# Problem: Trigonometry In Triangles
# Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 28 tháng 9 năm 2023

**Tóm tắt nội dung**

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set $\mathbb{Q}$ of trigonometrys [pdf].[1] [TEX][2].

## Mục lục



## 1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

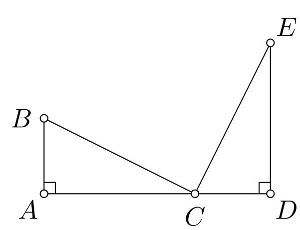
**Ký hiệu.** $\Delta ABC$ vuông tại $A$: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$.
**Tính chất.** $\boxed{1}$ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận & đảo*: $\Delta ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

**1** ([Bìn23], Ví dụ 1, p. 84)**.** *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng* 12 cm*, 2 đường chéo $AC, BD$ vuông góc với nhau, $BD =$* 15 cm*.*

**2** ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 85)**.** *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD =$* 10 cm*, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

**3** ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 85)**.** *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm*, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm*.*

**4** ([Bìn23], 1., p. 86)**.** *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*




**5** ([Bìn23], 2., p. 86)**.** *Cho $\Delta ABC$ cân có $AB = AC =$* 9 cm*, $BC =$* 12 cm*, đường cao $AH$, $I$ là hình chiếu của $H$ trên $AC$. (a) Tính độ dài $CI$. (b) Kẻ đường cao $BK$ của $\Delta ABC$. Chứng minh điểm $K$ nằm giữa 2 điểm $A$, $C$.*

**6** ([Bìn23], 3., p. 86)**.** *Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

**7** ([Bìn23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của $\Delta ABC$ cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm*.*

**8** ([Bìn23], 5., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH.*

**9** ([Bìn23], 6., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH, $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH.*

**10** ([Bìn23], 7., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB.*

**11** ([Bìn23], 8., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

**12** ([Bìn23], 9., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC.*

**13** ([Bìn23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm$^2$ *&* 96 cm$^2$*. Tính độ dài cạnh huyền.*

**14** ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh $AH = 3DH$.*

**15** ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5 : 4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm.

**16** ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1 : 3$*. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

**17** ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho $\Delta ABC$ có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh $HM = 2$.*

**18** ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm*, đáy lớn dài* 50 cm*.*

**19** ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

**20** ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.*

**21** ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông ABCD có cạnh* 1 dm*. Tính cạnh của $\Delta AEF$ đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

**22** ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) $3, 4, 5$. (b) $12, 15, 20$.*

**23** (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là $h_a, h_b, h_c$. Tìm điều kiện cần & đủ theo $h_a, h_b, h_c$ để $\Delta ABC$ vuông.*

**24** ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh $\Delta ABC$ là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.*

**25** ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các $\Delta ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

**26** ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

**27** ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho $\Delta ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.*

**28** ([Bìn23], 24., p. 88). *$\Delta ABC$ vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BD ở I. Biết $BI = 10\sqrt{5}$* cm*, $DI = 5\sqrt{5}$* cm*. Tính diện tích $\Delta ABC$.*

**29** ([Bìn23], 25., p. 88). *$\Delta ABC$ vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính BC. (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính AB, AC.*

**30** ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính $\widehat{BIM}$. (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của $\Delta ABC$ tỷ lệ với 3 số nào?*

**31** ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$*?*

**32** ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại A,* $BC = 3\sqrt{5}$ cm. *Hình vuông ADEF cạnh* 2 cm *có* $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. *Tính AB, AC.*

**33** ([Bìn23], 29., p. 88). $\Delta ABC$ *cân tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. *Tính AB.*

**34** ([Bìn23], 30., p. 88). $\Delta ABC$ *cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết* $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

**35** ([Bìn23], 31., p. 88). $\Delta ABC$ *có* $BC = 40$ cm, *đường phân giác AD dài* 45 cm, *đường cao AH dài* 36 cm. *Tính BD, CD.*

# 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

**36** ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 89). *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

**37** ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 90). *Xét* $\Delta ABC$ *vuông tại A,* $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, *đường trung tuyến AM, đường cao AH,* $MA = MB = MC = a$. *Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *(b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. *(c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

**38** ([Bìn23], 32., p. 91). *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* $72^\circ$ *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm. *(b) Dựng góc* $20^\circ$ *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm, *cạnh bên* 6 cm.

**39** ([Bìn23], 33., p. 91). $\Delta ABC$ *có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$.

**40** ([Bìn23], 34., p. 91). *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. *Tính* $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

**41** ([Bìn23], 35., p. 91). *Cho hình vuông ABCDN. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính* $\cos\widehat{MAN}$.

**42** ([Bìn23], 36., p. 91). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho* $HE = 2HA$. *Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$.

**43** ([Bìn23], 37., p. 91). *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

**44** ([Bìn23], 38., p. 91). *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

**45** ([Bìn23], 39., p. 91). *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

**46** ([Bìn23], 40., p. 91). *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

# 3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

**47** ([Bìn23], Ví dụ 6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

*Chứng minh.* Gọi $\alpha$ là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng $AB, AC$ của $\Delta ABC$ ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao $BH$, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

**48** (Mở rộng [Bìn23], Ví dụ 6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

*Chứng minh.* Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, $\forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi $\Delta ABC$. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát*:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

**49** ([Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của $\Delta ABC$. (b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.*

**50** (Tổng quát [Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** *Nếu $\Delta ABC$ có $\widehat{A}$ tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng $2, 3, 4$.*

**51** ([Bìn23], 41., p. 94)**.** *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh 40 cm của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng $40°, 55°$. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng $60°, 80°$.*

**52** ([Bìn23], 42., p. 94)**.** *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 105°, \widehat{B} = 45°, BC = 4$ cm. Tính $AB$, $AC$.*

**53** ([Bìn23], 43., p. 94)**.** *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 60°$, $AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính $BC$.*

**54** ([Bìn23], 44., p. 94)**.** *Cho 1 hình vuông có cạnh 1 dm. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

**55** ([Bìn23], 45., p. 94)**.** *$\Delta ABC$ đều có cạnh 60 cm. Trên cạnh $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của $AD$ cắt 2 cạnh $AB$, $AC$ theo thứ tự ở $E$, $F$. Tính độ dài 3 cạnh của $\Delta DEF$.*

**56** ([Bìn23], 46., p. 94)**.** *Cho $\Delta ABC$ có $AB = c$, $CA = b$, đường phân giác $AD$, đường trung tuyến $AM$. Đường thẳng đối xứng với $AM$ qua $AD$ cắt $BC$ ở $N$. Tính $\dfrac{BN}{CN}$.*

**57** ([Bìn23], 47., p. 94)**.** *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

**58** ([Bìn23], 48., p. 94)**.** *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau ở $O$ & không vuông góc với nhau. Gọi $H$ & $K$ lần lượt là trực tâm của $\Delta AOB, \Delta COD$. Gọi $G, I$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta BOC, \Delta AOD$. (a) Gọi $E$ là trọng tâm của $\Delta AOB$, $F$ là giao điểm của $AH$ & $DK$. Chứng minh $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.*

**59** ([Bìn23], 49., p. 94)**.** *Cho $\Delta ABC$ nhọn, 3 điểm $D, E, F$ lần lượt thuộc 3 cạnh $AB$, $BC$, $CA$. Chứng minh trong 3 $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CE$ tồn tại 1 tam giác có diện tích $\le \frac{1}{4}$ diện tích $\Delta ABC$. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích $\Delta ABC$?*

## 4 Miscellaneous

**60** ([Kiê21], VD1, p. 9)**.** *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, dựng đường cao $AH$. Tính độ dài các yếu tố còn lại $(a, b, c, h, b', c', \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ của $\Delta ABC$ trong mỗi trường hợp: (a) $AB = a$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (b) $BC = 2a$, $BH = \dfrac{1}{4}BC$. (c) $AB = a$, $CH = \dfrac{3}{2}a$. (d) $AC = a\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (e) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$, $BC = 5a$.*

**61** ([Kiê21], VD2, p. 10)**.** *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, $BC = 2a$, gọi $O$ là trung điểm của $BC$. Dựng $AH \perp BC$. (a) Khi $\widehat{ACB} = 30°$. Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi $M$ là trung điểm của $AC$. Tính độ dài $BM$. (c) Khi $\widehat{ACB} = 30°$. 2 đoạn thẳng $AO, BM$ cắt nhau ở điểm $G$. Tính độ dài $CG$. (d) Giả sử điểm $A$ thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = 90°$, $BC = 2a$. $\Delta ABC$ phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích $\Delta AHO$ lớn nhất? (e) Giả sử $CG$ cắt $AB$ tại điểm $N$. Tứ giác $AMON$ là hình gì? $\Delta ABC$ phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác $AMON$ lớn nhất?*

**62** ([Kiê21], VD3 p. 10)**.** *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, kẻ đường cao $AH$. Từ $H$ dựng $HM, HN$ lần lượt vuông góc với $AC, AB$. Chứng minh: (a) $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$. (b) $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$. (c) $AM \cdot AN = \dfrac{AH^3}{BC}$. (d) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BN}{CM}$. (e) $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$. (f) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.*

**63** ([Kiê21], VD4, p. 12)**.** *Cho $\Delta ABC$ nhọn có 3 đường cao $AD, BE, CF$ cắt nhau tại $H$, gọi $O$ là trung điểm của $BC$, $I$ là trung điểm của $AH$, $K$ là giao điểm của $EF, OI$ biết $BC = 2a$. Chứng minh: (a) $\Delta IEO, \Delta IFO$ là 2 tam giác vuông. (b) $OI$ là trung trực của $EF$. (c) $AH^2 = 4IK \cdot IO$. (d) $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$. (e) $\dfrac{EF}{BC} \cdot \dfrac{FD}{CA} \cdot \dfrac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$. (f) $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$. (g) $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$. (h) $\tan B \tan C = \dfrac{AD}{DH}$. (i) Giả sử $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{ACB} = 45°$. Tính $S_{ABC}$ theo $a$. (j) Gọi $M$ là điểm trên $AH$ sao cho $\widehat{BMC} = 90°$. Chứng minh $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC}S_{BHC}}$.*

**64** ([Kiê21], VD5, p. 14)**.** *Cho $\Delta ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. (b) Công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. (d) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$. (e) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ với $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$.*

**65** ([Kiê21], VD6, p. 16)**.** *Cho $\Delta ABC$ với 3 đỉnh $A, B, C$ & 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là $a, b, c$. Gọi $D$ là chân đường phân giác trong góc $A$. Chứng minh: (a) $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$. (b) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$. (c) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. (d) $AD = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$.*

**66** ([Kiê21], VD7, p. 19). *Cho* $\Delta ABC$ *cân,* $\widehat{A} = 20^\circ$, $AB = AC$, $AC = b$, $BC = a$. *Chứng minh* $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

**67** ([Kiê21], VD8, p. 20). *Tính* $\sin 22^\circ 30', \cos 22^\circ 30', \tan 22^\circ 30', \cot 22^\circ 30'$.

**68** ([Kiê21], VD9, p. 20). *Cho* $\Delta ABC$. *Chứng minh* $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$.

**69** ([Kiê21], VD10, p. 21). *Chứng minh* $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**70** ([Kiê21], VD11, p. 22). *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**71** ([Kiê21], VD12, p. 22). *Chứng minh* $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**72** ([Kiê21], VD13, p. 23). *Chứng minh hệ thức: (a)* $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$. *(b)* $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$.

**73** ([Kiê21], VD14, p. 23). *Cho* $\Delta ABC$*, có* $\widehat{A} = 60^\circ$ *& đường phân giác AD. Chứng minh* $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.

**74** ([Kiê21], VD15, p. 24). *Chứng minh trong* $\Delta ABC$, $\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $\widehat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

**75** ([Kiê21], VD16, p. 24). *Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.*

**76** ([Kiê21], VD17, p. 25). *Cho* $\Delta ABC$. *Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ* $B, C$ *vuông góc với nhau khi & chỉ khi* $b^2 + c^2 = 5a^2$.

**77** ([Kiê21], VD18, p. 25). *Cho* $\Delta ABC$. *Trung tuyến AD, đường cao BH, & phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức* $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.

**78** ([Kiê21], VD19, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *thỏa* $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. *Chứng minh* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

**79** ([Kiê21], VD20, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại A, đường cao AH. Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn* $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AH} = 1$. *Xác định 3 cạnh của tam giác.*

**80** ([Kiê21], VD21, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *thỏa mãn* $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180^\circ$. *Chứng minh* $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.

## Tài liệu


[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Kiê21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9*. Tái bản lần thứ 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.