Problem & Solution: Trigonometry In Triangles
Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 26 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set $\mathbb{Q}$ of trigonometrys [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$.
Tính chất. $\boxed{1}$ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận & đảo*: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bìn23], Ví dụ 1, p. 84)**.** *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng* 12 cm*, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$* cm.

Giải. Kẻ $BE \parallel AC$, $E \in CD$. Gọi BH là đường cao của hình thang. $BE \parallel AC$ & $AC \perp BD \Rightarrow BE \perp BD$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔBDH vuông tại H: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm. Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ vào ΔBDE vuông tại B: $DE = \dfrac{BD^2}{DH} = \dfrac{15^2}{9} = \dfrac{225}{9} = 25$ cm. $AB \parallel CE$ & $AC \parallel BE \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CE \Rightarrow AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$ cm^2. □

Bài toán 2 ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 85)**.** *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$* cm*, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

Giải. Gọi AH, BK là 2 đường cao của hình thang $ABCD$. Đặt $x \coloneqq AB = AH = BK$. Tứ giác $ABKH$ có $AB \parallel HK$, $AH \parallel BK$ (vì $AH \perp CD$ & $BK \perp CD$) nên $ABKH$ là hình bình hành, mà $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật, kết hợp với $AB = AH$, suy ra $ABKH$ là hình vuông, nên $HK = AB = x$ (1). $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AD = BC$ & $\widehat{C} = \widehat{D}$, suy ra $\Delta AHD = \Delta BKC$ (2 tam giác vuông lần lượt tại H, K, trường hợp cạnh huyền–góc nhọn[3]) $\Rightarrow DH = CK$ (2). Từ (1) & (2), suy ra: $DH = CK = \dfrac{CD - HK}{2} = \dfrac{10 - x}{2} \Rightarrow CH = CK + HK = \dfrac{10 - x}{2} + x = \dfrac{10 + x}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng $h^2 = b'c'$ cho ΔACD vuông tại A (đường chéo $AC \perp AD$: giả thiết): $AH^2 = DH \cdot CH \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{10 + x}{2} \cdot \dfrac{10 - x}{2} = \dfrac{100 - x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{100}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Vậy đường cao của hình thang $ABCD$ bằng $2\sqrt{5}$ cm. □

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

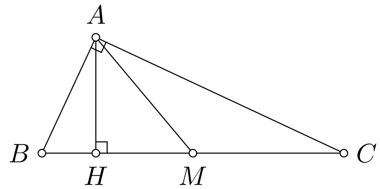
[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

[3] Hoặc có thể lý luận: $\Delta AHD = \Delta BKC$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông) vì 2 tam giác vuông này có $AD = BC$ (2 cạnh bên của hình thang cân $ABCD$) & $AH = BK$ (cùng bằng chiều cao của hình thang $ABCD$).

Bài toán 3 ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 85)**.** *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm*, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm*.*

Giải. Xét ΔABC, $AB < AC$, M là trung điểm BC, $AH \perp BC$, $H \in BC$, như hình:

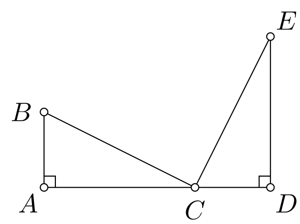


Đặt $x \coloneqq AM$, $BC = 2AM = 2x$, $AH = AM - 7 = x - 7$. Áp dụng định lý Pythagore & hệ thức lượng $bc = ah$ cho ΔABC vuông tại A: $b^2 + c^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2$, $bc = ah = 2x(x-7)$. Giải hệ phương trình:[4]

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4x^2, \\ \qquad bc = 2x(x-7). \end{cases}$$

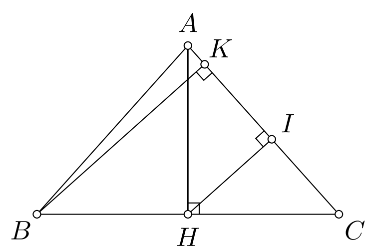
Có $a + b + c = 72 \Leftrightarrow b + c = 72 - a = 72 - 2x$. Từ hệ phương trình vừa thu được: $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4x^2 + 4x(x-7) = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72-2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 2x + 4x^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 4x^2 + 260x - 72^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x-16)(x+81) = 0 \Leftrightarrow x = 16 \vee x = -81$ (loại vì $x > 0$) $\Rightarrow x = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = x(x-7) = 16(16-7) = 144$ cm^2. □

Bài toán 4 ([Bìn23], 1., p. 86)**.** *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau* $\Delta ABC = \Delta DCE$*:*



Giải. James Garfield[5]'s proof: Đặt $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$. Tính diện tích hình thang ABED theo 2 cách: $S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BCE} \Leftrightarrow \dfrac{(b+c)^2}{2} = \dfrac{bc}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$, i.e., định lý Pythagore đúng. □

Bài toán 5 ([Bìn23], 2., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *cân có* $AB = AC = 9$ cm*,* $BC = 12$ cm*, đường cao* AH*,* I *là hình chiếu của* H *trên* AC*. (a) Tính độ dài* CI*. (b) Kẻ đường cao* BK *của* ΔABC*. Chứng minh điểm* K *nằm giữa 2 điểm* A*,* C*.*



Giải. ΔABC cân tại A có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến, suy ra H là trung điểm của BC: $BH = CH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ cm. (a) Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ cho ΔABC vuông tại C: $CH^2 = CI \cdot AC \Leftrightarrow CI = \dfrac{CH^2}{AC} = \dfrac{6^2}{9} = 4$ cm. (b) Vì $HI \perp AC$ & $BK \perp AC$ nên $HI \parallel BK$. Áp dụng định lý Thales cho ΔBKC với $HI \parallel BK$: $\dfrac{CI}{CK} = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CK = 2CI = 2 \cdot 4 = 8 < AC = 9 \Rightarrow K$ nằm giữa A & C. □

Bài toán 6 (Mở rộng [Bìn23], 2., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *cân có* $AB = AC = b$ cm*,* $BC = a$ cm*, đường cao* AH*,* I *là hình chiếu của* H *trên* AC*. (a) Tính độ dài* CI*. (b) Kẻ đường cao* BK *của* ΔABC*. Biện luận vị trí của* K *đối với 2 điểm* A*,* C *theo* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a, b > 0$*.*

Giải. ΔABC cân tại A có AH là đường cao nên AH cũng là đường trung tuyến, suy ra H là trung điểm của BC: $BH = CH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$. (a) Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ cho ΔABC vuông tại C: $CH^2 = CI \cdot AC \Leftrightarrow CI = \dfrac{CH^2}{AC} = \dfrac{a^2}{4b}$ cm. (b) Vì $HI \perp AC$ & $BK \perp AC$ nên $HI \parallel BK$. Áp dụng định lý Thales cho ΔBKC với $HI \parallel BK$: $\dfrac{CI}{CK} = \dfrac{CH}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow CK = 2 \cdot \dfrac{a^2}{4b} = \dfrac{a^2}{2b}$. Xét 3 trường hợp sau theo giá trị của a, b:

---

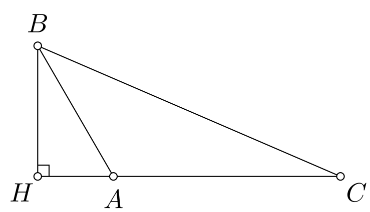
[4] Xem cách giải của dạng tổng quát của hệ phương trình này ở bài viết sau của tác giả: *Problem & Solution: System of Equations of 2 Variables – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình 2 Biến*: URL: `https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/miscellaneous/system_of_equations_2_variables/problem/NQBH_system_of_equations_2_variables_problem.pdf`.

[5] 20th President of the United States, see, e.g., vi.Wikipedia/James A. Garfield & Wikipedia/James A. Garfield.

- *Trường hợp* $0 < a < b\sqrt{2}$: $0 < a < b\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 < 2b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2b} < b \Leftrightarrow CK < CA \Leftrightarrow K$ nằm giữa A & C. (Vì trong trường hợp này, ΔABC nhọn, nên chân đường cao BK phải nằm trên cạnh AC.)
- *Trường hợp* $a = b\sqrt{2} > 0$: $a = b\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2b} = b \Leftrightarrow CK = CA \Leftrightarrow K \equiv C$. (Vì trong trường hợp này, ΔABC vuông cân tại A nên chân đường cao hạ từ 2 góc nhọn phải trùng với đỉnh góc vuông.)
- *Trường hợp* $a > b\sqrt{2} > 0$: $a > b\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow a^2 > 2b^2 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2b} > b \Leftrightarrow CK > CA \Leftrightarrow A$ nằm giữa K & C. (Vì trong trường hợp này, ΔABC tù tại A nên chân đường cao hạ từ 2 góc nhọn phải nằm ngoài 2 cạnh bên.)

Biện luận vị trí của K đối với A, C theo a, b hoàn tất. □

Bài toán 7 ([Bìn23], 3., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *có* $\widehat{A} = 120°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. *Chứng minh* $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.



Giải. Kẻ $BH \perp AC$. □

Bài toán 8 (Mở rộng [Bìn23], 3., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *có* $\widehat{A} = \alpha$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. *Chứng minh* $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$.

Bài toán 9 ([Bìn23], 4., p. 86)**.** *Tính cạnh đáy BC của* ΔABC *cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm.

Bài toán 10 ([Bìn23], 5., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết* $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. *Tính AH, BH, DH.*

Bài toán 11 ([Bìn23], 6., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH,* $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. *Tính độ dài AH.*

Bài toán 12 ([Bìn23], 7., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của* $\widehat{HAC}$ *cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết* $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. *Tính AB.*

Bài toán 13 ([Bìn23], 8., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *có* $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, *2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

Bài toán 14 ([Bìn23], 9., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *có* $\widehat{B} = 60°$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. *Tính AB, AC.*

Bài toán 15 ([Bìn23], 10., p. 86)**.** *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm^2 *&* 96 cm^2. *Tính độ dài cạnh huyền.*

Bài toán 16 ([Bìn23], 11., p. 86)**.** *Cho* ΔABC *vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh* $AH = 3DH$.

Bài toán 17 ([Bìn23], 12., pp. 86–87)**.** *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5 : 4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm.

Bài toán 18 ([Bìn23], 13., p. 87)**.** *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1 : 3$. *Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

Bài toán 19 ([Bìn23], 14., p. 87)**.** *Cho* ΔABC *có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh* $HM = 2$.

Bài toán 20 ([Bìn23], 15., p. 87)**.** *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm, *đáy lớn dài* 50 cm.

Bài toán 21 ([Bìn23], 16., p. 87)**.** *1 hình thoi có diện tích bằng* $\frac{1}{2}$ *diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

Bài toán 22 ([Bìn23], 17., p. 87)**.** *Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh* $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

Bài toán 23 ([Bìn23], 18., p. 87)**.** *Cho hình vuông ABCD có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của* ΔAEF *đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

Bài toán 24 ([Bìn23], 19., p. 87)**.** *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a)* $3, 4, 5$*. (b)* $12, 15, 20$.

Bài toán 25 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87)**.** *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là* h_a, h_b, h_c*. Tìm điều kiện cần & đủ theo* h_a, h_b, h_c *để* ΔABC *vuông.*

Bài toán 26 ([Bìn23], 20., p. 87)**.** *Chứng minh* ΔABC *là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn* $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$*.*

Bài toán 27 ([Bìn23], 21., p. 87)**.** *Xét các* ΔABC *vuông có cạnh huyền* $BC = 2a$*. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

Bài toán 28 ([Bìn23], 22., pp. 87–88)**.** *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

Bài toán 29 ([Bìn23], 23., p. 88)**.** *Cho* ΔABC *có* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$*. Chứng minh: (a)* $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$*. (b)* $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$*. (c)* $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$*.*

Bài toán 30 ([Bìn23], 24., p. 88)**.** ΔABC *vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của* $\widehat{A}$ *cắt BD ở I. Biết* $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm*. Tính diện tích* ΔABC*.*

Bài toán 31 ([Bìn23], 25., p. 88)**.** ΔABC *vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết* $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm*. Tính BC. (b) Biết* $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm*. Tính AB, AC.*

Bài toán 32 ([Bìn23], 26., p. 88)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết* $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm*. Tính* $\widehat{BIM}$*. (b) Biết* $\widehat{BIM} = 90^\circ$*. 3 cạnh của* ΔABC *tỷ lệ với 3 số nào?*

Bài toán 33 ([Bìn23], 27., p. 88)**.** *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$*?*

Bài toán 34 ([Bìn23], 28., p. 88)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A,* $BC = 3\sqrt{5}$ cm*. Hình vuông ADEF cạnh* 2 cm *có* $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$*. Tính AB, AC.*

Bài toán 35 ([Bìn23], 29., p. 88)**.** ΔABC *cân tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm*. Tính AB.*

Bài toán 36 ([Bìn23], 30., p. 88)**.** ΔABC *cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết* $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

Bài toán 37 ([Bìn23], 31., p. 88)**.** ΔABC *có* $BC = 40$ cm*, đường phân giác AD dài* 45 cm*, đường cao AH dài* 36 cm*. Tính BD, CD.*

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 38 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 89)**.** *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

Bài toán 39 ([Bìn23], Ví dụ 4, p. 90)**.** *Xét* ΔABC *vuông tại A,* $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$*, đường trung tuyến AM, đường cao AH,* $MA = MB = MC = a$*. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*. (b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$*. (c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$*.*

Bài toán 40 ([Bìn23], 32., p. 91)**.** *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* 72° *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm*. (b) Dựng góc* 20° *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm*, cạnh bên* 6 cm*.*

Bài toán 41 ([Bìn23], 33., p. 91)**.** ΔABC *có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$*.*

Bài toán 42 ([Bìn23], 34., p. 91)**.** *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$*. Tính* $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$*.*

Bài toán 43 ([Bìn23], 35., p. 91)**.** *Cho hình vuông ABCDN. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính* $\cos\widehat{MAN}$*.*

Bài toán 44 ([Bìn23], 36., p. 91)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho* $HE = 2HA$*. Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$*.*

Bài toán 45 ([Bìn23], 37., p. 91)**.** *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

Bài toán 46 ([Bìn23], 38., p. 91)**.** *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

Bài toán 47 ([Bìn23], 39., p. 91)**.** *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

Bài toán 48 ([Bìn23], 40., p. 91)**.** *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

Bài toán 49 ([Bìn23], Ví dụ 6, p. 92)**.** *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của ΔABC ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao BH, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

Bài toán 50 (Mở rộng [Bìn23], Ví dụ 6, p. 91)**.** *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, $\forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi ΔABC. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát*:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

Bài toán 51 ([Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** ΔABC *có* $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ *& độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của* ΔABC*. (b) Tính* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$*.*

Bài toán 52 (Tổng quát [Bìn23], Ví dụ 7, p. 92)**.** *Nếu* ΔABC *có* $\widehat{A}$ *tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng* $2, 3, 4$*.*

Bài toán 53 ([Bìn23], 41., p. 94)**.** *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh* 40 cm *của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng* $40^\circ, 55^\circ$*. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng* $60^\circ, 80^\circ$*.*

Bài toán 54 ([Bìn23], 42., p. 94)**.** ΔABC *có* $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm*. Tính AB, AC.*

Bài toán 55 ([Bìn23], 43., p. 94)**.** ΔABC *có* $\widehat{A} = 60^\circ$*,* $AB = 28$ cm*,* $AC = 35$ cm*. Tính BC.*

Bài toán 56 ([Bìn23], 44., p. 94)**.** *Cho 1 hình vuông có cạnh* 1 dm*. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

Bài toán 57 ([Bìn23], 45., p. 94)**.** ΔABC *đều có cạnh* 60 cm*. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho* $BD = 20$ cm*. Đường trung trực của AD cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài 3 cạnh của* ΔDEF*.*

Bài toán 58 ([Bìn23], 46., p. 94)**.** *Cho* ΔABC *có* $AB = c$*,* $CA = b$*, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N. Tính* $\frac{BN}{CN}$*.*

Bài toán 59 ([Bìn23], 47., p. 94)**.** *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

Bài toán 60 ([Bìn23], 48., p. 94)**.** *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau ở O & không vuông góc với nhau. Gọi H & K lần lượt là trực tâm của* $\Delta AOB, \Delta COD$*. Gọi* G, I *lần lượt là trọng tâm của* $\Delta BOC, \Delta AOD$*. (a) Gọi E là trọng tâm của* ΔAOB*, F là giao điểm của AH & DK. Chứng minh* $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$*. (b) Chứng minh* $IG \perp HK$*.*

Bài toán 61 ([Bìn23], 49., p. 94)**.** *Cho* ΔABC *nhọn, 3 điểm* D, E, F *lần lượt thuộc 3 cạnh AB, BC, CA. Chứng minh trong 3* $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$*, tồn tại 1 tam giác có diện tích* $\le \frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC*. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng* $\frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC*?*

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.