

# Problem: 2nd-Order Function. Quadratic Equation

Bài Tập: Hàm Số Bậc 2  $y = ax^2$ . Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn  $ax^2 + bx + c = 0$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 2 tháng 1 năm 2024

## Mục lục

1	2nd-Order Function – Hàm Số $y = ax^2, a \neq 0$	1
2	Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	2
3	Viète Theorem – Định Lý Viète	4
4	Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2	7
4.1	Phương trình đại số bậc cao	9
4.2	Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	10
4.3	Phương trình vô tỷ	10
4.4	Miscellaneous	10
5	Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình	11
6	Relation Between Parabol & Line – Quan Hệ Giữa Parabol $y = ax^2$ & Đường Thẳng $y = mx + n$	12
7	Solvability of Equation – Điều Kiện Về Nghiệm của 1 Phương Trình	12
8	Đa Thức Bậc 2 Với Bất Đẳng Thức & Toán Cực Trị	13
9	Phương Trình Đại Số Bậc Cao	14
10	Miscellaneous	14
	Tài liệu	14

## 1 2nd-Order Function – Hàm Số $y = ax^2, a \neq 0$

[1] Hàm số bậc 2  $y = ax^2, a \neq 0$ . TXĐ:  $\mathbb{R}$ . Nếu  $a > 0$ , hàm số  $y = ax^2$  nghịch biến khi  $x < 0$ , đồng biến khi  $x > 0$ . Nếu  $a < 0$ , hàm số  $y = ax^2$  nghịch biến khi  $x > 0$ , đồng biến khi  $x < 0$ . [2] Đồ thị hàm số  $y = ax^2, a \neq 0$  là 1 parabol đi qua gốc tọa độ  $O$ , nhận trục  $Oy$  là trục đối xứng,  $O$  là đỉnh của parabol. Nếu  $a > 0$ , đồ thị nằm phía trên trục hoành,  $O$  là điểm thấp nhất của đồ thị.  $\min_{x \in \mathbb{R}} y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Nếu  $a < 0$ , đồ thị nằm phía dưới trục hoành,  $O$  là điểm cao nhất của đồ thị.  $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

[Thá+24, Chap. VII, §1, pp. 46–51]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. 1. 2. 3. 4. 5.

1 ([BBN23], VD1, p. 35). Cho hàm số  $y = -(n^2 + 4n + 5)x^2$ . (a) Chứng minh hàm số nghịch biến với  $x > 0$  & đồng biến với  $x < 0$ . (b) Biết khi  $x = \pm 2$  thì  $y = -24$ , tìm  $n$ . (c) Mở rộng.

2 ([BBN23], VD2, p. 36). Cho hàm số  $y = 1.5x^2$ . (a) Lập bảng tính giá trị của  $y$  ứng với giá trị của  $x$  lần lượt bằng  $-2, -1, 0, 1, 2$ . (b) Vẽ đồ thị hàm số. (c) Trong các điểm  $A(3, 13.5), B(-3, -13.5), C\left(-\frac{5}{2}, \frac{75}{8}\right), D(\sqrt{3}, -4.5), E(\sqrt{2}, 3)$ , điểm nào thuộc đồ thị?

3 ([BBN23], VD3, p. 36). Cho 2 hàm số  $y = \frac{1}{2}x^2, y = -\frac{1}{2}x + 3$ . (a) Vẽ đồ thị 2 hàm số trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (b) Tìm tọa độ các giao điểm của 2 đồ thị.

4 ([BBN23], VD4, p. 37). Cho hàm số  $y = (\sqrt{m-3} - 1)x^2$ . (a) Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số nghịch biến với  $x > 0$  & đồng biến với  $x < 0$ . (b) Biết đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(-3, 18)$ . (c) Vẽ đồ thị hàm số với  $m = 7$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

**Định nghĩa 1** (Even/odd function – Hàm số chẵn/lẻ). Hàm số  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm số chẵn nếu  $f(x) = f(-x)$ ,  $\forall x \in D$ , là hàm số lẻ nếu  $f(x) = -f(-x)$  hay  $f(x) + f(-x) = 0$ ,  $\forall x \in D$ .

**5** ([BBN23], VD5, p. 38). Cho hàm số  $y = f(x) = 3(m^2 - 1)x^2$  với  $m \neq \pm 1$ . (a) Chứng minh  $y$  là hàm số chẵn. (b) Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để  $f(a - 1) = 27(m^2 - 1)$ . (c) Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để hàm số đồng biến khi  $x > 0$  & nghịch biến khi  $x < 0$ .

**6** ([BBN23], VD6, p. 38). Cho 2 hàm số  $y = -\frac{m}{4}x^2, y = -\frac{3x - m}{2}$  với  $m \in \mathbb{R}$ . (a) Xét tính chất biến thiên & tìm GTLN, GTNN của hàm số thứ nhất. (a) Vẽ đồ thị ( $P$ ) của hàm số  $y = -\frac{m}{4}x^2$  & đồ thị ( $d$ ) của hàm số  $y = -\frac{3x - m}{2}$  với  $m = 2$  trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Dùng đồ thị của 2 hàm số trên với  $m = 2$  để giải phương trình  $x^2 - 3x + 2 = 0$  & kiểm tra lại bằng tính toán.

**7** ([BBN23], 4.1., p. 39). Cho 2 hàm số  $y = \pm \frac{3}{4}x^2$ . Tính các giá trị tương ứng của  $y$  tại các giá trị  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Nhận xét.

**8** ([BBN23], 4.2., p. 39). Thả 1 vật nặng hình cầu lặn từ trên đỉnh dốc xuống chân dốc dài 50 m. Quan hệ giữa quãng đường  $y$  m & thời gian lặn  $x$  s được thể hiện bởi công thức  $y = (a - 1)x^2$ . (a) Biết hết giây thứ 4, vật nặng lặn được 8 m. Tìm  $a$ . (b) Hỏi hết giây thứ 2, 5, 8 thì vật nặng đã lặn được bao nhiêu m? (c) Khi vật nặng còn cách chân dốc 32 m thì nó đã lặn trong thời gian bao lâu? (d) Sao bao lâu thì vật nặng lặn xuống đến chân dốc? (e) Vẽ đồ thị chuyển động của vật nặng với 1 đơn vị trên trục tung ứng với 5 m & 1 đơn vị trên trục hoành ứng với 1 s.

**9** ([BBN23], 4.3., pp. 39–40). Trên mặt phẳng tọa độ có 1 điểm  $A(2, -6)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = ax^2$ . Biết  $a = -2m + 2.5$ . (a) Tìm  $a, m$ . (b) Vẽ đồ thị ( $P_1$ ) của hàm số  $y = mx^2$  & đồ thị ( $P_2$ ) của hàm số  $y = ax^2$  với  $a, m$  tìm được trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Điểm  $B(8, -96), D(-12, 288)$  thuộc đồ thị hàm số nào? (d) Biết điểm  $E(h, 18)$  nằm trên ( $P_1$ ) & điểm  $F(-9, n)$  nằm trên ( $P_2$ ). Tìm  $h, n$ .

**10** ([BBN23], 4.4., p. 40). Cho hàm số  $y = (m^2 - 2m + 9)x^2$ . (a) Xét tính biến thiên của hàm số. (b) Biết khi  $x = \pm 2$  thì  $y = 96$ , tìm  $m$ .

**11** ([BBN23], 4.5., p. 40). Cho hàm số  $y = (\sqrt{2m - 5} - 3)x^2$ . Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để: (a) Hàm số nghịch biến với  $x > 0$ . (b) Đồ thị hàm số đi qua điểm  $A(4, -32)$ .

**12** ([BBN23], 4.6., p. 40). Cho hàm số  $y = f(x) = -0.75x^2$ . Xác định giá trị của  $m, n$  để: (a)  $f(m) \leq -1.5$ . (b)  $f(n - 1) \geq -6.75$ .

**13** ([BBN23], 4.7., p. 40). Cho 2 hàm số  $y = f(x) = x^2, y = g(x) = ax + 3$ . (a) Tìm  $a \in \mathbb{R}$  biết  $f(a + 2) - f(a - 5) = 7$ . (b) Vẽ 2 đồ thị 2 hàm số trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Tìm giao điểm 2 đồ thị, kiểm tra lại bằng tính toán.

**14** ([BBN23], 4.8., p. 40). Cho hàm số  $y = f(x) = x^2$  &  $a, b, c$  là 3 giá trị phân biệt của  $x$ . Biết  $f(a) + b = f(b) + c = f(c) + a$ . Tính giá trị biểu thức  $A = (a + b - 1)(b + c - 1)(c + a - 1)$ .

**15** ([BBN23], p. 41, bài toán thả vật nặng rơi từ trên cao). Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỷ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động  $y$  m & thời gian chuyển động  $x$  s được biểu diễn gần đúng bởi công thức  $y = 5x^2$ . Thả 1 vật nặng từ độ cao 55 m trên tháp nghiêng Pisa xuống đất (sức cản không khí không đáng kể), (a) Cho biết sau 1 s, 1.5 s, 2 s, 2.5 s, 3 s thì vật nặng còn cách đất bao nhiêu m? (b) Khi vật nặng còn cách đất 25 m thì nó đã rơi được thời gian bao lâu? (c) Sau bao lâu thì vật nặng chạm đất?

**16** ([BBN23], p. 42). Trong mặt phẳng tọa độ ( $Oxy$ ) 1 điểm  $A$  chạy trên parabol ( $P$ ):  $y = ax^2, a \neq 0$  thì trung điểm  $I$  của  $OM$  chạy trên đường nào?

**17** ([Bin23], VD74, p. 18). (a) Cho parabol  $y = \frac{1}{4}x^2$ , điểm  $A(0, 1)$  & đường thẳng  $d : y = -1$ . Gọi  $M$  là 1 điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh  $MA$  bằng khoảng cách  $MH$  từ điểm  $M$  đến  $d$ . (b) Cho điểm  $A(0, a), d : y = -a$ . Chứng minh quỹ tích của điểm  $M(x, y)$  sao cho khoảng cách  $MH$  từ  $M$  tới  $d$  bằng  $MA$  là 1 parabol.

[Bin23, 235., p. 19, 236., p. 20].

**18** ([Bin23], 237., p. 20). (a) Xác định hệ số  $a$  của parabol  $y = ax^2$ , biết parabol đi qua điểm  $A(-2, -2)$ . (b) Tìm tọa độ của điểm  $M$  thuộc parabol này, biết khoảng cách từ  $M$  đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ  $M$  đến trục tung.

**19** ([Bin23], 238., p. 20). Vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}x|x|$ .

**20** ([Bin23], 239., p. 20). (a) Vẽ đồ thị hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . (b) Gọi  $C$  là 1 điểm tùy ý nằm trên parabol  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $OC$ . Khi điểm  $C$  di chuyển trên parabol đó thì điểm  $K$  di chuyển trên đường nào?

## 2 Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

[1] Phương trình bậc 2 1 ẩn  $ax^2 + bx + c = 0$  (1),  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ . Biệt số  $\Delta := b^2 - 4ac$ . Biệt số rút gọn  $\Delta' := b'^2 - ac$  với  $b = 2b'$ .

[2] Công thức nghiệm:  $\Delta > 0$ , (1) có 2 nghiệm thực phân biệt  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{R}$ .  $\Delta = 0$ , (1) có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ .

$\Delta < 0$ , (1) vô nghiệm thực, nhưng có 2 nghiệm phức  $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . [3] Công thức nghiệm thu gọn:  $\Delta' > 0$ , (1) có

2 nghiệm thực phân biệt  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \in \mathbb{R}$ .  $\Delta = 0$ , (1) có nghiệm kép  $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$ .  $\Delta < 0$ , (1) vô nghiệm thực, nhưng có 2 nghiệm phức  $x_{1,2} = \frac{-b' \pm i\sqrt{-\Delta'}}{a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . [4] Phương trình bậc 2  $ax^2 + bx + c = 0$  với  $a, c$  trái dấu, i.e.,  $ac < 0$  bao giờ cũng có 2 nghiệm thực phân biệt vì  $\Delta = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$ .

[Thá+24, Chap. VII, §2, pp. 52–60]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. HD4. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

21 ([BBN23], VD1, p. 45). Giải phương trình: (a)  $4x^2 - 25 = 0$ . (b)  $3x^2 + 8 = 0$ .

22. Biện luận theo tham số  $a, b \in \mathbb{R}$  để giải phương trình: (a)  $ax^2 + b = 0$ . (b)  $ax^2 + bx = 0$ .

23 ([BBN23], VD2, p. 45). Giải phương trình bằng cách cộng vào 2 vế mỗi phương trình cùng 1 số hoặc biểu thức thích hợp để được 1 phương trình mà vế trái là 1 bình phương, vế phải là 1 số: (a)  $x^2 - 4x + 2$ . (b)  $2x^2 + 5x = 1$ . (c)  $ax^2 + bx + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .

24 ([BBN23], VD3, p. 46). Dùng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình: (a)  $6x^2 - x - 7 = 0$ . (b)  $6x^2 - x + 7 = 0$ . (c)  $2x^2 - 2\sqrt{10}x - \sqrt{5} = 0$ .

25 ([BBN23], VD4, p. 46). Cho phương trình bậc 2:  $x^2 - 2(m+2)x + m^2 - 5 = 0$ . (a) Giải phương trình với  $m = 2$ . (b) Biện luận theo  $m \in \mathbb{R}$  số nghiệm của phương trình. (c) Tính hiệu của nghiệm lớn & nghiệm nhỏ trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm.

26 ([BBN23], VD5, p. 47). Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh phương trình  $(a^2 + b^2 - c^2)x^2 + 4abx + a^2 + b^2 - c^2 = 0$  luôn có 2 nghiệm phân biệt.

27 ([BBN23], 5.1., p. 47). Giải phương trình: (a)  $9x^2 - 27 = 0$ . (b)  $5x^2 + 19 = 0$ . (c)  $1.2x^2 - 6x = 0$ . (d)  $x(x-2) + 4x - 8 = 0$ .

28 ([BBN23], 5.2., p. 47). Cho phương trình bậc 2  $x^2 + bx + 8 = 0$ . (a) Xác định hệ số  $b \in \mathbb{R}$  để phương trình có 1 nghiệm là 8. (b) Giải phương trình bằng cách biến đổi thành phương trình tích.

29 ([BBN23], 5.3., p. 47). Giải phương trình bằng cách biến đổi vế trái thành 1 bình phương, vế phải là 1 số: (a)  $x^2 - 6x + 4 = 0$ . (b)  $(x-3)(x+1) = 12$ . (c)  $4x^2 + 4x = 1$ . (d)  $-5x^2 + 6 = 10x$ .

30 ([BBN23], 5.4., p. 47). Dùng công thức nghiệm hoặc công thức nghiệm thu gọn để giải phương trình bậc 2: (a)  $5x^2 + 3x - 8 = 0$ . (b)  $5x^2 - 3x + 8 = 0$ . (c)  $3y^2 - 2\sqrt{15}y - 3\sqrt{5} = 0$ .

31 ([BBN23], 5.5., p. 47). Cho phương trình bậc 2  $2x^2 - 2mx + m + 4 = 0$ . Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có nghiệm kép rồi tìm nghiệm kép đó.

32 ([BBN23], 5.6., p. 48). Cho phương trình bậc 2  $2x^2 + 2mx + m - 2018 = 0$ . (a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm  $\forall m \in \mathbb{R}$ . (b) Giải phương trình với  $m = 672$ .

33 ([BBN23], 5.7., p. 48). Chứng minh phương trình  $2x^2 + 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$  luôn có nghiệm  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .

34 ([BBN23], 5.8., p. 48). Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh: (a) Phương trình  $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$  vô nghiệm. (b) Phương trình  $f(x) + g(x) = 0$  có nghiệm kép khi & chỉ khi tam giác là đều, với  $f(x) = (x-2a)(x-b) + (x-2b)(x-c) + (x-2c)(x-a)$ ,  $g(x) = (a+b+c)x - (ab+bc+ca)$ .

35 ([BBN23], VD, p. 49). Tìm GTNN, GTLN của biểu thức: (a)  $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$ . (b)  $B = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ .

36 ([BBN23], VD, p. 49). Giải phương trình: (a)  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$ . (b)  $x^2 - 10x + y - 6\sqrt{y} + 34 = 0$ . (c)  $2y^2x(x-1) + y(y-2) + 2 = 0$ .

37 ([Bin23], VD75, p. 20). Cho phương trình  $(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$  với tham số  $m$ . (a) Giải phương trình khi  $m = 1$ . (b) Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt. (c) Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình chỉ có 1 phần tử.

38 ([Bin23], VD76, p. 21). Chứng minh phương trình  $(a+1)x^2 - 2(a+b)x + b - 1 = 0$  có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

39 ([Bin23], VD77, p. 22). Chứng minh phương trình  $x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0$  có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

40 ([Bin23], VD78, p. 22). Cho phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  với  $m, n \in \mathbb{Z}$ . (a) Chứng minh nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó là số nguyên. (b) Tìm nghiệm hữu tỷ của phương trình với  $n = 3$ .

41 ([Bin23], VD79, p. 20). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để các nghiệm của phương trình  $x^2 - (4+n)x + 2n = 0$  là các số nguyên.

42 ([Bin23], VD80, p. 20). Tìm các giá trị của  $a$  để 2 phương trình  $x^2 + ax + 8 = 0, x^2 + x + a = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung.

43 ([Bin23], 240., p. 25). Cho phương trình  $mx^2 + 6(m-2)x + 4m - 7 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình: (a) Có nghiệm kép. (b) Có 2 nghiệm phân biệt. (c) Vô nghiệm.

- 44 ([Bin23], 241., p. 25). Giải phương trình với tham số  $m$ : (a)  $x^2 - mx - 3(m+3) = 0$ . (b)  $mx^2 - 4x + 4 = 0$ .
- 45 ([Bin23], 242., p. 25). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  biết phương trình  $x^2 + mx + 12 = 0$  có hiệu 2 nghiệm bằng 1.
- 46 ([Bin23], 243., p. 25). Cho 2 số thực dương  $a, b$  thỏa  $a + b = 4\sqrt{ab}$ . Tính tỷ số  $\frac{a}{b}$ .
- 47 ([Bin23], 244., p. 25). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết  $2(x^2 + 1) + y^2 = 2y(x + 1)$ .
- 48 ([Bin23], 245., p. 26). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có nghiệm: (a)  $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$ . (b)  $(m+1)x^2 - 2x + (m-1) = 0$ .
- 49 ([Bin23], 246., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ : (a)  $x(x-a) + x(x-b) + (x-a)(x-b) = 0$ . (b)  $x^2 + (a+b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0$ .
- 50 ([Bin23], 247., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ : (a)  $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$ . (b)  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ .
- 51 ([Bin23], 248., p. 26). Chứng minh nếu  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  thì tồn tại 1 trong 3 phương trình bậc 2  $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$  có nghiệm.
- 52 ([Bin23], 249., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , có nghiệm, biết  $5a + 2c = b$ .
- 53 ([Bin23], 250., p. 26). Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh phương trình  $(a^2 + b^2 - c^2)x^2 - 4abx + a^2 + b^2 - c^2 = 0$  có nghiệm.
- 54 ([Bin23], 251., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , có nghiệm nếu  $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$ .
- 55 ([Bin23], 252., p. 26). Chứng minh nếu  $bm = 2(c+n)$  thì ít nhất 1 trong 2 phương trình  $x^2 + bx + c = 0, x^2 + mx + n = 0$  có nghiệm.
- 56 ([Bin23], 253., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0, |b| = |a+c|$ . Chứng minh các nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  là các số hữu tỷ.
- 57 ([Bin23], 254., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  không có nghiệm hữu tỷ nếu  $a, b, c$  là 3 số nguyên lẻ.
- 58 ([Bin23], 255., p. 26). Chứng minh nếu  $\overline{abc}$  là số nguyên tố thì phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  không có nghiệm hữu tỷ.
- 59 ([Bin23], 256., p. 27). Tìm các giá trị nguyên của  $m$  để nghiệm của phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 4 = 0$  là số hữu tỷ.
- 60 ([Bin23], 257., p. 27). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để các nghiệm của phương trình  $x^2 - (n+4)x + 4n - 25 = 0$  là các số nguyên.
- 61 ([Bin23], 258., p. 27). Tìm số nguyên tố  $p$  biết phương trình  $x^2 + px - 12p = 0$  có 2 nghiệm đều là các số nguyên.
- 62 ([Bin23], 259., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a)  $x^2 + 2x + m = 0, x^2 + mx + 2 = 0$ . (b)  $x^2 + mx + 1 = 0, x^2 - x - m = 0$ .
- 63 ([Bin23], 260., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a)  $x^2 + (m-2)x + 3 = 0, 2x^2 + mx + m + 2 = 0$ . (b)  $2x^2 + (3m-5)x - 9 = 0, 6x^2 + (7m-15)x - 19 = 0$ .
- 64 ([Bin23], 261., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 1 nghiệm của phương trình  $2x^2 - 13x + 2m = 0$  gấp đôi 1 nghiệm của phương trình  $x^2 - 4x + m = 0$ .
- 65 ([Bin23], 262., p. 27). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$ . Biết phương trình thứ nhất có nghiệm dương  $m$ , chứng minh phương trình thứ 2 có nghiệm  $n$  sao cho  $m + n \geq 2$ .

### 3 Viète Theorem – Định Lý Viète

[1] Định lý Viète: Nếu  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$  (1) thì  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$ . [2] Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình (1) có 2 nghiệm  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ . Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình (1) có 2 nghiệm  $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$ . [3] Nếu 2 số có tổng bằng  $S$  & tích bằng  $P$  với  $S^2 \geq 4P$  thì 2 số đó là 2 nghiệm của phương trình bậc 2  $x^2 - Sx + P = 0$ . [4] Nếu (1) có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thì  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ . [5] Đặt  $S := x_1 + x_2, P := x_1x_2$ . Điều kiện để (1): Có 2 nghiệm trái dấu là  $P < 0$ . Có 2 nghiệm cùng dấu là  $\Delta \geq 0, P > 0$ . Có 2 nghiệm dương là  $\Delta \geq 0, P > 0, S > 0$ . Có 2 nghiệm âm là  $\Delta \geq 0, P > 0, S < 0$ .

[Thá+24, Chap. VII, §3, pp. 61–65]: HD1. LT1. LT2. LT3. HD2. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

- 66 ([BBN23], VD1, p. 51). Tìm điều kiện của  $n \in \mathbb{R}$  để phương trình có nghiệm rồi tính tổng & tích của các nghiệm theo  $n$ : (a)  $x^2 - 2(n+1)x + (n-3)(n+8) = 0$ . (b)  $(n-5)x^2 + (2n-1)x + n + 2 = 0$ .

- 67 ([BBN23], VD2, p. 52). Tìm  $u, v \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $u + v = 14, uv = 45$ . (b)  $u + v = 30, uv = 230$ . (c)  $u - v = 7, uv = 120$ .
- 68 ([BBN23], VD3, p. 52). Phân tích đa thức thành nhân tử: (a)  $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ . (b)  $g(x) = x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6}$ .
- 69 ([BBN23], VD4, p. 53). Lập 1 phương trình bậc 2 có 2 nghiệm: (a) 5, 8. (b)  $1 \pm \sqrt{3}$ . (c)  $(m \pm 1)^2$ .
- 70 ([BBN23], VD5, p. 53). Xác định  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 - 2(m - 2)x + m + 4 = 0$ : (a) Có 2 nghiệm trái dấu. (b) Có 2 nghiệm dương phân biệt.
- 71 ([BBN23], VD6, p. 53). Cho phương trình  $x^2 + 5x + m = 0$ . (a) Xác định  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $9x_1 + 2x_2 = 18$ . (b) Tính theo  $m$  giá trị biểu thức  $x_1^2 + x_2^2, x_1^3 + x_2^3, \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ .
- 72 ([BBN23], 6.1., p. 54). Nhẩm nghiệm phương trình: (a)  $9x^2 + 300x - 309 = 0$ . (b)  $61x^2 - 1954x - 2015 = 0$ . (c)  $x^2 - 8x + 12 = 0$ . (d)  $x^2 + 2x - 35 = 0$ . (e)  $(m - 2)x^2 - (4m + 3)x + 3m + 5 = 0$ .
- 73 ([BBN23], 6.2., p. 54). (a) Phương trình  $5x^2 + 9x + n = 0$  có nghiệm  $x_1 = 1$ . Xác định  $n$  & tìm nghiệm còn lại. (b) Phương trình  $0.2x^2 - x + n = 0$  có nghiệm  $x_1 = -1$ . Xác định  $n$  & tìm nghiệm còn lại.
- 74 ([BBN23], 6.3., p. 54). Tìm giá trị của  $n \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm rồi tính tổng, tích 2 nghiệm: (a)  $x^2 - 3x + n = 0$ . (b)  $nx^2 - 2(n - 1)x + n - 1 = 0$ .
- 75 ([BBN23], 6.4., p. 54). Tìm  $u, v$  thỏa: (a)  $u + v = 25, uv = 84$ . (b)  $u - 2v = -17, uv = 240$ .
- 76 ([BBN23], 6.5., p. 54). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm: (a) 20, 21. (b)  $2 \pm \sqrt{3}$ . (c)  $\frac{3m + 2}{3m - 2}, \frac{3m - 2}{3m + 2}$  với  $m \neq \pm \frac{2}{3}$ .
- 77 ([BBN23], 6.6., p. 55). Viết phương trình bậc 2 có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 2x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = 12, \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) = 15 - k. \end{cases}$$

- 78 ([BBN23], 6.7., p. 55). Cho tam thức bậc 2  $f(x) = x^2 - 2(m - 4)x + m - 6$ . (a) Phân tích  $f(x)$  với  $m = 3$  thành nhân tử. (b) Chứng minh phương trình  $f(x) = 0$  luôn có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt  $\forall m \in \mathbb{R}$ . (c) Xác định  $m \in \mathbb{R}$  để 2 nghiệm đó trái dấu. (d) Tính theo  $m$  giá trị biểu thức  $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  & tìm  $m \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ . (e) Tìm GTNN của  $x_1^2 + x_2^2$ .
- 79 ([BBN23], 6.8., p. 55). Cho phương trình  $x^2 + (2m - 5)x + n = 0$ . (a) Phân tích vế trái thành nhân tử với  $m = 1, n = -4$ . (b) Tìm  $m, n \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm là 2, -3. (c) Cho  $m = 5$ , tìm số nguyên  $n$  lớn nhất để phương trình có nghiệm dương rồi tìm nghiệm của phương trình.
- 80 ([BBN23], p. 56, định lý Viète cho phương trình bậc 3). Chứng minh nếu  $x_1, x_2, x_3$  là 3 nghiệm của phương trình bậc 3  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$  thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

- 81 ([BBN23], p. 5, định lý Viète cho phương trình bậc 4). Chứng minh nếu  $x_1, x_2, x_3, x_4$  là 4 nghiệm của phương trình bậc 4  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0$  thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}. \end{cases}$$

82. Phát biểu & chứng minh định lý Viète cho phương trình bậc  $n$ .

Hệ thức Viète còn được sử dụng trong việc tìm hệ thức giữa 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình bậc 2 không phụ thuộc tham số  $m$ : Tìm điều kiện để phương trình bậc 2 có nghiệm:  $\Delta \geq 0$ . Từ hệ thức Viète tìm  $S, P$  theo tham số  $m$  rồi khử tham số  $m$  từ  $S, P$  để có hệ thức chỉ còn  $x_1, x_2$ .

- 83 ([BBN23], VD, p. 56). Giả sử  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - (1 - 2m)x - 2 + 2m = 0$ . Tìm hệ thức giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .



**Định nghĩa 2.** Hệ phương trình 2 ẩn  $x, y$  gọi là đối xứng loại I nếu hệ không thay đổi khi thay  $x$  bởi  $y$ ,  $y$  bởi  $x$  trong mỗi phương trình.

Khi giải hệ phương trình đối xứng, đặt  $S := x + y$ ,  $P := xy$  đưa hệ về hệ mới với 2 ẩn  $S, P$ . Khi đó,  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $X^2 - SX + P = 0$ . Trong hệ đối xứng loại I, nếu  $(x_0, y_0)$  là nghiệm thì  $(y_0, x_0)$  cũng là nghiệm.

84 ([BBN23], VD, p. 57). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x + xy + y = 17. \end{cases}$$

85 ([BBN23], p. 57). Giải hệ phương trình với  $x \neq -y$ :

$$\begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y} = 7, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

86 ([Bin23], VD81, p. 28). Cho phương trình  $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$  với tham số  $m$ . (a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm. (b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó trong 2 nghiệm, nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn? (c) Xác định  $m$  để 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa mãn  $x_1 + 4x_2 = 3$ . (d) Tìm 1 hệ thức giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .

87 ([Bin23], VD82, p. 30). Cho phương trình  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

88 ([Bin23], VD83, p. 30). Cho phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  có 2 nghiệm  $c, d$ , phương trình  $x^2 + cx + d = 0$  có 2 nghiệm  $a, b$ . Tính  $a, b, c, d$  biết chúng đều khác 0.

89 ([Bin23], VD84, p. 31). Cho phương trình  $x^2 + 5x - 1 = 0$ . Không giải phương trình, lập 1 phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là lũy thừa bậc 4 của 2 nghiệm của phương trình ban đầu.

90 ([Bin23], 263., p. 31). Tính nhẩm nghiệm của phương trình: (a)  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ . (b)  $(m-1)x^2 + (m+1)x + 2 = 0$ .

91 ([Bin23], 264., p. 31). Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có): (a)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ . (b)  $5x^2 + 3x - 1 = 0$ . (c)  $2x^2 + 13x + 8 = 0$ . (d)  $4x^2 - 11x + 8 = 0$ .

92 ([Bin23], 265., p. 32). Xác định giá trị của  $m$  để phương trình  $(m-1)x^2 - 2x + 3 = 0$  có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

93 ([Bin23], 266., p. 32). Giải phương trình  $x^2 - mx + n = 0$  biết phương trình có 2 nghiệm nguyên dương phân biệt &  $m, n$  là 2 số nguyên tố.

94 ([Bin23], 267., p. 32). Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ . Không giải phương trình, tính: (a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ . (b)  $(x_1 - x_2)^2$ . (c)  $x_1^3 + x_2^3$ .

95 ([Bin23], 268., p. 32). Cho phương trình  $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$ .

96 ([Bin23], 269., p. 32). Cho phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  có  $3m^2 = 16n$ . Chứng minh trong 2 nghiệm của phương trình, có 1 nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

97 ([Bin23], 270., p. 32). Cho biết phương trình  $x^2 - (m+2)x + 2m - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ . Lập 1 hệ thức giữa  $x_1, x_2$  độc lập đối với  $m$ .

98 ([Bin23], 271., p. 32). Tìm 2 số biết: (a) Tổng của chúng bằng 2, tích của chúng bằng  $-1$ . (b) Tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

99 ([Bin23], 272., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a)  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ . (b)  $2 \pm \sqrt{3}$ .

100 ([Bin23], 273., p. 32). Chứng minh tồn tại 1 phương trình có các hệ số hữu tỷ nhận 1 trong các nghiệm là: (a)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ . (b)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ . (c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

101 ([Bin23], 274., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a) Bình phương của 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . (b) Nghịch đảo của 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + mx - 2 = 0$ .

102 ([Bin23], 275., p. 33). Xác định  $m, n$  sao cho 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  cũng là  $m, n$ .

103 ([Bin23], 276., p. 33). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  khác nhau đôi một,  $c \neq 0$ . Biết 2 phương trình  $x^2 + ax + bc = 0, x^2 + bx + ca = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung. (a) Tìm các nghiệm còn lại của 2 phương trình. (b) Chứng minh các nghiệm còn lại đó là nghiệm của phương trình  $x^2 + cx + ab = 0$ .

**104** ([Bin23], 277., p. 33). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + dx + a = 0$ . Biết phương trình thứ nhất có 2 nghiệm  $m, n$ , phương trình thứ 2 có 2 nghiệm  $p, q$ . Chứng minh  $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$ .

**105** ([Bin23], 278., p. 33). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$ . Tìm 1 hệ thức giữa 3 hệ số  $a, b, c$ , biết 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thứ nhất & 2 nghiệm  $x_3, x_4$  của phương trình thứ 2 thỏa mãn đẳng thức  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$ .

**106** ([Bin23], 279., p. 33). Cho phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ , phương trình  $x^2 - b^2x + bc = 0$  có 2 nghiệm  $x_3, x_4$ . Biết  $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$ . Xác định  $b, c$ .

**107** ([Bin23], 280., p. 33). Tìm  $a, b \in \mathbb{R}$  sao cho 2 phương trình  $x^2 + ax + 6 = 0, x^2 + bx + 12 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung &  $|a| + |b|$  nhỏ nhất.

**108** ([Bin23], 281., pp. 33–34). Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Ký hiệu  $s_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (a) Tính  $s_1, s_2, s_3$ . (b) Tìm 1 hệ thức giữa  $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$ . (c) Chứng minh  $s_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (d) Tìm số dư khi chia  $s_{50}$  cho 5.

## 4 Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

**1** Phương trình trùng phương:  $ax^4 + bx^2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  (1). Đặt  $t := x^2 \geq 0$  được phương trình bậc 2 (trung gian)  $at^2 + bt + c = 0$ . **2** Phương trình chứa ẩn ở mẫu: Tìm ĐKXD của phương trình. Quy đồng mẫu thức 2 vế rồi khử mẫu thức. Giải phương trình vừa nhận được. Trong các giá trị tìm được của ẩn: Loại các giá trị không thỏa mãn ĐKXD. Các giá trị thỏa mãn ĐKXD là nghiệm của phương trình. **3** Phương trình tích:  $\prod_{i=1}^n f_i(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0$  or  $f_2(x) = 0$  or  $\dots$  or  $f_n(x) = 0$ .

Giải phương trình:

**109** ([BBN23], H1, p. 59).  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .

**110** ([BBN23], H2, p. 59).  $2x^2(x^2 - 1) = 0$ .

**111** ([BBN23], H3, p. 59).  $\frac{(x-9)^2}{x(x^2-4)} = \frac{5}{x^2+1}$ .

**112** ([BBN23], H4, p. 59). Nhẩm nhanh nghiệm của phương trình: (a)  $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ . (c)  $(x^2 - 7)(x^2 + 9) = 0$ .

Giải phương trình:

**113** ([BBN23], VD1, p. 59). (a)  $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$ . (b)  $9x^4 + 5x^2 = 4$ . (c)  $0.1x^4 + 0.2x^2 + 0.3 = 0$ .

**114** ([BBN23], VD2, p. 60). (a)  $\frac{x+2}{x-3} - 3 = \frac{5}{2-x}$ . (b)  $\frac{x^4-8}{x^4-4} + \frac{1}{x^2-2} = \frac{2}{x^2+2}$ .

**115** ([BBN23], VD3, p. 61). (a)  $(4x^2 - 9)(3x^2 - 5x - 8) = 0$ . (b)  $(3x^2 - x - 5)^2 - (4x - 1)^2 = 0$ . (c)  $x^4 - 5x^3 = 4x^2 - 20x$ .

**116** ([BBN23], VD4, p. 61). Cho phương trình  $x^4 - (2m - 1)x^2 + 2\sqrt{3} = 0$ . (a) Giải phương trình với  $m = 2.5$ . (b) Tìm giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có đúng 2 nghiệm.

Giải phương trình:

**117** ([BBN23], VD5, p. 62). (a)  $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 8) + 15 = 0$ . (b)  $x^2 - 4\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 5x - 6$ .

**118** ([BBN23], 7.1., p. 62). (a)  $x^2(x^2 - 0.8) = 0.9(1 + x^4)$ . (b)  $5x^4 + 9x^2 + 2015 = 0$ . (c)  $x^4 - 2x^2 + 3 = 2\sqrt{2}(x^2 - 1)$ . (d)  $(x^2 - 3)^2 + 3x^2 = 77 - (x^2 + 4)^2$ .

**119** ([BBN23], 7.2., p. 62). (a)  $\frac{x^2}{x-2} - \frac{x^2}{x+2} = \frac{8x}{x^2-4}$ . (b)  $\frac{18}{x^4-16} + 2 = \frac{4}{x^2-4}$ . (c)  $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{6}{x^2+x-2}$ .

**120** ([BBN23], 7.3., p. 62). (a)  $x^2(2x^2 - 5x + 1) - 18x^2 + 45x = 9$ . (b)  $(3x^2 - x + 2)^2 = 4x^2 - 12x + 9$ . (c)  $2x^3 - x^2 + 4x(2x - 1) = 2x - 1$ .

**121** ([BBN23], 7.4., p. 62). (a)  $(x^2 + x + 1)^2 - 5(x^2 + x) + 1 = 0$ . (b)  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = 0$ . (c)  $x^2 - 3x - 7\sqrt{x^2 - 3x - 10} = 0$ . (d)  $(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) = -15$ .

**122** ([BBN23], 7.5., p. 63). Cho phương trình  $x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 = 0$ . (a) Giải phương trình khi  $m = -3$ . (b) Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 4 nghiệm phân biệt. (c) Biện luận theo  $m$  số nghiệm của phương trình.

Giải phương trình:

**123** ([BBN23], 7.6., p. 63). (a)  $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 9$ . (b)  $x^4 - 4x^2 + 20x = 25$ .

**124** ([BBN23], 7.7., p. 63). (a)  $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 10x + 24) = -24$ . (b)  $(x - 3)(x^3 - 7x^2 + 19x - 18) = 10$ . (c)  $(x - 2)(x - 4)(x^2 - 4x + 8) = 15x^2$ . (d)  $(x^2 - 2x + 3)^2 - 9x^2(x^2 - 2x + 3) + 20x^4 = 0$ .

**125** ([BBN23], 7.8., p. 63). (a)  $\frac{x^2-11}{2} + \frac{x^2-12}{3} + \frac{x^2-13}{4} + \frac{x^2-14}{5} = -4$ . (b)  $\frac{x^4+x^2-1}{5} + \frac{x^4+x^2-2}{4} + \frac{x^4+x^2-3}{3} = \frac{137}{30}$ .  
(c)  $\frac{3}{x^2+2} + \frac{5}{x^2+4} + \frac{7}{x^2+6} = 3$ .

**126** ([BBN23], 7.9., p. 63). Cho  $f_1(x) = x^2 + 3x + 2, f_2(x) = x^2 + 5x + 6, f_3(x) = x^2 + 7x + 12, \dots, f_{99}(x) = x^2 + 199x + 9900$ .  
Giải phương trình  $\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{f_i(x)} = \frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)} + \dots + \frac{1}{f_{99}(x)} = \frac{99}{100}$ .

Tartaglia đã giải được phương trình bậc 3 có dạng  $x^3 + px + q = 0$  với công thức nghiệm:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

**127** ([BBN23], p. 64, phương trình bậc 4 có hệ số đối xứng). Giải phương trình bằng cách chia 2 vế cho  $x^2 \neq 0$  & đặt ẩn phụ  $y := x + \frac{1}{x}$ : (a)  $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$ . (b)  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

**128** ([BBN23], p. 65, phương trình bậc 5 có hệ số đối xứng). Biện luận theo 3 tham số  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  để giải phương trình bậc 5 có hệ số đối xứng  $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ .

**129** ([BBN23], p. 65, phương trình hồi quy). (a) Biện luận theo 5 tham số  $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}, a \neq 0$  để giải phương trình hồi quy  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + mx + n = 0$  với  $\frac{n}{a} = \left(\frac{m}{b}\right)^2$  bằng cách chia 2 vế cho  $x^2 \neq 0$  rồi đặt ẩn phụ  $y := bx + \frac{m}{x}$ . (b) Giải phương trình:  $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 6x + 4 = 0$ .

**130** (Mở rộng phương trình trùng phương). Biện luận theo 3 tham số  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  để giải phương trình: (a)  $ax^6 + bx^3 + c = 0$ . (b)  $ax^8 + bx^4 + c = 0$ . (c)  $ax^{2n} + bx^n + c = 0$  với  $n \in \mathbb{Z}$ .

**131** ([Bin23], VD85, p. 34).  $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$ .

**132** ([Bin23], VD86, p. 35).  $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ .

**133** ([Bin23], VD87, p. 35).  $(x+1)^4 = 2(x^4+1)$ .

**134** ([Bin23], VD88, p. 36).  $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$ .

**135** ([Bin23], VD89, p. 37).  $x^4 = 24x + 32$ .

**136** ([Bin23], VD90, p. 37).  $x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$ .

**137** ([Bin23], VD91, p. 38).  $|x-8|^5 + |x-9|^6 = 1$ .

**138** ([Bin23], VD92, p. 38).  $|x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = 3$ .

**139** ([Bin23], VD93, p. 39).  $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$ .

**140** ([Bin23], VD94, p. 40).  $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$ .

**141** ([Bin23], VD95, p. 40).  $20 \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5 \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ .

**142** ([Bin23], VD96, p. 41).  $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$ .

**143** ([Bin23], VD97, p. 41).  $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$ .

**144** ([Bin23], VD98, p. 42).  $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$ .

**145** ([Bin23], VD99, p. 42). Giải & biện luận phương trình  $a\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$  với tham số  $a$ .

**146** ([Bin23], VD100, p. 43). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để tồn tại 2 số  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa  $4x - 3y = 7, 2x^2 + 5y^2 = m$ .

Giải hệ phương trình:

**147** ([Bin23], VD101, p. 44).  $x^2 + y^2 = 11, x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2}$ .

**148** ([Bin23], VD102, p. 44).  $x^2 + y + \frac{1}{4} = 0, x + y^2 + \frac{1}{4} = 0$ .

**149** ([Bin23], VD103, p. 45).  $x^2 - xy + y^2 = 1, 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3$ .

**150** ([Bin23], VD104, p. 46).  $x + y + z = 9, x^2 + y^2 + z^2 = 27$ .

**151** ([Bin23], VD105, p. 46).  $x + y + z = a, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ .

**152** ([Bin23], VD106, p. 47).  $x + \frac{1}{y} = 2, y + \frac{1}{z} = 2, z + \frac{1}{x} = 2$ .



## 4.1 Phương trình đại số bậc cao

Giải phương trình:

**153** ([Bin23], 282., p. 47). (a)  $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ . (b)  $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$ . (c)  $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$ . (d)  $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$ . (e)  $(x-2)^2 + (x+1)^3 = 8x^3 - 1$ .

**154** ([Bin23], 283., p. 48). (a)  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ . (c)  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ . (d)  $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$ . (e)  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ . (f)  $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ .

**155** ([Bin23], 284., p. 48). (a)  $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$ . (c)  $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$ .

**156** ([Bin23], 285., p. 48).  $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$ .

**157** ([Bin23], 286., p. 48). (a)  $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$ . (b)  $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$ .

**158** ([Bin23], 287., p. 48). (a)  $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$ . (b)  $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ .

**159** ([Bin23], 288., p. 48). (a)  $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$ . (b)  $x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0$ .

**160** ([Bin23], 289., p. 48). (a)  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$ . (b)  $x(x-1)(x+1)(x+2) = 3$ . (c)  $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$ . (d)  $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$ . (e)  $(4x+3)^2(x+1)(2x+1) = 810$ . (f)  $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$ .

**161** ([Bin23], 290., p. 48). (a)  $4(x^2 - x + 1)^3 = 27(x^2 - x)^2$ . (b)  $3(x+5)(x+6)(x+7) = 8x$ .

**162** ([Bin23], 291., p. 48). (a)  $(x-2)^3 + (x-4)^3 = 8$ . (b)  $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 82$ . (c)  $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$ . (d)  $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$ .

**163** ([Bin23], 292., p. 48). (a)  $(x^2 - 6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$ . (b)  $x^4 + (x-1)(3x^2 + 2x - 2) = 0$ . (c)  $x^4 + (x+1)(5x^2 - 6x - 6) = 0$ . (d)  $(x^2 + 1)^2 + (x+2)(3x^2 - 4x - 5) = 0$ . (e)  $x^2(x-1)^2 + x(x^2 - 1) = 2(x+1)^2$ .

**164** ([Bin23], 293., p. 48).  $x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0$ .

**165** ([Bin23], 294., p. 49). (a)  $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$ . (c)  $x^4 = 2x^2 + 8x = 3$ . (d)  $(x^2 - 16)^2 = 16x + 1$ . (e)  $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$ . (f)  $x^4 = 4x - 3$ . (g)  $x^4 = 2x^2 - 12x + 8$ .

**166** ([Bin23], 295., p. 49). (a)  $x^4 = 4x + 1$ . (b)  $x^4 = 8x + 7$ . (c)  $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$ . (d)  $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$ .

**167** ([Bin23], 296., p. 49).  $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$ .

**168** ([Bin23], 297., p. 49).  $(x - \sqrt{2})^3 + (x + \sqrt{3})^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2x)^3 = 0$ .

**169** ([Bin23], 298., p. 49).  $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$  với 2 tham số  $a, b$ .

**170** ([Bin23], 299., p. 49).  $(a+b+x)^3 - 4(a^3 + b^3 + x^3) - 12abx = 0$  với 2 tham số  $a, b$ .

**171** ([Bin23], 300., p. 49). Giải phương trình  $x^3 - (m^2 - m + 7)x - 3(m^2 - m - 2) = 0$  biết  $-1$  là 1 nghiệm của phương trình.

**172** ([Bin23], 301., p. 49). Giải phương trình  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  biết  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**173** ([Bin23], 302., p. 49). Giải phương trình  $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$  biết  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $1 + \sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**174** ([Bin23], 303., p. 49). Giải phương trình  $4x^4 - 11x^2 + 9x + m = 0$  biết tồn tại 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa  $x_1 + x_2 = -1$ ,  $x_1 > x_2$ .

**175** ([Bin23], 304., p. 49). (a) Chứng minh nếu  $x = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right)$  thì  $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left( a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$ . (b) Giải phương trình  $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$ . (c) Giải phương trình  $4x^3 + 3x = \frac{4}{3}$ .

**176** ([Bin23], 305., pp. 49–50, định lý Viète cho phương trình bậc 3). Chứng minh: (a) Nếu phương trình bậc 3  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,  $a \neq 0$  có 3 nghiệm thực  $x_1, x_2, x_3$  thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

(b) Tìm các nghiệm của phương trình  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$  rồi kiểm nghiệm lại chúng thỏa mãn định lý Viète cho phương trình bậc 3.

## 4.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Giải phương trình:

**177** ([Bin23], 306., p. 50). (a)  $\frac{1}{x^2-3x+3} + \frac{2}{x^2-3x+4} = \frac{6}{x^2-3x+5}$ . (b)  $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+3} = \frac{9}{2(x^2-2x+4)}$ . (c)  $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$ . (d)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$ .

**178** ([Bin23], 307., p. 50). (a)  $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$ . (b)  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$ . (c)  $\frac{x^4}{2x^2+1} + \frac{2x^2+1}{x^4} = 2$ .

**179** ([Bin23], 308., p. 50). (a)  $4\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 13\left(x + \frac{1}{x}\right)$ . (b)  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 13\left(x + \frac{1}{x}\right)$ .

**180** ([Bin23], 309., p. 50). (a)  $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$ . (b)  $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$ . (b)  $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$ . (c)  $\frac{3x}{x^2-3x+1} + \frac{7x}{x^2+x+1} = -4$ .

**181** ([Bin23], 310., p. 51). (a)  $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}$ . (b)  $\frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5} - \frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{4}$ .

**182** ([Bin23], 311., p. 51). (a)  $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$ . (b)  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$ .

**183** ([Bin23], 312., p. 51). (a)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$ . (b)  $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ .

**184** ([Bin23], 313., p. 51). (a)  $\frac{x(3-x)}{x+1} \left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2$ . (b)  $\frac{x(5-x)}{x+1} \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = 6$ . (c)  $x \cdot \frac{8-x}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1}\right) = 15$ .

**185** ([Bin23], 314., p. 51).  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$ .

**186** ([Bin23], 315., p. 51).  $\frac{(1995-x)^2 + (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2}{(1995-x)^2 - (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2} = \frac{19}{49}$ .

## 4.3 Phương trình vô tỷ

Giải phương trình:

**187** ([Bin23], 316., p. 51). (a)  $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$ . (b)  $x^2 + \sqrt{x+72} = 72$ .

**188** ([Bin23], 317., p. 51). (a)  $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ . (b)  $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$ .

**189** ([Bin23], 318., p. 51). (a)  $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$ . (b)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$ .

**190** ([Bin23], 319., p. 51).  $(x-1)(x+3) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8$ .

**191** ([Bin23], 320., p. 51).  $\sqrt{x-2a+16} - 2\sqrt{x-a+4} + \sqrt{x} = 0$  với tham số  $a$ .

**192** ([Bin23], 321., p. 52).  $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{a}$  với tham số  $a$ .

**193** ([Bin23], 322., p. 52). Tìm  $x, y \in \mathbb{Q}, x > y \geq 0$  thỏa mãn phương trình  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .

**194** ([Bin23], 323., p. 52). Cho  $(x + \sqrt{x^2+3})(y + \sqrt{y^2+3}) = 3$ . Tính giá trị biểu thức  $A = x + y$ .

## 4.4 Miscellaneous

Giải hệ phương trình:

**195** ([Bin23], 324., p. 52). (a)  $x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2, 4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56$ . (b)  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, xy = 6$ . (c)  $3x + 5y = 9 + 2xy, 2x + 3y = 10 - xy$ . (d)  $x^2 - 4xy + y^2 = 1, y^2 - 3xy = 4$ .

**196** ([Bin23], 325., p. 52). (a)  $x + y = 1, x^2 + y^2 = 41$ . (b)  $x - y = 1, x^2 - xy + y^2 = 7$ . (c)  $x - y = 3, x^2 + xy + y^2 = 21$ . (d)  $x - y = 2, x^3 - y^3 = 26$ . (e)  $x - y = a, x^3 - y^3 = 19a^3$  với  $a > 0$ .

- 197 ([Bin23], 326., p. 52). (a)  $x^2 + 2y + 1 = 0, y^2 + 2x + 1 = 0$ . (b)  $x^2 - 3x = 2y, y^2 - 3y = 2x$ . (c)  $2x = y(1 - x^2), 2y = x(1 - y^2)$ .
- 198 ([Bin23], 327., p. 52). (a)  $x^2 + (x + y)^2 = 17, y^2 + (x + y)^2 = 25$ . (b)  $x^2 + 2xy - 2y^2 = 1, 2x^2 - xy + 3y^2 = 4$ .
- 199 ([Bin23], 328., p. 52). (a)  $2x^2 - y^2 = 1, xy + x^2 = 2$ . (b)  $x^2 + y^2 = 5, x + y - xy = 1$ .
- 200 ([Bin23], 329., p. 52). (a)  $x + y = 4, x^4 + y^4 = 82$ . (b)  $x + y + xy = 8, x^4 + y^4 = 32$ .
- 201 ([Bin23], 330., p. 52). (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 12, xy + yz + zx = 12$ . (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x + y + z = 3$ . (c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .
- 202 ([Bin23], 331., p. 53). (a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{4}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$ . (b)  $x + y + z = 8, xy + yz + zx = 20, xyz = 16$ .  
(c)  $x + xy + y = 1, y + yz + z = 3, z + zx + x = 7$ . (d)  $x - \frac{1}{y} = 1, y - \frac{1}{z} = 1, z - \frac{1}{x} = 1$ .
- 203 ([Bin23], 332., p. 53).  $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \frac{4z^2}{1+4z^2} = x$ .
- 204 ([Bin23], 333., p. 53).  $\sqrt{x}(1+y) = 2y, \sqrt{y}(1+z) = 2z, \sqrt{z}(1+x) = 2x$ .
- 205 ([Bin23], 334., p. 53). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3}, y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3}, z^2 - x^2 - x = \frac{1}{3}$ . (a) Chứng minh  $x, y, z > 0$ .  
(b) Chứng minh  $x = y = z$ . (c) Giải hệ phương trình.
- 206 ([Bin23], 335., p. 53). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $x^2 = y + 1, y^2 = z + 1, z^2 = x + 1$ . (a) Chứng minh  $xyz \neq 0$ . (b) Chứng minh  $x, y, z$  cùng dấu. (c) Chứng minh  $x = y = z$ . (d) Giải hệ phương trình.
- 207 ([Bin23], 336., p. 53). Tìm 4 số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng 3 số còn lại.
- 208 ([Bin23], 337., p. 53). Tìm 4 số biết nếu cộng tích của 3 số bất kỳ với số còn lại thì mỗi kết quả đều bằng 2.

## 5 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

- 209 ([Bin23], VD107, p. 54, Euler's). 2 bà ra chợ bán tổng cộng 100 quả trứng. Số trứng của 2 người không bằng nhau, nhưng số tiền thu được lại bằng nhau. Bà thứ nhất nói với bà thứ 2: Nếu tôi có số trứng như của bà, tôi sẽ thu được 15 đồng. Bà thứ 2: Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của bà, tôi chỉ bán được  $6\frac{2}{3}$  đồng. Hỏi mỗi bà có bao nhiêu quả trứng mang đi bán?
- 210 ([Bin23], 338., p. 55). Trong cùng 1 thời gian như nhau, đội I phải đào  $V_1 = 810 \text{ m}^3$  đất, đội II phải đào  $V_2 = 900 \text{ m}^3$  đất. Kết quả đội I đã hoàn thành trước thời hạn 3 ngày, đội II hoàn thành trước thời hạn 6 ngày. Tính số đất mỗi đội đã đào trong 1 ngày, biết mỗi ngày đội II đã đào nhiều hơn đội I là  $4 \text{ m}^3$ .
- 211 ([Bin23], 339., p. 55). 1 người thả hòn đá rơi xuống giếng, sau 1.5 giây thì nghe thấy tiếng đá chạm đáy giếng. Xác định thời gian rơi của đá & chiều sâu của giếng (làm tròn đến m), biết quãng đường  $s$  m của 1 vật rơi tự do không có vận tốc ban đầu sau  $t$  giây được tính theo công thức  $s = 5t^2$  & vận tốc của âm thanh là  $340 \text{ m/s}$ .
- 212 ([Bin23], 340., p. 55). Có 2 loại quặng sắt: quặng loại I & quặng loại II, khối lượng tổng cộng là 10 tấn. Khối lượng sắt nguyên chất trong quặng loại I là 0.8 tấn, trong quặng loại II là 0.6 tấn. Biết tỷ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại I nhiều hơn tỷ lệ sắt nguyên chất trong quặng loại II là 10%. Tính khối lượng của mỗi loại quặng.
- 213 ([Bin23], 341., p. 55). Nếu đường kính của 1 hình tròn tăng 3 m thì diện tích của nó tăng gấp đôi. Tính độ dài đường kính lúc đầu.
- 214 ([Bin23], 342., p. 55). 2 người đi xe đạp cùng khởi hành 1 lúc ở cùng 1 chỗ, người thứ nhất đi về phía bắc, người thứ 2 đi về phía đông. Sau 2 giờ họ cách nhau 60 km theo đường chim bay. Biết vận tốc của người thứ nhất lớn hơn vận tốc của người thứ 2 là  $6 \text{ km/h}$ . Tính vận tốc mỗi người.
- 215 ([Bin23], 343., p. 55). 2 vòi nước cùng chảy vào 1 bể thì sau 6 giờ đầy bể. Nếu chảy 1 mình cho đầy bể thì vòi I cần nhiều hơn vòi II là 5 giờ. Hỏi mỗi vòi chảy 1 mình trong bao lâu thì đầy bể?
- 216 ([Bin23], 344., pp. 55–56). Trên quãng đường AB dài 60 km, người I đi từ A đến B, người II đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng 1 lúc & gặp nhau tại C sau khi khởi hành 1h12ph. Từ C, người I đi tiếp đến B với vận tốc giảm hơn trước  $6 \text{ km/h}$ , người thứ II đi tiếp đến A với vận tốc như cũ. Kết quả người I đến nơi sớm hơn người II 48 phút. Tính vận tốc ban đầu của mỗi người.
- 217 ([Bin23], 345., p. 56). 1 cửa hàng mua  $x$  chiếc áo hết  $d$  nghìn đồng. Cửa hàng bán 2 chiếc với giá bằng  $\frac{1}{2}$  giá mua, bán các chiếc còn lại lãi được 8000 đồng/chiếc. Tiền lãi tổng cộng là 72000 đồng. (a) Tính  $x$  biết  $d = 480$ . (b) Tìm GTNN của  $x$  biết  $d \in \mathbb{N}$ .
- 218 ([Bin23], 346., p. 56). Long có đồ chơi là 1 chiếc thuyền buồm. Khi Long cho thuyền chạy từ A đến B thì thời gian thuyền đi nhiều hơn so với khi có gió thổi thuận chiều là 9 giây. Khi bị gió thổi ngược chiều thì thời gian thuyền đi từ A đến B là 84 giây. Tính thời gian thuyền đi từ A đến B khi không có gió thổi.

**219** ([Bin23], 347., p. 56). 3 công nhân cùng làm 1 công việc thì làm xong sớm hơn 18 giờ so với khi người III làm 1 mình, sớm hơn 3 giờ so với khi người II làm 1 mình & bằng nửa thời gian so với khi người I làm 1 mình công việc đó. Tính thời gian của mỗi công nhân làm 1 mình xong công việc đó.

**220** ([Bin23], 348., p. 56, Sam Loyd's). 1 điền chủ muốn cắt ra từ 1 mảnh đất hình chữ nhật 1 dải đất có chiều rộng không đổi dọc theo 4 bờ của mảnh đất sao cho diện tích phần cắt ra bằng diện tích phần còn lại. Trong cuốn sách của mình, Sam Loyd đưa ra cách làm của người điền chủ nhưng không chứng minh: Lấy nửa chu vi hình chữ nhật ban đầu trừ đi đường chéo của nó, rồi chia cho 4, đó chính là chiều rộng của dải đất được cắt ra. Chứng minh cách làm này đúng.

## 6 Relation Between Parabol & Line – Quan Hệ Giữa Parabol $y = ax^2$ & Đường Thẳng $y = mx + n$

**221** ([Bin23], VD108, p. 57). Cho parabol  $y = \frac{1}{2}x^2$ , đường thẳng  $y = \frac{1}{2}x + 3$ . (a) Xác định tọa độ 2 giao điểm  $A, B$  của parabol & đường thẳng. (b) Xác định tọa độ điểm  $C$  thuộc cung  $AB$  của parabol đó sao cho  $\triangle ABC$  có diện tích lớn nhất.

**222** ([Bin23], 349., p. 58). Cho parabol  $y = \frac{1}{2}x^2$ , đường thẳng (d) :  $y = mx + n$ . Xác định 2 hệ số  $m, n \in \mathbb{R}$  để đường thẳng d đi qua điểm  $A(1,0)$  & tiếp xúc với parabol. Tìm tọa độ tiếp điểm.

**223** ([Bin23], 350., p. 58). Cho parabol  $y = x^2$ . Tìm điểm  $A$  thuộc parabol sao cho tiếp tuyến của parabol tại  $A$  song song với đường thẳng  $y = 4x + 5$ .

**224** ([Bin23], 351., p. 58). Cho parabol  $y = x^2$ , 2 điểm  $A, B$  thuộc parabol với hoành độ tương ứng là  $-1, 2$ . Tìm điểm  $M$  trên cung  $AB$  của parabol sao cho  $\triangle ABM$  có diện tích lớn nhất.

**225** ([Bin23], 352., p. 58). Cho parabol  $y = x^2$ . chứng minh với mọi điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $y = -\frac{1}{4}$ , 2 tiếp tuyến kẻ từ  $M$  với parabol vuông góc với nhau.

**226** ([Bin23], 353., p. 58). Cho parabol  $y = x^2$ . Gọi  $A, B$  là 2 giao điểm của đường thẳng  $y = mx + 2$  với parabol với tham số  $m \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị của  $m$  để đoạn thẳng  $AB$  có độ dài nhỏ nhất.

## 7 Solvability of Equation – Điều Kiện Về Nghiệm của 1 Phương Trình

**227** ([Bin23], VD109, p. 59). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 + mx + 2m - 4 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm không âm.

**228** ([Bin23], VD110, p. 60). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 + mx - 1 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm  $\geq 2$ .

**229** ([Bin23], VD111, p. 61). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $3x^2 - 4x + 2(m - 1) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

**230** ([Bin23], VD112, p. 62). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^4 + mx^2 + 2m - 4 = 0$  có nghiệm.

**231** ([Bin23], VD113, p. 62). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $\sqrt{2x^2 + (m - 4)x + 3} = x - 2$  có nghiệm.

**232** ([Bin23], VD114, p. 63). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^3 - m(x + 1) + 1 = 0$  có đúng 2 nghiệm phân biệt.

**233** ([Bin23], VD115, p. 62). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình  $x - \sqrt{1 - x^2} = m$  chỉ có 1 phần tử.

**234** ([Bin23], VD116, p. 64). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x(x - 2)(x + 2)(x + 4) = m$  có 4 nghiệm phân biệt.

**235** ([Bin23], VD117, p. 65). Cho phương trình  $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$ . Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 4 nghiệm  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  thỏa  $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ .

**236** ([Bin23], VD118, p. 65). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x - 5} + \sqrt{9 - x} = m$  chỉ có 1 phần tử.

**237** ([Bin23], 354., p. 66). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 - 2x + m - 2 = 0$  có nghiệm không âm.

**238** ([Bin23], 355., p. 66). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 + 2m|x - 2| - 4x + m^2 + 3 = 0$  có nghiệm.

**239** ([Bin23], 356., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$  có 2 nghiệm phân biệt  $> -1$ .

**240** ([Bin23], 357., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + x + m = 0$  đều lớn hơn  $m$ .

**241** ([Bin23], 358., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^2 + mx - 1 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm  $\leq -2$ .

**242** ([Bin23], 359., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 + m - 3)x - m^2 + 3 = 0$ .

**243** ([Bin23], 360., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có nghiệm: (a)  $(m - 3)x^4 - 2mx^2 + 6m = 0$ . (b)  $x^4 - 2mx^2 + m + 2 = 0$ .

**244** ([Bin23], 361., p. 67). Cho phương trình  $x^4 - 2(m - 1)x^2 - (m - 3) = 0$ . Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình có: (a) 4 phần tử. (b) 3 phần tử. (c) 2 phần tử. (d) Không có phần tử nào.

**245** ([Bin23], 362., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 4 nghiệm  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  thỏa  $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ : (a)  $mx^4 - 10mx^2 + m + 8 = 0$ . (b)  $x^4 - (m + 7)x^2 + 3m = 0$ .

**246** ([Bin23], 363., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^4 - 40x^2 + 6m = 0$  có 4 nghiệm, & khi biểu diễn 4 nghiệm đó từ nhỏ đến lớn trên trục số bởi 4 điểm  $A, B, C, D$  thì  $AB = BC = CD$ .

**247** ([Bin23], 364., p. 67). Chứng minh phương trình  $(x + 1)^4 - (m - 1)(x + 1)^2 - (m^2 - m + 1) = 0$  có 2 nghiệm  $\forall m \in \mathbb{R}$ .

**248** ([Bin23], 365., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$  có nghiệm.

**249** ([Bin23], 366., p. 67). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $2x - 4 = 3\sqrt{x - m}$  có nghiệm.

**250** ([Bin23], 367., p. 68). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình chỉ có 1 phần tử: (a)  $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{4 - x^2} = m$ . (b)  $\sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 2} = m$ .

## 8 Đa Thức Bậc 2 Với Bất Đẳng Thức & Toán Cực Trị

**251** ([Bin23], VD119, p. 68). Cho đa thức bậc 2  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ . Chứng minh: (a) Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với  $a, \forall x \in \mathbb{R}$ . (b) Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với  $a$  với mọi giá trị của  $x$  khác  $-\frac{b}{2a}$ . (c) Nếu  $\Delta > 0$  thì  $f(x)$  trái dấu với  $a$  với mọi giá trị của  $x$  nằm trong khoảng 2 nghiệm,  $f(x)$  cùng dấu với  $a$  với mọi giá trị của  $x$  nằm ngoài khoảng 2 nghiệm.

**252** ([Bin23], VD120, p. 69). Giải bất phương trình bậc 2  $x^2 - 2x - 1 > 0$ .

**253** ([Bin23], VD121, p. 69). Tìm  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình  $mx^2 + (m - 2)x + 3 = 0$  có nghiệm.

**254** ([Bin23], VD122, p. 70). Cho đẳng thức  $x^2 - x + y^2 - y = xy$  (1). (a) Chứng minh  $(x - 1)^2 \leq \frac{4}{3}, (y - 1)^2 \leq \frac{4}{3}$ . (b) Tìm  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  thỏa mãn đẳng thức (1).

**255** ([Bin23], VD123, p. 70). Tìm GTNN, GTLN của  $A = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ .

**256** ([Bin23], VD124, p. 72). Cho  $A = \frac{x^2 + mx + n}{x^2 + 2x + 4}$ . Tìm  $m, n \in \mathbb{R}$  để  $A$  có GTNN bằng  $\frac{1}{3}$ , GTLN bằng 3.

**257** ([Bin23], VD125, p. 73). Tìm GTNN của biểu thức  $A = (2x - 3)^3 - 7$  với  $x \leq -1$  hoặc  $x \geq 3$ .

**258** ([Bin23], VD126, p. 73). Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình sau, tìm  $m \in \mathbb{R}$  để  $x_1^2 + x_2^2$  có GTNN: (a)  $x^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ . (b)  $x^2 + 2(m - 2)x - (2m - 7) = 0$ .

**259** ([Bin23], VD127, p. 74). Tìm GTNN của  $A = 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$ .

**260** ([Bin23], 368., p. 75). Chứng minh nếu  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa đẳng thức  $x + y + xy = (x + y)^2$  thì  $-\frac{1}{3} \leq x, y \leq 1$ .

**261** ([Bin23], 369., p. 76). Chứng minh nếu  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa đẳng thức  $x^2 = 3(xy + y - y^2)$  thì  $0 \leq y \leq 4$ .

**262** ([Bin23], 370., p. 76). Chứng minh nếu  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $a + b + c = 5, ab + bc + ca = 8$  thì  $1 \leq a, b, c \leq \frac{7}{3}$ .

**263** ([Bin23], 371., p. 76). Tìm GTNN của  $A = x^4 - 4x^3 + 8x + 20$ .

**264** ([Bin23], 372., p. 76). Tìm GTNN, GTLN: (a)  $A = \frac{x}{x^2 + 1}$ . (b)  $B = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ . (c)  $C = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}$ . (d)  $D = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}$ .

**265** ([Bin23], 373., p. 76). Tìm GTNN, GTLN của  $A = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ .

**266** ([Bin23], 374., p. 76). Tìm GTNN của  $A = \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ .

**267** ([Bin23], 375., p. 76). Tìm GTNN của  $A = x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$  với  $x > 0$ .

**268** ([Bin23], 376., p. 76). Tìm  $m, n \in \mathbb{R}$  để biểu thức  $A = \frac{2x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$  nhận GTNN bằng 1, GTLN bằng 6.

**269** ([Bin23], 377., p. 76). Tìm GTNN của  $A = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$  với  $x + y = 1$ .



**270** ([Bin23], 378., p. 76). Tìm GTNN của  $A = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}$  với  $0 < x < 1$ .

**271** ([Bin23], 379., p. 76). Cho phương trình  $x^4 + 2x^2 + 2ax + (a+1)^2 = 0$ . Tìm  $a \in \mathbb{R}$  để nghiệm của phương trình: (a) Đạt GTNN. (b) Đạt GTLN.

**272** ([Bin23], 380., p. 76). Cho phương trình  $x^2 + ax + a - 5 = 0$  với  $a \geq -1$ . Tìm GTLN mà nghiệm của phương trình có thể đạt được.

## 9 Phương Trình Đại Số Bậc Cao

Giải phương trình:

**273** ([Bin23], VD1–4, pp. 78–80). (a)  $x^3 + 3x^2 + 12x - 16 = 0$ . (b)  $x^3 - 3x - 2 = 0$ . (c)  $x^3 - 6x + 4 = 0$ . (d)  $x^4 + 8x^3 + 15x^2 - 4x - 2 = 0$ .

## 10 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCVII, §3, pp. 66–67]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

## Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 119.