

Problem: Plane Geometry – Bài Tập: Hình Học Phẳng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Plane Geometry – Bài Tập: Hình Học Phẳng*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/problem/NQBH_plane_geometry_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/problem/NQBH_plane_geometry_problem.tex.
- *Problem & Solution: Plane Geometry – Bài Tập & Lời Giải: Hình Học Phẳng*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/solution/NQBH_plane_geometry_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/solution/NQBH_plane_geometry_solution.tex.

Mục lục

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng | 1 |
| 1.1 | Chứng minh các điểm thẳng hàng | 2 |
| 1.2 | Chứng minh các đường thẳng song song, đồng quy | 3 |
| 1.3 | Đếm số đường thẳng, số giao điểm | 3 |
| 1.4 | Trồng cây | 4 |
| 2 | Line segment – Đoạn Thẳng | 5 |
| 2.1 | Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng | 8 |
| 2.2 | Compute length of a segment – Tính 1 đoạn thẳng | 9 |
| 3 | Ray – Tia | 10 |
| 3.1 | Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia | 11 |
| 4 | Angle – Góc | 11 |
| 4.1 | Số đo góc | 12 |
| 4.2 | 2 góc bù nhau, phụ nhau | 13 |
| 4.3 | 2 góc kề nhau | 14 |
| 4.4 | Tia phân giác của 1 góc | 14 |
| 5 | Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác | 15 |
| 6 | Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc | 16 |
| 7 | Đếm Số. Đếm Hình | 17 |
| | Tài liệu | 18 |

1 Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng

[1] 3 hình hình học không định nghĩa: mặt phẳng, điểm, đường thẳng. Điểm được đặt tên bằng chữ cái in hoa, e.g., $A, B, C, D, \dots, M, N, P, Q, \dots, X, Y, Z$. Đường thẳng được đặt tên bằng chữ cái in thường, e.g., $a, b, c, d, \dots, m, n, p, q, \dots, x, y, z$. [2] Về vị trí của điểm & đường thẳng: Với 1 đường thẳng bất kỳ, có vô số điểm thuộc đường thẳng đó & có vô số điểm không thuộc đường thẳng

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

đó. Điểm A thuộc đường thẳng d ký hiệu là $A \in d$. Điểm B không thuộc đường thẳng d ký hiệu là $B \notin d$. [3] Tiên đề về sự xác định đường thẳng: Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt. Khi 1 đường thẳng đi qua 2 điểm A, B , có đường thẳng AB hoặc đường thẳng BA . 1 quan hệ hình học được định nghĩa: 3 điểm thẳng hàng. Khi 3 điểm A, B, C cùng thuộc 1 đường thẳng thì chúng *thẳng hàng*. Nếu 3 điểm A, B, C không cùng thuộc bất cứ 1 đường thẳng nào thì chúng *không thẳng hàng*. [4] 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào. [5] Với 2 đường thẳng bất kỳ thì giữa chúng hoặc có 1 điểm chung (2 đường thẳng cắt nhau), hoặc không có điểm chung nào (2 đường thẳng song song), hoặc có vô số điểm chung (2 đường thẳng trùng nhau). [6] Tính chất về thứ tự của 3 điểm trên đường thẳng: Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 điểm & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại. 1 quan hệ hình học không định nghĩa: Điểm nằm giữa 2 điểm khác. [7] Với 3 điểm A, B, C thẳng hàng mà điểm B không nằm giữa 2 điểm A, C , điểm C không nằm giữa 2 điểm A, B , thì điểm A phải nằm giữa 2 điểm B, C . [8] Với 3 điểm A, B, C thẳng hàng mà 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với điểm C & 2 điểm A, C nằm cùng phía đối với điểm B , thì điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . [9] Nếu điểm A nằm giữa 2 điểm B, C mà điểm M nằm giữa 2 điểm A, B & điểm N nằm giữa 2 điểm A, C thì điểm A nằm giữa 2 điểm M, N . [10] Vị trí tương đối của 2 đường thẳng: Song song: $a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$, i.e., a, b không có điểm chung. Cắt nhau: $|a \cap b| = 1$, i.e., a, b có đúng 1 điểm chung. Trùng nhau: $a \equiv b \Leftrightarrow |a \cap b| \geq 2 \Leftrightarrow |a \cap b| = \infty$, i.e., a, b có (ít nhất) 2 điểm chung.

SGK: [Thá+23, §1, p. 79]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. SBT: [Thá23]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

1.1 Chứng minh các điểm thẳng hàng

1 ([Bin+23], H1–H4, p. 57). Đ/S? Nếu sai, sửa cho đúng. (a) Với mỗi đường thẳng a , có các điểm thuộc a & các điểm không thuộc a . (b) Nếu 2 đường thẳng có 2 điểm chung thì chúng có vô số điểm chung. (c) Nếu điểm M không nằm giữa A, B thì 3 điểm A, B, M không thẳng hàng. (d) Cho 3 điểm A, B, C . Nếu không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại thì 3 điểm đó không thẳng hàng.

2 ([Bin+23], VD1, p. 57). (a) Vẽ 2 đường thẳng a, b cắt nhau tại O . Lấy $A \in a, B \in b, A \neq O, B \neq O$. (b) A, O, B thẳng hàng không?

3 ([Bin+23], VD2, p. 57). Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm B, C, D cũng thẳng hàng. A, B, C, D thẳng hàng không?

4 ([Bin+23], VD3, p. 58). Trên đường thẳng d lấy 4 điểm E, F, G, H theo thứ tự đó. (a) F nằm giữa 2 điểm nào? (b) G nằm giữa 2 điểm nào? (c) Đếm số bộ 3 điểm thẳng hàng.

5 ([Bin+23], VD4, p. 58). Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tìm số đường thẳng vẽ được bằng 2 phương pháp: (a) Liệt kê. (b) Lập luận.

6 ([Bin+23], 10.1., p. 60). Trên đường thẳng d lấy 5 điểm A, B, C, D, E theo thứ tự đó. C nằm giữa 2 điểm nào?

7 ([Bin+23], 10.2., p. 60). Cho 3 điểm A, B, C . Biết mỗi điểm A, B đều không nằm giữa 2 điểm còn lại. Tìm điều kiện để: (a) C nằm giữa 2 điểm còn lại. (b) C không nằm giữa 2 điểm còn lại.

8 ([BC23], VD1.1, p. 6). Vẽ 5 điểm A, B, C, M, N trong đó 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm A, B, M không thẳng hàng & 3 điểm A, B, N thẳng hàng. (a) Giải thích vì sao vẽ được như vậy. (b) Chứng minh 4 điểm A, B, C, N cùng thuộc 1 đường thẳng d . (c) Đ/S? $A \in d, B \notin d, M \in d, N \notin d$. (d) 2 đường thẳng AN, BC có phân biệt không? 2 đường thẳng AB, MN trùng nhau không? (e) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp 2 điểm trong số 5 điểm đó.

9 ([BC23], VD1.3, p. 9). Cho 5 điểm A, B, C, D, E, F lần lượt cùng thuộc 1 đường thẳng d . (a) C nằm giữa 2 điểm nào? (b) B nằm giữa 2 điểm nào? (c) E không nằm giữa 2 điểm nào?

10 ([BC23], VD1.4, p. 9). Cho 5 điểm A, B, C, D, E, F . Biết 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm B, C, E thẳng hàng, 3 điểm C, E, F thẳng hàng. Chứng minh 5 điểm A, B, C, D, E, F thẳng hàng.

11. Trên mặt phẳng, cho n điểm $A_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Giả sử 3 điểm bất kỳ trong số chúng đều thẳng hàng. n điểm đó có thẳng hàng không?

12. Trên mặt phẳng, cho n điểm $A_i, i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Giả sử 3 điểm A_i, A_{i+1}, A_{i+2} thẳng hàng $\forall i = 1, 2, \dots, n - 2$. n điểm đó có thẳng hàng không?

13. Trên mặt phẳng, cho $n \in \mathbb{N}^*$ bộ điểm phân biệt không nhất thiết rời nhau lần lượt gồm a_1, a_2, \dots, a_n điểm thẳng hàng. Tìm điều kiện cần & đủ để tất cả điểm của n bộ điểm đó thẳng hàng.

14 ([Tuy23], VD9, p. 88). Trên đường thẳng a lấy 4 điểm M, N, P, Q theo thứ tự đó. (a) Điểm N nằm giữa 2 điểm nào? (b) Điểm P không nằm giữa 2 điểm nào?

15 ([Bin23], 2., p. 65). Vẽ 5 điểm A, B, C, D, O sao cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, 3 điểm B, C, D thẳng hàng, 3 điểm C, D, O không thẳng hàng. (a) A, B, D có thẳng hàng không? Vì sao? (b) Kẻ các đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm trong 5 điểm nói trên. Kể tên các đường thẳng trong hình vẽ (các đường thẳng trùng nhau chỉ kể là 1 đường thẳng).

16 ([Bin23], 3., p. 65). Cho các điểm A, B, C, D, E thuộc cùng 1 đường thẳng theo thứ tự ấy. Điểm C nằm giữa 2 điểm nào? Điểm C không nằm giữa 2 điểm nào?

17 ([Bin23], 4., p. 65). Cho A, B, C là 3 điểm thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu A không nằm giữa B & C , B không nằm giữa A & C ?

18 ([Bin23], 5., p. 65). Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó điểm B nằm giữa 2 điểm A & C , điểm B nằm giữa A & D . Có thể khẳng định điểm D nằm giữa B & C không?

1.2 Chứng minh các đường thẳng song song, đồng quy

19 ([Bin+23], 10.11., p. 61). Cho biết 3 đường thẳng a, b, m cùng đi qua 1 điểm. 3 đường thẳng a, b, n cùng đi qua 1 điểm. Chứng minh 4 đường thẳng a, b, m, n đồng quy.

20 ([Bin+23], 10.12., p. 61). Cho 3 đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một tại A, B, C . A, B, C thẳng hàng không?

21 ([Bin+23], 10.13., p. 61). Vẽ điểm M nằm giữa P, Q , điểm Q nằm giữa 2 điểm P, N . Chứng minh M, N, P, Q thẳng hàng.

1.3 Đếm số đường thẳng, số giao điểm

22 (Count number of lines formed by some points – đếm số đường thẳng tạo bởi 1 số điểm). Chứng minh: (a) Có $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ đoạn thẳng tạo bởi n điểm phân biệt. (b) Có $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ đường thẳng tạo bởi n điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. (c) Có $C_n^2 - \sum_{i=1}^m C_{a_i}^2 + m = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^m \frac{a_i(a_i-1)}{2} + m$ đường thẳng tạo bởi n điểm trong đó có đúng $m \in \mathbb{N}$ bộ lần lượt gồm a_1, a_2, \dots, a_m điểm thẳng hàng.

23 ([BC23], VD1.2, p. 7). (a) Cho 4 điểm phân biệt. Cắt qua 2 điểm, vẽ được 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng. (b) Qua 5 điểm vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng?

24 ([Bin+23], VD5, p. 59). Cho 1 số điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm được tất cả 36 đường thẳng. Tính số điểm đã cho.

25 ([Bin+23], VD6, p. 59). Cho 3 đường thẳng phân biệt. Tính số giao điểm của 3 đường thẳng này.

26 (Count number of intersections formed by some lines – đếm số giao điểm tạo bởi 1 số đường thẳng). (a) Tính số giao điểm của 4 đường thẳng phân biệt. (b) Chứng minh có $C_n^2 - \sum_{i=1}^m C_{a_i}^2 - \sum_{i=1}^k C_{b_i}^2 + k = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^m \frac{a_i(a_i-1)}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{b_i(b_i-1)}{2} + k$ giao điểm của $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng phân biệt trong đó có đúng $m \in \mathbb{N}$ bộ lần lượt gồm a_1, a_2, \dots, a_m đường thẳng song song đôi một & $k \in \mathbb{N}$ bộ lần lượt gồm b_1, b_2, \dots, b_k đường thẳng đồng quy tại 1 điểm.

27 ([Bin+23], VD7, p. 60). Cho 10 đường thẳng đôi một cắt nhau, trong đó có đúng 3 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm. Đếm số giao điểm.

28. Cho $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng đôi một cắt nhau, trong đó có 1 số bộ đường thẳng cùng đi qua 1 điểm. Đếm số giao điểm.

29 ([Bin+23], 10.3., p. 60). Cho 201 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

30 ([Bin+23], 10.4., p. 60). Cho 15 điểm trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

31 ([Bin+23], 10.5., p. 60). Cho 12 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Nếu bớt đi 4 điểm thì số đường thẳng vẽ được giảm đi bao nhiêu?

32 ([Bin+23], 10.6., p. 60). Cho 1 số điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tính số điểm cho trước nếu số đường thẳng vẽ được là: (a) 120. (b) 300.

33 ([Bin+23], 10.7., p. 60). Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

34 ([Bin+23], 10.8., p. 60). Cho 4 điểm A, B, C, D . Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tìm điều kiện của 4 điểm để số đường thẳng vẽ được là 4.

35 ([Bin+23], 10.9., p. 60). Vẽ 4 đường thẳng trong đó có đúng 2 đường thẳng song song sao cho số giao điểm: (a) Nhiều nhất. (b) Ít nhất.

36 ([Bin+23], 10.10., p. 61). Cho 1 số điểm trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Biết số đường thẳng vẽ được là 53. Tính số điểm.

37 ([Bin+23], 10.14., p. 61). Cho 8 đường thẳng đôi một cắt nhau. Đếm số giao điểm nếu: (a) Trong số các đường thẳng đã cho, không có 3 đường thẳng nào cùng đi qua 1 điểm. (b) Mỗi giao điểm đều là điểm chung của 2 đường thẳng, chỉ trừ 1 giao điểm là điểm chung của đúng 4 đường thẳng.

38 ([Bin+23], 10.15., p. 61). Cho 1 số điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Biết số đường thẳng vẽ được là 31. Đếm số điểm.

39 ([Tuy23], VD8, p. 87, [Bin23], 1., p. 65). Cho 4 điểm A, B, C, D sao cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng; 3 điểm B, C, D cũng thẳng hàng. 4 điểm A, B, C, D có thẳng hàng không? Vì sao?

40 ([Tuy23], VD10, p. 88). Cho 12 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cắt qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu thay 12 điểm bằng n điểm, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, thì vẽ được bao nhiêu đường thẳng?

- 41 ([Tuy23], 38., p. 88). Vẽ 5 điểm C, D, E, F, G không thẳng hàng nhưng 3 điểm C, D, E thẳng hàng; 3 điểm E, F, G thẳng hàng.
- 42 ([Tuy23], 39., p. 89). Trái Đất quay quanh Trời, Mặt Trăng quay quanh Trái Đất. Mặt Trời chiếu sáng tới Trái Đất & Mặt Trăng. Khi 3 thiên thể này thẳng hàng thì xảy ra nhật thực hoặc nguyệt thực (là hiện tượng Mặt Trời hoặc Mặt Trăng đang sáng bỗng nhiên bị che lấp & tối đi). (a) Khi xảy ra nhật thực thì Mặt Trăng ở vị trí nào? (b) Khi xảy ra nguyệt thực thì Trái Đất ở vị trí nào?
- 43 ([Tuy23], 40., p. 89). Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm 2 đường chéo. Qua O , vẽ 2 đường thẳng a, b sao cho a cắt cạnh AB, CD lần lượt tại M, N , b cắt cạnh AD, BC lần lượt tại E, F . Có bao nhiêu trường hợp 1 điểm nằm giữa 2 điểm khác? Kể ra tất cả các trường hợp đó.
- 44 ([Tuy23], 41., p. 89). Theo bài toán trước, ta có thể trồng 9 cây thành 8 hàng, mỗi hàng 3 cây. Vẽ sơ đồ trồng 9 cây thành: (a) 9 hàng, mỗi hàng 3 cây; (b) 10 hàng, mỗi hàng 3 cây.
- 45 ([Tuy23], 42., p. 89). Cho 2 điểm A, B . (a) Vẽ đường thẳng m đi qua A, B ; (b) Vẽ đường thẳng n đi qua A nhưng không đi qua B ; (c) Vẽ đường thẳng p không có điểm chung nào với đường thẳng m .
- 46 ([Tuy23], 43., p. 89). Cho 4 điểm A, B, C, D trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xác định điểm M sao cho 3 điểm M, A, B thẳng hàng; 3 điểm M, C, D thẳng hàng.
- 47 ([Tuy23], 44., p. 89). Cho 3 điểm C, O, D thẳng hàng. Biết điểm C không nằm giữa 2 điểm O, D , điểm O không nằm giữa 2 điểm C, D . trong 3 điểm đã cho, điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 48 ([Tuy23], 45., p. 89). Cho 3 điểm A, B, C trong đó không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại. 3 điểm A, B, C có thẳng hàng không?
- 49 ([Tuy23], 46., p. 89). Cho 6 điểm. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Nếu trong 6 điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu trong 6 điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 50 ([Tuy23], 47., p. 89). Giải bóng đá vô địch quốc gia hạng chuyên nghiệp có 16 đội tham gia đấu vòng tròn 2 lượt đi & về. Tính tổng số trận đấu.
- 51 ([Tuy23], 48., p. 89). Cho n điểm, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Biết số đường thẳng vẽ được là 36, tính giá trị của n .
- 52 ([Tuy23], 49., p. 89). Cho 11 đường thẳng đôi một cắt nhau. (a) Nếu trong số đó không có 3 đường thẳng nào cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng? (b) Nếu trong 11 đường thẳng đó có đúng 5 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng?
- 53 ([Tuy23], 50., p. 90). Cho n điểm, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Tìm n biết nếu có thêm 1 điểm (không thẳng hàng với bất kỳ 2 điểm nào trong số n điểm đã cho) thì số đường thẳng vẽ được tăng thêm là 8.
- 54 ([Tuy23], 51., p. 90). Cho 13 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Nếu ta bớt đi 4 điểm thì số đường thẳng vẽ được giảm đi bao nhiêu?
- 55 ([Tuy23], 52., p. 90). Cho n điểm, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng, tính n .
- 56 ([Bin23], VD1, p. 64). Cho 2 đường thẳng cắt nhau. Nếu vẽ thêm 1 đường thẳng thứ 3 cắt cả 2 đường thẳng trên thì số giao điểm của các đường thẳng thay đổi như thế nào?
- 57 ([Bin23], VD2, p. 64). Giải thích vì sao 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào.

1.4 Trồng cây

- 58 (Tree problem – bài toán trồng cây). Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Trồng a cây thành b hàng, mỗi hàng c cây. Vẽ b đường thẳng đi qua a điểm, mỗi đường thẳng gồm đúng c điểm.
- 59 ([Bin+23], p. 61). Trồng 7 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 3 cây.
- 60 ([Bin23], 6., p. 65). (a) Xếp 10 điểm thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 điểm. (b) Xếp 7 điểm thành 6 hàng, mỗi hàng có 3 điểm. (c) Người ta trồng 12 cây thành 6 hàng, mỗi hàng có 4 cây. Vẽ sơ đồ vị trí của 12 cây đó. (d*) Xếp a điểm thành b hàng, mỗi hàng có c cây với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tìm điều kiện của a, b, c để việc sắp xếp như vậy là khả thi.

2 Line segment – Đoạn Thẳng

[1] Đoạn thẳng AB là hình gồm 2 điểm A, B & tất cả các điểm nằm giữa A, B . Đoạn thẳng AB còn gọi là đoạn thẳng BA . 2 điểm A, B là 2 *mút* (hoặc 2 *đầu*) của đoạn thẳng AB . Mỗi đoạn thẳng có 1 độ dài. Độ dài đoạn thẳng là 1 số lớn hơn 0. [2] Có thể so sánh 2 đoạn thẳng bằng cách so sánh độ dài của chúng. [3] 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm O . Điểm O gọi là *giao điểm* của 2 đoạn thẳng AB, CD , viết $AB \cap CD = \{O\}$. Điểm O nằm giữa 2 điểm A, B , điểm O nằm giữa 2 điểm C, D . [4] Đoạn thẳng AB & tia Ox cắt nhau tại điểm I , gọi là *giao điểm* của tia Ox & đoạn thẳng AB , viết $Ox \cap AB = \{I\}$. Điểm I nằm giữa 2 điểm A, B , 2 tia OI, Ox trùng nhau. [5] Đoạn thẳng AB & đường thẳng xy cắt nhau tại điểm K , gọi là *giao điểm* của đường thẳng xy & đoạn thẳng AB , viết $xy \cap AB = \{K\}$. Điểm K nằm giữa 2 điểm A, B , 2 tia Kx, Ky đối nhau. [6] Tính chất cộng các đoạn thẳng: Điểm M nằm giữa $A, B \Leftrightarrow AM + MB = AB$. Tổng quát: Độ dài đường gấp khúc $A_1A_2 \dots A_n$ bằng độ dài đoạn thẳng A_1A_n , i.e., $\text{length}(A_1A_2 \dots A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ thẳng hàng theo thứ tự ấy. Nếu A, B thuộc tia Ox & $OA < OB$ thì A nằm giữa O, B . [7] Vẽ đoạn thẳng trên tia: Trên tia Ox bao giờ cũng vẽ được 1 & chỉ 1 điểm M sao cho $OM = a$. Trên tia Ox nếu có 2 điểm M, N sao cho $OM < ON$ thì điểm M nằm giữa O, N . See [Wikipedia/line segment](https://en.wikipedia.org/wiki/Line_segment).

61. So sánh đoạn thẳng với đường thẳng.

62 ([Bin+23], VD1, p. 67). Cho đoạn thẳng $AB = 6$. Lấy điểm M nằm giữa A, B , điểm N nằm giữa B, M sao cho $AM = 3, MN = 1$. Tính BN .

63 ([Bin+23], VD2, p. 68). Cho đoạn thẳng $AB = 5$. Lấy 2 điểm C, D nằm giữa A, B sao cho $AC = BD = 2$. Tính CD .

64 ([Bin+23], VD3, p. 68). Trên đoạn thẳng AB lấy 2 điểm E, F sao cho E nằm giữa A, F , F nằm giữa B, E . Biết $AF = BE$, so sánh AE, BF .

65 ([Bin+23], VD4, p. 68). Trên tia Ox lấy 2 điểm M, N sao cho $OM = 2, ON = a > 2$. Tìm a để: (a) $MN = 2OM$. (b) $MN = bOM$ với $b \in (0, \infty)$.

66 ([Bin+23], VD5, p. 69). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = a, OB = 4$. Tính AB .

67 ([Bin+23], VD6, p. 69). Cho 3 điểm A, B, C . Biết $AB = 3, BC = 4, CA = 5$. Chứng minh: (a) Trong 3 điểm đã cho, không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại. (b) A, B, C không thẳng hàng.

68 ([Bin+23], 12.1., p. 70). Cho 4 điểm A, B, C, D . Vẽ các đoạn thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đoạn thẳng & liệt kê.

69 ([Bin+23], 12.2., p. 70). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ điểm. Vẽ được tất cả 21 đoạn thẳng đi qua các cặp điểm. Tính n .

70 ([Bin+23], 12.3., p. 70). Cho đoạn thẳng AB . Lấy 1 số điểm nằm trên đoạn thẳng này không trùng với 2 đầu đoạn thẳng. Tính số điểm phải lấy để có 15 đoạn thẳng.

71 ([Bin+23], 12.4., p. 70). Cho điểm M nằm giữa 2 điểm A, B . Chứng minh $\max\{AM, BM\} < AB$.

72 ([Bin+23], 12.5., p. 70). Cho đoạn thẳng $AB = 6$. Lấy điểm M nằm giữa A, B sao cho $AM = 2BM$. Tính AM, BM .

73 ([Bin+23], 12.6., p. 70). Cho 3 điểm A, B, M nằm trên đường thẳng xy . Biết $AB = 4$, tính: (a) Tổng $MA + MB$ nếu M nằm giữa A, B . (b) Hiệu $MA - MB$ nếu M nằm trên tia đối của tia BA . (c) Hiệu $MB - MA$ nếu M nằm trên tia đối của tia AB .

74 ([Bin+23], 12.7., p. 70). Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng. M không nằm giữa 2 điểm còn lại. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu $MN = 5, PM = 3$?

75 ([Bin+23], 12.8., p. 70). Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng. Biết $AB = 2, BC = 5$. Tính AC .

76 ([Bin+23], 12.9., p. 70). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, M sao cho $OA = 2, AM = m > 2$. Tính OM .

77 ([Bin+23], 12.10., p. 70). Trên tia Ox lấy 3 điểm C, D, E sao cho $OC = 2, OD = 3, OE = 5$. Tìm các cặp đoạn thẳng bằng nhau.

78 ([Bin+23], 12.11., p. 70). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 1, OB = 4$. Trên tia đối của tia Bx lấy điểm M sao cho $BM = 2$. (a) Tính AB . (b) So sánh OA, AM .

79 ([Bin+23], 12.12., p. 70). Trên đường thẳng xy lấy 1 điểm O & 2 điểm C, D sao cho $OC = 2, OD = 3$. Tính CD .

80 ([Bin+23], 12.13., p. 70). Cho đoạn thẳng $MN = 3$. Trên tia đối của tia MN lấy điểm P , trên tia đối của tia NM lấy điểm Q sao cho $MP = NQ = 1$. Chứng minh $PN = MQ$.

81 ([Bin+23], 12.14., p. 70). Cho đoạn thẳng $AB = 3$. Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = a > 3$. Trên tia BA lấy điểm F sao cho $BF = b > 3$. Tìm điều kiện của a, b để $BE < AF$.

82 ([Bin+23], 12.15., p. 70). Trên tia Ox lấy 2 điểm M, N sao cho $OM = 3, MN = 2$. Tính ON .

- 83** ([Bin+23], p. 71). Có thể vẽ bằng 1 đường liền nét mà không nhấc bút khỏi tờ giấy & không vẽ đoạn thẳng nào quá 1 lần không? (a) Hình chữ nhật ABCD với đường chéo AC. (b) Hình chữ nhật ABCD với 2 đường chéo AC, BD.
- 84** ([Bin23], VD7, p. 68). Chứng minh nếu 2 điểm A, B cùng thuộc tia Ox & $OA < OB$ thì điểm A nằm giữa 2 điểm O, B.
- 85** ([Bin23], VD8, p. 69). Cho đoạn thẳng $AB = 3$ cm. Điểm C thuộc đường thẳng AB sao cho $BC = 1$ cm. Tính đoạn thẳng AC.
- 86** ([Bin23], 15., p. 69). Cho đoạn thẳng AB. Trên tia đối của tia AB lấy C, trên tia đối của tia BA lấy D sao cho $BD = AC$. Chứng minh $BC = AD$.
- 87** ([Bin23], 16., p. 69). Cho đoạn thẳng AB có độ dài 8 cm. Trên tia AB lấy C sao cho $AC = 2$ cm, trên tia BA lấy D sao cho $BD = 3$ cm. Tính CB, CD.
- 88** ([Bin23], 17., p. 69). Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 2$ cm. Tính AC.
- 89** ([Bin23], 18., p. 69). Trên tia Ox, vẽ 2 điểm A, B sao cho $OA = a, OB = b$. Điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AC = \frac{1}{2}BC$. Tính OC.
- 90** ([Bin23], 19., p. 69, triangle number). Gọi $T_n, n \in \mathbb{N}^*$, là số điểm trên mặt phẳng sao cho chúng tạo thành 1 tam giác đều có cạnh bằng $n - 1$ đơn vị & 2 điểm gần nhau (không có điểm nào ở giữa 2 điểm đó trong số T_n điểm đó) thì cách nhau 1 đơn vị. Tìm công thức các số tam giác T_n .
- See, e.g., [Wikipedia/số tam giác](#), [Wikipedia/triangle number](#).
[Bin23, 20., p. 70].
- 91** ([Bin23], VD9, p. 70). Cho điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh $AM = BM = \frac{1}{2}AB$.
- 92** ([Bin23], VD10, p. 71). Cho đoạn thẳng AB có độ dài a. Trên tia AB lấy M sao cho $AM = \frac{a}{2}$. Chứng minh M là trung điểm AB.
- 93** ([Bin23], VD11, p. 71). Cho đoạn thẳng $OA = a$, điểm B nằm trong đoạn thẳng OA sao cho $OB = b$. M, N, I lần lượt là trung điểm OA, OB, AB. Tính IM, IN theo a, b.
- 94** ([Bin23], 21., p. 71). Cho $\triangle ABC$, 2 đường trung tuyến BD, CE cắt nhau ở K. Kẻ đoạn thẳng DE. Đo độ dài rồi cho biết mỗi cạnh của $\triangle KDE$ bằng nửa cạnh nào của $\triangle KBC$.
- 95** ([Bin23], 22., p. 71). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm, điểm C nằm giữa A, B, 2 điểm D, E lần lượt là trung điểm AC, CB. Tính DE.
- 96** ([Bin23], 23., p. 71). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm, điểm C nằm giữa A, B sao cho $AC = 2$ cm, 2 điểm D, E lần lượt là trung điểm AC, CB. I là trung điểm DE. Tính DE, CI.
- 97** ([Bin23], 24., p. 71). Cho 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự ấy. M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. (a) Biết $AC = 4$ cm, $BD = 6$ cm, tính MN. (b) Biết $MN = 5$ cm, tính $AC + BD$.
- 98** ([Bin23], 25., p. 71). Cho đoạn thẳng AB với O là trung điểm. Điểm C thuộc đoạn thẳng OB, $OC = 1$ cm. Tính $CA - CB$.
- 99** ([Bin23], 26., p. 72). Cho đoạn thẳng AB, điểm C nằm trong đoạn thẳng AB, O là trung điểm của AC. Biết $OB = 3$ cm. Tính $AB + BC$.
- 100** ([Bin23], 27., p. 72). (a) Cho đoạn thẳng $AB = 2a$, điểm C nằm giữa A, B, 2 điểm M, N lần lượt là trung điểm AC, BC. Chứng minh $MN = a$. (b) Kết quả (a) còn đúng không nếu điểm C thuộc đường thẳng AB?
- 101** ([Bin23], 28., p. 72). Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB có $CA = a, CB = b$. I là trung điểm AB. Tính IC.
- 102** ([Bin23], 29., p. 72). Cho điểm C thuộc đường thẳng AB nhưng không thuộc đoạn thẳng AB. Biết $CA = a, CB = b$. I là trung điểm AB. Tính IC.
- 103** ([Bin23], 30., p. 72). Trên tia Ox có 2 điểm A, B, $OA = a, OB = b$. I là trung điểm AB. Tính OI.
- 104** ([Bin23], 31., p. 72). Cho điểm O nằm trong đoạn thẳng AB có $OA = a, Ob = b$. M, N, I lần lượt là trung điểm OA, OB, AB. Tính IM, IN.
- 105** ([BC23], VD1.11, p. 13). Vẽ 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm I. Kể tên các đoạn thẳng.
- 106** ([BC23], VD1.12, p. 13). Cho 2 đường thẳng phân biệt AB, CD. Biết đường thẳng AB cắt đoạn thẳng CD & đường thẳng CD cắt đoạn thẳng AB. Chứng minh đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng CD.
- 107** ([BC23], VD1.13, p. 14). 2 đường thẳng d, d' cắt nhau tại O. Lấy 4 điểm A, B, M, N trên đường thẳng d' sao cho O nằm giữa A, B, B nằm giữa O, M, N nằm giữa O, A. d có cắt 3 đoạn thẳng AB, AM, AN không?

- 108** ([BC23], VD1.14, p. 15). Cho 4 điểm A, B, C, D . Qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Nếu không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (b) Nếu có 3 điểm thẳng hàng, giả sử là A, B, C , đếm số đoạn thẳng. (c) Xét trường hợp cả 4 điểm thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (d) Trong trường hợp 4 điểm thuộc đường thẳng xy , tính số đoạn thẳng, tia.
- 109** ([BC23], VD1.15, p. 16). Qua 2 điểm vẽ được 1 & chỉ 1 đường thẳng. (a) Cho 3 điểm không thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong 3 điểm đó? (b) Cho 4 điểm, 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó? (c) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó?
- 110** ([BC23], VD1.16, p. 17). Cho 50 điểm. Vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 điểm trong 50 điểm đó nếu: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng? (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng? (c) Có đúng 10 điểm thẳng hàng. (d) Có đúng n điểm thẳng hàng với $n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 50$.
- 111** ([BC23], VD1.17, p. 18). Cho n điểm mà không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cắt qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Biết $n = 123$. Tính số đường thẳng vẽ được. (b) Biết số đường thẳng vẽ được là 378. Tính số điểm n . (c) Số đường thẳng có thể là 2012 không?
- 112** ([BC23], VD1.18, p. 19). Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng khác nhau. (a) Có thể vẽ 4 đường thẳng đôi một cắt nhau sao cho số giao điểm của các đường thẳng là 1, 2, 3 không? (b) Tính số giao điểm vẽ được nhiều nhất.
- 113** ([BC23], VD1.19, p. 19). Biết bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau & không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của các đường thẳng nếu có n đường thẳng: (a) $n \in \{3, 4, 5\}$. (b) $n = 100$. (c) Xét trường hợp tổng quát $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 114** ([BC23], 1.1., pp. 20–21). Cho 6 điểm A, B, C, O, M, N sao cho A, B, C không thẳng hàng, A, B, O thẳng hàng, O, C, M thẳng hàng, C, M, N thẳng hàng. (a) Chứng minh O, C, M, N cùng thuộc 1 đường thẳng. (b) 2 đường thẳng MN, AB trùng nhau không? (c) Cắt qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng được vẽ & liệt kê.
- 115** ([BC23], 1.2., p. 21). Chứng minh 5 điểm A, B, C, M, N thẳng hàng biết A, B, M thẳng hàng, B, C, N thẳng hàng, A, M, N thẳng hàng.
- 116** ([BC23], 1.3., p. 21). Cho 4 điểm A, B, C, M trong đó B nằm giữa A, C , M nằm giữa A, B . Trong 3 điểm B, C, M , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 117** ([BC23], 1.4., p. 21). Cho 2 tia AM, AN đối nhau. (a) Lấy điểm B sao cho điểm N nằm giữa 2 điểm A, B . A có nằm giữa 2 điểm M, N không? (b) Lấy điểm $C \neq A$ nằm giữa 2 điểm M, N . C có nằm giữa B, M không? (c) Trong 3 điểm A, B, C , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 118** ([BC23], 1.5., p. 21). Cho 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) Đếm số đoạn thẳng & liệt kê. (b) Nếu 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng nhưng không theo thứ tự đó, đếm số đoạn thẳng. (c) Lấy điểm O không thuộc đường thẳng AB . Nối điểm O với A, B, C, D . Đếm số đoạn thẳng.
- 119** ([BC23], 1.6., p. 21). Cho n đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường nào đồng quy. (a) Tính số giao điểm của các đường thẳng khi $n = 124$. (b) Tìm n để số giao điểm bằng 124.
- 120** ([BC23], 1.7., p. 21). Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cắt qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Tính số đường thẳng vẽ được khi $n = 24$. (b) Tìm n để số đường thẳng bằng 240.
- 121** ([BC23], 1.8., p. 21). Cho n điểm, nối từng cặp 2 điểm. (a) Tính số đoạn thẳng khi $n = 100$. (b) Tìm n để số đoạn thẳng bằng tổng các số từ 1 đến 99. (c) Tìm n để số đoạn thẳng bằng tổng các số từ 1 đến $m \in \mathbb{N}^*$.
- 122** ([BC23], 1.9., p. 21). 5 đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
- 123** ([BC23], VD2.1, p. 22). Cho đoạn thẳng $AB = 5$ cm. Lấy điểm M thuộc đường thẳng AB mà $BM = 2$ cm. Tính đoạn thẳng AM .
- 124** ([BC23], VD2.2, p. 22). Cho đoạn thẳng $AB = a$. Lấy điểm M thuộc đường thẳng AB mà $BM = b$. Tính đoạn thẳng AM theo $a, b \in (0, \infty)$.
- 125** ([BC23], VD2.3, p. 23). Cho C là 1 điểm thuộc đoạn thẳng AB & không trùng với 2 điểm A, B . A có nằm giữa B, C không?
- 126** ([BC23], VD2.4, p. 24). 3 điểm A, B, C hàng không nếu: (a) $AB = 2, BC = 7, AC = 5$? (b) $AB = 3, BC = 7, AC = 5$? (c) Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Tìm điều kiện của $a, b, c \in (0, \infty)$ để: (i) A, B, C thẳng hàng. (ii) A, B, C không thẳng hàng. Ans: $a + b + c = 2 \max\{a, b, c\}$, $a + b + c \neq \max\{a, b, c\}$.
- 127** ([BC23], VD2.5, p. 24). Cho độ dài 3 đoạn thẳng $BC = a, CA = b, AB = c$. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại biết: $0 < \min\{b, c\} \leq \max\{b, c\} < a$ nhưng $a < b + c$?
- 128** ([BC23], 2.1., p. 25). Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự đó cùng thuộc 1 đường thẳng xy . (a) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng xy & liệt kê. (b) Chỉ ra các đoạn thẳng là tổng các đoạn thẳng khác.
- 129** ([BC23], 2.2., p. 25). Cho 3 điểm A, B, C mà độ dài của 3 đoạn thẳng thỏa mãn $AB + BC > AC$. Có thể kết luận A, B, C không thẳng hàng không?

- 130** ([BC23], 2.3., p. 25). A, B, C có thẳng hàng không nếu: (a) $AB = \frac{1}{2}, BC = \frac{1}{3}, CA = \frac{1}{6}$? (b) $AB = 5, BC = 11, CA = 7$?
- 131** ([BC23], 2.4., p. 25). Cho A, B, C thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu: (a) $AB = 2, BC = 13, CA = 11$? (b) $AC = 7, BC = 11$?
- 132** ([BC23], 2.5., p. 25). Cho A, B, C, D thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) So sánh AB, CD biết $AC = BD$. (b) So sánh AC, BD biết $AB = CD$.
- 133** ([BC23], 2.6., p. 25). A, B, O thuộc đường thẳng xy . Tính đoạn thẳng AB biết $OA + OB = a, OA - OB = b, 0 < b < a$.
- 134** ([BC23], 2.7., p. 25). Cho đoạn thẳng $AB = 5$. Trên tia BA lấy M sao cho $AM = 2$. (a) Trong 3 điểm A, B, M , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại? (b) Tính đoạn thẳng BM . (c) Lấy điểm N thuộc tia đối của tia BA sao cho $BN = 1$. Tính MN .
- 135** ([BC23], 2.8., p. 25). Cho đoạn thẳng $AB = 7$ & điểm M nằm giữa A, B sao cho $BM = 5$. Trên tia đối của tia MA lấy N sao cho $MN = 7$. Chứng minh $AM = BN$.

2.1 Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng

[1] Trung điểm M của đoạn thẳng AB là điểm nằm giữa A, B & cách đều A, B . Điểm M cách đều A, B có nghĩa là độ dài 2 đoạn thẳng MA, MB bằng nhau: $MA = MB$. Trung điểm của đoạn thẳng AB còn được gọi là *điểm chính giữa* của đoạn thẳng AB . Mỗi đoạn thẳng chỉ có 1 trung điểm duy nhất. [2] Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì M nằm giữa 2 điểm A, B & $MA = MB$. [3] Tính chất trung điểm: Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì: (i) $AM = BM = \frac{1}{2}AB$. (ii) Các đoạn thẳng có chung 1 trung điểm: Cho 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng xy theo thứ tự đó. Nếu biết các đoạn thẳng AD, BC có chung trung điểm thì $AB = CD, AC = BD$. [4] Dấu hiệu trung điểm (nhận biết trung điểm của 1 đoạn thẳng): (i) Nếu trên đoạn thẳng AB tồn tại 1 điểm M sao cho $AM = \frac{1}{2}AB$ (hoặc $BM = \frac{1}{2}AB$) thì điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB . (ii) Cho 4 điểm A, B, C, D thuộc đường thẳng xy theo thứ tự đó. Nếu $AB = CD$ thì AD, BC có chung 1 trung điểm. Nếu $AC = BD$ thì AD, BC có chung 1 trung điểm.

- 136** ([Bin+23], H1, p. 72). O là trung điểm của AB , & K là trung điểm của AO . Tính OA, OB, AK, BK theo AB .
- 137** ([Bin+23], H2, p. 72). 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên đường thẳng xy theo thứ tự đó. Biết $AB = BC = CD$. Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 138** ([Bin+23], H3, p. 73). Điểm M nằm giữa 2 điểm A, B & $AM = \frac{1}{2}AB$. M có phải là trung điểm của AB không?
- 139** ([Bin+23], H4, p. 73). Cho 3 điểm O, A, B . Biết $OA = OB = 2, AB = 3$. O là trung điểm của AB không?
- 140** ([Bin+23], VD1, p. 73). Cho 3 điểm M, N, O , trong đó $OM = ON = 3$. Tính MN để O là trung điểm của MN .
- 141** ([Bin+23], VD2, p. 73). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 3, OB = 5$. M là trung điểm AB . Tính OM .
- 142** ([Bin+23], VD3, p. 74). Cho đoạn thẳng $AB = 5$. Lấy điểm C nằm giữa A, B sao cho $AC = 2$. M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB . Tính MN .
- 143** ([Bin+23], VD4, p. 74). Trên tia Ox lấy M, N, P sao cho $OM = 1, ON = 3, OP = 5$. Chứng minh N là trung điểm MP .
- 144** ([Bin+23], VD5, p. 74). Cho điểm O nằm giữa 2 điểm A, B . M, N lần lượt là trung điểm OA, OB . Biết $AB = 6$, tính MN .
- 145** ([Bin+23], VD6, p. 75). Cho đoạn thẳng $AB = 6$. O là trung điểm AB . Lấy điểm M nằm giữa O, A , N nằm giữa O, B sao cho $AM = BN = 1$. Chứng minh 2 đoạn thẳng MN, AB có chung 1 trung điểm.
- 146** ([Bin+23], VD7, p. 75). Cho M là trung điểm đoạn thẳng AB . O là điểm nằm giữa A, M . Chứng minh $OM = \frac{1}{2}(OB - OA)$.
- 147** ([Bin+23], 13.1., p. 76). Cho đoạn thẳng AB . O là trung điểm AB , K là trung điểm OB . Biết $AK = 6$, tính AB .
- 148** ([Bin+23], 13.2., p. 76). Trên đường thẳng xy lấy 5 điểm A, B, C, D, E theo thứ tự đó sao cho $AB = BC = CD = DE$. Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 149** ([Bin+23], 13.3., p. 76). Trên đường thẳng xy lấy 1 điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy 2 điểm B, C sao cho $OA = OB = 2, OC = 4$. Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 150** ([Bin+23], 13.4., p. 76). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 3, OB = 4$. M là trung điểm OB . Chứng minh A là trung điểm BM .
- 151** ([Bin+23], 13.5., p. 76). Cho 3 điểm M, O, N thẳng hàng. Biết $MO = ON = 3$. Chứng minh O là trung điểm MN .
- 152** ([Bin+23], 13.6., p. 76). Cho đoạn thẳng AB & M là 1 điểm nằm giữa A, B . Xác định vị trí của điểm M để $AM + AB = 3BM$.
- 153** ([Bin+23], 13.7., p. 76). Trên tia Ox lấy 3 điểm M, N, P sao cho $OM = 3, ON = 4, OP = 6$. Chứng minh: (a) M là trung điểm OP . (b) N không là trung điểm MP .

- 154** ([Bin+23], 13.8., p. 76). Trên đường thẳng xy lấy 1 điểm O . Trên tia Ox lấy điểm C , trên tia Oy lấy 2 điểm D, E sao cho $OC = OD = 2, OE = 3$. Chứng minh: (a) O là trung điểm CD . (b) D không phải là trung điểm OE .
- 155** ([Bin+23], 13.9., p. 76). Cho đoạn thẳng $PQ = 6$. N nằm giữa P, Q sao cho $PN = 2$. M nằm giữa N, Q sao cho $NM = 1$. Chứng minh M là trung điểm PQ .
- 156** ([Bin+23], 13.10., p. 76). Cho đoạn thẳng $AB = 6$. Lấy 2 điểm M, N nằm giữa A, B sao cho $AM = BN = 4$. Chứng minh M, N lần lượt là trung điểm BN, AM .
- 157** ([Bin+23], 13.11., p. 76). Cho đoạn thẳng $AB = 7.5$. E nằm giữa A, B sao cho $AE = \frac{2}{3}AB$. F là trung điểm AE . Chứng minh: (a) $AF = EF = BE$. (b) E là trung điểm BF .
- 158** ([Bin+23], 13.12., p. 76). Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 2, OB = 3$. Trên tia Bx lấy điểm C sao cho $BC = 1$. Chứng minh: (a) B là trung điểm AC . (b) A là trung điểm OC .
- 159** ([Bin+23], 13.13., p. 76). Trên tia Ox lấy A, B sao cho $OB > OA = 4$. M, N lần lượt là trung điểm OB, AB . Tính MN .
- 160** ([BC23], VD3.1, p. 28). Cho 2 tia đối nhau Ox, Ox' . (a) Trên tia Ox lấy A sao cho $OA = 6$. Trên tia Ox' lấy B sao cho $OB = 6$. Chứng minh O là trung điểm đoạn thẳng AB . (b) Lấy C thuộc tia Ox' sao cho $OC = 3$. C là trung điểm của cả đoạn thẳng nào?
- 161** ([BC23], VD3., p. 28). Trên tia Ox lấy 3 điểm A, B, C sao cho $OA = 3, OB = 6, OC = 9$. (a) Trên tia Ox có bao nhiêu đoạn thẳng mà các điểm đầu là 2 trong số 4 điểm A, B, C, O & liệt kê. (b) Trong 4 điểm A, B, C, O , điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng đã liệt kê. (c) Chứng minh OC, AB có chung 1 trung điểm.
- 162** ([BC23], VD3.3, p. 29). Cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB , C, D lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng AM, BM . E, G lần lượt là trung điểm của MC, MD . AB, EF có chung 1 trung điểm không?
- 163** ([BC23], VD3.4, p. 30). Ghi 5 điểm O, A, B, C, D tại các điểm biểu diễn số $0, 1, -2, -4, 4$ trên trục số. Có các điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng có điểm đầu là 2 trong số 5 điểm đã cho?

2.2 Compute length of a segment – Tính 1 đoạn thẳng

[1] Nếu M thuộc đoạn thẳng AB thì $AM + MB = AB$. [2] Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

- 164** ([BC23], VD3.5, p. 31). Cho đoạn thẳng AB & 1 điểm C nằm giữa 2 điểm A, B . M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . (a) Biết $AB = 20$. Tính đoạn thẳng MN . (b) Giả sử $MN = a$. Tính đoạn thẳng AB .
- 165** ([BC23], VD3.6, p. 32). Trên đường thẳng xy đặt điểm O . Lấy 2 điểm A, B thuộc đường thẳng xy sao cho $OA = a, OB = b, 0 < b < a$, trong đó O nằm giữa A, B . (a) Tính đoạn thẳng AB . (b) M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Tính đoạn thẳng MN . (c) C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tính đoạn thẳng OC . (d) 2 đoạn thẳng MC, AN có chung 1 trung điểm không?
- 166** ([BC23], VD3.7, pp. 32–33). Trên đường thẳng xy đặt điểm O . Lấy $A, B \in xy$ sao cho $OA = a, OB = b, 0 < b < a$, trong đó B nằm giữa O, A . (a) Tính đoạn thẳng AB . (b) M, N lần lượt là trung điểm OA, OB . Tính đoạn thẳng MN . (c) C là trung điểm đoạn thẳng AB . Tính đoạn thẳng OC . (d) 2 đoạn thẳng MC, AN có chung 1 trung điểm không?
- 167** ([BC23], VD3.8, p. 34). (a) Trên đường thẳng xy đặt 2 điểm A, B . O là trung điểm của AB . Lấy $M \in xy, M \notin \{A, B, O\}$. So sánh 2 đoạn thẳng MA, MB . (b) Trên đường thẳng xy đặt 3 điểm A, B, C theo thứ tự đó. Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng xy sao cho $MB < \min\{MA, MC\}$.
- 168** ([BC23], 3.1., p. 36). Lấy 5 điểm A, B, C, D, E trên tia Ox sao cho $OA = 3, OB = 5, OC = 7, OD = 11, OE = 13$. (a) Điểm nào là trung điểm của đoạn thẳng nào? (b) Các đoạn thẳng nào có chung 1 trung điểm?
- 169** ([BC23], 3.2., p. 36). Cho O thuộc đường thẳng xy . Lấy A thuộc tia Ox mà $OA = 5$, B thuộc tia Oy mà $OB = 8$. Giả sử C thuộc tia Oy sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AC . (a) Tính đoạn thẳng BC . (b) Lấy điểm D thuộc tia Ox sao cho $OD = 8$. Chứng minh 2 đoạn thẳng AC, BD có chung 1 trung điểm.
- 170** ([BC23], 3.3., p. 36). Trên đoạn thẳng $AC = 12$, lấy B sao cho $AB = 5$. (a) Tính đoạn thẳng MN biết 2 điểm M, N lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng AB, BC . (b) Lấy điểm D thuộc tia đối của tia CA sao cho $CD = 7$. Chứng minh C là trung điểm đoạn thẳng BD . (c) N có là trung điểm đoạn thẳng MK nếu K là trung điểm đoạn thẳng CD không?
- 171** ([BC23], 3.4., p. 37). Cho 2 tia đối nhau Ox, Ox' . Trên tia Ox lấy 2 điểm A, B sao cho $OA = 1, OB = 7$. Trên tia Ox' lấy C sao cho $OC = 5$. A có là trung điểm của đoạn thẳng BC không?
- 172** ([BC23], 3.5., p. 37). Cho 4 điểm A, C, D, B theo thứ tự thuộc đường thẳng xy . Biết $AB = 6, AC = 2, CD = 1$. Chứng minh D là trung điểm đoạn thẳng AB .
- 173** ([BC23], 3.6., p. 37). Trên đường thẳng xy đặt 3 điểm O, A, B . Giả sử $OA = a, OB = a + b$. Tính khoảng cách giữa trung điểm M của OA & trung điểm N của OB .
- 174** ([BC23], 3.7., p. 37). Trên đường thẳng xy đặt 4 điểm phân biệt A, B, C, D theo thứ tự đó sao cho $AB = 60, BC = 20, CD = 60$. Các cặp đoạn thẳng nào có chung trung điểm?

175 ([BC23], 3.8., p. 37). Cho C thuộc tia đối của tia AB hoặc tia đối của tia BA . Chứng minh $CM = \frac{1}{2}(AC + BC)$ với M là trung điểm đoạn thẳng AB .

176 ([BC23], 3.9., p. 37). Cho đoạn thẳng $AA_0 = 1$. (a) Lấy A_1 là trung điểm đoạn thẳng AA_0 . Tính tỷ số $\frac{AA_0}{AA_1}$. (b) Tương tự, lấy các điểm $A_2, A_3, \dots, A_{2012}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $AA_1, AA_2, \dots, AA_{2011}$. Đặt $S := \sum_{i=1}^{2012} \frac{AA_0}{AA_i} = \frac{AA_0}{AA_1} + \frac{AA_0}{AA_2} + \dots + \frac{AA_0}{AA_{2012}}$. So sánh S, S^{2013} .

3 Ray – Tia

[1] Hình gồm điểm O & 1 phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm O gọi là 1 tia gốc O . Tia Ox còn gọi là 1 nửa đường thẳng gốc O . Tia Ox không bị giới hạn về phía x . [2] 2 tia chung gốc Ox, Oy tạo thành đường thẳng xy gọi là 2 tia đối nhau. Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của 2 tia đối nhau. Mỗi tia chỉ có 1 tia đối. [3] Cho 2 tia chung gốc Ox, Oy , có: hoặc đó là 2 tia đối nhau, hoặc là 2 tia trùng nhau, hoặc là 2 tia không đối nhau, không trùng nhau. [4] Về thứ tự của 3 điểm trên 1 đường thẳng: Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng, nếu 2 tia AB, AC đối nhau thì điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . [5] Về sự xác định tia: Nếu điểm A nằm giữa 2 điểm B, C thì 2 tia AB, AC đối nhau, 2 tia BA, BC trùng nhau, 2 tia CA, CB trùng nhau. [6] Điểm M thuộc tia Ox thì 2 tia OM, Ox trùng nhau. $M \in Ox \wedge M \neq O \Leftrightarrow OM \equiv Ox$. [7] 2 tia chung gốc & có thêm 1 điểm chung thì trùng nhau.

177 ([Bin+23], VD1, p. 63). Trên đường thẳng xy lấy điểm O . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . (a) Kể tên các tia trùng nhau gốc A (các tia này chỉ coi là 1). (b) Kể tên các tia đối nhau.

178 ([Bin+23], VD2, p. 63). Lấy 3 điểm C, O, D theo thứ tự đó trên đường thẳng xy . Vẽ tia $Ot \not\subset xy$. Lấy E, F thuộc tia Ot . Đếm số tia & liệt kê.

179 ([Bin+23], VD3, p. 64). Cho 2 tia Ox, Oy đối nhau. (a) Nêu cách vẽ 2 điểm E, F sao cho tia OE trùng với tia Ox , tia OF trùng với tia Oy . (b) Điểm nào nằm giữa 2 điểm khác?

180 ([Bin+23], VD4, p. 64). Cho điểm O nằm giữa 2 điểm A, B . Vẽ điểm C nằm giữa 2 điểm A, O . O nằm giữa 2 điểm nào?

181 ([Bin+23], VD5, p. 64). Cho điểm O nằm giữa 2 điểm A, B . Điểm M nằm giữa O, A , điểm N nằm giữa O, B . O nằm giữa 2 điểm nào?

182 ([Bin+23], 11.1., p. 64). Trên đường thẳng xy lấy 2 điểm M, N , N thuộc tia My . Xác định vị trí của điểm O sao cho: (a) 2 tia OM, ON đối nhau. (b) 2 tia OM, ON trùng nhau.

183 ([Bin+23], 11.3., p. 64). Trên đường thẳng xy lấy 2 điểm A, B , B thuộc tia Ay . Lấy điểm O nằm ngoài xy . 1 điểm C di động trên xy . Vẽ tia OC . Xác định vị trí của C để: (a) Tia OC không cắt tia By . (b) Tia OC không cắt 2 tia Ax, By . (c) Tia OC cắt cả 2 tia Bx, By .

184 ([Bin+23], 11.4., p. 64). Cho tia Ox & 3 điểm A, B, C sao cho 2 tia OA, Ox trùng nhau, 2 tia OB, OC đều là tia đối của tia Ox . (a) Chứng minh O, A, B, C thẳng hàng. (b) O nằm giữa 2 điểm nào?

185 ([Bin+23], 11.5., p. 65). Cho biết 2 tia NM, NP đối nhau, 2 tia PN, PQ đối nhau. Chứng minh: (a) M, N, P, Q thẳng hàng. (b) P nằm giữa 2 điểm M, Q .

186 ([Bin+23], 11.6., p. 65). Cho đường thẳng xy & điểm $O \notin xy$. Lấy $n \in \mathbb{N}^*$ điểm A_1, A_2, \dots, A_n trên xy . Vẽ các tia gốc O lần lượt đi qua A_1, A_2, \dots, A_n . Có tất cả 40 tia. Tính n .

187 ([Bin23], VD3, p. 66). Cho 3 điểm A, B, C trong đó 2 tia BA, BC đối nhau. Trong 3 điểm A, B, C điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?

188 ([Bin23], VD4, p. 66). Điểm B nằm giữa 2 điểm A, C . Tìm các tia đối nhau, trùng nhau.

189 ([Bin23], VD5, p. 66). Cho 2 đoạn thẳng AB, CD cắt nhau tại điểm O nằm giữa 2 đầu của mỗi đoạn thẳng. (a) Kể tên các đoạn thẳng. (b) Điểm O là điểm chung của 2 đoạn thẳng nào?

[Bin23, VD6, p. 66, 14., p. 68].

190 ([Bin23], 7., p. 67). O là 1 điểm của đường thẳng xy . Vẽ điểm A thuộc tia Ox , vẽ 2 điểm B, C thuộc tia Oy sao cho C nằm giữa B, O . (a) Đếm số tia, số đoạn thẳng. (b) Kể tên các cặp tia đối nhau.

191 ([Bin23], 8., p. 67). Cho 5 điểm A, B, C, M, N thỏa điểm C nằm giữa A, B , điểm M nằm giữa A, C , điểm N nằm giữa B, C . (a) Tia CM, CN trùng với tia nào? (b) Vì sao điểm C nằm giữa M, N ?

192 ([Bin23], 9., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . Vì sao điểm B nằm giữa A, D ?

193 ([Bin23], 10., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D nằm giữa 2 điểm B, C . Điểm D có nằm giữa A, B không?

- 194** ([Bin23], 11., p. 67). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D thuộc tia BC & không trùng B . Điểm B có nằm giữa A, D không?
- 195** ([Bin23], 12., p. 67). Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Vẽ đường thẳng a không đi qua A, B, C sao cho đường thẳng a : (a) Cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . (b) Không cắt mỗi đoạn thẳng AB, BC, CA .
- 196** ([Bin23], 13., p. 67). (a) Vẽ 6 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác. (b) Vẽ 8 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.
- 197** ([BC23], VD1.5, p. 10). Cho điểm O thuộc đường thẳng xx' . Lấy 2 điểm A, B thuộc tia Ox sao cho A nằm giữa B, O . Đếm số tia. Đếm số cặp tia đối nhau.
- 198** ([BC23], VD1.6, p. 11). Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Đặt tên đường thẳng BC là xx' , đường thẳng CA là yy' & đường thẳng AB là zz' . Liệt kê các cặp tia đối nhau, trùng nhau.
- 199** ([BC23], VD1.7, p. 11). Cho 3 điểm A, B, C . (a) Khi nào 2 tia BA, BC đối nhau? (b) Khi nào 2 tia CA, CB trùng nhau? (c) Khi nào 2 tia AB, AC không là 2 tia đối nhau & cùng không là 2 tia trùng nhau?
- 200** ([BC23], VD1.8, p. 12). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C . Điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . C có nằm giữa A, D không?
- 201** ([BC23], VD1.9, p. 12). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, D & điểm C nằm giữa 2 điểm B, D . C có nằm giữa A, B không?
- 202** ([BC23], VD1.10, p. 12). Cho điểm A nằm giữa 2 điểm B, C . Biết M nằm giữa A, B , N nằm giữa A, C . A có nằm giữa M, N không?

3.1 Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia

[1] Hình gồm đường thẳng a & 1 phần mặt phẳng bị chia ra bởi a gọi là 1 nửa mặt phẳng bờ a . 2 nửa mặt phẳng (I), (II) có chung bờ a gọi là 2 nửa mặt phẳng đối nhau. [2] Mỗi đường thẳng a chia mặt phẳng thành 2 phần: Nếu 2 điểm A, B thuộc 1 phần thì đường thẳng a không cắt đoạn thẳng AB . Nếu 2 điểm A, B thuộc 2 phần khác nhau thì đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB . [3] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 3 tia Ox, Oy, Oz chung gốc O . Nếu có điểm A thuộc tia Ox , điểm B thuộc tia Oy , $A \neq O, B \neq O$, mà tia Oz cắt đoạn thẳng AB tại điểm I nằm giữa A, B thì tia Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy . [4] Nếu 2 tia Ox, Oy đối nhau thì mọi tia Oz khác Ox, Oy đều nằm giữa 2 tia Ox, Oy . [5] Dấu hiệu đường thẳng cắt đoạn thẳng: ĐỊNH LÝ PASCH VỀ TAM GIÁC: Có 3 điểm A, B, C không thẳng hàng & không điểm nào thuộc đường thẳng a . Nếu đường thẳng a cắt đoạn thẳng BC thì đường thẳng a hoặc cắt đoạn thẳng AB hoặc cắt đoạn thẳng AC . [6] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 2 tia Oy, Oz cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox . Biết tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz . Nếu tia Om nằm giữa 2 tia Oy, Oz , hoặc tia Om nằm giữa 2 tia Ox, Oy , thì tia Om nằm giữa 2 tia Ox, Oz .

- 203** ([BC23], VD4.1, p. 40). Cho 4 điểm O, A, B, C trong đó A, B, C thẳng hàng. Biết A không nằm giữa B, C , B không nằm giữa A, C . (a) Trong 3 tia OA, OB, OC , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Vẽ tia Om là tia đối của tia OC , $M \neq O$. Trong 3 tia OA, OB, OM , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

4 Angle – Góc

[1] Góc là 1 hình gồm 2 tia chung gốc. Góc chung của tia gọi là đỉnh của góc, 2 tia gọi là 2 cạnh của góc. Có nhiều cách ký hiệu 1 góc, e.g., góc xOy , góc MON , góc O , $\angle xOy$, \widehat{xOy} , \widehat{MON} . [2] Góc bẹt là góc có 2 cạnh là 2 tia đối nhau. [3] Để vẽ góc thì vẽ đỉnh & vẽ 2 cạnh của góc. Dùng thước đo góc để đo độ lớn của 1 góc. [4] M là điểm trong của $\widehat{xOy} \Leftrightarrow$ tia OM nằm giữa 2 tia $Ox, Oy \Leftrightarrow$ tia OM nằm trong \widehat{xOy} . [5] Tia nằm giữa 2 tia luôn cắt đoạn thẳng nối 2 điểm thuộc 2 tia đó.

- 204** ([Bin+23], H5, p. 79). Các điểm nằm giữa A, C có là điểm trong của \widehat{ABC} ?

- 205** ([Bin+23], VD4, p. 80). Chứng minh $n \in \mathbb{N}^*$ tia chung gốc tạo thành tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ góc.

- 206** ([Bin+23], VD5, p. 81). Cho 4 tia Ox, Oy, Oz, Ot với 2 tia Ox, Oy không đối nhau. Tia Ot nằm giữa 2 tia Ox, Oy , tia Oz nằm giữa 2 tia Oy, Ot . Tia Oz có nằm giữa 2 tia Ox, Oy không?

- 207** ([Bin+23], 14.2., p. 81). Với 3 đường thẳng, vẽ được nhiều nhất mấy góc?

- 208** ([Bin+23], 14.4., p. 81). Vẽ 2 tia Ox, Oy . Trên tia Ox lấy điểm A , trên tia Oy lấy điểm B . Lấy điểm C nằm giữa A, B . C có là điểm trong của \widehat{xOy} ?

- 209** ([Bin+23], 14.5., p. 81). Chiếc quạt giấy có 17 nan kế cả 2 nan ngoài cùng. Tính số góc tạo bởi các nan quạt.

- 210** ([Bin+23], 14.6., p. 81). Có $n \in \mathbb{N}^*$ tia chung gốc tạo thành tất cả 55 góc. Tính n .

- 211** ([Bin+23], 14.7., p. 81). Có điểm nằm trong & tia nằm trong góc bẹt không?

- 212** ([Bin+23], p. 81). Cho tia Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy không đối nhau. Tia Ob nằm giữa 2 tia Ox, Oz , tia Oa nằm giữa 2 tia Oy, Oz . Tia Oz có nằm giữa 2 tia Oa, Ob không?
- 213** ([Bin23], VD12, p. 72). Cho đường thẳng a & 3 điểm A, B, C sao cho a không cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?
- 214** ([Bin23], VD1, p. 73). Cho 5 tia chung gốc OA, OB, OC, OD, OE . Kể tên các góc.
- 215** ([Bin23], 32., p. 73). Cho 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a , trong đó a cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?
- 216** ([Bin23], 33., p. 73). Cho 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a sao cho a cắt đoạn thẳng AB , không cắt đoạn thẳng BC . a có cắt đoạn thẳng AC không?
- 217** ([Bin23], 34., p. 73). 3 điểm A, B, C không nằm trên đường thẳng a . Chứng minh hoặc đường thẳng a không cắt đoạn thẳng nào trong 3 đoạn thẳng AB, BC, CA , hoặc đường thẳng a chỉ cắt 2 trong 3 đoạn thẳng đó.
- 218** ([Bin23], 35., p. 73). 4 điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a . Chứng minh a hoặc không cắt, hoặc cắt 3, hoặc cắt 4 đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD .
- 219** ([Bin23], 36., p. 73). Cho góc bẹt xOy , vẽ 3 tia Oa, Ob, Oc thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ xy . Đếm số góc & kể tên chúng.
- 220** ([BC23], VD4.2, p. 41). Đếm số góc tạo bởi: (a) 3 tia chung gốc OA, OB, OC theo thứ tự đó. (b) 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD theo thứ tự đó. (c) 5 tia chung gốc OA, OB, OC, OD, OE theo thứ tự đó. (d) 100 tia chung gốc. (e) $n \in \mathbb{N}^*$ tia chung gốc.
- 221** ([BC23], 4.1., p. 42). Lấy 2 điểm M, N trên tia Ox & P thuộc Oy là tia đối của tia Ox , M, N, P khác O . (a) Liệt kê các tia có trên đường thẳng xy . (b) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng xy & liệt kê. (c) O thuộc các đoạn thẳng nào?
- 222** ([BC23], 4.2., p. 42). Cho A, B, C không thuộc đường thẳng a . (a) a có thể cắt chỉ 1 trong 3 đoạn thẳng AB, BC, CA được không? (b) Biết a không cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không?
- 223** ([BC23], 4.3., pp. 42–43). Cho đường thẳng a . (a) Nếu 4 điểm A, B, C, D không nằm trên đường thẳng a , hỏi a có thể cắt bao nhiêu đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, BD, CD ? (b) Nếu 4 điểm A, B, C, D không thuộc đường thẳng a mà đường thẳng a không cắt các đoạn thẳng AB, AC, CD thì a có cắt đoạn thẳng AD không?
- 224** ([BC23], 4.4., p. 43). Cho M nằm giữa 2 điểm A, B . Lấy O không thuộc đường thẳng AB . Vẽ 3 tia OA, OB, OM . (a) Trong 3 tia OA, OB, OM thì tia nào không nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Lấy N sao cho A nằm giữa O, N . Trong 2 tia OM, ON thì tia nào cắt đoạn thẳng BN ?
- 225** ([BC23], 4.5., p. 43). Cho 3 điểm A, B, C nằm ngoài đường thẳng a . (a) Biết a cắt 2 đoạn thẳng AB, AC . a có cắt đoạn thẳng BC không? (b) Chứng minh nếu đường thẳng a cắt đoạn thẳng AB & không cắt đoạn thẳng AC thì a sẽ cắt đoạn thẳng BC .

4.1 Số đo góc

- [1] Mỗi góc có 1 số đo, số đo của mỗi góc $\leq 180^\circ$. Đơn vị của góc là độ, phút, giây: $1^\circ = 60', 1' = 60''$. Các góc đặc biệt: góc nhọn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, góc vuông $\alpha = 90^\circ$, góc tù $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, góc bẹt $\alpha = 180^\circ$, góc lõm $180^\circ < \alpha < 360^\circ$, góc đầy $\alpha = 360^\circ$. [2] So sánh 2 góc bằng cách so sánh các số đo của chúng. [3] Nếu tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz thì $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$. [4] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu có đẳng thức về góc $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz . [5] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu 2 tia Oy, Oz cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox & có $\widehat{xOy} < \widehat{xOz}$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia Ox, Oz . [6] $\widehat{xOy}, \widehat{yOz}$ kề nhau thỏa $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = n^\circ$. Nếu $n \leq 180$ thì $\widehat{xOz} = n^\circ$. Nếu $n > 180$ thì $\widehat{xOz} = 360^\circ - n^\circ$.

- 226** ([Bin+23], H2, p. 84). Sắp xếp tăng dần: góc nhọn, góc tù, góc bẹt, góc vuông.
- 227** ([Bin+23], H3, p. 84). Góc tạo bởi kim giờ & kim phút là góc vuông vào các giờ nào?
- 228**. Số đo góc tạo bởi kim giờ & kim phút bằng $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ vào các giờ nào?
- 229** ([Bin+23], H4, p. 84). Vào các giờ nào trong ngày, góc tạo bởi kim giờ & kim phút là góc nhọn, góc vuông, góc tù, góc bẹt?
- 230** ([Bin+23], VD3, p. 86). Cho $\widehat{mOn} = 30^\circ$. Vẽ tiếp $\widehat{nOt} = 60^\circ$. Tính \widehat{mOt} .
- 231** ([Bin+23], VD4, p. 86). Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Vẽ \widehat{yOz} kề phụ với \widehat{xOy} . Vẽ $\widehat{zOt} = 90^\circ$. Tính \widehat{xOt} .
- 232** ([Bin+23], VD5, p. 86). Tính số đo của góc giữa 2 cánh của 1 chiếc quạt trần 3 cánh.
- 233** ([Bin+23], VD6, p. 87). Cho $\widehat{xOy} = 140^\circ, \widehat{xOz} = 170^\circ$. Tính \widehat{yOz} .
- 234** ([Bin+23], 15.1., p. 87). Vẽ $\widehat{xOy} = \alpha = 55^\circ$. Vẽ tiếp $\widehat{yOz} = \beta = 25^\circ$. Tính \widehat{xOz} .
- 235** ([Bin+23], 15.2., p. 87). Cho 2 góc kề nhau $\widehat{xOy} = 45^\circ, \widehat{yOz}$. Biết $\widehat{xOz} = 80^\circ$. Tính \widehat{yOz} .

- 236 ([Bin+23], 15.3., p. 87). Cho tia Oc nằm giữa 2 tia Oa, Ob . Biết $\widehat{aOb} = 85^\circ$, \widehat{aOc} nhỏ hơn \widehat{bOc} 15° . Tính $\widehat{aOc}, \widehat{bOc}$.
- 237 ([Bin+23], 15.4., p. 87). Cho $\widehat{xOy}, \widehat{yOz}$ phụ nhau, $\widehat{yOz} = 4\widehat{xOy}$. Tính số đo mỗi góc.
- 238 ([Bin+23], 15.5., p. 87). Cho \widehat{A}, \widehat{O} bù nhau, $\widehat{O} = 2\widehat{A}$. Tính số đo mỗi góc.
- 239 ([Bin+23], 15.6., p. 87). Cho $\widehat{xOy} = 120^\circ$. Ot là tia đối của tia Ox . Vẽ $\widehat{tOz} = 45^\circ$, Oz, Oy khác phía đối với tx . Tính \widehat{yOz} .
- 240 ([Bin+23], 15.7., p. 87). Cho 4 góc kề xOy, yOz, zOt, tOx với $\widehat{yOz} = 2\widehat{xOy}, \widehat{zOt} = 3\widehat{xOy}, \widehat{tOx} = 4\widehat{xOy}$. Tính số đo mỗi góc.
- 241 ([Bin+23], 15.8., p. 87). Cho 4 tia OA, OB, OC, OD theo thứ tự đó với $\widehat{AOB} = 90^\circ, \widehat{BOD} = 55^\circ, \widehat{AOC} = 125^\circ$. Tính \widehat{COD} .
- 242 ([Bin23], VD14, p. 74). Cho tia Oc nằm giữa 2 tia Oa, Ob không đối nhau, tia Om nằm giữa tia Oa, Oc , tia On nằm giữa 2 tia Ob, Oc . Tia Oc có nằm giữa 2 tia Om, On không?
- 243 ([Bin23], VD15, p. 74). Chứng minh nếu 1 đường thẳng không đi qua các đỉnh của 1 tam giác & cắt 1 cạnh của tam giác ấy thì nó cắt 1 & chỉ 1 trong 2 cạnh còn lại.
- 244 ([Bin23], VD16, p. 74). Cho góc tù AOB . Vẽ 2 tia OC, OD nằm trong góc AOB sao cho AOC, BOD là 2 góc vuông. Chứng minh: (a) $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$. (b) $\widehat{AOB}, \widehat{COD}$ bù nhau.
- 245 ([Bin23], 37., p. 75). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, C , điểm D thuộc tia BC & không trùng B , điểm O nằm ngoài đường thẳng AC . Trong 3 tia OA, OB, OD , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?
- 246 ([Bin23], 38., p. 75). Cho 2 tia Oa, Ob không đối nhau. Trên tia Oa lấy $A \neq O$, trên tia Ob lấy $B \neq O$. 1 điểm C bất kỳ nằm giữa A, B . Vẽ điểm M sao cho điểm O nằm giữa C, M . (a) Chứng minh tia OC nằm giữa 2 tia OA, OB . (b) Trong 3 tia OA, OB, OM , có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại không? Phát biểu thành 1 tính chất.
- 247 ([Bin23], 39., p. 75). Có thể khẳng định trong 3 tia chung gốc, bao giờ cũng có 1 tia nằm giữa 2 tia còn lại không?
- 248 ([Bin23], 40., p. 75). 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau ở O . Biết $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 5^\circ$. Tính $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}, \widehat{AOD}$.
- 249 ([Bin23], 41., p. 75). Cho điểm B nằm giữa 2 điểm A, D , điểm O nằm ngoài đường thẳng AD . Biết $\widehat{AOD} = 80^\circ, \widehat{AOB} = 50^\circ$. Tính \widehat{BOD} .
- 250 ([Bin23], 42., p. 75). Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$, vẽ tia Oz thỏa $\widehat{yOz} = 30^\circ$. (a) Tia Oz có xác định duy nhất không? (b) Tính \widehat{xOz} trong từng trường hợp.
- 251 ([Bin23], 43., p. 75). 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau ở O . Biết $\widehat{AOC} = 70^\circ$. Tính $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}$.
- 252 ([Bin23], 44., p. 75). Tính góc tạo bởi kim giờ & kim phút của đồng hồ lúc: (a) 2:10. (b) 10:42.
- 253 ([Bin23], 45., p. 76). Cho $\triangle ABC$, D nằm giữa A, C , E nằm giữa A, B . Chứng minh đường thẳng BD cắt đoạn thẳng CE , đường thẳng CE cắt đoạn thẳng BD .
- 254 ([Bin23], 46., p. 76). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh bao giờ cũng vẽ được 1 đường thẳng không đi qua 3 đỉnh của $\triangle ABC$ & cắt cả 3 tia AB, BC, CA .
- 255 ([Bin23], 47., p. 76). Cho điểm O nằm trong $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) Tia BO cắt đoạn thẳng AC tại 1 điểm D nằm giữa A, C . (b) Điểm O nằm giữa B, D . (c) Trong 3 tia OA, OB, OC , không có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại.
- 256 ([BC23], VD5.1, p. 44). Cho 3 tia Ox, Oy, Oz . Tính \widehat{yOz} nếu: (a) Tia Ox nằm giữa 2 tia Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = 80^\circ, \widehat{xOz} = 30^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$.
- 257 ([BC23], VD5.2, p. 45). Cho $\widehat{xOy} = 45^\circ, \widehat{yOz} = 80^\circ, \widehat{zOx} = 35^\circ$. Trong 3 tia Ox, Oy, Oz thì tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

4.2 2 góc bù nhau, phụ nhau

[1] 2 góc kề nhau là 2 góc có 1 cạnh chung & 2 cạnh còn lại nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung. [2] 2 góc phụ nhau là 2 góc có tổng số đo bằng 90° . 2 góc bù nhau là 2 góc có tổng số đo bằng 180° . [3] 2 góc kề bù là 2 góc vừa kề nhau, vừa bù nhau. [4] Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia Ox , bao giờ cũng vẽ được 1 & chỉ 1 tia Oy sao cho $\widehat{xOy} = \alpha$. [5] Dấu hiệu về tia đối nhau: Nếu $\widehat{xOy}, \widehat{yOz}$ kề nhau mà $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$ thì tia Ox, Oz đối nhau. [6] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Cho 2 tia đối nhau Ox, Oy & 2 điểm A, B thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy . Biết $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta$. Nếu $\alpha + \beta > 180^\circ$ thì tia Oy nằm giữa 2 tia OA, OB . Nếu $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ thì tia Ox nằm giữa 2 tia OA, OB .

258 ([BC23], VD5.3, p. 47). Cho góc bẹt xOy . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ xy , vẽ 3 tia OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOx} = 35^\circ, \widehat{BOx} = \frac{1}{2}\widehat{AOx}, \widehat{COy} = \frac{1}{2}\widehat{AOy}$. Tính \widehat{BOC} .

259 ([BC23], 5.1., p. 48). Cho 3 tia chung gốc Ox, Oy, Oz sao cho tia đối của tia Oz nằm giữa 2 tia Ox, Oy . Chứng minh $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOx} = 360^\circ$.

260 ([BC23], 5.2., p. 48). Cho $\widehat{xOy} = 180^\circ$. Vẽ 2 tia OM, ON cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ xy sao cho $\widehat{MOx} = \alpha, \widehat{NOy} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Tính \widehat{MON} .

261 ([BC23], 5.3., p. 48). Cho $\widehat{xOy} = 105^\circ, \widehat{xOz} = 125^\circ$. Tính \widehat{yOz} .

262 ([BC23], 5.4., p. 48). Cho 3 tia chung gốc OA, OB, OC sao cho $\widehat{AOB} = 40^\circ, \widehat{AOC} = 35^\circ$. (a) Tính \widehat{BOC} . (b) Vẽ tia OD là tia đối của tia OA . Tính $\widehat{BOD}, \widehat{COD}$.

263 ([BC23], 5.5., p. 48). Cho 3 đường thẳng AM, BN, CD đồng quy tại O . (a) Liệt kê các góc kề với \widehat{AOD} . (b) Liệt kê các góc kề bù với \widehat{AOD} . (c) Tìm các góc bằng nhau.

264 ([BC23], 5.6., p. 48). Cho 2 đường thẳng AB, CD cắt nhau tại O . Tính $\widehat{BOC}, \widehat{BOD}$ nếu: (a) $\widehat{AOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. (b) Biết $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$.

265 ([BC23], 5.7., p. 48). Cho 2 tia đối nhau OA, OB . Chứng minh 2 tia OM, ON đối nhau, biết 2 tia OM, ON nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB mà $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$.

4.3 2 góc kề nhau

266 ([Bin23], VD17, p. 76). Chứng minh: (a) Nếu 2 góc kề nhau có 2 cạnh ngoài là 2 tia đối nhau thì 2 góc đó bù nhau. (b) Nếu 2 góc kề nhau mà bù nhau thì 2 cạnh ngoài của chúng là 2 tia đối nhau.

267 ([Bin23], VD18, p. 77). Cho 3 tia chung gốc OA, OB, OC . Tính \widehat{BOC} biết: (a) $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 30^\circ$. (b) $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 80^\circ$. (c) $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

268 ([Bin23], 48., p. 78). Cho 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy ở O , trong đó tia OB nằm giữa 2 tia OA, OC . Kể tên các góc kề với \widehat{AOB} .

269 ([Bin23], 49., p. 78). Cho 2 tia Ox, Oy đối nhau. Trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia Ox , vẽ 2 tia Om, On sao cho $\widehat{xOm} = 70^\circ, \widehat{yOn} = 70^\circ$. Chứng minh 2 tia Om, On đối nhau.

270 ([Bin23], 50., p. 78). Cho $\widehat{xOy}, \widehat{xOz}$ kề nhau. Tính \widehat{yOz} biết: (a) $\widehat{xOy} = 40^\circ, \widehat{xOz} = 140^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = 50^\circ, \widehat{xOz} = 70^\circ$. (c) $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 130^\circ$. (d) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

271 ([Bin23], 51., p. 78). Cho 3 tia Ox, Oy, Oz . Tính \widehat{yOz} biết: (a) $\widehat{xOy} = 60^\circ, \widehat{xOz} = 40^\circ$. (b) $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 100^\circ$. (c) $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$ với $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$.

272 ([Bin23], 52., p. 78). Cho 4 tia OA, OB, OC, OD tạo thành 4 góc AOB, BOC, COD, DOA không có điểm trong chung. Tính số đo mỗi góc ấy biết: (a) $\widehat{BOC} = 3\widehat{AOB}, \widehat{COD} = 5\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = 6\widehat{AOB}$. (b) $\widehat{BOC} = a\widehat{AOB}, \widehat{COD} = b\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = c\widehat{AOB}$ với $a, b, c > 0$.

273 ([Bin23], 52., p. 78). Cho 3 góc AOB, BOC, COD không có điểm trong chung & đều có số đo bằng α . Tính \widehat{AOD} .

4.4 Tia phân giác của 1 góc

[1] OM là tia phân giác của $\widehat{AOB} \Leftrightarrow$ Tia OM nằm giữa 2 tia OA, OB & $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. Đường thẳng chứa tia phân giác của 1 góc là đường phân giác của góc đó. Mỗi góc không là góc bẹt chỉ có 1 tia phân giác. [2] Nếu tia OM là phân giác của \widehat{AOB} thì: Tia OM nằm giữa 2 tia OA, OB , $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$. [3] Tính chất phân giác của 1 góc: (i) Nếu OM là tia phân giác của \widehat{AOB} thì $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. (ii) Cho 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD xếp theo thứ tự đó mà $\widehat{AOD} < 180^\circ$. Nếu $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$ có chung tia phân giác OM thì $\widehat{AOB} = \widehat{COD}, \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. [4] Dấu hiệu nhận biết tia phân giác của 1 góc: (i) Nếu trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia OA vẽ 2 tia OB, OM sao cho $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ thì OM là tia phân giác của \widehat{AOB} . (ii) Cho 4 tia chung gốc OA, OB, OC, OD xếp theo thứ tự đó sao cho $\widehat{AOD} < 180^\circ$. Nếu $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ thì $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$ có chung tia phân giác.

274 ([BC23], VD6.1, p. 51). Cho 2 điểm A, B nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia Ox . (a) Biết $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 30^\circ$. Chứng minh tia Ox là tia phân giác của \widehat{AOB} . (b) Cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 130^\circ$. Tia Ox có là tia phân giác của \widehat{AOB} ? (c) Cho $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. Tìm điều kiện của α để tia Ox là tia phân giác của \widehat{AOB} .

275 ([BC23], VD6.2, p. 52). Cho góc bẹt \widehat{AOB} . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 2 tia OM, OC sao cho $\widehat{AOM} = 50^\circ, \widehat{BOC} = 80^\circ$. Chứng minh tia OM là tia phân giác của \widehat{AOC} .

276 ([BC23], VD6.3, p. 52). Cho điểm O thuộc đường thẳng xy . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ xy , vẽ 4 tia OA, OB, OC, OD sao cho $\widehat{AOx} = 30^\circ, \widehat{BOx} = 60^\circ, \widehat{COx} = 90^\circ, \widehat{DOx} = 120^\circ$. Tìm các tia phân giác của các góc.

277 ([BC23], VD6.4, p. 53). Cho $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$ không kề nhau. (a) Vẽ hình biết $\widehat{AOx} = 38^\circ, \widehat{BOx} = 112^\circ$. Trong 3 tia OA, OB, Ox , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Tính \widehat{AOB} . (c) Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOB} . Tính \widehat{MOx} . (d) Cho $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Tìm điều kiện giữa α, β để tia OA nằm giữa 2 tia OB, Ox . Tính \widehat{MOx} theo α, β .

278 ([BC23], VD6.5, p. 54). Cho $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$ kề nhau. Biết $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$. Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOB} . Tính \widehat{MOx} theo α, β .

279 ([BC23], VD6.6, p. 55). Cho $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ kề nhau. (a) Vẽ hình biết $\widehat{AOC} = 54^\circ, \widehat{BOC} = 118^\circ$. (b) Vẽ tia phân giác OM của \widehat{AOC} & tia phân giác ON của \widehat{BOC} . Tính \widehat{MON} . (c) Giả sử $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$. Tìm điều kiện của α, β để $\widehat{MON} = 45^\circ, \widehat{MON} = 90^\circ$, biết $0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$.

280 ([BC23], VD6.7, p. 56). Cho $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$. Biết $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ, \alpha \neq \beta$. Vẽ 2 tia phân giác OM, ON của $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$. Tính \widehat{MON} theo α, β .

281 ([BC23], VD6.8, p. 57). Vẽ $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ kề với \widehat{AOB} . (a) Tính tổng số đo $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$. (b) Chứng minh 2 tia phân giác OM, OM' của $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$ đối nhau.

282 ([BC23], 6.1., p. 58). Cho $\widehat{xOy} = 70^\circ$. Vẽ 2 tia phân giác OM, ON lần lượt của $\widehat{xOy}, \widehat{MOx}$. Tính $\widehat{MOy}, \widehat{MON}, \widehat{NOy}$.

283 ([BC23], 6.2., p. 58). Cho 2 tia đối nhau OA, OB . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 2 tia OC, OD sao cho $\widehat{AOC} = 140^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$. Tia OC có là tia phân giác của \widehat{BOD} ?

284 ([BC23], 6.3., pp. 58–59). Cho $\widehat{AOD} = 120^\circ$. Vẽ 2 tia OB, OC cùng thuộc 1 nửa mặt phẳng bờ chứa 2 tia OA, OD sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD}$. (a) Tìm các tia phân giác của các góc. (b) Nếu OM là tia phân giác của \widehat{AOD} thì OM có là tia phân giác của \widehat{BOC} ?

285 ([BC23], 6.4., p. 59). Cho $\widehat{AOB} = 80^\circ$. Vẽ tia OC nằm giữa 2 tia OA, OB sao cho $\widehat{AOC} = 30^\circ$. Vẽ tia OD nằm giữa 2 tia OA, OB sao cho $\widehat{COD} = 10^\circ$. OD có là tia phân giác của \widehat{AOB} ?

286 ([BC23], 6.5., p. 59). Trên đường thẳng xy lấy 1 điểm O . Vẽ $\widehat{AOx} = 90^\circ, \widehat{MOy} = 45^\circ$. (a) Nếu 2 tia OA, OM cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ xy thì tia OM có là tia phân giác của \widehat{AOy} ? (b) Chứng minh nếu 2 tia OA, OM nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ xy thì $\widehat{AOM} = \widehat{MOx}$. Trong trường hợp này tia OM có là tia phân giác của \widehat{AOx} ?

287 ([BC23], 6.6., p. 59). Cho 3 góc chung đỉnh $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$. Chứng minh tia đối của tia OA là tia phân giác của \widehat{BOC} .

288 ([BC23], 6.7., p. 59). Cho $\widehat{AOB} = 35^\circ$. Vẽ $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ cùng kề với \widehat{AOB} . Vẽ Ox, Oy là 2 tia phân giác của $\widehat{AOA'}, \widehat{BOB'}$. (a) Chứng minh 2 tia Ox, Oy không đối nhau. (b) Tính \widehat{AOB} để 2 tia Ox, Oy đối nhau.

289 ([BC23], 6.8., p. 59). Cho $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$ cùng không kề với \widehat{AOB} . Vẽ 2 tia OM, OM' lần lượt là tia phân giác của $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$. (a) 2 tia OM, OM' đối nhau không? (b) Tính số đo góc hợp bởi các tia phân giác của $\widehat{AOB'}, \widehat{BOA'}$.

290 ([BC23], 6.9., p. 59). Cho \widehat{BAC} . Vẽ \widehat{CAM} kề với \widehat{BAC} sao cho $\widehat{CAM} = \widehat{BAM} = \alpha$. (a) Chứng minh $\alpha \geq 90^\circ$. (b) Chứng minh tia AM là tia đối của tia phân giác của \widehat{BAC} .

291. Vẽ tia phân giác OA_1 của $\widehat{AOB} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ]$. Vẽ tia phân giác OA_2 của $\widehat{AOA_1}$, vẽ tia phân giác OA_3 của $\widehat{AOA_2}, \dots$ vẽ tia phân giác OA_n của $\widehat{AOA_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_mOA_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

292. Cho $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$. Vẽ OA_1, OB_1 lần lượt là 2 tia phân giác $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$, vẽ OA_n, OB_n lần lượt là 2 tia phân giác $\widehat{AOA_{n-1}}, \widehat{BOB_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_nOC}, \widehat{AOB_n}, \widehat{BOB_n}, \widehat{B_nOC}, \widehat{A_mOA_n}, \widehat{A_mOB_n}, \widehat{B_mOB_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

293. Cho $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$. Vẽ OA_1, OB_1 lần lượt là 2 tia phân giác $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$, vẽ OA_n, OB_n lần lượt là 2 tia phân giác $\widehat{COA_{n-1}}, \widehat{COB_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_nOC}, \widehat{AOB_n}, \widehat{BOB_n}, \widehat{B_nOC}, \widehat{A_mOA_n}, \widehat{A_mOB_n}, \widehat{B_mOB_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

5 Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác

[1] Đường tròn tâm O , bán kính R là hình gồm các điểm cách O 1 khoảng bằng R , ký hiệu $(O; R) := S_R(O) = \partial B_R(O) = \{M \in \mathbb{R}^2 | OM = R\}$. [2] Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn & các điểm nằm bên trong đường tròn: $B_R(O) := \{M \in \mathbb{R}^2 | OM \leq R\}$. [3] 2 điểm $A, B \in (O; R)$ chia đường tròn thành 2 cung tròn. Đoạn thẳng nối 2 điểm A, B là dây cung. Dây đi qua tâm là đường kính. [4] Tam giác ABC là hình gồm 3 đoạn thẳng AB, BC, CA khi 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, i.e., $\Delta ABC := AB \cup BC \cup CA, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2, C \notin AB$.

294 ([BC23], VD7.1, p. 60). Cho 5 điểm bất kỳ thuộc đường tròn (O) . Đếm số dây cung, số cung tạo bởi 2 trong 5 điểm đó.

295 ([BC23], VD7.2, p. 61). Trên cạnh AC của ΔABC lấy điểm M . Vẽ đoạn thẳng BM . Tính \widehat{CBM} , biết $\widehat{ABC} = 70^\circ, \widehat{ABM} = 30^\circ$.

- 296** ([BC23], VD7.3, p. 61). Cho điểm M không thuộc đường thẳng xy . Lấy $A, B \in xy$ thì tồn tại 1 tam giác có đỉnh là điểm M & 2 đỉnh còn lại là 2 điểm A, B . (a) Nếu có thêm 1 điểm thứ 3 cũng thuộc đường thẳng xy thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là M & 2 đỉnh còn lại là 2 trong 3 điểm thuộc xy ? (b) Nếu có 100 điểm trên xy thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là M & 2 đỉnh còn lại là 2 trong số 100 điểm thuộc xy ?
- 297** ([BC23], VD7.4, pp. 61–62). (a) Vẽ $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ, AC = 9$. (b) Trên tia AC lấy điểm M sao cho $AM = 2$, trên tia CA lấy điểm D sao cho $CD = 5$. Chứng minh M là trung điểm đoạn thẳng AD . (c) Vẽ 2 đoạn thẳng BM, BD . Đếm số tam giác & liệt kê. (d) $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$ là góc của các tam giác nào? (e) Tìm các góc kề bù với $\widehat{BMC}, \widehat{BDC}$.
- 298** ([BC23], VD7.5, p. 62). Cho 6 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đoạn thẳng & tô đoạn thẳng đó bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 6 điểm đã cho & có các cạnh cùng được tô màu xanh hoặc cùng màu đỏ.
- 299** ([BC23], 7.1., p. 63). Cho $\triangle ABC$. Trên cạnh BC lấy 3 điểm D, I, K . Kẻ 3 đoạn thẳng BD, BI, BK . Liệt kê các tam giác.
- 300** ([BC23], 7.2., p. 63). Cho $\triangle ABC$. Lấy D, E lần lượt thuộc 2 cạnh AC, AB . 2 đoạn thẳng BD, CE giao nhau tại O . Nối AO . Đếm số tam giác.
- 301** ([BC23], 7.3., p. 63). Cho $\triangle ABC$. Đường thẳng a cắt cạnh AB tại D nằm giữa A, B , cắt cạnh AC tại E nằm giữa A, C . a có cắt cạnh BC không?
- 302** ([BC23], 7.4., p. 63). Cho A, B, C, D, E nằm trên 1 đường tròn. Nối từng cặp điểm. Đếm số tam giác & liệt kê.

6 Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc

- 303** ([Bin23], VD19, p. 78). (a) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng.
- 304** ([Bin23], VD20, p. 79). Trên mặt phẳng có 4 đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?
- 305** ([Bin23], VD21, p. 80). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Nối từng cặp 2 điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng. (a) Đếm số đoạn thẳng nếu trong n điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Đếm số đoạn thẳng nếu trong n điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. (c) Tính n biết có tất cả 1770 đoạn thẳng.
- 306** ([Bin23], VD22, p. 80). Cho $\triangle ABC$, D, E lần lượt nằm trong cạnh AC, AB , K là giao điểm của BD, CE . Kẻ đoạn thẳng DE . Đếm số tam giác.
- 307** ([Bin23], VD23, p. 81). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Vẽ n tia chung gốc. Đếm số góc.
- 308** ([Bin23], 54., p. 81). Cho n điểm A_1, A_2, \dots, A_n trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. (a) Kể tên các đường thẳng nếu $n = 4$. (b) Tính số đường thẳng nếu $n = 20$. (c) Tính số đường thẳng theo n . (d) Tính n biết số đường thẳng kẻ được là 1128. (e) Số đường thẳng có thể bằng 2004 không?
- 309** ([Bin23], 55., p. 81). Cho 100 điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.
- 310** ([Bin23], 56., p. 81). Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Biết có tất cả 105 đường thẳng. Tính n .
- 311** ([Bin23], 57., p. 81). Cho 4 điểm, bất cứ 2 điểm nào cũng có ít nhất 1 đường thẳng đi qua. Có thể có bao nhiêu đường thẳng?
- 312** ([Bin23], 58., p. 81). (a) Cho 3 đường thẳng cắt nhau đôi một. Có thể có bao nhiêu giao điểm? (b) Vẽ 3 đường thẳng sao cho số giao điểm (của 2 hoặc 3 đường thẳng) lần lượt là 0, 1, 2, 3.
- 313** ([Bin23], 59., p. 81). Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.
- 314** ([Bin23], 60., p. 81). Cho n đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Biết số giao điểm của đường thẳng đó là 780. Tính n .
- 315** ([Bin23], 61., p. 81). Cho 10 điểm. Nối từng cặp điểm trong 10 điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính số đoạn thẳng mà 2 mút thuộc tập 10 điểm đã cho, nếu trong các điểm đã cho: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng.
- 316** ([Bin23], 62., p. 82). Cho n điểm. Nối từng cặp điểm trong n điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính n biết có tất cả 435 đoạn thẳng.
- 317** ([Bin23], 63., p. 82). 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền. (a) 2 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (b) 3 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (c) 4 đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền? (d) $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền?
- 318** ([Bin23], 64., p. 82). Cho 10 điểm thuộc đường thẳng a & 1 điểm nằm ngoài a . Đếm số tam giác có 3 đỉnh trong 11 điểm đó.

319 ([Bin23], 65., p. 82). Cho $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$. Trên tia Ox lấy 3 điểm không trùng O là A, B, C . Trên tia Oy lấy 4 điểm không trùng O là D, E, F, G . Đếm số tam giác mà 3 đỉnh nằm trong 8 điểm O, A, B, C, D, E, F, G .

320 ([Bin23], 66., p. 82). (a) Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính n . (b) Cho n tia chung gốc tạo thành tất cả m góc. Tính n theo m .

321 (Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng tổng quát). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (a) Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng, tia đi qua 2 điểm trong chúng. (b) Cho n điểm trong đó có đúng 1 bộ m điểm thẳng hàng với nhau, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng. (c) Cho n điểm trong đó có đúng m bộ điểm thẳng hàng với nhau lần lượt nằm trên các đường thẳng a_1, a_2, \dots, a_m . Biết đường thẳng a_i có đúng a_i điểm trong n điểm đã cho thẳng hàng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng.

322 (Đếm số góc, tam giác tổng quát). Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (a) Cho n điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số góc, số tam giác tạo bởi chúng. (b) Cho n điểm trong đó có đúng 1 bộ m điểm thẳng hàng với nhau, đếm số góc, số tam giác tạo bởi chúng. (c) Cho n điểm trong đó có đúng m bộ điểm thẳng hàng với nhau lần lượt nằm trên các đường thẳng a_1, a_2, \dots, a_m . Biết đường thẳng a_i có đúng a_i điểm trong n điểm đã cho thẳng hàng. Đếm số góc, số tam giác tạo bởi chúng.

7 Đếm Số. Đếm Hình

323 ([Bin23], VD24, p. 82). Đếm số số tự nhiên có 3 chữ số, các chữ số khác nhau, lập từ 3 trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

324 ([Bin23], VD25, p. 83). Đếm số cách sắp xếp nhất, nhì, ba trong: (a) 6 đội bóng thi đấu. (b) $n \in \mathbb{N}$ đội bóng thi đấu.

325 ([Bin23], VD26, p. 83). Đếm số cách gọi tên tam giác có 3 đỉnh là A, B, C .

326 ([Bin23], VD27, p. 83). Đếm số cách giao hoán các thừa số của tích $abcd$.

327 ([Bin23], VD28, p. 84). Đếm số cách sắp xếp 5 người ngồi: (a) Trên 1 ghế dài. (b) Xung quanh 1 bàn tròn.

328 ([Bin23], VD29, p. 84). Đếm số đoạn thẳng mà 2 đầu mút là 2 trong 5 điểm đã cho.

329 ([Bin23], VD30, p. 84). Cho 9 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.

330 ([BC23], VD9.8, p. 79). Đếm số hình chữ nhật tạo bởi m đường thẳng đứng & n đường nằm ngang đôi một cắt nhau với $m, n \in \mathbb{N}^*$.

331 ([Bin23], VD31, p. 85). Trong số 4 học sinh giỏi Văn & 9 học sinh giỏi Toán, lập ra 1 nhóm gồm 7 học sinh, trong đó có ít nhất 2 học sinh giỏi Văn. Đếm số cách lập nhóm.

332 ([Bin23], VD32, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy. (c) Đếm số cách xếp m bi đen, n bi trắng thành 1 dãy với $m, n \in \mathbb{N}$.

333 ([Bin23], VD33, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy.

334 ([Bin23], VD34, p. 86). Đếm số số tự nhiên không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.

335 ([Bin23], VD35, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.

336 ([Bin23], VD36, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.

337 ([Bin23], 67., p. 87). Dùng 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 để: (a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, trong đó các chữ số khác nhau? Tính tổng các số được lập. (b) Lập được bao nhiêu số chẵn, số lẻ có 5 chữ số khác nhau? (c) Lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, trong đó 2 chữ số kề nhau phải khác nhau? (d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn?

338 ([Bin23], 68., p. 87). Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên: (a) Gồm 5 chữ số khác nhau? (b) Gồm 4 chữ số khác nhau. (c) Gồm 3 chữ số khác nhau. (d) Gồm 3 chữ số có thể giống nhau.

339 ([Bin23], 69., pp. 87–88). Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau thỏa 1 trong các điều kiện: (a) $\nmid 2$. (b) $: 2$. (c) $: 5$.

340 ([Bin23], 70., p. 88). (a) Dùng 3 chữ số 1, 2, 7 có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho 2 chữ số 2, 7 có mặt 1 lần, còn chữ số 1 có mặt 3 lần? (b) Như (a) nếu thêm điều kiện các số phải đếm lớn hơn 20000.

341 ([Bin23], 71., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các số 1, 2, 3 & $: 9$?

342 ([Bin23], 72., p. 88). Đếm số tự nhiên có 11 chữ số, gồm 5 chữ số 1 & 6 chữ số 2 sao cho đọc xuôi & đọc ngược đều giống nhau.

343 ([Bin23], 73., p. 88). Đếm số số tự nhiên có không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.

- 344** ([Bin23], 74., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số mà tích các chữ số bằng 24.
- 345** ([Bin23], 75., p. 88). Đếm số số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng tích các chữ số đó.
- 346** ([Bin23], 76., p. 88). Cho 10 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.
- 347** ([Bin23], 77., p. 88). Có $n \in \mathbb{N}^*$ điểm trên mặt phẳng. Có tất cả 91 đoạn thẳng nối 2 trong n điểm đó. Tính n .
- 348** ([Bin23], 78., p. 88). Cho $n \in \mathbb{N}^*$ tia chung gốc tạo thành tất cả 153 góc. Tính n .
- 349** ([Bin23], 79., p. 88). Đếm số cách gọi tên: (a) Hình vuông ABCD. (b) Đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 350** ([Bin23], 80., p. 88). Cho hình vuông 4×4 . Đếm số hình chữ nhật, số hình vuông.
- 351** ([Bin23], 81., p. 88). Có 12 điểm trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.
- 352** ([Bin23], 82., p. 88). Cho $\widehat{x\hat{A}y} \neq 180^\circ$. Trên tia Ax lấy 6 điểm khác A, trên tia Ay lấy 5 điểm khác A. Trong 12 điểm này, kể cả điểm A, 2 điểm nào cũng được nối với nhau bởi 1 đoạn thẳng. Đếm số tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm đó.
- 353** ([Bin23], 83., p. 89). Có 9 đội bóng tham dự 1 giải bóng đá, mỗi đội phải đấu 2 trận với mỗi đội khác, ở sân nhà & ở sân khách. Đếm số trận đấu.
- 354** ([Bin23], 84., p. 89). Có 2 viên bi đỏ giống nhau, 8 viên bi xanh giống nhau. Đếm số cách xếp thành 1 hàng gồm cả 10 viên bi.
- 355** ([Bin23], 85., p. 89). 1 ô tô có 8 chỗ, kể cả chỗ của người lái xe. Đếm số cách xếp chỗ 8 người trên xe, biết trong đó có 2 người biết lái xe.
- 356** ([Bin23], 86., p. 89). Có 2 cặp bạn ngồi trên 1 ghế băng có 4 chỗ để chụp ảnh. Đếm số cách sắp xếp sao cho 2 người cùng cặp phải ngồi cạnh nhau.
- 357** ([Bin23], 87., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn A, B, C, D, E ngồi trên 1 ghế dài sao cho A, B ngồi cạnh nhau.
- 358** ([Bin23], 88., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn A, B, C, D, E ngồi xung quanh 1 bàn tròn sao cho A, B ngồi cạnh nhau.
- 359** ([Bin23], 89., p. 89). 1 nhóm 5 bạn gồm 3 nam, 2 nữ xếp thành 1 hàng ngang để chụp ảnh, sao cho 2 bạn nữ không đứng cạnh nhau. Đếm số cách sắp xếp.
- 360** ([Bin23], 90., p. 89). Đếm số cách chọn 3 tấm ảnh từ 6 tấm ảnh khác nhau.
- 361** ([Bin23], 91., p. 89). Đếm số cách lập nhóm 3 người từ 1 tổ 10 người để làm nhiệm vụ trực nhật.
- 362** ([Bin23], 92., p. 89). 1 tổ học sinh có 5 nam, 3 nữ. Đếm số cách lập nhóm 5 người gồm 3 nam, 2 nữ.
- 363** ([Bin23], 93., p. 89). Đếm số cách chia 8 chiếc kẹo cho 3 người để ai cũng được nhận kẹo.

Tài liệu

- [BC23] Vũ Hữu Bình and Đàm Hiếu Chiến. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 6. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 108.
- [Bin+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Thị Quỳnh Anh, Phan Thanh Hồng, Bùi Văn Tuyên, Đặng Văn Tuyên, and Nguyễn Thị Thanh Xuân. *Bồi Dưỡng Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần 1. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 112.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần 2. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 152.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá23] Đỗ Đức Thái. *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.