

Problem: Calculus on Set \mathbb{N} of Naturals

Bài Tập: Các Phép Tính Trên Tập Hợp Các Số Tự Nhiên

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 10 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/hobby/elementary mathematics/grade 6/natural/natural calculus/problem: calculus on set \$\mathbb{N}\$ of naturals \[pdf\]](https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/natural/natural_calculus/problem:calculus_on_set_N_of_naturals.pdf).¹ [TeX]².

Mục lục

1 Basic Calculus on \mathbb{N} – Phép $\pm, \cdot, :$ trên \mathbb{N}	1
1.1 Combination of Calculus – Phối Hợp Các Phép Tính	5
1.2 Use Inequalities – Sử Dụng Bất Đẳng Thức	6
2 Exponentiation on \mathbb{N} – Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên	6
2.1 Compare Exponentiations – So Sánh Các Lũy Thừa	7
2.2 Last Digit of Products & Exponentiations – Chữ Số Tận Cùng của Các Tích & Lũy Thừa	8
3 Problem on Naturals – Bài Toán về Số Tự Nhiên	8
3.1 Sum, difference, & ratio – Tìm các số biết tổng & các hiệu, biết tổng (hiệu) & các tỷ số	9
3.2 Additional hypothesis – Giải toán bằng phương pháp giả thiết tạm	9
3.3 Selection method – Toán giải bằng phương pháp lựa chọn	10
4 Order of Operations – Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính	10
5 Cân & Đong với 1 Số Điều Kiện Hạn Chế	11
6 Miscellaneous	11
Tài liệu	11

1 Basic Calculus on \mathbb{N} – Phép $\pm, \cdot, :$ trên \mathbb{N}

- 1 ([BQT23], H1, p. 17). (a) Viết đủ 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào 3 đỉnh & 3 trung điểm của 3 cạnh của 1 tam giác sao cho tổng 3 số trên mỗi cạnh bằng 10. (b*) Có bao nhiêu cách tất cả?
- 2 ([BQT23], H2, p. 17). Đ/S? Cho $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{N}^*$ thỏa $a + m = b + n = c + p = a + b + c$. (a) $m + n > p$. (b) $n + p < m$. (c) $p + m > n$. (d) $m + n + p = a + b + c$. (e) $m + n + p = 2(a + b + c)$. (f) m, n, p là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác.
- 3 ([BQT23], H3, p. 17). Tính $3^4 : 3 + 2^3 : 2^2$.
- 4 ([BQT23], H4, p. 17). Đ/S? (a) $(15 + 5)(4 + 1) = 20 \cdot 5 = 100$. (b) $5 + 20 \cdot 4 = 25 \cdot 4 = 100$.
- 5 ([BQT23], H5, p. 17). Tính: (a) Hiệu của 2 số lẻ mà giữa chúng có 10 số chẵn. (b) Hiệu của 2 số lẻ mà giữa chúng có 10 số lẻ. (c) Hiệu của 2 số chẵn mà giữa chúng có 5 số chẵn. (d) Hiệu của 2 số chẵn mà giữa chúng có 5 số lẻ.
- 6 ([BQT23], VD1, p. 17). Tính hợp lý: (a) $A = 27 \cdot 36 + 73 \cdot 99 + 27 \cdot 14 - 49 \cdot 73$. (b) $B = (4^5 \cdot 10 \cdot 5^6 + 25^5 \cdot 2^8) : (2^8 \cdot 5^4 + 5^7 \cdot 2^5)$.
- 7 ([BQT23], VD2, p. 18). Egg & Chicken cùng ra cửa hàng mua sách. Tổng số tiền ban đầu của 2 bạn là 78000 đồng. Egg mua hết 32000 đồng, Chicken mua hết 14000 đồng. Khi đó số tiền còn lại của 2 bạn bằng nhau. Hỏi ban đầu mỗi bạn có bao nhiêu tiền?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/natural/natural_calculus/problem/NQBH_natural_calculus_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/hobby/blob/master/elementary_mathematics/grade_6/natural/natural_calculus/problem/NQBH_natural_calculus_problem.tex.

- 8 ([BQT23], VD3, p. 18). So sánh: (a) $(4 + 5)^2$ & $4^2 + 5^2$. (b) 2^{30} & 3^{20} .
- 9 ([BQT23], VD4, p. 19). Tế bào lớn lên đến 1 kích thước nhất định thì phân chia. Quá trình đó diễn ra như sau: Đầu tiên từ 1 nhân hình thành 2 nhân, tách xa nhau. Sau đó chất tế bào được phân chia, xuất hiện 1 vách ngăn, ngăn đôi tế bào cũ thành 2 tế bào con. Các tế bào con tiếp tục lớn lên cho đến khi bằng tế bào mẹ. Các tế bào này lại tiếp tục phân chia thành 4, rồi thành 8, ... tế bào. Từ 1 tế bào ban đầu, tìm số tế bào có được sau lần phân chia thứ 5, thứ 8, thứ 10, thứ n .
- 10 ([BQT23], VD5, p. 19). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $149 - (35 : x + 3) \cdot 17 = 13$. (b) $\overline{1x32} + \overline{7x8} + \overline{4x} = \overline{200x}$.
- 11 ([BQT23], VD6, p. 20). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $(3x - 2)^3 = 2 \cdot 32$. (b) $5^{x+1} - 5^x = 500$.
- 12 ([BQT23], VD7, p. 20). Tìm các số mũ tự nhiên n sao cho lũy thừa 3^n thỏa mãn điều kiện $25 < 3^n < 260$.
- 13 ([BQT23], VD8, p. 21). Tìm số chia & số bị chia nhỏ nhất có thương số là 6 & số dư là 13.
- 14 ([BQT23], 2.1., p. 21). Tính hợp lý: (a) $21 \cdot (271 + 29) + 79 \cdot (271 + 29)$. (b) $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 499 - 500 + 501 + 502$.
- 15 ([BQT23], 2.2., p. 21). Quan hệ về cường độ của các nốt nhạc: 1 nốt tròn bằng 2 nốt trắng, 1 nốt trắng bằng 2 nốt đen, 1 nốt đen bằng 2 nốt móc, 1 nốt móc bằng 2 nốt móc đôi, 1 nốt móc đôi bằng 2 nốt móc 3, 1 nốt móc 3 bằng 2 nốt móc 4. Dùng lũy thừa của 1 số tự nhiên để diễn tả mối quan hệ về cường độ giữa: (a) Nốt tròn & nốt đen. (b) Nốt tròn & nốt móc 4. (c) Nốt trắng & nốt móc đôi.
- 16 ([BQT23], 2.3., p. 21). Tính giá trị của biểu thức: $A = 3ab^2 - \frac{a^3}{d} + c$ với $a = 3, b = 5, c = 7, d = 1$.
- 17 ([BQT23], 2.4., p. 21). So sánh: (a) 243^7 & $9^{10} \cdot 27^5$. (b) 15^{15} & $81^3 \cdot 125^5$. (c) $78^{15} - 78^{12}$ & $78^{12} - 78^9$.
- 18 ([BQT23], 2.5., p. 21). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $121 : 11 - (4x + 5) : 3 = 4$. (b) $2 + 4 + 6 + \dots + x = 2450$ với x là số tự nhiên chẵn.
- 19 ([BQT23], 2.6., p. 21). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $(3x - 7)^5 = 32$. (b) $(4x - 1)^3 = 27 \cdot 125$.
- 20 ([BQT23], 2.7., p. 21). Cho 3 số 5, 7, 9. Tìm tổng tất cả các số khác nhau viết bằng cả 3 số đó, mỗi chữ số dùng 1 lần.
- 21 ([BQT23], 2.8., p. 21). Tích của 2 số là 476. Nếu thêm 22 đơn vị vào 1 số thì tích của 2 số là 850. Tìm 2 số đó.
- 22 ([BQT23], 2.9., p. 21). Hiệu của 2 số là 12. Nếu tăng số bị trừ lên 2 lần, giữ nguyên số trừ thì hiệu của chúng là 49. Tìm 2 số đó.
- 23 ([BQT23], 2.10., p. 21). Tìm 2 số tự nhiên có thương bằng 7. Nếu giảm số bị chia đi 124 đơn vị thì thương của chúng bằng 3.
- 24 ([BQT23], 2.11., p. 21). Rút gọn biểu thức: (a) $10 \cdot \frac{4^6 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}{8^4 \cdot 3^{12} - 6^{11}}$. (b) $\sum_{i=0}^{50} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{49} + 2^{50}$. (c) $5 + 5^3 + 5^5 + \dots + 5^{47} + 5^{49}$.
- 25 ([BQT23], 2.12., p. 22). Cho $\sum_{i=0}^{2000} 3^i = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{1999} + 3^{2000}$. Chứng minh $A : 13$.
- 26 ([BQT23], 2.13., p. 22). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $2^x + 2^{x+1} = 96$. (b) $3^{4x+4} = 81^{x+3}$.
- 27 ([BQT23], 2.14., p. 22). Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa: (a) $(x - 5)^7 = (x - 5)^9$. (b) $x^{2015} = x^{2016}$.
- 28 ([BQT23], 2.15., p. 22). Tìm các số tự nhiên x biết lũy thừa 5^{2x-3} thỏa mãn điều kiện $100 < 5^{2x-3} \leq 5^9$.
- 29 ([BQT23], 2.16., p. 22). Trong 1 phép chia, số bị chia bằng 69, số dư bằng 3. Tìm số chia & thương.
- 30 ([BQT23], 2.17., p. 22). Tổng của 3 số là 124. Nếu lấy số thứ nhất chia cho số thứ 2 hoặc lấy số thứ 2 chia cho số thứ 3 đều được thương là 3 & dư 4. Tìm 3 số đó.
- 31 ([BQT23], 2.18., p. 22). Khi chia 1 số cho 54 thì được số dư là 49. Nếu chia số đó cho 18 thì thương thay đổi thế nào?
- 32 ([BQT23], 2.19., p. 22). Tìm số bị chia & số chia nhỏ nhất để được thương là 8 & dư là 45.
- 33 ([BQT23], 2.20., p. 22). Tổng của 2 số bằng 36000. Chia số lớn cho số nhỏ được thương bằng 4 & còn dư 940. Tìm 2 số đó.
- 34 ([BQT23], 2.21., p. 22, Hạt thóc & bàn cờ vua). 1 nhà thông thái muốn thuyết phục vua Shilhram (Ấn Độ) về tầm quan trọng của mỗi người dân trong vương quốc. Vì thế, ông ta phát minh ra bàn cờ vua để thể hiện 1 vương quốc bao gồm vua, hoàng hậu, giáo sĩ trưởng, hiệp sĩ, & quân lính, mọi thành phố đều quan trọng. Nhà vua trở nên cực kỳ thích & ra lệnh cho mọi người trong vương quốc chơi cờ vua. Shilhram tuyên bố sẽ ban tặng nhà thông thái bất cứ số vàng & bạc nào mà ông ta muốn, nhưng nhà thông thái không muốn nhận phần thưởng như vậy. Nhà thông thái cùng với nhà vua đi đến bàn cờ & nhờ ông đặt 1 hạt thóc lên ô vuông đầu tiên, 2 hạt lên ô thứ 2, 4 hạt lên ô vuông thứ 3 & xin với nhà vua tổng số hạt thóc được đặt theo cách như vậy đến ô cuối cùng của bàn cờ (số hạt đặt vào ô sau gấp đôi số hạt đặt vào ô trước). Nhà vua cảm thấy bị xúc phạm nhưng ông vẫn ra lệnh cho người hầu làm theo ước muốn của nhà thông thái. Những người hầu tuyệt vọng báo lại rằng số lượng hạt thóc dùng để thưởng cho nhà thông thái theo cách như vậy là không đủ. Nhà vua hiểu ngay nhà thông thái muốn dạy ông bài học thứ 2. Giống như quân tốt trong cờ vua, không nên đánh giá thấp những thứ nhỏ bé trong cuộc sống. Tính số hạt thóc mà nhà thông thái yêu cầu nhà vua Shilhram thưởng cho mình.

- 35 ([BQT23], p. 23). Có 79 số tự nhiên, trong đó tổng của 13 số bất kỳ đều là 1 số lẻ. Hỏi tổng của 79 số tự nhiên đó là số lẻ hay số chẵn?
- 36 ([Tuy23], Ví dụ 3, p. 8). 1 học sinh khi nhân 1 số với 31 đã đặt các tích riêng thẳng hàng như trong phép cộng nên tích đã giảm đi 540 đơn vị so với tích đúng. Tìm tích đúng.
- 37 ([Tuy23], Ví dụ 4, p. 8). Cho 2 số không chia hết cho 3, khi chia cho 3 được các số dư khác nhau. Chứng minh tổng của 2 số đó chia hết cho 3.
- 38 ([Tuy23], 14., p. 9). Tính hợp lý: (a) $38 + 41 + 117 + 159 + 62$. (b) $73 + 86 + 978 + 914 + 3022$. (c) $341 \cdot 67 + 341 \cdot 16 + 659 \cdot 83$. (d) $42 \cdot 53 + 47 \cdot 156 - 47 \cdot 114$.
- 39 ([Tuy23], 15., p. 9). Tính giá trị của biểu thức: (a) $A = (100 - 1) \cdot (100 - 2) \cdots (100 - n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$ & tích trên có đúng 100 thừa số. (b) $B = 13a + 19b + 4a - 2b$ với $a + b = 100$.
- 40 ([Tuy23], 16., p. 9). Không tính giá trị cụ thể, so sánh giá trị 2 biểu thức: (a) $A = 199 \cdot 201$ & $B = 200 \cdot 200$. (b) $C = 35 \cdot 53 - 18$ & $D = 35 + 53 \cdot 34$.
- 41 ([Tuy23], 17., p. 9). Tính hợp lý: (a) $(44 \cdot 52 \cdot 60) : (11 \cdot 13 \cdot 15)$. (b) $123 \cdot 456456 - 456 \cdot 123123$. (c) $(98 \cdot 7676 - 9898 \cdot 76) : (2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \cdots 2030)$.
- 42 ([Tuy23], 18., p. 9). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2021 - 1021 : (999 - x)$.
- 43 ([Tuy23], 20., p. 9). Tìm số hạng thứ 5, thứ n của dãy số: (a) 2, 3, 7, 25, ... (b) 8, 30, 72, 140, ...
- 44 ([Tuy23], 21., p. 9). Tìm x : (a) $(x + 74) - 318 = 200$. (b) $3636 : (12x - 91) = 36$. (c) $(x : 23 + 45) \cdot 67 = 8911$.
- 45 ([Tuy23], 22., p. 9). 1 nong tầm là 5 nong kén. 1 nong kén là 9 nén tơ. Hỏi muốn được 540 nén tơ thì phải chăn bao nhiêu nong tầm?
- 46 ([Tuy23], 23., p. 9). 2 số tự nhiên a, b chia hết cho m có cùng số dư, $a \geq b$. Chứng tỏ $a - b$ chia hết cho m .
- 47 ([Tuy23], 24., p. 9). Trong 1 phép chia có số bị chia là 155, số dư là 12. Tìm số chia & thương.
- 48 ([Tuy23], 25., p. 9). Viết tập hợp A các số tự nhiên x biết lấy x chia cho 12 ta được thương bằng số dư.
- 49 ([Tuy23], 26., p. 10). Chia 129 cho 1 số ta được số dư là 10. Chia 61 cho số đó ta cũng được số dư là 10. Tìm số chia.
- 50 ([Tuy23], 27., p. 10). Cho 3 chữ số a, b, c khác nhau & khác 0. Với cùng cả 3 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 3 chữ số?
- 51 ([Tuy23], 28., p. 10). Cho 4 chữ số khác nhau & khác 0. (a) Với cùng cả 4 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số? (b) Có thể lập được bao nhiêu số có 2 chữ số khác nhau trong 4 chữ số đã cho?
- 52 ([Tuy23], 29., p. 10). Cho 4 chữ số khác nhau trong đó có 1 chữ số 0. Với cùng cả 4 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số?
- 53 ([Tuy23], 30., p. 10). Anh Bách đi mua bánh kẹo tại 1 siêu thị, thanh toán bằng 1 phiếu mua hàng trị giá 100000 đồng. Siêu thị không trả lại số tiền thừa. Giúp anh Bách chọn mua vừa hết số tiền ghi trong phiếu. Bảng giá 1 số mặt hàng có bán:

STT	Tên hàng	Đơn vị	Giá bán
1	Bánh đậu xanh	Hộp	31 500 đồng
2	Bánh bông lan	Gói	23 500 đồng
3	Bánh gạo	Gói	19 000 đồng
4	Bánh gạo chiên	Gói	17 800 đồng
5	Bánh quy	Gói	13 500 đồng
6	Bánh xốp	Gói	5 300 đồng
7	Kẹo hương dâu	Gói	2 500 đồng

- 54 ([Bin22], Ví dụ 4, p. 7). Cho $A = 137 \cdot 454 + 206$, $B = 453 \cdot 138 - 110$. Không tính giá trị của A & B , chứng tỏ $A = B$.
- 55 ([Bin22], Ví dụ 5, p. 8). Tìm kết quả của phép nhân: $A = \underbrace{33 \dots 3}_{50} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{50}$.
- 56 ([Bin22], Ví dụ 6, p. 8). Tổng của 2 số tự nhiên khác nhau gấp 3 hiệu của chúng. Tìm thương của 2 số tự nhiên đó.
- 57 ([Bin22], Ví dụ 7, p. 8). Khi chia số tự nhiên a cho 54, ta được số dư là 38. Chia số a cho 18, ta được thương là 14 & còn dư. Tìm a .
- 58 ([Bin22], Ví dụ 8, p. 8). Tìm 2 số tự nhiên lớn hơn 0 sao cho tích của 2 số ấy gấp đôi tổng của chúng.
- 59 ([Bin22], Ví dụ 9, p. 9). Điền các số tự nhiên 1, 2, 3, 4, 5 vào các dấu $*$ để kết quả phép tính bằng 6: $* + * - * \cdot * : *$.

- 60 ([Bin22], Ví dụ 10, p. 9). Giá tiền 7 quyển vở nhiều hơn giá tiền 8 bút chì. Hỏi giá tiền 8 quyển vở & giá tiền 9 bút chì, bằng bao nhiêu hơn?
- 61 ([Bin22], Ví dụ 11, p. 9). Cho 6 số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 50. Chứng minh trong 6 số đó tồn tại 3 số có tổng lớn hơn hoặc bằng 30.
- 62 ([Bin22], 13., p. 10). Có thể viết được hay không 9 số vào 1 bảng vuông 3×3 , sao cho: Tổng các số trong 3 dòng theo thứ tự bằng 352, 463, 541; tổng các số trong 3 cột theo thứ tự bằng 335, 687, 234?
- 63 ([Bin22], 14., p. 10). Cho 9 số xếp vào 9 ô thành 1 hàng ngang, trong đó số đầu tiên là 4, số cuối cùng là 8, & tổng 3 số ở 3 ô liền nhau bất kỳ bằng 17. Tìm 9 số đó.
- 64 ([Bin22], 15., p. 10). Tìm số có 3 chữ số, biết chữ số hàng trăm gấp 4 lần chữ số hàng đơn vị & nếu viết số ấy theo thứ tự ngược lại thì nó giảm đi 594 đơn vị.
- 65 ([Bin22], 16., p. 10). Thay các dấu * bởi các chữ số thích hợp: $**** - *** = **$ biết số bị trừ, số trừ & hiệu đều không đổi nếu đọc mỗi số từ phải sang trái.
- 66 ([Bin22], 19., p. 10). Hiệu của 2 số là 4. Nếu tăng 1 số gấp 3 lần, giữ nguyên số kia thì hiệu của chúng bằng 60. Tìm 2 số đó.
- 67 ([Bin22], 20., p. 10). Cho số 123456789. Đặt 1 số dấu “+” & “-” vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng 100.
- 68 ([Bin22], 21., p. 10). Cho số 987654321. Đặt 1 số dấu “+” & “-” vào giữa các chữ số để kết quả của phép tính bằng: 100, 99.
- 69 ([Bin22], 22., p. 10). Tìm giá trị lớn nhất của hiệu $\overline{bd} - \overline{ac}$ biết $a < b < c < d$.
- 70 ([Bin22], 23., p. 10). Tìm 6 chữ số khác nhau a, b, c, d, e, f sao cho $A = \overline{abc} - \overline{def}$ có giá trị nhỏ nhất.
- 71 ([Bin22], 24., p. 11). Cho 6 chữ số khác nhau a, b, c, d, e, f . Gọi $A = \overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cde} + \overline{def}$. Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của A .
- 72 ([Bin22], 25., p. 11). Tìm 2 số biết tổng của chúng gấp 5 lần hiệu của chúng, tích của chúng gấp 24 lần hiệu của chúng.
- 73 ([Bin22], 26., p. 11). Tìm 2 số biết tổng của chúng gấp 7 lần hiệu của chúng, còn tích của chúng gấp 192 lần hiệu của chúng.
- 74 ([Bin22], 27., p. 11). Tích của 2 số là 6210. Nếu giảm 1 thừa số đi 7 đơn vị thì tích mới là 5265. Tìm các thừa số của tích.
- 75 ([Bin22], 28., p. 11). Bảo làm 1 phép nhân, trong đó số nhân là 102. Nhưng khi viết số nhân, Bảo đã quên không viết chữ số 0 nên tích bị giảm đi 21870 đơn vị so với tích đúng. Tìm số bị nhân của phép nhân đó.
- 76 ([Bin22], 29., p. 11). 1 học sinh nhân 78 với số nhân là số có 2 chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Do nhầm lẫn bạn đó viết đổi thứ tự 2 chữ số của số nhân, nên tích giảm đi 2808 đơn vị so với tích đúng. Tìm số nhân đúng.
- 77 ([Bin22], 30., p. 11). 1 học sinh nhân 1 số với 463. Vì bạn đó viết các chữ số tận cùng của các tích riêng ở cùng 1 cột nên tích bằng 30524. Tìm số bị nhân.
- 78 ([Bin22], 31., p. 11). Chứng minh hiệu sau có thể viết được thành 1 tích của 2 thừa số bằng nhau: $11111111 - 2222$.
- 79 ([Bin22], 32., p. 11). Chỉ ra 2 số khác nhau sao cho nếu nhân mỗi số với 7 thì ta được kết quả là các số gồm toàn các chữ số 9.
- 80 ([Bin22], 33., p. 11). Tìm kết quả của phép nhân sau: $\underbrace{3 \dots 3}_{50} \cdot \underbrace{3 \dots 3}_{50}$.
- 81 ([Bin22], 34., p. 11). Tìm tổng các chữ số của tích: (a) $A = \underbrace{88 \dots 8}_{21} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{21}$. (b) $B = \underbrace{99 \dots 9}_{94} \cdot \underbrace{44 \dots 4}_{94}$.
- 82 ([Bin22], 35., p. 11). Chứng minh các số sau có thể viết được thành 1 tích của 2 số tự nhiên liên tiếp: 111222, 444222.
- 83 ([Bin22], 36., p. 11). Tìm 2 số tự nhiên có thương bằng 35 biết nếu số bị chia tăng thêm 1056 đơn vị thì thương bằng 57.
- 84 ([Bin22], 37., p. 11). Tìm số bị chia & số chia biết thương bằng 6, số dư bằng 49, tổng của số bị chia, số chia, & số dư bằng 595.
- 85 ([Bin22], 38., p. 11). 1 phép chia có thương bằng 4, số dư bằng 25. Tổng của số bị chia, số chia & số dư bằng 210. Tìm số bị chia & số chia.
- 86 ([Bin22], 39., p. 11). Trong hội trường có 680 người ngồi. Tất cả có 25 dãy ghế, mỗi dãy ghế có 30 chỗ ngồi. Ít nhất có bao nhiêu dãy ghế có số chỗ ngồi như nhau?
- 87 ([Bin22], 40., p. 12). (a) Trong 1 năm, có ít nhất & nhiều nhất bao nhiêu ngày Chủ nhật? (b) Ngày 1.1 năm nay rơi vào ngày Chủ nhật. Ngày 1.1 năm sau rơi vào ngày thứ mấy?
- 88 ([Bin22], 41., p. 12). Tháng 8 của 1 năm có 4 ngày thứ Năm & 5 ngày thứ 4. Hỏi ngày đầu tiên của tháng đó là ngày thứ mấy?

- 89** ([Bin22], 42., p. 12). Ngày 19.8.2002 vào ngày thứ Hai. Tính xem ngày 19.8.1945 vào ngày nào trong tuần?
- 90** ([Bin22], 43., p. 12). Tìm thương của 1 phép nhân, biết nếu thêm 15 vào số bị chia & thêm 5 vào số chia thì thương & số dư không đổi.
- 91** ([Bin22], 44., p. 12). Tìm thương của 1 phép chia, biết nếu tăng số bị chia 90 đơn vị, tăng số chia 6 đơn vị thì thương & số dư không đổi.
- 92** ([Bin22], 45., p. 12). Tìm thương của 1 phép chia, biết nếu tăng số bị chia 73 đơn vị, tăng số chia 4 đơn vị thì thương không đổi, còn số dư tăng 5 đơn vị.
- 93** ([Bin22], 46., p. 12). Xác định phép chia, biết số bị chia, số chia, thương & số dư là 4 số trong các số sau: (a) 3, 4, 16, 64, 256, 772. (b) 2, 3, 9, 27, 81, 243, 567.
- 94** ([Bin22], 47., p. 12). Khi chia 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số như nhau cho 1 số tự nhiên gồm 3 chữ số như nhau, ta được thương là 2 & còn dư. Nếu xóa 1 chữ số ở số bị chia & xóa 1 chữ số ở số chia thì thương của phép chia vẫn bằng 3 nhưng số dư giảm hơn trước là 100. Tìm số bị chia & số chia lúc đầu.
- 95** ([Bin22], 48., p. 12). Trong 1 phép chia có dư, số bị chia gồm 4 chữ số như nhau, số chia gồm 3 chữ số như nhau, thương bằng 13 & còn dư. Nếu xóa 1 chữ số ở số bị chia, xóa 1 chữ số ở số chia thì thương không đổi, còn số dư giảm hơn trước là 100 đơn vị. Tìm số bị chia & số chia lúc đầu.

1.1 Combination of Calculus – Phối Hợp Các Phép Tính

- 96** ([Bin22], 49., p. 12). Tính nhanh: (a) $19 \cdot 64 + 76 \cdot 34$. (b) $35 \cdot 12 + 65 \cdot 13$. (c) $136 \cdot 68 + 16 \cdot 272$. (d) $(2 + 4 + 6 + \dots + 100) \cdot (36 \cdot 333 - 108 \cdot 111)$. (e) $19991999 \cdot 19981998 \cdot 1999$.
- 97** ([Bin22], 50., p. 12). Không tính cụ thể các giá trị của A & B , cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a) $A = 1998 \cdot 1998$, $B = 1996 \cdot 2000$. (b) $A = 2000 \cdot 2000$, $B = 1990 \cdot 2010$. (c) $A = 25 \cdot 33 - 10$, $B = 31 \cdot 26 + 10$. (d) $A = 32 \cdot 53 - 31$, $B = 53 \cdot 31 + 32$.

Bài toán trên có thể được tổng quát như sau:

- 98.** Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$. Không tính cụ thể các giá trị của A_i & B_i , $i = 1, 2$, cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a) $A_1 = n \cdot n = n^2$, $B_1 = (n - k)(n + k)$. (b) $A_2 = n^3$, $B_2 = (n - k)n(n + k)$.

Giải. (a) Khai triển B_1 hoặc dùng hằng đẳng thức đáng nhớ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có $B_1 = (n - k)(n + k) = n^2 + nk - kn - k^2 = n^2 - k^2 = A_1 - k^2 < A_1$ do $k \geq 1$. Vậy $A_1 > B_1$ & lớn hơn 1 lượng bằng k^2 . (b) Nhận thấy $A_2 = nA_1$, $B_2 = nB_1$, nên $A_2 - B_2 = n(A_1 - B_1) = nk^2 > 0$. \square

Bài toán trên có thể được tổng quát hơn nữa như sau, ý tưởng giải vẫn là sử dụng nhiều lần hằng đẳng thức $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 1 cách thích hợp:

- 99.** Cho $m, n, k \in \mathbb{N}^*$. Không tính cụ thể các giá trị của A_i & B_i , $i = 1, 2$, cho biết số nào lớn hơn & lớn hơn bao nhiêu? (a) $A_1 = n^{2m}$, $B_1 = (n - mk)(n - (m - 1)k) \dots (n - k)(n + k) \dots (n + mk)$. (b) $A_2 = n^{2m+1}$, $B_2 = (n - mk)(n - (m - 1)k) \dots (n - k)n(n + k) \dots (n + mk)$.

Khi $m = 1$, bài toán tổng quát này trở thành bài toán trước đó.

- 100** ([Bin22], 51., p. 12). Tìm thương của phép chia sau mà không tính kết quả cụ thể của số bị chia & số chia: $\frac{37 \cdot 13 - 13}{24 + 37 \cdot 12}$.
- 101** ([Bin22], 52., p. 13). Tính: (a) $A = \frac{\sum_{i=1}^{101} i}{\sum_{i=1}^{101} (-1)^{i+1} i} = \frac{101 + 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1}{101 - 100 + 99 - 98 + \dots + 3 - 2 + 1}$. (b) $B = \frac{3737 \cdot 43 - 4343 \cdot 37}{2 + 4 + 6 + \dots + 100}$.
- 102** ([Bin22], 53., p. 13). Vận dụng tính chất các phép tính để tìm các kết quả bằng cách nhanh chóng: (a) $1990 \cdot 1990 - 1992 \cdot 1988$. (b) $(1374 \cdot 57 + 687 \cdot 86) : (26 \cdot 13 + 74 \cdot 14)$. (c) $(124 \cdot 237 + 152) : (870 + 235 \cdot 122)$. (d) $\frac{423134 \cdot 846267 - 423133}{846267 \cdot 423133 + 423134}$.
- 103** ([Bin22], 54., p. 13). Tìm $a \in \mathbb{N}$ biết: (a) $697 : \frac{15a + 364}{a} = 17$. (b) $92 \cdot 4 - 27 = \frac{a + 350}{a} + 315$.
- 104** ([Bin22], 55., p. 13). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $720 : [41 - (2x - 5)] = 40$. (b) $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 5750$.
- 105** ([Bin22], 56., p. 13). Cho số 12345678. Đặt các dấu phép tính & dấu ngoặc để kết quả của phép tính bằng 9.
- 106** ([Bin22], 57., p. 13). Viết 5 dãy tính có kết quả bằng 100, với 6 chữ số 5 cùng với dấu các phép tính (& dấu ngoặc nếu cần).
- 107** ([Bin22], 58., p. 13). (a) Viết dãy tính có kết quả bằng 100, với 5 chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính (& dấu ngoặc nếu cần). (b) Cũng hỏi như vậy với 6 chữ số khác nhau.
- 108** ([Bin22], 59., p. 13). (a) Tính (kết quả khá đặc biệt): $1 \cdot 8 + 1$, $12 \cdot 8 + 2$, $123 \cdot 8 + 3$, $1234 \cdot 8 + 4$. (b) Viết tiếp 4 dòng nữa theo quy luật trên.
- 109** ([Bin22], 60., p. 13). Điền các số 1, 2, 3, 4, 5 vào các dấu * để kết quả của phép tính bằng 3: $* + * - * \cdot * : *$.

1.2 Use Inequalities – Sử Dụng Bất Đẳng Thức

- 110** ([Bin22], 61., p. 13). *Giá tiền 1 quyển sách, 6 quyển vở, 3 chiếc bút là 7700 đồng, giá tiền 8 quyển sách, 6 quyển vở, 6 chiếc bút là 16000 đồng. So sánh giá tiền 1 quyển sách & 1 quyển vở.*
- 111** ([Bin22], 62., p. 13). *Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 15, được: $A = 1234 \dots 1415$. Xóa đi 15 chữ số của số A để các chữ số còn lại (vẫn giữ nguyên thứ tự như trước) tạo thành: (a) Số nhỏ nhất. (b) Số lớn nhất.*
- 112** ([Bin22], 63., p. 14). *Cho số $123 \dots 20$, i.e., viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 20. Xóa đi 20 chữ số để số còn lại có giá trị: (a) Nhỏ nhất. (b) Lớn nhất.*
- 113** ([Bin22], 64., p. 14). *Tìm giá trị nhỏ nhất của hiệu giữa 1 số tự nhiên có 2 chữ số với tổng các chữ số của nó.*
- 114** ([Bin22], 65., p. 14). *Tìm số chia & số dư biết số bị chia bằng 112, thương bằng 5.*
- 115** ([Bin22], 66., p. 14). *Tìm số chia & số dư biết số bị chia bằng 813, thương bằng 15, số dư gồm 2 chữ số như nhau.*
- 116** ([Bin22], 67., p. 14). *Tìm số chia & số dư của phép chia 542 cho 1 số tự nhiên, biết thương bằng 12.*
- 117** ([Bin22], 68., p. 14). *1 học sinh trong 5 năm học từ lớp 5 đến lớp 9 đã qua 31 kỳ thi, trong đó số kỳ thi ở năm sau nhiều hơn số kỳ thi ở năm trước, & số kỳ thi ở năm cuối gấp 3 lần số kỳ thi ở năm đầu. Hỏi học sinh đó thi bao nhiêu kỳ ở năm thứ 4?*
- 118** ([Bin22], 69., p. 14). *Tìm 2 số tự nhiên sao cho tổng của 2 số ấy bằng tích của chúng.*
- 119** ([Bin22], 70., p. 14). *Tìm 3 số tự nhiên khác 0 biết tổng của 3 số ấy bằng tích của chúng.*

2 Exponentiation on \mathbb{N} – Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên

Định nghĩa 1 (Số chính phương). Số chính phương là số bằng bình phương của 1 số tự nhiên, i.e., a là số chính phương $\Leftrightarrow a = n^2$ với $n \in \mathbb{N}$ nào đó.

- 120** ([Tuy23], Ví dụ 5, p. 11). *Chứng minh tổng $\sum_{i=1}^5 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ là 1 số chính phương.*
- 121** ([Tuy23], Ví dụ 6, p. 11). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $2 \cdot 3^x = 162$.*
- 122** ([Tuy23], Ví dụ 7, p. 11). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $(x+2)^4 = 5^2 \cdot 25$.*
- 123** ([Tuy23], 31., p. 11). *Trong các số $2^4, 3^4, 4^2, 4^3, 99^0, 0^{99}, 1^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$, các số nào bằng nhau? Số nào nhỏ nhất? Số nào lớn nhất?*
- 124** ([Tuy23], 32., p. 11). *Kiểm tra đẳng thức $152 - 5^3 = 10^2$ đúng hay sai. Nếu sai, di chuyển 1 chữ số đến vị trí khác để được đẳng thức đúng.*
- 125** ([Tuy23], 33., p. 11). *Chứng minh mỗi tổng/hiệu sau là 1 số chính phương: (a) $3^2 + 4^2$. (b) $13^2 - 5^2$. (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.*
- 126** ([Tuy23], 34., pp. 11–12). *Viết các tổng/hiệu sau dưới dạng 1 lũy thừa với số mũ lớn hơn 1. (a) $17^2 - 15^2$. (b) $4^3 - 2^3 + 5^2$.*
- 127** ([Tuy23], 35., p. 12). *Viết số 729 dưới dạng 1 lũy thừa với 3 cơ số khác nhau & số mũ lớn hơn 1.*
- 128** ([Tuy23], 36., p. 12). *Viết các tích/thương sau dưới dạng lũy thừa của 1 số: (a) $2^5 \cdot 8^4$. (b) $25^6 \cdot 125^3$. (c) $625^5 : 25^7$. (d) $12^3 \cdot 3^3$.*
- 129** ([Tuy23], 37., p. 12). *Tính $6^{3^1}, 3^{2^3}, 7^{1^{2^{3^4}}}, 2020^{3^{0^{1^0}}}$.*
- 130** ([Tuy23], 38., p. 12). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $(3x-2)^3 = 64$. (b) $(2x+5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$.*
- 131** ([Tuy23], 39., p. 12). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$. (b) $3^{x+4} = 9^{2x-1}$.*
- 132** ([Tuy23], 40., p. 12). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $2^x - 15 = 17$. (b) $(7x-11)^3 = 2^5 \cdot 5^2 + 200$.*
- 133** ([Tuy23], 41., p. 12). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $x^{10} = 1^x$. (b) $x^{10} = x$. (c) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$.*
- 134** ([Tuy23], 42., p. 12). *Tìm $m, n \in \mathbb{N}$ thỏa $2^m + 2^n = 40$.*
- 135** ([Tuy23], 43., p. 12). *Số $4^6 \cdot 5^{14}$ có bao nhiêu chữ số nếu viết trong hệ thập phân ở dạng thông thường (không có số mũ)?*
- 136** ([Tuy23], 44., p. 12). *Trong âm nhạc, về trường độ thì: 1 nốt tròn bằng 2 nốt trắng, 1 nốt trắng bằng 2 nốt đen, 1 nốt đen bằng 2 nốt móc đơn, 1 nốt móc đơn bằng 2 nốt móc kép, 1 nốt móc kép bằng 2 nốt móc 3, 1 nốt móc 3 bằng 2 nốt móc 4. Dùng lũy thừa của 1 số tự nhiên để: (a) Diễn tả mối quan hệ về trường độ giữa nốt tròn với các nốt nhạc khác. (b) Cho biết nốt nhạc có trường độ gấp 8 lần nốt móc 3 là nốt nhạc nào?*
- 137** ([Tuy23], 45., p. 12, Phân bào). *Tế bào lớn lên đến 1 kích thước nhất định thì phân chia thành 2 tế bào con. Mỗi tế bào con tiếp tục lớn lên cho đến khi bằng tế bào mẹ, sau đó phân chia thành 2 tế bào, quá trình cứ thế tiếp tục. Cho biết: (a) Số tế bào con sau lần phân chia thứ 3, thứ 5, thứ $n \in \mathbb{N}^*$. Viết kết quả dưới dạng lũy thừa cơ số 2. (b) Sau mấy lần phân chia thì số tế bào con là 128?*

Về phân bào, see, e.g., [Wikipedia/phân bào](#) & [Wikipedia/spindle apparatus](#).

138 ([Bin22], Ví dụ 12, p. 14). *Không dùng máy tính, chứng minh $A = 215216217 \cdot 218218220$ là số có 17 chữ số.*

139 ([Bin22], Ví dụ 13, p. 14). *Sử dụng nhận xét $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, chứng minh 2^{64} có vào khoảng 20 chữ số.*

140 ([Bin22], Ví dụ 14, p. 15). *Chứng minh $A = 4 + \sum_{i=2}^{20} 2^i = 4 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$.*

141 ([Bin22], Ví dụ 15, p. 15). *So sánh 63^7 & 16^{12} .*

142 ([Bin22], Ví dụ 16, p. 15). (a) *Với 3 chữ số 2, viết thành 1 số tự nhiên có giá trị lớn nhất.* (b) *Cũng hỏi như vậy đối với 3 chữ số 4.* (c) *Cũng hỏi như vậy đối với 3 chữ số $a \in \mathbb{N}$.*

143 ([Bin22], Ví dụ 17, p. 16). *Số 2^2 & 5^2 viết liền nhau được số 425 có 3 chữ số, số 2^3 & 5^3 viết liền nhau được số 8125 có 4 chữ số, số 2^4 & 5^4 viết liền nhau được số 16625 có 5 chữ số. Chứng minh số 2^{1991} & 5^{1991} viết liền nhau được số có 1992 chữ số.*

144 ([Bin22], 71., p. 16). *Tính: (a) $4^{10} \cdot 8^{15}$. (b) $4^{15} \cdot 5^{30}$. (c) $27^{16} : 9^{10}$. (d) $A = \frac{72^3 \cdot 54^2}{108^4}$. (e) $B = \frac{3^{10} \cdot 11 + 3^{10} \cdot 5}{3^9 \cdot 2^4}$.*

145 ([Bin22], 72., p. 16). *Tính giá trị của biểu thức: (a) $\frac{2^{10} \cdot 13 + 2^{10} \cdot 65}{2^8 \cdot 104}$. (b) $(1 + 2 + 3 + \dots + 100)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2)(65 \cdot 111 - 13 \cdot 15 \cdot 37)$.*

146 ([Bin22], 73., p. 16). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $2^x \cdot 4 = 128$. (b) $x^{15} = x$. (c) $(2x + 1)^3 = 125$. (d) $(x - 5)^4 = (x - 5)^6$.*

147 ([Bin22], 74., p. 16). *Cho $A = \sum_{i=1}^{100} 3^i = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết $2A + 3 = 3^n$.*

148 ([Bin22], 75., p. 16). *Tính tổng của 100 số: $\sum_{i=1}^{100} \underbrace{9}_i = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{100}$.*

149 ([Bin22], 76., p. 16). *Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết bình phương của chữ số hàng chục bằng tích của 2 chữ số kia & số tự nhiên đó trừ đi số gồm 3 chữ số ấy viết theo thứ tự ngược lại bằng 495.*

150 ([Bin22], 77., pp. 16–17). (a) *Viết dãy tính có kết quả bằng 1000000, với 5 chữ số như nhau cùng với dấu các phép tính & dấu ngoặc nếu cần.* (b) *Cũng hỏi như vậy với 6 chữ số khác nhau.*

151 ([Bin22], 78., p. 17). *So sánh A & B : (a) $A = \sum_{i=1}^{1000} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000$, $B = 11! = \prod_{i=1}^{11} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 11$. (b) $A = 20! = \prod_{i=1}^{20} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 20$, $B = \sum_{i=1}^{1000000} i = 1 + 2 + 3 + \dots + 1000000$.*

152 ([Bin22], 79., p. 17). *So sánh: (a) 3^{500} & 7^{300} . (b) 8^5 & $3 \cdot 4^7$. (c) 99^{20} & 9999^{10} . (d) 202^{303} & 303^{202} . (e) 3^{21} & 2^{31} . (f) 11^{1979} & 37^{1320} . (g) 10^{10} & $48 \cdot 50^5$. (h) $1990^{10} + 1990^9 + 1991^{10}$.*

153 ([Bin22], 80., p. 17). *So sánh: (a) 5^{299} & 3^{501} . (b) 3^{23} & 5^{15} . (c) 127^{23} & 513^{18} .*

154 ([Bin22], 81., p. 17). *Chứng minh: $5^{27} < 2^{63} < 5^{28}$.*

155 ([Bin22], 82., p. 17). *Viết liền nhau các kết quả của các lũy thừa 4^{50} & 25^{50} , ta được 1 số tự nhiên có bao nhiêu chữ số?*

156 ([Bin22], 83., p. 17). *Tìm số tự nhiên có 4 chữ số biết số đó có thể phân tích thành tích của 2 thừa số có tổng bằng 100 & 1 trong 2 thừa số ấy có dạng a^a .*

2.1 Compare Exponentiations – So Sánh Các Lũy Thừa

157 ([Tuy23], Ví dụ 8, p. 13). *So sánh 3^7 & 2^{11} .*

158 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 13). *So sánh 16^{19} & 8^{25} .*

159 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 13). *So sánh 3^{4040} & 2^{6060} .*

160 ([Tuy23], 46., p. 14). *So sánh: (a) 27^{11} & 81^8 . (b) 625^5 & 125^7 .*

161 ([Tuy23], 47., p. 14). *So sánh: (a) 5^{36} & 11^{24} . (b) 3^{2n} & 2^{3n} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

162 ([Tuy23], 48., p. 14). *So sánh $A = 2 \cdot 3^{54}$ & $B = 6 \cdot 5^{32}$.*

163 ([Tuy23], 49., p. 14). *Chứng minh: $5^{60n} < 2^{140n} < 3^{100n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

164 ([Tuy23], 50., p. 14). *Sắp xếp 3 số 3^{539} , 7^{308} , 2^{847} theo thứ tự tăng dần.*

165 ([Tuy23], 51., p. 14). *So sánh: (a) 5^{75} & 7^{60} . (b) 3^{21} & 2^{31} .*

166 ([Tuy23], 52., p. 14). *So sánh: (a) 5^{23} & $6 \cdot 5^{22}$. (b) $7 \cdot 2^{13}$ & 2^{16} . (c) 21^{15} & $27^5 \cdot 49^8$.*

167 ([Tuy23], 53., p. 14). *So sánh: (a) 199^{20} & 2003^{15} . (b) 3^{39} & 11^{21} .*

168 ([Tuy23], 54., p. 14). *So sánh 2 hiệu $A = 72^{45} - 72^{44}$ & $B = 72^{44} - 72^{43}$.*

169 ([Tuy23], 55., p. 14). *Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $16^x < 128^4$. (b) $5^x \cdot 5^{x+1} \cdot 5^{x+2} \leq \underbrace{100 \dots 0}_{18} : 2^{18}$.*

170 ([Tuy23], 56., p. 14). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ biết $2^5 \cdot 3^n \cdot 3^{n+2} \leq 32 \cdot 3^6 \cdot 3^4$.*

171 ([Tuy23], 57., p. 14). *So sánh $A = \sum_{i=0}^9 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$ & $B = 5 \cdot 2^8$.*

172 ([Tuy23], 58., p. 14). *Viết số lớn nhất bằng cách dùng 3 chữ số 1, 2, 3 với điều kiện mỗi chữ số chỉ dùng 1 lần.*

2.2 Last Digit of Products & Exponentiations – Chữ Số Tận Cùng của Các Tích & Lũy Thừa

173 ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 15). Cho tổng $A = 9531^m + 246^n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Hỏi tổng A có phải là số chính phương không?

174 ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 15). Cho $B = 559^{361} - 7^{202}$. Chứng minh $B \vdots 10$.

175 ([Tuy23], Ví dụ 13, pp. 15–16). Ngoài Dương lịch, Âm lịch, còn ghi lịch theo hệ đếm Can Chi, e.g., Nhâm Ngọ, Quý Mùi, Giáp Thân, ... Chữ thứ nhất chỉ hàng Can, chữ thứ 2 chỉ hàng Chi. Có 10 Can là: Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý. Có 12 Chi là: Tý, Sửu, Dần, Mão, Thìn, Tỵ, Ngọ, Mùi, Thân, Dậu, Tuất, Hợi. Muốn tìm hàng Can của 1 năm ta chỉ cần xét chữ số tận cùng của năm dương lịch rồi đối chiếu với bảng:

Hàng can	Giáp	Ất	Bính	Đinh	Mậu	Kỷ	Canh	Tân	Nhâm	Quý
Chữ số tận cùng của năm dương lịch	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3

Muốn tìm hàng Chi của 1 năm ta dùng công thức

$$\text{Hàng Chi} = \text{Số dư của } \frac{\text{năm} - 4}{12} + 1.$$

Rồi đối chiếu kết quả với bảng:

Hàng chi	Tý	Sửu	Dần	Mão	Thìn	Tỵ	Ngọ	Mùi	Thân	Dậu	Tuất	Hợi
Mã số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Năm 2010 kỷ niệm 1000 năm Thăng Long–Hà Nội, tính xem năm đó là năm nào theo hệ đếm Can Chi? Chú ý: Vì năm dương lịch không trùng hoàn toàn với năm âm lịch nên đối với 2 tháng đầu của năm dương lịch thì còn phải chỉnh chút ít.

176 ([Tuy23], 59., p. 16). Tìm chữ số tận cùng của tổng $A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 98$.

177 ([Tuy23], 60., p. 16). Có 5 số tự nhiên nào mà tích bằng 2021 & tổng có tận cùng bằng 8 không?

178 ([Tuy23], 61., p. 16). Tích các số lẻ liên tiếp có tận cùng là 7. Hỏi tích đó có bao nhiêu thừa số?

179 ([Tuy23], 62., p. 16). Tìm chữ số tận cùng của các lũy thừa: $87^{32}, 58^{33}, 23^{35}, 74^{30}, 49^{31}$.

180 ([Tuy23], 63., p. 16). Chia mỗi số sau cho 100 được số dư là bao nhiêu? (a) 7^{2025} . (b) 6^{1202} .

181 ([Tuy23], 64., p. 16). Tìm chữ số tận cùng của các số sau: (a) 234^{567} . (b) 6^{1202} .

182 ([Tuy23], 65., p. 16). Chứng minh các tổng hoặc hiệu sau không chia hết cho 10: (a) $A = 98 \cdot 96 \cdot 94 \cdot 92 - 91 \cdot 93 \cdot 95 \cdot 97$. (b) $B(m, n) = 405^n + 2^{405} + m^2$, với $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

183 ([Tuy23], 66., p. 17). Cho $P = \left(\prod_{i=1}^{10} 2^i\right) \left(\prod_{i=1}^7 5^{2i}\right) = (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^{10})(5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdots 5^{14})$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

184 ([Tuy23], 67., p. 17). Cho $S = \sum_{i=0}^{30} 3^i = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{30}$. Tìm chữ số tận cùng của S , từ đó suy ra S không phải là số chính phương.

185 ([Tuy23], 68., p. 17). Nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa ra đời ngay sau Cách mạng tháng 8 năm 1945. Trong hệ đếm Can Chi năm 1945 là năm nào?

186 ([Tuy23], 69., p. 17). Chiến thắng Đống Đa giải phóng Thăng Long vào mùa xuân năm 1789. Năm đó là năm nào trong hệ đếm Can Chi?

3 Problem on Naturals – Bài Toán về Số Tự Nhiên

187 ([Bin22], Ví dụ 18, p. 17). Tuổi anh hiện nay gấp 3 lần tuổi em trước kia, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Khi tuổi em bằng tuổi anh hiện nay thì tổng số tuổi của 2 người sẽ là 28. Tính tuổi của mỗi người hiện nay.

188 ([Bin22], Ví dụ 19, p. 18). 3 ô tô chở tổng cộng 50 chuyển, gồm 118 tấn hàng. Mỗi chuyển, xe thứ nhất chở 2 tấn, xe thứ 2 chở 2.5 tấn, xe thứ 3 chở 3 tấn. Hỏi mỗi xe chở bao nhiêu chuyển biết số chuyển xe thứ nhất gấp rưỡi số chuyển xe thứ 2?

189 ([Bin22], Ví dụ 20, p. 19). Anh Lâm nói: “Năm 1990, tuổi mình đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh”. Tính xem anh Lâm sinh năm nào.

3.1 Sum, difference, & ratio – Tìm các số biết tổng & các hiệu, biết tổng (hiệu) & các tỷ số

- 190** ([Bin22], 84., p. 19). Lương Thế Vinh là nhà toán học nổi tiếng của nước ta thời xưa. Năm sinh của ông rất đặc biệt, đó là 1 số có 4 chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục & tổng của 4 chữ số bằng 10. Tính năm sinh của ông.
- 191** ([Bin22], 85., p. 19). Tìm 4 số tự nhiên chẵn liên tiếp có tổng bằng 5420.
- 192** ([Bin22], 86., p. 19). Tìm 3 số biết: Tổng của số thứ nhất & số thứ 2 bằng 56, tổng của số thứ 2 & số thứ 3 bằng 64, tổng của số thứ 3 & số thứ nhất bằng 78.
- 193** ([Bin22], 87., p. 19). Tìm 3 số tự nhiên lẻ liên tiếp biết tổng của số lớn nhất & số nhỏ nhất bằng 114.
- 194** ([Bin22], 88., p. 19). 2 ngăn sách lúc đầu có tổng cộng 118 cuốn. Sau khi lấy đi 8 cuốn ở ngăn I, thêm 10 cuốn vào ngăn II thì số sách ở ngăn II gấp đôi số sách ở ngăn I. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.
- 195** ([Bin22], 89., p. 19). Tìm số tự nhiên tận cùng bằng 7 biết sau khi xóa chữ số 7 đó thì số ấy giảm đi 484 đơn vị.
- 196** ([Bin22], 90., p. 19). Hiệu của 2 số bằng 1217. Nếu tăng số trừ gấp 4 lần thì được số lớn hơn số bị trừ là 376. Tìm số bị trừ, số trừ.
- 197** ([Bin22], 91., p. 19). 1 vườn hình chữ nhật có chu vi 356 m. Tính chiều dài & chiều rộng của vườn biết nếu viết thêm chữ số 1 vào trước số đo chiều dài thì được số đo chiều dài.
- 198** ([Bin22], 92., pp. 19–20). Bài toán cổ Hy Lạp:

Lừa & ngựa thồ hàng ra chợ,
Ngựa thồ than mình chở quá nhiều.
Lừa rằng: “Anh chở lắm điều!
Tôi đây mới bị chắt nhiều làm sao!
Anh đưa tôi 1 bao mang bớt
Thì tôi thồ nhiều gấp đôi anh
Chính tôi phải trút cho anh
1 bao gánh đỡ mới thành bằng nhau”.

Hỏi lừa, ngựa chở mấy bao?

- 199** ([Bin22], 93., p. 20). Tìm số bị chia & số chia của 1 phép chia, biết thương bằng 6, số dư bằng 49, tổng của số bị chia, số chia & số dư bằng 595.
- 200** ([Bin22], 94., p. 20). Tìm số tự nhiên biết nếu viết thêm chữ số 2 vào sau chữ số hàng đơn vị thì số ấy tăng thêm 2000 đơn vị.
- 201** ([Bin22], 95., p. 20). Mẹ hơn con 28 tuổi. Sau 5 năm nữa, tuổi mẹ gấp 3 tuổi con. Tính tuổi mẹ & con hiện nay.
- 202** ([Bin22], 96., p. 20). Con 10 tuổi, bố 40 tuổi. Sau mấy năm nữa, tuổi bố gấp 3 tuổi con?
- 203** ([Bin22], 97., p. 20). Năm 2000, bố 40 tuổi, Mai 11 tuổi, em Nam 5 tuổi. Đến năm nào, tuổi bố bằng tổng số tuổi của 2 chị em?
- 204** ([Bin22], 98., p. 20). Năm 2000, mẹ 36 tuổi, 2 con 7 tuổi & 12 tuổi. Bắt đầu từ năm nào, tuổi mẹ ít hơn tổng số tuổi của 2 con?
- 205** ([Bin22], 99., p. 20). Anh hơn em 3 tuổi. Tuổi anh hiện nay gấp rưỡi tuổi em, lúc anh bằng tuổi em hiện nay. Tính tuổi hiện nay của mỗi người.

3.2 Additional hypothesis – Giải toán bằng phương pháp giả thiết tạm

- 206** ([Bin22], 100., p. 20). 1 số học sinh xếp hàng 12 thì thừa 5 học sinh, còn xếp hàng 15 cũng thừa 5 học sinh & ít hơn trước là 4 hàng. Tính số học sinh.
- 207** ([Bin22], 101., p. 20). Có 1 số học sinh & 1 số thuyền. Nếu xếp 4 học sinh 1 thuyền thì thừa 3 học sinh chưa có chỗ. Nếu xếp 5 học sinh 1 thuyền thì thừa ra 1 thuyền. Tính số học sinh & số thuyền.
- 208** ([Bin22], 102., p. 20). An vào cửa hàng mua 12 vở & 4 bút chì hết 36000 đồng. Bích mua 8 vở & 5 bút chì cùng loại hết 27500 đồng. Tính giá 1 quyển vở, giá 1 bút chì.
- 209** ([Bin22], 103., p. 20). Trong 1 đợt trồng cây, lớp 6A trồng 26 cây, lớp 6B trồng 29 cây, lớp 6C trồng 32 cây. Số cây lớp 6D trồng nhiều hơn trung bình cộng của 4 lớp là 3 cây. Tính số cây lớp 6D trồng.
- 210** ([Bin22], 104., p. 20). Bơm nước vào 1 bể: dùng máy I trong 30 phút, dùng máy II trong 20 phút. Tính xem trong mỗi phút mỗi máy bơm được bao nhiêu lít nước, biết mỗi phút máy II bơm được nhiều hơn máy I là 50 L & tổng cộng 2 máy bơm được 21000 L nước?

211 ([Bin22], 105., p. 20). 1 tổ may phải may 1800 chiếc cả quần & áo trong 13 giờ. Trong 8 giờ đầu tổ may áo & trong thời gian còn lại tổ may quần. Biết trong 1 giờ, tổ may được số áo nhiều hơn số quần là 30 chiếc. Tính số áo & số quần tổ đã may.

212 ([Bin22], 106., p. 21). Đố:

Quýt, cam 17 quả tươi
 Dem chia cho 100 người cùng vui.
 Chia 3 mỗi quả quýt rồi,
 Còn cam mỗi quả chia 10 vừa xinh.
 Trăm người, trăm miếng ngọt lành,
 Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

213 ([Bin22], 107., p. 21). 1 đội bóng thi đấu 25 trận, chỉ có thắng & hòa, mỗi trận thắng được 3 điểm, mỗi trận hòa được 1 điểm, kết quả đội đó được 59 điểm. Tính số trận thắng, số trận hòa của đội bóng.

214 ([Bin22], 108., p. 21). (a) 1 cuộc thi có 20 câu hỏi, mỗi câu trả lời đúng được 5 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. 1 đội học sinh dự thi đạt 52 điểm. Hỏi đội đó trả lời đúng mấy câu, sai mấy câu? (b) 1 người làm gia công 45 sản phẩm, mỗi chiếc làm đúng quy cách được 800 đồng, mỗi chiếc làm sai quy cách phải đền 1200 đồng. Tính ra người đó được lĩnh 30000 đồng. Hỏi người đó làm bao nhiêu sản phẩm đúng quy cách?

215 ([Bin22], 109., p. 21). 1 câu lạc bộ có 22 chiếc ghế gồm 3 loại: ghế 3 chân, ghế 4 chân, ghế 6 chân. Tính số ghế mỗi loại, biết tổng số chân ghế bằng 100 & số ghế 6 chân gấp đôi số ghế 3 chân.

216 ([Bin22], 110., p. 21). 1 số tiền trị giá 224000 đồng gồm các loại tiền 5000 đồng, 2000 đồng, 1000 đồng, tổng cộng 130 tờ. Biết số tờ 1000 đồng gấp 5 số tờ 5000 đồng. Tính số tờ tiền mỗi loại.

217 ([Bin22], 111., p. 21). Có 25 gói đường gồm 3 loại: gói 5 lạng, gói 2 lạng, gói 1 lạng, có khối lượng tổng cộng là 56 lạng. Biết số gói 1 lạng gấp đôi số gói 5 lạng. Tính số gói mỗi loại.

218 ([Bin22], 112., p. 21). 1 hộp có thể chứa được vừa vặn 25 gói bánh hoặc 30 gói kẹo. Xếp 28 gói cả bánh & kẹo thì vừa đầy hộp đó. Biết giá tiền bánh & kẹo đều bằng nhau & bằng 36000 đồng. Tính giá 1 gói bánh, 1 gói kẹo.

3.3 Selection method – Toán giải bằng phương pháp lựa chọn

219 ([Bin22], 113., p. 21). Tìm số tự nhiên có 3 chữ số, biết tổng 6 số tự nhiên có 2 chữ số lập bởi 2 trong 3 chữ số ấy gấp đôi số phải tìm.

220 ([Bin22], 114., p. 21). (a) Tìm 3 chữ số khác nhau & khác 0, biết tổng các số tự nhiên có 3 chữ số gồm cả 3 chữ số ấy bằng 1554. (b) Tìm 3 chữ số khác nhau & khác 0, biết tổng các số tự nhiên có 3 chữ số gồm cả 3 chữ số ấy bằng 2886, còn hiệu giữa số lớn nhất & số nhỏ nhất bằng 495. (c) Có 3 tờ bìa ghi các số 23, 79, & \overline{ab} . Xếp 3 tờ bìa thành 1 hàng thì được số có 6 chữ số. Cộng tất cả các số 6 chữ số đó lại (bằng cách đổi chỗ các tờ bìa) thì được 2989896. Tìm số \overline{ab} .

221 ([Bin22], 115., p. 21). Có 5 người cân theo từng cặp 2 người. Số cân nặng (tính bằng kg) trong 10 lượt cân xếp từ lớn đến nhỏ là: 129, 125, 124, 13, 122, 121, 120, 118, 116, 114. Tính cân nặng của mỗi người.

222 ([Bin22], 116., p. 22). Bé Mai nhận thấy nếu ghép tuổi mình với tuổi của em Thu thì được tuổi của bà. Biết tổng số tuổi của 3 bà cháu là 85. Tính tuổi mỗi người.

223 ([Bin22], 117., p. 22, Đố vui: những năm sinh đặc biệt). Ngày đầu năm 1991, bác Nam hỏi anh Việt:

- Năm nay cháu bao nhiêu tuổi rồi?

- Tuổi cháu năm nay đúng bằng tổng các chữ số của năm sinh – Anh Việt trả lời.

Thế mà bác Nam tính ngay ra tuổi của anh Việt. Bác gật gù nói:

- Lúc bác bằng tuổi cháu hiện nay, bác đang tham gia kháng chiến chống Pháp, & năm ấy cũng có tổng các chữ số bằng tuổi cháu.

Anh Việt cũng tính đúng tuổi của bác Nam. Hỏi anh Việt & bác Nam sinh năm nào?

4 Order of Operations – Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính

224 ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 17). Dùng 5 chữ số 1 & dấu của các phép tính kể cả dấu ngoặc để viết thành 1 biểu thức có giá trị bằng 100.

225 ([Tuy23], Ví dụ 15, p. 17). 1 quyển sách giá khoa có 172 trang. Hỏi phải dùng tất cả bao nhiêu chữ số để đánh số các trang của quyển sách này?

226 ([Tuy23], Ví dụ 16, p. 18). Cho $S = 8 + 12 + 16 + \dots + 96 + 100$. (a) Tổng này có bao nhiêu số hạng? (b) Tính S.

227 ([Tuy23], 70., p. 18). Tính: (a) $[400 - (40 : 2^3 + 3 \cdot 5^3)] : 5$. (b) $(37 + 18) \cdot \{3250 - 15^2 \cdot [(4^4 - 2^5) : 16]\}$.

228 ([Tuy23], 71., p. 18). Tính: (a) $(10^2 + 11^2 + 12^2) : (13^2 + 14^2)$. (b) $9! - 8! - 7! \cdot 8^2$. (c) $\frac{(3 \cdot 4 \cdot 2^{16})^2}{11 \cdot 2^{13} \cdot 4^{11} - 16^9}$.

- 229** ([Tuy23], 72., p. 18). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $(19x + 2 \cdot 5^2) : 14 = (13 - 8)^2 - 4^2$. (b) $2 \cdot 3^x = 10 \cdot 3^{12} + 8 \cdot 27^4$.
- 230** ([Tuy23], 73., p. 18). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $(5^2 \cdot 23 - 5^2 \cdot 13)x = 6 \cdot 5^3$. (b) $x^2 - [666 : (24 + 13)] = 7$.
- 231** ([Tuy23], 74., p. 18). Dùng 6 chữ số 1 cùng với dấu của các phép tính & dấu ngoặc (nếu cần) để viết thành 1 biểu thức có giá trị là 100.
- 232** ([Tuy23], 75., p. 18). Với 6 chữ số 3 cũng với dấu của các phép tính & dấu ngoặc (nếu cần), viết 1 biểu thức có giá trị là 1000000.
- 233** ([Tuy23], 76., p. 18). Cho biểu thức $252 - 84 : 21 + 7$. (a) Tính giá trị của biểu thức đó. (b) Nếu dùng thêm dấu ngoặc thì có thể được các giá trị nào khác?
- 234** ([Tuy23], 77., p. 18). Cho $S = 7 + 10 + 13 + \dots + 97 + 100$. (a) Tổng trên có bao nhiêu số hạng? (b) Tìm số hạng thứ 22. (c) Tính S .
- 235** ([Tuy23], 78., p. 18). Cho A là tập hợp các số tự nhiên không vượt quá 150, chia cho 7 dư 3. $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 7q + 3, q \in \mathbb{N}, x \leq 150\}$. (a) Liệt kê các phần tử của A thành 1 dãy số từ nhỏ đến lớn. (b) Tính tổng các phần tử của A .
- 236** ([Tuy23], 79., p. 18). 1 quyển sách có 366 trang. Để đánh số các trang của quyển sách này phải dùng bao nhiêu chữ số?
- 237** ([Tuy23], 80., p. 18). Để đánh số các trang của 1 quyển sách phải dùng tất cả 600 chữ số. Hỏi quyển sách đó có bao nhiêu trang?
- 238** ([Tuy23], 81., p. 19). Viết liền nhau dãy các số tự nhiên bắt đầu từ 1: 1, 2, 3, ... Hỏi chữ số thứ 659 là chữ số nào?

5 Cân & Đoang với 1 Số Điều Kiện Hạn Chế

- 239** ([Tuy23], Ví dụ 17, p. 19). Trong 9 gói hàng có 1 gói nhẹ hơn các gói kia chút ít, còn lại nặng như nhau. Với 1 chiếc cân 2 đĩa & không có quả cân nào, cân chỉ 2 lần tìm được gói hàng nhẹ hơn.
- 240** (Tổng quát [Tuy23], Ví dụ 17, p. 19). Trong 3^n gói hàng có 1 gói nhẹ hơn các gói kia chút ít, còn lại nặng như nhau. Với 1 chiếc cân 2 đĩa & không có quả cân nào, cân chỉ n lần tìm được gói hàng nhẹ hơn.
- 241** ([Tuy23], Ví dụ 18, p. 19). Có 10 thùng đựng các gói muối trong đó có 9 thùng đựng các gói muối 100 g, chỉ có 1 thùng đựng các gói không đúng quy cách, mỗi gói chỉ có 90 g. Làm thế nào chỉ cân 1 lần mà xác định được thùng có các gói muối 90 g?
- 242** ([Tuy23], Ví dụ 19, p. 20). Có 1 bình 4 L & 1 bình 5 L. Làm thế nào để đo được đúng 3 L nước từ 1 bể nước?
- 243** ([Tuy23], Ví dụ 20, p. 20). Có 1 bình 5 L & 1 bình 3 L, làm thế nào để đo được đúng 7 L nước từ 1 bể nước?
- 244** ([Tuy23], 82., p. 21). Có 1500 g đường. Làm thế nào để lấy ra được 250 g với 1 chiếc cân 2 đĩa & 1 quả cân 100 g.
- 245** ([Tuy23], 83., p. 21). Trong 27 chiếc nhẫn có 1 chiếc nặng hơn các chiếc kia chút ít, các chiếc còn lại nặng như nhau. Với 1 chiếc cân 2 đĩa & không có quả cân, làm thế nào để cân đúng 3 lần xác định được chiếc nhẫn nặng hơn đó.
- 246** ([Tuy23], 84., p. 21). Trong 26 chiếc tẩy có 1 chiếc nặng hơn các chiếc còn lại chút ít, các chiếc còn lại nặng như nhau. Với chiếc cân đĩa & không có quả cân, làm thế nào để cân đúng 3 lần xác định được chiếc tẩy nặng hơn đó.
- 247** ([Tuy23], 85., p. 21). Phải dùng ít nhất bao nhiêu quả cân để cân tất cả các vật có khối lượng là 1 số tự nhiên từ 1 g đến 100 g (các vật chỉ đặt trên 1 đĩa cân).
- 248** ([Tuy23], 86., p. 21). 1 thùng nước lọc còn hơn 7 L. Làm thế nào để lấy ra được đúng 4 L chỉ bằng 1 bình loại 5 L & 1 bình loại 3 L?
- 249** ([Tuy23], 87., p. 21). 1 thùng dầu còn hơn 10 L. Dùng 1 can 7 L & 1 can 5 L để lấy ra đúng 8 L dầu.
- 250** ([Tuy23], 88., p. 21). 1 thùng có 16 L nước. Dùng 1 can 7 L & 1 can 3 L để chia 16 L nước làm 2 phần bằng nhau.
- 251** ([Tuy23], 89., p. 21). 1 can A đựng 12 L nước. Dùng 1 can B loại 7 L & 1 can C loại 5 L để chia 12 L trong can A thành 3 phần: 3 L, 4 L, 5 L.

6 Miscellaneous

Tài liệu

- [Bìn22] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 1*. Tái bản lần thứ 1. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 200.
- [BQT23] Vũ Hữu Bình, Đặng Văn Quân, and Bùi Văn Tuyên. *Bồi Dưỡng Toán 6 Tập 1*. Tái bản lần thứ 1. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 104.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.