

Problem: Trigonometry In Triangles
Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometrys \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary-STEM-&-beyond/elementary-mathematics/grade-9/trigonometry/problem-set-Q-of-trigonometrys-pdf).¹ [TeX]².

Muc luc

1	1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2	2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	3
3	3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông	3
4	4 Miscellaneous	3
	Tài liệu	3

1 1 Số Hê Thức Lượng về Canh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. $\triangle ABC$ vuông tại A : $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, $b' := CH$, $c' := BH$, $h := AH$.

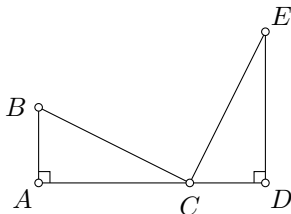
Tính chất. [1] $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. [2] Định lý Pythagore thuận & đảo: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. [3] $h^2 = b'c'$. [4] $ah = bc = 2S_{ABC}$. [5] $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bin23], Ví dụ 1, p. 84). *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.*

Bài toán 2 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 85). *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

Bài toán 3 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.*

Bài toán 4 ([Bin23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\triangle ABC = \triangle DCE$:*



Bài toán 5 ([Bin23], 2., p. 86). Cho $\triangle ABC$ cân có $AB = AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm, đường cao AH , I là hình chiếu của H trên AC . (a) Tính độ dài CI . (b) Kẻ đường cao BK của $\triangle ABC$. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C .

Bài toán 6 ([Bìn23], 3., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://ngbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

Bài toán 7 ([Bin23], 4., p. 86). Tính cạnh đáy BC của $\triangle ABC$ cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.

Bài toán 8 ([Bin23], 5., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác AD , đường cao AH . Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH , BH , DH .

Bài toán 9 ([Bin23], 6., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH .

Bài toán 10 ([Bin23], 7., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của \widehat{HAC} cắt HC ở D . Gọi K là hình chiếu của D trên AC . Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB .

Bài toán 11 ([Bin23], 8., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD , CE vuông góc với nhau. Tính BC .

Bài toán 12 ([Bin23], 9., p. 86). Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB , AC .

Bài toán 13 ([Bin23], 10., p. 86). Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng 54 cm² & 96 cm². Tính độ dài cạnh huyền.

Bài toán 14 ([Bin23], 11., p. 86). Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là hình chiếu của C trên BM , H là hình chiếu của D trên AC . Chứng minh $AH = 3DH$.

Bài toán 15 ([Bin23], 12., pp. 86–87). (a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k . Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng 5 : 4 & cạnh huyền dài 82 cm.

Bài toán 16 ([Bin23], 13., p. 87). Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với 1 : 3. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?

Bài toán 17 ([Bin23], 14., p. 87). Cho $\triangle ABC$ có độ dài 3 cạnh AB , BC , CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh $HM = 2$.

Bài toán 18 ([Bin23], 15., p. 87). 1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài 14 cm, đáy lớn dài 50 cm.

Bài toán 19 ([Bin23], 16., p. 87). 1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.

Bài toán 20 ([Bin23], 17., p. 87). Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh a , vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I . Chứng minh $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.

Bài toán 21 ([Bin23], 18., p. 87). Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1 dm. Tính cạnh của $\triangle AEF$ đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC .

Bài toán 22 ([Bin23], 19., p. 87). Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) 3, 4, 5. (b) 12, 15, 20.

Bài toán 23 (Mở rộng [Bin23], 19., p. 87). Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c . Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để $\triangle ABC$ vuông.

Bài toán 24 ([Bin23], 20., p. 87). Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD , CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.

Bài toán 25 ([Bin23], 21., p. 87). Xét các $\triangle ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D , E lần lượt là hình chiếu của H trên AC , AB . Tìm GTLN của: (a) DE . (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.

Bài toán 26 ([Bin23], 22., pp. 87–88). Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

Bài toán 27 ([Bin23], 23., p. 88). Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.

Bài toán 28 ([Bin23], 24., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của \widehat{A} cắt BD ở I . Biết $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Bài toán 29 ([Bin23], 25., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính BC . (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính AB , AC .

Bài toán 30 ([Bin23], 26., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC . (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính \widehat{BIM} . (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của $\triangle ABC$ tỷ lệ với 3 số nào?

Bài toán 31 ([Bin23], 27., p. 88). 1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) Độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: 17, 13, 35, 41, 22?

Bài toán 32 ([Bin23], 28., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông $ADEF$ cạnh 2 cm có $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. Tính AB , AC .

Bài toán 33 ([Bin23], 29., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính AB .

Bài toán 34 ([Bin23], 30., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AD , trực tâm H . Tính độ dài AD , biết $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

Bài toán 35 ([Bin23], 31., p. 88). $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính BD , CD .

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 36 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 89). Tính $\tan 15^\circ$ mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.

Bài toán 37 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 90). Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM , đường cao AH , $MA = MB = MC = a$. Chứng minh: (a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. (b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$. (c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.

Bài toán 38 ([Bin23], 32., p. 91). Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc 72° bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng 1 cm & 3 cm. (b) Dựng góc 20° bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy 2 cm, cạnh bên 6 cm.

Bài toán 39 ([Bin23], 33., p. 91). $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC . Tính $\frac{\tan B}{\tan C}$.

Bài toán 40 ([Bin23], 34., p. 91). Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

Bài toán 41 ([Bin23], 35., p. 91). Cho hình vuông $ABCDN$. M , N lần lượt là trung điểm của BC , CD . Tính $\cos \widehat{MAN}$.

Bài toán 42 ([Bin23], 36., p. 91). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với A qua B . Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho $HE = 2HA$. Chứng minh $\widehat{DEC} = 90^\circ$.

Bài toán 43 ([Bin23], 37., p. 91). Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.

Bài toán 44 ([Bin23], 38., p. 91). Tính $\tan 22^\circ 30'$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

Bài toán 45 ([Bin23], 39., p. 91). Chứng minh $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

Bài toán 46 ([Bin23], 40., p. 91). Tính $\cos 36^\circ$, $\cos 72^\circ$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.