Problem: Vector

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 9 năm 2024

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 7/rational/problem: set $\mathbb{Q}$ of rationals [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

1 ([Hải+22], VD1, p. 59). *Cho đoạn thẳng AB & I là trung điểm của AB. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M.*

2 ([Hải+22], VD2, p. 59). *Cho ΔABC & điểm M nằm giữa B,C. Chứng minh:*

$$\overrightarrow{AM}=\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}+\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}.$$

3 ([Hải+22], VD3, p. 60). *Cho ΔABC. Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm G. (b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. (c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.*

4 ([Hải+22], VD4, p. 60). *Cho ΔABC & 1 điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Chứng minh: $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.*

5 ([Hải+22], VD5, p. 61). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $a\overrightarrow{MD}+b\overrightarrow{MC}+c\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (với a,b,c là độ dài các cạnh BC,AC,AB).*

6 ([Hải+22], VD6, p. 61). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Trên các tia PA_1,PB_1,PC_1 lần lượt lấy các điểm X,Y,Z sao cho $\frac{PX}{PA_1}=\frac{PY}{PB_1}=\frac{PZ}{PC_1}=k$. Chứng minh: (a) AX,BY,CZ đồng quy tại T. (b) P,T,G thẳng hàng & $\frac{TG}{PG}=\left|\frac{3k}{2+k}\right|$.*

7 ([Hải+22], VD7, p. 62). *Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm L thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$. Điểm L như vậy gọi là* điểm Lemoine *của ΔABC.*

8 ([Hải+22], VD8, p. 62). *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. PA,PB,PC cắt các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại các điểm A_1,B_1,C_1. Gọi A_2,B_2,C_2 lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Gọi A_3,B_3,C_3 lần lượt là trung điểm của AA_1,BB_1,CC_1. (a) Chứng minh: A_2A_3,B_2B_3,C_2C_3 đồng quy. (b) Lấy điểm A_4 thuộc BC sao cho QA_4 song song với PA. Xác định các điểm B_4 & C_4 tương tự A_4. Chứng minh: Q là trọng tâm của $\Delta A_4B_4C_4$.*

9 ([Hải+22], VD9, p. 64). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Chứng minh: $a\overrightarrow{ID}+b\overrightarrow{IE}+c\overrightarrow{IF}=\vec{0}$.*

10 ([Hải+22], VD10, p. 64). *Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ$ & các đường phân giác BE & CF. Đặt $\vec{u}=(AB+BC+CA)\overrightarrow{BC}+BC\overrightarrow{EF}$. Chứng minh: giá của $\vec{u}$ vuông góc với BC.*

---

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/rational/problem/NQBH_rational_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/rational/problem/NQBH_rational_problem.tex.

11 ([Hải+22], 8.1, p. 65)**.** *Cho vector $\vec{u}$ có 2 phương khác nhau, chứng minh $\vec{u} = \vec{0}$.*

12 ([Hải+22], 8.2, p. 65)**.** *Cho ΔABC có M & N lần lượt là trung điểm của AB & AC. Lấy P đối xứng với M qua N. Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.*

13 ([Hải+22], 8.3, p. 65)**.** *Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Lấy K đối xứng với O qua BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$.*

14 ([Hải+22], 8.4, p. 65)**.** *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Chứng minh: 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ có giá vuông góc.*

15 ([Hải+22], 8.5, p. 65)**.** *Cho ΔABC & ΔDEF thỏa mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. Chứng minh: ΔABC & ΔDEF có cùng trọng tâm.*

16 ([Hải+22], 8.6, p. 65)**.** *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a}$ có giá vuông góc với giá của vector $\vec{a}+\vec{b}$. Chứng minh: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$.*

17 ([Hải+22], 8.7, p. 65)**.** *Cho ΔABC & điểm P thỏa mãn $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$. Chứng minh: $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.*

18 ([Hải+22], 8.8, p. 65)**.** *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Cho $(O), B, C$ cố định & A di chuyển trên đường tròn (O). BE, CF là 2 đường cao của ΔABC. Giả sử có vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\frac{|\overrightarrow{EF} - \vec{u}|^2}{EF^2} + \frac{|\overrightarrow{OA} - \vec{u}|^2}{OA^2} = 1$. Chứng minh: Hiệu $\frac{1}{EF^2} - \frac{1}{|\vec{u}|^2}$ luôn không đổi khi A thay đổi.*

19 ([Hải+22], 8.9, p. 65)**.** *Cho ΔABC có các phân giác trong AD, BE, CF. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE.*

- *(a) Chứng minh: AX, BY, CZ đồng quy tại điểm P thỏa mãn hệ thức: $a(b+c)\overrightarrow{PA} + b(c+a)\overrightarrow{PB} + c(a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.*
- *(b) Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC. Dựng vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{NA}}{a} + \frac{\overrightarrow{NB}}{b} + \frac{\overrightarrow{NC}}{c}$. Gọi Q là trung điểm ON, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh: PQ song song hoặc trùng với giá của vector $\vec{u}$.*

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.