

Problem: 2nd-Order Function. Quadratic Equation

Bài Tập: Hàm Số Bậc 2 $y = ax^2$. Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0$

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 1 năm 2024

Mục lục

1	2nd-Order Function – Hàm Số $y = ax^2, a \neq 0$	1
2	Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	2
3	Viète Theorem – Định Lý Viète	4
4	Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2	5
4.1	Phương trình đại số bậc cao	5
4.2	Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	6
4.3	Phương trình vô tỷ	7
4.4	Miscellaneous	7
5	Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình	8
6	Relation Between Parabol & Line – Quan Hệ Giữa Parabol $y = ax^2$ & Đường Thẳng $y = mx + n$	8
7	Solvability of Equation – Điều Kiện Về Nghiệm của 1 Phương Trình	9
8	Đa Thức Bậc 2 Với Bất Đẳng Thức & Toán Cực Trị	10
9	Phương Trình Đại Số Bậc Cao	10
10	Miscellaneous	11
	Tài liệu	11

1 2nd-Order Function – Hàm Số $y = ax^2, a \neq 0$

[1] Hàm số bậc 2 $y = ax^2, a \neq 0$. TXĐ: \mathbb{R} . Nếu $a > 0$, hàm số $y = ax^2$ nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$. Nếu $a < 0$, hàm số $y = ax^2$ nghịch biến khi $x > 0$, đồng biến khi $x < 0$. [2] Đồ thị hàm số $y = ax^2, a \neq 0$ là 1 parabol đi qua gốc tọa độ O , nhận trục Oy là trục đối xứng, O là đỉnh của parabol. Nếu $a > 0$, đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị. $\min_{x \in \mathbb{R}} y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Nếu $a < 0$, đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị. $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

[Thá+24, Chap. VII, §1, pp. 46–51]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. 1. 2. 3. 4. 5.

1 ([BBN23], VD1, p. 35). Cho hàm số $y = -(n^2 + 4n + 5)x^2$. (a) Chứng minh hàm số nghịch biến với $x > 0$ & đồng biến với $x < 0$. (b) Biết khi $x = \pm 2$ thì $y = -24$, tìm n . (c) Mở rộng.

2 ([BBN23], VD2, p. 36). Cho hàm số $y = 1.5x^2$. (a) Lập bảng tính giá trị của y ứng với giá trị của x lần lượt bằng $-2, -1, 0, 1, 2$. (b) Vẽ đồ thị hàm số. (c) Trong các điểm $A(3, 13.5), B(-3, -13.5), C\left(-\frac{5}{2}, \frac{75}{8}\right), D(\sqrt{3}, -4.5), E(\sqrt{2}, 3)$, điểm nào thuộc đồ thị?

3 ([BBN23], VD3, p. 36). Cho 2 hàm số $y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x + 3$. (a) Vẽ đồ thị 2 hàm số trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (b) Tìm tọa độ các giao điểm của 2 đồ thị.

4 ([BBN23], VD4, p. 37). Cho hàm số $y = (\sqrt{m-3} - 1)x^2$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số nghịch biến với $x > 0$ & đồng biến với $x < 0$. (b) Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3, 18)$. (c) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 7$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Định nghĩa 1 (Even/odd function – Hàm số chẵn/lẻ). Hàm số $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số chẵn nếu $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$, là hàm số lẻ nếu $f(x) = -f(-x)$ hay $f(x) + f(-x) = 0$, $\forall x \in D$.

5 ([BBN23], VD5, p. 38). Cho hàm số $y = f(x) = 3(m^2 - 1)x^2$ với $m \neq \pm 1$. (a) Chứng minh y là hàm số chẵn. (b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $f(a - 1) = 27(m^2 - 1)$. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến khi $x > 0$ & nghịch biến khi $x < 0$.

6 ([BBN23], VD6, p. 38). Cho 2 hàm số $y = -\frac{m}{4}x^2, y = -\frac{3x - m}{2}$ với $m \in \mathbb{R}$. (a) Xét tính chất biến thiên & tìm GTLN, GTNN của hàm số thứ nhất. (a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{m}{4}x^2$ & đồ thị (d) của hàm số $y = -\frac{3x - m}{2}$ với $m = 2$ trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Dùng đồ thị của 2 hàm số trên với $m = 2$ để giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ & kiểm tra lại bằng tính toán.

7 ([BBN23], 4.1., p. 39). Cho 2 hàm số $y = \pm \frac{3}{4}x^2$. Tính các giá trị tương ứng của y tại các giá trị $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Nhận xét.

8 ([BBN23], 4.2., p. 39). Thả 1 vật nặng hình cầu lăn từ trên đỉnh dốc xuống chân dốc dài 50 m. Quan hệ giữa quãng đường y m & thời gian lăn x s được thể hiện bởi công thức $y = (a - 1)x^2$. (a) Biết hết giây thứ 4, vật nặng lăn được 8 m. Tìm a . (b) Hỏi hết giây thứ 2, 5, 8 thì vật nặng đã lăn được bao nhiêu m? (c) Khi vật nặng còn cách chân dốc 32 m thì nó đã lăn trong thời gian bao lâu? (d) Sao bao lâu thì vật nặng lăn xuống đến chân dốc? (e) Vẽ đồ thị chuyển động của vật nặng với 1 đơn vị trên trục tung ứng với 5 m & 1 đơn vị trên trục hoành ứng với 1 s.

9 ([BBN23], 4.3., pp. 39–40). Trên mặt phẳng tọa độ có 1 điểm $A(2, -6)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2$. Biết $a = -2m + 2.5$. (a) Tìm a, m . (b) Vẽ đồ thị (P_1) của hàm số $y = mx^2$ & đồ thị (P_2) của hàm số $y = ax^2$ với a, m tìm được trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Điểm $B(8, -96), D(-12, 288)$ thuộc đồ thị hàm số nào? (d) Biết điểm $E(h, 18)$ nằm trên (P_1) & điểm $F(-9, n)$ nằm trên (P_2). Tìm h, n .

10 ([BBN23], 4.4., p. 40). Cho hàm số $y = (m^2 - 2m + 9)x^2$. (a) Xét tính biến thiên của hàm số. (b) Biết khi $x = \pm 2$ thì $y = 96$, tìm m .

11 ([BBN23], 4.5., p. 40). Cho hàm số $y = (\sqrt{2m - 5} - 3)x^2$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để: (a) Hàm số nghịch biến với $x > 0$. (b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(4, -32)$.

12 ([BBN23], 4.6., p. 40). Cho hàm số $y = f(x) = -0.75x^2$. Xác định giá trị của m, n để: (a) $f(m) \leq -1.5$. (b) $f(n - 1) \geq -6.75$.

13 ([BBN23], 4.7., p. 40). Cho 2 hàm số $y = f(x) = x^2, y = g(x) = ax + 3$. (a) Tìm $a \in \mathbb{R}$ biết $f(a + 2) - f(a - 5) = 7$. (b) Vẽ 2 đồ thị 2 hàm số trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Tìm giao điểm 2 đồ thị, kiểm tra lại bằng tính toán.

14 ([BBN23], 4.8., p. 40). Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ & a, b, c là 3 giá trị phân biệt của x . Biết $f(a) + b = f(b) + c = f(c) + a$. Tính giá trị biểu thức $A = (a + b - 1)(b + c - 1)(c + a - 1)$.

15 ([BBN23], p. 41, bài toán thả vật nặng rơi từ trên cao). Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y m & thời gian chuyển động x s được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Thả 1 vật nặng từ độ cao 55 m trên tháp nghiêng Pisa xuống đất (sức cản không khí không đáng kể). (a) Cho biết sau 1 s, 1.5 s, 2 s, 2.5 s, 3 s thì vật nặng còn cách đất bao nhiêu m? (b) Khi vật nặng còn cách đất 25 m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu? (c) Sau bao lâu thì vật nặng chạm đất?

16 ([BBN23], p. 42). Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) 1 điểm A chạy trên parabol (P): $y = ax^2, a \neq 0$ thì trung điểm I của OM chạy trên đường nào?

17 ([Bin23], VD74, p. 18). (a) Cho parabol $y = \frac{1}{4}x^2$, điểm $A(0, 1)$ & đường thẳng $d : y = -1$. Gọi M là 1 điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh MA bằng khoảng cách MH từ điểm M đến d . (b) Cho điểm $A(0, a), d : y = -a$. Chứng minh quỹ tích của điểm $M(x, y)$ sao cho khoảng cách MH từ M tới d bằng MA là 1 parabol.

[Bin23, 235., p. 19, 236., p. 20].

18 ([Bin23], 237., p. 20). (a) Xác định hệ số a của parabol $y = ax^2$, biết parabol đi qua điểm $A(-2, -2)$. (b) Tìm tọa độ của điểm M thuộc parabol này, biết khoảng cách từ M đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ M đến trục tung.

19 ([Bin23], 238., p. 20). Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x|x|$.

20 ([Bin23], 239., p. 20). (a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$. (b) Gọi C là 1 điểm tùy ý nằm trên parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$. Gọi K là trung điểm OC . Khi điểm C di chuyển trên parabol đó thì điểm K di chuyển trên đường nào?

2 Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

[Thá+24, Chap. VII, §2, pp. 52–60]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. HD4. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

21 ([Bin23], VD75, p. 20). Cho phương trình $(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$ với tham số m . (a) Giải phương trình khi $m = 1$. (b) Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có 2 nghiệm phân biệt. (c) Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để tập nghiệm của phương trình chỉ có 1 phần tử.

- 22 ([Bin23], VD76, p. 21). Chứng minh phương trình $(a+1)x^2 - 2(a+b)x + b - 1 = 0$ có nghiệm $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- 23 ([Bin23], VD77, p. 22). Chứng minh phương trình $x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0$ có nghiệm $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- 24 ([Bin23], VD78, p. 22). Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. (a) Chứng minh nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó là số nguyên. (b) Tìm nghiệm hữu tỷ của phương trình với $n = 3$.
- 25 ([Bin23], VD79, p. 20). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các nghiệm của phương trình $x^2 - (4+n)x + 2n = 0$ là các số nguyên.
- 26 ([Bin23], VD80, p. 20). Tìm các giá trị của a để 2 phương trình $x^2 + ax + 8 = 0, x^2 + x + a = 0$ có ít nhất 1 nghiệm chung.
- 27 ([Bin23], 240., p. 25). Cho phương trình $mx^2 + 6(m-2)x + 4m - 7 = 0$. Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để phương trình: (a) Có nghiệm kép. (b) Có 2 nghiệm phân biệt. (c) Vô nghiệm.
- 28 ([Bin23], 241., p. 25). Giải phương trình với tham số m : (a) $x^2 - mx - 3(m+3) = 0$. (b) $mx^2 - 4x + 4 = 0$.
- 29 ([Bin23], 242., p. 25). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ biết phương trình $x^2 + mx + 12 = 0$ có hiệu 2 nghiệm bằng 1.
- 30 ([Bin23], 243., p. 25). Cho 2 số thực dương a, b thỏa $a + b = 4\sqrt{ab}$. Tính tỷ số $\frac{a}{b}$.
- 31 ([Bin23], 244., p. 25). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết $2(x^2 + 1) + y^2 = 2y(x + 1)$.
- 32 ([Bin23], 245., p. 26). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có nghiệm: (a) $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$. (b) $(m+1)x^2 - 2x + (m-1) = 0$.
- 33 ([Bin23], 246., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm $\forall a, b \in \mathbb{R}$: (a) $x(x-a) + x(x-b) + (x-a)(x-b) = 0$. (b) $x^2 + (a+b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0$.
- 34 ([Bin23], 247., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: (a) $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$. (b) $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$.
- 35 ([Bin23], 248., p. 26). Chứng minh nếu $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ thì tồn tại 1 trong 3 phương trình bậc 2 $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$ có nghiệm.
- 36 ([Bin23], 249., p. 26). Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, có nghiệm, biết $5a + 2c = b$.
- 37 ([Bin23], 250., p. 26). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh phương trình $(a^2 + b^2 - c^2)x^2 - 4abx + a^2 + b^2 - c^2 = 0$ có nghiệm.
- 38 ([Bin23], 251., p. 26). Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, có nghiệm nếu $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$.
- 39 ([Bin23], 252., p. 26). Chứng minh nếu $bm = 2(c+n)$ thì ít nhất 1 trong 2 phương trình $x^2 + bx + c = 0, x^2 + mx + n = 0$ có nghiệm.
- 40 ([Bin23], 253., p. 26). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0, |b| = |a+c|$. Chứng minh các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là các số hữu tỷ.
- 41 ([Bin23], 254., p. 26). Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ nếu a, b, c là 3 số nguyên lẻ.
- 42 ([Bin23], 255., p. 26). Chứng minh nếu \overline{abc} là số nguyên tố thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không có nghiệm hữu tỷ.
- 43 ([Bin23], 256., p. 27). Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 4 = 0$ là số hữu tỷ.
- 44 ([Bin23], 257., p. 27). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để các nghiệm của phương trình $x^2 - (n+4)x + 4n - 25 = 0$ là các số nguyên.
- 45 ([Bin23], 258., p. 27). Tìm số nguyên tố p biết phương trình $x^2 + px - 12p = 0$ có 2 nghiệm đều là các số nguyên.
- 46 ([Bin23], 259., p. 27). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a) $x^2 + 2x + m = 0, x^2 + mx + 2 = 0$. (b) $x^2 + mx + 1 = 0, x^2 - x - m = 0$.
- 47 ([Bin23], 260., p. 27). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a) $x^2 + (m-2)x + 3 = 0, 2x^2 + mx + m + 2 = 0$. (b) $2x^2 + (3m-5)x - 9 = 0, 6x^2 + (7m-15)x - 19 = 0$.
- 48 ([Bin23], 261., p. 27). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để 1 nghiệm của phương trình $2x^2 - 13x + 2m = 0$ gấp đôi 1 nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + m = 0$.
- 49 ([Bin23], 262., p. 27). Cho 2 phương trình $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$. Biết phương trình thứ nhất có nghiệm dương m , chứng minh phương trình thứ 2 có nghiệm n sao cho $m + n \geq 2$.

3 Viète Theorem – Định Lý Viète

[Thá+24, Chap. VII, §3, pp. 61–65]: HD1. LT1. LT2. LT3. HD2. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

50 ([Bin23], VD81, p. 28). Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$ với tham số m . (a) Tìm m để phương trình có nghiệm. (b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó trong 2 nghiệm, nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn? (c) Xác định m để 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$. (d) Tìm 1 hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m .

51 ([Bin23], VD82, p. 30). Cho phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

52 ([Bin23], VD83, p. 30). Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có 2 nghiệm c, d , phương trình $x^2 + cx + d = 0$ có 2 nghiệm a, b . Tính a, b, c, d biết chúng đều khác 0.

53 ([Bin23], VD84, p. 31). Cho phương trình $x^2 + 5x - 1 = 0$. Không giải phương trình, lập 1 phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là lũy thừa bậc 4 của 2 nghiệm của phương trình ban đầu.

54 ([Bin23], 263., p. 31). Tính nhẩm nghiệm của phương trình: (a) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. (b) $(m-1)x^2 + (m+1)x + 2 = 0$.

55 ([Bin23], 264., p. 31). Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có): (a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$. (b) $5x^2 + 3x - 1 = 0$. (c) $2x^2 + 13x + 8 = 0$. (d) $4x^2 - 11x + 8 = 0$.

56 ([Bin23], 265., p. 32). Xác định giá trị của m để phương trình $(m-1)x^2 - 2x + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

57 ([Bin23], 266., p. 32). Giải phương trình $x^2 - mx + n = 0$ biết phương trình có 2 nghiệm nguyên dương phân biệt & m, n là 2 số nguyên tố.

58 ([Bin23], 267., p. 32). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Không giải phương trình, tính: (a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. (b) $(x_1 - x_2)^2$. (c) $x_1^3 + x_2^3$.

59 ([Bin23], 268., p. 32). Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$.

60 ([Bin23], 269., p. 32). Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có $3m^2 = 16n$. Chứng minh trong 2 nghiệm của phương trình, có 1 nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

61 ([Bin23], 270., p. 32). Cho biết phương trình $x^2 - (m+2)x + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Lập 1 hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

62 ([Bin23], 271., p. 32). Tìm 2 số biết: (a) Tổng của chúng bằng 2, tích của chúng bằng -1 . (b) Tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

63 ([Bin23], 272., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$. (b) $2 \pm \sqrt{3}$.

64 ([Bin23], 273., p. 32). Chứng minh tồn tại 1 phương trình có các hệ số hữu tỷ nhận 1 trong các nghiệm là: (a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$. (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$. (c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

65 ([Bin23], 274., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a) Bình phương của 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$. (b) Nghịch đảo của 2 nghiệm của phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$.

66 ([Bin23], 275., p. 33). Xác định m, n sao cho 2 nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ cũng là m, n .

67 ([Bin23], 276., p. 33). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ khác nhau đôi một, $c \neq 0$. Biết 2 phương trình $x^2 + ax + bc = 0, x^2 + bx + ca = 0$ có ít nhất 1 nghiệm chung. (a) Tìm các nghiệm còn lại của 2 phương trình. (b) Chứng minh các nghiệm còn lại đó là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

68 ([Bin23], 277., p. 33). Cho 2 phương trình $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + dx + a = 0$. Biết phương trình thứ nhất có 2 nghiệm m, n , phương trình thứ 2 có 2 nghiệm p, q . Chứng minh $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$.

69 ([Bin23], 278., p. 33). Cho 2 phương trình $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$. Tìm 1 hệ thức giữa 3 hệ số a, b, c , biết 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thứ nhất & 2 nghiệm x_3, x_4 của phương trình thứ 2 thỏa mãn đẳng thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$.

70 ([Bin23], 279., p. 33). Cho phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 , phương trình $x^2 - b^2x + bc = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 . Biết $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b, c .

71 ([Bin23], 280., p. 33). Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ sao cho 2 phương trình $x^2 + ax + 6 = 0, x^2 + bx + 12 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm chung & $|a| + |b|$ nhỏ nhất.

72 ([Bin23], 281., pp. 33–34). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Ký hiệu $s_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (a) Tính s_1, s_2, s_3 . (b) Tìm 1 hệ thức giữa s_n, s_{n+1}, s_{n+2} . (c) Chứng minh $s_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (d) Tìm số dư khi chia s_{50} cho 5.

4 Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

Giải phương trình:

73 ([Bin23], VD85, p. 34). $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$.

74 ([Bin23], VD86, p. 35). $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

75 ([Bin23], VD87, p. 35). $(x+1)^4 = 2(x^4+1)$.

76 ([Bin23], VD88, p. 36). $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$.

77 ([Bin23], VD89, p. 37). $x^4 = 24x + 32$.

78 ([Bin23], VD90, p. 37). $x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$.

79 ([Bin23], VD91, p. 38). $|x-8|^5 + |x-9|^6 = 1$.

80 ([Bin23], VD92, p. 38). $|x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = 3$.

81 ([Bin23], VD93, p. 39). $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

82 ([Bin23], VD94, p. 40). $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$.

83 ([Bin23], VD95, p. 40). $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$.

84 ([Bin23], VD96, p. 41). $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$.

85 ([Bin23], VD97, p. 41). $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$.

86 ([Bin23], VD98, p. 42). $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$.

87 ([Bin23], VD99, p. 42). *Giải & biện luận phương trình $a\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$ với tham số a .*

88 ([Bin23], VD100, p. 43). *Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để tồn tại 2 số $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $4x - 3y = 7, 2x^2 + 5y^2 = m$.*

Giải hệ phương trình:

89 ([Bin23], VD101, p. 44). $x^2 + y^2 = 11, x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2}$.

90 ([Bin23], VD102, p. 44). $x^2 + y + \frac{1}{4} = 0, x + y^2 + \frac{1}{4} = 0$.

91 ([Bin23], VD103, p. 45). $x^2 - xy + y^2 = 1, 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3$.

92 ([Bin23], VD104, p. 46). $x + y + z = 9, x^2 + y^2 + z^2 = 27$.

93 ([Bin23], VD105, p. 46). $x + y + z = a, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^3 + y^3 + z^3 = a^3$.

94 ([Bin23], VD106, p. 47). $x + \frac{1}{y} = 2, y + \frac{1}{z} = 2, z + \frac{1}{x} = 2$.

4.1 Phương trình đại số bậc cao

Giải phương trình:

95 ([Bin23], 282., p. 47). (a) $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$. (b) $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$. (c) $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$. (d) $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$. (e) $(x-2)^2 + (x+1)^3 = 8x^3 - 1$.

96 ([Bin23], 283., p. 48). (a) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. (b) $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$. (c) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. (d) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$. (e) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$. (f) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$.

97 ([Bin23], 284., p. 48). (a) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$. (b) $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$. (c) $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$.

98 ([Bin23], 285., p. 48). $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$.

99 ([Bin23], 286., p. 48). (a) $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$. (b) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$.

100 ([Bin23], 287., p. 48). (a) $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$. (b) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

101 ([Bin23], 288., p. 48). (a) $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$. (b) $x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0$.

102 ([Bin23], 289., p. 48). (a) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$. (b) $x(x-1)(x+1)(x+2) = 3$. (c) $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$. (d) $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$. (e) $(4x+3)^2(x+1)(2x+1) = 810$. (f) $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$.

103 ([Bin23], 290., p. 48). (a) $4(x^2 - x + 1)^3 = 27(x^2 - x)^2$. (b) $3(x+5)(x+6)(x+7) = 8x$.

104 ([Bin23], 291., p. 48). (a) $(x-2)^3 + (x-4)^3 = 8$. (b) $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 82$. (c) $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$. (d) $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.

105 ([Bin23], 292., p. 48). (a) $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$. (b) $x^4 + (x-1)(3x^2 + 2x - 2) = 0$. (c) $x^4 + (x+1)(5x^2 - 6x - 6) = 0$. (d) $(x^2 + 1)^2 + (x+2)(3x^2 - 4x - 5) = 0$. (e) $x^2(x-1)^2 + x(x^2 - 1) = 2(x+1)^2$.

106 ([Bin23], 293., p. 48). $x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0$.

107 ([Bin23], 294., p. 49). (a) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$. (b) $x^4 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$. (c) $x^4 = 2x^2 + 8x = 3$. (d) $(x^2 - 16)^2 = 16x + 1$. (e) $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$. (f) $x^4 = 4x - 3$. (g) $x^4 = 2x^2 - 12x + 8$.

108 ([Bin23], 295., p. 49). (a) $x^4 = 4x + 1$. (b) $x^4 = 8x + 7$. (c) $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$. (d) $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$.

109 ([Bin23], 296., p. 49). $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$.

110 ([Bin23], 297., p. 49). $(x - \sqrt{2})^3 + (x + \sqrt{3})^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2x)^3 = 0$.

111 ([Bin23], 298., p. 49). $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$ với 2 tham số a, b .

112 ([Bin23], 299., p. 49). $(a + b + x)^3 - 4(a^3 + b^3 + x^3) - 12abx = 0$ với 2 tham số a, b .

113 ([Bin23], 300., p. 49). Giải phương trình $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0$ biết -1 là 1 nghiệm của phương trình.

114 ([Bin23], 301., p. 49). Giải phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ biết $a, b \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

115 ([Bin23], 302., p. 49). Giải phương trình $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$ biết $a, b \in \mathbb{Q}$, $1 + \sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.

116 ([Bin23], 303., p. 49). Giải phương trình $4x^4 - 11x^2 + 9x + m = 0$ biết tồn tại 2 nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa $x_1 + x_2 = -1$, $x_1 > x_2$.

117 ([Bin23], 304., p. 49). (a) Chứng minh nếu $x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ thì $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$. (b) Giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$. (c) Giải phương trình $4x^3 + 3x = \frac{4}{3}$.

118 ([Bin23], 305., pp. 49–50, định lý Viète cho phương trình bậc 3). Chứng minh: (a) Nếu phương trình bậc 3 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ có 3 nghiệm thực x_1, x_2, x_3 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

(b) Tìm các nghiệm của phương trình $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$ rồi kiểm nghiệm lại chúng thỏa mãn định lý Viète cho phương trình bậc 3.

4.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Giải phương trình:

119 ([Bin23], 306., p. 50). (a) $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}$. (b) $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{9}{2(x^2 - 2x + 4)}$. (c) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$. (d) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$.

120 ([Bin23], 307., p. 50). (a) $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$. (b) $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$. (c) $\frac{x^4}{2x^2 + 1} + \frac{2x^2 + 1}{x^4} = 2$.

121 ([Bin23], 308., p. 50). (a) $4 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = 13 \left(x + \frac{1}{x} \right)$. (b) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 13 \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

122 ([Bin23], 309., p. 50). (a) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$. (b) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$. (b) $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$. (c) $\frac{3x}{x^2 - 3x + 1} + \frac{7x}{x^2 + x + 1} = -4$.

- 123** ([Bin23], 310., p. 51). (a) $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$. (b) $\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4x + 5} - \frac{x^2 - 5x + 5}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{4}$.
- 124** ([Bin23], 311., p. 51). (a) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$. (b) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.
- 125** ([Bin23], 312., p. 51). (a) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$. (b) $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$.
- 126** ([Bin23], 313., p. 51). (a) $\frac{x(3-x)}{x+1} \left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2$. (b) $\frac{x(5-x)}{x+1} \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = 6$. (c) $x \cdot \frac{8-x}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1}\right) = 15$.
- 127** ([Bin23], 314., p. 51). $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$.
- 128** ([Bin23], 315., p. 51). $\frac{(1995-x)^2 + (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2}{(1995-x)^2 - (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2} = \frac{19}{49}$.

4.3 Phương trình vô tỷ

Giải phương trình:

- 129** ([Bin23], 316., p. 51). (a) $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$. (b) $x^2 + \sqrt{x+72} = 72$.
- 130** ([Bin23], 317., p. 51). (a) $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$. (b) $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$.
- 131** ([Bin23], 318., p. 51). (a) $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$. (b) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$.
- 132** ([Bin23], 319., p. 51). $(x-1)(x+3) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8$.
- 133** ([Bin23], 320., p. 51). $\sqrt{x-2a+16} - 2\sqrt{x-a+4} + \sqrt{x} = 0$ với tham số a .
- 134** ([Bin23], 321., p. 52). $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{a}$ với tham số a .
- 135** ([Bin23], 322., p. 52). Tìm $x, y \in \mathbb{Q}, x > y \geq 0$ thỏa mãn phương trình $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
- 136** ([Bin23], 323., p. 52). Cho $(x + \sqrt{x^2+3})(y + \sqrt{y^2+3}) = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x + y$.

4.4 Miscellaneous

Giải hệ phương trình:

- 137** ([Bin23], 324., p. 52). (a) $x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2, 4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56$. (b) $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, xy = 6$. (c) $3x + 5y = 9 + 2xy, 2x + 3y = 10 - xy$. (d) $x^2 - 4xy + y^2 = 1, y^2 - 3xy = 4$.
- 138** ([Bin23], 325., p. 52). (a) $x + y = 1, x^2 + y^2 = 41$. (b) $x - y = 1, x^2 - xy + y^2 = 7$. (c) $x - y = 3, x^2 + xy + y^2 = 21$. (d) $x - y = 2, x^3 - y^3 = 26$. (e) $x - y = a, x^3 - y^3 = 19a^3$ với $a > 0$.
- 139** ([Bin23], 326., p. 52). (a) $x^2 + 2y + 1 = 0, y^2 + 2x + 1 = 0$. (b) $x^2 - 3x = 2y, y^2 - 3y = 2x$. (c) $2x = y(1 - x^2), 2y = x(1 - y^2)$.
- 140** ([Bin23], 327., p. 52). (a) $x^2 + (x+y)^2 = 17, y^2 + (x+y)^2 = 25$. (b) $x^2 + 2xy - 2y^2 = 1, 2x^2 - xy + 3y^2 = 4$.
- 141** ([Bin23], 328., p. 52). (a) $2x^2 - y^2 = 1, xy + x^2 = 2$. (b) $x^2 + y^2 = 5, x + y - xy = 1$.
- 142** ([Bin23], 329., p. 52). (a) $x + y = 4, x^4 + y^4 = 82$. (b) $x + y + xy = 8, x^4 + y^4 = 32$.
- 143** ([Bin23], 330., p. 52). (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 12, xy + yz + zx = 12$. (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x + y + z = 3$. (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^3 + y^3 + z^3 = 1$.
- 144** ([Bin23], 331., p. 53). (a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{4}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$. (b) $x + y + z = 8, xy + yz + zx = 20, xyz = 16$. (c) $x + xy + y = 1, y + yz + z = 3, z + zx + x = 7$. (d) $x - \frac{1}{y} = 1, y - \frac{1}{z} = 1, z - \frac{1}{x} = 1$.
- 145** ([Bin23], 332., p. 53). $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \frac{4z^2}{1+4z^2} = x$.
- 146** ([Bin23], 333., p. 53). $\sqrt{x}(1+y) = 2y, \sqrt{y}(1+z) = 2z, \sqrt{z}(1+x) = 2x$.

- 147** ([Bin23], 334., p. 53). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3}, y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3}, z^2 - x^2 - x = \frac{1}{3}$. (a) Chứng minh $x, y, z > 0$. (b) Chứng minh $x = y = z$. (c) Giải hệ phương trình.
- 148** ([Bin23], 335., p. 53). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $x^2 = y + 1, y^2 = z + 1, z^2 = x + 1$. (a) Chứng minh $xyz \neq 0$. (b) Chứng minh x, y, z cùng dấu. (c) Chứng minh $x = y = z$. (d) Giải hệ phương trình.
- 149** ([Bin23], 336., p. 53). Tìm 4 số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng 3 số còn lại.
- 150** ([Bin23], 337., p. 53). Tìm 4 số biết nếu cộng tích của 3 số bất kỳ với số còn lại thì mỗi kết quả đều bằng 2.

5 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

- 151** ([Bin23], VD107, p. 54, Euler's). 2 bà ra chợ bán tổng cộng 100 quả trứng. Số trứng của 2 người không bằng nhau, nhưng số tiền thu được lại bằng nhau. Bà thứ nhất nói với bà thứ 2: Nếu tôi có số trứng như của bà, tôi sẽ thu được 15 đồng. Bà thứ 2: Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của bà, tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng. Hỏi mỗi bà có bao nhiêu quả trứng mang đi bán?
- 152** ([Bin23], 338., p. 55). Trong cùng 1 thời gian như nhau, đội I phải đào $V_1 = 810 \text{ m}^3$ đất, đội II phải đào $V_2 = 900 \text{ m}^3$ đất. Kết quả đội I đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, đội II hoàn thành trước thời hạn 6 ngày. Tính số đất mỗi đội đã đào trong 1 ngày, biết mỗi ngày đội II đã đào nhiều hơn đội I là 4 m^3 .
- 153** ([Bin23], 339., p. 55). 1 người thả hòn đá rơi xuống giếng, sau 1.5 giây thì nghe thấy tiếng đá chạm đáy giếng. Xác định thời gian rơi của đá & chiều sâu của giếng (làm tròn đến m), biết quãng đường $s \text{ m}$ của 1 vật rơi tự do không có vận tốc ban đầu sau t giây được tính theo công thức $s = 5t^2$ & vận tốc của âm thanh là 340 m/s .
- 154** ([Bin23], 340., p. 55). Có 2 loại quặng sắt: quặng loại I & quặng loại II, khối lượng tổng cộng là 10 tấn. Khối lượng sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0.8 tấn, trong quặng loại II là 0.6 tấn. Biết tỷ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I nhiều hơn tỷ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng của mỗi loại quặng.
- 155** ([Bin23], 341., p. 55). Nếu đường kính của 1 hình tròn tăng 3 m thì diện tích của nó tăng gấp đôi. Tính độ dài đường kính lúc đầu.
- 156** ([Bin23], 342., p. 55). 2 người đi xe đạp cùng khởi hành 1 lúc ở cùng 1 chỗ, người thứ nhất đi về phía bắc, người thứ 2 đi về phía đông. Sau 2 giờ họ cách nhau 60 km theo đường chim bay. Biết vận tốc của người thứ nhất lớn hơn vận tốc của người thứ 2 là 6 km/h. Tính vận tốc mỗi người.
- 157** ([Bin23], 343., p. 55). 2 vòi nước cùng chảy vào 1 bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu chảy 1 mình cho đầy bể thì vòi I cần nhiều hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy 1 mình trong bao lâu thì đầy bể?
- 158** ([Bin23], 344., pp. 55–56). Trên quãng đường AB dài 60 km, người I đi từ A đến B, người II đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng 1 lúc & gặp nhau tại C sau khi khởi hành 1h12ph. Từ C, người I đi tiếp đến B với vận tốc giảm hơn trước 6 km/h, người thứ II đi tiếp đến A với vận tốc như cũ. Kết quả người I đến nơi sớm hơn người II 48 phút. Tính vận tốc ban đầu của mỗi người.
- 159** ([Bin23], 345., p. 56). 1 cửa hàng mua x chiếc áo hết d nghìn đồng. Cửa hàng bán 2 chiếc với giá bằng $\frac{1}{2}$ giá mua, bán các chiếc còn lại lãi được 8000 đồng/chiếc. Tiền lãi tổng cộng là 72000 đồng. (a) Tính x biết $d = 480$. (b) Tìm GTNN của x biết $d \in \mathbb{N}$.
- 160** ([Bin23], 346., p. 56). Long có đồ chơi là 1 chiếc thuyền buồm. Khi Long cho thuyền chạy từ A đến B thì thời gian thuyền đi nhiều hơn so với khi có gió thổi thuận chiều là 9 giây. Khi bị gió thổi ngược chiều thì thời gian thuyền đi từ A đến B là 84 giây. Tính thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió thổi.
- 161** ([Bin23], 347., p. 56). 3 công nhân cùng làm 1 công việc thì làm xong sớm hơn 18 giờ so với khi người III làm 1 mình, sớm hơn 3 giờ so với khi người II làm 1 mình & bằng nửa thời gian so với khi người I làm 1 mình công việc đó. Tính thời gian của mỗi công nhân làm 1 mình xong công việc đó.
- 162** ([Bin23], 348., p. 56, Sam Loyd's). 1 điền chủ muốn cắt ra từ 1 mảnh đất hình chữ nhật 1 dải đất có chiều rộng không đổi dọc theo 4 bờ của mảnh đất sao cho diện tích phần cắt ra bằng diện tích phần còn lại. Trong cuốn sách của mình, Sam Loyd đưa ra cách làm của người điền chủ nhưng không chứng minh: Lấy nửa chu vi hình chữ nhật ban đầu trừ đi đường chéo của nó, rồi chia cho 4, đó chính là chiều rộng của dải đất được cắt ra. Chứng minh cách làm này đúng.

6 Relation Between Parabol & Line – Quan Hệ Giữa Parabol $y = ax^2$ & Đường Thẳng $y = mx + n$

- 163** ([Bin23], VD108, p. 57). Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 3$. (a) Xác định tọa độ 2 giao điểm A, B của parabol & đường thẳng. (b) Xác định tọa độ điểm C thuộc cung AB của parabol đó sao cho $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

164 ([Bin23], 349., p. 58). Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, đường thẳng $(d) : y = mx + n$. Xác định 2 hệ số $m, n \in \mathbb{R}$ để đường thẳng d đi qua điểm $A(1, 0)$ & tiếp xúc với parabol. Tìm tọa độ tiếp điểm.

165 ([Bin23], 350., p. 58). Cho parabol $y = x^2$. Tìm điểm A thuộc parabol sao cho tiếp tuyến của parabol tại A song song với đường thẳng $y = 4x + 5$.

166 ([Bin23], 351., p. 58). Cho parabol $y = x^2$, 2 điểm A, B thuộc parabol với hoành độ tương ứng là $-1, 2$. Tìm điểm M trên cung AB của parabol sao cho $\triangle ABM$ có diện tích lớn nhất.

167 ([Bin23], 352., p. 58). Cho parabol $y = x^2$. chứng minh với mọi điểm M thuộc đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$, 2 tiếp tuyến kẻ từ M với parabol vuông góc với nhau.

168 ([Bin23], 353., p. 58). Cho parabol $y = x^2$. Gọi A, B là 2 giao điểm của đường thẳng $y = mx + 2$ với parabol với tham số $m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất.

7 Solvability of Equation – Điều Kiện Về Nghiệm của 1 Phương Trình

169 ([Bin23], VD109, p. 59). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm không âm.

170 ([Bin23], VD110, p. 60). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + mx - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm ≥ 2 .

171 ([Bin23], VD111, p. 61). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

172 ([Bin23], VD112, p. 62). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^4 + mx^2 + 2m - 4 = 0$ có nghiệm.

173 ([Bin23], VD113, p. 62). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $\sqrt{2x^2 + (m - 4)x + 3} = x - 2$ có nghiệm.

174 ([Bin23], VD114, p. 63). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^3 - m(x + 1) + 1 = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

175 ([Bin23], VD115, p. 62). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tập nghiệm của phương trình $x - \sqrt{1 - x^2} = m$ chỉ có 1 phần tử.

176 ([Bin23], VD116, p. 64). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

177 ([Bin23], VD117, p. 65). Cho phương trình $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có 4 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thỏa $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

178 ([Bin23], VD118, p. 65). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x - 5} + \sqrt{9 - x} = m$ chỉ có 1 phần tử.

179 ([Bin23], 354., p. 66). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ có nghiệm không âm.

180 ([Bin23], 355., p. 66). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + 2m|x - 2| - 4x + m^2 + 3 = 0$ có nghiệm.

181 ([Bin23], 356., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt > -1 .

182 ([Bin23], 357., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để 2 nghiệm của phương trình $x^2 + x + m = 0$ đều lớn hơn m .

183 ([Bin23], 358., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + mx - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm ≤ -2 .

184 ([Bin23], 359., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 = 0$.

185 ([Bin23], 360., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có nghiệm: (a) $(m - 3)x^4 - 2mx^2 + 6m = 0$. (b) $x^4 - 2mx^2 + m + 2 = 0$.

186 ([Bin23], 361., p. 67). Cho phương trình $x^4 - 2(m - 1)x^2 - (m - 3) = 0$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tập nghiệm của phương trình có: (a) 4 phần tử. (b) 3 phần tử. (c) 2 phần tử. (d) Không có phần tử nào.

187 ([Bin23], 362., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có 4 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thỏa $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$: (a) $mx^4 - 10mx^2 + m + 8 = 0$. (b) $x^4 - (m + 7)x^2 + 3m = 0$.

188 ([Bin23], 363., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^4 - 40x^2 + 6m = 0$ có 4 nghiệm, & khi biểu diễn 4 nghiệm đó từ nhỏ đến lớn trên trục số bởi 4 điểm A, B, C, D thì $AB = BC = CD$.

189 ([Bin23], 364., p. 67). Chứng minh phương trình $(x + 1)^4 - (m - 1)(x + 1)^2 - (m^2 - m + 1) = 0$ có 2 nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

190 ([Bin23], 365., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$ có nghiệm.

191 ([Bin23], 366., p. 67). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $2x - 4 = 3\sqrt{x - m}$ có nghiệm.

192 ([Bin23], 367., p. 68). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để tập nghiệm của phương trình chỉ có 1 phần tử: (a) $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2} = m$. (b) $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 2} = m$.

8 Đa Thức Bậc 2 Với Bất Đẳng Thức & Toán Cực Trị

193 ([Bin23], VD119, p. 68). Cho đa thức bậc 2 $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Chứng minh: (a) Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với $a, \forall x \in \mathbb{R}$. (b) Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x khác $-\frac{b}{2a}$. (c) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ trái dấu với a với mọi giá trị của x nằm trong khoảng 2 nghiệm, $f(x)$ cùng dấu với a với mọi giá trị của x nằm ngoài khoảng 2 nghiệm.

194 ([Bin23], VD120, p. 69). Giải bất phương trình bậc 2 $x^2 - 2x - 1 > 0$.

195 ([Bin23], VD121, p. 69). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $mx^2 + (m-2)x + 3 = 0$ có nghiệm.

196 ([Bin23], VD122, p. 70). Cho đẳng thức $x^2 - x + y^2 - y = xy$ (1). (a) Chứng minh $(x-1)^2 \leq \frac{4}{3}, (y-1)^2 \leq \frac{4}{3}$. (b) Tìm $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ thỏa mãn đẳng thức (1).

197 ([Bin23], VD123, p. 70). Tìm GTNN, GTLN của $A = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

198 ([Bin23], VD124, p. 72). Cho $A = \frac{x^2 + mx + n}{x^2 + 2x + 4}$. Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ để A có GTNN bằng $\frac{1}{3}$, GTLN bằng 3.

199 ([Bin23], VD125, p. 73). Tìm GTNN của biểu thức $A = (2x-3)^3 - 7$ với $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$.

200 ([Bin23], VD126, p. 73). Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình sau, tìm $m \in \mathbb{R}$ để $x_1^2 + x_2^2$ có GTNN: (a) $x^2 - (2m-1)x + m-2 = 0$. (b) $x^2 + 2(m-2)x - (2m-7) = 0$.

201 ([Bin23], VD127, p. 74). Tìm GTNN của $A = 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$.

202 ([Bin23], 368., p. 75). Chứng minh nếu $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa đẳng thức $x + y + xy = (x+y)^2$ thì $-\frac{1}{3} \leq x, y \leq 1$.

203 ([Bin23], 369., p. 76). Chứng minh nếu $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa đẳng thức $x^2 = 3(xy + y - y^2)$ thì $0 \leq y \leq 4$.

204 ([Bin23], 370., p. 76). Chứng minh nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa $a + b + c = 5, ab + bc + ca = 8$ thì $1 \leq a, b, c \leq \frac{7}{3}$.

205 ([Bin23], 371., p. 76). Tìm GTNN của $A = x^4 - 4x^3 + 8x + 20$.

206 ([Bin23], 372., p. 76). Tìm GTNN, GTLN: (a) $A = \frac{x}{x^2 + 1}$. (b) $B = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$. (c) $C = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$. (d) $D = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$.

207 ([Bin23], 373., p. 76). Tìm GTNN, GTLN của $A = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$.

208 ([Bin23], 374., p. 76). Tìm GTNN của $A = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

209 ([Bin23], 375., p. 76). Tìm GTNN của $A = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$ với $x > 0$.

210 ([Bin23], 376., p. 76). Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ để biểu thức $A = \frac{2x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$ nhận GTNN bằng 1, GTLN bằng 6.

211 ([Bin23], 377., p. 76). Tìm GTNN của $A = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$ với $x + y = 1$.

212 ([Bin23], 378., p. 76). Tìm GTNN của $A = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$ với $0 < x < 1$.

213 ([Bin23], 379., p. 76). Cho phương trình $x^4 + 2x^2 + 2ax + (a+1)^2 = 0$. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để nghiệm của phương trình: (a) Đạt GTNN. (b) Đạt GTLN.

214 ([Bin23], 380., p. 76). Cho phương trình $x^2 + ax + a - 5 = 0$ với $a \geq -1$. Tìm GTLN mà nghiệm của phương trình có thể đạt được.

9 Phương Trình Đại Số Bậc Cao

Giải phương trình:

215 ([Bin23], VD1-4, pp. 78-80). (a) $x^3 + 3x^2 + 12x - 16 = 0$. (b) $x^3 - 3x - 2 = 0$. (c) $x^3 - 6x + 4 = 0$. (d) $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$.

10 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCVII, §3, pp. 66–67]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 119.