



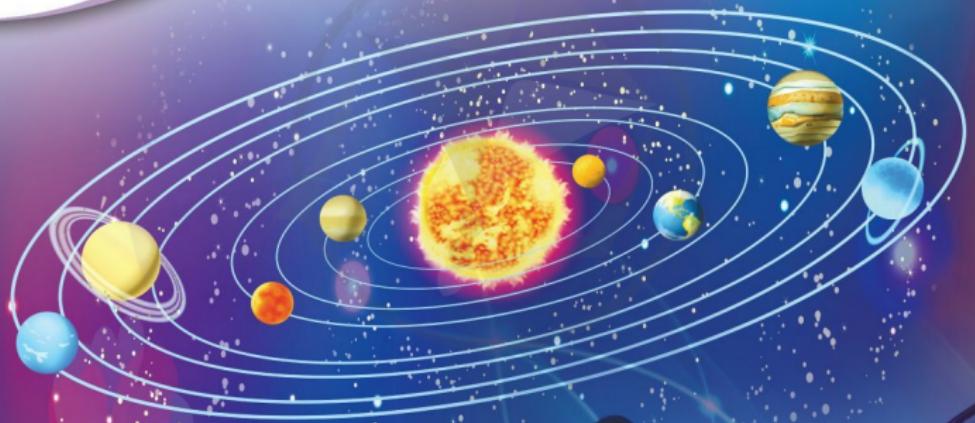
ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)

PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN

PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

# Toán 10



NHÀ XUẤT BẢN  
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)

PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN

PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG – PHẠM HOÀNG QUÂN

**CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP**

# Toán 10

(Sách đã được Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo  
phê duyệt sử dụng trong cơ sở giáo dục phổ thông  
tại Quyết định số 442/QĐ-BGDĐT ngày 28/01/2022)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



## BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH



### CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG

Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học



### HOẠT ĐỘNG

Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên



### KHÁM PHÁ KIẾN THỨC

Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động



### KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Nội dung kiến thức trọng tâm



### LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG

- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn



### CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

Tìm hiểu thêm kiến thức toán học, lịch sử toán học và ứng dụng của toán học vào thực tiễn

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

# Các em học sinh lớp 10 thân mến!



Trong quá trình tìm hiểu môn Toán lớp 10, bên cạnh các nội dung cốt lõi mà các em được học, sách Chuyên đề học tập Toán 10 sẽ cung cấp thêm cho các em những hiểu biết toán học sâu sắc hơn, mở rộng hơn với nhiều ứng dụng của toán học trong thực tiễn. Chuyên đề học tập bao gồm các chuyên đề: hệ phương trình bậc nhất ba ẩn; phương pháp quy nạp toán học, nhị thức Newton; ba đường conic và Ứng dụng.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những tri thức gần gũi, lí thú về khoa học tự nhiên và tích hợp với những môn học khác. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được “làm giàu” về vốn văn hoá chung và có cơ hội “Mang cuộc sống vào bài học - Đưa bài học vào cuộc sống”.

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

## Các tác giả

## MỤC LỤC

### CHUYÊN ĐỀ I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

§1. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn	5
§2. Ứng dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn	13

### CHUYÊN ĐỀ II. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON

§1. Phương pháp quy nạp toán học	23
§2. Nhị thức Newton	31

### CHUYÊN ĐỀ III. BA ĐƯỜNG CONIC VÀ ỨNG DỤNG

§1. Elip	39
§2. Hypebol	49
§3. Parabol	57
§4. Ba đường conic	60
<b>BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ</b>	70
<b>BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ</b>	71

## CHUYÊN ĐỀ I

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

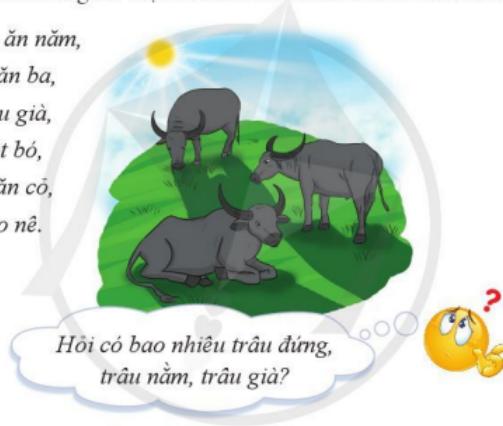
Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hệ phương trình bậc nhất ba ẩn và ứng dụng của nó vào giải các bài toán ở Vật lí, Hóa học, Sinh học, Kinh tế, ...

S1

## HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Trong kho tàng văn hoá dân gian Việt Nam có bài toán về Trâu ăn cỏ như sau:

Trâu đứng ăn năm,  
Trâu nằm ăn ba,  
Lụ khụ trâu già,  
Ba con một bó,  
Trăm con ăn cỏ,  
Trăm bó no nê.



### I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

#### 1. Phương trình bậc nhất ba ẩn

1 Cho phương trình:  $2x + y - 3z = 1$  (1).

- Nêu các ẩn của phương trình (1).
- Với mỗi ẩn của phương trình (1), xác định bậc của ẩn đó.

Phương trình (1) gọi là **phương trình bậc nhất ba ẩn**.



## Nhận xét

- Phương trình bậc nhất ba ẩn là phương trình có dạng:  $ax + by + cz = d$ , trong đó  $x, y, z$  là ba ẩn; các hệ số  $a, b, c$  không đồng thời bằng 0.
- Nếu phương trình bậc nhất ba ẩn  $ax + by + cz = d$  trở thành mệnh đề đúng khi  $x = x_0$ ;  $y = y_0$ ;  $z = z_0$  thì bộ số  $(x_0; y_0; z_0)$  gọi là một *nghiệm* của phương trình đó.

## 2. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

 2 Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -4 \\ -x + 3y + 5z = 5 \quad (*) \\ 2x + 7y - 3z = 3. \end{cases}$$

- a) Mỗi phương trình của hệ (\*) là phương trình có dạng như thế nào?  
b) Bộ số  $(x; y; z) = (-2; 1; 0)$  có là nghiệm của từng phương trình trong hệ (\*) hay không? Vì sao?



• Hệ (\*) là hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

• Bộ số  $(-2; 1; 0)$  nghiệm đúng mỗi phương trình của hệ (\*) và được gọi là một nghiệm của hệ phương trình đó.

- 
- Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ phương trình mà mỗi phương trình trong hệ là một phương trình bậc nhất đối với ba ẩn đó.
  - Bộ số  $(x_0; y_0; z_0)$  nghiệm đúng mỗi phương trình của một hệ phương trình bậc nhất ba ẩn được gọi là nghiệm của hệ phương trình đó.

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Trong đó  $x, y, z$  là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số; các hệ số của ba ẩn  $x, y, z$  trong mỗi phương trình không đồng thời bằng 0.



**3** Nếu định nghĩa hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn tương đương.

Cho hai hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \text{ (I) và } \begin{cases} m_1x + n_1y + p_1z = q_1 \\ m_2x + n_2y + p_2z = q_2 \\ m_3x + n_3y + p_3z = q_3 \end{cases} \text{ (II)}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

*Nhận xét:*

- Nếu tập nghiệm của hệ phương trình (I) bằng tập nghiệm của hệ phương trình (II) thì hệ phương trình (I) được gọi là tương đương với hệ phương trình (II).
- Phép biến đổi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn về hệ phương trình tương đương với nó được gọi là phép biến đổi tương đương hệ phương trình bậc nhất ba ẩn.

*Chú ý:* Để giải hệ phương trình (I), ta thường thực hiện một số phép biến đổi tương đương nhằm dẫn đến một hệ phương trình có thể tìm được nghiệm một cách dễ dàng.

## II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS



**4** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 & (1) \\ 4y - 3z = -13 & (2) \\ -5z = -15 & (3) \end{cases}$$

Để giải hệ phương trình (III), ta làm như sau:

- Từ phương trình (3), ta có:  $z = (-15) : (-5) = 3$ .
- Thay  $z = 3$  vào phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned} 4y - 3 \cdot 3 = -13 &\Leftrightarrow 4y - 9 = -13 \Leftrightarrow 4y = (-13) + 9 \Leftrightarrow 4y = -4 \\ &\Leftrightarrow y = (-4) : 4 \Leftrightarrow y = -1. \end{aligned}$$

- Thay  $y = -1$ ,  $z = 3$  vào phương trình (1), ta được:

$$x + 2 \cdot (-1) - 3 = -4 \Leftrightarrow x - 5 = -4 \Leftrightarrow x = (-4) + 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy hệ phương trình (III) có nghiệm  $(x ; y ; z) = (1 ; -1 ; 3)$ .

*Chú ý:* Hệ phương trình (III) là một hệ phương trình có *dạng tam giác*. Để giải hệ phương trình có dạng tam giác như vậy, ta bắt đầu giải từ phương trình cuối và ngược dần lên.

**Ví dụ 1** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12 \end{cases}$$

*Giải.* Ta có:

$$\begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ 3z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + z = 6 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - 2z = 3 \\ 2y + (-4) = 6 \\ z = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5 - 2(-4) = 3 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 3 - 13 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \\ z = -4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  $(x; y; z) = (-2; 5; -4)$ .

 **5** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -4 & (1) \\ x - 2y + 2z = 9 & (2) \quad (\text{IV}) \\ 2x + y - z = -2 & (3) \end{cases}$$

Có nhiều phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn. Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu phương pháp Gauss thông qua việc giải hệ phương trình (IV).

*Bước 1.* Khử số hạng chứa  $x$

Trừ theo từng vế của phương trình (1) cho phương trình (2), rồi thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ hai.

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 rồi trừ theo từng vế cho phương trình (3), sau đó thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ ba.

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 \quad (4) \\ 3y - z = -6 \quad (5) \end{cases}$$

*Bước 2.* Khử số hạng chứa  $y$

Nhân hai vế của phương trình (4) với 3, nhân hai vế của phương trình (5) với 4, rồi trừ theo từng vế hai phương trình vừa tìm được và thay phương trình mới vào vị trí phương trình thứ ba.

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 4y - 3z = -13 \quad (V) \\ -5z = -15 \end{cases}$$

*Bước 3.* Giải hệ phương trình (V) có dạng tam giác, ta được nghiệm  $(x; y; z) = (1; -1; 3)$ .

**Nhận xét:** Phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách biến đổi hệ đó về hệ có dạng tam giác (như cách làm trên) gọi là phương pháp khử dần hệ số hay *phương pháp Gauss*.

**Ví dụ 2** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 10 \\ -3x + 7y - 4z = 7. \end{cases}$$

**Giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 10 \\ -3x + 7y - 4z = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ -3x + 7y - 4z = 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ 16y + 2z = 10 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7z = -5 \\ 5z = -15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ 16y + 7(-3) = -5 \\ z = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 1 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -3. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm  
( $x ; y ; z$ ) = (4 ; 1 ; -3).

**Ví dụ 3** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

**Giải.** Ta có:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 2z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ -5y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -5y + 4z = 0 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Phương trình thứ ba của hệ vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.



**1** Giải hệ phương trình:  

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 11 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + y + z = -3. \end{cases}$$



**2** Giải hệ phương trình:  

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 4y - 2z = 13. \end{cases}$$

**Ví dụ 4**] Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases}$$

*Giải*

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ x + y - 5z = 1 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ -4y + 12z = 0 \\ -3x + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - 3z = 3 & (1) \\ -4y + 12z = 0 & (2) \\ y - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

Hai phương trình (2) và (3) tương đương. Khi đó, hệ phương trình đưa về:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 3 \\ y - 3z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6z = 3 \\ y - 3z = 0 \\ x = 2z + 1 \end{cases}$$

Đặt  $z = t$  với  $t$  là số thực bất kì, ta có:  $x = 2t + 1$ ,  $y = 3t$ .

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$(x ; y ; z) = (2t + 1 ; 3t ; t)$  với  $t$  là số thực bất kì.



**3** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ y - z = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

### III. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÌM NGHIỆM CỦA HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Ta có thể tìm nghiệm của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn bằng cách sử dụng máy tính cầm tay. Mỗi máy tính khác nhau có thể có các phím khác nhau. Tuy nhiên, đều có quy tắc chung là phải mở chương trình giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn rồi mới nhập dữ liệu.

**Ví dụ 5**] Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 5z = 6 \\ x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

*Giải.* Sử dụng loại máy tính phù hợp, ấn liên tiếp các phím:

MODE  $\boxed{5}$   $\boxed{2}$   $\boxed{3}$   $\boxed{-}$   $\boxed{1}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   $\boxed{=}$   $\boxed{2}$   $\boxed{-}$   $\boxed{1}$   $\boxed{=}$   $\boxed{2}$   $\boxed{=}$   $\boxed{5}$   $\boxed{=}$   $\boxed{6}$   $\boxed{=}$   
 $\boxed{1}$   $\boxed{=}$   $\boxed{3}$   $\boxed{-}$   $\boxed{1}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   $\boxed{=}$

Ta thấy trên màn hình hiện ra  $x = \frac{29}{60}$ .

Ấn tiếp phím  $\boxed{=}$  ta thấy trên màn hình hiện ra  $y = \frac{8}{15}$ .

Ấn tiếp phím  $\boxed{=}$  ta thấy trên màn hình hiện ra  $z = \frac{13}{12}$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y; z) = \left( \frac{29}{60}; \frac{8}{15}; \frac{13}{12} \right)$ .



4 Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -5 \\ -4x + 5y - z = 6 \\ 3x + 4y - 3z = 7. \end{cases}$$

## BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem mỗi bộ số  $(x; y; z)$  đã cho có là nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không.

a) 
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - y + 3z = 16 \\ -3x + 7y + z = -14 \end{cases}$$
  $(0; 3; -2), (12; 5; -13), (1; -2; 3);$

b) 
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = -10 \\ -x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = -8 \end{cases}$$
  $(-2; 4; 0), (0; -3; 10), (1; -1; 5);$

c) 
$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$$
  $(4; 18; 78), (8; 11; 81), (12; 4; 84).$

2. Giải hệ phương trình:

a) 
$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ 3y - z = 2 \\ 2z = -10; \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 4x + 3y - 5z = -7 \\ 2y = 4 \\ y + z = 3; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 2 \\ x = 10. \end{cases}$$

3. Giải hệ phương trình:

a) 
$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 6 \\ 6x - y - 4z = 9; \end{cases}$$

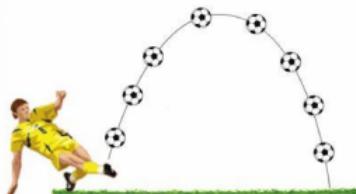
b) 
$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -x + y - 2z = 3 \\ x - 4y - 2z = 1; \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 2 \\ -3x + y + z = -2 \\ 5x + 7y - 5z = 6. \end{cases}$$

4. Tim số đo ba góc của một tam giác, biết tổng số đo của góc thứ nhất và góc thứ hai bằng hai lần số đo của góc thứ ba, số đo của góc thứ nhất lớn hơn số đo của góc thứ ba là  $20^\circ$ .

5. Bác Thanh chia số tiền 1 tỉ đồng của mình cho ba khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 84 triệu đồng. Lãi suất cho ba khoản đầu tư lần lượt là 6%, 8%, 15% và số tiền đầu tư cho khoản thứ nhất bằng tổng số tiền đầu tư cho khoản thứ hai và thứ ba. Tính số tiền bác Thanh đầu tư cho mỗi khoản.

6. Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một parabol và độ cao  $h$  của quả bóng được tính bởi công thức  $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$ , trong đó độ cao  $h$  và độ cao ban đầu  $h_0$  được tính bằng mét,  $t$  là thời gian của chuyển động tính bằng giây,  $a$  là gia tốc của chuyển động tính bằng  $m/s^2$ ,  $v_0$  là vận tốc ban đầu được tính bằng  $m/s$ . Tim  $a$ ,  $v_0$ ,  $h_0$  biết sau 0,5 giây quả bóng đạt được độ cao 6,075 m; sau 1 giây quả bóng đạt độ cao 8,5 m; sau 2 giây quả bóng đạt độ cao 6 m.



7. Một cửa hàng bán đồ nam gồm áo sơ mi, quần âu và áo phông. Ngày thứ nhất bán được 22 áo sơ mi, 12 quần âu và 18 áo phông, doanh thu là 12 580 000 đồng. Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi, 10 quần âu và 20 áo phông, doanh thu là 10 800 000 đồng. Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi, 15 quần âu và 12 áo phông, doanh thu là 12 960 000 đồng. Hỏi giá bán mỗi áo sơ mi, mỗi quần âu và mỗi áo phông là bao nhiêu? Biết giá từng loại trong ba ngày không thay đổi.

8. Ba nhãn hiệu bánh quy là A, B, C được cung cấp bởi một nhà phân phối. Với tỉ lệ thành phần dinh dưỡng theo khối lượng, bánh quy nhãn hiệu A chứa 20% protein, bánh quy nhãn hiệu B chứa 28% protein và bánh quy nhãn hiệu C chứa 30% protein. Một khách hàng muốn mua một đơn hàng như sau:

- Mua tổng cộng 224 cái bánh quy bao gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C.
- Lượng protein trung bình của đơn hàng này (gồm cả ba nhãn hiệu A, B, C) là 25%.
- Lượng bánh nhãn hiệu A gấp đôi lượng bánh nhãn hiệu C.

Tính lượng bánh quy mỗi loại mà khách hàng đó đặt mua.

9. Sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} -x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = -3 \\ -2x - 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 5y - 4z = 0 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 3x - 5y - z = -3 \\ -x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

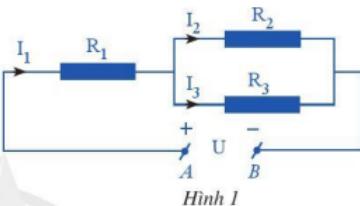
# ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn là một công cụ để giải quyết nhiều vấn đề trong thực tiễn cũng như trong các môn học khác như: Vật lí, Hoá học, Sinh học, Kinh tế, ...

## I. ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÍ

### 1. Ứng dụng trong bài toán về mạch điện

**Bài toán 1.** Cho một đoạn mạch điện như *Hình 1*. Biết  $R_1 = 36 \Omega$ ,  $R_2 = 90 \Omega$ ,  $R_3 = 60 \Omega$  và  $U = 60$  V. Gọi  $I_1$  là cường độ dòng điện của mạch chính,  $I_2$  và  $I_3$  là cường độ dòng điện của hai nhánh. Tính  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .



Hình 1

*Giải*

Cường độ dòng điện của đoạn mạch mắc song song là:  $I_2 + I_3$ .

Ta có:  $I_1 = I_2 + I_3$  hay  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ .

Hiệu điện thế ở đoạn mạch mắc song song là:  $U_2 = R_2 \cdot I_2 = R_3 \cdot I_3$  nên  $90I_2 = 60I_3$  hay  $3I_2 - 2I_3 = 0$ .

Hiệu điện thế của đoạn mạch là:  $U = U_1 + U_2$  nên  $60 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2$  hay  $36I_1 + 90I_2 = 60$   
 $\Rightarrow 6I_1 + 15I_2 = 10$ .

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 3I_2 - 2I_3 = 0 \\ 6I_1 + 15I_2 = 10. \end{cases}$$

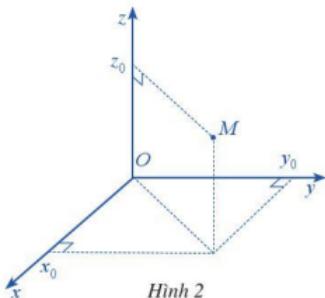
Giải hệ phương trình, ta được  $I_1 = \frac{5}{6}$  (A),  $I_2 = \frac{1}{3}$  (A),  $I_3 = \frac{1}{2}$  (A).

### 2. Ứng dụng trong viễn thông

**Bài toán 2.** Cũng như trong mặt phẳng toạ độ, trong không gian ta có thể đưa vào hệ trục toạ độ  $Oxyz$ . Khi đó, mỗi điểm  $M$  trong không gian có toạ độ là bộ ba số  $(x_0; y_0; z_0)$  và được kí hiệu là  $M(x_0; y_0; z_0)$  (*Hình 2*).

Khoảng cách giữa hai điểm  $P(x_1; y_1; z_1)$ ,  $Q(x_2; y_2; z_2)$  trong không gian được tính như sau:

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



13

Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống GPS (Global Positioning System – Hệ thống định vị toàn cầu) trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm trong không gian đó sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước.

Chẳng hạn, ta xét một ví dụ cụ thể như sau:

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn vệ tinh  $A(0; 4; 5)$ ,  $B(-3; -1; 3)$ ,  $C(-2; 8; 9)$ ,  $D(-7; 2; -3)$  và trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận được tín hiệu phản hồi, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí  $M$  cần tìm tọa độ. Biết các khoảng cách đó là  $MA = 3$ ,  $MB = 5$ ,  $MC = 9$ ,  $MD = 10$ .

a) Chứng minh tọa độ của điểm  $M$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9 & (1) \\ (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25 & (2) \\ (x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z - 9)^2 = 81 & (3) \\ (x + 7)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 100 & (4) \end{cases}$$

b) Viết hệ phương trình có được bằng cách trừ theo từng vé của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1).

c) Tìm tọa độ của điểm  $M$ .

*Giải*

a) Gọi tọa độ điểm  $M(x; y; z)$ . Theo giả thiết,  $MA = 3$ ,  $MB = 5$ ,  $MC = 9$ ,  $MD = 10$  nên ta có:

$$\begin{cases} MA^2 = 3^2 \\ MB^2 = 5^2 \\ MC^2 = 9^2 \\ MD^2 = 10^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 9 & (1) \\ (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25 & (2) \\ (x + 2)^2 + (y - 8)^2 + (z - 9)^2 = 81 & (3) \\ (x + 7)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 100 & (4) \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ phương trình (I).

b) Sau khi trừ theo từng vé của mỗi phương trình (2), (3), (4) cho phương trình (1), ta nhận được hệ phương trình sau:



Ảnh: Vệ tinh GPS đang bay trên quỹ đạo quanh Trái Đất.

(Nguồn: <http://commons.wikimedia.org>)

$$\begin{cases} 6x + 10y + 4z = 38 \\ 4x - 8y - 8z = -36 \Leftrightarrow \\ 14x + 4y + 16z = 70 \end{cases} \begin{cases} 3x + 5y + 2z = 19 \\ 2x - 4y - 4z = -18 \quad (\text{II}) \\ 7x + 2y + 8z = 35 \end{cases}$$

c) Giải hệ phương trình (II), ta được  $x = 1, y = 2, z = 3$ . Vậy  $M(1; 2; 3)$ .

## II. ỨNG DỤNG TRONG HÓA HỌC

### 1. Phương pháp đại số trong cân bằng phản ứng hóa học

Xét phản ứng hóa học có dạng:  $x_1A_1 + x_2A_2 \rightarrow x_3A_3 + x_4A_4$ , trong đó mỗi phân tử  $A_i$  có thể có nhiều hơn một nguyên tố.

Để cân bằng phản ứng trên, ta phải tìm các hệ số  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sao cho các nguyên tố được bảo toàn.

*Bước 1.* Coi  $x_1, x_2, x_3, x_4$  là các ẩn, lập hệ phương trình bậc nhất bốn ẩn dựa theo định luật bảo toàn nguyên tố trong phản ứng hóa học.

*Bước 2.* Chọn ra một trong bốn ẩn  $x_1, x_2, x_3, x_4$  và cho ẩn đó một giá trị cụ thể. Thông thường, ta chọn ra ẩn ứng với phân tử có cấu trúc phức tạp nhất trong bốn phân tử  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Giải hệ phương trình bậc nhất theo ba ẩn còn lại.

*Bài toán 3.* Tìm các hệ số  $x, y, z$  để cân bằng phương trình:  $xFe_3O_4 + yO_2 \xrightarrow{T^{\circ}} zFe_2O_3$ .

*Giải*

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O, ta có:  $3x = 2z$  hay  $3x - 2z = 0$  và  $4x + 2y = 3z$  hay  $4x + 2y - 3z = 0$ .

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Chọn  $x = 4$ . Khi đó, hệ (1) trở thành

$$\begin{cases} x = 4 \\ 2z = 12 \\ 2y - 3z = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ z = 6 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy ta có phương trình sau cân bằng:  $4Fe_3O_4 + O_2 \xrightarrow{T^{\circ}} 6Fe_2O_3$ .

*Bài toán 4.* Hoà tan hoàn toàn 13,4 g hỗn hợp X gồm Mg, Al, Fe vào dung dịch  $H_2SO_4$  đặc nóng dư thu được 12,32 lit khí  $SO_2$  (dktc). Mặt khác, nếu cho 13,4 g hỗn hợp trên tác dụng với dung dịch HCl dư thi thu được 11,2 lit  $H_2$  (dktc). Tính khối lượng Mg, Al, Fe trong hỗn hợp X.

### *Giai*

Gọi số mol của Mg, Al và Fe trong hỗn hợp X lần lượt là  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $a, b, c$  lớn hơn 0).

Ta có các phương trình phản ứng hóa học sau:



Số mol	$a$	$a$	$a$	$a$
--------	-----	-----	-----	-----



Số mol	$b$	$1,5b$	$b$	$1,5b$
--------	-----	--------	-----	--------



Số mol	$c$	$1,5c$	$c$	$c$
--------	-----	--------	-----	-----

Do khối lượng hỗn hợp X bằng 13,4 g; nguyên tử khối (khối lượng mol) của Mg, Al, Fe lần lượt là 24, 27, 56 nên ta có:  $24a + 27b + 56c = 13,4$ .

Số mol  $\text{SO}_2$  là:  $12,32 : 22,4 = 0,55$  (mol).

Từ các phương trình (1), (2), (3), ta có:  $a + 1,5b + 1,5c = 0,55$ .

Số mol  $\text{H}_2$  là:  $11,2 : 22,4 = 0,5$  (mol).

Từ các phương trình (4), (5), (6), ta có:  $a + 1,5b + c = 0,5$ .

Ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 24a + 27b + 56c = 13,4 \\ a + 1,5b + 1,5c = 0,55 \\ a + 1,5b + c = 0,5 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được:  $a = 0,1$ ;  $b = 0,2$ ;  $c = 0,1$ .

Vậy ta có:

Khối lượng Mg trong hỗn hợp X là:  $24 \cdot 0,1 = 2,4$  (g).

Khối lượng Al trong hỗn hợp X là:  $27 \cdot 0,2 = 5,4$  (g).

Khối lượng Fe trong hỗn hợp X là:  $56 \cdot 0,1 = 5,6$  (g).

## **2. Tìm cấu tạo của nguyên tử và xác định công thức phân tử của hợp chất**

Ta đã biết một nguyên tố có ba loại hạt cơ bản là: p (proton), n (nơtron), e (electron).

Ta gọi Z là số lượng hạt p. Khi đó, theo nguyên lý cân bằng điện tích, ta có Z cũng là số lượng hạt e.

Ta gọi N là số lượng hạt n.

Đặt A = Z + N, A được gọi là số khồi.

**Bài toán 5.** Tổng số hạt cơ bản (p, n, e) của một nguyên tử X là 26. Số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 6. Xác định số hạt p, n, e của nguyên tử X.

### Giải

Có hai loại hạt mang điện của X là p và e. Vì thế tổng số hạt mang điện của X là  $2Z$ .

Ta có hệ phương trình sau:  $\begin{cases} 2Z + N = 26 \\ 2Z - N = 6. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được  $Z = 8$ ,  $N = 10$ .

Vậy nguyên tử X có 8 hạt p, 10 hạt n và 8 hạt e.

**Bài toán 6.** Trong phân tử  $M_2X$  có tổng số hạt (p, n, e) là 140 hạt, trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt. Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23. Tổng số hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt. Xác định công thức phân tử của hợp chất  $M_2X$ .

### Giải

Gọi  $Z_M$ ,  $N_M$  lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử M;

$Z_X$ ,  $N_X$  lần lượt là số lượng hạt p, n của nguyên tử X.

- Theo giả thiết, tổng số hạt (p, n, e) trong phân tử  $M_2X$  là 140 hạt nên ta có:

$$2(2Z_M + N_M) + (2Z_X + N_X) = 140 \text{ hay } 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140.$$

- Do trong phân tử  $M_2X$  số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 44 hạt nên ta có:

$$(4Z_M + 2Z_X) - (2N_M + N_X) = 44 \text{ hay } 4Z_M - 2N_M + 2Z_X - N_X = 44.$$

- Số khối của nguyên tử M lớn hơn số khối của nguyên tử X là 23 nên ta có:

$$(Z_M + N_M) - (Z_X + N_X) = 23 \text{ hay } Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23.$$

- Tổng số hạt (p, n, e) trong nguyên tử M nhiều hơn trong nguyên tử X là 34 hạt nên ta có:

$$(2Z_M + N_M) - (2Z_X + N_X) = 34 \text{ hay } 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34.$$

Ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} 4Z_M + 2N_M + 2Z_X + N_X = 140 & (1) \\ 4Z_M - 2N_M + 2Z_X - N_X = 44 & (2) \\ Z_M + N_M - Z_X - N_X = 23 & (3) \\ 2Z_M + N_M - 2Z_X - N_X = 34 & (4) \end{cases}$

Cộng theo từng vế của phương trình (1) với phương trình (2), (3), (4), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 8Z_M + 4Z_X = 184 \\ 5Z_M + 3N_M + Z_X = 163 \\ 6Z_M + 3N_M = 174. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được  $Z_M = 19$ ,  $N_M = 20$ ,  $Z_X = 8$ . Do đó,  $N_X = 8$ .

Vì  $Z_M = 19$  nên M là K (kalium);  $Z_X = 8$  nên X là O (oxygen).

Vậy phân tử đó là  $K_2O$ .

### III. ỨNG DỤNG TRONG SINH HỌC

**Bài toán 7.** Một phân tử DNA có tổng số nucleotit (nu) loại G với một loại nucleotit khác bằng 60% tổng số nucleotit của phân tử DNA. Tổng số liên kết hydro của phân tử DNA là 3 120. Trong mạch 1 có số nu loại A bằng  $\frac{1}{2}$  số nu loại G và bằng  $\frac{1}{4}$  số nu loại T. Xác định số nucleotit mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó.

*Giải*

Kí hiệu: A, G, T, X lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X của phân tử DNA;

N là tổng số nu của phân tử DNA ;

$A_1, G_1, T_1, X_1$  lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 1;

$A_2, G_2, T_2, X_2$  lần lượt là tổng số nu loại A, G, T, X trong mạch 2.

- Ta có:  $G + A = 50\%N$ ;  $A = T$ ;  $G = X$ .

Mà đề bài cho tổng số nu loại G với một loại nu khác là 60% của N nên  $G + X = 60\%N$ .

Suy ra  $G = X = 30\%N$  và  $A + T = 40\%N$ .

Vì  $A = T$  nên từ  $A + T = 40\%N$  ta có:  $A = T = 20\%N$ .

- Ta có số liên kết hydro bằng  $2A + 3G = 3120$  mà  $G = 1,5A$  nên  $A = T = 480$ ;  $G = X = 720$ .

Vậy  $N = 2(A + G) = 2400$ .

Do đó, tổng số nucleotit của phân tử DNA trên mỗi mạch là  $2400 : 2 = 1200$ .

- Ta có:  $A_1 = T_2$ ,  $A_2 = T_1$  nên  $A_1 + T_1 = A_1 + A_2 = 480$ .

Theo giả thiết ở mạch 1 có  $A_1 = \frac{1}{2}G_1 = \frac{1}{4}T_1$  hay  $G_1 = 2A_1$ ,  $T_1 = 4A_1$ .

Ta có hệ phương trình:  $\begin{cases} A_1 + T_1 &= 480 \\ 4A_1 - T_1 &= 0 \\ 2A_1 - G_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 96 \\ T_1 = 384 \\ G_1 = 192. \end{cases}$

Vậy số nucleotit loại X của mạch 1 là:  $X_1 = 1200 - 96 - 384 - 192 = 528$ .

- Ở mạch 2, ta có:

$A_2 = T_1 = 384$ ;  $T_2 = A_1 = 96$ ;  $G_2 = X_1 = 528$ ;  $X_2 = G_1 = 192$ .

## IV. ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

### 1. Mô hình cân bằng thị trường hàng hoá có liên quan

Giả sử trên thị trường có  $n$  loại hàng hoá được mua và bán, đánh số lần lượt là hàng hoá  $1, 2, \dots, n$ . Ta nói  $n$  loại hàng hoá đó *có liên quan* nếu giá của một mặt hàng nào đó thay đổi thì nó không những ảnh hưởng tới lượng cung (kí hiệu là  $Q_{S_i}$ ) và lượng cầu (kí hiệu là  $Q_{D_i}$ ) của bản thân mặt hàng đó, mà nó còn ảnh hưởng tới giá và lượng cung, lượng cầu của các mặt hàng còn lại.

Như vậy, đối với  $n$  loại hàng hoá có liên quan thì lượng cung  $Q_{S_i}$  (hoặc lượng cầu  $Q_{D_i}$ ) của mỗi loại hàng hoá là một đại lượng phụ thuộc vào  $n$  biến  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , trong đó  $P_1, P_2, \dots, P_n$  lần lượt là giá của hàng hoá  $1, 2, \dots, n$ . Người ta thường biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá của các hàng hoá bởi *hàm cung* và *hàm cầu* như sau:

$$Q_{S_i} = S_i(P_1, P_2, \dots, P_n),$$

$$Q_{D_i} = D_i(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (1 \leq i \leq n),$$

trong đó  $P_1, P_2, \dots, P_n$  lần lượt là giá của hàng hoá  $1, 2, \dots, n$ .

Mô hình cân bằng thị trường  $n$  loại hàng hoá có liên quan (cân bằng cung cầu) được xác định bởi hệ phương trình:  $Q_{S_i} = Q_{D_i}, 1 \leq i \leq n$ . Giải hệ phương trình đó chúng ta tìm được bộ giá cân bằng thị trường:  $\bar{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$ . Thay vào  $Q_{S_i}$  (hoặc  $Q_{D_i}$ ) chúng ta thu được bộ lượng cân bằng thị trường:  $\bar{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n)$ .

**Bài toán 8.** Xét thị trường gồm ba loại hàng hoá gồm chè, cà phê, ca cao có hàm cung và hàm cầu tương ứng như sau:

$$Q_{S_1} = -10 + P_1; \quad Q_{D_1} = 20 - P_1 - P_3 \quad (\text{chè})$$

$$Q_{S_2} = 2P_2; \quad Q_{D_2} = 40 - 2P_2 - P_3 \quad (\text{cà phê})$$

$$Q_{S_3} = -5 + 3P_3; \quad Q_{D_3} = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \quad (\text{ca cao})$$

a) Hãy thiết lập mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên.

b) Xác định giá và lượng cung cà phê ở trạng thái cân bằng thị trường.

*Giải*

a) Mô hình cân bằng thị trường của ba loại hàng hoá trên được cho bởi hệ phương trình bậc nhất ba ẩn sau:

$$\begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 + P_1 = 20 - P_1 - P_3 \\ 2P_2 = 40 - 2P_2 - P_3 \\ -5 + 3P_3 = 10 - P_1 + P_2 - P_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ P_1 - P_2 + 4P_3 = 15 \end{cases} \quad (I)$$

b) Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 2P_1 - 2P_2 + 8P_3 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 2P_2 - 7P_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 4P_2 - 14P_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2P_1 + P_3 = 30 \\ 4P_2 + P_3 = 40 \\ 15P_3 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{41}{3} \\ P_2 = \frac{28}{3} \\ P_3 = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy ở trạng thái cân bằng thị trường, giá cà phê là  $\overline{P_2} = \frac{28}{3}$  và lượng cung cà phê là  $\overline{Q_{S_2}} = 2\overline{P_2} = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3}$ .

## 2. Mô hình cân bằng thu nhập quốc dân

Tổng thu nhập quốc dân, kí hiệu là  $Y$ , thường được tính trên hai nguồn chủ yếu: Chi tiêu cố định của chính phủ, kí hiệu là  $G_0$ , và tiền của người dân (bao gồm đầu tư của các hộ gia đình, kí hiệu là  $I_0$ , và tiêu dùng của các hộ gia đình, kí hiệu là  $C$ ). Ta nói thu nhập quốc dân là cân bằng nếu  $Y = C + I_0 + G_0$ .

Xét mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng hệ phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a(Y - T) + b \\ T = \alpha Y. \end{cases}$$

Trong đó:  $T$  là thuế,  $C = a(Y - T) + b$ , các hằng số  $0 < a < 1$ ,  $b > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  được chọn trước (phụ thuộc vào sự lựa chọn mô hình của các nhà hoạch định chính sách).

**Bài toán 9.** Cho mô hình cân bằng thu nhập quốc dân:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 150 + 0,8(Y - T) \\ T = 0,2Y. \end{cases}$$

Trong đó,  $Y$  là tổng thu nhập quốc dân,  $G_0$  là chi tiêu cố định của chính phủ,  $I_0$  là đầu tư của các hộ gia đình,  $C$  là tiêu dùng của các hộ gia đình,  $T$  là thuế và các đại lượng  $Y, G_0, I_0, T, C$  được tính theo cùng đơn vị đo.

a) Tìm trạng thái cân bằng khi  $I_0 = 300$ ,  $G_0 = 900$ .

b) Khi suy thoái kinh tế, ta chọn  $C = 150 + 0,7(Y - T)$ . Giả sử  $I_0 = 300$ . Hỏi  $G_0$  bằng bao nhiêu thì ổn định được tổng thu nhập quốc dân?

*Giải*

a) Khi  $I_0 = 300$ ,  $G_0 = 900$ , mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

$$\begin{cases} Y - C &= 1200 \\ -0,8Y + C + 0,8T = 150 & \\ 0,2Y - T &= 0 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Giải hệ phương trình (I), ta có:

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C &= 1200 \\ 8Y - 10C - 8T = -1500 & \\ 2Y - 10T = 0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C &= 1200 \\ 2C + 8T = 11100 & \\ Y &= 5T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 3750 \\ C = 2550 \\ T = 750. \end{cases}$$

b) Theo giả thiết  $C = 150 + 0,7(Y - T)$  và  $I_0 = 300$  nên mô hình cân bằng thu nhập quốc dân có dạng:

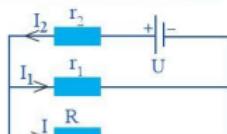
$$\begin{cases} Y - C &= 300 + G_0 \\ -0,7Y + C + 0,7T = 150 & \\ 0,2Y - T &= 0 \end{cases} \quad (\text{II}). \text{ Giải hệ (II), ta có:}$$

$$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ -0,7Y + Y - 300 - G_0 + 0,7 \cdot 0,2Y = 150 \\ T = 0,2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ \frac{11}{25}Y = 450 + G_0 \\ T = 0,2Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = Y - 300 - G_0 \\ Y = \frac{450 + G_0}{0,44} \\ T = 0,2Y. \end{cases}$$

Để ổn định được thu nhập quốc dân thì  $Y = \frac{450 + G_0}{0,44} = 3750 \Leftrightarrow G_0 = 1200$ .

## BÀI TẬP

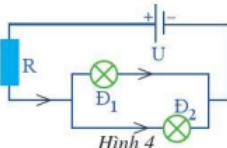
1. Cho mạch điện như *Hình 3*. Biết  $U = 20$  V,  $r_1 = 1\Omega$ ,  $r_2 = 0,5\Omega$ ,  $R = 2\Omega$ . Tìm cường độ dòng điện  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I$  trong mỗi nhánh.



2. Cho mạch điện như *Hình 4*. Biết  $U = 24$  V,  $D_1: 12V - 6W$ ,  $D_2: 12V - 12W$ ,  $R = 3\Omega$ .

a) Tính điện trở của mỗi bóng đèn.

b) Tính cường độ dòng điện qua các bóng đèn và qua điện trở  $R$ .



3. Tìm các hệ số  $x, y, z$  để cân bằng mỗi phương trình sau:
- $x\text{KClO}_3 \xrightarrow{f^\circ} y\text{KCl} + z\text{O}_2;$
  - $x\text{FeCl}_2 + y\text{Cl}_2 \xrightarrow{f^\circ} z\text{FeCl}_3;$
  - $x\text{Fe} + y\text{O}_2 \xrightarrow{f^\circ} z\text{Fe}_2\text{O}_3;$
  - $x\text{Na}_2\text{SO}_3 + 2\text{KMnO}_4 + y\text{NaHSO}_4 \xrightarrow{f^\circ} z\text{Na}_2\text{SO}_4 + 2\text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 3\text{H}_2\text{O}.$
4. Một giáo viên dạy Hoá tạo 1 000 g dung dịch HCl 25% từ ba loại dung dịch HCl có nồng độ lần lượt là 10%, 20% và 30%. Tính khối lượng dung dịch mỗi loại. Biết rằng lượng HCl có trong dung dịch 10% bằng  $\frac{1}{4}$  lượng HCl có trong dung dịch 20%.
5. Tổng số hạt  $p, n, e$  trong hai nguyên tử kim loại A và B là 177. Trong đó số hạt mang điện nhiều hơn số hạt không mang điện là 47. Số hạt mang điện của nguyên tử B nhiều hơn của nguyên tử A là 8. Xác định số hạt proton trong một nguyên tử A.
6. Một phân tử DNA có khối lượng là  $72 \cdot 10^4$  dvC và có 2 826 liên kết hydro. Mạch 2 có số nu loại A bằng 2 lần số nu loại T và bằng 3 lần số nu loại X. Xác định số nucleotit mỗi loại trên từng mạch của phân tử DNA đó. Biết rằng một nu có khối lượng trung bình là 300 dvC.
7. Tìm đa thức bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$  (với  $a \neq 0$ ) biết  $f(-1) = -2, f(1) = 2, f(2) = 7$ .
8. Ba lớp 10A, 10B, 10C trồng được 164 cây bạch đàn và 316 cây thông. Mỗi học sinh lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 2 cây thông; mỗi học sinh lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 3 cây thông; mỗi học sinh lớp 10C trồng được 5 cây thông. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh? Biết số học sinh lớp 10A bằng trung bình cộng số học sinh lớp 10B và 10C.
9. Độ cao  $h$  trong chuyển động của một vật được tính bởi công thức  $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$ , với độ cao  $h$  và độ cao ban đầu  $h_0$  được tính bằng mét,  $t$  là thời gian của chuyển động tính bằng giây,  $a$  là giá tốc của chuyển động tính bằng  $\text{m/s}^2$ ,  $v_0$  là vận tốc ban đầu tính bằng  $\text{m/s}$ . Tìm  $a, v_0, h_0$ . Biết rằng sau 1 s và 3 s vật cùng đạt được độ cao 50,225 m; sau 2 s vật đạt độ cao 55,125 m.
10. Một ngân hàng muốn đầu tư số tiền tin dụng là 100 tỉ đồng thu được vào ba nguồn: mua trái phiếu với mức sinh lời 8%/năm, cho vay thu lãi suất 10%/năm và đầu tư bất động sản với mức sinh lời 12%/năm. Theo điều kiện của quỹ tin dụng đề ra là tổng số tiền đầu tư vào trái phiếu và cho vay phải gấp ba lần số tiền đầu tư vào bất động sản. Nếu ngân hàng muốn thu được mức thu nhập 9,6 tỉ đồng hằng năm thì nên đầu tư như thế nào vào ba nguồn đó?

**CHUYÊN ĐỀ  
II**

# PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC. NHỊ THỨC NEWTON

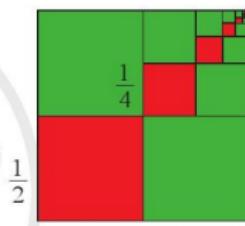
Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau:  
phương pháp quy nạp toán học, nhị thức Newton.

## S1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Chia hình vuông cạnh 1 thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, lấy ra hình vuông nhỏ thứ nhất (ở góc dưới bên trái, màu đỏ), cạnh của hình vuông đó bằng  $\frac{1}{2}$ .

Chia hình vuông nhỏ ở góc trên bên phải thành bốn hình vuông bằng nhau, lấy ra hình vuông nhỏ thứ hai (màu đỏ), cạnh của hình vuông đó bằng  $\frac{1}{4}$ .

Tiếp tục quá trình trên ta được dãy các hình vuông nhỏ (màu đỏ) ở *Hình 1*.



*Hình 1*

Cạnh của hình vuông nhỏ thứ  $n$  (màu đỏ) bằng bao nhiêu? Vì sao?

### I. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Xét mệnh đề chứa biến  $P(n)$ : “ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ” với  $n$  là số nguyên dương.

- Chứng tỏ rằng  $P(1)$  là mệnh đề đúng.
- Với  $k$  là một số nguyên dương tùy ý mà  $P(k)$  là mệnh đề đúng, cho biết  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)$  bằng bao nhiêu.
- Với  $k$  là một số nguyên dương tùy ý mà  $P(k)$  là mệnh đề đúng, chứng tỏ rằng  $P(k + 1)$  cũng là mệnh đề đúng bằng cách chỉ ra  $k^2 + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$ .



Ta đã chứng tỏ được rằng:

- $P(1)$  là mệnh đề đúng,

• Với  $k$  là một số nguyên dương tuỳ ý, nếu  $P(k)$  là mệnh đề đúng thì  $P(k + 1)$  cũng là mệnh đề đúng.

Khi đó  $P(n)$  là mệnh đề đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  theo một nguyên lí mà ta gọi là nguyên lí quy nạp toán học.

Phương pháp chứng minh như trên (để khẳng định tính đúng đắn của một mệnh đề toán học) được gọi là *phương pháp quy nạp toán học*.

**B** Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$  bằng phương pháp quy nạp toán học, ta làm như sau:

*Bước 1.* Chứng tỏ mệnh đề đúng với  $n = 1$ .

*Bước 2.* Với  $k$  là một số nguyên dương tuỳ ý mà  $P(k)$  là mệnh đề đúng (gọi là giả thiết quy nạp), ta phải chứng tỏ  $P(k + 1)$  cũng là mệnh đề đúng.

**Nhận xét:** Để chứng minh mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên  $n$ ,  $n \geq m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ) bằng phương pháp quy nạp toán học, ở *Bước 1* trong cách làm trên, ta phải chứng tỏ mệnh đề đúng với  $n = m$ .

**Ví dụ 1** Chứng minh rằng  $n^3 - n$  chia hết cho 3 với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Giải*

*Bước 1.* Khi  $n = 1$ , ta có:  $1^3 - 1 = 0$  chia hết cho 3.

*Bước 2.* Với  $k$  là một số nguyên dương tuỳ ý mà  $k^3 - k$  chia hết cho 3, ta phải chứng minh  $(k + 1)^3 - (k + 1)$  chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có:  $(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k)$ .

Theo giả thiết quy nạp,  $k^3 - k \vdots 3$ , mà  $3(k^2 + k) \vdots 3$ .

Suy ra  $k^3 - k + 3(k^2 + k) \vdots 3$ , tức là  $(k + 1)^3 - (k + 1) \vdots 3$ .

Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học,  $n^3 - n$  chia hết cho 3 với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Ví dụ 2** Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

*Giải*

*Bước 1.* Khi  $n = 1$ , ta có:  $\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{1+1}$ , vậy đẳng thức đúng với  $n = 1$ .

Bước 2. Với  $k$  là một số nguyên dương tùy ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với  $k+1$ , tức là  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$ .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ .

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với  $k+1$ . Do đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tức là

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .



**1** Chứng minh rằng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n+1} - 1; \\ \text{b)} \quad & \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \frac{4^3 - 1}{4^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}. \end{aligned}$$

## II. ÁP DỤNG

**Ví dụ 3** Một người gửi số tiền  $A$  (đồng) vào ngân hàng với lãi suất  $r\%/\text{năm}$ . Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau  $n$  (năm) là  $T_n = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$  (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

*Giải*

Sau 1 năm, số tiền vốn và lãi thu được là:  $A + A \cdot \frac{r}{100} = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)$  (đồng).

Vậy  $T_1 = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^1$ , tức là đẳng thức đúng với  $n = 1$ .

Với  $k$  là một số nguyên dương tùy ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với  $k+1$ , tức là  $T_{k+1} = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k+1}$ .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:  $T_k = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k$ .

Ta thấy, sau khi hết  $k$  (năm) thì số tiền  $T_k = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k$  trở thành tiền vốn để tính tiền lãi cho năm thứ  $k+1$ . Do đó, số tiền vốn và lãi người đó có được sau  $k+1$  (năm) là:

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k + A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k \cdot \frac{r}{100} = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^k \left(1 + \frac{r}{100}\right) = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k+1},$$

tức là  $T_{k+1} = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{k+1}$  (đồng).

Vậy đẳng thức đúng với  $k+1$ . Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , tức là số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được sau  $n$  (năm) là:

$$T_n = A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

**Ví dụ 4** Cho  $x$  là số thực,  $x > -1$ . Chứng minh với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad (1).$$

*Giải*

*Bước 1.* Khi  $n = 1$ , ta có:  $(1+x)^1 = 1+x = 1+1x$ . Vậy bất đẳng thức (1) đúng với  $n = 1$ .

*Bước 2.* Với  $k$  là một số nguyên dương tuy ý mà bất đẳng thức (1) đúng, ta phải chứng minh bất đẳng thức (1) cũng đúng với  $k+1$ , tức là:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có:

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Vì theo giả thiết ta có:  $1+x > 0$ , nên bất đẳng thức trên vẫn đúng nếu nhân cả hai vế với  $1+x$ . Khi đó ta nhận được:

$$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x)$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2.$$

Do  $kx^2 \geq 0$  nên ta có:  $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$ .

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với  $k+1$ . Do đó, theo nguyên lí quy nạp toán học, bất đẳng thức (1) đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Chú ý:** Bất đẳng thức (1) còn được gọi là bất đẳng thức Bernoulli.



2 Chứng minh với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(1 + \sqrt{2})^n$ ,  $(1 - \sqrt{2})^n$  lần lượt viết được ở dạng  $a_n + b_n\sqrt{2}$ ,  $a_n - b_n\sqrt{2}$ , trong đó  $a_n, b_n$  là các số nguyên dương.



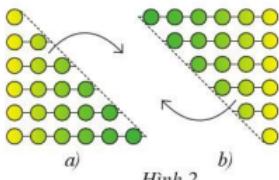
3 Chứng minh  $(16^n - 15n - 1)$  chia hết cho 225 với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Ví dụ 5

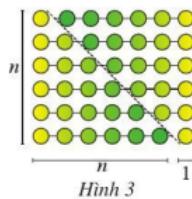
a) Nếu quy luật xếp số chấm lần lượt ở hàng thứ nhất, hàng thứ hai, ... theo thứ tự từ trên xuống dưới trong *Hình 2a*. Tính số chấm ở hàng thứ  $n$ .

b) Nếu quy luật xếp số chấm lần lượt ở hàng thứ nhất, hàng thứ hai, ... theo thứ tự từ dưới lên trên trong *Hình 2b*. Tính số chấm ở hàng thứ  $n$ .

c) Ghép *Hình 2a* và *Hình 2b* ta được *Hình 3*. Giả sử *Hình 2a* và *Hình 2b* có  $n$  hàng. Tính số chấm có trong *Hình 3*. Từ đó, xác định công thức tính tổng:  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Hình 2



Hình 3

### Giải

a) Số chấm ở hàng thứ  $n$  theo thứ tự từ trên xuống dưới trong *Hình 2a* là  $n$ .

b) Số chấm ở hàng thứ  $n$  theo thứ tự từ dưới lên trên trong *Hình 2b* là  $n$ .

c) Do các chấm ở *Hình 3* xếp thành  $n$  hàng và  $n+1$  cột nên số chấm ở *Hình 3* là  $S_n = n(n+1)$ .

Gọi  $T_n$  là số chấm ở *Hình 2a*. Khi đó  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Mặt khác, số chấm ở *Hình 2b* cũng là  $T_n$ . Suy ra  $T_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Vậy  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

Ta chứng minh  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  bằng phương pháp quy nạp toán học như sau:

*Bước 1.* Khi  $n = 1$ , ta có:  $T_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ . Vậy đẳng thức đúng.

*Bước 2.* Với  $k$  là một số nguyên dương tùy ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh

đẳng thức cũng đúng với  $k+1$ , tức là  $T_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:  $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ .

Suy ra  $T_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ .

Vậy đẳng thức đúng với  $k+1$ . Do đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### Ví dụ 6

- a) Diện tích của các hình tô màu trong mỗi hàng ở *Hình 4* được viết ở bên trái mỗi hàng đó. Tiếp tục vẽ theo quy luật đó, hãy tìm diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ  $n$ .
- b) Ghép các hình tô màu trong  $n$  hàng đầu tiên ta được một hình vuông (chẳng hạn, ghép các hình tô màu ở bốn hàng trong *Hình 4* ta được hình vuông ở *Hình 5*). Nếu kích thước của hình vuông ghép được. Từ đó, tính diện tích của hình đó.
- c) Dự đoán công thức tính tổng  $P_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

*Giải*

a) Diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ  $n$  là  $n^3$ .

b) Ghép các hình tô màu trong  $n$  hàng đầu tiên ta được một hình vuông có cạnh bằng  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .  
Vậy diện tích hình vuông ghép được là  $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ .

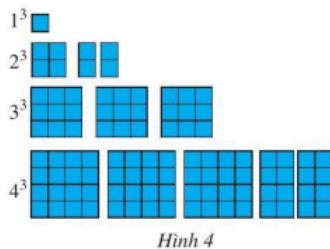
c) Dự đoán  $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , tức là  $P_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ .

Ta chứng minh  $P_n = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$  bằng phương pháp quy nạp toán học như sau:

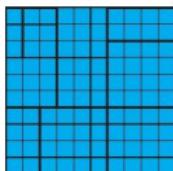
*Bước 1.* Khi  $n = 1$ , ta có:  $P_1 = 1^3 = \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right]^2$ . Vậy đẳng thức đúng khi  $n = 1$ .

*Bước 2.* Với  $k$  là một số nguyên dương tuy ý mà đẳng thức đúng, ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với  $k+1$ , tức là  $P_{k+1} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$ .

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:  $P_k = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ .



*Hình 4*



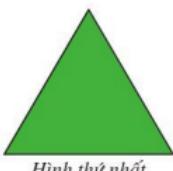
*Hình 5*

$$\text{Suy ra } P_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[ \frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 \\ = \left( \frac{k+1}{2} \right)^2 (k^2 + 4k + 4) = \left[ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

Vậy đẳng thức đúng với  $k+1$ . Do đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, đẳng thức đúng với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , tức là  $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## BÀI TẬP

1. Cho  $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$  và  $T_n = 2^{n+1} - 1$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - So sánh  $S_1$  và  $T_1$ ;  $S_2$  và  $T_2$ ;  $S_3$  và  $T_3$ .
  - Dự đoán công thức tính  $S_n$  và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.
2. Cho  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$  và  $T_n = 2 - \frac{1}{2^n}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - So sánh  $S_1$  và  $T_1$ ;  $S_2$  và  $T_2$ ;  $S_3$  và  $T_3$ .
  - Dự đoán công thức tính  $S_n$  và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.
3. Cho  $S_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Tính  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .
  - Dự đoán công thức tính  $S_n$  và chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.
4. Cho  $q$  là số thực khác 1. Chứng minh:  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Chứng minh với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:
  - $4^n + 15n - 1$  chia hết cho 9;
  - $13^n - 1$  chia hết cho 6.
6. Chứng minh  $n^n > (n+1)^{n-1}$  với  $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ .
7. Chứng minh  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
8. Cho tam giác đều màu xanh (*Hình thứ nhất*).
  - Nêu quy luật chọn tam giác đều màu trắng ở *Hình thứ hai*.
  - Nêu quy luật chọn các tam giác đều màu trắng ở *Hình thứ ba*.



Hình thứ nhất



Hình thứ hai



Hình thứ ba

c) Nếu quy luật tiếp tục chọn các tam giác đều màu trắng từ *Hình thứ tư* và các tam giác đều màu trắng ở những hình sau đó.

d) Tính số tam giác đều màu xanh lát lượt trong các *Hình thứ nhất*, *Hình thứ hai*, *Hình thứ ba*.

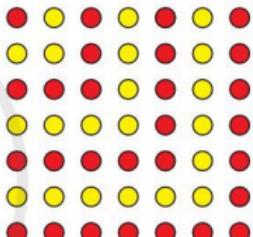
e) Dự đoán số tam giác đều màu xanh trong *Hình thứ n*. Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.

**9. Quan sát Hình 6.**

a) Nếu quy luật sắp xếp các chấm đỏ và vàng xen kẽ nhau khi xếp các chấm đó từ góc trên bên trái xuống góc dưới bên phải (tạo thành hình vuông).

b) Giả sử hình vuông thứ  $n$  có mỗi cạnh chứa  $n$  chấm.

Tính tổng số chấm được xếp trong hình vuông (kể cả trên cạnh). Chứng minh kết quả đó bằng phương pháp quy nạp toán học.



Hình 6

10. Giả sử năm đầu tiên, cô Hạnh gửi vào ngân hàng  $A$  (đồng) với lãi suất  $r\%/\text{năm}$ . Hết năm đầu tiên, cô Hạnh không rút tiền ra và gửi thêm  $A$  (đồng) nữa. Hết năm thứ hai, cô Hạnh cũng không rút tiền ra và lại gửi thêm  $A$  (đồng) nữa. Cứ tiếp tục như vậy cho những năm sau. Chứng minh số tiền cả vốn lẫn lãi mà cô Hạnh có được sau  $n$  (năm) là  $T_n = \frac{A(100+r)}{r} \left[ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right]$  (đồng), nếu trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi.

11. Một người gửi số tiền  $A$  (đồng) vào ngân hàng. Biểu lãi suất của ngân hàng như sau: Chia mỗi năm thành  $m$  kì hạn và lãi suất  $r\%/\text{năm}$ . Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Chứng minh số tiền nhận được (bao gồm cả vốn lẫn lãi) sau  $n$  (năm) gửi là  $S_n = A \left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{m \cdot n}$  (đồng), nếu trong khoảng thời gian này người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi.

Làm thế nào để khai triển biểu thức  $(a + b)^n$  một cách nhanh chóng?



## I. CÔNG THỨC NHI THỨC NEWTON



a) Chọn số thích hợp cho  $\boxed{?}$  trong khai triển biểu thức sau:

$$(a + b)^3 = C_3^{\boxed{?}} a^{3-\boxed{?}} + C_3^{\boxed{?}} a^{3-\boxed{?}} b^1 + C_3^{\boxed{?}} a^{3-\boxed{?}} b^2 + C_3^{\boxed{?}} a^{3-\boxed{?}} b^3.$$

Từ đó nêu dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức  $(a + b)^3$ .

b) Xét biểu thức  $(a + b)^n$ .

Nêu dự đoán về dạng tổng quát của mỗi số hạng trong khai triển biểu thức  $(a + b)^n$ .

•  $(a + b)^3 = C_3^0 a^{3-0} + C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 + C_3^3 b^3.$

Mỗi số hạng trong khai triển biểu thức  $(a + b)^3$   
đều có dạng  $C_3^k a^{3-k} b^k$ .



• Cũng như thế, mỗi số hạng trong khai triển biểu thức  
 $(a + b)^n$  đều có dạng  $C_n^k a^{n-k} b^k$ .

Trong trường hợp tổng quát, với  $n$  là số nguyên dương, ta có công thức nhị thức Newton:



$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Nhận xét:

• Số hạng tổng quát trong khai triển của  $(a + b)^n$  đều có dạng  $C_n^k a^{n-k} b^k$  ( $0 \leq k \leq n$ )

• Từ công thức nhị thức Newton nói trên, ta có khai triển của  $(a - b)^n$  như sau:

$$(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots \text{ (ở đó các dấu } +, -, \text{ xen kẽ nhau.)}$$

Chẳng hạn, ta có:  $(a - b)^3 = C_3^0 a^{3-0} - C_3^1 a^{3-1} b^1 + C_3^2 a^{3-2} b^2 - C_3^3 b^3$

$$= C_3^0 a^3 - C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a b^2 - C_3^3 b^3;$$

$$(a-b)^4 = C_4^0 a^{4-0} - C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 - C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 b^4 \\ = C_4^0 a^4 - C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4.$$

**Ví dụ 1** Khai triển các biểu thức sau:

a)  $(x+y)^6$ ;      b)  $(x-y)^6$ .

*Giải.* Ta có:

$$\begin{aligned} \text{a)} (x+y)^6 &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 y + C_6^2 x^4 y^2 + C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 + C_6^5 x y^5 + C_6^6 y^6 \\ &= x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6x y^5 + y^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} (x-y)^6 &= C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 y + C_6^2 x^4 y^2 - C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 - C_6^5 x y^5 + C_6^6 y^6 \\ &= x^6 - 6x^5 y + 15x^4 y^2 - 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 - 6x y^5 + y^6. \end{aligned}$$

**Ví dụ 2** Khai triển biểu thức  $(x+1)^n$ .

*Giải*

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} \cdot 1 + \dots + C_n^k x^{n-k} \cdot 1^k + \dots + C_n^{n-1} x \cdot 1^{n-1} + C_n^n \cdot 1^n \\ &= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^k x^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n. \end{aligned}$$

**Ví dụ 3** Tính mảng tổng sau:

- a)  $A = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ ;
- b)  $B = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ ;
- c)  $C = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n-2} + C_{2n}^{2n}$ ;
- D)  $= C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-1}$ .



**1** Khai triển biểu thức  $(x+2)^7$ .



**2** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Chứng minh

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

*Giải*

a) Ta có:

$$\begin{aligned} (x+1)^{2n} &= C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} \cdot 1 + C_{2n}^2 x^{2n-2} \cdot 1^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x \cdot 1^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \cdot 1^{2n} \\ &= C_{2n}^0 x^{2n} + C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} + \dots + C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

Cho  $x=1$ , ta có:

$$\begin{aligned} (1+1)^{2n} &= C_{2n}^0 \cdot 1^{2n} + C_{2n}^1 \cdot 1^{2n-1} + C_{2n}^2 \cdot 1^{2n-2} + \dots + C_{2n}^{2n-1} \cdot 1 + C_{2n}^{2n} \\ &= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}. \end{aligned}$$

Vậy  $A = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ .

b) Ta có:

$$\begin{aligned}(x-1)^{2n} &= C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} \cdot 1 + C_{2n}^2 x^{2n-2} \cdot 1^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} x \cdot 1^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \cdot 1^{2n} \\&= C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} + C_{2n}^2 x^{2n-2} - \dots - C_{2n}^{2n-1} x + C_{2n}^{2n}.\end{aligned}$$

Cho  $x = 1$ , ta có:

$$\begin{aligned}(1-1)^{2n} &= C_{2n}^0 \cdot 1^{2n} - C_{2n}^1 \cdot 1^{2n-1} + C_{2n}^2 \cdot 1^{2n-2} - \dots - C_{2n}^{2n-1} \cdot 1 + C_{2n}^{2n} \\&= C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \dots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.\end{aligned}$$

Vậy  $B = (1-1)^{2n} = 0$ .

c) Ta có:  $C + D = A = 2^{2n}$  và  $C - D = B = 0$  nên  $C = D = 2^{2n} : 2 = 2^{2n-1}$ .

**Ví dụ 4** Tính  $T = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} \cdot 3 + \dots + C_n^k 2^{n-k} \cdot 3^k + \dots + C_n^{n-1} 2^1 \cdot 3^{n-1} + C_n^n 3^n$  với  $n \in \mathbb{N}$ .

Giải

$$\begin{aligned}T &= C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} \cdot 3^1 + \dots + C_n^k 2^{n-k} \cdot 3^k + \dots + C_n^{n-1} 2^1 \cdot 3^{n-1} + C_n^n 3^n \\&= (2+3)^n = 5^n.\end{aligned}$$

## II. TAM GIÁC PASCAL



Ta đã biết:  $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$ ;

$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3;$$

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a b^3 + C_4^4 b^4;$$

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5.$$

Ta sắp xếp những hệ số tổ hợp ở trên như sau:

$$\begin{array}{cccccc} & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \end{array}$$

Nếu phép toán để từ hai số hạng của dòng trên suy ra được số hạng tương ứng (thể hiện ở mũi tên ↓) ở dòng dưới trong bảng các hệ số nói trên.

**Nhận xét:** Xuất phát từ dãy các hệ số trong khai triển nhị thức Newton  $(a+b)^n$  với  $n \in \mathbb{N}$ , ta bổ sung thêm hai dòng đầu tiên và nhận được tam giác các hệ số như sau:

$n = 0$	$C_0^0$					1				
$n = 1$	$C_1^0 \quad C_1^1$					1 \quad 1				
$n = 2$	$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$					1 \quad 2 \quad 1				
$n = 3$	$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$					1 \quad 3 \quad 3 \quad 1				
$n = 4$	$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$					1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1				
$n = 5$	$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$					1	5	10	10	5 \quad 1
...	.....					.....				

Tam giác số ở trên được gọi là *tam giác Pascal*.

Trong tam giác Pascal, tổng hai số hạng liên tiếp ở dòng trên thi bằng số hạng tương ứng ở dòng tiếp theo vì ta đã biết tính chất  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$  với  $0 \leq k \leq n$  và  $k, n \in \mathbb{N}$ .

### Ví dụ 5

- a) Viết tam giác số Pascal ứng với  $n \leq 6$ .
- b) Viết khai triển của nhị thức  $(a + b)^6$  (không sử dụng hệ số ở dạng tổ hợp).

*Giải*

- a) Tam giác số Pascal ứng với  $n \leq 6$  là

1						
	1	1				
1		2	1			
	1		3	3	1	
1			4	6	4	1
1		5	10	10	5	1
1	6	15	20	15	6	1

- b) Khai triển của nhị thức  $(a + b)^6$  là:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$



3 Sử dụng tam giác Pascal để khai triển:

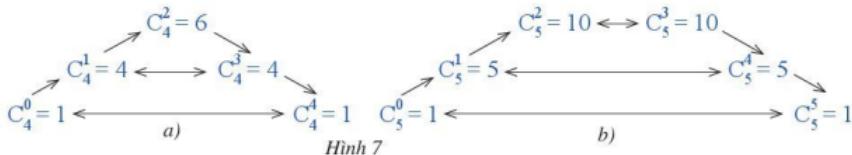
- a)  $(x + y)^7$ ;
- b)  $(x - 2)^7$ .

## III. HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Trong mục này, ta sẽ tìm hiểu một số tính chất của các hệ số trong khai triển nhị thức Newton  $(a + b)^n$ .

## 1. Sự biến thiên của dãy hệ số trong khai triển nhị thức $(a + b)^n$

 **3** Xét dãy các hệ số trong khai triển nhị thức  $(a + b)^4$  (Hình 7a) và nhị thức  $(a + b)^5$  (Hình 7b) sau:



a) So sánh từng cặp hệ số  $C_4^0$  và  $C_4^4$ ;  $C_4^1$  và  $C_4^3$  ở Hình 7a.

So sánh từng cặp hệ số  $C_5^0$  và  $C_5^5$ ;  $C_5^1$  và  $C_5^4$ ;  $C_5^2$  và  $C_5^3$  ở Hình 7b.

b) Nêu nhận xét về sự tăng giảm của mỗi dãy hệ số:

$$\begin{array}{cccccc} C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\ C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{trong khai triển } (a+b)^4). \\ (\text{trong khai triển } (a+b)^5). \end{array}$$

Dãy hệ số trong khai triển  $(a + b)^4$  và  $(a + b)^5$  như đã viết ở trên cùng có hai tính chất sau:

- Các cặp hệ số tinh từ hai đầu trở vào (tương ứng) thì bằng nhau.
- Dãy hệ số tăng dần đến “giữa” rồi giảm dần.



**Nhận xét:** Một cách tổng quát, dãy hệ số:  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$  trong khai triển  $(a + b)^n$  có hai tính chất sau:

- Các cặp hệ số tinh từ hai đầu trở vào (tương ứng) thì bằng nhau:  $C_n^k = C_n^{n-k}$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Dãy hệ số tăng dần đến “giữa” rồi giảm dần:  $C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 < \dots > C_n^{n-2} > C_n^{n-1} > C_n^n$ .

**Ví dụ 6** Tim hệ số lớn nhất trong khai triển của:

a)  $(a + b)^6$ ;      b)  $(a + b)^7$ .

**Giải**

Ta có:

a)  $C_6^0 < C_6^1 < C_6^2 < C_6^3$  và  $C_6^3 > C_6^4 > C_6^5 > C_6^6$ .

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của  $(a + b)^6$  là  $C_6^3 = 20$ .



**4** Tim hệ số lớn nhất trong khai triển của:

- a)  $(a + b)^{2022}$ ;  
b)  $(a + b)^{2023}$ .

$$\text{b) } C_7^0 < C_7^1 < C_7^2 < C_7^3 = C_7^4 \text{ và } C_7^4 > C_7^5 > C_7^6 > C_7^7.$$

Vậy hệ số lớn nhất trong khai triển của  $(a + b)^7$  là  $C_7^3 = C_7^4 = 35$ .

## 2. Hệ số của $x^k$ trong khai triển $(ax + b)^n$ thành đa thức

 **4** Quan sát khai triển nhị thức:

$$\begin{aligned}(ax + b)^n &= C_n^0(ax)^n + C_n^1(ax)^{n-1}b + C_n^2(ax)^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}(ax)b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= C_n^0 a^n x^n + C_n^1 a^{n-1} b x^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} b^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} x + C_n^n b^n.\end{aligned}$$

Nêu công thức tính hệ số của  $x^k$  trong khai triển trên.



Hệ số của  $x^k$  trong khai triển trên là  
 $C_n^{n-k} a^k b^{n-k}$  với  $k \in \mathbb{N}, k \leq n, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Ví dụ 7** Xét khai triển của  $(2x + 1)^{12}$ .

- Nêu số hạng chứa  $x^6$ , từ đó nêu hệ số của  $x^6$ .
- Nêu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nêu hệ số của  $x^k$  với  $k \in \mathbb{N}, k \leq 12$ .

*Giải*

- Số hạng chứa  $x^6$  là  $C_{12}^6 2^6 x^6$ . Hệ số của  $x^6$  là  $C_{12}^6 2^6$ .
- Số hạng tổng quát trong khai triển là  $C_{12}^{12-k} (2x)^k = C_{12}^{12-k} 2^k x^k$ .  
Hệ số của  $x^k$  là  $C_{12}^{12-k} 2^k$ .

**Ví dụ 8** Xét khai triển của  $(3x - 2)^{18}$ .

- Nêu số hạng chứa  $x^9$ , từ đó nêu hệ số của  $x^9$ .
- Nêu số hạng chứa  $x^{10}$ , từ đó nêu hệ số của  $x^{10}$ .

*Giải.* Ta có:

$$\begin{aligned}(3x - 2)^{18} &= C_{18}^0 (3x)^{18} - C_{18}^1 (3x)^{17} \cdot 2 + C_{18}^2 (3x)^{16} \cdot 2^2 - \dots - C_{18}^{17} (3x) \cdot 2^{17} + C_{18}^{18} 2^{18} \\ &= C_{18}^0 3^{18} x^{18} - C_{18}^1 3^{17} \cdot 2 x^{17} + C_{18}^2 3^{16} \cdot 2^2 x^{16} - \dots - C_{18}^{17} 3 \cdot 2^{17} x + C_{18}^{18} 2^{18}\end{aligned}$$

- Số hạng chứa  $x^9$  là  $-C_{18}^9 3^9 \cdot 2^9 x^9$ . Hệ số của  $x^9$  là  $-C_{18}^9 3^9 \cdot 2^9 = -C_{18}^9 3^9$ .
- Số hạng chứa  $x^{10}$  là  $C_{18}^8 3^{10} \cdot 2^8 x^{10}$ . Hệ số của  $x^{10}$  là  $C_{18}^8 3^{10} \cdot 2^8$ .



**5** Xét khai triển của  $(x + 5)^{15}$ .

- Nêu số hạng chứa  $x^7$ , từ đó nêu hệ số của  $x^7$ .
- Nêu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nêu hệ số  $a_k$  của  $x^k$  với  $0 \leq k \leq 15$ .

## BÀI TẬP

1. Khai triển các biểu thức sau:

- a)  $(2x+y)^6$ ;      b)  $(x-3y)^6$ ;      c)  $(x-1)^n$ ;  
d)  $(x+2)^n$ ;      e)  $(x+y)^{2n}$ ;      g)  $(x-y)^{2n}$ ,

trong đó  $n$  là số nguyên dương.

2. Tính:

$$\begin{aligned} \text{a)} S &= C_{2022}^0 9^{2022} + C_{2022}^1 9^{2021} + \dots + C_{2022}^k 9^{2022-k} + \dots + C_{2022}^{2021} 9 + C_{2022}^{2022}; \\ \text{b)} T &= C_{2022}^0 4^{2022} - C_{2022}^1 4^{2021} \cdot 3 + \dots - C_{2022}^{2021} 4 \cdot 3^{2021} + C_{2022}^{2022} 3^{2022}. \end{aligned}$$

3. Chứng minh:

$$\begin{aligned} C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + \dots + C_n^k 3^{n-k} + \dots + C_n^{n-1} 3 + C_n^n \\ = C_n^0 + C_n^1 3 + \dots + C_n^k 3^k + \dots + C_n^{n-1} 3^{n-1} + C_n^n 3^n \text{ với } 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4. Xác định hệ số của:

- a)  $x^{12}$  trong khai triển của  $(x+4)^{30}$ ;  
b)  $x^{10}$  trong khai triển của  $(3+2x)^{30}$ ;  
c)  $x^{15}$  và  $x^{16}$  trong khai triển của  $\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{7}\right)^{51}$ .

5. Xét khai triển của  $\left(x + \frac{5}{2}\right)^{12}$ .

a) Xác định hệ số của  $x^7$ .

b) Nếu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nếu hệ số  $a_k$  của  $x^k$  với  $0 \leq k \leq 12$ .

6. Xét khai triển của  $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)^{21}$ .

a) Xác định hệ số của  $x^{10}$ .

b) Nếu số hạng tổng quát trong khai triển nhị thức trên, từ đó nếu hệ số  $a_k$  của  $x^k$  với  $0 \leq k \leq 21$ .

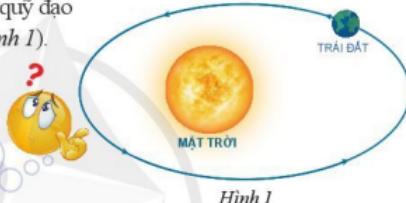
Cho biết một loại cây có tính trạng được quy định bởi tác động cộng gộp của 4 cặp alen phân li độc lập. Tìm tỉ lệ phân li kiểu hình của  $F_2$  nếu cây  $F_1$  dị hợp về 4 cặp alen giao phối với nhau.

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: xác định được các yếu tố đặc trưng của ba đường conic (elip, hyperbol, parabol) và giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với ba đường conic đó.

## §1 ELIP

Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm (*Hình 1*).

Làm thế nào để tìm được  
khoảng cách nhô nhất và lớn nhất giữa  
Trái Đất và Mặt Trời?



Hình 1

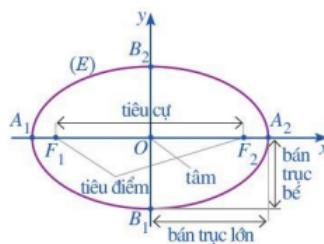
Ở sách giáo khoa Toán 10 Chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường elip. Với bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của elip.

### I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ELIP

1 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta xét elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > b > 0$  (*Hình 2*).

- Tìm tọa độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của  $(E)$ .
- $(E)$  cắt trục  $Ox$  tại các điểm  $A_1, A_2$  và cắt trục  $Oy$  tại các điểm  $B_1, B_2$ . Tim độ dài các đoạn thẳng  $OA_2$  và  $OB_2$ .

*Chú ý:* Khoảng cách  $F_1F_2 = 2c$  (với  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ) được gọi là *tiêu cự* của elip  $(E)$ . Đoạn  $A_1A_2$  là *trục lớn*, đoạn  $B_1B_2$  là *trục bé* của elip. Độ dài của trục lớn là  $2a$ , độ dài của trục bé là  $2b$ . Các độ dài  $OA_2 = a$ ,  $OB_2 = b$  lần lượt được gọi là *độ dài bán trục lớn*, *độ dài bán trục bé*.



Hình 2



2 Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , ta xét elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là

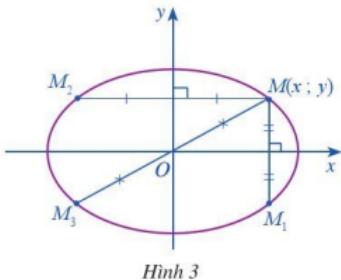
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ trong đó } a > b > 0.$$

Cho điểm  $M(x ; y)$  nằm trên  $(E)$  (Hình 3).

- Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$ . Tìm toạ độ của điểm  $M_1$ . Điểm  $M_1$  có nằm trên  $(E)$  hay không? Tại sao?
- Gọi  $M_2$  là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Oy$ . Tìm toạ độ của điểm  $M_2$ . Điểm  $M_2$  có nằm trên  $(E)$  hay không? Tại sao?
- Gọi  $M_3$  là điểm đối xứng của  $M$  qua gốc  $O$ . Tìm toạ độ của điểm  $M_3$ . Điểm  $M_3$  có nằm trên  $(E)$  hay không? Tại sao?



Nếu điểm  $M(x ; y)$  nằm trên elip  $(E)$  thì các điểm  $M_1(x ; -y)$ ,  $M_2(-x ; y)$ ,  $M_3(-x ; -y)$  cũng nằm trên  $(E)$ .



Hình 3



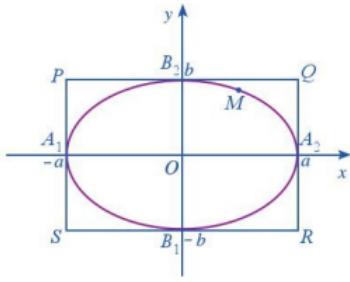
Elip  $(E)$  nhận hai trục toạ độ làm hai trục đối xứng và gốc toạ độ  $O$  làm tâm đối xứng. Gốc  $O$  còn được gọi là tâm của elip  $(E)$ .

## II. HÌNH CHỮ NHẬT CƠ SỞ

Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , ta xét elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > b > 0$ .

$(E)$  cắt trục  $Ox$  tại các điểm  $A_1(-a ; 0)$ ,  $A_2(a ; 0)$  và cắt trục  $Oy$  tại các điểm  $B_1(0 ; -b)$ ,  $B_2(0 ; b)$ . Bốn điểm này được gọi là các đỉnh của elip.

Vẽ qua  $A_1$ ,  $A_2$  hai đường thẳng song song với trục tung; vẽ qua  $B_1$ ,  $B_2$  hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật  $PQRS$ . Ta gọi hình chữ nhật đó là **hình chữ nhật cơ sở** của elip  $(E)$  (Hình 4).



Hình 4



3

- a) Nếu nhầm xét về vị trí bốn đỉnh của elip ( $E$ ) với bốn cạnh của hình chữ nhật cơ sở.
- b) Cho điểm  $M(x ; y)$  thuộc elip ( $E$ ). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của  $x$  và của  $y$ .



Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho elip ( $E$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ). Khi đó, ta có:

- Hình chữ nhật cơ sở có bốn đỉnh là  $P(-a ; b)$ ,  $Q(a ; b)$ ,  $R(a ; -b)$ ,  $S(-a ; -b)$ .
- Bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.
- Nếu điểm  $M(x ; y)$  thuộc ( $E$ ) thì  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Do đó, mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh thì đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở.

**Ví dụ 1** Cho elip ( $E$ ):  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

a) Tim toạ độ các đỉnh của elip.

b) Tim toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của elip.

*Giải*

a) Ta có:  $a^2 = 25$ , suy ra  $a = 5$ ;  $b^2 = 9$ , suy ra  $b = 3$ .

Vậy elip có các đỉnh là  $A_1(-5 ; 0)$ ,  $A_2(5 ; 0)$ ,  $B_1(0 ; -3)$ ,  $B_2(0 ; 3)$ .

b) Toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở là  $P(-5 ; 3)$ ,  $Q(5 ; 3)$ ,  $R(5 ; -3)$ ,  $S(-5 ; -3)$ .

**Quan sát** elip ( $E$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > b > 0$  và hình chữ nhật cơ sở  $PQRS$  của ( $E$ ) (Hình 5).

a) Tính tỉ số giữa hai cạnh  $\frac{QR}{PQ}$  của hình chữ nhật  $PQRS$ .

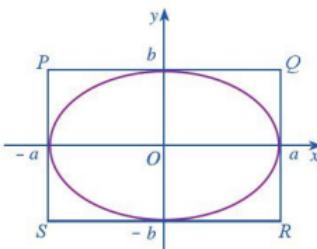
b) Tỉ số  $\frac{QR}{PQ}$  phản ánh đặc điểm gì của ( $E$ ) về hình dạng?

Ta thấy:  $\frac{QR}{PQ} = \frac{b}{a}$  với  $0 < \frac{b}{a} < 1$ . Tỉ số  $\frac{b}{a}$

phản ánh cụ thể hình dạng của ( $E$ ) như sau:



**1** Viết phương trình chính tắc của elip, biết  $A_1(-4 ; 0)$  và  $B_2(0 ; 2)$  là hai đỉnh của nó.



Hình 5

- Nếu tỉ số  $\frac{b}{a}$  càng bé thì hình chữ nhật cơ sở càng “dẹt”, do đó ( $E$ ) càng “gầy”.
- Nếu tỉ số  $\frac{b}{a}$  càng lớn thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó ( $E$ ) càng “béo”.

### III. TÂM SAI CỦA ELIP

Trong mặt phẳng, cho hai điểm  $F_1, F_2$  với  $F_1F_2 = 2c$ . Như đã biết, elip là tập hợp những điểm  $M$  trong mặt phẳng có tổng khoảng cách đến hai điểm  $F_1, F_2$  bằng hằng số  $2a$  cho trước ( $a > c > 0$ ). Vì thế, người ta thường mô tả những yếu tố đặc trưng cho elip chỉ thông qua các hằng số  $a$  và  $c$ . Chẳng hạn, thay vì sử dụng tỉ số  $\frac{b}{a}$ , người ta sử dụng tỉ số  $\frac{c}{a}$ . Hơn nữa, tỉ số  $\frac{c}{a}$  đóng vai trò quan trọng trong việc tìm hiểu các tính chất của elip nói riêng và ba đường conic nói chung.

**Ti** số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là *tâm sai* của elip và được kí hiệu là  $e$ , tức là  $e = \frac{c}{a}$ .

**Nhận xét:** •  $0 < e < 1$ .

$$\bullet e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Từ mối liên hệ giữa hình dạng của hình chữ nhật cơ sở với hình dạng của elip, ta có: Nếu  $e$  càng lớn (tức là càng gần 1) thì elip càng “gầy”, nếu  $e$  càng bé (tức là càng gần 0) thì elip càng “béo” (Hình 6).

**Ví dụ 2** Tim tọa độ tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

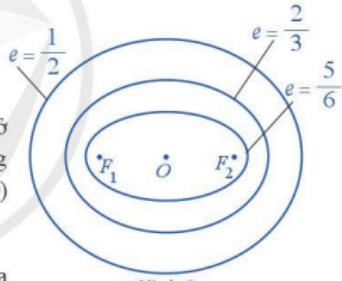
**Giải**

Ta có:  $a = 5$ ,  $b = 3$ . Suy ra  $c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ , tức là  $c = 4$ . Suy ra  $2c = 8$ .

Vậy elip có hai tiêu điểm là  $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$ , tiêu cự là 8.

Tâm sai của elip là  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$ .

**Ví dụ 3** Một đường hầm xuyên qua núi có chiều rộng là 20 m, mặt cắt đứng của đường hầm có dạng nửa elip và được mô tả trong hệ trục toạ độ với đơn vị trực là mét như ở Hình 7. Giá trị tâm sai của đường elip là  $e = 0,5$ .



Hình 6



2 Viết phương trình chính tắc của elip ( $E$ ), biết tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng  $\frac{3}{5}$ .

a) Tim chiều cao của đường hầm đó.

b) Tim độ cao của đường hầm tại điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải là 3 m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

*Giải*

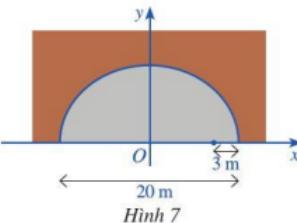
Gọi chiều cao của đường hầm là  $b$  (m). Khi đó elip có bán trục lớn là  $a = 10$  (m), bán trục bé là  $b$  (m). Elip có nửa tiêu cự là  $c = a \cdot e = 10 \cdot 0,5 = 5$  (m).

a) Chiều cao của đường hầm là  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8,7$  (m).

b) Phương trình chính tắc của elip là  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$ . Một điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải 3 m có hoành độ  $x = 7$ . Do đó độ cao của đường hầm tại điểm đó là  $y > 0$

thoả mãn  $\frac{7^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$ . Suy ra  $y = \sqrt{75 \left( 1 - \frac{7^2}{100} \right)} \approx 6,2$ .

Vậy độ cao của đường hầm tại điểm trên mặt đường cách chân hầm bên phải 3 m là khoảng 6,2 m.



Hình 7

#### IV. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM THUỘC ELIP

 5 Giả sử đường elip ( $E$ ) là tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , ở đó  $F_1F_2 = 2c$  với  $0 < c < a$ . Ta chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  có gốc là trung điểm của đoạn thẳng  $F_1F_2$ . Trục  $Oy$  là đường trung trực của  $F_1F_2$  và  $F_2$  nằm trên tia  $Ox$  (Hình 8). Khi đó,  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  là các tiêu điểm của elip ( $E$ ).

Giả sử điểm  $M(x; y)$  thuộc elip ( $E$ ).

Chứng minh rằng:

a)  $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$ ;

b)  $MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ ;

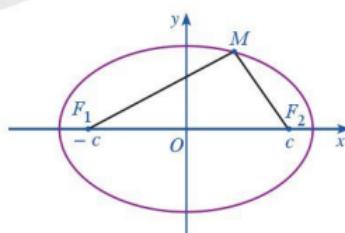
c)  $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ .

Để chứng minh các đẳng thức trên, ta làm như sau:

a)  $MF_1^2 = [x - (-c)]^2 + (y - 0)^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$ .

b)  $MF_2^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ .

c)  $MF_1^2 - MF_2^2 = (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = 4cx$ .



Hình 8



**6** Sử dụng đẳng thức c) ở trên và đẳng thức  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , chứng minh:

$$a) \quad MF_1 - MF_2 = \frac{2c}{a}x; \quad b) \quad MF_1 = a + \frac{c}{a}x; \quad c) \quad MF_2 = a - \frac{c}{a}x.$$



Với mỗi điểm  $M$  thuộc đường elip, các đoạn thẳng  $MF_1, MF_2$  được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm  $M$ .

Độ dài các bán kính qua tiêu là  $MF_1 = a + ex, MF_2 = a - ex$ .

**Nhận xét:** Ta có thể sử dụng công thức tính độ dài bán kính qua tiêu để lập phương trình chính tắc của elip. Cụ thể, ta chứng minh được rằng: Nếu điểm  $M(x ; y) \in (E)$  thì  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (1), ở đó  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ; ngược lại, nếu điểm  $M$  có toạ độ  $(x ; y)$  thoả mãn (1) thì  $MF_1 = a + \frac{cx}{a}, MF_2 = a - \frac{cx}{a}$ . Do đó  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , tức là  $M$  thuộc elip  $(E)$ .

Vậy phương trình (1) là phương trình chính tắc của elip đã cho.

**Ví dụ 4** Cho elip có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Giả sử  $M$  là điểm thuộc elip và có hoành độ là 2. Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

**Giai.** Ta có:  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ . Do đó  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$ . Vậy độ dài các bán kính qua tiêu của điểm  $M$  là:

$$MF_1 = a + ex = 5 + 0,8 \cdot 2 = 6,6; \quad MF_2 = a - ex = 5 - 0,8 \cdot 2 = 3,4.$$

**Ví dụ 5** Cho elip có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Giả sử  $M(x ; y)$  là điểm thuộc elip. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của bán kính qua tiêu  $MF_1$  và  $MF_2$ .

**Giai.** Theo công thức về độ dài bán kính qua tiêu, ta có:  $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$ .

$$\text{Vi } -a \leq x \leq a \text{ nên } a + \frac{c}{a}(-a) \leq a + \frac{c}{a}x \leq a + \frac{c}{a}a. \quad a \Leftrightarrow a - c \leq MF_1 \leq a + c.$$

Vậy  $MF_1$  có giá trị nhỏ nhất là  $a - c$  khi  $x = -a$  và có giá trị lớn nhất là  $a + c$  khi  $x = a$ .

Bằng lập luận tương tự, ta thấy  $MF_2$  có giá trị nhỏ nhất là  $a - c$  khi  $x = a$  và có giá trị lớn nhất là  $a + c$  khi  $x = -a$ .

**Ví dụ 6** Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip  $(E)$  mà Trái Đất là một tiêu điểm.  $(E)$  có độ dài trực lớn và độ dài trực bé lần lượt là (khoảng) 768 800 km và 767 619 km (*Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus: Real Mathematics, Real People, Cengage*). Tính khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

*Giải.* Giả sử  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  trong đó:  $a = 768\,800 : 2 = 384\,400$  (km),  $b = 767\,619 : 2 = 383\,809,5$  (km).

Ta có:  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384\,400^2 - 383\,809,5^2}$   
 $= \sqrt{453\,627\,709,8} \approx 21\,298,54$  (km).

Khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:  
 $a - c \approx 384\,400 - 21\,298,54 = 363\,101,46$  (km).

Khoảng cách dài nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:  
 $a + c \approx 384\,400 + 21\,298,54 = 405\,698,54$  (km).



3 Cho elip  $(E)$ :  
 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  với tiêu điểm  $F_2(\sqrt{5}; 0)$ . Tìm toạ độ điểm  $M \in (E)$  sao cho độ dài  $F_2M$  nhỏ nhất.

## V. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA ELIP

Tương tự như parabol, elip cũng có thể xác định thông qua tiêu điểm và đường thẳng đóng vai trò như đường chuẩn.

7 Cho elip  $(E)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

Xét đường thẳng  $\Delta_1: x = -\frac{a}{e}$ . Với mỗi điểm  $M(x; y) \in (E)$  (Hình 9), tính:

a) Khoảng cách  $d(M, \Delta_1)$  từ điểm  $M(x; y)$  đến đường thẳng  $\Delta_1$ .

b) Tỉ số  $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}$ .

Ta có thể thực hiện như sau:

a) Viết lại phương trình đường thẳng  $\Delta_1$

$$\text{ở dạng: } x + 0y + \frac{a}{e} = 0.$$

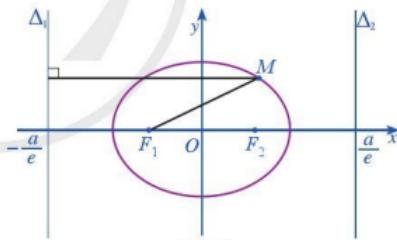
Với mỗi điểm  $M(x; y)$  thuộc  $(E)$ , ta có:

$$d(M, \Delta_1) = \sqrt{\left| x + 0y + \frac{a}{e} \right|^2} = \frac{|a + ex|}{e}.$$

b) Do  $MF_1 = a + ex > 0$  nên  $MF_1 = |a + ex|$ , suy ra  $d(M, \Delta_1) = \frac{MF_1}{e}$ . Vậy  $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = e$ .

*Nhận xét:* Ta xét đường thẳng  $\Delta_2: x = \frac{a}{e}$ . Bằng cách lập luận tương tự trên, với mỗi điểm  $M(x; y) \in (E)$ , ta cũng có:

$$\frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e.$$



Hình 9

Đường thẳng  $\Delta_1: x = -\frac{a}{e}$  gọi là *đường chuẩn ứng* với tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ .

Đường thẳng  $\Delta_2: x = \frac{a}{e}$  gọi là *đường chuẩn ứng* với tiêu điểm  $F_2(c; 0)$ .

**Chú ý:** Tỉ số của khoảng cách từ một điểm  $M$  bất kì thuộc đường elip đến tiêu điểm và khoảng cách từ điểm đó đến đường chuẩn tương ứng luôn bằng tâm sai của elip:

$$\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e.$$

**Ví dụ 7** Tìm các tiêu điểm và đường chuẩn của elip  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

*Giải*

Ta có:  $a = 5$ ,  $b = 4$ , nên  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ .

Do đó, hai tiêu điểm là  $F_1(-3; 0)$  và  $F_2(3; 0)$ .

Mặt khác, ta có:  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$ .

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F_1(-3; 0)$  là  $\Delta_1: x = -\frac{25}{3}$ .

Đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F_2(3; 0)$  là  $\Delta_2: x = \frac{25}{3}$ .



4 Viết phương trình chính tắc của elip, biết tiêu điểm  $F_2(5; 0)$  và đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó là  $x = \frac{36}{5}$ .

## VI. LIÊN HỆ GIỮA ĐƯỜNG TRÒN VÀ ĐƯỜNG ELIP

**8** Cho elip ( $E$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ).

Xét đường tròn ( $C$ ) tâm  $O$  bán kính  $a$  có phương trình là  $x^2 + y^2 = a^2$ .

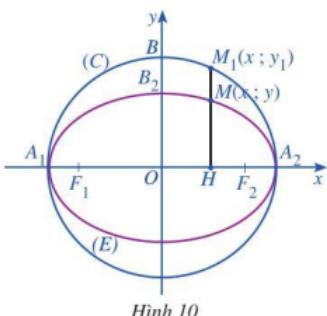
Xét điểm  $M(x; y) \in (E)$  và điểm  $M_1(x; y_1) \in (C)$

sao cho  $y$  và  $y_1$  luôn cùng dấu (khi  $M$  khác với hai đỉnh  $A_1, A_2$  của ( $E$ )) (Hình 10).

a) Từ phương trình chính tắc của elip ( $E$ ), hãy tính  $y^2$  theo  $x^2$ .

Từ phương trình của đường tròn ( $C$ ), hãy tính  $y_1^2$  theo  $x^2$ .

b) Tính tỉ số  $\frac{HM}{HM_1} = \frac{y}{y_1}$  theo  $a$  và  $b$ .



Để tính các đại lượng trên, ta làm như sau:

Ta có:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{(a^2 - x^2)b^2}{a^2}$ ;  
 $x^2 + y_1^2 = a^2 \Leftrightarrow y_1^2 = a^2 - x^2$ .

Do đó  $\frac{y^2}{y_1^2} = \frac{b^2}{a^2}$ . Vậy  $\frac{HM}{HM_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{b}{a}$ , tức là  $y_1 = \frac{a}{b}y$ .

*Nhận xét:*

- Mỗi điểm  $M_1(x ; y_1)$  trên đường tròn ( $C$ ) qua “phép co” theo trục tung với hệ số  $\frac{b}{a}$  thi biến thành điểm  $M(x ; y)$  trên elip ( $E$ ).
- Mỗi điểm  $M(x ; y)$  trên elip ( $E$ ) qua “phép giãn” theo trục tung với hệ số  $\frac{a}{b}$  thi biến thành điểm  $M_1(x ; y_1)$  trên đường tròn ( $C$ ).

## VII. CÁCH VẼ ĐƯỜNG ELIP

 Vẽ elip ( $E$ ):  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

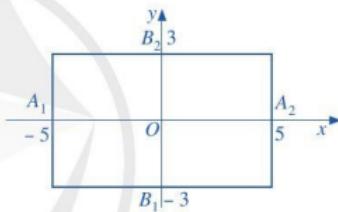
Để vẽ elip ( $E$ ), ta có thể làm như sau:

Ta thấy  $a = 5$ ,  $b = 3$ . ( $E$ ) có các đỉnh là  $A_1(-5 ; 0)$ ,  $A_2(5 ; 0)$ ,  $B_1(0 ; -3)$ ,  $B_2(0 ; 3)$ .

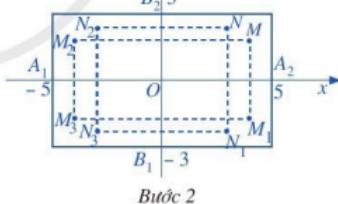
*Bước 1.* Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng  $x = -5$ ,  $x = 5$ ,  $y = -3$ ,  $y = 3$ .

*Bước 2.* Tìm một số điểm cụ thể thuộc elip, chẳng hạn ta thấy điểm  $M\left(4 ; \frac{9}{5}\right)$  và điểm  $N\left(3 ; \frac{12}{5}\right)$  thuộc ( $E$ ). Do đó các điểm  $M_1\left(4 ; -\frac{9}{5}\right)$ ,  $M_2\left(-4 ; \frac{9}{5}\right)$ ,  $M_3\left(-4 ; -\frac{9}{5}\right)$ ,  $N_1\left(3 ; -\frac{12}{5}\right)$ ,  $N_2\left(-3 ; \frac{12}{5}\right)$ ,  $N_3\left(-3 ; -\frac{12}{5}\right)$ , thuộc ( $E$ ).

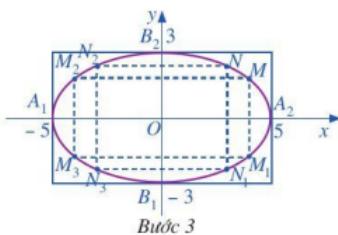
*Bước 3.* Vẽ đường elip ( $E$ ) đi qua các điểm cụ thể trên, nằm ở phía trong hình chữ nhật cơ sở và tiếp xúc với các cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại bốn đỉnh của ( $E$ ) là  $A_1(-5 ; 0)$ ,  $A_2(5 ; 0)$ ,  $B_1(0 ; -3)$ ,  $B_2(0 ; 3)$ .



Bước 1



Bước 2



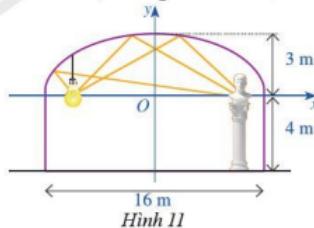
Bước 3

**Nhận xét:** Để vẽ elip  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), ta có thể làm như sau:

- Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng  $y = b$ ,  $y = -b$ ,  $x = a$ ,  $x = -a$ .
- Xác định bốn đỉnh và một số điểm cù thê thuộc elip.
- Vẽ đường elip ở phía trong hình chữ nhật cơ sở sao cho elip đó tiếp xúc với các cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại bốn đỉnh của nó và đi qua những điểm cù thê đã chọn.

## BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của elip ( $E$ ) trong mỗi trường hợp sau:
  - Độ dài trục lớn bằng 6 và tiêu điểm là  $F_1(-2; 0)$ ;
  - Tiêu cự bằng 12 và tâm sai bằng  $\frac{3}{5}$ ;
  - Tâm sai bằng  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  và chu vi hình chữ nhật cơ sở của ( $E$ ) bằng 20.
2. Tìm tâm sai của elip ( $E$ ) trong mỗi trường hợp sau:
  - Độ dài bán trục lớn gấp hai lần độ dài bán trục bé;
  - Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn đến một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.
3. Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo là đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm. Biết elip này có bán trục lớn  $a \approx 149\ 598\ 261$  km và tâm sai  $e \approx 0,017$ . Tìm khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa Trái Đất và Mặt Trời (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).
4. Cho elip ( $E$ ):  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Tìm tọa độ điểm  $M \in (E)$  sao cho độ dài  $F_2M$  lớn nhất, biết  $F_2$  là một tiêu điểm có hoành độ dương của ( $E$ ).
5. Hình 11 minh họa mặt cắt đứng của một căn phòng trong bảo tàng với mái vòm trần nhà của căn phòng đó có dạng một nửa đường elip. Chiều rộng của căn phòng là 16 m, chiều cao của tường là 4 m, chiều cao của mái vòm là 3 m.
  - Viết phương trình chính tắc của elip biểu diễn mái vòm trần nhà trong hệ trục toạ độ  $Oxy$  (đơn vị trên hai trục là mét).
  - Một nguồn sáng được đặt tại tiêu điểm thứ nhất của elip. Cần đặt bức tượng ở vị trí có tọa độ nào để bức tượng sáng rõ nhất? Giải thích rằng vòm trần phản xạ ánh sáng. Biết rằng, một tia sáng xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip thì sẽ đi qua tiêu điểm còn lại.

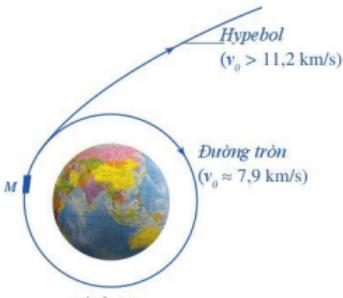


Hình 11

## S2 HYPEBOL

Quỹ đạo bay của một con tàu vũ trụ phóng đi từ Trái Đất phụ thuộc vào tốc độ của con tàu. Khi con tàu đạt tốc độ vũ trụ cấp 1, tức là tốc độ xấp xỉ 7,9 km/s, thì con tàu trở thành một vệ tinh của Trái Đất. Khi con tàu có tốc độ lớn hơn tốc độ vũ trụ cấp 2, tức là tốc độ con tàu lớn hơn 11,2 km/s, thì con tàu có quỹ đạo bay là một phần của hyperbol (Hình 12).

(Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>)



Hình 12

Quỹ đạo bay dạng hyperbol của con tàu có đặc điểm gì?



Ở sách giáo khoa Toán 10 chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường hyperbol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của hyperbol.

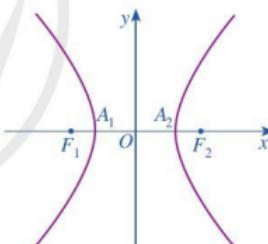
### I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA HYPEBOL

1 Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , ta xét hyperbol ( $H$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > 0$ ,  $b > 0$  (Hình 13).

- Tìm toạ độ hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  của hyperbol ( $H$ ).
- Hyperbol ( $H$ ) cắt trục  $Ox$  tại các điểm  $A_1, A_2$ . Tìm độ dài các đoạn thẳng  $OA_1$  và  $OA_2$ .

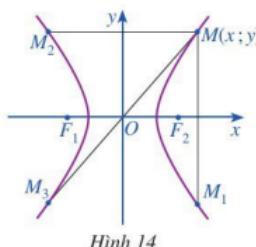
*Chú ý:* Độ dài  $F_1F_2 = 2c$  được gọi là tiêu cự của hyperbol ( $H$ ).

Đoạn thẳng  $A_1A_2$  gọi là trục thực; độ dài  $A_1A_2 = 2a$  gọi là độ dài trục thực của hyperbol ( $H$ ).



Hình 13

2 Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , ta xét hyperbol ( $H$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , trong đó  $a > 0$ ,  $b > 0$  (Hình 14). Cho điểm  $M(x; y)$  nằm trên hyperbol ( $H$ ). Gọi  $M_1, M_2, M_3$  lần lượt là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$ , trục  $Oy$  và gốc  $O$ . Các điểm  $M_1, M_2, M_3$  có nằm trên hyperbol ( $H$ ) hay không? Tại sao?



Hình 14



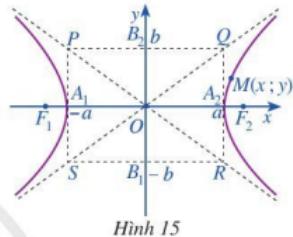
Nếu điểm  $M(x ; y)$  nằm trên hyperbol ( $H$ ) thì các điểm  $M_1(x ; -y)$ ,  $M_2(-x ; y)$ ,  $M_3(-x ; -y)$  cũng nằm trên hyperbol ( $H$ ).

Hyperbol ( $H$ ) nhận hai trục tọa độ làm hai trục đối xứng và gốc tọa độ  $O$  làm tâm đối xứng. Gốc  $O$  còn được gọi là tâm của hyperbol ( $H$ ).

## II. HÌNH CHỮ NHẬT CƠ SỞ

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta xét hyperbol ( $H$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Hyperbol ( $H$ ) cắt trục  $Ox$  tại các điểm  $A_1(-a ; 0)$ ,  $A_2(a ; 0)$ . Hai điểm này được gọi là hai đỉnh của hyperbol. Trên trục  $Oy$ , ta lấy các điểm  $B_1(0 ; -b)$ ,  $B_2(0 ; b)$ .



Hình 15

Vẽ qua  $A_1$ ,  $A_2$  hai đường thẳng song song với trục tung; vẽ qua  $B_1$ ,  $B_2$  hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật  $PQRS$ . Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của hyperbol ( $H$ ) (Hình 15).



- Quan sát điểm  $M(x ; y)$  nằm trên hyperbol ( $H$ ) (Hình 15) và chứng tỏ rằng  $x \leq -a$  hoặc  $x \geq a$ .
- Viết phương trình hai đường thẳng  $PR$  và  $QS$ .



Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hyperbol ( $H$ ) có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Khi đó, ta có:

- Hình chữ nhật cơ sở có bốn đỉnh là  $P(-a ; b)$ ,  $Q(a ; b)$ ,  $R(a ; -b)$ ,  $S(-a ; -b)$ .
- Mọi điểm của hyperbol nếu không phải là đỉnh đều nằm ngoài hình chữ nhật cơ sở của nó.
- Độ dài  $B_1B_2 = 2b$  được gọi là độ dài trục ảo của hyperbol ( $H$ ).
- Hai đường thẳng  $PR$  và  $QS$  lần lượt có phương trình  $y = -\frac{b}{a}x$ ,  $y = \frac{b}{a}x$  và được gọi là hai đường tiệm cận của hyperbol ( $H$ ).

**Ví dụ 1** Cho hypebol  $(H)$ :  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

- Tìm toạ độ các đỉnh và độ dài các trục của hypebol.
- Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của hypebol.

*Giải*

a) Ta có:  $a^2 = 9$ , suy ra  $a = 3$ ;  $b^2 = 16$ , suy ra  $b = 4$ .

Hypebol có các đỉnh là  $A_1(-3; 0), A_2(3; 0)$ ; độ dài trục thực là  $2 \cdot 3 = 6$ ; độ dài trục ảo là  $2 \cdot 4 = 8$ .

b) Toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của hypebol là  $P(-3; 4), Q(3; 4), R(3; -4), S(-3; -4)$ .

**Ví dụ 2** Cho hypebol  $(H)$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

a) Viết phương trình hai đường tiệm cận của hypebol  $(H)$ .

b) Giả sử điểm  $M(x_0; y_0)$  nằm trên hypebol  $(H)$  với  $x_0 > 0, y_0 > 0$ . Tính khoảng cách  $MK$  từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng có phương trình là  $y = \frac{5}{4}x$ . Có nhận xét gì về độ lớn của  $MK$  khi điểm  $M(x_0; y_0)$  di động trên hypebol  $(H)$  càng ngày càng xa gốc toạ độ, tức là khi  $x_0$  càng ngày càng lớn?

*Giải*

a) Phương trình hai đường tiệm cận của hypebol  $(H)$  là  $y = \pm \frac{5}{4}x$ .

b) Khoảng cách từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường tiệm cận  $y = \frac{5}{4}x$  là:

$$MK = \frac{\left| y_0 - \frac{5}{4}x_0 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{41}} |4y_0 - 5x_0| = \frac{\left| 16y_0^2 - 25x_0^2 \right|}{\sqrt{41} \cdot |4y_0 + 5x_0|} = \frac{400}{\sqrt{41} \cdot 4y_0 + 5x_0}.$$

Vì vậy, khi điểm  $M(x_0; y_0)$  di động trên hypebol  $(H)$  càng ngày càng xa gốc toạ độ thì khoảng cách  $MK$  càng ngày càng nhỏ, điều đó cũng có nghĩa là điểm  $M$  càng ngày càng gần sát đường tiệm cận đó (điều này giải thích ý nghĩa của từ “tiệm cận”).



1 Viết phương trình chính tắc của hypebol có một đỉnh là  $A_2(5; 0)$  và một đường tiệm cận là  $y = -3x$ .

### III. TÂM SAI CỦA HYPEBOL

 4 Nếu định nghĩa tâm sai của elip có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > b > 0$ .

Giống như elip, đối với hypebol có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0, b > 0$ , ta nói:



Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực của hyperbol là *tâm sai* của hyperbol và được kí hiệu là  $e$ , tức là  $e = \frac{c}{a}$ .

**Nhận xét:** •  $e = \frac{c}{a} > 1$ .

$$\bullet e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

**Ví dụ 3** Tim toạ độ tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của hyperbol có phương trình chính tắc là  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

*Giải*

Ta có:  $a = 5$ ,  $b = 3$ . Suy ra  $c^2 = a^2 + b^2 = 34$ , tức là  $c = \sqrt{34}$ .

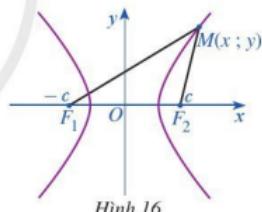
Hyperbol có hai tiêu điểm là  $F_1(-\sqrt{34}; 0)$ ,  $F_2(\sqrt{34}; 0)$ , tiêu cự là  $2\sqrt{34}$  và tâm sai là  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{34}}{5}$ .



**2** Viết phương trình chính tắc của hyperbol, biết độ dài trục ảo bằng 6 và tâm sai bằng  $\frac{5}{4}$ .

## IV. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM THUỘC HYPERBOL

**5** Trong mặt phẳng, xét đường hyperbol ( $H$ ) là tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , ở đó  $F_1F_2 = 2c$  với  $c > a > 0$ . Ta chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$  có gốc là trung điểm của đoạn thẳng  $F_1F_2$ . Trục  $Oy$  là đường trung trực của  $F_1F_2$  và  $F_2$  nằm trên tia  $Ox$  (Hình 16). Khi đó,  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  là các tiêu điểm của ( $H$ ).



Hình 16

Với mỗi điểm  $M(x; y)$  thuộc đường hyperbol ( $H$ ), chứng minh:

a)  $MF_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$ ;

b)  $MF_2^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$ ;

c)  $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$ .



**6** Với mỗi điểm  $M$  thuộc hyperbol ( $H$ ), từ hai đẳng thức  $MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$  và  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , chứng minh:

$$MF_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|; \quad MF_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|.$$



Với mỗi điểm  $M$  thuộc đường hyperbol, các đoạn thẳng  $MF_1, MF_2$  được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm  $M$ . Độ dài các bán kính qua tiêu là  $MF_1 = |a + ex|, MF_2 = |a - ex|$ .

**Nhận xét:** Ta có thể sử dụng công thức tính độ dài bán kính qua tiêu để lập phương trình chính tắc của hyperbol.

Cụ thể, ta có thể chứng minh được rằng:

Nếu điểm  $M(x; y) \in (H)$  thì  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (1), ở đó  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

Ngược lại, nếu điểm  $M$  có tọa độ  $(x; y)$  thoả mãn (1) thì  $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|, MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$ , do đó  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , tức là  $M$  thuộc hyperbol  $(H)$ .

Vậy phương trình (1) là phương trình chính tắc của hyperbol đã cho.

**Ví dụ 4** Cho hyperbol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

Giả sử  $M$  là điểm thuộc hyperbol có hoành độ là 12.

Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

*Giải*

Ta có:  $a = 3, b = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$  và  $e = \frac{5}{3}$ .

Các bán kính qua tiêu của điểm  $M$  là:

$$MF_1 = \left|3 + \frac{5}{3} \cdot 12\right| = 23; \quad MF_2 = \left|3 - \frac{5}{3} \cdot 12\right| = 17.$$



**3** Cho hyperbol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ . Giả sử  $M$  là điểm thuộc hyperbol có hoành độ là 15. Tìm độ dài các bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

## V. ĐƯỜNG CHUẨN CỦA HYPERBOL

Tương tự như elip, ta cũng có thể xác định được đường chuẩn của một hyperbol.

**7** Cho hyperbol  $(H)$  có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  với  $a > 0, b > 0$ . Xét đường thẳng  $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ .

Với mỗi điểm  $M(x_0; y_0) \in (H)$  (Hình 17), tính:

a) Khoảng cách  $d(M, \Delta_1)$  từ điểm  $M(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta_1$ .

b) Tỉ số  $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)}$ .

Để tính khoảng cách và tỉ số nói trên, ta làm như sau:

Ta viết lại phương trình đường thẳng  $\Delta_1$  ở dạng  $\Delta_1: x + 0 \cdot y + \frac{a}{e} = 0$ .

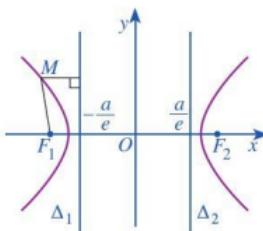
Với mỗi điểm  $M(x_0; y_0)$  thuộc hyperbol, ta có:

$$d(M, \Delta_1) = \frac{|x_0 + 0 \cdot y_0 + \frac{a}{e}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|a + ex_0|}{e} = \frac{MF_1}{e}.$$

$$\text{Vậy } \frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = e.$$

**Nhận xét:** Ta xét đường thẳng  $\Delta_2: x = \frac{a}{e}$ . Bằng cách lập luận tương tự như trên, với mỗi điểm  $M(x_0; y_0) \in (H)$ ,

$$\text{ta có } \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e.$$



Hình 17

Đường thẳng  $\Delta_1: x = -\frac{a}{e}$  gọi là **đường chuẩn ứng** với tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ .

Đường thẳng  $\Delta_2: x = \frac{a}{e}$  gọi là **đường chuẩn ứng** với tiêu điểm  $F_2(c; 0)$ .

**Chú ý:** Tỉ số của khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc hyperbol đến tiêu điểm và khoảng cách từ điểm đó đến đường chuẩn tương ứng luôn bằng tần sai của hyperbol.

$$\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e.$$

**Ví dụ 5** Tìm các tiêu điểm và đường chuẩn của hyperbol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

**Giải**

Ta có:  $a = 12$ ,  $b = 5$ , suy ra  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$ .

Do đó hai tiêu điểm là  $F_1(-13; 0)$  và  $F_2(13; 0)$ .

Mặt khác, ta có:  $e = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$ . Phương trình đường chuẩn

ứng với tiêu điểm  $F_1(-13; 0)$  là  $\Delta_1: x = -\frac{144}{13}$ .

Phương trình đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F_2(13; 0)$  là

$$\Delta_2: x = \frac{144}{13}.$$



4 Tim các tiêu điểm và đường chuẩn của hyperbol có phương trình chính tắc là

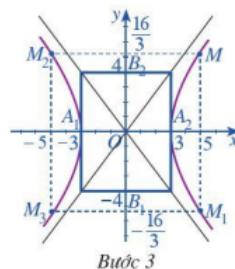
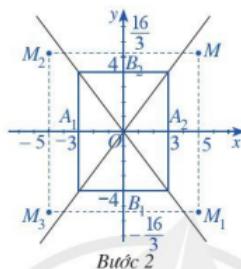
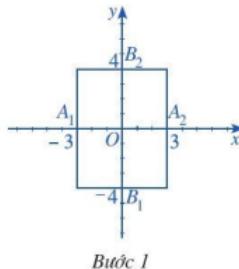
$$\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

## VI. CÁCH VẼ ĐƯỜNG HYPEBOL

 8 Vẽ hypebol ( $H$ ):  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

Để vẽ hypebol ( $H$ ), ta có thể làm như sau:

Ta thấy  $a = 3$ ,  $b = 4$ . ( $H$ ) có các đỉnh là  $A_1(-3; 0)$ ,  $A_2(3; 0)$ .



Bước 1. Vẽ hình chữ nhật cơ sở có bốn cạnh thuộc bốn đường thẳng  $x = -3$ ,  $x = 3$ ,  $y = -4$ ,  $y = 4$ .

Bước 2. Vẽ hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở.

Tìm một số điểm cụ thể thuộc hypebol, chẳng hạn ta thấy điểm  $M\left(5; \frac{16}{3}\right)$  thuộc ( $H$ ). Do đó các điểm  $M_1\left(5; -\frac{16}{3}\right)$ ,  $M_2\left(-5; \frac{16}{3}\right)$ ,  $M_3\left(-5; -\frac{16}{3}\right)$  thuộc ( $H$ ).

Bước 3. Vẽ đường hypebol bên ngoài hình chữ nhật cơ sở, nhánh bên trái tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm  $A_1(-3; 0)$  và đi qua  $M_2, M_3$ ; nhánh bên phải tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại điểm  $A_2(3; 0)$  và đi qua  $M, M_1$ . Vẽ các điểm thuộc hypebol càng xa gốc toạ độ thì càng sát với đường tiệm cận. Hyprebol nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng và hai trục toạ độ là hai trục đối xứng.

**Nhận xét:** Để vẽ hypebol ( $H$ ):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ), ta có thể làm như sau:

- Vẽ bốn đường thẳng  $y = b$ ,  $y = -b$ ,  $x = a$ ,  $x = -a$  và xác định hình chữ nhật cơ sở  $PQRS$  của hypebol.
- Vẽ hai đường tiệm cận  $PR, QS$  của hypebol.
- Vẽ từng nhánh của hypebol ở phía ngoài hình chữ nhật cơ sở, sao cho tiếp xúc với cạnh của hình chữ nhật cơ sở tại đỉnh của hypebol và đi qua những điểm cụ thể đã chọn, đồng thời nhận  $PR, QS$  làm hai đường tiệm cận.

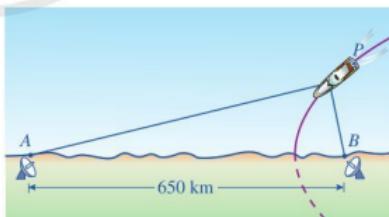


5 Cho hypebol ( $H$ ) có một đỉnh là  $A_1(-4; 0)$  và tiêu cự là 10. Viết phương trình chính tắc và vẽ hypebol ( $H$ ).

## BÀI TẬP

1. Viết phương trình chính tắc của hyperbol, biết:
  - a) Tiêu điểm là  $F_1(-3; 0)$  và đỉnh là  $A_2(2; 0)$ .
  - b) Đỉnh là  $A_2(4; 0)$  và tiêu cự bằng 10.
  - c) Tiêu điểm  $F_2(4; 0)$  và phương trình một đường tiệm cận là  $y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x$ .
2. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hyperbol có phương trình chính tắc  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ .
  - a) Xác định tọa độ các đỉnh, tiêu điểm, tiêu cự, độ dài trục thực của hyperbol.
  - b) Xác định phương trình các đường tiệm cận của hyperbol và vẽ hyperbol trên.
3. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hyperbol có phương trình chính tắc là  $x^2 - y^2 = 1$ .  
Chứng minh rằng hai đường tiệm cận của hyperbol vuông góc với nhau.
4. Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hyperbol  $(H): \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$ , biết rằng  $(E)$  có các tiêu điểm là các tiêu điểm của  $(H)$  và các đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của  $(H)$  đều nằm trên  $(E)$ .
5. Dọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thuỷ hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lân lượt tại địa điểm  $A$  và địa điểm  $B$ , khoảng cách  $AB = 650$  km (Hình 18). Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo là hyperbol nhận  $A$  và  $B$  là hai tiêu điểm.

Khi đang ở vị trí  $P$ , máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu từ  $A$  và  $B$  thành hiệu khoảng cách  $|PA - PB|$ . Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ  $B$  trước khi nhận được tín hiệu từ  $A$  là  $0,0012$  s. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là  $3 \cdot 10^8$  m/s.



Hình 18

- a) Lập phương trình hyperbol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.
- b) Chứng tỏ rằng tại mọi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ  $B$  trước khi nhận được tín hiệu từ  $A$  luôn là  $0,0012$  s.

Các đĩa vệ tinh thường được làm ở dạng paraboloid, tức là hình dạng được tạo ra bằng cách quay parabol xung quanh trục của nó để sử dụng tính chất phản xạ của parabol. Tính chất đó là: Tín hiệu đi trực tiếp đến đĩa vệ tinh theo những tia song song với trục đối xứng của parabol, sau khi phản xạ tại parabol, sẽ đi qua tiêu điểm của parabol. Người ta đặt máy thu tín hiệu tại tiêu điểm của parabol và dẫn tín hiệu thu được từ máy thu về trung tâm giải mã.

Làm thế nào để thiết kế được  
đĩa vệ tinh sao cho tín hiệu thu được  
là tốt nhất?



Hình ảnh đài quan sát thiên văn  
vô tuyến

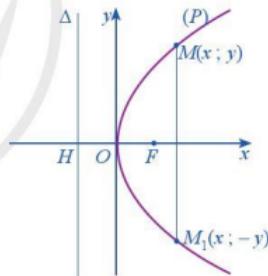
(Nguồn: <https://sites.google.com>)

Ở sách giáo khoa Toán 10 chương VII, chúng ta đã học về ba đường conic, trong đó có đường parabol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu thêm những yếu tố đặc trưng của parabol.

## I. TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA PARABOL

 1 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta xét parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) (Hình 19).

- Tìm tọa độ tiêu điểm  $F$  của parabol  $(P)$ .
- Tìm tọa độ điểm  $H$  và viết phương trình đường chuẩn  $\Delta$  của parabol  $(P)$ .
- Cho điểm  $M(x ; y)$  nằm trên parabol  $(P)$ . Gọi  $M_1$  là điểm đối xứng của  $M$  qua trục  $Ox$ . Điểm  $M_1$  có nằm trên parabol  $(P)$  hay không? Tại sao?



Hình 19



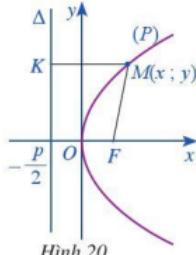
Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc là  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). Khi đó, ta có:

- Parabol  $(P)$  nằm về bên phải của trục tung.
- Trục  $Ox$  là trục đối xứng của parabol  $(P)$ .
- Parabol  $(P)$  cắt trục  $Ox$  tại điểm  $O$  và đó cũng là điểm duy nhất của trục  $Oy$  thuộc  $(P)$ . Gốc tọa độ  $O$  được gọi là đỉnh của parabol  $(P)$ .
- Khoảng cách  $FH = p$  được gọi là tham số tiêu của parabol  $(P)$ .

## II. TÂM SAI CỦA PARABOL. BÁN KÍNH QUA TIÊU CỦA MỘT ĐIỂM

2 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , ta xét parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc là  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) (Hình 20).

- So sánh khoảng cách  $MF$  từ điểm  $M$  đến tiêu điểm  $F$  và khoảng cách  $MK$  từ điểm  $M$  đến đường chuẩn  $\Delta$ .
- Tính độ dài đoạn thẳng  $MK$ . Từ đó, tính độ dài đoạn thẳng  $MF$ .



Hình 20

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc là  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ). Khi đó:

- Với parabol  $(P)$ , ta luôn có  $e = 1$ , ở đó  $e$  là tâm sai của parabol (tức là tỉ số của khoảng cách từ điểm  $M$  đến tiêu điểm  $F$  và khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường chuẩn  $\Delta$ ).
- Với mỗi điểm  $M$  thuộc parabol  $(P)$ , đoạn thẳng  $MF$  được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm  $M$ . Ta có độ dài đoạn thẳng  $MF = \left| x + \frac{p}{2} \right| = x + \frac{p}{2}$ .

**Ví dụ 1** Cho parabol  $y^2 = 6x$ .

- Tìm tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol.
- Giả sử  $M$  là điểm thuộc parabol có hoành độ là 4. Tính bán kính qua tiêu của điểm  $M$ .

*Giải*

- a) Ta có:  $2p = 6$ , suy ra  $p = 3$ .

Tiêu điểm của parabol là  $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ .

Đường chuẩn của parabol có phương trình là  $x = -\frac{3}{2}$ .

- b) Bán kính qua tiêu của điểm  $M$  là  $MF = 4 + \frac{3}{2} = 5,5$ .



- a) Lập phương trình chính tắc của parabol  $(P)$ , biết phương trình đường chuẩn là  $x = -2$ .
- b) Tìm tọa độ tiêu điểm của parabol  $(P)$ .
- c) Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc parabol  $(P)$ , biết khoảng cách từ  $M$  đến tiêu điểm bằng 6.

## III. CÁCH VẼ ĐƯỜNG PARABOL

3 Vẽ parabol  $(P)$ :  $y^2 = 4x$ .

Để vẽ parabol  $y^2 = 4x$ , ta có thể làm như sau:

### Bước 1. Lập bảng giá trị

$x$	0	0,25	0,25	1	1	2,25	2,25
$y$	0	-1	1	2	-2	-3	3

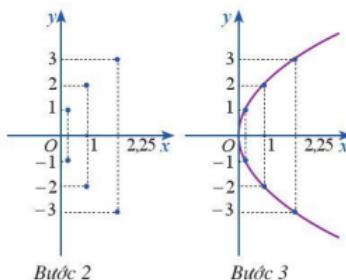
Chú ý rằng ứng với mỗi giá trị dương của  $x$  có hai giá trị của  $y$  đối nhau.

Bước 2. Vẽ các điểm cù thể mà hoành độ và tung độ được xác định như trong bảng giá trị.

Bước 3. Vẽ parabol bên phải trục  $Oy$ , đỉnh  $O$ , trực đối xứng là  $Ox$ , parabol đi qua các điểm được vẽ ở Bước 2.

Nhận xét: Để vẽ parabol  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), ta có thể làm như sau:

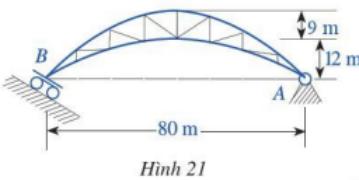
- Xác định đỉnh và một số điểm cù thể.
- Vẽ parabol đi qua những điểm cù thể đã chọn, tiếp xúc với trực tung tại đỉnh  $O(0 ; 0)$  và nhận trực hoành làm trực đối xứng.



2 Vẽ parabol  $y^2 = 2px$ , biết tiêu điểm của parabol là  $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ .

## BÀI TẬP

- Viết phương trình chính tắc của parabol trong mỗi trường hợp sau:
  - Tiêu điểm là  $F_2(5 ; 0)$ ;
  - Phương trình đường chuẩn là  $x = -4$ ;
  - Parabol đi qua điểm  $A(4 ; 9)$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol có phương trình chính tắc  $y^2 = 8x$ .
  - Xác định tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol.
  - Vẽ parabol.
- Các vật liệu xây dựng đều có hệ số giãn nở. Vì thế, khi đặt đàm cầu, người ta thường đặt cố định một đầu đàm, đầu còn lại đặt trên một con lăn có thể di động được nhằm giải quyết sự giãn nở của vật liệu. Hình 21 minh họa một đàm cầu được đặt ở hai bờ kênh, giới hạn bởi hai cung parabol có cùng trực đối xứng. Người ta thiết kế các thanh giằng nối hai cung parabol đó sao cho các thanh giằng theo phương thẳng đứng cách đều nhau và cách đều hai đầu đàm. Tính tổng độ dài của các thanh giằng theo phương thẳng đứng.

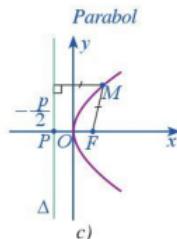
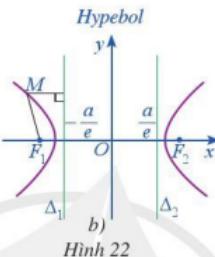
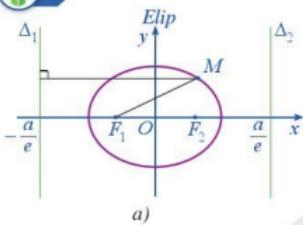


Hình 21

## §4 BA ĐƯỜNG CONIC

Ở các bài trước, chúng ta đã học về elip, hypebol và parabol. Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu những tính chất chung của cả ba đường conic đó và những ứng dụng của chúng trong thực tiễn.

### I. MÔ TẢ BA ĐƯỜNG CONIC DỰA TRÊN TIÊU ĐIỂM VÀ ĐƯỜNG CHUẨN



Hình 22

Quan sát Hình 22a, Hình 22b, Hình 22c và nêu tỉ số khoảng cách từ một điểm  $M$  nằm trên mỗi đường conic đến tiêu điểm của nó và khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

*Nhận xét:*

- Với mọi điểm  $M$  thuộc elip ( $E$ ):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), ta luôn có  $\frac{MF}{d(M, \Delta)} = e$  ( $0 < e < 1$ ), trong đó  $F$  là một trong hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  và  $\Delta$  là đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F$ .
- Với mọi điểm  $M$  thuộc hypebol ( $H$ ):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), ta luôn có  $\frac{MF}{d(M, \Delta)} = e$  ( $e > 1$ ), trong đó  $F$  là một trong hai tiêu điểm  $F_1, F_2$  và  $\Delta$  là đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F$ .
- Với mọi điểm  $M$  thuộc parabol ( $P$ ):  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ), ta luôn có  $\frac{MF}{d(M, \Delta)} = 1$ , trong đó  $F$  là tiêu điểm và  $\Delta$  là đường chuẩn ứng với tiêu điểm  $F$ .

Để mô tả chung ba đường conic (elip, hypebol, parabol) dựa trên tiêu điểm và đường chuẩn, ta đưa vào định nghĩa sau:



Trong mặt phẳng cho điểm  $F$  cố định và một đường thẳng  $\Delta$  cố định không đi qua  $F$ . Tập hợp các điểm  $M$  sao cho tỉ số  $\frac{MF}{d(M, \Delta)}$  bằng một số dương  $e$  cho trước được gọi là đường conic.

Điểm  $F$  gọi là tiêu điểm, đường thẳng  $\Delta$  gọi là đường chuẩn tương ứng với  $F$  và  $e$  gọi là tâm sai của đường conic.

Ta có thể chứng minh được rằng:

- Nếu tâm sai  $e < 1$  thì đường conic nhận được là đường elip.
- Nếu tâm sai  $e = 1$  thì đường conic nhận được là đường parabol.
- Nếu tâm sai  $e > 1$  thì đường conic nhận được là đường hyperbol.

**Ví dụ 1** Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta : x = 4$  và điểm  $F(3 ; 0)$ .  
Lấy ba điểm  $A(2 ; 0), B(1 ; 4), C(-1 ; 3)$ .

a) Tính các tỉ số sau:  $\frac{AF}{d(A, \Delta)}, \frac{BF}{d(B, \Delta)}, \frac{CF}{d(C, \Delta)}$ .

b) Hỏi mỗi điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm trên loại đường conic nào nhận  $F$  là tiêu điểm và  $\Delta$  là đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó?

*Giải*

a) Ta có:

$$AF = \sqrt{(3-2)^2 + (0-0)^2} = 1, d(A, \Delta) = |2-4| = 2, \text{suy ra } \frac{AF}{d(A, \Delta)} = \frac{1}{2}.$$

$$BF = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}, d(B, \Delta) = |1-4| = 3, \text{suy ra } \frac{BF}{d(B, \Delta)} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

$$CF = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = 5, d(C, \Delta) = |-1-4| = 5, \text{suy ra } \frac{CF}{d(C, \Delta)} = \frac{5}{5} = 1.$$

b) Vì  $\frac{AF}{d(A, \Delta)} = \frac{1}{2} < 1$  nên điểm  $A$  nằm trên elip.

Do  $\frac{BF}{d(B, \Delta)} = \frac{2\sqrt{5}}{3} > 1$  nên điểm  $B$  nằm trên hyperbol.

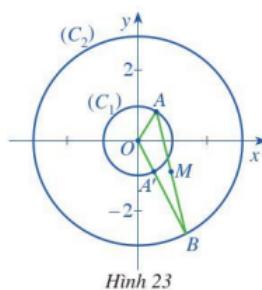
Vì  $\frac{CF}{d(C, \Delta)} = 1$  nên điểm  $C$  nằm trên parabol.

**Ví dụ 2** Cho tia  $Ox$  và hai đường tròn  $(C_1), (C_2)$  đồng tâm  $O$  lần lượt có bán kính là 1 cm, 3 cm. Hai điểm  $A$  và  $B$  lần lượt di động trên  $(C_1), (C_2)$  thoả mãn tia  $Ox$  là tia phân giác của góc  $AOB$ .

a) Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $Ox$ . Biểu thị vecto  $\overrightarrow{OB}$  theo vecto  $\overrightarrow{OA'}$ .

b) Chọn hệ trục toạ độ  $Oxy$  có trục hoành chứa tia  $Ox$  đã cho (Hình 23). Giả sử  $A(x_0; y_0)$ . Xác định toạ độ của  $A'$ ,  $B, M$  theo  $x_0, y_0$  với  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

c) Tính  $x_0^2 + y_0^2$ . Chứng minh rằng tập hợp trung điểm  $M$  của đoạn  $AB$  là một elip.



Hình 23

*Giải*

a) Ta có:  $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}$ .

b) Vì  $A$  và  $A'$  đối xứng nhau qua  $Ox$  nên

$$A'(x_0 ; -y_0) \Rightarrow B(3x_0 ; -3y_0) \Rightarrow x_M = \frac{x_0 + 3x_0}{2} = 2x_0, y_M = \frac{y_0 - 3y_0}{2} = -y_0.$$

c)  $x_0^2 + y_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{x_M^2}{2^2} + \frac{y_M^2}{1^2} = 1$ . Vậy tập hợp các điểm  $M$  là một elip.

## II. MÔ TẢ BA ĐƯỜNG CONIC DỰA TRÊN GIAO CỦA MẶT PHẲNG VỚI MẶT NÓN

### 1. Khái niệm mặt nón tròn xoay

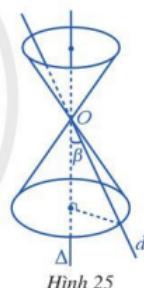
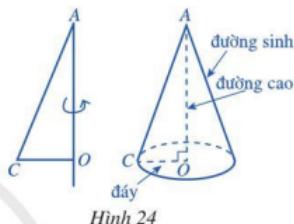
Ở lớp 9, ta đã làm quen với hình nón.

Cho tam giác  $OAC$  vuông tại  $O$ . Khi quay tam giác  $OAC$  một vòng xung quanh cạnh  $OA$  cố định, ta được một hình nón (*Hình 24*).

Tương tự khái niệm hình nón, ta có khái niệm mặt nón.

Trong mặt phẳng  $(P)$ , cho hai đường thẳng  $d$  và  $\Delta$  cắt nhau tại  $O$  và góc giữa hai đường thẳng là  $\beta$  ( $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ). Khi quay mặt phẳng  $(P)$  xung quanh đường thẳng  $\Delta$  thì đường thẳng  $d$  sinh ra một mặt tròn xoay gọi là mặt nón đỉnh  $O$  (*Hình 25*).

Các đường thẳng  $\Delta$ ,  $d$  lần lượt gọi là trục, đường sinh của mặt nón.



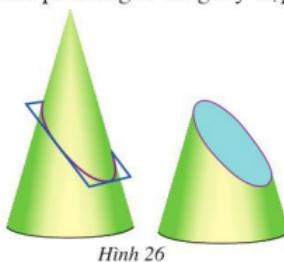
### 2. Giao của mặt phẳng với mặt nón

Chúng ta đã biết rằng:

- Giao của mặt nón với mặt phẳng (không đi qua đỉnh và vuông góc với trục của mặt nón) là đường tròn.
- Giao của mặt nón với mặt phẳng (không đi qua đỉnh và không vuông góc với trục của mặt nón) là đường conic (*Hình 26*). Từ “đường conic” xuất phát từ gốc tiếng Hy Lạp *konos*, nghĩa là mặt nón.

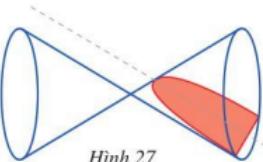
#### a. Elip

Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón, không vuông góc với trục của mặt nón và không song song với đường sinh nào của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường elip (*Hình 26*).



### b. Parabol

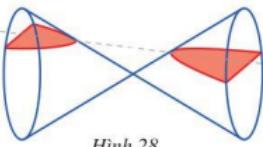
Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón và song song với duy nhất một đường sinh của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường parabol (*Hình 27*).



Hình 27

### c. Hypebol

Xét mặt phẳng không đi qua đỉnh của mặt nón và song song với hai đường sinh của mặt nón. Khi đó, giao của mặt phẳng và mặt nón là đường hypebol (*Hình 28*).



Hình 28

**Ví dụ 3** Quan sát các hình sau và cho biết:

Giao của mặt phẳng với mặt nón ở hình nào cho hình ảnh đường tròn, elip, hypebol, parabol.



Hình 29



Hình 30



Hình 31

*Giải*

*Hình 29* (nửa phía trên) cho hình ảnh đường tròn.

*Hình 29* (nửa phía dưới) cho hình ảnh elip.

*Hình 30* cho hình ảnh hypebol.

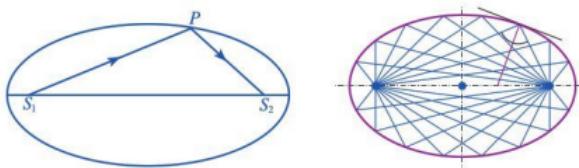
*Hình 31* cho hình ảnh parabol.

## III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BA ĐƯỜNG CONIC TRONG THỰC TIỄN

### 1. Ứng dụng trong quang học của các đường conic

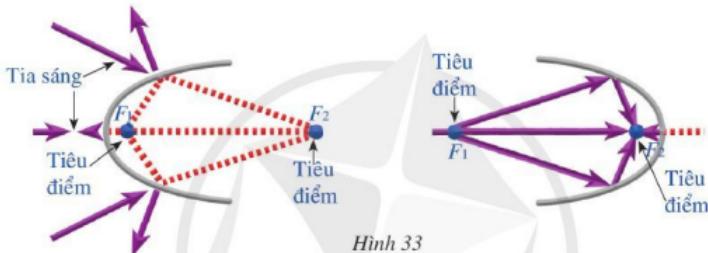
#### a. Ứng dụng quang học của elip

Như chúng ta đã biết elip có tính chất sau: Một tia xuất phát từ một tiêu điểm của elip, sau khi phản xạ tại elip, thì sẽ đi qua tiêu điểm còn lại của elip (*Hình 32*).



Hình 32

Elip có nhiều ứng dụng trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, trong chế tạo gương có dạng hình elip. Gương elip được làm từ một dải kim loại sáng bóng, các tia sáng xuất phát từ tiêu điểm này đều hội tụ đến tiêu điểm kia (Hình 33). Một vật đặt tại  $F_2$  sẽ được rọi sáng nhờ nguồn sáng đặt tại  $F_1$  cho dù  $F_1$  và  $F_2$  ở khá xa nhau.

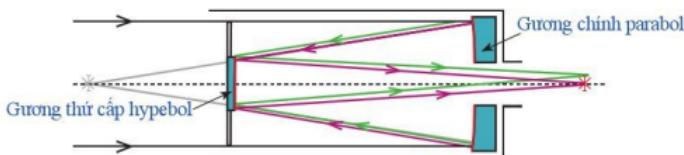


Hình 33

### b. Ứng dụng quang học của hyperbol

Kính thiên văn Cassegrain (đôi khi được gọi là "Cassegrain cổ điển") được Laurent Cassegrain công bố vào năm 1672. Nó có một gương chính hình parabol và một gương thứ cấp hình hyperbol phản xạ ánh sáng trở lại qua một lỗ trên gương chính.

Đường dẫn ánh sáng trong kính thiên văn Cassegrain được mô tả như sau (Hình 34):



Hình 34

Kính thiên văn Ritchey – Chrétien được phát minh bởi George Willis Ritchey và Henri Chrétien vào đầu những năm 1910, là một gương phản xạ Cassegrain chuyên dụng có hai gương hyperbol (thay vì một gương chính hình parabol).

### c. Ứng dụng quang học và âm học của parabol

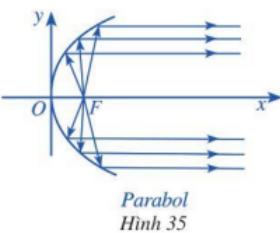
Parabol có một tính chất quan trọng như sau: Nếu đặt một nguồn sáng tại tiêu điểm  $F$  của nó thì toàn bộ các tia sáng đi ra từ  $F$ , sau khi phản xạ tại parabol, sẽ truyền đi theo đường thẳng song song với trục đối xứng của nó. Tính chất này được gọi là tính phản xạ của parabol (Hình 35).

Parabol có nhiều ứng dụng trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, các gương lắp phía sau đèn trước xe hơi được chế tạo ở dạng paraboloid, tức là hình dạng được tạo ra bằng cách quay parabol xung quanh trục của nó. Gương parabol giúp người lái xe nhìn thấy xa hơn về phía trước (Hình 36).

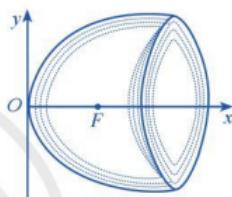
Ngược lại với tính chất trên, parabol cũng có một tính chất sau: Một tia song song với trục đối xứng của parabol, sau khi phản xạ tại parabol, sẽ đi qua tiêu điểm của parabol (Hình 37).

Cũng có nhiều ứng dụng của parabol trong quang học dựa trên tính chất đó. Chẳng hạn, gương parabol có thể hội tụ một chùm sáng song song vào một nguồn điểm. Gương parabol không lò dùng trong kính thiên văn thu thập ánh sáng từ những nơi xa xôi của vũ trụ, nơi còn có những nguồn phát ánh sáng vào trong không gian dưới dạng đèn pha.

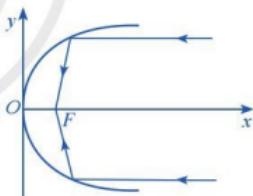
Vi sóng âm thanh có cơ chế hoạt động tương tự như ánh sáng nên tính chất âm thanh hội tụ tại tiêu điểm được gọi là tính chất âm học của parabol. Đây là nguyên do ở trong một số phòng trưng bày nghệ thuật, những tiếng thi thảm của ai đó lại được nghe rõ khi bạn đứng ở một chỗ nhất định, còn ở những chỗ khác thi không nghe được. Chỗ nhất định đó thật ra là tiêu điểm của cấu trúc parabol. Gương parabol không lò dùng trong kính thiên văn thu thập tín hiệu từ những nơi xa xôi của vũ trụ, nơi còn có những nguồn phát tín hiệu vào trong không gian dưới dạng sóng âm.



Parabol  
Hình 35



Paraboloid  
Hình 36

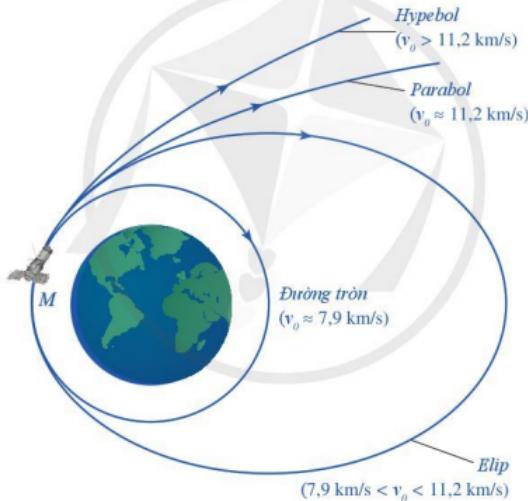


Hình 37

## 2. Mô tả quỹ đạo của tàu vũ trụ

Khi thiết lập quỹ đạo bay cho các con tàu vũ trụ phóng đi từ Trái Đất, các nhà khoa học luôn chọn quỹ đạo là đường conic. Hình dạng của quỹ đạo phụ thuộc vào tốc độ của tàu vũ trụ (*Hình 38*). Ta có bảng tương ứng giữa tốc độ và quỹ đạo như sau:

Tốc độ $v_0$ của tàu vũ trụ	Hình dạng quỹ đạo của tàu vũ trụ
7,9 km/s	Đường tròn
$7,9 \text{ km/s} < v_0 < 11,2 \text{ km/s}$	Elip
$11,2 \text{ km/s}$	Một phần của parabol
$v_0 > 11,2 \text{ km/s}$	Một phần của hyperbol



Hình 38

### BÀI TẬP

- Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với bốn đỉnh  $A(-4 ; 3)$ ,  $B(4 ; 3)$ ,  $C(4 ; -3)$ ,  $D(-4 ; -3)$ .
  - Viết phương trình chính tắc của elip nhận  $ABCD$  là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ elip đó.
  - Viết phương trình chính tắc của hyperbol nhận  $ABCD$  là hình chữ nhật cơ sở. Vẽ hyperbol đó.

2. Các đường conic có phương trình như sau là đường elip hay hyperbol? Tìm độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm, tiêu cự, tâm sai của các đường conic đó.

a)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ;      b)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ .

3. Cho parabol có phương trình chính tắc  $y^2 = 2x$ . Tìm tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của parabol và vẽ parabol đó.

4. Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: x = -5$  và điểm  $F(-4; 0)$ .

Cho ba điểm  $A(-3; 1), B(2; 8), C(0; 3)$ .

a) Tính các tí số sau:  $\frac{AF}{d(A, \Delta)}, \frac{BF}{d(B, \Delta)}, \frac{CF}{d(C, \Delta)}$ .

b) Hỏi mỗi điểm  $A, B, C$  lần lượt nằm trên loại đường conic nào nhận  $F$  là tiêu điểm và  $\Delta$  là đường chuẩn ứng với tiêu điểm đó?

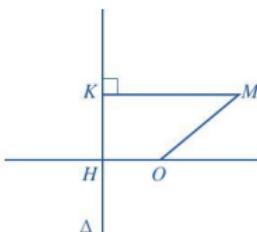
5. Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1 342 dặm (1 dặm xấp xỉ 1,609 km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó, biết bán kính của Trái Đất xấp xỉ 4 000 dặm.

(*Nguồn: Sách giáo khoa Hình học 10, Ban Nâng cao, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2018*)

6. Sao Diêm Vương chuyển động xung quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip có một trong hai tiêu điểm là tâm của Mặt Trời. Biết elip này có bán trục lớn  $a \approx 5,906 \cdot 10^6$  km và tâm sai  $e \approx 0,249$ . (*Nguồn: <https://vi.wikipedia.org>*)

Tìm khoảng cách nhỏ nhất (gần đúng) giữa Sao Diêm Vương và Mặt Trời.

7. Cho đường thẳng  $\Delta$  và điểm  $O$  sao cho khoảng cách từ  $O$  đến  $\Delta$  là  $OH = 1$  (Hình 39).  
Với mỗi điểm  $M$  di động trong mặt phẳng, gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $\Delta$ .  
Chứng minh tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng sao cho  $MK^2 - MO^2 = 1$  là một đường parabol.



Hình 39



## CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT

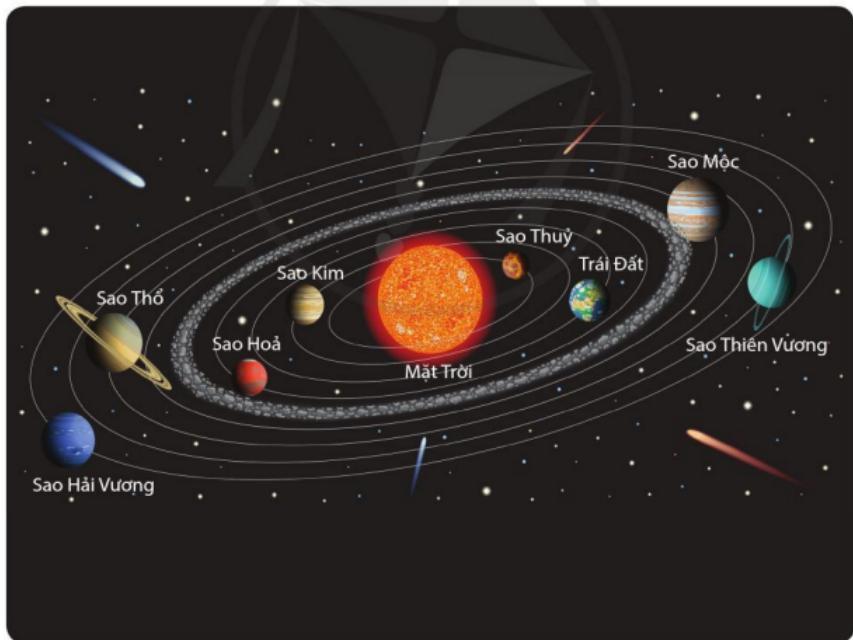
### Ba định luật Kepler

Johannes Kepler (Giô-han Kê-ple) là một nhà toán học, thiên văn học người Đức. Ông là một trong những người đặt nền móng cho cuộc cách mạng khoa học thế kỉ XVII. Kepler được biết đến nhiều nhất bởi các định luật về chuyển động của các hành tinh trong Hệ Mặt Trời.

Tám hành tinh trong Hệ Mặt Trời bao gồm: bốn hành tinh nhỏ ở vòng trong là Sao Thủỷ, Sao Kim, Trái Đất và Sao Hoả; bốn hành tinh lớn ở vòng ngoài là Sao Mộc, Sao Thổ, Sao Thiên Vương và Sao Hải Vương. Các thiên thể này đều chuyển động xung quanh Mặt Trời với các quỹ đạo khác nhau, tuy nhiên tất cả chúng đều tuân theo những quy luật nhất định.



Johannes Kepler  
(27/12/1571 – 15/11/1630)



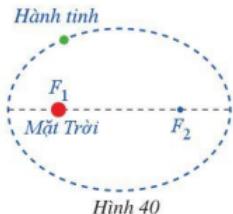
Hệ Mặt Trời

(Nguồn: Sách giáo khoa Khoa học Tự nhiên 6, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2021)

**1. Chuyển động của mỗi thiên thể xung quanh Mặt Trời là quỹ đạo được xác định như sau:**

### Định luật thứ nhất của Kepler:

Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời theo các quỹ đạo là các đường elip mà Mặt Trời là một tiêu điểm (Hình 40).



Hình 40

- Tâm sai của các quỹ đạo của tám hành tinh nói trên như sau:

Sao Kim  $e \approx 0,0068$ .

Trái Đất  $e \approx 0,0167$ .

Sao Mộc  $e \approx 0,0484$ .

Sao Hải Vương  $e \approx 0,0082$ .

Sao Thuỷ  $e \approx 0,2056$ .

Sao Thiên Vương  $e \approx 0,046$ .

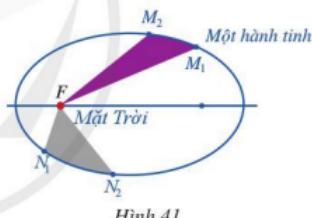
Sao Thổ  $e \approx 0,0543$ .

Sao Hoả  $e \approx 0,0934$ .

**2. Giả sử một hành tinh quay quanh Mặt Trời với quỹ đạo là elip ( $E$ ). Xem Mặt Trời là tiêu điểm  $F$  của ( $E$ ). Giả sử trong cùng một khoảng thời gian  $t$  thì hành tinh di chuyển được từ  $M_1$  đến  $M_2$  hoặc từ  $N_1$  đến  $N_2$  (Hình 41). Khi đó, diện tích hai "tam giác cong"  $FM_1M_2$  và  $FN_1N_2$  bằng nhau.**

### Định luật thứ hai của Kepler:

Đoạn thẳng nối từ Mặt Trời đến hành tinh quét được những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau (Hình 41).

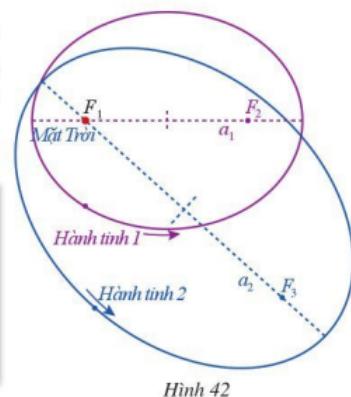


Hình 41

**3. Gọi  $T_1, T_2$  lần lượt là thời gian để hai hành tinh bát kỉ quay hết một vòng quanh Mặt Trời và  $a_1, a_2$  lần lượt là bán trục lớn của các quỹ đạo elip chuyên động của hai hành tinh trên. Ta có:  $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$ .**

### Định luật thứ ba của Kepler:

Bình phương chu kỳ quỹ đạo của một hành tinh tỉ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo elip của hành tinh đó (Hình 42).



Hình 42

# BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
chi tiêu cố định của chính phủ	bao gồm các khoản chi tiêu của chính phủ cho các cấp chính quyền từ trung ương đến địa phương như chi cho quốc phòng, luật pháp, đường sá, cầu cống, giáo dục, y tế, ...	20
giả thiết quy nạp	giả thiết ở bước quy nạp ( <i>Bước 2</i> ) rằng mệnh đề đúng với số $k$ nguyên dương	24
hệ thống GPS	Global Positioning System – Hệ thống định vị toàn cầu là hệ thống xác định vị trí dựa trên vị trí của các vệ tinh nhân tạo, do Bộ Quốc phòng Hoa Kỳ thiết kế, xây dựng, vận hành và quản lý	14
lãi suất	tỷ lệ mà theo đó tiền lãi được bên vay trả cho việc sử dụng tiền mà họ vay từ một bên cho vay	12
lượng cầu	mô tả tổng số lượng hàng hoá hoặc dịch vụ mà người tiêu dùng có nhu cầu trong một khoảng thời gian nhất định	19
lượng cung	mô tả số lượng hàng hoá hoặc dịch vụ được cung cấp tại một mức giá thị trường nhất định	19
quy nạp toán học	một phương pháp chứng minh toán học dùng để chứng minh một mệnh đề về bất kì tập hợp nào được xếp theo thứ tự. Thông thường nó được dùng để chứng minh mệnh đề áp dụng cho tập hợp tất cả các số tự nhiên	23
sóng âm thanh	những sóng cơ học, được truyền đi trong môi trường rắn, lỏng, khí. Khi đến tai người, sóng âm thanh sẽ làm cho màng nhĩ dao động, gây ra cảm giác cảm thụ âm	65
tiền tín dụng	tiền nằm trong các tài khoản mở ở ngân hàng và được hình thành trên cơ sở các khoản tiền gửi vào ngân hàng	22
tổng thu nhập quốc dân	chỉ số kinh tế xác định tổng thu nhập của một quốc gia trong một thời gian, thường là một năm	20
trái phiếu	một chứng nhận nghĩa vụ nợ của người phát hành phải trả cho người sở hữu trái phiếu đối với một khoản tiền cụ thể (mệnh giá của trái phiếu), trong một thời gian xác định và với một khoản lợi tức quy định	22
trạng thái cân bằng thị trường	trạng thái mà ở đó lượng hàng hoá và dịch vụ mà người mua sẵn sàng và có khả năng mua đúng bằng lượng hàng hoá mà người bán sẵn sàng bán và có khả năng bán	19
tốc độ vũ trụ	tốc độ một vật cần có để nó chuyển động theo quỹ đạo tròn gần bề mặt của một vật thể khác hoặc thoát ra khỏi trường hấp dẫn của vật thể khác	49
viễn thông	việc truyền dẫn thông tin giao tiếp qua một khoảng cách đáng kể về địa lí	13

# BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

	TỪ NGỮ	TRANG		TỪ NGỮ	TRANG
B	bán kính qua tiêu của một điểm thuộc elip	43	P	phương pháp quy nạp toán học	23
	bán kính qua tiêu của một điểm thuộc hypebol	52		phương trình bậc nhất ba ẩn	5
	bán kính qua tiêu của một điểm thuộc parabol	58		quỹ đạo của tàu vũ trụ	66
	bán trục bé	39		sử dụng máy tính cầm tay để tìm nghiệm của hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	10
C	bán trục lớn	39	Q	tam giác Pascal	33
	công thức nhị thức Newton	31		tâm sai của elip	42
Đ	đỉnh của elip	40	S	tâm sai của hypebol	51
	đỉnh của hypebol	50		tâm sai của parabol	58
	đỉnh của parabol	57		tham số tiêu	57
	độ dài của trục bé	39		tiêu cự của elip	39
G	độ dài của trục lớn	39	T	tiêu cự của hypebol	49
	đường chuẩn của elip	45		tiêu điểm của đường conic	60
	đường chuẩn của hypebol	53		tiêu điểm của elip	39
	giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn bằng phương pháp Gauss	7		tiêu điểm của hypebol	49
H	giao của mặt phẳng với mặt nón	62	U	tiêu điểm của parabol	57
	hệ phương trình bậc nhất ba ẩn	6		tính đối xứng của elip	39
	hệ số trong khai triển nhị thức Newton	34		tính đối xứng của hypebol	49
	hình chữ nhật cơ sở (đối với elip)	40		tính đối xứng của parabol	57
L	hình chữ nhật cơ sở (đối với hypebol)	50		trục ảo	50
	liên hệ giữa đường tròn và đường elip	46		trục bé	39
M	mặt nón tròn xoay	62		trục lớn	39
	mô tả ba đường conic dựa trên giao của mặt phẳng và mặt nón	62		trục thực	49
	mô tả ba đường conic dựa trên tiêu điểm và đường chuẩn	60		ứng dụng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn	13
				ứng dụng quang học của elip	63

## NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

**Địa chỉ:** Tầng 6, Toà nhà số 128 đường Xuân Thuỷ, quận Cầu Giấy, TP. Hà Nội

**Điện thoại:** 024.37547735

**Email:** nxhb@hnue.edu.vn | **Website:** www.nxbdhsp.edu.vn

### *Chịu trách nhiệm xuất bản:*

Giám đốc: NGUYỄN BÁ CƯỜNG

### *Chịu trách nhiệm nội dung:*

Tổng biên tập: ĐỖ VIỆT HÙNG

### *Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:*

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

*Biên tập viên:*

TẠ THỊ ÁNH – NGUYỄN THỊ NGÂN – ĐÀO ANH TIẾN

*Thiết kế sách:*

ĐINH THỊ BÌNH – PHAN THỊ LƯƠNG

*Trình bày bìa:*

TRẦN TIẾU LÂM – ĐINH THỊ BÌNH

*Sửa bản in:*

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

---

## CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 10

Mã số: .....

ISBN ....

In ..... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại .....

Địa chỉ: .....

Số xác nhận đăng ký xuất bản: .....

Quyết định xuất bản số: .....

In xong và nộp lưu chiểu tháng ..... năm 20.....

# Mang cuộc sống vào bài học Đưa bài học vào cuộc sống



*S*

ách Toán 10 là cuốn sách giáo khoa dành cho học sinh lớp 10, thuộc bộ sách giáo khoa "Cánh Diều", thực hiện theo "Chương trình Giáo dục phổ thông 2018"

Sách gồm hai tập và chuyên đề học tập được biên soạn đáp ứng yêu cầu phát triển phẩm chất và năng lực của học sinh. Các hoạt động học tập được tổ chức theo tiến trình từ dễ đến khó, hướng đến việc khám phá, phát hiện, thực hành, vận dụng giải quyết vấn đề trong thực tiễn, phù hợp với trình độ nhận thức của học sinh. Sách được trình bày hấp dẫn, khơi gợi sự tò mò, kích thích hứng thú, tạo dựng niềm tin trong học tập môn Toán ở học sinh.

Sách là sản phẩm tâm huyết của tập thể tác giả – những nhà giáo, nhà khoa học giàu kinh nghiệm trong giáo dục phổ thông.



- Quét mã QR hoặc dùng trình duyệt web để truy cập website bộ sách Cánh Diều: [www.hoc10.com](http://www.hoc10.com)
- Vào mục Hướng dẫn ([www.hoc10.com/huong-dan](http://www.hoc10.com/huong-dan)) để kiểm tra sách giả và xem hướng dẫn kích hoạt sử dụng học liệu điện tử.

SỬ DỤNG

[DEMCHONGGIA.hoc10.vn](http://DEMCHONGGIA.hoc10.vn)

SÁCH KHÔNG BÁN