

# Problem: Antiderivative & Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm & Tích Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 9 tháng 10 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Problem: Antiderivative & Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm & Tích Phân.*  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_12/integral/problem/NQBH\\_integral\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/problem/NQBH_integral_problem.pdf).  
TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_12/integral/problem/NQBH\\_integral\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/problem/NQBH_integral_problem.tex).
- *Problem & Solution: Antiderivative & Integral – Bài Tập & Lời Giải: Nguyên Hàm & Tích Phân.*  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_12/integral/solution/NQBH\\_integral\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/solution/NQBH_integral_solution.pdf).  
TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_12/integral/solution/NQBH\\_integral\\_solution.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/integral/solution/NQBH_integral_solution.tex).

## Mục lục

<b>1 Antiderivative – Nguyên Hàm</b>	<b>1</b>
<b>2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp</b>	<b>2</b>
<b>3 Integral – Tích Phân</b>	<b>2</b>
<b>4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân</b>	<b>3</b>
<b>5 Miscellaneous</b>	<b>4</b>
<b>Tài liệu</b>	<b>4</b>

## 1 Antiderivative – Nguyên Hàm

[1]  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ . [2] Tính chất của nguyên hàm:  $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ .  $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .  
 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ .

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 3–8]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 ([Quỳ+20], VD1, p. 106). Tính  $\int \cos^2 3x dx$ .

2 ([Quỳ+20], VD2, p. 106). Tìm hàm số  $f$  thỏa  $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(1) = 1$ .

3. Tìm hàm số  $f$  thỏa  $f(a) = b$  &: (a)  $f'(x) = c$ . (b)  $f'(x) = cx + d$ . (c)  $f'(x) = cx^2 + dx + e$ . (d)  $f'(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ .

4. Tìm hàm số  $f$  thỏa  $f(a) = m$ ,  $f(b) = n$  &: (a)  $f''(x) = c$ . (b)  $f''(x) = cx + d$ . (c)  $f''(x) = cx^2 + dx + e$ . (d)  $f''(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ .

5 ([Quỳ+20], VD3, p. 106). Cho  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ . (a) Viết  $f(x)$  dưới dạng  $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$ . (b) Tính  $\int f(x)dx$ .

6 ([Quỳ+20], VD4, p. 108). Tính  $\int x^2(1-x)^7 dx$ .

7 ([Quỳ+20], VD5, p. 108). Tính: (a)  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ . (b)  $\int \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x} dx$ .

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Quỳ+20], VD6, p. 109). Tính: (a)  $\int x e^{-x} dx$ . (b)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ .

9 ([Quỳ+20], VD7, p. 110). Tính  $\int \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2} dx$ .

10 ([Quỳ+20], VD8, p. 110). Tính  $\int \sin x \cos x dx$ .

11 ([Quỳ+20], 1., p. 110). Tính  $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$ .

12 ([Quỳ+20], 2., p. 110). Tính: (a)  $\int \sin 2x \cos x dx$ . (b)  $\int \cot^2 2x dx$ .

13 ([Quỳ+20], 3., p. 111). Tìm hàm số  $f(x)$  thỏa: (a)  $f'(x) = 4\sqrt{x} - x, f(4) = 0$ . (b)  $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2, f(1) = 2$ .

14 ([Quỳ+20], 4., p. 111). Tính: (a)  $\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ . (b)  $\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx$ .

15 ([Quỳ+20], 5., p. 111). Tính  $\int x e^{x^2} dx$ .

16 ([Quỳ+20], 6., p. 111). Tính: (a)  $\int x^3 \ln 2x dx$ . (b)  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

17 ([Quỳ+20], 7., p. 111). Tính: (a)  $\int \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5} dx$ . (b)  $\int x^2 e^x dx$ .

## 2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp

[1] (a)  $\int dx = x + C$ . (b)  $\int (x + a)^\alpha dx = \frac{(x + a)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \forall a, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$ . (c)  $\int \frac{1}{x + a} dx = \ln |x + a| + C, \forall a \in \mathbb{R}$ . (d)  $\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + C, \int \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ . (e)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in (0, \infty), a \neq -1$ . (f)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ . [2] Công thức đổi biến:  $\left[ \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C \right], \left[ \int f(u)du = F(u(x)) + C \right]$ . [5] Công thức nguyên hàm từng phần:  $\left[ \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \right], \left[ \int u dv = uv - \int v du \right]$ .

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 9–16]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. HD4. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

## 3 Integral – Tích Phân

[1]  $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = \left( \int f(x)dx \right)|_a^b$ . [2] (a) Tính chất của tích phân: (a)  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . (b)  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ . (c)  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ . (d)  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ . (f)  $\int_a^b k f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$ . [3] Công thức đổi biến:  $\left[ \int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \right]$ . [4] Công thức tích phân từng phần:  $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$ ,  $\left[ \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx \right]$ .

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 17–27]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. LT8. LT9. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

18 ([Quỳ+20], VD1, p. 113). Tính: (a)  $\int_4^5 \left( x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$ . (b)  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$ . (c)  $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$ .

19 ([Quỳ+20], VD2, p. 114). Cho  $a \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ . Chứng minh  $\int_e^{\tan a} \frac{x dx}{1 + x^2} + \int_e^{\cot a} \frac{dx}{x(1 + x^2)} = -1$ .

20 ([Quỳ+20], VD3, p. 114). Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < -1, \\ 1, & \text{if } -1 \leq x \leq 1, \\ x, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

21 ([Quỳ+20], VD4, p. 115). Cho hàm số  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t dt$  xác định với  $x > 0$ . Tìm  $g'(x)$ .

22 ([Quỳ+20], VD5, p. 117). Cho dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

- 23** ([Quỳ+20], VD6, p. 118). Cho dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n+2i-1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .
- 24** ([Quỳ+20], VD7, p. 119). Tính  $I = \int_1^2 x e^{x^2} dx$ .
- 25** ([Quỳ+20], VD8, p. 120). Tính: (a)  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$ . (b)  $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ .
- 26** ([Quỳ+20], VD9, p. 121). Tính  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x \cos x)e^x}{1+\cos 2x} dx$ .
- 27** ([Quỳ+20], VD10, p. 121). Tính  $u_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx$ .
- 28** ([Quỳ+20], VD11, p. 122). Giả sử  $f$  là hàm liên tục. Chứng minh  $\int_0^a f(x)(a-x)dx = \int_0^a \left( \int_0^x f(t)dt \right) dx$ .
- 29** ([Quỳ+20], 8., p. 123). Tính: (a)  $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ . (b)  $I = \int_0^{\ln 2} e^{7x} dx$ .
- 30** ([Quỳ+20], 9., p. 123). Tính: (a)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ . (b)  $I = \int_0^3 \frac{x dx}{1+x^2}$ .
- 31** ([Quỳ+20], 10., p. 123). Tính: (a)  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$ . (b)  $I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$ .
- 32** ([Quỳ+20], 11., p. 123). Tính: (a)  $I = \int_0^1 x^2 e^{4x} dx$ . (b)  $I = \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)(7-x)}}$ .
- 33** ([Quỳ+20], 12., p. 123). Cho hàm số
- $$f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{khi } x \leq 0, \\ k(1-x^2), & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$
- Tìm  $k \in \mathbb{R}$  để  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$ .
- 34** ([Quỳ+20], 13., p. 123). Cho hàm số  $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$ . Tìm  $g'(x)$ .
- 35** ([Quỳ+20], 14., p. 123). Tìm hàm số  $f$  &  $a \in (0, \infty)$  thỏa  $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x}, \forall x \in (0, \infty)$ .
- 36** ([Quỳ+20], 15., p. 123). Cho hàm  $f(x)$  liên tục &  $a \in (0, \infty)$ . Giả sử  $\forall x \in [0, a]$ , có  $f(x) > 0, f(x)f(a-x) = 1$ . Tính  $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$  theo  $a$ .
- 37** ([Quỳ+20], 16., p. 123). Tính  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$ .
- 38** ([Quỳ+20], 17., p. 123). Cho dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .
- 39** ([Quỳ+20], 18., p. 123). Cho dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{i^3+n^3}$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

## 4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân

Cho các hàm  $f, g \in C(\mathbb{R})$ . **[1]** Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x), y = g(x)$  & 2 đường thẳng  $x = a, x = b$  có diện tích  $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ . **[2]** Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong với phương trình  $x = f(y), x = g(y)$  & 2 đường thẳng  $y = c, y = d, c < d$  có diện tích  $S = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$ . **[3]** Đường cong  $\mathcal{C} : y = f(x), f \in C^2([a, b])$  từ điểm  $A(a, f(a))$  đến điểm  $B(b, f(b))$  có độ dài  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . **[4]** Đường cong  $\mathcal{C} : x = f(y), f \in C^2([c, d])$  từ điểm  $C(g(c), c)$  đến điểm  $D(g(d), d)$  có độ dài  $L = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy$ .

[Thá+24, Chap. IV, §4, pp. 28–41]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

- 40** ([Quỳ+20], VD1, p. 126). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  & 2 đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ .
- 41** ([Quỳ+20], VD2, p. 126). Tính diện tích hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi đường thẳng  $y = x - 1$  & parabol  $y^2 = 2x + 6$ .
- 42** ([Quỳ+20], VD3, p. 128). Tính độ dài đường cong  $\mathcal{C} : y^2 = x^3$  đi từ điểm  $A(1, 1)$  đến điểm  $B(4, 8)$ .
- 43** ([Quỳ+20], VD4, p. 129). Tìm độ dài cung parabol  $\mathcal{C} : y^2 = x$  từ điểm  $A(0, 0)$  đến điểm  $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ .

## 5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 42–44]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

### Tài liệu

- [Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 111.