

Problem: Root $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$

Bài Tập: Căn Thức $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- Problem: Root $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$ – Bài Tập: Căn Thức $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/root/problem/NQBH_root_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/root/problem/NQBH_root_problem.tex.
- Problem & Solution: Root $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$ – Bài Tập & Lời Giải: Căn Thức $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt[n]{f(x)}$.
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/root/solution/NQBH_root_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/root/solution/NQBH_root_solution.tex.

Mục lục

| | |
|---|----|
| 1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ | 2 |
| 2 Tìm Điều Kiện Để Biểu Thức Có Nghĩa | 5 |
| 3 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A $ | 6 |
| 4 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương | 11 |
| 5 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 | 12 |
| 6 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 | 14 |
| 7 Phương Trình Vô Tỷ | 15 |
| 8 Cube Root – Căn Bậc 3 | 15 |
| 9 n th Root – Căn Bậc n | 16 |
| 10 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương | 16 |
| 11 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2 | 20 |
| 12 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2 | 23 |
| 13 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n | 26 |
| 14 Miscellaneous | 28 |
| 15 Miscellaneous | 32 |
| Tài liệu | 32 |

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 Square Root & Irrationals – Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Ở Toán 7 (xem, e.g., [Thá+23, §5, pp. 27–29]), ta đã biết dạng biểu diễn thập phân của số hữu tỷ là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, dạng biểu diễn thập phân của số vô tỷ là vô hạn không tuần hoàn. Số hữu tỷ $a \in \mathbb{Q}$ nào cũng viết được dưới dạng $a = \frac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

[Thá+24, Chap. III, §1, pp. 48–54]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

1 ([Chí+23], ?1–?3, pp. 4–5). (a) Tìm các căn bậc 2 của $9, \frac{4}{9}, 0.25, 2$. (b) Tìm căn bậc 2 số học của $49, 64, 81, 1.21$. (c) Tìm căn bậc 2 của $49, 64, 81, 1.21$.

2 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?4, pp. 5–6). So sánh: (a) 1 & $\sqrt{2}$. (b) 2 & $\sqrt{5}$. (c) 4 & $\sqrt{15}$. (d) $\sqrt{11}$ & 3 .

3 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?5, p. 6). (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} > 2$. (b) $\sqrt{x} < 1$. (c) $\sqrt{x} > 1$. (d) $\sqrt{x} < 3$.

4 ([Chí+23], 1., p. 6). Tìm căn bậc 2 số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc 2 của chúng: $121, 144, 169, 225, 256, 324, 361, 400$.

5 ([Chí+23], 2., p. 6). So sánh: (a) 2 & $\sqrt{3}$. (b) 6 & $\sqrt{41}$. (c) 7 & $\sqrt{47}$.

6 ([Chí+23], 3., p. 6). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các phương trình sau & sau đó làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3: (a) $x^2 = 2$. (b) $x^2 = 3$. (c) $x^2 = 3.5$. (d) $x^2 = 4.12$.

Hint. Nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2 = a$ với $a \geq 0$ là các căn bậc 2 của a .

7 ([Chí+23], 4., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x} = 15$. (b) $2\sqrt{x} = 14$. (c) $\sqrt{x} < \sqrt{2}$. (d) $\sqrt{2x} < 4$.

8 ([Chí+23], 5., p. 7). Tính cạnh 1 hình vuông biết diện tích của nó bằng diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng 3.5 m & chiều dài 14 m.

9 ([Thā+23], 1., p. 5). Tính căn bậc 2 số học của $0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0, -1$.

Giải. Căn bậc 2 số học của: $0.01, 0.04, 0.49, 0.64, 0.25, 0.81, 0.09, 0.16, 0$ lần lượt là $\sqrt{0.01} = 0.1, \sqrt{0.04} = 0.2, \sqrt{0.49} = 0.7, \sqrt{0.64} = 0.8, \sqrt{0.25} = 0.5, \sqrt{0.81} = 0.9, \sqrt{0.09} = 0.3, \sqrt{0.16} = 0.4, \sqrt{0} = 0$. Riêng -1 không có căn bậc 2 (số học) vì $-1 < 0$. \square

Lưu ý 1. Căn bậc 2 số học của số thực không âm $a \geq 0$ là \sqrt{a} . Căn bậc 2 của $a \geq 0$ là $\pm\sqrt{a}$ (i.e., bao gồm \sqrt{a} & $-\sqrt{a}$), đặc biệt: căn bậc 2 của 0 là $\pm\sqrt{0} = 0$. Mọi số thực âm $a < 0$ không có căn bậc 2.

10 ([Thā+23], 2., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 5$. (b) $x^2 = 6$. (c) $x^2 = 2.5$. (d) $x^2 = \sqrt{5}$. (e) $x^2 = -1$.

Giải. (a) $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (b) $x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$. (c) $x^2 = 2.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2.5}$. (d) $x^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{5}} = \pm\sqrt[4]{5}$. (e) $x^2 = -1$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > -1, \forall x \in \mathbb{R}$. \square

Lưu ý 2 (Phương trình bậc 2 $x^2 = a$). Giải & biện luận theo tham số a phương trình $x^2 = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (b) Trường hợp $a > 0$: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$. (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình bậc 2 $x^2 = a$ vô nghiệm vì $x^2 \geq 0 > a, \forall x \in \mathbb{R}$.

11 ([Thā+23], 3., p. 5). Số nào có căn bậc 2 là: (a) $\sqrt{5}$. (b) 1.5 . (c) -0.1 . (d) $-\sqrt{9}$.

Giải. (a) 5 có 1 căn bậc 2 là $\sqrt{5}$. (b) $1.5^2 = 2.25$ có 1 căn bậc 2 là 1.5 . (c) $(-0.1)^2 = 0.01$ có 1 căn bậc 2 là -0.1 . (d) 9 có 1 căn bậc 2 là $-\sqrt{9}$. \square

Lưu ý 3. Số có căn bậc 2 là a là số a^2 . Cụ thể hơn, a^2 có căn bậc 2 là $\pm a$, trong đó căn bậc 2 số học của a^2 là $|a|$.

12 ([Thā+23], 4., p. 5). Tìm $x \in \mathbb{R}$: (a) $\sqrt{x} = 3$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{x} = 0$. (d) $\sqrt{x} = -2$.

Giải. ĐKXD cho cả 4 ý: $x \geq 0$. (a) $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 9$. (b) $\sqrt{x} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 5$. (c) $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). Vậy $x = 0$. (d) Cách 1: Phương trình $\sqrt{x} = -2$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > -2, \forall x \in \mathbb{R}$. Cách 2: Căn bậc 2 số học thì không âm nên không tồn tại $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\sqrt{x} = -2$. \square

Lưu ý 4 (Phương trình bậc 2 $\sqrt{x} = a$). Giải & biện luận theo tham số a phương trình $\sqrt{x} = a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước. ĐKXD: $x \geq 0$. Xét 3 trường hợp: (a) Trường hợp $a = 0$: $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (b) Trường hợp $a > 0$: $\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^2 > 0$ (thỏa ĐKXD: nhận). (c) Trường hợp $a < 0$: phương trình vô tỷ $\sqrt{x} = a$ vô nghiệm vì $\sqrt{x} \geq 0 > a, \forall x \in \mathbb{R}$.

13 ([Thā+23], 5., p. 6). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) 2 & $\sqrt{2} + 1$. (b) 1 & $\sqrt{3} - 1$. (c) $2\sqrt{31}$ & 10 . (d) $-3\sqrt{11}$ & -12 .

Hint. Sử dụng tính chất: $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

1st giải. (a) $1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + 1 < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 2 < 1 + \sqrt{2}$. Vậy $2 < 1 + \sqrt{2}$. (b) $4 > 3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 - 1 > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{3} - 1$. Vậy $1 > \sqrt{3} - 1$. (c) $31 > 25 \Leftrightarrow \sqrt{31} > \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{31} > 2 \cdot 5 = 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $11 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -3 \cdot 4 = -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

Có thể bình phương 2 vế của 2 biểu thức cần so sánh như sau (đương nhiên sẽ tốn công hơn nhưng bù lại tự nhiên hơn Cách 1 đã được “tỉa gọt”, i.e., giấu các bước suy luận lòng vòng ngoài nháp để trình bày lời giải ‘chỉ 1 dòng biến đổi tương đương’):

2nd giải. (a) $(\sqrt{2}+1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2} > 3 + 2\sqrt{1} = 3 + 2 = 5 > 4 = 2^2 \Rightarrow \sqrt{2}+1 > 2$. (b) $(\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2 = 4 - 2\sqrt{3} < 4 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 - 3 = 1$, trong đó đã sử dụng $-2 < -\sqrt{3}$. Vậy $1 > \sqrt{3}-1$. (c) $(2\sqrt{31})^2 = 2^2(\sqrt{31})^2 = 4 \cdot 31 = 124 > 100 = 10^2 \Rightarrow 2\sqrt{31} > 10$. Vậy $2\sqrt{31} > 10$. (d) $(3\sqrt{11})^2 = 3^2(\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99 < 144 = 12^2 \Rightarrow 3\sqrt{11} < 12 \Leftrightarrow -3\sqrt{11} > -12$. Vậy $-3\sqrt{11} > -12$. \square

14 ([Thā+23], 6., p. 6). D/S? (a) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6. (b) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.06. (c) $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) $\sqrt{0.36} = \pm 0.6$.

Giải. (a) S: Căn bậc 2 của 0.36 là ± 0.6 (chứ không phải mỗi 0.6). (b) S: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 (chứ không phải 0.06). (c) Đ: $\sqrt{0.36} = 0.6$. (d) Đ: Căn bậc 2 của 0.36 là 0.6 & -0.6. (e) S: $\sqrt{0.36} = 0.6$ vì $-\sqrt{0.36} = -0.6$ & $\pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$ mới đúng. \square

15 ([Thā+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của 25?

Giải. Có $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $-\sqrt{5^2} = -\sqrt{25} = -5$, $-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -5$, mà căn bậc 2 số học của 25 là 5 nên suy ra $\sqrt{(\pm 5)^2}$ là căn bậc 2 số học của 25. \square

Lưu ý 5. Cả 4 số $\sqrt{(-5)^2}, \sqrt{5^2}, -\sqrt{5^2}, -\sqrt{(-5)^2}$ đều là căn bậc 2 của $5^2 = 25$, trong đó $\sqrt{(\pm 5)^2} = \sqrt{25} = 5 > 0$ là căn bậc 2 số học của $5^2 = 25$.

16 (Mở rộng [Thā+23], 7., p. 6). Trong các số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$, số nào là căn bậc 2 số học của a^2 với $a \in \mathbb{R}$ bất kỳ?

Giải. Có $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a^2} = |a|$, $-\sqrt{a^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, $-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a|$, mà căn bậc 2 số học của a^2 là a nên suy ra $\sqrt{(\pm a)^2}$ là căn bậc 2 số học của a^2 . \square

Lưu ý 6. Cả 4 số $\sqrt{(-a)^2}, \sqrt{a^2}, -\sqrt{a^2}, -\sqrt{(-a)^2}$ đều là căn bậc 2 của a^2 , trong đó $\sqrt{(\pm a)^2} = \sqrt{a^2} = |a| \geq 0$ là căn bậc 2 số học của a^2 , $\forall a \in \mathbb{R}$.

17 ([Thā+23], 8., p. 6). Chứng minh: $\sqrt{1^3+2^3} = 1+2$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3} = 1+2+3$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = 1+2+3+4$. Viết tiếp 1 số đẳng thức tương tự.

Chứng minh. $\sqrt{1^3+2^3} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3 = 1+2$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3} = \sqrt{1+8+27} = \sqrt{36} = 6 = 1+2+3$, $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = \sqrt{1+8+27+64} = \sqrt{100} = 10 = 1+2+3+4$. Ta có các đẳng thức:

$$\begin{aligned}\sqrt{1^3} &= 1, \\ \sqrt{1^3+2^3} &= 1+2, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3} &= 1+2+3, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} &= 1+2+3+4, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3} &= 1+2+3+4+5, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3} &= 1+2+3+4+5+6, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3} &= 1+2+3+4+5+6+7, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9, \\ \sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3} &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10.\end{aligned}$$

Dự đoán đẳng thức tổng quát:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n i^3} = \sqrt{1^3+2^3+\dots+n^3} = \sum_{i=1}^n i = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đẳng thức này đúng & có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học. \square

Lưu ý 7. Công thức tính tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2 = (1+2+\dots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Ta có thể kiểm nghiệm công thức trên bằng máy tính:

18. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ tính: (a) tổng n số nguyên dương đầu tiên. (b) tổng bình phương của n số nguyên dương đầu tiên. (c) tổng lập phương của n số nguyên dương đầu tiên. (d) Từ câu (a) & (c), kiểm tra đẳng thức (1). (e) tổng lũy thừa bậc $m \in \mathbb{R}$ của n số nguyên dương đầu tiên¹.

19 ([Thã+23], 9., p. 6). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Chứng minh: (a) $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b$.

Chứng minh. (a) Vì $a, b \geq 0$ & $a < b$ nên $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a} \geq 0$ (*). Có $a < b \Rightarrow 0 > a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ (**). Từ (*) & (**), suy ra $\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$ hay $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (b) $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, kết hợp điều này & (*), suy ra $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) < 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$. \square

Lưu ý 8. Từ chứng minh trên, ta thấy $a - b$ & $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ luôn cùng dấu:

$$(a - b)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \begin{cases} = 0, & \text{if } a = b, \\ > 0, & \text{if } a \neq b, \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Chặt chẽ & ngắn gọn hơn về công thức toán học, đẳng thức trên tương đương với đẳng thức:

$$\text{sign}(a - b) = \text{sign}(\sqrt{a} - \sqrt{b}), \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0,$$

trong đó $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$, $x \mapsto \text{sign } x$ là hàm dấu xác định trên tập số thực \mathbb{R} bởi công thức:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

20 ([Thã+23], 10., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. Áp dụng Bài toán 19 (a) lần lượt với $(a, b) = (1, m)$ & $(a, b) = (m, 1)$, ta được: (a) $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > \sqrt{1} = 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < \sqrt{1} = 1$. \square

21 ([Thã+23], 11., p. 6). Cho $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Chứng minh: (a) $m > 1 \Rightarrow m > \sqrt{m} > 1$. (b) $m < 1 \Rightarrow m < \sqrt{m} < 1$.

Chứng minh. (a) Theo Bài toán 20 (a): $m > 1 \Rightarrow \sqrt{m} > 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $m > \sqrt{m}$. (b) Theo Bài toán 20 (b): $m < 1 \Rightarrow \sqrt{m} < 1$. Nhân cả 2 vế của bất đẳng thức cuối với $\sqrt{m} > 0$, ta được $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m < \sqrt{m}$. \square

22 (Program to print out 1st n square roots). Với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím, viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra: (a) Căn bậc 2 của n . (b) Căn bậc 2 của n số nguyên dương đầu tiên.

Pascal:

```
program square_root;
var num, sqrt_num: real;
begin
write('Enter a number num = ');
readln(num);
sqrt_num := Sqrt(num);
writeln('sqrt of ', num, ' = ', sqrt_num)
end.
```

23 (Số chính phương). Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là số chính phương hay không.

24 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho số thực $x \geq 0$. So sánh \sqrt{x} với x .

Giải. Vì $x \geq 0$ nên \sqrt{x} có nghĩa/xác định & $\sqrt{x} \geq 0$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. (b) $\sqrt{x} < x \Leftrightarrow x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x) < 0$, mà $x \geq 0$ nên suy ra $1 - x < 0$, hay $x > 1$. (c) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$. \square

Nhận xét 1. Về mặt phương pháp để so sánh 2 số không âm ta có thể so sánh các bình phương của 2 số đó: $a \geq b > 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$. Về kết quả, khi so sánh \sqrt{x} với x ta thấy có thể xảy ra cả 3 trường hợp: lớn hơn, nhỏ hơn, hoặc bằng nhau tùy theo x ở trong khoảng giá trị nào, cụ thể: $x \in \{0, 1\} \Leftrightarrow \sqrt{x} = x$, $x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} < x$, & $0 < x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > x$.

25 ([BBN23], p. 30). Chứng minh $\sqrt{3} + \sqrt{5}, 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là 3 số vô tỷ.

26. Chứng minh tổng, hiệu, tích, thương của 2 số hữu tỷ (số chia $\neq 0$) là 1 số hữu tỷ.

¹Lũy thừa bậc thực của 1 số thực, i.e., a^b với $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, sẽ được học ở chương trình Toán Giải tích 11.

Chứng minh. Gọi 2 số hữu tỷ bất kỳ là $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0$. Tổng, hiệu, tích, thương của 2 số hữu tỷ (số chia $\neq 0$) là 1 số hữu tỷ vì:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0,$$

trong đó điều kiện $bcd \neq 0$ đã đảm bảo số chia khác 0. □

27 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 7). *Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. □

28. (a) *Chứng minh tích, & thương của 1 số hữu tỷ khác 0 với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.*² (b) *Chứng minh nếu tích hoặc thương của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số hữu tỷ thì số hữu tỷ đó bằng 0.*

29. *Xét tính hữu tỷ, vô tỷ của 2 số $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: (a) $a + b \in \mathbb{Q}$. (b) $a - b \in \mathbb{Q}$. (c) $ab \in \mathbb{Q}$. (d) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. (e) $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$. (f) $a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}$. (g) $a^3 + b^3 \in \mathbb{Q}$. (h) $a^3 - b^3 \in \mathbb{Q}$. (i) $a^m + b^n \in \mathbb{Q}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$. (j) $a^m - b^n \in \mathbb{Q}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.*

30 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 7). *Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là 2 số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là 2 số hữu tỷ.*

31 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 7). *Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.*

32 (Mở rộng [Bin23], Ví dụ 4, p. 7). *Chứng minh: Nếu số hữu tỷ a không có dạng $\frac{m^2}{n^2}$ với $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, thì \sqrt{a} là số vô tỷ.*

33 ([Bin23], 2., p. 8). *Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}, n \neq 0$.*

34 (Mở rộng [Bin23], 2., p. 8). *Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tìm điều kiện của a, b để: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$. (b) $a + \frac{\sqrt{b}}{c} \in \mathbb{Q}$.*

35 ([Bin23], 3., p. 8). *Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b, a^2, & b^2$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).*

36 ([Bin23], 4., p. 8). *So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12. (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2.*

37 ([Bin23], 5., p. 8). (a) *Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?*

38 ([Bin23], 6*, pp. 8–9). (a) *Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ & $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?*

2 Tìm Điều Kiện Để Biểu Thức Có Nghĩa

[1] ĐKXD của phân thức: $\frac{1}{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \neq 0$. [2] ĐKXD của căn thức bậc chẵn: $\sqrt[n]{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$. $\sqrt[n]{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. [3] ĐKXD của phân thức có mẫu là căn thức: $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$. [4] ĐKXD của căn thức bậc lẻ: $\sqrt[n]{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A$ có nghĩa. $\sqrt[n+1]{A}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A$ có nghĩa, $\forall n \in \mathbb{N}$.

39 ([TVM22], VD1, p. 5). *Tìm ĐKXD: (a) $A = \frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}}$. (b) $B = \frac{3x-2}{x-1} + \frac{4}{\sqrt{5-7x}}$. (c) $C = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4x+3} + \frac{1}{9-x^2}$. (d) $D = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+x-6}} - \frac{x}{2x^2-x-1}$.*

40 ([TVM22], VD2, p. 7). *Chứng minh biểu thức luôn có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$: (a) $A = \sqrt{x^2-x+1} - \frac{2}{x^2+2}$. (b) $B = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}+x} + \sqrt{2x^2-x+2}$.*

41 ([TVM22], VD3, p. 7). *Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để: (a) $A = \frac{\sqrt{3x-2}}{x-1} + \frac{6}{\sqrt{13-2x}} \in \mathbb{Z}$. (b) $B = \sqrt{9+4x-x^2} + \frac{3}{x-3} \in \mathbb{Z}$.*

²Không cần yêu cầu số vô tỷ khác 0 vì 0 là số hữu tỷ nên hiển nhiên 1 số vô tỷ bất kỳ luôn khác 0.

- 42 ([TVM22], 1., p. 8). Tìm ĐKXD: (a) $A = \sqrt{2x-1} + \frac{1}{x-2}$. (b) $B = \frac{2x-3}{\sqrt{3x+2}} - \sqrt{x-1}$. (c) $C = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x-2} + \sqrt{5-x}$. (d) $D = \sqrt{x^2-4} + \frac{1}{x-3}$. (e) $E = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + \sqrt{x^2+2}$. (f) $F = \sqrt{3-2x-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}$.
- 43 ([TVM22], 2., p. 8). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để: (a) $A = \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} \in \mathbb{Z}$. (b) $B = \sqrt{x^2-1} - \frac{8}{\sqrt{2(9-x^2)}}$. (c) $C = \sqrt{5-4x-x^2}$.
- 44 ([TVM22], 3., p. 9). Chứng minh biểu thức luôn có nghĩa $\forall x \in \mathbb{R}$: (a) $A = \frac{2x-1}{x-\sqrt{4x^2+1}}$. (b) $B = \sqrt{x^4+x+2} + \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+x+3}}$.

3 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

[Thá+24, Chap. III, §2, pp. 55–60]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. HD4. LT4. HD5. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

- 45 ([Chí+23], ?1, p. 8). Hình chữ nhật ABCD có đường chéo dài 5 cm & cạnh $BC = x$ cm. tính AB.
- 46 ([Chí+23], ?2, p. 8). Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $\sqrt{5-2x}$ xác định?
- 47 ([Chí+23], ĐL, p. 9). Chứng minh: $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 48 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 9). Tính: (a) $\sqrt{12^2}$. (b) $\sqrt{(-7)^2}$.
- 49 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 9). Rút gọn: (a) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$. (b) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$.
- 50 ([Chí+23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn: (a) $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$. (b) $\sqrt{a^6}$ với $a < 0$.
- 51 ([Chí+23], 6., p. 10). Với giá trị nào của $a \in \mathbb{R}$ thì mỗi căn thức sau có nghĩa? (a) $\sqrt{\frac{a}{3}}$. (b) $\sqrt{-5a}$. (c) $\sqrt{4-a}$. (d) $\sqrt{3a+7}$.
- 52 ([Chí+23], 7., p. 10). Tính: (a) $\sqrt{(0.1)^2}$. (b) $\sqrt{(-0.3)^2}$. (c) $-\sqrt{(-1.3)^2}$. (d) $-0.4\sqrt{(-0.4)^2}$.
- 53 ([Chí+23], 8., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$. (b) $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$. (c) $2\sqrt{a^2}$ với $a \geq 0$ & với $a \in \mathbb{R}$. (d) $3\sqrt{(a-2)^2}$ với $a < 2$ & với $a \in \mathbb{R}$.
- 54 ([Chí+23], 9., p. 11). Tìm x thỏa: (a) $\sqrt{x^2} = 7$. (b) $\sqrt{x^2} = |-8|$. (c) $\sqrt{4x^2} = 6$. (d) $\sqrt{9x^2} = |-12|$.
- 55 ([Chí+23], 10., p. 11). Chứng minh: (a) $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$. (b) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = -1$.
- 56 ([Chí+23], 11., p. 11). Tính: (a) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$. (b) $36 : \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 18} - \sqrt{169}$. (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$. (d) $\sqrt{3^2+4^2}$.
- 57 ([Chí+23], 12., p. 11). Tìm x để mỗi căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{2x+7}$. (b) $\sqrt{-3x+4}$. (c) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$. (d) $\sqrt{1+x^2}$.
- 58 ([Chí+23], 13., p. 11). Rút gọn các biểu thức: (a) $2\sqrt{a^2} - 5a$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{25a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{9a^4} + 3a^2$. (d) $5\sqrt{4a^6} - 3a^3$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$.
- 59 ([Chí+23], 14., p. 11). Phân tích thành nhân tử: (a) $x^2 - 3$. (b) $x^2 - 6$. (c) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$. (d) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5$.
- Hint. $a = (\sqrt{a})^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.
- 60 ([Chí+23], 15., p. 11). Giải phương trình: (a) $x^2 - 5 = 0$. (b) $x^2 - 2\sqrt{11}x + 11 = 0$.
- 61 ([Chí+23], 16., p. 12). Tìm chỗ sai trong phép chứng minh “Con muỗi nặng bằng con voi” sau: Giả sử con muỗi nặng m g, còn con voi nặng V g. Ta có: $m^2 + V^2 = V^2 + m^2$. Cộng cả 2 vế với $-2mV$, ta có: $m^2 - 2mV + V^2 = V^2 - 2mV + m^2$, hay $(m-V)^2 = (V-m)^2$. Lấy căn bậc 2 mỗi vế của đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{(m-V)^2} = \sqrt{(V-m)^2}$. Do đó $m-V = V-m$. Từ đó ta có $2m = 2V$, suy ra $m = V$. Vậy con muỗi nặng bằng con voi!
- 62 ([Thā+23], 12., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ để căn thức sau có nghĩa: (a) $\sqrt{-2x+3}$. (b) $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{4}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{-5}{x^2+6}}$.
- 63 ([Thā+23], 13., p. 7). Rút gọn rồi tính: (a) $5\sqrt{(-2)^4}$. (b) $-4\sqrt{(-3)^6}$. (c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$. (d) $2\sqrt{(-5)^6} + 3\sqrt{(-2)^8}$.
- 64 ([Thā+23], 14., p. 7). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$. (b) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$. (c) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$. (d) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$.
- 65 ([Thā+23], 15., p. 7). Chứng minh: (a) $9 + 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)^2$. (b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$. (c) $(4-\sqrt{7})^2 = 23 - 8\sqrt{7}$. (d) $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$.

66 ([Thã+23], 16., p. 7). Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ? (a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$. (b) $\sqrt{x^2-4}$. (c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$. (d) $\sqrt{\frac{2+x}{5-x}}$.

67 ([Thã+23], 17., p. 8). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$. (b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$. (c) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$. (d) $\sqrt{x^4} = 7$.

68 ([Thã+23], 18., p. 8). Phân tích nhân tử: (a) $x^2 - 7$. (b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$. (c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

69 ([Thã+23], 19., p. 8). Tìm DKXD rồi rút gọn các phân thức: (a) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$. (b) $\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$.

70 ([Thã+23], 20., p. 8). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $6 + 2\sqrt{2}$ & 9. (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & 3. (c) $9 + 4\sqrt{5}$ & 16. (d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ & 2.

71 ([Thã+23], 21., p. 8). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$. (c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$ & $x \in \mathbb{R}$. (d) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$ & $x \in \mathbb{R}$.

72 ([Thã+23], 22., p. 8). (a) Chứng minh: $\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên với $n = 1, 2, \dots, 10$. (b) Tính $\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2}$ với $x \in \mathbb{R}$ rồi so sánh với $|(x+1)^2 - x^2|$.

73 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 5). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$ & $a = b + c$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \frac{2(c+b-a)}{abc} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a = b + c$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

74. Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}, abc \neq 0$ & $a + b + c = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 - \frac{2(a+b+c)}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ vì $a+b+c=0$. Suy ra $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$. Có $a, b, c \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. $a + b + c = 0 \Leftrightarrow -a = b + c$, nên ta có thể áp dụng bài toán 73 cho bộ 3 số $(-a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, -abc \neq 0$ để thu được $\sqrt{\frac{1}{(-a)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$, i.e., $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

Nhận xét 2 (Proof of $\in \mathbb{Q}$). Để chứng minh 1 số là số hữu tỷ ta biểu diễn số đó thành 1 biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ, nhân, chia (cho 1 số khác 0) của các số hữu tỷ.

75. (a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}, abc \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$? (b) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}, abcd \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}$? (c) Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, abcde \neq 0$, khi nào thì $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}$? (d) Cho $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, khi nào thì xảy ra đẳng thức sau?

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}, \text{ i.e., } \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

76. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}, abcd \neq 0$ & $ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}} \in \mathbb{Q}$.

77. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}, abcde \neq 0$ & $abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde = 0$. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{e^2}} \in \mathbb{Q}$.

78. Cho $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{Q}, \forall i = 1, 2, \dots, n, \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, & $\sum_{\text{cyc}} a_1 a_2 \dots a_{n-2} = 0$. Chứng minh:

$$A = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}} \in \mathbb{Q}.$$

Lưu ý 9 (Cyclic sum). Ký hiệu \sum_{cyc} được gọi là tổng cyclic. Xem định nghĩa & ví dụ tại, e.g., [AoPS/cyclic sum](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum)³.

79 ([Tuy23], 1., p. 6). Tính $A = \sqrt{\frac{8^{10} - 4^{10}}{4^{11} - 8^4}}$.

Phân tích. 4, 8 đều là lũy thừa của 2 nên sẽ tiện hơn nếu đưa tất cả các lũy thừa trong A về lũy thừa với cơ số 2.

Giải. $A = \sqrt{\frac{(2^3)^{10} - (2^2)^{10}}{(2^2)^{11} - (2^3)^4}} = \sqrt{\frac{2^{30} - 2^{20}}{2^{22} - 2^{12}}} = \sqrt{\frac{2^{20}(2^{10} - 1)}{2^{12}(2^{10} - 1)}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$ \square

80 ([Tuy23], 2., p. 6). Cho $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \underbrace{00 \dots 0}_{10's} 9$. Tính \sqrt{A} .

1st giải. $A = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 4 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{11's} + 9 = (\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 - 3)(\underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7 + 3) + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 - 3^2 + 9 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7^2 \Rightarrow \sqrt{A} = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

2nd giải. $A = (10^{10} - 1) \cdot 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10^{12} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 10 \cdot 10^{11} + 4 \cdot 10^{11} + 9 = 10^{22} - 6 \cdot 10^{11} + 9 = (10^{11} - 3)^2 \Rightarrow \sqrt{A} = 10^{11} - 3 = \underbrace{99 \dots 9}_{10's} 7.$ \square

81 ([Tuy23], 3., p. 6). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh: (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15}$ & $\sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6}$ & $\sqrt{2}$.

Hint. Tìm các số chính phương gần với các số dưới dấu căn để đơn giản dấu căn 1 cách hợp lý.

Giải. (a) $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, & $\sqrt{65} - 1 > \sqrt{64} - 1 = 8 - 1 = 7$. Suy ra $\sqrt{8} + \sqrt{15} < \sqrt{65} - 1$. (b) $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \frac{13 - 2\sqrt{4}}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$. Mặt khác, $(1.5)^2 = 2.25 > 2 \Leftrightarrow 1.5 > \sqrt{2}$, nên $\frac{13 - 2\sqrt{3}}{6} > \sqrt{2}$. \square

82 ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm điều kiện xác định (ĐKXD) & tập xác định (TXD) của các biểu thức: (a) $\sqrt{2 - x^2}$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

Giải. (a) $\sqrt{2 - x^2}$ xác định $\Leftrightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. ĐKXD: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. TXD: $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (b) $\frac{x}{\sqrt{5x^2 - 3}}$ xác định $\Leftrightarrow 5x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. ĐKXD: $x > \sqrt{\frac{3}{5}}$ hoặc $x < -\sqrt{\frac{3}{5}}$. TXD: $D = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{5}}, \infty)$. (c) $\sqrt{-4x^2 + 4x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow -4x^2 + 4x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(2x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. ĐKXD: $x = \frac{1}{2}$. TXD: $D = \{\frac{1}{2}\}$. (d) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ hoặc $x < -2$. ĐKXD: $x > 1$ hoặc $x < -2$. TXD: $D = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$. \square

83 ([Tuy23], 5., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một. Chứng minh $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$.

1st giải. $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}\right) = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 - \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right)^2 \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$. Vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, suy ra $\frac{1}{a-b}, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right| \in \mathbb{Q}$. \square

2nd giải. Vì $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$, & vì $a, b, c \in \mathbb{Q}$ khác nhau đôi một nghĩa là $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ nên có thể áp dụng Bài toán 74 cho bộ 3 số $(a-b, b-c, c-a)$ để thu được $A = \sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} \in \mathbb{Q}$. \square

84 ([Tuy23], 6., p. 6). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh $A = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \in \mathbb{Q}$.

Giải. $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$, $b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+c)(b+a)$, $c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$, nên $A = \sqrt{(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)} = \sqrt{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} = |(a+b)(b+c)(c+a)|$. Có: $a, b, c \in \mathbb{Q} \Rightarrow A = |(a+b)(b+c)(c+a)| \in \mathbb{Q}$. \square

85 ([Tuy23], 7., p. 6-7). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{-x^2 + x + \frac{3}{4}}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{4x^4 - 4x^2(x+1) + (x+1)^2 + 9}$. (c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2}$.

86 ([Tuy23], 8., p. 7). Cho $x < 0$, rút gọn biểu thức $A = |2x - \sqrt{(5x-1)^2}|$.

³URL: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Cyclic_sum.

- 87 ([Tuy23], 9., p. 7). Cho biểu thức $A = 4x - \sqrt{9x^2 - 12x + 4}$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = \frac{2}{7}$.
- 88 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho biểu thức $A = 5x + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm x để $B = -9$.
- 89 ([Tuy23], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{R}$ biết $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} \leq 5 - x$.
- 90 ([Tuy23], 12., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x + 1}$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$. (c) $\sqrt{x^2 - 4} - x^2 + 4 = 0$.
- 91 ([Tuy23], 13., p. 7). Giải phương trình: (a) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 4x + 9} = 3 + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{2 - x^2 + 2x} + \sqrt{-x^2 - 6x - 8} = 1 + \sqrt{3}$. (c) $\sqrt{9x^2 - 6x + 2} + \sqrt{45x^2 - 30x + 9} = \sqrt{6x - 9x^2 + 8}$.
- 92 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 9). Trên 1 khúc sông, dòng chảy của nước ở bề mặt sông lớn hơn dòng chảy của nước ở đáy sông. Gọi v km/h là vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông, f km/h là vận tốc dòng chảy ở đáy sông, các nhà vật lý (physicists) đã tính được $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1.3$. (a) Nếu vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông là 9 km/h thì vận tốc dòng chảy ở đáy sông là bao nhiêu? (b) Tính vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông khi vận tốc dòng chảy ở đáy sông là 20.25 km/h.
- 93 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 9). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 10$. (b) $\sqrt{2x + 1} = 5$. (c) $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{3x - 1}$.
94. Giải 8 biện luận phương trình theo các tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: (a) $x^2 = a$. (b) $\sqrt{ax + b} = c$. (c) $\sqrt{ax + b} = \sqrt{cx + d}$.
- 95 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 10). So sánh: (a) 6 và $\sqrt{32}$. (b) $\sqrt{17} + \sqrt{10}$ và $\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}$ và 3.
- 96 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(a - 3)^2}$ với $a \leq 3$. (b) $2\sqrt{a^2 - 10a + 25}$ với $a \geq 5$.
- 97 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7$. (b) $\sqrt{x - 10}\sqrt{x + 25} = 3$.
- 98 ([BBN23], Ví dụ 6, p. 11). Nguyên biện toán học: “Bất kỳ 2 số nào cũng bằng nhau”: Với 2 số a, b tùy ý, ta luôn có: $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 = (b - a)^2$. Khai căn bậc 2 2 vế, ta được: $a - b = b - a$, suy ra $2a = 2b \Leftrightarrow a = b$. Vậy bất kỳ 2 số nào cũng bằng nhau. Tìm điểm sai.
- 99 ([BBN23], Ví dụ 7, p. 11). (a) Tìm GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 8x + 20} - 12$. (b) Tìm GTLN của biểu thức $B = 5 + \sqrt{-4x^2 - 4x + 6}$.

Lưu ý 10. (a) Để tìm GTNN của 1 biểu thức A có dạng $A = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$, ta cần biến đổi biểu thức dưới dấu căn của A về dạng $f^2(x) + C$ ($C \geq 0$ là hằng số) rồi nhận xét $\sqrt{f^2(x) + C} \geq \sqrt{C}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = 0$. (b) Để tìm GTLN của 1 biểu thức B có dạng $B = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$, ta cần biến đổi biểu thức dưới dấu căn của B về dạng $-f^2(x) + C$ ($C \geq 0$ là hằng số) rồi nhận xét $\sqrt{-f^2(x) + C} \leq \sqrt{C}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = 0$.

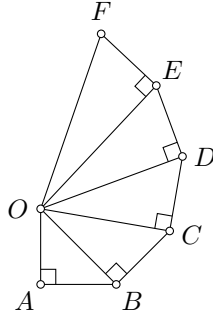
- 100 ([BBN23], 1.1., p. 12). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng:

| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| AB | 7 cm | 0.3 m | |
| AC | 24 cm | | 12 dm |
| BC | | 0.5 m | 15 dm |

- 101 ([BBN23], 1.2., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $3\sqrt{x + 1} = 18$. (b) $(2x)^2 = 64$. (c) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 7$.
- 102 ([BBN23], 1.3., p. 12). Tìm ĐKXD: (a) $\sqrt{15 - 3x}$. (b) $\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$. (c) $\sqrt{2x + 10} + \frac{1}{x^2 - 4}$.
- 103 ([BBN23], 1.4., p. 12). Tính: (a) $\sqrt{0.09} \cdot \sqrt{25} - \sqrt{49} + \sqrt{\frac{121}{100}}$. (b) $\sqrt{8^2 + 6^2} + 2\sqrt{\sqrt{625}}$.
- 104 ([BBN23], 1.5., p. 12). Cho 6 số: $\sqrt{21}, 5, \sqrt{38}, -\sqrt{50}, 7, -\sqrt{37}$. Sắp xếp 6 số trên theo thứ tự tăng dần và tìm số dương nhỏ nhất.
- 105 ([BBN23], 1.6., p. 12). Tính cạnh của hình vuông, biết diện tích của hình vuông đó bằng diện tích hình tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là 12.8 m, 40 m.
- 106 ([BBN23], 1.7., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 4)^2}$. (b) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$. (c) $\sqrt{4a^2} - 5a$ với $a > 0$. (d) $\sqrt{a^2 - 6a + 9} - 2\sqrt{a^2 + 8a + 16}$ với $-4 \leq a < 3$.
- 107 ([BBN23], 1.8., p. 12). Để tính giá trị của biểu thức $A = 3a + \sqrt{1 - 6a + 9a^2}$ tại $a = 2$, Việt làm như sau: $A = 3a + \sqrt{(1 - 3a)^2} = 3a + (1 - 3a) = 1$. Nam lại tính: $A = 3 \cdot 2 + \sqrt{1 - 6 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2} = 6 + \sqrt{25} = 6 + 5 = 11$. Ai đúng ai sai? Sai ở đâu?
- 108 ([BBN23], 1.9., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x^2} = |-3|$. (b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.
- 109 ([BBN23], 1.10., p. 12). Tìm GTLN của biểu thức: (a) $A = \sqrt{7 - 2x^2}$. (b) $B = 7 + \sqrt{-4x^2 + 2x}$.
- 110 ([BBN23], 1.11., p. 13). Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = 2\sqrt{x^2 + 3x + 5}$. (b) $B = \frac{3}{1 + \sqrt{2x - x^2 + 8}}$.

111 ([BBN23], 1.12., p. 13). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ thỏa $a + b + c + d = 0$. Chứng minh $\sqrt{(ab - cd)(bc - ad)(ca - bd)} \in \mathbb{Q}$.

112 ([BBN23], 1.13., p. 13). Cho hình vẽ:



với $OA = AB = BC = CD = DE = EF = 1$ cm. (a) Tính độ dài 5 đoạn thẳng OB, OC, OD, OE, OF . (b) Vẽ đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{10}$ cm. (c) Nêu cách vẽ đoạn thẳng có độ dài \sqrt{n} cm với $n \in \mathbb{N}$ bằng thước thẳng & compa.

113 ([BBN23], 1.14., p. 13). Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt{4n+1} \in \mathbb{N}$.

114 ([BBN23], 1.15., p. 13). Cho $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ gồm 2015 dấu căn bậc 2. Chứng minh $A \notin \mathbb{N}$.

115 ([BBN23], p. 14). Chứng minh đồng nhất thức: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

116 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$ sao cho $a + b + c = 0$.

117 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$.

118 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2}} = \left|a + \frac{1}{b} - \frac{a}{ab+1}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $ab \neq -1$.

119 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2}} = \left|a + b - \frac{ab}{a+b}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -b$.

120 ([BBN23], 1., p. 14). Chứng minh với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau: $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$.

121 ([BBN23], 2., p. 15). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$.

122 ([BBN23], 3., p. 15). Tính $A = \sqrt{1 + 2015^2 + \frac{2015^2}{2016^2}} + \frac{2015}{2016}$.

123 ([BBN23], 4., p. 15). Tính $A = \sqrt{0.43^2 + 0.57^2 + 0.43^2 \cdot 0.57^2}$.

124. Tính $A = \sqrt{x^2 + (1-x)^2 + x^2 \cdot (1-x)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

125 ([BBN23], p. 15). (a) Tính $A = \sum_{i=2}^{2015} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2016^2}}$.

(b) Tính $A_n = \sum_{i=2}^n \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

126 ([BBN23], p. 15). (a) Tính $A = \sqrt{1 + \underbrace{99\dots 9^2}_{2015} + \underbrace{0.99\dots 9^2}_{2015}}$. (b) Tính $A_n = \sqrt{1 + \underbrace{99\dots 9^2}_n + \underbrace{0.99\dots 9^2}_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

127 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.

128 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

129 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x+1} < x+3$.

- 130** ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$. (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.
- 131** ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A . (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.
- 132** ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.
- 133** ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

4 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

- 134** ([BBN23], p. 16). Với A, B là 2 biểu thức đại số. Khi nào thì: $\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$. (b) $\sqrt{A-B} = \sqrt{A} - \sqrt{B}$?
- 135** ([BBN23], Ví dụ 1, p. 17). Tính: (a) $\sqrt{12.5 \cdot 10 \cdot 4500}$. (b) $\sqrt{685^2 - 684^2}$. (c) $\sqrt{\frac{27}{13}} : \sqrt{14\frac{10}{13}}$. (d) $\left(\sqrt{9 - \sqrt{17}} + \sqrt{9 + \sqrt{17}} \right)^2$.
- 136** ([BBN23], Ví dụ 2, p. 18). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{8x} \cdot \sqrt{2} = 10$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x + 3} = 0$. (c) $\frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{\sqrt{3x - 5}} = 4$.
- 137** ([BBN23], Ví dụ 3, p. 18). 2 bạn Việt & Nam cùng giải bài toán tìm $x \in \mathbb{R}$: $\frac{\sqrt{2x-5}}{\sqrt{x-2}} = 2$. Việt làm như sau: $\frac{\sqrt{2x-5}}{\sqrt{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x-5}{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2x-5 = 4x-8 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1.5$. Nam làm như sau: Điều kiện $2x-5 \geq 0$ & $x-2 > 0$, suy ra $x \geq 2.5$. Rồi cũng giải để tìm ra $x = 1.5$ như Việt. Đối chiếu với điều kiện $x \geq 2.5$, Nam kết luận phương trình vô nghiệm. Ai đúng ai sai? Giải thích.
- 138** ([BBN23], Ví dụ 4, p. 19). Rút gọn $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b < 0$.
- 139** ([BBN23], Ví dụ 5, p. 19). Rút gọn $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.
- 140** ([BBN23], Ví dụ 6, p. 19). Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x+4+2\sqrt{16-x^2}}{8-2x+\sqrt{16-x^2}}$ tại $x = \frac{8}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$.
- 141** ([BBN23], Ví dụ 7, p. 20). (a) Cho $a \geq b \geq 0$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a-b} \leq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. (b) Áp dụng: Tìm GTNN của $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ & GTLN của $B = \sqrt{2x-7} - \sqrt{2x-11}$.
- Lưu ý 11.** Khi chứng minh bất đẳng thức chứa căn thức ta thường bình phương 2 vế & sử dụng tính chất: Với $A \geq 0, B \geq 0$, $A^2 > B^2 \Rightarrow A > B$, $A^2 \geq B^2 \Rightarrow A \geq B$.
- 142** ([BBN23], 2.1., p. 20). Tính đường kính của 1 mặt ghế hình tròn, biết diện tích của nó bằng diện tích hình vuông có cạnh là 2.6 dm.
- 143** ([BBN23], 2.2., p. 20). Rút gọn $\left(\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{y}{x}} \right) \sqrt{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < 0, y < 0$.
- 144** ([BBN23], 2.3., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa $\sqrt{4x^2 - 25} = \sqrt{4x + 10}$.
- 145** ([BBN23], 2.4., p. 20). Tính: (a) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \right) : \left(\frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}} \right)$. (b) $\sqrt{27(1-\sqrt{3})^2} : 3\sqrt{75}$.
- 146** ([BBN23], 2.5., p. 21). So sánh: (a) $x = \sqrt{16} + \sqrt{28}, y = \sqrt{14} + \sqrt{30}$. (b) $x = \frac{\sqrt{319^2 - 306^2}}{\sqrt{67^2 - 54^2}}, y = \sqrt{23 - 8\sqrt{7}}(4 + \sqrt{7}) : (3\sqrt{3})$.
- 147** ([BBN23], 2.6., p. 21). Tính: $A = \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{7+\sqrt{2}}}}$.
- 148** ([BBN23], 2.7., p. 21). Cho 6 số thực dương $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Chứng minh:

$$\sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)} = \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2}.$$

149 ([BBN23], 2.8., p. 21). Tìm GTLN: (a) $A = \sqrt{3x-5} - \sqrt{3x-10}$. (b) $B = \sqrt{4x+1} - \sqrt{16x-12}$.

150 ([BBN23], 2.9., p. 21). Chứng minh: nếu 3 đoạn thẳng có độ dài $a, b, c \in \mathbb{R}$ lập thành 1 tam giác thì 3 đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng lập thành 1 tam giác.

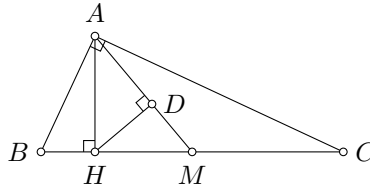
151 ([BBN23], 2.10., p. 21). Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. (a) Chứng minh $x^2 - 2x = 4$. (b) Tính giá trị của biểu thức $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x + 4}{x^3 - 3x + 5}$.

152 ([BBN23], p. 21, Vận tốc của máy thăm dò vũ trụ). Vận tốc tối thiểu của máy thăm dò vũ trụ để thắng sức hút của Trái Đất là $v = 1.15 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{m}{r}}$, trong đó m là khối lượng của Trái Đất tính theo kg, r là bán kính Trái Đất tính theo m, v là vận tốc máy thăm dò tính theo m/s. Biết $m \approx 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $r \approx 6.38 \cdot 10^6$ m. Tính vận tốc tối thiểu của máy thăm dò vũ trụ.

Định nghĩa 1 (Trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. $m := \frac{a+b}{2}$ được gọi là trung bình cộng của a, b . $n := \sqrt{ab}$ được gọi là trung bình nhân của a, b . $p := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ được gọi là trung bình điều hòa của a, b .

153 ([BBN23], p. 22). Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Gọi m, n, p lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa của a, b . Chứng minh $p \leq n \leq m$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

154 ([BBN23], p. 22). Vẽ $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM sao cho $BH = a$, $CH = b$. Hạ $HD \perp AM$ tại D . Chứng minh $AD \leq AH \leq AO$. Từ đó suy ra bất đẳng thức $p \leq n \leq m$ với m, n, p lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa của a, b .



Định nghĩa 2 (Căn thức đồng dạng). 2 căn thức bậc 2 được gọi là đồng dạng nếu chúng có cùng biểu thức dưới dấu căn.

Ví dụ 1 ([BBN23], p. 22). (a) 3 biểu thức $\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, -5\sqrt{7}$ được gọi là đồng dạng với nhau. (b) 3 biểu thức $\frac{1}{2}\sqrt{x}, 5\sqrt{x}, -\frac{4}{7}\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, được gọi là đồng dạng với nhau.

Muốn cộng trừ các căn thức bậc 2 ta thu gọn các căn thức đồng dạng.

155 ([BBN23], p. 23, Công thức căn phức tạp). Chứng minh:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a^2 \geq b. \quad (2)$$

Công thức (2) được gọi là công thức căn phức tạp. Nhờ công thức này, biểu thức $a \pm \sqrt{b}$ có thể dễ dàng viết được thành bình phương của 1 tổng hoặc hiệu, do đó tính được $a \pm \sqrt{b}$.

156 ([BBN23], p. 23). Tính: (a) $A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$. (b) $B = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{2}}}}$.

5 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

[Thá+24, Chap. III, §3, pp. 61–71]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. HD4. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

157 ([BBN23], 1., p. 25). Đưa thừa số ra ngoài dấu căn của biểu thức $\sqrt{25(-a)^2 b^3}$ với $b \geq 0$.

158 ([BBN23], 2., p. 25). Đưa thừa số vào trong dấu căn của biểu thức $(1-x)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ với $x > 1$.

159 ([BBN23], 3–4., p. 21). (a) Khử mẫu của biểu thức $\sqrt{\frac{15}{24}}$. (b) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$.

160 ([BBN23], 5., p. 25). Đ/S? (a) $-3\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-3)^2 \cdot \frac{1}{2}}$. (b) $\frac{3 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}$. (c) $-4\sqrt{3} < -3\sqrt{4}$. (d) $\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2} = \frac{9 - 4\sqrt{7}}{3}$.

161 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 25). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{12 + 3\sqrt{27} - 5\sqrt{48}}$. (b) $B = 3\sqrt{a^2 + 2} - 3\sqrt{16a^2 + 32} + 4\sqrt{25a^2 + 50}$.

162 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 26). Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: $5\sqrt{2}, \sqrt{39}, 3\sqrt{8}, 2\sqrt{15}$.

163 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 26). Viết số nghịch đảo của mỗi số sau dưới dạng không chứa dấu căn ở mẫu: $4\sqrt{3}, 3\sqrt{5}+5\sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$.

164 ([BBN23], p. 26). Chứng minh: $\frac{A}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}} = \frac{A(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}, \forall A, a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \geq 0, a^2b \neq c^2d$.

165 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 27). Tìm $x \in \mathbb{R}$ & viết kết quả không chứa dấu căn ở mẫu: (a) $4(5-x\sqrt{3})+6=10-x\sqrt{12}$. (b) $x\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{3}(1+x)-\sqrt{20}$.

166 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 27). Cho $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}-1}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}$. Tính $B = (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2015}$.

Lưu ý 12. Căn thức liên hợp của $\sqrt{\sqrt{a}+b} \pm c$ là $\sqrt{\sqrt{a}+b} \mp c$.

167 ([BBN23], Ví dụ 6, p. 27). Cho $A = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$. Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = \frac{9}{2}$.

168 ([BBN23], Ví dụ 7, p. 28). Trục căn thức ở mẫu của biểu thức $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

Lưu ý 13. Nếu mẫu số/mẫu thức là tổng/hiệu của n căn thức với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$, ta phải thực hiện nhân biểu thức căn liên hợp khoảng $n-1$ lần.

169 ([BBN23], Ví dụ 8, p. 28). Tính $A = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

170 ([BBN23], 3.1., p. 29). Sắp xếp theo thứ tự giảm dần: $3\sqrt{10}, 5\sqrt{3}, \frac{20}{\sqrt{5}}, 12\sqrt{\frac{2}{3}}$.

171 ([BBN23], 3.2., p. 29). Rút gọn: (a) $\frac{2}{2a-1}\sqrt{3a^2(4a^2-4a+1)}$ với $0 < a < \frac{1}{2}$. (b) $\left(a\sqrt{\frac{10}{a}} + \sqrt{\frac{2a}{5}} + \sqrt{10a}\right) : \sqrt{10a}$ với $a > 0$.

172 ([BBN23], 3.3., p. 29). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: $\frac{2}{3}\sqrt{9x-27} + \sqrt{x-3} = 6 - \sqrt{4x-12}$.

173 ([BBN23], 3.4., p. 29). Cho $x = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{8}}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$. Tính $x + \frac{1}{x}$.

174 ([BBN23], 3.5., p. 29). Biết bình phương của 1 số bằng 3 lần số đó cộng với 1. (a) Viết đẳng thức diễn tả mối quan hệ đó. (b) Chứng tỏ 2 số $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ là 2 số thỏa mãn bài toán.

175 ([BBN23], 3.6., p. 29). Tính $A = \frac{4+\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{7}} + \frac{4-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-\sqrt{4}-\sqrt{7}}$.

176 ([BBN23], 3.7., p. 29). Cho $A = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 2x - 2)^{2016} + 2015$. Tính giá trị của A tại $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

177 ([BBN23], 3.8., p. 29). Viết số nghịch đảo của mỗi số sau dưới dạng không chứa dấu căn ở mẫu: (a) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$. (b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

178 ([BBN23], 3.9., p. 29). Rút gọn biểu thức $A = 2\sqrt{45\sqrt{3}} + 2\sqrt{20\sqrt{3}} - 3\sqrt{\sqrt{75}} - \sqrt{245\sqrt{3}}$.

179 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 30). Tính tổng: (a) $S(2014) = \sum_{i=1}^{2014} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2015}}$. (b) $S(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

180 ([BBN23], p. 30). Tính $S(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$. Tính $S(1006)$.

181 ([BBN23], p. 30). Tính $S = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2018}}$. Tìm công thức tổng quát.

182 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 30). Tính tổng $S = \frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2015\sqrt{2014}+2014\sqrt{2015}}$. Tìm công thức tổng quát.

183 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 31). Chứng minh $S = \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{2016\sqrt{2015}} < 2$.

Lưu ý 14. Để tính tổng chứa căn thức có quy luật, ta thường biến đổi mỗi số hạng của tổng thành hiệu của 2 số có quy luật rồi giản ước liên tiếp chỉ còn lại số hạng đầu & số hạng cuối. Tương tự, để ước lượng tổng chứa căn thức có quy luật, ta thường làm trội/làm giảm mỗi số hạng của tổng bởi hiệu của 2 số có quy luật rồi giản ước liên tiếp chỉ còn lại số hạng đầu & số hạng cuối.

6 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

[Thá+24, Chap. III, §4, pp. 67–66]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. HD4. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5.

184 ([BBN23], 1., p. 33). Tìm ĐKXD của biểu thức $\frac{\sqrt{1-4x^2}}{1+2x}$.

185 ([BBN23], 2., p. 33). Rút gọn biểu thức $\sqrt{45(-x)^3y^4} : \sqrt{5(-x)y^2}$ với $x, y \in \mathbb{R}, x < 0, y \neq 0$.

186 ([BBN23], 3., p. 33). Tính $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3})\sqrt{7} - \sqrt{7}$.

187 ([BBN23], 4., p. 33). Rút gọn biểu thức $\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} : \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ với $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$.

188 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 33). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{(\sqrt{5}+1)^3}{\sqrt{125}+10}$. (b) $\frac{\sqrt{4+\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1}$.

189 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 34). Chứng minh đẳng thức: $\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a \neq b$.

190 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 34). Chứng minh biểu thức $A = \frac{-15\sqrt{a}+3}{a+2\sqrt{a}-3} + \frac{5\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1} - \frac{5\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}+3}$ với $a \in \mathbb{R}, a \geq 0, a \neq 1$, không phụ thuộc vào biến a .

191 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 34). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$. (a) Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức A . (b) Tìm giá trị của A khi $x = 7 - 2\sqrt{6}$. (c) Tìm giá trị của x để $A = \frac{62}{5}$. (d) Tìm GTNN của A .

Định lý 1 (Nguyên tắc Dirichlet). Nếu đem nhốt $n+1$ con chim bồ câu vào n chiếc lồng thì tồn tại 1 lồng nhốt ít nhất 2 con chim bồ câu.

192 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 35). Cho tập hợp $= \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2015}\}$. Chứng minh trong 45 số khác nhau tùy ý được lấy từ tập A luôn tồn tại ít nhất 2 số có hiệu nhỏ hơn 1.

193 ([BBN23], 4.1., p. 36). Tính: (a) $\left(a\sqrt{\frac{6}{a}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} + \sqrt{6a}\right) : \sqrt{6a}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$. (b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0, a \neq b$.

194 ([BBN23], 4.2., p. 36). Chứng minh đẳng thức: (a) $\sqrt{23+8\sqrt{7}} - \sqrt{7} = 4$. (b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$.

195 ([BBN23], 4.3., p. 36). Cho hình vuông có độ dài cạnh bằng 1. Chứng minh độ dài đường chéo của nó bằng $m = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

196 ([BBN23], 4.4., p. 36). Cho tam giác đều có độ dài cạnh bằng 1. Chứng minh độ dài đường cao của nó bằng $h = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$.

197 ([BBN23], 4.5., p. 36). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}+3}{\sqrt{a}+2} + \frac{4a\sqrt{a}+3a+9}{a-\sqrt{a}-6}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} + \frac{2\sqrt{a}+3}{a+5\sqrt{a}+6}\right)$. (a) Tìm ĐKXD rồi rút gọn A . (b) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $A = 48$.

198 ([BBN23], 4.6., p. 36). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}-4x-\sqrt{x}+4}{2x\sqrt{x}-14x+28\sqrt{x}-16}$. (a) Tìm x để A có nghĩa. (b) Rút gọn A . (c) Tìm tất cả $x \in \mathbb{N}$ sao cho A nhận giá trị nguyên.

199 ([BBN23], 4.7., p. 36). Số Fibonacci là số có dạng $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right], \forall n \in \mathbb{N}$. (a) Tính F_0, F_1, F_2, F_3 . (b) Chứng minh công thức truy hồi $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

200 ([BBN23], 4.8., p. 36). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho: (a) $S(n) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 2015$. (b) $S(n) \geq a$ với $a \in \mathbb{R}$ cho trước.

201 ([BBN23], 4.9., p. 36, Trò chơi toán học). Trên bảng viết 4 số $\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lần chơi, ta xóa 2 số nào đó trong 4 số trên (giả sử là a, b) rồi thay vào 2 số mới $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ & $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ đồng thời giữa nguyên 2 số còn lại. Như vậy sau mỗi lần chơi trên bảng vẫn luôn có 4 số. Hỏi có bao giờ trên bảng có ghi 4 số $\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 3$ không?

202 ([BBN23], p. 36). Công thức của Heron để khai phương 1 số mà không dùng bảng số hoặc máy tính: $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$. (a) Tìm điều kiện của $a, b \in \mathbb{R}$ để công thức này có nghĩa. (b) Tính sai số của công thức khai phương xấp xỉ của Heron. (c) Áp dụng công thức của Heron để xấp xỉ $\sqrt{85}, \sqrt{154}, \sqrt{99}, \sqrt{2015}$.

7 Phương Trình Vô Tỷ

Định nghĩa 3 (Phương trình vô tỷ). Phương trình vô tỷ là phương trình đại số chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu căn.

2 dạng cơ bản của phương trình vô tỷ:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x), \end{cases} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Phương trình vô tỷ có nhiều cách giải, e.g., phương pháp nâng lên lũy thừa, phương pháp vận dụng căn liên hợp, phương pháp đưa về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối, phương pháp sử dụng bất đẳng thức hoặc đánh giá 2 vế của phương trình.

203 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 38). Giải phương trình $\sqrt{x+7} - 1 = x$.

204 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 38). Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{3x} + \sqrt{2x-2}$.

205 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 38). Giải phương trình $\sqrt{6x+5} + x = \sqrt{3x+11} + 2$.

206 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 39). Giải phương trình $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

207 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 39). Giải phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$.

208 ([BBN23], p. 39). Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$.

209 ([BBN23], p. 39). Giải phương trình $x + y + z - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y+1} - 2\sqrt{z-1} + 3 = 0$.

210 ([BBN23], p. 39). Giải phương trình $\sqrt{4x+7} + x = \sqrt{2x+1} - 3$.

211 ([BBN23], p. 39). Giải phương trình $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

8 Cube Root – Căn Bậc 3

212 ([BBN23], 2., p. 41). Rút gọn biểu thức $\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{512}$.

213 ([BBN23], 3., p. 41). Đưa thừa số vào trong dấu căn của biểu thức $(2-x)^3 \sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

214 ([BBN23], 4., p. 41). Khử căn thức ở mẫu của $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$.

215 ([BBN23], 5., p. 41). Trục căn thức ở mẫu của $\frac{2}{1+\sqrt[3]{2}}$.

216 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 41). Tính cạnh của hình lập phương, biết thể tích của nó bằng thể tích của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là 4.8 m, 3 m, 15 m.

217 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 42). Tính: (a) $\sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - \sqrt{10}}$. (b) $\frac{\sqrt[3]{-54}}{\sqrt[3]{16}}$. (c) $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{-250} - 7\sqrt[3]{16}$. (d) $\sqrt[3]{8x^8y^5} - 4xy\sqrt[3]{x^5y^2}$.

218 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 42). So sánh: (a) $5\sqrt[3]{6}$ & $6\sqrt[3]{5}$. (b) $\sqrt[3]{-7} : \sqrt[3]{49}$ & -8 .

219 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 43). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{2x+1} = 5$. (b) $\sqrt[3]{x+1} - 1 = x$.

220 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 43). Cho $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $A^3 - 6A$.

- 221** ([BBN23], Ví dụ 6, p. 43). Cho biểu thức $A = \frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}}$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Chứng minh giá trị của B không phụ thuộc vào x .
- 222** ([BBN23], 5.1., p. 44). Tính: (a) $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$. (b) $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$. (c) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$.
- 223** ([BBN23], 5.2., p. 44). So sánh: (a) 5 & $\sqrt[3]{130}$. (b) $\sqrt{122-22\sqrt{2}} + \sqrt[3]{77\sqrt{2}-155}$ & 6.
- 224** ([BBN23], 5.3., p. 44). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x+1} = -5$. (b) $\sqrt[3]{x+3} - x = 3$.
- 225** ([BBN23], 5.4., p. 44). Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}}$. (b) $\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$.
- 226** ([BBN23], 5.5., p. 44). Cho $a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$. Tính $a^3 + 3a$.
- 227** ([BBN23], 5.6., p. 44). Chứng minh $b = \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{84}}{9}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{84}}{9}}$ là 1 số nguyên.
- 228** ([BBN23], 5.7., p. 44). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.
- 229** ([BBN23], 5.8., p. 44). Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}$ & $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của $T = xy^3 - x^3y$.

9 nth Root – Căn Bậc n

- 230** ([BBN23], Ví dụ 1, p. 46). So sánh $3\sqrt[4]{3}$ & $4\sqrt{2}$.
- 231** ([BBN23], Ví dụ 2, p. 46). Chứng minh $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$.

10 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

- 232** ([Chí+23], ?1, p. 12). Tính & so sánh: $\sqrt{16 \cdot 25}$ & $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.
- 233** ([Chí+23], DL, p. 12). Chứng minh: (a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. (b)
- $$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ i.e., } \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$
- 234** ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 13). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{49 \cdot 1.44 \cdot 25}$. (b) $\sqrt{810 \cdot 40}$. (c) $\sqrt{0.16 \cdot 0.64 \cdot 225}$. (d) $\sqrt{250 \cdot 360}$.
- 235** ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 13–14). Tính: (a) $\sqrt{5}\sqrt{20}$. (b) $\sqrt{1.3}\sqrt{52}\sqrt{10}$. (c) $\sqrt{3}\sqrt{75}$. (d) $\sqrt{20}\sqrt{72}\sqrt{4.9}$.
- 236** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 14). Tìm ĐKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{3a}\sqrt{27a}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{9a^2b^4}$. (c) $\sqrt{3a^3}\sqrt{12a}$. (d) $\sqrt{2a \cdot 32ab^2}$.
- 237** ([Chí+23], 17., p. 14). Áp dụng quy tắc khai phương 1 tích, tính: (a) $\sqrt{0.09 \cdot 64}$. (b) $\sqrt{24(-7)^2}$. (c) $\sqrt{12.1 \cdot 360}$. (d) $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$.
- 238** ([Chí+23], 18., p. 14). Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc 2, tính: (a) $\sqrt{7}\sqrt{63}$. (b) $\sqrt{2.5}\sqrt{30}\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{0.4} \cdot \sqrt{6.4}$. (d) $\sqrt{2.7}\sqrt{5}\sqrt{1.5}$.
- 239** ([Chí+23], 19., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{0.36a^2}$ với $a < 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{a^4(3-a)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{27 \cdot 48(1-a)^2}$ với $a > 1$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\frac{1}{a-b}\sqrt{a^4(a-b)^2}$ với $a > b$.
- 240** ([Chí+23], 20., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{2a}{3}}\sqrt{\frac{3a}{8}}$ với $a \geq 0$. (b) $\sqrt{13a}\sqrt{\frac{52}{a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{5a}\sqrt{45a} - 3a$ với $a \geq 0$. (d) $(3-a)^2 - \sqrt{0.2}\sqrt{180a^2}$.
- 241** ([Chí+23], 21., p. 15). Khai phương tích $12 \cdot 30 \cdot 40$ được bao nhiêu?
- 242** ([Chí+23], 22., p. 15). Tính hợp lý: (a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$. (b) $\sqrt{17^2 - 8^2}$. (c) $\sqrt{117^2 - 108^2}$. (d) $\sqrt{313^2 - 312^2}$.

243 (Mở rộng [Chí+23], 22., p. 15). Rút gọn biểu thức:

$$\sqrt{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^2 - n^2}{2}\right)^2}, \forall m, n \in \mathbb{R}.$$

244 ([Chí+23], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$. (b) $\sqrt{2006} \pm \sqrt{2005}$ là 2 số nghịch đảo của nhau.

245 (Mở rộng [Chí+23], 23., p. 15). Chứng minh: (a) $(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1}) = 1, \forall n \in \mathbb{R}, |n| \geq 1$. (b) $\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n}$ là 2 số nghịch đảo của nhau, $\forall n \in \mathbb{R}, n \geq 0$.

246 ([Chí+23], 24., p. 15). Rút gọn & tìm giá trị (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 3) của các căn thức: (a) $\sqrt{4(1+6x+9x^2)^2}$ tại $x = -\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{9a^2(b^2+4-4b)}$ tại $a = -2, b = -\sqrt{3}$.

247 ([Chí+23], 25., p. 16). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{16x} = 8$. (b) $\sqrt{4x} = \sqrt{5}$. (c) $\sqrt{9(x-1)} = 21$. (d) $\sqrt{4(1-x)^2} - 6 = 0$.

248 ([Chí+23], 26., p. 16). (a) So sánh $\sqrt{25+9}$ & $\sqrt{25} + \sqrt{9}$. (b) Chứng minh $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. (c) Chứng minh $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$.

249 ([Chí+23], 27., p. 16). So sánh: (a) 4 & $2\sqrt{3}$. (b) $-\sqrt{5}$ & -2 .

250 ([Thâ+23], 23., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{10}\sqrt{40}$. (b) $\sqrt{5}\sqrt{45}$. (c) $\sqrt{52}\sqrt{13}$. (d) $\sqrt{2}\sqrt{162}$.

251 ([Thâ+23], 24., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{45 \cdot 80}$. (b) $\sqrt{75 \cdot 48}$. (c) $\sqrt{90 \cdot 64}$. (d) $\sqrt{2.5 \cdot 14.4}$.

252 ([Thâ+23], 25., p. 9). Tính: (a) $\sqrt{6.8^2 - 3.2^2}$. (b) $\sqrt{21.8^2 - 18.2^2}$. (c) $\sqrt{117.5^2 - 26.5^2 - 1440}$. (d) $\sqrt{146.5^2 - 109.5^2 + 27.256}$.

253 ([Thâ+23], 26., p. 9). Chứng minh: (a) $\sqrt{9 - \sqrt{17}}\sqrt{9 + \sqrt{17}} = 8$. (b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 2) + (1 + 2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$.

254 ([Thâ+23], 27., p. 9). Rút gọn: (a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{2\sqrt{3} + \sqrt{28}}$. (b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

255 ([Thâ+23], 28., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ & $\sqrt{10}$. (b) $\sqrt{3} + 2$ & $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. (c) 16 & $\sqrt{15}\sqrt{17}$. (d) 8 & $\sqrt{15} + \sqrt{17}$.

256 ([Thâ+23], 29., p. 9). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $\sqrt{2003} + \sqrt{2005}$ & $2\sqrt{2004}$.

257 ([Thâ+23], 30., p. 9). Cho 2 biểu thức $A = \sqrt{x+2}\sqrt{x-3}, B = \sqrt{(x+2)(x-3)}$. (a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa. (b) Với giá trị nào của x thì $A = B$?

258 ([Thâ+23], 31., p. 10). Biểu diễn \sqrt{ab} ở dạng tích các căn bậc 2 với $a < 0$ & $b < 0$. Áp dụng tính $\sqrt{(-25) \cdot (-64)}$.

259 ([Thâ+23], 32., p. 10). Rút gọn các biểu thức: (a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$ & $a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$ & $b \in \mathbb{R}$. (c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$ & $a \in \mathbb{R}$. (d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$ & $b \in \mathbb{R}$.

260 ([Thâ+23], 33., p. 10). (a) Tìm DKXD & biến đổi các biểu thức sau về dạng tích: $A(x) = \sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2}, B(x) = 3\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2 - 9}$. (b) Giải phương trình $A(x) = 0$ & $B(x) = 0$.

261 ([Thâ+23], 34., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x-5} = 3$. (b) $\sqrt{x-10} = -2$. (c) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{4-5x} = 12$.

262 ([Thâ+23], 35., p. 10). (a) Chứng minh: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = \sqrt{(2n+1)^2} - \sqrt{(2n+1)^2 - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Viết đẳng thức trên khi $n = 1, 2, 3, 4$. (B) Đẳng thức trên còn đúng khi $n \in \mathbb{Z}$ & $n \in \mathbb{R}$ không?

263 ([Chí+23], ?1, p. 16). Tính & so sánh: $\sqrt{\frac{16}{25}}$ & $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

264 ([Chí+23], ĐL, p. 16). Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0$.

265 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?2, p. 17). Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{121}}$. (b) $\sqrt{\frac{9}{16} : \frac{25}{36}}$. (c) $\sqrt{\frac{225}{256}}$. (d) $\sqrt{0.0196}$.

266 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?3, pp. 17-18). Tính: (a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$. (b) $\sqrt{\frac{49}{8}} : \sqrt{3\frac{1}{8}}$. (c) $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$. (d) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$.

267 ([Chí+23], Ví dụ 3, ?4, p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{4a^2}{25}}$. (b) $\frac{\sqrt{27a}}{\sqrt{3a}}$ với $a > 0$. (c) $\sqrt{\frac{2a^2b^4}{50}}$. (d) $\frac{\sqrt{2ab^2}}{\sqrt{162}}$ với $a \geq 0$.

268 ([Chí+23], 28., p. 18). Tính: (a) $\sqrt{\frac{289}{225}}$. (b) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$. (c) $\sqrt{\frac{0.25}{9}}$. (d) $\sqrt{\frac{8.1}{1.6}}$.

269 ([Chí+23], 29., p. 19). *Tính:* (a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$. (b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$. (c) $\frac{\sqrt{12500}}{\sqrt{500}}$. (d) $\frac{\sqrt{6^5}}{\sqrt{2^3 \cdot 3^5}}$.

270 ([Chí+23], 30., p. 19). *Rút gọn biểu thức:* (a) $\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{y^4}}$ với $x > 0$ & $y \neq 0$. (b) $2y^2\sqrt{\frac{x^4}{4y^2}}$ với $y < 0$. (c) $5xy\sqrt{\frac{25x^2}{y^6}}$ với $x < 0$, $y > 0$. (d) $0.2x^3y^3\sqrt{\frac{16}{x^4y^8}}$ với $xy \neq 0$.

271 ([Chí+23], 31., p. 19). (a) So sánh $\sqrt{25-16}$ & $\sqrt{25}-\sqrt{16}$. (b) Chứng minh: $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.

272 ([Chí+23], 32., p. 19). *Tính:* (a) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0.01}$. (b) $\sqrt{1.44 \cdot 1.21 - 1.44 \cdot 0.4}$. (c) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$. (d) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$.

273 ([Chí+23], 33., p. 19). *Giải phương trình:* (a) $\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$. (b) $\sqrt{3}x + \sqrt{3} = \sqrt{12} + \sqrt{27}$. (c) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{12} = 0$. (d) $\frac{x^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{20} = 0$.

274 ([Chí+23], 34., pp. 19–20). *Rút gọn biểu thức:* (a) $ab^2\sqrt{\frac{3}{a^2b^4}}$ với $a < b$, $b \neq 0$. (b) $\sqrt{\frac{27(a-3)^2}{48}}$ với $a > 3$. (c) $\sqrt{\frac{9+12a+4a^2}{b^2}}$ với $a \geq -1.5$ & $b < 0$. (d) $(a-b)\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}$ với $a < b < 0$.

275 ([Chí+23], 35., p. 20). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa:* (a) $\sqrt{(x-3)^2} = 9$. (b) $\sqrt{4x^2+4x+1} = 6$.

276 ([Chí+23], 36., p. 20). *D/S?* (a) $0.01 = \sqrt{0.0001}$. (b) $-0.5 = \sqrt{-0.25}$. (c) $6 < \sqrt{39} < 7$. (d) $(4 - \sqrt{13})2x < \sqrt{3}(4 - \sqrt{13}) \Leftrightarrow 2x < \sqrt{3}$.

277 ([Thã+23], 36., p. 10). *Áp dụng quy tắc khai phương 1 thương, tính:* (a) $\sqrt{\frac{9}{169}}$. (b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$. (c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$. (d) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

278 ([Thã+23], 37., p. 11). *Áp dụng quy tắc chia căn bậc 2, tính:* (a) $\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$. (b) $\frac{\sqrt{12.5}}{\sqrt{0.5}}$. (c) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$. (d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

279 ([Thã+23], 38., p. 11). *Cho các biểu thức $A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}}$, $B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}$.* (a) *Tìm $x \in \mathbb{R}$ lần lượt để A, B có nghĩa.* (b) *Với giá trị nào của $x \in \mathbb{R}$ thì $A = B$?*

280 ([Thã+23], 39., p. 11). *Biểu diễn $\sqrt{\frac{a}{b}}$ với $a, b < 0$ ở dạng thương của 2 căn thức. Áp dụng tính $\sqrt{\frac{-49}{-81}}$.*

281 ([Thã+23], 40., p. 11). *Rút gọn biểu thức:* (a) $\frac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$, $y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$, $x > 0$. (c) $\frac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$, $m, n > 0$. (d) $\frac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$, $a < 0$, $b \neq 0$.

282 ([Thã+23], 41., pp. 11–12). *Rút gọn biểu thức:* (a) $\sqrt{\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$, $x \geq 0$. (b) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\frac{y-2\sqrt{y}+1}{(x-1)^4}}$, $x \neq 1$, $y \neq 1$, $y \geq 0$.

283 ([Thã+23], 42., p. 12). *Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó:* (a) $\sqrt{\frac{(x-2)^4}{(3-x)^2}} + \frac{x^2-1}{x-3}$, $x < 3$, tại $x = 0.5$. (b) $4x - \sqrt{8} + \frac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$, $x > -2$, tại $x = -\sqrt{2}$.

284 ([Thã+23], 43., p. 12). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa:* (a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$. (b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$. (c) $\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3$. (d) $\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3$.

285 ([Thã+23], 44., p. 12). *Chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm:*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

286 ([Thã+23], 45., p. 12). *Chứng minh:*

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

287 ([Thã+23], 46., p. 12). Chứng minh: $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$.

288 ([Thã+23], 52., p. 13). Chứng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

289 ([Thã+23], 53., p. 13). Chứng minh: (a) $\sqrt{3}$ là số vô tỷ. (b) $5\sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}$ đều là số vô tỷ.

290 ([Thã+23], 54., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} > 2$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

291 ([Thã+23], 55., p. 14). Tìm tập hợp các số thực x thỏa mãn bất đẳng thức $\sqrt{x} < 3$ & biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

292 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 9). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

293 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x - 5} + \sqrt{13 - x}$.

294 ([Tuy23], 14., p. 11). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{7} - 2}}$.

295 ([Tuy23], 15., p. 11). Cho 2 số có tổng bằng $\sqrt{19}$ & có hiệu bằng $\sqrt{7}$. Tính tích của 2 số đó.

296 ([Tuy23], 16., p. 11). Tính \sqrt{A} biết: (a) $A = 13 - 2\sqrt{42}$. (b) $A = 46 + 6\sqrt{5}$. (c) $A = 12 - 3\sqrt{15}$.

297 ([Tuy23], 17., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}}$. (b) $B = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$. (c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$.

298 ([Tuy23], 18., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$.

299 ([Tuy23], 19., p. 12). Cho $a > 0$, so sánh $\sqrt{a + 1} + \sqrt{a + 3}$ với $2\sqrt{a + 2}$.

300 ([Tuy23], 20., p. 12). Cho $a, b, x, y > 0$. Chứng minh $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{(a + b)(x + y)}$.

301 ([Tuy23], 21., p. 12). (a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 8}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - x}$.

302 ([Tuy23], 22., p. 12). Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right]}{2 + \sqrt{1 - x^2}}.$$

303 ([Tuy23], 23., p. 12). Tìm x, y biết $x + y + 12 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt{y - 1}$.

304 ([Tuy23], 24., p. 12). Tìm x, y, z biết $\sqrt{x - a} + \sqrt{y - b} + \sqrt{z - c} = \frac{1}{2}(x + y + z)$, trong đó $a + b + c = 3$.

305 ([Tuy23], 25., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 + 6\sqrt{x - 1}} = 5$.

306 ([Tuy23], 26., p. 12). Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

307 ([Tuy23], 27., p. 12). Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{n + a} + \sqrt{n - a} < 2\sqrt{n}$ vpos $0 < |a| \leq n$. Áp dụng (không dùng máy tính hoặc bảng số): Chứng minh: $\sqrt{101} - \sqrt{99} > 0.1$.

308 ([Tuy23], 28., p. 13). Chứng minh: $2(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n - 1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Cho $S = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}}$. Chứng minh $18 < S < 19$.

309 ([Tuy23], 29., p. 13). Chứng minh: $\frac{1}{2\sqrt{n + 1}} < \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng: Chứng minh: $S = \sum_{i=1}^{2500} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2500}} < 100$.

310 ([Tuy23], 30., p. 13). Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$.

311 ([Tuy23], 31., p. 13). Cho $A = \sqrt{x + 3} + \sqrt{5 - x}$. Chứng minh $A \leq 4$.

312 ([Tuy23], 32., p. 13). Cho $B = \frac{x^3}{1 + y} + \frac{y^3}{1 + x}$ trong đó x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh $B \geq 1$.

313 ([Tuy23], 33., p. 13). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} + \frac{1}{z + 1} = 2$. Chứng minh $xyz \leq \frac{1}{8}$.

314 ([Tuy23], 34., p. 13). Tìm các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 3$ & $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$.

315 ([Tuy23], 35., p. 13). Cho $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 10$. Chứng minh: $x + y \geq 20$.

- 316** ([Tuy23], 36., p. 13). Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$.
- 317** ([Bin23], Ví dụ 8, p. 10). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$.
- 318** ([Bin23], Ví dụ 9, p. 11). Chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỷ.
- 319** ([Bin23], 11., pp. 11–12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$. (b) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$. (c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (d) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. (e) $\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$. (f) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$. (g) $\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48-10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$. (h) $\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. (i) $\sqrt{94-42\sqrt{5}} - \sqrt{94+42\sqrt{5}}$.
- 320** ([Bin23], 12., p. 12). Tính: (a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$. (b) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(\sqrt{10} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{5})$. (c) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.
- 321** ([Bin23], 13., p. 12). Chứng minh các hằng đẳng thức sau với $b \geq 0, a \geq \sqrt{b}$: (a) $\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2-b})}$. (b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.
- 322** ([Bin23], 14., p. 12). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.
- 323** ([Bin23], 15., p. 12). Cho biểu thức $A = \frac{x + \sqrt{x^2-2x}}{x - \sqrt{x^2-2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2-2x}}{x + \sqrt{x^2-2x}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A. (c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.
- 324** ([Bin23], 16., p. 12). Lập 1 phương trình bậc 2 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $2 + \sqrt{3}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $6 - 4\sqrt{2}$ là 1 nghiệm của phương trình.
- 325** ([Bin23], 17., p. 13). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. (b) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- 326** ([Bin23], 18., p. 13). Có tồn tại các số hữu tỷ dương a, b hay không nếu: (a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{\sqrt{2}}$.
- 327** ([Bin23], 19., p. 13). Cho 3 số $x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y}$ là các số hữu tỷ. Chứng minh mỗi số \sqrt{x}, \sqrt{y} đều là số hữu tỷ.
- 328** ([Bin23], 20., p. 13). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh tồn tại 1 số dương trong 2 số $2a+b-2\sqrt{cd}$ & $2c+d-2\sqrt{ab}$.
- 329** ([Bin23], 21*, p. 13). (a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$ với $a > 0$. (b) Tính giá trị của tổng $B = \sum_{i=1}^{99} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{99^2} + \frac{1}{100^2}}$.
- 330** ([Bin23], 22*, p. 13). (a) Nêu 1 cách tính nhẩm 997^2 . (b) Tính tổng các chữ số của A biết $\sqrt{A} = 99 \dots 96$ (có 100 chữ số 9).

11 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

- 331** ([Chí+23], ?1, p. 24). Chứng minh: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$.
- 332** ([Chí+23], Ví dụ 1–2, ?2, pp. 24–25). Rút gọn: (a) $\sqrt{2 \cdot 3^2}$. (b) $\sqrt{20}$. (c) $3\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{5}$. (d) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{50}$. (e) $4\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$.
- 333** ([Chí+23], Ví dụ 3, ?3, p. 25). Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{4x^2y}$ với $x, y \geq 0$. (b) $\sqrt{18xy^2}$ với $x \geq 0, y < 0$. (c) $\sqrt{28a^4b^2}$ với $b \geq 0$. (d) $\sqrt{72a^2b^4}$ với $a < 0$.
- 334** ([Chí+23], Ví dụ 4, ?4, p. 26). Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $3\sqrt{7}$. (b) $-2\sqrt{3}$. (c) $5a^2\sqrt{2a}$ với $a \geq 0$. (d) $-3a^2\sqrt{2ab}$ với $ab \geq 0$. (e) $3\sqrt{5}$. (f) $1.2\sqrt{5}$. (g) $ab^4\sqrt{a}$ với $a \geq 0$. (h) $-2ab^2\sqrt{5a}$ với $a \geq 0$.
- 335** ([Chí+23], Ví dụ 5, p. 26). So sánh $3\sqrt{7}$ & $\sqrt{28}$.
- 336** ([Chí+23], 43., p. 27). Viết các số hoặc biểu thức dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{54}$. (b) $\sqrt{108}$. (c) $0.1\sqrt{20000}$. (d) $-0.05\sqrt{28800}$. (e) $\sqrt{7 \cdot 63a^2}$.
- 337** ([Chí+23], 44., p. 27). Đưa thừa số vào trong dấu căn: $3\sqrt{5}, -5\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\sqrt{xy}$ với $xy \geq 0, x\sqrt{\frac{2}{x}}$ với $x > 0$.
- 338** ([Chí+23], 45., p. 27). So sánh: (a) $3\sqrt{3}$ & $\sqrt{12}$. (b) 7 & $3\sqrt{5}$. (c) $\frac{1}{3}\sqrt{51}$ & $\frac{1}{5}\sqrt{150}$. (d) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ & $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

339 ([Chí+23], 46., p. 27). Rút gọn các biểu thức sau với $x \geq 0$: (a) $2\sqrt{3x} - 4\sqrt{3x} + 27 - 3\sqrt{3x}$. (b) $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} + 28$.

340 ([Chí+23], 47., p. 27). Rút gọn: (a) $\frac{2}{x^2 - y^2} \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{2}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\text{và } x \neq y$. (b) $\frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$ với $a > 0.5$.

341 ([Thã+23], 56., p. 14). Đưa thừa số ra ngoài dấu căn: (a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$. (b) $\sqrt{8y^2}$ với $y < 0$. (c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{48y^4}$.

342 ([Thã+23], 57., p. 14). Đưa thừa số vào trong dấu căn: (a) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$. (b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$. (c) $x\sqrt{\frac{11}{x}}$ với $x > 0$. (d) $x\sqrt{\frac{-29}{x}}$ với $x < 0$.

343 ([Thã+23], 58., p. 14). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$. (b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0.5\sqrt{8}$. (c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a \geq 0$. (d) $\sqrt{16b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ với $b \geq 0$.

344 ([Thã+23], 59., p. 14). Rút gọn biểu thức: (a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$. (b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$. (c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$. (d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.

345 ([Thã+23], 60., p. 15). Rút gọn biểu thức: (a) $2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$. (b) $2\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{20\sqrt{3}}$.

346 ([Thã+23], 61., p. 15). Khai triển và rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x} + x)$. (b) $(\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4)$. (c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + y + \sqrt{xy})$. (d) $(x + \sqrt{y})(x^2 + y - x\sqrt{y})$.

347 ([Thã+23], 62., p. 15). Khai triển và rút gọn các biểu thức với $x, y \geq 0$. (a) $(4\sqrt{x} - \sqrt{2x})(\sqrt{x} - \sqrt{2x})$. (b) $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})$.

348 ([Thã+23], 63., p. 15). Chứng minh: (a) $\frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$ với $x, y > 0$. (b) $\frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} = x + \sqrt{x} + 1$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

349 ([Thã+23], 64., p. 15). (a) Chứng minh: $x + 2\sqrt{2x - 4} = (\sqrt{2} + \sqrt{x - 2})^2$ với $x \geq 2$. (b) Rút gọn biểu thức $\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$ với $x \geq 2$.

350 ([Thã+23], 65., p. 15). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x} = 35$. (b) $\sqrt{4x} \leq 162$. (c) $3\sqrt{x} = \sqrt{12}$. (d) $2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$.

351 ([Thã+23], 66., p. 15). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x - 3} = 0$. (b) $\sqrt{x^2 - 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$.

352 ([Thã+23], 67., p. 15). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất. (b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

353 ([Thã+23], 6.1., p. 15). Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ với $x < 0$, $y \geq 0$.

354 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 28). Khử mẫu của biểu thức lấy căn: (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{5a}{7b}}$ với $ab > 0$. (c) $\sqrt{\frac{4}{5}}$. (d) $\sqrt{\frac{3}{125}}$. (e) $\sqrt{\frac{3}{2a^3}}$ với $a > 0$.

355 ([Chí+23], Ví dụ 2, ?2, pp. 28–29). Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$. (b) $\frac{10}{\sqrt{3} + 1}$. (c) $\frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$. (d) $\frac{5}{3\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{b}}$ với $b > 0$. (e) $\frac{5}{5 - 2\sqrt{3}}, \frac{2a}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0$, $a \neq 1$. (f) $\frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}, \frac{6a}{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a > b > 0$.

356 ([Chí+23], 48., p. 29). Khử mẫu của biểu thức lấy căn: $\sqrt{\frac{1}{600}}, \sqrt{\frac{11}{540}}, \sqrt{\frac{3}{50}}, \sqrt{\frac{5}{98}}, \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{27}}$.

357 ([Chí+23], 49., p. 29). Tìm DKXD rồi khử mẫu của biểu thức lấy căn: $ab\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}}, \sqrt{\frac{9a^3}{36b}}, 3xy\sqrt{\frac{2}{xy}}$.

358 ([Chí+23], 50., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{5}{\sqrt{10}}, \frac{5}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{3\sqrt{20}}, \frac{2\sqrt{2} + 2}{5\sqrt{2}}, \frac{y + b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$.

359 ([Chí+23], 51., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{3}{\sqrt{3} + 1}, \frac{2}{\sqrt{3} - 1}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \frac{b}{3 + \sqrt{b}}, \frac{p}{2\sqrt{p} - 1}$.

360 ([Chí+23], 52., p. 30). Tìm DKXD rồi trục căn thức: $\frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}, \frac{2ab}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$.

361 ([Chí+23], 53., p. 30). *Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{18(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$. (b) $ab\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}$. (c) $\sqrt{\frac{a}{b^3}+\frac{a}{b^4}}$. (d) $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.*

362 ([Chí+23], 54., p. 30). *Tìm DKXD rồi rút gọn biểu thức: $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2}, \frac{a-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, \frac{p-2\sqrt{p}}{\sqrt{p}-2}$.*

363 ([Chí+23], 55., p. 30). *Phân tích thành nhân tử với $a, b, x, y \in \mathbb{R}, a, b, x, y \geq 0$: (a) $ab+b\sqrt{a}+\sqrt{a}+1$. (b) $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}+\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2}$.*

364 ([Chí+23], 56., p. 30). *Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: (a) $3\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, \sqrt{29}, 4\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{2}, \sqrt{38}, 3\sqrt{7}, 2\sqrt{14}$.*

365 ([Chí+23], 57., p. 30). *Giải phương trình $\sqrt{25x}-\sqrt{16x}=9$.*

366 ([Thâ+23], 68., p. 16). *Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn & rút gọn (nếu được): (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \geq 0$. (c) $\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$. (d) $\sqrt{x^2-\frac{x^2}{7}}$ với $x < 0$.*

367 ([Thâ+23], 69., p. 16). *Trục căn thức ở mẫu & rút gọn (nếu được): (a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. (b) $\frac{26}{5-2\sqrt{3}}$. (c) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$. (d) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.*

368 ([Thâ+23], 70., p. 16). *Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\frac{2}{\sqrt{3}+1}$. (b) $\frac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})}-\frac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$. (c) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$. (d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.*

369 ([Thâ+23], 71., p. 16). *Chứng minh đẳng thức:*

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

370 ([Thâ+23], 72., p. 17). *Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$.*

371 ([Thâ+23], 73., p. 17). *Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: $\sqrt{2005}-\sqrt{2004}$ & $\sqrt{2004}-\sqrt{2003}$.*

372 ([Thâ+23], 74., p. 17). *Rút gọn*

$$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}.$$

373 ([Thâ+23], 75., p. 17). *Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x, y \geq 0, x \neq y$. (b) $\frac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$.*

374 ([Thâ+23], 76., p. 17). *Trục căn thức ở mẫu: (a) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$. (b) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.*

375 ([Thâ+23], 77., p. 17). *Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{2}$. (b) $\sqrt{10+\sqrt{3x}}=2+\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{3x-2}=2-\sqrt{3}$. (d) $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-3$.*

376 ([Thâ+23], 78., p. 17). *Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$. (b) $\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5}$.*

377 ([Thâ+23], 79., pp. 17–18). *Cho các số $x, y \in \mathbb{R}$ có dạng $x=a_1\sqrt{2}+b_1$ & $y=a_2\sqrt{2}+b_2$, trong đó $a_i, b_i \in \mathbb{Q}, i=1, 2$. Chứng minh: (a) $x+y$ & xy cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. (b) $\frac{x}{y}$ với $y \neq 0$ cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.*

378 ([Thâ+23], 71., p. 18). *Rút gọn biểu thức $x\sqrt{\frac{x}{y^3}}$ với $x, y < 0$.*

379 ([Thâ+23], 72., p. 18). *Tính $\frac{6}{\sqrt{7}-1}$.*

380 ([Bin23], Ví dụ 10, p. 14). *Rút gọn biểu thức $A=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$.*

381 ([Bin23], Ví dụ 11, p. 14). *Tính giá trị của biểu thức*

$$M = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i} + i\sqrt{i+1}} = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{25\sqrt{24} + 24\sqrt{25}}.$$

382 ([Bin23], 23., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$.

383 ([Bin23], 24., p. 15). *Chứng minh các hằng đẳng thức: (a) $\sqrt{10 + \sqrt{60} - \sqrt{24} - \sqrt{40}} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}$. (b) $\sqrt{6 + \sqrt{24} + \sqrt{12} + \sqrt{8}} - \sqrt{3} = \sqrt{2} + 1$.*

384 ([Bin23], 25., p. 15). *Cho $A = \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$. Biểu diễn A dưới dạng tổng của 3 căn thức.*

385 ([Bin23], 26., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $A = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$.

386 ([Bin23], 27., p. 15). *Rút gọn biểu thức* $B = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$.

387 ([Bin23], 28., p. 15). *Rút gọn biểu thức:*

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}},$$

$$B = \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{i} - \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} - \cdots - \frac{1}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}.$$

12 Rút Gọn Biểu Thức Có Chứa Căn Thức Bậc 2

388 ([Chí+23], Ví dụ 1, ?1, p. 31). *Rút gọn: (a) $5\sqrt{a} + 6\sqrt{\frac{a}{4}} - a\sqrt{\frac{4}{a}} + \sqrt{5}$ với $a > 0$. (b) $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} + \sqrt{a}$ với $a \geq 0$.*

389 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 31). *Chứng minh: $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}$.*

390 ([Chí+23], ?2, p. 31). *Chứng minh: $\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.*

391 ([Chí+23], ?2, p. 31). *Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$ với $a \in \mathbb{R}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức P . (c) Tìm giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để $P < 0$.*

392 ([Chí+23], ?3, p. 32). *Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$. (b) $\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$.*

393 ([Chí+23], 58., p. 32). *Rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{5}$. (b) $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{4.5} + \sqrt{12.5}$. (c) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18} + \sqrt{72}$. (d) $0.1\sqrt{200} + 2\sqrt{0.08} + 0.4\sqrt{50}$.*

394 ([Chí+23], 59., p. 32). *Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $5\sqrt{a} - 4b\sqrt{25a^3} + 5a\sqrt{16ab^2} - 2\sqrt{9a}$. (b) $5a\sqrt{64ab^3} - \sqrt{3}\sqrt{12a^3b^3} + 2ab\sqrt{9ab} - 5b\sqrt{81a^3b}$.*

395 ([Chí+23], 60., p. 33). *Cho biểu thức $A = \sqrt{16x+16} - \sqrt{9x+9} + \sqrt{4x+4} + \sqrt{x+1}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn biểu thức A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $A = 16$.*

396 ([Chí+23], 61., p. 33). *Chứng minh đẳng thức: $\frac{3}{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. (b) $\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \sqrt{\frac{2x}{3}} + \sqrt{6x}\right) : \sqrt{6x} = 2\frac{1}{3}$ với $x > 0$.*

397 ([Chí+23], 62., p. 33). *Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$. (b) $\sqrt{150} + \sqrt{1.6}\sqrt{60} + 4.5\sqrt{2\frac{2}{3}} - \sqrt{6}$. (c) $(\sqrt{28} - 2\sqrt{3} + \sqrt{7})\sqrt{7} + \sqrt{84}$. (d) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$.*

398 ([Chí+23], 63., p. 33). *Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{ab} + \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$. (b) $\sqrt{\frac{m}{1-2x+x^2}}\sqrt{\frac{4m-8mx+4mx^2}{81}}$.*

399 ([Chí+23], 64., p. 33). *Chứng minh đẳng thức: (a) $\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)\left(\frac{1-\sqrt{a}}{1-a}\right)^2 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$. (b)*

$$\frac{a+b}{b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4}{a^2+2ab+b^2}} = |a|, \forall a, b \in \mathbb{R}, a+b > 0, b \neq 0.$$

400 ([Chí+23], 65., p. 34). Tìm DKXD & rút gọn rồi so sánh giá trị của A với 1 biết:

$$A = \left(\frac{1}{a - \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} \right) : \frac{\sqrt{a} + 1}{a - 2\sqrt{a} + 1}.$$

401 ([Chí+23], 66., p. 34). Tính $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.

402 ([Thã+23], 80., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $(2 - \sqrt{2})(-5\sqrt{2}) - (3\sqrt{2} - 5)^2$. (b) $2\sqrt{3a} - \sqrt{75a} + a\sqrt{\frac{13.5}{2a}} - \frac{2}{5}\sqrt{300a^3}$

403 ([Thã+23], 81., p. 18). Tìm DKXD & rút gọn biểu thức: (a) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. (b) $\frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}}{a - b}$.

404 ([Thã+23], 82., pp. 18–19). (a) Chứng minh $x^2 + x\sqrt{3} + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$. (b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + x\sqrt{3} + 1$. Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

405 ([Thã+23], 83., p. 19). Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỷ: (a) $\frac{2}{\sqrt{7} - 5} - \frac{2}{\sqrt{7} + 5}$. (b) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$.

406 ([Thã+23], 84., p. 19). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{4x + 20} - 3\sqrt{5 + x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x + 45} = 6$. (b) $\sqrt{25x - 25} - \frac{15}{2}\sqrt{\frac{x - 1}{9}} = 6 + \sqrt{x - 1}$.

407 ([Thã+23], 85., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2 + 5\sqrt{x}}{4 - x}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 2$.

408 ([Thã+23], 86., p. 19). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 1}\right)$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $A > 0$.

409 ([Thã+23], 87., p. 19). (a) Chứng minh bất đẳng thức: $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \geq 0$. (b) Mở rộng kết quả cho trường hợp 4, 5 số không âm. (c) Mở rộng kết quả cho trường hợp $n \in \mathbb{N}^*$ số không âm.

410 ([Thã+23], 88., p. 19). Giải bất phương trình $\sqrt{32x} - (\sqrt{8} + \sqrt{2})x > \sqrt{2}$.

411 ([Tuy23], Thí dụ 5, p. 14). Cho $A = \sqrt{11 + \sqrt{96}}$ & $B = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$. Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh A & B .

412 ([Tuy23], Thí dụ 6, p. 15). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}} - \frac{x - 3}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{2}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x} - x}\right)$.
(a) Tìm DKXD rồi rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

413 ([Tuy23], 37., pp. 15–16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, so sánh các số sau: (a) $-3\sqrt{11}$ & $-7\sqrt{2}$. (b) $\frac{7}{2}\sqrt{\frac{1}{12}}$ & $\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}$.
(c) $\sqrt{\frac{4}{27}}$ & $\sqrt{\frac{3}{26}}$.

414 ([Tuy23], 38., p. 16). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh $4\sqrt{5} - 3\sqrt{2} < 5$.

415 ([Tuy23], 39., p. 16). Cho $A = \sqrt{x^2 + 1} - x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ trong đó $x \in \mathbb{R}$. Xác định $x \in \mathbb{R}$ để giá trị của A là 1 số tự nhiên.

416 ([Tuy23], 40., p. 16). Trục căn thức ở mẫu của các biểu thức sau: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{2c}}$ trong đó $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện c là trung bình nhân của a & b . (b) $B = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ trong đó $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn điều kiện $ab = cd$ & $a + b \neq c + d$.

417 ([Tuy23], 41., p. 16). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x > y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{931}$.

418 ([Tuy23], 42., p. 16). Chứng minh: $\frac{2\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n} + \sqrt{m + n}} = \sqrt{m} + \sqrt{n} - \sqrt{m + n}$. Áp dụng tính $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$.

419 ([Tuy23], 43., p. 16). Chứng minh: $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Áp dụng tính tổng: $S = \sum_{i=1}^{399} \frac{1}{(i+1)\sqrt{i}+i\sqrt{i+1}}$
 $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{400\sqrt{399}+399\sqrt{400}}.$

420 ([Tuy23], 44., p. 16). Tìm $n \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0.05$.

421 ([Tuy23], 45., p. 17). Cho $A = \sum_{i=1}^{120} \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{120} + \sqrt{121}}, B = \sum_{i=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{35}}$. Chứng minh $A < B$.

422 ([Tuy23], 46., p. 17). Cho $x, y, z > 0$ & khác nhau đôi một. Chứng minh giá trị của biểu thức

$$A = \frac{x}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{z})} + \frac{y}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{x})} + \frac{z}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}$$

không phụ thuộc vào giá trị của các biến.

423 ([Tuy23], 47., p. 17). Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{x-\sqrt{x}-6} - \frac{\sqrt{x}-2}{3-\sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

424 ([Tuy23], 48., p. 17). Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

425 ([Tuy23], 49., p. 17). Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{zx} + 2\sqrt{z} + 2}$. Biết $xyz = 4$, tính \sqrt{P} .

426 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 15). Tính: $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$.

427 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 16). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

428 ([Bin23], Ví dụ 14, p. 16). Cho $A = \frac{\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} + 1}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Chứng minh với $a = \frac{4}{9}$ thì A là số nguyên. (c) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

429 ([Bin23], 29., p. 18). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

(b) $B = \left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a} \right)^2$. (c) $C = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{x + y + 2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$ với $x = 2 - \sqrt{3}$ & $y = 2 + \sqrt{3}$.

430 ([Bin23], 30., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$.

431 ([Bin23], 31., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$ với $x > y > 0$.

432 ([Bin23], 32., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$ & $b > a > 0$.

433 ([Bin23], 33., p. 18). Rút gọn biểu thức $B = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ với $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)$ & $0 < a < 1$.

434 ([Bin23], 34., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = a + b - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$ với $a, b, c > 0$ & $ab + bc + ca = 1$.

435 ([Bin23], 35., p. 18). Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$.

436 ([Bin23], 36., p. 18). Chứng minh hằng đẳng thức sau với $x \geq 2$

$$\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}}.$$

437 ([Bin23], 37., p. 18). *Cho* $a = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$. *Tinh* $a^7 + b^7$.

438 ([Bin23], 38., p. 19). Cho biết $\sqrt{x^2 - 6x + 13} - \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 1$. Tính $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

439 ([Bin23], 39., p. 19). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a} - 2}$. (a) Tìm các số nguyên a để A là số nguyên. (b) Tìm các số hữu tỷ a để A là số nguyên.

440 ([Bin23], 40., p. 19). *Cho $a = \sqrt{2} - 1$. (a) Viết a^2, a^3 dưới dạng $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ trong đó m là số tự nhiên. (b) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số a^n viết được dưới dạng trên.*

13 Cube Root, n th Root – Căn Bậc 3, Căn Bậc n

441 (Program to print out 1st n cube roots). *Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc 3 của n số tự nhiên đầu tiên với $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.*

442. *Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số $n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím có phải là lập phương của 1 số tự nhiên hay không.*

443 (Program to print out 1st n nth roots). *Viết chương trình Pascal, C/C++, Python xuất ra căn bậc n của m số tự nhiên đầu tiên với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.*

444. *Viết chương trình Pascal, C/C++, Python để kiểm tra 1 số m được nhập từ bàn phím có phải là lũy thừa bậc n của 1 số tự nhiên hay không với $m, n \in \mathbb{N}^*$ được nhập từ bàn phím.*

445 ([Chí+23], ?1, p. 35). *Tìm căn bậc 3 của:* $27, -64, 0, \frac{1}{125}$.

446 ([Chí+23], Ví dụ 2, p. 35). So sánh 2 \mathcal{C} $\sqrt[3]{7}$.

447 ([Chí+23], Ví dụ 3, p. 36). Rút gọn $\sqrt[3]{8a^3} - 5a$.

448 ([Chí+23], ?2, p. 36). *Tính $\sqrt[3]{1728} : \sqrt[3]{64}$ theo 2 cách.*

449 ([[Chí+23](#)], 67., p. 36). *Tính*: $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{-729}$, $\sqrt[3]{0.064}$, $\sqrt[3]{-0.216}$, $\sqrt[3]{-0.008}$.

450 ([[Chí+23](#)], 68., p. 36). *Tinh*: (a) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{-8} - \sqrt[3]{125}$. (b) $\frac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}} - \sqrt[3]{54}\sqrt[3]{4}$.

451 ([Chí+23], 69., p. 36). So sánh: (a) 5 & $\sqrt[3]{123}$. (b) $5\sqrt[3]{6}$ & $6\sqrt[3]{5}$.

452 ([Thâ+23], 88., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, tính: $\sqrt[3]{-343}$, $\sqrt[3]{0.027}$, $\sqrt[3]{1.331}$, $\sqrt[3]{-0.512}$.

453 ([Thâ+23], 89., p. 20). *Tim* $x \in \mathbb{R}$ *thỏa*: (a) $\sqrt[3]{x} = -1.5$. (b) $\sqrt[3]{x-5} = 0.9$.

454 (Mở rộng [Thâ+23], 89., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt[3]{x} = a \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{ax+b} = c$. (c) $\sqrt[3]{ax^2+bx+c} = d$.

455 ([[Thâ+23](#)], 90., p. 20). *Chứng minh:* (a) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. (b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = \frac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

456 ([Thâ+23], 92., p. 20). Không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi, so sánh: (a) $2\sqrt[3]{3}$ & $\sqrt[3]{23}$. (b) 33 & $3\sqrt[3]{1333}$.

457 ([Tha+23], 93., p. 20). *Tìm tập hợp các giá trị $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau & biểu diễn tập hợp đó trên trục số: (a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$. (b) $\sqrt[3]{x} \leq -1.5$.*

458 ([Thâ+23], 94., pp. 20–21). *Chứng minh:*

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z) [(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2], \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Từ đó, chúng ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x^3+y^3+z^3}{3} &\geq xyz, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \geq 0, \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.\end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

459 ([**Tha+23**], 95., p. 20). *Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm, chứng minh: (a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng 3 kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất. (b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng 3 kích thước bé nhất.*

460 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$. So sánh $\sqrt[3]{x}$ với x .

Giải. $\sqrt[3]{x}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp: (a) $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$. (b) $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ hoặc $x > 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng thu được nhờ lập bảng xét dấu. (c) $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x > x^3 \Leftrightarrow x - x^3 > 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow x(1 - x)(1 + x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $0 < x < 1$, trong đó phép biến đổi tương đương cuối cùng cũng thu được nhờ lập bảng xét dấu. Vậy: $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x \in \{0, \pm 1\}$, $\sqrt[3]{x} < x \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, $\sqrt[3]{x} > x \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$. \square

461 (Mở rộng [Tuy23], Thí dụ 1, p. 5). Cho $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. So sánh $\sqrt[n]{x}$ với x .

462 ([Tuy23], Thí dụ 7, p. 19). Tính $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}$.

463 ([Tuy23], Thí dụ 8, p. 20). Giải & biện luận phương trình $(x - a)^n = a^2 - 2a + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$, a là tham số.

464 ([Tuy23], 50., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{8\sqrt{5} - 16} \sqrt[3]{8\sqrt{5} + 16}$. (b) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} + \sqrt[6]{8}$. (c) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}} \sqrt[6]{4 + 2\sqrt{3}}$.

465 ([Tuy23], 51., p. 21). (a) Tính $\frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1} - \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}$. (b) Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$, $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{xy}{x + y}$.

466 ([Tuy23], 52., p. 21). Cho $x = \frac{\sqrt[3]{8 - 3\sqrt{5}} + \sqrt[3]{64 - 12\sqrt{20}}}{\sqrt[3]{57}} \sqrt[3]{8 + 3\sqrt{5}}$, $y = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{81}}$. Tính xy .

467 ([Tuy23], 53., p. 22). Tính: (a) $x = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (b) $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$. (c) $x = \sqrt[3]{182 + \sqrt{33125}} + \sqrt[3]{182 - \sqrt{33125}}$.

468 ([Tuy23], 54., p. 22). Cho $A = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60 + \cdots + \sqrt[3]{60}}}}$. Chứng minh $3 < A < 3$. Tìm $[A]$.

469 ([Tuy23], 55., p. 22). Cho $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}}$, $B = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \cdots + \sqrt[3]{24}}}}$. Chứng minh $7 < A + B < 8$. Tìm $[A + B]$.

470 ([Tuy23], 56., p. 22). So sánh $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ & $b = \sqrt{5\sqrt[3]{2}}$.

471 ([Tuy23], 57., p. 22). Cho $ax^3 = by^3 = cz^3$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Chứng minh $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

472 ([Tuy23], 58., p. 22). Giải phương trình: (a) $x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}$. (b) $x^3 + 2x^2 - 4x = -\frac{8}{3}$.

473 ([Tuy23], 59., p. 22). Giải phương trình: (a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{5x}$. (b) $2\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 4}$.

474 ([Tuy23], 60., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-5} + \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{3x+2} = -2$.

475 ([Tuy23], 61., p. 22). Giải phương trình: $\sqrt[4]{(x-2)^2} + 4\sqrt[4]{x^2-4} = 5\sqrt[4]{(x+2)^2}$.

476 ([Tuy23], 62., p. 22). Cho $A = (a+b)(b+c)(c+a)$ trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh $A + 1 \geq 3(a+b+c)$.

477 ([Bin23], Ví dụ 15, p. 20). Chứng tỏ số $m = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ là 1 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x - 4 = 0$.

478 ([Bin23], Ví dụ 16, p. 20). Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

479 ([Bin23], 41., p. 20). Tính: (a) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$. (b) $\sqrt{3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$. (c) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}}$.

480 ([Bin23], 42., p. 21). Số $m = \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{80}}$ có phải là nghiệm của phương trình $x^3 + 12x - 8 = 0$ không?

481 ([Bin23], 43., p. 21). Lập 1 phương trình bậc 3 với các hệ số nguyên, trong đó: (a) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là 1 nghiệm của phương trình. (b) $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}$ là 1 nghiệm của phương trình.

482 ([Bin23], 44., p. 21). Tính: (a) $A = \sqrt[3]{6\sqrt{3} + 10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3} - 10}$. (b) $B = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. (c) $C = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$. (d) $D = \sqrt[3]{2 + 10\sqrt{\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{2 - 10\sqrt{\frac{1}{27}}}$. (e) $E = \sqrt[3]{4 + \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{5}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}$.

483 ([Bin23], 45., p. 21). Tìm x biết: (a) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = 1$. (b) $2x^3 = (x-1)^3$.

484 ([Bin23], 46., p. 21). Cho $am^3 = bn^3 = cp^3$ & $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{am^2 + bn^2 + cp^2}$.

485 ([Bin23], 47., p. 21). Tính: (a) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})$. (b) $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{2}$. (c) $\sqrt[4]{56 - 24\sqrt{5}}$. (d) $1 + \frac{2}{\sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}}$. (e) $\frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt{5} - \sqrt[4]{125}}}$.

14 Miscellaneous

486 ([Chí+23], 1–5, p. 39). (a) Nêu điều kiện để $x \in \mathbb{R}$ là căn bậc 2 số học của số $a \in \mathbb{R}$ không âm. Cho ví dụ. (b) Chứng minh $\sqrt{a^2} = |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (c) Biểu thức A phải thỏa điều kiện gì để \sqrt{A} xác định? (d) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép nhân & phép khai phương. Cho ví dụ. (e) Phát biểu & chứng minh định lý về mối liên hệ giữa phép chia & phép khai phương. Cho ví dụ.

487 ([Chí+23], 70., p. 40). Tính: (a) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$. (b) $\sqrt{3 \frac{1}{16} \cdot 2 \frac{14}{25} \cdot 2 \frac{34}{81}}$. (c) $\frac{\sqrt{640}\sqrt{343}}{\sqrt{567}}$. (d) $\sqrt{21.6}\sqrt{810}\sqrt{11^2 - 5^2}$.

488 ([Chí+23], 71., p. 40). Rút gọn biểu thức: (a) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10})\sqrt{2} - \sqrt{5}$. (b) $0.2\sqrt{(-10)^2 \cdot 3} + 2\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$. (c) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{4}{5}\sqrt{200}\right) : \frac{1}{8}$. (d) $2\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2(-3)^2} - 5\sqrt{(-1)^4}$.

489 ([Chí+23], 72., p. 40). Phân tích thành nhân tử với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a, b, x, y \geq 0$, $a \geq b$: (a) $xy - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1$. (b) $\sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$. (c) $\sqrt{a+b} + \sqrt{a^2 - b^2}$. (d) $12 - \sqrt{x} - x$.

490 ([Chí+23], 73., p. 40). Tìm DKXD, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức: (a) $\sqrt{-9a} - \sqrt{9+12a+4a^2}$ tại $a = -9$. (b) $1 + \frac{3m}{m-2}\sqrt{m^2 - 4m + 4}$ tại $m = 1.5$. (c) $\sqrt{1-10a+25a^2} - 4a$ tại $a = \sqrt{2}$. (d) $4x - \sqrt{9x^2 + 6x + 1}$ tại $x = -\sqrt{3}$.

491 ([Chí+23], 74., p. 40). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{(2x-1)^2} = 3$. (b) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \sqrt{15x} - 2 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$.

492 ([Chí+23], 75., pp. 40–41). Chứng minh: (a) $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{8}-2} - \frac{\sqrt{216}}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = -1.5$. (b) $\left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = -2$. (c) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = a-b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a \neq b$. (d) $\left(1 + \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right) \left(1 - \frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right) = 1-a$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$.

493 ([Chí+23], 76., p. 41). Cho biểu thức $A = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} - \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) : \frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tính Q khi $a = 3b$.

494 ([Thã+23], 96., p. 21). Giải phương trình $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3$.

495 ([Thã+23], 97., p. 21). Tính $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

496 ([Thã+23], 98., p. 22). Chứng minh: (a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. (b) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$.

497 ([Thã+23], 99., p. 22). Cho $A = \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{4x-2}$. Chứng minh $|A| = 0.5$ với $x \neq 0.5$.

498 ([Thã+23], 100., p. 22). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$. (b) $\sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$. (c) $(15\sqrt{200} - 3\sqrt{450} + 2\sqrt{50}) : \sqrt{10}$.

499 ([Thã+23], 101., p. 22). (a) Chứng minh: $x - 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} - 2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 4$. (b) Tìm DKXD & rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$.

500 ([Thã+23], 102., p. 22). Tìm DKXD của các biểu thức $A = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$, $B = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}$. (a) Chứng minh $A \geq 1$ & $B \geq \sqrt{5}$. (b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 1$, $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 2$.

501 ([Thã+23], 103., p. 22). Chứng minh: $x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Từ đó, cho biết biểu thức $\frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu? Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu?

502 ([Thã+23], 104., p. 23). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên.

503 ([Thã+23], 105., p. 23). Chứng minh $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, $a \neq 0$: (a) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}} - \frac{2b}{b-a} = \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. (b) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 = 1$.

504 ([Thã+23], 106., p. 23). Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$. (a) Tìm điều kiện để A có nghĩa. (b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a .

505 ([Thã+23], 107., p. 23). Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3-1}} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x+1}} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 3$.

506 ([Thã+23], 108., p. 23). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $C < -1$.

507 ([Thã+23], I.1., p. 23). Không dùng bảng số hoặc máy tính, so sánh $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ và $\sqrt{5}+1$.

508 ([Tuy23], Thí dụ 15, pp. 29–30). Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tính giá trị của A với $x = 7 - 4\sqrt{3}$. (c) Tìm giá trị lớn nhất của a để $P > a$.

509 ([Tuy23], 80., p. 31). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab(a+b) \neq 0$. Áp dụng tính $A = \sqrt{1 + 999^2 + \frac{999^2}{1000^2}} + \frac{999}{1000}$.

510 ([Tuy23], 81., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

511 ([Tuy23], 82., p. 31). Không dùng máy tính hoặc bảng số, chứng minh: $\sqrt{14} - \sqrt{13} < 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$.

512 ([Tuy23], 83., p. 31). Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 1$.

513 ([Tuy23], 84., p. 31). Tìm x, y, z biết $x + y + z + 35 = 2(2\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y+2} + 4\sqrt{z+3})$.

514 ([Tuy23], 85., p. 31). Cho $a > 0$, $b > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1}$.

515 ([Tuy23], 86., p. 31). Chứng minh: $A = \sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2} + \sqrt{10}$.

516 ([Tuy23], 87., p. 31). Chứng minh:

$$\frac{1}{4} < \frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}} < \frac{3}{10},$$

(ở tử có n dấu căn, ở mẫu có $n-1$ dấu căn).

517 ([Tuy23], 88., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt{x+2-3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2+3\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$.

518 ([Tuy23], 89., p. 31). Giải phương trình: $\sqrt[3]{(65+x)^2} + 4\sqrt[3]{(65-x)^2} = 5\sqrt[3]{65^2 - x^2}$.

519 ([Tuy23], 90., p. 32). Giải phương trình ẩn x : $\frac{(a-x)\sqrt[4]{x-b} + (x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b}} = \frac{a-b}{2}$ với $a > b$.

520 ([Tuy23], 91., p. 32). Cho biểu thức $A = \sum_{i=1}^{199} \frac{1}{\sqrt{i(200-i)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 199}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 198}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{199 \cdot 1}}$. Chứng minh $A > 1.99$.

521 ([Tuy23], 92., p. 32). Cho n số dương a_1, a_2, \dots, a_n . Chứng minh:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

522 ([Tuy23], 93., p. 32). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b) \geq 12$.

523 ([Tuy23], 94., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2+x+1}} = \frac{7}{4}$.

524 ([Tuy23], 95., p. 32). Giải phương trình: $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$.

525 ([Tuy23], 96., p. 32). Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq 1$. Rút gọn biểu thức $B = 1 - \sqrt{A + x + 1}$.

526 ([Tuy23], 97., p. 32). Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$. (a) Rút gọn A. (b) Tính giá trị của A với $x = 14 - 6\sqrt{5}$. (c) Tìm GTNN của A.

527 ([BNS23], Ví dụ 1.1, p. 5). Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})(a - 1)^2}$.

528 ([BNS23], Ví dụ 1.2, p. 6). Cho biểu thức $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của A. (b) Rút gọn biểu thức A với $1 \leq a < 2$. (c) Rút gọn biểu thức A với $a \geq 2$.

529 ([BNS23], Ví dụ 1.3, p. 6). Đơn giản biểu thức $A = \left(\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} + 2\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}\right)(\sqrt{63} + 1)$.

530 ([BNS23], Ví dụ 1.4, p. 6). Tính tổng $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

531 ([BNS23], Ví dụ 1.5, p. 6). Tính $A = \frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}(7 + 2\sqrt{10})(74 - 22\sqrt{10})}{\sqrt{125 - 4\sqrt{50} + 5\sqrt{20} + \sqrt{8}}}$.

532 ([BNS23], Ví dụ 1.6, p. 7). Cho $a = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Chứng minh: $a^2 - 2a - 2 = 0$.

533 ([BNS23], Ví dụ 1.7, p. 7). Cho $a = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. Tính

$$A = \frac{a^4 - 4a^3 + a^2 + 6a + 4}{a^2 - 2a + 12}.$$

534 ([BNS23], Ví dụ 1.8, p. 7). Cho $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + x}}{x + 1} + \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{x - 1}$ & $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $f(a)$.

535 ([BNS23], Ví dụ 1.9, p. 8). Giả thiết $x, y, z > 0$ & $xy + yz + zx = a$. Chứng minh

$$x\sqrt{\frac{(a + y^2)(a + z^2)}{a + x^2}} + y\sqrt{\frac{(a + z^2)(a + x^2)}{a + y^2}} + z\sqrt{\frac{(a + x^2)(a + y^2)}{a + z^2}} = 2a.$$

536 ([BNS23], 1.1, p. 8). Biểu diễn $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

537 ([BNS23], 1.2, p. 8). Đơn giản biểu thức $A = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{18} + \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$.

538 ([BNS23], 1.3, p. 8). Chứng minh $\sqrt{10 + 2\sqrt{24}} - \sqrt{10 - 2\sqrt{24}} = 4$.

539 ([BNS23], 1.4, p. 8). Tính $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

540 ([BNS23], 1.5, p. 9). Tính tích ab với

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}, \quad b = \sqrt{3 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}\sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}.$$

541 ([BNS23], 1.6, p. 9). Chứng minh $\frac{4}{\sqrt{5} - 1} + \frac{3}{\sqrt{5} - 2} + \frac{16}{\sqrt{5} - 3} = -5$.

542 ([BNS23], 1.7, p. 9). Chứng minh $\left(\frac{2}{\sqrt{6} - 1} + \frac{3}{\sqrt{6} - 2} + \frac{3}{\sqrt{6} - 3}\right)\frac{5}{9\sqrt{6} + 4} = \frac{1}{2}$.

543 ([BNS23], 1.8, p. 9). Cho $f(x) = \frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{5}}} + \frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{5}}}$. Tính $f(3)$.

544 ([BNS23], 1.9, p. 9). Cho $f(x) = \frac{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}$ & $a = \frac{4}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$. Tính $f(a)$.

545 ([BNS23], Ví dụ 2.1, p. 10). Chứng minh với $ab \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^5 b^7}}{\sqrt[3]{a^2 b}} - \frac{\sqrt[3]{a^4 b^8}}{\sqrt[3]{ab^2}} = 0$.

546 ([BNS23], Ví dụ 2.2, p. 10). Chứng minh với $abc \neq 0$: $\frac{\sqrt[3]{a^4 b^5 c^7}}{\sqrt[3]{ab^2 c}} = abc^2$.

547 ([BNS23], Ví dụ 2.3, p. 10). Với $a \geq 2 + \sqrt{2}$ ℰ

$$u = \sqrt[3]{\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 - 3a^2 - \frac{12}{a^2} + 3\left(a + \frac{2}{a}\right) - 13}, v = \sqrt{a^2 + \frac{4}{a^2} - 8\left(a + \frac{2}{a}\right) + 20}.$$

Chứng minh $u - v = 3$.

548 ([BNS23], Ví dụ 2.4, p. 11). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt[3]{8(7 + 5\sqrt{2})} + \sqrt[3]{216(7 - 5\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7$.

549 ([BNS23], Ví dụ 2.5, p. 11). Chứng minh $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

550 ([BNS23], Ví dụ 2.6, p. 11). Chứng minh nếu $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$ thì $a^3 + 3a = 4$.

551 ([BNS23], Ví dụ 2.7, p. 11). Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{9 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}} + 3\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{3}}}{3 + \sqrt[6]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}.$$

552 ([BNS23], Ví dụ 2.8, p. 12). Chứng minh nếu $\sqrt[3]{(a+1)^2} + \sqrt[3]{a^2-1} + \sqrt[3]{(a-1)^2} = 1$ thì $\sqrt[3]{a+1} - \sqrt[3]{a-1} = 2$.

553 ([BNS23], Ví dụ 2.9, p. 12). Đơn giản biểu thức $A = \frac{x+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+x+\frac{1}{x}}$ với $x \notin \{-1, 0\}$.

554 ([BNS23], Ví dụ 2.10, p. 12). Cho $a = \sqrt{2} + \sqrt{7 - \sqrt[3]{61 + 46\sqrt{5}}} + 1$. (a) Chứng minh $a^4 - 14a^2 + 9 = 0$. (b) Giả sử $f(x) = x^5 + 2x^4 - 14x^3 - 28x^2 + 9x + 19$. Tính $f(a)$.

555 ([BNS23], Ví dụ 2.11, p. 13). Cho $a, b, c > 0$. Giả sử m, n, p là những số nguyên dương lớn hơn 1 sao cho $bc = \sqrt[m]{a}$, $ca = \sqrt[n]{b}$, ℰ $ab = \sqrt[p]{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số bằng 1.

556 ([BNS23], Ví dụ 2.12, p. 13). Cho $a = \frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = 3x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 6x^3 + 6x^2 + x - 53\sqrt{2}$. Tính $f(a)$.

557 ([BNS23], Ví dụ 2.13, p. 14). Cho $a = \frac{7-4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận số a làm nghiệm. (b) Giả sử đa thức $f(x) = \frac{x^6 + x^4 + 4x^2}{40(x^4 + 4x^2 - 144)}$. Tính $f(a)$.

558 ([BNS23], Ví dụ 2.14, p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} + \sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$. Giả sử ta có đa thức $f(x) = (x^3 + 3x + 1935)^{2012}$. Tính $f(a)$.

559 ([BNS23], 2.1., p. 14). Biểu diễn $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ thành $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$.

560 ([BNS23], 2.2., p. 14). Cho $a = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{11}}$. Chứng minh $a^9 - 6a^6 + 282a^3 = 8$.

561 ([BNS23], 2.3., p. 15). Cho $a = (\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} - \sqrt[6]{5+4\sqrt{6}})\sqrt[3]{2\sqrt{6}-1} + 1$. (a) Xác định đa thức với hệ số nguyên bậc dương nhỏ nhất nhận a làm nghiệm. (b) Giả sử $f(x) = \sum_{i=1}^{2012} ix^i + 2012$. Tính $f(a)$.

562 ([BNS23], 2.4., p. 15). Chứng minh:

$$\frac{a + 2\sqrt{ab} + 9b}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}} - 2\sqrt{b} = \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0.$$

563 ([BNS23], 2.5., p. 15). Chứng minh:

$$\left(\sqrt[3]{a^4} + b^2\sqrt[3]{a^2} + b^4\right) \frac{\sqrt[3]{a^8} - b^6 + b^4\sqrt[3]{a^2} - a^2b^2}{a^2b^2 + b^2 - a^2b^8 - b^4} = a^2b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0, a \neq b^3.$$

564 ([BNS23], 2.6., p. 15). Cho $a, b > 0$. Đơn giản biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{a^3 + 2a^2b} + \sqrt{a^4 + 2a^3b} - \sqrt{a^3} - a^2b}{\sqrt{(2a + b - \sqrt{a^2 + 2ab})\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[6]{a^5} + a\right)}}.$$

565 ([BNS23], 2.7., p. 15). Giả sử $u^3 \geq v^2$, $u, v \in \mathbb{Q}^+$. Xác định u, v để

$$\sqrt{\frac{u - 8\sqrt[6]{u^3v^2} + 4\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{u} - 2\sqrt[3]{v} + 2\sqrt[12]{u^3v^2}}} + 3\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{v} = 1.$$

566. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^2 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

567. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt{c})^3 = A + B\sqrt{c}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B . Biểu diễn (A, B) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B) .

568. Cho $a, b, c, A, B \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$ thỏa mãn đẳng thức $(a + b\sqrt[3]{c})^3 = A + B\sqrt[3]{c} + C\sqrt[3]{c^2}$. (a) Tìm mối quan hệ của a, b, c, A, B, C . Biểu diễn (A, B, C) theo (a, b, c) . (b)* Biểu diễn (a, b) theo (c, A, B, C) .

15 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIII, pp. 72–73]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Chí+23] Phan Đức Chính, Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Ngô Hữu Dũng, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 128.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 7 Tập 1*. Tái bản lần 1. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.
- [Thâ+23] Tôn Thân, Vũ Hữu Bình, Trần Phương Dung, Lê Văn Hồng, and Nguyễn Hữu Thảo. *Bài Tập Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 216.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.
- [TVM22] Nguyễn Tất Thu, Đoàn Quốc Việt, and Vũ Công Minh. *Tự Luyện Giải Toán THCS Theo Chuyên Đề. Tập 3: Phương Trình Bậc 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh, 2022, p. 215.