Problem & Solution: Circle – Bài Tập & Lời Giải: Đường Tròn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 16 tháng 11 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set $\mathbb{Q}$ of circles [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

[1]URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf.

[2]URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex.

1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

$\boxed{1}$ $(O;R) \coloneqq \{M|OM = R\}$. $\boxed{2}$ Tâm của đường tròn là *tâm đối xứng* của đường tròn đó. Mọi đường thẳng đi qua tâm là *trục đối xứng* (& chứa 1 đường kính) của đường tròn. $\boxed{3}$ Qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng, xác định duy nhất 1 đường tròn. Tâm của đường tròn là giao của 3 đường trung trực 3 cạnh ΔABC. $\boxed{4}$ $A \in (O;R) \Leftrightarrow OA = R$. A nằm ngoài $(O;R) \Leftrightarrow OA > R$. A nằm trong $(O;R) \Leftrightarrow OA < R$. $\boxed{5}$ Đường kính là dây lớn nhất. Cho $(O;R)$, đường kính $AB = 2R$, dây $CD < 2R$, $AB \cap CD = \{M\}$: $AB \perp CD \Leftrightarrow MC = MD \Leftrightarrow \Delta ACD$ cân $\Leftrightarrow AC = AD \Leftrightarrow \Delta BCD$ cân $\Leftrightarrow BC = BD$.

1 ([BBN23], p. 99)**.** *Tại sao các nan hoa của bánh xe đạp dài bằng nhau?*

Giải. Vì bánh xe đạp có dạng đường tròn nên các nan hoa của nó dài bằng nhau & cùng bằng bán kính đường tròn đó. □

2 ([BBN23], H1, p. 101)**.** *Có bao nhiêu đường tròn bán kính R đi qua 1 điểm cho trước? Tâm các đường tròn đó nằm ở đâu?*

1st giải. Có vô số đường tròn bán kính R đi qua 1 điểm cho trước. Tâm các đường tròn này nằm trên đường tròn có tâm là điểm đã cho & bán kính R. □

2nd giải. điểm cho trước là A. $A \in (O;R) \Leftrightarrow OA = R$, nên tập hợp tâm các đường tròn bán kính R đi qua A là $\{O \in \mathbb{R}^2 | OA = R\} = (A;R)$, suy ra có vô số đường tròn bán kính R đi qua A. □

3 ([BBN23], H2, p. 101)**.** *Qua 3 điểm bất kỳ có luôn vẽ được 1 đường tròn?*

Giải. Luôn tồn tại duy nhất 1 đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng bất kỳ (i.e., đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi 3 điểm đó) nhưng không tồn tại đường tròn nào đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng bất kỳ. □

4 ([BBN23], H3, p. 101)**.** *Vẽ đường tròn nhận đoạn thẳng AB cho trước làm đường kính.*

Giải. M là trung điểm AB. Vẽ $(M, MA) = (M, \frac{1}{2}AB)$. □

5 ([BBN23], H4, p. 101)**.** *Tính đường kính các đường tròn* $(O;2R), (O;aR)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Giải. Đường kính các đường tròn $(O;2R), (O;aR)$ lần lượt là $4R, 2aR$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. □

6 ([BBN23], H5, p. 101)**.** Đ/S? *(a) Dây vuông góc với đường kính thì bị đường kính chia làm đôi. (b) Dây vuông góc với đường kính thì chia đôi đường kính. (c) Đường kính đi qua trung điểm 1 dây thì vuông góc với dây ấy. (d) Đường trung trực của 1 dây là trục đối xứng của đường tròn.*

Giải. (a) Đ. (b) S. Với đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, dây CD khác đường kính, $AB \perp CD$. Khi đó CD chia AB thành 2 phần không bằng nhau. (c) S. Với đường tròn $(O;R)$, 2 đường kính AB, CD không vuông góc nhau nhưng chúng vẫn đi qua trung điểm O của nhau. (d) Đ. □

7 ([BBN23], VD1, p. 101)**.** *Chứng minh: (a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Nếu 1 tam giác có 1 cạnh là đường kính đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông (đường kính là cạnh huyền). (c) Các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn.*

Giải. (a) Xét ΔABC vuông tại A. O là trung điểm BC. AO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $OA = OB = OC$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Xét ΔABC nội tiếp $(O;R)$ đường kính $BC = 2R$. Có $OA = OB = OC = R$. Vì AO là trung tuyến ứng với cạnh BC, $AO = \frac{1}{2}BC$ nên ΔABC vuông tại A. (c) Xét ΔABC vuông tại A, M là trung điểm BC. Từ (a), $(M, \frac{1}{2}BC)$ là đường tròn ngoại tiếp ΔABC, nên $A \in (M, \frac{1}{2}BC)$, suy ra $\{A \in \mathbb{R}^2 | \Delta ABC$ vuông tại $A\} \subset (M, \frac{1}{2}BC)$, i.e., các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Xét hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm 2 đường chéo AC, BD. Vì mọi hình chữ nhật có 2 đường chéo bằng nhau & cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$, suy ra $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O, \frac{1}{2}AC)$, i.e., mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn có tâm là giao điểm 2 đường chéo (trung điểm của chúng) & đường kính là độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó. □

8 ([BBN23], VD2, p. 102)**.** *Khi nào thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm: (a) Trong tam giác? (b) Trên cạnh tam giác? (c) Ngoài tam giác?*

Giải. (a) Giả sử tồn tại điểm O nằm trong ΔABC sao cho $OA = OB = OC$. $\Delta OAB, \Delta OBC, \Delta OCA$ cân tại O nên $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB)$, $\angle CAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC)$, nên $\angle A = \angle BAO + \angle CAO = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle AOB - \angle AOC) = \frac{1}{2}\angle BOC < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ vì $\angle BOC$ là góc trong ΔBOC nên $\angle BOC < 180^\circ$. Tương tự, ta thu được $\angle B < 90^\circ, \angle C < 90^\circ$ nên ΔABC nhọn. Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác khi tam giác đó nhọn. □

Định lý 1. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). (a) O nằm trong $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ nhọn. (b) O nằm trên cạnh $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông. (c) O nằm ngoài $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ tù.*

9 ([BBN23], VD3, p. 102)**.** *Cho ΔABC có $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 12$ cm. Xác định tâm & tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

Giải. Có $AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = AB^2$, áp dụng định lý Pythagore đảo, suy ra ΔABC vuông tại C, nên tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trung điểm O của cạnh AB, bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2} = 6.5$ cm. □

10 ([BBN23], VD4, p. 103)**.** *Cho đường tròn đường kính AB, điểm M bất kỳ. Chứng minh M nằm trong đường tròn khi & chỉ khi $\angle AMB > 90°$.*

11 ([BBN23], VD5, p. 103)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & 2 điểm A, B nằm trong đường tròn. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B & nằm hoàn toàn bên trong (O).*

12 ([BBN23], VD6, p. 103)**.** *Có 1 miếng bìa hình tròn bị khoét đi 1 lỗ thủng cũng hình tròn. Dùng kéo cắt (theo 1 đường thẳng) để chia đôi miếng bìa đó.*

Giải. Vì mọi đường thẳng đi qua tâm của 1 đường tròn đều là trục đối xứng của đường tròn đó, nên đường thẳng đi qua tâm của 2 hình tròn chính là trục đối xứng của miếng bìa. Cắt theo trục đối xứng đó sẽ chia đôi miếng bìa đó. Cụ thể, cho đường tròn (O_2) nằm trong đường tròn (O_1), cắt theo đường thẳng O_1O_2 nối tâm 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$. □

13 ([BBN23], VD7, p. 104)**.** *Cho đoạn thẳng AB, điểm M thuộc đoạn AB. Dựng 2 đường tròn đường kính AB & đường kính BM. 1 đường thẳng d vuông góc với AB tại N cắt đường tròn đường kính AB tại E, F, cắt đường tròn đường kính BM tại P, Q. Chứng minh: (a) $EP = FQ$. (b) $\angle BMP > \angle BAE$.*

Giải. Gọi C, D lần lượt là trung điểm AB, BM. AB là trục đối xứng của $(C, AC), (D, BD)$. Vì $E, F \in (C, AC)$, $EF \perp AB$ nên $NE = NF$ (1). Vì $P, Q \in (D, BD)$, $PQ \in (D, BD)$ nên $NP = NQ$ (2). Từ (1) & (2) có $EP = NE - NP = NF - NQ = FQ$. (b) ΔABE nội tiếp (C, AC) có AB là đường kính nên ΔABE vuông tại E, suy ra $\angle BAE = 90° - \angle ABE$ (3). ΔBMP nội tiếp (D, BD) có BM là đường kính nên ΔBMP vuông tại P, suy ra $\angle BMP = 90° - \angle MBP$ (4). Trong ΔBEN, P nằm giữa N, E nên $\angle EBM > \angle PBM$ (5). Từ (3)–(5) suy ra $\angle BMP > \angle BAE$. □

14 ([BBN23], VD8, p. 104)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & điểm A nằm ngoài đường tròn. Dựng qua A cát tuyến cắt đường tròn tại B, C sao cho B là trung điểm AC.*

Giải. Giả sử dựng được cát tuyến ABC thỏa $ABBC$. Gọi E là trung điểm BC thì $OE \perp BC$. Từ B kẻ $BP \parallel EO$, $P \in AO$, suy ra $BP \perp AB$. □

15 ([BBN23], VD9, p. 105)**.** *Cho đường tròn $(O, 6\text{cm})$, 2 dây $AB \parallel CD$. (a) Chứng minh $AC = BD, AD = BC$. (b) Tính khoảng cách từ O đến AC biết khoảng cách từ O đến AB là 2 cm, khoảng cách từ O đến CD là 4 cm.*

16 ([BBN23], 4.1., p. 106)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường trung tuyến AM, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Trên tia AM lấy 3 điểm D, E, F sao cho $AD = 9$ cm, $AE = 11$ cm, $AF = 10$ cm. Xác định vị trí của mỗi điểm D, E, F đối với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

17 ([BBN23], 4.2., p. 106)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Từ điểm M bất kỳ trên cạnh BC kẻ $MD \perp AB, ME \perp AC$. Chứng minh 5 điểm A, D, M, H, E cùng nằm trên 1 đường tròn.*

18 ([BBN23], 4.3., p. 106)**.** *Tứ giác $ABCD$ có $\angle A = \angle C = 90°$. So sánh AC, BD.*

19 ([BBN23], 4.4., p. 106)**.** *Cho đường tròn đường kính AB, C, D là 2 điểm khác nhau thuộc đường tròn, C, D không trùng với A, B. 2 điểm E, F thuộc đường tròn sao cho $CE \perp AB, DF \perp AB$. Chứng minh CF, ED, AB đồng quy.*

20 ([BBN23], 4.5., p. 106)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & dây $AB = 2a$, $a < R$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Tính AD theo a, R.*

21 ([BBN23], 4.6., p. 106)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle C + \angle D = 90°$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BD, DC, CA. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc 1 đường tròn.*

22 ([BBN23], 4.7., p. 106)**.** *Cho ΔABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt (O) ở D. Biết $BC = 24, AC = 20$. Tính chiều cao AH & bán kính (O).*

23 ([BBN23], 4.8., p. 106)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & dây AB. Kéo dài AB về phía B lấy điểm C sao cho $BC = R$. Chứng minh $\angle AOC = 180° - 3\angle ACO$.*

24 ([BBN23], 4.9., p. 106)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & điểm A nằm ngoài đường tròn. Xác định vị trí của điểm M trên đường tròn sao cho đoạn MA là ngắn nhất, dài nhất.*

Giải. Giả sử đường thẳng OA cắt $(O;R)$ tại N, P, P nằm giữa O, A. $\forall M \in (O;R)$, áp dụng bất đẳng thức tam giác: $MO + MA \geq OA \Leftrightarrow MA \geq OA - R = PA$. "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv P$. Mặt khác, $|MA - MO| \leq OA \Leftrightarrow MA \leq OA + OM = OA + R = AN$. "=" xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$. Vậy MA min $\Leftrightarrow M \equiv P$, MA max $\Leftrightarrow M \equiv N$. □

Nhận xét 1. *Kết quả cũng tương tự với điểm A nằm trong đường tròn.*

25 ([BBN23], 4.10., p. 107)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$ & điểm P nằm bên trong nó. 2 dây AB,CD thay đổi luôn đi qua P & vuông góc với nhau. Chứng minh AB^2+CD^2 là đại lượng không đổi.*

Chứng minh. Gọi H,K lần lượt là trung điểm AB,CD, có $OH\perp AB, OK\perp CD$. Áp dụng định lý Pythagore: $AB^2+CD^2=4AH^2+4CK^2=4(OA^2-OH^2+OC^2-OK^2)=4[R^2+R^2-(OH^2+OK^2)]=8R^2-4HK^2=8R^2-4OP^2=\mathrm{const}$. $OP=HK$ vì tứ giác $OHPK$ có 3 góc vuông ($AB\cdot CD\Rightarrow\angle HPK=90^\circ$) nên là hình chữ nhật. □

26 ([BBN23], 4.11., p. 107)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$, đường kính AB, E là điểm nằm trong đường tròn, AE cắt đường tròn tại C, BE cắt đường tròn tại D. Chứng minh $AE\cdot AC+BE\cdot BD=4R^2$.*

Chứng minh. Vì AB là đường kính đường tròn $(O;R)$ nên $\angle C=\angle D=90^\circ$. Hạ $EH\perp AB$. $\Delta ACB\backsim\Delta AHE$ (2 tam giác vuông, $\angle BAC$ chung) $\Rightarrow\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AH}{AE}\Leftrightarrow AE\cdot AC=AH\cdot AB$ (1). Tương tự, $\Delta BDA\backsim\Delta BHE$ (2 tam giác vuông, $\angle ABD$ chung) $\Rightarrow\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{BH}{BE}\Leftrightarrow BE\cdot BD=BH\cdot AB$ (2). Cộng (1) & (2), vế theo vế: $AE\cdot AC+BE\cdot BD=AH\cdot AB+BH\cdot AB=AB(AH+BH)=AB^2=4R^2$. □

27 ([BBN23], 4.12., p. 107)**.** *Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh 4 hình tròn có đường kính AB,BC,CD,DA phủ kín miền tứ giác $ABCD$.*

Chứng minh. Giả sử O là điểm bất kỳ trong tứ giác $ABCD$, tạo thành 4 góc $\angle AOB,\angle BOC,\angle COD,\angle DOA$, có $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$ nên ít nhất 1 trong 4 góc đó $\geq 90^\circ$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\angle COD\geq 90^\circ$, khi đó O nằm trong hoặc trên đường tròn đường kính CD. □

28 ([BBN23], 4.13., p. 107)**.** *Cho nửa đường tròn đường kính AB & điểm M nằm trong nửa đường tròn. Chỉ bằng thước kẻ, dựng qua M đường thẳng vuông góc với AB.*

Giải. Vẽ 2 tia AM,BM lần lượt cắt nửa đường tròn đường kính AB tại E,F. Vẽ 2 tia AF,BE, chúng cắt nhau tại C. Nối CM, có $CM\perp AB$. Thật vậy, $\Delta ABE,\Delta ABF$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên chúng lần lượt vuông tại E,F, suy ra M là trực tâm ΔABC, suy ra $CM\perp AB$. □

29 ([Tuy23], VD5, pp. 113–114)**.** *Trên đường tròn $(O;R)$ đường kính AB lấy 1 điểm C. Trên tia AC lấy điểm M sao cho C là trung điểm AM. (a) Xác định vị trí của điểm C để AM lớn nhất. (b) Xác định vị trí của điểm C để $AM=2R\sqrt{3}$. (c) Chứng minh khi C di động trên đường tròn (O) thì điểm M di động trên 1 đường tròn cố định.*

Giải. (a) $AM=2AC$. AM max $\Leftrightarrow AC$ max $\Leftrightarrow AC$ là đường kính của $(O;R)\Leftrightarrow C\equiv B$. (b) Điểm C nằm trên đường tròn đường kính $AB\Leftrightarrow\angle ACB=90^\circ$. Xét ΔABC vuông tại A: $AC=AB\cos A=2R\cos A\Leftrightarrow AM=2AC=4R\cos A$. $AM=2R\sqrt{3}\Leftrightarrow 4R\cos A=2R\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\angle A=30^\circ$. (c) ΔABM có BC vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên cân tại B, suy ra $BM=AB=2R\Rightarrow M\in(B,2R)$ cố định. □

Nhận xét 2. *"Phương pháp chung để chứng minh 1 điểm thuộc 1 đường tròn cố định là chứng minh điểm đó cách 1 điểm cố định 1 khoảng không đổi. Còn muốn chứng minh nhiều điểm cùng thuộc 1 đường tròn, ta chứng minh các điểm này cùng cách đều 1 điểm."* – [Tuy23, p. 114]

Nhận xét 3. *Mở rộng (b): Xác định vị trí của điểm C để $AM=aR$. Tương tự, $AM=aR\Leftrightarrow 4R\cos A=aR\Leftrightarrow\cos A=\frac{a}{4}$. Nếu $a\in[0,4]$ thì $\angle A=\arccos\frac{a}{4}$. Nếu $a\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ thì phương trình $\cos A=\frac{a}{4}$ vô nghiệm nên không tồn tại điểm M thỏa mãn.*

30 ([Tuy23], 36., p. 114)**.** *Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC khi: (a) $AH=BC=a$. (b) $AH=h$, $BC=a$.*

Giải. (a) Kéo dài AH cắt đường tròn (ABC) tại D. Vì ΔABC cân tại A nên AD là đường kính (ABC), suy ra $\angle ABD=90^\circ\Rightarrow BH^2=AH\cdot DH\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2}\right)^2=a(2R-a)\Leftrightarrow R=\frac{5}{8}a$. (b) Tương tự, $BH^2=AH\cdot DH\Leftrightarrow\left(\frac{a}{2}\right)^2=h(2R-h)\Leftrightarrow R=\frac{a^2}{8h}+\frac{h}{2}$. □

31 ([Tuy23], 37., p. 114)**.** *Cho ΔABC. D,E,F lần lượt là trung điểm BC,CA,AB. Chứng minh: 3 đường tròn $(AFE),(BFD),(CDE)$ bằng nhau & cùng đi qua 1 điểm. Xác định điểm chung đó.*

Chứng minh. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. $\Delta AEO,\Delta AFO$ là 2 tam giác vuông chung cạnh huyền OA nên E,F nằm trên đường tròn đường kính OA, suy ra $O\in(AEF)$. Chứng minh tương tự, $O\in(BDF),O\in(CDE)$. Vì D,E,F lần lượt là trung điểm của 3 cạnh ΔABC nên $\Delta AFE=\Delta FBD=\Delta EDC$ (c.c.c), suy ra 3 đường tròn $(AEF),(BDF),(CDE)$ bằng nhau & cùng đi qua tâm O đường tròn ngoại tiếp ΔABC. □

32 ([Tuy23], 38., p. 114)**.** *Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, 2 đường chéo cắt nhau tại O. R_1 & R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các $\Delta ABC,\Delta ABD$. Chứng minh: $\dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}=\dfrac{4}{a^2}$.*

Chứng minh. Gọi M là trung điểm AB. Vẽ đường trung trực của AB cắt AC tại K, cắt BD tại I. I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC, \Delta ABD$ nên $IB = R_1, AK = R_2$. $\Delta MBI \backsim \Delta OBA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BI}{AB} = \frac{BM}{BO} \Leftrightarrow \frac{R_1}{a} = \frac{a}{2OB} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{2OB}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1^2} = \frac{4OB^2}{a^4}$ (1). $\Delta MAK \backsim \Delta OAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AM}{OA} \Leftrightarrow \frac{R_2}{a} = \frac{a}{2OA} \Leftrightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{2OA}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1^2} = \frac{4OA^2}{a^4}$ (2). Áp dụng định lý Pythagore cho ΔOAB vuông tại O: $OA^2 + OB^2 = AB^2$. Cộng (1) & (2), vế theo vế, rồi áp dụng (3): $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4(OA^2 + OB^2)}{a^4} = \frac{4AB^2}{a^4} = \frac{4a^2}{a^4} = \frac{4}{a^2}$. □

33 ([Tuy23], 39., p. 115)**.** *Cho hình bình hành $ABCD$, cạnh AB cố định, đường chéo $AC = a$ cm với $a > 0$. Chứng minh điểm D di động trên 1 đường tròn cố định.*

Chứng minh. Vẽ điểm O đối xứng với B qua A, suy ra O cố định. Tứ giác $OACD$ có $OA \parallel CD$ & $OA = AB = CD = a$ cm nên $OACD$ là hình bình hành, suy ra $OD = AC = a$ cm $\Rightarrow D \in (O, a \text{ cm})$. □

34 ([Tuy23], 40., p. 115)**.** *Cho đường tròn $(O; R)$ & 1 dây BC cố định. Trên đường tròn lấy 1 điểm A ($A \not\equiv B$, $A \not\equiv C$). G là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh khi A di động trên đường tròn (O) thì điểm G di động trên 1 đường tròn cố định.*

Chứng minh. Gọi M là trung điểm BC. Trên OM lấy K thỏa $MK = \frac{1}{3}MO$, K cố định. Vì G là trọng tâm ΔABC nên $MG = \frac{1}{3}AM$. $\Delta MKG \backsim \Delta MOA$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{KG}{OA} = \frac{MK}{MO} = \frac{1}{3} \Rightarrow KG = \frac{OA}{3} = \frac{R}{3} \Rightarrow G \in (K; \frac{1}{3})$ cố định. □

35 ([Tuy23], 41., p. 115)**.** *Trong mặt phẳng cho $2n+1$ điểm, $n \in \mathbb{N}$, sao cho 3 điểm bất kỳ nào cũng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh: trong các điểm này có ít nhất $n+1$ điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.*

Chứng minh. Gọi A là 1 điểm trong số $2n+1$ điểm đã cho. Vẽ đường tròn $(A; 1)$. Nếu tất cả $2n$ điểm còn lại đều nằm trong đường tròn $(A; 1)$ thì kết luận bài toán đúng. Nếu B là 1 điểm không nằm trong đường tròn $(A; 1)$ thì $AB \ge 1$. Vẽ đường tròn $(B; 1)$. Gọi C là 1 điểm trong số $2n-1$ điểm còn lại (ngoại trừ A, B). Trong 3 điểm A, B, C có 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Vì $AB \ge 1$ nên $AC < 1$ hoặc $BC < 1$, i.e., C nằm trong $(A; 1)$ hoặc C nằm trong $(B; 1)$. Nên 2 đường tròn $(A; 1), (B; 1)$ chứa tất cả $2n+1$ điểm đã cho. Theo nguyên lý Dirichlet phải có 1 trong 2 đường tròn chứa ít nhất $n+1$ điểm. □

36 ([Tuy23], 42., p. 115)**.** *Cho hình bình hành $ABCD$, 2 đường chéo cắt nhau tại O. Vẽ đường tròn tâm O cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Xác định dạng của tứ giác $MNPQ$.*

37 ([Tuy23], 43., p. 115)**.** *2 người chơi 1 trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt đặt lên 1 chiếc bàn hình tròn 1 cái cốc. Ai là người cuối cùng đặt được cốc lên bàn thì người đó thắng cuộc. Muốn chắc thắng thì phải chơi theo "chiến thuật" nào? (các chiếc cốc đều như nhau).*

38 ([Bìn23a], VD8, p. 95)**.** *Cho hình thang cân $ABCD$. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.*

Chứng minh. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của 2 cạnh đáy AB, CD của hình thang cân $ABCD$. MN là trục đối xứng của hình thang cân $ABCD$ nên MN là đường trung trực của AB, CD. Gọi O là giao điểm của MN với đường trung trực của BC. O thuộc đường trung trực của $AB \Leftrightarrow OA = OB$. O thuộc đường trung trực của $BC \Leftrightarrow OB = OC$. O thuộc đường trung trực của $CD \Leftrightarrow OC = OD$. Kết hợp lại, suy ra $OA = OB = OC = OD$, i.e., $A, B, C, D \in (O; OA)$. □

Lưu ý 1. *1 hình thang cân bất kỳ luôn nội tiếp 1 đường tròn với tâm là giao điểm 4 đường trung trực của 4 cạnh hình thang cân đó. Hơn nữa, nếu 1 hình thang nội tiếp được 1 đường tròn thì hình thang đó cân.*

39 ([Bìn23a], 50., p. 95)**.** *(a) Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), $AC = 40$ cm, $BC = 48$ cm. Tính khoảng cách từ O đến BC. (b) Mở rộng cho $AC = b, BC = a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < 2b$.*

Giải. (a) Kẻ đường cao AH, $H \in BC$. ΔABC cân tại A nên AH cũng là đường trung tuyến, suy ra $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{48}{2} = 24$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔAHC vuông tại H: $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$. Vì $AH > CH$ nên tâm O nằm giữa A, H. Đặt $x \coloneqq OH$. Kẻ $OM \perp AC$, $M \in AC$, suy ra M là trung điểm AC, nên $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{40}{2} = 20$. $\Delta AMO \backsim \Delta AHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow \frac{32 - x}{40} = \frac{20}{32} \Leftrightarrow x = 7$ cm. (b) Tương tự, $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔAHC vuông tại H: $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Xét 3 trường hợp: (i) $AH = CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}$ thì ΔAHC vuông cân, $O \equiv H$ nên $d(O, BC) = 0$. (ii) $AH > CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} > \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 > \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a < b\sqrt{2}$ thì O nằm giữa A, H. Kẻ $OM \perp AC$, $M \in AC$, suy ra M là trung điểm AC, nên $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$. $\Delta AMO \backsim \Delta AHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - x}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - x = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow x = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2b^2 - a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

(iii) $AH < CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} < \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 < \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a > b\sqrt{2}$ thì H nằm giữa A, O. Kẻ $OM \perp AC$, $M \in AC$, OM cắt CH tại D, suy ra M là trung điểm AC, nên $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$. $\Delta AMO \backsim \Delta AHC$ (g.g)

* * *

□

40 ([Bìn23a], 51., p. 96). *Cho ΔABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O), cạnh bên bằng b, đường cao $AH = h$. Tính bán kính đường tròn (O).*

Giải. Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) thì $\angle ABD = 90°$. Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABD vuông tại B: $AB^2 = AH \cdot AD \Leftrightarrow 2R = AD = \dfrac{AB^2}{AH} = \dfrac{b^2}{h} \Leftrightarrow R = \dfrac{b^2}{2h}$. □

41 ([Bìn23a], 52., p. 96). *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. M là trung điểm BC. Giả sử O nằm trong ΔAMC hoặc O nằm giữa A & M. I là trung điểm AC. Chứng minh: (a) Chu vi ΔIMC lớn hơn $2R$. (b) Chu vi ΔABC lớn hơn $4R$.*

42 ([Bìn23a], 53., p. 96). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). D, E, F lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Kẻ 3 đường thẳng DD', EE', FF' sao cho $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$. Chứng minh 3 đường thẳng DD', EE', FF' đồng quy.*

43 ([Bìn23a], 54., p. 96). *Cho 3 điểm A, B, C bất kỳ & đường tròn $(O; 1)$. Chứng minh tồn tại 1 điểm M nằm trên đường tròn (O) sao cho $MA + MB + MC \geq 3$.*

44 ([Bìn+23], VD1, p. 20). *Cho đường tròn (O), đường kính AB, 2 dây AC, BD. Chứng minh $AC \parallel BD \Leftrightarrow CD$ là đường kính.*

45 ([Bìn+23], VD2, p. 20). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD song song với nhau. E, F là trung điểm AB, CD. Chứng minh E, F, O thẳng hàng.*

46 ([Bìn+23], VD3, p. 20). *Dựng 1 đường tròn nhận đoạn thẳng AB cho trước làm dây cung có bán kính r cho trước.*

47 ([Bìn+23], VD4, p. 21). *Cho đường tròn $(O; R)$ & dây AB. Kéo dài AB về phía B lấy điểm C sao cho $BC = R$. Chứng minh $\angle AOC = 180° - 3\angle ACO$.*

48 ([Bìn+23], VD5, p. 21). *Cho ΔABC. Từ trung điểm 3 cạnh kẻ các đường vuông góc với 2 cạnh kia tạo thành 1 lục giác. Chứng minh diện tích ΔABC gấp 2 lần diện tích lục giác.*

49 ([Bìn+23], VD6, p. 21). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB, CD kéo dài cắt nhau tại điểm M ở ngoài đường tròn. H, E là trung điểm AB, CD. Chứng minh $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$.*

50 ([Bìn+23], VD7, p. 22). *Cho đường tròn (O) & điểm A nằm trong đường tròn, $A \neq O$. Tìm trên đường tròn điểm M sao cho $\angle OMA$ lớn nhất.*

51 ([Bìn+23], VD8, p. 22). *Cho đường tròn (O), A, B, C là 3 điểm trên đường tròn sao cho $AB = AC$. I là trung điểm AC, G là trọng tâm của ΔABI. Chứng minh $OG \perp BI$.*

52 ([Bìn+23], VD9, p. 23). *Dựng ΔABC. Biết $\angle A = \alpha < 90°$, đường cao $BH = h$ & trung tuyến $CM = m$.*

53 ([Bìn+23], VD10, p. 23). *Cho ΔABC nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; r)$, $AB = r\sqrt{3}$, $AC = r\sqrt{2}$. Giải ΔABC.*

54 ([Bìn+23], VD11, p. 23). *Cho đoạn thẳng BC cố định, I là trung điểm BC, điểm A trên mặt phẳng sao cho $AB = BC$. H là trung điểm AC, đường thẳng AI cắt đường thẳng BH tại M. Chứng minh M nằm trên 1 đường tròn cố định khi A thay đổi.*

55 ([Bìn+23], VD12, p. 24). *Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $BH \perp AC$. Trên cạnh AC, CD lấy 2 điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AH} = \dfrac{DN}{CD}$. Chứng minh 4 điểm B, C, M, N nằm trên 1 đường tròn.*

56 ([Bìn+23], VD13, p. 24). *Cho đường tròn $(O; R)$, dây $AB = 2a$, $a < R$. Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt đường tròn tại D. Tính AD theo a, R.*

57 ([Bìn+23], VD14, p. 25). *Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB, điểm E nằm trong đường tròn, AE cắt đường tròn tại C, BE cắt đường tròn tại D. Chứng minh $AE \cot AC + BE \cdot BD$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm E.*

58 ([Bìn+23], VD15, p. 25). *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh 4 hình tròn có đường kính AB, BC, CD, DA phủ kín miền tứ giác $ABCD$.*

59 ([Bìn+23], 4.1., p. 26). *Tính cạnh của tam giác đều, bát giác đều, n-giác đều nội tiếp đường tròn $(O; R)$.*

60 ([Bìn+23], 4.2., p. 26). *Cho đường tròn (O), điểm P ở trong đường tròn. Xác định dây lớn nhất & dây ngắn nhất đi qua P.*

61 ([Bìn+23], 4.3., p. 26). *Cho đường tròn (O), 2 bán kính OA, OB vuông góc với nhau. Kẻ tia phân giác của $\angle AOB$, cắt đường tròn ở D, M là điểm chuyển động trên cung nhỏ AB, từ M kẻ $MH \perp OB$ cắt OD tại K. Chứng minh $MH^2 + KH^2$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm M.*

62 ([Bìn+23], 4.4., p. 26). *Chứng minh bao giờ cũng chia được 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân, trong đó có 3 tam giác bằng nhau.*

63 ([Bìn+23], 4.5., p. 26). *Cho đường tròn (O), 1 dây cung EF có khoảng cách từ tâm O đến dây là d. Dựng 2 hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn, 2 đỉnh còn lại nằm trên dây EF. Tính hiệu của 2 cạnh hình vuông đó theo d.*

64 ([Bìn+23], 4.6., p. 26). *Cho 2 đường tròn đồng tâm. Dựng 1 dây cắt 2 đường tròn theo thứ tự tại A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.*

65 ([Bìn+23], 4.7., p. 26). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, $AB = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $AC = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Giải ΔABC.*

66 ([Bìn+23], 4.8., p. 26). *Cho hình thoi $ABCD$. R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD. Tính cạnh của hình thoi $ABCD$ theo R_1, R_2.*

67 ([Bìn+23], 4.9., p. 26). *Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi 1 trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 điểm được tô cùng 1 màu mà khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng 1.*

68 ([Bìn+23], 4.10., p. 26). *Cho đường tròn $(O; R)$ & dây AB cố định. Từ điểm C thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành $CABD$. Chứng minh giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành $CABD$ nằm trên 1 đường tròn cố định.*

2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

Cho $(O; R)$, 2 dây AB, CD. H, K lần lượt là hình chiếu của O lên AB, CD. $OH \perp AB, OK \perp CD \Rightarrow H, K$ lần lượt là trung điểm của AB, CD. $\boxed{1}$ $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow d(O, AB) = d(O, CD)$ với $d(A, d_0)$ là *khoảng cách* (distance) từ điểm A tới đường thẳng d_0. $\boxed{2}$ $AB > CD \Leftrightarrow OH < OK \Leftrightarrow d(O, AB) < d(O, CD)$. $\boxed{3}$ Công thức liên hệ giữa độ dài dây & khoảng cách từ tâm đường tròn đến dây đó. $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - d(O, AB)^2} \le 2\sqrt{R^2} = 2R$. "=" xảy ra $\Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$ là đường kính $(O; R)$. $\boxed{4}$ $AB = 2R \Leftrightarrow OH = 0 \Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$ là đường kính đường tròn $(O; R)$.

69 ([BBN23], H1, p. 109). *Giải thích kết luận "Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn" dựa vào so sánh khoảng cách từ tâm đến dây.*

1st giải. Dây càng lớn thì khoảng cách từ tâm đến dây càng nhỏ & ngược lại. □

2nd giải. Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn vì khoảng cách từ tâm đến đường kính bằng 0 (i.e., khoảng cách nhỏ nhất có thể trong các khoảng cách từ tâm đường tròn đến các dây của đường tròn đó). □

3rd giải. Cho đường tròn $(O; R)$, dây AB bất kỳ, có $AB = 2\sqrt{R^2 - d(O, AB)^2} \le 2\sqrt{R^2} = 2R$. "=" xảy ra $\Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$ là đường kính $(O; R)$. □

70 ([BBN23], H2, p. 109). *Cho đường tròn (O), 2 dây $AB \parallel CD$ & $AB = CD$, A, D cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ BC. Tứ giác $ABCD$ là hình gì?*

71 ([BBN23], H3, p. 109). *Cho 1 đường tròn $(O; R)$ & dây CD thay đổi nhưng có độ dài bằng a không đổi. Tập hợp các trung điểm dây CD là đường nào?*

72 ([BBN23], H4, p. 110). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O & cát tuyến $ABCD$. So sánh AB, CD.*

73 ([BBN23], VD1, p. 110). *Cho đường tròn $(O; R)$ & 1 điểm M nằm trong đường tròn. Vẽ qua M 2 dây AB, CD sao cho $AB \perp OM$. (a) So sánh độ dài 2 dây AB, CD. (b) Chứng minh $\angle ODM < \angle OBM$. (c) Xác định vị trí của dây đi qua M sao cho độ dài của nó là nhỏ nhất, lớn nhất.*

Giải. $AB \perp OM \Leftrightarrow M$ là trung điểm AB. Gọi K là trung điểm CD thì $OK \perp CD$. (a) ΔOKM vuông tại K có cạnh huyền OM nên $OM > OK$. Trong 2 dây AB, CD, dây CD gần O hơn nên lớn hơn: $AB > CD$. (b) 2 góc nhọn $\angle KDO, \angle MBO$ (nhọn vì $\Delta OKD, \Delta OBM$ vuông) có $\sin\angle KDO = \dfrac{OK}{OD} = \dfrac{OK}{R}$, $\sin\angle MBO = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OM}{R}$. Có $OM > OK \Leftrightarrow \sin\angle KDO < \sin\angle MBO \Leftrightarrow \angle ODM < \angle OBM$. (c) Theo (a), trong các dây thay đổi luôn đi qua M, dây $AB \perp OM$ có độ dài nhỏ nhất. Dây đi qua M, O là đường kính nên có độ dài lớn nhất. □

74 ([BBN23], VD2, p. 111). *Cho 2 dây MN, EF bằng nhau & cắt nhau tại 1 điểm A nằm trong đường tròn $(O; R)$. Chứng minh $EM = FN$ hoặc $EN = FM$.*

Chứng minh. Chỉ cần xét trường hợp AM, AF cùng là 2 đoạn ngắn hơn hoặc dài hơn trong 2 cặp đoạn thẳng (AM, AN), (AE, AF), cần chứng minh $EM = FN$ (trường hợp AM, AE cùng là 2 đoạn ngắn hơn hoặc dài hơn trong 2 cặp đoạn thẳng (AM, AN), (AE, AF), chứng minh $EN = FM$ tương tự). Gọi I, K lần lượt là trung điểm EF, MN thì $OI \perp EF, OK \perp MN$. Vì $MN = EF$ (gt) nên $OI = OK, IF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}MN = KM$, nên $\Delta OIF = \Delta OKM$ (ch.cgn) $\Rightarrow \angle OMK = \angle OFI$ (1). ΔFOM cân tại O $(OF = OM = R) \Rightarrow \angle OMF = \angle OFM$ (2). Từ (1), (2) suy ra $\angle EFM = \angle NMF$ (3). Có $\Delta MFE = \Delta FMN$ vì $MN = EF$, MF chung, & (3) (c.g.c) $\Rightarrow EM = FN$. □

75 ([BBN23], VD3, p. 111). *Cho nửa đường tròn đường kính AB. Trên đoạn thẳng AB lấy 2 điểm C,D sao cho $AC = BD$. Từ C,D kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại M,N. (a) Chứng minh tứ giác $CMND$ là hình thang vuông. (b) Xác định vị trí của M,N để $CM + DN$ nhỏ nhất.*

Chứng minh. (a) Gọi I là trung điểm MN (1) thì $OI \perp MN$. $CM \parallel DN \Rightarrow$ tứ giác $CDNM$ là hình thang. $OC = OA - AC = R - AC = R - BD = OD - BD = OD$ (2). Từ (1) & (2) suy ra OI là đường trung bình của hình thang $CDNM$, nên $OI \parallel CM \parallel DN$, mà $OI \perp MN$, nên $CM \perp MN, DN \perp MN$, i.e., $CDNM$ là hình thang vuông tại M,N. (b) Vì OI là đường trung bình của hình thang $CDNM$ nên $CM + DN = 2OI$, nên $CM + DN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất. Trong hình thang vuông $CDNM$, $MN \le CD$ (đường xiên không nhỏ hơn khoảng cách giữa 2 đường song song), nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow MN = CD \Leftrightarrow CDNM$ là hình chữ nhật. Vậy khi $CM \perp AB, DN \perp AB$ thì $CM + DN$ nhỏ nhất. □

76 ([BBN23], VD4, p. 112). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB,CD kéo dài cắt nhau tại điểm M ở ngoài đường tròn. H,E lần lượt là trung điểm AB,CD. Chứng minh: $AB < CD \Leftrightarrow HM < EM$.*

1st chứng minh. H,E lần lượt là trung điểm $AB,CD \Rightarrow OH \perp AB, OE \perp CD$. Áp dụng định lý Pythagore cho $\Delta OHM, \Delta OEM$ lần lượt vuông tại H,E: $OH^2 + HM^2 = OM^2 = OE^2 + EM^2$ nên $AB < CD \Leftrightarrow OH > OE \Leftrightarrow OH^2 > OE^2 \Leftrightarrow OM^2 - OH^2 < OM^2 - OE^2 \Leftrightarrow HM^2 < EM^2 \Leftrightarrow HM < EM$. □

2nd chứng minh. H,E lần lượt là trung điểm $AB,CD \Rightarrow OH \perp AB, OE \perp CD$. Vẽ đường tròn tâm I đường kính OM. $\angle OHM = \angle OEM = 90^\circ \Leftrightarrow H,E \in (I,IM)$. Kẻ $IK \perp MH, IG \perp ME$ thì K,G lần lượt là trung điểm HM,EM, mà I là trung điểm MO nên IK,IG lần lượt là đường trung bình của $\Delta OHM, \Delta OEM$, suy ra $OH = 2IK, OE = 2IG$. $AB < CD \Leftrightarrow OH > OE \Leftrightarrow IK > IG \Leftrightarrow MH < ME$. □

77 ([BBN23], 5.1., p. 112). *Cho đường tròn (O) có tâm O nằm trên đường phân giác $\angle xIy$, (O) cắt tia Ix ở A,B sao cho A nằm giữa B,I, cắt tia Iy ở C,D sao cho C nằm giữa D,I. Chứng minh: (a) $AB = CD$. (b) $IA = IC, IB = ID$.*

Chứng minh. Kẻ $OH \perp AB, OK \perp CD$ thì H,K lần lượt là trung điểm AB,CD. IO là tia phân giác $\angle xIy$ (gt) $\Rightarrow OH = OK$ (tính chất đường phân giác[3]) $\Leftrightarrow AB = CD$. (b) Vì H,K lần lượt là 2 hình chiếu vuông góc của điểm O nằm trên tia phân giác $\angle xIy$ lên 2 cạnh Ix,Iy nên $IH = IK$ (1) (tính chất đường phân giác). Từ (a), $AB = CD \Leftrightarrow AH = BH = CK = DK$ (2). Từ (1) & (2), $IA = IH - AH = IK - CK = IC, IB = IA + AB = IC + CD = ID$. □

78 ([BBN23], 5.2., p. 112). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O, bán kính $r_1 > r_2$. Từ điểm M trên $(O;r_1)$ vẽ 2 dây ME,MF theo thứ tự cắt $(O;r_2)$ tại A,B & C,D. H,K lần lượt là trung điểm AB,CD. Biết $AB > CD$. So sánh: (a) ME,MF. (b) MH,MK.*

Chứng minh. H,K lần lượt là trung điểm $AB,CD \Rightarrow OH \perp AB, OK \perp CD$. Trong $(O;r_2)$, $AB > CD \Leftrightarrow OH < OK$. Trong $(O;r_1)$, $OH < OK \Leftrightarrow ME > MF$. (b) Từ (a) $MH = \frac{1}{2}ME > \frac{1}{2}MF = MK$. □

79 ([BBN23], 5.3., p. 112). *Cho đường tròn $(O; 5\text{cm})$, dây $AB = 8$ cm. (a) Tính khoảng cách từ tâm O đến dây AB. (b) Lấy điểm I trên dây AB sao cho $AI = 1$ cm. Kẻ dây CD đi qua I & vuông góc với AB. Chứng minh $AB = CD$.*

Chứng minh. (a) Kẻ $OE \perp AB$ thì E là trung điểm AB nên $AE = BE = \frac{1}{2}AB = 4$ cm, OE là khoảng cách từ tâm O đến dây AB. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔBEO vuông tại E: $OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm. (b) Kẻ $OF \perp CD$ thì OF là khoảng cách từ tâm O đến dây CD. Tứ giác $EIFO$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông, nên $OF = IE = AE - AI = 4 - 1 = 3$ cm, suy ra $OE = OF = 3$ cm $\Leftrightarrow AB = CD$. □

80 ([BBN23], 5.4., p. 112). *Cho đường tròn tâm O đường kính AB & dây CD. 2 đường vuông góc với CD tại C,D tương ứng cắt AB ở M,N. Chứng minh $AM = BN$.*

Chứng minh. Xét 2 trường hợp:

- *Trường hợp dây CD không cắt đường kính AB.* $CM \perp CD, DN \perp CD \Rightarrow CM \parallel DN \Rightarrow CDNM$ là hình thang. Kẻ $OH \perp CD$ thì H là trung điểm CD (1). Vì CM,DN,OH cùng vuông góc với CD nên $CM \parallel DN \parallel OH$, kết hợp với (1), suy ra OH là đường trung bình của hình thang $CDNM$, nên $OM = ON$, suy ra $AM = OA - OM = OB - ON = BN$.
- *Trường hợp dây CD cắt đường kính AB tại 1 điểm K.* Kẻ $OH \perp CD$ thì H là trung điểm CD (1). Kẻ $OE \perp CM, E \in CM$ thì tứ giác $OECH$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông nên $OE = CH$ (2). Kẻ $OF \perp DN, F \in DN$ thì tứ giác $OFDH$ là hình chữ nhật vì có 3 góc vuông nên $OF = DH$ (3). Từ (1)–(3) suy ra $OE = OF$ nên $\Delta OEM = \Delta OFN$ (cgv.gn) $\Rightarrow OM = ON \Rightarrow AM = OM - OA = ON - OB = BN$.

Vậy $AM = BN$ trong cả 2 trường hợp. □

81 ([BBN23], 5.5., p. 113). *Cho đường tròn (O), 2 dây AB,CD bằng nhau & cắt nhau tại điểm I nằm trong đường tròn. Chứng minh: (a) IO là tia phân giác của 1 trong 2 góc tạo bởi 2 đường thẳng AB,CD. (b) Điểm I chia AB,CD thành 2 cặp đoạn thẳng bằng nhau đôi một.*

Chứng minh. Kẻ $OH \perp AB, OK \perp CD$ thì H,K lần lượt là trung điểm AB,CD. $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow IO$ là tia phân giác $\angle BID$ hoặc $\angle AIC$. (b) □

[3] Hoặc $\Delta OIH = \Delta OIK$ (ch.gn) $\Rightarrow OH = OK$.

82 ([BBN23], 5.6., p. 113). *Cho đường tròn* $(O, 6\text{cm})$ *& 2 dây* $AB = 8, CD = 10$. *M là trung điểm AB, N là trung điểm CD. (a) So sánh* $\angle OMN, \angle ONM$ *trong trường hợp 2 dây* AB, CD *không song song. (b) So sánh diện tích* $\Delta OCD, \Delta OAB$.

83 ([BBN23], 5.7., p. 113). *Cho đường tròn* (O) *đường kính AB & dây CD cắt đường kính AB tại I. Hạ* AH, BK *vuông góc với CD. Chứng minh* $CH = DK$.

84 ([BBN23], 5.8., p. 113). *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *cắt nhau tại* A, B. *Qua A kẻ 2 cát tuyến* CAF, DAE, $C, D \in (O)$, $E, F \in (O')$, *sao cho* $\angle CAB = \angle EAB$. *Chứng minh* $CF = DE$.

85 ([BBN23], 5.9., p. 113). *Cho* ΔABC *cân tại A nội tiếp đường tròn* (O). *I là trung điểm của AC, G là trọng tâm của* ΔABI. *Chứng minh* $OG \perp BI$.

86 ([BBN23], 5.10., p. 113). *Cho* ΔABC *nhọn nội tiếp đường tròn* $(O; r)$ *biết* $AB = r\sqrt{3}, AC = r\sqrt{2}$. *Giải* ΔABC.

87 ([Bìn23a], VD9, p. 96). *Cho* ΔABC *nhọn nội tiếp đường tròn* (O). *Điểm M bất kỳ thuộc cung BC không chứa A.* D, E *lần lượt là các điểm đối xứng với M qua* AB, AC. *Tìm vị trí của M để DE lớn nhất.*

88 ([Bìn23a], VD10, p. 97). *Cho* (O) *bán kính* $OA = 11$ cm. *Điểm M thuộc bán kính OA & cách O* 7 cm. *Qua M kẻ dây CD dài* 18 cm. *Tính MC, MD với* $MC < MD$.

89 ([Bìn23a], VD11, p. 97). *Cho* (O) *bán kính* 15 cm, *điểm M cách O* 9 cm. *(a) Dựng dây AB đi qua M & dài* 26 cm. *(b) Có bao nhiêu dây đi qua M & có độ dài là 1 số nguyên* cm*?*

90 ([Bìn23a], 55., p. 98). *Tứ giác ABCD có* $\angle A = \angle C = 90^\circ$. *(a) Chứng minh* $AC \le BD$. *(b) Trong trường hợp nào thì* $AC = BD$*?*

91 ([Bìn23a], 56., p. 98). *Cho* (O) *đường kính AB, 2 dây AC, AD. Điểm E bất kỳ trên đường tròn, H, K lần lượt là hình chiếu của E trên AC, AD. Chứng minh* $HK \le AB$.

92 ([Bìn23a], 57., p. 98). *Cho* (O), *dây* $AB = 24$ cm, *dây* $AC = 20$ cm *(*$\angle BAC < 90^\circ$ *& điểm O nằm trong* $\angle BAC$*). M là trung điểm AC. Khoảng cách từ M đến AB bằng* 8 cm. *(a) Chứng minh* ΔABC *cân tại C. (b) Tính bán kính đường tròn.*

93 ([Bìn23a], 58., p. 98). *Cho* (O) *bán kính* 5 cm, *2 dây AB & CD song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng* 8 cm *&* 6 cm. *Tính khoảng cách giữa 2 dây.*

94 ([Bìn23a], 59., p. 98). *Cho* (O), *đường kính* $AB = 13$ cm. *Dây CD dài* 12 cm *vuông góc với AB tại H. (a) Tính AH, BH. (b)* M, N *lần lượt là hình chiếu của H trên* AC, BC. *Tính diện tích tứ giác CMHN.*

95 ([Bìn23a], 60., p. 99). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, dây CD.* H, K *lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ* A, B *đến CD. (a) Chứng minh* $CH = DK$. *(b) Chứng minh* $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$. *(c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác AHKB biết* $AB = 30$ cm, $CD = 18$ cm.

96 ([Bìn23a], 61., p. 99). *Cho* ΔABC, *3 đường cao* AD, BE, CF. *Đường tròn đi qua D, E, F cắt BC, CA, AB lần lượt ở M, N, P. Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ M vuông góc với BC, kẻ từ N vuông góc với AC, kẻ từ P vuông góc với AB đồng quy.*

97 ([Bìn23a], 62., p. 99). ΔABC *cân tại A nội tiếp* (O). *D là trung điểm AB, E là trọng tâm của* ΔACD. *Chứng minh* $OE \perp CD$.

3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

98 ([BBN23], H1, p. 116). *Đường thẳng & đường tròn có thể có 3 điểm chung không?*

99 ([BBN23], H2, p. 116). *Cho đường tròn* $(O, a$ cm$)$ *& 1 đường thẳng d cắt đường tròn tại 2 điểm* A, B. *H là trung điểm của AB. Tìm khoảng giá trị của OH.*

100 ([BBN23], H3, p. 116). *Qua 1 điểm nằm trong đường tròn có thể kẻ được tiếp tuyến với đường tròn này không?*

101 ([BBN23], H4, p. 116). *Qua 1 điểm ở trên đường tròn có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn đó?*

102 ([BBN23], H5, p. 116). *Tập hợp tâm các đường tròn* $(O; R)$ *tiếp xúc với đường thẳng d cố định là đường nào?*

103 ([BBN23], VD1, p. 116). *Cho đường tròn* $(O; R)$ *tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên đường thẳng d lấy điểm M. Vẽ đường tròn* (M, MA) *cắt* $(O; R)$ *tại điểm thứ 2 là* $B \ne A$. *Chứng minh MB là tiếp tuyến của* $(O; R)$.

104 ([BBN23], VD2, p. 117). *Cho hình thang ABCD,* $\angle A = \angle B = 90^\circ$, *có I là trung điểm AB &* $\angle CID = 90^\circ$. *Chứng minh CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.*

105 ([BBN23], VD3, p. 117). *Cho đường tròn* (O), *đường kính AB. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ 2 tiếp tuyến* Ax, By *với đường tròn. 1 đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại E, cắt* Ax, By *theo thứ tự tại* M, N. *(a) Chứng minh tích* $AM \cdot BN$ *không đổi khi d thay đổi. (b) Xác định vị trí của d để* $AM + BN$ *nhỏ nhất.*

106 ([BBN23], VD4, p. 118)**.** *Cho đường tròn (I) nội tiếp ΔABC vuông tại A, $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử (I) tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh $S_{ABC} = BD \cdot CD$.*

107 ([BBN23], VD5, p. 118)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh tiếp xúc với đường tròn (O), đồng thời tất cả các cạnh kéo dài của nó tiếp xúc với đường tròn (O'). Chứng minh 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ vuông góc với nhau.*

108 ([BBN23], VD6, p. 118)**.** *Cho hình vuông $ABCD$. Tia Ax quay xung quanh A, luôn nằm trong $\angle BAD$. 2 tia phân giác của $\angle BAx, \angle DAx$ lần lượt cắt BC, CD tại M, N. Chứng minh MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.*

109 ([BBN23], VD7, p. 119)**.** *Cho đường tròn $(O, 5\text{ cm})$ & 1 điểm A nằm ngoài đường tròn. Dựng 1 cát tuyến đi qua A, cắt đường tròn theo 1 dây dài* 8 cm.

110 ([BBN23], VD8, p. 119)**.** *Trong các tam giác vuông có cùng cạnh huyền, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

111 ([BBN23], 6.1., p. 120)**.** *Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. 1 đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M. Từ A, B hạ AE, BF vuông góc với d, $E, F \in d$. (a) Chứng minh $AE + BF$ không đổi khi M chạy trên nửa đường tròn. (b) Kẻ $MD \perp AB$. Chứng minh $MD^2 = AE \cdot BF$. (c) Xác định vị trí của M để tích $AE \cdot BF$ lớn nhất.*

112 ([BBN23], 6.2., p. 120)**.** *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O; r)$ đồng tâm, $R > r$. Từ điểm $A \in (O; r)$ kẻ 2 tiếp tuyến với $(O; r)$, 2 tiếp điểm là M, N. 2 tiếp tuyến đó cắt $(O; R)$ tương ứng tại B, C. (a) Chứng minh $AB = AC$. (b) Chứng minh $AO \perp BC$. (c) Tính diện tích ΔABC theo R, r.*

113 ([BBN23], 6.3., p. 120)**.** *Cho đường tròn (O), dây AB khác đường kính. Tại A, B kẻ 2 tiếp tuyến Ax, By với đường tròn. Trên Ax, By lấy lần lượt 2 điểm M, N sao cho $AM = BN$. Chứng minh hoặc $AB \parallel MN$ hoặc AB đi qua trung điểm của MN.*

114 ([BBN23], 6.4., p. 120)**.** *Cho ΔABC. Đường tròn (I) nội tiếp & đường tròn (J) bàng tiếp trong $\angle A$ của tam giác tiếp xúc với BC theo thứ tự tại M, N. Chứng minh M, N đối xứng nhau qua trung điểm BC.*

115 ([BBN23], 6.5., p. 120)**.** *Cho 2 đường thẳng $d \parallel d'$. 1 đường tròn (O) tiếp xúc với d, d' tương ứng tại C, D, điểm A cố định trên d, nằm ngoài (O). Chỉ dùng êke, tìm trên d' điểm B sao cho AB là tiếp tuyến của (O).*

116 ([BBN23], 6.6., p. 120)**.** *Từ điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$, kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn, B, C là 2 tiếp điểm. 1 điểm M bất kỳ trên đường thẳng đi qua 2 trung điểm P, Q của AB, AC. Kẻ tiếp tuyến MK của (O). Chứng minh $MK = MA$.*

117 ([BBN23], 6.7., p. 121)**.** *Từ 1 điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với đường tròn, MO cắt tia AN tại E, NO cắt tia AM tại F. (a) Chứng minh $EF \parallel MN$. (b) Biết $OA = 7, R = 5$, tính khoảng cách từ A đến MN.*

118 ([BBN23], 6.8., p. 121)**.** *Cho nửa đường tròn (O), đường kính $AB = 2R$. Điểm M di động trên nửa đường tròn đó, $M \neq A, M \neq B$. Vẽ đường tròn (M) tiếp xúc với AB tại H. Từ A, B kẻ 2 tiếp tuyến AC, BD với (M), C, D là 2 tiếp điểm. (a) Chứng minh C, M, D thẳng hàng. (b) Chứng minh CD là tiếp tuyến của (O). (c) Giả sử CD cắt AB tại K. Chứng minh $OA^2 = OB^2 = OH \cdot OK$.*

119 ([BBN23], 6.9., p. 121)**.** *Cho đường tròn (O), đường kính AB, dây $CD \perp OA$ tại $H \in OA$. A' là điểm đối xứng với A qua H, DA' cắt BC tại I. Chứng minh: (a) $DI \perp BCm$ $HI = HC$. (b) HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính $A'B$.*

120 ([BBN23], 6.10., p. 121)**.** *Cho đường tròn (O) & điểm A cố định nằm trên đường tròn đó. Kẻ tiếp tuyến xAy với đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. (a) Chứng minh M, O, trọng tâm, trực tâm ΔAMB thẳng hàng. (b) H là trực tâm của ΔAMB. Chứng minh tứ giác $OAHB$ là hình thoi. (c) Tìm tập hợp các điểm H khi M thay đổi.*

121 ([BBN23], 6.11., p. 121)**.** *Cho 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng xy, AB không vuông góc với xy. Tìm điểm $M \in xy$ sao cho MB là phân giác của góc giữa 2 đường thẳng AM, xy.*

122 ([BBN23], 6.12., p. 121)**.** *Cho đường thẳng xy & 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với xy. Tìm trên xy điểm M sao cho $\angle BMy = 2\angle AMx$.*

123 ([BBN23], 6.13., p. 121)**.** *Tứ giác $ABCD$ có 4 cạnh tiếp xúc với 1 đường tròn & 2 đường chéo của nó vuông góc với nhau. Chứng minh 1 trong 2 đường chéo là trục đối xứng của tứ giác.*

124 ([BBN23], 6.14., p. 121)**.** *Trong các ΔABC có chung đáy BC & có cùng diện tích S, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

125 ([BBN23], 6.15., p. 122)**.** *Đường tròn $(O; r)$ nội tiếp ΔABC. Các tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với 3 cạnh của tam giác & chia tam giác thành 3 tam giác nhỏ. r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh $r_1 + r_2 + r_3 = r$.*

126 ([BBN23], 6.16., p. 122)**.** *Cho đường tròn (I) nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với cạnh AB tại D. Chứng minh: ΔABC vuông tại $C \Leftrightarrow AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$.*

127 ([BBN23], 6.17., p. 122)**.** *Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các tam giác tạo bởi 2 cạnh liên tiếp & 1 đường chéo ta vẽ các đường tròn nội tiếp. Chứng minh các tiếp điểm của chúng với 2 đường chéo tạo thành 1 hình chữ nhật.*

128 ([BBN23], 6.18., p. 122). *Cho $\angle xOy$, 2 điểm A, B theo thứ tự chuyển động trên Ox, Oy sao cho chu vi ΔOAB không đổi. Chứng minh AB luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.*

129 ([BBN23], 6.19., p. 122). *Cho $\angle xOy = 90°$, đường tròn (I) tiếp xúc với 2 cạnh Ox, Oy lần lượt ở A, B. 1 tiếp tuyến của (I) tại điểm E cắt Ox, Oy lần lượt ở C, D, $C \in OA, D \in OB$. Chứng minh: $\frac{1}{3}(OA + OB) < CD < \dfrac{1}{2}(OA + OB)$.*

130 ([BBN23], 6.20., p. 122). *Cho đường tròn (O) & điểm M ngoài đường tròn. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với (O). Vẽ đường tròn (M, MA). (a) Chứng minh OA, OB là 2 tiếp tuyến của đường tròn (M, MA). (b) Giả sử OM cắt (M, MA) tại E, F, E nằm giữa O, M. Chứng minh $\angle OAE = \angle AFM$.*

131 ([BBN23], p. 123). *Chứng minh: (a) Mọi đa giác đều luôn ngoại tiếp được 1 đường tròn, i.e., tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác đều. (b) Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được 1 đường tròn $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$.*

132 ([Bìn23a], VD12, p. 99). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$, đường cao AH. Điểm E đối xứng với B qua H. Đường tròn có đường kính EC cắt AC ở K. Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn.*

133 ([Bìn23a], VD13, p. 100). *Cho 1 hình vuông 8×8 gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm O của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần & che lấp hoàn toàn)?*

134 ([Bìn23a], 63., pp. 100–101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm M thuộc nửa đường tròn. Qua M vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. D, C lần lượt là hình chiếu của A, B trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh M là trung điểm CD. (b) Chứng minh $AB = BC + AD$. (c) Giả sử $\angle AOM \geq \angle BOM$, gọi E là giao điểm của AD với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác BCDE. (d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn sao cho tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính R của nửa đường tròn đã cho.*

135 ([Bìn23a], 64., p. 101). *Cho ΔABC cân tại A, I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔBIC. (b) H là trung điểm BC, IK là đường kính đường tròn (O). Chứng minh $\dfrac{AI}{AK} = \dfrac{HI}{HK}$.*

136 ([Bìn23a], 65., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, Ax là tiếp tuyến của nửa đường tròn (Ax & nửa đường tròn nằm cùng phía đối với AB), điểm C thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Đường thẳng qua O & vuông góc với AC cắt Ax tại M. I là giao điểm của MB, CH. Chứng minh $IC = IH$.*

137 ([Bìn23a], 66., p. 101). *Cho hình thang vuông ABCD, $\angle A = \angle D = 90°$, có $\angle BMC = 90°$ với M là trung điểm AD. Chứng minh: (a) AD là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính BC. (b) BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AD.*

138 ([Bìn23a], 67., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn, H là hình chiếu của C trên AB. Qua trung điểm M của CH, kẻ đường vuông góc với OC, cắt nửa đường tròn tại D & E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của $(C; CD)$.*

139 ([Bìn23a], 68., p. 101). *Cho đường tròn tâm O đường kính AB. d, d' lần lượt là 2 tiếp tuyến tại A, B của đường tròn, $C \in d$ bất kỳ. Đường vuông góc với OC tại O cắt d' tại D. Chứng minh CD là tiếp tuyến của (O).*

140 ([Bìn23a], 69., p. 101). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB, điểm C thuộc nửa đường tròn. Qua C kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia Ax, By song song với nhau, cắt d theo thứ tự tại D, E. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE.*

141 ([Bìn23a], 70., pp. 101–102). *Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. d là tiếp tuyến của đường tròn, A là tiếp điểm. Điểm M bất kỳ thuộc d. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với BM, cắt d tại N. (a) Chứng minh tích $AM \cdot AN$ không đổi khi điểm M chuyển động trên đường thẳng d. (b) Tìm* GTNN *của MN.*

142 ([Bìn23a], 71., p. 102). *Cho ΔABC cân tại A có $\angle A = \alpha$, đường cao $AH = h$. Vẽ đường tròn tâm A bán kính h. 1 tiếp tuyến bất kỳ ($\neq BC$) của đường tròn (A) cắt 2 tia AB, AC theo thứ tự tại B', C'. (a) Chứng minh $S_{ABC} = S_{AB'C'}$. (b) Trong các ΔABC có $\angle A = \alpha$ & đường cao $AH = h$, tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?*

143 ([Bìn+23], 1, p. 28). *Chứng minh: Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.*

144 ([Bìn+23], 2, p. 28). *Chứng minh: Nếu I nằm trong ΔABC & $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$, $\angle AIC = 90° + \dfrac{\angle B}{2}$ thì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.*

145 ([Bìn+23], 3, p. 28). *Chứng minh: Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp $\angle A$ của ΔABC thì $\angle BJC = 90° - \dfrac{\angle A}{2}$.*

146 ([Bìn+23], 4, p. 28). *Cho ΔABC, đặt $BC = a, CA = b, AB = c$, $a + b + c = 2p$, r là bán kính đường tròn nội tiếp, S là diện tích ΔABC. Chứng minh: $r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2} = (p - b)\tan\dfrac{B}{2} = (p - c)\tan\dfrac{C}{2}$, $S = pr$.*

147 ([Bìn+23], 5, p. 28). *Đường tròn nội tiếp* ΔABC *tiếp xúc với* AB, AC *tại* F, E. *Chứng minh:* $AE = AF = \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

148 ([Bìn+23], VD1, p. 29). *Cho* $\angle xOy = 90^\circ$, *đường tròn* (I) *tiếp xúc với 2 cạnh* Ox, Oy *tại* A, B. *1 tiếp tuyến của đường tròn* (I) *tại điểm* E *cắt* Ox, Oy *tại* C, D.

149 ([Bìn+23], VD2, p. 29). *Cho* $\angle xOy$, *2 điểm* A, B *lần lượt chuyển động trên* Ox *&* Oy *sao cho chu vi* ΔOAB *không đổi. Chứng minh* AB *luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.*

150 ([Bìn+23], VD3, p. 29). *Cho hình vuông* $ABCD$, *lấy điểm* E *trên cạnh* BC *& điểm* F *trên cạnh* CD *sao cho* $AB = 3BE = 2DF$. *Chứng minh* EF *tiếp xúc với cung tròn tâm* A, *bán kính* AB.

151 ([Bìn+23], VD4, p. 30). *Cho đường tròn* $(O; R)$, *& đường thẳng* a *cắt đường tròn tại* A, B. M *là điểm trên* a *& nằm ngoài đường tròn, qua* M *kẻ 2 tiếp tuyến* MC, MD. *Chứng minh khi* M *thay đổi trên* a, *đường thẳng* CD *luôn đi qua 1 điểm cố định.*

152 ([Bìn+23], VD5, p. 31). *Cho* ΔABC, *gọi* I *là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua* I *dựng đường thẳng vuông góc với* IA *cắt* AB, AC *tại* M, N. *Chứng minh: (a)* $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BI^2}{CI^2}$. *(b)* $BM \cdot AC + CN \cdot AB + AI^2 = AB \cdot AC$.

153 ([Bìn+23], VD6, p. 31). *Cho* ΔABC, D, E, F *lần lượt là 3 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp* ΔABC *với 3 cạnh* BC, CA, AB, H *là hình chiếu của* D *trên* EF. *Chứng minh* DH *là tia phân giác của* $\angle BHC$.

154 ([Bìn+23], VD7, p. 32). I *là tâm đường tròn nội tiếp* ΔABC. D, E *lần lượt là giao điểm của đường thẳng* BI, CI *với cạnh* AC, AB. *Chứng minh* ΔABC *vuông tại* $A \Leftrightarrow BI \cdot CI = \frac{1}{2} BD \cdot CF$.

155 ([Bìn+23], VD8, p. 32). *Cho đường tròn* $(O; R)$ *& điểm* M *cách tâm* O *1 khoảng bằng* $3R$. *Từ* M *kẻ 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn* $(O; R)$ *tại* A, B, *gọi* I, E *lần lượt là trung điểm* MA, MB. *Tính khoảng cách từ* O *đến* IE.

156 ([Bìn+23], VD9, p. 33). *Cho* ΔABC *cân tại* A. O *là trung điểm* BC, *dựng đường tròn* (O) *tiếp xúc với* AB, AC *tại* D, E. M *là điểm chuyển động trên cung nhỏ* $\widehat{DE}$, *tiếp tuyến với đường tròn* (O) *tại* M *cắt 2 cạnh* AB, AC *lần lượt ở* P, Q. *Chứng minh: (a)* $BC^2 = 4BP \cdot CQ$. *Từ đó xác định vị trí của* M *để diện tích* ΔAPQ *đạt* GTLN. *(b) Nếu* $BC^2 = 4BP \cdot CQ$ *thì* PQ *là tiếp tuyến.*

157 ([Bìn+23], VD10, p. 34). *Cho đường tròn* (O), *điểm* M *ở ngoài đường tròn. Qua* M *kẻ 2 tiếp tuyến cắt đường tròn tại* A, B, $MA > MB$, *gọi* CD *là đường kính vuông góc với* AB, *đường thẳng* MC, MD *cắt đường tròn tại* E, K, *giao điểm của* DE, CK *là* H, I *là trung điểm* MH. *Chứng minh* IE, IK *là 2 tiếp tuyến của đường tròn* (O).

158 ([Bìn+23], VD11, p. 34). *Cho* ΔABC, *đường cao* AH. AD, AE *là đường phân giác của 2 góc* $\angle BAH, \angle CAH$. *Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp* ΔABC *trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔADE.

159 ([Bìn+23], VD12, p. 35). *Cho* ΔABC *vuông tại* A. I *là tâm đường tròn nội tiếp* ΔABC, *3 tiếp điểm trên* BC, CA, AB *lần lượt là* D, E, F. M *là trung điểm* AC, *đường thẳng* MI *cắt cạnh* AB *tại* N, *đường thẳng* DF *cắt đường cao* AH *của* ΔABC *tại* P. *Chứng minh* ΔANP *cân.*

160 ([Bìn+23], VD13, p. 36). *Tính* $\angle A$ *của* ΔABC *biết đỉnh* B *cách đều tâm 2 đường tròn bàng tiếp của* $\angle A, \angle B$ *của* ΔABC.

161 ([Bìn+23], VD14, p. 36). *Cho* ΔABC *có* $AB = 2AC$ *& đường phân giác* AD. r, r_1, r_2 *lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp* $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta ABD$. *Chứng minh* $AD = \dfrac{pr}{3}\left(\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{2}{r_2}\right) - p$ *với* p *là nửa chu vi* ΔABC.

162 ([Bìn+23], VD15, p. 37). *Cho đường tròn* (O) *& điểm* A *cố định nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến* AB *& cát tuyến qua* A *cắt đường tròn tại* C, D, $AC < AD$. *Hỏi trọng tâm* ΔBCD *chạy trên đường nào khi cát tuyến* ACD *thay đổi?*

163 ([Bìn+23], 5.1., p. 38). *Cho nửa đường tròn bán kính* $AB = 2R$. C *là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ* C *đến* AB *là* h. *Tính bán kính đường tròn nội tiếp* ΔABC *theo* R, h.

164 ([Bìn+23], 5.2., p. 38). *Cho* ΔABC, D *là điểm trên* BC. *Đường tròn nội tiếp* ΔABD *tiếp xúc với cạnh* BC *tại* E, *đường tròn nội tiếp* ΔADC *tiếp xúc với cạnh* BC *tại* F, *đồng thời 2 đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng* $d \neq BC$, *đường thẳng* d *cắt* AD *tại* I. *Chứng minh* $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

165 ([Bìn+23], 5.3., p. 38). *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AH. *Đường tròn đường kính* BH *cắt cạnh* AB *tại* M, *đường tròn đường kính* HC *cắt cạnh* AC *tại* N. *Chứng minh* MN *là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính* BH, CH.

166 ([Bìn+23], 5.4., p. 38). *Cho* ΔABC *cân tại* A, *đường cao* AK. H *là trực tâm* ΔABC, *đường tròn đường kính* AH *cắt 2 cạnh* AB, AC *tại* D, E. *Chứng minh* KD, KE *là 2 tiếp tuyến của đường tròn đường kính* AH.

167 ([Bìn+23], 5.5., p. 38). *Cho đường tròn* (O) *& điểm* M *ở ngoài đường tròn. Từ* M *kẻ tiếp tuyến* MA, MB *với đường tròn,* A, B *là 2 tiếp điểm, tia* OM *cắt đường tròn tại* C, *tiếp tuyến tại* C *cắt tiếp tuyến* MA, MB *tại* P, Q. *Chứng minh diện tích* ΔMPQ *lớn hơn* $\frac{1}{2}$ *diện tích* ΔABC.

168 ([Bìn+23], 5.6., p. 38). *Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh* a, *đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh* a *bằng* h, *xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.*

169 ([Bìn+23], 5.7., p. 38). *Cho ΔABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với IA cắt 2 cạnh AB, AC tại D, E. Chứng minh $\frac{BD}{CE} = \left(\frac{IB}{IC}\right)^2$.*

170 ([Bìn+23], 5.8., p. 38). *Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C. Từ A kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O), M, N là 2 tiếp điểm. Đường thẳng MN cắt AO tại H, gọi E là trung điểm BC. Chứng minh khi đường tròn (O) thay đổi tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔOHE nằm trên 1 đường thẳng cố định.*

171 ([Bìn+23], 5.9., p. 39). *Cho ΔABC, $\angle A = 30°$, BC là cạnh nhỏ nhất. Trên AB lấy điểm D, trên AC lấy điểm E sao cho $BD = CE = BC$. O, I là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp ΔABC. Chứng minh $OI = DE$ & $OI \perp DE$.*

172 ([Bìn+23], 5.10., p. 39). *Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$, kẻ các tiếp tuyến với đường tròn & song song với 3 cạnh ΔABC. Các tiếp tuyến này tạo với 3 cạnh ΔABC thành 3 tam giác nhỏ, gọi diện tích 3 tam giác nhỏ là S_1, S_2, S_3 & diện tích ΔABC là S. Tìm* GTNN *của biểu thức $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.*

173 ([Bìn+23], 5.11., p. 39). *Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, I_A là tâm đường tròn bàng tiếp $\angle A$ & M là trung điểm BC. H, D là hình chiếu của I, I_A trên cạnh BC. Chứng minh M là trung điểm DH, từ đó suy ra đường thẳng MI đi qua trung điểm AH.*

174 ([Bìn+23], 5.12., p. 39). *Cho đường tròn $(O; r)$ & điểm A cố định trên đường tròn. Qua A dựng tiếp tuyến d với đường tròn $(O; r)$. M là điểm chuyển động trên d, từ M kẻ tiếp tuyến đến đường tròn $(O; r)$ có tiếp điểm là $B \neq A$. Tâm của đường tròn ngoại tiếp & trực tâm của ΔAMB chạy trên đường nào?*

175 ([Bìn+23], 5.13., p. 39). *Cho nửa đường tròn đường kính AB, từ điểm M trên đường tròn kẻ tiếp tuyến d. H, K là hình chiếu của A, B trên d. Chứng minh $AH + BK$ không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính HK luôn tiếp xúc với AH, BK, AB.*

176 ([Bìn+23], 5.14., p. 39). *Cho ΔABC, điểm M trong tam giác, gọi H, D, E là hình chiếu của M thứ tự trên BC, CA, AB. Xác định vị trí của M sao cho giá trị của biểu thức $\frac{BC}{MH} + \frac{CA}{MD} + \frac{AB}{ME}$ đạt* GTNN.

177 ([Bìn+23], 5.15., p. 39). *Cho ΔABC vuông tại A. O, I là tâm đường tròn ngoại & nội tiếp ΔABC. Biết ΔBIO vuông tại I. Chứng minh $\frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}$.*

4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn

178 ([BBN23], H1, p. 126). *Cho ΔABC. 2 đường tròn $(B, AB), (C, AC)$ có thể tiếp xúc nhau được không?*

179 ([BBN23], H2, p. 126). Đ/S? *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; r)$ có $R > r$. (a) Nếu $OO' < R + r$ thì 2 đường tròn cắt nhau. (b) Nếu $OO' = R - r$ thì 2 đường tròn tiếp xúc nhau. (c) Nếu 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau thì $OO' = R + r$. (d) Nếu $OO' > R + r$ thì 2 đường tròn ngoài nhau.*

180 ([BBN23], VD1, p. 127). *Cho đường tròn (O, OA) & đường tròn (O', OA). (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O), (O')$. (b) Dây AD của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở C. Chứng minh $AC = CD$.*

Giải. (a) $OO' = OA - O'A \Leftrightarrow d = R - R' \Leftrightarrow (O), (O')$ tiếp xúc trong. (b) ΔACO có cạnh AO là đường kính của (O') ngoại tiếp nên ΔACO vuông tại C hay $OC \perp AD$, suy ra $AC = CD$. □

181 ([BBN23], VD2, p. 127). *Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$ trong 2 trường hợp: (a) $R = 6, R' = 4, d = OO' = 2$. (b) $R = 5, R' = 3, d = 6$.*

182 ([BBN23], VD3, p. 127). *Cho 2 đường tròn $(O, 6), (O', 8)$ cắt nhau tại A, B sao cho OA là tiếp tuyến của (O'). Tính độ dài dây chung AB & khoảng cách từ O đến AB.*

183 ([BBN23], VD4, p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc với nhau tại A. Qua A vẽ cát tuyến cắt $(O), (O')$ lần lượt ở $M \neq A, N \neq A$. Chứng minh 2 tiếp tuyến với $(O), (O')$ lần lượt ở M, N song song với nhau.*

184 ([BBN23], VD5, p. 128). *Cho ΔABC cân tại A. (a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp trong $\angle A$ & đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc nhau tại 1 điểm thuộc BC. (b) Tính bán kính 2 đường tròn biết $AB = 8, BC = 6$.*

185 ([BBN23], VD6, p. 129). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN, $M \in (O), N \in (O')$. Tiếp tuyến chung tại A của 2 đường tròn cắt MN tại E. (a) Chứng minh E là trung điểm của MN. (b) Chứng minh ΔAMN vuông & MN tiếp xúc với đường tròn đường kính OO'. (c) Tính MN biết bán kính $(O), (O')$ lần lượt là $R = 4, R' = 5$.*

186 ([BBN23], VD7, p. 129). *Cho ΔABC. Dựng 3 đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau.*

187 ([BBN23], VD8, p. 130). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ngoài nhau, AB, CD là 2 tiếp tuyến chung ngoài, đường thẳng AD cắt $(O), (O')$ theo thứ tự tại M, N. Chứng minh $AM = DN$.*

188 ([BBN23], VD9, p. 130). *Cho 2 đường tròn $(O_1; r_1), (O_2; r_2)$ cắt nhau tại A, B, O_1, O_2 nằm khác phía đối với AB. 1 cát tuyến PAQ quay quanh A. Lấy $P \in (O_1), Q \in (O_2)$ sao cho A nằm giữa P, Q. Xác định vị trí của cát tuyến PAQ trong mỗi trường hợp: (a) PQ có độ dài lớn nhất. (b) Chu vi ΔBPQ đạt* GTLN. *(c) Diện tích ΔBPQ đạt* GTLN.

189 ([BBN23], 7.1., p. 131). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$, độ dài đường nối tâm $OO' = d$. Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn vào bảng:*

R	R'	d	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
7 cm	2 cm	10 cm	
7 cm	3 cm	4 cm	
6 cm	2 cm	7 cm	

190 ([BBN23], 7.2., p. 131). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B, O, O' nằm khác phía đối với AB. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt (O) tại C & cắt (O') tại D. Cát tuyến EAF cắt (O) tại E, cắt (O') tại F. (a) Chứng minh $\angle CEB = \angle DFB = 90°$. (b) Chứng minh $OO' \parallel CD$. Tính CD biết $AB = 9.6$ cm, $OA = 8$ cm, $O'A = 6$ cm. (c) Dựng qua A cát tuyến EAF, $E \in (O), F \in (O')$, sao cho $AE = AF$.*

191 ([BBN23], 7.3., p. 132). *Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. 3 tiếp điểm $(O_1), (O_2)$ là A, $(O_2, (O_3)$ là B, $(O_3), (O_1)$ là C. 2 tia AB, AC kéo dài cắt (O_3) lần lượt ở P, Q. Chứng minh P, Q, O_3 thẳng hàng.*

192 ([BBN23], 7.4., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O, 2$ cm$)$ & $(O', 3$ cm$)$ có khoảng cách giữa 2 tâm là* 6 cm. *E, F tương ứng là giao của tiếp tuyến chung trong & ngoài với đường thẳng OO'. (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn. (b) Tính độ dài đoạn EF.*

193 ([BBN23], 7.5., p. 132). *Cho 2 đường tròn đồng tâm O. 1 đường tròn (O') cắt đường tròn nhỏ tâm O lần lượt ở A, B & cắt đường tròn còn lại lần lượt ở C, D. Chứng minh $AB \parallel CD$.*

194 ([BBN23], 7.6., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; r)$ cắt nhau ở A, B sao cho O, O' thuộc 2 nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng 1 cát tuyến PAQ, $P \in (O; R), Q \in (O'; r)$, sao cho A nằm giữa P, Q & $2AP = AQ$.*

195 ([BBN23], 7.7., p. 132). *Cho 2 đường tròn bằng nhau $(O), (O')$ có bán kính R cắt nhau tại A, B. Từ O, O' dựng $Ox, O'y$ song song với nhau & cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ OO', 2 tia này cắt (O) tại C & (O') tại D. C' đối xứng với C qua O, D' đối xứng với D qua O'. (a) Chứng minh $CD', OO', C'D$ đồng quy. (b) Tìm tập hợp trung điểm M của CD khi $Ox, O'y$ thay đổi. (c) Tính góc hợp bởi tiếp tuyến tại A của (O) với OO' biết $OO' = \frac{3}{2}R$.*

196 ([BBN23], 7.8., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O, 3$ cm$)$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O', 1$ cm$)$ tại A. Vẽ 2 bán kính $OB, O'C$ song song với nhau thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ OO'. (a) Tính $\angle BAC$. (b) I là giao điểm của BC, OO'. Tính độ dài OI.*

197 ([BBN23], 7.9., p. 132). *Cho đường tròn $(O; R), (I, 2R)$ đi qua O. 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn này là ADB, AEC. (a) Xác định dạng & giải ΔABC. (b) Xác định dạng & giải tứ giác $BDEC$.*

198 ([BBN23], 7.10., p. 133). *Cho 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại H, K. Đường thẳng O_1H cắt (O_1) tại A, cắt (O_2) tại $B \neq H$, O_2H cắt (O_1) tại C & cắt (O_2) tại $D \neq H$. Chứng minh 3 đường thẳng AC, BD, HK đồng quy tại 1 điểm.*

199 ([BBN23], 7.11., p. 133). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$ tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài AB, $A \in (O; R)$, $B \in (O'; R')$. Đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với AB & 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$. Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{R'}}$.*

200 ([BBN23], 7.12., p. 133). *Cho ΔABC. Vẽ 3 đường tròn tâm A, B, C đôi một tiếp xúc ngoài nhau tại M, N, P. Chứng minh đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P là đường tròn nội tiếp ΔABC.*

201 ([BBN23], 7.13., p. 133). *Cho 1 tứ giác. Vẽ các đường tròn có đường kính là 4 cạnh của tứ giác đó. Chứng minh 4 đường thẳng chứa các dây chung của 4 đường tròn cắt nhau tạo thành 1 hình bình hành.*

202 ([BBN23], 7.14., p. 133). *Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ bằng nhau & ở ngoài nhau. Dựng 1 đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc tiếp xúc trong) với cả 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$.*

203 ([BBN23], 7.15., p. 133). *Cho 3 đường tròn không biết tâm, tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C. Tìm tâm của chúng chỉ bằng thước thẳng.*

204 ([BBN23], 7.16., p. 133). *Cho đường tròn (O) & đường thẳng d không cắt (O). $P \in d$ là điểm cố định. Dựng đường tròn (K) tiếp xúc với (O) & tiếp xúc với d tại P.*

205 ([Bìn23a], VD20, p. 112). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; r)$ tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, $B \in (O), C \in (O')$. (a) Tính $\angle BAC$. (b) Tính BC. (c) D là giao điểm của CA với (O), $D \neq A$. Chứng minh 3 điểm B, O, D thẳng hàng. (d) Tính AB, AC.*

206 ([Bìn23a], VD21, p. 112)**.** *Cho điểm* B *nằm giữa* A, C *sao cho* $AB = 14$ cm*,* $BC = 28$ cm*. Vẽ về 1 phía của* AC *3 nửa đường tròn tâm* I, K, O *có đường kính theo thứ tự* AB, BC, CA*. Tính bán kính đường tròn* (M) *tiếp xúc ngoài với 2 nửa đường tròn* $(I), (K)$ *& tiếp xúc trong với nửa đường tròn* (O)*.*

207 ([Bìn23a], VD22, p. 114)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *có cùng bán kính, cắt nhau tại* A, B*. Kẻ cát tuyến chung* DAE *của 2 đường tròn,* $D \in (O), E \in (O')$*. Chứng minh* $BD = BE$*.*

208 ([Bìn23a], VD23, p. 114)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài* AB, CD*,* $A, C \in (O)$*,* $B, D \in (O')$*. Tiếp tuyến chung trong* GH *cắt* AB, CD *lần lượt ở* E, F*,* $G \in (O), H \in (O')$*. Chứng minh: (a)* $AB = EF$*. (b)* $EG = FH$*.*

209 ([Bìn23a], 109., p. 115)**.** *2 đường tròn* $(O; R), (O'; R)$ *cắt nhau tại* A, B*. Đoạn nối tâm* OO' *cắt 2 đường tròn* $(O), (O')$ *theo thứ tự ở* C, D*. Tính* R *biết* $AB = 24$ cm*,* $CD = 12$ cm*.*

210 ([Bìn23a], 110., p. 115)**.** *2 đường tròn* $(O; R), (O'; R)$ *cắt nhau tại* A, B*, với* $\angle OAO' = 90^\circ$*. Vẽ cát tuyến chung* MAN*,* $M \in (O), N \in (O')$*. Tính* $AM^2 + AN^2$ *theo* R*.*

211 ([Bìn23a], 111., p. 115)**.** *Cho 3 đường tròn tâm* O_1, O_2, O_3 *có cùng bán kính & cùng đi qua 1 điểm* I*. 3 giao điểm khác* I *của 2 trong 3 đường tròn đó là* A, B, C*. Chứng minh: (a)* $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$*. (b)* I *là trực tâm* ΔABC*.*

212 ([Bìn23a], 112., pp. 115–116)**.** *Cho điểm* A *nằm ngoài đường tròn tâm* O*. Vẽ đường tròn tâm* A *bán kính* AO*.* CD *là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,* $C \in (O), D \in (A)$*. Đoạn nối tâm* OA *cắt đường tròn* (O) *tại* H*. Chứng minh* DH *là tiếp tuyến của* (O)*.*

213 ([Bìn23a], 113., p. 116)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *cắt nhau tại* A, B*. Vẽ hình bình hành* $OBO'C$*. Chứng minh* $ACOO'$ *là hình thang cân.*

214 ([Bìn23a], 114., p. 116)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *cắt nhau tại* A, B*. (a) Nêu cách dựng cát tuyến chung* CAD*,* $C \in (O), D \in (O')$*, sao cho* A *là trugn điểm* CD*. (b) Tính* CD *biết* $OO' = 5$ cm*,* $OA = 4$ cm*,* $O'A = 3$ cm*.*

215 ([Bìn23a], 115., p. 116)**.** *Cho* $\angle xOy = 90^\circ$*. 2 điểm* A, B *theo thứ tự di chuyển trên 2 tia* Ox, Oy *sao cho* $OA + OB = k$ *với hằng số* k*. Vẽ 2 đường tròn* $(A, OB), (B, OA)$*. (a) Chứng minh 2 đường tròn* $(A), (B)$ *luôn cắt nhau. (b)* M, N *là 2 giao điểm của 2 đường tròn* $(A), (B)$*. Chứng minh đường thẳng* MN *luôn đi qua 1 điểm cố định.*

216 ([Bìn23a], 116., p. 116)**.** *2 đường tròn* $(O; R), (O'; r)$ *tiếp xúc ngoài tại* A*. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài* BC*,* $B \in (O), C \in (O')$*. (a) Cho* $R = 3$ cm*,* $r = 1$ cm*. Tính* AB, AC*. (b) Cho* $AB = 19.2$ cm*,* $AC = 14.4$ cm*. Tính* R, r*.*

217 ([Bìn23a], 117., p. 116)**.** *Cho 3 đường tròn* $(O_1), (O_2), (O_3)$ *tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc nhọn &* (O_1) *tiếp xúc ngoài với* (O_2)*,* (O_2) *tiếp xúc ngoài với* (O_3)*. Biết bán kính 2 đường tròn* $(O_1), (O_3)$ *là* a, b*. Tính bán kính đường tròn* (O_2)*.*

218 ([Bìn23a], 118., p. 116)**.** *Cho 2 đường tròn* $(O), (O')$ *tiếp xúc ngoài tại* A*.* AB *là đường kính của đường tròn* (O)*,* AC *là đường kính của đường tròn* (O')*,* DE *là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,* $D \in (O), E \in (O')$*,* K *là giao điểm của* BD, CE*. (a) Tứ giác* $ADKE$ *là hình gì? (b) Chứng minh* AK *là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn* $(O), (O')$*. (c)* M *là trung điểm BC. Chứng minh* $MK \perp DE$*.*

219 ([Bìn23a], 119., pp. 116–117)**.** *2 đường tròn* $(O; R), (O'; r)$ *tiếp xúc ngoài tại* A*.* BC, DE *là 2 tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,* $B, D \in (O)$*. (a) Chứng minh* $BDEC$ *là hình thang cân. (b) Tính diện tích hình thang* $BDEC$*.*

220 ([Bìn23a], 120., p. 117)**.** *2 đường tròn* $(O; R), (O'; r)$ *tiếp xúc ngoài nhau.* AB *là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,* $A \in (O), B \in (O')$*. (a) Tính độ dài* AB*. (b) Cho* $R = 36$ cm*,* $r = 9$ cm*. Tính bán kính đường tròn* (I) *tiếp xúc với đường thẳng* AB *& tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn* $(O), (O')$*.*

221 ([Bìn23a], 121., p. 117)**.** *Trong 1 hình thang caan có 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau, mỗi đường tròn tiếp xúc với 2 cạnh bên & tiếp xúc với 1 đáy của hình thang. Biết bán kính 2 đường tròn đó bằng* 2 cm, 8 cm*. Tính diện tích hình thang.*

222 ([Bìn23a], 122., p. 117)**.** *Cho* ΔABC *đều nội tiếp dường tròn* $(O; R)$*.* (O') *là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn* (O) *& tiếp xúc với 2 cạnh* AB, AC *theo thứ tự tại* M, N*. (a) Chứng minh 3 điểm* M, O, N *thẳng hàng. (b) Tính bán kính đường tròn* (O') *theo* R*.*

223 ([Bìn23a], 123., p. 117)**.** *Cho* ΔABC *vuông cân tại* A *nội tiếp đường tròn* $(O; R)$*.* (O') *là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn* (O) *& tiếp xúc 2 cạnh* AB, AC*. Tính bán kính đường tròn* (O') *theo* R*.*

224 ([Bìn23a], 124., p. 117)**.** *Cho đường tròn* (O) *đường kính* AB*, đường tròn* (O') *tiếp xúc trong với đường tròn* (O) *tại* A*. 2 dây* BC, BD *của đường tròn* (O) *tiếp xúc với đường tròn* (O') *lần lượt ở* E, F*.* I *là giao điểm của* EF, AB*. Chứng minh* I *là tâm của đường tròn nội tiếp* ΔBCD*.*

225 ([Bìn23a], 125., p. 117)**.** *Cho 3 đường tròn bán kính* r *tiếp xúc ngoài đôi một. Tính bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường tròn đó.*

226 ([Bìn23a], 126., p. 117)**.** *Cho đường tròn* $(O; R)$*. Vẽ về 1 phía của đường kính* AB *2 tia tiếp tuyến* Am, Bn*.* $(I), (K)$ *là 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau & tiếp xúc ngoài đường tròn* (O)*, trong đó đường tròn* (I) *tiếp xúc với tia* Am*, đường tròn* (K) *tiếp xúc với tia* Bn*.* x, y *là bán kính của 2 đường tròn* $(I), (K)$*. Chứng minh* $R = 2\sqrt{xy}$*.*

227 ([Bìn23a], 127., p. 117). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. OC là bán kính vuông góc với AB, d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C. (I) là đường tròn tiếp xúc trong với nửa đường tròn (O) & tiếp xúc với đường kính AB. Chứng minh điểm I cách đều đường thẳng d & điểm O.*

228 ([Bìn23a], 128., p. 118). *Cho nửa đường tròn (O) với đường kính $AB = 2R$. OE là bán kính vuông góc với AB. Vẽ đường tròn (C) có đường kính OE. (D) là đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn (C), tiếp xúc trong với đường tròn (O) & tiếp xúc với đoạn thẳng OB. Tính bán kính của (D).*

229 ([Bìn23a], 129., p. 118). *Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB, $AC = 4$ cm, $BC = 8$ cm. Vẽ về 1 phía của AB 2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AC, AB. Tính bán kính của đường trình (I) tiếp xúc v ới 2 nửa đường tròn đó & tiếp xúc với đoạn thẳng AB.*

230 ([Bìn23a], 130., p. 118). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính của đường tròn (O') tiếp xúc với AB, AC & tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

231 ([Bìn23a], 131., p. 118). *Cho 2 đường tròn $(O, 9\text{ cm}), (O', 3\text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau. 1 đường thẳng bị 2 đường tròn đó cắt tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.*

232 ([Bìn23a], 132., p. 118). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ở ngoài nhau, $OO' = 65$ cm. AB là tiếp tuyến chung ngoài, CD là tiếp tuyến chung trong, $A, C \in (O)$, $B, D \in (O')$. Tính bán kính 2 đường tròn $(O), (O')$ biết $AB = 63$ cm, $CD = 25$ cm.*

233 ([Bìn23a], 133., p. 118). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài AB & tiếp tuyến chung trong EF, $A, E \in (O)$, $B, D \in (O')$. (a) M là giao điểm của AB, EF. Chứng minh $\Delta AOM \backsim \Delta BMO'$. (b) Chứng minh $AE \perp BF$. (c) N là giao điểm của AE, BF. Chứng minh 3 điểm O, N, O' thẳng hàng.*

234 ([Bìn23a], 134., p. 118). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ở ngoài nhau. Qua O, kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn (O'), chúng cắt đường tròn (O) tại A, B. Qua O', kẻ 2 tia tiếp tuyến với đường tròn (O), chúng cắt đường tròn (O') ở C, D. Chứng minh A, B, C, D là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.*

235 ([Bìn23a], 135., p. 118). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O; r)$, $R > r$. Dây BC của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại D, E. EA là đường kính của đường tròn nhỏ. Chứng minh $AD^2 + BD^2 + CD^2 = 2(R^2 + r^2)$.*

236 ([Bìn23a], 136–137., p. 119). *2 dây $ABC \parallel CD$ của đường tròn (O) là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Biết đường kính của đường tròn (O') bằng 7 cm, tính bán kính của đường tròn (O) khi: (a) $AB = 10$ cm, $CD = 24$ cm. (b) $AB = 6$ cm, $CD = 8$ cm.*

237 ([Bìn+23], VD1, p. 42). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B. Qua A kẻ cát tuyến CAD & EAF, $C, E \in (O)$, $D, F \in (O')$, sao cho AB là phân giác của $\angle CAF$. Chứng minh $CD = EF$.*

238 ([Bìn+23], VD2, pp. 42–43). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & 4 đường tròn $(A; R_A), (B; R_B), (C; R_C), (D; R_D)$ sao cho $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$. d_1, d_3 là 2 tiếp tuyến chung ngoài của $(A; R_A), (C; R_C)$, d_2, d_4 là 2 tiếp tuyến chung ngoài của $(B; R_B), (D; R_D)$. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4.*

239 ([Bìn+23], VD3, p. 43). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ngoài nhau, AB, CD là 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn, đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M, cắt đường tròn (O') tại N. Chứng minh $AM = DN$.*

240 ([Bìn+23], VD4, p. 44). *Cho 3 đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. các tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ là A, của $(O_2), (O_3)$ là B, của $(O_3), (O_1)$ là C. AB, AC kéo dài cắt đường tròn (O_3) tại Q, P. Chứng minh P, O_3, Q thẳng hàng.*

241 ([Bìn+23], VD5, p. 44). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$ tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài AB, $A \in (O), B \in (O')$. Đường tròn $(I; r)$ tiếp xúc với AB & 2 đường tròn $(O), (O')$. Chứng minh: (a) $AB = 2\sqrt{RR'}$. (b) $\dfrac{1}{\sqrt{r}} = \dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{R'}}$.*

242 ([Bìn+23], VD6, p. 45). *Cho 3 đường tròn $(A, a), (B, b), (C, c)$ tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm D của đường tròn $(A, a), (B, b)$, kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn (C, c) tại M, N. Tính MN theo a, b, c.*

243 ([Bìn+23], VD7, p. 45). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại A, B. Trong nửa mặt phẳng bờ OO' có chứa điểm B, kẻ 2 bán kính $OC \parallel O'D$. Chứng minh B là trực tâm của ΔACD.*

244 ([Bìn+23], VD8, p. 46). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A, $\angle xOy = 90^\circ$ thay đổi luôn đi qua A, cắt đường tròn $(O; R), (O'; R')$ tại B, C. H là hình chiếu của A trên BC. Xác định vị trí của B, C để AH có độ dài lớn nhất.*

245 ([Bìn+23], VD9, p. 47). *Cho 2 đường tròn $(O; R), (O'; R')$, $R > R'$ cắt nhau tại A, B. Kẻ đường kính AC & đường kính AD. Tính độ dài BC, BD biết $CD = a$.*

246 ([Bìn+23], VD10, p. 47). *Cho ΔABC. Tìm điểm M sao cho $\Delta MAB, \Delta MBC, \Delta MCA$ có chu vi bằng nhau.*

247 ([Bìn+23], VD11, p. 48). *Cho đường tròn (O) & dây cung AB. M là điểm trên AB. Dựng đường tròn (O_1) qua A, M & tiếp xúc với (O), đường tròn (O_2) qua B, M & tiếp xúc với (O), 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là N. Chứng minh $\angle MNO = 90^\circ$.*

248 ([Bìn+23], VD12, p. 48). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong CD & tiếp tuyến chung ngoài AB, $A, C \in (O)$, $B, D \in (O')$. Chứng minh AC, BD, OO' đồng quy.*

249 ([Bìn+23], VD13, p. 49). *Dựng 2 đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là 2 điểm A, B cho trước, sao cho 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm M cho trước.*

250 ([Bìn+23], 6.1., p. 50). *Cho đường tròn $(O;R)$ ngoại tiếp ΔABC đều. Đường tròn (O') tiếp xúc với 2 cạnh AB, AC & đường tròn $(O;R)$. Tính khoảng cách từ O' đến B theo R.*

251 ([Bìn+23], 6.2., p. 50). *Cho nửa đường tròn đường kính AB, điểm C trên nửa đường tròn sao cho $CA < CB$, H là hình chiếu của C trên AB. I là trung điểm CH, đường tròn $(I, CH/2)$ cắt nửa đường tròn tại D & cắt 2 cạnh CA, CB thứ tự tại M, N, đường thẳng CD cắt AB tại E. Chứng minh: (a) $CMHN$ là hình chữ nhật. (b) E, I, M, N thẳng hàng.*

252 ([Bìn+23], 6.3., p. 50). *Cho 3 đường tròn O_1, O_2, O_3 có cùng bán kính R cắt nhau tại điểm O cho trước. A, B, C là 3 giao điểm còn lại của 3 đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔABC có bán kính R.*

253 ([Bìn+23], 6.4., p. 50). *3 đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm O, từng đôi cắt nhau tại điểm thứ 2 là A, B, C. Chứng minh O là trực tâm ΔABC.*

254 ([Bìn+23], 6.5., p. 50). *Cho 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B, kẻ dây AM của đường tròn (O_1) tiếp xúc với đường tròn (O_2) tại A, kẻ dây AN của (O_2) tiếp xúc với đường tròn (O_1) tại A. Trên đường thẳng AB lấy điểm D sao cho $BD = AB$. Chứng minh 4 điểm A, M, N, D nằm trên 1 đường tròn.*

255 ([Bìn+23], 6.6., p. 50). *Cho đường tròn $(O;R)$, 1 điểm A trên đường tròn & đường thẳng d không đi qua A. Dựng đường tròn tiếp xúc với $(O;R)$ tại A & tiếp xúc với đường thẳng d.*

256 ([Bìn+23], 6.7., p. 51). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ có cùng bán kính R sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại A, B. Tính bán kính đường tròn tâm I tiếp xúc với 2 cung nhỏ $\widehat{AO}, \widehat{AO'}$ đồng thời tiếp xúc với OO'.*

257 ([Bìn+23], 6.8., p. 51). *Cho đường tròn (O) & dây AB cố định, điểm M tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng AB. Qua A, M dựng đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Qua B, M dựng đường tròn tâm J tiếp xúc với (O) tại B. 2 đường tròn tâm I, J cắt nhau tại điểm thứ 2 N. Chứng minh MN luôn đi qua 1 điểm cố định.*

258 ([Bìn+23], 6.9., p. 51). *Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a cho trước & 2 tia Ax, By vuông góc với AB, nằm về cùng 1 phía đối với AB. $(O), (O')$ là 2 đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời: (a) (O) tiếp xúc với (O'). (b) Đường tròn (O) tiếp xúc với Ax, AB. (c) Đường tròn (O') tiếp xúc với By & tiếp xúc với BA. Tính* GTLN *của diện tích hình thang $HOO'E$, trong đó H, E là hình chiếu của O, O' trên AB.*

259 ([Bìn+23], 6.10., p. 51). *Cho 2 đường tròn $(O_1;R_1), (O_2;R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. 1 đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn $(O_1;R_1), (O_2;R_2)$. Giả sử MN là đường kính đường tròn (O) sao cho $MN \parallel OO'$. H là giao điểm của MO_2, NO_1. Chứng minh điểm H thuộc 1 đường thẳng cố định.*

5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

260 ([Bìn23a], VD14, p. 102). *Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AB & 2 tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt Ax, By lần lượt ở C, D. N là giao điểm của AD & BC. Chứng minh $MN \perp AB$.*

261 ([Bìn23a], VD15, p. 103). *Cho (O), điểm K nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ 2 tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm). Kẻ đường kính AOC. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt AB tại E. Chứng minh: (a) $\Delta KBC \backsim \Delta OBE$. (b) $CK \perp OE$.*

262 ([Bìn23a], 72., p. 103). *Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Vẽ 2 tiếp tuyến Ax, By với nửa đường tròn & tia $Oz \perp AB$, 3 tia Ax, By, Oz cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. E là điểm bất kỳ của nửa đường tròn. Qua E vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt Ax, By, Oz theo thứ tự ở C, D, M. Chứng minh khi điểm E thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì: (a) Tích $AC \cdot BD$ không đổi. (b) Điểm M chạy trên 1 tia. (c) Tứ giác $ACDB$ có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.*

263 ([Bìn23a], 73., p. 104). *Cho đoạn thẳng AB. Vẽ về 1 phía của AB 2 tia $Ax \parallel By$. (a) Dựng đường tròn tâm O tiếp xúc với đoạn thẳng AB & tiếp xúc với 2 tia Ax, By. (b) Tính $\angle AOB$. (c) 3 tiếp điểm của đường tròn (O) với Ax, By, AB lần lượt là M, N, H. Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính AB. (d) Tìm vị trí của 2 tia Ax, By để $HM = HN$?*

264 ([Bìn23a], 74., p. 104). *Cho hình thang vuông $ABCD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, tia phân giác của $\angle C$ đi qua trung điểm I của AD. (a) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn (I, IA). (b) Cho $AD = 2a$. Tính $AB \cdot CD$ theo a. (c) H là tiếp điểm của BC với đường tròn (I). K là giao điểm của AC, BD. Chứng minh $KH \parallel CD$.*

265 ([Bìn23a], 75., p. 104). *Cho đường tròn tâm O có đường kính AB, điểm D nằm trên đường tròn. 2 tiếp tuyến của đường tròn tại A, D cắt nhau ở C. E là hình chiếu của D trên AB, gọi I là giao điểm của BC, DE. Chứng minh $ID = IE$.*

266 ([Bìn23a], 76., p. 104). *Cho ΔABC cân tại A, O là trung điểm BC. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại H, K. 1 tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt 2 cạnh AB, AC ở M, N. (a) Cho $\angle B = \angle C = \alpha$. Tính $\angle MON$. (b) Chứng minh OM, ON chia tứ giác $BMNC$ thành 3 tam giác đồng dạng. (c) Cho $BC = 2a$. Tính $BM \cdot CN$. (d) Tìm vị trí tiếp tuyến MN để $BM + CN$ nhỏ nhất.*

267 ([Bìn23a], 77., p. 104). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $BH = 20$ cm, $CH = 45$ cm. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Kẻ 2 tiếp tuyến BM, CN với đường tròn, $M \neq H, N \neq H$ là 2 tiếp điểm. (a) Tính diện tích tứ giác BMNC. (b) K là giao điểm của CN, AH. Tính AK, KN. (c) I là giao điểm của AM, BC. Tính IB, IM.*

268 ([Bìn23a], 78., p. 105). *Cho đường tròn $(O, 6$ cm$)$. 1 điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến AB, AC với đường tròn vuông góc với nhau, B, C là 2 tiếp điểm. Trên 2 cạnh AB, AC của $\angle A$, lấy 2 điểm D, E sao cho $AD = 4$ cm, $AE = 3$ cm. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).*

269 ([Bìn23a], 79., p. 105). *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Với tâm B & bán kính a, vẽ cung AC nằm trong hình vuông. Qua điểm E thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung AC, cắt AD, CD theo thứ tự tại M, N. (a) Tính chu vi ΔDMN. (b) Tính số đo $\angle MBN$. (c) Chứng minh $\dfrac{2a}{3} < MN < a$.*

270 ([Bìn23a], 80., p. 105). *Cho hình vuông ABCD. 1 đường tròn tâm O tiếp xúc với 2 đường thẳng AB, AD & cắt mỗi cạnh BC, CD thành 2 đoạn thẳng có độ dài* 2 cm, 23 cm. *Tính bán kính đường tròn.*

6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác

271 ([Bìn23a], VD16, p. 105). *Đường tròn (O) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với cạnh AB tại D. Tính $\angle C$ biết $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$.*

272 ([Bìn23a], VD17, p. 106). *ΔABC có chu vi* 80 cm *ngoại tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự ở M, N. (a) Biết $MN = 9.6$ cm. Tính BC. (b) Biết $AC - AB = 6$ cm. Tính AB, BC, CA để MN có* GTLN.

273 ([Bìn23a], VD18, p. 107). *r là bán kính đường tròn nội tiếp 1 tam giác vuông & h là đường cao ứng với cạnh huyền. Chứng minh $2 < \dfrac{h}{r} < 2.5$.*

274 ([Bìn23a], 81., p. 107). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm. I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Tính khoảng cách từ I đến đường cao AH của ΔABC.*

275 ([Bìn23a], 82., p. 107). *Tính 3 cạnh của tam giác vuông ngoại tiếp đường tròn biết: (a) Tiếp điểm trên cạnh huyền chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng* 5 cm, 12 cm. *(b) 1 cạnh góc vuông bằng* 20 cm, *bán kính đường tròn nội tiếp bàng* 6 cm.

276 ([Bìn23a], 83., p. 107). *Tính diện tích tam giác vuông biết 1 cạnh góc vuông bằng* 12 cm, *tỷ số giữa bán kính 2 đường tròn nội tiếp & ngoại tiếp tam giác đó bằng* $2:5$.

277 ([Bìn23a], 84., p. 107). *Cho 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng* 10 cm, *diện tích bằng* 24 cm^2. *Tính bán kính đường tròn nội tiếp.*

278 ([Bìn23a], 85., p. 107). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 5$. Tính AC, BC biết số đo chu vi ΔABC bằng số đo diện tích ΔABC.*

279 ([Bìn23a], 86., pp. 107–108). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. $(O; r), (O_1; r_1), (O_2; r_2)$ lần lượt là 3 đường tròn nội tiếp $\Delta ABC, \Delta ABH, \Delta ACH$. (a) Chứng minh $r + r_1 + r_2 = AH$. (b) Chứng minh $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. (c) Tính độ dài O_1O_2 biết $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.*

280 ([Bìn23a], 87., p. 108). *Đường tròn $(O; r)$ nội tiếp ΔABC. 3 tiếp tuyến với đường tròn (O) song song với 3 cạnh của ΔABC cắt từ ΔABC thành 3 tam giác nhỏ. r_1, r_2, r_3 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh $r_1 + r_2 + r_3 = r$.*

281 ([Bìn23a], 88., p. 108). *Đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC, AB, AC lần lượt ở D, E, F. Qua E kẻ đường thẳng song song với BC cắt AD, DF lần lượt ở M, N. Chứng minh M là trung điểm EN.*

282 ([Bìn23a], 89., p. 108). *ΔABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn tâm I bán kính r. G là trọng tâm ΔABC. Tính 3 cạnh ΔABC theo r biết $IG \parallel AC$.*

283 ([Bìn23a], 90., p. 108). *ΔABC vuông tại A có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm. I là tâm của đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm ΔABC. Tính IG.*

284 ([Bìn23a], 91., p. 108). *Cho ΔABC ngoại tiếp đường tròn (O). D, E, F lần lượt là tiếp điểm trên 3 cạnh BC, AB, AC. H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh $\angle BHE = \angle CHF$.*

285 ([Bìn23a], 92., p. 108). *Cho ΔABC có $AB = AC = 40$ cm, $BC = 48$ cm. O, I lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp ΔABC. Tính: (a) Bán kính đường tròn nội tiếp. (b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp. (c) Khoảng cách OI.*

286 ([Bìn23a], 93., p. 108). *Tính 3 cạnh 1 tam giác cân biết bán kính đường tròn nội tiếp bằng* 6 cm, *bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng* 12.5 cm.

287 ([Bìn23a], 94., p. 108). *Bán kính của đường tròn nội tiếp 1 tam giác bằng* 2 cm, *tiếp điểm trên 1 cạnh chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng* 4 cm, 6 cm. *Giải tam giác.*

288 ([Bìn23a], 95., p. 108). *Tính 3 góc của 1 tam giác vuông biết tỷ số giữa 2 bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp bằng* $\sqrt{3}+1$.

289 ([Bìn23a], 96., pp. 108–109). *Cho* ΔABC. *Đường tròn* (O) *nội tiếp* ΔABC *tiếp xúc với* BC *tại* D. *Vẽ đường kính* DN *của đường tròn* (O). *Tiếp tuyến của đường tròn* (O) *tại* N *cắt* AB, AC *lần lượt ở* I, K. *(a) Chứng minh* $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$. *(b)* F *là giao điểm của* AN, BC. *Chứng minh* $BD = CF$.

290 ([Bìn23a], 97., p. 109). *Cho đường tròn* (O) *nội tiếp* ΔABC *đều. 1 tiếp tuyến của đường tròn cắt 2 cạnh* AB, AC *lần lượt ở* M, N. *(a) Tính diện tích* ΔAMN *biết* $BC = 8$ cm, $MN = 3$ cm. *(b) Chứng minh* $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM \cdot AN$. *(c) Chứng minh* $\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN} = 1$.

291 ([Bìn23a], 98., p. 109). *Cho* ΔABC *có* $BC = a, CA = b, AB = c$. (I) *là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với* CI *tại* I *cắt* AC, AB *lần lượt ở* M, N. *Chứng minh: (a)* $AM \cdot BN = IM^2 = IN^2$. *(b)* $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$.

292 ([Bìn23a], 99., p. 109). *Cho* ΔABC *có* $AB < AC < AB$. *Trên 2 cạnh* AB, AC *lấy 2 điểm* D, E *sao cho* $BD = CE = BC$. O, I *lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp* ΔABC. *Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp* ΔADE *bằng* OI.

293 ([Bìn23a], 100., p. 109). R, r *lần lượt là 2 bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp 1 tam giác vuông có diện tích* S. *Chứng minh* $R + r \ge \sqrt{2S}$.

294 ([Bìn23a], 101., p. 109). *Trong các* ΔABC *có* $BC = a$, *chiều cao tương ứng bằng* h, *tam giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất?*

295 ([Bìn23a], 102., p. 109). *Trong các tam giác vuông ngoại tiếp cùng 1 đường tròn, tam giác nào có đường cao ứng với cạnh huyền lớn nhất?*

296 ([Bìn23a], 103., p. 109). *(a) Cho đường tròn* $(I; r)$ *nội tiếp* ΔABC. *Chứng minh* $IA + IB + IC \ge 6r$. *(b) Cho* ΔABC *nhọn nội tiếp đường tròn* $(O; R)$. P, Q, N *lần lượt là tâm của 3 đường tròn ngoại tiếp* $\Delta BOC, \Delta COA, \Delta AOB$. *Chứng minh* $OP + OQ + ON \ge 3R$.

297 ([Bìn23a], 104., p. 109). *Độ dài 3 đường cao của* ΔABC *là các số tự nhiên, bán kính đường tròn nội tiếp bằng* 1. *Chứng minh* ΔABC *đều & tính độ dài 3 đường cao của* ΔABC.

298 ([Bìn23a], 105., p. 110). h_a, h_b, h_c *là 3 đường cao ứng với 3 cạnh* a, b, c *của 1 tam giác,* r *là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh: (a)* $h_a + h_b + h_c \ge 9r$. *(b)* $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \ge 27r^2$. *Khi nào xảy ra đẳng thức?*

7 Đường Tròn Bàng Tiếp Tam Giác

299 ([Bìn23a], VD19, p. 110). *Cho* ΔABC. *Chứng minh các tiếp điểm trên cạnh* BC *của đường tròn bàng tiếp trong* $\angle A$ *& của đường tròn nội tiếp đối xứng với nhau qua trung điểm của* BC.

300 ([Bìn23a], 106., p. 111). a, b, c *lần lượt là 3 cạnh của* ΔABC, h_a, h_b, h_c *là 3 đường cao tương ứng,* R_a, R_b, R_c *là bán kính 3 đường tròn bàng tiếp tương ứng,* r *là bán kính đường tròn nội tiếp,* p *là nửa chu vi* ΔABC, S *là diện tích* ΔABC. *Chứng minh: (a)* $S = R_a(p-a) = R_b(p-b) = R_c(p-c)$. *(b)* $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$. *(c)* $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$.

301 ([Bìn23a], 107., p. 111). *Tính cạnh huyền của 1 tam giác vuông biết* r *là bán kính đường tròn nội tiếp,* R *là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.*

302 ([Bìn23a], 108., p. 111). *Cho* ΔABC. $(P), (Q), (R)$ *lần lượt là 3 đường tròn bàng tiếp trong* $\angle A, \angle B, \angle C$. *(a) tiếp điểm của* $(Q), (R)$ *trên đường thẳng* BC *lần lượt là* E, F. *Chứng minh* $CE = BF$. *(b)* H, I, K *lần lượt là tiếp điểm của 3 đường tròn* $(P), (Q), (R)$ *với 3 cạnh* BC, CA, AB. *Nếu* $AH = BI = CK$ *thì* ΔABC *là tam giác gì?*

8 Đường Tròn & Phép Vị Tự

303 ([Bìn23a], VD24, p. 120). *Đường tròn* (O) *nội tiếp* ΔABC *tiếp xúc với* BC *ở* D. M, E *lần lượt là trung điểm* BC, AD. *(a)* DN *là đường của đường tròn* (O), F *là tiếp điểm trên* BC *của đường tròn* (O') *bàng tiếp trong* $\angle A$ *của* ΔABC. *Chứng minh 3 điểm* A, N, F *thẳng hàng. (b) Chứng minh 3 điểm* E, O, M *thẳng hàng.*

304 ([Bìn23a], 138., p. 120). *Cho 2 đường tròn* $(I; r), (K; r)$ *tiếp xúc trong với đường tròn* $(O; R)$ *theo thứ tự tại* A, B. C *là 1 điểm thuộc đường tròn* (O), CA *cắt đường tròn* (I) *tại điểm* D, BC *cắt đường tròn* (K) *tại điểm* E. *Chứng minh* $DE \parallel AB$.

305 ([Bìn23a], 139., p. 121). *Cho 2 đường tròn* $(O; R), (O'; R')$ *tiếp xúc ngoài tại* A, $R > R'$. *Vẽ 2 bán kính* $OB \parallel O'B'$, B, B' *thuộc ùng 1 nửa mặt phẳng có bờ* OO'). *2 đường thẳng* BB', OO' *cắt nhau tại* K. *(a) Tính* $\angle BAB'$. *(b) Tính* OK *theo* R, R'. *(c) Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn trên cũng đi qua điểm* K. *(d) Khi 2 bán kính* $OB, O'B'$ *di chuyển thì trọng tâm* G *của* $\Delta ABB'$ *di chuyển trên đường nào?*

306 ([Bìn23a], 140., p. 121). *Cho 2 đường tròn* $(O; R), (O'; R')$ *cắt nhau tại* A, B, $R > R'$. *Tiếp tuyến chung ngoài* CD *cắt* OO' *ở* K, $C \in (O), D \in (O')$. E *là giao điểm thứ 2 của* AK *& đường tròn* (O'). *Chứng minh* $AC \parallel ED$.

9 Dựng Hình

307 ([Bìn23a], VD25, p. 122). *Dựng đường tròn đi qua 1 điểm cho trước & tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc cho trước.*

308 ([Bìn23a], VD26, p. 124). *Cho ΔABC có B, C là 2 góc nhọn. Dựng đường thẳng vuông góc với BC chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau.*

309 ([Bìn23a], VD27, p. 125). *Cho hình vuông $ABCD$. Dựng đường kính đi qua C cắt 2 tia AB, AD theo thứ tự ở M, N sao cho MN có độ dài bằng k cho trước.*

310 ([Bìn23a], 141., p. 126). *Cho đường tròn (O) với 2 bán kính OA, OB & O, A, B không thẳng hàng. Dựng dây CD sao cho 2 bán kính OA, OB chia dây CD thành 2 phần bằng nhau.*

311 ([Bìn23a], 142., p. 126). *Cho đường tròn (O), đường kính AB, điểm C thuộc đường kính ấy. Dựng dây $DE \perp AB$ sao cho $AD \perp EC$.*

312 ([Bìn23a], 143., p. 126). *Cho đường tròn (O) & 2 điểm A, B nằm bên ngoài đường tròn. Dựng 2 đường thẳng theo thứ tự đi qua A, B song song với nhau & cắt đường tròn (O) tạo thành 2 dây bằng nhau.*

313 ([Bìn23a], 144., p. 127). *Cho đường tròn (O) & đường thẳng d không giao với đường tròn. Dựng điểm $M \in d$ sao cho nếu vẽ 2 tiếp tuyến MC, MD với đường tròn thì $\angle COD = 130°$.*

314 ([Bìn23a], 145., p. 127). *Qua điểm M nằm bên trong đường tròn (O) & không trùng O, dựng dây AB sao cho $MA - MB = a$, a là độ dài cho trước.*

315 ([Bìn23a], 146., p. 127). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ bằng nhau, tiếp xúc ngoài tại B, có 2 đường kính theo thứ tự là AB, BC. Dựng đường thẳng đi qua A cắt (O) tại D, cắt (O') ở E, F sao cho E là trung điểm của DF.*

316 ([Bìn23a], 147., p. 127). *Dựng tam giác vuông biết độ dài 2 đường trung tuyến ứng với 2 cạnh góc vuông.*

317 ([Bìn23a], 148., p. 127). *Dựng ΔABC biết $\angle A = \alpha$, đường cao $AH = h$, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.*

318 ([Bìn23a], 149., p. 127). *Dựng ΔABC biết $AC - AB = d$, đường cao $AH = h$, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.*

319 ([Bìn23a], 150., p. 127). *Cho 2 điểm O, O' nằm về 1 phía của đường thẳng d. Dựng 2 đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc ngoài sao cho tiếp tuyến chung ngoài song song với d.*

320 ([Bìn23a], 151., p. 127). *Cho đường tròn (I) & đường thẳng m không giao nhau, điểm A thuộc đường tròn. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (I) tại A & tiếp xúc với đường thẳng m.*

321 ([Bìn23a], 152., p. 127). *Cho đường tròn (I) & đường thẳng m không giao nhau, điểm C thuộc đường thẳng m. Dựng đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng m tại C & tiếp xúc với đường tròn (I).*

322 ([Bìn23a], 153., p. 127). *Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau & điểm A nằm ngoài 2 đường thẳng ấy. Dựng đường tròn (A) cắt 2 đường thẳng a, b tạo thành 2 dây có tổng bằng $2k$.*

323 ([Bìn23a], 154., p. 127). *Cho $\angle xOy$ & điểm M nằm trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua M cắt 2 cạnh của góc ở A, B sao cho $OA + OB = k$.*

324 ([Bìn23a], 155., p. 127). *Dựng tam giác cân biết độ dài của đoạn nối 2 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với 2 cạnh bên & đường cao h ứng với cạnh bên.*

325 ([Bìn23a], 156., p. 127). *Cho 3 điểm H, D, M thẳng hàng theo thứ tự ấy, trong đó $HD = 2, DM = 3$. Dựng ΔABC vuông tại A nhận AH là đường cao, AD là đường phân giác, AM là trung tuyến.*

326 ([Bìn23a], 157., p. 128). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, M là trung điểm BC, D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh huyền. (a) E là tâm của đường tròn nội tiếp ΔAHM. Chứng minh $MD = ME$ bằng cách tính 2 tỷ số $\dfrac{ME}{MF}, \dfrac{MD}{MF}$ theo 3 cạnh ΔABC. (b) Suy ra cách dựng ΔABC vuông biết 3 điểm H, D, M theo thứ tự thuộc 1 đường thẳng.*

327 ([Bìn23a], 158., p. 128). *Cho đường thẳng xy, điểm A & đường tròn (O) nằm cùng phía đối với xy. Dựng điểm $M \in xy$ sao cho nếu vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O) thì $\angle AMx = \angle BMy$.*

328 ([Bìn23a], 159., p. 128). *Cho đường thẳng xy, điểm A & đường tròn (O) nằm cùng phía đối với xy. Dựng điểm $A \in xy$ sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ A đến 2 đường tròn nhận xy là đường thẳng chứa tia phân giác.*

329 ([Bìn23a], 160., p. 128). *Cho đường thẳng xy, điểm A & đường tròn (O) nằm cùng phía đối với xy. Dựng hình vuông $ABCD$ có $A \in (O), C \in (O')$, $B, D \in xy$.*

330 ([Bìn23a], 161., p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau ở A, B. Dựng đường thẳng đi qua A bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng a.*

331 ([Bìn23a], 162., p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ & 1 đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây bằng nhau.*

332 ([Bìn23a], 163., p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ & 1 đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có tổng bằng a.*

333 ([Bìn23a], 164., p. 128). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ & 1 đường thẳng d. Dựng đường thẳng song song với d & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng a.*

334 ([Bìn23a], 165., p. 128). *Cho đường tròn (O), điểm $A \neq O$ nằm bên trong đường tròn. Dựng dây BC đi qua A sao cho $AB = 2AC$.*

335 ([Bìn23a], 166., p. 128). *Cho 2 đường tròn tâm O, điểm A thuộc đường tròn lớn. Dựng dây AB của đường tròn lớn sao cho đường tròn nhỏ chia AB thành 3 phần bằng nhau.*

336 ([Bìn23a], 167., p. 128). *Cho đoạn thẳng AB. Dựng điểm H thuộc đoạn thẳng ấy sao cho $AH \cdot BH = a^2$ với a là 1 độ dài cho trước.*

337 ([Bìn23a], 168., p. 129). *Dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích 1 hình thang cho trước.*

338 ([Bìn23a], 169., p. 129). *Dựng tam giác đều có diện tích bằng diện tích 1 tam giác cho trước.*

339 ([Bìn23a], 170., p. 129). *Dựng ΔABC biết 2 cạnh $AB = c, AC = b$, đường phân giác $AD = d$.*

340 ([Bìn23a], 171., p. 129). *Cho ΔABC. Dựng đường thẳng song song với BC chia ΔABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau.*

341 ([Bìn23a], 172., p. 129). *Cho 1 hình thang. Dựng đường thẳng song song với 2 đáy chia hình thang thành 2 phần có diện tích bằng nhau.*

342 ([Bìn23a], 173., p. 129). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Dựng đường thẳng EF song song với 2 đáy, $E \in AD, F \in BC$, sao cho $BE \parallel DF$.*

343 ([Bìn23a], 174., p. 129). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. BB' là tiếp tuyến của nửa đường tròn. Dựng điểm M nằm trên nửa đường tròn sao cho MA bằng khoảng cách từ M đến BB'.*

10 Toán Cực Trị

344 ([Bìn23a], VD28, p. 130). *Cho điểm A nằm bên trong dải tạo bởi 2 đường thẳng song song $d \parallel d'$. Dựng điểm $B \in d, C \in d'$ sao cho ΔABC vuông tại A & có diện tích nhỏ nhất.*

345 ([Bìn23a], VD29, p. 131). *Cho $\angle x'Oy'$ & điểm M nằm trong góc. Dựng đường thẳng đi qua M cắt Ox', Oy' lần lượt ở A, B sao cho tổng $OA + OB$ có* GTNN.

346 ([Bìn23a], VD30, p. 131). *Cho ΔABC cân tại A. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C. Qua A vẽ cát tuyến ADE bất kỳ. Vẽ dây $CK \parallel DE$. Xác định vị trí của cát tuyến ADE để ΔAKE có diện tích lớn nhất.*

347 ([Bìn23a], 175., p. 132). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Dựng điểm $C \in (O)$ sao cho ΔC có diện tích lớn nhất, trong đó CH là đường cao của ΔABC, CE, CF là 2 đường phân giác của $\Delta CHA, \Delta CHB$.*

348 ([Bìn23a], 176., p. 132). *Cho đường tròn (O), điểm $A \neq O$ nằm bên trong đường tròn. Dựng điểm $B \in (O)$ sao cho $\angle OBA$ có số đo lớn nhất.*

349 ([Bìn23a], 177., p. 132). *Cho đường tròn (O), điểm A nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường thẳng đi qua A, cắt đường tròn ở B, C sao cho tổng $AB + AC$ có* GTLN.

350 ([Bìn23a], 178., p. 132). *Cho đường tròn (O) & đường thẳng d không giao nhau. Dựng điểm $M \in d$ sao cho nếu kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với đường tròn thì AB có độ dài nhỏ nhất.*

351 ([Bìn23a], 179., p. 132). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc ngoài tại A. Qua A, dựng 2 tia vuông góc với nhau sao cho chúng cắt 2 đường tròn $(O), (O')$ lần lượt ở B, C tạo thành ΔABC có diện tích lớn nhất.*

352 ([Bìn23a], 180., p. 132). *Cho đoạn thẳng AB, 2 tia Ax, By vuông góc với AB & nằm về 1 phía của AB. Dựng 2 đường tròn $(I), (K)$ tiếp xúc ngoài với nhau, tiếp xúc với đoạn AB, đường tròn (I) tiếp xúc với tia Ax, đường tròn (K) tiếp xúc với tia By sao cho tứ giác $CIKD$ có diện tích lớn nhất với C, D lần lượt là 2 tiếp điểm của 2 đường tròn $(I), (K)$ với AB.*

353 ([Bìn23a], 181., p. 133). *Cho $\angle xAy$, đường tròn (O) nằm trong góc ấy. Dựng điểm $M \in (O)$ sao cho tổng các khoảng cách từ M đến 2 cạnh của góc có* GTNN.

354 ([Bìn23a], 182., p. 133). *Cho đường tròn $(O, 2)$ & đường thẳng d đi qua O. Dựng điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ A tới đường tròn cắt d tại B, C tạo thành ΔABC có diện tích nhỏ nhất.*

355 ([Bìn23a], 183., p. 133). *Cho $\angle xOy$, đường tròn (I) tiếp xúc với 2 cạnh của góc tại A, B. Dựng tiếp tuyến với cung nhỏ AB của đường tròn (I) cắt 2 cạnh của góc tại C, D sao cho: (a) CD có độ dài nhỏ nhất. (b) ΔOCD có diện tích lớn nhất.*

356 ([Bìn23a], 184., p. 133). *(a) Cho $\angle xOy$ & điểm M nằm bên trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua M cắt 2 cạnh của góc ở A, B sao cho chu vi ΔOAB bằng $2p$. (b) Cho $\angle xOy$. Dựng 2 điểm C, D lần lượt nằm trên Ox, Oy sao cho chu vi ΔOCD bằng $2p$ cho trước & ΔOCD có diện tích lớn nhất.*

357 ([Bìn23a], 185., p. 133). *Cho $\angle xOy$ & 1 điểm M nằm bên trong góc đó. Dựng đường thưangr đi qua M cắt Ox, Oy ở A, B sao cho ΔOAB có chu vi nhỏ nhất.*

358 ([Bìn23a], 186., p. 133). *Cho đoạn thẳng AD & trung điểm của nó. Dựng ΔABC nhận AD là đường cao, H là trực tâm sao cho BC có độ dài nhỏ nhất.*

359 ([Bìn23a], 187., p. 133). *Cho đường tròn (O). Dựng điểm A nằm bên ngoài đường tròn sao cho đường vuông góc với OA tại O tạo thành với 2 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ A 1 tam giác có diện tích nhỏ nhất.*

360 ([Bìn23a], 188., p. 133). *Chứng minh trong các tam giác có cùng chu vi, tam giác đều có diện tích lớn nhất.*

361 ([Bìn23a], 189., p. 133). *Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. 2 điểm M, N lần lượt chuyển động trên 2 cạnh BC, CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. (a) Chứng minh khoảng cách từ A đến MN & chu vi ΔCMN không đổi. (b) Dựng 2 điểm M, N để MN có độ dài nhỏ nhất. (c) Chứng minh khi MN có độ dài nhỏ nhất thì ΔCMN có diện tích lớn nhất.*

362 ([Bìn23a], 190., p. 133). *Cho hình vuông $ABCD$. Dựng đường thẳng đi qua C cắt 2 tia AB, AD tại 2 điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.*

363 ([Bìn23a], 191., p. 134). *Cho điểm C thuộc tia phân giác của $\angle A$. Dựng đường thẳng đi qua C cắt 2 cạnh của $\angle A$ tại 2 điểm M, N sao cho đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.*

364 ([Bìn23a], 192., p. 134). *(a) Chứng minh trong các ΔABC có diện tích S & có số đo $\angle A$ không đổi, tam giác có cạnh BC nhỏ nhất là tam giác cân tại A. (b) Cho ΔABC. Dựng điểm M thuộc tia AB, điểm N thuộc tia AC sao cho $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ & MN có độ dài nhỏ nhất.*

365 ([Bìn23a], 193., p. 134). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN. Dựng hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn với $A, D \in MN$, B, C thuộc nửa đường tròn, sao cho hình chữ nhật đó: (a) Có diện tích lớn nhất. (b) Có chu vi lớn nhất.*

366 ([Bìn23a], p. 134, Golden ratio – Tỷ lệ vàng φ). *Cho 1 đoạn thẳng có độ dài a. Dựng đoạn thẳng có độ dài x sao cho x bằng trung bình nhân của đoạn thẳng đã cho a & phần còn lại $a - x$.*

367 ([Bìn23a], p. 136). *Dùng thước & compa, chia 1 đường tròn thành 5 phần bằng nhau.*

11 Liên Hệ Giữa Cung & Dây

368 ([Bìn23b], VD31, p. 83). *Cho đường tròn (O), dây AB. 2 điểm C, D di chuyển trên đường tròn sao cho $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. Trong trường hợp nào thì dây CD có độ dài không đổi?*

369 ([Bìn23b], 194., p. 84). *Tính bán kính của đường tròn (O) biết dây AB của đường tròn có độ dài bằng $2a$ & khoảng cách từ điểm chính giữa của cung AB đến dây AB bằng h.*

370 ([Bìn23b], 195., p. 84). *Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ cm, dây $CD \parallel AB$, $C \in \widehat{AD}$. Tính độ dài các cạnh của hình thang $ABDC$ biết chu vi hình thang bằng 5 cm.*

371 ([Bìn23b], 196., p. 84). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 20$ cm. C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm H thuộc bán kính OA sao cho $OH = 6$ cm. Đường vuông góc với OA tại H cắt nửa đường tròn ở D. Vẽ dây $AE \parallel CD$. K là hình chiếu của E trên AB. Tính diện tích ΔAEK.*

372 ([Bìn23b], 197., p. 84). *Cho ΔABC đều có diện tích S, nội tiếp đường tròn (O). Trên 3 cung AB, BC, CA, lấy lần lượt 3 điểm A', B', C' sao cho 3 cung $\widehat{AA'}, \widehat{BB'}, \widehat{CC'}$ đều có số đo bằng 30°. Tính diện tích phần chung của $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$.*

373 ([Bìn23b], 198., p. 84). *R, r lần lượt là bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp 1 tam giác. Chứng minh $R \geq 2r$.*

12 Góc Nội Tiếp

374 ([Bìn23b], VD32, p. 85). *ΔABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm, đường cao $AH = 5$ cm. Tính bán kính đường tròn.*

375 ([Bìn23b], VD33, p. 85). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, gọi $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp ΔABC, H là tiếp điểm của AB với đường tròn (I), D là giao điểm của AI với đường tròn (O), DK là đường kính của đường tròn (O). d là độ dài OI. Chứng minh: (a) $\Delta AHI \backsim \Delta KCD$. (b) $DI = DB = DC$. (c) $IA \cdot ID = R^2 - d^2$. (d)* (định lý Euler) *$d^2 = R^2 - 2Rr$.*

376 ([Bìn23b], 199., p. 86). *Cho ΔABC nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$ & nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Chứng minh $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.*

377 ([Bìn23b], 200., p. 86). *Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 12$ cm. 1 đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) ở M & cắt tiếp tuyến của đường tròn tại B ở N. I là trung điểm MN. Tính AM biết $AI = 13$ cm.*

378 ([Bìn23b], 201., p. 86). *Cho đường tròn $(O;R)$, 2 đường kính $AB\perp CD$. I là trung điểm OB. Tia CI cắt đường tròn ở E, EA cắt CD ở K. Tính DK.*

379 ([Bìn23b], 202.,. p. 86). *Cho nửa đường tròn đường kính BC. 2 điểm M,N thuộc nửa đường tròn sao cho $\widehat{BM} = \widehat{MN} = \widehat{NC}$. 2 điểm D,E thuộc đường kính BC sao cho $BD = DE = EC$. A là giao điểm của MD, NE. Chứng minh ΔABC đều.*

380 ([Bìn23b], 203., p. 86). *Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), 3 đường cao AD, BE, CF cắt đường (O) lần lượt ở M,N,K. Chứng minh: $\dfrac{AM}{AD} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF} = 4$.*

381 ([Bìn23b], 204., p. 87). *Cho đường tròn (O), đường kính AB có dây $CD\perp AB$. Điểm $M \in (O)$ bất kỳ, MC không song song với AB, E là giao điểm của MD, AB, F là giao điểm của MC, AB. Chứng minh $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AF}{BF}$.*

382 ([Bìn23b], 205., p. 87). *Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến ABC. E là điểm chính giữa cung BC, DE là đường kính của đường tròn. AD cắt đường tròn tại I, IE cắt BC tại K. Chứng minh $AC\perp BK = AB \cdot KC$.*

383 ([Bìn23b], 206., p. 87). *Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB, bán kính $OC = R$. 2 điểm M,N lần lượt thuộc 2 cung AC, BC. E,G lần lượt là hình chiếu của M,N trên AB. F,H lần lượt là hình chiếu của M,N trên OC. Chứng minh $EF = GH$.*

384 ([Bìn23b], 207., p. 87). *Trong đường tròn ngoại tiếp ΔABC, vẽ 3 dây $AA' \parallel BC, BB' \parallel AC, CC' \parallel AB$. Trên 3 cung AA', BB', CC', lấy 3 cung AD, BE, CF lần lượt bằng $\frac{1}{3}$ các cung trên. Chứng minh ΔDEF đều.*

385 ([Bìn23b], 208., p. 87). *2 đường cao BH, CK của ΔABC cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt ở D,E. Tính $\angle A$ biết DE là đường kính đường tròn.*

386 ([Bìn23b], 209., p. 87). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm, I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. (a) Chứng minh AI là tia phân giác $\angle OAH$. (b) Cho $\angle BAC = 60^\circ$, chứng minh $IO = IH$.*

387 ([Bìn23b], 210., p. 87). *Tính $\angle A$ của ΔABC biết khoảng cách từ A đến trực tâm ΔABC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

388 ([Bìn23b], 211., p. 87). *Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn $(O;R)$. 1 điểm M bất kỳ thuộc cung BC. (a) Chứng minh $MA = MB + MC$. (b) D là giao điểm của MA, BC. Chứng minh $\dfrac{DM}{BM} + \dfrac{DM}{CM} = 1$. (c) Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo R.*

389 ([Bìn23b], 212., p. 87). *Cho ΔABC có $\angle B = 54^\circ, \angle C = 18^\circ$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Chứng minh $AC - AB = R$.*

390 ([Bìn23b], 213., pp. 87–88). *2 đường tròn $(O;R), (O';R)$ cắt nhau ở A,B. 1 đường thẳng $d \parallel OO'$ cắt 2 đường tròn này tại 4 điểm C,D,E,F theo thứ tự trên d, $C,E \in (O), D,F \in (O')$. (a) Chứng minh $CDO'O$ là hình bình hành. (b) Tính CD biết $AB = a$. (c) Chứng minh $\angle CAD$ không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d, d luôn luôn song song với OO'.*

391 ([Bìn23b], 214., p. 88). *Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. 2 điểm D,E thuộc nửa đường tròn đó sao cho HC là tia phân giác của $\angle DHE$. Chứng minh $CH^2 = DH \cdot EH$.*

392 ([Bìn23b], 215., p. 88). *1 đường tròn (O) đi qua đỉnh A & 2 trung điểm D,E của 2 cạnh AB, AC của ΔABC sao cho BC tiếp xúc với (O) tại K. Chứng minh $KA^2 = KB \cdot KC$.*

393 ([Bìn23b], 216., p. 88). *Cho ΔABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 6$. Chứng minh tồn tại 1 điểm E thuộc cạnh AC sao cho 3 độ dài AE, BE, CE là 3 số tự nhiên.*

394 ([Bìn23b], 217., p. 88). *Cho ΔABC cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC. Chứng minh $AB^2 - AM^2 = MB \cdot MC$ (bằng cách vẽ đường tròn (A, AB)).*

395 ([Bìn23b], 218., p. 88). *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Chứng minh $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$ (bằng cách vẽ giao điểm E của AD với đường tròn ngoại tiếp ΔABC).*

396 ([Bìn23b], 219., p. 88). *2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau ở A,B. 2 điểm M,N lần lượt di chuyển trên 2 đường tròn $(O), (O')$ sao cho chiều từ A đến M & từ A đến N trên 2 đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ & 2 cung $\widehat{AM}, \widehat{AN}$ có số đo bằng nhau. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua 1 điểm cố định.*

13 Góc Tạo Bởi Tia Tiếp Tuyến & Dây Cung

397 ([Bìn23b], VD34, p. 89). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt $(O),(O')$ tại 4 điểm A,B,C,D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF, $E \in (O), F \in (O')$. M là giao điểm của AE,DF, N là giao điểm của BE,CF. Chứng minh: (a) MENF là hình chữ nhật. (b) $MN \perp AD$. (c) $MA \cdot ME = MD \cdot MF$.*

398 ([Bìn23b], VD35, p. 89). *Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ 2 tiếp tuyến AB,AC với (O). Dây BD của (O) song song với AC, E là giao điểm của AD với (O), I là giao điểm của BE,C. Chứng minh I là trung điểm AC.*

399 ([Bìn23b], 220., p. 90). *Cho ΔABC. Vẽ đường tròn (O) đi qua A & tiếp xúc với BC tại B. Kẻ dây $BD \parallel AC$. I là giao điểm của CD với (O). Chứng minh $\angle IAB = \angle IBC = \angle ICA$.*

400 ([Bìn23b], 221., p. 90). *Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Dây BC của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại H. D,E lần lượt là giao điểm $\neq A$ của AB,AC với đường tròn nhỏ. Chứng minh: (a) $DE \parallel BC$. (b) AH là tia phân giác $\angle BAC$.*

401 ([Bìn23b], 222., p. 90). *Cho điểm B thuộc đoạn thẳng AC. Vẽ về 1 phía của AC 3 nửa đường tròn có đường kính AC,AB,BC có tâm lần lượt là O,O_1,O_2. EF là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn $(O_1),(O_2)$, $E \in (O_1), F \in (O_2)$. Đường vuông góc với AC tại B cắt nửa đường tròn (O) ở D. Chứng minh BEDF là hình chữ nhật.*

402 ([Bìn23b], 223., p. 90). *Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (A) cắt đường tròn (O) ở C,D. Kẻ dây BN của (O), cắt (A) tại điểm E ở bên trong (O). Chứng minh: (a) $\angle CEN = \angle EDN$. (b) $NE^2 = NC \cdot ND$.*

403 ([Bìn23b], 224., p. 91). *ΔABC vuông tại A nội tiếp đường tròn $(O, 2.5\text{ cm})$. Tiếp tuyến với (O) tại C cắt tia phân giác của $\angle B$ tại K. Tính BK biết BK cắt AC tại D, $BD = 4$ cm.*

404 ([Bìn23b], 225., p. 91). *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau ở E. Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABE, \Delta CDE$. Tìm điều kiện của tứ giác để 2 đường tròn tiếp xúc nhau.*

405 ([Bìn23b], 226., p. 91). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC ở I. (a) Chứng minh $\dfrac{BI}{CI} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. (b) Tính IA,IC biết $AB = 20$ cm, $BC = 24$ cm, $CA = 28$ cm.*

406 ([Bìn23b], 227., p. 91). *Cho hình vuông ABCD có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua A,B biết đoạn tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn đó bằng 4 cm.*

407 ([Bìn23b], 228., p. 91). *Cho ΔABC cân tại A, đường trung trực của AB cắt BC ở K. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔACK.*

408 ([Bìn23b], 229., p. 91). *Cho hình thang ABCD, $AB \parallel CD$, có $BD^2 = AB \cdot CD$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔABD tiếp xúc với BC.*

409 ([Bìn23b], 230., p. 91). *Cho hình bình hành ABCD, $\angle A \le 90^\circ$. Đường tròn ngoại tiếp ΔBCD cắt AC ở E. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABE.*

410 ([Bìn23b], 231., p. 91). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau ở A,B. tiếpKẻ tiếp tuyến chugn CC', $C \in (O), C' \in (O')$, kẻ đường kính COD. E,F lần lượt là giao điểm của OO' với $C'D, CC'$. Chứng minh: (a) $\angle EAF = 90^\circ$, A,C,C' nằm cùng phía đối với OO'. (b) FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ACC'$.*

411 ([Bìn23b], 232., p. 91). *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau ở A,B, trong đó tiếp tuyến chung CD song song với cát tuyến chung EBF, $C,E \in (O)$, $D,F \in (O')$, B nằm giữa E,F. M,N lần lượt là giao điểm của AD,AC với EF. I là giao điểm của CE,DF. Chứng minh: (a) $\Delta ICD = \Delta BCD$. (b) IB là đường trung trực của MN.*

14 Góc Có Đỉnh Ở Bên Trong, Bên Ngoài Đường Tròn

412 ([Bìn23b], VD36, p. 92). *Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Điểm D di chuyển trên cung AC. E là giao điểm của AC,BD, F là giao điểm của AD,BC. Chứng minh: (a) $\angle AFB = \angle ABD$. (b) $AE \cdot BF$ không đổi.*

413 ([Bìn23b], 233., p. 92). *Tứ giác ABCD có 2 góc $\angle B, \angle D$ tù. Chứng minh $AC > BD$.*

414 ([Bìn23b], 234., p. 92). *Cho đường tròn $(O, 2\text{ cm})$, 2 bán kính $OA \perp OB$. M là điểm chính giữa của cung AB. C là giao điểm của AM,OB, H là hình chiếu của M trên OA. Tính diện tích hình thang OHMC.*

415 ([Bìn23b], 235., p. 92). *ΔABC nội tiếp đường tròn (O), 3 điểm M,N,P là điểm chính giữa của 3 cung AB,BC,CA. D là giao điểm của MN,AB, E là giao điểm của PN,AC. Chứng minh $DE \parallel BC$.*

416 ([Bìn23b], 236., p. 93). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, M,N,P lần lượt là tâm của 3 đường tròn bàng tiếp trong 3 góc $\angle A, \angle B, \angle C$. K là điểm đối xứng với I qua O. Chứng minh K là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔMNP.*

15 Cung Chứa Góc

417 ([Bìn23b], VD37, p. 93). *Từ điểm M ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến MAB đi qua O & 2 tiếp tuyến MC, MD. K là giao điểm của AC, BD. Chứng minh: (a) 4 điểm B, C, M, K thuộc cùng 1 đường tròn. (b) $MK \perp AB$.*

418 ([Bìn23b], 237., p. 94). *Cho hình bình hành $ABCD$ có $\angle A < 90^\circ$. Đường tròn (A, AB) cắt đường thẳng BC ở điểm thứ 2 E. Đường tròn (C, BC) cắt đường thẳng AB ở điểm thứ 2 K. Chứng minh: (a) $DE = DK$. (b) 5 điểm A, C, D, E, K thuộc cùng 1 đường tròn.*

419 ([Bìn23b], 238., p. 94). *Qua điểm M thuộc cạnh đáy BC của ΔABC cân, kẻ 2 đường thẳng song song với 2 cạnh bên, chúng cắt AB, AC lần lượt ở D, E. I là điểm đối xứng với M qua DE. Chứng minh: (a) Điểm I thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (b) Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng IM đi qua 1 điểm cố định.*

420 ([Bìn23b], 239., p. 94). *Cho ΔABC nhọn có đường cao AD, điểm M nằm giữa B, C. Đường trung trực của BM cắt AB ở E, đường trung trực của CM cắt AC ở F. N là điểm đối xứng với M qua EF, I là giao điểm của MN, AD. Chứng minh 5 điểm A, B, C, I, N thuộc cùng 1 đường tròn.*

421 ([Bìn23b], 240., p. 94). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, O là giao điểm của 2 đường chéo. Trên tia OA lấy điểm M sao cho $OM = OB$. Trên tia OB lấy điểm N sao cho $ON = OA$. Chứng minh: (a) 4 điểm C, D, M, N thuộc cùng 1 đường tròn. (b) $\angle ACN = \angle BDM$.*

422 ([Bìn23b], 241., p. 94). *Cho ΔABC, $AB < AC$. Đường tròn (O) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AB, BC ở D, E. M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. K là giao điểm của MN, AI. Chứng minh: (a) C, E, I, K thuộc cùng 1 đường tròn. (b) D, E, K thẳng hàng.*

423 ([Bìn23b], 242., p. 94). *Cho ΔABC, đường cao AH, đường trung tuyến AM, H, M phân biệt & thuộc cạnh BC, thỏa mãn $\angle BAH = \angle MAC$. Chứng minh $\angle BAC = 90^\circ$.*

16 Tứ Giác Nội Tiếp

424 ([Bìn23b], VD38, p. 95). *ΔABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm, đường cao $AH = 5$ cm, H nằm ngoài cạnh BC. Tính R.*

425 ([Bìn23b], VD39, p. 95). *Chứng minh chân các đường vuông góc kẻ từ 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác đến 3 cạnh của tam giác ấy nằm trên 1 đường thẳng.*

426 ([Bìn23b], VD40, p. 96). *Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC với (O). 2 tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với AO, cắt AO tại H & cắt (O) tại E, F, E nằm giữa K, F. M là giao điểm của OK, BC. Chứng minh: (a) $EMOF$ là tứ giác nội tiếp. (b) AE, AF là 2 tiếp tuyến của (O).*

427 ([Bìn23b], 243., pp. 96–97). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$. Lấy điểm I thuộc cạnh AC sao cho $\angle ABI = \angle C$. Đường tròn (O) đường kính IC cắt BI ở D & cắt BC ở M. Chứng minh: (a) CI là tia phân giác của $\angle DCM$. (b) DA là tiếp tuyến của (O).*

428 ([Bìn23b], 244., p. 97). *Cho ΔABC vuông tại A, I là trung điểm BC, D là điểm nằm giữa I, C. E, F lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABD, \Delta ACD$. Chứng minh E, F nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔAID.*

429 ([Bìn23b], 245., p. 97). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), đường phân giác AD. H, K lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABD, \Delta ACD$. Chứng minh $OH = OK$.*

430 ([Bìn23b], 246., p. 97). *Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh: (a) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$. (b) $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.*

431 ([Bìn23b], 247., p. 97). *Cho ΔABC nhọn, đường cao AD, trực tâm H. AM, AN là 2 tiếp tuyến với đường tròn (O) đường kính BC, M, N là 2 tiếp điểm. Chứng minh: (a) $AMDN$ là tứ giác nội tiếp. (b) M, H, N thẳng hàng.*

432 ([Bìn23b], 248., p. 97). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, đường cao AH. Chứng minh: (a) $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$. (b) $S = \dfrac{abc}{4R}$ với $BC = a, CA = b, AB = c$, S là diện tích ΔABC.*

433 ([Bìn23b], 249., p. 97). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). 3 tia phân giác của $\angle A, \angle B, \angle C$ cắt (O) lần lượt ở D, E, F. Chứng minh: (a) $2AD > AB + AC$. (b) $AD + BE + CF$ lớn hơn chu vi ΔABC.*

434 ([Bìn23b], 250., pp. 97–98). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Tia phân giác của $\angle A$ cắt BC ở D, cắt (O) ở E. M, N lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. I, K lần lượt là hình chiếu của E trên AB, AC. Chứng minh: (a) $AI + AK = AB + AC$. (b) Diện tích tứ giác $AMEN$ bằng diện tích ΔABC.*

435 ([Bìn23b], 251., p. 98). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), điểm M thuộc cung BC không chứa A. MH, MI, MK lần lượt là 3 đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AB, AC. Chứng minh $\dfrac{BC}{MH} = \dfrac{AB}{MI} + \dfrac{AC}{MK}$.*

436 ([Bìn23b], 252., p. 98). *Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AD, BE, CF. I, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên EF. Chứng minh $DE + DF = IK$.*

437 ([Bìn23b], 253., p. 98). *Cho ΔABC nhọn, 2 đường cao BD, CE. Vẽ ở phía ngoài ΔABC 2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là AC, AB. I, K lần lượt là giao điểm của BD, CE với 2 nửa đường tròn đó. Chứng minh $AI = AK$.*

438 ([Bìn23b], 254., p. 98). *Cho đường tròn (O) & 2 điểm $B, C \in (O)$, 2 tiếp tuyến với đường tròn tại B, C cắt nhau ở A. M là 1 điểm thuộc cung nhỏ BC. Tiếp tuyến với (O) tại M cắt AB, AC lần lượt ở D, E. I, K lần lượt là giao điểm của OD, OE với BC. Chứng minh: (a) $OBDK, DIKE$ là 2 tứ giác nội tiếp. (b) 3 đường thẳng OM, DK, EI đồng quy.*

439 ([Bìn23b], 255., p. 98). *Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC, B, C là 2 tiếp điểm. H là giao điểm của OA, BC. Kẻ dây EF bất kỳ đi qua H. Chứng minh AO là tia phân giác của $\angle EAF$.*

440 ([Bìn23b], 256., p. 98). *Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), vẽ 2 tiếp tuyến AB, AC, B, C là 2 tiếp điểm, & cát tuyến ADE. Đường thẳng đi qua D & vuông góc với OB cắt BC, BE lần lượt ở H, K. Chứng minh $DH = HK$.*

441 ([Bìn23b], 257., p. 98). *Cho đường tròn (O). Qua điểm K ở bên ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến KB, KD, B, D là 2 tiếp điểm, kẻ cát tuyến KAC. (a) Chứng minh $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. (b) Vẽ dây $CN \parallel BD$. I là giao điểm của AN, BD. Chứng minh I là trung điểm BD.*

442 ([Bìn23b], 258., p. 98). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ tiếp xúc ngoài tại A. Từ điểm $B \in (O')$, kẻ 2 tiếp tuyến BC, BD với (O), C, D là 2 tiếp điểm. E, F lần lượt là 2 giao điểm thứ 2 của AC, AD với (O'). Chứng minh $AF \cdot BE = AE \cdot BF$.*

443 ([Bìn23b], 259., p. 99). *Cho ΔABC nhọn, $AB > AC$, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. E là hình chiếu của B trên AD, H là hình chiếu của A trên BC, M là trung điểm BC. Chứng minh ΔMEH cân.*

444 ([Bìn23b], 260., p. 99). *Tứ giác $ABCD$ có $AB = AD + BC$, cạnh AB & 2 tia phân giác của $\angle C, \angle D$ đồng quy. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.*

445 ([Bìn23b], 261., p. 99). *Cho ΔABC. I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC, K là tâm của đường tròn bàng tiếp trong $\angle A$. Chứng minh $AI \cdot AK = AB \cdot AC$.*

446 ([Bìn23b], 262., p. 99). *Đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC cắt đoạn nối 2 tâm B', C' của 2 đường tròn bàng tiếp trong $\angle B, \angle C$ tại điểm $M \neq A$. Chứng minh M là trung điểm $B'C'$.*

447 ([Bìn23b], 263., p. 99). *1 hình thang cân nội tiếp đường tròn (O), cạnh bên được nhìn từ O dưới góc $120°$. Tính diện tích hình thang biết đường cao của hình thang bằng h.*

448 ([Bìn23b], 264., p. 99). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = a, CD = b, a < b$. 1 đường tròn (O) đi qua A, B, cắt 2 cạnh bên AD, BC lần lượt ở M, N. Tính độ dài Mn theo a, b biết 2 tứ giác $ABNM, CDMN$ có diện tích bằng nhau.*

449 ([Bìn23b], 265., p. 99). *Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AD, BE, CF. R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔDEF. (a) Chứng minh $OA \perp EF$. (b) Tính tỷ số diện tích $\Delta DEF, \Delta ABC$ theo R, r.*

450 ([Bìn23b], 266., p. 99). *Cho ΔABC vuông tại A, $\angle C = 40°$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3}AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3}AH$. Tính $\angle BIK$.*

451 ([Bìn23b], 267., p. 99). *ΔABC cân có $\angle A = 100°$. Điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa A có bờ BC sao cho $\angle CBD = 15°, \angle BCD = 35°$. Tính $\angle ADB$.*

452 ([Bìn23b], 268., p. 99). *ΔABC nhọn, trực tâm H. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Chứng minh $\angle ABH = \angle ADH$.*

453 ([Bìn23b], 269., p. 100). *Cho ΔABC. I nằm trong ΔABC sao cho $\angle ABI = \angle ACI$. Vẽ hình bình hành $BICK$. Chứng minh $\angle BAI = \angle CAK$.*

454 ([Bìn23b], 270., p. 100). *Cho điểm I nằm trong hình bình hành $ABCD$ sao cho $\angle IAB = \angle ICB$. Chứng minh $\angle IBC = \angle IDC$.*

455 ([Bìn23b], 271., p. 100). *Cho ΔABC đều, M thuộc cạnh BC. D đối xứng với M qua AB, E đối xứng với M qua AC. Vẽ hình bình hành $DMEI$. Chứng minh: (a) D, A, I, E thuộc cùng 1 đường tròn. (b) $AI \parallel BC$.*

456 ([Bìn23b], 272., p. 100). *Cho hình thang cân $ABCD$, $AB \parallel CD$, E nằm giữa C, D. Vẽ đường tròn (O) đi qua E & tiếp xúc với AD tại D. Vẽ đường tròn (O') đi qua E & tiếp xúc với AC tại C. K là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn đó. Chứng minh: (a) A, B, C, D, K thuộc cùng 1 đường tròn. (b) B, E, K thẳng hàng.*

457 ([Bìn23b], 273., p. 100). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), I là điểm chính giữa của $\widehat{BC}$ không chứa A. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua I & tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (O_2) đi qua I & tiếp xúc với AC tại C. K là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn $(O_1), (O_2)$. (a) Chứng minh B, C, K thẳng hàng. (b) Lấy điểm D bất kỳ thuộc cạnh AB, điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn đi qua 1 điểm cố định khác A.*

458 ([Bìn23b], 274., p. 100). *Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C cố định trên đường kính ấy, $C \neq O$. M chuyển động trên (O). Đường vuông góc với AB tại C cắt MA, MB lần lượt ở E, F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔAEF luôn đi qua 1 điểm cố định khác A.*

459 ([Bìn23b], 275., p. 100). *Cho $\angle xAy = 90°$, $B \in Ay$ cố định, C di chuyển trên Ax. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AC, BC lần lượt ở M, N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định.*

460 ([Bìn23b], 276., pp. 100–101). *Cho đường tròn (O) đường kính BC, $A \in (O)$. H là hình chiếu của A trên BC. Vẽ đường tròn (I) có đường kính AH, cắt AB, AC lần lượt ở M, N. (a) Chứng minh $OA \perp MN$. (b) Vẽ đường kính AOK của (O). E là trung điểm HK. Chứng minh E là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC. (c) Cho BC cố định. Xác định vị trí của điểm A để bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC lớn nhất.*

461 ([Bìn23b], 277., p. 101). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. $(P), (Q)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp $\Delta ABH, \Delta ACH$. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài khác BC của $(P), (Q)$, cắt AB, AH, AC lần lượt ở M, K, N. Chứng minh: (a) $\Delta ABC \backsim \Delta HPQ$. (b) $KP \parallel AB, KQ \parallel AC$. (c) BMNC là tứ giác nội tiếp. (d) A, M, N, P, Q thuộc cùng 1 đường tròn. (e) ΔADE vuông cân, D, E lần lượt là giao điểm của PQ với AB, AC.*

462 ([Bìn23b], 278., p. 101). *Cho đường tròn (O), dây AB. M di chuyển trên cung lớn AB. 2 đường cao AE, BF của ΔABM cắt nhau ở H. (a) Chứng minh $OM \perp EF$. (b) Đường tròn (H, HM) cắt MA, MB lần lượt ở C, D. Chứng minh đường thẳng kẻ từ M & vuông góc với CD luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Chứng minh đường thẳng kẻ từ H & vuông góc với CD cũng đi qua 1 điểm cố định.*

463 ([Bìn23b], 279., p. 101). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). 1 đường tròn (I) tùy ý đi qua B, C, cắt AB, AC lần lượt ở M, N. Đường tròn (K) ngoại tiếp ΔAMN cắt (O) tại điểm thứ 2 D. Chứng minh: (a) AKIO là hình bình hành. (b) $\angle ADI = 90°$.*

464 ([Bìn23b], 280., p. 101). *Dựng ra phía ngoài 1 tứ giác nội tiếp các hình chữ nhật mà mỗi hình chữ nhật có 1 cạnh là của tứ giác, cạnh kia bằng cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh giao điểm các đường chéo của 4 hình chữ nhật là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.*

465 ([Bìn23b], 281., p. 102). *Cho đường tròn đường kính AC, dây $BD \perp AC$. E, F, G, H lần lượt là tâm của 4 đường tròn nội tiếp $\Delta ABC, \Delta ABD, \Delta ACD, \Delta BCD$. Chứng minh EFGH là hình vuông.*

466 ([Bìn23b], 282., p. 102). *Cho đường tròn (O), dây AB, $M \in (O)$. Ax, By là 2 tiếp tuyến của đường tròn, H, I, K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, Ax, By. Chứng minh: (a) $MH^2 = MI \cdot MK$. (b) $MI + MK \geq 2MH$.*

467 ([Bìn23b], 283., p. 102). *M bất kỳ thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD. Khoảng cách từ M đến 4 đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt là MH, MK, MI, MN. Chứng minh $MH \cdot MI = MK \cdot MN$.*

468 ([Bìn23b], 284., p. 102). *Cho ΔABC, đường trung tuyến AM, đường phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt AB, AC lần lượt ở E, F. Chứng minh $BE = CF$.*

469 ([Bìn23b], 285., p. 102). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, C thuộc bán kính OA. Đường vuông góc với AB tại C cắt (O) ở D. Đường tròn (I) tiếp xúc với nửa đường tròn & tiếp xúc với 2 đoạn thẳng AC, CD. E là tiếp điểm trên AC của (I). (a) Chứng minh $BD = BE$. (b) Suy ra cách dựng (I).*

470 ([Bìn23b], 286., p. 102). *Cho ΔABC cân tại A, $AB = 16, BC = 24$, đường cao AE. Đường tròn (O) nội tiếp ΔABC tiếp xúc với AC tại F. (a) Chứng minh OECF là tứ giác nội tiếp & BF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó. (b) M là giao điểm của BF với (O). Chứng minh BMOC là tứ giác nội tiếp.*

471 ([Bìn23b], 287., p. 102). *Cho đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. 2 dây BC, BD của (O) tiếp xúc với (O') lần lượt ở E, F. I là giao điểm của EF với tia phân giác $\angle CAD$. Chứng minh: (a) $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle DCB$. (b) $\angle DAF = \angle IAE$. (c) I là tâm đường tròn nội tiếp ΔBCD.*

472 ([Bìn23b], 288., p. 103). *Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AD, BE, CF. Lấy điểm $M \in DF$ bất kỳ, kẻ $MN \parallel BC$, $N \in DE$. Lấy điểm I trên đường thẳng DE sao cho $\angle MAI = \angle BAC$. Chứng minh: (a) ΔAMN cân. (b) AMNI là tứ giác nội tiếp. (c) MA là tia phân giác $\angle FMI$.*

473 ([Bìn23b], 289., p. 103). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau ở A, B. Kẻ tiếp tuyến chung CD, $C \in (Oin), D \in (O')$. H, K lần lượt là hình chiếu của C, D trên OO'. Chứng minh $\angle OAO' = \angle HAK$.*

474 ([Bìn23b], 290., p. 103). *Cho 2 hình vuông $ABCD, AB'C'D'$ sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ A lần lượt qua B, C, D & chiều từ A lần lượt qua B', C', D' đều theo chiều quay của kim đồng hồ. I là giao điểm của BB', DD'. Chứng minh: (a) I thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông. (b) CC' cũng đi qua điểm I.*

475 ([Bìn23b], 291., p. 103). *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường vuông góc với AD tại A cắt BC ở E. Đường vuông góc với AB tại A cắt CD ở F. Chứng minh E, F, O thẳng hàng.*

476 ([Bìn23b], 292., p. 103). *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt ở D, E, F. Biết $\Delta ABC \backsim \Delta DEF$, chứng minh ΔABC đều.*

477 ([Bìn23b], 293., p. 103). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài $AB, A'B'$, 2 tiếp tuyến chung trong CD, EF, $A, A', C, E \in (O), B, B', D, F \in (O')$. M là giao điểm của AB, EF, N là giao điểm của $A'B', CD$, H là giao điểm của MN, OO'. Chứng minh: (a) $MN \perp OO'$. (b) O', B, M, H, F thuộc cùng 1 đường tròn. (c) O, A, M, E, H thuộc cùng 1 đường tròn. (d) B, D, H thẳng hàng. (e) A, C, H thẳng hàng.*

478 ([Bìn23b], 294., pp. 103–104). *Cho đường tròn (O), 2 điểm A,B ở vị trí đối xứng với nhau qua 1 bán kính của (O). Vẽ dây CD đi qua A, dây EF đi qua B. 2 đường thẳng CE,DF cắt đường thẳng AB lần lượt ở M,N. Chứng minh $AN = BM$.*

479 ([Bìn23b], 295., p. 104). *Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song, F là giao điểm của AB,CD, E là giao điểm của AD,BC. H,G lần lượt là trung điểm AC,BD. Chứng minh: (a) Tia phân giác $\angle BED$ cũng là tia phân giác $\angle HEG$. (b) 2 tia phân giác $\angle BED, \angle BFD$ gặp nhau tại 1 điểm nằm trên GH.*

480 ([Bìn23b], 296., p. 104). *Cho tứ giác $ABCD$. Vẽ 4 đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của 1 trong $\Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDA, \Delta DAB$. Chứng minh 4 đường tròn đó cùng giao nhau tại 1 điểm.*

481 ([Bìn23b], 297., p. 104). *Cho ΔABC, đường cao AH. Kẻ ra ngoài ΔABC 2 tia Ax,Ay lần lượt tạo với AB,AC các góc nhọn bằng nhau. I là hình chiếu của B trên Ax, K là hình chiếu của C trên Ay, M là trung điểm BC. Chứng minh: (a) $MI = MK$. (b) I,H,K,M thuộc cùng 1 đường tròn.*

482 ([Bìn23b], 298., p. 104). *Cho ΔABC, trực tâm H. Kẻ 3 đường thẳng AA', BB', CC' sao cho 3 tia phân của $\angle A'AH, \angle B'BH, \angle C'CH$ song song với nhau. Chứng minh 3 đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

483 ([Bìn23b], 299., p. 104). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), M thuộc cung AC, Ax là tiếp tuyến tại A. H,I,K,N lần lượt là chân 4 đường vuông góc kẻ từ M đến AB,AC,BC,Ax. Chứng minh $MH \cdot MI = MK \cdot MN$.*

484 ([Bìn23b], 300., p. 104). *Cho ΔABC & 2 điểm M,N thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Biết các đường thẳng Simpson của M,N vuông góc với nhau. Chứng minh MN là đường kính của đường tròn.*

485 ([Bìn23b], 301., p. 104). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). H,I lần lượt là hình chiếu của B trên AC,CD. M,N lần lượt là trung điểm của AD,HI. Chứng minh: (a) $\Delta ABD \backsim \Delta HBI$. (b) $\angle MNB = 90^\circ$.*

486 ([Bìn23b], 302., p. 105). *Cho ΔABC, điểm M bất kỳ thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. D đối xứng với M qua AB, E đối xứng với M qua BC. Chứng minh khi điểm M di chuyển trên (O) thì DE luôn đi qua 1 điểm cố định.*

487 ([Bìn23b], 303., p. 105, định lý Plolémée). *Chứng minh trong 1 tứ giác nội tiếp, tích 2 đường chéo bằng tổng các tích của 2 cặp cạnh đối.*

488 ([Bìn23b], 304., p. 105, định lý Carnot). *Vận dụng định lý Plolémée để chứng minh tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác nhọn đến 3 cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp tam giác đó.*

17 Đường Tròn Ngoại Tiếp, Nội Tiếp Đa Giác

489 ([Bìn23b], VD41, p. 105). *Chứng minh định lý "Nếu tứ giác $ABCD$ có tổng các cạnh đối bằng nhau $AB + CD = BC + AD$ thì tứ giác đó ngoại tiếp được 1 đường tròn" bằng cách chứng minh 4 tia phân giác của $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ cùng gặp nhau tại 1 điểm.*

490 ([Bìn23b], VD42, p. 106). *2 đường trung tuyến BD,CE của ΔABC cắt nhau tại I. Cho biết tứ giác $ADIE$ ngoại tiếp được 1 đường tròn. Chứng minh ΔABC cân.*

491 ([Bìn23b], VD43, p. 107). *Cho 1 lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R. Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau 1 đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.*

492 ([Bìn23b], 305., p. 107). *Hình thang vuông $ABCD$, $\angle A = \angle D = 90^\circ$, ngoại tiếp đường tròn (O). Tính diện tích hình thang biết: (a) $OB = 10$ cm, $OC = 20$ cm. (b) $AB = b, CD = a$.*

493 ([Bìn23b], 306., p. 107). *Hình thang $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O), đáy nhỏ $AB = 2$ cm, E là tiếp điểm của (O) trên cạnh BC. Biết $BE = 1$ cm, $CE = 4$ cm. Chứng minh $ABCD$ là hình thang cân & tìm diện tích của nó.*

494 ([Bìn23b], 307., p. 107). *Tính các cạnh của 1 hình thang cân ngoại tiếp đường tròn $(O, 10$ cm$)$ biết khoảng cách giữa 2 tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16 cm.*

495 ([Bìn23b], 308., p. 107). *Đường tròn (O) nội tiếp hình vuông $ABCD$, tiếp điểm trên AB là M. 1 tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt 2 cạnh BC,CD lần lượt ở E,F. Chứng minh: (a) $\Delta DFO \backsim \Delta BOE$. (b) $ME \parallel AF$.*

496 ([Bìn23b], 309., p. 107). *Cho tứ giác $ABCD$, 2 đường tròn nội tiếp $\Delta ABC, \Delta ACD$ tiếp xúc nhau. Chứng minh các đường tròn nội tiếp $\Delta ABD, \Delta BCD$ tiếp xúc nhau.*

497 ([Bìn23b], 310., p. 108). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp 1 đường tròn. Chứng minh nếu 1 đường thẳng chia tứ giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau & chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.*

498 ([Bìn23b], 311., p. 108). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, ngoại tiếp đường tròn (O), tiếp điểm trên AB,CD lần lượt là E,F. Chứng minh AC,BD,EF đồng quy.*

499 ([Bìn23b], 312., p. 108). *Chứng minh trong 1 tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm 2 đường chéo của tứ giác.*

500 ([Bìn23b], 313., p. 108). *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được tròn (O). I,K lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo BD,AC. Chứng minh: (a) $S_{OAB}+S_{OCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. (b) I,K,O thẳng hàng.*

501 ([Bìn23b], 314., p. 108). *Cho đường tròn (O), 2 dây $AB\perp CD$. 4 tiếp tuyến với (O) tại A,B,C,D cắt nhau lần lượt ở E,F,G,H. Chứng minh $EFGH$ là tứ giác nội tiếp.*

502 ([Bìn23b], 315., p. 108). *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O), đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác, $AB=14$ cm, $BC=18$ cm, $CD=26$ cm. H là tiếp điểm của CD & (O). Tính CH,DH.*

503 ([Bìn23b], 316., p. 108). *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(O;r)$, đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác. E,F,G,H lần lượt là hình chiếu của O trên AB,BC,CD,DA. Chứng minh: (a) $r^2=AE\cdot CG=BF\cdot DH$. (b) Diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $\sqrt{abcd}$ với $AB=a,BC=b,CD=c,dA=d$.*

504 ([Bìn23b], 317., p. 108). *Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp 1 đường tròn & có 2 cặp cạnh đối song song là $AB\parallel DE,BC\parallel EF$. Chứng minh 2 cạnh đối còn lại cũng song song với nhau.*

505 ([Bìn23b], 318., p. 108). *Lục giác $ABCDEF$ nội tiếp 1 đường tròn có 3 cạnh AB,CD,EF bằng bán kính của đường tròn. Chứng minh 3 trung điểm của 3 cạnh còn lại là 3 đỉnh của 1 tam giác đều.*

506 ([Bìn23b], 319., p. 109). *Tính diện tích bát giác đều cạnh a.*

507 ([Bìn23b], 320., p. 109). *Cho đa giác đều* 20 *cạnh $A_1A_2\ldots A_{20}$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$. $M\in(O;R)$ bất kỳ. Tính tổng $\sum_{i=1}^{20}MA_i^2=MA_1^2+MA_2^2+\cdots+MA_{20}^2$.*

508 ([Bìn23b], 321., p. 109). *Cho ΔABC đều & hình vuông $ADEF$ cùng nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Tính diện tích phần chung của tam giác & hình vuông.*

18 Độ Dài Đường Tròn

509 ([Bìn23b], VD44, p. 109). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Độ dài 3 cung AB,BC,CA lần lượt bằng $3\pi,4\pi,5\pi$. Tính diện tích ΔABC.*

510 ([Bìn23b], 322., p. 110). *Cho đường tròn (O), cung AB bằng* $120°$. *2 tiếp tuyến của (O) tại A,B cắt nhau ở C. (I) là đường tròn tiếp xúc với 2 đoạn thẳng AC,BC & cung AB. So sánh độ dài của (I) với độ dài cung AB của (O).*

511 ([Bìn23b], 323., p. 110). *Cho 2 đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa 2 điểm thuộc 2 đường tròn bằng* 1 m. *Tính hiệu các độ dài của 2 đường tròn.*

512 ([Bìn23b], 324., p. 110). *Cho hình quạt tròn có cung BC bằng* $120°$, *tâm A bán kính R. Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó với đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung BC & với 2 bán kính AB,AC.*

513 ([Bìn23b], 325., p. 110). *Lấy 4 điểm A,B,C,D lần lượt trên đường tròn (O) sao cho* $\text{sđ}\widehat{AB}=60°,\text{sđ}\widehat{BC}=90°,\text{sđ}\widehat{CD}=120°$. *(a) Tứ giác $ABCD$ là hình gì? (b) Tính độ dài (O) biết diện tích tứ giác $ABCD$ bằng* 100 m^2.

19 Diện Tích Hình Tròn

514 ([Bìn23b], VD45, p. 110). *Cho tam giác đều tâm O, cạnh* 3 cm. *Vẽ đường tròn* $(O,1\text{ cm})$. *Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.*

515 ([Bìn23b], 326., p. 111). *Cho 1 hình thang ngoại tiếp 1 đường tròn. So sánh tỷ số giữa diện tích hình tròn & diện tích hình thang với tỷ số giữa chu vi hình tròn & chu vi hình thang.*

516 ([Bìn23b], 327., p. 111). *Cho 1 hình tròn & 1 hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?*

517 ([Bìn23b], 328., pp. 111–112). *O là trung điểm của đoạn thẳng $AB=2R$. Vẽ về 1 phía của AB 3 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là OA,OB,AB. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc 3 nửa đường tròn này. (a) Tính bán kính đường tròn (I). (b) Tính diện tích phần hình tròn lớn nằm ngoài hình tròn (I) & nằm ngoài 2 nửa hình tròn nhỏ.*

518 ([Bìn23b], 329., p. 112). *Cho 2 đường tròn đồng tâm, đường tròn nhỏ chia hình tròn lớn thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh diện tích phần hình vành khăn giới hạn bởi 2 tiếp tuyến song song của đường tròn nhỏ bằng diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ.*

519 ([Bìn23b], 330., p. 112). *Cho đa giác đều n cạnh, độ dài mỗi cạnh bằng a. Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp đa giác. (a) Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn. (b) Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.*

520 ([Bìn23b], 331., p. 112). *1 hình quạt có chu vi bằng* 28 cm *& diện tích bằng* 49 cm^2 *(chu vi hình quạt bằng độ dài cung hình quạt cộng với 2 lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt.*

521 ([Bìn23b], 332., p. 112). *Cho 3 đường tròn cùng bán kính r & tiếp xúc ngoài đôi một. (a) Tính diện tích "tam giác cong" có đỉnh là các tiếp điểm của 2 trong 3 đường tròn đó. (b) Kẻ 3 đường thẳng, mỗi đường thẳng tiếp xúc với 2 đường tròn & không giao với đường tròn thứ 3. Tính diện tích tam giác tạo bởi 3 đường thẳng đó.*

522 ([Bìn23b], 333., p. 112). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 15, AC = 20$, đường cao AH. Vẽ đường tròn (A, AH). Kẻ 2 tiếp tuyến BD, CE với đường tròn, D, E là 2 tiếp điểm. Tính diện tích hình giới hạn bởi 3 đoạn thẳng BD, BC, CE & cung DE không chứa H của đường tròn.*

523 ([Bìn23b], 334., p. 112). *1 hình viên phân có số đo cung $90°$, diện tích $2\pi - 4$. Tính độ dài dây của hình viên phân.*

524 ([Bìn23b], 335., p. 112). *Cho ΔABC đều có cạnh bằng $2a$. (I) là đường tròn nội tiếp ΔABC. Tính diện tích phần chung của hình tròn (I) & hình tròn (A, a).*

525 ([Bìn23b], 336., p. 112). *Cho đường tròn $(O; R)$, cung AB bằng $60°$. Vẽ cung OB có tâm A bán kính R. Vẽ cung OA có tâm B bán kính R. Chứng minh diện tích hình giới hạn bởi 3 cung OA, OB, AB nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn $(O; R)$.*

526 ([Bìn23b], 337., p. 113). *Cho đường tròn $(O; R)$. 1 đường tròn (O') cắt đường tròn (O) ở A, B sao cho cung AB của (O') chia (O) thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh độ dài cung AB của (O') lớn hơn $2R$.*

527 ([Bìn23b], 338., p. 113). *Cho ΔABC có diện tích S. S_1 là diện tích hình tròn ngoại tiếp ΔABC, S_2 là diện tích hình tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh $2S < S_1 + S_2$.*

528 ([Bìn23b], 339., p. 113). *Cho hình viên phân BC có dây $BC = a$, cung $\widehat{BC} = 90°$. (a) Tính diện tích hình viên phân. (b) Tính diện tích hình vuông DEFG nội tiếp trong viên phân đó, $D, E \in BC$, G, H thuộc cung BC.*

529 ([Bìn23b], 340., p. 113). *Tính bán kính hình viên phân BC có dây $BC = 6$ cm, cạnh hình vuông MNPQ nội tiếp viên phân ấy bằng 2 cm, $M, N \in BC$, P, Q thuộc cung BC.*

20 Quỹ Tích

530 ([Bìn23b], VD49, p. 118). *Cho cung AB cố định tạo bởi 2 bán kính $OA \perp OB$, I chuyển động trên cung AB. Trên tia OI lấy điểm M sao cho OM bằng tổng các khoảng cách từ I đến OA & đến OB. Tìm quỹ tích các điểm M.*

531 ([Bìn23b], VD50, p. 120). *Cho ΔABC cân tại A. 2 điểm M, N lần lượt di chuyển trên 2 cạnh AB, AC sao cho $AM = CN$. Tìm quỹ tích các tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.*

532 ([Bìn23b], VD51, p. 121). *Tìm quỹ tích trực tâm H của các ΔABC có BC cố định, $\angle A = \alpha$ không đổi.*

533 ([Bìn23b], VD52, p. 122). *Cho ABCD là 1 tứ giác nội tiếp. (I) là đường tròn bất kỳ đi qua A, B, (K) là đường tròn đi qua C, D & tiếp xúc với (I). M là tiếp điểm của $(I), (K)$. Điểm M di chuyển trên đường nào?*

534 ([Bìn23b], VD53, p. 123). *Cho đường tròn (O) & dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên đường tròn. Đường trung trực của AB cắt AC ở M. Tìm quỹ tích các điểm M.*

535 ([Bìn23b], VD54, p. 124). *Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc vuông (điểm M gọi là* nhìn 1 hình vuông dưới *$\angle AMB$ nếu 2 điểm A, B thuộc cạnh hình vuông & hình vuông thuộc miền trong của $\angle AMB$).*

536 ([Bìn23b], 356., p. 124). *Cho nửa đường tròn đường kính AB, C là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm M di chuyển trên cung BC. N là giao điểm của AM, OC. Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔCMN.*

537 ([Bìn23b], 357., pp. 124–125). *Tứ giác ABCD có AC cố định, $\angle A = 45°$, $\angle B = \angle D = 90°$. (a) Chứng minh BD có độ dài không đổi. (b) E là giao điểm của BC, AD, F là giao điểm của AB, CD. Chứng minh EF có độ dài không đổi. (c) Tìm quỹ tích các tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔAEF.*

538 ([Bìn23b], 358., p. 125). *Cho $\angle xOy$ & 1 điểm I cố định thuộc tia phân giác của $\angle xOy$. 1 đường tròn (I) bán kính thay đổi cắt 2 tia Ox, Oy lần lượt ở M, N, M không đối xứng với N qua OI. (a) Tìm quỹ tích các tâm O' của đường tròn ngoại tiếp ΔOMN. (b) Đường vuông góc với Ox tại M & đường vuông góc với Oy tại N cắt nhau ở P. Tìm quỹ tích các điểm P.*

539 ([Bìn23b], 359., p. 125). *Cho ΔABC đều. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong ΔABC sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$.*

540 ([Bìn23b], 360., p. 125). *Cho ΔABC vuông cân tại A. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong ΔABC sao cho $2MA^2 = MB^2 - MC^2$.*

541 ([Bìn23b], 361., p. 125). *Cho M là 1 điểm thuộc đường tròn $(O'; R)$. Đường tròn này lăn (không trượt) trong đường tròn $(O, 2R)$. Tìm quỹ tích các điểm M.*

542 ([Bìn23b], 362., p. 125). *Tìm quỹ tích đỉnh C của các ΔABC có AB cố định, đường cao BH bằng cạnh AC.*

543 ([Bìn23b], 363., p. 125). *Cho 2 đường tròn $(O), (O')$ cắt nhau ở A, B. 1 đường thẳng d bất kỳ luôn đi qua A cắt $(O), (O')$ lần lượt ở C, D. (a) Tìm quỹ tích các trung điểm M của CD. (b) Cho biết bán kính của $(O), (O')$ là 3 cm, 2 cm. Tính tỷ số $BC : BD$. (c) Đường thẳng d có vị trí nào thì đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất, với A nằm giữa C, D?*

544 ([Bìn23b], 364., p. 125)**.** *Cho đường tròn (O), điểm A cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại A lấy 1 điểm B cố định. (O') là đường tròn tiếp xúc với AB tại B & có bán kính thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm I là trung điểm của dây chung MN của $(O),(O')$.*

545 ([Bìn23b], 365., p. 125)**.** *Cho đường tròn (O), 1 điểm A ở bên trong đường tròn. Điểm B di chuyển trên đường tròn. Qua O kẻ đường vuông góc với AB, cắt tiếp tuyến tại B của (O) ở điểm M. Tìm quỹ tích các điểm M.*

546 ([Bìn23b], 366., p. 126)**.** *Cho đường tròn (O), đường kính AB vuông góc với dây CD. Điểm E di chuyển trên (O). 2 đường thẳng AE,BE cắt đường thẳng CD lần lượt ở I,K. Tìm quỹ tích tâm O' của đường tròn ngoại tiếp ΔBIK.*

547 ([Bìn23b], 367., p. 126)**.** *Cho 3 điểm cố định A,B,C thẳng hàng theo thứ tự đó. 1 đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua A,B. Kẻ 2 tiếp tuyến CD,CE với đường tròn, D,E là 2 tiếp điểm. (a) Tìm quỹ tích các điểm D,E. (b) Tìm quỹ tích các trung điểm K của DE. (c) MN là đường kính của (O) vuông góc với AB, F là giao điểm của CM với (O). Chứng minh AB,DE,FN đồng quy.*

548 ([Bìn23b], 368., p. 126)**.** *Cho đường tròn (O), dây AB. Điểm C di chuyển trên đường thẳng AB & nằm ngoài (O). Kẻ 2 tiếp tuyến CD,CE với (O), D,E là 2 tiếp điểm. Tìm quỹ tích giao điểm K của OC,DE.*

549 ([Bìn23b], 369., p. 126)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$, điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. BC là 1 đường kính thay đổi. (a) Tìm quỹ tích tâm O_1 của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (b) D,E lần lượt là giao điểm của AB,AC với (O). Tìm quỹ tích tâm O_2 của đường tròn ngoại tiếp ΔADE. (c) F là giao điểm khác A của $(O_1),(O_2)$. Chứng minh AF,BC,DE đồng quy.*

550 ([Bìn23b], 370., p. 126)**.** *Cho đường tròn (O), dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên (O). M là trung điểm AC. Tìm quỹ tích hình chiếu H của M trên AB.*

551 ([Bìn23b], 371., p. 126)**.** *Cho $\angle xOy = 90^\circ$, 1 điểm A cố định nằm trong $\angle xOy$. 1 góc vuông đỉnh A có 2 cạnh thay đổi cắt Ox,Oy lần lượt ở B,C. M đối xứng với A qua BC. (a) Tìm quỹ tích các điểm M. (b) Chứng minh $\dfrac{AB}{AC}$ là hằng số.*

552 ([Bìn23b], 372., p. 126)**.** *Cho đường tròn (O), điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB, B là tiếp điểm. 1 cát tuyến AMN luôn đi qua A. Tìm quỹ tích trọng tâm G của ΔBMN.*

553 ([Bìn23b], 373., p. 127)**.** *Cho đường tròn $(O;R)$, 1 điểm H cố định ở bên trong đường tròn. Xét các ΔABC nội tiếp (O) & nhận H làm trực tâm. Tìm quỹ tích: (a) Chân các đường cao của ΔABC. (b) Chân các đường trung tuyến của ΔABC.*

554 ([Bìn23b], 374., p. 127)**.** *Cho đường tròn (O), 2 đường kính $AB\perp CD$. 2 điểm E,F chuyển động trên (O) sao cho $OE\perp OF$. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với CD, qua F kẻ đường thẳng vuông góc với AB, chúng cắt nhau ở M. Tìm quỹ tích các điểm M.*

555 ([Bìn23b], 375., p. 127)**.** *Cho đường tròn (O), dây AB cố định. 2 điểm M,N di chuyển trên (O) sao cho $AM = BN$. Tìm quỹ tích giao điểm I của 2 đường thẳng AM,BN.*

556 ([Bìn23b], 376., p. 127)**.** *Cho ΔABC cân tại A. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho MA là tia phân giác $\angle BMC$.*

557 ([Bìn23b], 377., p. 127)**.** *Cho ΔABC cân tại A. 1 đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A. Trên d lấy điểm M sao cho $MB + MC$ nhỏ nhất. Tìm quỹ tích các điểm M.*

558 ([Bìn23b], 378., p. 127)**.** *Tìm quỹ tích các điểm M mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc bằng 45°.*

559 ([Bìn23b], 379., p. 127)**.** *Cho đường tròn (O), dây AB cố định. Điểm M di chuyển trên (O). Vẽ đường tròn (M) tiếp xúc với AB. I là giao điểm của 2 tiếp tuyến khác AB kẻ từ A,B với (M). Tìm quỹ tích của điểm I.*

560 ([Bìn23b], 380., p. 127)**.** *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại A,B. 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt $(O),(O')$ lần lượt ở C,D. Tìm quỹ tích tâm I các đường tròn nội tiếp ΔBCD.*

561 ([Bìn23b], 381., p. 127)**.** *Cho 2 đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại A,B. Qua A vẽ cát tuyến cố định CAD, $C\in(O),D\in(O')$. 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua A cắt $(O),(O')$ lần lượt ở M,N. Tìm quỹ tích giao điểm P của 2 đường thẳng CM,DN.*

562 ([Bìn23b], 382., p. 127)**.** *Cho ΔABC & điểm D cố định trên cạnh BC. 1 góc vuông đỉnh D có các cạnh thay đổi vị trí cắt 2 cạnh AB,AC lần lượt ở M,N. Tìm quỹ tích hình chiếu H của D trên MN.*

21 Dựng Hình

563 ([Bìn23b], VD55, p. 128)**.** *Cho ΔABC. Dựng ΔDEF đều có độ dài cạnh bằng a cho trước, 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh của ΔABC.*

564 ([Bìn23b], VD56, p. 129)**.** *Cho ΔABC, 1 điểm D nằm trong ΔABC. Dựng đường thẳng đi qua D cắt 2 cạnh AB,C lần lượt ở E,F sao cho $BE = CF$.*

565 ([Bìn23b], VD57, p. 129)**.** *Cho đường tròn (O) & 2 điểm A,B ở bên ngoài (O). Dựng đường tròn (O') tiếp xúc với (O) & đi qua 2 điểm A,B.*

566 ([Bìn23b], VD58, p. 130). *Cho 2 điểm A, B nằm về 1 phía của đường thẳng xy. Dựng đường tròn đi qua A, B & tiếp xúc với đường thẳng xy.*

567 ([Bìn23b], VD59, p. 131). *Dựng ΔABC vuông tại A biết cạnh huyền $BC = a$, đường phân giác $AD = d$.*

568 ([Bìn23b], 383., p. 132). *Cho 3 tia chung gốc Ox, Oy, Oz. Dựng tam giác đều cạnh a có 3 đỉnh thuộc 3 tia này.*

569 ([Bìn23b], 384., p. 132). *Cho $\angle xOy$. Dựng đoạn thẳng $AB = a$ có $A \in Ox, B \in Oy$ sao cho $OA + OB = m$.*

570 ([Bìn23b], 385., p. 132). *(a) Dựng tam giác vuông biết chu vi bằng 2p & bán kính của đường tròn nội tiếp bằng r. (b) Dựng tam giác biết 1 cạnh bằng a, chu vi bằng 2p, & bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.*

571 ([Bìn23b], 386., p. 132). *Dựng ΔABC biết $\angle A = \alpha$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $AM = m$.*

572 ([Bìn23b], 387., p. 132). *Dựng ΔABC biết $\angle A = \alpha$, $AC - AB = d$, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.*

573 ([Bìn23b], 388., p. 132). *Dựng ΔABC biết 3 điểm I, O, P lần lượt là tâm của 3 đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp.*

574 ([Bìn23b], 389., p. 132). *Dựng ΔABC biết $BC = a$, bán kính r của đường tròn nội tiếp, bán kính R_a của đường tròn bàng tiếp trong $\angle A$.*

575 ([Bìn23b], 390., p. 132). *Dựng ΔABC biết $\angle A = \alpha, AB - BC = m, AC - BC = n$.*

576 ([Bìn23b], 391., p. 132). *Dựng ΔABC biết $BC = a$, đường cao $AH = h$ biết đường phân giác AD bằng trung bình nhân của BD, CD.*

577 ([Bìn23b], 392., p. 132). *Cho 4 điểm A, B, C, D. Dựng hình vuông $EFGH$ có 4 cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) đi qua 4 điểm này (mỗi đường thẳng đi qua 1 điểm).*

578 ([Bìn23b], 393., p. 132). *Cho ΔABC & điểm M nằm trong ΔABC. Dựng đường tròn đi qua A, M, cắt AB, AC lần lượt ở D, E sao cho $DE \parallel BC$.*

579 ([Bìn23b], 394., p. 133). *Cho đường thẳng d, 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với d. Dựng điểm $M \in d$ sao cho $AM + BM = a$.*

580 ([Bìn23b], 395., p. 133). *Dựng ΔABC biết $\angle B - \angle C = \alpha$, đường cao $AH = h$, đường trung tuyến $AM = m$.*

581 ([Bìn23b], 396., p. 133). *Dựng ΔABC biết $BC = a, \angle B - \angle C = \alpha$, đường cao $AH = h$.*

582 ([Bìn23b], 397., p. 133). *Cho $\angle xOy$ nhọn, 2 điểm M, N nằm trong $\angle xOy$. Dựng điểm $A \in Ox$ sao cho tia phân giác $\angle MAN$ vuông góc với Oy.*

583 ([Bìn23b], 398., p. 133). *Dựng tứ giác $ABCD$ biết $AB = a, AD = b, b > a, AC = m, \angle B - \angle D = \alpha$ sao cho AC là tia phân giác $\angle A$.*

584 ([Bìn23b], 399., p. 133). *Dựng tứ giác $ABCD$ có $AB = a, AD = b, \angle B = \alpha, \angle D = \beta$ biết tứ giác $ABCD$ có thể ngoại tiếp được 1 đường tròn.*

585 ([Bìn23b], 400., p. 133). *Cho ΔABC nhọn. Dựng điểm M nằm trong ΔABC sao cho nếu lấy các điểm đối xứng với M qua trung điểm mỗi cạnh của ΔABC thì được 3 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

586 ([Bìn23b], 401., p. 133). *Cho $\angle xOy$ nhọn, điểm M nằm trong $\angle xOy$. Dựng đường tròn (I) đi qua điểm M, cắt Ox, Oy thành 2 dây AB, CD sao cho $\angle AMB = \angle CMD = \angle xOy$.*

587 ([Bìn23b], 402., p. 133). *Dựng hình vuông nội tiếp 1 hình viên phân cho trước (1 cạnh của hình vuông thuộc dây của viên phân, 2 đỉnh còn lại của hình vuông thuộc cung của viên phân).*

588 ([Bìn23b], 403., p. 133). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$. Điểm D thuộc cạnh BC. Đường vuông góc với AD tại A cắt 2 đường vuông góc với BC tại B, C lần lượt ở M, N. Dựng điểm D sao cho diện tích ΔMDN gấp đôi diện tích ΔABC.*

589 ([Bìn23b], 404., p. 133). *Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Dựng điểm E thuộc cạnh CD sao cho $\angle DAE = \angle CBE$.*

590 ([Bìn23b], 405., p. 133). *Dựng ΔABC biết $\angle A = \alpha, BC = a$, đường phân giác $AD = d$.*

22 Toán Cực Trị

591 ([Bìn23b], VD60, p. 134). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Điểm M chuyển động trên (O). D, E lần lượt là hình chiếu của M trên 2 đường thẳng AB, AC. Tìm vị trí điểm M sao cho DE có độ dài lớn nhất.*

592 ([Bìn23b], VD61, p. 134). *Trong các ΔABC có $BC = a, \angle BAC = \alpha$, tam giác nào có: (a) Diện tích lớn nhất? (b) Chu vi lớn nhất?*

593 ([Bìn23b], VD62, p. 135). *Cho đường thẳng xy, 2 điểm A, B nằm cùng phía đối với xy. Tìm điểm $M \in xy$ sao cho $\angle AMB$ lớn nhất.*

594 ([Bìn23b], 406., p. 137). *Cho đường thẳng d, 2 điểm A, B nằm về 2 phía của d. Dựng đường tròn (O) đi qua A, B sao cho nó cắt d thành 1 dây có độ dài nhỏ nhất.*

595 ([Bìn23b], 407., p. 137). *Trong các hình thang có 1 góc nhọn α nội tiếp 1 đường tròn cho trước, hình nào có diện tích lớn nhất $\alpha > 45^\circ$?*

596 ([Bìn23b], 408., p. 137). *Cho điểm I nằm trên đoạn thẳng AB, $IA < IB$. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB & 2 tiếp tuyến Ax, By. Điểm M di chuyển trên nửa đường tròn đó. Đường vuông góc với IM tại M cắt Ax, By lần lượt ở D, E. (a) Chứng minh $AD \cdot BE$ có giá trị không đổi. (b) Tìm vị trí của điểm M để hình thang $ABED$ có diện tích nhỏ nhất.*

597 ([Bìn23b], 409., p. 137). *Cho ΔABC vuông tại A. Tìm vị trí điểm M thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC, sao cho nếu D, E lần lượt là 2 hình chiếu của M trên 2 đường thẳng AB, AC thì DE có độ dài lớn nhất.*

598 ([Bìn23b], 410., p. 137). *Cho đường tròn (O) & dây AB. Điểm M di chuyển trên cung nhỏ AB. I, K lần lượt là hình chiếu của M trên 2 tiếp tuyến tại A, B của (O). Tìm vị trí của M để $MI \cdot MK$ có* GTLN.

599 ([Bìn23b], 411., pp. 137–138). *Cho đường tròn (O) & dây BC không đi qua O. Điểm A di chuyển trên (O) sao cho ΔABC là tam giác nhọn. H là trực tâm của ΔABC. Tìm vị trí của điểm A để tổng $AH + BH + CH$ có* GTLN.

600 ([Bìn23b], 412., p. 138). *Cho đường tròn (O) & dây AB. Tìm điểm C thuộc cung nhỏ AB sao cho tổng $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BC}$ có* GTNN.

601 ([Bìn23b], 413., p. 138). *Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc cung BC sao cho nếu H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên AB, BC, CA thì tổng $MA + MB + MC + MH + MI + MK$ có* GTNN, GTLN.

602 ([Bìn23b], 414., p. 138). *Cho ΔABC đều. Vẽ 2 tia Bx, Cy cùng phía với A đối với BC sao cho $Bx \parallel AC, Cy \parallel AB$. 1 đường thẳng d đi qua A cắt Bx, Cy lần lượt ở D, E. I là giao điểm của CD, BE. Xác định vị trí của đường thẳng d để ΔBCI có chu vi nhỏ nhất.*

603 ([Bìn23b], 415., p. 138). *Cho ΔABC vuông cân, $AB = AC = 10$ cm. (a) Chứng minh tồn tại vô số ΔDEF vuông cân ngoại tiếp ΔABC (mỗi cạnh của ΔDEF đi qua 1 đỉnh của ΔABC). (b) Tính diện tích lớn nhất của ΔDEF.*

604 ([Bìn23b], 416., p. 138). *Cho ΔABC. 2 điểm D, E lần lượt di chuyển trên 2 tia BA, CA sao cho $BD = CE$. (a) Vẽ hình bình hành $BDEM$. Tìm quỹ tích các điểm M. (b) Tìm vị trí của 2 điểm D, E sao cho độ dài DE nhỏ nhất.*

605 ([Bìn23b], 417., p. 138). *Cho đường tròn (O), M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB, điểm C chuyển động trên cung lớn AB, D là giao điểm của AB, CM. (a) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp ΔACD. (b) Tìm vị trí điểm C để độ dài BI nhỏ nhất.*

606 ([Bìn23b], 418., p. 138). *Cho ΔABC. Điểm M di chuyển trên cạnh BC. Vẽ đường tròn (O_1) đi qua M & tiếp xúc với AB tại B. Vẽ đường tròn (O_2) đi qua M & tiếp xúc với AC tại C. N là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn. (a) Chứng minh điểm N thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (b) Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Tìm vị trí điểm M để đoạn thẳng O_1O_2 có độ dài nhỏ nhất.*

607 ([Bìn23b], 419., p. 139). *Cho đường tròn $(O;R)$, 1 điểm I nằm bên trong (O). AB, CD là 2 dây bất kỳ cùng đi qua I & vuông góc với nhau. M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. (a) Chứng minh khi 2 dây AB, CD thay đổi thì 3 tổng sau không đổi: $OM^2 + ON^2, AB^2 + CD^2, AC^2 + BD^2$. (b) Xác định vị trí của AB, CD để hình chữ nhật $OMIN$ có: (i) diện tích lớn nhất; (ii) chu vi lớn nhất. (c) Xác định vị trí của AB, CD để tổng $AB + CD$ lớn nhất, nhỏ nhất. (d) Xác định vị trí của AB, CD để tứ giác $ACBD$ có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.*

608 ([Bìn23b], 420., p. 139). *Cho đường tròn (O) đường kính AB, đường thẳng d không giao với (O). Dựng điểm $M \in d$ sao cho 2 tia MA, MB cắt (O) ở D, E & độ dài DE nhỏ nhất.*

609 ([Bìn23b], 421., p. 139). *Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB, dây CD. Tìm điểm M thuộc cung CD sao cho 2 tia MA, MB cắt dây CD ở I, K & IK có độ dài lớn nhất.*

23 Miscellaneous

610 ([Bìn23b], p. 139). *Nếu 2 tam giác có 2 cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì 2 cạnh thứ 3 cũng không bằng nhau & cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.*

611 ([Bìn23b], VD63, p. 140). *Cho ΔABC có 2 đường phân giác BD, CE bằng nhau. Chứng minh ΔABC cân.*

612 ([Bìn23b], VD64, p. 141, bài toán "con bướm"). *Cho đường tròn (O), dây AB, 2 điểm C, E thuộc cung AB. Vẽ 2 dây CD, EF đi qua trung điểm I của AB. M, N lần lượt là giao điểm của CF, DE với AB. Chứng minh $IM = IN$.*

613 ([Bìn23b], VD65, p. 142, bài toán chia 3 3 góc 1 tam giác của Morley). *Cho ΔABC. Đặt $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$. Lấy điểm K nằm trong ΔABC sao cho $\angle ABK = \beta, \angle ACK = \gamma$. D là giao điểm của 3 đường phân giác ΔBCK. Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng BK, điểm F thuộc đoạn thẳng CK sao cho $\angle EDK = \angle FDK = 30^\circ$. (a) Chứng minh ΔDEF đều. (b) M, N lần lượt đối xứng với D qua BK, CK. Chứng minh $MEFN$ là hình thang cân, tính 4 góc của hình thang cân đó theo α. (c) Chứng minh A, E, F, M, N thuộc cùng 1 đường tròn & 2 tia AE, AF chia $\angle A$ thành 3 góc bằng nhau.*

614 ([Bìn23b], 422., p. 143). *Cho ΔABC, $\angle B = 2\beta, \angle C = 2\alpha$, 2 đường phân giác BD, CE bằng nhau. Vẽ hình bình hành BDCK. (a) Tính $\angle BEK, \angle BKE$ theo α, β. (b) Chứng minh $\alpha = \beta$.*

615 ([Bìn23b], 423., p. 144). *Cho ΔABC, đường phân giác BD. d là đường phân giác của góc ngoài đỉnh B. M, Q lần lượt là hình chiếu của A, C trên d. Chứng minh $BD \cdot MQ = 2S_{ABC}$.*

616 ([Bìn23b], 424., p. 144). *Chứng minh nếu 1 tứ giác nội tiếp có 2 cạnh đối bằng nhau thì 2 cạnh đối kia song song & tứ giác đó là hình thang cân.*

617 ([Bìn23b], 425., p. 144). *Cho ΔABC. d_1, d_2 lần lượt là đường phân giác của góc ngoài tại B, C. M, Q lần lượt là hình chiếu của A, C trên d_1. N, P lần lượt là hình chiếu của A, B trên d_2. (a) Chứng minh $MN \parallel BC$. (b) Chứng minh MNPQ là tứ giác nội tiếp. (c) BD, CE là 2 đường phân giác của ΔABC. Chứng minh $BD \cdot MQ = CE \cdot NP$. (d) Chứng minh nếu $BD = CE$ thì ΔABC cân.*

618 ([Bìn23b], 426., p. 144). *Cho ΔABC có 2 đường phân giác BD, CE bằng nhau & cắt nhau tại I. (a) Vẽ điểm N sao cho $BN = AE, DN = AC$, A, N cùng phía đối với BD. Chứng minh ANBD là tứ giác nội tiếp. (b) NK là đường phân giác ΔBDN. Chứng minh ANKI là tứ giác nội tiếp. (c) Chứng minh ANBD là hình thang cân. (d) Chứng minh ΔABC cân.*

619 ([Bìn23b], 427., p. 144). *Chứng minh nếu $\Delta ABC, \Delta EPQ$ có $BC = PQ, \angle A = \angle E$, 2 đường phân giác AD, EF bằng nhau thì $\Delta ABC = \Delta EPQ$.*

620 ([Bìn23b], 428., p. 144). *Cho ΔABC, điểm D thuộc đường phân giác AI. 2 đường thẳng BD, CD cắt AC, AB lần lượt ở M, N. Chứng minh nếu $BM = CN$ thì ΔABC cân.*

621 ([Bìn23b], 429., pp. 144–145). *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), điểm E di chuyển trên cung AB. M, N lần lượt là giao điểm của CE, DE với AB. (a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔCEM cắt đường thẳng AB tại 1 điểm K cố định. (b) Đặt $AM = a, MN = b, BN = c$. Chứng minh $\frac{ac}{b}$ có giá trị không đổi.*

622 ([Bìn23b], 431., p. 145). *Cho đường tròn (O), dây AB, 2 điểm C, E thuộc cung AB, C thuộc cung AE. Vẽ 2 dây CD, EF đi qua điểm I thuộc dây AB. M, N lần lượt là giao điểm của CF, DE với AB. Chứng minh $\frac{1}{AI} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{BI} + \frac{1}{IM}$.*

623 ([Bìn23b], 432., p. 145, bài toán của Napoléon Bonaparte). *Cho ΔABC. (a) Ở phía ngoài ΔABC vẽ $\Delta BCD, \Delta ACE, \Delta ABF$ đều. H, I, K lần lượt là trọng tâm của 3 tam giác đều ấy. Chứng minh ΔHIK đều. (b) Ở phía ngoài ΔABC vẽ $\Delta BCH, \Delta ACI, \Delta ABK$ lần lượt có cạnh đáy là BC, CA, AB & góc ở đáy bằng 30°. Chứng minh ΔHIK đều.*

624 ([Bìn23b], 433., p. 145, bài toán của Pascal). *Chứng minh nếu 1 lục giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đối không song song thì giao điểm của các cặp cạnh đối là 3 điểm thẳng hàng.*

Tài liệu

[BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23a] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Bìn23b] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.