Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Function & Graph – Bài Tập: Hàm Số & Đồ Thị.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/problem/NQBH_function_graph_problem.tex.
- *Problem & Solution: Function & Graph – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số & Đồ Thị.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/function_graph/solution/NQBH_function_graph_solution.tex.

Mục lục

Resources – Tài nguyên.

1. [Hải+25]. Phan Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10. Tập 2.*

1 General Function – Đại Cương Về Hàm Số

Abbreviations – Viết tắt

1. TXĐ: Tập xác định.

1 ([Hải+25], VD1, p. 5). *Công thức tính chu vi & diện tích hình tròn* $P = 2\pi r, S = \pi r^2$ *có là hàm số không?*

2 ([Hải+25], VD2, p. 6). *Tìm* TXĐ *của hàm số* $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

3. *Biện luận theo 4 tham số* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ TXĐ *của hàm số* $f(x) = \sqrt{ax + \sqrt{bx + c} + d}$.

4 ([Hải+25], VD3, p. 6). *Chứng minh hàm số* $f(x) = x^2$ *đồng biến trên* $[0, +\infty)$ *& nghịch biến trên* $(-\infty, 0]$.

5. *Biện luận theo 3 tham số* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số* $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

6 ([Hải+25], VD4, p. 7). *Chứng minh hàm* $f(x) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x}$ *là hàm chẵn trên* TXĐ *của nó.*

7 ([Hải+25], VD5, p. 7). *Chứng minh hàm* $f(x) = (e^x + e^{-x})\cos x$ *là hàm chẵn trên* TXĐ *của nó.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

8 ([Hải+25], VD6, p. 7). *Chứng minh hàm $f(x)=\cos x$ có chu kỳ cơ sở là 2π.*

Tồn tại các hàm tuần hoàn nhưng không có chù kỳ cơ sở.

9 ([Hải+25], VD7, p. 7). *Tìm chu kỳ cơ sở của hàm Dirichlet*

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1 & \textit{if } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \textit{if } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases} \tag{1}$$

10 ([Hải+25], VD8, p. 7). *Cho $a,b,c,d\in\mathbb{R}^\star$. Chứng minh hàm số $f(x)=a\sin cx+b\cos dx$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ khi & chỉ khi $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$.*

11 ([Hải+25], VD9, p. 7). *Chứng minh hàm số $f(x)=\cos x+\cos x\sqrt{2}$ không tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.*

12 ([Hải+25], VD10, p. 8). *Cho 2 hàm số $f(x)=x^2+5, g(x)=x^3+2x^2+1$. Tính $f(g(x))$.*

13 ([Hải+25], 17.1., p. 8). *Tìm* TXĐ *của hàm số: $f(x)=\dfrac{|x+1|}{(x-3)\sqrt{2x-1}}, g(x)=\dfrac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}, h(x)=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$.*

14 ([Hải+25], 17.2., p. 8). *2 hàm số $f(x)=\dfrac{|x|}{x}, g(x)=1$ có bằng nhau không?*

15 ([Hải+25], 17.3., p. 8). *Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f_n(x)$ với $f_1(x)\coloneqq f(x), f_n(x)\coloneqq f(f_{n-1}(x))$.*

16 ([Hải+25], 17.4., p. 8). *Cho $f(x)$ là 1 hàm bất kỳ với* TXĐ $\mathbb{R}$. *Chứng minh $f(x)$ luôn biểu diễn được 1 cách duy nhất dưới dạng tổng của 1 hàm số chẵn & 1 hàm số lẻ.*

17 ([Hải+25], 17.5., p. 8). *Cho $f(x)$ là 1 hàm tuần hoàn bất kỳ với* TXĐ $\mathbb{R}$ *& chu kỳ cơ sở là T. Tìm chu kỳ cơ sở của hàm số $y(x)=f(ax+b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$.*

18 ([Hải+25], 17.6., p. 8). *Cho $f(x)$ là 1 hàm bất kỳ với* TXĐ D. *Giả sử tồn tại $a\in\mathbb{R}^\star$ thỏa $f(x+a)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$. Chứng minh $f(x)$ là hàm tuần hoàn.*

19 ([Hải+25], 17.7., p. 8). *Cho $a\in\mathbb{R}^\star$, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ thỏa $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f(x)^2}$, $\forall x>0$. Chứng minh $f(x)$ là hàm tuần hoàn.*

20 ([Hải+25], 17.8., p. 8). *Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x+3)\le f(x)+3$, $f(x+2)\ge f(x)+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh $g(x)\coloneqq f(x)-x$ là hàm tuần hoàn.*

2 2nd-Order Function – Hàm Số Bậc 2

$\boxed{1}$ Định nghĩa. *Hàm số bậc 2* là hàm số có dạng $y=ax^2+bx+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\ne0$: 3 hệ số, có TXĐ $D=\mathbb{R}$. $\boxed{2}$ Bảng biến thiên của hàm số bậc 2: Khi $a>0$, $x:-\infty\to-\dfrac{b}{2a}\to+\infty$, $y:+\infty\searrow-\dfrac{\Delta}{4a}\nearrow+\infty$. Khi $a<0$, $x:-\infty\to-\dfrac{b}{2a}\to+\infty$, $y:-\infty\nearrow-\dfrac{\Delta}{4a}\searrow-\infty$. $\boxed{3}$ Tính chất của đồ thị của hàm số bậc 2: (i) có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. (ii) Quay bề lõm lên trên khi $a>0$, quay bề bõm xuống dưới khi $a<0$. (iii) Có trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{b}{2a}$ đi qua đỉnh I & song song với trục tung Oy. $\boxed{4}$ GTLN, GTNN.

21 ([Hải+25], VD1, p. 10). *Đếm số giá trị $m\in\mathbb{N}^\star$ để hàm số $y=x^2-2(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(4,2018)$.*

22 ([Hải+25], VD2, p. 11). *Cho parabol (P) đi qua $A(-1,4), B(3,4)$. Tìm phương trình trục đối xứng của (P).*

23 ([Hải+25], VD3, p. 11). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số $y=5x^2+2x+1$ trên đoạn $[-2,2]$.*

24 ([Hải+25], VD4, p. 11). *Cho 2 parabol có phương trình $y=x^2+x+1, y=2x^2-x-2$. Biết 2 parabol cắt nhau tại 2 điểm A,B với $x_A<x_B$. Tính AB.*

25 ([Hải+25], VD5, p. 11). *Đếm số giá trị $m\in\mathbb{Z}$ trong nửa khoảng $[-10,-4)$ để đường thẳng $d:y=-(m+1)x+m+2$ cắt parabol $(P):y=x^2+x-2$ tại 2 điểm phân biệt nằm về cùng 1 phía đối với trục tung.*

26 ([Hải+25], VD6, p. 12). *Đếm số giá trị $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình $x^2-2|x|+1-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt.*

27 ([Hải+25], VD7, p. 13). *Biết $S=(a,b)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=|x^2-4x+3|$ tại 4 điểm phân biệt. Tìm $a+b$.*

28 ([Hải+25], VD8, p. 13). *Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hàm số $f(x)=x^2+(2m-1)x+m^2$ luôn nhận giá trị dương.*

29 ([Hải+25], VD9, p. 13). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $f(x) = (m-1)x^2 + 2x + 1$ luôn nhận giá trị âm.*

30 ([Hải+25], VD10, p. 14). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $f(x) = (m-1)x^2 + (2m+1)x + m + 1 \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

31 ([Hải+25], VD11, p. 14). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $\dfrac{(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4m + 1}{2x^2+1} > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

32 ([Hải+25], VD12, p. 14). *Tìm nghiệm nguyên của hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ (x-1)(x^2+5x+4) \ge 0. \end{cases}$$

33 ([Hải+25], 18.1., p. 15). *Gọi M là điểm cố định mà parabol $(P_m): y = x^2 + 3mx + 6m + 1$ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$. Tính tổng khoảng cách từ M đến 2 trục tọa độ.*

34 ([Hải+25], 18.2., p. 15). *Cho parabol $(P): y = x^2 - 2(m-1)x - 2$ với tham số $m \in \mathbb{R}$. Tìm quỹ tích đỉnh của (P) khi m thay đổi.*

35 ([Hải+25], 18.3., p. 15). *Cho parabol $(P): y = x^2 - mx$ & đường thẳng $(d): y = (m+2)x + 1$ với tham số $m \in \mathbb{R}$. Khi $(P), (d)$ cắt nhau tại 2 điểm $M \ne N$, tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN.*

36 ([Hải+25], 18.4., p. 15). *1 chiếc ăng-ten chảo parabol có chiều cao $h = 0.5$ m & đường kính miệng $d = 4$ m. Mặt cắt qua trục là 1 parabol dạng $y = ax^2$. Biết $a = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^\star$ nguyên tố cùng nhau. Tính $m - n$.*

37 ([Hải+25], 18.5., p. 15). *Khi 1 quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết quỹ đạo của quả bóng là 1 cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth với t là thời gian, tính bằng giây, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao, tính bằng mét, của quả bóng. Giả thiết quả bóng được đá lên từ độ cao 1.2 m. Sau đó 1 s, nó đạt độ cao 8.5 m & 2 s sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6 m. Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên?*

38 ([Hải+25], 18.6., p. 15). *Cho parabol $(P): y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ & đường thẳng $(d): y = mx + m^2$, m là tham số. Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = 1$.*

39 ([Hải+25], 18.7., p. 15). *Đếm số giá trị $m \in \mathbb{R}$ để* GTNN *của hàm số $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ trên đoạn $[0,1]$ là 1.*

40 ([Hải+25], 18.8., p. 16). *Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$. Đặt $m \coloneqq \min_{x\in[-1,1]} f(x)$, $M \coloneqq \max_{x\in[-1,1]} f(x)$, S là tập hợp tất cả các giá trị $m \in \mathbb{R}$ để $M - m = 8$. Tính tổng bình phương của các phần tử thuộc S.*

41 ([Hải+25], 18.9., p. 16). *Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ thuộc $[1, 2018]$ để bất phương trình $x^2 + 2x|x+2| - 2 \le m$ thỏa mãn $\forall x \in [-4, 1]$.*

42 ([Hải+25], 18.10., p. 16). *Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $|x|\sqrt{x^2 4|x| + 4} = m$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng (a,b). Tính $a + b$.*

43 ([Hải+25], 18.11., p. 16). *Cho hàm số $f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m + 1}$. Tìm tất cả $m \in \mathbb{R}$ để* TXĐ *của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.*

44 ([Hải+25], 18.12., p. 16). *Đếm số giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có* TXĐ *là $\mathbb{R}$.*

45 ([Hải+25], 18.13., p. 16). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để bất phương trình $\dfrac{(m-3)x^2 - 2(m-1)x + 4m - 1}{3x^2+1} \le -1$ vô nghiệm.*

46 ([Hải+25], 18.14., p. 16). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$: (a) $\dfrac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$.
(b) $\dfrac{-x^2 + 8x - 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} > 0$.*

3 Solvable Equations via Quadratic Equations – Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

47 ([Hải+25], VD2, p. 19). *Giải & biện luận phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$.*

48 ([Hải+25], VD3, p. 19). *Giải & biện luận phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + 2 = 0$.*

49 ([Hải+25], VD4, p. 19). *Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình $x^2 + 2mx + m(m-1) = 0$ có: (a) 2 nghiệm trái dấu. (b) 2 nghiệm cùng dấu.*

50 ([Hải+25], VD5, p. 19). *Giả sử phương trình bậc 2 $x^2 - Sx + P = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Biểu diễn biểu thức qua hệ số S, P: (a) $x_1^2 + x_2^2$. (b) $x_1^3 + x_2^3$. (c) $S_n(x_1, x_2) \coloneqq x_1^n + x_2^n$ với $n \in \mathbb{N}$.*

51 ([Hải+25], VD6, p. 19). *Giải phương trình trùng phương $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.*

52 ([Hải+25], VD7, p. 20). *Giải & biện luận phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + (m-1)^2 = 0$.*

53 ([Hải+25], 19.1., p. 20). *Giải & biện luận phương trình: (a)* $mx^2+3x-1=0$*. (b)* $x^2-2x+m-1=0$*. (c)* $mx^2+2(m-1)x+m+1=0$*. (d)* $x^2+mx+2=0$.

54 ([Hải+25], 19.2., p. 20). *Cho phương trình* $x^2+mx-8=0$*. Tìm* $m\in\mathbb{R}$ *để phương trình có 2 nghiệm* x_1,x_2 *thỏa: (a)* $x_1^2+x_2^2$ *đạt* GTNN*. (b)* $(x_1^2-1)(x_2^2-1)$ *đạt* GTLN.

55 ([Hải+25], 19.3., p. 20). *Biện luận theo tham số* $m\in\mathbb{R}$ *số nghiệm của phương trình trùng phương: (a)* $mx^4-2x^2+1=0$*. (b)* $x^4-2x^2+m=0$.

56 ([Hải+25], 19.4., p. 20). *Giải & biện luận phương trình: (a)* $mx^4-2x^2+1=0$*. (b)* $x^4-2x^2+m=0$.

57 ([Hải+25], 19.5., p. 21). *Giải & biện luận phương trình: (a)* $x^4-2mx^2+2m-1=0$*. (b)* $(m-3)x^4-2(m-1)x^2+m=0$*. (c)* $x^4-2(m-4)x^2+m^2-8=0$.

58 ([Hải+25], 19.6., p. 21). *Giải phương trình: (a)* $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$*. (b)* $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$.

4 Ứng Dụng của Hàm Số Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức & Tìm GTLN, GTNN

59 ([Hải+25], VD1, p. 21). *Cho* $x,y,z\in[0,2]$*. Chứng minh* $2(x+y+z)\le xy+yz+zx+4$.

60 ([Hải+25], VD2, p. 22). *Cho* $x,y,z\ge 0$ *thỏa* $x+y+z=1$*. Chứng minh* $xy+yz+zx-2xyz\le\frac{7}{27}$.

61 ([Hải+25], VD3, p. 22). *Cho* $a,b,c\ge 0$ *thỏa* $a+b+c=1$*. Chứng minh* $5(a^2+b^2+c^2)-6(a^3+b^3+c^3)\le 1$.

62 ([Hải+25], VD4, p. 23). *Cho* $x,y\in\mathbb{R}$ *thỏa* $x^2+y^2+xy-6(x+y)+5=0$*. Tìm* GTLN, GTNN *cảu biểu thức* $A=2x+y$.

63 ([Hải+25], VD5, p. 23). *Cho* $x,y,z\ge 0$ *thỏa* $x+y+z=1$*. Tìm* GTLN *của biểu thức* $A=9xy+10yz+11zx$.

64 ([Hải+25], VD6, p. 23). *Chứng minh* $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\le\dfrac{3}{2}$, $\forall\Delta ABC$.

65 ([Hải+25], VD7, p. 24). *Chứng minh* $\dfrac{\cos A}{x}+\dfrac{\cos B}{y}+\dfrac{\cos C}{z}\le\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2xyz}$, $\forall\Delta ABC$, $\forall x,y,z>0$.

66 ([Hải+25], VD8, p. 24). *Cho* $a,b,c>0$ *thỏa* $abc+a+c=b$*. Tìm* GTLN *của* $A=\dfrac{2}{a^2+1}-\dfrac{2}{b^2+1}+\dfrac{3}{c^2+1}$.

67 ([Hải+25], VD9, p. 24, HSG TpHCM 2006–2007). *Tìm* $x,y,z\in\mathbb{R}$ *thỏa* $x+y+z=1$ *&* $x^2+2y^2+3z^2=4$ *sao cho* x *đạt* GTLN.

68 ([Hải+25], VD10, p. 25, TS ĐH khối B 2008–2009). *Cho* $x,y\in\mathbb{R}$ *thỏa* $x^2+y^2=1$*. Tìm* GTNN, GTLN *của biểu thức* $A=\dfrac{2(x^2+6xy)}{1+2xy+2y^2}$.

69 ([Hải+25], VD11, p. 25, HSG TpHCM 2005–2006). *Cho* $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_1,\ldots,a_n\in[0,1]$*. Chứng minh* $(1+a_1+a_2+\cdot+a_n)^2\ge 4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$ *bằng cách xét tam thức bậc 2* $f(x)=x^2-(1+\sum_{i=1}^n a_i)x+\sum_{i=1}^n a_i^2$.

70 ([Hải+25], VD12, p. 25, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz). *Chứng minh* $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ *bằng cách xét tam thức bậc 2* $f(x)=\sum_{i=1}^n(a_ix-b_i)^2$.

71 ([Hải+25], VD13, p. 26, bất đẳng thức Aczél). *Cho* $n\in\mathbb{N}^\star$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ *thỏa* $a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2>0$*. Chứng minh* $(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)\le(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2$.

72 ([Hải+25], VD14, p. 26, bất đẳng thức Vasile-Cirtoaje). *Chứng minh* $(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

73 ([Hải+25], 20.1., p. 27). *Cho* $x,y>0$ *thỏa* $x^2y=1$*. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A=x\sqrt{x^2+y^2}+x^2$.

74 ([Hải+25], 20.2., p. 27). *Cho* $x,y,z>0$ *thỏa* $x+y+z=3$*. Chứng minh* $x+xy+2xyz\le\frac{9}{2}$.

75 ([Hải+25], 20.3., p. 27). *Chứng minh* $(a+b+c+d)^2\le 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+6ab$, $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

76 ([Hải+25], 20.4., p. 27). *Cho* $a,b,c,d,p,q\in\mathbb{R}$ *thỏa* $p^2+q^2-a^2-b^2-c^2-d^2>0$*. Chứng minh* $(p^2-a^2-b^2)(q^2-c^2-d^2)\le(pq-ac-bd)^2$.

77 ([Hải+25], 20.5., p. 27). *Cho* $a,b,c\ge 0$ *thỏa* $a^2+b^2+c^2=2$*. Chứng minh* $ab+bc+ca\le 1+2abc$.

78 ([Hải+25], 20.6., p. 27). *Chứng minh* $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^2+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^2+\dfrac{abc}{abc+a^2b+b^2c+c^2a}\ge 1$, $\forall a,b,c>0$.

79 ([Hải+25], 20.7., p. 27). *Chứng minh* $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge\min\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$.

80 ([Hải+25], 20.8., p. 27). *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A=19x^2+54y^2+16z^2+36xy-24yz-16zx$.

5 Miscellaneous

Tài liệu

[Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.