Problem: Trigonometry In Triangles
Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set $\mathbb{Q}$ of trigonometrys [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

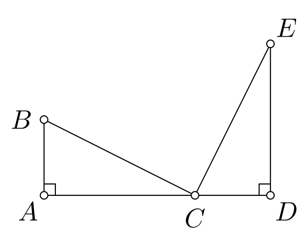
Ký hiệu. ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$.
Tính chất. $\boxed{1}$ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận & đảo*: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bìn23], Ví dụ 1, p. 84). *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng* 12 cm*, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD =$* 15 cm.

Bài toán 2 ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 85). *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD =$* 10 cm*, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

Bài toán 3 ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm*, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm.

Bài toán 4 ([Bìn23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*



Bài toán 5 ([Bìn23], 2., p. 86). *Cho ΔABC cân có $AB = AC =$* 9 cm*, $BC =$* 12 cm*, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

Bài toán 6 ([Bìn23], 3., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

Bài toán 7 ([Bìn23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm.

Bài toán 8 ([Bìn23], 5., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH.*

Bài toán 9 ([Bìn23], 6., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH.*

Bài toán 10 ([Bìn23], 7., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB.*

Bài toán 11 ([Bìn23], 8., p. 86). *Cho ΔABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

Bài toán 12 ([Bìn23], 9., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC.*

Bài toán 13 ([Bìn23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm^2 *&* 96 cm^2. *Tính độ dài cạnh huyền.*

Bài toán 14 ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho ΔABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh $AH = 3DH$.*

Bài toán 15 ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng $5:4$ & cạnh huyền dài* 82 cm.

Bài toán 16 ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với $1:3$. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

Bài toán 17 ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh $HM = 2$.*

Bài toán 18 ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm, *đáy lớn dài* 50 cm.

Bài toán 19 ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

Bài toán 20 ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.*

Bài toán 21 ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của ΔAEF đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

Bài toán 22 ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a)* $3, 4, 5$. *(b)* $12, 15, 20$.

Bài toán 23 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c. Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để ΔABC vuông.*

Bài toán 24 ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh ΔABC là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.*

Bài toán 25 ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các ΔABC vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.*

Bài toán 26 ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

Bài toán 27 ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.*

Bài toán 28 ([Bìn23], 24., p. 88). *ΔABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BD ở I. Biết $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích ΔABC.*

Bài toán 29 ([Bìn23], 25., p. 88). *ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính BC. (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính AB, AC.*

Bài toán 30 ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính $\widehat{BIM}$. (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của ΔABC tỷ lệ với 3 số nào?*

Bài toán 31 ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$*?*

Bài toán 32 ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*,* $BC = 3\sqrt{5}$ cm*. Hình vuông* $ADEF$ *cạnh* 2 cm *có* $D \in AB$*,* $E \in BC$*,* $F \in CA$*. Tính* AB*,* AC*.*

Bài toán 33 ([Bìn23], 29., p. 88). ΔABC *cân tại* A*, gọi* I *là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm*,* $IB = 3$ cm*. Tính* AB*.*

Bài toán 34 ([Bìn23], 30., p. 88). ΔABC *cân tại* A*, đường cao* AD*, trực tâm* H*. Tính độ dài* AD*, biết* $AH = 14$ cm*,* $BH = CH = 30$ cm*.*

Bài toán 35 ([Bìn23], 31., p. 88). ΔABC *có* $BC = 40$ cm*, đường phân giác* AD *dài* 45 cm*, đường cao* AH *dài* 36 cm*. Tính* BD*,* CD*.*

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 36 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 89). *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

Bài toán 37 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 90). *Xét* ΔABC *vuông tại* A*,* $AB < AC$*,* $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$*, đường trung tuyến* AM*, đường cao* AH*,* $MA = MB = MC = a$*. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*. (b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$*. (c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$*.*

Bài toán 38 ([Bìn23], 32., p. 91). *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* 72° *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm*. (b) Dựng góc* 20° *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm*, cạnh bên* 6 cm*.*

Bài toán 39 ([Bìn23], 33., p. 91). ΔABC *có đường trung tuyến* AM *bằng cạnh* AC*. Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$*.*

Bài toán 40 ([Bìn23], 34., p. 91). *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$*. Tính* $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$*.*

Bài toán 41 ([Bìn23], 35., p. 91). *Cho hình vuông* $ABCDN$*.* M*,* N *lần lượt là trung điểm của* BC*,* CD*. Tính* $\cos\widehat{MAN}$*.*

Bài toán 42 ([Bìn23], 36., p. 91). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, đường cao* AH*. Gọi* D *là điểm đối xứng với* A *qua* B*. Gọi* E *là điểm thuộc tia đối của tia* AH *sao cho* $HE = 2HA$*. Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$*.*

Bài toán 43 ([Bìn23], 37., p. 91). *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

Bài toán 44 ([Bìn23], 38., p. 91). *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

Bài toán 45 ([Bìn23], 39., p. 91). *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$*,* $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

Bài toán 46 ([Bìn23], 40., p. 91). *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

Bài toán 47 ([Bìn23], Ví dụ 6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của ΔABC ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao BH, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

Bài toán 48 (Mở rộng [Bìn23], Ví dụ 6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, $\forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi ΔABC. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát*:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall\Delta ABC.}$$

Bài toán 49 ([Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** *ΔABC có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của ΔABC. (b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.*

Bài toán 50 (Tổng quát [Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** *Nếu ΔABC có $\widehat{A}$ tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng $2, 3, 4$.*

Bài toán 51 ([Bìn23], 41., p. 94)**.** *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh* 40 cm *của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng $40^\circ, 55^\circ$. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng $60^\circ, 80^\circ$.*

Bài toán 52 ([Bìn23], 42., p. 94)**.** *ΔABC có $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm. Tính AB, AC.*

Bài toán 53 ([Bìn23], 43., p. 94)**.** *ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính BC.*

Bài toán 54 ([Bìn23], 44., p. 94)**.** *Cho 1 hình vuông có cạnh* 1 dm*. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

Bài toán 55 ([Bìn23], 45., p. 94)**.** *ΔABC đều có cạnh* 60 cm*. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài 3 cạnh của ΔDEF.*

Bài toán 56 ([Bìn23], 46., p. 94)**.** *Cho ΔABC có $AB = c$, $CA = b$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N. Tính $\dfrac{BN}{CN}$.*

Bài toán 57 ([Bìn23], 47., p. 94)**.** *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

Bài toán 58 ([Bìn23], 48., p. 94)**.** *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau ở O & không vuông góc với nhau. Gọi H & K lần lượt là trực tâm của $\Delta AOB, \Delta COD$. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của $\Delta BOC, \Delta AOD$. (a) Gọi E là trọng tâm của ΔAOB, F là giao điểm của AH & DK. Chứng minh $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.*

Bài toán 59 ([Bìn23], 49., p. 94)**.** *Cho ΔABC nhọn, 3 điểm D, E, F lần lượt thuộc 3 cạnh AB, BC, CA. Chứng minh trong 3 $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$, tồn tại 1 tam giác có diện tích $\le \frac{1}{4}$ diện tích ΔABC. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích ΔABC?*

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.