

Problem: Trigonometric Equation – Bài Tập: Phương Trình Lượng Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 17 tháng 9 năm 2023

Mục lục

1	Giá Trị Lượng Giác của Góc Lượng Giác	1
2	Trigonometrical Formulas – Công Thức Lượng Giác	2
3	Trigonometrical Function – Hàm Số Lượng Giác	3
4	Trigonometrical Equation – Phương Trình Lượng Giác	4
5	Trigonometrical Identity & Inequality – Đẳng Thức & Bất Đẳng Thức Lượng Giác	5
6	Miscellaneous	5
	Tài liệu	6

1 Giá Trị Lượng Giác của Góc Lượng Giác

Bài toán 1 ([Hùn+23], VD1, p. 8). Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_3$ nội tiếp đường tròn tâm O (4 đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các góc lượng giác (OA_0, OA_i) , (OA_i, OA_j) , $i, j = 0, 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Bài toán 2 ([Hùn+23], VD2, p. 9). Tính giá trị biểu thức: (a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$. (b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$. (c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$. (d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \tan \frac{3\pi}{8} \tan \frac{5\pi}{8}$.

Bài toán 3 ([Hùn+23], VD3, p. 9). Chứng minh đẳng thức (giả sử các đẳng thức sau đều có nghĩa): (a) $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$. (b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$. (c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cos^2 y}$. (d) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan \left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Bài toán 4 ([Hùn+23], VD4, p. 10). Đơn giản biểu thức (giả sử các đẳng thức sau đều có nghĩa): (a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$. (b) $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$. (c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$.

Bài toán 5 ([Hùn+23], VD5, p. 11). Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào x (i.e., độc lập với biến x) (giả sử các biểu thức đều có nghĩa): (a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$. (b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$. (c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$.

Bài toán 6 ([Hùn+23], 1.1., p. 12). Tìm số đo a° của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq a \leq 360$, biết 1 góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là: (a) 395° . (b) -1052° . (c) $(20\pi)^\circ$.

Bài toán 7 ([Hùn+23], 1.2., p. 12). Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị biểu thức: (a) $A = 5 \sin^2 \frac{151\pi}{6} + 3 \cos^2 \frac{85\pi}{3} - 4 \tan^2 \frac{193\pi}{6} + 7 \cot^2 \frac{37\pi}{3}$. (b) $B = \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10}$. (c) $C = \tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{2\pi}{9} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{7\pi}{18}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

Bài toán 8 ([Hùn+23], 1.3., p. 12). *Rút gọn biểu thức:* (a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$. (b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7x}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$. (c) $C = 2\sin(90^\circ + x) + \sin(900^\circ - x) + \sin(270^\circ + x) - \cos(90^\circ - x)$. (d) $D = \frac{\sin(5\pi + x)\cos\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)\tan(10\pi + x)}{\cos(5\pi - x)\sin\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)\tan(7\pi - x)}$.

Bài toán 9 ([Hùn+23], 1.4., p. 12). *Chứng minh đẳng thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):* (a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$. (b) $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$. (c) $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x)$. (d) $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b}$.

Bài toán 10 ([Hùn+23], 1.5., p. 12). *Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào α :* (a) $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$. (b) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$. (c) $\cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4\cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6(90^\circ - \alpha)(\tan^2 \alpha - 1)^3$. (d) $(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2)$.

Bài toán 11 ([Hùn+23], 1.6., p. 13). *Biết $\tan x + \cot x = m$. Tính:* (a) $\tan^2 x + \cot^2 x$. (b) $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$. (c) *Chứng minh $|m| \geq 2$.* (d) *Biện luận theo tham số m để tìm x thỏa mãn phương trình $\tan x + \cot x = m$.*

Bài toán 12 ([Hùn+23], 1.7., p. 13). (a) *Cho $\cos a = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\cot a + 3\tan a}{2\cot a + \tan a}$.* (b) *Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Tính $B = \frac{3\cot a + 2\tan a + 1}{\cot a + \tan a}$.* (c) *Cho $\tan a = 2$. Tính $C = \frac{2\sin a + 3\cos a}{\sin a + \cos a}$.* (d) *Cho $\cot a = 5$. Tính $D = 2\cos^2 a + 5\sin a \cos a + 1$.*

2 Trigonometrical Formulas – Công Thức Lượng Giác

Bài toán 13 ([Hùn+23], VD1, p. 14). *Tính giá trị biểu thức lượng giác:* (a) $A = \sin 22^\circ 33' \cos 202^\circ 30'$. (b) $B = 4\sin^4 \frac{\pi}{16} + 2\cos \frac{\pi}{8}$.

(c) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$. (d) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$.

Bài toán 14 ([Hùn+23], VD2, p. 14). *Tính giá trị biểu thức lượng giác:* (a) $A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$. (b) $B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$. (c) $C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$. (d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$.

Bài toán 15 ([Hùn+23], VD3, p. 15). *Tính giá trị biểu thức lượng giác:* (a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$. (b) $B = \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ$. (c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$. (d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$.

Bài toán 16 ([Hùn+23], VD4, p. 16). *Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ & $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha + \beta)$.*

Bài toán 17 ([Hùn+23], VD5, p. 17). *Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.*

Bài toán 18 ([Hùn+23], VD6, p. 17). *Chứng minh:* (a) $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 4\sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$. (b) $\sum_{i=1}^n 3^{i-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^i} = \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3\sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right)$.

Bài toán 19 (Công thức nhân 3). *Chứng minh:* (a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$. (b) $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

Bài toán 20 ([Hùn+23], 2.1., p. 18). *Tính giá trị của biểu thức:* (a) $A = \cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + \cos 74^\circ \cos 47^\circ$. (b) $B = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.

Bài toán 21 ([Hùn+23], 2.2., p. 18). *Tính giá trị của biểu thức:* (a) $A = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Bài toán 22 ([Hùn+23], 2.3., p. 18). *Tính giá trị của biểu thức:* (a) $A = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$. (b) $B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Bài toán 23 ([Hùn+23], 2.4., p. 18). *Tính giá trị của biểu thức:* (a) $A = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$. (b) $B = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}$. (c) $C = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}$.

Bài toán 24 ([Hùn+23], 2.5., p. 18, Đề nghị Olympic 30.4 2006). *Chứng minh $\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}$.*

Bài toán 25 ([Hùn+23], 2.6., p. 18). Cho α, β thỏa mãn $\sin \alpha + \sin \beta = m$ & $\cos \alpha + \cos \beta = n$, $mn \neq 0$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$.

Bài toán 26 ([Hùn+23], 2.7., p. 18). Tính $A = \prod_{i=1}^{45} (1 + \tan i^\circ) = (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 45^\circ)$.

Bài toán 27 ([Hùn+23], 2.8., p. 18). Tính $A = \prod_{i=1}^{999} \cos i\alpha = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha \cdots \cos 999\alpha$ với $\alpha = \frac{2\pi}{999}$.

Bài toán 28 ([Hùn+23], 2.9., p. 18). Chứng minh $\sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} \cos \frac{7\pi}{18} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Bài toán 29 ([Hùn+23], 2.10., p. 18). Chứng minh: (a) $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$. (b) $\prod_{i=1}^n \cos \frac{x}{2^i} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$.

Bài toán 30 ([Hùn+23], 2.11., p. 18). Chứng minh: (a) $\frac{1}{\sin x} = \cot \frac{x}{2} - \cot x$. (b) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin 2^{i-1}\alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha} = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot 2^{n-1}\alpha$ với $2^{n-1}\alpha \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 31 ([Hùn+23], 2.12., p. 18). Chứng minh: (a) $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$. (b) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \tan \frac{a}{2^i} = \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2} + \frac{1}{2^2} \tan \frac{a}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{a}{2^n} - \cot a$.

Bài toán 32 ([Hùn+23], 2.13., p. 18). Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sin i^\circ \sin(i+1)^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin(n-1)^\circ \sin n^\circ} = \cot 1^\circ - \cot n^\circ$.

Bài toán 33 ([Hùn+23], 2.14., p. 18). Chứng minh $\sum_{i=1}^{89} 2i \sin 2i^\circ = 2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \cdots + 178 \sin 178^\circ = 90 \cot 1^\circ$.

3 Trigonometrical Function – Hàm Số Lượng Giác

Bài toán 34 ([Hùn+23], VD1, p. 21). Vẽ đồ thị mỗi hàm số sau trong 1 chu kỳ: (a) $y = 2 \cos 2\theta$. (b) $y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$.

Bài toán 35 ([Hùn+23], VD2, p. 21). 1 bánh xe được gắn cố định trên tường sao cho 1 điểm A trên bánh xe cách mặt đất 1 khoảng cách d cm theo công thức $d = 100 - 60 \cos \frac{4\pi t}{3}$ với t là thời gian được tính bằng giây. (a) Tính khoảng cách từ điểm A so với mặt đất khi $t = 0$. (b) Tính thời gian để bánh xe quay 1 vòng. (c) Tìm khoảng cách lớn nhất & nhỏ nhất của A so với mặt đất. (d) Vẽ đồ thị hàm số d theo t. (e) Trong vòng quay đầu tiên, tìm khoảng thời gian mà điểm A cách mặt đất 1 khoảng nhỏ hơn 70 cm.

Bài toán 36 ([Hùn+23], VD3, p. 22). Tìm TXĐ của hàm số $y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{4 + \cos x}}$.

Bài toán 37 ([Hùn+23], VD4, p. 22). Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$.

Bài toán 38 ([Hùn+23], VD5, p. 22). Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

Bài toán 39 ([Hùn+23], VD6, p. 22). GTLN, GTNN của hàm số $y = (3 - 5 \sin x)^{2018}$ là M, m. Tính M + m.

Bài toán 40 ([Hùn+23], VD7, p. 22). Trong tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Bài toán 41 ([Hùn+23], 3.1., p. 23). Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cos x}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 42 ([Hùn+23], 3.2., p. 23). Tìm m để hàm số $y = \frac{3x}{\sqrt{2 \sin^2 x - m \sin x + 1}}$ xác định trên \mathbb{R} .

Bài toán 43 ([Hùn+23], 3.3., p. 23). Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \sin^{2007} x + \cos nx$, với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 44 ([Hùn+23], 3.4., p. 23). Tìm GTLN của hàm số $y = 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12}\right) + 4$.

Bài toán 45 ([Hùn+23], 3.5., p. 23). Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ là đoạn $[a, b]$. Tính tổng $S = a + b$.

Bài toán 46 ([Hùn+23], 3.6., p. 23). Tìm GTLN của hàm số $y = \cos^2 x + \sin x + 1$.

Bài toán 47 ([Hùn+23], 3.7., p. 23). Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $y = \cos 2x + \cos x$. Tính M + m.

Bài toán 48 ([Hùn+23], 3.8., p. 23). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 2$.

Bài toán 49 ([Hùn+23], 3.9., p. 23). Tìm GTLN của hàm số $y = 2 \cos x + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Bài toán 50 ([Hùn+23], 3.10., p. 23). Tìm GTLN của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x}$.

Bài toán 51 ([Hùn+23], 3.11., p. 23). Cho hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x}$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$. Tìm GTNN của hàm số.

Bài toán 52 ([Hùn+23], 3.12., p. 23). Vẽ đồ thị hàm số $y = \sin |x|$.

Bài toán 53 ([Hùn+23], 3.13., p. 23). Chiều cao của thủy triều tại Warnung vào ngày 1.1 so với mực nước biển trung bình là $h(t)$ m được đưa ra gần đúng theo quy tắc $h(t) = 4 \sin \frac{\pi t}{6}$ với t là thời gian (tính bằng giờ) sau nửa đêm. (a) Vẽ đồ thị hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 24$. (b) Thủy triều dâng cao khi nào? (c) Tính độ cao cao nhất của thủy triều. (d) Tính độ cao của thủy triều lúc 8:00. (e) Tàu thuyền chỉ được rời bến cảng khi thủy triều cao hơn mực nước biển trung bình ít nhất 1 m. Khi nào tàu thuyền có thể rời bến cảng vào ngày 1.1?

4 Trigonometrical Equation – Phương Trình Lượng Giác

Bài toán 54 ([Hùn+23], VD1, p. 25). Người ta quan sát thấy Mặt Trời mọc đầu tiên là tại vùng núi đảo ở Maine, Mỹ. Thời điểm Mặt Trời mọc được biểu diễn theo công thức $t(m) = 1.665 \sin \frac{\pi}{6}(m + 3) + 5.485$ với t là thời điểm (được tính từ nửa đêm) \mathcal{E} m là tháng (tính từ tháng 1). Khi nào Mặt Trời mọc lúc 7:00?

Bài toán 55 ([Hùn+23], VD2, p. 25). Tìm góc $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right\}$ để phương trình $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - \alpha) = \cos x$.

Bài toán 56 ([Hùn+23], VD3, p. 25). Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$ với m là tham số. (a) Giải phương trình khi $m = \frac{3}{2}$. (b) Tìm m để phương trình trên có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Bài toán 57 ([Hùn+23], VD4, p. 26, IMO1963). Giải phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

Bài toán 58 ([Hùn+23], VD5, p. 27). Giải phương trình $\sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) + \tan x + 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}$.

Bài toán 59 ([Hùn+23], 4.1., p. 27). Phương trình $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0, 4035\pi]$.

Bài toán 60 ([Hùn+23], 4.2., p. 27). Giải phương trình $(\sin x + \cos x)^2 + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \sin x(2\sqrt{3} \sin x + 4 - \sqrt{3})$.

Bài toán 61 ([Hùn+23], 4.3., p. 27). Giải phương trình $(\sqrt{3} + 1) \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \sin x \cos x + \sin x - \cos x = \sqrt{3}$.

Bài toán 62 ([Hùn+23], 4.4., p. 27). Giải phương trình $2 \sin^3 x - \cos 2x + \sin 2x - 2 \sin x + 2 \cos x - 1 = 0$.

Bài toán 63 ([Hùn+23], 4.5., p. 27). Giải phương trình $\frac{\sin^{10} 2x + \cos^{10} 2x}{\sin^2 2x - \cos^2 2x} = -\frac{29 \cos^3 4x}{16}$.

Bài toán 64 ([Hùn+23], 4.6., p. 27). Giải phương trình $\frac{8}{\sin^3 2x} + \tan x = \cot^3 x$.

Bài toán 65 ([Hùn+23], 4.7., p. 27). Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x - 2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0$.

Bài toán 66 ([Hùn+23], 4.9., p. 27). Giải phương trình $3 \tan 2x - \frac{3}{\cos 2x} - 2 \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x} + 2 \cos 2x = 0$.

Bài toán 67 ([Hùn+23], 4.10., p. 27). Giải phương trình $3 \tan 2x - 2 \sin \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) + 2 \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\cos 2x}$.

Bài toán 68 ([Hùn+23], 4.11., p. 27). Giải phương trình $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = \cos^4 4x$.

Bài toán 69 ([Hùn+23], 4.12., p. 27). Giải phương trình $3 + \cot^2 x = 3 \left(\frac{\cos 2x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\cos x} \right)$.

Bài toán 70 ([Hùn+23], 4.13., p. 27). Giải phương trình $\frac{(\cos x - 1)(2 \cos x - 1)}{\sin x} = 1 - \sin 2x + 2 \cos^2 x$.

Bài toán 71 ([Hùn+23], 4.14., p. 27). Giải phương trình $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

Bài toán 72 ([Hùn+23], 4.15., p. 27). Giải phương trình $\frac{4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x - 1 - 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \cos 3x + 1} = 0$.

Bài toán 73 ([Hùn+23], 4.16., p. 28). Cho phương trình $\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0$. Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(2018\pi, 2019\pi)$?

Bài toán 74 ([Hùn+23], 4.17., p. 28). Giải phương trình $\sin^2 3x \cos 2x + \sin^2 x = 0$.

Bài toán 75 ([Hùn+23], 4.18., p. 28). Giải phương trình $2\cos^3 x - \sin 2x \sin x = -2\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{2019\pi}{4}\right)$.

Bài toán 76 ([Hùn+23], 4.19., p. 28). Phương trình $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sin 7x$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

5 Trigonometrical Identity & Inequality – Đẳng Thức & Bất Đẳng Thức Lượng Giác

Cho $\triangle ABC$, đặt $a := BC, b := CA, c := AB, p, R, r$ lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài toán 77 ([Hùn+23], p. 28, 1 số đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác). Chứng minh: (a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. (b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$. (c) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$. (d) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. (e) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$. (f) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$. (g) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$.

Bài toán 78 ([Hùn+23], VD1, p. 29). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$. (b) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$. (c) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2p^2 - 24Rr - 6r^2$.

Bài toán 79 ([Hùn+23], VD2, p. 29). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R}$.

Bài toán 80 ([Hùn+23], VD3, p. 30). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \frac{(\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2 + (\sin A - \sin B)^2}{4}$.

Bài toán 81 ([Hùn+23], VD4, p. 30). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: $\frac{r}{R} + \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2}$.

Bài toán 82 ([Hùn+23], VD5, p. 30, Bất đẳng thức Gerretsen trong tam giác). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. (b) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$.

Bài toán 83 ([Hùn+23], 5.1., p. 31). Cho đa giác đều 31-cạnh $A_0 A_1 \dots A_{30}$. Chứng minh $\frac{1}{A_0 A_1} = \frac{1}{A_0 A_2} + \frac{1}{A_0 A_4} + \frac{1}{A_0 A_8} + \frac{1}{A_0 A_{15}}$.

Bài toán 84 ([Hùn+23], 5.2., p. 31). Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (I) là 1 đường tròn bất kỳ. Từ 3 điểm A, B, C theo thứ tự kẻ 3 tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (I) . Chứng minh: (a) Nếu $(I) \cap (O) = \emptyset$ thì aAA', bBB', cCC' là 3 cạnh của 1 tam giác. (b) Nếu $(I) \cap (O) \neq \emptyset$ thì cụ thể là: (I) giao cung BC không chứa A thì $aAA' \geq bBB' + cCC'$, (I) giao cung CA không chứa B thì $bBB' \geq cCC' + aAA'$, (I) giao cung AB không chứa C thì $cCC' \geq aAA' + bBB'$. Dấu bằng ở 3 bất đẳng thức xảy ra khi & chỉ khi đường tròn (I) tiếp xúc (trong hoặc ngoài) với đường tròn (O) tại các điểm thuộc các cung tương ứng.

Bài toán 85 ([Hùn+23], 5.3., p. 31). Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp & có tâm ngoại tiếp là O ta ký hiệu các góc $\widehat{A_i O A_{i+1}} = \theta_i, i = \overline{1, n}, n+1 \equiv 1$, & các góc đa giác lần lượt là A_1, A_2, \dots, A_n . Chứng minh $\sum_{i=1}^n \cos \frac{A_i}{2} \geq \sum_{i=1}^n \sin \frac{\theta_i}{2}$, i.e., $\cos \frac{A_1}{2} + \cos \frac{A_2}{2} + \dots + \cos \frac{A_n}{2} \geq \sin \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} + \dots + \sin \frac{\theta_n}{2}$.

6 Miscellaneous

Bài toán 86 ([Hùn+23], VD1, p. 32). Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2$.

Bài toán 87 ([Hùn+23], VD2, p. 32). *Tìm GTNN của biểu thức $A = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \tan^2 b + 2$.*

Bài toán 88 ([Hùn+23], VD3, p. 33). *Cho ΔABC có $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ & $4 \sin B + 3 \cos A = 1$. Tìm số đo của \widehat{C} .*

Bài toán 89 ([Hùn+23], VD4, p. 33). *Miền R chứa tất cả các điểm (x, y) sao cho $x^2 + y^2 \leq 100$ & $\sin(x + y) \geq 0$. Tính diện tích miền R .*

Bài toán 90 ([Hùn+23], VD5, p. 33). *Chứng minh $\sum_{i=1}^n |\sin a_i| + |\cos \sum_{i=1}^n a_i| \geq 1$, i.e., $|\sin a_1| + |\sin a_2| + \dots + |\sin a_n| + |\cos(a_1 + a_2 + \dots + a_n)| \geq 1$.*

Bài toán 91 ([Hùn+23], 6.1., p. 33). *Chứng minh $(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) > (\sqrt{2} \sin \alpha - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha)$, $\forall \alpha \in [0, \pi]$.*

Bài toán 92 ([Hùn+23], 6.2., p. 33). *Chứng minh $\cos x(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2}) \leq \sqrt{3}$.*

Bài toán 93 ([Hùn+23], 6.3., p. 33). *Tìm GTLN của biểu thức $A = 2 \sin x + \sin 2x$.*

Bài toán 94 ([Hùn+23], 6.4., p. 34). *Cho ΔABC . Tìm GTLN của biểu thức $A = \sin \frac{A}{2} \sqrt{\sin \frac{B}{2}} \sin \frac{C}{2}$.*

Bài toán 95 ([Hùn+23], 6.5., p. 34). *Chứng minh $\forall \Delta ABC$: (a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. (b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$. (c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.*

Bài toán 96 ([Hùn+23], 6.6., p. 34). *Chứng minh $\forall \Delta ABC$ không vuông: (a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. (b) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$.*

Bài toán 97 ([Hùn+23], 6.7., p. 34). *Chứng minh $\forall \Delta ABC$: (a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. (b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.*

Bài toán 98 ([Hùn+23], 6.8., p. 34). *Chứng minh $\forall \Delta ABC$: (a) $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.*

(b) $\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Bài toán 99 ([Hùn+23], 6.9., p. 34). *Cho ΔABC thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B - C) + \cos A \cos \frac{B - C}{2} = 0$. Chứng minh $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.*

Bài toán 100 ([Hùn+23], 6.10., p. 34). *Chứng minh $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.*

Bài toán 101 ([Hùn+23], 6.11., p. 34). *Cho ΔABC . Chứng minh $\sin^3 A \cos(B - C) + \sin^3 B \cos(C - A) + \sin^3 C \cos(A - B) = 3 \sin A \sin B \sin C$.*

Bài toán 102 ([Hùn+23], 6.12., p. 34). *Chứng minh ΔABC đều $\Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - 2 = \frac{1}{4} \cos \frac{A - B}{2} \cos \frac{B - C}{2} \cos \frac{C - A}{2}$.*

Bài toán 103 ([Hùn+23], 6.13., p. 34). *Cho $\cos x + \cos y + \cos z = 0$ & $\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$. Chứng minh $\cos 2x \cos 2y \cos 2z \leq 0$.*

Bài toán 104 ([Hùn+23], 6.14., p. 34). *Cho $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, $\sin x + \sin y + \sin z = 0$. Chứng minh: (a) $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$. (b) $\sin(x + y + z) = \frac{1}{3}(\sin 3x + \sin 3y + \sin 3z)$, $\cos(x + y + z) = \frac{1}{3}(\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z)$.*

Bài toán 105 ([Hùn+23], 6.15., p. 34). *Cho $\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x + y + z)} = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = a$. Chứng minh $\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x) = a$.*

Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.