

Problem: Trigonometry In Triangles

Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 14 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Trigonometry In Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

- *Problem & Solution: Trigonometry In Triangles – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.tex.

Mục lục

1	1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2	Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	4
3	1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông	6
4	Application of Trigonometrical Functions of Acute Angle – Ứng Dụng Của Tỷ Số Lượng Giác Của Góc Nhọn	8
5	Miscellaneous	8
	Tài liệu	9

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

$\triangle ABC$ vuông tại A : $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, $b' := CH$, $c' := BH$, $h := AH$. [1] $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. [2] Định lý Pythagore thuận & đảo: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. [3] $h^2 = b'c'$. [4] $ah = bc = 2S_{ABC}$. [5] $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

1 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H . Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$. (c) Tính AD, CD .

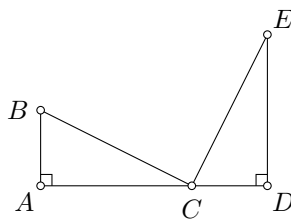
2 ([Tuy23], 1., p. 105). Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.

3 ([Tuy23], 2., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , đường phân giác AD . Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD .

4 ([Tuy23], 3., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G . Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC .

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

- 5 ([Tuy23], 4., p. 105). Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a . Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.
- 6 ([Tuy23], 5., p. 105). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC . Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c . (b) Chứng minh $\frac{BI}{CK} = \frac{c^3}{b^3}$.
- 7 ([Tuy23], 6., p. 105). Cho $\triangle ABC$, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{3}$.
- 8 ([Tuy23], 7., p. 105). Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E . Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$.
- 9 ([Tuy23], 8., p. 105). Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c . Dựng đoạn thẳng x sao cho $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.
- 10 ([Tuy23], 9., p. 105). Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d .
- 11 ([Tuy23], 10., p. 106). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.
- 12 ([Bin23], VD1, p. 84). Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.
- 13 ([Bin23], VD2, p. 85). Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.
- 14 ([Bin23], VD3, p. 85). Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.
- 15 ([Bin23], 1., p. 86). Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\triangle ABC = \triangle DCE$:



- 16 ([Bin23], 2., p. 86). Cho $\triangle ABC$ cân có $AB = AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm, đường cao AH , I là hình chiếu của H trên AC . (a) Tính độ dài CI . (b) Kẻ đường cao BK của $\triangle ABC$. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C .
- 17 ([Bin23], 3., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.
- 18 ([Bin23], 4., p. 86). Tính cạnh đáy BC của $\triangle ABC$ cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.
- 19 ([Bin23], 5., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác AD , đường cao AH . Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH .
- 20 ([Bin23], 6., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH .
- 21 ([Bin23], 7., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của \widehat{HAC} cắt HC ở D . Gọi K là hình chiếu của D trên AC . Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB .
- 22 ([Bin23], 8., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC .
- 23 ([Bin23], 9., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC .
- 24 ([Bin23], 10., p. 86). Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng 54 cm^2 & 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh huyền.
- 25 ([Bin23], 11., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là hình chiếu của C trên BM , H là hình chiếu của D trên AC . Chứng minh $AH = 3DH$.
- 26 ([Bin23], 12., pp. 86–87). (a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k . Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng $5 : 4$ & cạnh huyền dài 82 cm.

- 27 ([Bin23], 13., p. 87). Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 1 : 3. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?
- 28 ([Bin23], 14., p. 87). Cho $\triangle ABC$ có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh $HM = 2$.
- 29 ([Bin23], 15., p. 87). 1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài 14 cm, đáy lớn dài 50 cm.
- 30 ([Bin23], 16., p. 87). 1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.
- 31 ([Bin23], 17., p. 87). Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh a , vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I . Chứng minh $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.
- 32 ([Bin23], 18., p. 87). Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1 dm. Tính cạnh của $\triangle AEF$ đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC .
- 33 ([Bin23], 19., p. 87). Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) 3, 4, 5. (b) 12, 15, 20.
- 34 (Mở rộng [Bin23], 19., p. 87). Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c . Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để $\triangle ABC$ vuông.
- 35 ([Bin23], 20., p. 87). Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.
- 36 ([Bin23], 21., p. 87). Xét các $\triangle ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Tìm GTLN của: (a) DE . (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.
- 37 ([Bin23], 22., pp. 87–88). Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.
- 38 ([Bin23], 23., p. 88). Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$.
- 39 ([Bin23], 24., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của \hat{A} cắt BD ở I . Biết $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích $\triangle ABC$.
- 40 ([Bin23], 25., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính BC . (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính AB, AC .
- 41 ([Bin23], 26., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC . (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính \widehat{BIM} . (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của $\triangle ABC$ tỷ lệ với 3 số nào?
- 42 ([Bin23], 27., p. 88). 1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) Độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: 17, 13, 35, 41, 22?
- 43 ([Bin23], 28., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại $A, BC = 3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông $ADEF$ cạnh 2 cm có $D \in AB, E \in BC, F \in CA$. Tính AB, AC .
- 44 ([Bin23], 29., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính AB .
- 45 ([Bin23], 30., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AD , trục tâm H . Tính độ dài AD , biết $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.
- 46 ([Bin23], 31., p. 88). $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính BD, CD .
- 47 ([Bin+23], VD1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .
- 48 (Mở rộng [Bin+23], VD1, p. 5). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH .
- 49 ([Bin+23], VD2, p. 6). Cho hình thang $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{B} = 60^\circ, CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.
- 50 ([Bin+23], VD3, p. 7). Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\triangle AMB, \triangle ABC, \triangle ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

- 51 ([Bin+23], 1.1., p. 7). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC . Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.
- 52 ([Bin+23], 1.2., p. 7). Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.
- 53 ([Bin+23], 1.3., p. 8). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E , cắt cạnh AB tại F . Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF .
- 54 ([Bin+23], 1.4., p. 8). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.
- 55 ([Bin+23], 1.5., p. 8). Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.
- 56 ([Bin+23], 1.6., p. 8). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF . Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.
- 57 ([Bin+23], 1.7., p. 8). Cho $\triangle ABC$, 2 đường cao BD, CE cắt nhau tại H . Gọi M, N lần lượt là 2 điểm thuộc HC, HB sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. $\triangle AMN$ là tam giác gì?
- 58 ([Bin+23], 1.8., p. 8). Cho hình vuông $ABCD$, cạnh a . (a) M là 1 điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Tính AM, BM theo a . (b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F , đường thẳng này cắt CD tại N . Tính độ dài 3 đoạn thẳng AF, MF, BF theo a .
- 59 ([Bin+23], 1.9., p. 8). Cho hình vuông $ABCD$ & điểm I thay đổi giữa A, B . Tia DI cắt BC tại E . Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F . Chứng minh tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I .
- 60 ([Bin+23], 1.10., p. 8). Cho $\triangle ABC$, đường cao BH . Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\hat{A} < 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\hat{A} > 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.
- 61 ([Bin+23], 1.11., p. 8). Cho $\triangle ABC$, đường cao AH . Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Tính diện tích $\triangle ABC$.
- 62 ([Bin+23], 1.12., p. 8). Cho $\triangle ABC$, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c . Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì $\triangle ABC$ vuông tại A .
- 63 ([Bin+23], 1.13., p. 9). Cho $\triangle ABC$, 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. $\triangle ABC$ là tam giác gì? Vì sao?
- 64 ([Bin+23], 1.14., p. 9). Cho $\triangle ABC$, $\hat{A} = 90^\circ$, $BC = 2a$, đường cao AH . Kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng DE . (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.
- 65 ([Bin+23], 1.15., p. 9). Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 60 cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E , cắt AC tại F . Tính độ dài các cạnh của $\triangle DEF$.
- 66 ([Bin+23], 1.16., p. 9). Cho $\triangle ABC$. Đường trung tuyến AD , đường cao BH , đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.
- 67 (Tổng quát *). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . (a) Cho trước 2 trong 6 số a, b, c, b', c', h . Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S . Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB . Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình Pascal, Python, C/C++ để mô phỏng.

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 74–81]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. HD4. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

- 68 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). Cho $\cot \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos \alpha$.
- 69 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?
- 70 ([Tuy23], 12., p. 108). Chứng minh: (a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. (b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. (c) $\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$. (d) $\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

- 71** ([Tuy23], 13., p. 108). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. (b) $B = (1 + \tan^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$. (c) $C = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
- 72** ([Tuy23], 14., p. 108). Tính giá trị của biểu thức $A = 5 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha$ biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.
- 73** ([Tuy23], 15., p. 108). Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.
- 74** ([Tuy23], 16., p. 108). Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin \alpha < \tan \alpha$, $\cos \alpha < \cot \alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ$, $\cos 65^\circ$, $\tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan \alpha > \sin \alpha > \cos \alpha$.
- 75** ([Tuy23], 17., p. 108). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Biết $\sin B = \frac{1}{4}$, tính $\tan C$.
- 76** ([Tuy23], 18., p. 108). Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tính $\tan \alpha$.
- 77** ([Tuy23], 19., p. 109). $\triangle ABC$, đường trung tuyến AM. Chứng minh nếu $\cot B = 3 \cot C$ thì $AM = AC$.
- 78** ([Tuy23], 20., p. 109). Cho $\triangle ABC$, trực tâm H là trung điểm của đường cao AD. Chứng minh $\tan B \tan C = 2$.
- 79** ([Tuy23], 21., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao BD, CE. Chứng minh: (a) $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{\triangle ABC} \sin^2 A$.
- 80** ([Tuy23], 22., p. 109). Cho $\triangle ABC$ nhọn. Từ 1 điểm M nằm trong tam giác vẽ $MD \perp BC$, $ME \perp AC$, $MF \perp AB$. Chứng minh $\max\{MA, MB, MC\} \geq 2 \min\{MD, ME, MF\}$, trong đó $\max\{MA, MB, MC\}$ là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng MA, MB, MC & $\min\{MD, ME, MF\}$ là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng MD, ME, MF.
- 81** ([Bin23], VD4, p. 89). Tính $\tan 15^\circ$ mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.
- 82** ([Bin23], VD4, p. 90). Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM, đường cao AH, $MA = MB = MC = a$. Chứng minh: (a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. (b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$. (c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.
- 83** ([Bin23], 32., p. 91). Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc 72° bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng 1 cm & 3 cm. (b) Dựng góc 20° bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy 2 cm, cạnh bên 6 cm.
- 84** ([Bin23], 33., p. 91). $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính $\frac{\tan B}{\tan C}$.
- 85** ([Bin23], 34., p. 91). Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.
- 86** ([Bin23], 35., p. 91). Cho hình vuông ABCDN. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính $\cos \widehat{MAN}$.
- 87** ([Bin23], 36., p. 91). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho $HE = 2HA$. Chứng minh $\widehat{DEC} = 90^\circ$.
- 88** ([Bin23], 37., p. 91). Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.
- 89** ([Bin23], 38., p. 91). Tính $\tan 22^\circ 30'$ mà không dùng bảng số hay máy tính.
- 90** ([Bin23], 39., p. 91). Chứng minh $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ mà không dùng bảng số hay máy tính.
- 91** ([Bin23], 40., p. 91). Tính $\cos 36^\circ$, $\cos 72^\circ$ mà không dùng bảng số hay máy tính.
- 92** ([Bin+23], VD1, p. 10). Biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.
- 93** ([Bin+23], VD2, p. 11). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 2 đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Biết $HD : HA = 1 : 2$, chứng minh $\tan B \tan C = 3$.
- 94** ([Bin+23], VD3, p. 12). Biết $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$.
- 95** ([Bin+23], 2.1., p. 12). (a) Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, tính $A = 5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha$. (b) Biết $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, tính $B = 4 \sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha$.
- 96** ([Bin+23], 2.2., p. 13). (a) Biết $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, tính $A = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$. (b) Biết $\cot \alpha = \frac{4}{3}$, tính $B = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.
- 97** ([Bin+23], 2.3., p. 13). Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM. Chứng minh nếu $\cot B = 3 \cot C$ thì $AM = AC$.
- 98** ([Bin+23], 2.4., p. 13). Cho $\triangle ABC$ có $BC \geq AC \geq AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh $CH \geq AD$.

- 99** ([Bin+23], 2.5., p. 13). Cho $\triangle ABC$ nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
- 100** ([Bin+23], 2.6., p. 13). Cho $\triangle ABC$, 2 đường cao BD, CE . Chứng minh: (a) $S_{ADE} = S_{ABC} \cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{ABC} \sin^2 A$.
- 101** ([Bin+23], 2.7., p. 13). Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.
- 102** ([Bin+23], 2.8., p. 13). Cho $\triangle ABC$ nhọn, đường phân giác AD . Biết $AB = c, AC = b$, tính độ dài đoạn AD theo b, c .
- 103** ([Bin+23], 2.9., p. 13). Cho $\triangle ABC$ nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$ & $b + c = 2a$. Chứng minh: (a) $2 \sin A = \sin B + \sin C$. (b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với cạnh a, b, c .
- 104** ([Bin+23], 2.10., p. 13). Cho $\triangle ABC$ nhọn & 2 đường trung tuyến BN, CM vuông góc với nhau. Chứng minh $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$.
- 105** ([Bin+23], 2.11., p. 13). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$, & trung tuyến AM . Đặt $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin \beta$.
- 106** ([Bin+23], 2.12., p. 14). Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$.
- 107** ([Bin+23], 2.13., p. 14). Tìm góc nhọn α thỏa $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.
- 108** ([Bin+23], 2.14., p. 14). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, trung tuyến AM , đường cao AH , $BC = a$. Chứng minh: (a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. (b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$. (c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.
- 109** ([Bin+23], 2.15., p. 14). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh: (a) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. (b) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 82–87]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

- 110** ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.
- 111** ([Tuy23], 23., p. 110). Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.
- 112** ([Tuy23], 24., p. 110). Cho hình bình hành $ABCD$, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.
- 113** ([Tuy23], 25., p. 110). Cho $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. Giải $\triangle ABC$.
- 114** ([Tuy23], 26., p. 110). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $\widehat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải $\triangle ABC$.
- 115** ([Tuy23], 27., p. 110). Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao BH . Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải $\triangle ABC$.
- 116** ([Tuy23], 28., p. 110). Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.
- 117** ([Tuy23], 29., p. 110). Cho $\triangle ABC$, các đường phân giác AD , đường cao BH , đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O . Chứng minh $AC \cos A = BC \cos C$.
- 118** ([Bin23], VD6, p. 92). Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của $\triangle ABC$ ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao BH , có $BH = AB \sin \alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$. \square

- 119** (Mở rộng [Bin23], VD6, p. 91). Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với sin của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với \widehat{A} , chứng minh công thức ứng với \widehat{B}, \widehat{C} hoàn toàn tương tự.

- Trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} bc \sin 90^\circ = \frac{1}{2} bc \sin A$.

- Trường hợp $\hat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
 - Trường hợp $\hat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, $\forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc \sin A$.
 Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ đúng cho mọi $\triangle ABC$. \square
- ★ Công thức tính diện tích tam giác tổng quát:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C, \forall \triangle ABC.$$

120 ([Bin23], VD7, p. 92). $\triangle ABC$ có $\hat{A} = \hat{B} + 2\hat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

121 (Tổng quát [Bin23], VD7, p. 92). Nếu $\triangle ABC$ có \hat{A} từ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng 2, 3, 4.

122 ([Bin23], 41., p. 94). Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh 40 cm của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng $40^\circ, 55^\circ$. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng $60^\circ, 80^\circ$.

123 ([Bin23], 42., p. 94). $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 105^\circ, \hat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm. Tính AB, AC .

124 ([Bin23], 43., p. 94). $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ, AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính BC .

125 ([Bin23], 44., p. 94). Cho 1 hình vuông có cạnh 1 dm. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.

126 ([Bin23], 45., p. 94). $\triangle ABC$ đều có cạnh 60 cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F . Tính độ dài 3 cạnh của $\triangle DEF$.

127 ([Bin23], 46., p. 94). Cho $\triangle ABC$ có $AB = c, CA = b$, đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N . Tính $\frac{BN}{CN}$.

128 ([Bin23], 47., p. 94). Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.

129 ([Bin23], 48., p. 94). Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau ở O & không vuông góc với nhau. Gọi H & K lần lượt là trực tâm của $\triangle AOB, \triangle COD$. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của $\triangle BOC, \triangle AOD$. (a) Gọi E là trọng tâm của $\triangle AOB$, F là giao điểm của AH & DK . Chứng minh $\triangle IEG \sim \triangle HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.

130 ([Bin23], 49., p. 94). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 3 điểm D, E, F lần lượt thuộc 3 cạnh AB, BC, CA . Chứng minh trong 3 $\triangle ADF, \triangle BDE, \triangle CEF$, tồn tại 1 tam giác có diện tích $\leq \frac{1}{4}$ diện tích $\triangle ABC$. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích $\triangle ABC$?

131 ([Bin+23], VD1, p. 15). $\triangle ABC$ có $AB = 16, AC = 14, \hat{B} = 60^\circ$. (a) Tính độ dài cạnh BC . (b) Tính diện tích $\triangle ABC$.

132 ([Bin+23], VD2, p. 15). Cho $\triangle ABC$ nhọn có $\hat{A} = 75^\circ, AB = 30, BC = 35$. Giải $\triangle ABC$.

133 ([Bin+23], VD3, p. 16). Không dùng bảng số & máy tính. Chứng minh $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

134 ([Bin+23], 3.1., p. 17). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{BAC} = 30^\circ, AC = 10$. Tính chu vi & diện tích của hình chữ nhật đó.

135 ([Bin+23], 3.2., p. 17). Cho $\triangle ABC$ vuông tại B , $\hat{A} = \alpha$, BO là trung tuyến ứng với cạnh huyền AC . Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với BO cắt AC tại D . Đặt $AC = a$. Chứng minh $AD = \frac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2 \cos 2\alpha}$.

136 ([Bin+23], 3.3., p. 17). Cho $\triangle ABC$, đường cao AA' , trực tâm H . Cho biết $\frac{AH}{A'H} = k$. Chứng minh $\tan B \tan C = 1 + k$.

137 ([Bin+23], 3.4., p. 17). Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} = 45^\circ, AB = BD = 18$. (a) Tính độ dài cạnh AD . (b) Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

138 ([Bin+23], 3.5., p. 17). Cho $\triangle ABC$ có góc A nhọn, 2 đường cao BH, CK . Chứng minh nếu $AB > AC$ thì $BH > CK$.

139 ([Bin+23], 3.6., p. 17). Cho $\triangle ABC$, phân giác AD . Biết $AB = c, AC = b, \hat{A} = 2\alpha$ với $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$.

140 ([Bin+23], 3.7., p. 17). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $AH = a \sin B \cos B, BH = a \cos^2 B, CH = a \sin^2 B$.

141 ([Bin+23], 3.8., p. 17). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

142 ([Bin+23], 3.9., p. 17). Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng h , góc ở đáy của tam giác bằng α . Chứng minh $S_{ABC} = \frac{h^2}{4 \sin \alpha \cos \alpha}$.

143 ([Bin+23], 3.10., p. 18). Ở độ cao 920 m, từ 1 máy bay trực thăng, người ta nhìn 2 điểm A, B của 2 đầu 1 chiếc cầu 2 góc so với phương nằm ngang lần lượt là $\alpha = 37^\circ, \beta = 31^\circ$. Tính chiều dài AB của chiếc cầu.

144 ([Bin+23], 3.11., p. 18). Cho $\triangle ABC$ nhọn, 3 đường cao AH, BI, CK . Chứng minh: $S_{HIK} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)S_{ABC}$.

145 ([Bin+23], 3.12., p. 18). Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại $C \Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.

146 ([Bin+23], 3.13., p. 18). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . 2 đường trung tuyến AE, BD vuông góc với nhau. Biết $AB = 1$. Tính diện tích $\triangle ABC$.

147 ([Bin+23], 3.14., p. 18). Cho $\triangle ABC$, $AB = 8, AC = 7, \widehat{ABC} = 30^\circ$. Giải $\triangle ABC$.

148 ([Bin+23], 3.15., p. 18). (a) Không dùng bảng số, máy tính, tính $\tan 15^\circ$. (b) Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105^\circ$ & $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$.

4 Application of Trigonometrical Functions of Acute Angle – Ứng Dụng Của Tỷ Số Lượng Giác Của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 88–91]: LT1. LT2. 1. 2. 3. 4. 5.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 92–93]: 1. 2. 3. 4.

149 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin \alpha$, $CM = \cos \alpha$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính cạnh huyền BC .

150 ([Tuy23], 30., p. 112). Cho $\triangle ABC$ nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C . Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.

151 ([Tuy23], 31., p. 112). Giải $\triangle ABC$ biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.

152 ([Tuy23], 32., p. 112). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$, $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BC'D}$.

153 ([Tuy23], 33., p. 112). Cho $\triangle ABC$, $AB = AC = 1$, $\hat{A} = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Vẽ các đường cao AD, BE . (a) Các tỷ số lượng giác $\sin \alpha, \cos \alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\triangle ADC \sim \triangle BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$, $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$.

154 ([Tuy23], 34., p. 112). Cho $\alpha = 22^\circ 30'$, tính $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$.

155 ([Tuy23], 35., p. 112). Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Biết $AB = c$, $AC = b$, $\hat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \frac{2bc \cos \alpha}{b + c}$.

156 ([Kie21], VD1, p. 9). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , dựng đường cao AH . Tính độ dài các yếu tố còn lại ($a, b, c, h, b', c', \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$) của $\triangle ABC$ trong mỗi trường hợp: (a) $AB = a$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (b) $BC = 2a$, $BH = \frac{1}{4}BC$. (c) $AB = a$, $CH = \frac{3}{2}a$. (d) $AC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (e) $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, $BC = 5a$.

157 ([Kie21], VD2, p. 10). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 2a$, gọi O là trung điểm của BC . Dựng $AH \perp BC$. (a) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của AC . Tính độ dài BM . (c) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. 2 đoạn thẳng AO, BM cắt nhau ở điểm G . Tính độ dài CG . (d) Giả sử điểm A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2a$. $\triangle ABC$ phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích $\triangle AHO$ lớn nhất? (e) Giả sử CG cắt AB tại điểm N . Tứ giác $AMON$ là hình gì? $\triangle ABC$ phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác $AMON$ lớn nhất?

- 158** ([Ki21], VD3 p. 10). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , kẻ đường cao AH . Từ H dựng HM, HN lần lượt vuông góc với AC, AB . Chứng minh: (a) $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$. (b) $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$. (c) $AM \cdot AN = \frac{AH^3}{BC}$. (d) $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BN}{CM}$. (e) $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$. (f) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.
- 159** ([Ki21], VD4, p. 12). Cho $\triangle ABC$ nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , gọi O là trung điểm của BC , I là trung điểm của AH , K là giao điểm của EF, OI biết $BC = 2a$. Chứng minh: (a) $\triangle IEO, \triangle IFO$ là 2 tam giác vuông. (b) OI là trung trực của EF . (c) $AH^2 = 4IK \cdot IO$. (d) $\frac{EF}{BC} = \cos A$. (e) $\frac{EF}{BC} \cdot \frac{FD}{CA} \cdot \frac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$. (f) $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$. (g) $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$. (h) $\tan B \tan C = \frac{AD}{DH}$. (i) Giả sử $\widehat{ABC} = 60^\circ, \widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính S_{ABC} theo a . (j) Gọi M là điểm trên AH sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Chứng minh $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC} S_{BHC}}$.
- 160** ([Ki21], VD5, p. 14). Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. (b) Công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. (d) $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$. (e) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- 161** ([Ki21], VD6, p. 16). Cho $\triangle ABC$ với 3 đỉnh A, B, C & 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là a, b, c . Gọi D là chân đường phân giác trong góc A . Chứng minh: (a) $\frac{BD}{AB} = \frac{a}{b+c}$. (b) $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$. (c) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. (d) $AD = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$.
- 162** ([Ki21], VD7, p. 19). Cho $\triangle ABC$ cân, $\widehat{A} = 20^\circ, AB = AC, AC = b, BC = a$. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.
- 163** ([Ki21], VD8, p. 20). Tính $\sin 22^\circ 30', \cos 22^\circ 30', \tan 22^\circ 30', \cot 22^\circ 30'$.
- 164** ([Ki21], VD9, p. 20). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$.
- 165** ([Ki21], VD10, p. 21). Chứng minh $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- 166** ([Ki21], VD11, p. 22). Chứng minh $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
- 167** ([Ki21], VD12, p. 22). Chứng minh $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
- 168** ([Ki21], VD13, p. 23). Chứng minh hệ thức: (a) $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$. (b) $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$.
- 169** ([Ki21], VD14, p. 23). Cho $\triangle ABC$, có $\widehat{A} = 60^\circ$ & đường phân giác AD . Chứng minh $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$.
- 170** ([Ki21], VD15, p. 24). Chứng minh trong $\triangle ABC, \widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc, \widehat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$.
- 171** ([Ki21], VD16, p. 24). Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.
- 172** ([Ki21], VD17, p. 25). Cho $\triangle ABC$. Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ B, C vuông góc với nhau khi & chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.
- 173** ([Ki21], VD18, p. 25). Cho $\triangle ABC$. Trung tuyến AD , đường cao BH , & phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.
- 174** ([Ki21], VD19, p. 26). Cho $\triangle ABC$ thỏa $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.
- 175** ([Ki21], VD20, p. 26). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AH} = 1$. Xác định 3 cạnh của tam giác.
- 176** ([Ki21], VD21, p. 26). Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180^\circ$. Chứng minh $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.

Tài liệu

- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Dạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [Ki21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9*. Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.