

Problem: Algebraic & Rational Fractions

Bài Tập: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 24 tháng 11 năm 2023

Mục lục

1	Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	1
2	Operations \pm on Algebraic Fractions – Phép \pm Các Phân Thức Đại Số	4
3	Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số	5
4	Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ	7
5	Algebraic Fraction & Fraction – Phân Thức & Phân Số	8
6	Polynomial Factorization – Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử	10
7	Tính Chia Hết Đối Với Số Nguyên	11
8	Miscellaneous	11
	Tài liệu	11

1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

1 ([Tuy23], VD20, p. 28). (a) Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$. Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$. (b) Cho $a, b, c, d, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \alpha$. Rút gọn phân thức $B = \frac{ax^2 + bxy + ay^2}{cx^2 + dxy + cy^2}$.

2 ([Tuy23], 141., p. 29). So sánh: (a) $\frac{201 - 200}{201 + 200}$ & $\frac{201^2 - 200^2}{201^2 + 200^2}$. (b) $\frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$ & $\frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$.

3 (Mở rộng [Tuy23], 141a., p. 29). Biện luận theo các tham số $a, b \in \mathbb{R}$ để so sánh $A = \frac{a - b}{a + b}$ & $B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

4 ([Tuy23], 142., p. 29). Chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$: (a) $A = \frac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}$ không tối giản. (b) $B = \frac{6n + 1}{8n + 1}$ tối giản. (c) $C = \frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$ tối giản. (d) Có thể mở rộng từ \mathbb{N} lên \mathbb{Z} được không?

5 ([Tuy23], 143., p. 29). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a) $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$. (b) $B = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1)$.

Rút gọn phân thức:

6 ([Tuy23], 144., p. 29). (a) $A = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$. (b) $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

7 ([Tuy23], 145., p. 29). (a) $A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2y^2 + 1}$. (b) $B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2y - x^2z + y^2z - y^3}$.

8 ([Tuy23], 146., p. 29). (a) $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$. (b) $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$. (c) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://ngbh.github.io>.

- 9 ([Tuy23], 147., p. 29). (a) $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$. (b) $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$.
- 10 ([Tuy23], 148., p. 29). Cho $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Rút gọn phân thức $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$.
- 11 ([Tuy23], 149., p. 30). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x + y + z = 0$. Rút gọn phân thức: (a) $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$. (b) $B = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$.
- 12 ([Tuy23], 150., p. 30). Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Rút gọn phân thức $A = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$.
- 13 ([Bin23], VD28, p. 18). Cho phân thức $A = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)^2}$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A.
- 14 ([Bin23], VD29, p. 19). Rút gọn phân thức $A = \frac{(b - c)^3 9(c - a)^3 + (a - b)^3}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$.
- 15 ([Bin23], VD30, p. 19). Chứng minh phân số $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ tối giản, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
- 16 ([Bin23], VD28, p. 19). (a) Chứng minh $\sum_{i=0}^{31} x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^{31} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$.
- 17 ([Bin23], 106., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$. (b) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$.
- Rút gọn phân thức:
- 18 ([Bin23], 107., p. 20). (a) $A = \frac{1235 \cdot 2469 - 1234}{1234 \cdot 2469 + 1235}$. (b) $B = \frac{4002}{1000 \cdot 1002 - 999 \cdot 1001}$.
- 19 ([Bin23], 108., p. 20). (a) $\frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$. (b) $\frac{(x - y)^3 - 3xy(x + y) + y^3}{x - 6y}$. (c) $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$.
- 20 ([Bin23], 109., p. 20). $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{(n + 1)!}{n!(n + 2)}$. (b) $\frac{n!}{(n + 1)! - n!}$. (c) $\frac{(n + 1)! - (n + 2)!}{(n + 1)! + (n + 2)!}$.
- 21 ([Bin23], 110., p. 20). (a) $\frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$. (b) $\frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$. (c) $\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - x)^2}$. (d) $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$.
- 22 ([Bin23], 111., p. 20). Chứng minh phân số tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{3n + 1}{5n + 2}$. (b) $\frac{12n + 1}{30n + 2}$. (c) $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$. (d) $\frac{2n + 1}{2n^2 - 1}$.
- 23 ([Bin23], 112., p. 20). Chứng minh phân số $\frac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1}$ không tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 24 ([Bin23], 113., p. 20). Viết gọn biểu thức $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)$ dưới dạng 1 phân thức.
- 25 ([Bin23], 114., p. 20). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \frac{(ax + by + cz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.
- 26 ([Bin23], 115., p. 20). Cho biết $ax + by + cz = 0$. Rút gọn $A = \frac{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$.
- 27 ([Bin23], 116., p. 20). Rút gọn $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}$ biết $x + y + z = 0$.
- 28 ([Bin23], 117., p. 21). Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x - y}{x + y}$ biết $x^2 - 2y^2 = xy, y \neq 0, x + y \neq 0$.
- 29 ([Bin23], 118., p. 21). Tính giá trị biểu thức $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$ biết $9x^2 + 4y^2 = 20xy, 2y < 3x < 0$.
- 30 ([Bin23], 119., p. 21). Cho $x, y \in \mathbb{R}^*, 3x - y = 3z, 2x + y = 7z$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$.

31 ([Bin23], 120., p. 21). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phân thức có giá trị nguyên: (a) $\frac{3}{2x-1}$. (b) $\frac{5}{x^2+1}$. (c) $\frac{7}{x^2-x+1}$. (d) $\frac{x^2-59}{x+8}$. (e) $\frac{x+2}{x^2+4}$. (f) Mở rộng.

32 ([Bin23], 121., p. 21). Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để phân thức $\frac{10}{x^2+1} \in \mathbb{Z}$.

33 ([Bin23], 122., p. 21). Chứng minh nếu 3 chữ số $a, b, c \neq 0$ thỏa $\overline{ab} : \overline{bc} = a : c$ thì $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$.

34 ([Bin23], 123., p. 21). Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam & nữ 2 lớp 8A, 8B được thống kê ở bảng:

	Lớp 8A	Lớp 8B	Cả 2 lớp 8A, 8B
Nam	7.1	8.1	7.9
Nữ	7.6	9.0	
Cả lớp	7.4	8.4	

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh của cả 2 lớp 8A, 8B.

35 ([Bin+21], VD5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau: $\frac{a^2-2ab-3b^2}{a^2-4ab+3b^2}$
 $\& \frac{a+b}{a-b}$ với $a \neq b$ & $a \neq 3b$.

36 ([Bin+21], VD5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức $\frac{(3x+2)(x+5)}{4(3x+2)}$ & $\frac{x+5}{4}$ trong các trường hợp biến x thuộc các tập hợp: (a) $x \in \mathbb{N}$. (b) $x \in \mathbb{Z}$. (c) $x \in \mathbb{Q}$.

37 ([Bin+21], VD5.3, p. 39). So sánh $A = \frac{2013^2-2012^2}{2013^2+2012^2}$ với $B = \frac{2013-2012}{2013+2012}$.

38 ([Bin+21], VD5.4, p. 40). Chứng minh: $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1+a^{2^i})$, i.e., $1+a+a^2+\dots+a^{63} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)\dots(1+a^{32})$.

39 ([Bin+21], VD5.5, p. 40). Rút gọn phân thức $A = \frac{x^3-7x+6}{x^3+5x^2-2x-24}$.

40 ([Bin+21], VD5.6, p. 40). Rút gọn phân thức $A = \frac{a^{30}+a^{20}+a^{10}+1}{a^{2042}+a^{2032}+a^{2022}+a^{2012}+a^{30}+a^{20}+a^{10}+1}$.

41 ([Bin+21], 5.1, p.. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức A trong các trường hợp: (a) $\frac{A}{3x-2} = \frac{15x^2+10x}{9x^2-4}$.
(b) $\frac{3x^2-5x-2}{A} = \frac{x-2}{2x-3}$. (c) $\frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{x^2+4x+4}{A}$. (d) $\frac{2x+1}{x^3+x^2-x+2} = \frac{A}{x^3+1}$.

42 ([Bin+21], 5.2, p.. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó & có tử thức là đa thức B cho sau đây: (a) $\frac{2x-5}{3x^2+4}$ & $B = 2x^2-3x-5$. (b) $\frac{(x+1)(x^2+x-6)}{(x^2-9)(x^2+3x+2)}$ & $B = x-2$.

43 ([Bin+21], 5.3, p.. 41). Rút gọn biểu thức: (a) $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$. (b) $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$. (c) $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$.

44 ([Bin+21], 5.4, p.. 41). Rút gọn: (a) $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$. (b) $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$. (c) $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$.

45 ([Bin+21], 5.5, p.. 41). Rút gọn phân thức: (a) $Q = \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-12}$. (b) $R = \frac{3x^2+5xy-2y^2}{3x^2-7xy+2y^2}$. (c) $S = \frac{x^6-14x^4+49x^2-36}{x^4+4x^3-x^2-16x-12}$.
(d) $T = \frac{x^6-y^6}{x^6+2x^4y^2+2x^2y^4+y^6}$.

46 ([Bin+21], 5.6, p.p. 41-42). Rút gọn: (a) $A = \frac{a^4-5a^2+4}{a^4-a^2+4a-4}$. (b) $B = \frac{a^3-3a+2}{2a^3-7a^2+8a-3}$. (c) $C = \frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca}$.
(d) $D = \frac{a^3-7a+6}{a^2(a+3)^3-4a(a+3)^3+4(a+3)^3}$. (e) $E = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

47 ([Bin+21], 5.7, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a) $A = \frac{xy^2-xz^2-y^3+yz^2}{x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x)}$. (b) $B = \frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$.

48 ([Bin+21], 5.8, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a) $A = \frac{(x+y+z)^2-3xy-3yz-3zx}{9xyz-3x^3-3y^3-3z^3}$. (b) $B = \frac{x^3-y^3+z^3+3xyz}{(x+y)^2+(y+z)^2+(z-x)^2}$.
(c) $C = \frac{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3}{(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3}$.

- 49 ([Bin+21], 5.9, p.. 42). Rút gọn phân thức với $n \in \mathbb{N}^*$: (a) $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$. (b) $\frac{n!}{n! + (n-1)!}$. (c) $\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)!}$.
- 50 ([Bin+21], 5.10, p.. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản $\forall n \in \mathbb{N}$: (a) $\frac{3n+2}{4n+3}$. (b) $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$. (c) $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$.
- 51 ([Bin+21], 5.11, p.. 42). Chứng minh phân số $\frac{n^7+2n^2+n+2}{n^8+n^2+2n+2}$ không tối giản, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 52 ([Bin+21], 5.12, p.. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức: $P = (x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)(x^{32}+x^{16}+1)$.
- 53 ([Bin+21], 5.13, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a) $\frac{|x-2|+|x-1|+x}{2x^2-7x+3}$ với $x < 1$. (b) $\frac{|x-4||x-5|}{x^3-9x^2+20x}$ với $4 < x < 5$.
- 54 ([Bin+21], 5.14, p.. 43). Rút gọn phân thức: (a) $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1}{x^2+7x+11}$. (b) $U = \frac{x^3-53x+88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+16}$.
- 55 ([Bin+21], 5.15, p.. 43). Cho $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ & $x, y, z \neq 0$. Chứng minh: $\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$.
- 56 ([Bin+21], 5.16, p.. 43). Cho $ax+by+cz=0$. Rút gọn phân thức: $V = \frac{ax^2+by^2+cz^2}{bc(y-z)^2+ca(z-x)^2+ab(x-y)^2}$.
- 57 ([Bin+21], 5.17, p.. 43). Cho $x+y+z=0$. Chứng minh: $\frac{9(x^2+y^2+z^2)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = 3$.
- 58 ([Bin+21], 5.18, p.. 43). Chứng minh: $\frac{x^2+y^2-z^2-2zt+2xy-t^2}{x+y-z-t} = \frac{x^2-y^2+z^2-2zt+2xz-t^2}{x-y+z-t}$.
- 59 ([Bin+21], 5.19., p. 43). Rút gọn: $X = \frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)(14^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)(16^4+4)}$.

2 Operations \pm on Algebraic Fractions – Phép \pm Các Phân Thức Đại Số

- 60 ([Tuy23], VD21, p. 30). Tính: $A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.
- 61 ([Tuy23], VD22, p. 31). Tính hợp lý: (a) $A(x, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}$. (b) $A(x, 99)$.
- 62 ([Tuy22], VD18, p. 41). Tính: $A = \frac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$.
- 63 ([Tuy23], 151., pp. 31–32). Tính: (a) $\frac{x^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2xy^2}{x^4-2x^2y^2+y^4} + \frac{y^2}{(x^2-y^2)(x+y)}$. (b) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$. (c) Mở rộng.
- 64 ([Tuy23], 152., p. 32). Tính: (a) $A = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} + \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$. (b) $B = \frac{yz}{(x+y)(y+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.
- 65 ([Tuy23], 153., p. 32). (a) Tính $A = \frac{a}{x^2+ax} + \frac{a}{x^2+3ax+2a^2} + \frac{a}{x^2+5ax+6a^2} + \dots + \frac{a}{x^2+19ax+90a^2} + \frac{1}{x+10a}$. (b) Mở rộng.
- 66 ([Tuy22], 162., p. 42). Tính: (a) $\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$. (b) $\frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-zx)} + \frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}$.
- 67 ([Tuy23], 154., p. 32). Cho $A = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{xy} + \frac{(x+1)(y+1)}{xyz} + \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyzt}$. Chứng minh có thể viết A dưới dạng 1 phân thức có tử & mẫu đều là tích của 4 nhân tử.
- 68 ([Tuy22], 167., p. 43). Cho $xy=a, yz=b, zx=c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Tính $x^2+y^2+z^2$.

69 ([Tuy23], 155., p. 32). Cho $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$. Tính $S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

70 ([Tuy23], 156., p. 32). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x+y+z=0$. Tính: (a) $A = \frac{x^2}{x^2-y^2-z^2} + \frac{y^2}{y^2-z^2-x^2} + \frac{z^2}{z^2-x^2-y^2}$. (b) $B = \frac{1}{x^2+y^2-z^2} + \frac{1}{y^2+z^2-x^2} + \frac{1}{z^2+x^2-y^2}$.

71 ([Tuy23], 157., p. 32). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$. Chứng minh trong 3 số x, y, z tồn tại 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.

72 ([Tuy23], 159., p. 32). Cho $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$. Tính AB .

73 ([Tuy23], 159., p. 32). 1 tổ dự định sản xuất x sản phẩm trong 12 giờ. Nhưng thực tế trong 9 giờ tổ đã sản xuất vượt mức dự định là 3 sản phẩm. Viết biểu thức biểu diễn số sản phẩm đó tổ đó sản xuất vượt dự định trong mỗi giờ.

3 Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số

74 ([Tuy23], VD23, p. 33). (a) Chứng minh $A = \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{3}{3 \cdot 5}\right) \left(1 - \frac{3}{4 \cdot 6}\right) \cdots \left(1 - \frac{3}{n(n+2)}\right) > \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (b) Mở rộng.

75 ([Tuy23], VD24, p. 33). Cho $A = \frac{x-y}{x+y}, B = \frac{y-z}{y+z}, C = \frac{z-x}{z+x}$. Chứng minh $(1+A)(1+B)(1+C) = (1-A)(1-B)(1-C)$.

76 ([Tuy23], 160., p. 34). Tính: (a) $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2-4x-5}{x^2-10x+25}$. (b) $\frac{x(y^2-z)+y(x-xy)}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} : \frac{xy^2-xz(2y-z)}{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$.

77 ([Tuy23], 161., p. 34). Tính: (a) $A = \prod_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (b) $B = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{17^4+4}$. (c) Mở rộng.

78 ([Tuy23], 162., p. 34). Chứng minh $A = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 + \frac{4}{12}\right) \left(1 + \frac{4}{21}\right) \cdots \left(1 + \frac{4}{n(n+4)}\right) < 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

79 ([Tuy23], 163., p. 35). Cho $A = \frac{x-y}{1+xy}, B = \frac{y-z}{1+yz}, C = \frac{z-x}{1+zx}$. Chứng minh $A+B+C = ABC$.

80 ([Tuy23], 164., p. 35). Cho $a, b \in \mathbb{R}, ab=1, a+b \neq 0$. Tính $A = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

81 ([Tuy23], 165., p. 35). Cho $A = \frac{4yz-x^2}{yz+2x^2}, B = \frac{4zx-y^2}{zx+2x^2}, C = \frac{4xy-z^2}{xy+2z^2}$. Chứng minh nếu $x+y+z=0$ & x, y, z khác nhau đôi một thì ABC là 1 hằng số.

82 ([Bin23], VD32, p. 21). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a+b+c=0$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2-b^2}$.

83 ([Bin23], VD33, p. 22). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$.

84 ([Bin23], VD34, p. 22). Rút gọn biểu thức $A = \sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \cdots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$.

85 ([Bin23], VD35, p. 22). Xác định $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$.

86 ([Bin23], VD36, p. 22). Cho $A = \frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right), B = \frac{2}{(x+y)^4} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right), C = \frac{2}{(x+y)^{45}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$. Tính $A+B+C$.

87 ([Bin23], 124., p. 23). Tính: (a) $\frac{x+3}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1}$. (b) $\frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} + \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(y-x)}$.

88 ([Bin23], 125., p. 23). Tính: (a) $A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$. (b) $B = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$. (c) $C = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$. (d) $D = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$. (e) $E = \frac{c}{a^2} + \frac{b}{b^2} + \frac{a}{c^2}$.

- 89** ([Bin23], 126., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ đôi một khác nhau. Chứng minh biểu thức có giá trị nguyên: (a) $A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$. (b) $B = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$.
- 90** ([Bin23], 127., p. 24). Cho $3y - x = 6$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$.
- 91** ([Bin23], 128., p. 24). Tìm $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$. (b) $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$.
- 92** ([Bin23], 129., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$. Chứng minh $a + b + c = abc$.
- 93** ([Bin23], 130., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0, a + b + c = 1$. Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2 + c^2$.
- 94** ([Bin23], 131., p. 24). Cho $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị biểu thức $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$.
- 95** ([Bin23], 132., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$.
- 96** ([Bin23], 133., p. 24). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c tồn tại 2 số bằng nhau.
- 97** ([Bin23], 134., p. 24). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để phân thức có giá trị nguyên: (a) $A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$. (b) $B = \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1}$. (c) $C = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2}$.
- 98** ([Bin23], 135., p. 25). Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+3a}{2-x} + \frac{x-3a}{2+x} - \frac{2a}{4-x^2} + a$ với $x = \frac{a}{3a+2}$.
- 99** ([Bin23], 136., p. 25). Rút gọn biểu thức $A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.
- 100** ([Bin23], 137., p. 25). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{c+a-b}{ca} = 0$. Chứng minh trong 3 phân thức ở vế trái, có ít nhất 1 phân thức bằng 0.
- 101** ([Bin23], 138., p. 25). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\frac{ay-bx}{c} = \frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b}$. Chứng minh mỗi phân thức này bằng 0.
- 102** ([Bin23], 139., p. 25). Xác định $a, b, c \in \mathbb{R}$ để: (a) $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. (b) $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$. (c) $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}$.
- 103** ([Bin23], 140., p. 25). Rút gọn biểu thức $A = (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$.
- 104** ([Bin23], 141., p. 25). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ khác nhau đôi một, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab}$. (b) $B = \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab}$. (c) $C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$.
- 105** ([Bin23], 142., p. 25). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ khác nhau đôi một, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính giá trị biểu thức $A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.
- 106** ([Bin23], 143., p. 25). Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)^3 + x + y = x^3y^3 + xy$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
- 107** ([Bin23], 144., p. 25). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, a + b + c \neq 0$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$.
- 108** ([Bin23], 145., p. 26). Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 7a + 12} + \frac{1}{a^2 - 9a + 20} + \frac{1}{a^2 - 11a + 30}$.
- 109** ([Bin23], 146., p. 26). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}, abc = 1, a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh trong 3 số a, b, c tồn tại 1 số bằng 1.

- 110** ([Bin23], 147., p. 26). Chứng minh nếu $x + y + z = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ thì tồn tại 1 trong 3 số x, y, z bằng a .
- 111** ([Bin23], 148., p. 26). 2 biểu thức $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ có thể cùng có giá trị bằng 0 được không?
- 112** ([Bin23], 149., p. 26). Tính giá trị biểu thức $A = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2}$ biết $2a = by + cz$, $2b = cz + ax$, $2c = ax + by$, $a + b + c \neq 0$.
- 113** ([Bin23], 150., p. 26). (a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc = 2$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ca+2c+2}$. (b) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc = 1$. Rút gọn biểu thức $A = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$. (c) Mở rộng.
- 114** ([Bin23], 151., p. 26). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ac \neq 0$, $a \neq b$, $b \neq c$, $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{c}$.
- 115** ([Bin23], 152., p. 26). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a + b + c = 0$. Rút gọn biểu thức: (a) $A = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$. (b) $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$. (c) $C = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$. (d) $D = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$.
- 116** ([Bin23], 153., p. 26). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a + b + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \right)$.
- 117** ([Bin23], 154., p. 27). Chứng minh nếu $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ca)(a - abc)$ & $abc(a - b) \neq 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$.
- 118** ([Bin23], 155., p. 27). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, $a + b + c = x + y + z = 0$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$.
- 119** ([Bin23], 156., p. 27). Cho $\frac{xy+1}{y} = \frac{yz+1}{z} = \frac{zx+1}{x}$. Chứng minh $x = y = z$ hoặc $x^2 y^2 z^2 = 1$.
- 120** ([Bin23], 157., p. 27). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$
- 121** ([Bin23], 158., p. 27). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 1$. Chứng minh $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$.
- 122** ([Bin23], 159., p. 27). Cho $x \in \mathbb{R}^*$, $x + \frac{1}{x} = a \in \mathbb{R}$. Tính biểu thức theo a : (a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$. (b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$. (c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$. (d) $x^5 + \frac{1}{x^5}$.
- 123** ([Bin23], 160., p. 27). Cho $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a \in \mathbb{R}$. Tính biểu thức $A = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$ theo a .
- 124** ([Bin23], 161., p. 27). Cho $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 1 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x^4 + 1}{x^2}$. (b) $B = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$.
- 125** ([Bin23], 162., p. 27). Cho $a, x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$. Tính $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ theo a .
- 126** ([Bin23], 163., p. 27). Cho $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $y = \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A = x + y + xy$.
- 127** ([Bin23], 164., p. 27). (a) Mức sản xuất của 1 xí nghiệp năm 2001 tăng $a\%$ so với năm 2000, năm 2002 tăng $b\%$ so với năm 2001. Tính mức sản xuất của xí nghiệp đó năm 2002 tăng so với năm 2000. (b) 1 số a tăng $m\%$, sau đó lại giảm đi $n\%$, $a, m, n \in \mathbb{R}$, $a, m, n > 0$, thì được số b . Tìm liên hệ giữa m, n để $a < b$.

4 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

- 128** ([Tuy23], VD25, p. 35). Cho $A = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy} \right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$. (a) Tìm ĐKXD. (b) Rút gọn A . (c) Tính giá trị của A với $|2x - 1| = 1$, $|y + 1| = \frac{1}{2}$.
- 129** ([Tuy23], 166., p. 36). Cho 3 phân thức $A = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$, $B = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$, $C = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5}$. Tìm các giá trị của x, y để: (a) Giá trị mỗi phân thức này được xác định. (b) Giá trị mỗi phân thức này bằng 0.

130 ([Tuy23], 167., pp. 36–37). (a) Tìm GTLN của phân thức $A = \frac{5}{x^2 - 6x + 10}$. (b) Tìm GTNN của phân thức $B = \frac{-8}{x^2 - 2x + 5}$. (c) Mở rộng.

131 ([Tuy23], 168., p. 37). Cho biểu thức $A = \frac{1}{x+y+z} \cdot \frac{1}{xy+yz+zx} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$. Chứng minh $A > 0$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

132 ([Tuy23], 169., p. 37). Cho biểu thức $A = \frac{x + \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{x}}$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}, x + y \leq 50$ để $A = 8$.

133 ([Tuy23], 170., p. 37). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, $\frac{x-y-z}{x} = \frac{y-z-x}{y} = \frac{z-x-y}{z}$. Tính $A = \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{z}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right)$.

134 ([Tuy23], 171., p. 37). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \neq -1$. Chứng minh giá trị của biểu thức $A = \frac{xy+2x+1}{xy+x+y+1} + \frac{yz+2y+1}{yz+y+z+1} + \frac{zx+2z+1}{zx+z+x+1}$ không phụ thuộc vào, i.e., độc lập với 3 biến x, y, z .

135 ([Tuy23], 172., p. 37). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x+y+z \neq 0$ thỏa $x = by + cz, y = cz + ax, z = ax + by$. Chứng minh đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$.

136 ([Tuy23], 173., p. 37). Cho $\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = a \in \mathbb{R}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$ theo a .

5 Algebraic Fraction & Fraction – Phân Thức & Phân Số

137 ([Bin23], VD37, p. 28). Chứng minh phân số viết được dưới dạng hiệu của 2 phân số có tử bằng 1: (a) $\frac{n-1}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (b) $\frac{2n}{n^4 + n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

138 ([Bin23], VD38, p. 28). Chứng minh $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

139 ([Bin23], VD39, p. 28). Chứng minh $A = \prod_{i=2}^9 \frac{i^3+1}{i^3-1} = \frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \dots \frac{9^3+1}{9^3-1} < \frac{3}{2}$.

140 ([Bin23], VD40, p. 29). Chứng minh $A = \sum_{i=0}^n \frac{2i+1}{(2i+1)^4+4} = \frac{1}{1^4+4} + \frac{3}{3^4+4} + \dots + \frac{2n+1}{(2n+1)^4+4} < \frac{1}{4}$.

141 ([Bin23], VD41, p. 29). Chứng minh $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$.

142 ([Bin23], VD42, p. 30). Chứng minh $A = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

143 ([Bin23], 165., p. 30). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \prod_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. (b) $B = \prod_{i=0}^n \frac{(2i+1)^2}{(2i+2)^2-1} = \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \dots \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2-1}$.

144 ([Bin23], 166., p. 30). Cho $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \dots \frac{200}{199}$. Chứng minh $14 < A < 20$.

145 ([Bin23], 167., p. 30). Chứng minh $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$.

146 ([Bin23], 168., p. 30). Rút gọn biểu thức: (a) $A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$. (b) $\sum_{i=0}^n \frac{1}{(3i+2)(3i+5)} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$. (c) $\sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$.

147 ([Bin23], 169., p. 30). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2}$. (b) $\sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$.

- 148 ([Bin23], 170., p. 30). Chứng minh $A = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$.
- 149 ([Bin23], 171., p. 31). Chứng minh $A = \sum_{i=3}^n \frac{1}{i^3} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- 150 ([Bin23], 172., p. 31). Chứng minh $A = \prod_{i=1}^n 1 + \frac{1}{i(i+2)} = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdots \frac{1}{n(n+2)} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 151 ([Bin23], 173., p. 31). Chứng minh $A = \prod_{i=1}^n 1 - \frac{2}{i(i+1)} = \left(1 - \frac{2}{6}\right) \left(1 - \frac{2}{12}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- 152 ([Bin23], 174., p. 31). (a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{3^2-1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2-1}{9^2-1} \cdot \frac{11^2-1}{13^2-1} \cdots \frac{43^2-1}{45^2-1}$. (b) Chứng minh $B = \prod_{i=2}^n \frac{i^3-1}{i^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}$. (c) Chứng minh $C = \prod_{i=2}^{20} \frac{2^i+1}{2^i} = \frac{2^2+1}{2^2} \cdot \frac{2^3+1}{2^3} \cdots \frac{2^{20}+1}{2^{20}} < 2$.
- 153 ([Bin23], 175., p. 31). Rút gọn biểu thức $A = \frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4) \cdots (21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4) \cdots (23^4+4)}$.
- 154 ([Bin23], 176., p. 31). Chứng minh: (a) $A = \sum_{i=1}^n \frac{i}{4i^4+1} = \frac{1}{4 \cdot 1^4+1} + \frac{2}{4 \cdot 2^4+1} + \cdots + \frac{n}{4n^4+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (b) $B = \sum_{i=1}^{50} \frac{i}{1+i^2+i^4} = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \cdots + \frac{50}{1+50^2+50^4} < \frac{1}{2}$.
- 155 ([Bin23], 177., p. 31). Chứng minh: (a) $A = \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{i!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} < 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (b) $B = \sum_{i=1}^n \frac{i^2+i-1}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \cdots + \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 156 ([Bin23], 178., p. 31). Chứng minh $A = \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{100}{2^{100}} < 2$.
- 157 ([Bin23], 179., p. 31). Chứng minh $A = \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.
- 158 ([Bin23], 180., p. 31). Chứng minh $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 159 ([Bin23], 181., p. 31). Chứng minh $\frac{3}{5} < \sum_{i=2004}^{4006} \frac{1}{i} = \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \cdots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$.
- 160 ([Bin23], 182., p. 32). (a) Chứng minh $\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (b) Chứng minh $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$, luôn tìm được $n \in \mathbb{N}^*$ để $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > a$.
- 161 ([Bin23], 183., p. 32). Rút gọn biểu thức $\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \cdots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 162 ([Bin23], 184., p. 32). Rút gọn biểu thức $\frac{\frac{1}{1(2n-1)} + \frac{1}{3(2n-3)} + \frac{1}{5(2n-5)} + \cdots + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \frac{1}{(2n-1) \cdot 1}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}$.
- 163 ([Bin23], 185., p. 32). Tìm $a, b \in \mathbb{N}$ để: (a) $a - b = \frac{a}{b}$. (b) $a - b = \frac{a}{2b}$.
- 164 ([Bin23], 186., p. 32). Cho $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$. Tìm $c \in \mathbb{N}^*, b \neq c$ sao cho $\frac{a^3+b^3}{a^3+c^3} = \frac{a+b}{a+c}$.
- 165 ([Bin23], 187., p. 32). Cho dãy số a_1, a_2, a_3, \dots sao cho $a_{n+1} = \frac{a_n-1}{a_n+1}$. (a) Chứng minh $a_1 = a_5$. (b) Xác định 5 số đầu của dãy biết $a_{101} = 3$.
- 166 ([Bin23], 188., p. 32). Tìm phân số $\frac{m}{n} \neq 0$ & $k \in \mathbb{N}$ biết $\frac{m}{n} = \frac{m+k}{nk}$.
- 167 ([Bin23], 189., p. 32). Cho $a, b \in \mathbb{N}, a < b$. Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn a nhưng nhỏ hơn b .
- 168 ([Bin23], 190., p. 32). Chứng minh tổng không là số nguyên: (a) $A = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (b) $B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

6 Polynomial Factorization – Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

Phân tích đa thức thành nhân tử:

169 ([Bin23], VD43, p. 33). $3x^2 - 8x + 4$.

170 ([Bin23], VD44, p. 33). $4x^2 - 4x - 3$.

171 ([Bin23], VD45, p. 34). $x^3 - x^2 - 4$.

172 ([Bin23], VD46, p. 35). $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$.

173 ([Bin23], VD47, p. 36). $4x^4 + 81$.

174 ([Bin23], VD48, p. 36). $64x^4 + y^4$.

175 ([Bin23], VD49, p. 36). $x^5 + x - 1$.

176 ([Bin23], VD50, p. 36). $x^7 + x + 1$.

177 ([Bin23], VD51, p. 36). $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$.

178 ([Bin23], VD52, p. 36). $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

179 ([Bin23], VD53, p. 37). $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$.

180 ([Bin23], VD54, p. 37). $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$.

181 ([Bin23], 191., p. 38). (a) $6x^2 - 11x + 3$. (b) $2x^2 + 3x - 27$. (c) $2x^2 - 5xy - 3y^2$.

182 ([Bin23], 192., p. 38). (a) $x^3 + 2x - 3$. (b) $x^3 - 7x + 6$. (c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$. (d) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$. (e) $x^3 - x^2 - x - 2$. (f) $x^3 + x^2 - x + 2$. (g) $x^3 - 6x^2 - x + 30$.

183 ([Bin23], 193., p. 38). $x^3 - 7x - 6$.

184 ([Bin23], 194., p. 38). (a) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$. (b) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$. (c) $(x^2 - 3)^2 + 16$. (d) $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$.

185 ([Bin23], 195., p. 38). (a) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$. (b) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$. (c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$. (d) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$.

186 ([Bin23], 196., p. 38). (a) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) + a^4$. (b) $(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (xy + yz + zx)^2$. (c) $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (x+y+z)^4$.

187 ([Bin23], 197., p. 38). $(a+b+c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$ bằng cách đổi biến: đặt $a+b=m, a-n=n$.

188 ([Bin23], 198., p. 38). (a) $4x^4 - 32x^2 + 1$. (b) $x^6 + 27$. (c) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$. (d) $(2x^2 - 4)^2 + 9$.

189 ([Bin23], 199., p. 38). (a) $4x^4 + 1$. (b) $4x^4 + y^4$. (c) $x^4 + 324$.

190 ([Bin23], 200., p. 38). (a) $x^5 + x^4 + 1$. (b) $x^5 + x + 1$. (c) $x^8 + x^7 + 1$. (d) $x^5 - x^4 - 1$. (e) $x^7 + x^5 + 1$. (f) $x^8 + x^4 + 1$.

191 ([Bin23], 201., p. 38). (a) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$. (b) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

192 ([Bin23], 202., p. 38). Dùng phương pháp hệ số bất định: (a) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$. (b) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$. (c) $x^4 - 8x + 63$. (d) $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$.

193 ([Bin23], 203., p. 38). (a) $x^8 + 14x^4 + 1$. (b) $x^8 + 98x^4 + 1$.

194 ([Bin23], 204., p. 38). Dùng phương pháp xét giá trị riêng: $A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

195 ([Bin23], 205., p. 39). Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là 1 số chính phương.

196 ([Bin23], 206., p. 39). Chứng minh $A = (n+1)^4 + n^4 + 1$ chia hết cho 1 số chính phương khác 1 $\forall n \in \mathbb{N}$.

197 ([Bin23], 207., p. 39). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho khi phân tích đa thức $(x+a)(x-4) - 7$ thành nhân tử, được $(x+b)(x+c)$.

198 ([Bin23], 208., p. 39). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sao cho khi phân tích đa thức $x^3 + ax^2 + bx + c$ thành nhân tử, được $(x+a)(x+b)(x+c)$.

199 ([Bin23], 209., p. 39). $n \in \mathbb{N}$ có thể nhận bao nhiêu giá trị, biết khi phân tích đa thức $x^2 + x - n$ thành nhân tử, được $(x-a)(x+b)$ với $a, b \in \mathbb{N}$ & $1 < n < 100$?

200 ([Bin23], 210., p. 39). Cho $A = a^2 + b^2 + c^2$, trong đó a, b là 2 số tự nhiên liên tiếp, $c = ab$. Chứng minh \sqrt{A} là 1 số tự nhiên lẻ.

7 Tính Chia Hết Đối Với Số Nguyên

8 Miscellaneous

201 ([Tuy23], VD26, p. 38). Cho $A = \left(\frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Với $x > 0$ thì A không nhận các giá trị nào? (c) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

202 ([Tuy23], 174., p. 38). Cho biểu thức $A = \frac{|x+1|+2x}{3x^2-2x-1}$. (a) Rút gọn A rồi tính giá trị của A với $x = -2, x = \frac{3}{4}$.

203 ([Tuy23], 175., p. 38). Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ để $\frac{x^2+x+4}{(x+2)^3} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{(x+2)^2}$.

204 ([Tuy22], 186., p. 51). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x \neq y$. Tính: (a) $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|z|}{z} + \frac{|xyz|}{xyz}$. (b) $B = \frac{xy}{|xy|} + \frac{x-y}{|x-y|} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right)$.

205 ([Tuy23], 176., p. 39). Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ thỏa $x+y+z=xyz, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$. Tính $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.

206 ([Tuy23], 177., p. 39). Cho $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0$ với $x \neq y, y \neq z, z \neq x$. Tính $A = \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2}$.

207 ([Tuy23], 178., p. 39). Cho biểu thức $A = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$. Chứng minh: (a) Nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh 1 tam giác thì $A > 1$. (b) Nếu $A = 1$ thì 2 trong 3 phân thức đã cho của biểu thức A bằng 1 & phân thức còn lại bằng -1 .

208 ([Tuy23], 179., p. 39). Cho biểu thức $A = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left(\frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A = 0, A = 1$. (c) Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $A < 0, A > 0$.

209 ([Tuy23], 180., p. 39). Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$. (a) Rút gọn A . (b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$.

Tài liệu

- [Bìn+21] Vũ Hữu Bình, Trần Hữu Nam, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2021, p. 264.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 8 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 212.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 326.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.