

# Problem & Solution: Circle – Bài Tập & Lời Giải: Đường Tròn

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 11 tháng 11 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set Q of circles \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf).<sup>1</sup> [TeX]<sup>2</sup>.

## Mục lục

1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn . . . . .	2
2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây . . . . .	7
3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn . . . . .	8
4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn . . . . .	12
5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau . . . . .	16
6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác . . . . .	17
7 Đường Tròn Bàng Tiếp Tam Giác . . . . .	18
8 Đường Tròn & Phép Vị Tự . . . . .	19
9 Dựng Hình . . . . .	19
10 Toán Cực Trị . . . . .	20
11 Liên Hệ Giữa Cung & Dây . . . . .	21
12 Góc Nội Tiếp . . . . .	22
13 Góc Tạo Bởi Tia Tiếp Tuyến & Dây Cung . . . . .	23
14 Góc Có Đỉnh Ở Bên Trong, Bên Ngoài Đường Tròn . . . . .	23
15 Cung Chứa Góc . . . . .	24
16 Tứ Giác Nội Tiếp . . . . .	24
17 Đường Tròn Ngoại Tiếp, Nội Tiếp Đa Giác . . . . .	27
18 Độ Dài Đường Tròn . . . . .	28
19 Diện Tích Hình Tròn . . . . .	28
20 Quỹ Tích . . . . .	29
21 Dựng Hình . . . . .	30
22 Toán Cực Trị . . . . .	31

---

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.  
<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/circle/problem/NQBH\\_circle\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf).  
<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/rational/problem/NQBH\\_circle\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex).

# 1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

[1]  $(O, R) := \{M | OM = R\}$ . [2] Tâm của đường tròn là *tâm đối xứng* của đường tròn đó. Mọi đường thẳng đi qua tâm là *trục đối xứng* (& chứa 1 đường kính) của đường tròn. [3] Qua 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng, xác định duy nhất 1 đường tròn. Tâm của đường tròn là giao của 3 đường trung trực 3 cạnh  $\triangle ABC$ . [4]  $A \in (O, R) \Leftrightarrow OA = R$ .  $A$  nằm ngoài  $(O, R) \Leftrightarrow OA > R$ .  $A$  nằm trong  $(O, R) \Leftrightarrow OA < R$ . [5] Đường kính là dây lớn nhất. Cho  $(O, R)$ , đường kính  $AB = 2R$ , dây  $CD < 2R$ ,  $AB \cap CD = \{M\}$ :  $AB \perp CD \Leftrightarrow MC = MD \Leftrightarrow \triangle ACD$  cân  $\Leftrightarrow AC = AD \Leftrightarrow \triangle BCD$  cân  $\Leftrightarrow BC = BD$ .

1 ([BBN23], p. 99). *Tại sao các nan hoa của bánh xe đạp dài bằng nhau?*

*Giải.* Vì bánh xe đạp có dạng đường tròn nên các nan hoa của nó dài bằng nhau & cùng bằng bán kính đường tròn đó. □

2 ([BBN23], H1, p. 101). *Có bao nhiêu đường tròn bán kính  $R$  đi qua 1 điểm cho trước? Tâm các đường tròn đó nằm ở đâu?*

*1st giải.* Có vô số đường tròn bán kính  $R$  đi qua 1 điểm cho trước. Tâm các đường tròn này nằm trên đường tròn có tâm là điểm đã cho & bán kính  $R$ . □

*2nd giải.* điểm cho trước là  $A$ .  $A \in (O, R) \Leftrightarrow OA = R$ , nên tập hợp tâm các đường tròn bán kính  $R$  đi qua  $A$  là  $\{O \in \mathbb{R}^2 | OA = R\} = (A, R)$ , suy ra có vô số đường tròn bán kính  $R$  đi qua  $A$ . □

3 ([BBN23], H2, p. 101). *Qua 3 điểm bất kỳ có luôn vẽ được 1 đường tròn?*

*Giải.* Luôn tồn tại duy nhất 1 đường tròn đi qua 3 điểm không thẳng hàng bất kỳ (i.e., đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi 3 điểm đó) nhưng không tồn tại đường tròn nào đi qua 3 điểm phân biệt thẳng hàng bất kỳ. □

4 ([BBN23], H3, p. 101). *Vẽ đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm đường kính.*

*Giải.*  $M$  là trung điểm  $AB$ . Vẽ  $(M, MA) = (M, \frac{1}{2}AB)$ . □

5 ([BBN23], H4, p. 101). *Tính đường kính các đường tròn  $(O; 2R), (O; aR), \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ .*

*Giải.* Đường kính các đường tròn  $(O; 2R), (O; aR)$  lần lượt là  $4R, 2aR, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ . □

6 ([BBN23], H5, p. 101). D/S? (a) Dây vuông góc với đường kính thì bị đường kính chia làm đôi. (b) Dây vuông góc với đường kính thì chia đôi đường kính. (c) Đường kính đi qua trung điểm 1 dây thì vuông góc với dây ấy. (d) Đường trung trực của 1 dây là trục đối xứng của đường tròn.

*Giải.* (a) Đ. (b) S. Với đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ , dây  $CD$  khác đường kính,  $AB \perp CD$ . Khi đó  $CD$  chia  $AB$  thành 2 phần không bằng nhau. (c) S. Với đường tròn  $(O, R)$ , 2 đường kính  $AB, CD$  không vuông góc nhau nhưng chúng vẫn đi qua trung điểm  $O$  của nhau. (d) Đ. □

7 ([BBN23], VD1, p. 101). *Chứng minh: (a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Nếu 1 tam giác có 1 cạnh là đường kính đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông (đường kính là cạnh huyền). (c) Các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn.*

*Giải.* (a) Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .  $O$  là trung điểm  $BC$ .  $AO$  là trung tuyến ứng với cạnh huyền  $BC$  nên  $OA = OB = OC$ , suy ra  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Xét  $\triangle ABC$  nội tiếp  $(O, R)$  đường kính  $BC = 2R$ . Có  $OA = OB = OC = R$ . Vì  $AO$  là trung tuyến ứng với cạnh  $BC$ ,  $AO = \frac{1}{2}BC$  nên  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . (c) Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Từ (a),  $(M, \frac{1}{2}BC)$  là đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , nên  $A \in (M, \frac{1}{2}BC)$ , suy ra  $\{A \in \mathbb{R}^2 | \triangle ABC \text{ vuông tại } A\} \subset (M, \frac{1}{2}BC)$ , i.e., các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Xét hình chữ nhật  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm 2 đường chéo  $AC, BD$ . Vì mọi hình chữ nhật có 2 đường chéo bằng nhau & cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên  $OA = OB = OC = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$ , suy ra  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O, \frac{1}{2}AC)$ , i.e., mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn có tâm là giao điểm 2 đường chéo (trung điểm của chúng) & đường kính là độ dài đường chéo của hình chữ nhật đó. □

8 ([BBN23], VD2, p. 102). *Khi nào thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm: (a) Trong tam giác? (b) Trên cạnh tam giác? (c) Ngoài tam giác?*

*Giải.* (a) Giả sử tồn tại điểm  $O$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $OA = OB = OC$ .  $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$  cân tại  $O$  nên  $\angle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB)$ ,  $\angle CAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC)$ , nên  $\angle A = \angle BAO + \angle CAO = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle AOB - \angle AOC) = \frac{1}{2}\angle BOC < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$  vì  $\angle BOC$  là góc trong  $\triangle BOC$  nên  $\angle BOC < 180^\circ$ . Tương tự, ta thu được  $\angle B < 90^\circ, \angle C < 90^\circ$  nên  $\triangle ABC$  nhọn. Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong tam giác khi tam giác đó nhọn. □

**Định lý 1.** Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . (a)  $O$  nằm trong  $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$  nhọn. (b)  $O$  nằm trên cạnh  $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông. (c)  $O$  nằm ngoài  $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$  tù.

**9** ([BBN23], VD3, p. 102). Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 13$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CA = 12$  cm. Xác định tâm  $\mathcal{O}$  tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

*Giải.* Có  $AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2 = AB^2$ , áp dụng định lý Pythagore đảo, suy ra  $\Delta ABC$  vuông tại  $C$ , nên tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là trung điểm  $O$  của cạnh  $AB$ , bán kính  $R = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2} = 6.5$  cm.  $\square$

**10** ([BBN23], VD4, p. 103). Cho đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $M$  bất kỳ. Chứng minh  $M$  nằm trong đường tròn khi & chỉ khi  $\angle AMB > 90^\circ$ .

**11** ([BBN23], VD5, p. 103). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 2 điểm  $A, B$  nằm trong đường tròn. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn  $(C)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  & nằm hoàn toàn bên trong  $(O)$ .

**12** ([BBN23], VD6, p. 103). Có 1 miếng bìa hình tròn bị khoét đi 1 lỗ thủng cũng hình tròn. Dùng kéo cắt (theo 1 đường thẳng) để chia đôi miếng bìa đó.

*Giải.* Vì mọi đường thẳng đi qua tâm của 1 đường tròn đều là trục đối xứng của đường tròn đó, nên đường thẳng đi qua tâm của 2 hình tròn chính là trục đối xứng của miếng bìa. Cắt theo trục đối xứng đó sẽ chia đôi miếng bìa đó. Cụ thể, cho đường tròn  $(O_2)$  nằm trong đường tròn  $(O_1)$ , cắt theo đường thẳng  $O_1O_2$  nối tâm 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$ .  $\square$

**13** ([BBN23], VD7, p. 104). Cho đoạn thẳng  $AB$ , điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$ . dựng 2 đường tròn đường kính  $AB$  & đường kính  $BM$ . 1 đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AB$  tại  $N$  cắt đường tròn đường kính  $AB$  tại  $E, F$ , cắt đường tròn đường kính  $BM$  tại  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $EP = FQ$ . (b)  $\angle BMP > \angle BAE$ .

*Giải.* Gọi  $C, D$  lần lượt là trung điểm  $AB, BM$ .  $AB$  là trục đối xứng của  $(C, AC), (D, BD)$ . Vì  $E, F \in (C, AC), EF \perp AB$  nên  $NE = NF$  (1). Vì  $P, Q \in (D, BD), PQ \in (D, BD)$  nên  $NP = NQ$  (2). Từ (1) & (2) có  $EP = NE - NP = NF - NQ = FQ$ . (b)  $\Delta ABE$  nội tiếp  $(C, AC)$  có  $AB$  là đường kính nên  $\Delta ABE$  vuông tại  $E$ , suy ra  $\angle BAE = 90^\circ - \angle ABE$  (3).  $\Delta BMP$  nội tiếp  $(D, BD)$  có  $BM$  là đường kính nên  $\Delta BMP$  vuông tại  $P$ , suy ra  $\angle BMP = 90^\circ - \angle MBP$  (4). Trong  $\Delta BEN$ ,  $P$  nằm giữa  $N, E$  nên  $\angle EBM > \angle PBM$  (5). Từ (3)–(5) suy ra  $\angle BMP > \angle BAE$ .  $\square$

**14** ([BBN23], VD8, p. 104). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Dựng qua  $A$  cát tuyến cắt đường tròn tại  $B, C$  sao cho  $B$  là trung điểm  $AC$ .

*Giải.* Giả sử dựng được cát tuyến  $ABC$  thỏa  $ABBC$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $BC$  thì  $OE \perp BC$ . Từ  $B$  kẻ  $BP \parallel EO, P \in AO$ , suy ra  $BP \perp AB$ .  $\square$

**15** ([BBN23], VD9, p. 105). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$ , 2 dây  $AB \parallel CD$ . (a) Chứng minh  $AC = BD, AD = BC$ . (b) Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $AC$  biết khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$  là 2 cm, khoảng cách từ  $O$  đến  $CD$  là 4 cm.

**16** ([BBN23], 4.1., p. 106). Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Trên tia  $AM$  lấy 3 điểm  $D, E, F$  sao cho  $AD = 9$  cm,  $AE = 11$  cm,  $AF = 10$  cm. Xác định vị trí của mỗi điểm  $D, E, F$  đối với đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

**17** ([BBN23], 4.2., p. 106). Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Từ điểm  $M$  bất kỳ trên cạnh  $BC$  kẻ  $MD \perp AB, ME \perp AC$ . Chứng minh 5 điểm  $A, D, M, H, E$  cùng nằm trên 1 đường tròn.

**18** ([BBN23], 4.3., p. 106). Tứ giác  $ABCD$  có  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ . So sánh  $AC, BD$ .

**19** ([BBN23], 4.4., p. 106). Cho đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C, D$  là 2 điểm khác nhau thuộc đường tròn,  $C, D$  không trùng với  $A, B$ . 2 điểm  $E, F$  thuộc đường tròn sao cho  $CE \perp AB, DF \perp AB$ . Chứng minh  $CF, ED, AB$  đồng quy.

**20** ([BBN23], 4.5., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB = 2a, a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính  $AD$  theo  $a, R$ .

**21** ([BBN23], 4.6., p. 106). Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\angle C + \angle D = 90^\circ$ .  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BD, DC, CA$ . Chứng minh 4 điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc 1 đường tròn.

**22** ([BBN23], 4.7., p. 106). Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AH$  cắt  $(O)$  ở  $D$ . Biết  $BC = 24, AC = 20$ . Tính chiều cao  $AH$  & bán kính  $(O)$ .

**23** ([BBN23], 4.8., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\angle AOC = 180^\circ - 3\angle ACO$ .

**24** ([BBN23], 4.9., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Xác định vị trí của điểm  $M$  trên đường tròn sao cho đoạn  $MA$  là ngắn nhất, dài nhất.

*Giải.* Giả sử đường thẳng  $OA$  cắt  $(O, R)$  tại  $N, P, P$  nằm giữa  $O, A. \forall M \in (O, R)$ , áp dụng bất đẳng thức tam giác:  $MO + MA \geq OA \Leftrightarrow MA \geq OA - R = PA$ . “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv P$ . Mặt khác,  $|MA - MO| \leq OA \Leftrightarrow MA \leq OA + OM = OA + R = AN$ . “=” xảy ra  $\Leftrightarrow M \equiv N$ . Vậy  $MA$  min  $\Leftrightarrow M \equiv P, MA$  max  $\Leftrightarrow M \equiv N$ .  $\square$

**Nhận xét 1.** Kết quả cũng tương tự với điểm  $A$  nằm trong đường tròn.

**25** ([BBN23], 4.10., p. 107). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $P$  nằm bên trong nó. 2 dây  $AB, CD$  thay đổi luôn đi qua  $P$  & vuông góc với nhau. Chứng minh  $AB^2 + CD^2$  là đại lượng không đổi.

*Chứng minh.* Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ , có  $OH \perp AB, OK \perp CD$ . Áp dụng định lý Pythagore:  $AB^2 + CD^2 = 4AH^2 + 4CK^2 = 4(OA^2 - OH^2 + OC^2 - OK^2) = 4[R^2 + R^2 - (OH^2 + OK^2)] = 8R^2 - 4HK^2 = 8R^2 - 4OP^2 = \text{const}$ .  $OP = HK$  vì tứ giác  $OHPK$  có 3 góc vuông ( $AB \cdot CD \Rightarrow \angle HPK = 90^\circ$ ) nên là hình chữ nhật.  $\square$

**26** ([BBN23], 4.11., p. 107). Cho đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ ,  $E$  là điểm nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cdot AC + BE \cdot BD = 4R^2$ .

*Chứng minh.* Vì  $AB$  là đường kính đường tròn  $(O, R)$  nên  $\angle C = \angle D = 90^\circ$ . Hạ  $EH \perp AB$ .  $\triangle ACB \sim \triangle AHE$  (2 tam giác vuông,  $\angle BAC$  chung)  $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AE} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AH \cdot AB$  (1). Tương tự,  $\triangle BDA \sim \triangle BHE$  (2 tam giác vuông,  $\angle ABD$  chung)  $\Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BH}{BE} \Leftrightarrow BE \cdot BD = BH \cdot AB$  (2). Cộng (1) & (2), vế theo vế:  $AE \cdot AC + BE \cdot BD = AH \cdot AB + BH \cdot AB = AB(AH + BH) = AB^2 = 4R^2$ .  $\square$

**27** ([BBN23], 4.12., p. 107). Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .

*Chứng minh.* Giả sử  $O$  là điểm bất kỳ trong tứ giác  $ABCD$ , tạo thành 4 góc  $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$ , có  $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360^\circ$  nên ít nhất 1 trong 4 góc đó  $\geq 90^\circ$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $\angle COD \geq 90^\circ$ , khi đó  $O$  nằm trong hoặc trên đường tròn đường kính  $CD$ .  $\square$

**28** ([BBN23], 4.13., p. 107). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  & điểm  $M$  nằm trong nửa đường tròn. Chỉ bằng thước kẻ, dựng qua  $M$  đường thẳng vuông góc với  $AB$ .

*Giải.* Vẽ 2 tia  $AM, BM$  lần lượt cắt nửa đường tròn đường kính  $AB$  tại  $E, F$ . Vẽ 2 tia  $AF, BE$ , chúng cắt nhau tại  $C$ . Nối  $CM$ , có  $CM \perp AB$ . Thật vậy,  $\triangle ABE, \triangle ABF$  nội tiếp đường tròn đường kính  $AB$  nên chúng lần lượt vuông tại  $E, F$ , suy ra  $M$  là trực tâm  $\triangle ABC$ , suy ra  $CM \perp AB$ .  $\square$

**29** ([Tuy23], VD5, pp. 113–114). Trên đường tròn  $(O, R)$  đường kính  $AB$  lấy 1 điểm  $C$ . Trên tia  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $C$  là trung điểm  $AM$ . (a) Xác định vị trí của điểm  $C$  để  $AM$  lớn nhất. (b) Xác định vị trí của điểm  $C$  để  $AM = 2R\sqrt{3}$ . (c) Chứng minh khi  $C$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $M$  di động trên 1 đường tròn cố định.

*Giải.* (a)  $AM = 2AC$ .  $AM \max \Leftrightarrow AC \max \Leftrightarrow AC$  là đường kính của  $(O, R) \Leftrightarrow C \equiv B$ . (b) Điểm  $C$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB \Leftrightarrow \angle ACB = 90^\circ$ . Xét  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ :  $AC = AB \cos A = 2R \cos A \Leftrightarrow AM = 2AC = 4R \cos A$ .  $AM = 2R\sqrt{3} \Leftrightarrow 4R \cos A = 2R\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \angle A = 30^\circ$ . (c)  $\triangle ABM$  có  $BC$  vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên cân tại  $B$ , suy ra  $BM = AB = 2R \Rightarrow M \in (B, 2R)$  cố định.  $\square$

**Nhận xét 2.** “Phương pháp chung để chứng minh 1 điểm thuộc 1 đường tròn cố định là chứng minh điểm đó cách 1 điểm cố định 1 khoảng không đổi. Còn muốn chứng minh nhiều điểm cùng thuộc 1 đường tròn, ta chứng minh các điểm này cùng cách đều 1 điểm.” – [Tuy23, p. 114]

**Nhận xét 3.** Mở rộng (b): Xác định vị trí của điểm  $C$  để  $AM = aR$ . Tương tự,  $AM = aR \Leftrightarrow 4R \cos A = aR \Leftrightarrow \cos A = \frac{a}{4}$ . Nếu  $a \in [0, 4]$  thì  $\angle A = \arccos \frac{a}{4}$ . Nếu  $a \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$  thì phương trình  $\cos A = \frac{a}{4}$  vô nghiệm nên không tồn tại điểm  $M$  thỏa mãn.

**30** ([Tuy23], 36., p. 114). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  khi: (a)  $AH = BC = a$ . (b)  $AH = h, BC = a$ .

*Giải.* (a) Kéo dài  $AH$  cắt đường tròn  $(ABC)$  tại  $D$ . Vì  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nên  $AD$  là đường kính  $(ABC)$ , suy ra  $\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = AH \cdot DH \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a(2R - a) \Leftrightarrow R = \frac{5}{8}a$ . (b) Tương tự,  $BH^2 = AH \cdot DH \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h(2R - h) \Leftrightarrow R = \frac{a^2}{8h} + \frac{h}{2}$ .  $\square$

**31** ([Tuy23], 37., p. 114). Cho  $\triangle ABC$ .  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Chứng minh: 3 đường tròn  $(AFE), (BFD), (CDE)$  bằng nhau & cùng đi qua 1 điểm. Xác định điểm chung đó.

*Chứng minh.* Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .  $\triangle AEO, \triangle AFO$  là 2 tam giác vuông chung cạnh huyền  $OA$  nên  $E, F$  nằm trên đường tròn đường kính  $OA$ , suy ra  $O \in (AEF)$ . Chứng minh tương tự,  $O \in (BDF), O \in (CDE)$ . Vì  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của 3 cạnh  $\triangle ABC$  nên  $\triangle AFE = \triangle FBD = \triangle EDC$  (c.c.c), suy ra 3 đường tròn  $(AEF), (BDF), (CDE)$  bằng nhau & cùng đi qua tâm  $O$  đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .  $\square$

**32** ([Tuy23], 38., p. 114). Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$ , 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ .  $R_1$  &  $R_2$  lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các  $\triangle ABC, \triangle ABD$ . Chứng minh:  $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$ .

*Chứng minh.* Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ . Vẽ đường trung trực của  $AB$  cắt  $AC$  tại  $K$ , cắt  $BD$  tại  $I$ .  $I, K$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC, \triangle ABD$  nên  $IB = R_1, AK = R_2$ .  $\triangle MBI \sim \triangle OBA$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{BI}{AB} = \frac{BM}{BO} \Leftrightarrow \frac{R_1}{a} = \frac{a}{2OB} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{2OB}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1^2} = \frac{4OB^2}{a^4}$  (1).  $\triangle MAK \sim \triangle OAB$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AM}{OA} \Leftrightarrow \frac{R_2}{a} = \frac{a}{2OA} \Leftrightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{2OA}{a^2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_2^2} = \frac{4OA^2}{a^4}$  (2). Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle OAB$  vuông tại  $O$ :  $OA^2 + OB^2 = AB^2$ . Cộng (1) & (2), về theo vế, rồi áp dụng (3):  $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4(OA^2 + OB^2)}{a^4} = \frac{4AB^2}{a^4} = \frac{4a^2}{a^4} = \frac{4}{a^2}$ .  $\square$

**33** ([Tuy23], 39., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , cạnh  $AB$  cố định, đường chéo  $AC = a$  cm với  $a > 0$ . Chứng minh điểm  $D$  di động trên 1 đường tròn cố định.

*Chứng minh.* Vẽ điểm  $O$  đối xứng với  $B$  qua  $A$ , suy ra  $O$  cố định. Tứ giác  $OACD$  có  $OA \parallel CD$  &  $OA = AB = CD = a$  cm nên  $OACD$  là hình bình hành, suy ra  $OD = AC = a$  cm  $\Rightarrow D \in (O, a)$  cm).  $\square$

**34** ([Tuy23], 40., p. 115). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 1 dây  $BC$  cố định. Trên đường tròn lấy 1 điểm  $A$  ( $A \neq B, A \neq C$ ).  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Chứng minh khi  $A$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $G$  di động trên 1 đường tròn cố định.

*Chứng minh.* Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Trên  $OM$  lấy  $K$  thỏa  $MK = \frac{1}{3}MO$ ,  $K$  cố định. Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  nên  $MG = \frac{1}{3}AM$ .  $\triangle MKG \sim \triangle MOA$  (c.g.c)  $\Rightarrow \frac{KG}{OA} = \frac{MK}{MO} = \frac{1}{3} \Rightarrow KG = \frac{OA}{3} = \frac{R}{3} \Rightarrow G \in (K, \frac{1}{3})$  cố định.  $\square$

**35** ([Tuy23], 41., p. 115). Trong mặt phẳng cho  $2n + 1$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ , sao cho 3 điểm bất kỳ nào cũng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh: trong các điểm này có ít nhất  $n + 1$  điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.

**36** ([Tuy23], 42., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  cắt các đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt ở  $M, N, P, Q$ . Xác định dạng của tứ giác  $MNPQ$ .

**37** ([Tuy23], 43., p. 115). 2 người chơi 1 trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt đặt lên 1 chiếc bàn hình tròn 1 cái cốc. Ai là người cuối cùng đặt được cốc lên bàn thì người đó thắng cuộc. Muốn chắc thắng thì phải chơi theo “chiến thuật” nào? (các chiếc cốc đều như nhau).

**38** ([Bin23a], VD8, p. 95). Cho hình thang cân  $ABCD$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.

*Chứng minh.* Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của 2 cạnh đáy  $AB, CD$  của hình thang cân  $ABCD$ .  $MN$  là trục đối xứng của hình thang cân  $ABCD$  nên  $MN$  là đường trung trực của  $AB, CD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $MN$  với đường trung trực của  $BC$ .  $O$  thuộc đường trung trực của  $AB \Leftrightarrow OA = OB$ .  $O$  thuộc đường trung trực của  $BC \Leftrightarrow OB = OC$ .  $O$  thuộc đường trung trực của  $CD \Leftrightarrow OC = OD$ . Kết hợp lại, suy ra  $OA = OB = OC = OD$ , i.e.,  $A, B, C, D \in (O, OA)$ .  $\square$

**Lưu ý 1.** 1 hình thang cân bất kỳ luôn nội tiếp 1 đường tròn với tâm là giao điểm 4 đường trung trực của 4 cạnh hình thang cân đó. Hơn nữa, nếu 1 hình thang nội tiếp được 1 đường tròn thì hình thang đó cân.

**39** ([Bin23a], 50., p. 95). (a) Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $AC = 40$  cm,  $BC = 48$  cm. Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $BC$ . (b) Mở rộng cho  $AC = b, BC = a, \forall a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < 2b$ .

*Giải.* (a) Kẻ đường cao  $AH, H \in BC$ .  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nên  $AH$  cũng là đường trung tuyến, suy ra  $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{48}{2} = 24$ . Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle AHC$  vuông tại  $H$ :  $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$ . Vì  $AH > CH$  nên tâm  $O$  nằm giữa  $A, H$ . Đặt  $x := OH$ . Kẻ  $OM \perp AC, M \in AC$ , suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ , nên  $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{40}{2} = 20$ .  $\triangle AMO \sim \triangle AHC$  (g.g)  $\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow \frac{32 - x}{40} = \frac{20}{32} \Leftrightarrow x = 7$  cm. (b) Tương tự,  $BH = CH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ . Áp dụng định lý Pythagore cho  $\triangle AHC$  vuông tại  $H$ :  $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ . Xét 3 trường hợp: (i)  $AH = CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}$  thì  $\triangle AHC$  vuông cân,  $O \equiv H$  nên  $d(O, BC) = 0$ . (ii)  $AH > CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} > \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 > \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a < b\sqrt{2}$  thì  $O$  nằm giữa  $A, H$ . Kẻ  $OM \perp AC, M \in AC$ , suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ , nên  $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$ .  $\triangle AMO \sim \triangle AHC$  (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AM}{AH} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - x}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - x = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow x = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2b^2 - a^2}{2\sqrt{4b^2 - a^2}}.$$

(iii)  $AH < CH \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow b^2 - \frac{a^2}{4} < \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 < \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a > b\sqrt{2}$  thì  $H$  nằm giữa  $A, O$ . Kẻ  $OM \perp AC, M \in AC$ ,  $OM$  cắt  $CH$  tại  $D$ , suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ , nên  $MA = MC = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$ .  $\triangle AMO \sim \triangle AHC$  (g.g)

\*\*\*

$\square$



40 ([Bin23a], 51., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , cạnh bên bằng  $b$ , đường cao  $AH = h$ . Tính bán kính đường tròn  $(O)$ .

Giải. Kẻ đường kính  $AD$  của đường tròn  $(O)$  thì  $\angle ABD = 90^\circ$ . Áp dụng hệ thức lượng cho  $\triangle ABD$  vuông tại  $B$ :  $AB^2 = AH \cdot AD \Leftrightarrow 2R = AD = \frac{AB^2}{AH} = \frac{b^2}{h} \Leftrightarrow R = \frac{b^2}{2h}$ .  $\square$

41 ([Bin23a], 52., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $M$  là trung điểm  $BC$ . Giả sử  $O$  nằm trong  $\triangle AMC$  hoặc  $O$  nằm giữa  $A$  &  $M$ .  $I$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh: (a) Chu vi  $\triangle IMC$  lớn hơn  $2R$ . (b) Chu vi  $\triangle ABC$  lớn hơn  $4R$ .

42 ([Bin23a], 53., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Kẻ 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  sao cho  $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$ . Chứng minh 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  đồng quy.

43 ([Bin23a], 54., p. 96). Cho 3 điểm  $A, B, C$  bất kỳ & đường tròn  $(O; 1)$ . Chứng minh tồn tại 1 điểm  $M$  nằm trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $MA + MB + MC \geq 3$ .

44 ([Bin+23], VD1, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, BD$ . Chứng minh  $AC \parallel BD \Leftrightarrow CD$  là đường kính.

45 ([Bin+23], VD2, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  song song với nhau.  $E, F$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $E, F, O$  thẳng hàng.

46 ([Bin+23], VD3, p. 20). Dựng 1 đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm dây cung có bán kính  $r$  cho trước.

47 ([Bin+23], VD4, p. 21). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\angle AOC = 180^\circ - 3\angle ACO$ .

48 ([Bin+23], VD5, p. 21). Cho  $\triangle ABC$ . Từ trung điểm 3 cạnh kẻ các đường vuông góc với 2 cạnh kia tạo thành 1 lục giác. Chứng minh diện tích  $\triangle ABC$  gấp 2 lần diện tích lục giác.

49 ([Bin+23], VD6, p. 21). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn.  $H, E$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$ .

50 ([Bin+23], VD7, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  nằm trong đường tròn,  $A \neq O$ . Tìm trên đường tròn điểm  $M$  sao cho  $\angle OMA$  lớn nhất.

51 ([Bin+23], VD8, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$ ,  $A, B, C$  là 3 điểm trên đường tròn sao cho  $AB = AC$ .  $I$  là trung điểm  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .

52 ([Bin+23], VD9, p. 23). Dựng  $\triangle ABC$ . Biết  $\angle A = \alpha < 90^\circ$ , đường cao  $BH = h$  & trung tuyến  $CM = m$ .

53 ([Bin+23], VD10, p. 23). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O, r)$ ,  $AB = r\sqrt{3}$ ,  $AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .

54 ([Bin+23], VD11, p. 23). Cho đoạn thẳng  $BC$  cố định,  $I$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $A$  trên mặt phẳng sao cho  $AB = BC$ .  $H$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $AI$  cắt đường thẳng  $BH$  tại  $M$ . Chứng minh  $M$  nằm trên 1 đường tròn cố định khi  $A$  thay đổi.

55 ([Bin+23], VD12, p. 24). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , kẻ  $BH \perp AC$ . Trên cạnh  $AC, CD$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{CD}$ . Chứng minh 4 điểm  $B, C, M, N$  nằm trên 1 đường tròn.

56 ([Bin+23], VD13, p. 24). Cho đường tròn  $(O, R)$ , dây  $AB = 2a$ ,  $a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính  $AD$  theo  $a, R$ .

57 ([Bin+23], VD14, p. 25). Cho đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $E$  nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cot AC + BE \cdot BD$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $E$ .

58 ([Bin+23], VD15, p. 25). Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .

59 ([Bin+23], 4.1., p. 26). Tính cạnh của tam giác đều, bát giác đều,  $n$ -giác đều nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .

60 ([Bin+23], 4.2., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $P$  ở trong đường tròn. Xác định dây lớn nhất & dây ngắn nhất đi qua  $P$ .

61 ([Bin+23], 4.3., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 bán kính  $OA, OB$  vuông góc với nhau. Kẻ tia phân giác của  $\angle AOB$ , cắt đường tròn ở  $D$ ,  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $AB$ , từ  $M$  kẻ  $MH \perp OB$  cắt  $OD$  tại  $K$ . Chứng minh  $MH^2 + KH^2$  có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .

62 ([Bin+23], 4.4., p. 26). Chứng minh bao giờ cũng chia được 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân, trong đó có 3 tam giác bằng nhau.

63 ([Bin+23], 4.5., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 dây cung  $EF$  có khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây là  $d$ . Dựng 2 hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn, 2 đỉnh còn lại nằm trên dây  $EF$ . Tính hiệu của 2 cạnh hình vuông đó theo  $d$ .

64 ([Bin+23], 4.6., p. 26). Cho 2 đường tròn đồng tâm. Dùng 1 dây cắt 2 đường tròn theo thứ tự tại  $A, B, C, D$  sao cho  $AB = BC = CD$ .

65 ([Bin+23], 4.7., p. 26). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ ,  $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $AC = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Giải  $\triangle ABC$ .

66 ([Bin+23], 4.8., p. 26). Cho hình thoi  $ABCD$ .  $R_1$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $R_2$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$ . Tính cạnh của hình thoi  $ABCD$  theo  $R_1, R_2$ .

67 ([Bin+23], 4.9., p. 26). Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi 1 trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 điểm được tô cùng 1 màu mà khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng 1.

68 ([Bin+23], 4.10., p. 26). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$  cố định. Từ điểm  $C$  thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành  $CABD$ . Chứng minh giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành  $CABD$  nằm trên 1 đường tròn cố định.

## 2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

Cho  $(O, R)$ , 2 dây  $AB, CD$ .  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  lên  $AB, CD$ .  $OH \perp AB, OK \perp CD \Rightarrow H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . [1]  $AB = CD \Leftrightarrow OH = OK \Leftrightarrow d(O, AB) = d(O, CD)$  với  $d(A, d_0)$  là khoảng cách (distance) từ điểm  $A$  tới đường thẳng  $d_0$ . [2]  $AB > CD \Leftrightarrow OH < OK \Leftrightarrow d(O, AB) < d(O, CD)$ . [3] Công thức liên hệ giữa độ dài dây & khoảng cách từ tâm đường tròn đến dây đó.  $AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{R^2 - d(O, AB)^2} \leq 2\sqrt{R^2} = 2R$ . “=” xảy ra  $\Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$  là đường kính  $(O, R)$ . [4]  $AB = 2R \Leftrightarrow OH = 0 \Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$  là đường kính đường tròn  $(O, R)$ .

69 ([BBN23], H1, p. 109). Giải thích kết luận “Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn” dựa vào so sánh khoảng cách từ tâm đến dây.

1st giải. Dây càng lớn thì khoảng cách từ tâm đến dây càng nhỏ & ngược lại.  $\square$

2nd giải. Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn vì khoảng cách từ tâm đến đường kính bằng 0 (i.e., khoảng cách nhỏ nhất có thể trong các khoảng cách từ tâm đường tròn đến các dây của đường tròn đó).  $\square$

3rd giải. Cho đường tròn  $(O, R)$ , dây bất kỳ, có  $AB = 2\sqrt{R^2 - d(O, AB)^2} \leq 2\sqrt{R^2} = 2R$ . “=” xảy ra  $\Leftrightarrow d(O, AB) = 0 \Leftrightarrow O \in AB \Leftrightarrow AB$  là đường kính  $(O, R)$ .  $\square$

70 ([BBN23], H2, p. 109). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB \parallel CD$  &  $AB = CD$ ,  $A, D$  cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình gì?

71 ([BBN23], H3, p. 109). Cho 1 đường tròn  $(O, R)$  & dây  $CD$  thay đổi nhưng có độ dài bằng  $a$  không đổi. Tập hợp các trung điểm dây  $CD$  là đường nào?

72 ([BBN23], H4, p. 110). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$  & cát tuyến  $ABCD$ . So sánh  $AB, CD$ .

73 ([BBN23], VD1, p. 110). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 1 điểm  $M$  nằm trong đường tròn. Vẽ qua  $M$  2 dây  $AB, CD$  sao cho  $AB \perp OM$ . (a) So sánh độ dài 2 dây  $AB, CD$ . (b) Chứng minh  $\angle ODM < \angle OBM$ . (c) Xác định vị trí của dây đi qua  $M$  sao cho độ dài của nó là nhỏ nhất, lớn nhất.

Giải.  $AB \perp OM \Leftrightarrow M$  là trung điểm  $AB$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $CD$  thì  $OK \perp CD$ . (a)  $\triangle OKM$  vuông tại  $K$  có cạnh huyền  $OM$  nên  $OM > OK$ . Trong 2 dây  $AB, CD$ , dây  $CD$  gần  $O$  hơn nên lớn hơn:  $AB > CD$ . (b) 2 góc nhọn  $\angle KDO, \angle MBO$  (nhọn vì  $\triangle OKD, \triangle OBM$  vuông) có  $\sin \angle KDO = \frac{OK}{OD} = \frac{OK}{R}$ ,  $\sin \angle MBO = \frac{OM}{OB} = \frac{OM}{R}$ . Có  $OM > OK \Leftrightarrow \sin \angle KDO < \sin \angle MBO \Leftrightarrow \angle ODM < \angle OBM$ . (c) Theo (a), trong các dây thay đổi luôn đi qua  $M$ , dây  $AB \perp OM$  có độ dài nhỏ nhất. Dây đi qua  $M, O$  là đường kính nên có độ dài lớn nhất.  $\square$

74 ([BBN23], VD2, p. 111). Cho 2 dây  $MN, EF$  bằng nhau & cắt nhau tại 1 điểm  $A$  nằm trong đường tròn. Chứng minh  $ME = NF$ .

75 ([BBN23], VD3, p. 111). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy 2 điểm  $C, D$  sao cho  $AC = BD$ . Từ  $C, D$  kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại  $M, N$ . (a) Chứng minh tứ giác  $CMND$  là hình thang vuông. (b) Xác định vị trí của  $M, N$  để  $CM + DN$  nhỏ nhất.

76 ([BBN23], VD4, p. 112). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn.  $H, E$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh:  $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$ .

77 ([BBN23], 5.1., p. 112). Cho đường tròn  $(O)$  có tâm  $O$  nằm trên đường phân giác  $\angle xIy$ ,  $(O)$  cắt tia  $Ix$  ở  $A, B$ , cắt tia  $Iy$  ở  $C, D$ . Chứng minh  $AB = CD$ .

78 ([BBN23], 5.2., p. 112). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$ , bán kính  $r_1 > r_2$ . Từ điểm  $M$  trên  $(O, r_1)$  vẽ 2 dây  $ME, MF$  theo thứ tự cắt  $(O, r_2)$  tại  $A, B$  &  $C, D$ .  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Biết  $AB > CD$ . So sánh: (a)  $ME, MF$ . (b)  $MH, MK$ .

- 79 ([BBN23], 5.3., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính 5 cm & dây  $AB = 8$  cm. (a) Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$ . (b) Lấy điểm  $I$  trên dây  $AB$  sao cho  $AI = 1$  cm. Kẻ dây  $CD$  đi qua  $I$  & vuông góc với  $AB$ . Chứng minh  $AB = CD$ .
- 80 ([BBN23], 5.4., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$ . 2 đường vuông góc với  $CD$  tại  $C, D$  tương ứng cắt  $AB$  ở  $M, N$ . Chứng minh  $AM = BN$ .
- 81 ([BBN23], 5.5., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  bằng nhau & cắt nhau tại điểm  $I$  nằm trong đường tròn. Chứng minh: (a)  $IO$  là tia phân giác của 1 trong 2 góc tạo bởi 2 đường thẳng  $AB, CD$ . (b) Điểm  $I$  chia  $AB, CD$  thành 2 cặp đoạn thẳng bằng nhau đôi một.
- 82 ([BBN23], 5.6., p. 113). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$  & 2 dây  $AB = 8, CD = 10$ .  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $CD$ . (a) So sánh  $\angle OMN, \angle ONM$  trong trường hợp 2 dây  $AB, CD$  không song song. (b) So sánh diện tích  $\triangle OCD, \triangle OAB$ .
- 83 ([BBN23], 5.7., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  tại  $I$ . Hạ  $AH, BK$  vuông góc với  $CD$ . Chứng minh  $CH = DK$ .
- 84 ([BBN23], 5.8., p. 113). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ 2 cát tuyến  $CAF, DAE$ ,  $C, D \in (O)$ ,  $E, F \in (O')$ , sao cho  $\angle CAB = \angle EAB$ . Chứng minh  $CF = DE$ .
- 85 ([BBN23], 5.9., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $I$  là trung điểm của  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .
- 86 ([BBN23], 5.10., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O, r)$  biết  $AB = r\sqrt{3}, AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 87 ([Bin23a], VD9, p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ .  $D, E$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $AB, AC$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $DE$  lớn nhất.
- 88 ([Bin23a], VD10, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính  $OA = 11$  cm. Điểm  $M$  thuộc bán kính  $OA$  & cách  $O$  7 cm. Qua  $M$  kẻ dây  $CD$  dài 18 cm. Tính  $MC, MD$  với  $MC < MD$ .
- 89 ([Bin23a], VD11, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính 15 cm, điểm  $M$  cách  $O$  9 cm. (a) Dựng dây  $AB$  đi qua  $M$  & dài 26 cm. (b) Có bao nhiêu dây đi qua  $M$  & có độ dài là 1 số nguyên cm?
- 90 ([Bin23a], 55., p. 98). Tứ giác  $ABCD$  có  $\angle A = \angle C = 90^\circ$ . (a) Chứng minh  $AC \leq BD$ . (b) Trong trường hợp nào thì  $AC = BD$ ?
- 91 ([Bin23a], 56., p. 98). Cho  $(O)$  đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, AD$ . Điểm  $E$  bất kỳ trên đường tròn,  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  trên  $AC, AD$ . Chứng minh  $HK \leq AB$ .
- 92 ([Bin23a], 57., p. 98). Cho  $(O)$ , dây  $AB = 24$  cm, dây  $AC = 20$  cm ( $\angle BAC < 90^\circ$  & điểm  $O$  nằm trong  $\angle BAC$ ).  $M$  là trung điểm  $AC$ . Khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  bằng 8 cm. (a) Chứng minh  $\triangle ABC$  cân tại  $C$ . (b) Tính bán kính đường tròn.
- 93 ([Bin23a], 58., p. 98). Cho  $(O)$  bán kính 5 cm, 2 dây  $AB$  &  $CD$  song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng 8 cm & 6 cm. Tính khoảng cách giữa 2 dây.
- 94 ([Bin23a], 59., p. 98). Cho  $(O)$ , đường kính  $AB = 13$  cm. Dây  $CD$  dài 12 cm vuông góc với  $AB$  tại  $H$ . (a) Tính  $AH, BH$ . (b)  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AC, BC$ . Tính diện tích tứ giác  $CMHN$ .
- 95 ([Bin23a], 60., p. 99). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$ .  $H, K$  lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ  $A, B$  đến  $CD$ . (a) Chứng minh  $CH = DK$ . (b) Chứng minh  $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$ . (c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác  $AHKB$  biết  $AB = 30$  cm,  $CD = 18$  cm.
- 96 ([Bin23a], 61., p. 99). Cho  $\triangle ABC$ , 3 đường cao  $AD, BE, CF$ . Đường tròn đi qua  $D, E, F$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt ở  $M, N, P$ . Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ  $M$  vuông góc với  $BC$ , kẻ từ  $N$  vuông góc với  $AC$ , kẻ từ  $P$  vuông góc với  $AB$  đồng quy.
- 97 ([Bin23a], 62., p. 99).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp  $(O)$ .  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trọng tâm của  $\triangle ACD$ . Chứng minh  $OE \perp CD$ .

### 3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

- 98 ([BBN23], H1, p. 116). Đường thẳng & đường tròn có thể có 3 điểm chung không?
- 99 ([BBN23], H2, p. 116). Cho đường tròn  $(O, a\text{ cm})$  & 1 đường thẳng  $d$  cắt đường tròn tại 2 điểm  $A, B$ .  $H$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm khoảng giá trị của  $OH$ .
- 100 ([BBN23], H3, p. 116). Qua 1 điểm nằm trong đường tròn có thể kẻ được tiếp tuyến với đường tròn này không?
- 101 ([BBN23], H4, p. 116). Qua 1 điểm ở trên đường tròn có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đường tròn đó?
- 102 ([BBN23], H5, p. 116). Tập hợp tâm các đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với đường thẳng  $d$  cố định là đường nào?



- 103** ([BBN23], VD1, p. 116). Cho đường tròn  $(O, R)$  tiếp xúc với đường thẳng  $d$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $d$  lấy điểm  $M$ . Vẽ đường tròn  $(M, MA)$  cắt  $(O, R)$  tại điểm thứ 2 là  $B \neq A$ . Chứng minh  $MB$  là tiếp tuyến của  $(O, R)$ .
- 104** ([BBN23], VD2, p. 117). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ , có  $I$  là trung điểm  $AB$  &  $\angle CID = 90^\circ$ . Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AB$ .
- 105** ([BBN23], VD3, p. 117). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ . Trong cùng nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với đường tròn. 1 đường thẳng  $d$  tiếp xúc với đường tròn tại  $E$ , cắt  $Ax, By$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Chứng minh tích  $AM \cdot BN$  không đổi khi  $d$  thay đổi. (b) Xác định vị trí của  $d$  để  $AM + BN$  nhỏ nhất.
- 106** ([BBN23], VD4, p. 118). Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Giả sử  $(I)$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ . Chứng minh  $S_{ABC} = BD \cdot CD$ .
- 107** ([BBN23], VD5, p. 118). Cho tứ giác  $ABCD$  có tất cả các cạnh tiếp xúc với đường tròn  $(O)$ , đồng thời tất cả các cạnh kéo dài của nó tiếp xúc với đường tròn  $(O')$ . Chứng minh 2 đường chéo của tứ giác  $ABCD$  vuông góc với nhau.
- 108** ([BBN23], VD6, p. 118). Cho hình vuông  $ABCD$ . Tia  $Ax$  quay xung quanh  $A$ , luôn nằm trong  $\angle BAD$ . 2 tia phân giác của  $\angle BAx, \angle DAx$  lần lượt cắt  $BC, CD$  tại  $M, N$ . Chứng minh  $MN$  luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.
- 109** ([BBN23], VD7, p. 119). Cho đường tròn  $(O, 5 \text{ cm})$  & 1 điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Vẽ 1 cát tuyến đi qua  $A$ , cắt đường tròn theo 1 dây dài 8 cm.
- 110** ([BBN23], VD8, p. 119). Trong các tam giác vuông có cùng cạnh huyền, tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- 111** ([BBN23], 6.1., p. 120). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ . 1 đường thẳng  $d$  tiếp xúc với nửa đường tròn tại  $M$ . Từ  $A, B$  hạ  $AE, BF$  vuông góc với  $d$ ,  $E, F \in d$ . (a) Chứng minh  $AE + BF$  không đổi khi  $M$  chạy trên nửa đường tròn. (b) Kẻ  $MD \perp AB$ . Chứng minh  $MD^2 = AE \cdot BF$ . (c) Xác định vị trí của  $M$  để tích  $AE \cdot BF$  lớn nhất.
- 112** ([BBN23], 6.2., p. 120). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O, r)$  đồng tâm,  $R > r$ . Từ điểm  $A \in (O, r)$  kẻ 2 tiếp tuyến với  $(O, r)$ , 2 tiếp điểm là  $M, N$ . 2 tiếp tuyến đó cắt  $(O, R)$  tương ứng tại  $B, C$ . (a) Chứng minh  $AB = AC$ . (b) Chứng minh  $AO \perp BC$ . (c) Tính diện tích  $\triangle ABC$  theo  $R, r$ .
- 113** ([BBN23], 6.3., p. 120). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  khác đường kính. Tại  $A, B$  kẻ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với đường tròn. Trên  $Ax, By$  lấy lần lượt 2 điểm  $M, N$  sao cho  $AM = BN$ . Chứng minh hoặc  $AB \parallel MN$  hoặc  $AB$  đi qua trung điểm của  $MN$ .
- 114** ([BBN23], 6.4., p. 120). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp & đường tròn  $(J)$  bàng tiếp trong  $\angle A$  của tam giác tiếp xúc với  $BC$  theo thứ tự tại  $M, N$ . Chứng minh  $M, N$  đối xứng nhau qua trung điểm  $BC$ .
- 115** ([BBN23], 6.5., p. 120). Cho 2 đường thẳng  $d \parallel d'$ . 1 đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $d, d'$  tương ứng tại  $C, D$ , điểm  $A$  cố định trên  $d$ , nằm ngoài  $(O)$ . Chỉ dùng êke, tìm trên  $d'$  điểm  $B$  sao cho  $AB$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 116** ([BBN23], 6.6., p. 120). Từ điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O, R)$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn,  $B, C$  là 2 tiếp điểm. 1 điểm  $M$  bất kỳ trên đường thẳng đi qua 2 trung điểm  $P, Q$  của  $AB, AC$ . Kẻ tiếp tuyến  $MK$  của  $(O)$ . Chứng minh  $MK = MA$ .
- 117** ([BBN23], 6.7., p. 121). Từ 1 điểm  $A$  ở ngoài đường tròn  $(O, R)$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AM, AN$  với đường tròn,  $MO$  cắt tia  $AN$  tại  $E$ ,  $NO$  cắt tia  $AM$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $EF \parallel MN$ . (b) Biết  $OA = 7, R = 5$ , tính khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$ .
- 118** ([BBN23], 6.8., p. 121). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB = 2R$ . Điểm  $M$  di động trên nửa đường tròn đó,  $M \neq A, M \neq B$ . Vẽ đường tròn  $(M)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $H$ . Từ  $A, B$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AC, BD$  với  $(M)$ ,  $C, D$  là 2 tiếp điểm. (a) Chứng minh  $C, M, D$  thẳng hàng. (b) Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ . (c) Giả sử  $CD$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh  $OA^2 = OB^2 = OH \cdot OK$ .
- 119** ([BBN23], 6.9., p. 121). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , dây  $CD \perp OA$  tại  $H \in OA$ .  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $H$ ,  $DA'$  cắt  $BC$  tại  $I$ . Chứng minh: (a)  $DI \perp BC$  &  $HI = HC$ . (b)  $HI$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $A'B$ .
- 120** ([BBN23], 6.10., p. 121). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định nằm trên đường tròn đó. Kẻ tiếp tuyến  $Ax$  với đường tròn. Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $M$ , kẻ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn. (a) Chứng minh  $M, O$ , trọng tâm, trực tâm  $\triangle AMB$  thẳng hàng. (b)  $H$  là trực tâm của  $\triangle AMB$ . Chứng minh tứ giác  $OAHB$  là hình thoi. (c) Tìm tập hợp các điểm  $H$  khi  $M$  thay đổi.
- 121** ([BBN23], 6.11., p. 121). Cho 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với đường thẳng  $xy$ ,  $AB$  không vuông góc với  $xy$ . Tìm điểm  $M \in xy$  sao cho  $MB$  là phân giác của góc giữa 2 đường thẳng  $AM, xy$ .
- 122** ([BBN23], 6.12., p. 121). Cho đường thẳng  $xy$  & 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Tìm trên  $xy$  điểm  $M$  sao cho  $\angle BMx = 2\angle AMx$ .
- 123** ([BBN23], 6.13., p. 121). Tứ giác  $ABCD$  có 4 cạnh tiếp xúc với 1 đường tròn & 2 đường chéo của nó vuông góc với nhau. Chứng minh 1 trong 2 đường chéo là trục đối xứng của tứ giác.
- 124** ([BBN23], 6.14., p. 121). Trong các  $\triangle ABC$  có chung đáy  $BC$  & có cùng diện tích  $S$ , tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

**125** ([BBN23], 6.15., p. 122). Đường tròn  $(O, r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . Các tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  song song với 3 cạnh của tam giác  $\mathcal{E}$  chia tam giác thành 3 tam giác nhỏ.  $r_1, r_2, r_3$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh  $r_1 + r_2 + r_3 = r$ .

**126** ([BBN23], 6.16., p. 122). Cho đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ , tiếp xúc với cạnh  $AB$  tại  $D$ . Chứng minh:  $\triangle ABC$  vuông tại  $C \Leftrightarrow AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$ .

**127** ([BBN23], 6.17., p. 122). Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các tam giác tạo bởi 2 cạnh liên tiếp  $\mathcal{E}$  1 đường chéo ta vẽ các đường tròn nội tiếp. Chứng minh các tiếp điểm của chúng với 2 đường chéo tạo thành 1 hình chữ nhật.

**128** ([BBN23], 6.18., p. 122). Cho  $\angle xOy$ , 2 điểm  $A, B$  theo thứ tự chuyển động trên  $Ox, Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

**129** ([BBN23], 6.19., p. 122). Cho  $\angle xOy = 90^\circ$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $A, B$ . 1 tiếp tuyến của  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $C, D$ ,  $C \in OA, D \in OB$ . Chứng minh:  $\frac{1}{3}(OA + OB) < CD < \frac{1}{2}(OA + OB)$ .

**130** ([BBN23], 6.20., p. 122). Cho đường tròn  $(O)$   $\mathcal{E}$  điểm  $M$  ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MA, MB$  với  $(O)$ . Vẽ đường tròn  $(M, MA)$ . (a) Chứng minh  $OA, OB$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn  $(M, MA)$ . (b) Giả sử  $OM$  cắt  $(M, MA)$  tại  $E, F$ ,  $E$  nằm giữa  $O, M$ . Chứng minh  $\angle OAE = \angle AFM$ .

**131** ([BBN23], p. 123). Chứng minh: (a) Mọi đa giác đều luôn ngoại tiếp được 1 đường tròn, i.e., tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của đa giác đều. (b) Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp được 1 đường tròn  $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$ .

**132** ([Bin23a], VD12, p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ , đường cao  $AH$ . Điểm  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $H$ . Đường tròn có đường kính  $EC$  cắt  $AC$  ở  $K$ . Chứng minh  $HK$  là tiếp tuyến của đường tròn.

**133** ([Bin23a], VD13, p. 100). Cho 1 hình vuông  $8 \times 8$  gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm  $O$  của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần  $\mathcal{E}$  che lấp hoàn toàn)?

**134** ([Bin23a], 63., pp. 100–101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn. Qua  $M$  vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn.  $D, C$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh  $M$  là trung điểm  $CD$ . (b) Chứng minh  $AB = BC + AD$ . (c) Giả sử  $\angle AOM \geq \angle BOM$ , gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác  $BCDE$ . (d) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên nửa đường tròn sao cho tứ giác  $ABCD$  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính  $R$  của nửa đường tròn đã cho.

**135** ([Bin23a], 64., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $AC$  với đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle BIC$ . (b)  $H$  là trung điểm  $BC$ ,  $IK$  là đường kính đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$ .

**136** ([Bin23a], 65., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $Ax$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn ( $Ax \mathcal{E}$  nửa đường tròn nằm cùng phía đối với  $AB$ ), điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Đường thẳng qua  $O$   $\mathcal{E}$  vuông góc với  $AC$  cắt  $Ax$  tại  $M$ .  $I$  là giao điểm của  $MB, CH$ . Chứng minh  $IC = IH$ .

**137** ([Bin23a], 66., p. 101). Cho hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ , có  $\angle BMC = 90^\circ$  với  $M$  là trung điểm  $AD$ . Chứng minh: (a)  $AD$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $BC$ . (b)  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $AD$ .

**138** ([Bin23a], 67., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Qua trung điểm  $M$  của  $CH$ , kẻ đường vuông góc với  $OC$ , cắt nửa đường tròn tại  $D \mathcal{E} E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của  $(C; CD)$ .

**139** ([Bin23a], 68., p. 101). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ .  $d, d'$  lần lượt là 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của đường tròn,  $C \in d$  bất kỳ. Đường vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt  $d'$  tại  $D$ . Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**140** ([Bin23a], 69., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn. Qua  $C$  kẻ tiếp tuyến  $d$  với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia  $Ax, By$  song song với nhau, cắt  $d$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $DE$ .

**141** ([Bin23a], 70., pp. 101–102). Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ .  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn,  $A$  là tiếp điểm. Điểm  $M$  bất kỳ thuộc  $d$ . Qua  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BM$ , cắt  $d$  tại  $N$ . (a) Chứng minh tích  $AM \cdot AN$  không đổi khi điểm  $M$  chuyển động trên đường thẳng  $d$ . (b) Tìm GTNN của  $MN$ .

**142** ([Bin23a], 71., p. 102). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $\angle A = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $h$ . 1 tiếp tuyến bất kỳ ( $\neq BC$ ) của đường tròn  $(A)$  cắt 2 tia  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $B', C'$ . (a) Chứng minh  $S_{ABC} = S_{AB'C'}$ . (b) Trong các  $\triangle ABC$  có  $\angle A = \alpha$   $\mathcal{E}$  đường cao  $AH = h$ , tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?

**143** ([Bin+23], 1, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  thì  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ .

- 144** ([Bin+23], 2, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  nằm trong  $\triangle ABC$  &  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ ,  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$  thì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .
- 145** ([Bin+23], 3, p. 28). Chứng minh: Nếu  $J$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\angle A$  của  $\triangle ABC$  thì  $\angle BJC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ .
- 146** ([Bin+23], 4, p. 28). Cho  $\triangle ABC$ , đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,  $a + b + c = 2p$ ,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2}$ ,  $S = pr$ .
- 147** ([Bin+23], 5, p. 28). Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $F, E$ . Chứng minh:  $AE = AF = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .
- 148** ([Bin+23], VD1, p. 29). Cho  $\angle xOy = 90^\circ$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh  $Ox, Oy$  tại  $A, B$ . 1 tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $C, D$ .
- 149** ([Bin+23], VD2, p. 29). Cho  $\angle xOy$ , 2 điểm  $A, B$  lần lượt chuyển động trên  $Ox$  &  $Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.
- 150** ([Bin+23], VD3, p. 29). Cho hình vuông  $ABCD$ , lấy điểm  $E$  trên cạnh  $BC$  & điểm  $F$  trên cạnh  $CD$  sao cho  $AB = 3BE = 2DF$ . Chứng minh  $EF$  tiếp xúc với cung tròn tâm  $A$ , bán kính  $AB$ .
- 151** ([Bin+23], VD4, p. 30). Cho đường tròn  $(O, R)$ , & đường thẳng  $a$  cắt đường tròn tại  $A, B$ .  $M$  là điểm trên  $a$  & nằm ngoài đường tròn, qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MC, MD$ . Chứng minh khi  $M$  thay đổi trên  $a$ , đường thẳng  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 152** ([Bin+23], VD5, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  dựng đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$ . (b)  $BM \cdot AC + CN \cdot AB + AI^2 = AB \cdot AC$ .
- 153** ([Bin+23], VD6, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D, E, F$  lần lượt là 3 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $EF$ . Chứng minh  $DH$  là tia phân giác của  $\angle BHC$ .
- 154** ([Bin+23], VD7, p. 32).  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .  $D, E$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $BI, CI$  với cạnh  $AC, AB$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow BI \cdot CI = \frac{1}{2}BD \cdot CF$ .
- 155** ([Bin+23], VD8, p. 32). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $M$  cách tâm  $O$  1 khoảng bằng  $3R$ . Từ  $M$  kẻ 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O, R)$  tại  $A, B$ , gọi  $I, E$  lần lượt là trung điểm  $MA, MB$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $IE$ .
- 156** ([Bin+23], VD9, p. 33). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ .  $O$  là trung điểm  $BC$ , dựng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $D, E$ .  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $\widehat{DE}$ , tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $M$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt ở  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$ . Từ đó xác định vị trí của  $M$  để diện tích  $\triangle APQ$  đạt GTLN. (b) Nếu  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$  thì  $PQ$  là tiếp tuyến.
- 157** ([Bin+23], VD10, p. 34). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến cắt đường tròn tại  $A, B$ ,  $MA > MB$ , gọi  $CD$  là đường kính vuông góc với  $AB$ , đường thẳng  $MC, MD$  cắt đường tròn tại  $E, K$ , giao điểm của  $DE, CK$  là  $H$ ,  $I$  là trung điểm  $MH$ . Chứng minh  $IE, IK$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .
- 158** ([Bin+23], VD11, p. 34). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ .  $AD, AE$  là đường phân giác của 2 góc  $\angle BAH, \angle CAH$ . Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$ .
- 159** ([Bin+23], VD12, p. 35). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , 3 tiếp điểm trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ .  $M$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $MI$  cắt cạnh  $AB$  tại  $N$ , đường thẳng  $DF$  cắt đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$  tại  $P$ . Chứng minh  $\triangle ANP$  cân.
- 160** ([Bin+23], VD13, p. 36). Tính  $\angle A$  của  $\triangle ABC$  biết đỉnh  $B$  cách đều tâm 2 đường tròn bàng tiếp của  $\angle A, \angle B$  của  $\triangle ABC$ .
- 161** ([Bin+23], VD14, p. 36). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2AC$  & đường phân giác  $AD$ .  $r, r_1, r_2$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ . Chứng minh  $AD = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$  với  $p$  là nửa chu vi  $\triangle ABC$ .
- 162** ([Bin+23], VD15, p. 37). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $AB$  & cát tuyến qua  $A$  cắt đường tròn tại  $C, D$ ,  $AC < AD$ . Hỏi trọng tâm  $\triangle BCD$  chạy trên đường nào khi cát tuyến  $ACD$  thay đổi?
- 163** ([Bin+23], 5.1., p. 38). Cho nửa đường tròn bán kính  $AB = 2R$ .  $C$  là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  là  $h$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  theo  $R, h$ .
- 164** ([Bin+23], 5.2., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  là điểm trên  $BC$ . Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $E$ , đường tròn nội tiếp  $\triangle ADC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $F$ , đồng thời 2 đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng  $d \neq BC$ , đường thẳng  $d$  cắt  $AD$  tại  $I$ . Chứng minh  $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .
- 165** ([Bin+23], 5.3., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Đường tròn đường kính  $BH$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ , đường tròn đường kính  $HC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $N$ . Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính  $BH, CH$ .



- 166** ([Bin+23], 5.4., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AK$ .  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ , đường tròn đường kính  $AH$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $KD, KE$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AH$ .
- 167** ([Bin+23], 5.5., p. 38). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn,  $A, B$  là 2 tiếp điểm, tia  $OM$  cắt đường tròn tại  $C$ , tiếp tuyến tại  $C$  cắt tiếp tuyến  $MA, MB$  tại  $P, Q$ . Chứng minh diện tích  $\triangle MPQ$  lớn hơn  $\frac{1}{2}$  diện tích  $\triangle ABC$ .
- 168** ([Bin+23], 5.6., p. 38). Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh  $a$ , đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh  $a$  bằng  $h$ , xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.
- 169** ([Bin+23], 5.7., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $\frac{BD}{CE} = \left(\frac{IB}{IC}\right)^2$ .
- 170** ([Bin+23], 5.8., p. 38). Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $B, C$ . Từ  $A$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AM, AN$  với đường tròn  $(O)$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm. Đường thẳng  $MN$  cắt  $AO$  tại  $H$ , gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh khi đường tròn  $(O)$  thay đổi tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OHE$  nằm trên 1 đường thẳng cố định.
- 171** ([Bin+23], 5.9., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC$  là cạnh nhỏ nhất. Trên  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BD = CE = BC$ .  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $OI = DE$  &  $OI \perp DE$ .
- 172** ([Bin+23], 5.10., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$ , kẻ các tiếp tuyến với đường tròn & song song với 3 cạnh  $\triangle ABC$ . Các tiếp tuyến này tạo với 3 cạnh  $\triangle ABC$  thành 3 tam giác nhỏ, gọi diện tích 3 tam giác nhỏ là  $S_1, S_2, S_3$  & diện tích  $\triangle ABC$  là  $S$ . Tìm GTNN của biểu thức  $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$ .
- 173** ([Bin+23], 5.11., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp,  $I_A$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\angle A$  &  $M$  là trung điểm  $BC$ .  $H, D$  là hình chiếu của  $I, I_A$  trên cạnh  $BC$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $DH$ , từ đó suy ra đường thẳng  $MI$  đi qua trung điểm  $AH$ .
- 174** ([Bin+23], 5.12., p. 39). Cho đường tròn  $(O, r)$  & điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Qua  $A$  dựng tiếp tuyến  $d$  với đường tròn  $(O, r)$ .  $M$  là điểm chuyển động trên  $d$ , từ  $M$  kẻ tiếp tuyến đến đường tròn  $(O, r)$  có tiếp điểm là  $B \neq A$ . Tâm của đường tròn ngoại tiếp & trực tâm của  $\triangle AMB$  chạy trên đường nào?
- 175** ([Bin+23], 5.13., p. 39). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , từ điểm  $M$  trên đường tròn kẻ tiếp tuyến  $d$ .  $H, K$  là hình chiếu của  $A, B$  trên  $d$ . Chứng minh  $AH + BK$  không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính  $HK$  luôn tiếp xúc với  $AH, BK, AB$ .
- 176** ([Bin+23], 5.14., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  trong tam giác, gọi  $H, D, E$  là hình chiếu của  $M$  thứ tự trên  $BC, CA, AB$ . Xác định vị trí của  $M$  sao cho giá trị của biểu thức  $\frac{BC}{MH} + \frac{CA}{MD} + \frac{AB}{ME}$  đạt GTNN.
- 177** ([Bin+23], 5.15., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại & nội tiếp  $\triangle ABC$ . Biết  $\triangle BIO$  vuông tại  $I$ . Chứng minh  $\frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}$ .

## 4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn

- 178** ([BBN23], H1, p. 126). Cho  $\triangle ABC$ . 2 đường tròn  $(B, AB), (C, AC)$  có thể tiếp xúc nhau được không?
- 179** ([BBN23], H2, p. 126). Đ/S? Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  có  $R > r$ . (a) Nếu  $OO' < R + r$  thì 2 đường tròn cắt nhau. (b) Nếu  $OO' = R - r$  thì 2 đường tròn tiếp xúc nhau. (c) Nếu 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau thì  $OO' = R + r$ . (d) Nếu  $OO' > R + r$  thì 2 đường tròn ngoài nhau.
- 180** ([BBN23], VD1, p. 127). Cho đường tròn  $(O, OA)$  & đường tròn  $(O', OA)$ . (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(O), (O')$ . (b) Dây  $AD$  của đường tròn  $(O)$  cắt đường tròn  $(O')$  ở  $C$ . Chứng minh  $AC = CD$ .
- Giải.* (a)  $OO' = OA - O'A \Leftrightarrow d = R - R' \Leftrightarrow (O), (O')$  tiếp xúc trong. (b)  $\triangle ACO$  có cạnh  $AO$  là đường kính của  $(O')$  ngoại tiếp nên  $\triangle ACO$  vuông tại  $C$  hay  $OC \perp AD$ , suy ra  $AC = CD$ .  $\square$
- 181** ([BBN23], VD2, p. 127). Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  trong 2 trường hợp: (a)  $R = 6, R' = 4, d = OO' = 2$ . (b)  $R = 5, R' = 3, d = 6$ .
- 182** ([BBN23], VD3, p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O, 6), (O', 8)$  cắt nhau tại  $A, B$  sao cho  $OA$  là tiếp tuyến của  $(O')$ . Tính độ dài dây chung  $AB$  & khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$ .
- 183** ([BBN23], VD4, p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc với nhau tại  $A$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M \neq A, N \neq A$ . Chứng minh 2 tiếp tuyến với  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M, N$  song song với nhau.
- 184** ([BBN23], VD5, p. 128). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . (a) Chứng minh đường tròn bàng tiếp trong  $\angle A$  & đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc nhau tại 1 điểm thuộc  $BC$ . (b) Tính bán kính 2 đường tròn biết  $AB = 8, BC = 6$ .



**185** ([BBN23], VD6, p. 129). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $MN$ ,  $M \in (O), N \in (O')$ . Tiếp tuyến chung tại  $A$  của 2 đường tròn cắt  $MN$  tại  $E$ . (a) Chứng minh  $E$  là trung điểm của  $MN$ . (b) Chứng minh  $\triangle AMN$  vuông &  $MN$  tiếp xúc với đường tròn đường kính  $OO'$ . (c) Tính  $MN$  biết bán kính  $(O), (O')$  lần lượt là  $R = 4, R' = 5$ .

**186** ([BBN23], VD7, p. 129). Cho  $\triangle ABC$ . Dựng 3 đường tròn tâm  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài nhau.

**187** ([BBN23], VD8, p. 130). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau,  $AB, CD$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài, đường thẳng  $AD$  cắt  $(O), (O')$  theo thứ tự tại  $M, N$ . Chứng minh  $AM = DN$ .

**188** ([BBN23], VD9, p. 130). Cho 2 đường tròn  $(O_1, r_1), (O_2, r_2)$  cắt nhau tại  $A, B$ ,  $O_1, O_2$  nằm khác phía đối với  $AB$ . 1 cát tuyến  $PAQ$  quay quanh  $A$ . Lấy  $P \in (O_1), Q \in (O_2)$  sao cho  $A$  nằm giữa  $P, Q$ . Xác định vị trí của cát tuyến  $PAQ$  trong mỗi trường hợp: (a)  $PQ$  có độ dài lớn nhất. (b) Chu vi  $\triangle BPQ$  đạt GTLN. (c) Diện tích  $\triangle BPQ$  đạt GTLN.

**189** ([BBN23], 7.1., p. 131). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$ , độ dài đường nối tâm  $OO' = d$ . Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn vào bảng:

$R$	$R'$	$d$	Vị trí tương đối
5 cm	3 cm	7 cm	
11 cm	4 cm	3 cm	
9 cm	6 cm	15 cm	
7 cm	2 cm	10 cm	
7 cm	3 cm	4 cm	
6 cm	2 cm	7 cm	

**190** ([BBN23], 7.2., p. 131). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ ,  $O, O'$  nằm khác phía đối với  $AB$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $(O)$  tại  $C$  & cắt  $(O')$  tại  $D$ . Cát tuyến  $EAF$  cắt  $(O)$  tại  $E$ , cắt  $(O')$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $\angle CEB = \angle DFB = 90^\circ$ . (b) Chứng minh  $OO' \parallel CD$ . Tính  $CD$  biết  $AB = 9.6$  cm,  $OA = 8$  cm,  $O'A = 6$  cm. (c) Dựng qua  $A$  cát tuyến  $EAF$ ,  $E \in (O), F \in (O')$ , sao cho  $AE = AF$ .

**191** ([BBN23], 7.3., p. 132). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. 3 tiếp điểm  $(O_1), (O_2)$  là  $A$ ,  $(O_2), (O_3)$  là  $B$ ,  $(O_3), (O_1)$  là  $C$ . 2 tia  $AB, AC$  kéo dài cắt  $(O_3)$  lần lượt ở  $P, Q$ . Chứng minh  $P, Q, O_3$  thẳng hàng.

**192** ([BBN23], 7.4., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O, 2$  cm) &  $(O', 3$  cm) có khoảng cách giữa 2 tâm là 6 cm.  $E, F$  tương ứng là giao của tiếp tuyến chung trong & ngoài với đường thẳng  $OO'$ . (a) Xác định vị trí tương đối của 2 đường tròn. (b) Tính độ dài đoạn  $EF$ .

**193** ([BBN23], 7.5., p. 132). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$ . 1 đường tròn  $(O')$  cắt đường tròn nhỏ tâm  $O$  lần lượt ở  $A, B$  & cắt đường tròn còn lại lần lượt ở  $C, D$ . Chứng minh  $AB \parallel CD$ .

**194** ([BBN23], 7.6., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  cắt nhau ở  $A, B$  sao cho  $O, O'$  thuộc 2 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ . Dựng 1 cát tuyến  $PAQ$ ,  $P \in (O, R), Q \in (O', r)$ , sao cho  $A$  nằm giữa  $P, Q$  &  $2AP = AQ$ .

**195** ([BBN23], 7.7., p. 132). Cho 2 đường tròn bằng nhau  $(O), (O')$  có bán kính  $R$  cắt nhau tại  $A, B$ . Từ  $O, O'$  dựng  $Ox, O'y$  song song với nhau & cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ  $OO'$ , 2 tia này cắt  $(O)$  tại  $C$  &  $(O')$  tại  $D$ .  $C'$  đối xứng với  $C$  qua  $O$ ,  $D'$  đối xứng với  $D$  qua  $O'$ . (a) Chứng minh  $CD', OO', C'D$  đồng quy. (b) Tìm tập hợp trung điểm  $M$  của  $CD$  khi  $Ox, O'y$  thay đổi. (c) Tính góc hợp bởi tiếp tuyến tại  $A$  của  $(O)$  với  $OO'$  biết  $OO' = \frac{3}{2}R$ .

**196** ([BBN23], 7.8., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O, 3$  cm) tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(O', 1$  cm) tại  $A$ . Vẽ 2 bán kính  $OB, O'C$  song song với nhau thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $OO'$ . (a) Tính  $\angle BAC$ . (b)  $I$  là giao điểm của  $BC, OO'$ . Tính độ dài  $OI$ .

**197** ([BBN23], 7.9., p. 132). Cho đường tròn  $(O, R), (I, 2R)$  đi qua  $O$ . 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn này là  $ADB, AEC$ . (a) Xác định dạng & giải  $\triangle ABC$ . (b) Xác định dạng & giải tứ giác  $BDEC$ .

**198** ([BBN23], 7.10., p. 133). Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $H, K$ . Đường thẳng  $O_1H$  cắt  $(O_1)$  tại  $A$ , cắt  $(O_2)$  tại  $B \neq H$ ,  $O_2H$  cắt  $(O_1)$  tại  $C$  & cắt  $(O_2)$  tại  $D \neq H$ . Chứng minh 3 đường thẳng  $AC, BD, HK$  đồng quy tại 1 điểm.

**199** ([BBN23], 7.11., p. 133). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A \in (O, R), B \in (O', R')$ . Đường tròn  $(I, r)$  tiếp xúc với  $AB$  & 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$ . Chứng minh:  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .

**200** ([BBN23], 7.12., p. 133). Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ 3 đường tròn tâm  $A, B, C$  đôi một tiếp xúc ngoài nhau tại  $M, N, P$ . Chứng minh đường tròn đi qua 3 điểm  $M, N, P$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**201** ([BBN23], 7.13., p. 133). Cho 1 tứ giác. Vẽ các đường tròn có đường kính là 4 cạnh của tứ giác đó. Chứng minh 4 đường thẳng chứa các dây chung của 4 đường tròn cắt nhau tạo thành 1 hình bình hành.

**202** ([BBN23], 7.14., p. 133). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  bằng nhau & ở ngoài nhau. Dựng 1 đường tròn tiếp xúc ngoài (hoặc tiếp xúc trong) với cả 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$ .

- 203** ([BBN23], 7.15., p. 133). Cho 3 đường tròn không biết tâm, tiếp xúc ngoài với nhau tại  $A, B, C$ . Tìm tâm của chúng chỉ bằng thước thẳng.
- 204** ([BBN23], 7.16., p. 133). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không cắt  $(O)$ .  $P \in d$  là điểm cố định. Vẽ đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với  $(O)$  & tiếp xúc với  $d$  tại  $P$ .
- 205** ([Bin23a], VD20, p. 112). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $BC$ ,  $B \in (O), C \in (O')$ . (a) Tính  $\angle BAC$ . (b) Tính  $BC$ . (c)  $D$  là giao điểm của  $CA$  với  $(O)$ ,  $D \neq A$ . Chứng minh 3 điểm  $B, O, D$  thẳng hàng. (d) Tính  $AB, AC$ .
- 206** ([Bin23a], VD21, p. 112). Cho điểm  $B$  nằm giữa  $A, C$  sao cho  $AB = 14$  cm,  $BC = 28$  cm. Vẽ về 1 phía của  $AC$  3 nửa đường tròn tâm  $I, K, O$  có đường kính theo thứ tự  $AB, BC, CA$ . Tính bán kính đường tròn  $(M)$  tiếp xúc ngoài với 2 nửa đường tròn  $(I), (K)$  & tiếp xúc trong với nửa đường tròn  $(O)$ .
- 207** ([Bin23a], VD22, p. 114). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có cùng bán kính, cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ cát tuyến chung  $DAE$  của 2 đường tròn,  $D \in (O), E \in (O')$ . Chứng minh  $BD = BE$ .
- 208** ([Bin23a], VD23, p. 114). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài  $AB, CD$ ,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Tiếp tuyến chung trong  $GH$  cắt  $AB, CD$  lần lượt ở  $E, F$ ,  $G \in (O), H \in (O')$ . Chứng minh: (a)  $AB = EF$ . (b)  $EG = FH$ .
- 209** ([Bin23a], 109., p. 115). 2 đường tròn  $(O, R), (O', R)$  cắt nhau tại  $A, B$ . Đoạn nối tâm  $OO'$  cắt 2 đường tròn  $(O), (O')$  theo thứ tự ở  $C, D$ . Tính  $R$  biết  $AB = 24$  cm,  $CD = 12$  cm.
- 210** ([Bin23a], 110., p. 115). 2 đường tròn  $(O, R), (O', R)$  cắt nhau tại  $A, B$ , với  $\angle OAO' = 90^\circ$ . Vẽ cát tuyến chung  $MAN$ ,  $M \in (O), N \in (O')$ . Tính  $AM^2 + AN^2$  theo  $R$ .
- 211** ([Bin23a], 111., p. 115). Cho 3 đường tròn tâm  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính & cùng đi qua 1 điểm  $I$ . 3 giao điểm khác  $I$  của 2 trong 3 đường tròn đó là  $A, B, C$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABC = \triangle O_1O_2O_3$ . (b)  $I$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 212** ([Bin23a], 112., pp. 115–116). Cho điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn tâm  $O$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AO$ .  $CD$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $C \in (O), D \in (A)$ . Đoạn nối tâm  $OA$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $H$ . Chứng minh  $DH$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .
- 213** ([Bin23a], 113., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Vẽ hình bình hành  $OBO'C$ . Chứng minh  $ACOO'$  là hình thang cân.
- 214** ([Bin23a], 114., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . (a) Nêu cách dựng cát tuyến chung  $CAD$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ , sao cho  $A$  là trung điểm  $CD$ . (b) Tính  $CD$  biết  $OO' = 5$  cm,  $OA = 4$  cm,  $O'A = 3$  cm.
- 215** ([Bin23a], 115., p. 116). Cho  $\angle xOy = 90^\circ$ . 2 điểm  $A, B$  theo thứ tự di chuyển trên 2 tia  $Ox, Oy$  sao cho  $OA + OB = k$  với hằng số  $k$ . Vẽ 2 đường tròn  $(A, OB), (B, OA)$ . (a) Chứng minh 2 đường tròn  $(A), (B)$  luôn cắt nhau. (b)  $M, N$  là 2 giao điểm của 2 đường tròn  $(A), (B)$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 216** ([Bin23a], 116., p. 116). 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $BC$ ,  $B \in (O), C \in (O')$ . (a) Cho  $R = 3$  cm,  $r = 1$  cm. Tính  $AB, AC$ . (b) Cho  $AB = 19.2$  cm,  $AC = 14.4$  cm. Tính  $R, r$ .
- 217** ([Bin23a], 117., p. 116). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc nhọn &  $(O_1)$  tiếp xúc ngoài với  $(O_2)$ ,  $(O_2)$  tiếp xúc ngoài với  $(O_3)$ . Biết bán kính 2 đường tròn  $(O_1), (O_3)$  là  $a, b$ . Tính bán kính đường tròn  $(O_2)$ .
- 218** ([Bin23a], 118., p. 116). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .  $AB$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ ,  $AC$  là đường kính của đường tròn  $(O')$ ,  $DE$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $D \in (O), E \in (O')$ ,  $K$  là giao điểm của  $BD, CE$ . (a) Tứ giác  $ADKE$  là hình gì? (b) Chứng minh  $AK$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn  $(O), (O')$ . (c)  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $MK \perp DE$ .
- 219** ([Bin23a], 119., pp. 116–117). 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ .  $BC, DE$  là 2 tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $B, D \in (O)$ . (a) Chứng minh  $BDEC$  là hình thang cân. (b) Tính diện tích hình thang  $BDEC$ .
- 220** ([Bin23a], 120., p. 117). 2 đường tròn  $(O, R), (O', r)$  tiếp xúc ngoài nhau.  $AB$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn,  $A \in (O), B \in (O')$ . (a) Tính độ dài  $AB$ . (b) Cho  $R = 36$  cm,  $r = 9$  cm. Tính bán kính đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với đường thẳng  $AB$  & tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn  $(O), (O')$ .
- 221** ([Bin23a], 121., p. 117). Trong 1 hình thang cao có 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau, mỗi đường tròn tiếp xúc với 2 cạnh bên & tiếp xúc với 1 đáy của hình thang. Biết bán kính 2 đường tròn đó bằng 2 cm, 8 cm. Tính diện tích hình thang.
- 222** ([Bin23a], 122., p. 117). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với 2 cạnh  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Chứng minh 3 điểm  $M, O, N$  thẳng hàng. (b) Tính bán kính đường tròn  $(O')$  theo  $R$ .
- 223** ([Bin23a], 123., p. 117). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc 2 cạnh  $AB, AC$ . Tính bán kính đường tròn  $(O')$  theo  $R$ .

**224** ([Bin23a], 124., p. 117). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . 2 dây  $BC, BD$  của đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O')$  lần lượt ở  $E, F$ .  $I$  là giao điểm của  $EF, AB$ . Chứng minh  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .

**225** ([Bin23a], 125., p. 117). Cho 3 đường tròn bán kính  $r$  tiếp xúc ngoài đôi một. Tính bán kính của đường tròn tiếp xúc với cả 3 đường tròn đó.

**226** ([Bin23a], 126., p. 117). Cho đường tròn  $(O, R)$ . Vẽ về 1 phía của đường kính  $AB$  2 tia tiếp tuyến  $Am, Bn$ .  $(I), (K)$  là 2 đường tròn tiếp xúc ngoài nhau & tiếp xúc ngoài đường tròn  $(O)$ , trong đó đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với tia  $Am$ , đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với tia  $Bn$ .  $x, y$  là bán kính của 2 đường tròn  $(I), (K)$ . Chứng minh  $R = 2\sqrt{xy}$ .

**227** ([Bin23a], 127., p. 117). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ .  $OC$  là bán kính vuông góc với  $AB$ ,  $d$  là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại  $C$ .  $(I)$  là đường tròn tiếp xúc trong với nửa đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với đường kính  $AB$ . Chứng minh điểm  $I$  cách đều đường thẳng  $d$  & điểm  $O$ .

**228** ([Bin23a], 128., p. 118). Cho nửa đường tròn  $(O)$  với đường kính  $AB = 2R$ .  $OE$  là bán kính vuông góc với  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(C)$  có đường kính  $OE$ .  $(D)$  là đường tròn tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(C)$ , tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  & tiếp xúc với đoạn thẳng  $OB$ . Tính bán kính của  $(D)$ .

**229** ([Bin23a], 129., p. 118). Cho điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ ,  $AC = 4$  cm,  $BC = 8$  cm. Vẽ về 1 phía của  $AB$  2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $AC, AB$ . Tính bán kính của đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 nửa đường tròn đó & tiếp xúc với đoạn thẳng  $AB$ .

**230** ([Bin23a], 130., p. 118). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính của đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $AB, AC$  & tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**231** ([Bin23a], 131., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O, 9$  cm),  $(O', 3$  cm) tiếp xúc ngoài nhau. 1 đường thẳng bị 2 đường tròn đó cắt tạo thành 3 đoạn thẳng bằng nhau. Tính độ dài mỗi đoạn thẳng đó.

**232** ([Bin23a], 132., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau,  $OO' = 65$  cm.  $AB$  là tiếp tuyến chung ngoài,  $CD$  là tiếp tuyến chung trong,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Tính bán kính 2 đường tròn  $(O), (O')$  biết  $AB = 63$  cm,  $CD = 25$  cm.

**233** ([Bin23a], 133., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $AB$  & tiếp tuyến chung trong  $EF$ ,  $A, E \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . (a)  $M$  là giao điểm của  $AB, EF$ . Chứng minh  $\triangle AOM \sim \triangle BMO'$ . (b) Chứng minh  $AE \perp BF$ . (c)  $N$  là giao điểm của  $AE, BF$ . Chứng minh 3 điểm  $O, N, O'$  thẳng hàng.

**234** ([Bin23a], 134., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Qua  $O$ , kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn  $(O')$ , chúng cắt đường tròn  $(O)$  tại  $A, B$ . Qua  $O'$ , kẻ 2 tia tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$ , chúng cắt đường tròn  $(O')$  ở  $C, D$ . Chứng minh  $A, B, C, D$  là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.

**235** ([Bin23a], 135., p. 118). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O, r)$ ,  $R > r$ . Dây  $BC$  của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ tại  $D, E$ .  $EA$  là đường kính của đường tròn nhỏ. Chứng minh  $AD^2 + BD^2 + CD^2 = 2(R^2 + r^2)$ .

**236** ([Bin23a], 136–137., p. 119). 2 dây  $ABC \parallel CD$  của đường tròn  $(O)$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O')$ . Biết đường kính của đường tròn  $(O')$  bằng 7 cm, tính bán kính của đường tròn  $(O)$  khi: (a)  $AB = 10$  cm,  $CD = 24$  cm. (b)  $AB = 6$  cm,  $CD = 8$  cm.

**237** ([Bin+23], VD1, p. 42). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ cát tuyến  $CAD$  &  $EAF$ ,  $C, E \in (O)$ ,  $D, F \in (O')$ , sao cho  $AB$  là phân giác của  $\angle CAF$ . Chứng minh  $CD = EF$ .

**238** ([Bin+23], VD2, pp. 42–43). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  & 4 đường tròn  $(A, R_A), (B, R_B), (C, R_C), (D, R_D)$  sao cho  $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$ .  $d_1, d_3$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(A, R_A), (C, R_C)$ ,  $d_2, d_4$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(B, R_B), (D, R_D)$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường thẳng  $d_1, d_2, d_3, d_4$ .

**239** ([Bin+23], VD3, p. 43). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau,  $AB, CD$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn, đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , cắt đường tròn  $(O')$  tại  $N$ . Chứng minh  $AM = DN$ .

**240** ([Bin+23], VD4, p. 44). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. các tiếp điểm của  $(O_1), (O_2)$  là  $A$ , của  $(O_2), (O_3)$  là  $B$ , của  $(O_3), (O_1)$  là  $C$ .  $AB, AC$  kéo dài cắt đường tròn  $(O_3)$  tại  $Q, P$ . Chứng minh  $P, O_3, Q$  thẳng hàng.

**241** ([Bin+23], VD5, p. 44). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A \in (O), B \in (O')$ . Đường tròn  $(I, r)$  tiếp xúc với  $AB$  & 2 đường tròn  $(O), (O')$ . Chứng minh: (a)  $AB = 2\sqrt{RR'}$ . (b)  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .

**242** ([Bin+23], VD6, p. 45). Cho 3 đường tròn  $(A, a), (B, b), (C, c)$  tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm  $D$  của đường tròn  $(A, a), (B, b)$ , kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn  $(C, c)$  tại  $M, N$ . Tính  $MN$  theo  $a, b, c$ .

**243** ([Bin+23], VD7, p. 45). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại  $A, B$ . Trong nửa mặt phẳng bờ  $OO'$  có chứa điểm  $B$ , kẻ 2 bán kính  $OC \parallel O'D$ . Chứng minh  $B$  là trực tâm của  $\triangle ACD$ .

**244** ([Bin+23], VD8, p. 46). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ ,  $\angle xOy = 90^\circ$  thay đổi luôn đi qua  $A$ , cắt đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tại  $B, C$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Xác định vị trí của  $B, C$  để  $AH$  có độ dài lớn nhất.



- 245** ([Bin+23], VD9, p. 47). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R'), R > R'$  cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ đường kính  $AC$  & đường kính  $AD$ . Tính độ dài  $BC, BD$  biết  $CD = a$ .
- 246** ([Bin+23], VD10, p. 47). Cho  $\triangle ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $\triangle MAB, \triangle MBC, \triangle MCA$  có chu vi bằng nhau.
- 247** ([Bin+23], VD11, p. 48). Cho đường tròn  $(O)$  & dây cung  $AB$ .  $M$  là điểm trên  $AB$ . Dựng đường tròn  $(O_1)$  qua  $A, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , đường tròn  $(O_2)$  qua  $B, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $N$ . Chứng minh  $\angle MNO = 90^\circ$ .
- 248** ([Bin+23], VD12, p. 48). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong  $CD$  & tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A, C \in (O), B, D \in (O')$ . Chứng minh  $AC, BD, OO'$  đồng quy.
- 249** ([Bin+23], VD13, p. 49). Dựng 2 đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là 2 điểm  $A, B$  cho trước, sao cho 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm  $M$  cho trước.
- 250** ([Bin+23], 6.1., p. 50). Cho đường tròn  $(O, R)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$  đều. Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với 2 cạnh  $AB, AC$  & đường tròn  $(O, R)$ . Tính khoảng cách từ  $O'$  đến  $B$  theo  $R$ .
- 251** ([Bin+23], 6.2., p. 50). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $C$  trên nửa đường tròn sao cho  $CA < CB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ .  $I$  là trung điểm  $CH$ , đường tròn  $(I, CH/2)$  cắt nửa đường tròn tại  $D$  & cắt 2 cạnh  $CA, CB$  thứ tự tại  $M, N$ , đường thẳng  $CD$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $CMHN$  là hình chữ nhật. (b)  $E, I, M, N$  thẳng hàng.
- 252** ([Bin+23], 6.3., p. 50). Cho 3 đường tròn  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính  $R$  cắt nhau tại điểm  $O$  cho trước.  $A, B, C$  là 3 giao điểm còn lại của 3 đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  có bán kính  $R$ .
- 253** ([Bin+23], 6.4., p. 50). 3 đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm  $O$ , từng đôi cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $A, B, C$ . Chứng minh  $O$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 254** ([Bin+23], 6.5., p. 50). Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $A, B$ , kẻ dây  $AM$  của đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_2)$  tại  $A$ , kẻ dây  $AN$  của  $(O_2)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_1)$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = AB$ . Chứng minh 4 điểm  $A, M, N, D$  nằm trên 1 đường tròn.
- 255** ([Bin+23], 6.6., p. 50). Cho đường tròn  $(O, R)$ , 1 điểm  $A$  trên đường tròn & đường thẳng  $d$  không đi qua  $A$ . Dựng đường tròn tiếp xúc với  $(O, R)$  tại  $A$  & tiếp xúc với đường thẳng  $d$ .
- 256** ([Bin+23], 6.7., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có cùng bán kính  $R$  sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại  $A, B$ . Tính bán kính đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với 2 cung nhỏ  $\widehat{AO}, \widehat{AO'}$  đồng thời tiếp xúc với  $OO'$ .
- 257** ([Bin+23], 6.8., p. 51). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$  cố định, điểm  $M$  tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng  $AB$ . Qua  $A, M$  dựng đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Qua  $B, M$  dựng đường tròn tâm  $J$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $B$ . 2 đường tròn tâm  $I, J$  cắt nhau tại điểm thứ 2  $N$ . Chứng minh  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 258** ([Bin+23], 6.9., p. 51). Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$  cho trước & 2 tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ , nằm về cùng 1 phía đối với  $AB$ .  $(O), (O')$  là 2 đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời: (a)  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$ . (b) Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $Ax, AB$ . (c) Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $By$  & tiếp xúc với  $BA$ . Tính GTLN của diện tích hình thang  $HOO'E$ , trong đó  $H, E$  là hình chiếu của  $O, O'$  trên  $AB$ .
- 259** ([Bin+23], 6.10., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . 1 đường tròn  $(O)$  thay đổi tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ . Giả sử  $MN$  là đường kính đường tròn  $(O)$  sao cho  $MN \parallel OO'$ .  $H$  là giao điểm của  $MO_2, NO_1$ . Chứng minh điểm  $H$  thuộc 1 đường thẳng cố định.

## 5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

- 260** ([Bin23a], VD14, p. 102). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Qua điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt  $Ax, By$  lần lượt ở  $C, D$ .  $N$  là giao điểm của  $AD$  &  $BC$ . Chứng minh  $MN \perp AB$ .
- 261** ([Bin23a], VD15, p. 103). Cho  $(O)$ , điểm  $K$  nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ 2 tiếp tuyến  $KA, KB$  với đường tròn ( $A, B$  là 2 tiếp điểm). Kẻ đường kính  $AOC$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $\triangle KBC \sim \triangle OBE$ . (b)  $CK \perp OE$ .
- 262** ([Bin23a], 72., p. 103). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Vẽ 2 tiếp tuyến  $Ax, By$  với nửa đường tròn & tia  $Oz \perp AB$ , 3 tia  $Ax, By, Oz$  cùng phía với nửa đường tròn đối với  $AB$ .  $E$  là điểm bất kỳ của nửa đường tròn. Qua  $E$  vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt  $Ax, By, Oz$  theo thứ tự ở  $C, D, M$ . Chứng minh khi điểm  $E$  thay đổi vị trí trên nửa đường tròn thì: (a) Tích  $AC \cdot BD$  không đổi. (b) Điểm  $M$  chạy trên 1 tia. (c) Tứ giác  $ACDB$  có diện tích nhỏ nhất khi nó là hình chữ nhật. Tính diện tích nhỏ nhất đó.
- 263** ([Bin23a], 73., p. 104). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Vẽ về 1 phía của  $AB$  2 tia  $Ax \parallel By$ . (a) Dựng đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với đoạn thẳng  $AB$  & tiếp xúc với 2 tia  $Ax, By$ . (b) Tính  $\angle AOB$ . (c) 3 tiếp điểm của đường tròn  $(O)$  với  $Ax, By, AB$  lần lượt là  $M, N, H$ . Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $AB$ . (d) Tìm vị trí của 2 tia  $Ax, By$  để  $HM = HN$ ?



**264** ([Bin23a], 74., p. 104). Cho hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ , tia phân giác của  $\angle C$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AD$ . (a) Chứng minh  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(I, IA)$ . (b) Cho  $AD = 2a$ . Tính  $AB \cdot CD$  theo  $a$ . (c)  $H$  là tiếp điểm của  $BC$  với đường tròn  $(I)$ .  $K$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh  $KH \parallel CD$ .

**265** ([Bin23a], 75., p. 104). Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB$ , điểm  $D$  nằm trên đường tròn. 2 tiếp tuyến của đường tròn tại  $A, D$  cắt nhau ở  $C$ .  $E$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AB$ , gọi  $I$  là giao điểm của  $BC, DE$ . Chứng minh  $ID = IE$ .

**266** ([Bin23a], 76., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $O$  là trung điểm  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $H, K$ . 1 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  ở  $M, N$ . (a) Cho  $\angle B = \angle C = \alpha$ . Tính  $\angle MON$ . (b) Chứng minh  $OM, ON$  chia tứ giác  $BMNC$  thành 3 tam giác đồng dạng. (c) Cho  $BC = 2a$ . Tính  $BM \cdot CN$ . (d) Tìm vị trí tiếp tuyến  $MN$  để  $BM + CN$  nhỏ nhất.

**267** ([Bin23a], 77., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $BH = 20$  cm,  $CH = 45$  cm. Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AH$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $BM, CN$  với đường tròn,  $M \neq H, N \neq H$  là 2 tiếp điểm. (a) Tính diện tích tứ giác  $BMNC$ . (b)  $K$  là giao điểm của  $CN, AH$ . Tính  $AK, KN$ . (c)  $I$  là giao điểm của  $AM, BC$ . Tính  $IB, IM$ .

**268** ([Bin23a], 78., p. 105). Cho đường tròn  $(O, 6$  cm). 1 điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn vuông góc với nhau,  $B, C$  là 2 tiếp điểm. Trên 2 cạnh  $AB, AC$  của  $\angle A$ , lấy 2 điểm  $D, E$  sao cho  $AD = 4$  cm,  $AE = 3$  cm. Chứng minh  $DE$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**269** ([Bin23a], 79., p. 105). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Với tâm  $B$  & bán kính  $a$ , vẽ cung  $AC$  nằm trong hình vuông. Qua điểm  $E$  thuộc cung đó, vẽ tiếp tuyến với cung  $AC$ , cắt  $AD, CD$  theo thứ tự tại  $M, N$ . (a) Tính chu vi  $\triangle DMN$ . (b) Tính số đo  $\angle MBN$ . (c) Chứng minh  $\frac{2a}{3} < MN < a$ .

**270** ([Bin23a], 80., p. 105). Cho hình vuông  $ABCD$ . 1 đường tròn tâm  $O$  tiếp xúc với 2 đường thẳng  $AB, AD$  & cắt mỗi cạnh  $BC, CD$  thành 2 đoạn thẳng có độ dài 2 cm, 23 cm. Tính bán kính đường tròn.

## 6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác

**271** ([Bin23a], VD16, p. 105). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với cạnh  $AB$  tại  $D$ . Tính  $\angle C$  biết  $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$ .

**272** ([Bin23a], VD17, p. 106).  $\triangle ABC$  có chu vi 80 cm ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  song song với  $BC$  cắt  $AB, AC$  theo thứ tự ở  $M, N$ . (a) Biết  $MN = 9.6$  cm. Tính  $BC$ . (b) Biết  $AC - AB = 6$  cm. Tính  $AB, BC, CA$  để  $MN$  có GTLN.

**273** ([Bin23a], VD18, p. 107).  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp 1 tam giác vuông &  $h$  là đường cao ứng với cạnh huyền. Chứng minh  $2 < \frac{h}{r} < 2.5$ .

**274** ([Bin23a], 81., p. 107). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 15$  cm,  $AC = 20$  cm.  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Tính khoảng cách từ  $I$  đến đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$ .

**275** ([Bin23a], 82., p. 107). Tính 3 cạnh của tam giác vuông ngoại tiếp đường tròn biết: (a) Tiếp điểm trên cạnh huyền chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng 5 cm, 12 cm. (b) 1 cạnh góc vuông bằng 20 cm, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6 cm.

**276** ([Bin23a], 83., p. 107). Tính diện tích tam giác vuông biết 1 cạnh góc vuông bằng 12 cm, tỷ số giữa bán kính 2 đường tròn nội tiếp & ngoại tiếp tam giác đó bằng 2 : 5.

**277** ([Bin23a], 84., p. 107). Cho 1 tam giác vuông có cạnh huyền bằng 10 cm, diện tích bằng 24 cm<sup>2</sup>. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.

**278** ([Bin23a], 85., p. 107). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 5$ . Tính  $AC, BC$  biết số đo chu vi  $\triangle ABC$  bằng số đo diện tích  $\triangle ABC$ .

**279** ([Bin23a], 86., pp. 107–108). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .  $(O, r), (O_1, r_1), (O_2, r_2)$  lần lượt là 3 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ABH, \triangle ACH$ . (a) Chứng minh  $r + r_1 + r_2 = AH$ . (b) Chứng minh  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ . (c) Tính độ dài  $O_1O_2$  biết  $AB = 3$  cm,  $AC = 4$  cm.

**280** ([Bin23a], 87., p. 108). Đường tròn  $(O, r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . 3 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  song song với 3 cạnh của  $\triangle ABC$  cắt từ  $\triangle ABC$  thành 3 tam giác nhỏ.  $r_1, r_2, r_3$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp 3 tam giác nhỏ đó. Chứng minh  $r_1 + r_2 + r_3 = r$ .

**281** ([Bin23a], 88., p. 108). Đường tròn tâm  $I$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC, AB, AC$  lần lượt ở  $D, E, F$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AD, DF$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $EN$ .

**282** ([Bin23a], 89., p. 108).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  ngoại tiếp đường tròn tâm  $I$  bán kính  $r$ .  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tính 3 cạnh  $\triangle ABC$  theo  $r$  biết  $IG \parallel AC$ .

**283** ([Bin23a], 90., p. 108).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm.  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp,  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Tính  $IG$ .

**284** ([Bin23a], 91., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ .  $D, E, F$  lần lượt là tiếp điểm trên 3 cạnh  $BC, AB, AC$ .  $H$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $D$  đến  $EF$ . Chứng minh  $\angle BHE = \angle CHF$ .

**285** ([Bin23a], 92., p. 108). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = AC = 40$  cm,  $BC = 48$  cm.  $O, I$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính: (a) Bán kính đường tròn nội tiếp. (b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp. (c) Khoảng cách  $OI$ .

**286** ([Bin23a], 93., p. 108). Tính 3 cạnh 1 tam giác cân biết bán kính đường tròn nội tiếp bằng 6 cm, bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 12.5 cm.

**287** ([Bin23a], 94., p. 108). Bán kính của đường tròn nội tiếp 1 tam giác bằng 2 cm, tiếp điểm trên 1 cạnh chia cạnh đó thành 2 đoạn thẳng 4 cm, 6 cm. Giải tam giác.

**288** ([Bin23a], 95., p. 108). Tính 3 góc của 1 tam giác vuông biết tỷ số giữa 2 bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp bằng  $\sqrt{3} + 1$ .

**289** ([Bin23a], 96., pp. 108–109). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC$  tại  $D$ . Vẽ đường kính  $DN$  của đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $N$  cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $I, K$ . (a) Chứng minh  $\frac{NI}{NK} = \frac{DC}{DB}$ . (b)  $F$  là giao điểm của  $AN, BC$ . Chứng minh  $BD = CF$ .

**290** ([Bin23a], 97., p. 109). Cho đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  đều. 1 tiếp tuyến của đường tròn cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . (a) Tính diện tích  $\triangle AMN$  biết  $BC = 8$  cm,  $MN = 3$  cm. (b) Chứng minh  $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM \cdot AN$ . (c) Chứng minh  $\frac{AM}{BM} + \frac{AN}{CN} = 1$ .

**291** ([Bin23a], 98., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ .  $(I)$  là đường tròn nội tiếp tam giác. Đường vuông góc với  $CI$  tại  $I$  cắt  $AC, AB$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $AM \cdot BN = IM^2 = IN^2$ . (b)  $\frac{IA^2}{bc} + \frac{IB^2}{ca} + \frac{IC^2}{ab} = 1$ .

**292** ([Bin23a], 99., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB < AC < BC$ . Trên 2 cạnh  $AB, AC$  lấy 2 điểm  $D, E$  sao cho  $BD = CE = BC$ .  $O, I$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  bằng  $OI$ .

**293** ([Bin23a], 100., p. 109).  $R, r$  lần lượt là 2 bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp 1 tam giác vuông có diện tích  $S$ . Chứng minh  $R + r \geq \sqrt{2S}$ .

**294** ([Bin23a], 101., p. 109). Trong các  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ , chiều cao tương ứng bằng  $h$ , tam giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất?

**295** ([Bin23a], 102., p. 109). Trong các tam giác vuông ngoại tiếp cùng 1 đường tròn, tam giác nào có đường cao ứng với cạnh huyền lớn nhất?

**296** ([Bin23a], 103., p. 109). (a) Cho đường tròn  $(I, r)$  nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $IA + IB + IC \geq 6r$ . (b) Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $P, Q, N$  lần lượt là tâm của 3 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BOC, \triangle COA, \triangle AOB$ . Chứng minh  $OP + OQ + ON \geq 3R$ .

**297** ([Bin23a], 104., p. 109). Độ dài 3 đường cao của  $\triangle ABC$  là các số tự nhiên, bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Chứng minh  $\triangle ABC$  đều & tính độ dài 3 đường cao của  $\triangle ABC$ .

**298** ([Bin23a], 105., p. 110).  $h_a, h_b, h_c$  là 3 đường cao ứng với 3 cạnh  $a, b, c$  của 1 tam giác,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh: (a)  $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ . (b)  $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 27r^2$ . Khi nào xảy ra đẳng thức?

## 7 Đường Tròn Bàng Tiếp Tam Giác

**299** ([Bin23a], VD19, p. 110). Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh các tiếp điểm trên cạnh  $BC$  của đường tròn bàng tiếp trong  $\angle A$  & của đường tròn nội tiếp đối xứng với nhau qua trung điểm của  $BC$ .

**300** ([Bin23a], 106., p. 111).  $a, b, c$  lần lượt là 3 cạnh của  $\triangle ABC$ ,  $h_a, h_b, h_c$  là 3 đường cao tương ứng,  $R_a, R_b, R_c$  là bán kính 3 đường tròn bàng tiếp tương ứng,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $p$  là nửa chu vi  $\triangle ABC$ ,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Chứng minh: (a)  $S = R_a(p - a) = R_b(p - b) = R_c(p - c)$ . (b)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}$ . (c)  $\frac{1}{R_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$ .

**301** ([Bin23a], 107., p. 111). Tính cạnh huyền của 1 tam giác vuông biết  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $R$  là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc vuông.

**302** ([Bin23a], 108., p. 111). Cho  $\triangle ABC$ .  $(P), (Q), (R)$  lần lượt là 3 đường tròn bàng tiếp trong  $\angle A, \angle B, \angle C$ . (a) tiếp điểm của  $(Q), (R)$  trên đường thẳng  $BC$  lần lượt là  $E, F$ . Chứng minh  $CE = BF$ . (b)  $H, I, K$  lần lượt là tiếp điểm của 3 đường tròn  $(P), (Q), (R)$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ . Nếu  $AH = BI = CK$  thì  $\triangle ABC$  là tam giác gì?

## 8 Đường Tròn & Phép Vị Tự

- 303** ([Bin23a], VD24, p. 120). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC$  ở  $D$ .  $M, E$  lần lượt là trung điểm  $BC, AD$ . (a)  $DN$  là đường của đường tròn  $(O)$ ,  $F$  là tiếp điểm trên  $BC$  của đường tròn  $(O')$  bàng tiếp trong  $\angle A$  của  $\triangle ABC$ . Chứng minh 3 điểm  $A, N, F$  thẳng hàng. (b) Chứng minh 3 điểm  $E, O, M$  thẳng hàng.
- 304** ([Bin23a], 138., p. 120). Cho 2 đường tròn  $(I, r), (K, r)$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O, R)$  theo thứ tự tại  $A, B$ .  $C$  là 1 điểm thuộc đường tròn  $(O)$ ,  $CA$  cắt đường tròn  $(I)$  tại điểm  $D$ ,  $BC$  cắt đường tròn  $(K)$  tại điểm  $E$ . Chứng minh  $DE \parallel AB$ .
- 305** ([Bin23a], 139., p. 121). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ ,  $R > R'$ . Vẽ 2 bán kính  $OB \parallel O'B'$ ,  $B, B'$  thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ  $OO'$ . 2 đường thẳng  $BB', OO'$  cắt nhau tại  $K$ . (a) Tính  $\angle BAB'$ . (b) Tính  $OK$  theo  $R, R'$ . (c) Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn trên cũng đi qua điểm  $K$ . (d) Khi 2 bán kính  $OB, O'B'$  di chuyển thì trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABB'$  di chuyển trên đường nào?
- 306** ([Bin23a], 140., p. 121). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  cắt nhau tại  $A, B$ ,  $R > R'$ . Tiếp tuyến chung ngoài  $CD$  cắt  $OO'$  ở  $K$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ .  $E$  là giao điểm thứ 2 của  $AK$  & đường tròn  $(O')$ . Chứng minh  $AC \parallel ED$ .

## 9 Dựng Hình

- 307** ([Bin23a], VD25, p. 122). Dựng đường tròn đi qua 1 điểm cho trước & tiếp xúc với 2 cạnh của 1 góc cho trước.
- 308** ([Bin23a], VD26, p. 124). Cho  $\triangle ABC$  có  $B, C$  là 2 góc nhọn. Dựng đường thẳng vuông góc với  $BC$  chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- 309** ([Bin23a], VD27, p. 125). Cho hình vuông  $ABCD$ . Dựng đường kính đi qua  $C$  cắt 2 tia  $AB, AD$  theo thứ tự ở  $M, N$  sao cho  $MN$  có độ dài bằng  $k$  cho trước.
- 310** ([Bin23a], 141., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$  với 2 bán kính  $OA, OB$  &  $O, A, B$  không thẳng hàng. Dựng dây  $CD$  sao cho 2 bán kính  $OA, OB$  chia dây  $CD$  thành 2 phần bằng nhau.
- 311** ([Bin23a], 142., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $C$  thuộc đường kính ấy. Dựng dây  $DE \perp AB$  sao cho  $AD \perp EC$ .
- 312** ([Bin23a], 143., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$  & 2 điểm  $A, B$  nằm bên ngoài đường tròn. Dựng 2 đường thẳng theo thứ tự đi qua  $A, B$  song song với nhau & cắt đường tròn  $(O)$  tạo thành 2 dây bằng nhau.
- 313** ([Bin23a], 144., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không giao với đường tròn. Dựng điểm  $M \in d$  sao cho nếu vẽ 2 tiếp tuyến  $MC, MD$  với đường tròn thì  $\angle COD = 130^\circ$ .
- 314** ([Bin23a], 145., p. 127). Qua điểm  $M$  nằm bên trong đường tròn  $(O)$  & không trùng  $O$ , dựng dây  $AB$  sao cho  $MA - MB = a$ ,  $a$  là độ dài cho trước.
- 315** ([Bin23a], 146., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  bằng nhau, tiếp xúc ngoài tại  $B$ , có 2 đường kính theo thứ tự là  $AB, BC$ . Dựng đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $(O)$  tại  $D$ , cắt  $(O')$  ở  $E, F$  sao cho  $E$  là trung điểm của  $DF$ .
- 316** ([Bin23a], 147., p. 127). Dựng tam giác vuông biết độ dài 2 đường trung tuyến ứng với 2 cạnh góc vuông.
- 317** ([Bin23a], 148., p. 127). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $\angle A = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .
- 318** ([Bin23a], 149., p. 127). Dựng  $\triangle ABC$  biết  $AC - AB = d$ , đường cao  $AH = h$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .
- 319** ([Bin23a], 150., p. 127). Cho 2 điểm  $O, O'$  nằm về 1 phía của đường thẳng  $d$ . Dựng 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài sao cho tiếp tuyến chung ngoài song song với  $d$ .
- 320** ([Bin23a], 151., p. 127). Cho đường tròn  $(I)$  & đường thẳng  $m$  không giao nhau, điểm  $A$  thuộc đường tròn. Dựng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường tròn  $(I)$  tại  $A$  & tiếp xúc với đường thẳng  $m$ .
- 321** ([Bin23a], 152., p. 127). Cho đường tròn  $(I)$  & đường thẳng  $m$  không giao nhau, điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $m$ . Dựng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với đường thẳng  $m$  tại  $C$  & tiếp xúc với đường tròn  $(I)$ .
- 322** ([Bin23a], 153., p. 127). Cho 2 đường thẳng  $a, b$  cắt nhau & điểm  $A$  nằm ngoài 2 đường thẳng ấy. Dựng đường tròn  $(A)$  cắt 2 đường thẳng  $a, b$  tạo thành 2 dây có tổng bằng  $2k$ .
- 323** ([Bin23a], 154., p. 127). Cho  $\angle xOy$  & điểm  $M$  nằm trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua  $M$  cắt 2 cạnh của góc ở  $A, B$  sao cho  $OA + OB = k$ .
- 324** ([Bin23a], 155., p. 127). Dựng tam giác cân biết độ dài của đoạn nối 2 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với 2 cạnh bên & đường cao  $h$  ứng với cạnh bên.
- 325** ([Bin23a], 156., p. 127). Cho 3 điểm  $H, D, M$  thẳng hàng theo thứ tự ấy, trong đó  $HD = 2, DM = 3$ . Dựng  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  nhận  $AH$  là đường cao,  $AD$  là đường phân giác,  $AM$  là trung tuyến.

- 326** ([Bin23a], 157., p. 128). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $D$  là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh huyền. (a)  $E$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle AHM$ . Chứng minh  $MD = ME$  bằng cách tính 2 tỷ số  $\frac{ME}{MF}$ ,  $\frac{MD}{MF}$  theo 3 cạnh  $\triangle ABC$ . (b) Suy ra cách dựng  $\triangle ABC$  vuông biết 3 điểm  $H, D, M$  theo thứ tự thuộc 1 đường thẳng.
- 327** ([Bin23a], 158., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dựng điểm  $M \in xy$  sao cho nếu vẽ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn  $(O)$  thì  $\angle AMx = \angle BMx$ .
- 328** ([Bin23a], 159., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dựng điểm  $A \in xy$  sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ  $A$  đến 2 đường tròn nhận  $xy$  là đường thẳng chứa tia phân giác.
- 329** ([Bin23a], 160., p. 128). Cho đường thẳng  $xy$ , điểm  $A$  & đường tròn  $(O)$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Dựng hình vuông  $ABCD$  có  $A \in (O)$ ,  $C \in (O')$ ,  $B, D \in xy$ .
- 330** ([Bin23a], 161., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . Dựng đường thẳng đi qua  $A$  bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng  $a$ .
- 331** ([Bin23a], 162., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dựng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây bằng nhau.
- 332** ([Bin23a], 163., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dựng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có tổng bằng  $a$ .
- 333** ([Bin23a], 164., p. 128). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  & 1 đường thẳng  $d$ . Dựng đường thẳng song song với  $d$  & bị 2 đường tròn cắt thành 2 dây có hiệu bằng  $a$ .
- 334** ([Bin23a], 165., p. 128). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A \neq O$  nằm bên trong đường tròn. Dựng dây  $BC$  đi qua  $A$  sao cho  $AB = 2AC$ .
- 335** ([Bin23a], 166., p. 128). Cho 2 đường tròn tâm  $O$ , điểm  $A$  thuộc đường tròn lớn. Dựng dây  $AB$  của đường tròn lớn sao cho đường tròn nhỏ chia  $AB$  thành 3 phần bằng nhau.
- 336** ([Bin23a], 167., p. 128). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Dựng điểm  $H$  thuộc đoạn thẳng ấy sao cho  $AH \cdot BH = a^2$  với  $a$  là 1 độ dài cho trước.
- 337** ([Bin23a], 168., p. 129). Dựng hình vuông có diện tích bằng diện tích 1 hình thang cho trước.
- 338** ([Bin23a], 169., p. 129). Dựng tam giác đều có diện tích bằng diện tích 1 tam giác cho trước.
- 339** ([Bin23a], 170., p. 129). Dựng  $\triangle ABC$  biết 2 cạnh  $AB = c, AC = b$ , đường phân giác  $AD = d$ .
- 340** ([Bin23a], 171., p. 129). Cho  $\triangle ABC$ . Dựng đường thẳng song song với  $BC$  chia  $\triangle ABC$  thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- 341** ([Bin23a], 172., p. 129). Cho 1 hình thang. Dựng đường thẳng song song với 2 đáy chia hình thang thành 2 phần có diện tích bằng nhau.
- 342** ([Bin23a], 173., p. 129). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ . Dựng đường thẳng  $EF$  song song với 2 đáy,  $E \in AD, F \in BC$ , sao cho  $BE \parallel DF$ .
- 343** ([Bin23a], 174., p. 129). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ .  $BB'$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn. Dựng điểm  $M$  nằm trên nửa đường tròn sao cho  $MA$  bằng khoảng cách từ  $M$  đến  $BB'$ .

## 10 Toán Cực Trị

- 344** ([Bin23a], VD28, p. 130). Cho điểm  $A$  nằm bên trong dải tạo bởi 2 đường thẳng song song  $d \parallel d'$ . Dựng điểm  $B \in d, C \in d'$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  & có diện tích nhỏ nhất.
- 345** ([Bin23a], VD29, p. 131). Cho  $\angle x'Oy'$  & điểm  $M$  nằm trong góc. Dựng đường thẳng đi qua  $M$  cắt  $Ox', Oy'$  lần lượt ở  $A, B$  sao cho tổng  $OA + OB$  có GTNN.
- 346** ([Bin23a], VD30, p. 131). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ , tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến  $ADE$  bất kỳ. Vẽ dây  $CK \parallel DE$ . Xác định vị trí của cát tuyến  $ADE$  để  $\triangle AKE$  có diện tích lớn nhất.
- 347** ([Bin23a], 175., p. 132). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 2R$ . Dựng điểm  $C \in (O)$  sao cho  $\triangle C$  có diện tích lớn nhất, trong đó  $CH$  là đường cao của  $\triangle ABC$ ,  $CE, CF$  là 2 đường phân giác của  $\triangle CHA, \triangle CHB$ .
- 348** ([Bin23a], 176., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A \neq O$  nằm bên trong đường tròn. Dựng điểm  $B \in (O)$  sao cho  $\angle OBA$  có số đo lớn nhất.
- 349** ([Bin23a], 177., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn. Dựng đường thẳng đi qua  $A$ , cắt đường tròn ở  $B, C$  sao cho tổng  $AB + AC$  có GTLN.



- 350** ([Bin23a], 178., p. 132). Cho đường tròn  $(O)$  & đường thẳng  $d$  không giao nhau. Đặt điểm  $M \in d$  sao cho nếu kẻ 2 tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn thì  $AB$  có độ dài nhỏ nhất.
- 351** ([Bin23a], 179., p. 132). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Qua  $A$ , dựng 2 tia vuông góc với nhau sao cho chúng cắt 2 đường tròn  $(O), (O')$  lần lượt ở  $B, C$  tạo thành  $\triangle ABC$  có diện tích lớn nhất.
- 352** ([Bin23a], 180., p. 132). Cho đoạn thẳng  $AB$ , 2 tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$  & nằm về 1 phía của  $AB$ . Dựng 2 đường tròn  $(I), (K)$  tiếp xúc ngoài với nhau, tiếp xúc với đoạn  $AB$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với tia  $Ax$ , đường tròn  $(K)$  tiếp xúc với tia  $By$  sao cho tứ giác  $CIKD$  có diện tích lớn nhất với  $C, D$  lần lượt là 2 tiếp điểm của 2 đường tròn  $(I), (K)$  với  $AB$ .
- 353** ([Bin23a], 181., p. 133). Cho  $\angle xAy$ , đường tròn  $(O)$  nằm trong góc ấy. Đặt điểm  $M \in (O)$  sao cho tổng các khoảng cách từ  $M$  đến 2 cạnh của góc có GTNN.
- 354** ([Bin23a], 182., p. 133). Cho đường tròn  $(O, 2)$  & đường thẳng  $d$  đi qua  $O$ . Đặt điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho 2 tiếp tuyến kẻ từ  $A$  tới đường tròn cắt  $d$  tại  $B, C$  tạo thành  $\triangle ABC$  có diện tích nhỏ nhất.
- 355** ([Bin23a], 183., p. 133). Cho  $\angle xOy$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh của góc tại  $A, B$ . Dựng tiếp tuyến với cung nhỏ  $AB$  của đường tròn  $(I)$  cắt 2 cạnh của góc tại  $C, D$  sao cho: (a)  $CD$  có độ dài nhỏ nhất. (b)  $\triangle OCD$  có diện tích lớn nhất.
- 356** ([Bin23a], 184., p. 133). (a) Cho  $\angle xOy$  & điểm  $M$  nằm bên trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua  $M$  cắt 2 cạnh của góc ở  $A, B$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  bằng  $2p$ . (b) Cho  $\angle xOy$ . Dựng 2 điểm  $C, D$  lần lượt nằm trên  $Ox, Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OCD$  bằng  $2p$  cho trước &  $\triangle OCD$  có diện tích lớn nhất.
- 357** ([Bin23a], 185., p. 133). Cho  $\angle xOy$  & 1 điểm  $M$  nằm bên trong góc đó. Dựng đường thẳng đi qua  $M$  cắt  $Ox, Oy$  ở  $A, B$  sao cho  $\triangle OAB$  có chu vi nhỏ nhất.
- 358** ([Bin23a], 186., p. 133). Cho đoạn thẳng  $AD$  & trung điểm của nó. Dựng  $\triangle ABC$  nhận  $AD$  là đường cao,  $H$  là trực tâm sao cho  $BC$  có độ dài nhỏ nhất.
- 359** ([Bin23a], 187., p. 133). Cho đường tròn  $(O)$ . Đặt điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn sao cho đường vuông góc với  $OA$  tại  $O$  tạo thành với 2 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ  $A$  1 tam giác có diện tích nhỏ nhất.
- 360** ([Bin23a], 188., p. 133). Chứng minh trong các tam giác có cùng chu vi, tam giác đều có diện tích lớn nhất.
- 361** ([Bin23a], 189., p. 133). Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt chuyển động trên 2 cạnh  $BC, CD$  sao cho  $\angle MAN = 45^\circ$ . (a) Chứng minh khoảng cách từ  $A$  đến  $MN$  & chu vi  $\triangle CMN$  không đổi. (b) Dựng 2 điểm  $M, N$  để  $MN$  có độ dài nhỏ nhất. (c) Chứng minh khi  $MN$  có độ dài nhỏ nhất thì  $\triangle CMN$  có diện tích lớn nhất.
- 362** ([Bin23a], 190., p. 133). Cho hình vuông  $ABCD$ . Dựng đường thẳng đi qua  $C$  cắt 2 tia  $AB, AD$  tại 2 điểm  $M, N$  sao cho đoạn thẳng  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 363** ([Bin23a], 191., p. 134). Cho điểm  $C$  thuộc tia phân giác của  $\angle A$ . Dựng đường thẳng đi qua  $C$  cắt 2 cạnh của  $\angle A$  tại 2 điểm  $M, N$  sao cho đoạn thẳng  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 364** ([Bin23a], 192., p. 134). (a) Chứng minh trong các  $\triangle ABC$  có diện tích  $S$  & có số đo  $\angle A$  không đổi, tam giác có cạnh  $BC$  nhỏ nhất là tam giác cân tại  $A$ . (b) Cho  $\triangle ABC$ . Dựng điểm  $M$  thuộc tia  $AB$ , điểm  $N$  thuộc tia  $AC$  sao cho  $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$  &  $MN$  có độ dài nhỏ nhất.
- 365** ([Bin23a], 193., p. 134). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $MN$ . Dựng hình chữ nhật  $ABCD$  nội tiếp nửa đường tròn với  $A, D \in MN$ ,  $B, C$  thuộc nửa đường tròn, sao cho hình chữ nhật đó: (a) Có diện tích lớn nhất. (b) Có chu vi lớn nhất.
- 366** ([Bin23a], p. 134, Golden ratio – Tỷ lệ vàng  $\varphi$ ). Cho 1 đoạn thẳng có độ dài  $a$ . Dựng đoạn thẳng có độ dài  $x$  sao cho  $x$  bằng trung bình nhân của đoạn thẳng đã cho  $a$  & phần còn lại  $a - x$ .
- 367** ([Bin23a], p. 136). Dùng thước & compa, chia 1 đường tròn thành 5 phần bằng nhau.

## 11 Liên Hệ Giữa Cung & Dây

- 368** ([Bin23b], VD31, p. 83). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . 2 điểm  $C, D$  di chuyển trên đường tròn sao cho  $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ . Trong trường hợp nào thì dây  $CD$  có độ dài không đổi?
- 369** ([Bin23b], 194., p. 84). Tính bán kính của đường tròn  $(O)$  biết dây  $AB$  của đường tròn có độ dài bằng  $2a$  & khoảng cách từ điểm chính giữa của cung  $AB$  đến dây  $AB$  bằng  $h$ .
- 370** ([Bin23b], 195., p. 84). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2$  cm, dây  $CD \parallel AB$ ,  $C \in \widehat{AD}$ . Tính độ dài các cạnh của hình thang  $ABDC$  biết chu vi hình thang bằng 5 cm.
- 371** ([Bin23b], 196., p. 84). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB = 20$  cm.  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm  $H$  thuộc bán kính  $OA$  sao cho  $OH = 6$  cm. Đường vuông góc với  $OA$  tại  $H$  cắt nửa đường tròn ở  $D$ . Vẽ dây  $AE \parallel CD$ .  $K$  là hình chiếu của  $E$  trên  $AB$ . Tính diện tích  $\triangle AEK$ .
- 372** ([Bin23b], 197., p. 84). Cho  $\triangle ABC$  đều có diện tích  $S$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trên 3 cung  $AB, BC, CA$ , lấy lần lượt 3 điểm  $A', B', C'$  sao cho 3 cung  $\widehat{AA'}, \widehat{BB'}, \widehat{CC'}$  đều có số đo bằng  $30^\circ$ . Tính diện tích phần chung của  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ .
- 373** ([Bin23b], 198., p. 84).  $R, r$  lần lượt là bán kính 2 đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp 1 tam giác. Chứng minh  $R \geq 2r$ .

## 12 Góc Nội Tiếp

**374** ([Bin23b], VD32, p. 85).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$  có  $AB = 8$  cm,  $AC = 15$  cm, đường cao  $AH = 5$  cm. Tính bán kính đường tròn.

**375** ([Bin23b], VD33, p. 85). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ , gọi  $(I, r)$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $H$  là tiếp điểm của  $AB$  với đường tròn  $(I)$ ,  $D$  là giao điểm của  $AI$  với đường tròn  $(O)$ ,  $DK$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ .  $d$  là độ dài  $OI$ . Chứng minh: (a)  $\triangle AHI \sim \triangle KCD$ . (b)  $DI = DB = DC$ . (c)  $IA \cdot ID = R^2 - d^2$ . (d) (định lý Euler)  $d^2 = R^2 - 2Rr$ .

**376** ([Bin23b], 199., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có  $BC = a, CA = b, AB = c$  & nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ . Chứng minh  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

**377** ([Bin23b], 200., p. 86). Cho đường tròn  $(O)$  có đường kính  $AB = 12$  cm. 1 đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $M$  & cắt tiếp tuyến của đường tròn tại  $B$  ở  $N$ .  $I$  là trung điểm  $MN$ . Tính  $AM$  biết  $AI = 13$  cm.

**378** ([Bin23b], 201., p. 86). Cho đường tròn  $(O, R)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ .  $I$  là trung điểm  $OB$ . Tia  $CI$  cắt đường tròn ở  $E$ ,  $EA$  cắt  $CD$  ở  $K$ . Tính  $DK$ .

**379** ([Bin23b], 202., p. 86). Cho nửa đường tròn đường kính  $BC$ . 2 điểm  $M, N$  thuộc nửa đường tròn sao cho  $\widehat{BM} = \widehat{MN} = \widehat{NC}$ . 2 điểm  $D, E$  thuộc đường kính  $BC$  sao cho  $BD = DE = EC$ .  $A$  là giao điểm của  $MD, NE$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  đều.

**380** ([Bin23b], 203., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 3 đường cao  $AD, BE, CF$  cắt đường  $(O)$  lần lượt ở  $M, N, K$ . Chứng minh:  $\frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CK}{CF} = 4$ .

**381** ([Bin23b], 204., p. 87). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  có dây  $CD \perp AB$ . Điểm  $M \in (O)$  bất kỳ,  $MC$  không song song với  $AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $MD, AB$ ,  $F$  là giao điểm của  $MC, AB$ . Chứng minh  $\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{BF}$ .

**382** ([Bin23b], 205., p. 87). Qua điểm  $A$  nằm bên ngoài đường tròn  $(O)$  vẽ cát tuyến  $ABC$ .  $E$  là điểm chính giữa cung  $BC$ ,  $DE$  là đường kính của đường tròn.  $AD$  cắt đường tròn tại  $I$ ,  $IE$  cắt  $BC$  tại  $K$ . Chứng minh  $AC \perp BK = AB \cdot KC$ .

**383** ([Bin23b], 206., p. 87). Cho nửa đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , bán kính  $OC = R$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt thuộc 2 cung  $AC, BC$ .  $E, G$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N$  trên  $AB$ .  $F, H$  lần lượt là hình chiếu của  $M, N$  trên  $OC$ . Chứng minh  $EF = GH$ .

**384** ([Bin23b], 207., p. 87). Trong đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , vẽ 3 dây  $AA' \parallel BC, BB' \parallel AC, CC' \parallel AB$ . Trên 3 cung  $AA', BB', CC'$ , lấy 3 cung  $AD, BE, CF$  lần lượt bằng  $\frac{1}{3}$  các cung trên. Chứng minh  $\triangle DEF$  đều.

**385** ([Bin23b], 208., p. 87). 2 đường cao  $BH, CK$  của  $\triangle ABC$  cắt đường tròn ngoại tiếp lần lượt ở  $D, E$ . Tính  $\angle A$  biết  $DE$  là đường kính đường tròn.

**386** ([Bin23b], 209., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $H$  là trực tâm,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . (a) Chứng minh  $AI$  là tia phân giác  $\angle OAH$ . (b) Cho  $\angle BAC = 60^\circ$ , chứng minh  $IO = IH$ .

**387** ([Bin23b], 210., p. 87). Tính  $\angle A$  của  $\triangle ABC$  biết khoảng cách từ  $A$  đến trực tâm  $\triangle ABC$  bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**388** ([Bin23b], 211., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ . 1 điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BC$ . (a) Chứng minh  $MA = MB + MC$ . (b)  $D$  là giao điểm của  $MA, BC$ . Chứng minh  $\frac{DM}{BM} + \frac{DM}{CM} = 1$ . (c) Tính  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  theo  $R$ .

**389** ([Bin23b], 212., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  có  $\angle B = 54^\circ, \angle C = 18^\circ$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ . Chứng minh  $AC - AB = R$ .

**390** ([Bin23b], 213., pp. 87–88). 2 đường tròn  $(O, R), (O', R)$  cắt nhau ở  $A, B$ . 1 đường thẳng  $d \parallel OO'$  cắt 2 đường tròn này tại 4 điểm  $C, D, E, F$  theo thứ tự trên  $d$ ,  $C, E \in (O), D, F \in (O')$ . (a) Chứng minh  $CDO'O$  là hình bình hành. (b) Tính  $CD$  biết  $AB = a$ . (c) Chứng minh  $\angle CAD$  không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng  $d$ ,  $d$  luôn luôn song song với  $OO'$ .

**391** ([Bin23b], 214., p. 88). Cho điểm  $C$  thuộc nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . 2 điểm  $D, E$  thuộc nửa đường tròn đó sao cho  $HC$  là tia phân giác của  $\angle DHE$ . Chứng minh  $CH^2 = DH \cdot EH$ .

**392** ([Bin23b], 215., p. 88). 1 đường tròn  $(O)$  đi qua đỉnh  $A$  & 2 trung điểm  $D, E$  của 2 cạnh  $AB, AC$  của  $\triangle ABC$  sao cho  $BC$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $K$ . Chứng minh  $KA^2 = KB \cdot KC$ .

**393** ([Bin23b], 216., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5, BC = 7, CA = 6$ . Chứng minh tồn tại 1 điểm  $E$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho 3 độ dài  $AE, BE, CE$  là 3 số tự nhiên.

**394** ([Bin23b], 217., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$ . Chứng minh  $AB^2 - AM^2 = MB \cdot MC$  (bằng cách vẽ đường tròn  $(A, AB)$ ).

**395** ([Bin23b], 218., p. 88). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $AD$ . Chứng minh  $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$  (bằng cách vẽ giao điểm  $E$  của  $AD$  với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ).

**396** ([Bin23b], 219., p. 88). 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt di chuyển trên 2 đường tròn  $(O), (O')$  sao cho chiều từ  $A$  đến  $M$  & từ  $A$  đến  $N$  trên 2 đường tròn đều theo chiều quay của kim đồng hồ & 2 cung  $\widehat{AM}, \widehat{AN}$  có số đo bằng nhau. Chứng minh đường trung trực của  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

## 13 Góc Tạo Bởi Tia Tiếp Tuyến & Dây Cung

**397** ([Bin23b], VD34, p. 89). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Đường nối tâm  $OO'$  cắt  $(O), (O')$  tại 4 điểm  $A, B, C, D$  theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài  $EF, E \in (O), F \in (O')$ .  $M$  là giao điểm của  $AE, DF$ ,  $N$  là giao điểm của  $BE, CF$ . Chứng minh: (a)  $MENF$  là hình chữ nhật. (b)  $MN \perp AD$ . (c)  $MA \cdot ME = MD \cdot MF$ .

**398** ([Bin23b], VD35, p. 89). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$  với  $(O)$ . Dây  $BD$  của  $(O)$  song song với  $AC$ ,  $E$  là giao điểm của  $AD$  với  $(O)$ ,  $I$  là giao điểm của  $BE, C$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm  $AC$ .

**399** ([Bin23b], 220., p. 90). Cho  $\triangle ABC$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đi qua  $A$  & tiếp xúc với  $BC$  tại  $B$ . Kẻ dây  $BD \parallel AC$ .  $I$  là giao điểm của  $CD$  với  $(O)$ . Chứng minh  $\angle IAB = \angle IBC = \angle ICA$ .

**400** ([Bin23b], 221., p. 90). Cho đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Dây  $BC$  của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại  $H$ .  $D, E$  lần lượt là giao điểm  $\neq A$  của  $AB, AC$  với đường tròn nhỏ. Chứng minh: (a)  $DE \parallel BC$ . (b)  $AH$  là tia phân giác  $\angle BAC$ .

**401** ([Bin23b], 222., p. 90). Cho điểm  $B$  thuộc đoạn thẳng  $AC$ . Vẽ về 1 phía của  $AC$  3 nửa đường tròn có đường kính  $AC, AB, BC$  có tâm lần lượt là  $O, O_1, O_2$ .  $EF$  là tiếp tuyến chung của 2 nửa đường tròn  $(O_1), (O_2), E \in (O_1), F \in (O_2)$ . Đường vuông góc với  $AC$  tại  $B$  cắt nửa đường tròn  $(O)$  ở  $D$ . Chứng minh  $BEDF$  là hình chữ nhật.

**402** ([Bin23b], 223., p. 90). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Vẽ đường tròn  $(A)$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $C, D$ . Kẻ dây  $BN$  của  $(O)$ , cắt  $(A)$  tại điểm  $E$  ở bên trong  $(O)$ . Chứng minh: (a)  $\angle CEN = \angle EDN$ . (b)  $NE^2 = NC \cdot ND$ .

**403** ([Bin23b], 224., p. 91).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O, 2.5 \text{ cm})$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $C$  cắt tia phân giác của  $\angle B$  tại  $K$ . Tính  $BK$  biết  $BK$  cắt  $AC$  tại  $D, BD = 4 \text{ cm}$ .

**404** ([Bin23b], 225., p. 91). Tứ giác  $ABCD$  có 2 đường chéo cắt nhau ở  $E$ . Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABE, \triangle CDE$ . Tìm điều kiện của tứ giác để 2 đường tròn tiếp xúc nhau.

**405** ([Bin23b], 226., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tiếp tuyến tại  $A$  cắt  $BC$  ở  $I$ . (a) Chứng minh  $\frac{BI}{CI} = \frac{AB^2}{AC^2}$ . (b) Tính  $IA, IC$  biết  $AB = 20 \text{ cm}, BC = 24 \text{ cm}, CA = 28 \text{ cm}$ .

**406** ([Bin23b], 227., p. 91). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh dài 2 cm. Tính bán kính của đường tròn đi qua  $A, B$  biết đoạn tiếp tuyến kẻ từ  $D$  đến đường tròn đó bằng 4 cm.

**407** ([Bin23b], 228., p. 91). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường trung trực của  $AB$  cắt  $BC$  ở  $K$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACK$ .

**408** ([Bin23b], 229., p. 91). Cho hình thang  $ABCD, AB \parallel CD$ , có  $BD^2 = AB \cdot CD$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$  tiếp xúc với  $BC$ .

**409** ([Bin23b], 230., p. 91). Cho hình bình hành  $ABCD, \angle A \leq 90^\circ$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD$  cắt  $AC$  ở  $E$ . Chứng minh  $BD$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABE$ .

**410** ([Bin23b], 231., p. 91). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . tiếp Kẻ tiếp tuyến chung  $CC', C \in (O), C' \in (O')$ , kẻ đường kính  $COD$ .  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $OO'$  với  $C'D, CC'$ . Chứng minh: (a)  $\angle EAF = 90^\circ, A, C, C'$  nằm cùng phía đối với  $OO'$ . (b)  $FA$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACC'$ .

**411** ([Bin23b], 232., p. 91). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ , trong đó tiếp tuyến chung  $CD$  song song với cát tuyến chung  $EBF, C, E \in (O), D, F \in (O')$ ,  $B$  nằm giữa  $E, F$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $AD, AC$  với  $EF$ .  $I$  là giao điểm của  $CE, DF$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ICD = \triangle BCD$ . (b)  $IB$  là đường trung trực của  $MN$ .

## 14 Góc Có Đỉnh Ở Bên Trong, Bên Ngoài Đường Tròn

**412** ([Bin23b], VD36, p. 92). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $D$  di chuyển trên cung  $AC$ .  $E$  là giao điểm của  $AC, BD$ ,  $F$  là giao điểm của  $AD, BC$ . Chứng minh: (a)  $\angle AFB = \angle ABD$ . (b)  $AE \cdot BF$  không đổi.

**413** ([Bin23b], 233., p. 92). Tứ giác  $ABCD$  có 2 góc  $\angle B, \angle D$  tù. Chứng minh  $AC > BD$ .

**414** ([Bin23b], 234., p. 92). Cho đường tròn  $(O, 2 \text{ cm})$ , 2 bán kính  $OA \perp OB$ .  $M$  là điểm chính giữa của cung  $AB$ .  $C$  là giao điểm của  $AM, OB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $OA$ . Tính diện tích hình thang  $OHMC$ .

**415** ([Bin23b], 235., p. 92).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , 3 điểm  $M, N, P$  là điểm chính giữa của 3 cung  $AB, BC, CA$ .  $D$  là giao điểm của  $MN, AB$ ,  $E$  là giao điểm của  $PN, AC$ . Chứng minh  $DE \parallel BC$ .

**416** ([Bin23b], 236., p. 93). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $M, N, P$  lần lượt là tâm của 3 đường tròn bàng tiếp trong 3 góc  $\angle A, \angle B, \angle C$ .  $K$  là điểm đối xứng với  $I$  qua  $O$ . Chứng minh  $K$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle MNP$ .



## 15 Cung Chứa Góc

**417** ([Bin23b], VD37, p. 93). Từ điểm  $M$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ cát tuyến  $MAB$  đi qua  $O$  và 2 tiếp tuyến  $MC, MD$ .  $K$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh: (a) 4 điểm  $B, C, M, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $MK \perp AB$ .

**418** ([Bin23b], 237., p. 94). Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $\angle A < 90^\circ$ . Đường tròn  $(A, AB)$  cắt đường thẳng  $BC$  ở điểm thứ 2  $E$ . Đường tròn  $(C, BC)$  cắt đường thẳng  $AB$  ở điểm thứ 2  $K$ . Chứng minh: (a)  $DE = DK$ . (b) 5 điểm  $A, C, D, E, K$  thuộc cùng 1 đường tròn.

**419** ([Bin23b], 238., p. 94). Qua điểm  $M$  thuộc cạnh đáy  $BC$  của  $\triangle ABC$  cân, kẻ 2 đường thẳng song song với 2 cạnh bên, chúng cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $DE$ . Chứng minh: (a) Điểm  $I$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b) Khi điểm  $M$  di chuyển trên cạnh  $BC$  thì đường thẳng  $IM$  đi qua 1 điểm cố định.

**420** ([Bin23b], 239., p. 94). Cho  $\triangle ABC$  nhọn có đường cao  $AD$ , điểm  $M$  nằm giữa  $B, C$ . Đường trung trực của  $BM$  cắt  $AB$  ở  $E$ , đường trung trực của  $CM$  cắt  $AC$  ở  $F$ .  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $EF$ ,  $I$  là giao điểm của  $MN, AD$ . Chứng minh 5 điểm  $A, B, C, I, N$  thuộc cùng 1 đường tròn.

**421** ([Bin23b], 240., p. 94). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $O$  là giao điểm của 2 đường chéo. Trên tia  $OA$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM = OB$ . Trên tia  $OB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $ON = OA$ . Chứng minh: (a) 4 điểm  $C, D, M, N$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $\angle ACN = \angle BDM$ .

**422** ([Bin23b], 241., p. 94). Cho  $\triangle ABC$ ,  $AB < AC$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB, BC$  ở  $D, E$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ .  $K$  là giao điểm của  $MN, AI$ . Chứng minh: (a)  $C, E, I, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $D, E, K$  thẳng hàng.

**423** ([Bin23b], 242., p. 94). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $H, M$  phân biệt và thuộc cạnh  $BC$ , thỏa mãn  $\angle BAH = \angle MAC$ . Chứng minh  $\angle BAC = 90^\circ$ .

## 16 Tứ Giác Nội Tiếp

**424** ([Bin23b], VD38, p. 95).  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$  có  $AB = 8$  cm,  $AC = 15$  cm, đường cao  $AH = 5$  cm,  $H$  nằm ngoài cạnh  $BC$ . Tính  $R$ .

**425** ([Bin23b], VD39, p. 95). Chứng minh chân các đường vuông góc kẻ từ 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác đến 3 cạnh của tam giác ấy nằm trên 1 đường thẳng.

**426** ([Bin23b], VD40, p. 96). Qua điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , kẻ cát tuyến  $ABC$  với  $(O)$ . 2 tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $B, C$  cắt nhau ở  $K$ . Qua  $K$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AO$ , cắt  $AO$  tại  $H$  và cắt  $(O)$  tại  $E, F$ ,  $E$  nằm giữa  $K, F$ .  $M$  là giao điểm của  $OK, BC$ . Chứng minh: (a)  $EMOF$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $AE, AF$  là 2 tiếp tuyến của  $(O)$ .

**427** ([Bin23b], 243., pp. 96–97). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Lấy điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $\angle ABI = \angle C$ . Đường tròn  $(O)$  đường kính  $IC$  cắt  $BI$  ở  $D$  và cắt  $BC$  ở  $M$ . Chứng minh: (a)  $CI$  là tia phân giác của  $\angle DCM$ . (b)  $DA$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**428** ([Bin23b], 244., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $I$  là trung điểm  $BC$ ,  $D$  là điểm nằm giữa  $I, C$ .  $E, F$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Chứng minh  $E, F$  nằm trên đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AID$ .

**429** ([Bin23b], 245., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , đường phân giác  $AD$ .  $H, K$  lần lượt là tâm của 2 đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD, \triangle ACD$ . Chứng minh  $OH = OK$ .

**430** ([Bin23b], 246., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Chứng minh: (a)  $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$ . (b)  $AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ .

**431** ([Bin23b], 247., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, đường cao  $AD$ , trực tâm  $H$ .  $AM, AN$  là 2 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm. Chứng minh: (a)  $AMDN$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $M, H, N$  thẳng hàng.

**432** ([Bin23b], 248., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ , đường cao  $AH$ . Chứng minh: (a)  $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$ . (b)  $S = \frac{abc}{4R}$  với  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ .

**433** ([Bin23b], 249., p. 97). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . 3 tia phân giác của  $\angle A, \angle B, \angle C$  cắt  $(O)$  lần lượt ở  $D, E, F$ . Chứng minh: (a)  $2AD > AB + AC$ . (b)  $AD + BE + CF$  lớn hơn chu vi  $\triangle ABC$ .

**434** ([Bin23b], 250., pp. 97–98). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tia phân giác của  $\angle A$  cắt  $BC$  ở  $D$ , cắt  $(O)$  ở  $E$ .  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  trên  $AB, AC$ . Chứng minh: (a)  $AI + AK = AB + AC$ . (b) Diện tích tứ giác  $AMEN$  bằng diện tích  $\triangle ABC$ .

**435** ([Bin23b], 251., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ .  $MH, MI, MK$  lần lượt là 3 đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $BC, AB, AC$ . Chứng minh  $\frac{BC}{MH} = \frac{AB}{MI} + \frac{AC}{MK}$ .



- 436** ([Bin23b], 252., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $B, C$  trên  $EF$ . Chứng minh  $DE + DF = IK$ .
- 437** ([Bin23b], 253., p. 98). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 2 đường cao  $BD, CE$ . Vẽ ở phía ngoài  $\triangle ABC$  2 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $AC, AB$ .  $I, K$  lần lượt là giao điểm của  $BD, CE$  với 2 nửa đường tròn đó. Chứng minh  $AI = AK$ .
- 438** ([Bin23b], 254., p. 98). Cho đường tròn  $(O)$  & 2 điểm  $B, C \in (O)$ , 2 tiếp tuyến với đường tròn tại  $B, C$  cắt nhau ở  $A$ .  $M$  là 1 điểm thuộc cung nhỏ  $BC$ . Tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $M$  cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I, K$  lần lượt là giao điểm của  $OD, OE$  với  $BC$ . Chứng minh: (a)  $OB DK, DI KE$  là 2 tứ giác nội tiếp. (b) 3 đường thẳng  $OM, DK, EI$  đồng quy.
- 439** ([Bin23b], 255., p. 98). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$ ,  $B, C$  là 2 tiếp điểm.  $H$  là giao điểm của  $OA, BC$ . Kẻ dây  $EF$  bất kỳ đi qua  $H$ . Chứng minh  $AO$  là tia phân giác của  $\angle EAF$ .
- 440** ([Bin23b], 256., p. 98). Từ điểm  $A$  ở bên ngoài đường tròn  $(O)$ , vẽ 2 tiếp tuyến  $AB, AC$ ,  $B, C$  là 2 tiếp điểm, & cát tuyến  $ADE$ . Đường thẳng đi qua  $D$  & vuông góc với  $OB$  cắt  $BC, BE$  lần lượt ở  $H, K$ . Chứng minh  $DH = HK$ .
- 441** ([Bin23b], 257., p. 98). Cho đường tròn  $(O)$ . Qua điểm  $K$  ở bên ngoài đường tròn, kẻ 2 tiếp tuyến  $KB, KD$ ,  $B, D$  là 2 tiếp điểm, kẻ cát tuyến  $KAC$ . (a) Chứng minh  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . (b) Vẽ dây  $CN \parallel BD$ .  $I$  là giao điểm của  $AN, BD$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm  $BD$ .
- 442** ([Bin23b], 258., p. 98). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . Từ điểm  $B \in (O')$ , kẻ 2 tiếp tuyến  $BC, BD$  với  $(O)$ ,  $C, D$  là 2 tiếp điểm.  $E, F$  lần lượt là 2 giao điểm thứ 2 của  $AC, AD$  với  $(O')$ . Chứng minh  $AF \cdot BE = AE \cdot BF$ .
- 443** ([Bin23b], 259., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  nhọn,  $AB > AC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $AD$ .  $E$  là hình chiếu của  $B$  trên  $AD$ ,  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh  $\triangle MEH$  cân.
- 444** ([Bin23b], 260., p. 99). Tứ giác  $ABCD$  có  $AB = AD + BC$ , cạnh  $AB$  & 2 tia phân giác của  $\angle C, \angle D$  đồng quy. Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thang hoặc tứ giác nội tiếp.
- 445** ([Bin23b], 261., p. 99). Cho  $\triangle ABC$ .  $I$  là tâm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ ,  $K$  là tâm của đường tròn bàng tiếp trong  $\angle A$ . Chứng minh  $AI \cdot AK = AB \cdot AC$ .
- 446** ([Bin23b], 262., p. 99). Đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$  cắt đoạn nối 2 tâm  $B', C'$  của 2 đường tròn bàng tiếp trong  $\angle B, \angle C$  tại điểm  $M \neq A$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $B'C'$ .
- 447** ([Bin23b], 263., p. 99). 1 hình thang cân nội tiếp đường tròn  $(O)$ , cạnh bên được nhìn từ  $O$  dưới góc  $120^\circ$ . Tính diện tích hình thang biết đường cao của hình thang bằng  $h$ .
- 448** ([Bin23b], 264., p. 99). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = a, CD = b, a < b$ . 1 đường tròn  $(O)$  đi qua  $A, B$ , cắt 2 cạnh bên  $AD, BC$  lần lượt ở  $M, N$ . Tính độ dài  $Mn$  theo  $a, b$  biết 2 tứ giác  $ABNM, CDMN$  có diện tích bằng nhau.
- 449** ([Bin23b], 265., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ .  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle DEF$ . (a) Chứng minh  $OA \perp EF$ . (b) Tính tỷ số diện tích  $\triangle DEF, \triangle ABC$  theo  $R, r$ .
- 450** ([Bin23b], 266., p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $\angle C = 40^\circ$ , đường cao  $AH$ , điểm  $I$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho  $AI = \frac{1}{3}AC$ , điểm  $K$  thuộc tia đối của tia  $HA$  sao cho  $HK = \frac{1}{3}AH$ . Tính  $\angle BIK$ .
- 451** ([Bin23b], 267., p. 99).  $\triangle ABC$  cân có  $\angle A = 100^\circ$ . Điểm  $D$  thuộc nửa mặt phẳng không chứa  $A$  có bờ  $BC$  sao cho  $\angle CBD = 15^\circ, \angle BCD = 35^\circ$ . Tính  $\angle ADB$ .
- 452** ([Bin23b], 268., p. 99).  $\triangle ABC$  nhọn, trực tâm  $H$ . Vẽ hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh  $\angle ABH = \angle ADH$ .
- 453** ([Bin23b], 269., p. 100). Cho  $\triangle ABC$ .  $I$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $\angle ABI = \angle ACI$ . Vẽ hình bình hành  $BICK$ . Chứng minh  $\angle BAI = \angle CAK$ .
- 454** ([Bin23b], 270., p. 100). Cho điểm  $I$  nằm trong hình bình hành  $ABCD$  sao cho  $\angle IAB = \angle ICB$ . Chứng minh  $\angle IBC = \angle IDC$ .
- 455** ([Bin23b], 271., p. 100). Cho  $\triangle ABC$  đều,  $M$  thuộc cạnh  $BC$ .  $D$  đối xứng với  $M$  qua  $AB$ ,  $E$  đối xứng với  $M$  qua  $AC$ . Vẽ hình bình hành  $DMEI$ . Chứng minh: (a)  $D, A, I, E$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $AI \parallel BC$ .
- 456** ([Bin23b], 272., p. 100). Cho hình thang cân  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $E$  nằm giữa  $C, D$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đi qua  $E$  & tiếp xúc với  $AD$  tại  $D$ . Vẽ đường tròn  $(O')$  đi qua  $E$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $K$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn đó. Chứng minh: (a)  $A, B, C, D, K$  thuộc cùng 1 đường tròn. (b)  $B, E, K$  thẳng hàng.
- 457** ([Bin23b], 273., p. 100). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $I$  là điểm chính giữa của  $\widehat{BC}$  không chứa  $A$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $I$  & tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ , vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $I$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $K$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$ . (a) Chứng minh  $B, C, K$  thẳng hàng. (b) Lấy điểm  $D$  bất kỳ thuộc cạnh  $AB$ , điểm  $E$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $BD = CE$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .
- 458** ([Bin23b], 274., p. 100). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  cố định trên đường kính ấy,  $C \neq O$ .  $M$  chuyển động trên  $(O)$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt  $MA, MB$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  luôn đi qua 1 điểm cố định khác  $A$ .

**459** ([Bin23b], 275., p. 100). Cho  $\angle xAy = 90^\circ$ ,  $B \in Ay$  cố định,  $C$  di chuyển trên  $Ax$ . Đường tròn  $(I)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AC, BC$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

**460** ([Bin23b], 276., pp. 100–101). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ ,  $A \in (O)$ .  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  có đường kính  $AH$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . (a) Chứng minh  $OA \perp MN$ . (b) Vẽ đường kính  $AOK$  của  $(O)$ .  $E$  là trung điểm  $HK$ . Chứng minh  $E$  là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $BMNC$ . (c) Cho  $BC$  cố định. Xác định vị trí của điểm  $A$  để bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $BMNC$  lớn nhất.

**461** ([Bin23b], 277., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ .  $(P), (Q)$  lần lượt là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABH, \triangle ACH$ . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài khác  $BC$  của  $(P), (Q)$ , cắt  $AB, AH, AC$  lần lượt ở  $M, K, N$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABC \sim \triangle HPQ$ . (b)  $KP \parallel AB, KQ \parallel AC$ . (c)  $BMNC$  là tứ giác nội tiếp. (d)  $A, M, N, P, Q$  thuộc cùng 1 đường tròn. (e)  $\triangle ADE$  vuông cân,  $D, E$  lần lượt là giao điểm của  $PQ$  với  $AB, AC$ .

**462** ([Bin23b], 278., p. 101). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ .  $M$  di chuyển trên cung lớn  $AB$ . 2 đường cao  $AE, BF$  của  $\triangle ABM$  cắt nhau ở  $H$ . (a) Chứng minh  $OM \perp EF$ . (b) Đường tròn  $(H, HM)$  cắt  $MA, MB$  lần lượt ở  $C, D$ . Chứng minh đường thẳng kẻ từ  $M$  ẽ vuông góc với  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Chứng minh đường thẳng kẻ từ  $H$  ẽ vuông góc với  $CD$  cũng đi qua 1 điểm cố định.

**463** ([Bin23b], 279., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . 1 đường tròn  $(I)$  tùy ý đi qua  $B, C$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . Đường tròn  $(K)$  ngoại tiếp  $\triangle AMN$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ 2  $D$ . Chứng minh: (a)  $AKIO$  là hình bình hành. (b)  $\angle ADI = 90^\circ$ .

**464** ([Bin23b], 280., p. 101). Dựng ra phía ngoài 1 tứ giác nội tiếp các hình chữ nhật mà mỗi hình chữ nhật có 1 cạnh là của tứ giác, cạnh kia bằng cạnh đối diện của tứ giác. Chứng minh giao điểm các đường chéo của 4 hình chữ nhật là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật.

**465** ([Bin23b], 281., p. 102). Cho đường tròn đường kính  $AC$ , dây  $BD \perp AC$ .  $E, F, G, H$  lần lượt là tâm của 4 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ . Chứng minh  $EFGH$  là hình vuông.

**466** ([Bin23b], 282., p. 102). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ ,  $M \in (O)$ .  $Ax, By$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn,  $H, I, K$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $AB, Ax, By$ . Chứng minh: (a)  $MH^2 = MI \cdot MK$ . (b)  $MI + MK \geq 2MH$ .

**467** ([Bin23b], 283., p. 102).  $M$  bất kỳ thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp tứ giác  $ABCD$ . Khoảng cách từ  $M$  đến 4 đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt là  $MH, MK, MI, MN$ . Chứng minh  $MH \cdot MI = MK \cdot MN$ .

**468** ([Bin23b], 284., p. 102). Cho  $\triangle ABC$ , đường trung tuyến  $AM$ , đường phân giác  $AD$ . Đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADM$  cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh  $BE = CF$ .

**469** ([Bin23b], 285., p. 102). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ ,  $C$  thuộc bán kính  $OA$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt  $(O)$  ở  $D$ . Đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với nửa đường tròn ẽ tiếp xúc với 2 đoạn thẳng  $AC, CD$ .  $E$  là tiếp điểm trên  $AC$  của  $(I)$ . (a) Chứng minh  $BD = BE$ . (b) Suy ra cách dựng  $(I)$ .

**470** ([Bin23b], 286., p. 102). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $AB = 16, BC = 24$ , đường cao  $AE$ . Đường tròn  $(O)$  nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AC$  tại  $F$ . (a) Chứng minh  $OECF$  là tứ giác nội tiếp ẽ  $BF$  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó. (b)  $M$  là giao điểm của  $BF$  với  $(O)$ . Chứng minh  $BMOC$  là tứ giác nội tiếp.

**471** ([Bin23b], 287., p. 102). Cho đường tròn  $(O')$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . 2 dây  $BC, BD$  của  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$  lần lượt ở  $E, F$ .  $I$  là giao điểm của  $EF$  với tia phân giác  $\angle CAD$ . Chứng minh: (a)  $\angle DAF = \frac{1}{2}\angle DCB$ . (b)  $\angle DAF = \angle IAE$ . (c)  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .

**472** ([Bin23b], 288., p. 103). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, 3 đường cao  $AD, BE, CF$ . Lấy điểm  $M \in DF$  bất kỳ, kẻ  $MN \parallel BC$ ,  $N \in DE$ . Lấy điểm  $I$  trên đường thẳng  $DE$  sao cho  $\angle MAI = \angle BAC$ . Chứng minh: (a)  $\triangle AMN$  cân. (b)  $AMNI$  là tứ giác nội tiếp. (c)  $MA$  là tia phân giác  $\angle FMI$ .

**473** ([Bin23b], 289., p. 103). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . Kẻ tiếp tuyến chung  $CD$ ,  $C \in (O_{in}), D \in (O')$ .  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  trên  $OO'$ . Chứng minh  $\angle OAO' = \angle HAK$ .

**474** ([Bin23b], 290., p. 103). Cho 2 hình vuông  $ABCD, A'B'C'D'$  sao cho nếu vẽ các đường tròn ngoại tiếp các hình vuông thì chiều từ  $A$  lần lượt qua  $B, C, D$  ẽ chiều từ  $A$  lần lượt qua  $B', C', D'$  đều theo chiều quay của kim đồng hồ.  $I$  là giao điểm của  $BB', DD'$ . Chứng minh: (a)  $I$  thuộc đường tròn ngoại tiếp mỗi hình vuông. (b)  $CC'$  cũng đi qua điểm  $I$ .

**475** ([Bin23b], 291., p. 103). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường vuông góc với  $AD$  tại  $A$  cắt  $BC$  ở  $E$ . Đường vuông góc với  $AB$  tại  $A$  cắt  $CD$  ở  $F$ . Chứng minh  $E, F, O$  thẳng hàng.

**476** ([Bin23b], 292., p. 103). Cho  $\triangle ABC$ . Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  lần lượt ở  $D, E, F$ . Biết  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , chứng minh  $\triangle ABC$  đều.

**477** ([Bin23b], 293., p. 103). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ở ngoài nhau. Kẻ 2 tiếp tuyến chung ngoài  $AB, A'B'$ , 2 tiếp tuyến chung trong  $CD, EF$ ,  $A, A', C, E \in (O), B, B', D, F \in (O')$ .  $M$  là giao điểm của  $AB, EF$ ,  $N$  là giao điểm của  $A'B', CD$ ,  $H$  là giao điểm của  $MN, OO'$ . Chứng minh: (a)  $MN \perp OO'$ . (b)  $O', B, M, H, F$  thuộc cùng 1 đường tròn. (c)  $O, A, M, E, H$  thuộc cùng 1 đường tròn. (d)  $B, D, H$  thẳng hàng. (e)  $A, C, H$  thẳng hàng.

- 478** ([Bin23b], 294., pp. 103–104). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 điểm  $A, B$  ở vị trí đối xứng với nhau qua 1 bán kính của  $(O)$ . Vẽ dây  $CD$  đi qua  $A$ , dây  $EF$  đi qua  $B$ . 2 đường thẳng  $CE, DF$  cắt đường thẳng  $AB$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh  $AN = BM$ .
- 479** ([Bin23b], 295., p. 104). Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp có các cạnh đối không song song,  $F$  là giao điểm của  $AB, CD$ ,  $E$  là giao điểm của  $AD, BC$ .  $H, G$  lần lượt là trung điểm  $AC, BD$ . Chứng minh: (a) Tia phân giác  $\angle BED$  cũng là tia phân giác  $\angle HEG$ . (b) 2 tia phân giác  $\angle BED, \angle BFD$  gặp nhau tại 1 điểm nằm trên  $GH$ .
- 480** ([Bin23b], 296., p. 104). Cho tứ giác  $ABCD$ . Vẽ 4 đường tròn, mỗi đường tròn đi qua trung điểm các cạnh của 1 trong  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ . Chứng minh 4 đường tròn đó cùng giao nhau tại 1 điểm.
- 481** ([Bin23b], 297., p. 104). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ . Kẻ ra ngoài  $\triangle ABC$  2 tia  $Ax, Ay$  lần lượt tạo với  $AB, AC$  các góc nhọn bằng nhau.  $I$  là hình chiếu của  $B$  trên  $Ax$ ,  $K$  là hình chiếu của  $C$  trên  $Ay$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh: (a)  $MI = MK$ . (b)  $I, H, K, M$  thuộc cùng 1 đường tròn.
- 482** ([Bin23b], 298., p. 104). Cho  $\triangle ABC$ , trực tâm  $H$ . Kẻ 3 đường thẳng  $AA', BB', CC'$  sao cho 3 tia phân của  $\angle A'AH, \angle B'BH, \angle C'CH$  song song với nhau. Chứng minh 3 đường thẳng  $AA', BB', CC'$  đồng quy tại 1 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 483** ([Bin23b], 299., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $M$  thuộc cung  $AC$ ,  $Ax$  là tiếp tuyến tại  $A$ .  $H, I, K, N$  lần lượt là chân 4 đường vuông góc kẻ từ  $M$  đến  $AB, AC, BC, Ax$ . Chứng minh  $MH \cdot MI = MK \cdot MN$ .
- 484** ([Bin23b], 300., p. 104). Cho  $\triangle ABC$  & 2 điểm  $M, N$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Biết các đường thẳng Simpson của  $M, N$  vuông góc với nhau. Chứng minh  $MN$  là đường kính của đường tròn.
- 485** ([Bin23b], 301., p. 104). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .  $H, I$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  trên  $AC, CD$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, HI$ . Chứng minh: (a)  $\triangle ABD \sim \triangle HBI$ . (b)  $\angle MNB = 90^\circ$ .
- 486** ([Bin23b], 302., p. 105). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  bất kỳ thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .  $D$  đối xứng với  $M$  qua  $AB$ ,  $E$  đối xứng với  $M$  qua  $BC$ . Chứng minh khi điểm  $M$  di chuyển trên  $(O)$  thì  $DE$  luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 487** ([Bin23b], 303., p. 105, định lý Plolémée). Chứng minh trong 1 tứ giác nội tiếp, tích 2 đường chéo bằng tổng các tích của 2 cặp cạnh đối.
- 488** ([Bin23b], 304., p. 105, định lý Carnot). Vận dụng định lý Plolémée để chứng minh tổng các khoảng cách từ tâm của đường tròn ngoại tiếp 1 tam giác nhọn đến 3 cạnh của tam giác bằng tổng các bán kính đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp tam giác đó.

## 17 Đường Tròn Ngoại Tiếp, Nội Tiếp Đa Giác

- 489** ([Bin23b], VD41, p. 105). Chứng minh định lý “Nếu tứ giác  $ABCD$  có tổng các cạnh đối bằng nhau  $AB + CD = BC + AD$  thì tứ giác đó ngoại tiếp được 1 đường tròn” bằng cách chứng minh 4 tia phân giác của  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  cùng gặp nhau tại 1 điểm.
- 490** ([Bin23b], VD42, p. 106). 2 đường trung tuyến  $BD, CE$  của  $\triangle ABC$  cắt nhau tại  $I$ . Cho biết tứ giác  $ADIE$  ngoại tiếp được 1 đường tròn. Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.
- 491** ([Bin23b], VD43, p. 107). Cho 1 lục giác đều nội tiếp đường tròn bán kính  $R$ . Kẻ các đường chéo nối các đỉnh cách nhau 1 đỉnh. Tính diện tích lục giác có đỉnh là giao điểm của các đường chéo đó.
- 492** ([Bin23b], 305., p. 107). Hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\angle A = \angle D = 90^\circ$ , ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ . Tính diện tích hình thang biết: (a)  $OB = 10$  cm,  $OC = 20$  cm. (b)  $AB = b, CD = a$ .
- 493** ([Bin23b], 306., p. 107). Hình thang  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , đáy nhỏ  $AB = 2$  cm,  $E$  là tiếp điểm của  $(O)$  trên cạnh  $BC$ . Biết  $BE = 1$  cm,  $CE = 4$  cm. Chứng minh  $ABCD$  là hình thang cân & tìm diện tích của nó.
- 494** ([Bin23b], 307., p. 107). Tính các cạnh của 1 hình thang cân ngoại tiếp đường tròn  $(O, 10$  cm) biết khoảng cách giữa 2 tiếp điểm trên cạnh bên bằng 16 cm.
- 495** ([Bin23b], 308., p. 107). Đường tròn  $(O)$  nội tiếp hình vuông  $ABCD$ , tiếp điểm trên  $AB$  là  $M$ . 1 tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  cắt 2 cạnh  $BC, CD$  lần lượt ở  $E, F$ . Chứng minh: (a)  $\triangle DFO \sim \triangle BOE$ . (b)  $ME \parallel AF$ .
- 496** ([Bin23b], 309., p. 107). Cho tứ giác  $ABCD$ , 2 đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ACD$  tiếp xúc nhau. Chứng minh các đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD, \triangle BCD$  tiếp xúc nhau.
- 497** ([Bin23b], 310., p. 108). Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp 1 đường tròn. Chứng minh nếu 1 đường thẳng chia tứ giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau & chu vi bằng nhau thì đường thẳng đó đi qua tâm của đường tròn đó.
- 498** ([Bin23b], 311., p. 108). Cho hình thang  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , tiếp điểm trên  $AB, CD$  lần lượt là  $E, F$ . Chứng minh  $AC, BD, EF$  đồng quy.
- 499** ([Bin23b], 312., p. 108). Chứng minh trong 1 tứ giác ngoại tiếp đường tròn, các đường thẳng nối các tiếp điểm trên các cạnh đối đồng quy tại giao điểm 2 đường chéo của tứ giác.



- 500** ([Bin23b], 313., p. 108). Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ .  $I, K$  lần lượt là trung điểm của 2 đường chéo  $BD, AC$ . Chứng minh: (a)  $S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ . (b)  $I, K, O$  thẳng hàng.
- 501** ([Bin23b], 314., p. 108). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB \perp CD$ . 4 tiếp tuyến với  $(O)$  tại  $A, B, C, D$  cắt nhau lần lượt ở  $E, F, G, H$ . Chứng minh  $EFGH$  là tứ giác nội tiếp.
- 502** ([Bin23b], 315., p. 108). Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O)$ , đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác,  $AB = 14$  cm,  $BC = 18$  cm,  $CD = 26$  cm.  $H$  là tiếp điểm của  $CD$  &  $(O)$ . Tính  $CH, DH$ .
- 503** ([Bin23b], 316., p. 108). Tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp đường tròn  $(O, r)$ , đồng thời nội tiếp 1 đường tròn khác.  $E, F, G, H$  lần lượt là hình chiếu của  $O$  trên  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh: (a)  $r^2 = AE \cdot CG = BF \cdot DH$ . (b) Diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng  $\sqrt{abcd}$  với  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ .
- 504** ([Bin23b], 317., p. 108). Cho lục giác  $ABCDEF$  nội tiếp 1 đường tròn & có 2 cặp cạnh đối song song là  $AB \parallel DE, BC \parallel EF$ . Chứng minh 2 cạnh đối còn lại cũng song song với nhau.
- 505** ([Bin23b], 318., p. 108). Lục giác  $ABCDEF$  nội tiếp 1 đường tròn có 3 cạnh  $AB, CD, EF$  bằng bán kính của đường tròn. Chứng minh 3 trung điểm của 3 cạnh còn lại là 3 đỉnh của 1 tam giác đều.
- 506** ([Bin23b], 319., p. 109). Tính diện tích bát giác đều cạnh  $a$ .
- 507** ([Bin23b], 320., p. 109). Cho đa giác đều 20 cạnh  $A_1A_2 \dots A_{20}$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .  $M \in (O, R)$  bất kỳ. Tính tổng  $\sum_{i=1}^{20} MA_i^2 = MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_{20}^2$ .
- 508** ([Bin23b], 321., p. 109). Cho  $\triangle ABC$  đều & hình vuông  $ADEF$  cùng nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ . Tính diện tích phần chung của tam giác & hình vuông.

## 18 Độ Dài Đường Tròn

- 509** ([Bin23b], VD44, p. 109). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Độ dài 3 cung  $AB, BC, CA$  lần lượt bằng  $3\pi, 4\pi, 5\pi$ . Tính diện tích  $\triangle ABC$ .
- 510** ([Bin23b], 322., p. 110). Cho đường tròn  $(O)$ , cung  $AB$  bằng  $120^\circ$ . 2 tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $A, B$  cắt nhau ở  $C$ .  $(I)$  là đường tròn tiếp xúc với 2 đoạn thẳng  $AC, BC$  & cung  $AB$ . So sánh độ dài của  $(I)$  với độ dài cung  $AB$  của  $(O)$ .
- 511** ([Bin23b], 323., p. 110). Cho 2 đường tròn đồng tâm. Biết khoảng cách ngắn nhất giữa 2 điểm thuộc 2 đường tròn bằng 1 m. Tính hiệu các độ dài của 2 đường tròn.
- 512** ([Bin23b], 324., p. 110). Cho hình quạt tròn có cung  $BC$  bằng  $120^\circ$ , tâm  $A$  bán kính  $R$ . Tính độ dài đường tròn nội tiếp hình quạt đó với đường tròn nội tiếp hình quạt là đường tròn tiếp xúc với cung  $BC$  & với 2 bán kính  $AB, AC$ .
- 513** ([Bin23b], 325., p. 110). Lấy 4 điểm  $A, B, C, D$  lần lượt trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $\widehat{sđAB} = 60^\circ, \widehat{sđBC} = 90^\circ, \widehat{sđCD} = 120^\circ$ . (a) Tứ giác  $ABCD$  là hình gì? (b) Tính độ dài  $(O)$  biết diện tích tứ giác  $ABCD$  bằng  $100 \text{ m}^2$ .

## 19 Diện Tích Hình Tròn

- 514** ([Bin23b], VD45, p. 110). Cho tam giác đều tâm  $O$ , cạnh 3 cm. Vẽ đường tròn  $(O, 1 \text{ cm})$ . Tính diện tích phần tam giác nằm ngoài hình tròn.
- 515** ([Bin23b], 326., p. 111). Cho 1 hình thang ngoại tiếp 1 đường tròn. So sánh tỷ số giữa diện tích hình tròn & diện tích hình thang với tỷ số giữa chu vi hình tròn & chu vi hình thang.
- 516** ([Bin23b], 327., p. 111). Cho 1 hình tròn & 1 hình vuông có cùng chu vi, hình nào có diện tích lớn hơn?
- 517** ([Bin23b], 328., pp. 111–112).  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB = 2R$ . Vẽ về 1 phía của  $AB$  3 nửa đường tròn có đường kính lần lượt là  $OA, OB, AB$ . Vẽ đường tròn  $(I)$  tiếp xúc 3 nửa đường tròn này. (a) Tính bán kính đường tròn  $(I)$ . (b) Tính diện tích phần hình tròn lớn nằm ngoài hình tròn  $(I)$  & nằm ngoài 2 nửa hình tròn nhỏ.
- 518** ([Bin23b], 329., p. 112). Cho 2 đường tròn đồng tâm, đường tròn nhỏ chia hình tròn lớn thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh diện tích phần hình vành khăn giới hạn bởi 2 tiếp tuyến song song của đường tròn nhỏ bằng diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ.
- 519** ([Bin23b], 330., p. 112). Cho đa giác đều  $n$  cạnh, độ dài mỗi cạnh bằng  $a$ . Vẽ 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp đa giác. (a) Tính diện tích hình vành khăn giới hạn bởi 2 đường tròn. (b) Tính chiều rộng của hình vành khăn đó.
- 520** ([Bin23b], 331., p. 112). 1 hình quạt có chu vi bằng 28 cm & diện tích bằng  $49 \text{ cm}^2$  (chu vi hình quạt bằng độ dài cung hình quạt cộng với 2 lần bán kính). Tính bán kính của hình quạt.



- 521** ([Bin23b], 332., p. 112). Cho 3 đường tròn cùng bán kính  $r$  & tiếp xúc ngoài đôi một. (a) Tính diện tích “tam giác cong” có đỉnh là các tiếp điểm của 2 trong 3 đường tròn đó. (b) Kẻ 3 đường thẳng, mỗi đường thẳng tiếp xúc với 2 đường tròn & không giao với đường tròn thứ 3. Tính diện tích tam giác tạo bởi 3 đường thẳng đó.
- 522** ([Bin23b], 333., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB = 15, AC = 20$ , đường cao  $AH$ . Vẽ đường tròn  $(A, AH)$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $BD, CE$  với đường tròn,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. Tính diện tích hình giới hạn bởi 3 đoạn thẳng  $BD, BC, CE$  & cung  $DE$  không chứa  $H$  của đường tròn.
- 523** ([Bin23b], 334., p. 112). 1 hình viên phân có số đo cung  $90^\circ$ , diện tích  $2\pi - 4$ . Tính độ dài dây của hình viên phân.
- 524** ([Bin23b], 335., p. 112). Cho  $\triangle ABC$  đều có cạnh bằng  $2a$ .  $(I)$  là đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Tính diện tích phần chung của hình tròn  $(I)$  & hình tròn  $(A, a)$ .
- 525** ([Bin23b], 336., p. 112). Cho đường tròn  $(O, R)$ , cung  $AB$  bằng  $60^\circ$ . Vẽ cung  $OB$  có tâm  $A$  bán kính  $R$ . Vẽ cung  $OA$  có tâm  $B$  bán kính  $R$ . Chứng minh diện tích hình giới hạn bởi 3 cung  $OA, OB, AB$  nhỏ hơn  $\frac{1}{4}$  diện tích hình tròn  $(O, R)$ .
- 526** ([Bin23b], 337., p. 113). Cho đường tròn  $(O, R)$ . 1 đường tròn  $(O')$  cắt đường tròn  $(O)$  ở  $A, B$  sao cho cung  $AB$  của  $(O')$  chia  $(O)$  thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Chứng minh độ dài cung  $AB$  của  $(O')$  lớn hơn  $2R$ .
- 527** ([Bin23b], 338., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  có diện tích  $S$ .  $S_1$  là diện tích hình tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $S_2$  là diện tích hình tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $2S < S_1 + S_2$ .
- 528** ([Bin23b], 339., p. 113). Cho hình viên phân  $BC$  có dây  $BC = a$ , cung  $\widehat{BC} = 90^\circ$ . (a) Tính diện tích hình viên phân. (b) Tính diện tích hình vuông  $DEFG$  nội tiếp trong viên phân đó,  $D, E \in BC$ ,  $G, H$  thuộc cung  $BC$ .
- 529** ([Bin23b], 340., p. 113). Tính bán kính hình viên phân  $BC$  có dây  $BC = 6$  cm, cạnh hình vuông  $MNPQ$  nội tiếp viên phân ấy bằng 2 cm,  $M, N \in BC$ ,  $P, Q$  thuộc cung  $BC$ .

## 20 Quỹ Tích

- 530** ([Bin23b], VD49, p. 118). Cho cung  $AB$  cố định tạo bởi 2 bán kính  $OA \perp OB$ ,  $I$  chuyển động trên cung  $AB$ . Trên tia  $OI$  lấy điểm  $M$  sao cho  $OM$  bằng tổng các khoảng cách từ  $I$  đến  $OA$  & đến  $OB$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 531** ([Bin23b], VD50, p. 120). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . 2 điểm  $M, N$  lần lượt di chuyển trên 2 cạnh  $AB, AC$  sao cho  $AM = CN$ . Tìm quỹ tích các tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AMN$ .
- 532** ([Bin23b], VD51, p. 121). Tìm quỹ tích trực tâm  $H$  của các  $\triangle ABC$  có  $BC$  cố định,  $\angle A = \alpha$  không đổi.
- 533** ([Bin23b], VD52, p. 122). Cho  $ABCD$  là 1 tứ giác nội tiếp.  $(I)$  là đường tròn bất kỳ đi qua  $A, B$ ,  $(K)$  là đường tròn đi qua  $C, D$  & tiếp xúc với  $(I)$ .  $M$  là tiếp điểm của  $(I), (K)$ . Điểm  $M$  di chuyển trên đường nào?
- 534** ([Bin23b], VD53, p. 123). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  di chuyển trên đường tròn. Đường trung trực của  $AB$  cắt  $AC$  ở  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 535** ([Bin23b], VD54, p. 124). Tìm quỹ tích các điểm  $M$  mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc vuông (điểm  $M$  gọi là nhìn 1 hình vuông dưới  $\angle AMB$  nếu 2 điểm  $A, B$  thuộc cạnh hình vuông & hình vuông thuộc miền trong của  $\angle AMB$ ).
- 536** ([Bin23b], 356., p. 124). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C$  là điểm chính giữa của nửa đường tròn. Điểm  $M$  di chuyển trên cung  $BC$ .  $N$  là giao điểm của  $AM, OC$ . Tìm quỹ tích các tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CMN$ .
- 537** ([Bin23b], 357., pp. 124–125). Tứ giác  $ABCD$  có  $AC$  cố định,  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ . (a) Chứng minh  $BD$  có độ dài không đổi. (b)  $E$  là giao điểm của  $BC, AD$ ,  $F$  là giao điểm của  $AB, CD$ . Chứng minh  $EF$  có độ dài không đổi. (c) Tìm quỹ tích các tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$ .
- 538** ([Bin23b], 358., p. 125). Cho  $\angle xOy$  & 1 điểm  $I$  cố định thuộc tia phân giác của  $\angle xOy$ . 1 đường tròn  $(I)$  bán kính thay đổi cắt 2 tia  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $M, N$ ,  $M$  không đối xứng với  $N$  qua  $OI$ . (a) Tìm quỹ tích các tâm  $O'$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OMN$ . (b) Đường vuông góc với  $Ox$  tại  $M$  & đường vuông góc với  $Oy$  tại  $N$  cắt nhau ở  $P$ . Tìm quỹ tích các điểm  $P$ .
- 539** ([Bin23b], 359., p. 125). Cho  $\triangle ABC$  đều. Tìm quỹ tích các điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $MA^2 = MB^2 + MC^2$ .
- 540** ([Bin23b], 360., p. 125). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $2MA^2 = MB^2 - MC^2$ .
- 541** ([Bin23b], 361., p. 125). Cho  $M$  là 1 điểm thuộc đường tròn  $(O', R)$ . Đường tròn này lăn (không trượt) trong đường tròn  $(O, 2R)$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 542** ([Bin23b], 362., p. 125). Tìm quỹ tích đỉnh  $C$  của các  $\triangle ABC$  có  $AB$  cố định, đường cao  $BH$  bằng cạnh  $AC$ .
- 543** ([Bin23b], 363., p. 125). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau ở  $A, B$ . 1 đường thẳng  $d$  bất kỳ luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $C, D$ . (a) Tìm quỹ tích các trung điểm  $M$  của  $CD$ . (b) Cho biết bán kính của  $(O), (O')$  là 3 cm, 2 cm. Tính tỷ số  $BC : BD$ . (c) Đường thẳng  $d$  có vị trí nào thì đoạn thẳng  $CD$  có độ dài lớn nhất, với  $A$  nằm giữa  $C, D$ ?

- 544** ([Bin23b], 364., p. 125). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Trên tiếp tuyến tại  $A$  lấy 1 điểm  $B$  cố định.  $(O')$  là đường tròn tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$  & có bán kính thay đổi. Tìm quỹ tích các điểm  $I$  là trung điểm của dây chung  $MN$  của  $(O), (O')$ .
- 545** ([Bin23b], 365., p. 125). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 điểm  $A$  ở bên trong đường tròn. Điểm  $B$  di chuyển trên đường tròn. Qua  $O$  kẻ đường vuông góc với  $AB$ , cắt tiếp tuyến tại  $B$  của  $(O)$  ở điểm  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 546** ([Bin23b], 366., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$  vuông góc với dây  $CD$ . Điểm  $E$  di chuyển trên  $(O)$ . 2 đường thẳng  $AE, BE$  cắt đường thẳng  $CD$  lần lượt ở  $I, K$ . Tìm quỹ tích tâm  $O'$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BIK$ .
- 547** ([Bin23b], 367., p. 126). Cho 3 điểm cố định  $A, B, C$  thẳng hàng theo thứ tự đó. 1 đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $A, B$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $CD, CE$  với đường tròn,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. (a) Tìm quỹ tích các điểm  $D, E$ . (b) Tìm quỹ tích các trung điểm  $K$  của  $DE$ . (c)  $MN$  là đường kính của  $(O)$  vuông góc với  $AB$ ,  $F$  là giao điểm của  $CM$  với  $(O)$ . Chứng minh  $AB, DE, FN$  đồng quy.
- 548** ([Bin23b], 368., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ . Điểm  $C$  di chuyển trên đường thẳng  $AB$  & nằm ngoài  $(O)$ . Kẻ 2 tiếp tuyến  $CD, CE$  với  $(O)$ ,  $D, E$  là 2 tiếp điểm. Tìm quỹ tích giao điểm  $K$  của  $OC, DE$ .
- 549** ([Bin23b], 369., p. 126). Cho đường tròn  $(O, R)$ , điểm  $A$  cố định ở bên ngoài đường tròn.  $BC$  là 1 đường kính thay đổi. (a) Tìm quỹ tích tâm  $O_1$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b)  $D, E$  lần lượt là giao điểm của  $AB, AC$  với  $(O)$ . Tìm quỹ tích tâm  $O_2$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$ . (c)  $F$  là giao điểm khác  $A$  của  $(O_1), (O_2)$ . Chứng minh  $AF, BC, DE$  đồng quy.
- 550** ([Bin23b], 370., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  di chuyển trên  $(O)$ .  $M$  là trung điểm  $AC$ . Tìm quỹ tích hình chiếu  $H$  của  $M$  trên  $AB$ .
- 551** ([Bin23b], 371., p. 126). Cho  $\angle xOy = 90^\circ$ , 1 điểm  $A$  cố định nằm trong  $\angle xOy$ . 1 góc vuông đỉnh  $A$  có 2 cạnh thay đổi cắt  $Ox, Oy$  lần lượt ở  $B, C$ .  $M$  đối xứng với  $A$  qua  $BC$ . (a) Tìm quỹ tích các điểm  $M$ . (b) Chứng minh  $\frac{AB}{AC}$  là hằng số.
- 552** ([Bin23b], 372., p. 126). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $A$  cố định ở bên ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $AB$ ,  $B$  là tiếp điểm. 1 cát tuyến  $AMN$  luôn đi qua  $A$ . Tìm quỹ tích trọng tâm  $G$  của  $\triangle BMN$ .
- 553** ([Bin23b], 373., p. 127). Cho đường tròn  $(O, R)$ , 1 điểm  $H$  cố định ở bên trong đường tròn. Xét các  $\triangle ABC$  nội tiếp  $(O)$  & nhận  $H$  làm trực tâm. Tìm quỹ tích: (a) Chân các đường cao của  $\triangle ABC$ . (b) Chân các đường trung tuyến của  $\triangle ABC$ .
- 554** ([Bin23b], 374., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 đường kính  $AB \perp CD$ . 2 điểm  $E, F$  chuyển động trên  $(O)$  sao cho  $OE \perp OF$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $CD$ , qua  $F$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$ , chúng cắt nhau ở  $M$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 555** ([Bin23b], 375., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  cố định. 2 điểm  $M, N$  di chuyển trên  $(O)$  sao cho  $AM = BN$ . Tìm quỹ tích giao điểm  $I$  của 2 đường thẳng  $AM, BN$ .
- 556** ([Bin23b], 376., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$  sao cho  $MA$  là tia phân giác  $\angle BMC$ .
- 557** ([Bin23b], 377., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . 1 đường thẳng  $d$  thay đổi luôn đi qua  $A$ . Trên  $d$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MB + MC$  nhỏ nhất. Tìm quỹ tích các điểm  $M$ .
- 558** ([Bin23b], 378., p. 127). Tìm quỹ tích các điểm  $M$  mà từ đó ta nhìn 1 hình vuông cho trước dưới 1 góc bằng  $45^\circ$ .
- 559** ([Bin23b], 379., p. 127). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$  cố định. Điểm  $M$  di chuyển trên  $(O)$ . Vẽ đường tròn  $(M)$  tiếp xúc với  $AB$ .  $I$  là giao điểm của 2 tiếp tuyến khác  $AB$  kẻ từ  $A, B$  với  $(M)$ . Tìm quỹ tích của điểm  $I$ .
- 560** ([Bin23b], 380., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $C, D$ . Tìm quỹ tích tâm  $I$  các đường tròn nội tiếp  $\triangle BCD$ .
- 561** ([Bin23b], 381., p. 127). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  vẽ cát tuyến cố định  $CAD$ ,  $C \in (O), D \in (O')$ . 1 đường thẳng thay đổi luôn đi qua  $A$  cắt  $(O), (O')$  lần lượt ở  $M, N$ . Tìm quỹ tích giao điểm  $P$  của 2 đường thẳng  $CM, DN$ .
- 562** ([Bin23b], 382., p. 127). Cho  $\triangle ABC$  & điểm  $D$  cố định trên cạnh  $BC$ . 1 góc vuông đỉnh  $D$  có các cạnh thay đổi vị trí cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt ở  $M, N$ . Tìm quỹ tích hình chiếu  $H$  của  $D$  trên  $MN$ .

## 21 Dựng Hình

- 563** ([Bin23b], VD55, p. 128). Cho  $\triangle ABC$ . Dựng  $\triangle DEF$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$  cho trước, 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh của  $\triangle ABC$ .
- 564** ([Bin23b], VD56, p. 129). Cho  $\triangle ABC$ , 1 điểm  $D$  nằm trong  $\triangle ABC$ . Dựng đường thẳng đi qua  $D$  cắt 2 cạnh  $AB, C$  lần lượt ở  $E, F$  sao cho  $BE = CF$ .
- 565** ([Bin23b], VD57, p. 129). Cho đường tròn  $(O)$  & 2 điểm  $A, B$  ở bên ngoài  $(O)$ . Dựng đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $(O)$  & đi qua 2 điểm  $A, B$ .

- 566** ([Bin23b], VD58, p. 130). Cho 2 điểm  $A, B$  nằm về 1 phía của đường thẳng  $xy$ . Dụng đường tròn đi qua  $A, B$  & tiếp xúc với đường thẳng  $xy$ .
- 567** ([Bin23b], VD59, p. 131). Dụng  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  biết cạnh huyền  $BC = a$ , đường phân giác  $AD = d$ .
- 568** ([Bin23b], 383., p. 132). Cho 3 tia chung gốc  $Ox, Oy, Oz$ . Dụng tam giác đều cạnh  $a$  có 3 đỉnh thuộc 3 tia này.
- 569** ([Bin23b], 384., p. 132). Cho  $\angle xOy$ . Dụng đoạn thẳng  $AB = a$  có  $A \in Ox, B \in Oy$  sao cho  $OA + OB = m$ .
- 570** ([Bin23b], 385., p. 132). (a) Dụng tam giác vuông biết chu vi bằng  $2p$  & bán kính của đường tròn nội tiếp bằng  $r$ . (b) Dụng tam giác biết 1 cạnh bằng  $a$ , chu vi bằng  $2p$ , & bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .
- 571** ([Bin23b], 386., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $\angle A = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , đường trung tuyến  $AM = m$ .
- 572** ([Bin23b], 387., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $\angle A = \alpha$ ,  $AC - AB = d$ , bán kính đường tròn nội tiếp bằng  $r$ .
- 573** ([Bin23b], 388., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết 3 điểm  $I, O, P$  lần lượt là tâm của 3 đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, bàng tiếp.
- 574** ([Bin23b], 389., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ , bán kính  $r$  của đường tròn nội tiếp, bán kính  $R_a$  của đường tròn bàng tiếp trong  $\angle A$ .
- 575** ([Bin23b], 390., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $\angle A = \alpha$ ,  $AB - BC = m$ ,  $AC - BC = n$ .
- 576** ([Bin23b], 391., p. 132). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ , đường cao  $AH = h$  biết đường phân giác  $AD$  bằng trung bình nhân của  $BD, CD$ .
- 577** ([Bin23b], 392., p. 132). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Dụng hình vuông  $EFGH$  có 4 cạnh (hoặc đường thẳng chứa cạnh) đi qua 4 điểm này (mỗi đường thẳng đi qua 1 điểm).
- 578** ([Bin23b], 393., p. 132). Cho  $\triangle ABC$  & điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$ . Dụng đường tròn đi qua  $A, M$ , cắt  $AB, AC$  lần lượt ở  $D, E$  sao cho  $DE \parallel BC$ .
- 579** ([Bin23b], 394., p. 133). Cho đường thẳng  $d$ , 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $d$ . Dụng điểm  $M \in d$  sao cho  $AM + BM = a$ .
- 580** ([Bin23b], 395., p. 133). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $\angle B - \angle C = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ , đường trung tuyến  $AM = m$ .
- 581** ([Bin23b], 396., p. 133). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $BC = a$ ,  $\angle B - \angle C = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ .
- 582** ([Bin23b], 397., p. 133). Cho  $\angle xOy$  nhọn, 2 điểm  $M, N$  nằm trong  $\angle xOy$ . Dụng điểm  $A \in Ox$  sao cho tia phân giác  $\angle MAN$  vuông góc với  $Oy$ .
- 583** ([Bin23b], 398., p. 133). Dụng tứ giác  $ABCD$  biết  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $b > a$ ,  $AC = m$ ,  $\angle B - \angle D = \alpha$  sao cho  $AC$  là tia phân giác  $\angle A$ .
- 584** ([Bin23b], 399., p. 133). Dụng tứ giác  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $\angle B = \alpha$ ,  $\angle D = \beta$  biết tứ giác  $ABCD$  có thể ngoại tiếp được 1 đường tròn.
- 585** ([Bin23b], 400., p. 133). Cho  $\triangle ABC$  nhọn. Dụng điểm  $M$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho nếu lấy các điểm đối xứng với  $M$  qua trung điểm mỗi cạnh của  $\triangle ABC$  thì được 3 điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 586** ([Bin23b], 401., p. 133). Cho  $\angle xOy$  nhọn, điểm  $M$  nằm trong  $\angle xOy$ . Dụng đường tròn  $(I)$  đi qua điểm  $M$ , cắt  $Ox, Oy$  thành 2 dây  $AB, CD$  sao cho  $\angle AMB = \angle CMD = \angle xOy$ .
- 587** ([Bin23b], 402., p. 133). Dụng hình vuông nội tiếp 1 hình viên phân cho trước (1 cạnh của hình vuông thuộc dây của viên phân, 2 đỉnh còn lại của hình vuông thuộc cung của viên phân).
- 588** ([Bin23b], 403., p. 133). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ . Điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$ . Đường vuông góc với  $AD$  tại  $A$  cắt 2 đường vuông góc với  $BC$  tại  $B, C$  lần lượt ở  $M, N$ . Dụng điểm  $D$  sao cho diện tích  $\triangle MDN$  gấp đôi diện tích  $\triangle ABC$ .
- 589** ([Bin23b], 404., p. 133). Cho  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp. Dụng điểm  $E$  thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $\angle DAE = \angle CBE$ .
- 590** ([Bin23b], 405., p. 133). Dụng  $\triangle ABC$  biết  $\angle A = \alpha$ ,  $BC = a$ , đường phân giác  $AD = d$ .

## 22 Toán Cực Trị

- 591** ([Bin23b], VD60, p. 134). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  chuyển động trên  $(O)$ .  $D, E$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên 2 đường thẳng  $AB, AC$ . Tìm vị trí điểm  $M$  sao cho  $DE$  có độ dài lớn nhất.
- 592** ([Bin23b], VD61, p. 134). Trong các  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ , tam giác nào có: (a) Diện tích lớn nhất? (b) Chu vi lớn nhất?
- 593** ([Bin23b], VD62, p. 135). Cho đường thẳng  $xy$ , 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với  $xy$ . Tìm điểm  $M \in xy$  sao cho  $\angle AMB$  lớn nhất.

**594** ([Bin23b], 406., p. 137). Cho đường thẳng  $d$ , 2 điểm  $A, B$  nằm về 2 phía của  $d$ . Đặt đường tròn  $(O)$  đi qua  $A, B$  sao cho nó cắt  $d$  thành 1 dây có độ dài nhỏ nhất.

**595** ([Bin23b], 407., p. 137). Trong các hình thang có 1 góc nhọn  $\alpha$  nội tiếp 1 đường tròn cho trước, hình nào có diện tích lớn nhất  $\alpha > 45^\circ$ ?

**596** ([Bin23b], 408., p. 137). Cho điểm  $I$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$ ,  $IA < IB$ . Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn đường kính  $AB$  & 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Điểm  $M$  di chuyển trên nửa đường tròn đó. Đường vuông góc với  $IM$  tại  $M$  cắt  $Ax, By$  lần lượt ở  $D, E$ . (a) Chứng minh  $AD \cdot BE$  có giá trị không đổi. (b) Tìm vị trí của điểm  $M$  để hình thang  $ABED$  có diện tích nhỏ nhất.

**597** ([Bin23b], 409., p. 137). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm vị trí điểm  $M$  thuộc đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$ , sao cho nếu  $D, E$  lần lượt là 2 hình chiếu của  $M$  trên 2 đường thẳng  $AB, AC$  thì  $DE$  có độ dài lớn nhất.

**598** ([Bin23b], 410., p. 137). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$ . Điểm  $M$  di chuyển trên cung nhỏ  $AB$ .  $I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của  $(O)$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $MI \cdot MK$  có GTLN.

**599** ([Bin23b], 411., pp. 137–138). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $BC$  không đi qua  $O$ . Điểm  $A$  di chuyển trên  $(O)$  sao cho  $\triangle ABC$  là tam giác nhọn.  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để tổng  $AH + BH + CH$  có GTLN.

**600** ([Bin23b], 412., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$ . Tìm điểm  $C$  thuộc cung nhỏ  $AB$  sao cho tổng  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  có GTNN.

**601** ([Bin23b], 413., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  đều nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc cung  $BC$  sao cho nếu  $H, I, K$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $AB, BC, CA$  thì tổng  $MA + MB + MC + MH + MI + MK$  có GTNN, GTLN.

**602** ([Bin23b], 414., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  đều. Vẽ 2 tia  $Bx, Cy$  cùng phía với  $A$  đối với  $BC$  sao cho  $Bx \parallel AC, Cy \parallel AB$ . 1 đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt  $Bx, Cy$  lần lượt ở  $D, E$ .  $I$  là giao điểm của  $CD, BE$ . Xác định vị trí của đường thẳng  $d$  để  $\triangle BCI$  có chu vi nhỏ nhất.

**603** ([Bin23b], 415., p. 138). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân,  $AB = AC = 10$  cm. (a) Chứng minh tồn tại vô số  $\triangle DEF$  vuông cân ngoại tiếp  $\triangle ABC$  (mỗi cạnh của  $\triangle DEF$  đi qua 1 đỉnh của  $\triangle ABC$ ). (b) Tính diện tích lớn nhất của  $\triangle DEF$ .

**604** ([Bin23b], 416., p. 138). Cho  $\triangle ABC$ . 2 điểm  $D, E$  lần lượt di chuyển trên 2 tia  $BA, CA$  sao cho  $BD = CE$ . (a) Vẽ hình bình hành  $BDEM$ . Tìm quỹ tích các điểm  $M$ . (b) Tìm vị trí của 2 điểm  $D, E$  sao cho độ dài  $DE$  nhỏ nhất.

**605** ([Bin23b], 417., p. 138). Cho đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là điểm chính giữa của cung nhỏ  $AB$ , điểm  $C$  chuyển động trên cung lớn  $AB$ ,  $D$  là giao điểm của  $AB, CM$ . (a) Tìm quỹ tích tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ACD$ . (b) Tìm vị trí điểm  $C$  để độ dài  $BI$  nhỏ nhất.

**606** ([Bin23b], 418., p. 138). Cho  $\triangle ABC$ . Điểm  $M$  di chuyển trên cạnh  $BC$ . Vẽ đường tròn  $(O_1)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $AB$  tại  $B$ . Vẽ đường tròn  $(O_2)$  đi qua  $M$  & tiếp xúc với  $AC$  tại  $C$ .  $N$  là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn. (a) Chứng minh điểm  $N$  thuộc đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . (b) Chứng minh đường thẳng  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định. (c) Tìm vị trí điểm  $M$  để đoạn thẳng  $O_1O_2$  có độ dài nhỏ nhất.

**607** ([Bin23b], 419., p. 139). Cho đường tròn  $(O, R)$ , 1 điểm  $I$  nằm bên trong  $(O)$ .  $AB, CD$  là 2 dây bất kỳ cùng đi qua  $I$  & vuông góc với nhau.  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . (a) Chứng minh khi 2 dây  $AB, CD$  thay đổi thì 3 tổng sau không đổi:  $OM^2 + ON^2, AB^2 + CD^2, AC^2 + BD^2$ . (b) Xác định vị trí của  $AB, CD$  để hình chữ nhật  $OMIN$  có: (i) diện tích lớn nhất; (ii) chu vi lớn nhất. (c) Xác định vị trí của  $AB, CD$  để tổng  $AB + CD$  lớn nhất, nhỏ nhất. (d) Xác định vị trí của  $AB, CD$  để tứ giác  $ACBD$  có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất.

**608** ([Bin23b], 420., p. 139). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , đường thẳng  $d$  không giao với  $(O)$ . Đặt điểm  $M \in d$  sao cho 2 tia  $MA, MB$  cắt  $(O)$  ở  $D, E$  & độ dài  $DE$  nhỏ nhất.

**609** ([Bin23b], 421., p. 139). Cho nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$ . Tìm điểm  $M$  thuộc cung  $CD$  sao cho 2 tia  $MA, MB$  cắt dây  $CD$  ở  $I, K$  &  $IK$  có độ dài lớn nhất.

## 23 Miscellaneous

**610** ([Bin23b], p. 139). Nếu 2 tam giác có 2 cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các góc xen giữa không bằng nhau thì 2 cạnh thứ 3 cũng không bằng nhau & cạnh nào đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

**611** ([Bin23b], VD63, p. 140). Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau. Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.

**612** ([Bin23b], VD64, p. 141, bài toán “con bướm”). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ , 2 điểm  $C, E$  thuộc cung  $AB$ . Vẽ 2 dây  $CD, EF$  đi qua trung điểm  $I$  của  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CF, DE$  với  $AB$ . Chứng minh  $IM = IN$ .

**613** ([Bin23b], VD65, p. 142, bài toán chia 3 3 góc 1 tam giác của Morley). Cho  $\triangle ABC$ . Đặt  $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$ . Lấy điểm  $K$  nằm trong  $\triangle ABC$  sao cho  $\angle ABK = \beta, \angle ACK = \gamma$ .  $D$  là giao điểm của 3 đường phân giác  $\triangle BCK$ . Lấy điểm  $E$  thuộc đoạn thẳng  $BK$ , điểm  $F$  thuộc đoạn thẳng  $CK$  sao cho  $\angle EDK = \angle FDK = 30^\circ$ . (a) Chứng minh  $\triangle DEF$  đều. (b)  $M, N$  lần lượt đối xứng với  $D$  qua  $BK, CK$ . Chứng minh  $MEFN$  là hình thang cân, tính 4 góc của hình thang cân đó theo  $\alpha$ . (c) Chứng minh  $A, E, F, M, N$  thuộc cùng 1 đường tròn & 2 tia  $AE, AF$  chia  $\angle A$  thành 3 góc bằng nhau.



- 614** ([Bin23b], 422., p. 143). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\angle B = 2\beta$ ,  $\angle C = 2\alpha$ , 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau. Vẽ hình bình hành  $BDCK$ . (a) Tính  $\angle BEK, \angle BKE$  theo  $\alpha, \beta$ . (b) Chứng minh  $\alpha = \beta$ .
- 615** ([Bin23b], 423., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ , đường phân giác  $BD$ .  $d$  là đường phân giác của góc ngoài đỉnh  $B$ .  $M, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $A, C$  trên  $d$ . Chứng minh  $BD \cdot MQ = 2S_{ABC}$ .
- 616** ([Bin23b], 424., p. 144). Chứng minh nếu 1 tứ giác nội tiếp có 2 cạnh đối bằng nhau thì 2 cạnh đối kia song song & tứ giác đó là hình thang cân.
- 617** ([Bin23b], 425., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ .  $d_1, d_2$  lần lượt là đường phân giác của góc ngoài tại  $B, C$ .  $M, Q$  lần lượt là hình chiếu của  $A, C$  trên  $d_1$ .  $N, P$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên  $d_2$ . (a) Chứng minh  $MN \parallel BC$ . (b) Chứng minh  $MNPQ$  là tứ giác nội tiếp. (c)  $BD, CE$  là 2 đường phân giác của  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $BD \cdot MQ = CE \cdot NP$ . (d) Chứng minh nếu  $BD = CE$  thì  $\triangle ABC$  cân.
- 618** ([Bin23b], 426., p. 144). Cho  $\triangle ABC$  có 2 đường phân giác  $BD, CE$  bằng nhau & cắt nhau tại  $I$ . (a) Vẽ điểm  $N$  sao cho  $BN = AE, DN = AC$ ,  $A, N$  cùng phía đối với  $BD$ . Chứng minh  $ANBD$  là tứ giác nội tiếp. (b)  $NK$  là đường phân giác  $\triangle BDN$ . Chứng minh  $ANKI$  là tứ giác nội tiếp. (c) Chứng minh  $ANBD$  là hình thang cân. (d) Chứng minh  $\triangle ABC$  cân.
- 619** ([Bin23b], 427., p. 144). Chứng minh nếu  $\triangle ABC, \triangle EPQ$  có  $BC = PQ, \angle A = \angle E$ , 2 đường phân giác  $AD, EF$  bằng nhau thì  $\triangle ABC = \triangle EPQ$ .
- 620** ([Bin23b], 428., p. 144). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $D$  thuộc đường phân giác  $AI$ . 2 đường thẳng  $BD, CD$  cắt  $AC, AB$  lần lượt ở  $M, N$ . Chứng minh nếu  $BM = CN$  thì  $\triangle ABC$  cân.
- 621** ([Bin23b], 429., pp. 144–145). Cho tứ giác  $ABCD$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , điểm  $E$  di chuyển trên cung  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CE, DE$  với  $AB$ . (a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle CEM$  cắt đường thẳng  $AB$  tại 1 điểm  $K$  cố định. (b) Đặt  $AM = a, MN = b, BN = c$ . Chứng minh  $\frac{ac}{b}$  có giá trị không đổi.
- 622** ([Bin23b], 431., p. 145). Cho đường tròn  $(O)$ , dây  $AB$ , 2 điểm  $C, E$  thuộc cung  $AB$ ,  $C$  thuộc cung  $AE$ . Vẽ 2 dây  $CD, EF$  đi qua điểm  $I$  thuộc dây  $AB$ .  $M, N$  lần lượt là giao điểm của  $CF, DE$  với  $AB$ . Chứng minh  $\frac{1}{AI} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{BI} + \frac{1}{IM}$ .
- 623** ([Bin23b], 432., p. 145, bài toán của Napoléon Bonaparte). Cho  $\triangle ABC$ . (a) Ở phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ  $\triangle BCD, \triangle ACE, \triangle ABF$  đều.  $H, I, K$  lần lượt là trọng tâm của 3 tam giác đều ấy. Chứng minh  $\triangle HIK$  đều. (b) Ở phía ngoài  $\triangle ABC$  vẽ  $\triangle BCH, \triangle ACI, \triangle ABK$  lần lượt có cạnh đáy là  $BC, CA, AB$  & góc ở đáy bằng  $30^\circ$ . Chứng minh  $\triangle HIK$  đều.
- 624** ([Bin23b], 433., p. 145, bài toán của Pascal). Chứng minh nếu 1 lục giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đối không song song thì giao điểm của các cặp cạnh đối là 3 điểm thẳng hàng.

## Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [Bin+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đàm, Nguyễn Bá Đàng, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Bin23a] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [Bin23b] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.