Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 7 năm 2024

Mục lục

1 Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

$\boxed{1}$ $\forall\alpha\in[0°;180°]$, $\sin\alpha\in[-1;1]$, $\cos\alpha\in[-1;1]$. $\boxed{2}$ $\cos\alpha>0\Leftrightarrow\alpha\in(0°;90°)\Leftrightarrow\alpha$ nhọn. $\cos\alpha<0\Leftrightarrow\alpha\in(90°;180°)\Leftrightarrow\alpha$ tù. $\boxed{3}$ Định lý cosin: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ hay $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{4}$ Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ hay $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$. $\boxed{5}$ Công thức tính diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

1. $\alpha\in[0°;360°)$. *Tìm các khoảng giá trị của α để các hàm $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ lần lượt bằng 0, âm, dương.*

2. *Dùng định lý sin, giải thích vì sao trong 1 tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn & góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.*

3 ([Hải+22], BĐ1, p. 22)**.** *ΔABC, đường phân giác AD. Chứng minh $AD^2<bc$.*

4 ([Hải+22], VD1, p. 22)**.** *ΔABC vuông tại A, 2 phân giác trong BE,CF cắt đường cao AH lần lượt tại P,Q. M là trung điểm BC. Chứng minh $PE+QF<AM$.*

5 ([Hải+22], VD2, p. 22)**.** *ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $D\in AB$ thỏa $BH=BD=CD$. Chứng minh $\dfrac{AD}{BD}=\sqrt[3]{2}-1$.*

6 ([Hải+22], VD3, p. 23)**.** *ΔABC. Chứng minh $\widehat{A}=90°\Leftrightarrow(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c})=\sqrt{2}(a+b+c)$.*

7 ([Hải+22], BĐ1, p. 23)**.** *ΔABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Chứng minh $a^2=b^2+bc$.*

8 ([Hải+22], VD4, p. 23)**.** *ΔABC vuông tại A. Lấy $D\in AC$ thỏa $\widehat{C}=2\widehat{CBD}$. Chứng minh $AB+AD=BC\Leftrightarrow\widehat{C}=30°$ hoặc $\widehat{C}=45°$.*

9 ([Hải+22], VD5, p. 23)**.** *ΔABC, trung tuyến AM. Giả sử $\widehat{B}+\widehat{AMC}=90°$. Chứng minh ΔABC vuông hoặc cân.*

10 ([Hải+22], VD6, p. 24)**.** *ΔABC, tâm đường tròn nội tiếp I. IA,IB,IC cắt (ABC) lần lượt tại D,E,F. Chứng minh $\dfrac{1}{S_{DBC}}+\dfrac{1}{S_{EAC}}+\dfrac{1}{S_{FAB}}\ge\dfrac{9}{S_{ABC}}$.*

*e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, website: https://nqbh.github.io, Bến Tre, Việt Nam.

2 Giải Tam Giác

$\boxed{1}$ Cho a,b,c: áp dụng định lý cosin: $\widehat{A} = \arccos\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \widehat{B} = \arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C} = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{2}$ Cho $b,c,\widehat{A}$: áp dụng định lý cosin: $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$, $\widehat{B} = \arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C} = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{3}$ Cho $a,\widehat{B},\widehat{C}$: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}$, áp dụng định lý sin: $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}, c = \dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

11 ([Quỳ+20], VD1, p. 124)**.** *ΔABC có đường cao $AH = h$, $\widehat{B} = \beta$, K trên cạnh BC thỏa $BK = 2CK$, $AK = AB$. Giải ΔABC.*

12 ([Quỳ+20], VD2, p. 124)**.** *Cho $x,y \in [1;+\infty)$. Đặt $a = x^2+1, b = y^2+1, c = x^2+y^2+1$. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có độ dài 3 cạnh là a,b,c & tam giác đó là tam giác tù.*

13 ([Quỳ+20], VD3, p. 126)**.** *ΔABC có $BC = a, \widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta$, tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính $(IBC),(ICA),(IAB)$.*

14 ([Quỳ+20], p. 124, hệ thức về bán kính các đường tròn nội tiếp & bàng tiếp)**.** *ΔABC có bán kính đường tròn nội tiếp r, bán kính 3 đường tròn bàng tiếp góc A,B,C lần lượt là r_a,r_b,r_c. Chứng minh: (a) $(p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2} = r$. (b) $r_a\cot\dfrac{A}{2} = r_b\cot\dfrac{B}{2} = r_c\cot\dfrac{C}{2} = p$.*

15 ([Quỳ+20], p. 128)**.** *Chứng minh $S = \dfrac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

16 ([Quỳ+20], VD4, p. 129)**.** *ΔABC, $\widehat{A} = 60^\circ, R = 8, r = 3$. Tính S.*

17 ([Quỳ+20], VD5, p. 129)**.** *Tính r theo a,b,c.*

18 ([Quỳ+20], VD6, p. 130)**.** *Chứng minh $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.*

19 ([Quỳ+20], VD7, p. 130, công thức độ dài phân giác)**.** *Gọi l_a,l_b,l_c lần lượt là độ dài 3 đường phân giác trong góc A,B,C. Chứng minh $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}, l_b = \dfrac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}, l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.*

20 ([Quỳ+20], VD8, p. 131, tứ giác điều hòa)**.** *ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có AM là trung tuyến đỉnh A. Đường thẳng qua A & đối xứng với AM qua phân giác trong góc A cắt (O) tại N. Chứng minh $AB \cdot CN = AC \cdot BN$.*

21 ([Quỳ+20], 37., p. 131)**.** *ΔABC có 2 trung tuyến BM,CN cắt nhau tại G, $BM = \frac{3}{2}, CN = 3, \widehat{BGC} = 120^\circ$. Giải ΔABC.*

22 ([Quỳ+20], 38., p. 132)**.** *ΔABC có $AC = b, AB = c, \widehat{A} = \alpha$, M là trung điểm BC, N trên cạnh AB thỏa $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{3}{2}$. Tính MN.*

23 ([Quỳ+20], 39., p. 132)**.** *ΔABC có $BC = 10$, (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC & tiếp xúc với 2 cạnh AB,AC. (a) Biết $IA = 3, 2IB = 3IC$, tính AB,AC. (b) Biết (I) có bán kính bằng 3 & $2IB = 3IC$, tính R, AB, AC.*

24 ([Quỳ+20], 40., p. 132)**.** *Hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được có 2 đáy $BC = b, AD = d > b$, góc giữa 2 cạnh bên bằng α. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.*

25 ([Quỳ+20], 41., p. 132)**.** *Hình thang cân $ABCD$ với đáy lớn AB ngoại tiếp 1 đường tròn bán kính r. (a) Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Tính độ dài 2 đáy & đường chéo theo r,α. (b) R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2}{3}\sqrt{7}$, tính $\widehat{BAD}$.*

26 ([Quỳ+20], 42., p. 132)**.** *Chứng minh $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}, \tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.*

Định nghĩa 1. *$a,b,c \in \mathbb{R}$ được gọi là lập thành* cấp số cộng *nếu $a+c = 2b$. Lúc đó giá trị $d = b-a = c-b$ được gọi là* công sai *của cấp số cộng.*

27 ([Quỳ+20], 43., p. 132)**.** *Chứng minh 3 cạnh a,b,c của ΔABC lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$. Chứng minh khi đó công sai của cấp số cộng này là $d = \dfrac{3}{2}r\left(\tan\dfrac{C}{2} - \tan\dfrac{A}{2}\right)$.*

28 ([Quỳ+20], 44., p. 132)**.** *Chứng minh: (a) $\sin A, \sin B, \sin C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\cot\dfrac{A}{2}, \cot\dfrac{B}{2}, \cot\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng. (b) $\cos A, \cos B, \cos C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2}, \tan\dfrac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.*

29 ([Quỳ+20], 45., p. 133)**.** *ΔABC & điểm M thay đổi trên cạnh BC, r_1,r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp & ρ_1,ρ_2 là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của $\Delta ABM, \Delta ACM$. Chứng minh $\dfrac{r_1r_2}{\rho_1\rho_2}$ không đổi.*

30 ([Quỳ+20], 46., p. 133)**.** *ΔABC, M,N trên cạnh BC thỏa $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, P,Q là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\Delta BAM, \Delta CAN$ với cạnh BC. Chứng minh $\dfrac{1}{PB} + \dfrac{1}{PM} = \dfrac{1}{QC} + \dfrac{1}{QN}$.*

31 ([Quỳ+20], 47., p. 133)**.** *Đường tròn $(O;R)$ & A bên ngoài (O). 1 đường thẳng thay đổi qua A cắt (O) tại B,C. Đặt $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$. Chứng minh $\tan\dfrac{\alpha}{2}\tan\dfrac{\beta}{2}$ không đổi.*

32 ([Quỳ+20], 48., p. 133)**.** *ΔABC có diện tích S. (a) Chứng minh $\cot A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$. (b) M là trung điểm BC, đặt $\widehat{AMB} = \varphi$. Chứng minh $\cot C - \cot B = 2\cot\varphi$. (c) G là trọng tâm ΔABC. Đặt $\widehat{BGC} = \alpha$. Chứng minh $\cot\alpha = \dfrac{5bc\cos A - 2(b^2+c^2)}{3bc\sin A}$.*

33 ([Quỳ+20], 49., p. 133)**.** *Chứng minh: (a) $b^2+c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A$. (b) $b^4+c^4 = a^4 \Leftrightarrow \tan B\tan C = 2\sin^2 A$.*

34 ([Quỳ+20], 50., p. 133)**.** *ΔABC có 2 trung tuyến BM,CN. (a) Chứng minh $BM \perp CN \Leftrightarrow \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\cot A$. (b) Chứng minh nếu ΔABC không cân tại A thì $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A$.*

35 ([Quỳ+20], 51., p. 133)**.** *Hình chữ nhật $ABCD$ & 1 điểm M tùy ý. Chứng minh $\dfrac{\tan\widehat{AMC}}{\tan\widehat{BMD}} = \dfrac{S_{AMC}}{S_{BMD}}$.*

36 ([Quỳ+20], 52., p. 134)**.** *ΔABC, $\widehat{B} > \widehat{C}m$ O,I,O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, & đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh $\tan\widehat{IOO_1} = \dfrac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}$.*

37 ([Quỳ+20], 53., p. 134)**.** *Hình bình hành có a,b là độ dài các cạnh, m,n là độ dài 2 đường chéo. $a > b, m > n$. α là góc nhọn của hình bình hành & φ là góc giữa 2 đường chéo. Chứng minh: (a) $\cos\alpha\cos\varphi = \dfrac{(a^2-b^2)(m^2-n^2)}{4abmn}$. (b) $\tan\varphi = \dfrac{2ab\sin\alpha}{a^2-b^2}$.*

38 ([Quỳ+20], 54., p. 134)**.** *ΔABC, trực tâm H, 2 đường cao $BB' = \sqrt{5}, CC' = 2$. Tính S biết: (a) $\cos\widehat{BHC} = -\dfrac{2}{3}$. (b) $\cos\widehat{CBB'} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.*

39 ([Quỳ+20], 55., p. 134)**.** *Hình bình hành $ABCD$, M,N là 2 giao điểm của (ABC) với AD,CD. (a) Biết khoảng cách từ M đến B,C,D là b,c,d. Tính S_{BMN}. (b) Biết góc nhọn của hình bình hành bằng α & bán kính (ABC) bằng R. Tính S_{BMN}.*

40 ([Quỳ+20], 56., p. 134)**.** *ΔABC có O,I,G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp & trọng tâm. (a) Chứng minh $IA \perp IG \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{2bc}{b+c}$. (b) Chứng minh $IA \perp IO \Leftrightarrow b+c = 2a$. (c) M,N là trung điểm AB,AC. Chứng minh A,I,M,N đồng viên $\Leftrightarrow b+c = 2a$.*

41 ([Quỳ+20], 57., p. 134)**.** *ΔABC, D,E trên BC thỏa $BD = DE = EC = \frac{1}{3}BC$. Đặt $\widehat{BAD} = \alpha, \widehat{DAE} = \beta, \widehat{EAC} = \gamma$. Chứng minh $(\cot\alpha + \cot\beta)(\cot\beta + \cot\gamma) = 4(1+\cot^2\beta)$.*

42 ([Quỳ+20], 58., p. 135)**.** *ΔABC, $\widehat{B} > \widehat{C}$, AM,AD lần lượt là trung tuyến & phân giác trong góc A. Đặt $\widehat{DAM} = \alpha$. (a) Chứng minh $\tan\alpha = \tan^2\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B-C}{2}$. (b) Đặt $\dfrac{AD}{AM} = k$. Chứng minh $\cos\alpha = \dfrac{k}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sqrt{\dfrac{k^2}{4}\sin^4\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{A}{2}}$.*

43. *Cho ΔABC vuông tại A. (a) Cho trước 2 trong 6 số a,b,c,b',c',h. Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a,b,c,b',c',h,p,S. Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số $a,b,c,b',c',h, m_a,m_b,m_c,d_a,d_b,d_c,p,S$ với d_a,d_b,d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC,CA,AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để mô phỏng.*

44. *Cho ΔABC Cho trước 3 trong 14 số $a,b,c,b',c',h, m_a,m_b,m_c,d_a,d_b,d_c,p,S$ với d_a,d_b,d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC,CA,AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để mô phỏng.*

45. *Cho ΔABC. Tính $\sin A, \sin B, \sin C, \tan A, \tan B, \tan C, \cot A, \cot B, \cot C$ theo a,b,c.*

46. *Nếu chỉ cho số đo 3 góc của 1 tam giác, có thể giải tam giác đó không? Nếu có thì mô tả tập nghiệm các tam giác thỏa mãn.*

47. *Nếu cho trước độ dài 2 cạnh & số đo 1 góc không nằm giữa 2 cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

48. *Nếu cho trước độ dài 1 cạnh & số đo 2 góc không cùng kề với cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

49 (Program: Solve triangle)**.** *(a) Nêu các bộ 3 yếu tố cần cho trước về cạnh & góc của 1 tam giác để tam giác đó có thể giải được. (b) Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để minh họa.*

50. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính độ dài 3 đường trung tuyến & 6 góc tạo bởi 3 đường trung tuyến đó.*

51. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường phân giác & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp I đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

52. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường cao & 6 góc tạo bởi 3 đường cao đó & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ trực tâm đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

53. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến 3 cạnh của tam giác đó.*

3 Miscellaneous

54. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo để giải 1 đa giác lồi đều n cạnh?*

55. *Cho độ dài 4 cạnh của 1 tứ giác lồi, liệu có thể giải được tứ giác đó không?*

56. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo của 1 tứ giác lồi để có thể giải được tứ giác đó?*

57. *Đặt 3 điện tích q_1, q_2, q_3 tại 3 đỉnh của ΔABC. Tính các lực điện từ.*

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, and Lê Bá Khánh Trình. *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 10*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 344.