

Problem: Set \mathbb{Q} of Rationals – Bài Tập: Tập Hợp \mathbb{Q} Các Số Hữu Tỷ

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 18 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 7/rational/problem: set \$\mathbb{Q}\$ of rationals \[pdf\].¹ \[TeX\]².](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/rational/problem/set_Q_of_rationals.pdf)

Mục lục

1 Set \mathbb{Q} of Rationals – Tập Hợp \mathbb{Q} Các Số Hữu Tỷ	1
2 Basic Calculus on \mathbb{Q} – Phép $\pm, \cdot, :$ Số Hữu Tỷ	2
3 Exponentiation on \mathbb{Q} – Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên của 1 Số Hữu Tỷ	4
3.1 Order of Operations. Change Side Rule – Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế	7
4 Miscellaneous	7
Tài liệu	7

1 Set \mathbb{Q} of Rationals – Tập Hợp \mathbb{Q} Các Số Hữu Tỷ

1 ([Tuy23], Ví dụ 1, p. 5). Cho $x = \frac{12}{b-15}$ với $b \in \mathbb{Z}$. Xác định b để: (a) $x \in \mathbb{Q}$. (b) x là 1 số hữu tỷ dương. (c) x là 1 số hữu tỷ âm. (d) $0 < x < 1$.
Ans: (a) $b \neq 15$. (b) $b > 15$. (c) $b < 15$. (d) $b > 27$.

2 ([Tuy23], Ví dụ 2, p. 5). So sánh: $\frac{-16}{27}, \frac{-16}{29}, \frac{-19}{27}$.
Ans: $\frac{-19}{27} < \frac{-16}{27} < \frac{-16}{29}$.

3 ([Tuy23], 1., p. 5). Cho 2 số hữu tỷ $x = \frac{-5}{7}, y = \frac{-2}{3}$. 2 số hữu tỷ này còn được biểu diễn bởi phân số nào trong các phân số sau: $\frac{9}{11}, \frac{4}{-6}, \frac{15}{-21}, \frac{-35}{49}, \frac{-10}{15}, \frac{-6}{-9}$.
Ans: $x = \frac{15}{-21} = \frac{-35}{49}, y = \frac{4}{-6} = \frac{-10}{15}$.

4 ([Tuy23], 2., p. 6). Sắp xếp các số hữu tỷ sau theo thứ tự tăng dần: (a) $\frac{19}{33}, \frac{6}{11}, \frac{13}{22}$. (b) $\frac{-18}{12}, \frac{-10}{7}, \frac{-8}{5}$.
Ans: (a) $\frac{6}{11} < \frac{19}{33} < \frac{13}{22}$. (b) $\frac{-8}{5} < \frac{-18}{12} < \frac{-10}{7}$.

5 ([Tuy23], 3., p. 6). So sánh các số hữu tỷ sau bằng cách nhanh nhất: (a) -5 & $\frac{1}{63}$. (b) $\frac{-18}{17}$ & $\frac{-999}{1000}$. (c) $\frac{-17}{35}$ & $\frac{-43}{85}$. (d) -0.76 & $\frac{-19}{28}$.
Ans: (a) $-5 < \frac{1}{63}$. (b) $\frac{-18}{17} < \frac{-999}{1000}$. (c) $\frac{-17}{35} > \frac{-43}{85}$. (d) $-0.76 < \frac{-19}{28}$.

6 ([Tuy23], 4., p. 6). Tìm các số hữu tỷ biểu diễn dưới dạng phân số có mẫu số bằng 10, lớn hơn $\frac{-7}{13}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{-4}{13}$.

7 ([Tuy23], 5., p. 6). Dùng 4 chữ số 1 & dấu $-$ (nếu cần thiết) để biểu diễn (không dùng phép tính lũy thừa): (a) Các số nguyên $-1, -11$. (b) Số hữu tỷ âm lớn nhất.

8 ([Tuy23], 6., p. 6). Cho các số nguyên dương $a < b < c < d < m < n$. Chứng minh: $\frac{a+c+m}{a+b+c+d+m+n} < \frac{1}{2}$.

9 ([Tuy23], 7., p. 6). Với cùng 1 khối lượng thành phẩm, vàng 4 số 9 & vàng 3 số 9, loại nào có hàm lượng vàng nhiều hơn?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/rational/problem/NQBH_rational_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_7/rational/problem/NQBH_rational_problem.tex.

2 Basic Calculus on \mathbb{Q} – Phép $\pm, \cdot, :$ Số Hữu Tỷ

10 ([Tuy23], Ví dụ 3, p. 7). *Tính bằng cách hợp lý (nếu có thể):* (a) $-\frac{5}{18} + \frac{32}{45} - \frac{9}{10}$. (b) $\left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{33} - \frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{15}{12} + \frac{6}{11} - \frac{48}{49}\right)$.
Ans: (a) $-\frac{7}{15}$. (b) $-\frac{1}{49}$.

11 ([Tuy23], Ví dụ 4, p. 7). *So sánh các tích sau bằng cách hợp lý nhất:* $P_1 = \left(-\frac{43}{51}\right) \cdot \left(-\frac{19}{80}\right)$, $P_2 = \left(-\frac{7}{13}\right) \cdot \left(-\frac{4}{65}\right) \cdot \left(-\frac{8}{31}\right)$,
 $P_3 = \frac{-5}{10} \cdot \frac{-4}{10} \cdot \frac{-3}{10} \cdots \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10}$.
Ans: $P_2 < P_3 < P_1$.

12 ([Tuy23], Ví dụ 5, p. 7). *Tìm giá trị của $x \in \mathbb{Q}$ để biểu thức sau có giá trị dương $P = (x+5)(x+9)$.*
Ans: $x > -5 \vee x < -9$.

13 ([Tuy23], 8., p. 7). *Tìm x biết:* $\frac{11}{13} - \left(\frac{5}{42} - x\right) = -\left(\frac{15}{28} - \frac{11}{13}\right)$.
Ans: $-\frac{5}{12}$.

14 ([Tuy23], 9., p. 7). *Cho $S = (a+b+c) - (a-b+c) + (a-b-c) + c$ với $a = 0.1$, $b = 0.01$, $c = 0.001$. Tính S .* Ans: $S = 0.11$.

15 ([Tuy23], 10., p. 7). *Tính hợp lý:* (a) $\frac{11}{125} - \frac{17}{18} - \frac{5}{7} + \frac{4}{9} + \frac{17}{14}$. (b) $1 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{2}{3} + 3 - \frac{3}{4} + 4 - \frac{1}{4} - 3 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{2} - 1$.
Ans: (a) $\frac{11}{125}$. (b) 1.

16 ([Tuy23], 11., p. 7). *Cho các số hữu tỷ $x = \frac{a}{9}$ & $y = \frac{b}{9}$ trong đó a là các số nguyên âm liên tiếp từ -5 đến -1 ; b là các số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến 8. Tính tổng $x+y$.*
Ans: $\frac{7}{3}$.

17 ([Tuy23], 12., p. 8). *Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$; $B = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \frac{17}{16} + \frac{33}{32} - 6$. Tính A & B .* Ans: $A = \frac{31}{32}$, $B = -\frac{1}{32}$.

18 ([Tuy23], 13., p. 8). *Cho 31 số hữu tỷ sao cho bất kỳ 3 số nào trong chúng cũng có tổng là 1 số âm. Chứng minh tổng của 31 số đó là 1 số âm.*

19 ([Tuy23], 14., p. 8). *Tìm x biết:* (a) $\left(\frac{1}{7}x - \frac{2}{7}\right) \left(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right) \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 0$. (b) $\frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x - \frac{4}{15}x + 1 = 0$.
Ans: (a) $x \in \{2, 3, -4\}$. (b) $\bar{\exists}$.

20 ([Tuy23], 15., p. 8). *Tính sau bằng cách hợp lý nhất:* (a) $\left(-\frac{40}{51} \cdot 0.32 \cdot \frac{17}{20}\right) : \frac{64}{75}$. (b) $-\frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} + \frac{7}{18} \cdot \frac{10}{11}$. (c) $\frac{3}{14} : \frac{1}{28} - \frac{13}{21} : \frac{1}{28} + \frac{29}{42} : \frac{1}{28} - 8$. (d) $-1\frac{5}{7} \cdot 15 + \frac{2}{7}(-15) + (-105) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{7}\right)$.
Ans: (a) $-\frac{1}{4}$. (b) $-\frac{5}{11}$. (c) 0. (d) -31 .

21 ([Tuy23], 16., p. 8). *Tính giá trị các biểu thức sau:* (a) $A = 7x - 2x - \frac{2}{3}y + \frac{7}{9}y$ với $x = -\frac{1}{10}$, $y = 4.8$. (b) $B = x + \frac{0.2 - 0.375 + \frac{5}{11}}{-0.3 + \frac{9}{16} - \frac{15}{22}}$ với $x = -\frac{1}{3}$.
Ans: (a) $\frac{1}{30}$. (b) -1 .

22 ([Tuy23], 17., p. 8). *Tìm giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị dương:* (a) $A = x^2 + 4x$. (b) $B = (x-3)(x+7)$. (c) $C = \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{3} - x\right)$.
Ans: (a) $x > 0 \vee x < -4$. (b) $x > 3 \vee x < -7$. (c) $x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{1}{2}$.

23 ([Tuy23], 18., p. 8). *Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có giá trị âm:* (a) $D = x^2 - \frac{2}{5}x$. (b) $E = \frac{x-2}{x-6}$.
Ans: (a) $0 < x < \frac{2}{5}$. (b) $2 < x < 6$.

24 ([Tuy23], 19., p. 8). *Tìm $x, y \in \mathbb{Q}$, $y \neq 0$ thỏa $x - y = xy = x : y$.*
Ans: $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$.

25 ([Tuy23], 20., p. 8). *Cho 100 số hữu tỷ trong đó tích của bất kỳ 3 số nào cũng là 1 số âm. Chứng minh:* (a) *Tích của 100 số đó là 1 số dương.* (b) *Tất cả 100 số đó đều là số âm.*

26 ([Bin22], Ví dụ 1, p. 3). *Tính $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \cdots$ (A có 300 số hạng).* Ans: -99 .

27 ([Bin22], Ví dụ 2, p. 4). *Cho phân số $\frac{a}{b} \neq 1$. (a) Tìm phân số x sao cho nhân x với $\frac{a}{b}$ cũng bằng cộng x với $\frac{a}{b}$. (b) Tìm giá trị của x trong câu (a) nếu $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$, nếu $\frac{a}{b} = \frac{8}{11}$.*
Ans: (a) $x = \frac{a}{a-b}$. (b) $x = -\frac{8}{3}$.

28 ([Bin22], Ví dụ 3, p. 4). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, $x < 0$ để $\frac{4}{x-1} \in \mathbb{Z}$. Ans: $-1, -3, -\frac{1}{3}$.

29 ([Bin22], Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng $\frac{2}{3}$ thời gian dự kiến để đi $\frac{3}{4}$ quãng đường với vận tốc v_1 , rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính $\frac{v_1}{v_2}$. Ans: $\frac{3}{2}$.

30 ([Bin22], Mở rộng Ví dụ 4, p. 5). Tân đạp xe từ trường về nhà với thời gian dự kiến. Nhưng Tân đã dùng a thời gian dự kiến để đi b quãng đường với vận tốc v_1 , $a, b > 0$, $a + b < 1$, rồi đi quãng đường còn lại với vận tốc v_2 & đã về nhà đúng thời điểm dự kiến. Tính tỷ số $v_1 : v_2$ theo a, b .

31 ([Bin22], 1., p. 5). So sánh các số hữu tỷ: (a) $-\frac{18}{91}$ & $-\frac{23}{114}$. (b) $-\frac{22}{35}$ & $-\frac{103}{177}$. Ans: (a) $-\frac{18}{91} > -\frac{23}{114}$. (b) $-\frac{22}{35} < -\frac{103}{177}$.

32 ([Bin22], 2., p. 5). Tìm 2 phân số có tử bằng 9, biết giá trị của mỗi phân số đó lớn hơn $-\frac{11}{13}$ & nhỏ hơn $-\frac{11}{15}$.

33 ([Bin22], 3., p. 5). Cho các số hữu tỷ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ với mẫu dương, trong đó $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh: (a) $ab < bc$. (b) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Hint: (b) Xét 2 hiệu $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

34 ([Bin22], 4., p. 5). Tính: (a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{-1}{6} + \frac{-2}{5}$. (b) $\frac{-2}{3} + \frac{-1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \frac{-7}{10}$. (c) $\frac{1}{2} - \frac{-2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{5}{7} - \frac{-1}{6} + \frac{-4}{35} + \frac{1}{41}$. (d) $\frac{1}{100 \cdot 99} - \frac{1}{99 \cdot 98} - \frac{1}{98 \cdot 97} - \dots - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 1}$. Ans: (a) $-\frac{3}{20}$. (b) $-\frac{1}{4}$. (c) $2\frac{1}{41}$. (d) $-\frac{9799}{9900}$.

35 ([Bin22], 5., pp. 5-6). Ký hiệu $\lfloor x \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , được gọi là phần nguyên của x , e.g., $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$. (a) Tính $\lfloor -\frac{1}{7} \rfloor$, $\lfloor 3.7 \rfloor$, $\lfloor -4 \rfloor$, $\lfloor -\frac{43}{10} \rfloor$. (b) Cho $x = 3.7$. So sánh: $A = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{3}{5} \rfloor + \lfloor x + \frac{4}{5} \rfloor$ & $B = \lfloor 5x \rfloor$. (c) Tính $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^2} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^3} \rfloor + \lfloor \frac{100}{3^4} \rfloor$. (d) Tính $\lfloor \frac{50}{2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^2} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^3} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^4} \rfloor + \lfloor \frac{50}{2^5} \rfloor$. (e) Cho $x \in \mathbb{Q}$. So sánh $\lfloor x \rfloor$ với x , so sánh $\lfloor x \rfloor$ với y trong đó $y \in \mathbb{Z}$, $y < x$. Ans: (a) $-1, 3, -4, -5$. (b) '='. (c) 48. (d) 47. (e) $y \leq \lfloor x \rfloor \leq x$.

36 ([Bin22], 6., p. 6). Cho các số hữu tỷ x bằng 1.4089, 0.1398, -0.4771, -1.2592. (a) Viết các số đó dưới dạng tổng của 1 số nguyên a & 1 số thập phân b không âm nhỏ hơn 1. (b) Tính tổng các số hữu tỷ trên bằng 2 cách: tính theo cách thông thường, tính tổng các số được viết dưới dạng ở (a). (c) So sánh a & $\lfloor x \rfloor$ trong trường hợp ở câu (a). Lưu ý: Trong cách viết này, a là phần nguyên của x , còn b là phần lẻ của x . Ký hiệu phần lẻ của x là $\{x\}$ thì $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Ans: (a) $1 + 0.1089, 0 + 0.1398, -1 + 0.5229, -2 + 0.7408$. (b) $-0.1876, -0.1876$. (c) '='.

37 ([Bin22], 7., p. 6). Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để phân số sau có giá trị là 1 số nguyên & tính giá trị đó: (a) $A = \frac{3n+9}{n-4}$. (b) $B = \frac{6n+5}{2n-1}$. Ans: (a) $n \in \{-17, -3, 1, 3, 5, 7, 11, 25\}$. (b) $n \in \{0, 1\}$.

38 ([Bin22], 8., p. 6). Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$, biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$. Ans: $(x, y) \in \{(40, 0), (-40, 1), (8, -2), (-8, 3)\}$.

39 ([Bin22], 9., p. 6). Viết tất cả các số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 20 theo thứ tự tùy ý. Lấy mỗi số trừ đi số thứ tự của nó ta được 1 hiệu. Tổng của tất cả các hiệu đó bằng bao nhiêu? Ans: -780.

40 ([Bin22], 10., p. 6). Tính: (a) $\frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{4}{15} - \frac{7}{20}\right) \cdot \frac{5}{19}}{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{7} - \frac{-3}{35}\right) \cdot \frac{-4}{3}}$. (b) $\frac{(1+2+\dots+100)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \cdot (6.3 \cdot 12 - 21 \cdot 3.6)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}}$. (c) $\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{3}{5} - \frac{3}{25} - \frac{3}{125} - \frac{3}{625}}{\frac{9}{9} - \frac{7}{7} - \frac{11}{11} + \frac{5}{5} - \frac{25}{25} - \frac{125}{125} - \frac{625}{625}}$. Ans: (a) $\frac{5}{24}$. (b) 0. (c) 1.

41 ([Bin22], 11., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $\frac{2}{3}x - 4 = -12$. (b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$. (c) $|3x - 5| = 4$. (d) $\frac{x+1}{10} + \frac{x+1}{11} + \frac{x+1}{12} = \frac{x+1}{13} + \frac{x+1}{14}$. (e) $\frac{x+4}{2000} + \frac{x+3}{2001} = \frac{x+2}{2002} + \frac{x+1}{2003}$. Ans: (a) -12. (b) $-\frac{1}{15}$. (c) $3, \frac{1}{3}$. (d) -1. (e) -2004.

42 ([Bin22], 12., p. 7). Cho phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tìm phân số x sao cho $\frac{a}{b} - x = \frac{a}{b} \cdot x$. Ans: $\frac{a}{a+b}$.

43 ([Bin22], 13., p. 7). Trung bình cộng của 2 số lớn hơn số thứ nhất 75% thì nhỏ hơn số thứ 2 bao nhiêu %? Ans: 30%.

44 ([Bin22], 14., p. 7). Chứng minh: (a) $\sum_{i=1}^{99} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{99}{100!} < 1$. (b) $\sum_{i=1}^{99} \frac{i(i+1)-1}{(i+1)!} = \frac{1 \cdot 2 - 1}{2!} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3!} + \frac{3 \cdot 4 - 1}{4!} + \dots + \frac{99 \cdot 100 - 1}{100!} < 2$.

45 ([Bin22], 15., p. 7). (a) Người ta viết 7 số hữu tỷ trên 1 vòng tròn. Tìm các số đó, biết tích của 2 số bất kỳ cạnh nhau bằng 16. (b) Cũng hỏi như trên đối với n số.

Ans: (a) 7 số 4 hoặc 7 số -4 . (b) n lẻ: n số 4 hoặc n số -4 . n chẵn:

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{n-1} = m \in \mathbb{Q}, m \neq 0 \text{ tùy ý}, a_2 = a_4 = \dots = a_n = \frac{16}{m}.$$

46 ([Bin22], 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số dương a, b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$? Ans: Ξ .

47 (Mở rộng [Bin22], 16., p. 7). Có tồn tại hay không 2 số a, b khác nhau sao cho $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$? Ans: Ξ .

48 ([Bin22], 17., p. 7). (a) Chứng minh: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} = \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{50}$. (b) Cho $B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$. Chứng minh $\frac{7}{12} < B < \frac{5}{6}$.

49 ([Bin22], 18., p. 7). Tìm $a, b \in \mathbb{Q}$ sao cho: (a) $a - b = 2(a + b) = a : b$. (b) $a + b = ab = a : b$.

Ans: (a) $a = -2.25, b = 0.75$. (b) $a = \frac{1}{2}, b = -1$.

50 ([Bin22], 19., p. 7). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, sao cho tổng của số đó với số nghịch đảo của nó là 1 số nguyên. Ans: ± 1 .

51 ([Bin22], 20., p. 8). Viết tất cả các số hữu tỷ dương thành dãy gồm các nhóm phân số có tổng của tử & mẫu lần lượt bằng 2, 3, 4, 5, ..., các phân số trong cùng 1 nhóm được đặt trong dấu ngoặc: $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots$. Tìm phân số thứ 200 của dãy.

Ans: $\frac{11}{10}$.

3 Exponentiation on \mathbb{Q} – Phép Tính Lũy Thừa với Số Mũ Tự Nhiên của 1 Số Hữu Tỷ

52 ([Tuy23], Ví dụ 6, p. 9). Chứng minh: Không tồn tại 3 số hữu tỷ x, y, z sao cho $xy = \frac{13}{15}, yz = \frac{11}{3}, zx = -\frac{3}{13}$.

53 ([Tuy23], Ví dụ 7, p. 9). Tìm x biết $(3^x)^2 : 3^3 = \frac{1}{243}$. Ans: -1 .

54 ([Tuy23], Ví dụ 8, p. 9). Tìm x biết: $(3x^2 - 51)^{2n} = (-24)^{2n}, n \in \mathbb{N}^*$. Ans: $\pm 3, \pm 5$.

55 ([Tuy23], 21., p. 10). Viết dưới dạng 1 lũy thừa với số mũ tự nhiên lớn hơn 1: (a) 64, 81, -216 . (b) $-\frac{1}{27}, \frac{8}{729}, \frac{16}{625}$.

56 ([Tuy23], 22., p. 10). Dùng lũy thừa với số mũ nguyên âm để viết gọn: (a) Đường kính của nguyên tử cỡ 0.000 000 001 m. (b) Đường kính của hạt nhân nguyên tử cỡ 0.000 000 000 000 001 m. (c) Khối lượng hạt nhân nguyên tử cỡ $\underbrace{0.000 \dots 001}_{23}$ g.

57 ([Tuy23], 23., p. 10). Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa của 1 số nguyên: (a) $12^3 : (3^{-4} \cdot 64)$. (b) $\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^6 : \left(\frac{343}{625}\right)^{-2}$. (c) $5^4 \cdot 125 \cdot (2.5)^{-5} \cdot 0.04$. Ans: (a) 3^7 . (b) 5^{-2} . (c) 2^5 .

58 ([Tuy23], 24., p. 10). Cho $A = (ax + by)^2, B = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$. So sánh giá trị của 2 biểu thức A & B biết: $a = 2, b = -1, x = \frac{8}{11}, y = \frac{-5}{11}$. Ans: $A = \frac{441}{121} < \frac{445}{121} = B$.

59 ([Tuy23], 25., p. 10). So sánh $\left(\frac{1}{8}\right)^6$ với $\left(\frac{1}{32}\right)^4$. Ans: $\left(\frac{1}{8}\right)^6 > \left(\frac{1}{32}\right)^4$.

60 ([Tuy23], 26., p. 10). So sánh 4^{30} với $1000 \cdot 32^{10}$. Ans: $4^{30} > 1000 \cdot 32^{10}$.

61 ([Tuy23], 27., p. 10). Tìm x biết: (a) $5^x \cdot (5^3)^2 = 625$. (b) $\left(\frac{12}{25}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^4$. (c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3x-1} = \frac{256}{81}$. Ans: (a) -2 . (b) 2 . (c) -1 .

62 ([Tuy23], 28., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết: (a) $8 < 2^x \leq 2^9 : 2^5$. (b) $27 < 81^3 : 3^x < 243$. (c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2$. Ans: (a) 4 . (b) 8 . (c) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

63 ([Tuy23], 29., p. 10). Tìm x biết: (a) $(5x + 1)^2 = \frac{36}{49}$. (b) $\left(x - \frac{2}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$. (c) $(8x - 1)^{2n+1} = 5^{2n+1}$, với $n \in \mathbb{N}$ nào đó. Ans: (a) $-\frac{1}{35}, -\frac{13}{35}$. (b) $\frac{2}{3}$. (c) $\frac{3}{4}$.

- 64 ([Tuy23], 30., p. 10). Tìm x, y biết: (a) $x^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 = 0$. (b) $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^{20} + \left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^{10} \leq 0$.
Ans: (a) $x = 0, y = \frac{1}{10}$. (b) $x = 10, y = \pm \frac{1}{2}$.
- 65 ([Tuy23], 31., p. 10). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết: $(x - 7)^{x+1} - (x - 7)^{x+11} = 0$.
Ans: 6, 7, 8.
- 66 ([Tuy23], 32., p. 10). Tìm x, y biết: $x(x - y) = \frac{3}{10}, y(x - y) = -\frac{3}{50}$.
Ans: $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right) \right\}$.
- 67 ([Tuy23], 33., p. 11). Tìm: (a) Giá trị nhỏ nhất GTNN của biểu thức $A = \left(2x + \frac{1}{3}\right)^2 - 1$. (b) Giá trị lớn nhất GTLN của biểu thức $B = -\left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{15}\right)^6 + 3$.
Ans: (a) $\min A = -1, x = -\frac{1}{6}$. (b) $\max B = 3, x = \frac{3}{10}$.
- 68 ([Bin22], Ví dụ 5, p. 8). (a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $9^{10} \approx 80^5$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $9^{10} \approx 3.2 \cdot 10^9$.
- 69 ([Bin22], Ví dụ 6, p. 8). Tính: $A = \sum_{i=1}^{10} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^{10}}$.
Ans: $\frac{509}{256}$.
- 70 ([Bin22], Ví dụ 7, p. 9). (a) Có thể khẳng định x^2 luôn luôn lớn hơn x hay không? (b) Khi nào thì $x^2 < x$?
Ans: (a) Không. (b) $0 < x < 1$.
- 71 ([Bin22], Ví dụ 8, p. 9). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: $ab = 2, bc = 3, ca = 54$.
Ans: $(a, b, c) \in \left\{ \left(6, \frac{1}{3}, 9\right), \left(-6, -\frac{1}{3}, -9\right) \right\}$.
- 72 ([Bin22], Ví dụ 9, p. 9). Rút gọn: $A = \sum_{i=0}^{50} 5^i = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{49} + 5^{50}$.
Ans: $\frac{5^{51} - 1}{4}$.
- 73 ([Bin22], Ví dụ 10, p. 9). Cho $B = \sum_{i=1}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{98} + \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$. Chứng minh $B < 1$.
- 74 ([Bin22], 21., p. 10). Chứng minh: (a) $7^6 + 7^5 - 7^4 : 55$. (b) $16^5 + 2^{15} : 33$. (c) $81^7 - 27^9 - 9^{13} : 405$.
Ans: (a) $7^4 \cdot 55$. (b) $2^{15} \cdot 33$. (c) $3^{26} \cdot 5$.
- 75 ([Bin22], 22., p. 10). Điền vào chỗ chấm (\dots) các từ “bằng nhau” hoặc “đối nhau” cho đúng: (a) Nếu 2 số đối nhau thì bình phương của chúng (b) Nếu 2 số đối nhau thì lập phương của chúng (c) Lũy thừa chẵn cùng bậc của 2 số đối nhau thì (d) Lũy thừa lẻ cùng bậc của 2 số đối nhau thì
- 76 ([Bin22], 23., p. 10 & mở rộng). Các đẳng thức sau có đúng với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ hay không? (a) $-a^3 = (-a)^3$. (b) $-a^5 = (-a)^5$. (c) $-a^2 = (-a)^2$. (d) $-a^4 = (-a)^4$. (e) $-a^{2n+1} = (-a)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. (f) $a^{2n} = (-a)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$. (g) $(a - b)^2 = (b - a)^2$. (h) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$. (i) $(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$. (j) $(a - b)^{2n+1} = -(b - a)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
- 77 ([Bin22], 24., p. 10). Tính: (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20}$. (b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{30}$. (c) $\left(\frac{1}{16}\right)^3 : \left(\frac{1}{8}\right)^2$. (d) $(x^3)^2 : (x^2)^3$ với $x \neq 0$.
Ans: (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{55}$. (b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{30}$. (c) $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. (d) 1.
- 78 ([Bin22], 25., p. 10). Viết số 64 dưới dạng a^n với $a \in \mathbb{Z}$. Có bao nhiêu cách viết?
- 79 ([Bin22], 26., p. 10). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$.
Ans: $-\frac{1}{3}$.
- 80 ([Bin22], 27., p. 10). (a) Chứng minh: $2^{10} \approx 10^3$ & $3^{16} \approx 80^4$. (b) Dùng nhận xét ở (a) để chứng minh $3^{16} \approx 40000000$.
- 81 ([Bin22], 28., p. 10). Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} i = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $S_{35} + S_{60}$.
Ans: -12.
- 82 ([Bin22], 29., p. 10). Cho $A = 1 - 5 + 9 - 13 + 17 - 21 + 25 - \dots$ (n số hạng, giá trị tuyệt đối của số sau lớn hơn giá trị tuyệt đối của số hạng trước 4 đơn vị, các dấu $+$ & $-$ xen kẽ). (a) Tính A theo n . (b) Viết số hạng thứ n của biểu thức A theo n (chú ý dùng lũy thừa để biểu thị dấu của số hạng đó).
Ans: (a) $A = -2n$ với n chẵn, $A = 2n - 1$ với n lẻ. (b) $(-1)^{n-1}(4n - 3) = (-1)^{n+1}(4n - 3)$.
- 83 ([Bin22], 30., p. 11). Với giá trị nào của các chữ thì các biểu thức sau có giá trị là số 0, số dương, số âm? (a) $P = \frac{a^2 b}{c}$. (b) $Q = \frac{x^3}{yz}$.
Ans: (a) $P = 0 \Leftrightarrow a = 0, c \neq 0$ hoặc $b = 0, c \neq 0$. $P > 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b$ & c cùng dấu. $P < 0 \Leftrightarrow a \neq 0, b$ & c trái dấu.
(b) $Q = 0 \Leftrightarrow x = 0, y \neq 0, z \neq 0$. $Q > 0 \Leftrightarrow$ trong x, y, z hoặc cả 3 số cùng dương hoặc có 2 số âm & 1 số dương. $Q < 0 \Leftrightarrow$ trong x, y, z hoặc cả 3 số cùng âm hoặc có 1 số âm & 2 số dương.
- 84 ([Bin22], 31., p. 11). Cho 2 số hữu tỷ a & b trái dấu trong đó $|a| = b^5$. Xác định dấu của mỗi số.
Ans: $a < 0, b > 0$.

- 85 ([Bin22], 32., p. 11). Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của 2: 16, 64, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{8}$, 0.5, 0.25.
- 86 ([Bin22], 33., p. 11). (a) Viết các số sau thành lũy thừa với số mũ âm: $\frac{1}{1000000}$, 0.00000002. (b) Viết các số sau dưới dạng số thập phân: 10^{-7} , $2.5 \cdot 10^{-6}$.
- 87 ([Bin22], 34., p. 11). Tính xem A gấp mấy lần B: (a) $A = 3.4 \cdot 10^{-8}$, $B = 34 \cdot 10^{-9}$. (b) $A = 10^{-4} + 10^{-3} + 10^{-2}$, $B = 10^{-9}$.
Ans: (a) $A = B$. (b) $A = 0.0111 = 11100000B$.
- 88 ([Bin22], 35., p. 11). So sánh: (a) $\left(-\frac{1}{16}\right)^{100} \mathcal{E} \left(-\frac{1}{2}\right)^{500}$. (b) $(-32)^9 \mathcal{E} (-18)^{13}$. (c) $a = 2^{100}$, $b = 3^{75}$, $c = 5^{50}$.
Ans: (a) $\left(-\frac{1}{16}\right)^{100} > \left(-\frac{1}{2}\right)^{500}$. (b) $(-32)^9 > (-18)^{13}$. (c) $a = 16^{25} < c = 25^{25} < b = 27^{25}$.
- 89 ([Bin22], 36., p. 11). Trong các câu sau, câu nào đúng với mọi $a \in \mathbb{Q}$? (a) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > 0$. (b) Nếu $a^2 > 0$ thì $a > 0$. (c) Nếu $a < 0$ thì $a^2 > a$. (d) Nếu $a^2 > a$ thì $a > 0$. (e) Nếu $a^2 > a$ thì $a < 0$.
Ans: (a) Đ. (b) S. (c) Đ. (d) S. (e) S.
- 90 ([Bin22], 37., p. 11). (a) Cho $a^m = a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$). Tìm m, n . (b) Cho $a^m > a^n$ ($a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$). So sánh m & n . Ans: (a) Nếu $a = 0$: $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $a = 1$: $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Nếu $a = -1$, thì m & n là các số chẵn tùy ý hoặc các số lẻ tùy ý. Nếu $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$ thì $m = n$. (b) Nếu $a > 1$ thì $m > n$. Nếu $0 < a < 1$ thì $m < n$.
- 91 ([Bin22], 38., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $(2x - 1)^4 = 81$. (b) $(x - 1)^5 = -32$. (c) $(2x - 1)^6 = (2x - 1)^8$.
Ans: (a) -1, 2. (b) -1. (c) 0, $\frac{1}{2}$, 1.
- 92 ([Bin22], 39., p. 11). Tìm $x \in \mathbb{N}$, biết: (a) $5^x + 5^{x+2} = 650$. (b) $3^{x-1} + 5 \cdot 3^{x-1} = 162$.
Ans: (a) 2. (b) 4.
- 93 ([Bin22], 40., p. 11). Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết: (a) $2^{x+1} \cdot 3^y = 12^x$. (b) $10^x : 5^y = 20^y$. (c) $2^x = 4^{y-1}$ & $27^y = 3^{x+8}$.
Ans: (a) $x = y = 1$. (b) $x = 2y$. (c) $x = 10$, $y = 6$.
- 94 ([Bin22], 41., p. 11). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Q}$, biết: (a) $ab = \frac{3}{5}$, $bc = \frac{4}{5}$, $ca = \frac{3}{4}$. (b) $a(a + b + c) = -12$, $b(a + b + c) = 18$, $c(a + b + c) = 30$. (c) $ab = c$, $bc = 4a$, $ac = 9b$.
Ans: (a) $(a, b, c) \in \left\{ \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1 \right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -1 \right) \right\}$. (b) $(a, b, c) \in \{(-2, 3, 5), (2, -3, -5)\}$. (c) $(a, b, c) \in \{(0, 0, 0), (3, 2, 6), (-3, -2, 6), (3, -2, -6), (-3, 2, -6)\}$.
- 95 ([Bin22], 42., p. 12). Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a^b = b^c = c^d = d^e = e^a$. Chứng minh $a = b = c = d = e$.
- 96 ([Bin22], 43., p. 12). Cho $A = \prod_{i=2}^{100} \left(\frac{1}{i^2} - 1 \right) = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$. So sánh A với $-\frac{1}{2}$.
- 97 ([Bin22], 44., p. 12). Rút gọn $A = \sum_{i=1}^{100} (-1)^i 2^i = 2^{100} - 2^{99} + 2^{98} - 2^{97} + \cdots + 2^2 - 2$.
Ans: $\frac{2^{101} - 2}{3}$.
- 98 ([Bin22], 45., p. 12). Rút gọn $B = \sum_{i=0}^{100} (-1)^i 3^i = 3^{100} - 3^{99} + 3^{98} - 3^{97} + \cdots + 3^2 - 3 + 1$.
Ans: $\frac{1 + 3^{101}}{4}$.
- 99 ([Bin22], 46., p. 12). Cho $C = \sum_{i=1}^{99} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{99}}$. Chứng minh $C < \frac{1}{2}$.
- 100 ([Bin22], 47., p. 12). Chứng minh $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$.
- 101 ([Bin22], 48., p. 12). Chứng minh $\sum_{i=1}^{100} \frac{i}{3^i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$.
- 102 ([Bin22], 49., p. 12). Ta không có $2^m + 2^n = 2^{m+n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng có những số nguyên dương m, n có tính chất trên. Tìm các số đó.
Ans: $m = n = 1$.
- 103 ([Bin22], 50., p. 12). Tìm $m, n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^m - 2^n = 256$.
Ans: $m = 9$, $n = 8$.
- 104 ([Bin22], 51., p. 12). Cho 1 bảng vuông 3×3 ô. Trong mỗi ô của bảng viết số 1 hoặc số -1. Gọi d_i là tích các số trên dòng i ($i = 1, 2, 3$), c_k là tích các số trên cột k ($k = 1, 2, 3$). (a) Chứng minh không thể xảy ra $d_1 + d_2 + d_3 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$. (b) Xét bài toán trên đối với bảng vuông $n \times n$.
- 105 ([Bin22], 52., p. 12). Cho n số x_1, \dots, x_n , mỗi số bằng 1 hoặc -1. Biết tổng của n tích $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_n x_1$ bằng 0. Chứng minh $n \vdots 4$.

3.1 Order of Operations. Change Side Rule – Thứ Tự Thực Hiện Các Phép Tính. Quy Tắc Chuyển Vế

106 ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 11). *Tính:* $A = \frac{2}{5} - \left(\frac{7}{10}\right)^2 : \frac{28}{25} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-3)$. Ans: $-\frac{33}{80}$.

107 ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 11). *Tính:* $B = \frac{3 + \frac{1}{6} - \frac{2}{5}}{5 - \frac{1}{6} + \frac{7}{10}} - \frac{3}{2}$. Ans: -1 .

108 ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 12). *Tìm x biết:* $\frac{3}{7} \left(x - \frac{14}{9}\right) = -\frac{11}{7} \left(x + \frac{14}{11}\right)$. Ans: $-\frac{2}{3}$.

109 ([Tuy23], 34., p. 12). *Tính:* $2\frac{1}{8} : 1\frac{11}{40} - \left(2^4 - 7\frac{13}{18}\right) : 11\frac{1}{27}$. Ans: $\frac{11}{12}$.

110 ([Tuy23], 35., p. 12). *Tính:* $1\frac{13}{15} \cdot \frac{3}{4} - \left[\frac{2^3}{4^2 - 1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \frac{24}{47}$. Ans: 1 .

111 ([Tuy23], 36., p. 12). *Tính giá trị của biểu thức:* $A = \frac{2 - \frac{1}{3} + 2^{-2}}{2 + \frac{1}{6} - 2^{-2}} - 2^0$. Ans: 0 .

112 ([Tuy23], 37., p. 12). *Tìm x biết:* $2\frac{1}{4} \cdot \left(x - 7\frac{1}{3}\right) = 1.5$. Ans: 8 .

113 ([Tuy23], 38., p. 12). *Tìm x biết:* $\left(12\frac{7}{18} - 10\frac{13}{18}\right) : x - 1\frac{7}{33} : \frac{8}{11} = 1\frac{2}{3}$. Ans: $\frac{1}{2}$.

114 ([Tuy23], 39., p. 12). *Cho biểu thức $A = \frac{12}{17} : \frac{5}{51} - \frac{8}{35} \cdot 7$. (a) Tính giá trị của biểu thức A . (b) Đặt thêm dấu ngoặc để biểu thức A có giá trị là 48.8.* Ans: (a) $\frac{28}{5}$. (b) 48.8.

115 ([Tuy23], 40., p. 12). *Ông Phú gửi tiết kiệm 100 triệu đồng tại 1 ngân hàng với kỳ hạn 1 năm, lãi suất 5%/năm. Hết thời hạn 1 năm, tiền lãi gộp vào số tiền gửi ban đầu & lại gửi theo thể thức cũ. Cứ như thế sau 3 năm thì số tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?* Ans: 115.7625 triệu.

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn22] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 7 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 152.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 7*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 168.