Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 7 năm 2024

Mục lục

1 Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

$\boxed{1}$ $\forall\alpha\in[0^\circ;180^\circ]$, $\sin\alpha\in[-1;1]$, $\cos\alpha\in[-1;1]$. $\boxed{2}$ $\cos\alpha>0\Leftrightarrow\alpha\in(0^\circ;90^\circ)\Leftrightarrow\alpha$ nhọn. $\cos\alpha<0\Leftrightarrow\alpha\in(90^\circ;180^\circ)\Leftrightarrow\alpha$ tù. $\boxed{3}$ Định lý cosin: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ hay $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{4}$ Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ hay $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$. $\boxed{5}$ Công thức tính diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

1. *Cho $\alpha\in[0^\circ;360^\circ)$. Tìm các khoảng giá trị của α để các hàm $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ lần lượt bằng 0, âm, dương.*

2. *Dùng định lý sin, giải thích vì sao trong 1 tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn & góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.*

3 ([Hải+22], BĐ1, p. 22)**.** *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Chứng minh $AD^2<bc$.*

4 ([Hải+22], VD1, p. 22)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, 2 phân giác trong BE,CF cắt đường cao AH lần lượt tại P,Q. M là trung điểm BC. Chứng minh $PE+QF<AM$.*

5 ([Hải+22], VD2, p. 22)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $D\in AB$ thỏa $BH=BD=CD$. Chứng minh $\dfrac{AD}{BD}=\sqrt[3]{2}-1$.*

6 ([Hải+22], VD3, p. 23)**.** *Cho ΔABC. Chứng minh $\widehat{A}=90^\circ\Leftrightarrow(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+c}+\sqrt{a-c})=\sqrt{2}(a+b+c)$.*

7 ([Hải+22], BĐ1, p. 23)**.** *ΔABC có $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Chứng minh $a^2=b^2+bc$.*

8 ([Hải+22], VD4, p. 23)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. Lấy $D\in AC$ thỏa $\widehat{C}=2\widehat{CBD}$. Chứng minh $AB+AD=BC\Leftrightarrow\widehat{C}=30^\circ$ hoặc $\widehat{C}=45^\circ$.*

9 ([Hải+22], VD5, p. 23)**.** *Cho ΔABC, trung tuyến AM. Giả sử $\widehat{B}+\widehat{AMC}=90^\circ$. Chứng minh ΔABC vuông hoặc cân.*

10 ([Hải+22], VD6, p. 24)**.** *Cho ΔABC, tâm đường tròn nội tiếp I. IA,IB,IC cắt (ABC) lần lượt tại D,E,F. Chứng minh $\dfrac{1}{S_{DBC}}+\dfrac{1}{S_{EAC}}+\dfrac{1}{S_{FAB}}\ge\dfrac{9}{S_{ABC}}$.*

2 Giải Tam Giác

$\boxed{1}$ Cho a,b,c: áp dụng định lý cosin: $\widehat{A}=\arccos\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \widehat{B}=\arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C}=\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{2}$ Cho $b,c,\widehat{A}$: áp dụng định lý cosin: $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$, $\widehat{B}=\arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C}=\arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{3}$ Cho $a,\widehat{B},\widehat{C}$: $\widehat{A}=180^\circ-\widehat{B}-\widehat{C}$, áp dụng định lý sin: $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}, c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

*e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, website: https://nqbh.github.io, Bến Tre, Việt Nam.

11. *Chứng minh công thức Heron.*

12. *Cho* ΔABC*. Tính* $\sin A, \sin B, \sin C, \tan A, \tan B, \tan C, \cot A, \cot B, \cot C$ *theo* a, b, c.

13. *Nếu chỉ cho số đo 3 góc của 1 tam giác, có thể giải tam giác đó không? Nếu có thì mô tả tập nghiệm các tam giác thỏa mãn.*

14. *Nếu cho trước độ dài 2 cạnh & số đo 1 góc không nằm giữa 2 cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

15. *Nếu cho trước độ dài 1 cạnh & số đo 2 góc không cùng kề với cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

16 (Program: Solve triangle)**.** *(a) Nêu các bộ 3 yếu tố cần cho trước về cạnh & góc của 1 tam giác để tam giác đó có thể giải được. (b) Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để minh họa.*

17. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính độ dài 3 đường trung tuyến & 6 góc tạo bởi 3 đường trung tuyến đó.*

18. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường phân giác & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp I đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

19. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường cao & 6 góc tạo bởi 3 đường cao đó & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ trực tâm đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

20. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến 3 cạnh của tam giác đó.*

3 Miscellaneous

21. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo để giải 1 đa giác lồi đều n cạnh?*

22. *Cho độ dài 4 cạnh của 1 tứ giác lồi, liệu có thể giải được tứ giác đó không?*

23. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo của 1 tứ giác lồi để có thể giải được tứ giác đó?*

24. *Đặt 3 điện tích* q_1, q_2, q_3 *tại 3 đỉnh của* ΔABC*. Tính các lực điện từ.*

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.