Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 11 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.tex.
- *A substitution & its application to prove inequalities – 1 Cách Đổi Biến & Ứng Dụng Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.tex.

Mục lục

1 Introduction to Inequality 1
1.1 Properties on the number line $\mathbb{R}$ 2

2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz 2

3 Miscellaneous 2

4 Introduction 3

5 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz 3

6 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị 4

7 Uncategorized 6

8 Miscellaneous 7

Tài liệu 7

1 Introduction to Inequality

Definition 1 (Inequality)**.** *"In mathematics, an* inequality *is a relation which makes a non-equal comparison between 2 numbers or other mathematical expressions.*

It is used most often to compare 2 numbers on the number line by the size. There are several different notations used to represent different kinds of inequalities: The notation $a < b$ means that a is *less than* b. The notation $a > b$ means that a is *greater than* b. In either case, a is not equal to b. These relations are known as *strict inequalities*, meaning that a is strictly less than or strictly greater than b. Equivalence is excluded.

In contrast to strict inequalities, there are 2 types of inequality relations that are not strict: The notation $a \le b$ means that a is *less than or equal to* b (or, equivalently, at most b, or not greater than b). The notation $a \ge b$ means that a is *greater than or equal to* b (or, equivalently, at least b, or not less than b).

The relation *not great than* can also be represented by $a \ngtr b$, the symbol for "greater than" bisected by a slash, "not". The same is true for *not less than* & $a \nless b$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

The notation $a \neq b$ means that a is not equal to b; this *inequation* sometimes is considered a form of strict inequality. It does not say that one is greater than the other; it does not even require a, b to be member of an ordered set.

In engineering science, less formal use of the notation is to state that 1 quantity is "much greater" than another, normally by several orders of magnitude. The notation $a \ll b$ means that a is *much less than* b. The notation $a \gg b$ means that a is *much greater than* b. This implies that the lesser value can be neglected with little effect on the accuracy of an approximation (e.g., the case of ultrarelativistic limit in physics).

In all of the cases above, any 2 symbols mirroring each other are symmetrical; $a < b$ & $b > a$ are equivalent, etc." – Wikipedia/inequality (mathematics)

1.1 Properties on the number line $\mathbb{R}$

2 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

1 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b \geq 2\sqrt{ab}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a, b \geq 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

2. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

3 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ a, b, c \geq 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

4. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c \geq 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

5 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \ i.e., \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \forall a_i \in \mathbb{R}, \ a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

6. *Với bộ $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \ i.e., \ m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star,$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

3 Miscellaneous

7 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5)**.** *Chứng minh: $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

8 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5)**.** *Chứng minh: $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, hay có thể viết dưới dạng $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

9 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6)**.** *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

10 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6)**.** *Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, hay có thể viết dưới dạng $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

11 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_n}, \ i.e., \ \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right), \ \forall a_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \le \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

12 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a,b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

13 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a,b,c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

14 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a_1+\cdots+a_n} \le \sqrt{a_1}+\cdots+\sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1+\cdots+a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1,\ldots,n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n\sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i \ge 0,\ \forall i = 1,\ldots,n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

15 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

16 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^4+b^4 \ge ab(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

4 Introduction

The general structure of a problem on inequality is given by:

Problem 1. *Let* x_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ *satisfy the condition* $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ *&* $C^\star(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. *Prove that: (a)* $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0$. *(b)* $B(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. *(c) Find the minimum & maximum of* $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *&* $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

17. *Cho các biến* x_i, $\forall i = 1,2,\ldots,n$ *thỏa mãn điều kiện* $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$. *Chứng minh: (a)* $A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le 0$. *(b)* $B(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$. *(c) Tìm* GTNN *&* GTLN *của biểu thức* $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *&* $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các *biểu thức cần tìm cực trị* A,B & đặc biệt là các *đẳng thức điều kiện* $C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 0$ & *bất đẳng thức điều kiện* $C^\star(x_1,x_2,\ldots,x_n) \ge 0$.

5 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality: $x^2 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$.

Ý nghĩa hình học: Diện tích hình vuông thì không âm. Diện tích của hình vuông bằng 0 $\Leftrightarrow$ hình vuông đó suy biến thành 1 điểm. Cụ thể, công thức tính diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$. Khi đó $S = a^2 \ge 0$, $\forall a \ge 0$ & $S = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

18. *Chứng minh:*

$$4ab \le 2(|ab|+ab) \le (a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2 \le 2(a^2+b^2),\ \forall a,b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1st chứng minh. (a) $4ab \le 2(|ab|+ab) \Leftrightarrow 2ab \le 2|ab| \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (b) $2(|ab|+ab) \le (a+b)^2 \Leftrightarrow 2|ab|+2ab \le a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow 2|ab| \le a^2+b^2 \Leftrightarrow (|a|-|b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. (c) $(a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \Leftrightarrow ab \le |ab|$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow ab \ge 0$. (d) $(|a|+|b|)^2 \le 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow |a|^2+2|a||b|+|b|^2 \le 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow (|a|-|b|)^2 \ge 0$ luôn đúng $\forall a,b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow |a| = |b|$. □

2nd chứng minh. (d) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số a^2 & b^2: $a^2+b^2 \ge 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$, □

Lưu ý 1. *Trị tuyệt đối của 1 số thực không nhỏ hơn số thực đó, i.e.,* $|x| \ge x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $|x| = x \Leftrightarrow x \ge 0$.

19. *Bất đẳng thức* $(a+b)^2 \ge 4|ab|$ *đúng khi nào?*

20 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab},\ \forall a,b \in \mathbb{R},\ a,b \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof. $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a,b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

2nd proof. $(a+b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow (a+b)^2 \ge (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$ (vì $a, b \ge 0$ nên $a+b \ge 0$ & $2\sqrt{ab} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 2. *Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:* $\boxed{0 \le a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$. *Phiên bản chặt/ngặt (strict) là:* $\boxed{0 \le a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R}}$. *Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.*

3rd proof. Đặt $x \coloneqq \sqrt{a}, y \coloneqq \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \ge 0$. Có $a+b-2\sqrt{ab} = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab}$. "=" $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$. □

Lưu ý 3. *Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:* $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0}$.

21. *Với m, n, p nào thì bất đẳng thức $ma + nb \ge p\sqrt{ab}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b \ge 0$. (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

22 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\boxed{a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc},\ \ \forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \ge 0.}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

23. *Với m, n, p, q nào thì bất đẳng thức $ma + nb + pc \ge q\sqrt[3]{abc}$ luôn đúng: (a) $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a, b, c \ge 0$. (b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?*

24 (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho n số không âm)**.** *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},\ \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \ge 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

25. *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$. Với bộ $(m, m_1, m_2, \ldots, m_n)$ nào thì bất đẳng thức:*

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \ge m\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},\ \text{i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \cdots + m_n a_n \ge m\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

đúng với: (a) $\forall a_i \in \mathbb{R},\ a_i \ge 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. (b) $\forall a_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

6 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

26 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 9, p. 23)**.** *Cho $x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. Tìm* GTNN *của biểu thức $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.*

1st proof. Vì $x, y > 0$ nên $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, được: $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \ge 4$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\sqrt{x}, \sqrt{y}$, được: $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \ge 2\sqrt{4} = 4$. "=" $\Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. □

2nd proof. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ & $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 4.$$

"=" $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$ & $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$. Vậy $\min_{x, y \in \mathbb{R},\, x, y > 0} A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$. □

Nhận xét 1. *"Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã "làm trội" $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}$ bằng cách vận dụng $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ để dùng điều kiện tổng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$, từ đó được $\sqrt{xy} \ge 4$. Lần thứ 2 ta đã "làm giảm" tổng $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ để dùng kết quả $\sqrt{xy} \ge 4$. Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài."* – [**Tuyen_Toan_9**]

Lưu ý 4. *TXĐ của A chỉ là* $D_A \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y \ge 0\}$*, nhưng để điều kiện* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ *có nghĩa thì cần thêm* $x \ne 0$*,* $y \ne 0$*, nên ta cần xét A trên tập hợp* $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x,y > 0,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\} \subset D_A$*. Hơn nữa, nếu viết* GTNN *của biểu thức* $A = A(x,y)$ *trên tập* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ *1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là* $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0} A(x,y)$ *hoặc* $\min_{(x,y)\in D} A(x,y)$ *hoặc* $\min_{x,y\in\mathbb{R},\,x,y>0} A$ *như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là* $\min A$ *như trong 1st proof.*

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

27. *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m > 0$*,* $m \in \mathbb{R}$ *cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

28. *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m > 0$*,* $a, b, m \in \mathbb{R}$ *cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

29. *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0$*,* $a, b, c, m \in \mathbb{R}$ *cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

30. *Cho* $n \in \mathbb{N}^\star$*,* $x_i \in \mathbb{R}$*,* $x_i > 0$*,* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$*, thỏa mãn điều kiện* $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0$*,* $a_i, m \in \mathbb{R}$*,* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$*, cho trước. Có thể tìm* GTNN *&* GTLN *của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.*

31 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức* $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$*.*

Giải. ĐKXĐ: $\frac{5}{3} \le x \le \frac{7}{3}$. $A^2 = 3x - 5 + 7 - 3x + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \le 2 + (3x - 5 + 7 - 3x) = 4 \Rightarrow A \le 2$ ($A \ge 0$ vì $\sqrt{3x-5} \ge 0$, $\sqrt{7-3x} \ge 0$). "=" $\Leftrightarrow 3x - 5 = 7 - 3x \Leftrightarrow x = 2$. Mặt khác, $A^2 = 2 + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \ge 2$. "=" $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. Vậy $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$ & $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$. □

32 (Mở rộng [**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 10, p. 24)**.** *Biện luận theo các tham số* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *để tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức* $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$*.*

33 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 11, p. 25)**.** *Tìm* GTLN *&* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{\sqrt{x-9}}{5x}$*.*

34 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 12, p. 25)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{3x^4 + 16}{x^3}$*. A có* GTLN *không?*

35 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 13, p. 26)**.** *Cho* $0 < x < 2$*, tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{9x}{2-x} + \dfrac{2}{x}$*.*

36 ([**Tuyen_Toan_9**], Ví dụ 14, p. 27)**.** *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$*,* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = 2$*. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y}$*.*

37 ([**Tuyen_Toan_9**], 63., p. 28)**.** *Cho* $a, x, y \in \mathbb{R}$*,* $a, x, y > 0$*,* $x + y = 2a$*. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$*.*

38 ([**Tuyen_Toan_9**], 64., p. 28)**.** *Tìm* GTLN *của biểu thức* $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$*.*

39 ([**Tuyen_Toan_9**], 65., p. 28)**.** *Cho* $x + y = 15$*, tìm* GTNN*,* GTLN *của biểu thức* $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$*.*

40 ([**Tuyen_Toan_9**], 66., p. 28)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{2x^2 - 6x + 5}{2x}$ *với* $x \in \mathbb{R}$*,* $x > 0$*.*

41 ([**Tuyen_Toan_9**], 67., p. 28)**.** *Cho* $a, b, x \in \mathbb{R}$*,* $a, b, x > 0$*. Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$*.*

42 ([**Tuyen_Toan_9**], 68., p. 28)**.** *Cho* $x \in \mathbb{R}$*,* $x \ge 0$*, tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{2(x+1)}$*.*

43 ([**Tuyen_Toan_9**], 69., p. 28)**.** *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x + 6\sqrt{x} + 36}{\sqrt{x} + 3}$*.*

44 ([**Tuyen_Toan_9**], 70., p. 28)**.** *Cho* $x \in \mathbb{R}$*,* $x > 0$*, tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^3 + 2000}{x}$*.*

45 ([**Tuyen_Toan_9**], 71., p. 28)**.** *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y > 0$ *&* $x + y \ge 6$*. Tìm* GTNN *của biểu thức:* $A = 5x + 3y + \dfrac{12}{x} + \dfrac{16}{y}$*.*

46 ([**Tuyen_Toan_9**], 72., p. 29)**.** *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x > y$ *&* $xy = 5$*, tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x^2 + 1.2xy + y^2}{x - y}$*.*

47 ([**Tuyen_Toan_9**], 73., p. 29)**.** *Cho* $x \in \mathbb{R}$*,* $x > 1$*, tìm* GTLN *của biểu thức* $A = 4x + \dfrac{25}{x-1}$*.*

48 ([**Tuyen_Toan_9**], 74., p. 29)**.** *Cho* $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$, *tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{3}{1-x} + \dfrac{4}{x}$.

49 ([**Tuyen_Toan_9**], 75., p. 29)**.** *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z \geq 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = a$. *(a) Tìm* GTLN *của biểu thức* $A = xy + yz + zx$. *(b) Tìm* GTNN *của biểu thức* $B = x^2 + y^2 + z^2$.

50 ([**Tuyen_Toan_9**], 76., p. 29)**.** *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z \geq 12$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{z}} + \dfrac{z}{\sqrt{x}}$.

51 ([**Tuyen_Toan_9**], 77., p. 29)**.** *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y + z = a$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)\left(1 + \dfrac{a}{y}\right)\left(1 + \dfrac{a}{z}\right)$.

52 ([**Tuyen_Toan_9**], 78., p. 29)**.** *Cho* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $a + b + c = 1$. *Tìm* GTNN *của biểu thức* $A = \dfrac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

53 ([**Tuyen_Toan_9**], 79., p. 29)**.** *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện* $x + y = 1$ *&* $x > 0$. *Tìm* GTLN *của biểu thức* $B = x^2y^3$.

54 ([DCA20], Ví dụ 1.5.1, p. 73, TS PTNK ĐHQG Tp HCM 2006)**.** *Cho* $x, y \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $x+y = 2$. *Chứng minh* $xy(x^2+y^2) \leq 2$.

1st chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ ở (1), có: $xy(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2+y^2) \leq \frac{1}{8}[2xy + (x^2+y^2)]^2 = \frac{1}{8}(x+y)^4 = 2$. "=" $\Leftrightarrow x + y = 2$ & $2xy = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x + y = 2$ & $(x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

2nd chứng minh. Sử dụng *kỹ thuật đồng bậc*, cần chứng minh $8xy(x^2+y^2) \leq (x+y)^4$ (cả 2 vế đều là bậc 4). Bất đẳng thức này đúng vì $8xy(x^2+y^2) \leq (x+y)^4 \Leftrightarrow 8xy(x^2+y^2) \leq x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \Leftrightarrow x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^4 \geq 0$ hiển nhiên đúng $\forall x, y \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow x = y$ & $x + y = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$. □

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau:

55. *Cho* $x, y, m \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* $x + y = m$. *Biện luận theo tham số* m *để tìm* GTLN *&* GTNN *của: (a)* $A = xy(x^2 + y^2)$. *(b)* $B = xy(x^3 + y^3)$. *(c)* $B = xy(x^4 + y^4)$. *(d*⋆*)* $x^ay^a(x^b + y^b)$ *với* $a, b \in \mathbb{Z}$.

7 Uncategorized

56 ([Sơn+21], Bổ đề 1.1, p. 5)**.** *Chứng minh:* $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b$. □

57 ([Sơn+21], Bổ đề 1.2, p. 5)**.** *Chứng minh:* $3(ab + bc + ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, *hay có thể viết dưới dạng* $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$, $3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$. "=" $\Leftrightarrow a = b = c$. □

58 ([Sơn+21], Bổ đề 1.3, p. 6)**.** *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, $\forall a, b > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$, $\forall a, b > 0$. "=" $\Leftrightarrow a = b > 0$. □

59 ([Sơn+21], Bổ đề 1.4, p. 6)**.** *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$, *hay có thể viết dưới dạng* $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, $\forall a, b, c > 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

60 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho n số)**.** *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_n},\ i.e.,\ \frac{1}{a_1 + \cdots + a_n} \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i},\ i.e.,\ \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i},\ \forall a_i > 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

61 ([Sơn+21], Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$, $\forall a, b \geq 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

62 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a+b+c} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{3(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

63 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho n số)**.** *Chứng minh:* $\sqrt{a_1 + \cdots + a_n} \le \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n} \le \sqrt{n(a_1 + \cdots + a_n)}$, $\forall a_i \ge 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$, *hay có thể được viết gọn lại như sau:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \le \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \le \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i},\ \forall a_i \ge 0,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

64 ([Sơn+21], Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^3 + b^3 \ge ab(a+b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \ge 0$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Hint. $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \ge 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \ge 0$. "=" $\Leftrightarrow a = \pm b$. □

65 ([Sơn+21], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7)**.** *Chứng minh:* $a^4 + b^4 \ge ab(a^2 + b^2)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

8 Miscellaneous

Tài liệu

[DCA20] Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, and Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 280.

[Sơn+21] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 143.