

Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 7 năm 2024

Mục lục

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác | 1 |
| 2 | Giải Tam Giác | 2 |
| 3 | Miscellaneous | 4 |
| | Tài liệu | 4 |

1 Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

[1] $\forall \alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, $\sin \alpha \in [-1; 1]$, $\cos \alpha \in [-1; 1]$. [2] $\cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \Leftrightarrow \alpha$ nhọn. $\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (90^\circ; 180^\circ) \Leftrightarrow \alpha$ tù. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. $\tan \alpha \cot \alpha = 1$, $\forall \alpha \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\forall \alpha \neq 90^\circ$. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $\forall \alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$.
[3] Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ hay $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [4] Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ hay $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. [5] Công thức tính diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

1. $\alpha \in [0^\circ; 360^\circ)$. Tìm các khoảng giá trị của α để các hàm $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ lần lượt bằng 0, âm, dương.
2. Dùng định lý sin, giải thích vì sao trong 1 tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn & góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.
- 3 ([Hải+22], BD1, p. 22). $\triangle ABC$, đường phân giác AD . Chứng minh $AD^2 < bc$.
- 4 ([Hải+22], VD1, p. 22). $\triangle ABC$ vuông tại A , 2 phân giác trong BE, CF cắt đường cao AH lần lượt tại P, Q . M là trung điểm BC . Chứng minh $PE + QF < AM$.
- 5 ([Hải+22], VD2, p. 22). $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , $D \in AB$ thỏa $BH = BD = CD$. Chứng minh $\frac{AD}{BD} = \sqrt[3]{2} - 1$.
- 6 ([Hải+22], VD3, p. 23). $\triangle ABC$. Chứng minh $\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a+b+c)$.
- 7 ([Hải+22], BD1, p. 23). $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 2\hat{B}$. Chứng minh $a^2 = b^2 + bc$.
- 8 ([Hải+22], VD4, p. 23). $\triangle ABC$ vuông tại A . Lấy $D \in AC$ thỏa $\hat{C} = 2\widehat{CBD}$. Chứng minh $AB + AD = BC \Leftrightarrow \hat{C} = 30^\circ$ hoặc $\hat{C} = 45^\circ$.
- 9 ([Hải+22], VD5, p. 23). $\triangle ABC$, trung tuyến AM . Giả sử $\hat{B} + \widehat{AMC} = 90^\circ$. Chứng minh $\triangle ABC$ vuông hoặc cân.
- 10 ([Hải+22], VD6, p. 24). $\triangle ABC$, tâm đường tròn nội tiếp I . IA, IB, IC cắt (ABC) lần lượt tại D, E, F . Chứng minh $\frac{1}{S_{EAC}} + \frac{1}{S_{FAB}} \geq \frac{9}{S_{ABC}}$.

*e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, website: <https://nqbh.github.io>, Bến Tre, Việt Nam.

2 Giải Tam Giác

[1] Cho a, b, c : áp dụng định lý cosin: $\widehat{A} = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\widehat{B} = \arccos \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\widehat{C} = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [2] Cho b, c, \widehat{A} : áp dụng định lý cosin: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$, $\widehat{B} = \arccos \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\widehat{C} = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. [3] Cho $a, \widehat{B}, \widehat{C}$: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}$, áp dụng định lý sin: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$.

11 ([Quỳ+20], VD1, p. 124). $\triangle ABC$ có đường cao $AH = h$, $\widehat{B} = \beta$, K trên cạnh BC thỏa $BK = 2CK$, $AK = AB$. Giải $\triangle ABC$.

12 ([Quỳ+20], VD2, p. 124). Cho $x, y \in [1; +\infty)$. Đặt $a = x^2 + 1, b = y^2 + 1, c = x^2 + y^2 + 1$. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có độ dài 3 cạnh là a, b, c & tam giác đó là tam giác tù.

13 ([Quỳ+20], VD3, p. 126). $\triangle ABC$ có $BC = a, \widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta$, tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính $(IBC), (ICA), (IAB)$.

14 ([Quỳ+20], p. 124, hệ thức về bán kính các đường tròn nội tiếp & bàng tiếp). $\triangle ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp r , bán kính 3 đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt là r_a, r_b, r_c . Chứng minh: (a) $(p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2} = r$.

(b) $r_a \cot \frac{A}{2} = r_b \cot \frac{B}{2} = r_c \cot \frac{C}{2} = p$.

15 ([Quỳ+20], p. 128). Chứng minh $S = \frac{abc}{4R} = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

16 ([Quỳ+20], VD4, p. 129). $\triangle ABC$, $\widehat{A} = 60^\circ, R = 8, r = 3$. Tính S .

17 ([Quỳ+20], VD5, p. 129). Tính r theo a, b, c .

18 ([Quỳ+20], VD6, p. 130). Chứng minh $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

19 ([Quỳ+20], VD7, p. 130, công thức độ dài phân giác). Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài 3 đường phân giác trong góc A, B, C .

Chứng minh $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}, l_b = \frac{2ca \cos \frac{B}{2}}{c + a}, l_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b}$.

20 ([Quỳ+20], VD8, p. 131, tứ giác điều hòa). $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có AM là trung tuyến đỉnh A . Đường thẳng qua A & đối xứng với AM qua phân giác trong góc A cắt (O) tại N . Chứng minh $AB \cdot CN = AC \cdot BN$.

21 ([Quỳ+20], 37., p. 131). $\triangle ABC$ có 2 trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G , $BM = \frac{3}{2}, CN = 3, \widehat{BGC} = 120^\circ$. Giải $\triangle ABC$.

22 ([Quỳ+20], 38., p. 132). $\triangle ABC$ có $AC = b, AB = c, \widehat{A} = \alpha$, M là trung điểm BC , N trên cạnh AB thỏa $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$. Tính MN .

23 ([Quỳ+20], 39., p. 132). $\triangle ABC$ có $BC = 10$, (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC & tiếp xúc với 2 cạnh AB, AC . (a) Biết $IA = 3, 2IB = 3IC$, tính AB, AC . (b) Biết (I) có bán kính bằng 3 & $2IB = 3IC$, tính R, AB, AC .

24 ([Quỳ+20], 40., p. 132). Hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được có 2 đáy $BC = b, AD = d > b$, góc giữa 2 cạnh bên bằng α . Tính bán kính đường tròn nội tiếp.

25 ([Quỳ+20], 41., p. 132). Hình thang cân $ABCD$ với đáy lớn AB ngoại tiếp 1 đường tròn bán kính r . (a) Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Tính độ dài 2 đáy & đường chéo theo r, α . (b) R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết $\frac{R}{r} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$, tính \widehat{BAD} .

26 ([Quỳ+20], 42., p. 132). Chứng minh $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}, \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}$.

Định nghĩa 1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ được gọi là lập thành cấp số cộng nếu $a + c = 2b$. Lúc đó giá trị $d = b - a = c - b$ được gọi là công sai của cấp số cộng.

27 ([Quỳ+20], 43., p. 132). Chứng minh 3 cạnh a, b, c của $\triangle ABC$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$. Chứng minh khi đó công sai của cấp số cộng này là $d = \frac{3}{2}r \left(\tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right)$.

28 ([Quỳ+20], 44., p. 132). Chứng minh: (a) $\sin A, \sin B, \sin C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng. (b) $\cos A, \cos B, \cos C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.

29 ([Quỳ+20], 45., p. 133). $\triangle ABC$ & điểm M thay đổi trên cạnh BC , r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp & ρ_1, ρ_2 là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của $\triangle ABM, \triangle ACM$. Chứng minh $\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2}$ không đổi.

30 ([Quỳ+20], 46., p. 133). $\triangle ABC$, M, N trên cạnh BC thỏa $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, P, Q là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\triangle BAM, \triangle CAN$ với cạnh BC . Chứng minh $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{QC} + \frac{1}{QN}$.

31 ([Quỳ+20], 47., p. 133). Đường tròn $(O; R)$ & A bên ngoài (O) . 1 đường thẳng thay đổi qua A cắt (O) tại B, C . Đặt $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$. Chứng minh $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$ không đổi.

32 ([Quỳ+20], 48., p. 133). $\triangle ABC$ có diện tích S . (a) Chứng minh $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$. (b) M là trung điểm BC , đặt $\widehat{AMB} = \varphi$. Chứng minh $\cot C - \cot B = 2 \cot \varphi$. (c) G là trọng tâm $\triangle ABC$. Đặt $\widehat{BGC} = \alpha$. Chứng minh $\cot \alpha = \frac{5bc \cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc \sin A}$.

33 ([Quỳ+20], 49., p. 133). Chứng minh: (a) $b^2 + c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2 \cot A$. (b) $b^4 + c^4 = a^4 \Leftrightarrow \tan B \tan C = 2 \sin^2 A$.

34 ([Quỳ+20], 50., p. 133). $\triangle ABC$ có 2 trung tuyến BM, CN . (a) Chứng minh $BM \perp CN \Leftrightarrow \cot B + \cot C = \frac{1}{2} \cot A$. (b) Chứng minh nếu $\triangle ABC$ không cân tại A thì $\frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2 \cot A$.

35 ([Quỳ+20], 51., p. 133). Hình chữ nhật $ABCD$ & 1 điểm M tùy ý. Chứng minh $\frac{\tan \widehat{AMC}}{\tan \widehat{BMD}} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}}$.

36 ([Quỳ+20], 52., p. 134). $\triangle ABC$, $\widehat{B} > \widehat{C}$ O, I, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, & đường tròn bàng tiếp góc A . Chứng minh $\tan \widehat{IOO_1} = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2 \cos A - 1}$.

37 ([Quỳ+20], 53., p. 134). Hình bình hành có a, b là độ dài các cạnh, m, n là độ dài 2 đường chéo. $a > b, m > n$. α là góc nhọn của hình bình hành & φ là góc giữa 2 đường chéo. Chứng minh: (a) $\cos \alpha \cos \varphi = \frac{(a^2 - b^2)(m^2 - n^2)}{4abmn}$. (b) $\tan \varphi = \frac{2ab \sin \alpha}{a^2 - b^2}$.

38 ([Quỳ+20], 54., p. 134). $\triangle ABC$, trực tâm H , 2 đường cao $BB' = \sqrt{5}, CC' = 2$. Tính S biết: (a) $\cos \widehat{BHC} = -\frac{2}{3}$. (b) $\cos \widehat{CBB'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

39 ([Quỳ+20], 55., p. 134). Hình bình hành $ABCD$, M, N là 2 giao điểm của (ABC) với AD, CD . (a) Biết khoảng cách từ M đến B, C, D là b, c, d . Tính S_{BMN} . (b) Biết góc nhọn của hình bình hành bằng α & bán kính (ABC) bằng R . Tính S_{BMN} .

40 ([Quỳ+20], 56., p. 134). $\triangle ABC$ có O, I, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp & trọng tâm. (a) Chứng minh $IA \perp IG \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2bc}{b+c}$. (b) Chứng minh $IA \perp IO \Leftrightarrow b+c = 2a$. (c) M, N là trung điểm AB, AC . Chứng minh A, I, M, N đồng viên $\Leftrightarrow b+c = 2a$.

41 ([Quỳ+20], 57., p. 134). $\triangle ABC$, D, E trên BC thỏa $BD = DE = EC = \frac{1}{3}BC$. Đặt $\widehat{BAD} = \alpha, \widehat{DAE} = \beta, \widehat{EAC} = \gamma$. Chứng minh $(\cot \alpha + \cot \beta)(\cot \beta + \cot \gamma) = 4(1 + \cot^2 \beta)$.

42 ([Quỳ+20], 58., p. 135). $\triangle ABC$, $\widehat{B} > \widehat{C}$, AM, AD lần lượt là trung tuyến & phân giác trong góc A . Đặt $\widehat{DAM} = \alpha$. (a) Chứng minh $\tan \alpha = \tan^2 \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2}$. (b) Đặt $\frac{AD}{AM} = k$. Chứng minh $\cos \alpha = \frac{k}{2} \sin^2 \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} \sin^4 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}}$.

43. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . (a) Cho trước 2 trong 6 số a, b, c, b', c', h . Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S . Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB . Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải.

44. Cho $\triangle ABC$ Cho trước 3 trong 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB . Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải.

45. Cho $\triangle ABC$. Tính $\sin A, \sin B, \sin C, \tan A, \tan B, \tan C, \cot A, \cot B, \cot C$ theo a, b, c .

46. Nếu chỉ cho số đo 3 góc của 1 tam giác, có thể giải tam giác đó không? Nếu có thì mô tả tập nghiệm các tam giác thỏa mãn.

47. Nếu cho trước độ dài 2 cạnh & số đo 1 góc không nằm giữa 2 cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?

48. Nếu cho trước độ dài 1 cạnh & số đo 2 góc không cùng kề với cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?

49 (Program: Solve triangle). (a) Nêu các bộ 3 yếu tố cần cho trước về cạnh & góc của 1 tam giác để tam giác đó có thể giải được. (b) Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.

50. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính độ dài 3 đường trung tuyến & 6 góc tạo bởi 3 đường trung tuyến đó.

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

51. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường phân giác & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp I đến 3 đỉnh & 3 cạnh.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, l_b = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}, l_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}.$$

52. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường cao & 6 góc tạo bởi 3 đường cao đó & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ trực tâm đến 3 đỉnh & 3 cạnh.

53. Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến 3 cạnh của tam giác đó.

3 Miscellaneous

54. Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo để giải 1 đa giác lồi đều n cạnh?

55. Cho độ dài 4 cạnh của 1 tứ giác lồi, liệu có thể giải được tứ giác đó không?

56. Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo của 1 tứ giác lồi để có thể giải được tứ giác đó?

57. Đặt 3 điện tích q_1, q_2, q_3 tại 3 đỉnh của $\triangle ABC$. Tính các lực điện từ.

Tài liệu

- [Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.
- [Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, and Lê Bá Khánh Trình. *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 10*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 344.