

# Problem & Solution: Trigonometry In Triangles

## Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry [pdf].).<sup>1</sup> [TeX]<sup>2</sup>.

## Mục lục

1	1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2	Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	3
3	1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông	4
4	Miscellaneous	4
	Tài liệu	4

## 1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

**Ký hiệu.**  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ :  $a := BC$ ,  $b := CA$ ,  $c := AB$ ,  $b' := CH$ ,  $c' := BH$ ,  $h := AH$ .

**Tính chất.** [1]  $b^2 = ab'$ ,  $c^2 = ac'$ . [2] Định lý Pythagore thuận & đảo:  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ . [3]  $h^2 = b'c'$ . [4]  $ah = bc = 2S_{ABC}$ . [5]  $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

**Bài toán 1** ([Bin23], Ví dụ 1, p. 84). Tính diện tích hình thang  $ABCD$  có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo  $AC$ ,  $BD$  vuông góc với nhau,  $BD = 15$  cm.

**Giải.** Kẻ  $BE \parallel AC$ ,  $E \in CD$ . Gọi  $BH$  là đường cao của hình thang.  $BE \parallel AC$  &  $AC \perp BD \Rightarrow BE \perp BD$ . Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle BDH$  vuông tại  $H$ :  $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$  cm. Áp dụng hệ thức lượng  $b^2 = ab'$  vào  $\triangle BDE$  vuông tại  $B$ :  $DE = \frac{BD^2}{DH} = \frac{15^2}{9} = \frac{225}{9} = 25$  cm.  $AB \parallel CE$  &  $AC \parallel BE \Rightarrow ABCE$  là hình bình hành  $\Rightarrow AB = CE \Rightarrow AB + CD = CE + CD = DE = 25$  cm  $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$  cm<sup>2</sup>.  $\square$

**Bài toán 2** ([Bin23], Ví dụ 2, p. 85). Hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $CD = 10$  cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

**Giải.** Gọi  $AH, BK$  là 2 đường cao của hình thang  $ABCD$ . Đặt  $x := AB = AH = BK$ . Tứ giác  $ABKH$  có  $AB \parallel HK$ ,  $AH \parallel BK$  (vì  $AH \perp CD$  &  $BK \perp CD$ ) nên  $ABKH$  là hình bình hành, mà  $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$  nên  $ABKH$  là hình chữ nhật, kết hợp với  $AB = AH$ , suy ra  $ABKH$  là hình vuông, nên  $HK = AB = x$  (1).  $ABCD$  là hình thang cân  $\Rightarrow AD = BC$  &  $\widehat{C} = \widehat{D}$ , suy ra  $\triangle AHD = \triangle BKC$  (2 tam giác vuông lần lượt tại  $H, K$ , trường hợp cạnh huyền–góc nhọn<sup>3</sup>)  $\Rightarrow DH = CK$  (2). Từ (1) & (2), suy ra:  $DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{10 - x}{2} \Rightarrow CH = CK + HK = \frac{10 - x}{2} + x = \frac{10 + x}{2}$ . Áp dụng hệ thức lượng  $h^2 = b'c'$  cho  $\triangle ACD$  vuông tại  $A$  (đường chéo  $AC \perp AD$ : giả thiết):  $AH^2 = DH \cdot CH \Leftrightarrow x^2 = \frac{10 + x}{2} \cdot \frac{10 - x}{2} = \frac{100 - x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{100}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  cm. Vậy đường cao của hình thang  $ABCD$  bằng  $2\sqrt{5}$  cm.  $\square$

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

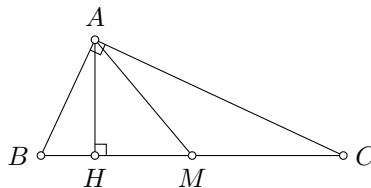
<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade\\_9/trigonometry/problem/NQBH\\_trigonometry\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade\\_9/rational/problem/NQBH\\_trigonometry\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex).

<sup>3</sup>Hoặc có thể lý luận:  $\triangle AHD = \triangle BKC$  (cạnh huyền–cạnh góc vuông) vì 2 tam giác vuông này có  $AD = BC$  (2 cạnh bên của hình thang cân  $ABCD$ ) &  $AH = BK$  (cùng bằng chiều cao của hình thang  $ABCD$ ).

**Bài toán 3** ([Bin23], Ví dụ 3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.*

*Giải.* Xét  $\triangle ABC$ ,  $AB < AC$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $AH \perp BC$ ,  $H \in BC$ , như hình:

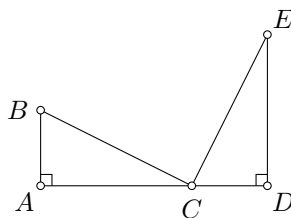


Đặt  $x := AM$ ,  $BC = 2AM = 2x$ ,  $AH = AM - 7 = x - 7$ . Áp dụng định lý Pythagore & hệ thức lượng  $bc = ah$  cho  $\triangle ABC$  vuông tại A:  $b^2 + c^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2$ ,  $bc = ah = 2x(x - 7)$ . Giải hệ phương trình:<sup>4</sup>

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4x^2, \\ bc = 2x(x - 7). \end{cases}$$

Có  $a + b + c = 72 \Leftrightarrow b + c = 72 - a = 72 - 2x$ . Từ hệ phương trình vừa thu được:  $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4x^2 + 4x(x - 7) = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 2x + 4x^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 4x^2 + 260x - 72^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0 \Leftrightarrow x = 16 \vee x = -81$  (loại vì  $x > 0$ )  $\Rightarrow x = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = x(x - 7) = 16(16 - 7) = 144 \text{ cm}^2$ .  $\square$

**Bài toán 4** ([Bin23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau  $\triangle ABC = \triangle DCE$ :*



**Bài toán 5** ([Bin23], 2., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  cân có  $AB = AC = 9 \text{ cm}$ ,  $BC = 12 \text{ cm}$ , đường cao  $AH$ ,  $I$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AC$ . (a) Tính độ dài  $CI$ . (b) Kẻ đường cao  $BK$  của  $\triangle ABC$ . Chứng minh điểm  $K$  nằm giữa 2 điểm  $A$ ,  $C$ .*

**Bài toán 6** ([Bin23], 3., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 120^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .*

**Bài toán 7** ([Bin23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy  $BC$  của  $\triangle ABC$  cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.*

**Bài toán 8** ([Bin23], 5., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $AD$ , đường cao  $AH$ . Biết  $BD = 7.5 \text{ cm}$ ,  $CD = 10 \text{ cm}$ . Tính  $AH$ ,  $BH$ ,  $DH$ .*

**Bài toán 9** ([Bin23], 6., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $AB = 20 \text{ cm}$ ,  $CH = 9 \text{ cm}$ . Tính độ dài  $AH$ .*

**Bài toán 10** ([Bin23], 7., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tia phân giác của  $\widehat{HAC}$  cắt  $HC$  ở  $D$ . Gọi  $K$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AC$ . Biết  $BC = 25 \text{ cm}$ ,  $DK = 6 \text{ cm}$ . Tính  $AB$ .*

**Bài toán 11** ([Bin23], 8., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 8 \text{ cm}$ , 2 đường trung tuyến  $BD$ ,  $CE$  vuông góc với nhau. Tính  $BC$ .*

**Bài toán 12** ([Bin23], 9., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $BC = 8 \text{ cm}$ ,  $AB + AC = 12 \text{ cm}$ . Tính  $AB$ ,  $AC$ .*

**Bài toán 13** ([Bin23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng  $54 \text{ cm}^2$  &  $96 \text{ cm}^2$ . Tính độ dài cạnh huyền.*

**Bài toán 14** ([Bin23], 11., p. 86). *Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ , đường trung tuyến  $BM$ . Gọi  $D$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BM$ ,  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AC$ . Chứng minh  $AH = 3DH$ .*

**Bài toán 15** ([Bin23], 12., pp. 86–87). (a) *1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng  $k$ . Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền.* (b) *Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng  $5 : 4$  & cạnh huyền dài  $82 \text{ cm}$ .*

**Bài toán 16** ([Bin23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với  $1 : 3$ . Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

<sup>4</sup>Xem cách giải của dạng tổng quát của hệ phương trình này ở bài viết sau của tác giả: *Problem & Solution: System of Equations of 2 Variables – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình 2 Biến*: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/miscellaneous/system\\_of\\_equations\\_2\\_variables/problem/NQBH\\_system\\_of\\_equations\\_2\\_variables\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/miscellaneous/system_of_equations_2_variables/problem/NQBH_system_of_equations_2_variables_problem.pdf).

**Bài toán 17** ([Bin23], 14., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  có độ dài 3 cạnh  $AB, BC, CA$  là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $AM$ . Chứng minh  $HM = 2$ .

**Bài toán 18** ([Bin23], 15., p. 87). 1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài 14 cm, đáy lớn dài 50 cm.

**Bài toán 19** ([Bin23], 16., p. 87). 1 hình thoi có diện tích bằng  $\frac{1}{2}$  diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.

**Bài toán 20** ([Bin23], 17., p. 87). Qua đỉnh  $A$  của hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh  $BC$  ở  $M$  & cắt đường thẳng  $CD$  ở  $I$ . Chứng minh  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$ .

**Bài toán 21** ([Bin23], 18., p. 87). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh 1 dm. Tính cạnh của  $\triangle AEF$  đều có  $E$  thuộc cạnh  $CD$  &  $F$  thuộc cạnh  $BC$ .

**Bài toán 22** ([Bin23], 19., p. 87). Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) 3, 4, 5. (b) 12, 15, 20.

**Bài toán 23** (Mở rộng [Bin23], 19., p. 87). Cho tam giác  $ABC$  có 3 đường cao có độ dài lần lượt là  $h_a, h_b, h_c$ . Tìm điều kiện cần & đủ theo  $h_a, h_b, h_c$  để  $\triangle ABC$  vuông.

**Bài toán 24** ([Bin23], 20., p. 87). Chứng minh  $\triangle ABC$  là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác  $BD, CE$  cắt nhau tại  $I$  thỏa mãn  $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$ .

**Bài toán 25** ([Bin23], 21., p. 87). Xét các  $\triangle ABC$  vuông có cạnh huyền  $BC = 2a$ . Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác,  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AC, AB$ . Tìm GTLN của: (a)  $DE$ . (b) Diện tích tứ giác  $ADHE$ .

**Bài toán 26** ([Bin23], 22., pp. 87–88). Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

**Bài toán 27** ([Bin23], 23., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Chứng minh: (a)  $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} < 90^\circ$ . (b)  $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} > 90^\circ$ . (c)  $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$ .

**Bài toán 28** ([Bin23], 24., p. 88).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $BD$ . Tia phân giác của  $\hat{A}$  cắt  $BD$  ở  $I$ . Biết  $BI = 10\sqrt{5}$  cm,  $DI = 5\sqrt{5}$  cm. Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 29** ([Bin23], 25., p. 88).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết  $AB = 5$  cm,  $CI = 6$  cm. Tính  $BC$ . (b) Biết  $BI = \sqrt{5}$  cm,  $CI = \sqrt{10}$  cm. Tính  $AB, AC$ .

**Bài toán 30** ([Bin23], 26., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . (a) Biết  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Tính  $\widehat{BIM}$ . (b) Biết  $\widehat{BIM} = 90^\circ$ . 3 cạnh của  $\triangle ABC$  tỷ lệ với 3 số nào?

**Bài toán 31** ([Bin23], 27., p. 88). 1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) DQ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: 17, 13, 35, 41, 22?

**Bài toán 32** ([Bin23], 28., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = 3\sqrt{5}$  cm. Hình vuông  $ADEF$  cạnh 2 cm có  $D \in AB, E \in BC, F \in CA$ . Tính  $AB, AC$ .

**Bài toán 33** ([Bin23], 29., p. 88).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết  $IA = 2\sqrt{5}$  cm,  $IB = 3$  cm. Tính  $AB$ .

**Bài toán 34** ([Bin23], 30., p. 88).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AD$ , trục tâm  $H$ . Tính độ dài  $AD$ , biết  $AH = 14$  cm,  $BH = CH = 30$  cm.

**Bài toán 35** ([Bin23], 31., p. 88).  $\triangle ABC$  có  $BC = 40$  cm, đường phân giác  $AD$  dài 45 cm, đường cao  $AH$  dài 36 cm. Tính  $BD, CD$ .

## 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

**Bài toán 36** ([Bin23], Ví dụ 4, p. 89). Tính  $\tan 15^\circ$  mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.

**Bài toán 37** ([Bin23], Ví dụ 4, p. 90). Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ ,  $\hat{C} = \alpha < 45^\circ$ , đường trung tuyến  $AM$ , đường cao  $AH$ ,  $MA = MB = MC = a$ . Chứng minh: (a)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . (b)  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ . (c)  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ .

**Bài toán 38** ([Bin23], 32., p. 91). Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc  $72^\circ$  bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng 1 cm & 3 cm. (b) Dựng góc  $20^\circ$  bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy 2 cm, cạnh bên 6 cm.

**Bài toán 39** ([Bìn23], 33., p. 91).  $\triangle ABC$  có đường trung tuyến  $AM$  bằng cạnh  $AC$ . Tính  $\frac{\tan B}{\tan C}$ .

**Bài toán 40** ([Bìn23], 34., p. 91). Cho  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ .

**Bài toán 41** ([Bìn23], 35., p. 91). Cho hình vuông  $ABCDN$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CD$ . Tính  $\cos \widehat{MAN}$ .

**Bài toán 42** ([Bìn23], 36., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ . Gọi  $E$  là điểm thuộc tia đối của tia  $AH$  sao cho  $HE = 2HA$ . Chứng minh  $\widehat{DEC} = 90^\circ$ .

**Bài toán 43** ([Bìn23], 37., p. 91). Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.

**Bài toán 44** ([Bìn23], 38., p. 91). Tính  $\tan 22^\circ 30'$  mà không dùng bảng số hay máy tính.

**Bài toán 45** ([Bìn23], 39., p. 91). Chứng minh  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ,  $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$  mà không dùng bảng số hay máy tính.

**Bài toán 46** ([Bìn23], 40., p. 91). Tính  $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$  mà không dùng bảng số hay máy tính.

### 3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

### 4 Miscellaneous

### Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.