

# Problem: 2nd-Order Function. Quadratic Equation

Bài Tập: Hàm Số Bậc 2  $y = ax^2$ . Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn  $ax^2 + bx + c = 0$

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 14 tháng 12 năm 2023

## Mục lục

<b>1 2nd-Order Function – Hàm Số <math>y = ax^2, a \neq 0</math></b>	<b>1</b>
<b>2 Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn <math>ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0</math></b>	<b>1</b>
<b>3 Hệ Thức Viète &amp; Ứng Dụng</b>	<b>2</b>
<b>4 Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2</b>	<b>3</b>
4.1 Phương trình đại số bậc cao	4
4.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	5
4.3 Phương trình vô tỷ	6
4.4 Miscellaneous	6
<b>5 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình</b>	<b>7</b>
<b>6 Miscellaneous</b>	<b>7</b>
<b>Tài liệu</b>	<b>7</b>

## 1 2nd-Order Function – Hàm Số $y = ax^2, a \neq 0$

1 ([Bin23], VD74, p. 18). (a) Cho parabol  $y = \frac{1}{4}x^2$ , điểm  $A(0, 1)$  & đường thẳng  $d : y = -1$ . Gọi  $M$  là 1 điểm bất kỳ thuộc parabol. Chứng minh  $MA$  bằng khoảng cách  $MH$  từ điểm  $M$  đến  $d$ . (b) Cho điểm  $A(0, a)$ ,  $d : y = -a$ . Chứng minh quỹ tích của điểm  $M(x, y)$  sao cho khoảng cách  $MH$  từ  $M$  tới  $d$  bằng  $MA$  là 1 parabol.

[Bin23, 235., p. 19, 236., p. 20].

2 ([Bin23], 237., p. 20). (a) Xác định hệ số  $a$  của parabol  $y = ax^2$ , biết parabol đi qua điểm  $A(-2, -2)$ . (b) Tìm tọa độ của điểm  $M$  thuộc parabol này, biết khoảng cách từ  $M$  đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ  $M$  đến trục tung.

3 ([Bin23], 238., p. 20). Vẽ đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{3}|x|$ .

4 ([Bin23], 239., p. 20). (a) Vẽ đồ thị hàm số  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . (b) Gọi  $C$  là 1 điểm tùy ý nằm trên parabol  $y = -\frac{1}{2}x^2$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $OC$ . Khi điểm  $C$  di chuyển trên parabol đó thì điểm  $K$  di chuyển trên đường nào?

## 2 Quadratic Equation – Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

5 ([Bin23], VD75, p. 20). Cho phương trình  $(m^2 - m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$  với tham số  $m$ . (a) Giải phương trình khi  $m = 1$ . (b) Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm phân biệt. (c) Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để tập nghiệm của phương trình chỉ có 1 phần tử.

6 ([Bin23], VD76, p. 21). Chứng minh phương trình  $(a + 1)x^2 - 2(a + b)x + b - 1 = 0$  có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

7 ([Bin23], VD77, p. 22). Chứng minh phương trình  $x^2 - (3m^2 - 5m + 1)x - (m^2 - 4m + 5) = 0$  có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

8 ([Bin23], VD78, p. 22). Cho phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  với  $m, n \in \mathbb{Z}$ . (a) Chứng minh nếu phương trình có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó là số nguyên. (b) Tìm nghiệm hữu tỷ của phương trình với  $n = 3$ .

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

- 9 ([Bin23], VD79, p. 20). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để các nghiệm của phương trình  $x^2 - (4+n)x + 2n = 0$  là các số nguyên.
- 10 ([Bin23], VD80, p. 20). Tìm các giá trị của  $a$  để 2 phương trình  $x^2 + ax + 8 = 0, x^2 + x + a = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung.
- 11 ([Bin23], 240., p. 25). Cho phương trình  $mx^2 + 6(m-2)x + 4m - 7 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình: (a) Có nghiệm kép. (b) Có 2 nghiệm phân biệt. (c) Vô nghiệm.
- 12 ([Bin23], 241., p. 25). Giải phương trình với tham số  $m$ : (a)  $x^2 - mx - 3(m+3) = 0$ . (b)  $mx^2 - 4x + 4 = 0$ .
- 13 ([Bin23], 242., p. 25). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  biết phương trình  $x^2 + mx + 12 = 0$  có hiệu 2 nghiệm bằng 1.
- 14 ([Bin23], 243., p. 25). Cho 2 số thực dương  $a, b$  thỏa  $a + b = 4\sqrt{ab}$ . Tính tỷ số  $\frac{a}{b}$ .
- 15 ([Bin23], 244., p. 25). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  biết  $2(x^2 + 1) + y^2 = 2y(x + 1)$ .
- 16 ([Bin23], 245., p. 26). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có nghiệm: (a)  $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$ . (b)  $(m+1)x^2 - 2x + (m-1) = 0$ .
- 17 ([Bin23], 246., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ : (a)  $x(x-a) + x(x-b) + (x-a)(x-b) = 0$ . (b)  $x^2 + (a+b)x - 2(a^2 - ab + b^2) = 0$ .
- 18 ([Bin23], 247., p. 26). Chứng minh phương trình có nghiệm  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ : (a)  $3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0$ . (b)  $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ .
- 19 ([Bin23], 248., p. 26). Chứng minh nếu  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  thì tồn tại 1 trong 3 phương trình bậc 2  $ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0$  có nghiệm.
- 20 ([Bin23], 249., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , có nghiệm, biết  $5a + 2c = b$ .
- 21 ([Bin23], 250., p. 26). Cho  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh phương trình  $(a^2 + b^2 - c^2)x^2 - 4abx + a^2 + b^2 - c^2 = 0$  có nghiệm.
- 22 ([Bin23], 251., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , có nghiệm nếu  $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4$ .
- 23 ([Bin23], 252., p. 26). Chứng minh nếu  $bm = 2(c+n)$  thì ít nhất 1 trong 2 phương trình  $x^2 + bx + c = 0, x^2 + mx + n = 0$  có nghiệm.
- 24 ([Bin23], 253., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Q}, a \neq 0, |b| = |a+c|$ . Chứng minh các nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  là các số hữu tỷ.
- 25 ([Bin23], 254., p. 26). Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  không có nghiệm hữu tỷ nếu  $a, b, c$  là 3 số nguyên lẻ.
- 26 ([Bin23], 255., p. 26). Chứng minh nếu  $\overline{abc}$  là số nguyên tố thì phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  không có nghiệm hữu tỷ.
- 27 ([Bin23], 256., p. 27). Tìm các giá trị nguyên của  $m$  để nghiệm của phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 4 = 0$  là số hữu tỷ.
- 28 ([Bin23], 257., p. 27). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để các nghiệm của phương trình  $x^2 - (n+4)x + 4n - 25 = 0$  là các số nguyên.
- 29 ([Bin23], 258., p. 27). Tìm số nguyên tố  $p$  biết phương trình  $x^2 + px - 12p = 0$  có 2 nghiệm đều là các số nguyên.
- 30 ([Bin23], 259., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a)  $x^2 + 2x + m = 0, x^2 + mx + 2 = 0$ . (b)  $x^2 + mx + 1 = 0, x^2 - x - m = 0$ .
- 31 ([Bin23], 260., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung: (a)  $x^2 + (m-2)x + 3 = 0, 2x^2 + mx + m + 2 = 0$ . (b)  $2x^2 + (3m-5)x - 9 = 0, 6x^2 + (7m-15)x - 19 = 0$ .
- 32 ([Bin23], 261., p. 27). Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 1 nghiệm của phương trình  $2x^2 - 13x + 2m = 0$  gấp đôi 1 nghiệm của phương trình  $x^2 - 4x + m = 0$ .
- 33 ([Bin23], 262., p. 27). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$ . Biết phương trình thứ nhất có nghiệm dương  $m$ , chứng minh phương trình thứ 2 có nghiệm  $n$  sao cho  $m + n \geq 2$ .

### 3 Hệ Thức Viète & Ứng Dụng

- 34 ([Bin23], VD81, p. 28). Cho phương trình  $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0$  với tham số  $m$ . (a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm. (b) Tìm  $m$  để phương trình có 2 nghiệm trái dấu. Khi đó trong 2 nghiệm, nghiệm nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn? (c) Xác định  $m$  để 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa mãn  $x_1 + 4x_2 = 3$ . (d) Tìm 1 hệ thức giữa  $x_1, x_2$  không phụ thuộc vào  $m$ .
- 35 ([Bin23], VD82, p. 30). Cho phương trình  $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

**36** ([Bin23], VD83, p. 30). Cho phương trình  $x^2 + ax + b = 0$  có 2 nghiệm  $c, d$ , phương trình  $x^2 + cx + d = 0$  có 2 nghiệm  $a, b$ . Tính  $a, b, c, d$  biết chúng đều khác 0.

**37** ([Bin23], VD84, p. 31). Cho phương trình  $x^2 + 5x - 1 = 0$ . Không giải phương trình, lập 1 phương trình bậc 2 có 2 nghiệm là lũy thừa bậc 4 của 2 nghiệm của phương trình ban đầu.

**38** ([Bin23], 263., p. 31). Tính nhằm nghiệm của phương trình: (a)  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ . (b)  $(m-1)x^2 + (m+1)x + 2 = 0$ .

**39** ([Bin23], 264., p. 31). Không giải phương trình, xét dấu các nghiệm của phương trình (nếu có): (a)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ . (b)  $5x^2 + 3x - 1 = 0$ . (c)  $2x^2 + 13x + 8 = 0$ . (d)  $4x^2 - 11x + 8 = 0$ .

**40** ([Bin23], 265., p. 32). Xác định giá trị của  $m$  để phương trình  $(m-1)x^2 - 2x + 3 = 0$  có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

**41** ([Bin23], 266., p. 32). Giải phương trình  $x^2 - mx + n = 0$  biết phương trình có 2 nghiệm nguyên dương phân biệt &  $m, n$  là 2 số nguyên tố.

**42** ([Bin23], 267., p. 32). Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ . Không giải phương trình, tính: (a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ . (b)  $(x_1 - x_2)^2$ . (c)  $x_1^3 + x_2^3$ .

**43** ([Bin23], 268., p. 32). Cho phương trình  $x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 2m - 3 = 0$ . Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  phân biệt thỏa  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{5}$ .

**44** ([Bin23], 269., p. 32). Cho phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  có  $3m^2 = 16n$ . Chứng minh trong 2 nghiệm của phương trình, có 1 nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

**45** ([Bin23], 270., p. 32). Cho biết phương trình  $x^2 - (m+2)x + 2m - 1 = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ . Lập 1 hệ thức giữa  $x_1, x_2$  độc lập đối với  $m$ .

**46** ([Bin23], 271., p. 32). Tìm 2 số biết: (a) Tổng của chúng bằng 2, tích của chúng bằng  $-1$ . (b) Tổng của chúng bằng 1, tích của chúng bằng 5.

**47** ([Bin23], 272., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a)  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ . (b)  $2 \pm \sqrt{3}$ .

**48** ([Bin23], 273., p. 32). Chứng minh tồn tại 1 phương trình có các hệ số hữu tỷ nhận 1 trong các nghiệm là: (a)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ . (b)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ . (c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**49** ([Bin23], 274., p. 32). Lập phương trình bậc 2 có 2 nghiệm bằng: (a) Bình phương của 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 1 = 0$ . (b) Nghịch đảo của 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + mx - 2 = 0$ .

**50** ([Bin23], 275., p. 33). Xác định  $m, n$  sao cho 2 nghiệm của phương trình  $x^2 + mx + n = 0$  cũng là  $m, n$ .

**51** ([Bin23], 276., p. 33). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  khác nhau đôi một,  $c \neq 0$ . Biết 2 phương trình  $x^2 + ax + bc = 0, x^2 + bx + ca = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung. (a) Tìm các nghiệm còn lại của 2 phương trình. (b) Chứng minh các nghiệm còn lại đó là nghiệm của phương trình  $x^2 + cx + ab = 0$ .

**52** ([Bin23], 277., p. 33). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + dx + a = 0$ . Biết phương trình thứ nhất có 2 nghiệm  $m, n$ , phương trình thứ 2 có 2 nghiệm  $p, q$ . Chứng minh  $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 \geq 4$ .

**53** ([Bin23], 278., p. 33). Cho 2 phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, cx^2 + bx + a = 0$ . Tìm 1 hệ thức giữa 3 hệ số  $a, b, c$ , biết 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thứ nhất & 2 nghiệm  $x_3, x_4$  của phương trình thứ 2 thỏa mãn đẳng thức  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$ .

**54** ([Bin23], 279., p. 33). Cho phương trình  $x^2 + bx + c = 0$  có 2 nghiệm  $x_1, x_2$ , phương trình  $x^2 - b^2x + bc = 0$  có 2 nghiệm  $x_3, x_4$ . Biết  $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$ . Xác định  $b, c$ .

**55** ([Bin23], 280., p. 33). Tìm  $a, b \in \mathbb{R}$  sao cho 2 phương trình  $x^2 + ax + 6 = 0, x^2 + bx + 12 = 0$  có ít nhất 1 nghiệm chung &  $|a| + |b|$  nhỏ nhất.

**56** ([Bin23], 281., pp. 33-34). Gọi  $x_1, x_2$  là 2 nghiệm của phương trình  $x^2 - 6x + 1 = 0$ . Ký hiệu  $s_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (a) Tính  $s_1, s_2, s_3$ . (b) Tìm 1 hệ thức giữa  $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$ . (c) Chứng minh  $s_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . (d) Tìm số dư khi chia  $s_{50}$  cho 5.

## 4 Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc 2

Giải phương trình:

**57** ([Bin23], VD85, p. 34).  $x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$ .

**58** ([Bin23], VD86, p. 35).  $\sqrt{2}x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ .

59 ([Bin23], VD87, p. 35).  $(x+1)^4 = 2(x^4+1)$ .

60 ([Bin23], VD88, p. 36).  $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12) = 3x^2$ .

61 ([Bin23], VD89, p. 37).  $x^4 = 24x + 32$ .

62 ([Bin23], VD90, p. 37).  $x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$ .

63 ([Bin23], VD91, p. 38).  $|x-8|^5 + |x-9|^6 = 1$ .

64 ([Bin23], VD92, p. 38).  $|x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = 3$ .

65 ([Bin23], VD93, p. 39).  $\frac{2x}{3x^2 - x + 2} - \frac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$ .

66 ([Bin23], VD94, p. 40).  $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 12$ .

67 ([Bin23], VD95, p. 40).  $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48 \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ .

68 ([Bin23], VD96, p. 41).  $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$ .

69 ([Bin23], VD97, p. 41).  $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2$ .

70 ([Bin23], VD98, p. 42).  $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$ .

71 ([Bin23], VD99, p. 42). *Giải & biện luận phương trình  $a\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$  với tham số  $a$ .*

72 ([Bin23], VD100, p. 43). *Tìm các giá trị của  $m \in \mathbb{R}$  để tồn tại 2 số  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa  $4x - 3y = 7, 2x^2 + 5y^2 = m$ .*

Giải hệ phương trình:

73 ([Bin23], VD101, p. 44).  $x^2 + y^2 = 11, x + xy + y = 3 + 4\sqrt{2}$ .

74 ([Bin23], VD102, p. 44).  $x^2 + y + \frac{1}{4} = 0, x + y^2 + \frac{1}{4} = 0$ .

75 ([Bin23], VD103, p. 45).  $x^2 - xy + y^2 = 1, 2x^2 - 3xy + 4y^2 = 3$ .

76 ([Bin23], VD104, p. 46).  $x + y + z = 9, x^2 + y^2 + z^2 = 27$ .

77 ([Bin23], VD105, p. 46).  $x + y + z = a, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^3 + y^3 + z^3 = a^3$ .

78 ([Bin23], VD106, p. 47).  $x + \frac{1}{y} = 2, y + \frac{1}{z} = 2, z + \frac{1}{x} = 2$ .

## 4.1 Phương trình đại số bậc cao

Giải phương trình:

79 ([Bin23], 282., p. 47). (a)  $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ . (b)  $x^3 - 5x^2 + x + 7 = 0$ . (c)  $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 0$ . (d)  $x^3 - x - \sqrt{2} = 0$ . (e)  $(x-2)^2 + (x+1)^3 = 8x^3 - 1$ .

80 ([Bin23], 283., p. 48). (a)  $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ . (c)  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$ . (d)  $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$ . (e)  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ . (f)  $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ .

81 ([Bin23], 284., p. 48). (a)  $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$ . (c)  $x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$ .

82 ([Bin23], 285., p. 48).  $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$ .

83 ([Bin23], 286., p. 48). (a)  $x^4 + 9 = 5x(x^2 - 3)$ . (b)  $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$ .

84 ([Bin23], 287., p. 48). (a)  $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 3x + 4) = 14x^2$ . (b)  $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ .

85 ([Bin23], 288., p. 48). (a)  $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$ . (b)  $x^4 - 12x^2 + 16\sqrt{2}x - 12 = 0$ .

86 ([Bin23], 289., p. 48). (a)  $x(x+1)(x+2)(x+3) = 8$ . (b)  $x(x-1)(x+1)(x+2) = 3$ . (c)  $(x+2)(x+3)(x-7)(x-8) = 144$ . (d)  $(x+5)(x+6)(x+8)(x+9) = 40$ . (e)  $(4x+3)^2(x+1)(2x+1) = 810$ . (f)  $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35$ .

87 ([Bin23], 290., p. 48). (a)  $4(x^2 - x + 1)^3 = 27(x^2 - x)^2$ . (b)  $3(x+5)(x+6)(x+7) = 8x$ .

**88** ([Bin23], 291., p. 48). (a)  $(x-2)^3 + (x-4)^3 = 8$ . (b)  $(x+2)^4 + (x+4)^4 = 82$ . (c)  $(x+2)^4 + (x+8)^4 = 272$ . (d)  $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$ .

**89** ([Bin23], 292., p. 48). (a)  $(x^2-6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$ . (b)  $x^4 + (x-1)(3x^2+2x-2) = 0$ . (c)  $x^4 + (x+1)(5x^2-6x-6) = 0$ . (d)  $(x^2+1)^2 + (x+2)(3x^2-4x-5) = 0$ . (e)  $x^2(x-1)^2 + x(x^2-1) = 2(x+1)^2$ .

**90** ([Bin23], 293., p. 48).  $x^5 + x^2 + 2x + 2 = 0$ .

**91** ([Bin23], 294., p. 49). (a)  $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$ . (b)  $x^4 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$ . (c)  $x^4 = 2x^2 + 8x = 3$ . (d)  $(x^2-16)^2 = 16x+1$ . (e)  $(x^2-a^2)^2 = 4ax+1$ . (f)  $x^4 = 4x-3$ . (g)  $x^4 = 2x^2-12x+8$ .

**92** ([Bin23], 295., p. 49). (a)  $x^4 = 4x+1$ . (b)  $x^4 = 8x+7$ . (c)  $x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$ . (d)  $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$ .

**93** ([Bin23], 296., p. 49).  $(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$ .

**94** ([Bin23], 297., p. 49).  $(x-\sqrt{2})^3 + (x+\sqrt{3})^3 + (\sqrt{2}-\sqrt{3}-2x)^3 = 0$ .

**95** ([Bin23], 298., p. 49).  $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$  với 2 tham số  $a, b$ .

**96** ([Bin23], 299., p. 49).  $(a+b+x)^3 - 4(a^3+b^3+x^3) - 12abx = 0$  với 2 tham số  $a, b$ .

**97** ([Bin23], 300., p. 49). Giải phương trình  $x^3 - (m^2-m+7)x - 3(m^2-m-2) = 0$  biết  $-1$  là 1 nghiệm của phương trình.

**98** ([Bin23], 301., p. 49). Giải phương trình  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  biết  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**99** ([Bin23], 302., p. 49). Giải phương trình  $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0$  biết  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $1 + \sqrt{2}$  là 1 nghiệm của phương trình.

**100** ([Bin23], 303., p. 49). Giải phương trình  $4x^4 - 11x^2 + 9x + m = 0$  biết tồn tại 2 nghiệm  $x_1, x_2$  của phương trình thỏa  $x_1 + x_2 = -1$ ,  $x_1 > x_2$ .

**101** ([Bin23], 304., p. 49). (a) Chứng minh nếu  $x = \frac{1}{2} \left( a - \frac{1}{a} \right)$  thì  $4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left( a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$ . (b) Giải phương trình  $4x^3 + 3x = \frac{3}{4}$ . (c) Giải phương trình  $4x^3 + 3x = \frac{4}{3}$ .

**102** ([Bin23], 305., pp. 49-50, định lý Viète cho phương trình bậc 3). Chứng minh: (a) Nếu phương trình bậc 3  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,  $a \neq 0$  có 3 nghiệm thực  $x_1, x_2, x_3$  thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases}$$

(b) Tìm các nghiệm của phương trình  $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$  rồi kiểm nghiệm lại chúng thỏa mãn định lý Viète cho phương trình bậc 3.

## 4.2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Giải phương trình:

**103** ([Bin23], 306., p. 50). (a)  $\frac{1}{x^2-3x+3} + \frac{2}{x^2-3x+4} = \frac{6}{x^2-3x+5}$ . (b)  $\frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{1}{x^2-2x+3} = \frac{9}{2(x^2-2x+4)}$ . (c)  $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$ . (d)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$ .

**104** ([Bin23], 307., p. 50). (a)  $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$ . (b)  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15$ . (c)  $\frac{x^4}{2x^2+1} + \frac{2x^2+1}{x^4} = 2$ .

**105** ([Bin23], 308., p. 50). (a)  $4 \left( x^3 + \frac{1}{x^3} \right) = 13 \left( x + \frac{1}{x} \right)$ . (b)  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 13 \left( x + \frac{1}{x} \right)$ .

**106** ([Bin23], 309., p. 50). (a)  $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$ . (b)  $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$ . (b)  $\frac{2x}{2x^2-5x+3} + \frac{13x}{2x^2+x+3} = 6$ . (c)  $\frac{3x}{x^2-3x+1} + \frac{7x}{x^2+x+1} = -4$ .

**107** ([Bin23], 310., p. 51). (a)  $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}$ . (b)  $\frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5} - \frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{4}$ .

**108** ([Bin23], 311., p. 51). (a)  $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$ . (b)  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$ .

- 109 ([Bin23], 312., p. 51). (a)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$ . (b)  $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$ .
- 110 ([Bin23], 313., p. 51). (a)  $\frac{x(3-x)}{x+1} \left(x + \frac{3-x}{x+1}\right) = 2$ . (b)  $\frac{x(5-x)}{x+1} \left(x + \frac{5-x}{x+1}\right) = 6$ . (c)  $x \cdot \frac{8-x}{x-1} \left(x - \frac{8-x}{x-1}\right) = 15$ .
- 111 ([Bin23], 314., p. 51).  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$ .
- 112 ([Bin23], 315., p. 51).  $\frac{(1995-x)^2 + (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2}{(1995-x)^2 - (1995-x)(x-1996) + (x-1996)^2} = \frac{19}{49}$ .

### 4.3 Phương trình vô tỷ

Giải phương trình:

- 113 ([Bin23], 316., p. 51). (a)  $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$ . (b)  $x^2 + \sqrt{x+72} = 72$ .
- 114 ([Bin23], 317., p. 51). (a)  $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ . (b)  $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$ .
- 115 ([Bin23], 318., p. 51). (a)  $\sqrt{x^2 - \frac{7}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{7}{x^2}} = x$ . (b)  $\sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = x$ .
- 116 ([Bin23], 319., p. 51).  $(x-1)(x+3) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} = 8$ .
- 117 ([Bin23], 320., p. 51).  $\sqrt{x-2a+16} - 2\sqrt{x-a+4} + \sqrt{x} = 0$  với tham số  $a$ .
- 118 ([Bin23], 321., p. 52).  $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{a}$  với tham số  $a$ .
- 119 ([Bin23], 322., p. 52). Tìm  $x, y \in \mathbb{Q}, x > y \geq 0$  thỏa mãn phương trình  $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ .
- 120 ([Bin23], 323., p. 52). Cho  $(x + \sqrt{x^2+3})(y + \sqrt{y^2+3}) = 3$ . Tính giá trị biểu thức  $A = x + y$ .

### 4.4 Miscellaneous

Giải hệ phương trình:

- 121 ([Bin23], 324., p. 52). (a)  $x^2 + 4y^2 + x = 4xy + 2y + 2, 4x^2 + 4xy + y^2 = 2x + y + 56$ . (b)  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{26}{5}, xy = 6$ . (c)  $3x + 5y = 9 + 2xy, 2x + 3y = 10 - xy$ . (d)  $x^2 - 4xy + y^2 = 1, y^2 - 3xy = 4$ .
- 122 ([Bin23], 325., p. 52). (a)  $x + y = 1, x^2 + y^2 = 41$ . (b)  $x - y = 1, x^2 - xy + y^2 = 7$ . (c)  $x - y = 3, x^2 + xy + y^2 = 21$ . (d)  $x - y = 2, x^3 - y^3 = 26$ . (e)  $x - y = a, x^3 - y^3 = 19a^3$  với  $a > 0$ .
- 123 ([Bin23], 326., p. 52). (a)  $x^2 + 2y + 1 = 0, y^2 + 2x + 1 = 0$ . (b)  $x^2 - 3x = 2y, y^2 - 3y = 2x$ . (c)  $2x = y(1-x^2), 2y = x(1-y^2)$ .
- 124 ([Bin23], 327., p. 52). (a)  $x^2 + (x+y)^2 = 17, y^2 + (x+y)^2 = 25$ . (b)  $x^2 + 2xy - 2y^2 = 1, 2x^2 - xy + 3y^2 = 4$ .
- 125 ([Bin23], 328., p. 52). (a)  $2x^2 - y^2 = 1, xy + x^2 = 2$ . (b)  $x^2 + y^2 = 5, x + y - xy = 1$ .
- 126 ([Bin23], 329., p. 52). (a)  $x + y = 4, x^4 + y^4 = 82$ . (b)  $x + y + xy = 8, x^4 + y^4 = 32$ .
- 127 ([Bin23], 330., p. 52). (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 12, xy + yz + zx = 12$ . (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3, x + y + z = 3$ . (c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .
- 128 ([Bin23], 331., p. 53). (a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3}, \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{4}, \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$ . (b)  $x + y + z = 8, xy + yz + zx = 20, xyz = 16$ . (c)  $x + xy + y = 1, y + yz + z = 3, z + zx + x = 7$ . (d)  $x - \frac{1}{y} = 1, y - \frac{1}{z} = 1, z - \frac{1}{x} = 1$ .
- 129 ([Bin23], 332., p. 53).  $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \frac{4z^2}{1+4z^2} = x$ .
- 130 ([Bin23], 333., p. 53).  $\sqrt{x}(1+y) = 2y, \sqrt{y}(1+z) = 2z, \sqrt{z}(1+x) = 2x$ .
- 131 ([Bin23], 334., p. 53). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $x^3 - y^2 - y = \frac{1}{3}, y^3 - z^2 - z = \frac{1}{3}, z^2 - x^2 - x = \frac{1}{3}$ . (a) Chứng minh  $x, y, z > 0$ . (b) Chứng minh  $x = y = z$ . (c) Giải hệ phương trình.
- 132 ([Bin23], 335., p. 53). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $x^2 = y + 1, y^2 = z + 1, z^2 = x + 1$ . (a) Chứng minh  $xyz \neq 0$ . (b) Chứng minh  $x, y, z$  cùng dấu. (c) Chứng minh  $x = y = z$ . (d) Giải hệ phương trình.
- 133 ([Bin23], 336., p. 53). Tìm 4 số thực dương sao cho mỗi số bằng bình phương của tổng 3 số còn lại.
- 134 ([Bin23], 337., p. 53). Tìm 4 số biết nếu cộng tích của 3 số bất kỳ với số còn lại thì mỗi kết quả đều bằng 2.

## 5 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

## 6 Miscellaneous

### Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.