

Problem: Antiderivative & Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm & Tích Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Antiderivative & Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm & Tích Phân*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/problem/NQBH_integral_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/problem/NQBH_integral_problem.tex.
- *Problem & Solution: Antiderivative & Integral – Bài Tập & Lời Giải: Nguyên Hàm & Tích Phân*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/solution/NQBH_integral_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/solution/NQBH_integral_solution.tex.

Mục lục

1 Antiderivative – Nguyên Hàm	1
2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp	3
3 Integral – Tích Phân	3
4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân	4
5 Miscellaneous	5
Tài liệu	5

1 Antiderivative – Nguyên Hàm

[1] $(\int f(x)dx)' = f(x)$. [2] Tính chất của nguyên hàm: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 3–8]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 ([Hao+22], 1, p. 93). Tìm hàm số $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$ nếu: (a) $f(x) = 3x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$; (b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

2 ([Hao+22], Ví dụ 6, p. 97). Tính: (a) $\int (2x^+ \frac{1}{\sqrt{x^2}}) dx$ trên khoảng $(0; +\infty)$; (b) $\int (3 \cos x - 3^{x-1}) dx$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

3 ([Hao+22], 6, p. 98). (a) Cho $\int (x-1)^{10} dx$. Đặt $u = x-1$, viết $(x-1)^{10} dx$ theo u & du . (b) Cho $\int \frac{\ln x}{x} dx$. Đặt $x = e^t$, viết $\frac{\ln x}{x} dx$ theo t & dt .

4 ([Hao+22], Ví dụ 7, p. 98). Tính: (a) $\int \sin(3x-1) dx$. (b) $\int \sin(ax+b) dx$. (c) $\int \cos(ax+b) dx$

5 ([Hao+22], Ví dụ 8, p. 99). Tính $\int \frac{x}{(x+1)^5} dx$.

6 (Mở rộng [Hao+22], Ví dụ 8, p. 99). Tính $\int \frac{x}{(x+1)^n} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

7 ([Hao+22], Ví dụ 8, p. 100). Tính: (a) $\int xe^x dx$; (b) $\int x \cos x dx$; (c) $\int \ln x dx$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Hạo+22], 8, p. 100). Cho $P(x)$ là đa thức của x . Tính $\int P(x)e^x dx$, $\int P(x) \cos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$.

9 ([Hạo+22], 1., p. 100). Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là 1 nguyên hàm của hàm số còn lại? (a) e^{-x} & $-e^{-x}$; (b) $\sin 2x$ & $\sin^2 x$; (c) $(1 - \frac{2}{x})^2 e^x$ & $(1 - \frac{4}{x}) e^x$.

10 ([Hạo+22], 2., pp. 100–101). Tìm nguyên hàm của các hàm số sau: (a) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x}}$; (b) $f(x) = \frac{2^x-1}{e^x}$; (c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; (d) $f(x) = \sin 5x \cos 3x$; (e) $f(x) = \tan^2 x$; (g) $f(x) = e^{3-2x}$; (h) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$.

11 ([Hạo+22], 3., p. 101). Sử dụng phương pháp đổi biến số, tính: (a) $\int (1-x)^9 dx$ (đặt $u = 1-x$); (b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$ (đặt $u = 1+x^2$); (c) $\int \cos^3 x \sin x dx$ (đặt $t = \cos x$); (d) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$ (đặt $u = e^x + 1$).

12 ([Hạo+22], 4., p. 101). Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, tính: (a) $\int x \ln(1+x) dx$; (b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$; (c) $\int x \sin(2x+1) dx$; (d) $\int (1-x) \cos x dx$.

13 ([Tuấn+22], Ví dụ 1, p. 144). Tính: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

Giải. Có $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int (\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}) \sin x dx$. Đặt $t = \cos x$, được $t' = -\sin x$ hay $dt = -\sin x dx$ & $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = (\frac{1}{\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x}) \sin x dx$ viết thành $-(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}) dt$. Do đó, nguyên hàm đã cho viết thành: $-\int (\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}) dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C$. Thay $t = \cos x$, được: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$. \square

14 ([Tuấn+22], Ví dụ 2, p. 144). Tính: $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$.

15 ([Tuấn+22], Ví dụ 3, p. 145). Tính: $\int \cos \sqrt{x} dx$.

16 ([Tuấn+22], 3.1., p. 145). Kiểm tra xem hàm số nào là 1 nguyên hàm của hàm số còn lại trong mỗi cặp hàm số sau: (a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ & $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. (b) $f(x) = e^{\sin x} \cos x$ & $g(x) = e^{\sin x}$. (c) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ & $g(x) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$. (d) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ & $g(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$. (e) $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ & $g(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

17 ([Tuấn+22], 3.2., pp. 145–146). Chứng minh các hàm số $F(x), G(x)$ sau đều là 1 nguyên hàm của cùng 1 hàm số: (a) $F(x) = \frac{x^2+6x+1}{2x-3}$ & $G(x) = \frac{x^2+10}{2x-3}$. (b) $F(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ & $G(x) = 10 + \cot^2 x$. (c) $F(x) = 5 + 2 \sin^2 x$ & $G(x) = 1 - \cos 2x$.

18 ([Tuấn+22], 3.3, p. 146). Tìm nguyên hàm của các hàm số sau: (a) $f(x) = (x-9)^4$; (b) $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$; (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; (d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; (e) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}$; (f) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

19 ([Tuấn+22], 3.4, p. 146). Tính các nguyên hàm sau bằng phương pháp đổi biến số: (a) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ với $x > -1$ (đặt $t = 1+x^3$); (b) $\int x e^{-x^2} dx$ (đặt $t = x^2$); (c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ (đặt $t = 1+x^2$); (d) $\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} dx$ (đặt $t = \sqrt{x}$); (e) $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx$ (đặt $t = \frac{1}{x}$); (f) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ (đặt $t = \ln x$); (g) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$ (đặt $t = \cos x$); (h) $\int \cos x \sin^3 x dx$ (đặt $t = \sin x$); (i) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$ (đặt $t = e^x$); (j) $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$ (đặt $t = \sin x - \cos x$).

20 ([Tuấn+22], 3.5, p. 146). Áp dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, tính: (a) $\int (1-2x)e^x dx$; (b) $\int x e^{-x} dx$; (c) $\int x \ln(1-x) dx$; (d) $\int x \sin^2 x dx$; (e) $\int \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$

21 ([Quỳ+20], VD1, p. 106). Tính $\int \cos^2 3x dx$.

22 ([Quỳ+20], VD2, p. 106). Tìm hàm số f thỏa $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4, f(0) = 4, f(1) = 1$.

23. Tìm hàm số f thỏa $f(a) = b$ &: (a) $f'(x) = c$. (b) $f'(x) = cx + d$. (c) $f'(x) = cx^2 + dx + e$. (d) $f'(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

24. Tìm hàm số f thỏa $f(a) = m, f(b) = n$ &: (a) $f''(x) = c$. (b) $f''(x) = cx + d$. (c) $f''(x) = cx^2 + dx + e$. (d) $f''(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

25 ([Quỳ+20], VD3, p. 106). Cho $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$. (a) Viết $f(x)$ dưới dạng $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$. (b) Tính $\int f(x) dx$.

26 ([Quỳ+20], VD4, p. 108). Tính $\int x^2(1-x)^7 dx$.

27 ([Quỳ+20], VD5, p. 108). Tính: (a) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$. (b) $\int \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

28 ([Quỳ+20], VD6, p. 109). Tính: (a) $\int x e^{-x} dx$. (b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

29 ([Quỳ+20], VD7, p. 110). Tính $\int \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2} dx$.

30 ([Quỳ+20], VD8, p. 110). Tính $\int \sin x \cos x dx$.

31 ([Quỳ+20], 1., p. 110). Tính $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

32 ([Quỳ+20], 2., p. 110). *Tính: (a) $\int \sin 2x \cos x dx$. (b) $\int \cot^2 2x dx$.*

33 ([Quỳ+20], 3., p. 111). *Tìm hàm số $f(x)$ thỏa: (a) $f'(x) = 4\sqrt{x} - x, f(4) = 0$. (b) $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2, f(1) = 2$.*

34 ([Quỳ+20], 4., p. 111). *Tính: (a) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$. (b) $\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx$.*

35 ([Quỳ+20], 5., p. 111). *Tính $\int x e^{x^2} dx$.*

36 ([Quỳ+20], 6., p. 111). *Tính: (a) $\int x^3 \ln 2x dx$. (b) $\int x^2 \cos 2x dx$.*

37 ([Quỳ+20], 7., p. 111). *Tính: (a) $\int \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5} dx$. (b) $\int x^2 e^x dx$.*

2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp

[1] (a) $\int dx = x + C$. (b) $\int (x + a)^\alpha dx = \frac{(x + a)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \forall a, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$. (c) $\int \frac{1}{x + a} dx = \ln |x + a| + C, \forall a \in \mathbb{R}$. (d) $\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + C, \int \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$. (e) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in (0, \infty), a \neq -1$. (f) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$. [2] Công thức đổi biến: $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C, \int f(u)du = F(u(x)) + C$. [5] Công thức nguyên hàm từng phần: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \int u dv = uv - \int v du$.

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 9–16]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. HD4. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

3 Integral – Tích Phân

[1] $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = (\int f(x)dx)|_a^b$. [2] (a) Tính chất của tích phân: (a) $\int_a^a f(x)dx = 0$. (b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (c) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. (d) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. (f) $\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$. [3] Công thức đổi biến: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. [4] Công thức tích phân từng phần: $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du, \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 17–27]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. LT8. LT9. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

38 ([Quỳ+20], VD1, p. 113). *Tính: (a) $\int_4^5 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$. (b) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$. (c) $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.*

39 ([Quỳ+20], VD2, p. 114). *Cho $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh $\int_e^{\tan a} \frac{x dx}{1 + x^2} + \int_e^{\cot a} \frac{dx}{x(1 + x^2)} = -1$.*

40 ([Quỳ+20], VD3, p. 114). *Tìm nguyên hàm của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < -1, \\ 1, & \text{if } -1 \leq x \leq 1, \\ x, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

41 ([Quỳ+20], VD4, p. 115). *Cho hàm số $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t dt$ xác định với $x > 0$. Tìm $g'(x)$.*

42 ([Quỳ+20], VD5, p. 117). *Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.*

43 ([Quỳ+20], VD6, p. 118). *Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n + 2i - 1} = \frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{2n + 3} + \cdots + \frac{1}{4n - 1}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.*

44 ([Quỳ+20], VD7, p. 119). *Tính $I = \int_1^2 x e^{x^2} dx$.*

45 ([Quỳ+20], VD8, p. 120). *Tính: (a) $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$. (b) $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.*

46 ([Quỳ+20], VD9, p. 121). *Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \sin x \cos x)e^x}{1 + \cos 2x} dx$.*

47 ([Quỳ+20], VD10, p. 121). Tính $u_n = \int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$.

48 ([Quỳ+20], VD11, p. 122). Giả sử f là hàm liên tục. Chứng minh $\int_0^a f(x)(a-x)dx = \int_0^a \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx$.

49 ([Quỳ+20], 8., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. (b) $I = \int_0^{\ln 2} e^{7x} dx$.

50 ([Quỳ+20], 9., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$. (b) $I = \int_0^3 \frac{x dx}{1+x^2}$.

51 ([Quỳ+20], 10., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$. (b) $I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

52 ([Quỳ+20], 11., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^1 x^2 e^{4x} dx$. (b) $I = \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)(7-x)}}$.

53 ([Quỳ+20], 12., p. 123). Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{khi } x \leq 0, \\ k(1-x^2), & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Tìm $k \in \mathbb{R}$ để $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$.

54 ([Quỳ+20], 13., p. 123). Cho hàm số $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$. Tìm $g'(x)$.

55 ([Quỳ+20], 14., p. 123). Tìm hàm số f & $a \in (0, \infty)$ thỏa $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

56 ([Quỳ+20], 15., p. 123). Cho hàm $f(x)$ liên tục & $a \in (0, \infty)$. Giả sử $\forall x \in [0, a]$, có $f(x) > 0$, $f(x)f(a-x) = 1$. Tính $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ theo a .

57 ([Quỳ+20], 16., p. 123). Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

58 ([Quỳ+20], 17., p. 123). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

59 ([Quỳ+20], 18., p. 123). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{i^3+n^3}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân

Cho các hàm $f, g \in C(\mathbb{R})$. [1] Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ & 2 đường thẳng $x = a, x = b$ có diện tích $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. [2] Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong với phương trình $x = f(y), x = g(y)$ & 2 đường thẳng $y = c, y = d$, $c < d$ có diện tích $S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$. [3] Đường cong $C : y = f(x), f \in C^2([a, b])$ từ điểm $A(a, f(a))$ đến điểm $B(b, f(b))$ có độ dài $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. [4] Đường cong $C : x = f(y), f \in C^2([c, d])$ từ điểm $C(g(c), c)$ đến điểm $D(g(d), d)$ có độ dài $L = \int_c^d \sqrt{1+(f'(y))^2} dy$.

[Thá+24, Chap. IV, §4, pp. 28–41]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

60 ([Tuấ+22], Ví dụ 1, p. 156). Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$ & $y = x$.

61 ([Tuấ+22], Ví dụ 2, p. 156). Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \frac{10}{3}x - x^2$ &

$$y = \begin{cases} -x, & \text{nếu } x \leq 1, \\ x-2, & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

62 ([Quỳ+20], VD1, p. 126). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ & 2 đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

63 ([Quỳ+20], VD2, p. 126). Tính diện tích hình phẳng \mathcal{H} giới hạn bởi đường thẳng $y = x - 1$ & parabol $y^2 = 2x + 6$.

64 ([Quỳ+20], VD3, p. 128). Tính độ dài đường cong $C : y^2 = x^3$ đi từ điểm $A(1, 1)$ đến điểm $B(4, 8)$.

65 ([Quỳ+20], VD4, p. 129). Tìm độ dài cung parabol $C : y^2 = x$ từ điểm $A(0, 0)$ đến điểm $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 42–44]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

Tài liệu

- [Hạo+22] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiến Tài, and Cần Văn Tuất. *Giải Tích 12*. Tái bản lần 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 160.
- [Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 111.
- [Tuấ+22] Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Thu Nga, Phạm Phú, Nguyễn Tiến Tài, and Cần Văn Tuất. *Bài Tập Giải Tích 12*. Tái bản lần 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 222.