Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 12 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.tex.
- *Problem & Solution: Derivative – Bài Tập & Lời Giải: Đạo Hàm.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.tex.

Mục lục

1 Basic

Resources – Tài nguyên.

1. [Thá+25]. Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1. Cánh Diều.*

2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số $\mathbf{x}(t)$ theo thời gian thì vận tốc $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm t.

1 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức)**.** *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x;n,\mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^n a_ix^i = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \tag{P}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa, với $\deg P(x;n,\mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$ & vector chứa các hệ số của đa thức $P(x;n,\mathbf{a})$ là $\mathbf{a} \coloneqq (a_0,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\star$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2 (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). *Tính đạo hàm của hàm số phân thức*

$$Q(x;m,n,\mathbf{a},\mathbf{b}) \coloneqq \frac{\sum_{i=0}^m a_ix^i}{\sum_{i=0}^n b_ix^i} = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0}, \tag{Q}$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.

3 (Đạo hàm của căn thức). *Tính đạo hàm của hàm số căn thức $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, với $n \in \mathbb{N}^\star$, tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.*

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức $P(x;n,\mathbf{a}) \coloneqq \sum_{i=0}^n a_ix^i$, hàm phân thức $Q(x;m,n,\mathbf{a},\mathbf{b}) \coloneqq \frac{\sum_{i=0}^m a_ix^i}{\sum_{i=0}^n b_ix^i}$, hàm căn thức $R_n(x) \coloneqq \sqrt[n]{x}$.

4 ([Quỳ+20], 1., p. 49). *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0: (a) $y = 2x+1, x_0 = 2$. (b) $y = x^2+3x, x_0 = 1$. (c) $y = ax+b$ tại $x = x_0$. (d) $y = ax^2+bx+c$ tại $x = x_0$.*

5 ([Quỳ+20], 2., p. 49). *Cho parabol $y = x^2$ & 2 điểm $A(2,4), B(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$. (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A. (c) Mở rộng cho parabol $y = ax^2+bx+c$ & 2 điểm $A(x_0,y_0), B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.*

6 ([Quỳ+20], 3., p. 49). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.*

7 ([Quỳ+20], 4., p. 49). *1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động $S = \frac{gt^2}{2}$ với $g \approx 9.8\mathrm{m/s^2}$ & t (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t+\Delta t$ với độ chính xác 0.001, biết $t = 5$ & $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$. (b) Vận tốc tại thời điểm $t = 5$.*

8 ([Quỳ+20], 5., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ trên $(0,\infty)$.*

9 ([Quỳ+20], 6., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số $y = x|x|$ tại điểm $x_0 = 0$ (nếu có).*

10 ([Quỳ+20], 7., p. 49). *Tính $f'(x)$ với*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x < 1,\\ x^2+2 & \text{if } 1 \le x \le 2,\\ x^3-x^2-8x+10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \tag{1}$$

3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

11 ([Quỳ+20], 8., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = x^4-3x^3+5x^2-7x+9$. (b) $y = (x-1)^5(x+1)^7$. (c) $y = \frac{x^2+1}{x^4+1}$. (d) $y = (x+1)^3(x+2)^4(x+3)^5$.*

12 ([Quỳ+20], 9., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. (b) $y = \sin x^2 + x\cos x^2$. (c) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. (d) $y = (x^3+x^2+x+1)e^{x^2+x}$.*

13 ([Quỳ+20], 10., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. (b) $y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.*

14 ([Quỳ+20], 11., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = \frac{1}{2}$. (b) $y = \sqrt{x+2}$ biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.*

15 ([Quỳ+20], 12., p. 50). *Chứng minh hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.*

16 ([Quỳ+20], 13., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0,-1)$.*

17 ([Quỳ+20], 14., p. 50). *1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?*

4 Các định lý giá trị trung bình

18 ([Quỳ+20], 15., p. 50). *Cho $a,b,c \in \mathbb{R}, 2a+3b+6c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2+bx+c = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0,1)$.*

19 ([Quỳ+20], 16., p. 50). *Cho $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$. Đếm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.*

20 ([Quỳ+20], 17., p. 51). *Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$ có đạo hàm trên (a,b). Giả sử phương trình $f(x)=0$ có đúng 2 nghiệm x_1,x_2 với $x_1\neq x_2$. Chứng minh phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm, hơn nữa biểu thức $f'(x)$ phải đổi dấu.*

21 ([Quỳ+20], 18., p. 51). *Chứng minh* $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$.

22 ([Quỳ+20], 19., p. 51). *Cho $0<a<b$ & f là 1 hàm liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm trên (a,b). Chứng minh tồn tại $c\in(a,b)$ thỏa* $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(c)-f'(c)$.

23 ([Quỳ+20], 20., p. 51). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$. *(b)* $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$. *(c)* $\lim_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

24 ([Quỳ+20], 21., p. 51). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *(b)* $\lim_{x\to0}(1+x)^{\cot x}$.

5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

6 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

25 ([Quỳ+20], 22., p. 51). *Tính vi phân của hàm số: (a)* $y=\sqrt{x^2+a^2}$. *(b)* $y=x\sin x$. *(c)* $y=x^2+\sin^2x$. *(d)* $y=e^x\ln x$.

26 ([Quỳ+20], 23., p. 51). *Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a)* $\dfrac{1}{0.9995}$. *(b)* $\ln 1.001$. *(c)* $\cos 61^\circ$.

27 ([Quỳ+20], 24., p. 51). *Chứng minh nếu f,g là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì fg cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức* $(f(x)g(x))''=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+g''(x)$.

28 ([Quỳ+20], 25., p. 51). *Tính đạo hàm: (a) $f(x)=x^4-\cos2x$, tính $f^{(4)}(x)$. (b) $f(x)=\cos^2x$, tính $f^{(5)}(x)$. (c) $f(x)=(x+10)^6$, tính $f^{(n)}(x)$.*

29 ([Quỳ+20], 26., p. 52). *Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t)=8t+3t^2$, với $t>0$, t được tính bằng giây* s *& $v(t)$ tính bằng* m/s. *Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc $t=4$. (b) Lúc vận tốc chuyển động bằng 11.*

30 ([Quỳ+20], 27., p. 52). *Chứng minh $\forall n\ge1$: (a) Nếu $f(x)=\frac{1}{x}$ thì* $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^nn!}{x^{n+1}}$. *(b) Nếu $f(x)=\cos x$ thì* $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

31 ([Quỳ+20], 28., p. 52). *Cho $f(x)=\sqrt{x}$. Tính $f^{(n)}(x)$.*

7 Miscellaneous

32 ([Quỳ+20], 29., p. 52). *Tính $f'(x)$ với*

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{if } x<1,\\ x^2+1 & \text{if } 1\le x\le2,\\ x^3-x^2-4x+10 & \text{if } x>2.\end{cases}\tag{2}$$

33 ([Quỳ+20], 30., p. 52). *Tính $f'(x)+f(x)+2$ nếu $f(x)=x\sin2x$.*

34 ([Quỳ+20], 31., p. 52). *Chứng minh nếu $f(x)=3e^{x^2}$ thì* $f'(x)-2xf(x)+\frac{1}{3}f(0)-f'(0)=1$.

35 ([Quỳ+20], 32., p. 52). *Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=4x-x^2$ tại các điểm mà đường cong cắt trục hoành.*

36 ([Quỳ+20], 33., p. 52). *Cho đa thức bậc 4 $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(x)\ge0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh* $P(x)+P'(x)+P''(x)+P^{(3)}(x)+P^{(4)}(x)\ge0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

37 ([Quỳ+20], 34., p. 53). *Áp dụng định lý Rolle cho hàm số $f(x)=e^xP(x)$ để chứng minh nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm thực phân biệt thì đa thức $P(x)+P'(x)$ cũng có n nghiệm thực phân biệt.*

38 ([Quỳ+20], 35., p. 53). *Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0,1]$ & $f'(0)f'(1)<0$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ thỏa $f'(c)=0$.*

39 ([Quỳ+20], 36., p. 53). *Giả sử $f(x)$ là 1 hàm số lẻ & khả vi trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $f'(x)$ là 1 hàm số chẵn.*

40 ([Quỳ+20], 37., p. 53). *Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số* $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

41 ([Quỳ+20], 38., p. 53). *Tính giới hạn: (a)* $\lim_{x\to0}\cos^{\frac{1}{2x^2}}x$. *(b)* $\lim_{x\to0}\cos^{\frac{5}{x}}3x$.

42 ([Quỳ+20], 39., p. 53). *Chứng minh: (a)* (Phương trình dao động điều hòa) *Nếu $y=A\sin(\omega t+\varphi)+B\cos(\omega t+\varphi)$ với A,B,ω,φ là 4 hằng số thì $y''+\omega^2y=0$. (b) Nếu $y=\sqrt{2x-x^2}$ thì $y^3y''+1=0$.*

43 ([Quỳ+20], 40., p. 53, công thức Newton–Leibnitz). *Cho f,g là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp n, chứng minh công thức:* $(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^nC_n^kf^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$.

44 ([Quỳ+20], 41., p. 53). *Cho hàm số* $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. *Tính* $f^{(100)}(0),f^{(101)}(0)$.

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.

[Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 127.