

Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.tex.
- *Problem & Solution: Function & Graph – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số & Đồ Thị*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.tex.

Mục lục

1	General Function – Đại Cương Về Hàm Số	1
2	2nd-Order Function – Hàm Số Bậc 2	2
3	Solvable Equations via Quadratic Equations – Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2	3
4	Ứng Dụng của Hàm Số Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức & Tìm GTLN, GTNN	4
5	Miscellaneous	4
Tài liệu		4
Resources – Tài nguyên.		

1. [Hải+25]. PHAN VIỆT HẢI, TRẦN QUANG HÙNG, NINH VĂN THU, PHẠM ĐÌNH TÙNG. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10. Tập 2*.

1 General Function – Đại Cương Về Hàm Số

Abbreviations – Viết tắt

1. TXD: Tập xác định.

- 1 ([Hải+25], VD1, p. 5). Công thức tính chu vi & diện tích hình tròn $P = 2\pi r, S = \pi r^2$ có là hàm số không?
- 2 ([Hải+25], VD2, p. 6). Tìm TXD của hàm số $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
3. Biện luận theo 4 tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ TXD của hàm số $f(x) = \sqrt{ax + \sqrt{bx + c + d}}$.
- 4 ([Hải+25], VD3, p. 6). Chứng minh hàm số $f(x) = x^2$ đồng biến trên $[0, +\infty)$ & nghịch biến trên $(-\infty, 0]$.
5. Biện luận theo 3 tham số $a, b, c \in \mathbb{R}$ các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
- 6 ([Hải+25], VD4, p. 7). Chứng minh hàm $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ là hàm chẵn trên TXD của nó.
- 7 ([Hải+25], VD5, p. 7). Chứng minh hàm $f(x) = (e^x + e^{-x}) \cos x$ là hàm chẵn trên TXD của nó.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Hải+25], VD6, p. 7). Chứng minh hàm $f(x) = \cos x$ có chu kỳ cơ sở là 2π .

Tồn tại các hàm tuần hoàn nhưng không có chu kỳ cơ sở.

9 ([Hải+25], VD7, p. 7). Tìm chu kỳ cơ sở của hàm Dirichlet

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (1)$$

10 ([Hải+25], VD8, p. 7). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$. Chứng minh hàm số $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$ tuần hoàn trên \mathbb{R} khi & chỉ khi $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

11 ([Hải+25], VD9, p. 7). Chứng minh hàm số $f(x) = \cos x + \cos x\sqrt{2}$ không tuần hoàn trên \mathbb{R} .

12 ([Hải+25], VD10, p. 8). Cho 2 hàm số $f(x) = x^2 + 5, g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Tính $f(g(x))$.

13 ([Hải+25], 17.1., p. 8). Tìm TXD của hàm số: $f(x) = \frac{|x+1|}{(x-3)\sqrt{2x-1}}, g(x) = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}, h(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$.

14 ([Hải+25], 17.2., p. 8). 2 hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x}, g(x) = 1$ có bằng nhau không?

15 ([Hải+25], 17.3., p. 8). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f_n(x)$ với $f_1(x) := f(x), f_n(x) := f(f_{n-1}(x))$.

16 ([Hải+25], 17.4., p. 8). Cho $f(x)$ là 1 hàm bất kỳ với TXD \mathbb{R} . Chứng minh $f(x)$ luôn biểu diễn được 1 cách duy nhất dưới dạng tổng của 1 hàm số chẵn & 1 hàm số lẻ.

17 ([Hải+25], 17.5., p. 8). Cho $f(x)$ là 1 hàm tuần hoàn bất kỳ với TXD \mathbb{R} & chu kỳ cơ sở là T . Tìm chu kỳ cơ sở của hàm số $y(x) = f(ax+b), a, b \in \mathbb{R}, a > 0$.

18 ([Hải+25], 17.6., p. 8). Cho $f(x)$ là 1 hàm bất kỳ với TXD D . Giả sử tồn tại $a \in \mathbb{R}^*$ thỏa $f(x+a) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$. Chứng minh $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

19 ([Hải+25], 17.7., p. 8). Cho $a \in \mathbb{R}^*, f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f(x)^2}, \forall x > 0$. Chứng minh $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

20 ([Hải+25], 17.8., p. 8). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} , thỏa $f(x+3) \leq f(x)+3, f(x+2) \geq f(x)+2, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh $g(x) := f(x) - x$ là hàm tuần hoàn.

2 2nd-Order Function – Hàm Số Bậc 2

[1] Định nghĩa. Hàm số bậc 2 là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$: 3 hệ số, có TXD $D = \mathbb{R}$. [2] Bảng biến thiên của hàm số bậc 2: Khi $a > 0, x: -\infty \rightarrow -\frac{b}{2a} \rightarrow +\infty, y: +\infty \searrow -\frac{\Delta}{4a} \nearrow +\infty$. Khi $a < 0, x: -\infty \rightarrow -\frac{b}{2a} \rightarrow +\infty, y: -\infty \nearrow -\frac{\Delta}{4a} \searrow -\infty$. [3] Tính chất của đồ thị của hàm số bậc 2: (i) có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. (ii) Quay bề lõm lên trên khi $a > 0$, quay bề lõm xuống dưới khi $a < 0$. (iii) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ đi qua đỉnh I & song song với trục tung Oy . [4] GTLN, GTNN.

21 ([Hải+25], VD1, p. 10). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{N}^*$ để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4, 2018)$.

22 ([Hải+25], VD2, p. 11). Cho parabol (P) đi qua $A(-1, 4), B(3, 4)$. Tìm phương trình trục đối xứng của (P) .

23 ([Hải+25], VD3, p. 11). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 5x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[-2, 2]$.

24 ([Hải+25], VD4, p. 11). Cho 2 parabol có phương trình $y = x^2 + x + 1, y = 2x^2 - x - 2$. Biết 2 parabol cắt nhau tại 2 điểm A, B với $x_A < x_B$. Tính AB .

25 ([Hải+25], VD5, p. 11). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ trong nửa khoảng $[-10, -4]$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại 2 điểm phân biệt nằm về cùng 1 phía đối với trục tung.

26 ([Hải+25], VD6, p. 12). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

27 ([Hải+25], VD7, p. 13). Biết $S = (a, b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt. Tìm $a + b$.

28 ([Hải+25], VD8, p. 13). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $f(x) = x^2 + (2m-1)x + m^2$ luôn nhận giá trị dương.

29 ([Hải+25], VD9, p. 13). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $f(x) = (m-1)x^2 + 2x + 1$ luôn nhận giá trị âm.

30 ([Hải+25], VD10, p. 14). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+1)x + m+1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

31 ([Hải+25], VD11, p. 14). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $\frac{(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4m+1}{2x^2+1} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

32 ([Hải+25], VD12, p. 14). Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0. \end{cases}$$

33 ([Hải+25], 18.1., p. 15). Gọi M là điểm cố định mà parabol $(P_m) : y = x^2 + 3mx + 6m + 1$ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$. Tính tổng khoảng cách từ M đến 2 trục tọa độ.

34 ([Hải+25], 18.2., p. 15). Cho parabol $(P) : y = x^2 - 2(m-1)x - 2$ với tham số $m \in \mathbb{R}$. Tìm quỹ tích đỉnh của (P) khi m thay đổi.

35 ([Hải+25], 18.3., p. 15). Cho parabol $(P) : y = x^2 - mx$ và đường thẳng $(d) : y = (m+2)x + 1$ với tham số $m \in \mathbb{R}$. Khi $(P), (d)$ cắt nhau tại 2 điểm $M \neq N$, tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN .

36 ([Hải+25], 18.4., p. 15). 1 chiếc ăng-ten chảo parabol có chiều cao $h = 0.5$ m và đường kính miệng $d = 4$ m. Mặt cắt qua trục là 1 parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.

37 ([Hải+25], 18.5., p. 15). Khi 1 quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo của quả bóng là 1 cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth với t là thời gian, tính bằng giây, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao, tính bằng mét, của quả bóng. Giả thiết quả bóng được đá lên từ độ cao 1.2 m. Sau đó 1 s, nó đạt độ cao 8.5 m và 2 s sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6 m. Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên?

38 ([Hải+25], 18.6., p. 15). Cho parabol $(P) : y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ và đường thẳng $(d) : y = mx + m^2$, m là tham số. Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$.

39 ([Hải+25], 18.7., p. 15). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{R}$ để GTNN của hàm số $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0, 1]$ là 1.

40 ([Hải+25], 18.8., p. 16). Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$. Đặt $m := \min_{x \in [-1, 1]} f(x)$, $M := \max_{x \in [-1, 1]} f(x)$, S là tập hợp tất cả các giá trị $m \in \mathbb{R}$ để $M - m = 8$. Tính tổng bình phương của các phần tử thuộc S .

41 ([Hải+25], 18.9., p. 16). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ thuộc $[1, 2018]$ để bất phương trình $x^2 + 2x|x+2| - 2 \leq m$ thỏa mãn $\forall x \in [-4, 1]$.

42 ([Hải+25], 18.10., p. 16). Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $|x|\sqrt{x^2+4}|x|+4 = m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng (a, b) . Tính $a + b$.

43 ([Hải+25], 18.11., p. 16). Cho hàm số $f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1}$. Tìm tất cả $m \in \mathbb{R}$ để TXĐ của $f(x)$ là \mathbb{R} .

44 ([Hải+25], 18.12., p. 16). Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m+3}$ có TXĐ là \mathbb{R} .

45 ([Hải+25], 18.13., p. 16). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để bất phương trình $\frac{(m-3)x^2 - 2(m-1)x + 4m-1}{3x^2+1} \leq -1$ vô nghiệm.

46 ([Hải+25], 18.14., p. 16). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$: (a) $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$. (b) $\frac{-x^2 + 8x - 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} > 0$.

3 Solvable Equations via Quadratic Equations – Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

47 ([Hải+25], VD2, p. 19). Giải và biện luận phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$.

48 ([Hải+25], VD3, p. 19). Giải và biện luận phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + 2 = 0$.

49 ([Hải+25], VD4, p. 19). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + 2mx + m(m-1) = 0$ có: (a) 2 nghiệm trái dấu. (b) 2 nghiệm cùng dấu.

50 ([Hải+25], VD5, p. 19). Giả sử phương trình bậc 2 $x^2 - Sx + P = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Biểu diễn biểu thức qua hệ số S, P : (a) $x_1^2 + x_2^2$. (b) $x_1^3 + x_2^3$. (c) $S_n(x_1, x_2) := x_1^n + x_2^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

51 ([Hải+25], VD6, p. 19). Giải phương trình trùng phương $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

52 ([Hải+25], VD7, p. 20). Giải và biện luận phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + (m-1)^2 = 0$.

53 ([Hải+25], 19.1., p. 20). *Giải & biện luận phương trình: (a) $mx^2 + 3x - 1 = 0$. (b) $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. (c) $mx^2 + 2(m - 1)x + m + 1 = 0$. (d) $x^2 + mx + 2 = 0$.*

54 ([Hải+25], 19.2., p. 20). *Cho phương trình $x^2 + mx - 8 = 0$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa: (a) $x_1^2 + x_2^2$ đạt GTNN. (b) $(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt GTLN.*

55 ([Hải+25], 19.3., p. 20). *Biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$ số nghiệm của phương trình trùng phương: (a) $mx^4 - 2x^2 + 1 = 0$. (b) $x^4 - 2x^2 + m = 0$.*

56 ([Hải+25], 19.4., p. 20). *Giải & biện luận phương trình: (a) $mx^4 - 2x^2 + 1 = 0$. (b) $x^4 - 2x^2 + m = 0$.*

57 ([Hải+25], 19.5., p. 21). *Giải & biện luận phương trình: (a) $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$. (b) $(m - 3)x^4 - 2(m - 1)x^2 + m = 0$. (c) $x^4 - 2(m - 4)x^2 + m^2 - 8 = 0$.*

58 ([Hải+25], 19.6., p. 21). *Giải phương trình: (a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 3$. (b) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$.*

4 Ứng Dụng của Hàm Số Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức & Tìm GTLN, GTNN

5 Miscellaneous

Tài liệu

[Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.