)$  ở  $E$ .  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  trên  $AB, AC$ . Chứng minh: (a)  $AI + AK = AB + AC$ . (b) Diện tích tứ giác  $AMEN$  bằng diện tích  $\triangle ABC$ .

**571** ([Bin23b], 251., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ .  $MH, MI, MK$  lần lượt là 3 đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $BC, AB, AC$ . Chứng minh  $\frac{BC}{MH} = \frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK}$ .

**572** ([Bin23b], 252., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $B, C$  trên  $EF$ . Chứng minh  $DE + DF = IK$ .

**573** ([Bin23b], 253., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 2 đường cao  $BD, CE$ . Vẽ ở phía ngoài  $\triangle ABC$  2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $AC, AB$ .  $I, K$  lần lượt là giao điểm của  $BD, CE$  với 2 nửa đường tròn đó. Chứng minh  $AI = AK$ .

**574** ([Bin23b], 254., p. 98). Cho đường tròn  $(O)$  & 2 điểm  $B, C \in (O)$ , 2 tiếp tuyến với đường tròn tại  $B, C$  cắt nhau ở  $A$ .  $M$  là 1 điểm thuộc cung nhỏ  $BC$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $M$  cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I, K$  lần lượt là giao điểm của  $OD, OE$  với  $BC$ . Chứng minh: (a)  $OB DK, DI KE$  là 2 tứ giác nội tiếp. (b) 3 đường thẳng  $OM, DK, EI$  đồng quy.

**575** ([Bin23b], 255., p. 98). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$ ,  $B, C$  là 2 tiếp điểm.  $H$  là giao điểm của  $OA, BC$ . Kẻ dây  $EF$  bất kỳ đi qua  $H$ . Chứng minh  $AO$  là tia phân giác của  $\widehat{EAF}$ .

**576** ([Bin23b], 256., p. 98). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$ ,  $B, C$  là 2 tiếp điểm, & cát tuyến  $ADE$ . Đường thẳng đi qua  $D$  & vuông góc với  $OB$  cắt  $BC, BE$  lần lượt ở  $H, K$ . Chứng minh  $DH = HK$ .

**577** ([Bin23b], 257., p. 98). Cho đường tròn  $(O)$ . Qua điểm  $K$  ở bên ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến  $KB, KD$ ,  $B, D$  là 2 tiếp điểm, kẻ cát tuyến  $KAC$ . (a) Chứng minh  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . (b) Vẽ dây  $CN \parallel BD$ .  $I$  là giao điểm của  $AN, BD$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm  $BD$ .

**578** ([Bin23b], 258., p. 98). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Từ điểm  $B \in (O')$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $BC, BD$  với  $(O)$ ,  $C, D$  là 2 tiếp điểm.  $E, F$  lần lượt là 2 giao điểm thứ 2 của  $AC, AD$  với  $(O')$ . Chứng minh  $AF \cdot BE = AE \cdot BF$ .

**579** ([Bin23b], 259., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $AB > AC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $AD$ .  $E$  là hình chiếu của  $B$  trên  $AD$ ,  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $\triangle MEH$  cân.

**580** ([Bin23b], 260., p. 99). Tứ giác  $ABCD$  có  $AB = AD + BC$ , cạnh  $AB$  & 2 tia phân giác của  $\widehat{C}, \widehat{D}$  đồng quy. Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.

**581** ([Bin23b], 261., p. 99). Cho  $\triangle ABC$ .  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $K$  là tâm của đường tròn bàng tiếp trong  $\widehat{A}$ . Chứng minh  $AI \cdot AK = AB \cdot AC$ .

**582** ([Bin23b], 262., p. 99). Đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$  cắt đoạn nối 2 tâm  $B', C'$  của 2 đường tròn bàng tiếp trong  $\widehat{B}, \widehat{C}$  tại điểm  $M \neq A$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $B'C'$ .

**583** ([Bin23b], 263., p. 99). 1 hình thang cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , cạnh bên được nhìn từ  $O$  dưới góc  $120^\circ$ . Tính diện tích hình thang biết đường cao của hình thang bằng  $h$ .

**584** ([Bin23b], 264., p. 99). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = a, CD = b, a < b$ . 1 đường tròn  $(O)$  đi qua  $A, B$ , cắt 2 cạnh bên  $AD, BC$  lần lượt ở  $M, N$ . Tính độ dài  $Mn$  theo  $a, b$  biết 2 tứ giác  $ABNM, CDMN$  có diện tích bằng nhau.

**585** ([Bin23b], 265., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ .  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle DEF$ . (a) Chứng minh  $OA \perp EF$ . (b) Tính tỷ số diện tích  $\triangle DEF, \triangle ABC$  theo  $R, r$ .

**586** ([Bin23b], 266., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\widehat{C} = 40^\circ$ , đường cao  $AH$ , điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $AI = \frac{1}{3}AC$ , điểm  $K$  thuộc tia đối của tia  $HA$  sao cho  $HK = \frac{1}{3}AH$ . Tính  $\widehat{BIK}$ .

**587** ([Bin23b], 267., p. 99).  $\triangle ABC$  cân có  $\widehat{A} = 100^\circ$ . Điểm  $D$  thuộc nửa mặt phẳng không chứa  $A$  có bờ  $BC$  sao cho  $\widehat{CBD} = 15^\circ, \widehat{BCD} = 35^\circ$ . Tính  $\widehat{ADB}$ .

**588** ([Bin23b], 268., p. 99).  $\triangle ABC$  nhọn, trực tâm  $H$ . Vẽ hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh  $\widehat{ABH} = \widehat{ADH}$ .

**589** ([Bin23b], 269., p. 100). Cho  $\triangle ABC$ .  $I$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $\widehat{ABI} = \widehat{ACI}$ . Vẽ hình bình hành  $BICK$ . Chứng minh  $\widehat{BAI} = \widehat{CAK}$ .

**590** ([Bin23b], 270., p. 100). Cho điểm  $I$  nằm trong hình bình hành  $ABCD$  sao cho  $\widehat{IAB} = \widehat{ICB}$ . Chứng minh  $\widehat{IBC} = \widehat{IDC}$ .

**591** ([Bin23b], 271., p. 100). Cho  $\triangle ABC$  đều,  $M$  thuộc cạnh  $BC$ .  $D$  đối xứng với  $M$  qua  $AB$ ,  $E$  đối xứng với  $M$  qua  $AC$ . Vẽ hình bình hành  $DMEI$ . Chứng minh: (a)  $D, A, I, E$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $AI \parallel BC$ .

**592** ([Bin23b], 272., p. 100). Cho hình thang cân  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $E$  nằm giữa  $C, D$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đi qua  $E$  & tiếp xúc với  $AD$  tại  $D$ . Vẽ đường tròn  $(O')$  đi qua  $E$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $K$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn đó. Chứng minh: (a)  $A, B, C, D, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $B, E, K$  thẳng hàng.

- 593** ([Bin23b], 273., p. 100). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $I$  là điểm chính giữa của  $\widehat{BC}$  không chứa  $A$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $I$  & tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ , vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $I$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $K$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$ . (a) Chứng minh  $B, C, K$  thẳng hàng. (b) Lấy điểm  $D$  bất kỳ thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $E$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $BD = CE$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .
- 594** ([Bin23b], 274., p. 100). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  cố định trên đường kính ấy,  $C \neq O$ .  $M$  chuyển động trên  $(O)$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt  $MA, MB$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .
- 595** ([Bin23b], 275., p. 100). Cho  $\widehat{xAy} = 90^\circ$ ,  $B \in Ay$  cố định,  $C$  di chuyển trên  $Ax$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AC, BC$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 596** ([Bin23b], 276., pp. 100–101). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ ,  $A \in (O)$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  có đường kính  $AH$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . (a) Chứng minh  $OA \perp MN$ . (b) Vẽ đường kính  $AOK$  của  $(O)$ .  $E$  là trung điểm  $HK$ . Chứng minh  $E$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $BMNC$ . (c) Cho  $BC$  cố định. Tìm vị trí của điểm  $A$  để bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $BMNC$  lớn nhất.
- 597** ([Bin23b], 277., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .  $(P), (Q)$  lần lượt là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABH, \triangle ACH$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài khác  $BC$  của  $(P), (Q)$ , cắt  $AB, AH, AC$  lần lượt ở  $M, K, N$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABC \sim \triangle HPQ$ . (b)  $KP \parallel AB, KQ \parallel AC$ . (c)  $BMNC$  là tứ giác nội tiếp. (d)  $A, M, N, P, Q$  thuộc cùng 1 đường tròn. (e)  $\triangle ADE$  vuông cân,  $D, E$  lần lượt là giao điểm của  $PQ$  với  $AB, AC$ .
- 598** ([Bin23b], 278., p. 101). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ .  $M$  di chuyển trên cung lớn  $AB$ . 2 đường cao  $AE, BF$  của  $\triangle ABM$  cắt nhau ở  $H$ . (a) Chứng minh  $OM \perp EF$ . (b) Đường tròn  $(H, HM)$  cắt  $MA, MB$  lần lượt ở  $C, D$ . Chứng minh đường thẳng kẻ từ  $M$  & vuông góc với  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Chứng minh đường thẳng kẻ từ  $H$  & vuông góc với  $CD$  cũng đi qua 1 điểm cố định.
- 599** ([Bin23b], 279., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . 1 đường tròn  $(I)$  tùy ý đi qua  $B, C$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . Đường tròn  $(K)$  ngoại tiếp  $\triangle AMN$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2  $D$ . Chứng minh: (a)  $AKIO$  là hình bình hành. (b)  $\widehat{ADI} = 90^\circ$ .
- 600** ([Bin23b], 280., p. 101). Dựng ra phía ngoài 1 tứ giác nội tiếp các hình chữ nhật mà mỗi hình chữ nhật có 1 cạnh là của tứ giác, cạnh kia bằng cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh giao điểm các đường chéo của 4 hình chữ nhật là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.
- 601** ([Bin23b], 281., p. 102). Cho đường tròn đường kính  $AC$ , dây  $BD \perp AC$ .  $E, F, G, H$  lần lượt là tâm của 4 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ . Chứng minh  $EFGH$  là hình vuông.
- 602** ([Bin23b], 282., p. 102). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ ,  $M \in (O)$ .  $Ax, By$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn,  $H, I, K$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $AB, Ax, By$ . Chứng minh: (a)  $MH^2 = MI \cdot MK$ . (b)  $MI + MK \geq 2MH$ .
- 603** ([Bin23b], 283., p. 102).  $M$  bất kỳ thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ . Khoảng cách từ  $M$  đến 4 đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt là  $MH, MK, MI, MN$ . Chứng minh  $MH \cdot MI = MK \cdot MN$ .
- 604** ([Bin23b], 284., p. 102). Cho  $\triangle ABC$ , đường trung tuyến  $AM$ , đường phân giác  $AD$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADM$  cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh  $BE = CF$ .
- 605** ([Bin23b], 285., p. 102). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ ,  $C$  thuộc bán kính  $OA$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt  $(O)$  ở  $D$ . Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với nửa đường tròn & tiếp xúc với 2 đoạn thẳng  $AC, CD$ .  $E$  là tiếp điểm trên  $AC$  của  $(I)$ . (a) Chứng minh  $BD = BE$ . (b) Suy ra cách dựng  $(I)$ .
- 606** ([Bin23b], 286., p. 102). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $AB = 16, BC = 24$ , đường cao  $AE$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AC$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $OECF$  là tứ giác nội tiếp &  $BF$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó. (b)  $M$  là giao điểm của  $BF$  với  $(O)$ . Chứng minh  $BMOC$  là tứ giác nội tiếp.
- 607** ([Bin23b], 287., p. 102). Cho đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . 2 dây  $BC, BD$  của  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$  lần lượt ở  $E, F$ .  $I$  là giao điểm của  $EF$  với tia phân giác  $\widehat{CAD}$ . Chứng minh: (a)  $\widehat{DAF} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$ . (b)  $\widehat{DAF} = \widehat{IAE}$ . (c)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .
- 608** ([Bin23b], 288., p. 103). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ . Lấy điểm  $M \in DF$  bất kỳ, kẻ  $MN \parallel BC$ ,  $N \in DE$ . Lấy điểm  $I$  trên đường thẳng  $DE$  sao cho  $\widehat{MAI} = \widehat{BAC}$ . Chứng minh: (a)  $\triangle AMN$  cân. (b)  $AMNI$  là tứ giác nội tiếp. (c)  $MA$  là tia phân giác  $\widehat{FMI}$ .
- 609** ([Bin23b], 289., p. 103). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . Kẻ tiếp tuyến chung  $CD$ ,  $C \in (O \text{ in}), D \in (O')$ .  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  trên  $OO'$ . Chứng minh  $\widehat{OAO'} = \widehat{HAK}$ .
- 610** ([Bin23b], 290., p. 103). Cho 2 hình vuông  $ABCD, AB'C'D'$  sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ  $A$  lần lượt qua  $B, C, D$  & chiều từ  $A$  lần lượt qua  $B', C', D'$  đều theo chiều quay của kim đồng hồ.  $I$  là giao điểm của  $BB', DD'$ . Chứng minh: (a)  $I$  thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông. (b)  $CC'$  cũng đi qua điểm  $I$ .

- 611** ([Bin23b], 291., p. 103). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường vuông góc với  $AD$  tại  $A$  cắt  $BC$  ở  $E$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $A$  cắt  $CD$  ở  $F$ . Chứng minh  $E, F, O$  thẳng hàng.
- 612** ([Bin23b], 292., p. 103). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  lần lượt ở  $D, E, F$ . Biết  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , chứng minh  $\triangle ABC$  đều.
- 613** ([Bin23b], 293., p. 103). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài  $AB, A'B'$ , 2 tiếp tuyến chung trong  $CD, EF$ ,  $A, A', C, E \in (O), B, B', D, F \in (O')$ .  $M$  là giao điểm của  $AB, EF$ ,  $N$  là giao điểm của  $A'B', CD$ ,  $H$  là giao điểm của  $MN, OO'$ . Chứng minh: (a)  $MN \perp OO'$ . (b)  $O', B, M, H, F$  thuộc cùng 1 đường tròn. (c)  $O, A, M, E, H$  thuộc cùng 1 đường tròn. (d)  $B, D, H$  thẳng hàng. (e)  $A, C, H$  thẳng hàng.
- 614** ([Bin23b], 294., pp. 103–104). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 điểm  $A, B$  ở vị trí đối xứng với nhau qua 1 bán kính của  $(O)$ . Vẽ dây  $CD$  đi qua  $A$ , dây  $EF$  đi qua  $B$ . 2 đường thẳng  $CE, DF$  cắt đường thẳng  $AB$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh  $AN = BM$ .
- 615** ([Bin23b], 295., p. 104). Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song,  $F$  là giao điểm của  $AB, CD$ ,  $E$  là giao điểm của  $AD, BC$ .  $H, G$  lần lượt là trung điểm  $AC, BD$ . Chứng minh: (a) Tia phân giác  $\widehat{BED}$  cũng là tia phân giác  $\widehat{HEG}$ . (b) 2 tia phân giác  $\widehat{BED}, \widehat{BFD}$  gặp nhau tại 1 điểm nằm trên  $GH$ .
- 616** ([Bin23b], 296., p. 104). Cho tứ giác  $ABCD$ . Vẽ 4 đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của 1 trong  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ . Chứng minh 4 đường tròn đó cùng giao nhau tại 1 điểm.
- 617** ([Bin23b], 297., p. 104). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ . Kẻ ra ngoài  $\triangle ABC$  2 tia  $Ax, Ay$  lần lượt tạo với  $AB, AC$  các góc nhọn bằng nhau.  $I$  là hình chiếu của  $B$  trên  $Ax$ ,  $K$  là hình chiếu của  $C$  trên  $Ay$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh: (a)  $MI = MK$ . (b)  $I, H, K, M$  thuộc cùng 1 đường tròn.
- 618** ([Bin23b], 298., p. 104). Cho  $\triangle ABC$ , trực tâm  $H$ . Kẻ 3 đường thẳng  $AA', BB', CC'$  sao cho 3 tia phân của  $\widehat{A'AH}, \widehat{B'BH}, \widehat{C'CH}$  song song với nhau. Chứng minh 3 đường thẳng  $AA', BB', CC'$  đồng quy tại 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 619** ([Bin23b], 299., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $M$  thuộc cung  $AC$ ,  $Ax$  là tiếp tuyến tại  $A$ .  $H, I, K, N$  lần lượt là chân 4 đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $AB, AC, BC, Ax$ . Chứng minh  $MH \cdot MI = MK \cdot MN$ .
- 620** ([Bin23b], 300., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  & 2 điểm  $M, N$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Biết các đường thẳng Simpson của  $M, N$  vuông góc với nhau. Chứng minh  $MN$  là đường kính của đường tròn.
- 621** ([Bin23b], 301., p. 104). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $H, I$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  trên  $AC, CD$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, HI$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABD \sim \triangle HBI$ . (b)  $\widehat{MNB} = 90^\circ$ .
- 622** ([Bin23b], 302., p. 105). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  bất kỳ thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .  $D$  đối xứng với  $M$  qua  $AB$ ,  $E$  đối xứng với  $M$  qua  $BC$ . Chứng minh khi điểm  $M$  di chuyển trên  $(O)$  thì  $DE$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 623** ([Bin23b], 303., p. 105, định lý Ptolémée). Chứng minh trong 1 tứ giác nội tiếp, tích 2 đường chéo bằng tổng các tích của 2 cặp cạnh đối.
- 624** ([Bin23b], 304., p. 105, định lý Carnot). Vận dụng định lý Ptolémée để chứng minh tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác nhọn đến 3 cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp tam giác đó.

## 17 Hệ Điểm Đồng Viên

### 17.1 Chứng minh hệ điểm cách đều 1 điểm

$$OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n = R \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in (O; R).$$

- 625** ([Thu+16], VD1, p. 5). Cho đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với 3 cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\triangle ABC$  lần lượt tại  $D, E, F$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng song song với  $BC$ , cắt 2 đường thẳng  $DE, DF$  lần lượt tại  $I, K$ . Chứng minh  $E, F, I, K$  đồng viên.
- 626** ([Thu+16], VD2 p. 6). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . 2 đường cao  $BE, CF$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại 2 điểm thứ 2 là  $I, K$ .  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $I, O, K, H$  đồng viên.
- 627** ([Thu+16], 1.1., p. 8). Chứng minh 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật  $ABCD$  cùng thuộc 1 đường tròn.
- 628** ([Thu+16], 1.2., p. 8). Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường cao  $BD, CE$ . Chứng minh  $B, C, D, E$  cùng thuộc 1 đường tròn.
- 629** ([Thu+16], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB > BC$ . Trên cạnh  $AD$  lấy điểm  $E$  bất kỳ. Trên cạnh  $CD$  lấy  $F, K$  sao cho  $DF = CK$ ,  $F$  nằm giữa  $D, K$ . Qua  $K$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $EK$ , cắt đường thẳng  $BC$  tại  $M$ . Chứng minh  $E, F, K, M$  đồng viên.
- 630** ([Thu+16], 1.4., p. 8). Cho đường tròn  $(O)$ . 2 đường kính  $AB \perp CD$ .  $E$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $BC$ .  $AE$  cắt  $CD$  tại  $I$ ,  $DE$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh: (a)  $A, D, I, K$  đồng viên. (b)  $B, C, I, K$  đồng viên.



- 631** ([Thu+16], 1.5., p. 8). Cho  $\Delta ABC$  không cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , đường cao  $AH$ .  $E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $B, C$  trên đường thẳng  $AO$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . 2 đường thẳng  $ME, CF$  cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh  $E, F, H, I$  đồng viên.
- 632** ([Thu+16], 1.6., p. 8). Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ . (a) Tia  $AI$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $L$ . Chứng minh  $B, C, I$  cùng thuộc 1 đường tròn tâm  $D$ . (b)  $M, N, P$  lần lượt là tâm 3 đường tròn bàng tiếp trong 3 góc  $A, B, C$ ;  $K$  đối xứng với  $I$  qua  $O$ .  $D, E, F$  lần lượt đối xứng với  $M, N, P$  qua  $K$ . Chứng minh  $M, N, P, D, E, F$  đồng viên.
- 633** ([Thu+16], 1.7., p. 10). Cho  $\Delta ABC$  không cân ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  lần lượt là tiếp điểm của 3 cạnh  $BC, CA, AB$  với  $(O)$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng song song với  $BC$ , cắt 2 đường thẳng  $DE, DF$  lần lượt tại  $I, K$ . Tia  $EO$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $M$ . Tia  $BM$  cắt  $AC$  tại  $N$ . Trên đường thẳng  $AD$  lấy điểm  $L$  sao cho  $AL = CN$ . Chứng minh  $E, F, I, K, L$  đồng viên.
- 634** ([Thu+16], 1.8., p. 9). Cho hình vuông  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm 2 đường chéo.  $K, N, E$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ .  $F$  là trung điểm  $CN$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng song song với  $KF$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $G$ .  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $FG$ . Chứng minh  $E, I, K, N$  đồng viên.
- 635** ([Thu+16], 1.9., p. 9). Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn  $(O; R)$ . Vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O; R)$ ,  $B, C$  là 2 tiếp điểm. Vẽ đường thẳng  $d$  đi qua trung điểm của  $AB$  & vuông góc với  $AO$ . Trên đường thẳng  $d$  lấy điểm  $P$ ; vẽ 2 tiếp tuyến  $PM, PN$  với  $(O; R)$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm.  $I$  là giao điểm  $AO, BC$ . Chứng minh  $A, I, M, N$  đồng viên.
- 636** ([Thu+16], 1.10., p. 9). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  bán kính khác nhau cắt nhau tại  $A, B$ .  $E$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ . Tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O')$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2 là  $C$ , tiếp tuyến tại  $A$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(O')$  tại điểm thứ 2 là  $D$ . Chứng minh  $A, C, D, E$  đồng viên.
- 637** ([Thu+16], 1.11., p. 9). Cho  $\Delta ABC$  đều. Trên cạnh  $BC$  lấy  $D, E$  sao cho  $BD = DE = CE$ . Trên cạnh  $AC$  lấy  $F, G$  sao cho  $CF = FG = AG$ . Trên cạnh  $AB$  lấy  $H, I$  sao cho  $AH = BI = HI$ . Chứng minh  $D, E, F, G, H, I$  đồng viên.
- 638** ([Thu+16], 1.12., p. 9). Cho hình vuông  $ABCD$ . Về phía ngoài hình vuông vẽ 4 tam giác đều  $\Delta ABE, \Delta BCF, \Delta CDG, \Delta ADH$ .  $I, J, K, L, M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AE, BE, BF, CF, CG, DG, DH, AH$ . Chứng minh  $I, J, K, L, M, N, P, Q$  đồng viên.

## 17.2 Sử dụng quỹ tích cung chứa góc

[1] Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $AB$ :  $\widehat{AA_1B} = \widehat{AA_2B} = \dots = \widehat{AA_nB} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ) \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  đồng viên. [2]  $\widehat{AA_1B} = \widehat{AA_2B} = \dots = \widehat{AA_nB} = 90^\circ \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AB$ .

- 639** ([Thu+16], VD3, p. 10). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . 2 dây  $AC, BD$  cắt nhau tại  $H$ .  $F$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AH, BH$ . Chứng minh: (a)  $A, D, F, H$  đồng viên. (b)  $C, D, F, M, N, O$  đồng viên.
- 640** ([Thu+16], VD4, p. 11). Từ đỉnh  $A$  của hình vuông  $ABCD$  vẽ 2 tia tạo với nhau 1 góc  $45^\circ$ . 1 tia cắt cạnh  $BC$  tại  $E$  & cắt đường chéo  $BD$  tại  $P$ , tia còn lại cắt cạnh  $CD$  tại  $F$  & cắt đường chéo  $BD$  tại  $Q$ . Chứng minh: (a)  $A, D, F, P$  đồng viên. (b)  $C, E, F, P, Q$  đồng viên.
- 641** ([Thu+16], 2.1., p. 12). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ . Trên 2 cạnh  $Ox, Oy$  lần lượt lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = OB$ . Trên đoạn  $AB$  lấy điểm  $M$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $Oy$  tại  $B$ . Vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $Ox$  tại  $A$ . 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $N$ . 2 tia  $BO_1, BO_2$  cắt nhau tại  $I$ . Chứng minh  $A, B, I, O, N$  đồng viên.
- 642** ([Thu+16], 2.2., p. 12). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại  $B$  của nửa đường tròn cắt tia  $AC$  ở  $E$ .  $M$  là điểm bất kỳ trên cung  $BC$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy  $D$  sao cho  $MB = MD$ . Chứng minh  $A, B, D, E$  đồng viên.
- 643** ([Thu+16], 2.3., p. 12). Cho  $\Delta ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $M$  là điểm bất kỳ trên cung nhỏ  $BC$ . Trên đoạn  $AM$  lấy điểm  $D$  sao cho  $MC = MD$ . Chứng minh  $A, C, D, O$  đồng viên.
- 644** ([Thu+16], 2.4., p. 12). Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là trung điểm  $AC$ . Qua  $M$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $H$ , cắt đường tròn ngoại tiếp  $\Delta COM$  tại điểm thứ 2 là  $K$ . Chứng minh  $B, C, H, K$  đồng viên.
- 645** ([Thu+16], 2.5., p. 12). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\Delta ABC$ .  $H, I, K$  lần lượt là tiếp điểm của  $(O)$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ .  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $IK$ . Tia  $BD$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Tia  $CD$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Chứng minh  $B, C, E, F$  đồng viên.
- 646** ([Thu+16], 2.6., p. 13). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $H, K, E$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên 3 đường thẳng  $AC, CD, AD$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, HK$ . Chứng minh  $B, E, M, N$  đồng viên.
- 647** ([Thu+16], 2.7., p. 13). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; 2R)$  tiếp xúc trong với nhau tại  $A$ . Dây  $AN$  của  $(O')$  cắt  $(O)$  tại  $M \neq A$ . Tia  $O'M$  cắt  $(O')$  tại điểm  $B$ .  $H$  là trực tâm  $\Delta ABO'$ . Chứng minh  $B, H, O', N$  đồng viên.
- 648** ([Thu+16], 2.8., p. 13). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . 2 dây  $AC, BD$  cắt nhau tại  $H$ . 2 đường thẳng  $AD, BC$  cắt nhau tại  $E$ .  $F$  là giao điểm của  $AB, EH$ .  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm của  $AH, BH, EH$ . Chứng minh  $C, D, F, I, M, N, O$  đồng viên.
- 649** ([Thu+16], 2.9., p. 13). Cho  $\Delta ABE$ , 3 đường cao  $AC, BD, EF$  cắt nhau tại  $H$ .  $J, K, O$  lần lượt là trung điểm của  $AE, BE, AB$ .  $I, M, N$  lần lượt là trung điểm của  $EH, AH, BH$ . Chứng minh  $C, D, F, I, J, K, M, N, O$  đồng viên.
- 650** ([Thu+16], 2.10., p. 13). Cho  $\Delta ABC$  nhọn,  $AB < AC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $BC$ . Đường thẳng  $DO$  cắt  $BC$  tại  $M$  & cắt cung lớn  $BC$  tại  $N$ .  $I$  là trung điểm  $AD$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABI$  cắt đoạn thẳng  $AC$  tại  $K$ . Chứng minh  $C, K, M, N$  đồng viên.



### 17.3 Dựa vào sự xác định đường tròn để chứng minh hệ điểm đồng viên

## 18 Đường Tròn Ngoại Tiếp, Nội Tiếp Đa Giác

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ : [1] Đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  nội tiếp đường tròn  $(O; R) \Leftrightarrow (O; R)$  ngoại tiếp đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$ . [2] Đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$  ngoại tiếp đường tròn  $(O; R) \Leftrightarrow (O; R)$  nội tiếp đa giác  $A_1A_2 \dots A_n$ . [3] Mọi đa giác đều đều có đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp. Tâm 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp là tâm đa giác đều. [4] Tam giác bất kỳ (không nhất thiết phải đều) luôn có đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp nhưng đa giác với  $n \geq 4$  cạnh chưa chắc có đường tròn ngoại tiếp hay đường tròn nội tiếp. Đa giác với  $n \geq 4$  cạnh phải thỏa 1 số điều kiện nhất định thì mới có đường tròn nội tiếp hoặc đường tròn nội tiếp hoặc cả 2.

**651** ([BBN23b], H1, p. 103). Cho 1 hình vuông nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông.

**652** ([BBN23b], H2, p. 103). Tính tỷ số giữa bán kính đường tròn nội tiếp & bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đều.

**653** ([BBN23b], VD1, p. 104). Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . (a) Tính cạnh của ngũ giác  $ABCDE$  theo  $R$ . (b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp ngũ giác  $ABCDE$  theo  $R$ . (c)  $H$  là giao điểm của  $BD, CE$ . Chứng minh  $CD = \sqrt{CE \cdot CH}$ .

**654** ([BBN23b], VD2, p. 104). Cho 3 đường tròn có cùng bán kính tiếp xúc nhau từng đôi một, tiếp xúc với các cạnh  $\triangle ABC$ . Mỗi đường tròn có bán kính  $r > 0$ , tính chu vi  $\triangle ABC$ .

**655** ([BBN23b], VD3, p. 105). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 2 đường chéo  $AC, BD$  cắt nhau tại  $I$ .  $E, F, G, H$  lần lượt là hình chiếu của  $I$  lên cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh tứ giác  $EFGH$  ngoại tiếp 1 đường tròn.

Hint: Để chứng minh tứ giác ngoại tiếp đường tròn, chỉ cần chứng minh 3 đường phân giác của 3 trong 4 góc đồng quy.

**656** ([BBN23b], 6.1., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 6, BC = 4$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**657** ([BBN23b], 6.2., p. 106). Cho lục giác đều  $ABCDEF$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Trên đoạn  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = R$ . Tia  $BM$  cắt đoạn thẳng  $CF, CE$  lần lượt tại  $I, N$ . Tính  $CI, CN$ .

**658** ([BBN23b], 6.3., p. 106). Cho ngũ giác  $ABCDE$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $a, b, c$  lần lượt là khoảng cách từ điểm  $E$  đến 3 đường thẳng  $AB, BC, CD$ . Tính khoảng cách từ  $E$  đến đường thẳng  $AD$  theo  $a, b, c$ .

**659** ([BBN23b], 6.5., p. 106). Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$  & nội tiếp đường tròn  $(O')$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là 4 tiếp điểm của  $(O)$  với  $DA, AB, BC, CD$ . Chứng minh: (a)  $AM \cdot CP = BN \cdot DQ$ . (b)  $MP \perp NQ$ .

1 số bài toán liên quan đến nhà toán học Leonhard Euler:

**660** ([BBN23b], 6.4., p. 106, đường tròn 9 điểm/đường tròn Euler). Chứng minh trong 1 tam giác, trung điểm 3 cạnh, chân 3 đường cao, trung điểm 3 đoạn thẳng nối từ đỉnh của tam giác với trực tâm là 9 điểm đồng viên.

**661** ([BBN23b], p. 107, hệ thức Euler). Chứng minh trong 1 tam giác, giữa bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp, bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp, & khoảng cách  $d$  giữa tâm 2 đường tròn này, có hệ thức  $d^2 = R^2 - 2Rr$ .

**662** ([BBN23b], p. 107). Chứng minh trong 1 tam giác, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler & trực tâm là 3 điểm thẳng hàng.

**663** ([BBN23b], p. 107). Chứng minh đường kính của đường tròn Euler bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

**664** ([BBN23b], p. 107). Chứng minh trong 1 tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp & tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp.

**665** ([Tuy23], VD25, p. 149). Cho đa giác đều 9 cạnh  $A_1A_2 \dots A_9$ . Chứng minh  $A_1A_2 + A_1A_3 = A_1A_5$ .

**666** ([Tuy23], 123., p. 150). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$ , tiếp xúc với 4 cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại  $M, N, P, Q$ . Biết  $\widehat{B} = \widehat{D}$ , chứng minh  $MP = NQ$ .

**667** ([Tuy23], 124., p. 150). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$ . Chứng minh nếu  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn thì  $BD \perp AC$ .

**668** ([Tuy23], 125., p. 150). Cho tứ giác  $ABCD$ . 2 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ADC$  tiếp xúc với  $AC$  lần lượt tại  $E, F$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn khi & chỉ khi  $E \equiv F$ .

**669** ([Tuy23], 126., p. 150). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp tứ giác  $ABCD$ , tiếp xúc với 4 cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại  $M, N, P, Q$ . Chứng minh  $MP, NQ, AC, BD$  đồng quy.

**670** ([Tuy23], 127., p. 150). Cho  $\triangle ABM$  cân tại  $M$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $\widehat{M} = \frac{1}{7}\widehat{A}$ . Biết  $AB$  cũng là cạnh của 1 đa giác đều nội tiếp đường tròn này. Tính số cạnh của đa giác đều đó.

**671** ([Tuy23], 128., p. 150). Cho đa giác đều  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  có  $2n$  cạnh. Biết  $A_nA_{2n} = a$ , tính tổng bình phương các khoảng cách từ 1 đỉnh bất kỳ đến các đỉnh còn lại.

- 672** ([Tuy23], 129., p. 150). Tô màu xanh hoặc đỏ tất cả các cạnh của 1 đa giác lồi. Biết tổng độ dài các cạnh màu xanh nhỏ hơn nửa chu vi đa giác  $\mathcal{E}$  không có 2 cạnh liền nhau nào được tô màu đỏ. Chứng minh không thể có đường tròn nội tiếp đa giác.
- 673** ([Bin23b], VD41, p. 105). Chứng minh định lý “Nếu tứ giác  $ABCD$  có tổng các cạnh đối bằng nhau  $AB + CD = BC + AD$  thì tứ giác đó ngoại tiếp được 1 đường tròn” bằng cách chứng minh 4 tia phân giác của  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$  cùng gặp nhau tại 1 điểm.
- 674** ([Bin23b], VD42, p. 106). 2 đường trung tuyến  $BD, CE$  của  $\triangle ABC$  cắt nhau tại  $I$ . Cho biết tứ giác  $ADIE$  ngoại tiếp được 1 đường tròn. Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.
- 675** ([Bin23b], VD43, p. 107). Cho 1 lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính  $R$ . Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau 1 đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.
- 676** ([Bin23b], 305., p. 107). Hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ , ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Tính diện tích hình thang biết: (a)  $OB = 10$  cm,  $OC = 20$  cm. (b)  $AB = b, CD = a$ .
- 677** ([Bin23b], 306., p. 107). Hình thang  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , đáy nhỏ  $AB = 2$  cm,  $E$  là tiếp điểm của  $(O)$  trên cạnh  $BC$ . Biết  $BE = 1$  cm,  $CE = 4$  cm. Chứng minh  $ABCD$  là hình thang cân  $\mathcal{E}$  tìm diện tích của nó.
- 678** ([Bin23b], 307., p. 107). Tính các cạnh của 1 hình thang cân ngoại tiếp đường tròn  $(O, 10$  cm) biết khoảng cách giữa 2 tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16 cm.
- 679** ([Bin23b], 308., p. 107). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp hình vuông  $ABCD$ , tiếp điểm trên  $AB$  là  $M$ . 1 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt 2 cạnh  $BC, CD$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh: (a)  $\triangle DFO \sim \triangle BOE$ . (b)  $ME \parallel AF$ .
- 680** ([Bin23b], 309., p. 107). Cho tứ giác  $ABCD$ , 2 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ACD$  tiếp xúc nhau. Chứng minh các đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD, \triangle BCD$  tiếp xúc nhau.
- 681** ([Bin23b], 310., p. 108). Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp 1 đường tròn. Chứng minh nếu 1 đường thẳng chia tứ giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau  $\mathcal{E}$  chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.
- 682** ([Bin23b], 311., p. 108). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , tiếp điểm trên  $AB, CD$  lần lượt là  $E, F$ . Chứng minh  $AC, BD, EF$  đồng quy.
- 683** ([Bin23b], 312., p. 108). Chứng minh trong 1 tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm 2 đường chéo của tứ giác.
- 684** ([Bin23b], 313., p. 108). Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp được tròn  $(O)$ .  $I, K$  lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo  $BD, AC$ . Chứng minh: (a)  $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ . (b)  $I, K, O$  thẳng hàng.
- 685** ([Bin23b], 314., p. 108). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB \perp CD$ . 4 tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $A, B, C, D$  cắt nhau lần lượt ở  $E, F, G, H$ . Chứng minh  $EFGH$  là tứ giác nội tiếp.
- 686** ([Bin23b], 315., p. 108). Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác,  $AB = 14$  cm,  $BC = 18$  cm,  $CD = 26$  cm.  $H$  là tiếp điểm của  $CD$   $\mathcal{E}$   $(O)$ . Tính  $CH, DH$ .
- 687** ([Bin23b], 316., p. 108). Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O; r)$ , đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác.  $E, F, G, H$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  trên  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh: (a)  $r^2 = AE \cdot CG = BF \cdot DH$ . (b) Diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng  $\sqrt{abcd}$  với  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ .
- 688** ([Bin23b], 317., p. 108). Cho lục giác  $ABCDEF$  nội tiếp 1 đường tròn  $\mathcal{E}$  có 2 cặp cạnh đối song song là  $AB \parallel DE, BC \parallel EF$ . Chứng minh 2 cạnh đối còn lại cũng song song với nhau.
- 689** ([Bin23b], 318., p. 108). Lục giác  $ABCDEF$  nội tiếp 1 đường tròn có 3 cạnh  $AB, CD, EF$  bằng bán kính của đường tròn. Chứng minh 3 trung điểm của 3 cạnh còn lại là 3 đỉnh của 1 tam giác đều.
- 690** ([Bin23b], 319., p. 109). Tính diện tích bát giác đều cạnh  $a$ .
- 691** ([Bin23b], 320., p. 109). Cho đa giác đều 20 cạnh  $A_1A_2 \dots A_{20}$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $M \in (O; R)$  bất kỳ. Tính tổng  $\sum_{i=1}^{20} MA_i^2 = MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_{20}^2$ .
- 692** ([Bin23b], 321., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  đều  $\mathcal{E}$  hình vuông  $ADEF$  cùng nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Tính diện tích phần chung của tam giác  $\mathcal{E}$  hình vuông.

## 19 Độ Dài Đường Tròn, Cung Tròn. Diện Tích Hình Tròn, Hình Quạt Tròn

- [1] Chu vi/độ dài đường tròn  $(O; R)$ :  $C = 2\pi R = \pi d$  với  $d = 2R$ : đường kính. Độ dài cung tròn  $n^\circ \in [0^\circ, 360^\circ]$ :  $l = \frac{\pi R n}{180}$ .
- [2] Diện tích hình tròn  $S = \pi R^2 = \frac{\pi}{4} d^2$ . Diện tích hình quạt tròn  $n^\circ$ :  $S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$ . [3] Diện tích hình vành khăn  $S = \pi(R^2 - r^2)$ .

- 693** ([BBN23b], H1, p. 108). Chu vi hình tròn là  $16\pi$ . Tính độ dài cung  $90^\circ$  của đường tròn.
- 694** ([BBN23b], H2, p. 108). Nếu bán kính của đường tròn tăng thêm 2 cm thì độ dài đường tròn tăng thêm mấy?
- 695** ([BBN23b], H3, p. 108). Tính diện tích hình tròn có chu vi là  $6\pi$ .
- 696** ([BBN23b], VD, p. 109). 1 miếng bìa hình tròn bị cắt bỏ 1 phần. Biết góc ở tâm của phần bị cắt bỏ là  $60^\circ$  & bán kính đường tròn là 1 cm. Tính chu vi phần còn lại.
- 697** ([BBN23b], VD2, p. 109). Tính diện tích hình vành khăn tạo bởi đường tròn nội tiếp & đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh 6 cm,  $a$ .
- 698** ([BBN23b], VD3, p. 110). Cho tam giác đều  $ABC$ . Vẽ 2 đường tròn ( $O$ ) nội tiếp & ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .  $D, E, F$  lần lượt là 3 tiếp điểm trên 3 cạnh  $AB, BC, CA$ . (a) Tính diện tích  $S_1$  của hình viên phân tạo bởi cạnh  $BC$  & cung nhỏ  $BC$  của đường tròn lớn theo bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . (b) Tính diện tích  $S_2$  của hình tạo bởi  $AD, AF$  & cung nhỏ  $DF$  của đường tròn nhỏ theo  $r$ . (c) Chứng minh tổng  $S_1 + S_2$  bằng diện tích hình tròn nhỏ.
- 699** ([BBN23b], 7.1., p. 110). Cho hình vuông  $OACD$  cạnh  $a$ . Tính diện tích “trái chuối” dọc theo  $AD$  & hình quạt nhỏ  $AOB$ .
- 700** ([BBN23b], 7.2., p. 111). Cho hình vuông cạnh 18 cm nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Trên cạnh hình vuông dựng 4 nửa đường tròn ra phía ngoài hình vuông. Tính tổng diện tích 4 mảnh ‘trăng khuyết’.
- 701** ([BBN23b], 7.3., p. 111). Trồng các cây cúc vạn thọ trong 1 bồn hoa hình tròn. Mỗi foot vuông có 4 cây cúc vạn thọ. Chu vi bồn hoa là 20 foot. Trồng thành từng khóm hoa, mỗi khóm có không quá 6 cây. Trồng được nhiều nhất mấy khóm?
- 702** ([BBN23b], 7.4., p. 111).  $OAB$  là 1 hình quạt với  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ . Vẽ nửa đường tròn có tâm  $C$  nằm trên  $OA$  & đi qua điểm  $A$  tiếp xúc với  $OB$  tại  $T$ . Tính tỷ số diện tích của nửa đường tròn tâm  $C$  với diện tích của hình quạt tròn  $AOB$ .
- 703** ([BBN23b], 7.5., p. 111).  $AB$  là đường kính của đường tròn ( $K$ ), đường tròn ( $L$ ) tiếp xúc với đường tròn ( $K$ ) & tiếp xúc với  $AB$  tại  $K$ , đường tròn ( $M$ ) tiếp xúc với đường tròn ( $K$ ), ( $L$ ) & đoạn thẳng  $AB$ . Tính tỷ số diện tích hình tròn ( $K$ ) & hình tròn ( $M$ ).
- 704** ([BBN23b], p. 112, toán cổ). Cho 3 điểm thẳng hàng  $P, Q, R$  với  $Q$  nằm giữa  $P, R$ . Dựng 3 nửa đường tròn nhận  $PQ, QR, RP$  làm đường kính. Gọi hình giới hạn bởi 3 nửa đường tròn này là hình arbelos. Dựng đường thẳng vuông góc với  $PR$  tại  $Q$  cắt đường tròn lớn tại  $S$ . Chứng minh diện tích của hình arbelos bằng diện tích hình tròn đường kính  $QS$ .
- 705** ([BBN23b], p. 112). Cho 1 hình tròn. Dùng compa & thước kẻ chia hình tròn đó thành 4 phần có diện tích bằng nhau sao cho có thể tô lại hình nhận được bằng 1 nét.
- 706** ([Tuy23], VD26, p. 151). Cho đường tròn ( $O; R$ ), dây  $AB$  căng cung  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . Dựng  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $C$ . 2 tia  $AC, BC$  cắt đường tròn lần lượt tại  $M, N$ . Biết độ dài cung nhỏ  $\widehat{MN}$  là  $2\pi$  cm. Tính: (a) Bán kính  $R$  của đường tròn. (b) Độ dài cung lớn  $\widehat{MN}$ .
- 707** ([Tuy23], 130., p. 151). 1 lục giác đều nội tiếp đường tròn. Tính tỷ số độ dài của cung nhỏ căng 1 cạnh với độ dài cạnh đó.
- 708** ([Tuy23], 131., p. 151). Cho 2 đường tròn bán kính khác nhau. So sánh tỷ số số đo 2 góc ở tâm chắn 2 cung có cùng độ dài với tỷ số của 2 bán kính tương ứng.
- 709** ([Tuy23], 132., p. 151). Nếu đường kính của 1 hình tròn tăng  $\frac{1}{\pi}$  đơn vị thì chu vi của nó tăng thêm bao nhiêu?
- 710** ([Tuy23], 133., p. 152). Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp 1 đường tròn. Dựng ra phía ngoài của tứ giác các nửa đường tròn có đường kính lần lượt là các cạnh của tứ giác. Chứng minh tổng độ dài của 2 nửa đường tròn đường kính  $AB, CD$  bằng tổng độ dài của 2 nửa đường tròn đường kính  $BC, AD$ .
- 711** ([Tuy23], 134., p. 152). Chứng minh trong 1 hình thang vuông, hiệu bình phương độ dài 2 đường tròn có đường kính là 2 đường chéo bằng hiệu 2 bình phương độ dài 2 đường tròn có đường kính là 2 đáy.
- 712** ([Tuy23], 135., p. 152). Cho hình vuông  $ABCD$ . Vẽ đường tròn ( $D; DC$ ), đường tròn ( $O$ ) đường kính  $BC$ , chúng cắt nhau tại 1 điểm thứ 2 là  $M$  nằm trong hình vuông. Chứng minh: (a)  $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$ . (b) Độ dài của cung  $\widehat{BM}$  bằng nửa độ dài của cung  $\widehat{CM}$  của đường tròn ( $D$ ).
- 713** ([Bin23b], VD44, p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Độ dài 3 cung  $AB, BC, CA$  lần lượt bằng  $3\pi, 4\pi, 5\pi$ . Tính diện tích  $\triangle ABC$ .
- 714** ([Bin23b], 322., p. 110). Cho đường tròn ( $O$ ), cung  $AB$  bằng  $120^\circ$ . 2 tiếp tuyến của ( $O$ ) tại  $A, B$  cắt nhau ở  $C$ . ( $I$ ) là đường tròn tiếp xúc với 2 đoạn thẳng  $AC, BC$  & cung  $AB$ . So sánh độ dài của ( $I$ ) với độ dài cung  $AB$  của ( $O$ ).
- 715** ([Bin23b], 323., p. 110). Cho 2 đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa 2 điểm thuộc 2 đường tròn bằng 1 m. Tính hiệu các độ dài của 2 đường tròn.

**716** ([Bin23b], 324., p. 110). Cho hình quạt tròn có cung  $BC$  bằng  $120^\circ$ , tâm  $A$  bán kính  $R$ . Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó với đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung  $BC$  & với 2 bán kính  $AB, AC$ .

**717** ([Bin23b], 325., p. 110). Lấy  $A, B, C, D$  lần lượt trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $\text{sđ}\widehat{AB} = 60^\circ, \text{sđ}\widehat{BC} = 90^\circ, \text{sđ}\widehat{CD} = 120^\circ$ . (a) Tứ giác  $ABCD$  là hình gì? (b) Tính độ dài  $(O)$  biết diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng  $100 \text{ m}^2$ .

**718** ([Tuy23], VD27, p. 153). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp nửa đường tròn đường kính  $BC$ . Vẽ ra phía ngoài của tam giác 2 nửa đường tròn đường kính  $AB, AC$ . Chứng minh tổng diện tích 2 hình trắng khuyết giới hạn bởi 3 nửa đường tròn bằng diện tích  $\triangle ABC$  (hình trắng khuyết Hippocrates).

**719** ([Tuy23], p. 154). Chứng minh diện tích hình tròn có đường kính bằng cạnh huyền của 1 tam giác vuông bằng tổng diện tích của 2 hình tròn có đường kính bằng 2 cạnh góc vuông.

**720** ([Tuy23], 136., p. 154). Nghịch đảo bán kính của 1 hình tròn đúng bằng chu vi của nó. Tính diện tích hình tròn đó.

**721** ([Tuy23], 137., p. 154). Cho 2 đường tròn  $(O; R), (O'; r)$  tiếp xúc ngoài với nhau,  $R > r$ . 1 tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với đường tròn lớn tại  $A$ , tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại  $B$ . 2 đường thẳng  $AB, OO'$  cắt nhau tại  $M$ . Biết  $AB = BM = 6 \text{ cm}$ . Tính diện tích hình tròn lớn.

**722** ([Tuy23], 138., p. 154). Gọi  $a, r$  lần lượt là độ dài cạnh huyền & bán kính đường tròn nội tiếp 1 tam giác vuông. Tính tỷ số diện tích của tam giác với diện tích của hình tròn.

[Tuy23], 139., p. 154.

**723** ([Tuy23], 140., p. 154). Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh tổng diện tích 2 hình tròn có đường kính là  $a, b$  thì lớn hơn nửa diện tích của hình tròn có đường kính là  $c$ .

**724** ([Tuy23], 141., p. 154). 1 hình vành khăn có diện tích  $25\pi \text{ cm}^2$ . Tính độ dài dây cung của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ.

**725** ([Tuy23], 142., p. 154). 1 hình vành khăn có diện tích bằng  $\frac{3}{4}$  diện tích hình tròn lớn. Tính tỷ số  $\frac{r}{R}$  với  $R, r$  lần lượt là bán kính của đường tròn lớn, đường tròn nhỏ.

**726** ([Tuy23], 143., p. 154). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 24 \text{ cm}$ . Vẽ 1 dây cung  $CD \parallel AB$ , cách  $AB$  6 cm. Tính diện tích hình viên phân tạo bởi dây  $CD$  & cung tròn  $\widehat{CD}$ .

**727** ([Tuy23], 144., p. 154). Cho đường tròn  $(O; R)$ . Đoạn thẳng  $AB = 2a$  di động & tiếp xúc với đường tròn tại trung điểm  $M$  của  $AB$ . Khi  $AB$  di động nó tạo ra 1 hình, tính diện tích hình đó.

**728** ([Tuy23], 145., p. 155). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ . Dựng cung  $\widehat{AB}$  tâm  $C$ , bán kính  $CA$ , cung này nằm trong đường tròn  $(O)$  cắt  $CD$  tại  $M$ . Chứng minh: (a) Diện tích hình quạt  $CAMBC$  bằng  $\frac{1}{2}$  diện tích hình tròn  $(O)$ . (b) Diện tích hình trắng khuyết  $AMBDA$  bằng diện tích  $\triangle ABC$ .

**729** ([Tuy23], 146., p. 155). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 đường kính  $AB, CD$  tạo với nhau 1 góc  $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Đường thẳng  $CD$  cắt tiếp tuyến ở  $A$  của đường tròn tại điểm  $M$ . Biết diện tích của hình “tam giác khuyết”  $ADM$  gấp 179 lần diện tích quạt tròn  $BCO$ . Chứng minh  $\tan \alpha = \pi$ .

**730** ([Bin23b], VD45, p. 110). Cho tam giác đều tâm  $O$ , cạnh 3 cm. Vẽ đường tròn  $(O, 1 \text{ cm})$ . Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.

**731** ([Bin23b], 326., p. 111). Cho 1 hình thang ngoại tiếp 1 đường tròn. So sánh tỷ số giữa diện tích hình tròn & diện tích hình thang với tỷ số giữa chu vi hình tròn & chu vi hình thang.

**732** ([Bin23b], 327., p. 111). Cho 1 hình tròn & 1 hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?

**733** ([Bin23b], 328., pp. 111–112).  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB = 2R$ . Vẽ về 1 phía của  $AB$  3 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $OA, OB, AB$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  tiếp xúc 3 nửa đường tròn này. (a) Tính bán kính đường tròn  $(I)$ . (b) Tính diện tích phần hình tròn lớn nằm ngoài hình tròn  $(I)$  & nằm ngoài 2 nửa hình tròn nhỏ.

**734** ([Bin23b], 329., p. 112). Cho 2 đường tròn đồng tâm, đường tròn nhỏ chia hình tròn lớn thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh diện tích phần hình vành khăn giới hạn bởi 2 tiếp tuyến song song của đường tròn nhỏ bằng diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ.

**735** ([Bin23b], 330., p. 112). Cho đa giác đều  $n$  cạnh, độ dài mỗi cạnh bằng  $a$ . Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp đa giác. (a) Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn. (b) Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.

**736** ([Bin23b], 331., p. 112). 1 hình quạt có chu vi bằng 28 cm & diện tích bằng  $49 \text{ cm}^2$  (chu vi hình quạt bằng độ dài cung hình quạt cộng với 2 lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt.

**737** ([Bin23b], 332., p. 112). Cho 3 đường tròn cùng bán kính  $r$  & tiếp xúc ngoài đôi một. (a) Tính diện tích “tam giác cong” có đỉnh là các tiếp điểm của 2 trong 3 đường tròn đó. (b) Kẻ 3 đường thẳng, mỗi đường thẳng tiếp xúc với 2 đường tròn & không giao với đường tròn thứ 3. Tính diện tích tam giác tạo bởi 3 đường thẳng đó.



- 738** ([Bin23b], 333., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 15$ ,  $AC = 20$ , đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn  $(A, AH)$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $BD, CE$  với đường tròn,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. Tính diện tích hình giới hạn bởi 3 đoạn thẳng  $BD, BC, CE$  & cung  $DE$  không chứa  $H$  của đường tròn.
- 739** ([Bin23b], 334., p. 112). 1 hình viên phân có số đo cung  $90^\circ$ , diện tích  $2\pi - 4$ . Tính độ dài dây của hình viên phân.
- 740** ([Bin23b], 335., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  đều có cạnh bằng  $2a$ .  $(I)$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính diện tích phần chung của hình tròn  $(I)$  & hình tròn  $(A, a)$ .
- 741** ([Bin23b], 336., p. 112). Cho đường tròn  $(O; R)$ , cung  $AB$  bằng  $60^\circ$ . Vẽ cung  $OB$  có tâm  $A$  bán kính  $R$ . Vẽ cung  $OA$  có tâm  $B$  bán kính  $R$ . Chứng minh diện tích hình giới hạn bởi 3 cung  $OA, OB, AB$  nhỏ hơn  $\frac{1}{4}$  diện tích hình tròn  $(O; R)$ .
- 742** ([Bin23b], 337., p. 113). Cho đường tròn  $(O; R)$ . 1 đường tròn  $(O')$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $A, B$  sao cho cung  $AB$  của  $(O')$  chia  $(O)$  thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh độ dài cung  $AB$  của  $(O')$  lớn hơn  $2R$ .
- 743** ([Bin23b], 338., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $S$ .  $S_1$  là diện tích hình tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $S_2$  là diện tích hình tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $2S < S_1 + S_2$ .
- 744** ([Bin23b], 339., p. 113). Cho hình viên phân  $BC$  có dây  $BC = a$ , cung  $\widehat{BC} = 90^\circ$ . (a) Tính diện tích hình viên phân. (b) Tính diện tích hình vuông  $DEFG$  nội tiếp trong viên phân đó,  $D, E \in BC$ ,  $G, H$  thuộc cung  $BC$ .
- 745** ([Bin23b], 340., p. 113). Tính bán kính hình viên phân  $BC$  có dây  $BC = 6$  cm, cạnh hình vuông  $MNPQ$  nội tiếp viên phân ấy bằng 2 cm,  $M, N \in BC$ ,  $P, Q$  thuộc cung  $BC$ .

## 20 Quĩ Tích

- 746** ([Bin23b], VD49, p. 118). Cho cung  $AB$  cố định tạo bởi 2 bán kính  $OA \perp OB$ ,  $I$  chuyển động trên cung  $AB$ . Trên tia  $OI$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM$  bằng tổng các khoảng cách từ  $I$  đến  $OA$  & đến  $OB$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 747** ([Bin23b], VD50, p. 120). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt di chuyển trên 2 cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AM = CN$ . Tìm quỹ tích các tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$ .
- 748** ([Bin23b], VD51, p. 121). Tìm quỹ tích trực tâm  $H$  của các  $\triangle ABC$  có  $BC$  cố định,  $\widehat{A} = \alpha$  không đổi.
- 749** ([Bin23b], VD52, p. 122). Cho  $ABCD$  là 1 tứ giác nội tiếp.  $(I)$  là đường tròn bất kỳ đi qua  $A, B$ ,  $(K)$  là đường tròn đi qua  $C, D$  & tiếp xúc với  $(I)$ .  $M$  là tiếp điểm của  $(I), (K)$ . Điểm  $M$  di chuyển trên đường nào?
- 750** ([Bin23b], VD53, p. 123). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  di chuyển trên đường tròn. Đường trung trực của  $AB$  cắt  $AC$  ở  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 751** ([Bin23b], VD54, p. 124). Tìm quỹ tích các điểm  $M$  mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc vuông (điểm  $M$  gọi là nhìn 1 hình vuông dưới  $\widehat{AMB}$  nếu 2 điểm  $A, B$  thuộc cạnh hình vuông & hình vuông thuộc miền trong của  $\widehat{AMB}$ ).
- 752** ([Bin23b], 356., p. 124). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm  $M$  di chuyển trên cung  $BC$ .  $N$  là giao điểm của  $AM, OC$ . Tìm quỹ tích các tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CMN$ .
- 753** ([Bin23b], 357., pp. 124–125). Tứ giác  $ABCD$  có  $AC$  cố định,  $\widehat{A} = 45^\circ$ ,  $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ . (a) Chứng minh  $BD$  có độ dài không đổi. (b)  $E$  là giao điểm của  $BC, AD$ ,  $F$  là giao điểm của  $AB, CD$ . Chứng minh  $EF$  có độ dài không đổi. (c) Tìm quỹ tích các tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$ .
- 754** ([Bin23b], 358., p. 125). Cho  $\widehat{xOy}$  & 1 điểm  $I$  cố định thuộc tia phân giác của  $\widehat{xOy}$ . 1 đường tròn  $(I)$  bán kính thay đổi cắt 2 tia  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $M, N$ ,  $M$  không đối xứng với  $N$  qua  $OI$ . (a) Tìm quỹ tích các tâm  $O'$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OMN$ . (b) Đường vuông góc với  $Ox$  tại  $M$  & đường vuông góc với  $Oy$  tại  $N$  cắt nhau ở  $P$ . Tìm quỹ tích các điểm  $P$ .
- 755** ([Bin23b], 359., p. 125). Cho  $\triangle ABC$  đều. Tìm quỹ tích các điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $MA^2 = MB^2 + MC^2$ .
- 756** ([Bin23b], 360., p. 125). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $2MA^2 = MB^2 - MC^2$ .
- 757** ([Bin23b], 361., p. 125). Cho  $M$  là 1 điểm thuộc đường tròn  $(O'; R)$ . Đường tròn này lăn (không trượt) trong đường tròn  $(O, 2R)$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 758** ([Bin23b], 362., p. 125). Tìm quỹ tích đỉnh  $C$  của các  $\triangle ABC$  có  $AB$  cố định, đường cao  $BH$  bằng cạnh  $AC$ .
- 759** ([Bin23b], 363., p. 125). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . 1 đường thẳng  $d$  bất kỳ luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $C, D$ . (a) Tìm quỹ tích các trung điểm  $M$  của  $CD$ . (b) Cho biết bán kính của  $(O), (O')$  là 3 cm, 2 cm. Tính tỷ số  $BC : BD$ . (c) Đường thẳng  $d$  có vị trí nào thì đoạn thẳng  $CD$  có độ dài lớn nhất, với  $A$  nằm giữa  $C, D$ ?
- 760** ([Bin23b], 364., p. 125). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại  $A$  lấy 1 điểm  $B$  cố định. Gọi  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$  & có bán kính thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm  $I$  là trung điểm của dây chung  $MN$  của  $(O), (O')$ .

- 761** ([Bin23b], 365., p. 125). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 điểm  $A$  ở bên trong đường tròn. Điểm  $B$  di chuyển trên đường tròn. Qua  $O$  kẻ đường vuông góc với  $AB$ , cắt tiếp tuyến tại  $B$  của  $(O)$  ở điểm  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 762** ([Bin23b], 366., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  vuông góc với dây  $CD$ . Điểm  $E$  di chuyển trên  $(O)$ . 2 đường thẳng  $AE, BE$  cắt đường thẳng  $CD$  lần lượt ở  $I, K$ . Tìm quỹ tích tâm  $O'$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BIK$ .
- 763** ([Bin23b], 367., p. 126). Cho 3 điểm cố định  $A, B, C$  thẳng hàng theo thứ tự đó. 1 đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $A, B$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $CD, CE$  với đường tròn,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. (a) Tìm quỹ tích các điểm  $D, E$ . (b) Tìm quỹ tích các trung điểm  $K$  của  $DE$ . (c)  $MN$  là đường kính của  $(O)$  vuông góc với  $AB$ ,  $F$  là giao điểm của  $CM$  với  $(O)$ . Chứng minh  $AB, DE, FN$  đồng quy.
- 764** ([Bin23b], 368., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . Điểm  $C$  di chuyển trên đường thẳng  $AB$  ở nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $CD, CE$  với  $(O)$ ,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. Tìm quỹ tích giao điểm  $K$  của  $OC, DE$ .
- 765** ([Bin23b], 369., p. 126). Cho đường tròn  $(O; R)$ , điểm  $A$  cố định ở bên ngoài đường tròn.  $BC$  là 1 đường kính thay đổi. (a) Tìm quỹ tích tâm  $O_1$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b)  $D, E$  lần lượt là giao điểm của  $AB, AC$  với  $(O)$ . Tìm quỹ tích tâm  $O_2$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$ . (c)  $F$  là giao điểm khác  $A$  của  $(O_1), (O_2)$ . Chứng minh  $AF, BC, DE$  đồng quy.
- 766** ([Bin23b], 370., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  di chuyển trên  $(O)$ .  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tìm quỹ tích hình chiếu  $H$  của  $M$  trên  $AB$ .
- 767** ([Bin23b], 371., p. 126). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ , 1 điểm  $A$  cố định nằm trong  $\widehat{xOy}$ . 1 góc vuông đỉnh  $A$  có 2 cạnh thay đổi cắt  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $B, C$ .  $M$  đối xứng với  $A$  qua  $BC$ . (a) Tìm quỹ tích các điểm  $M$ . (b) Chứng minh  $\frac{AB}{AC}$  là hằng số.
- 768** ([Bin23b], 372., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  cố định ở bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $AB$ ,  $B$  là tiếp điểm. 1 cát tuyến  $AMN$  luôn đi qua  $A$ . Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$  của  $\triangle BMN$ .
- 769** ([Bin23b], 373., p. 127). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 1 điểm  $H$  cố định ở bên trong đường tròn. Xét các  $\triangle ABC$  nội tiếp  $(O)$  ở nhận  $H$  làm trực tâm. Tìm quỹ tích: (a) Chân các đường cao của  $\triangle ABC$ . (b) Chân các đường trung tuyến của  $\triangle ABC$ .
- 770** ([Bin23b], 374., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ . 2 điểm  $E, F$  chuyển động trên  $(O)$  sao cho  $OE \perp OF$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $CD$ , qua  $F$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$ , chúng cắt nhau ở  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 771** ([Bin23b], 375., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  cố định. 2 điểm  $M, N$  di chuyển trên  $(O)$  sao cho  $AM = BN$ . Tìm quỹ tích giao điểm  $I$  của 2 đường thẳng  $AM, BN$ .
- 772** ([Bin23b], 376., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  sao cho  $MA$  là tia phân giác  $\widehat{BMC}$ .
- 773** ([Bin23b], 377., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . 1 đường thẳng  $d$  thay đổi luôn đi qua  $A$ . Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MB + MC$  nhỏ nhất. Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 774** ([Bin23b], 378., p. 127). Tìm quỹ tích các điểm  $M$  mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc bằng  $45^\circ$ .
- 775** ([Bin23b], 379., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  cố định. Điểm  $M$  di chuyển trên  $(O)$ . Vẽ đường tròn  $(M)$  tiếp xúc với  $AB$ .  $I$  là giao điểm của 2 tiếp tuyến khác  $AB$  kẻ từ  $A, B$  với  $(M)$ . Tìm quỹ tích của điểm  $I$ .
- 776** ([Bin23b], 380., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $C, D$ . Tìm quỹ tích tâm  $I$  các đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .
- 777** ([Bin23b], 381., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến cố định  $CAD$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ . 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M, N$ . Tìm quỹ tích giao điểm  $P$  của 2 đường thẳng  $CM, DN$ .
- 778** ([Bin23b], 382., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  ở điểm  $D$  cố định trên cạnh  $BC$ . 1 góc vuông đỉnh  $D$  có các cạnh thay đổi vị trí cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . Tìm quỹ tích hình chiếu  $H$  của  $D$  trên  $MN$ .

## 21 Dựng Hình

- 779** ([Bin23b], VD55, p. 128). Cho  $\triangle ABC$ . Dựng  $\triangle DEF$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$  cho trước, 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh của  $\triangle ABC$ .
- 780** ([Bin23b], VD56, p. 129). Cho  $\triangle ABC$ , 1 điểm  $D$  nằm trong  $\triangle ABC$ . Dựng đường thẳng đi qua  $D$  cắt 2 cạnh  $AB, C$  lần lượt ở  $E, F$  sao cho  $BE = CF$ .
- 781** ([Bin23b], VD57, p. 129). Cho đường tròn  $(O)$  ở 2 điểm  $A, B$  ở bên ngoài  $(O)$ . Dựng đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $(O)$  ở đi qua 2 điểm  $A, B$ .
- 782** ([Bin23b], VD58, p. 130). Cho 2 điểm  $A, B$  nằm về 1 phía của đường thẳng  $xy$ . Dựng đường tròn đi qua  $A, B$  ở tiếp xúc với đường thẳng  $xy$ .

- 783** ([Bin23b], VD59, p. 131). *Dựng  $\triangle ABC$  vuông tại A biết cạnh huyền  $BC = a$ , đường phân giác  $AD = d$ .*
- 784** ([Bin23b], 383., p. 132). *Cho 3 tia chung gốc  $Ox, Oy, Oz$ . Dựng tam giác đều cạnh  $a$  có 3 đỉnh thuộc 3 tia này.*
- 785** ([Bin23b], 384., p. 132). *Cho  $\widehat{xOy}$ . Dựng đoạn thẳng  $AB = a$  có  $A \in Ox, B \in Oy$  sao cho  $OA + OB = m$ .*
- 786** ([Bin23b], 385., p. 132). *(a) Dựng tam giác vuông biết chu vi bằng  $2p$  & bán kính của đường tròn nội tiếp bằng  $r$ . (b) Dựng tam giác biết 1 cạnh bằng  $a$ , chu vi bằng  $2p$ , & bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .*
- 787** ([Bin23b], 386., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\hat{A} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , đường trung tuyến  $AM = m$ .*
- 788** ([Bin23b], 387., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\hat{A} = \alpha$ ,  $AC - AB = d$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .*
- 789** ([Bin23b], 388., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết 3 điểm  $I, O, P$  lần lượt là tâm của 3 đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp.*
- 790** ([Bin23b], 389., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ , bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp, bán kính  $R_a$  của đường tròn bàng tiếp trong  $\hat{A}$ .*
- 791** ([Bin23b], 390., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\hat{A} = \alpha$ ,  $AB - BC = m$ ,  $AC - BC = n$ .*
- 792** ([Bin23b], 391., p. 132). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ , đường cao  $AH = h$  biết đường phân giác  $AD$  bằng trung bình nhân của  $BD, CD$ .*
- 793** ([Bin23b], 392., p. 132). *Cho  $A, B, C, D$ . Dựng hình vuông  $EFGH$  có 4 cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) đi qua 4 điểm này (mỗi đường thẳng đi qua 1 điểm).*
- 794** ([Bin23b], 393., p. 132). *Cho  $\triangle ABC$  & điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$ . Dựng đường tròn đi qua  $A, M$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$  sao cho  $DE \parallel BC$ .*
- 795** ([Bin23b], 394., p. 133). *Cho đường thẳng  $d$ , 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $d$ . Dựng điểm  $M \in d$  sao cho  $AM + BM = a$ .*
- 796** ([Bin23b], 395., p. 133). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , đường trung tuyến  $AM = m$ .*
- 797** ([Bin23b], 396., p. 133). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ ,  $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ .*
- 798** ([Bin23b], 397., p. 133). *Cho  $\widehat{xOy}$  nhọn, 2 điểm  $M, N$  nằm trong  $\widehat{xOy}$ . Dựng điểm  $A \in Ox$  sao cho tia phân giác  $\widehat{MAN}$  vuông góc với  $Oy$ .*
- 799** ([Bin23b], 398., p. 133). *Dựng tứ giác  $ABCD$  biết  $AB = a$ ,  $AD = b, b > a$ ,  $AC = m$ ,  $\hat{B} - \hat{D} = \alpha$  sao cho  $AC$  là tia phân giác  $\hat{A}$ .*
- 800** ([Bin23b], 399., p. 133). *Dựng tứ giác  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $\hat{B} = \alpha$ ,  $\hat{D} = \beta$  biết tứ giác  $ABCD$  có thể ngoại tiếp được 1 đường tròn.*
- 801** ([Bin23b], 400., p. 133). *Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Dựng điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho nếu lấy các điểm đối xứng với  $M$  qua trung điểm mỗi cạnh của  $\triangle ABC$  thì được 3 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .*
- 802** ([Bin23b], 401., p. 133). *Cho  $\widehat{xOy}$  nhọn, điểm  $M$  nằm trong  $\widehat{xOy}$ . Dựng đường tròn  $(I)$  đi qua điểm  $M$ , cắt  $Ox, Oy$  thành 2 dây  $AB, CD$  sao cho  $\widehat{AMB} = \widehat{CMD} = \widehat{xOy}$ .*
- 803** ([Bin23b], 402., p. 133). *Dựng hình vuông nội tiếp 1 hình viên phân cho trước (1 cạnh của hình vuông thuộc dây của viên phân, 2 đỉnh còn lại của hình vuông thuộc cung của viên phân).*
- 804** ([Bin23b], 403., p. 133). *Cho  $\triangle ABC$  vuông tại A,  $AB < AC$ . Điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$ . Đường vuông góc với  $AD$  tại A cắt 2 đường vuông góc với  $BC$  tại  $B, C$  lần lượt ở  $M, N$ . Dựng điểm  $D$  sao cho diện tích  $\triangle MDN$  gấp đôi diện tích  $\triangle ABC$ .*
- 805** ([Bin23b], 404., p. 133). *Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp. Dựng điểm  $E$  thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$ .*
- 806** ([Bin23b], 405., p. 133). *Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\hat{A} = \alpha$ ,  $BC = a$ , đường phân giác  $AD = d$ .*

## 22 Toán Cực Trị 2

- 807** ([Bin23b], VD60, p. 134). *Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  chuyển động trên  $(O)$ .  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên 2 đường thẳng  $AB, AC$ . Tìm vị trí điểm  $M$  sao cho  $DE$  có độ dài lớn nhất.*
- 808** ([Bin23b], VD61, p. 134). *Trong các  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ , tam giác nào có: (a) Diện tích lớn nhất? (b) Chu vi lớn nhất?*
- 809** ([Bin23b], VD62, p. 135). *Cho đường thẳng  $xy$ , 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Tìm điểm  $M \in xy$  sao cho  $\widehat{AMB}$  lớn nhất.*

**810** ([Bin23b], 406., p. 137). Cho đường thẳng  $d$ , 2 điểm  $A, B$  nằm về 2 phía của  $d$ . Dựng đường tròn  $(O)$  đi qua  $A, B$  sao cho nó cắt  $d$  thành 1 dây có độ dài nhỏ nhất.

**811** ([Bin23b], 407., p. 137). Trong các hình thang có 1 góc nhọn  $\alpha$  nội tiếp 1 đường tròn cho trước, hình nào có diện tích lớn nhất  $\alpha > 45^\circ$ ?

**812** ([Bin23b], 408., p. 137). Cho điểm  $I$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$ ,  $IA < IB$ . Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn đường kính  $AB$  & 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Điểm  $M$  di chuyển trên nửa đường tròn đó. Đường vuông góc với  $IM$  tại  $M$  cắt  $Ax, By$  lần lượt ở  $D, E$ . (a) Chứng minh  $AD \cdot BE$  có giá trị không đổi. (b) Tìm vị trí của điểm  $M$  để hình thang  $ABED$  có diện tích nhỏ nhất.

**813** ([Bin23b], 409., p. 137). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm vị trí điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , sao cho nếu  $D, E$  lần lượt là 2 hình chiếu của  $M$  trên 2 đường thẳng  $AB, AC$  thì  $DE$  có độ dài lớn nhất.

**814** ([Bin23b], 410., p. 137). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$ . Điểm  $M$  di chuyển trên cung nhỏ  $AB$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của  $(O)$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $MI \cdot MK$  có GTLN.

**815** ([Bin23b], 411., pp. 137–138). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $BC$  không đi qua  $O$ . Điểm  $A$  di chuyển trên  $(O)$  sao cho  $\triangle ABC$  là tam giác nhọn.  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để tổng  $AH + BH + CH$  có GTLN.

**816** ([Bin23b], 412., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$ . Tìm điểm  $C$  thuộc cung nhỏ  $AB$  sao cho tổng  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  có GTNN.

**817** ([Bin23b], 413., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  sao cho nếu  $H, I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $AB, BC, CA$  thì tổng  $MA + MB + MC + MH + MI + MK$  có GTNN, GTLN.

**818** ([Bin23b], 414., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  đều. Vẽ 2 tia  $Bx, Cy$  cùng phía với  $A$  đối với  $BC$  sao cho  $Bx \parallel AC, Cy \parallel AB$ . 1 đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt  $Bx, Cy$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I$  là giao điểm của  $CD, BE$ . Tìm vị trí của đường thẳng  $d$  để  $\triangle BCI$  có chu vi nhỏ nhất.

**819** ([Bin23b], 415., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân,  $AB = AC = 10$  cm. (a) Chứng minh tồn tại vô số  $\triangle DEF$  vuông cân ngoại tiếp  $\triangle ABC$  (mỗi cạnh của  $\triangle DEF$  đi qua 1 đỉnh của  $\triangle ABC$ ). (b) Tính diện tích lớn nhất của  $\triangle DEF$ .

**820** ([Bin23b], 416., p. 138). Cho  $\triangle ABC$ . 2 điểm  $D, E$  lần lượt di chuyển trên 2 tia  $BA, CA$  sao cho  $BD = CE$ . (a) Vẽ hình bình hành  $BDEM$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ . (b) Tìm vị trí của 2 điểm  $D, E$  sao cho độ dài  $DE$  nhỏ nhất.

**821** ([Bin23b], 417., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ , điểm  $C$  chuyển động trên cung lớn  $AB$ ,  $D$  là giao điểm của  $AB, CM$ . (a) Tìm quỹ tích tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACD$ . (b) Tìm vị trí điểm  $C$  để độ dài  $BI$  nhỏ nhất.

**822** ([Bin23b], 418., p. 138). Cho  $\triangle ABC$ . Điểm  $M$  di chuyển trên cạnh  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ . Vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $N$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn. (a) Chứng minh điểm  $N$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b) Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Tìm vị trí điểm  $M$  để đoạn thẳng  $O_1O_2$  có độ dài nhỏ nhất.

**823** ([Bin23b], 419., p. 139). Cho đường tròn  $(O; R)$ , 1 điểm  $I$  nằm bên trong  $(O)$ . Gọi  $AB, CD$  là 2 dây bất kỳ cùng đi qua  $I$  & vuông góc với nhau.  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . (a) Chứng minh khi 2 dây  $AB, CD$  thay đổi thì 3 tổng sau không đổi:  $OM^2 + ON^2, AB^2 + CD^2, AC^2 + BD^2$ . (b) Tìm vị trí của  $AB, CD$  để hình chữ nhật  $OMIN$  có: (i) diện tích lớn nhất; (ii) chu vi lớn nhất. (c) Tìm vị trí của  $AB, CD$  để tổng  $AB + CD$  lớn nhất, nhỏ nhất. (d) Tìm vị trí của  $AB, CD$  để tứ giác  $ACBD$  có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.

**824** ([Bin23b], 420., p. 139). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , đường thẳng  $d$  không giao với  $(O)$ . Dựng điểm  $M \in d$  sao cho 2 tia  $MA, MB$  cắt  $(O)$  ở  $D, E$  & độ dài  $DE$  nhỏ nhất.

**825** ([Bin23b], 421., p. 139). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$ . Tìm điểm  $M$  thuộc cung  $CD$  sao cho 2 tia  $MA, MB$  cắt dây  $CD$  ở  $I, K$  &  $IK$  có độ dài lớn nhất.

## 23 Miscellaneous

**826** ([Tuy23], VD28, p. 155). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $AB < AC$ . 1 điểm  $M$  di động trên cạnh  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(P)$  đi qua  $B, M$  tiếp xúc với  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(Q)$  đi qua  $C, M$  tiếp xúc với  $AC$ . 2 đường tròn  $(P), (Q)$  cắt nhau tại 1 điểm thứ 2 là  $N$ . (a) Chứng minh điểm  $N$  thuộc đường tròn  $(O)$ . (b) Chứng minh 2 đường thẳng  $BP, CQ$  cắt nhau tại 1 điểm  $D$  cố định. (c) Tìm vị trí điểm  $M$  để  $\triangle BCN$  có diện tích lớn nhất.

**827** ([Tuy23], 147., p. 156). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Tìm 1 điểm  $C$  trên nửa đường tròn sao cho diện tích của nửa hình tròn đường kính  $AB$  bằng diện tích hình tròn đường kính  $BC$ .

**828** ([Tuy23], 148., p. 157). Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$ . Vẽ dây  $BD \parallel AC$ . Đoạn thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại 1 điểm thứ 2 là  $E$ . Tia  $BE$  cắt  $AC$  tại  $M$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $AC$ .



- 829** ([Tuy23], 149., p. 157). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  vuông góc với nhau tại  $M$ .  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A, C$  trên  $BD$ . Đường thẳng  $AH$  cắt  $CD$  tại  $E$ , đường thẳng  $CK$  cắt  $AB$  tại  $F$ . Chứng minh tứ giác  $ACFE$  là hình thoi.
- 830** ([Tuy23], 150., p. 157). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ . Cho biết  $AC, BD$  vuông góc với nhau tại  $M$ . Tính theo  $R$ : (a)  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ . (b)  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ .
- 831** ([Tuy23], 151., p. 157). Tứ giác  $ABCD$  có tổng các cặp góc đối bằng nhau, 2 đường chéo cắt nhau tại  $E$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CDE$  cắt  $AD, BC$  lần lượt tại  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $MN \parallel AB$ . (b)  $ME$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle DFM$  với  $F$  là giao điểm của  $MN, BD$ .
- 832** ([Tuy23], 152., p. 157). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & 1 điểm  $M$  di động trên 1 nửa đường tròn sao cho  $\widehat{MA} \leq \widehat{MB}$ . Vẽ vào trong đường tròn hình vuông  $AMCD$ . (a) Chứng minh đường thẳng  $DM$  luôn đi qua 1 điểm cố định  $E$ . (b)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABM$ . Chứng minh  $A, B, C, I$  đồng viên
- 833** ([Tuy23], 153., p. 157).  $\triangle ABC$  nội tiếp 1 đường tròn. 3 tia phân giác  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  cắt đường tròn lần lượt tại  $D, E, F$ . Chứng minh  $AD + BE + CF > P_{ABC}$ .
- 834** ([Tuy23], 154., p. 157). Cho đường tròn  $(O; R)$  đường kính  $AB$ , 1 đường thẳng  $d \perp AB$  tại điểm  $E$  thuộc bán kính  $OA$ ,  $E \neq A, E \neq O$ . Đường thẳng  $d$  cắt đường tròn tại  $C, D$ . 1 điểm  $M$  chuyển động trên đường tròn  $(O)$  với  $M$  khác  $A, B, C, D$ . 2 đường thẳng  $MA, MB$  cắt  $d$  lần lượt tại  $H, K$ . (a) Chứng minh  $EH \cdot EK = \frac{1}{4}CD^2$ . (b) Tìm quỹ tích tâm  $P$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AHK$ .
- 835** ([Tuy23], 155., p. 157). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . 1 điểm  $D$  di động trên tia đối của tia  $BC$ . 1 điểm  $M$  trên đường thẳng  $AD$  sao cho  $MB + MC$  nhỏ nhất. Tìm quỹ tích của điểm  $M$ .
- 836** ([Tuy23], 173., p. 167). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O; R)$ .  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . (a) Tính 3 cạnh  $\triangle ABC$  theo góc đối diện &  $R$ . (b) Chứng minh  $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$ .
- 837** ([Tuy23], 174., p. 167). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn  $(A; R)$  với  $R < AH$ . Từ  $B$  vẽ tiếp tuyến  $BM$  với đường tròn. Đường thẳng  $HM$  cắt đường tròn tại 1 điểm thứ 2 là  $N$ . Chứng minh: (a)  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ . (b) Đường thẳng  $CN$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- 838** ([Tuy23], 175., p. 167). Tứ giác  $ABCD$  nội tiếp 1 đường tròn. 2 đường chéo cắt nhau tại  $P$ .  $E, F, G, H$  lần lượt là hình chiếu của  $P$  trên  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh tứ giác  $EFGH$  ngoại tiếp 1 đường tròn.
- 839** ([Tuy23], 176., p. 168). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ .  $D, E$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$ . (a) Chứng minh  $DE$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BDH, \triangle CEH$ . (b)  $F$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn  $(BDH), (CEH)$ . Chứng minh  $HF$  đi qua trung điểm của  $DE$ . (c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  đi qua điểm  $F$ .
- 840** ([Tuy23], 177., p. 168). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 2 đường chéo cắt nhau tại  $I$ . Qua  $I$  vẽ 1 đường thẳng vuông góc với  $OI$  cắt 4 cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại  $E, F, G, H$ . (a)  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ . Chứng minh  $\triangle AMI \sim \triangle BNI$ . (b) Chứng minh  $GH = EF$ .
- 841** ([Tuy23], 178., p. 168). Cho đường tròn  $(O; R)$  & 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn. Qua  $A$  vẽ đường thẳng  $d \perp OA$ . 1 điểm  $M$  di động trên đường thẳng  $d$ . Vẽ 2 tiếp tuyến  $MD, ME$  với đường tròn  $(O)$ . (a) Chứng minh  $DE$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (b) Tìm tập hợp tâm  $I$  các đường tròn nội tiếp  $\triangle DEM$ . (c)  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle DEM$ ,  $\widehat{MDE} = \alpha$ . Chứng minh  $\cos \alpha = \frac{R-r}{R}$ . (d) Tính diện tích tứ giác  $MDOE$  theo  $R, \alpha$ .
- 842** ([Tuy23], 179., p. 168). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 điểm  $A$  ở trong đường tròn. Qua  $A$  vẽ 2 dây  $BC \perp DE$ . (a) Chứng minh  $AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2$  không đổi. (b) Vẽ đường tròn  $(O; OA)$  cắt  $DE$  tại 1 điểm thứ 2 là  $H$ . Chứng minh trọng tâm  $G$  của  $\triangle BCH$  cố định. (c)  $I, K$  lần lượt là trung điểm  $BE, CD$ . Chứng minh  $IK$  đi qua 1 điểm cố định.
- 843** ([Tuy23], 180., p. 168). 1 điểm  $M$  di động trên đoạn thẳng  $AB$  cố định. Vẽ tia  $My \perp AB$ . Trên tia  $My$  lấy 2 điểm  $C, D$  sao cho  $MA = MC, MB = MD$ . Vẽ 2 đường tròn đường kính  $AC, BD$ , chúng cắt nhau tại  $M, N$ . (a) Chứng minh 3 điểm  $B, C, N$  thẳng hàng, 3 điểm  $A, D, N$  thẳng hàng. (b) Chứng minh  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Tìm vị trí của  $M$  trên đoạn thẳng  $OB$  sao cho  $DA \cdot DN$  lớn nhất với  $O$  là trung điểm  $AB$ .
- 844** ([Bin23b], p. 139). Nếu 2 tam giác có 2 cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì 2 cạnh thứ 3 cũng không bằng nhau & cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
- 845** ([Bin23b], VD63, p. 140). Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau. Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.
- 846** ([Bin23b], VD64, p. 141, bài toán “con bướm”). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ , 2 điểm  $C, E$  thuộc cung  $AB$ . Vẽ 2 dây  $CD, EF$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CF, DE$  với  $AB$ . Chứng minh  $IM = IN$ .
- 847** ([Bin23b], VD65, p. 142, bài toán chia 3 góc 1 tam giác của Morley). Cho  $\triangle ABC$ . Đặt  $\widehat{A} = 3\alpha, \widehat{B} = 3\beta, \widehat{C} = 3\gamma$ . Lấy điểm  $K$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $\widehat{ABK} = \beta, \widehat{ACK} = \gamma$ .  $D$  là giao điểm của 3 đường phân giác  $\triangle BCK$ . Lấy điểm  $E$  thuộc đoạn thẳng  $BK$ , điểm  $F$  thuộc đoạn thẳng  $CK$  sao cho  $\widehat{EDK} = \widehat{FDK} = 30^\circ$ . (a) Chứng minh  $\triangle DEF$  đều. (b)  $M, N$  lần lượt đối xứng với  $D$  qua  $BK, CK$ . Chứng minh  $MEFN$  là hình thang cân, tính 4 góc của hình thang cân đó theo  $\alpha$ . (c) Chứng minh  $A, E, F, M, N$  thuộc cùng 1 đường tròn & 2 tia  $AE, AF$  chia  $\widehat{A}$  thành 3 góc bằng nhau.

- 848** ([Bin23b], 422., p. 143). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{B} = 2\beta$ ,  $\widehat{C} = 2\alpha$ , 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau. Vẽ hình bình hành  $BDCK$ . (a) Tính  $\widehat{BEK}$ ,  $\widehat{BKE}$  theo  $\alpha, \beta$ . (b) Chứng minh  $\alpha = \beta$ .
- 849** ([Bin23b], 423., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $BD$ .  $d$  là đường phân giác của góc ngoài đỉnh  $B$ .  $M, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $A, C$  trên  $d$ . Chứng minh  $BD \cdot MQ = 2S_{ABC}$ .
- 850** ([Bin23b], 424., p. 144). Chứng minh nếu 1 tứ giác nội tiếp có 2 cạnh đối bằng nhau thì 2 cạnh đối kia song song & tứ giác đó là hình thang cân.
- 851** ([Bin23b], 425., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ .  $d_1, d_2$  lần lượt là đường phân giác của góc ngoài tại  $B, C$ .  $M, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $A, C$  trên  $d_1$ .  $N, P$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên  $d_2$ . (a) Chứng minh  $MN \parallel BC$ . (b) Chứng minh  $MNPQ$  là tứ giác nội tiếp. (c)  $BD, CE$  là 2 đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $BD \cdot MQ = CE \cdot NP$ . (d) Chứng minh nếu  $BD = CE$  thì  $\triangle ABC$  cân.
- 852** ([Bin23b], 426., p. 144). Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau & cắt nhau tại  $I$ . (a) Vẽ điểm  $N$  sao cho  $BN = AE$ ,  $DN = AC$ ,  $A, N$  cùng phía đối với  $BD$ . Chứng minh  $ANBD$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $NK$  là đường phân giác  $\triangle BDN$ . Chứng minh  $ANKI$  là tứ giác nội tiếp. (c) Chứng minh  $ANBD$  là hình thang cân. (d) Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.
- 853** ([Bin23b], 427., p. 144). Chứng minh nếu  $\triangle ABC, \triangle EPQ$  có  $BC = PQ$ ,  $\widehat{A} = \widehat{E}$ , 2 đường phân giác  $AD, EF$  bằng nhau thì  $\triangle ABC = \triangle EPQ$ .
- 854** ([Bin23b], 428., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $D$  thuộc đường phân giác  $AI$ . 2 đường thẳng  $BD, CD$  cắt  $AC, AB$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh nếu  $BM = CN$  thì  $\triangle ABC$  cân.
- 855** ([Bin23b], 429., pp. 144–145). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $E$  di chuyển trên cung  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CE, DE$  với  $AB$ . (a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CEM$  cắt đường thẳng  $AB$  tại 1 điểm  $K$  cố định. (b) Đặt  $AM = a, MN = b, BN = c$ . Chứng minh  $\frac{ac}{b}$  có giá trị không đổi.
- 856** ([Bin23b], 431., p. 145). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ , 2 điểm  $C, E$  thuộc cung  $AB$ ,  $C$  thuộc cung  $AE$ . Vẽ 2 dây  $CD, EF$  đi qua điểm  $I$  thuộc dây  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CF, DE$  với  $AB$ . Chứng minh  $\frac{1}{AI} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{BI} + \frac{1}{IM}$ .
- 857** ([Bin23b], 432., p. 145, bài toán của Napoléon Bonaparte). Cho  $\triangle ABC$ . (a) Ở phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ  $\triangle BCD, \triangle ACE, \triangle ABF$  đều.  $H, I, K$  lần lượt là trọng tâm của 3 tam giác đều ấy. Chứng minh  $\triangle HIK$  đều. (b) Ở phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ  $\triangle BCH, \triangle ACI, \triangle ABK$  lần lượt có cạnh đáy là  $BC, CA, AB$  & góc ở đáy bằng  $30^\circ$ . Chứng minh  $\triangle HIK$  đều.
- 858** ([Bin23b], 433., p. 145, bài toán của Pascal). Chứng minh nếu 1 lục giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đối không song song thì giao điểm của các cặp cạnh đối là 3 điểm thẳng hàng.

## Tài liệu

- [BBN23a] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [BBN23b] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đàm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Bìn23a] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [Bìn23b] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Thu+16] Nguyễn Tất Thu, Đào Quốc Chung, Đoàn Quốc Việt, and Vũ Công Minh. *Tự Luyện Giải Toán THCS Theo Chuyên Đề. Tập 8: Các Bài Toán Chứng Minh Hệ Điểm Nằm Trên Đường Tròn*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh, 2016, p. 166.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.