

# Problem: Algebraic & Rational Fractions

## Bài Tập: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 24 tháng 11 năm 2023

### Mục lục

1	Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	1
2	Operations $\pm$ on Algebraic Fractions – Phép $\pm$ Các Phân Thức Đại Số	4
3	Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số	5
4	Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ	5
5	Miscellaneous	6
	Tài liệu	6

## 1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

1 ([Tuy23], VD20, p. 28). (a) Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ . (b) Cho  $a, b, c, d, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \alpha$ . Rút gọn phân thức  $B = \frac{ax^2 + bxy + ay^2}{cx^2 + dxy + cy^2}$ .

2 ([Tuy23], 141., p. 29). So sánh: (a)  $\frac{201 - 200}{201 + 200} \text{ & } \frac{201^2 - 200^2}{201^2 + 200^2}$ . (b)  $\frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001} \text{ & } \frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$ .

3 (Mở rộng [Tuy23], 141a., p. 29). Biện luận theo các tham số  $a, b \in \mathbb{R}$  để so sánh  $A = \frac{a - b}{a + b} \text{ & } B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .

4 ([Tuy23], 142., p. 29). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ : (a)  $A = \frac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}$  không tối giản. (b)  $B = \frac{6n + 1}{8n + 1}$  tối giản. (c)  $C = \frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$  tối giản. (d) Có thể mở rộng từ  $\mathbb{N}$  lên  $\mathbb{Z}$  được không?

5 ([Tuy23], 143., p. 29). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a)  $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$ . (b)  $B = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1)$ .

Rút gọn phân thức:

6 ([Tuy23], 144., p. 29). (a)  $A = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$ . (b)  $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$ .

7 ([Tuy23], 145., p. 29). (a)  $A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2y^2 + 1}$ . (b)  $B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2y - x^2z + y^2z - y^3}$ .

8 ([Tuy23], 146., p. 29). (a)  $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$ . (b)  $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$ . (c)  $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$ .

9 ([Tuy23], 147., p. 29). (a)  $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$ . (b)  $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$ .

10 ([Tuy23], 148., p. 29). Cho  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

11 ([Tuy23], 149., p. 30). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x + y + z = 0$ . Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ . (b)  $B = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$ .

12 ([Tuy23], 150., p. 30). Cho  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$ .

13 ([Bin23], VD28, p. 18). Cho phân thức  $A = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)^2}$ . (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A.

14 ([Bin23], VD29, p. 19). Rút gọn phân thức  $A = \frac{(b - c)^3 9(c - a)^3 + (a - b)^3}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$ .

15 ([Bin23], VD30, p. 19). Chứng minh phân số  $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$  tối giản,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

16 ([Bin23], VD28, p. 19). (a) Chứng minh  $\sum_{i=0}^{31} x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^{31} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$ .

17 ([Bin23], 106., p. 20). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$ . (b)  $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$ .

Rút gọn phân thức:

18 ([Bin23], 107., p. 20). (a)  $A = \frac{1235 \cdot 2469 - 1234}{1234 \cdot 2469 + 1235}$ . (b)  $B = \frac{4002}{1000 \cdot 1002 - 999 \cdot 1001}$ .

19 ([Bin23], 108., p. 20). (a)  $\frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$ . (b)  $\frac{(x - y)^3 - 3xy(x + y) + y^3}{x - 6y}$ . (c)  $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$ .

20 ([Bin23], 109., p. 20).  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{(n + 1)!}{n!(n + 2)}$ . (b)  $\frac{n!}{(n + 1)! - n!}$ . (c)  $\frac{(n + 1)! - (n + 2)!}{(n + 1)! + (n + 2)!}$ .

21 ([Bin23], 110., p. 20). (a)  $\frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$ . (b)  $\frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$ . (c)  $\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - x)^2}$ .  
(d)  $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ .

22 ([Bin23], 111., p. 20). Chứng minh phân số tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{3n + 1}{5n + 2}$ . (b)  $\frac{12n + 1}{30n + 2}$ . (c)  $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ . (d)  $\frac{2n + 1}{2n^2 - 1}$ .

23 ([Bin23], 112., p. 20). Chứng minh phân số  $\frac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1}$  không tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

24 ([Bin23], 113., p. 20). Viết gọn biểu thức  $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)$  dưới dạng 1 phân thức.

25 ([Bin23], 114., p. 20). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \frac{(ax + by + cz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = a^2 + b^2 + c^2$ . Chứng minh  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

26 ([Bin23], 115., p. 20). Cho biết  $ax + by + cz = 0$ . Rút gọn  $A = \frac{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$ .

27 ([Bin23], 116., p. 20). Rút gọn  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}$  biết  $x + y + z = 0$ .

28 ([Bin23], 117., p. 21). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x - y}{x + y}$  biết  $x^2 - 2y^2 = xy, y \neq 0, x + y \neq 0$ .

29 ([Bin23], 118., p. 21). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$  biết  $9x^2 + 4y^2 = 20xy, 2y < 3x < 0$ .

30 ([Bin23], 119., p. 21). Cho  $x, y \in \mathbb{R}^*, 3x - y = 3z, 2x + y = 7z$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$ .

31 ([Bin23], 120., p. 21). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để phân thức có giá trị nguyên: (a)  $\frac{3}{2x - 1}$ . (b)  $\frac{5}{x^2 + 1}$ . (c)  $\frac{7}{x^2 - x + 1}$ . (d)  $\frac{x^2 - 59}{x + 8}$ . (e)  $\frac{x + 2}{x^2 + 4}$ . (f) Mở rộng.

32 ([Bin23], 121., p. 21). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  để phân thức  $\frac{10}{x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$ .

**33** ([Bin23], 122., p. 21). Chứng minh nếu 3 chữ số  $a, b, c \neq 0$  thỏa  $\overline{ab} : \overline{bc} = a : c$  thì  $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$ .

**34** ([Bin23], 123., p. 21). Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam 8A, 8B được thống kê ở bảng:

	Lớp 8A	Lớp 8B	Cả 2 lớp 8A, 8B
Nam	7.1	8.1	7.9
Nữ	7.6	9.0	
Cả lớp	7.4	8.4	

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh của cả 2 lớp 8A, 8B.

**35** ([Bin+21], VD5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau:  $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2}$   
 $\mathcal{E} \frac{a+b}{a-b}$  với  $a \neq b$   $\mathcal{E} a \neq 3b$ .

**36** ([Bin+21], VD5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức  $\frac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)}$   $\mathcal{E}$   $\frac{x+5}{4}$  trong các trường hợp biến  $x$  thuộc các tập hợp: (a)  $x \in \mathbb{N}$ . (b)  $x \in \mathbb{Z}$ . (c)  $x \in \mathbb{Q}$ .

**37** ([Bin+21], VD5.3, p. 39). So sánh  $A = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$  với  $B = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$ .

**38** ([Bin+21], VD5.4, p. 40). Chứng minh:  $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1+a^{2^i})$ , i.e.,  $1+a+a^2+\dots+a^{63} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{32})$ .

**39** ([Bin+21], VD5.5, p. 40). Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$ .

**40** ([Bin+21], VD5.6, p. 40). Rút gọn phân thức  $A = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$ .

**41** ([Bin+21], 5.1, p.. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức  $A$  trong các trường hợp: (a)  $\frac{A}{3x-2} = \frac{15x^2 + 10x}{9x^2 - 4}$ .  
(b)  $\frac{3x^2 - 5x - 2}{A} = \frac{x-2}{2x-3}$ . (c)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + 4x + 4}{A}$ . (d)  $\frac{2x+1}{x^3 + x^2 - x + 2} = \frac{A}{x^3 + 1}$ .

**42** ([Bin+21], 5.2, p.. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó  $\mathcal{E}$  có tử thức là đa thức  $B$  cho sau đây: (a)  $\frac{2x-5}{3x^2+4}$   $\mathcal{E} B = 2x^2 - 3x - 5$ . (b)  $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)}$   $\mathcal{E} B = x - 2$ .

**43** ([Bin+21], 5.3, p.. 41). Rút gọn biểu thức: (a)  $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$ . (b)  $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$ . (c)  $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$ .

**44** ([Bin+21], 5.4, p.. 41). Rút gọn: (a)  $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$ . (b)  $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$ . (c)  $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$ .

**45** ([Bin+21], 5.5, p.. 41). Rút gọn phân thức: (a)  $Q = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}$ . (b)  $R = \frac{3x^2 + 5xy - 2y^2}{3x^2 - 7xy + 2y^2}$ . (c)  $S = \frac{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}{x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12}$ .  
(d)  $T = \frac{x^6 - y^6}{x^6 + 2x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^6}$ .

**46** ([Bin+21], 5.6, p.p. 41-42). Rút gọn: (a)  $A = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^4 - a^2 + 4a - 4}$ . (b)  $B = \frac{a^3 - 3a + 2}{2a^3 - 7a^2 + 8a - 3}$ . (c)  $C = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca}$ .  
(d)  $D = \frac{a^3 - 7a + 6}{a^2(a+3)^3 - 4a(a+3)^3 + 4(a+3)^3}$ . (e)  $E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$ .

**47** ([Bin+21], 5.7, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{xy^2 - xz^2 - y^3 + yz^2}{x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)}$ . (b)  $B = \frac{x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$ .

**48** ([Bin+21], 5.8, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{(x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx}{9xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3}$ . (b)  $B = \frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$ .  
(c)  $C = \frac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}$ .

**49** ([Bin+21], 5.9, p.. 42). Rút gọn phân thức với  $n \in \mathbb{N}^*$ : (a)  $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$ . (b)  $\frac{n!}{n! + (n-1)!}$ . (c)  $\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)!}$ .

**50** ([Bin+21], 5.10, p.. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{3n+2}{4n+3}$ . (b)  $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$ . (c)  $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$ .

51 ([Bin+21], 5.11, p.. 42). Chứng minh phân số  $\frac{n^7 + 2n^2 + n + 2}{n^8 + n^2 + 2n + 2}$  không tối giản,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

52 ([Bin+21], 5.12, p.. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức:  $P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$ .

53 ([Bin+21], 5.13, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $\frac{|x-2| + |x-1| + x}{2x^2 - 7x + 3}$  với  $x < 1$ . (b)  $\frac{|x-4||x-5|}{x^3 - 9x^2 + 20x}$  với  $4 < x < 5$ .

54 ([Bin+21], 5.14, p.. 43). Rút gọn phân thức: (a)  $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) + 1}{x^2 + 7x + 11}$ . (b)  $U = \frac{x^3 - 53x + 88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + 16}$ .

55 ([Bin+21], 5.15, p.. 43). Cho  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$  &  $x, y, z \neq 0$ . Chứng minh:  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

56 ([Bin+21], 5.16, p.. 43). Cho  $ax + by + cz = 0$ . Rút gọn phân thức:  $V = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$ .

57 ([Bin+21], 5.17, p.. 43). Cho  $x + y + z = 0$ . Chứng minh:  $\frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = 3$ .

58 ([Bin+21], 5.18, p.. 43). Chứng minh:  $\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2zt + 2xy - t^2}{x + y - z - t} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - 2zt + 2xz - t^2}{x - y + z - t}$ .

59 ([Bin+21], 5.19., p. 43). Rút gọn:  $X = \frac{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4)(14^4 + 4)}{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4)(16^4 + 4)}$ .

## 2 Operations $\pm$ on Algebraic Fractions – Phép $\pm$ Các Phân Thức Đại Số

60 ([Tuy23], VD21, p. 30). Tính:  $A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ .

61 ([Tuy23], VD22, p. 31). Tính hợp lý: (a)  $A(x, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (b)  $A(x, 99)$ .

62 ([Tuy22], VD18, p. 41). Tính:  $A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$ .

63 ([Tuy23], 151., pp. 31–32). Tính: (a)  $\frac{x^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{(x^2 - y^2)(x+y)}$ . (b)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$ . (c) Mở rộng.

64 ([Tuy23], 152., p. 32). Tính: (a)  $A = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} + \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ . (b)  $B = \frac{yz}{(x+y)(y+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ .

65 ([Tuy23], 153., p. 32). (a) Tính  $A = \frac{a}{x^2 + ax} + \frac{a}{x^2 + 3ax + 2a^2} + \frac{a}{x^2 + 5ax + 6a^2} + \dots + \frac{a}{x^2 + 19ax + 90a^2} + \frac{1}{x + 10a}$ . (b) Mở rộng.

66 ([Tuy22], 162., p. 42). Tính: (a)  $\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$ . (b)  $\frac{1}{(y-z)(x^2 + xz - y^2 - yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2 + xy - z^2 - zx)} + \frac{1}{(x-y)(z^2 + yz - x^2 - xy)}$ .

67 ([Tuy23], 154., p. 32). Cho  $A = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{xy} + \frac{(x+1)(y+1)}{xyz} + \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyzt}$ . Chứng minh có thể viết  $A$  dưới dạng 1 phân thức có tử & mẫu đều là tích của 4 nhân tử.

68 ([Tuy22], 167., p. 43). Cho  $xy = a$ ,  $yz = b$ ,  $zx = c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ . Tính  $x^2 + y^2 + z^2$ .

69 ([Tuy23], 155., p. 32). Cho  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$ . Tính  $S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ .

70 ([Tuy23], 156., p. 32). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ,  $x + y + z = 0$ . Tính: (a)  $A = \frac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{y^2}{y^2 - z^2 - x^2} + \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2}$ . (b)  $B = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{1}{z^2 + x^2 - y^2}$ .

**71** ([Tuy23], 157., p. 32). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$ . Chứng minh trong 3 số  $x, y, z$  tồn tại 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.

**72** ([Tuy23], 159., p. 32). Cho  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$ . Tính  $AB$ .

**73** ([Tuy23], 159., p. 32). 1 tổ dự định sản xuất  $x$  sản phẩm trong 12 giờ. Nhưng thực tế trong 9 giờ tổ đã sản xuất vượt mức dự định là 3 sản phẩm. Viết biểu thức biểu diễn số sản phẩm đó tổ đó sản xuất vượt dự định trong mỗi giờ.

### 3 Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số

**74** ([Tuy23], VD23, p. 33). (a) Chứng minh  $A = \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{3}{3 \cdot 5}\right) \left(1 - \frac{3}{4 \cdot 6}\right) \cdots \left(1 - \frac{3}{n(n+2)}\right) > \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .  
(b) Mở rộng.

**75** ([Tuy23], VD24, p. 33). Cho  $A = \frac{x-y}{x+y}, B = \frac{y-z}{y+z}, C = \frac{z-x}{z+x}$ . Chứng minh  $(1+A)(1+B)(1+C) = (1-A)(1-B)(1-C)$ .

**76** ([Tuy23], 160., p. 34). Tính: (a)  $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2-4x-5}{x^2-10x+25}$ . (b)  $\frac{x(y^2-z)+y(x-xy)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} : \frac{xy^2-xz(2y-z)}{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$ .

**77** ([Tuy23], 161., p. 34). Tính: (a)  $A = \prod_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (b)  $B = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{17^4+4}$ . (c) Mở rộng.

**78** ([Tuy23], 162., p. 34). Chứng minh  $A = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 + \frac{4}{12}\right) \left(1 + \frac{4}{21}\right) \cdots \left(1 + \frac{4}{n(n+4)}\right) < 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**79** ([Tuy23], 163., p. 35). Cho  $A = \frac{x-y}{1+xy}, B = \frac{y-z}{1+yz}, C = \frac{z-x}{1+zx}$ . Chứng minh  $A+B+C = ABC$ .

**80** ([Tuy23], 164., p. 35). Cho  $a, b \in \mathbb{R}, ab = 1, a+b \neq 0$ . Tính  $A = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ .

**81** ([Tuy23], 165., p. 35). Cho  $A = \frac{4yz-x^2}{yz+2x^2}, B = \frac{4zx-y^2}{zx+2x^2}, C = \frac{4xy-z^2}{xy+2z^2}$ . Chứng minh nếu  $x+y+z=0$  thì  $x, y, z$  khác nhau đôi một thì  $ABC$  là 1 hằng số.

### 4 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

**82** ([Tuy23], VD25, p. 35). Cho  $A = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2-xy} + \frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2-xy}\right) : \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$ . (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tính giá trị của  $A$  với  $|2x-1|=1, |y+1|=\frac{1}{2}$ .

**83** ([Tuy23], 166., p. 36). Cho 3 phân thức  $A = \frac{x^2+x-2}{x^2-4}, B = \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}, C = \frac{x-y}{x^2+y^2+4x-2y+5}$ . Tìm các giá trị của  $x, y$  để: (a) Giá trị mỗi phân thức này được xác định. (b) Giá trị mỗi phân thức này bằng 0.

**84** ([Tuy23], 167., pp. 36–37). (a) Tìm GTLN của phân thức  $A = \frac{5}{x^2-6x+10}$ . (b) Tìm GTNN của phân thức  $B = \frac{-8}{x^2-2x+5}$ . (c) Mở rộng.

**85** ([Tuy23], 168., p. 37). Cho biểu thức  $A = \frac{1}{x+y+z} \cdot \frac{1}{xy+yz+zx} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$ . Chứng minh  $A > 0, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$ .

**86** ([Tuy23], 169., p. 37). Cho biểu thức  $A = \frac{x+\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}, x+y \leq 50$  để  $A = 8$ .

**87** ([Tuy23], 170., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \frac{x-y-z}{x} = \frac{y-z-x}{y} = \frac{z-x-y}{z}$ . Tính

$$A = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{z}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right).$$

**88** ([Tuy23], 171., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \neq -1$ . Chứng minh giá trị của biểu thức  $A = \frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1} + \frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1} + \frac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}$  không phụ thuộc vào, i.e., độc lập với 3 biến  $x, y, z$ .

89 ([Tuy23], 172., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x + y + z \neq 0$  thỏa:

$$\begin{cases} x = by + cz, \\ y = cz + ax, \\ z = ax + by. \end{cases}$$

Chứng minh đẳng thức  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$ .

90 ([Tuy23], 173., p. 37). Cho  $\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = a \in \mathbb{R}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$  theo  $a$ .

## 5 Miscellaneous

91 ([Tuy23], VD26, p. 38). Cho  $A = \left( \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Với  $x > 0$  thì  $A$  không nhận các giá trị nào? (c) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

92 ([Tuy23], 174., p. 38). Cho biểu thức  $A = \frac{|x+1| + 2x}{3x^2 - 2x - 1}$ . (a) Rút gọn  $A$  rồi tính giá trị của  $A$  với  $x = -2, x = \frac{3}{4}$ .

93 ([Tuy23], 175., p. 38). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{R}$  để  $\frac{x^2 + x + 4}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ .

94 ([Tuy22], 186., p. 51). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x \neq y$ . Tính: (a)  $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|z|}{z} + \frac{|xyz|}{xyz}$ . (b)  $B = \frac{xy}{|xy|} + \frac{x-y}{|x-y|} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right)$ .

95 ([Tuy23], 176., p. 39). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$  thỏa  $x + y + z = xyz, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ . Tính  $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ .

96 ([Tuy23], 177., p. 39). Cho  $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$  với  $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ . Tính  $A = \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2}$ .

97 ([Tuy23], 178., p. 39). Cho biểu thức  $A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ . Chứng minh: (a) Nếu  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác thì  $A > 1$ . (b) Nếu  $A = 1$  thì 2 trong 3 phân thức đã cho của biểu thức  $A$  bằng 1 & phân thức còn lại bằng  $-1$ .

98 ([Tuy23], 179., p. 39). Cho biểu thức  $A = 1 + \frac{x+3}{x^2 + 5x + 6} : \left( \frac{8x^2}{4x^3 - 8x^2} - \frac{3x}{3x^2 - 12} - \frac{1}{x+2} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $A = 0, A = 1$ . (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $A < 0, A > 0$ .

99 ([Tuy23], 180., p. 39). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2x - x^2}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

## Tài liệu

- [Bìn+21] Vũ Hữu Bình, Trần Hữu Nam, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2021, p. 264.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 8 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 212.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 326.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.