Problem: Circle – Bài Tập: Đường Tròn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set $\mathbb{Q}$ of circles [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

Bài toán 1 ([Bìn23], Ví dụ 8, p. 95). *Cho hình thang cân $ABCD$. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.*

Bài toán 2 ([Bìn23], 50., p. 95). *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), $AC = 40$ cm, $BC = 48$ cm. Tính khoảng cách từ O đến BC.*

Bài toán 3 ([Bìn23], 51., p. 96). *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), cạnh bên bằng b, đường cao $AH = h$. Tính bán kính của đường tròn (O).*

Bài toán 4 ([Bìn23], 52., p. 96). *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Gọi M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong ΔAMC hoặc O nằm giữa A & M. Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh: (a) Chu vi ΔIMC lớn hơn $2R$. (b) Chu vi ΔABC lớn hơn $4R$.*

Bài toán 5 ([Bìn23], 53., p. 96). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Kẻ 3 đường thẳng DD', EE', FF' sao cho $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$. Chứng minh 3 đường thẳng DD', EE', FF' đồng quy.*

Bài toán 6 ([Bìn23], 54., p. 96). *Cho 3 điểm A, B, C bất kỳ & đường tròn $(O;1)$. Chứng minh tồn tại 1 điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho $MA + MB + MC \ge 3$.*

2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

Bài toán 7 ([Bìn23], Ví dụ 9, p. 96). *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm bất kỳ thuộc cung BC không chứa A. Gọi D, E theo thứ tự là các điểm đối xứng với M qua AB, AC. Tìm vị trí của M để DE có độ dài lớn nhất.*

Bài toán 8 ([Bìn23], Ví dụ 10, p. 97). *Cho (O) bán kính $OA = 11$ cm. Điểm M thuộc bán kính OA & cách O 7 cm. Qua M kẻ dây CD có độ dài 18 cm. Tính MC, MD với $MC < MD$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex.

Bài toán 9 ([Bìn23], Ví dụ 11, p. 97). *Cho (O) bán kính* 15 cm, *điểm M cách O* 9 cm. *(a) Dựng dây AB đi qua M & có độ dài* 26 cm. *(b) Có bao nhiêu dây đi qua M & có độ dài là 1 số nguyên* cm*?*

Bài toán 10 ([Bìn23], 55., p. 98). *Tứ giác ABCD có* $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$. *(a) Chứng minh* $AC \le BD$. *(b) Trong trường hợp nào thì* $AC = BD$*?*

Bài toán 11 ([Bìn23], 56., p. 98). *Cho (O) đường kính AB, 2 dây AC, AD. Gọi E là điểm bất kỳ trên đường tròn, H, K lần lượt là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh* $HK \le AB$.

Bài toán 12 ([Bìn23], 57., p. 98). *Cho (O), dây* $AB = 24$ cm, *dây* $AC = 20$ cm *(*$\widehat{BAC} < 90^\circ$ *& điểm O nằm trong* $\widehat{BAC}$*). Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến AB bằng* 8 cm. *(a) Chứng minh* ΔABC *cân tại C. (b) Tính bán kính đường tròn.*

Bài toán 13 ([Bìn23], 58., p. 98). *Cho (O) bán kính* 5 cm, *2 dây AB & CD song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng* 8 cm *&* 6 cm. *Tính khoảng cách giữa 2 dây.*

Bài toán 14 ([Bìn23], 59., p. 98). *Cho (O), đường kính* $AB = 13$ cm. *Dây CD có độ dài* 12 cm *vuông góc với AB tại H. (a) Tính AH, BH. (b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của H trên AC, BC. Tính diện tích tứ giác CMHN.*

Bài toán 15 ([Bìn23], 60., p. 99). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD. Gọi H, K lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ A, B đến CD. (a) Chứng minh* $CH = DK$. *(b) Chứng minh* $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$. *(c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác AHKB, biết* $AB = 30$ cm, $CD = 18$ cm.

Bài toán 16 ([Bìn23], 61., p. 99). *Cho* ΔABC*, 3 đường cao* AD, BE, CF*. Đường tròn đi qua D, E, F cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC, kẻ từ N vuông góc với AC, kẻ từ P vuông góc với AB đồng quy.*

Bài toán 17 ([Bìn23], 62., p. 99). ΔABC *cân tại A nội tiếp (O). Gọi D là trung điểm của AB, E lfa trọng tâm của* ΔACD*. Chứng minh* $OE \perp CD$.

3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

Bài toán 18 ([Bìn23], Ví dụ 12, p. 99). *Cho* ΔABC *vuông tại A,* $AB < AC$*, đường cao AH. Gọi E là điểm đối xứng với B qua H. Đường tròn có đường kính EC cắt AC ở K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn.*

Bài toán 19 ([Bìn23], Ví dụ 13, p. 100). *Cho 1 hình vuông* 8×9 *gồm* 64 *ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính* 8 *sao cho tâm O của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần & che lấp hoàn toàn)?*

Bài toán 20 ([Bìn23], 63., pp. 100–101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, M là 1 điểm thuộc nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh M là trung điểm của CD. (b) Chứng minh* $AB = BC + AD$. *(c) Giả sử* $\widehat{AOM} \ge \widehat{BOM}$*, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác BCDE. (d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác ABCD có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính R của nửa đường tròn đã cho.*

Bài toán 21 ([Bìn23], 64., p. 101). *Cho* ΔABC *cân tại A, I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp* ΔBIC*. (b) Gọi H là trung điểm của BC, IK là đường kính của đường tròn (O). Chứng minh* $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{HI}{HK}$.

Bài toán 22 ([Bìn23], 65., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax & nửa đường tròn nằm cùng phía đối với AB), C là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O & vuông góc với AC cắt Ax tại M. Gọi I là giao điểm của MB & CH. Chứng minh* $IC = IH$.

Bài toán 23 ([Bìn23], 66., p. 101). *Cho hình thang vuông ABCD,* $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$*, có* $\widehat{BMC} = 90^\circ$ *với M là trung điểm của AD. Chứng minh: (a) AD là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC. (b) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AD.*

Bài toán 24 ([Bìn23], 67., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, C là 1 điểm thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường vuông góc với OC, cắt nửa đường tròn tại D & E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của* $(C; CD)$.

Bài toán 25 ([Bìn23], 68., p. 101). *Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi* d, d' *lần lượt là 2 tiếp tuyến tại A, B của đường tròn,* $C \in d$ *bất kỳ. Đường vuông góc với OC tại O cắt* d' *tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (O).*

Bài toán 26 ([Bìn23], 69., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, C là 1 điểm thuộc nửa đường tròn. Qua C kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia Ax, By song song với nhau, cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.*

Bài toán 27 ([Bìn23], 70., pp. 101–102)**.** *Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn, A là tiếp điểm. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc d. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BM, cắt d tại N. (a) Chứng minh tích $AM \cdot AN$ không đổi khi điểm M chuyển động trên đường thẳng d. (b) Tìm* GTNN *của MN.*

Bài toán 28 ([Bìn23], 71., p. 102)**.** *Cho ΔABC cân tại A có $\widehat{A} = \alpha$, đường cao $AH = h$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính h. 1 tiếp tuyến bất kỳ ($\neq BC$) của đường tròn (A) cắt 2 tia AB, AC theo thứ tự tại B', C'. (a) Chứng minh $S_{ABC} = S_{AB'C'}$. (b) Trong các ΔABC có $\widehat{A} = \alpha$ & đường cao $AH = h$, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?*

4 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

5 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.