

Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates

Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 11 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.tex.
- *Problem & Solution: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập & Lời Giải: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng*.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.tex.

Mục lục

1	2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng	1
2	Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector	2
3	2D Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng Trong Mặt Phẳng	3
4	Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng	3
5	2D Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn Trong Mặt Phẳng	3
6	3 Conics – 3 Đường Conic	4
7	Sử Dụng Ồ ĐỂ Chứng Minh Các Hệ Thức Vector Trong Hình Học Phẳng	5
8	Miscellaneous	5
	Tài liệu	5
	Resources – Tài nguyên.	

1. [Hải+25]. PHAN VIỆT HẢI, TRẦN QUANG HÙNG, NINH VĂN THU, PHẠM ĐÌNH TÙNG. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10. Tập 2*.

1 2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng

[1] Tọa độ của 1 điểm: Ký hiệu $M(x_M, y_M)$ với $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ lần lượt là hoành độ, tung độ của điểm $M \in \mathbb{R}^2$, cặp số (x_M, y_M) được gọi là *tọa độ* của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy . [2] Tọa độ của 1 vector: $\overrightarrow{OM} = (a, b) \Leftrightarrow M(a, b)$. $\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$ lần lượt là *vector đơn vị* trên trục Ox, Oy . Với mỗi vector \vec{u} trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ của vector \vec{u} là tọa độ của điểm $A(x_A, y_A)$ thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, khi đó x_A, y_A lần lượt là hoành độ, tung độ của vector \vec{u} . [3] $\vec{u} = (a, b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. [4] $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_a = x_b \wedge y_a = y_b$. [4] $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. [5] Các điểm đối xứng với điểm $A(x_A, y_A)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy qua gốc O , trục Ox , trục Oy lần lượt là $(-x_A, -y_A), (x_A, -y_A), (-x_A, y_A)$. See [Wikipedia/coordinate vector](https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_vector).

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

- 1 (Cf. segment vs. vector). (a) So sánh 2 khái niệm ‘2 đoạn thẳng bằng nhau’ & ‘2 vectors bằng nhau’. (b) So sánh 2 khái niệm ‘2 đoạn thẳng song song’ & ‘2 vectors song song’. (c) So sánh 2 khái niệm ‘2 tia đối nhau’ & ‘2 vectors đối nhau’.
- 2 (Mở rộng [Thá+25b], 5., p. 65). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho trước tọa độ của 3 trong 5 điểm gồm 4 đỉnh của hình bình hành $ABCD$ & tâm đối xứng I của nó. (a) Tìm tọa độ các điểm còn lại. (b) Tính chu vi, độ dài 2 đường cao, & diện tích của hình bình hành $ABCD$ theo tọa độ của 3 điểm cho trước đó.
- 3 (Mở rộng [Thá+25b], 6., p. 65). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$. Tìm điều kiện cần & đủ để tứ giác $ABCD$ là: (a) hình bình hành. (b) hình thang. (c) hình thang cân. (d) hình thoi. (e) hình chữ nhật. (f) hình vuông. (g) tứ giác nội tiếp. (h) tứ giác ngoại tiếp.
- Hint. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \wedge y_A + y_C = y_B + y_D$.
- 4 (Mở rộng [Thá+25b], 7., p. 65: Tọa độ 3 đỉnh tam giác). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . (a) Cho biết tọa độ trung điểm 3 cạnh ΔABC . Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C .
- Hint. Hoặc giải 2 hệ phương trình “khuyết” 3 ẩn (x_A, x_B, x_C) & (y_A, y_B, y_C) . Hoặc dùng nhận xét nếu M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB thì $ANMP, BMNP, CMPN$ là 3 hình bình hành.
- 5 (Tọa độ 4 đỉnh tứ giác). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . (a) Liệu nếu chỉ biết tọa độ 4 trung điểm của 4 cạnh tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (b) Nếu cho thêm tọa độ của trung điểm của 1 trong 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (c) Nếu cho thêm tọa độ của 2 trung điểm của 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? Nếu được thì 6 tọa độ này phải thỏa điều kiện gì để bài toán có nghiệm? (d) Mở rộng bài toán cho đa giác n cạnh $A_1A_2 \dots A_n$.
- 6 (Điều kiện cần & đủ để 2 vectors bằng nhau). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 2 vector $\vec{u}_1(a_1m + b_1n, c_1m + d_1n), \vec{u}_2(a_2m + b_2n, c_2m + d_2n)$. Tìm điều kiện cần & đủ của m, n theo $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ cho trước để: (a) $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. (b) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$. (c) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương. (d) $\vec{u}_1 \uparrow \uparrow \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương, cùng hướng. (e) $\vec{u}_1 \uparrow \downarrow \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương, ngược hướng. (f) $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ với $k \in \mathbb{R}^*$ cho trước. (g) $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$.
- 7 (Mở rộng [Thá+25a], 11., p. 62). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tọa độ 3 điểm không thẳng hàng $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ & $CD = aAB$ với $a > 0$ cho trước.

2 Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector

1 Biểu thức tọa độ của phép \pm vectors, phép nhân vô hướng của vector: Nếu $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ hay viết gộp chung thành $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $k\vec{u} = (kx_1, ky_1), \forall k \in \mathbb{R}; \vec{u} \parallel \vec{v} \neq \vec{0}$, i.e., $\vec{u} \parallel \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 = kx_2 \wedge y_1 = ky_2$. **2** Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ là $M(x_M, y_M)$ với $x_M := \frac{1}{2}(x_A + x_B), y_M := \frac{1}{2}(y_A + y_B)$. **3** Tọa độ trọng tâm của tam giác ΔABC với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ là $G(x_G, y_G)$ với $x_G := \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G := \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$. **4** Biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$, $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Nếu $\vec{a} = (x, y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nếu $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **5** Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}, \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ &

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (1)$$

8 (Coordinate of linear combination of vectors – Tọa độ của tổ hợp tuyến tính các vectors). Cho $n \in \mathbb{N}^*$ số thực a_i & n vectors $\vec{u}_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$. Tìm tọa độ của vector $\sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$.

9 (Điều kiện cần & đủ để hệ điểm thẳng hàng). (a) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng, không thẳng hàng. (b) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để $n \in \mathbb{N}^*$ điểm $A_i, i = 1, \dots, n$ thẳng hàng, không thẳng hàng.

10. Cho 2 điểm $A(x_A, y_A), M(x_M, y_M)$. Tìm tọa độ điểm $B(x_B, y_B)$ sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB .

11. (a) Cho 3 điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), G(x_G, y_G)$ không thẳng hàng. Tìm tọa độ điểm $C(x_C, y_C)$ để G là trọng tâm ΔABC . (b) M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Tìm biểu thức tọa độ của tính chất hình học $AG = 2GM, BG = 2GN, CG = 2GP$.

12 (Giải tam giác trên mặt phẳng tọa độ). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. (a) Viết định lý sin & định lý cos phiên bản tọa độ. (b) Giải ΔABC .

13 (Tổng hợp lực). (a) Tính lực tổng hợp \vec{F} của 2 lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 , i.e., $\vec{F} := \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ biết số đo (\vec{F}_1, \vec{F}_2) . (b) Tính lực tổng hợp \vec{F} của $n \in \mathbb{N}^*$ lực \vec{F}_i với $i = 1, 2, \dots, n$, i.e., $\vec{F} := \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$ biết số đo các góc (\vec{F}_i, \vec{F}_j) với $1 \leq i < j \leq n$.

14 (Tọa độ tâm tỷ cự). (a) Tìm tọa độ của tâm tỷ cự của hệ $n \in \mathbb{N}^*$ điểm $A_i(x_i, y_i)$ với trọng số $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, i.e., $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{AA_i} = \vec{0}$. (b) Viết biểu thức vector $n\vec{MA} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$ phiên bản tọa độ.

15. Cho $\Delta ABC, \Delta MNP$ với tọa độ 6 đỉnh. Tìm điều kiện cần & đủ của 6 tọa độ này để $\Delta ABC, \Delta MNP$ có cùng: (a) trọng tâm. (b) trục tâm. (c) tâm đường tròn nội tiếp. (d) tâm đường tròn ngoại tiếp. (e) Mở rộng cho các tâm tỷ cự khác.

3 2D Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng Trong Mặt Phẳng

16 ([Hải+25], VD1, p. 48). Cho 3 điểm $A(0, 2), B(2, 2), C(4, -2)$. (a) Viết phương trình 3 cạnh $\triangle ABC$. (b) Viết phương trình 3 đường cao của $\triangle ABC$. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại trục tâm H . (c) Viết phương trình 3 đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp E . (d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. (e) Kiểm tra lại đường thẳng Euler theo tọa độ. Từ đó viết phương trình đường thẳng Euler. (f) Viết phương trình các đường trung bình của $\triangle ABC$.

17 ([Hải+25], VD2, p. 49). Cho $\triangle ABC$ biết $A(0, 2)$, phương trình 2 đường cao $BB_2 : x - y = 0, CC_2 : x = 4$. Tìm tọa độ B, C .

18 ([Hải+25], VD3, p. 50). Cho $\triangle ABC$ biết $A(0, 2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$ & phương trình đường trung tuyến $CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C .

19 ([Hải+25], VD4, p. 50). Cho điểm $A(1, 1)$, điểm C nằm trên trục hoành & điểm B thuộc đường thẳng $d : y - 3 = 0$. Tìm tọa độ B, C để $\triangle ABC$ đều.

20 ([Hải+25], VD5, p. 51). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = c, AC = b, b, c > 0$ không đổi. B, C lần lượt chuyển động trên $(x'Ox), (y'Oy)$. Tìm quỹ tích của điểm A .

21 ([Hải+25], VD6, p. 52). Cho $A(a, 0), B(0, b)$ với $a, b \in \mathbb{R}^+$: hằng số. M, N lần lượt thuộc trục hoành, trục tung thỏa mãn $\frac{OM}{OA} + \frac{ON}{OB} = 2, (AN) \cap (BM) = E$. Tìm quỹ tích của E .

22 ([Hải+25], VD7, p. 52). Cho điểm $M(1, 2)$. Xét đường thẳng d đi qua M cắt 2 tia Ox, Oy lần lượt tại $A, B \neq O$. Viết phương trình đường thẳng d nếu: (a) $OA = OB$. (b) $OA = 2OB, OA = aOB$ với $a \in (0, \infty)$. (c) S_{OAB} nhỏ nhất. (d) $OA + OB$ nhỏ nhất. (e) $\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}\right)$ nhỏ nhất.

23 ([Hải+25], VD8, p. 53). Trên mặt phẳng tọa độ cho $A(1, 3), B(4, 2)$. Viết phương trình đường thẳng d biết: (a) d đi qua A & cách B 3 đơn vị. (b) d đi qua A & cách B 1 khoảng nhỏ nhất. (c) d đi qua A & cách B 1 khoảng lớn nhất. (d) d cách A 1 đơn vị & cách B 2 đơn vị.

24 ([Hải+25], VD9, p. 54). Cho đường thẳng d & 2 điểm $M_1, M_2 \notin d$. Tìm thuật toán để xác định điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.

25 ([Hải+25], VD10, p. 54). Cho $M_1(1, 2), M_2(0, 3), d : 3x - 4y + 6 = 0$. Tìm điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.

26 ([Hải+25], VD11, p. 55). Cho 2 đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Tìm & lập phương trình quỹ tích các điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2 .

27 ([Hải+25], VD12, p. 55). Cho 2 đường thẳng $d_1 : x + y + 2 = 0, d_2 : 7x - y + 5 = 0$. Tìm quỹ tích của điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2 .

28 ([Hải+25], VD13, p. 56). Cho $\triangle ABC$, biết tọa độ 3 đỉnh. Tìm thuật toán xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.

29 ([Hải+25], VD14, p. 56). Cho điểm $A(\frac{28}{3}, \frac{22}{3}), B(1, 1), C(0, -6)$. Xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.

30 ([Hải+25], 25.1., p. 57). Cho $\triangle ABC$ biết $A(0, 2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$, phương trình đường trung tuyến $BB_1 : x = 2$. Tìm tọa độ B, C .

31 ([Hải+25], 25.2., p. 57). Cho $\triangle ABC$ biết $A(0, 2)$, phương trình 2 đường trung tuyến $BB_1 : x = 2, CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C .

32 ([Hải+25], 25.3., p. 57). Cho đường thẳng $d : x - 2y + 1 = 0$. (a) Viết phương trình đường thẳng $\Delta \parallel d$ & cách d 3 đơn vị. (b) Trong các đường thẳng thu được, đường thẳng nào & gốc tọa độ nằm về 2 phía của d ?

4 Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng

5 2D Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn Trong Mặt Phẳng

33 ([Hải+25], VD1, p. 59). Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2(m + 1)y - 2m - 1 = 0, m \in \mathbb{R}$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) là phương trình đường tròn. (b) Có tồn tại R_m nhỏ nhất hoặc lớn nhất không? (c) Tìm quỹ tích tâm I_m . (d) Đường tròn có đi qua điểm cố định không?

34 ([Hải+25], VD2, p. 59). Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(\cos \alpha - 1)x - 2(\sin \alpha - 1)y - 1 = 0$ với tham số $\alpha \in \mathbb{R}$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) là phương trình đường tròn. (b) Có tồn tại R_m nhỏ nhất hoặc lớn nhất không? (c) Tìm quỹ tích tâm I_m . (d) Đường tròn có đi qua điểm cố định không?

35 ([Hải+25], VD3, p. 60). Cho 2 điểm A, B . Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B thỏa: (a) Đường tròn bé nhất. (b) Bán kính cho trước. (c) Có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước. (d) Tiếp xúc với đường thẳng d_1 cho trước. (e) Tiếp xúc với đường tròn (C_1) cho trước.

36 ([Hải+25], VD4, p. 61). Cho 3 điểm $A(0, 2), B(-2, 2), C(4, -2)$. Viết phương trình: (a) đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. (b) đường tròn bé nhất chứa $\triangle ABC$.

37 ([Hải+25], VD5, p. 62). Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$. Đường tròn (C) tiếp xúc với AB tại B , tiếp xúc với AC tại C & điểm $M \in (C)$ tùy ý. A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB . Chứng minh $MA_1^2 = MB_1 \cdot MC_1$.

38 ([Hải+25], VD6, p. 63). Cho đường tròn (O) , điểm A cố định nằm ngoài đường tròn & điểm M thuộc đường tròn. Xét đường tròn $(M; MA)$. Chứng minh trục đẳng phương của 2 đường tròn luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

39 ([Hải+25], 26.1., p. 64). Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0, m \in \mathbb{R}$, & đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$. (a) Chứng minh có 2 đường tròn thuộc họ (C_m) tiếp xúc với (C) . (b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của 2 đường tròn thu được. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) cắt (C) theo 1 dây cung lớn nhất.

40 ([Hải+25], 26.2., p. 64). Cho $\triangle ABC$ có $A(1, 5), B(4, -1), C(-4, -5)$. Viết phương trình các đường tròn nội tiếp & bàng tiếp của $\triangle ABC$.

41 ([Hải+25], 26.3., p. 64). Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 4$ & điểm $M(1, -1)$. Viết phương trình đường tròn (C_1) có bán kính $R_1 = 3$ & cắt đường tròn (C) theo dây cung bé nhất qua M .

42 ([Hải+25], 26.4., p. 64). Cho đường thẳng $\Delta_1 : mx - (m+1)y + 2m - 1 = 0, \Delta_2 : (m+1)x + my - m + 2 = 0, m \in \mathbb{R}$. Tìm quỹ tích giao điểm của Δ_1, Δ_2 .

43 ([Hải+25], 26.5., p. 64). Cho đường tròn tâm O đường kính AB & điểm M chuyển động trên đường tròn. Kẻ $MH \perp AB, H \in AB$. Vẽ đường tròn $(M; MH)$ cắt đường tròn (O) tại C, D . Chứng minh đường thẳng CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính HA, HB .

6 3 Conics – 3 Đường Conic

44 ([Hải+25], VD1, p. 68). Cho đường tròn (O) & điểm $A \neq O$ cố định nằm trong đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tùy ý vừa qua A vừa tiếp xúc với đường tròn (O) . Tìm quỹ tích điểm M .

45 ([Hải+25], VD2, p. 68). Cho 3 điểm A, B, C cố định & thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn (O) tùy ý tiếp xúc với đường thẳng ABC tại A . Từ B, C kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn (O) , chúng cắt nhau tại $M \neq A$. Tìm quỹ tích điểm M .

46 ([Hải+25], VD3, p. 68). Cho $\triangle ABC$ có BC cố định & điểm A chuyển động sao cho đường thẳng Euler của $\triangle ABC$ song song với BC . Tìm quỹ tích điểm A .

47 ([Hải+25], VD4, p. 69). (a) Cho hyperbol $(H) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Tìm các yếu tố của (H) . Tìm các đường tiệm cận, góc giữa 2 đường tiệm cận. Tìm diện tích, chu vi hình chữ nhật cơ sở, hình thoi $A_1B_1A_2B_2$. Tìm bán kính R_1 của đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_1B_2A_2$; bán kính R_2 của đường tròn ngoại tiếp $\triangle B_1A_2B_2$. (b) Viết phương trình chính tắc của (H) với 2 điều kiện xác định e & R_1, R_1 & R_2, d_1 & r .

48 ([Hải+25], VD5, p. 70). Cho $\triangle ABC$ có B, C cố định, A chuyển động sao cho tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$ nằm trên BC . Tìm quỹ tích điểm A .

49 ([Hải+25], VD6, p. 71). Cho hyperbol $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 1 đường thẳng Δ tùy ý cắt 2 đường tiệm cận tại E, F , cắt (H) tại M, N . Chứng minh EF, MN có chung trung điểm.

50 ([Hải+25], VD7, p. 73). Cho $\triangle ABC$ có B, C cố định, A chuyển động sao cho $|\widehat{B} - \widehat{C}| = 90^\circ$. Tìm quỹ tích điểm A .

51 ([Hải+25], VD8, p. 73). Cho parabol $(P) : y^2 = 4x$. (a) Cho đường thẳng $d : 2x - y - 4 = 0$. Chứng minh d cắt (P) tại 2 điểm A, B . Tính độ dài AB . (b) Tìm 2 điểm $C, D \in (P)$ để F là trực tâm $\triangle OCD$. Tính CD . (c) Tìm 2 điểm $M, N \in (P)$ để $\triangle OMN$ đều & tính cạnh $\triangle OMN$.

52 ([Hải+25], VD9, p. 74). Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định & đường kính $CD \perp AB$. Điểm M chuyển động trên (O) . Kẻ $MH \perp OC$. (a) Tìm quỹ tích điểm M_1 là giao điểm của AH, OM . (b) Tìm quỹ tích điểm M_2 là giao điểm của BH, OM .

53 ([Hải+25], VD10, p. 75). Cho parabol $(P) : y^2 = 32x$ & đường thẳng $d : 4x + 3y + 10 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ để khoảng cách từ M đến d bằng 2.

- 54 ([Hải+25], VD11, p. 75). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A & điểm M chuyển động trên cạnh huyền. Vẽ hình chữ nhật $MDAE$. Đường phân giác trong của \widehat{DME} cắt DE tại N . Tìm quỹ tích điểm N .
- 55 ([Hải+25], VD12, p. 76). Cho parabol $(P) : y^2 = 2px$ & điểm $M \in (P)$ tùy ý. Kẻ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$. Đường thẳng d đi qua K & vuông góc với HK . Chứng minh đường thẳng d đi qua 1 điểm cố định.
- 56 ([Hải+25], VD13, p. 76). Cho parabol $(P) : y^2 = 2px$. 2 đường thẳng d_1, d_2 tùy ý đi qua F & vuông góc với nhau, cắt (P) tương ứng tại A_1, B_1, A_2, B_2 . Chứng minh $\frac{1}{A_1B_1} + \frac{1}{A_2B_2} = \text{const.}$
- 57 ([Hải+25], VD14, p. 77). Cho đường conic (C) . 1 đường thẳng tùy ý qua tiêu điểm cắt (C) tại A, B . Xác định vị trí tương đối của đường tròn đường kính AB đối với đường chuẩn tương ứng.
- 58 ([Hải+25], VD15, p. 77). Cho hyperbol $(H) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Đường tiệm cận $d_1 : y = \frac{b}{a}x$, đường chuẩn $\Delta_2 : x = \frac{a^2}{c}$. $M \in (H)$ bất kỳ. Đường thẳng d đi qua M song song với d_1 & cắt Δ_2 tại N . Chứng minh $MN = MF_2$.
- 59 ([Hải+25], 27.1., p. 78). Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $AB = a = \text{const}$, đáy nhỏ $CD = b = \text{const}$ chuyển động. Tổng của 2 cạnh bên $= c = \text{const}$. (a) Tìm quỹ tích của C, D . (b) Tìm quỹ tích giao điểm E của 2 đường chéo.
- 60 ([Hải+25], 27.2., p. 78). Cho elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. $M \in (E)$ bất kỳ. (a) Chứng minh $b \leq OM \leq a$. (b) Tìm vị trí của M để MF_2 đạt GTLN, GTNN. (c) Tìm quỹ tích trục tâm $\triangle MA_1A_2$. (d) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle MF_1F_2$.
- 61 ([Hải+25], 27.3., p. 78). Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm D để tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được.
- 62 ([Hải+25], 27.4., p. 78). Cho $\triangle ABC$ có B, C cố định, A chuyển động sao cho $AB \cdot AC = AO^2$ với O là trung điểm BC . Tìm quỹ tích điểm A .
- 63 ([Hải+25], 27.5., p. 78). Cho hyperbol (H) . Chứng minh tích 2 khoảng cách từ 1 điểm $M \in (H)$ tùy ý tới 2 đường tiệm cận nhận giá trị không đổi.
- 64 ([Hải+25], 27.6., p. 78). Cho hyperbol (H) & điểm $M \in (H)$ tùy ý. Vẽ 2 đường thẳng qua M song song với 2 đường tiệm cận & tạo với 2 đường tiệm cận 1 hình bình hành. Chứng minh diện tích hình bình hành không đổi. Tìm M để chu vi hình bình hành nhỏ nhất.
- 65 ([Hải+25], 27.7., p. 78). Cho parabol $(P) : y^2 = 2px$. Đường thẳng d tùy ý đi qua F & cắt (P) tại A, B . (a) Chứng minh $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \text{const.}$ (b) Tìm đường thẳng d để $FA \cdot FB$ nhỏ nhất. (c) H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh $AH \cdot BK = \text{const.}$ (d) Chứng minh đường tròn đường kính AB luôn tiếp xúc với đường chuẩn của (P) . (e) Giả sử d cắt trục tung tại M . Chứng minh $MF^2 = MA \cdot MB$.
- 66 ([Hải+25], 27.8., p. 78). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB & điểm M chuyển động trên đường tròn. I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác cong OAM . Tìm quỹ tích điểm I .

7 Sử Dụng Ồ Để Chứng Minh Các Hệ Thức Vector Trong Hình Học Phẳng

8 Miscellaneous

Tài liệu

- [Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.
- [Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Bài Tập Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 112.
- [Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 111.