Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions
Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 8 năm 2023

Mục lục

1 Tính Đơn Điệu của Hàm Số

1 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 5). *Chứng minh hàm số* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *nghịch biến trên đoạn* $[0,1]$.

2 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=x+\frac{4}{x}$.

3 ([Quỳ+22], H1, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-3$.

4 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x-3$.

5 ([Quỳ+22], H2, p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=2x^5+5x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{3}$.

6 ([Quỳ+22], 1., p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a)* $y=2x^3+3x^2+1$. *(b)* $y=x^3-2x^2+x+1$. *(c)* $y=x+\frac{3}{x}$. *(d)* $y=x-\frac{2}{x}$. *(e)* $y=x^4-2x^2-5$. *(f)* $y=\sqrt{4-x^2}$.

7 ([Quỳ+22], 2., p. 7). *Chứng minh: (a) Hàm số* $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ *đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số* $y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}$ *nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.*

8 ([Quỳ+22], 3., p. 8). *Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên* $\mathbb{R}$*: (a)* $f(x)=x^3-6x^2+17x+4$. *(b)* $f(x)=x^3+x-\cos x-4$.

9 ([Quỳ+22], 4., p. 8). *Với giá trị nào của* a *hàm số* $y=ax-x^3$ *nghịch biến trên* $\mathbb{R}$*?*

10 ([Quỳ+22], 5., p. 8). *Tìm các giá trị của tham số* a *để hàm số* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+3$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

11 ([Quỳ+22], 6., p. 8). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a)* $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-5$. *(b)* $y=-\frac{4}{3}x^3+6x^2-9x-\frac{2}{3}$. *(c)* $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. *(d)* $y=\sqrt{2x-x^2}$. *(e)* $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. *(f)* $y=\dfrac{1}{x+1}-2x$.

12 ([Quỳ+22], 7., p. 8). *Chứng minh hàm số* $f(x)=\cos 2x-2x+3$ *nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

13 ([Quỳ+22], 8., pp. 8–9). *Chứng minh bất đẳng thức: (a)* $\sin x<x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$*;* $\sin x>x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x<0$. *(b)* $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. *(c)* $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$*;* $\sin x<x-\frac{x^3}{6}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x<0$.

14 ([Quỳ+22], 9., p. 9). *Chứng minh:* $\sin x+\tan x>2x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

15 ([Quỳ+22], 10., p. 9). *Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức* $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ *($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0,+\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0,+\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?*

2 Cực Trị của Hàm Số

16 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

17 ([Quỳ+22], H1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.

18 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = |x|$.

19 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

20 ([Quỳ+22], H2, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = 2\sin 2x - 3$.

21 ([Quỳ+22], 11., pp. 16–17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. *(b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$. *(c)* $f(x) = x + \frac{1}{x}$. *(d)* $f(x) = |x|(x+2)$. *(e)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2$. *(f)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

22 ([Quỳ+22], 12., p. 17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $y = x\sqrt{4 - x^2}$. *(b)* $y = \sqrt{8 - x^2}$. *(c)* $y = x - \sin 2x + 2$. *(d)* $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

23 ([Quỳ+22], 13., p. 17). *Tìm 4 hệ số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$, & đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.*

24 ([Quỳ+22], 14., p. 17). *Xác định 3 hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ & đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1, 0)$.*

25 ([Quỳ+22], 15., p. 17). *Chứng minh với mọi giá trị của m, hàm số* $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ *luôn có cực đại & cực tiểu.*

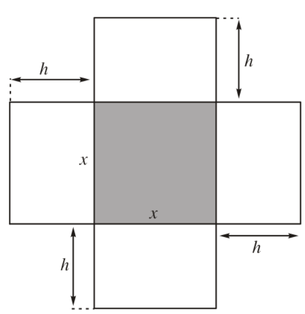
3 GTLN & GTNN của Hàm Số

26 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 18). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

27 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x^3 - 3x + 3$ *trên đoạn* $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

28 ([Quỳ+22], H, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}$ *trên khoảng* $(1, +\infty)$.

29 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 20). *1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:*



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, chiều cao là h cm, & có thể tích là 500 cm^3. (a) Biểu diễn h theo x. (b) Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x. (c) Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

30 ([Quỳ+22], Ví dụ 4, p. 21). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x^3 - 3x + 3$ *trên đoạn* $[0, 2]$.

31 ([Quỳ+22], 16., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

32 ([Quỳ+22], 17., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $f(x) = x^2 + 2x - 5$ *trên đoạn* $[-2, 3]$. *(b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ *trên đoạn* $[-4, 0]$. *(c)* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *trên khoảng* $(0, +\infty)$. *(d)* $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ *trên đoạn* $[2, 4]$. *(e)* $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ *trên đoạn* $[0, 1]$. *(f)* $f(x) = x - \frac{1}{x}$ *trên nửa khoảng* $(0, 2]$.

33 ([Quỳ+22], 18., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. *(b)* $\cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

34 ([Quỳ+22], 19., p. 22). *Cho* ΔABC *đều cạnh* a. *Dựng 1 hình chữ nhật* $MNPQ$ *có cạnh* MN *nằm trên cạnh* BC, *2 đỉnh* P, Q *theo thứ tự nằm trên 2 cạnh* AC, AB *của tam giác. Xác định vị trí của điểm* M *sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất & tìm* GTLN *đó.*

35 ([Quỳ+22], 20., p. 22). *Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có* n *con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng* $P(n) = 480 - 20n$ g. *Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?*

36 ([Quỳ+22], 21., p. 23). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. *(b)* $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$. *(c)* $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$. *(d)* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

37 ([Quỳ+22], 22., p. 23). *Tìm giá trị của* m *để hàm số* $f(x) = \dfrac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ *có cực đại & cực tiểu.*

38 ([Quỳ+22], 23., p. 23). *Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức* $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, *trong đó* x *là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (*x *được tính bằng* mg*). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.*

39 ([Quỳ+22], 24., p. 23). *Cho parabol* $(\mathcal{P}):\ y = x^2$ *& điểm* $A(-3, 0)$. *Xác định điểm* M *thuộc parabol* $(\mathcal{P})$ *sao cho khoảng cách* AM *là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.*

40 ([Quỳ+22], 25., p. 23). *1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là* 300 km. *Vận tốc dòng nước là* 6 km/h. *Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là* v km/h *thì năng lượng tiêu hao của cá trong* t *giờ được cho bởi công thức* $E(v) = cv^3t$, *trong đó* c *là 1 hằng số,* E *được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.*

41 ([Quỳ+22], 26., pp. 23–24). *Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ* t *là* $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \ldots, 25$. *Nếu coi* f *là hàm số xác định trên đoạn* $[0, 25]$ *thì* $f'(t)$ *được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm* t. *(a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn* 600. *(d) Xét chiều biến thiên của hàm số* f *trên đoạn* $[0, 25]$.

42 ([Quỳ+22], 27., p. 24). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ *trên đoạn* $[-3, 1]$. *(b)* $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$. *(c)* $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. *(d)* $f(x) = x - \sin 2x$ *trên đoạn* $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

43 ([Quỳ+22], 28., p. 24). *Trong các hình chữ nhật có chu vi là* 40 cm, *xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.*

4 Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ

44 ([Quỳ+22], Ví dụ, p. 26). *Cho đường cong* $(\mathcal{C})$ *có phương trình:* $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ *& điểm* $I(2, -1)$. *(a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\vec{OI}$ *& viết phương trình của đường cong* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *(b) Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của đường cong* $(\mathcal{C})$.

45 ([Quỳ+22], H, p. 26). *(a) Tìm tọa độ đỉnh* I *của parabol* $(\mathcal{P})$ *có phương trình là* $y = 2x^2 - 4x$. *(b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overline{OI}$ *& viết phương trình của parabol* $(\mathcal{P})$ *đối với hệ tọa độ* IXY.

46 ([Quỳ+22], 29., p. 27). *Xác định đỉnh* I *của mỗi parabol* $(\mathcal{P})$ *sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overline{OI}$ *& viết phương trình của parabol* $(\mathcal{P})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *(a)* $y = 2x^2 - 3x + 1$. *(b)* $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$. *(c)* $y = x - 4x^2$. *(d)* $y = 2x^2 - 5$.

47 ([Quỳ+22], 30., p. 27). *Cho hàm số* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. *(a) Xác điểm* I *thuộc đồ thị* $(\mathcal{C})$ *của hàm số đã cho biết hoành độ của điểm* I *là nghiệm của phương trình* $f''(x) = 0$. *(b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overline{OI}$ *& viết phương trình của đường cong* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của đường cong* $(\mathcal{C})$. *(c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong* $(\mathcal{C})$ *tại điểm* I *đối với hệ tọa độ* Oxy. *Chứng minh trên khoảng* $(-\infty, 1)$ *đường cong* $(\mathcal{C})$ *nằm phía dưới tiếp tuyến tại* I *của* $(\mathcal{C})$ *& trên khoảng* $(1, +\infty)$ *đường cong* $(\mathcal{C})$ *nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

Hint. Trên khoảng $(-\infty, 1)$, đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

48 ([Quỳ+22], 31., p. 27). *Cho đường cong* $(\mathcal{C})$ *có phương trình* $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ *& điểm* $I(-2, 2)$. *Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\vec{OI}$ *& viết phương trình của đường cong* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của* $(\mathcal{C})$.

49 ([Quỳ+22], 32., p. 28). *Xác định tâm đối xứng của đồ thị mỗi hàm số sau: (a)* $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$. *(b)* $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.

50 ([Quỳ+22], 33., p. 28). *Cho đường cong* $(\mathcal{C})$ *có phương trình* $y = ax + b + \dfrac{c}{x - x_0}$, *trong đó* $a \neq 0$, $c \neq 0$ *& điểm* I *có tọa độ* (x_0, y_0) *thỏa mãn* $y_0 = ax_0 + b$. *Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\vec{OI}$ *& phương trình của* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của đường cong* $(\mathcal{C})$.

5 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

51 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 31). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

52 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 31). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

53 ([Quỳ+22], H1, p. 32). *Tiệm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{5-3x^2}{1-x^2}$.

54 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 33). *Tìm tiệm cận xiêng của đồ thị hàm số* $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$.

55 ([Quỳ+22], H1, p. 33). *Chứng minh đường thẳng* $y = 2x+1$ *là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $y = 2x+1+\frac{1}{x-2}$.

56 ([Quỳ+22], Ví dụ 4, p. 34). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

57 ([Quỳ+22], H3, p. 35). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $f(x) = \frac{2x^2-3x-1}{x-2}$.

58 ([Quỳ+22], 34., p. 35). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau: (a)* $y = \frac{x-2}{3x+2}$. *(b)* $y = \frac{-2x-2}{x+3}$. *(c)* $y = x+2-\frac{1}{x-3}$. *(d)* $y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$. *(e)* $y = \frac{x+2}{x^2-1}$. *(f)* $y = \frac{x}{x^3+1}$.

59 ([Quỳ+22], 35., p. 35). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau: (a)* $y = \frac{2x-1}{x^2}+x-3$. *(b)* $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$. *(c)* $y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$. *(d)* $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$.

60 ([Quỳ+22], 36., p. 36). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau: (a)* $y = \sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = 2x+\sqrt{x^2-1}$. *(c)* $y = x+\sqrt{x^2+1}$. *(d)* $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

61 ([Quỳ+22], 37., p. 36). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị mỗi hàm số sau: (a)* $y = x+\sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = \sqrt{x^2-4x+3}$. *(c)* $y = \sqrt{x^2+4}$. *(d)* $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

62 ([Quỳ+22], 38., p. 36). *(a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị* $(\mathcal{C})$ *của 3 hàm số* $y = f_1(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-3}$, $y = f_2(x) = \frac{x^2+x-4}{x+2}$, $y = f_3(x) = \frac{x^2-8x+19}{x-5}$. *(b) Xác định giao điểm* I *của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\vec{OI}$. *(c) Viết phương trình của đường cong* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của đường cong* $(\mathcal{C})$.

Tài liệu

[Quỳ+22] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng. *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 231.