

# Problem: Trigonometric Equation – Bài Tập: Phương Trình Lượng Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 17 tháng 9 năm 2023

## Mục lục

<b>1</b>	<b>Giá Trị Lượng Giác của Góc Lượng Giác</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Trigonometrical Formulas – Công Thức Lượng Giác</b>	<b>2</b>
	<b>Tài liệu</b>	<b>2</b>

## 1 Giá Trị Lượng Giác của Góc Lượng Giác

**Bài toán 1** ([Hùn+23], Ví dụ 1, p. 8). Cho hình vuông  $A_0A_1A_2A_3$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$  (4 đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các góc lượng giác  $(OA_0, OA_i)$ ,  $(OA_i, OA_j)$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ .

**Bài toán 2** ([Hùn+23], Ví dụ 2, p. 9). Tính giá trị biểu thức: (a)  $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan \left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$ . (b)  $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$ . (c)  $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$ . (d)  $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \tan \frac{3\pi}{8} \tan \frac{5\pi}{8}$ .

**Bài toán 3** ([Hùn+23], Ví dụ 3, p. 9). Chứng minh đẳng thức (giả sử các đẳng thức sau đều có nghĩa): (a)  $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$ . (b)  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$ . (c)  $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cos^2 y}$ . (d)  $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan \left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ .

**Bài toán 4** ([Hùn+23], Ví dụ 4, p. 10). Đơn giản biểu thức (giả sử các đẳng thức sau đều có nghĩa): (a)  $A = \cos(5\pi - x) - \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$ . (b)  $B = \frac{\sin(900^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$ . (c)  $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$  với  $\pi < x < 2\pi$ .

**Bài toán 5** ([Hùn+23], Ví dụ 5, p. 11). Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào  $x$  (i.e., độc lập với biến  $x$ ) (giả sử các biểu thức đều có nghĩa): (a)  $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$ . (b)  $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$ . (c)  $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$ .

**Bài toán 6** ([Hùn+23], 1.1., p. 12). Tìm số đo  $a^\circ$  của góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  với  $0 \leq a \leq 360$ , biết 1 góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là: (a)  $395^\circ$ . (b)  $-1052^\circ$ . (c)  $(20\pi)^\circ$ .

**Bài toán 7** ([Hùn+23], 1.2., p. 12). Không dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị biểu thức: (a)  $A = 5 \sin^2 \frac{151\pi}{6} + 3 \cos^2 \frac{85\pi}{3} - 4 \tan^2 \frac{193\pi}{6} + 7 \cot^2 \frac{37\pi}{3}$ . (b)  $B = \cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{10} + \cos^2 \frac{3\pi}{10}$ . (c)  $C = \tan \frac{\pi}{9} \tan \frac{2\pi}{9} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{7\pi}{18}$ .

**Bài toán 8** ([Hùn+23], 1.3., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$ . (b)  $B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin \left(\frac{7x}{2} - x\right) + \cot \left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ . (c)  $C = 2 \sin(90^\circ + x) + \sin(900^\circ - x) + \sin(270^\circ + x) - \cos(90^\circ - x)$ . (d)  $D = \frac{\sin(5\pi + x) \cos \left(x - \frac{9\pi}{2}\right) \tan(10\pi + x)}{\cos(5\pi - x) \sin \left(\frac{11\pi}{2} + x\right) \tan(7\pi - x)}$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

**Bài toán 9** ([Hùn+23], 1.4., p. 12). *Chứng minh đẳng thức (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):* (a)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$ . (b)  $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$ . (c)  $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x)$ . (d)  $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \sin^2 b}$ .

**Bài toán 10** ([Hùn+23], 1.5., p. 12). *Chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào  $\alpha$ :* (a)  $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$ . (b)  $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$ . (c)  $\cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6 (90^\circ - \alpha) (\tan^2 \alpha - 1)^3$ . (d)  $(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2)$ .

**Bài toán 11** ([Hùn+23], 1.6., p. 13). *Biết  $\tan x + \cot x = m$ . Tính:* (a)  $\tan^2 x + \cot^2 x$ . (b)  $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$ . (c) *Chứng minh  $|m| \geq 2$ .* (d) *Biện luận theo tham số  $m$  để tìm  $x$  thỏa mãn phương trình  $\tan x + \cot x = m$ .*

**Bài toán 12** ([Hùn+23], 1.7., p. 13). (a) *Cho  $\cos a = \frac{2}{3}$ . Tính  $A = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a}$ .* (b) *Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Tính  $B = \frac{3 \cot a + 2 \tan a + 1}{\cot a + \tan a}$ .* (c) *Cho  $\tan a = 2$ . Tính  $C = \frac{2 \sin a + 3 \cos a}{\sin a + \cos a}$ .* (d) *Cho  $\cot a = 5$ . Tính  $D = 2 \cos^2 a + 5 \sin a \cos a + 1$ .*

## 2 Trigonometrical Formulas – Công Thức Lượng Giác

### Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.