

# Problem: Algebraic & Rational Fractions

## Bài Tập: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 2 tháng 10 năm 2024

### Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Problem: Algebraic & Rational Fractions – Bài Tập: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ.*  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_8/algebraic\\_rational\\_fractions/problem/NQBH\\_algebraic\\_rational\\_fractions\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/problem/NQBH_algebraic_rational_fractions_problem.pdf).  
TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_8/algebraic\\_rational\\_fractions/problem/NQBH\\_algebraic\\_rational\\_fractions\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/problem/NQBH_algebraic_rational_fractions_problem.tex).
- *Problem & Solution: Algebraic & Rational Fractions – Bài Tập & Lời Giải: Phân Thức Đại Số & Phân Thức Đại Số Hữu Tỷ.*  
PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_8/algebraic\\_rational\\_fractions/problem/NQBH\\_algebraic\\_rational\\_fractions\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/problem/NQBH_algebraic_rational_fractions_solution.pdf).  
TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_8/algebraic\\_rational\\_fractions/problem/NQBH\\_algebraic\\_rational\\_fractions\\_solution.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/algebraic_rational_fractions/problem/NQBH_algebraic_rational_fractions_solution.tex).

## Mục lục

1	Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức	1
2	Operations $\pm$ on Algebraic Fractions – Phép $\pm$ Các Phân Thức Đại Số	4
3	Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số	5
4	Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ	8
5	Algebraic Fraction & Fraction – Phân Thức & Phân Số	8
6	Polynomial Factorization – Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử	10
7	Tính Chia Hết Đối Với Số Nguyên	11
8	Miscellaneous	13
	Tài liệu	14

## 1 Tính Chất Cơ Bản của Phân Thức. Rút Gọn Phân Thức

1 ([Tuy23], VD20, p. 28). (a) Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{8}$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ . (b) Cho  $a, b, c, d, x, y, \alpha \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \alpha$ . Rút gọn phân thức  $B = \frac{ax^2 + bxy + ay^2}{cx^2 + dxy + cy^2}$ .

2 ([Tuy23], 141., p. 29). So sánh: (a)  $\frac{201 - 200}{201 + 200}$  &  $\frac{201^2 - 200^2}{201^2 + 200^2}$ . (b)  $\frac{1999 \cdot 4001 + 2000}{2000 \cdot 4001 - 2001}$  &  $\frac{1501 \cdot 1503 - 1500 \cdot 1498}{6002}$ .

3 (Mở rộng [Tuy23], 141a., p. 29). Biện luận theo các tham số  $a, b \in \mathbb{R}$  để so sánh  $A = \frac{a - b}{a + b}$  &  $B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ .

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

4 ([Tuy23], 142., p. 29). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1$ : (a)  $A = \frac{n^3 - 1}{n^5 + n + 1}$  không tối giản. (b)  $B = \frac{6n + 1}{8n + 1}$  tối giản. (c)

$C = \frac{10n^2 + 9n + 4}{20n^2 + 20n + 9}$  tối giản. (d) Có thể mở rộng từ  $\mathbb{N}$  lên  $\mathbb{Z}$  được không?

5 ([Tuy23], 143., p. 29). Viết mỗi đa thức sau dưới dạng 1 phân thức đại số với tử & mẫu là những đa thức có 2 hạng tử: (a)  $A = \sum_{i=0}^{19} x^i = x^{19} + x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1$ . (b)  $B = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) \dots (x^{32} + 1)$ .

Rút gọn phân thức:

6 ([Tuy23], 144., p. 29). (a)  $A = \frac{n!}{(n-1)!(n+1)}$ . (b)  $\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$ .

7 ([Tuy23], 145., p. 29). (a)  $A = \frac{(x^2 - y)(y + 1) + x^2 y^2 - 1}{(x^2 + y)(y + 1) + x^2 y^2 + 1}$ . (b)  $B = \frac{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)}{x^2 y - x^2 z + y^2 z - y^3}$ .

8 ([Tuy23], 146., p. 29). (a)  $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 6x^2 - 7}$ . (b)  $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}$ . (c)  $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 3x + 2}$ .

9 ([Tuy23], 147., p. 29). (a)  $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 8x^2 + 17x + 10}$ . (b)  $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 1}{x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1}$ .

10 ([Tuy23], 148., p. 29). Cho  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2}$ .

11 ([Tuy23], 149., p. 30). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x + y + z = 0$ . Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ . (b)  $B = \frac{(x^2 + y^2 - z^2)(y^2 + z^2 - x^2)(z^2 + x^2 - y^2)}{16xyz}$ .

12 ([Tuy23], 150., p. 30). Cho  $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ . Rút gọn phân thức  $A = \frac{xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)}$ .

13 ([Bin23], VD28, p. 18). Cho phân thức  $A = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + (ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)^2}$ . (a) Tìm ĐKXĐ. (b) Rút gọn A.

14 ([Bin23], VD29, p. 19). Rút gọn phân thức  $A = \frac{(b - c)^3 9(c - a)^3 + (a - b)^3}{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}$ .

15 ([Bin23], VD30, p. 19). Chứng minh phân số  $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$  tối giản,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

16 ([Bin23], VD28, p. 19). (a) Chứng minh  $\sum_{i=0}^{31} x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^{31} = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$ .

17 ([Bin23], 106., p. 20). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$ . (b)  $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}$ .

Rút gọn phân thức:

18 ([Bin23], 107., p. 20). (a)  $A = \frac{1235 \cdot 2469 - 1234}{1234 \cdot 2469 + 1235}$ . (b)  $B = \frac{4002}{1000 \cdot 1002 - 999 \cdot 1001}$ .

19 ([Bin23], 108., p. 20). (a)  $\frac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$ . (b)  $\frac{(x - y)^3 - 3xy(x + y) + y^3}{x - 6y}$ . (c)  $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$ .

20 ([Bin23], 109., p. 20).  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{(n+1)!}{n!(n+2)}$ . (b)  $\frac{n!}{(n+1)! - n!}$ . (c)  $\frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+1)! + (n+2)!}$ .

21 ([Bin23], 110., p. 20). (a)  $\frac{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$ . (b)  $\frac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$ . (c)  $\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z - x)^2}$ . (d)  $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ .

22 ([Bin23], 111., p. 20). Chứng minh phân số tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{3n + 1}{5n + 2}$ . (b)  $\frac{12n + 1}{30n + 2}$ . (c)  $\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$ . (d)  $\frac{2n + 1}{2n^2 - 1}$ .

23 ([Bin23], 112., p. 20). Chứng minh phân số  $\frac{n^7 + n^2 + 1}{n^8 + n + 1}$  không tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

24 ([Bin23], 113., p. 20). Viết gọn biểu thức  $(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} - x^{16} + 1)$  dưới dạng 1 phân thức.

25 ([Bin23], 114., p. 20). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{(ax + by + cz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} = a^2 + b^2 + c^2$ . Chứng minh  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ .

26 ([Bin23], 115., p. 20). Cho biết  $ax + by + cz = 0$ . Rút gọn  $A = \frac{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}{ax^2 + by^2 + cz^2}$ .

27 ([Bin23], 116., p. 20). Rút gọn  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2}$  biết  $x + y + z = 0$ .

28 ([Bin23], 117., p. 21). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x - y}{x + y}$  biết  $x^2 - 2y^2 = xy, y \neq 0, x + y \neq 0$ .

29 ([Bin23], 118., p. 21). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{3x - 2y}{3x + 2y}$  biết  $9x^2 + 4y^2 = 20xy, 2y < 3x < 0$ .

30 ([Bin23], 119., p. 21). Cho  $x, y \in \mathbb{R}^*, 3x - y = 3z, 2x + y = 7z$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$ .

31 ([Bin23], 120., p. 21). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để phân thức có giá trị nguyên: (a)  $\frac{3}{2x - 1}$ . (b)  $\frac{5}{x^2 + 1}$ . (c)  $\frac{7}{x^2 - x + 1}$ . (d)  $\frac{x^2 - 59}{x + 8}$ . (e)  $\frac{x + 2}{x^2 + 4}$ . (f) Mở rộng.

32 ([Bin23], 121., p. 21). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  để phân thức  $\frac{10}{x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$ .

33 ([Bin23], 122., p. 21). Chứng minh nếu 3 chữ số  $a, b, c \neq 0$  thỏa  $\overline{ab} : \overline{bc} = a : c$  thì  $\overline{abbb} : \overline{bbbc} = a : c$ .

34 ([Bin23], 123., p. 21). Điểm trung bình môn Toán của các học sinh nam & nữ 2 lớp 8A, 8B được thống kê ở bảng:

	Lớp 8A	Lớp 8B	Cả 2 lớp 8A, 8B
Nam	7.1	8.1	7.9
Nữ	7.6	9.0	
Cả lớp	7.4	8.4	

Tính điểm trung bình môn Toán của các học sinh của cả 2 lớp 8A, 8B.

35 ([Bin+21], VD5.1, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, chứng minh 2 phân thức sau bằng nhau:  $\frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{a^2 - 4ab + 3b^2}$  &  $\frac{a + b}{a - b}$  với  $a \neq b$  &  $a \neq 3b$ .

36 ([Bin+21], VD5.2, p. 39). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, xét sự bằng nhau của 2 phân thức  $\frac{(3x + 2)(x + 5)}{4(3x + 2)}$  &  $\frac{x + 5}{4}$  trong các trường hợp biến  $x$  thuộc các tập hợp: (a)  $x \in \mathbb{N}$ . (b)  $x \in \mathbb{Z}$ . (c)  $x \in \mathbb{Q}$ .

37 ([Bin+21], VD5.3, p. 39). So sánh  $A = \frac{2013^2 - 2012^2}{2013^2 + 2012^2}$  với  $B = \frac{2013 - 2012}{2013 + 2012}$ .

38 ([Bin+21], VD5.4, p. 40). Chứng minh:  $\sum_{i=0}^{63} a^i = \prod_{i=0}^5 (1 + a^{2^i})$ , i.e.,  $1 + a + a^2 + \dots + a^{63} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4) \dots (1 + a^{32})$ .

39 ([Bin+21], VD5.5, p. 40). Rút gọn phân thức  $A = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$ .

40 ([Bin+21], VD5.6, p. 40). Rút gọn phân thức  $A = \frac{a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}{a^{2042} + a^{2032} + a^{2022} + a^{2012} + a^{30} + a^{20} + a^{10} + 1}$ .

41 ([Bin+21], 5.1, p. 41). Dùng định nghĩa 2 phân thức bằng nhau, tìm đa thức  $A$  trong các trường hợp: (a)  $\frac{A}{3x - 2} = \frac{15x^2 + 10x}{9x^2 - 4}$ . (b)  $\frac{3x^2 - 5x - 2}{A} = \frac{x - 2}{2x - 3}$ . (c)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{x^2 + 4x + 4}{A}$ . (d)  $\frac{2x + 1}{x^3 + x^2 - x + 2} = \frac{A}{x^3 + 1}$ .

42 ([Bin+21], 5.2, p. 41). Biến đổi mỗi phân thức sau thành 1 phân thức bằng nó & có tử thức là đa thức  $B$  cho sau đây: (a)  $\frac{2x - 5}{3x^2 + 4}$  &  $B = 2x^2 - 3x - 5$ . (b)  $\frac{(x + 1)(x^2 + x - 6)}{(x^2 - 9)(x^2 + 3x + 2)}$  &  $B = x - 2$ .

43 ([Bin+21], 5.3, p. 41). Rút gọn biểu thức: (a)  $\frac{2^{18} \cdot 54^3 + 15 \cdot 4^{10} \cdot 9^4}{2 \cdot 12^9 + 6^{10} \cdot 2^{10}}$ . (b)  $\frac{4^{15} \cdot 27^6 \cdot 42 - 3 \cdot 72^{10}}{4^4 \cdot 25 \cdot 36^{10} - 4^5 \cdot 6^{19} \cdot 35}$ . (c)  $\frac{880 \cdot (15^2 \cdot 3^{18} + 27^7)}{4^2 \cdot 15^4 \cdot 3^{16} - 2^4 \cdot 9^{11}}$ .

44 ([Bin+21], 5.4, p. 41). Rút gọn: (a)  $M = \frac{4024 \cdot 2014 - 2}{2011 + 2012 \cdot 2013}$ . (b)  $N = \frac{2012 \cdot 2013 + 2014}{2010 - 2012 \cdot 2015}$ . (c)  $P = \frac{66666 \cdot 87564 - 33333}{22222 \cdot 87560 + 77777}$ .

45 ([Bin+21], 5.5, p.. 41). Rút gọn phân thức: (a)  $Q = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}$ . (b)  $R = \frac{3x^2 + 5xy - 2y^2}{3x^2 - 7xy + 2y^2}$ . (c)  $S = \frac{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}{x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12}$ .

(d)  $T = \frac{x^6 - y^6}{x^6 + 2x^4y^2 + 2x^2y^4 + y^6}$ .

46 ([Bin+21], 5.6, p.p. 41–42). Rút gọn: (a)  $A = \frac{a^4 - 5a^2 + 4}{a^4 - a^2 + 4a - 4}$ . (b)  $B = \frac{a^3 - 3a + 2}{2a^3 - 7a^2 + 8a - 3}$ . (c)  $C = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca}$ .

(d)  $D = \frac{a^3 - 7a + 6}{a^2(a+3)^3 - 4a(a+3)^3 + 4(a+3)^3}$ . (e)  $E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$ .

47 ([Bin+21], 5.7, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{xy^2 - xz^2 - y^3 + yz^2}{x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)}$ . (b)  $B = \frac{x^4(y^2 - z^2) + y^4(z^2 - x^2) + z^4(x^2 - y^2)}{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}$ .

48 ([Bin+21], 5.8, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $A = \frac{(x+y+z)^2 - 3xy - 3yz - 3zx}{9xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3}$ . (b)  $B = \frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$ .

(c)  $C = \frac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{(x^2 - y^2)^3 + (y^2 - z^2)^3 + (z^2 - x^2)^3}$ .

49 ([Bin+21], 5.9, p.. 42). Rút gọn phân thức với  $n \in \mathbb{N}^*$ : (a)  $\frac{(n+2)!}{n!(n+2)(n+3)}$ . (b)  $\frac{n!}{n! + (n-1)!}$ . (c)  $\frac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+2)! + (n+3)!}$ .

50 ([Bin+21], 5.10, p.. 42). Chứng minh các phân số sau là tối giản  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{3n+2}{4n+3}$ . (b)  $\frac{12n+1}{2(10n+1)}$ . (c)  $\frac{2n+3}{2n^2+4n+1}$ .

51 ([Bin+21], 5.11, p.. 42). Chứng minh phân số  $\frac{n^7 + 2n^2 + n + 2}{n^8 + n^2 + 2n + 2}$  không tối giản,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

52 ([Bin+21], 5.12, p.. 42). Viết gọn biểu thức sau dưới dạng 1 phân thức:  $P = (x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)(x^{32} + x^{16} + 1)$ .

53 ([Bin+21], 5.13, p.. 42). Rút gọn phân thức: (a)  $\frac{|x-2| + |x-1| + x}{2x^2 - 7x + 3}$  với  $x < 1$ . (b)  $\frac{|x-4||x-5|}{x^3 - 9x^2 + 20x}$  với  $4 < x < 5$ .

54 ([Bin+21], 5.14, p.. 43). Rút gọn phân thức: (a)  $T = \frac{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) + 1}{x^2 + 7x + 11}$ . (b)  $U = \frac{x^3 - 53x + 88}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + 16}$ .

55 ([Bin+21], 5.15, p.. 43). Cho  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$  &  $x, y, z \neq 0$ . Chứng minh:  $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

56 ([Bin+21], 5.16, p.. 43). Cho  $ax + by + cz = 0$ . Rút gọn phân thức:  $V = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$ .

57 ([Bin+21], 5.17, p.. 43). Cho  $x + y + z = 0$ . Chứng minh:  $\frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} = 3$ .

58 ([Bin+21], 5.18, p.. 43). Chứng minh:  $\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2zt + 2xy - t^2}{x + y - z - t} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - 2zt + 2xz - t^2}{x - y + z - t}$ .

59 ([Bin+21], 5.19., p. 43). Rút gọn:  $X = \frac{(2^4 + 4)(6^4 + 4)(10^4 + 4)(14^4 + 4)}{(4^4 + 4)(8^4 + 4)(12^4 + 4)(16^4 + 4)}$ .

## 2 Operations $\pm$ on Algebraic Fractions – Phép $\pm$ Các Phân Thức Đại Số

60 ([Tuy23], VD21, p. 30). Tính:  $A = \frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ .

61 ([Tuy23], VD22, p. 31). Tính hợp lý: (a)  $A(x, n) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (b)  $A(x, 99)$ .

62 ([Tuy22], VD18, p. 41). Tính:  $A = \frac{x^2 - yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2 - zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2 - xy}{(z+x)(z+y)}$ .

63 ([Tuy23], 151., pp. 31–32). Tính: (a)  $\frac{x^2}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2xy^2}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} + \frac{y^2}{(x^2 - y^2)(x+y)}$ . (b)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1} - \frac{8}{x^8+1} - \frac{16}{x^{16}+1}$ . (c) Mở rộng.

64 ([Tuy23], 152., p. 32). *Tính: (a)  $A = \frac{2}{x-y} + \frac{2}{y-z} + \frac{2}{z-x} + \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ . (b)  $B = \frac{yz}{(x+y)(y+z)} + \frac{zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ .*

65 ([Tuy23], 153., p. 32). (a) *Tính  $A = \frac{a}{x^2+ax} + \frac{a}{x^2+3ax+2a^2} + \frac{a}{x^2+5ax+6a^2} + \cdots + \frac{a}{x^2+19ax+90a^2} + \frac{1}{x+10a}$ .* (b) *Mở rộng.*

66 ([Tuy22], 162., p. 42). *Tính: (a)  $\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$ . (b)  $\frac{1}{(y-z)(x^2+xz-y^2-yz)} + \frac{1}{(z-x)(y^2+xy-z^2-zx)} + \frac{1}{(x-y)(z^2+yz-x^2-xy)}$ .*

67 ([Tuy23], 154., p. 32). *Cho  $A = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{xy} + \frac{(x+1)(y+1)}{xyz} + \frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{xyzt}$ . Chứng minh có thể viết  $A$  dưới dạng 1 phân thức có tử 8 mẫu đều là tích của 4 nhân tử.*

68 ([Tuy22], 167., p. 43). *Cho  $xy = a, yz = b, zx = c$  với  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ . Tính  $x^2 + y^2 + z^2$ .*

69 ([Tuy23], 155., p. 32). *Cho  $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1$ . Tính  $S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ .*

70 ([Tuy23], 156., p. 32). *Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x+y+z=0$ . Tính: (a)  $A = \frac{x^2}{x^2-y^2-z^2} + \frac{y^2}{y^2-z^2-x^2} + \frac{z^2}{z^2-x^2-y^2}$ . (b)  $B = \frac{1}{x^2+y^2-z^2} + \frac{1}{y^2+z^2-x^2} + \frac{1}{z^2+x^2-y^2}$ .*

71 ([Tuy23], 157., p. 32). *Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{z}{x} = \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$ . Chứng minh trong 3 số  $x, y, z$  tồn tại 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.*

72 ([Tuy23], 159., p. 32). *Cho  $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$ . Tính  $AB$ .*

73 ([Tuy23], 159., p. 32). *1 tổ dự định sản xuất  $x$  sản phẩm trong 12 giờ. Nhưng thực tế trong 9 giờ tổ đã sản xuất vượt mức dự định là 3 sản phẩm. Viết biểu thức biểu diễn số sản phẩm đó tổ đó sản xuất vượt dự định trong mỗi giờ.*

### 3 Operations $\cdot, :$ on Algebraic Fractions – Phép $\cdot, :$ Các Phân Thức Đại Số

74 ([Tuy23], VD23, p. 33). (a) *Chứng minh  $A = \left(1 - \frac{3}{2 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{3}{3 \cdot 5}\right) \left(1 - \frac{3}{4 \cdot 6}\right) \cdots \left(1 - \frac{3}{n(n+2)}\right) > \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .* (b) *Mở rộng.*

75 ([Tuy23], VD24, p. 33). *Cho  $A = \frac{x-y}{x+y}, B = \frac{y-z}{y+z}, C = \frac{z-x}{z+x}$ . Chứng minh  $(1+A)(1+B)(1+C) = (1-A)(1-B)(1-C)$ .*

76 ([Tuy23], 160., p. 34). *Tính: (a)  $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x^2-4x-5}{x^2-10x+25}$ . (b)  $\frac{x(y^2-z) + y(x-xy)}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2} : \frac{xy^2 - xz(2y-z)}{2(x^3+y^3+z^3-3xyz)}$ .*

77 ([Tuy23], 161., p. 34). *Tính: (a)  $A = \prod_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (b)  $B = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{17^4+4}$ . (c) *Mở rộng.**

78 ([Tuy23], 162., p. 34). *Chứng minh  $A = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \left(1 + \frac{4}{12}\right) \left(1 + \frac{4}{21}\right) \cdots \left(1 + \frac{4}{n(n+4)}\right) < 6, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .*

79 ([Tuy23], 163., p. 35). *Cho  $A = \frac{x-y}{1+xy}, B = \frac{y-z}{1+yz}, C = \frac{z-x}{1+zx}$ . Chứng minh  $A+B+C = ABC$ .*

80 ([Tuy23], 164., p. 35). *Cho  $a, b \in \mathbb{R}, ab=1, a+b \neq 0$ . Tính  $A = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ .*

81 ([Tuy23], 165., p. 35). *Cho  $A = \frac{4yz-x^2}{yz+2x^2}, B = \frac{4zx-y^2}{zx+2y^2}, C = \frac{4xy-z^2}{xy+2z^2}$ . Chứng minh nếu  $x+y+z=0$  &  $x, y, z$  khác nhau đôi một thì  $ABC$  là 1 hằng số.*

82 ([Bin23], VD32, p. 21). *Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a+b+c=0$ . Rút gọn biểu thức  $A = \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca}{c^2+a^2-b^2}$ .*

83 ([Bin23], VD33, p. 22). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$ .

84 ([Bin23], VD34, p. 22). Rút gọn biểu thức  $A = \sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{[i(i+1)]^2} = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$ .

85 ([Bin23], VD35, p. 22). Xác định  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-1}$ .

86 ([Bin23], VD36, p. 22). Cho  $A = \frac{1}{(x+y)^3} \left( \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4} \right)$ ,  $B = \frac{2}{(x+y)^4} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3} \right)$ ,  $C = \frac{2}{(x+y)^4} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right)$ . Tính  $A + B + C$ .

87 ([Bin23], 124., p. 23). Tính: (a)  $\frac{x+3}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-1}$ . (b)  $\frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)} + \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(y-x)}$ .

88 ([Bin23], 125., p. 23). Tính: (a)  $A = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$ . (b)  $B = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$ . (c)  $C = \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$ . (d)  $D = \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$ . (e)  $E = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ .

89 ([Bin23], 126., p. 24). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  đôi một khác nhau. Chứng minh biểu thức có giá trị nguyên: (a)  $A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ . (b)  $B = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$ .

90 ([Bin23], 127., p. 24). Cho  $3y - x = 6$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x}{y-2} + \frac{2x-3y}{x-6}$ .

91 ([Bin23], 128., p. 24). Tìm  $x, y, z \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = \frac{x^2+y^2+z^2}{5}$ . (b)  $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$ .

92 ([Bin23], 129., p. 24). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$ . Chứng minh  $a + b + c = abc$ .

93 ([Bin23], 130., p. 24). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ ,  $a + b + c = 1$ . Tính giá trị biểu thức  $a^2 + b^2 + c^2$ .

94 ([Bin23], 131., p. 24). Cho  $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ ,  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ . Tính giá trị biểu thức  $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$ .

95 ([Bin23], 132., p. 24). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ . Chứng minh  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ .

96 ([Bin23], 133., p. 24). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ . Chứng minh trong 3 số  $a, b, c$  tồn tại 2 số bằng nhau.

97 ([Bin23], 134., p. 24). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để phân thức có giá trị nguyên: (a)  $A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x-3}$ . (b)  $B = \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ . (c)  $C = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x - 2}{x^2 + 2}$ .

98 ([Bin23], 135., p. 25). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{x+3a}{2-x} + \frac{x-3a}{2+x} - \frac{2a}{4-x^2} + a$  với  $x = \frac{a}{3a+2}$ .

99 ([Bin23], 136., p. 25). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ .

100 ([Bin23], 137., p. 25). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{a+b-c}{ab} - \frac{b+c-a}{bc} - \frac{c+a-b}{ca} = 0$ . Chứng minh trong 3 phân thức ở vế trái, có ít nhất 1 phân thức bằng 0.

101 ([Bin23], 138., p. 25). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{ay-bx}{c} = \frac{bz-cy}{a} = \frac{cx-az}{b}$ . Chứng minh mỗi phân thức này bằng 0.

102 ([Bin23], 139., p. 25). Xác định  $a, b, c \in \mathbb{R}$  để: (a)  $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$ . (b)  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ . (c)  $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}$ .

103 ([Bin23], 140., p. 25). Rút gọn biểu thức  $A = (ab+bc+ca) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$ .

**104** ([Bin23], 141., p. 25). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  khác nhau đôi một,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ . Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab}$ . (b)  $B = \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab}$ . (c)  $C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ .

**105** ([Bin23], 142., p. 25). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  khác nhau đôi một,  $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$ .

**106** ([Bin23], 143., p. 25). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^3 + x + y = x^3y^3 + xy$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**107** ([Bin23], 144., p. 25). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, a^3 + b^3 + c^3 = 3abc, a + b + c \neq 0$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$ .

**108** ([Bin23], 145., p. 26). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1}{a^2 - 5a + 6} + \frac{1}{a^2 - 7a + 12} + \frac{1}{a^2 - 9a + 20} + \frac{1}{a^2 - 11a + 30}$ .

**109** ([Bin23], 146., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, abc = 1, a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . Chứng minh trong 3 số  $a, b, c$  tồn tại 1 số bằng 1.

**110** ([Bin23], 147., p. 26). Chứng minh nếu  $x + y + z = a, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$  thì tồn tại 1 trong 3 số  $x, y, z$  bằng  $a$ .

**111** ([Bin23], 148., p. 26). 2 biểu thức  $x + y + z, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  có thể cùng có giá trị bằng 0 được không?

**112** ([Bin23], 149., p. 26). Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2}$  biết  $2a = by + cz, 2b = cz + ax, 2c = ax + by, a + b + c \neq 0$ .

**113** ([Bin23], 150., p. 26). (a) Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, abc = 2$ . Rút gọn biểu thức  $A = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ca + 2c + 2}$ . (b) Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, abc = 1$ . Rút gọn biểu thức  $A = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ca + c + 1}$ . (c) Mở rộng.

**114** ([Bin23], 151., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, ac \neq 0, a \neq b, b \neq c, \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ . Chứng minh  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{c}$ .

**115** ([Bin23], 152., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a + b + c = 0$ . Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ . (b)  $B = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$ . (c)  $C = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$ . (d)  $D = \frac{a^4}{a^4 - (b^2 - c^2)^2} + \frac{b^4}{b^4 - (c^2 - a^2)^2} + \frac{c^4}{c^4 - (a^2 - b^2)^2}$ .

**116** ([Bin23], 153., p. 26). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a + b + c = 0$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right)$ .

**117** ([Bin23], 154., p. 27). Chứng minh nếu  $(a^2 - bc)(b - abc) = (b^2 - ca)(a - abc)$  &  $abc(a - b) \neq 0$  thì  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ .

**118** ([Bin23], 155., p. 27). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{R}^*, a + b + c = x + y + z = 0, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ . Chứng minh  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ .

**119** ([Bin23], 156., p. 27). Cho  $\frac{xy+1}{y} = \frac{yz+1}{z} = \frac{zx+1}{x}$ . Chứng minh  $x = y = z$  hoặc  $x^2y^2z^2 = 1$ .

**120** ([Bin23], 157., p. 27). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ . Chứng minh  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

**121** ([Bin23], 158., p. 27). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 1$ . Chứng minh  $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$ .

**122** ([Bin23], 159., p. 27). Cho  $x \in \mathbb{R}^*, x + \frac{1}{x} = a \in \mathbb{R}$ . Tính biểu thức theo  $a$ : (a)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ . (b)  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ . (c)  $x^4 + \frac{1}{x^4}$ . (d)  $x^5 + \frac{1}{x^5}$ .

**123** ([Bin23], 160., p. 27). Cho  $x \in \mathbb{R}^*, \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = a \in \mathbb{R}$ . Tính biểu thức  $A = \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) : \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$  theo  $a$ .

**124** ([Bin23], 161., p. 27). Cho  $x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 1 = 0$ . Tính giá trị biểu thức  $A = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ . (b)  $B = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$ .



**125** ([Bin23], 162., p. 27). Cho  $a, x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x}{x^2 - x + 1} = a$ . Tính  $A = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$  theo  $a$ .

**126** ([Bin23], 163., p. 27). Cho  $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ,  $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $y = \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2}$ . Tính giá trị biểu thức  $A = x + y + xy$ .

**127** ([Bin23], 164., p. 27). (a) Mức sản xuất của 1 xí nghiệp năm 2001 tăng  $a\%$  so với năm 2000, năm 2002 tăng  $b\%$  so với năm 2001. Tính mức sản xuất của xí nghiệp đó năm 2002 tăng so với năm 2000. (b) 1 số  $a$  tăng  $m\%$ , sau đó lại giảm đi  $n\%$ ,  $a, m, n \in \mathbb{R}$ ,  $a, m, n > 0$ , thì được số  $b$ . Tìm liên hệ giữa  $m, n$  để  $a < b$ .

## 4 Rational Expression Transformation – Biến Đổi Biểu Thức Hữu Tỷ

**128** ([Tuy23], VD25, p. 35). Cho  $A = \frac{2}{x} - \left( \frac{x^2}{x^2 - xy} + \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 - xy} \right) : \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}$ . (a) Tìm DKXD. (b) Rút gọn  $A$ . (c) Tính giá trị của  $A$  với  $|2x - 1| = 1$ ,  $|y + 1| = \frac{1}{2}$ .

**129** ([Tuy23], 166., p. 36). Cho 3 phân thức  $A = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$ ,  $B = \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}$ ,  $C = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5}$ . Tìm các giá trị của  $x, y$  để: (a) Giá trị mỗi phân thức này được xác định. (b) Giá trị mỗi phân thức này bằng 0.

**130** ([Tuy23], 167., pp. 36–37). (a) Tìm GTLN của phân thức  $A = \frac{5}{x^2 - 6x + 10}$ . (b) Tìm GTNN của phân thức  $B = \frac{-8}{x^2 - 2x + 5}$ . (c) Mở rộng.

**131** ([Tuy23], 168., p. 37). Cho biểu thức  $A = \frac{1}{x + y + z} \cdot \frac{1}{xy + yz + zx} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$ . Chứng minh  $A > 0$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$ .

**132** ([Tuy23], 169., p. 37). Cho biểu thức  $A = \frac{x + \frac{1}{y}}{y + \frac{1}{x}}$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,  $x + y \leq 50$  để  $A = 8$ .

**133** ([Tuy23], 170., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{x - y - z}{x} = \frac{y - z - x}{y} = \frac{z - x - y}{z}$ . Tính  $A = \left( 1 + \frac{y}{x} \right) \left( 1 + \frac{z}{y} \right) \left( 1 + \frac{x}{z} \right)$ .

**134** ([Tuy23], 171., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z \neq -1$ . Chứng minh giá trị của biểu thức  $A = \frac{xy + 2x + 1}{xy + x + y + 1} + \frac{yz + 2y + 1}{yz + y + z + 1} + \frac{zx + 2z + 1}{zx + z + x + 1}$  không phụ thuộc vào, i.e., độc lập với 3 biến  $x, y, z$ .

**135** ([Tuy23], 172., p. 37). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ ,  $x + y + z \neq 0$  thỏa  $x = by + cz$ ,  $y = cz + ax$ ,  $z = ax + by$ . Chứng minh đẳng thức  $\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} = 2$ .

**136** ([Tuy23], 173., p. 37). Cho  $\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} = a \in \mathbb{R}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\frac{x^{2n} - x^{-2n}}{x^{2n} + x^{-2n}}$  theo  $a$ .

## 5 Algebraic Fraction & Fraction – Phân Thức & Phân Số

**137** ([Bin23], VD37, p. 28). Chứng minh phân số viết được dưới dạng hiệu của 2 phân số có tử bằng 1: (a)  $\frac{n-1}{n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $\frac{2n}{n^4 + n^2 + 1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**138** ([Bin23], VD38, p. 28). Chứng minh  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**139** ([Bin23], VD39, p. 28). Chứng minh  $A = \prod_{i=2}^9 \frac{i^3 + 1}{i^3 - 1} = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3 + 1}{3^3 - 1} \dots \frac{9^3 + 1}{9^3 - 1} < \frac{3}{2}$ .

**140** ([Bin23], VD40, p. 29). Chứng minh  $A = \sum_{i=0}^n \frac{2i+1}{(2i+1)^4 + 4} = \frac{1}{1^4 + 4} + \frac{3}{3^4 + 4} + \dots + \frac{2n+1}{(2n+1)^4 + 4} < \frac{1}{4}$ .

**141** ([Bin23], VD41, p. 29). Chứng minh  $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$ .

**142** ([Bin23], VD42, p. 30). Chứng minh  $A = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .



**143** ([Bin23], 165., p. 30). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \prod_{i=2}^n 1 - \frac{1}{i^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ . (b)  $B = \prod_{i=0}^n \frac{(2i+1)^2}{(2i+2)^2 - 1} = \frac{1^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1} \cdot \frac{5^2}{6^2 - 1} \cdots \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2 - 1}$ .

**144** ([Bin23], 166., p. 30). Cho  $A = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{200}{199}$ . Chứng minh  $14 < A < 20$ .

**145** ([Bin23], 167., p. 30). Chứng minh  $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \cdots \frac{208}{210} < \frac{1}{25}$ .

**146** ([Bin23], 168., p. 30). Rút gọn biểu thức: (a)  $A = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$ . (b)  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{(3i+2)(3i+5)} = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ . (c)  $\sum_{i=2}^n \frac{1}{(i-1)i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)}$ .

**147** ([Bin23], 169., p. 30). Chứng minh  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : (a)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{2}$ . (b)  $\sum_{i=1}^n \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} < 1$ .

**148** ([Bin23], 170., p. 30). Chứng minh  $A = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ .

**149** ([Bin23], 171., p. 31). Chứng minh  $A = \sum_{i=3}^n \frac{1}{i^3} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

**150** ([Bin23], 172., p. 31). Chứng minh  $A = \prod_{i=1}^n 1 + \frac{1}{i(i+2)} = \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdots \frac{1}{n(n+2)} < 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**151** ([Bin23], 173., p. 31). Chứng minh  $A = \prod_{i=1}^n 1 - \frac{2}{i(i+1)} = \left(1 - \frac{2}{6}\right) \left(1 - \frac{2}{12}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) > \frac{1}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

**152** ([Bin23], 174., p. 31). (a) Rút gọn biểu thức  $A = \frac{3^2-1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2-1}{9^2-1} \cdot \frac{11^2-1}{13^2-1} \cdots \frac{43^2-1}{45^2-1}$ . (b) Chứng minh  $B = \prod_{i=2}^n \frac{i^3-1}{i^3+1} = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1} > \frac{2}{3}$ . (c) Chứng minh  $C = \prod_{i=2}^{20} \frac{2^i+1}{2^i} = \frac{2^2+1}{2^2} \cdot \frac{2^3+1}{2^3} \cdots \frac{2^{20}+1}{2^{20}} < 2$ .

**153** ([Bin23], 175., p. 31). Rút gọn biểu thức  $A = \frac{(1^4+4)(5^4+4)(9^4+4) \cdots (21^4+4)}{(3^4+4)(7^4+4)(11^4+4) \cdots (23^4+4)}$ .

**154** ([Bin23], 176., p. 31). Chứng minh: (a)  $A = \sum_{i=1}^n \frac{i}{4i^4+1} = \frac{1}{4 \cdot 1^4+1} + \frac{2}{4 \cdot 2^4+1} + \cdots + \frac{n}{4n^4+1} < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b)  $B = \sum_{i=1}^{50} \frac{i}{1+i^2+i^4} = \frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \cdots + \frac{50}{1+50^2+50^4} < \frac{1}{2}$ .

**155** ([Bin23], 177., p. 31). Chứng minh: (a)  $A = \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{i!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} < 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (b)  $B = \sum_{i=1}^n \frac{i^2+i-1}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \cdots + \frac{n^2+n-1}{(n+1)!} < 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**156** ([Bin23], 178., p. 31). Chứng minh  $A = \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{100}{2^{100}} < 2$ .

**157** ([Bin23], 179., p. 31). Chứng minh  $A = \sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$ .

**158** ([Bin23], 180., p. 31). Chứng minh  $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**159** ([Bin23], 181., p. 31). Chứng minh  $\frac{3}{5} < \sum_{i=2004}^{4006} \frac{1}{i} = \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \cdots + \frac{1}{4006} < \frac{3}{4}$ .

**160** ([Bin23], 182., p. 32). (a) Chứng minh  $\sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} > \frac{n}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Chứng minh  $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0$ , luôn tìm được  $n \in \mathbb{N}^*$  để  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > a$ .

**161** ([Bin23], 183., p. 32). Rút gọn biểu thức  $\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \cdots + \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**162** ([Bin23], 184., p. 32). Rút gọn biểu thức  $\frac{\frac{1}{1(2n-1)} + \frac{1}{3(2n-3)} + \frac{1}{5(2n-5)} + \cdots + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} + \frac{1}{(2n-1) \cdot 1}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}$ .

**163** ([Bin23], 185., p. 32). Tìm  $a, b \in \mathbb{N}$  để: (a)  $a - b = \frac{a}{b}$ . (b)  $a - b = \frac{a}{2b}$ .

**164** ([Bin23], 186., p. 32). Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*, a > b$ . Tìm  $c \in \mathbb{N}^*, b \neq c$  sao cho  $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}$ .

**165** ([Bin23], 187., p. 32). Cho dãy số  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sao cho  $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ . (a) Chứng minh  $a_1 = a_5$ . (b) Xác định 5 số đầu của dãy biết  $a_{101} = 3$ .

**166** ([Bin23], 188., p. 32). Tìm phân số  $\frac{m}{n} \neq 0$  và  $k \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{m}{n} = \frac{m + k}{nk}$ .

**167** ([Bin23], 189., p. 32). Cho  $a, b \in \mathbb{N}, a < b$ . Tìm tổng các phân số tối giản có mẫu bằng 7, mỗi phân số lớn hơn  $a$  nhưng nhỏ hơn  $b$ .

**168** ([Bin23], 190., p. 32). Chứng minh tổng không là số nguyên: (a)  $A = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (b)  $B = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

## 6 Polynomial Factorization – Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử

Phân tích đa thức thành nhân tử:

**169** ([Bin23], VD43, p. 33).  $3x^2 - 8x + 4$ .

**170** ([Bin23], VD44, p. 33).  $4x^2 - 4x - 3$ .

**171** ([Bin23], VD45, p. 34).  $x^3 - x^2 - 4$ .

**172** ([Bin23], VD46, p. 35).  $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$ .

**173** ([Bin23], VD47, p. 36).  $4x^4 + 81$ .

**174** ([Bin23], VD48, p. 36).  $64x^4 + y^4$ .

**175** ([Bin23], VD49, p. 36).  $x^5 + x - 1$ .

**176** ([Bin23], VD50, p. 36).  $x^7 + x + 1$ .

**177** ([Bin23], VD51, p. 36).  $x(x+4)(x+6)(x+10) + 128$ .

**178** ([Bin23], VD52, p. 36).  $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$ .

**179** ([Bin23], VD53, p. 37).  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 14x + 3$ .

**180** ([Bin23], VD54, p. 37).  $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ .

**181** ([Bin23], 191., p. 38). (a)  $6x^2 - 11x + 3$ . (b)  $2x^2 + 3x - 27$ . (c)  $2x^2 - 5xy - 3y^2$ .

**182** ([Bin23], 192., p. 38). (a)  $x^3 + 2x - 3$ . (b)  $x^3 - 7x + 6$ . (c)  $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ . (d)  $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ . (e)  $x^3 - x^2 - x - 2$ . (f)  $x^3 + x^2 - x + 2$ . (g)  $x^3 - 6x^2 - x + 30$ .

**183** ([Bin23], 193., p. 38).  $x^3 - 7x - 6$ .

**184** ([Bin23], 194., p. 38). (a)  $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$ . (b)  $2x^3 - x^2 + 5x + 3$ . (c)  $(x^2 - 3)^2 + 16$ . (d)  $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$ .

**185** ([Bin23], 195., p. 38). (a)  $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$ . (b)  $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$ . (c)  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$ . (d)  $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$ .

**186** ([Bin23], 196., p. 38). (a)  $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) + a^4$ . (b)  $(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (xy + yz + zx)^2$ . (c)  $2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)^2 + (x+y+z)^4$ .

**187** ([Bin23], 197., p. 38).  $(a+b+c)^3 - 4(a^3 + b^3 + c^3) - 12abc$  bằng cách đổi biến: đặt  $a+b=m, a-n=n$ .

**188** ([Bin23], 198., p. 38). (a)  $4x^4 - 32x^2 + 1$ . (b)  $x^6 + 27$ . (c)  $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$ . (d)  $(2x^2 - 4)^2 + 9$ .

**189** ([Bin23], 199., p. 38). (a)  $4x^4 + 1$ . (b)  $4x^4 + y^4$ . (c)  $x^4 + 324$ .

**190** ([Bin23], 200., p. 38). (a)  $x^5 + x^4 + 1$ . (b)  $x^5 + x + 1$ . (c)  $x^8 + x^7 + 1$ . (d)  $x^5 - x^4 - 1$ . (e)  $x^7 + x^5 + 1$ . (f)  $x^8 + x^4 + 1$ .

**191** ([Bin23], 201., p. 38). (a)  $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$ . (b)  $x^3 + 3xy + y^3 - 1$ .

**192** ([Bin23], 202., p. 38). Dùng phương pháp hệ số bất định: (a)  $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ . (b)  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$ . (c)  $x^4 - 8x + 63$ . (d)  $(x+1)^4 + (x^2 + x + 1)^2$ .

- 193** ([Bin23], 203., p. 38). (a)  $x^8 + 14x^4 + 1$ . (b)  $x^8 + 98x^4 + 1$ .
- 194** ([Bin23], 204., p. 38). Dùng phương pháp xét giá trị riêng:  $A = a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ .
- 195** ([Bin23], 205., p. 39). Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng thêm 1 là 1 số chính phương.
- 196** ([Bin23], 206., p. 39). Chứng minh  $A = (n+1)^4 + n^4 + 1$  chia hết cho 1 số chính phương khác 1  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- 197** ([Bin23], 207., p. 39). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  sao cho khi phân tích đa thức  $(x+a)(x-4) - 7$  thành nhân tử, được  $(x+b)(x+c)$ .
- 198** ([Bin23], 208., p. 39). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  sao cho khi phân tích đa thức  $x^3 + ax^2 + bx + c$  thành nhân tử, được  $(x+a)(x+b)(x+c)$ .
- 199** ([Bin23], 209., p. 39).  $n \in \mathbb{N}$  có thể nhận bao nhiêu giá trị, biết khi phân tích đa thức  $x^2 + x - n$  thành nhân tử, được  $(x-a)(x+b)$  với  $a, b \in \mathbb{N}$  &  $1 < n < 100$ ?
- 200** ([Bin23], 210., p. 39). Cho  $A = a^2 + b^2 + c^2$ , trong đó  $a, b$  là 2 số tự nhiên liên tiếp,  $c = ab$ . Chứng minh  $\sqrt{A}$  là 1 số tự nhiên lẻ.

## 7 Tính Chia Hết Đối Với Số Nguyên

- 201** ([Bin23], VD55, p. 39). Chứng minh  $A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n : 5040, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 202** ([Bin23], VD56, p. 40). Chứng minh  $\forall a \in \mathbb{Z}$ : (a)  $a^2 - a : 2$ . (b)  $a^3 - a : 3$ . (c)  $a^5 - a : 5$ . (d)  $a^7 - a : 7$ .
- 203** ([Bin23], VD57, p. 40). (a) Chứng minh 1 số chính phương chia cho 3 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1. (b) Chứng minh 1 số chính phương chia cho 4 chỉ có thể có số dư bằng 0 hoặc 1. (c) Xét tính chính phương:  $A = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2, B = 1992^2 + 1993^2 + 1994^2 + 1995^2, C = 1 + 9^{100} + 94^{100} + 1994^{100}$ . (d) Trong dãy 11, 111, 1111, 11111, ... có số chính phương không?
- 204** ([Bin23], VD58, p. 42). Chứng minh  $16^n - 1 : 17 \Leftrightarrow n : 2, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 205** ([Bin23], VD59, p. 42). Chứng minh tồn tại 1 bội của 2003 có dạng 20042004...2004.
- 206** ([Bin23], VD60, p. 42). Tìm số dư khi chia  $2^{100}$  cho 9, 25, 125.
- 207** ([Bin23], VD61, p. 43). Tìm 3 chữ số tận cùng của  $2^{100}$  khi viết trong hệ thập phân.
- 208** ([Bin23], p. 43). Chứng minh nếu  $n$  là số chẵn không chia hết cho 5 thì 3 chữ số tận cùng của  $n^{100}$  là 376.
- 209** ([Bin23], VD62, p. 43). Tìm 4 chữ số tận cùng của  $5^{1994}$  khi viết trong hệ thập phân.
- 210** ([Bin23], VD63, p. 44). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để giá trị biểu thức  $A = n^3 + 2n^2 - 3n + 2$  chia hết cho giá trị biểu thức  $B = n^2 - n$ .
- 211** ([Bin23], VD64, p. 44). Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  để  $n^5 + 1 : n^3 + 1$ .
- 212** ([Bin23], VD65, p. 44). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $n^5 + 1 : n^3 + 1$ .
- 213** ([Bin23], VD66, p. 45). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để  $2^n - 1 : 7$ .
- 214** ([Bin23], VD67, p. 45). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $n^2 - n + 2$  là số chính phương.
- 215** ([Bin23], 211., p. 45). Chứng minh  $\forall n \in \mathbb{Z}$ : (a)  $n^3 + 3n^2 + 2n : 6$ . (b)  $(n^2 + n - 1)^2 - 1 : 24$ .
- 216** ([Bin23], 212., p. 45). Chứng minh: (a)  $n^3 + 6n^2 + 8n : 48$  với mọi số chẵn  $n$ . (b)  $n^4 - 10n^2 + 9 : 384$  với mọi số lẻ  $n$ .
- 217** ([Bin23], 213., p. 45). Chứng minh  $n^6 + n^4 - 2n^2 : 72, \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- 218** ([Bin23], 214., p. 45). Chứng minh  $3^{2n} - 9 : 72, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 219** ([Bin23], 215., pp. 45–46). Chứng minh  $\forall a, n \in \mathbb{N}$ : (a)  $7^n, 7^{n+4}$  có 2 chữ số tận cùng như nhau. (b)  $a, a^5$  có chữ số tận cùng như nhau. (c)  $a^n, a^{n+4}$  có chữ số tận cùng như nhau với  $n \geq 1$ .
- 220** ([Bin23], 216., p. 46). Tìm điều kiện của  $a \in \mathbb{N}$  để  $a^2 + 3a + 2 : 6$ .
- 221** ([Bin23], 217., p. 46). (a) Cho  $a > 3$  là số nguyên tố. Chứng minh  $a^2 - 1 : 24$ . (b) Chứng minh nếu  $a, b$  là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 thì  $a^2 - b^2 : 24$ . (c) Tìm điều kiện của  $a \in \mathbb{N}$  để  $a^4 - 1 : 240$ .
- 222** ([Bin23], 218., p. 46). Tìm 3 số nguyên tố liên tiếp  $a, b, c$  sao cho  $a^2 + b^2 + c^2$  cũng là số nguyên tố.
- 223** ([Bin23], 219., p. 46). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ . Chứng minh  $a + b + c + d$  là hợp số.
- 224** ([Bin23], 220., p. 46). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$  thỏa mãn  $ab = cd$ . Chứng minh  $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$  là hợp số.
- 225** ([Bin23], 221., p. 46). Cho  $a, b \in \mathbb{N}$ . Chứng minh: (a) Nếu  $a^2 + b^2 : 3$  thì  $a : 3, b : 3$ . (b) Nếu  $a^2 + b^2 : 7$  thì  $a : 7, b : 7$ . (c) Nếu  $a^2 + ab + b^2 : 5$  thì  $a : 5, b : 5$ .

- 226** ([Bin23], 222., p. 46). Cho  $a, b \in \mathbb{N}$  thỏa  $3a + b : 3b + a$ . Chứng minh  $a : b$ .
- 227** ([Bin23], 223., p. 46). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Chứng minh: (a) Nếu  $a + b + c : 6$  thì  $a^3 + b^3 + c^3 : 6$ . (b) Nếu  $a + b + c : 30$  thì  $a^5 + b^5 + c^5 : 30$ . (c) Nếu  $a + b + c : 3, ab - bc - ca : 3$  thì  $ab - bc - ca : 9$ .
- 228** ([Bin23], 224., p. 46). Cho  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn  $a + b + c = 0$ . Chứng minh: (a)  $a^3 + b^3 + c^3 : 3abc$ . (b)  $a^5 + b^5 + c^5 : 5abc$ . (c)  $5(a^2 + b^2 + c^2)$
- 229** ([Bin23], 225., p. 46).
- 230** ([Bin23], 226., p. 46).
- 231** ([Bin23], 227., p. 46).
- 232** ([Bin23], 228., p. 46).
- 233** ([Bin23], 229., p. 47).
- 234** ([Bin23], 230., p. 47).
- 235** ([Bin23], 231., p. 47).
- 236** ([Bin23], 232., p. 47).
- 237** ([Bin23], 233., p. 47).
- 238** ([Bin23], 234., p. 47).
- 239** ([Bin23], 235., p. 47).
- 240** ([Bin23], 236., p. 47).
- 241** ([Bin23], 237., p. 47).
- 242** ([Bin23], 238., p. 47).
- 243** ([Bin23], 239., p. 47).
- 244** ([Bin23], 240., p. 47).
- 245** ([Bin23], 241., p. 47).
- 246** ([Bin23], 242., p. 47).
- 247** ([Bin23], 243., p. 47).
- 248** ([Bin23], 244., p. 47).
- 249** ([Bin23], 245., p. 48).
- 250** ([Bin23], 246., p. 48).
- 251** ([Bin23], 247., p. 48).
- 252** ([Bin23], 248., p. 48).
- 253** ([Bin23], 249., p. 48).
- 254** ([Bin23], 250., p. 48).
- 255** ([Bin23], 251., p. 48).
- 256** ([Bin23], 252., p. 48).
- 257** ([Bin23], 253., p. 48).
- 258** ([Bin23], 254., p. 48).
- 259** ([Bin23], 255., p. 48).
- 260** ([Bin23], 256., p. 48).
- 261** ([Bin23], 257., p. 48).
- 262** ([Bin23], 258., p. 48).
- 263** ([Bin23], 259., p. 48).

- 264 ([Bin23], 260., p. 49).
- 265 ([Bin23], 261., p. 49).
- 266 ([Bin23], 262., p. 49).
- 267 ([Bin23], 263., p. 49).
- 268 ([Bin23], 264., p. 49).
- 269 ([Bin23], 265., p. 49).
- 270 ([Bin23], 266., p. 49).
- 271 ([Bin23], 267., p. 49).
- 272 ([Bin23], 268., p. 49).
- 273 ([Bin23], 269., p. 49).
- 274 ([Bin23], 270., p. 49).
- 275 ([Bin23], 271., p. 49).
- 276 ([Bin23], 272., p. 49).
- 277 ([Bin23], 273., p. 49).
- 278 ([Bin23], 274., p. 49).
- 279 ([Bin23], 275., p. 49).
- 280 ([Bin23], 276., p. 49).
- 281 ([Bin23], 277., p. 50).
- 282 ([Bin23], 278., p. 50).
- 283 ([Bin23], 279., p. 50).
- 284 ([Bin23], 280., p. 50).
- 285 ([Bin23], 281., p. 50).
- 286 ([Bin23], 282., p. 50).
- 287 ([Bin23], 283., p. 50).
- 288 ([Bin23], 284., p. 50).
- 289 ([Bin23], 285., p. 50).
- 290 ([Bin23], 286., p. 50).
- 291 ([Bin23], 287., p. 50).

## 8 Miscellaneous

- 292 ([Tuy23], VD26, p. 38). Cho  $A = \left( \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 3x^2 + 9x + 27} + \frac{3}{x^2 + 9} \right) : \left( \frac{1}{x - 3} - \frac{6x}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Với  $x > 0$  thì  $A$  không nhận các giá trị nào? (c) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .
- 293 ([Tuy23], 174., p. 38). Cho biểu thức  $A = \frac{|x + 1| + 2x}{3x^2 - 2x - 1}$ . (a) Rút gọn  $A$  rồi tính giá trị của  $A$  với  $x = -2, x = \frac{3}{4}$ .
- 294 ([Tuy23], 175., p. 38). Tìm  $a, b, c \in \mathbb{R}$  để  $\frac{x^2 + x + 4}{(x + 2)^3} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{(x + 2)^2} + \frac{c}{(x + 2)^2}$ .
- 295 ([Tuy22], 186., p. 51). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*, x \neq y$ . Tính: (a)  $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|z|}{z} + \frac{|xyz|}{xyz}$ . (b)  $B = \frac{xy}{|xy|} + \frac{x - y}{|x - y|} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right)$ .
- 296 ([Tuy23], 176., p. 39). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$  thỏa  $x + y + z = xyz, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \sqrt{3}$ . Tính  $A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ .
- 297 ([Tuy23], 177., p. 39). Cho  $\frac{x}{y - z} + \frac{y}{z - x} + \frac{z}{x - y} = 0$  với  $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ . Tính  $A = \frac{x}{(y - z)^2} + \frac{y}{(z - x)^2} + \frac{z}{(x - y)^2}$ .

- 298** ([Tuy23], 178., p. 39). Cho biểu thức  $A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ . Chứng minh: (a) Nếu  $a, b, c$  là độ dài 3 cạnh 1 tam giác thì  $A > 1$ . (b) Nếu  $A = 1$  thì 2 trong 3 phân thức đã cho của biểu thức  $A$  bằng 1 & phân thức còn lại bằng  $-1$ .
- 299** ([Tuy23], 179., p. 39). Cho biểu thức  $A = 1 + \frac{x+3}{x^2+5x+6} : \left( \frac{8x^2}{4x^3-8x^2} - \frac{3x}{3x^2-12} - \frac{1}{x+2} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $A = 0, A = 1$ . (c) Tìm  $x \in \mathbb{R}$  để  $A < 0, A > 0$ .
- 300** ([Tuy23], 180., p. 39). Cho biểu thức  $A = \left( \frac{2x-x^2}{2x^2+8} - \frac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8} \right) \left( \frac{2}{x^2} + \frac{1-x}{x} \right)$ . (a) Rút gọn  $A$ . (b) Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .

## Tài liệu

- [Bìn+21] Vũ Hữu Bình, Trần Hữu Nam, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 8. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2021, p. 264.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 8 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 212.
- [Tuy22] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 326.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.