# Problem: Limit – Bài Tập: Giới Hạn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 17 tháng 9 năm 2023

## Mục lục



## 1 Limit of Sequence – Giới Hạn của Dãy Số

**Bài toán 1** ([Hùn+23], VD1, p. 86)**.** *Cho dãy số* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh dãy* $(a_n)$ *có giới hạn là* 1.

**Bài toán 2** ([Hùn+23], VD2, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

**Bài toán 3** ([Hùn+23], VD3, p. 87)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ *nếu* $0 < |q| < 1$.

**Bài toán 4** ([Hùn+23], VD4, p. 87)**.** *Chứng minh dãy* $u_n = (-1)^n$ *phân kỳ.*

**Bài toán 5** ([Hùn+23], VD5, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+3n+1}{2n^3-1}$.

**Bài toán 6** ([Hùn+23], VD6, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+2n^3+7n^2+8n+9}{2n^4+3n^3+n+10}$.

**Bài toán 7** ([Hùn+23], VD7, p. 88)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty}(n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$.

**Bài toán 8** ([Hùn+23], VD1, p. 89)**.** *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

**Bài toán 9** ([Hùn+23], VD2, p. 89)**.** *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ *thì* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

**Bài toán 10** ([Hùn+23], VD3, p. 89)**.** *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

**Bài toán 11** ([Hùn+23], VD4, p. 89)**.** *Cho dãy số nguyên dương* $(u_n)$ *thỏa mãn* $u_n > u_{n-1}u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Tính giới hạn* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \dfrac{i}{u_i} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \cdots + \dfrac{n}{u_n}\right)$.

**Bài toán 12** ([Hùn+23], VD5, p. 90)**.** *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=2}^n i\cos\dfrac{\pi}{i}$.

**Bài toán 13** ([Hùn+23], VD1, p. 90)**.** *Cho dãy số* $(u_n)$ *được xác định theo công thức* $u_n = f(u_{n-1})$. *Giả sử* $u_n \in [a, b]$ *với mọi chỉ số* $n$ *&* $f$ *là hàm tăng trên* $[a, b]$. *Chứng minh: (a) Nếu* $u_1 \le u_2$ *thì* $(u_n)$ *là dãy tăng. (b) Nếu* $u_1 \ge u_2$ *thì* $(u_n)$ *là dãy giảm. (c) Nếu hàm* $f$ *bị chặn thì* $(u_n)$ *hội tụ.*

**Bài toán 14** ([Hùn+23], VD2, p. 90)**.** *Cho dãy* $(u_n)$ *được xác định bởi* $u_n = \dfrac{1}{3}\left(2u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy* $(u_n)$ *hội tụ & tìm giới hạn của dãy.*

**Bài toán 15** ([Hùn+23], VD3, p. 91)**.** *Tìm* $u_1$ *để dãy* $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$ *hội tụ.*

**Bài toán 16** ([Hùn+23], VD4, p. 92)**.** *Chứng minh tồn tại* $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

**Bài toán 17** (Số Napier $e$). *Đặt* $e \coloneqq \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. *Chứng minh: (a)* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(b)* $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, *trong đó* $\ln x$ *là logarith cơ số* $e$ *của* $x$.

**Bài toán 18** ([Hùn+23], VD5, p. 91). *Chứng minh dãy* $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ *có giới hạn hữu hạn.*

**Lưu ý 1.** $C = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ *được gọi là* hằng số Euler.

**Bài toán 19** ([Hùn+23], VD1, p. 92). *Chứng minh không tồn tại* $\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$.

**Bài toán 20** ([Hùn+23], VD2, p. 92). *Cho hàm* $f:[0,+\infty)\to(0,b)$ *liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = f(y), \end{cases}$$

*có nghiệm duy nhất* $x=y=q$. *Chứng minh dãy* $u_n = f(u_{n-1})$ *hội tụ tới* $q$ *với* $u_1>0$.

**Bài toán 21** ([Hùn+23], VD3, p. 93). *Cho dãy số* $u_n = 1+\frac{2}{1+u_{n-1}}$, $u_1>0$. *Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.*

**Bài toán 22** ([Hùn+23], VD1, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này hội tụ.*

**Bài toán 23** ([Hùn+23], VD2, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này phân kỳ.*

**Bài toán 24** ([Hùn+23], VD3, p. 94). *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $\forall p\in\mathbb{N}$.

**Bài toán 25** ([Hùn+23], VD1, p. 94). *Khảo sát sự hội tụ của* dãy Héron $(u_n)$ *được xác định bởi* $u_1=1$, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1}+\frac{2}{u_{n-1}}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

**Bài toán 26** ([Hùn+23], VD2, p. 95). *Cho dãy số* $(x_n)$ *thỏa mãn* $|x_{n+1}-a|\le\alpha|x_n-a|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, *trong đó* $a\in\mathbb{R}$ & $0<\alpha<1$. *Chứng minh dãy số* $(x_n)$ *hội tụ về* $a$.

**Bài toán 27** ([Hùn+23], VD3, p. 95). *Cho dãy số* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_1=a\in\mathbb{R}$, $x_{n+1}=\cos x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* $(x_n)$ *hội tụ.*

**Bài toán 28** ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985). *Dãy số* $(x_n)$ *thỏa mãn* $1<x_1<2$ & $x_{n+1} = 1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* $(x_n)$ *hội tụ. Tìm* $\lim_{n\to+\infty}x_n$.

**Bài toán 29** ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023). *Xét dãy số* $(a_n)$ *thỏa mãn* $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\sqrt[3]{3a_{n+1}-a_n}$ & $0\le a_n\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* $(a_n)$ *có giới hạn hữu hạn.*

**Bài toán 30** ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022). *Cho dãy số* $(u_n)$ *xác định bởi* $u_1=6$, $u_{n+1}=2+\sqrt{u_n+4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* $(u_n)$ *có giới hạn hữu hạn.*

**Bài toán 31** ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019). *Cho dãy số* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_1=1$ & $x_{n+1}=x_n+3\sqrt{x_n}+\frac{n}{\sqrt{x_n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$. *(a) Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x_n}=0$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{x_n}$.

**Bài toán 32** ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984). *Dãy số* $(u_n)$ *được xác định như sau:* $u_1=1$, $u_2=2$, $u_{n+1}=3u_n-u_{n-1}$. *Dãy số* $(v_n)$ *được xác định như sau:* $v_n=\sum_{i=1}^n \mathrm{arccot}u_i$. *Tìm giới hạn* $\lim_{n\to+\infty}v_n$.

**Bài toán 33** ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988). *Dãy số* $(u_n)$ *bị chặn thỏa mãn điều kiện* $u_n+u_{n+1}\ge 2u_{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^\star$ *có nhất thiết hội tụ không?*

**Bài toán 34** ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V). *Cho* $x_k = \sum_{i=1}^k\frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{k}{(k+1)!}$. *Tính* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999}x_i^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_{1999}^n}$.

**Bài toán 35** ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A). *Gọi* $F$ *là tập hợp tất cả các hàm số* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *thỏa mãn* $f(3x)\ge f(f(2x))+x$, $\forall x>0$. *Tìm hằng số* $A$ *lớn nhất để* $f(x)\ge Ax$, $\forall f\in F$, $\forall x>0$.

**Bài toán 36** ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020)**.** *Cho dãy số thực* $(x_n)$ *thỏa mãn* $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.*

**Bài toán 37** ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016)**.** *Cho dãy số* $(u_n)$ *thỏa mãn* $u_1 = -1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *& dãy số* $(v_n)$ *thỏa mãn* $u_nv_n - u_n + 2v_n + 2 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Tính* $v_{2015}$ *&* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

**Bài toán 38** ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014)**.** *Cho dãy số* $(u_n)$ *thỏa mãn* $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2$. *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

**Bài toán 39** ([Hùn+23], VD1, p. 99)**.** *Cho dãy số* $(u_n)$ *được xác định:* $u_1$, $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$. *Biện luận theo tham số* $\alpha, \beta$ *giá trị giới hạn của dãy số.*

**Bài toán 40** ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.** *Cho* $(u_n)$ *là dãy số hội tụ &* $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$. *Khi đó, dãy trung bình cộng* $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ *cũng hội tụ &* $\lim_{n\to+\infty} v_n = u$.

**Bài toán 41** ([Hùn+23], VD2, p. 100)**.** *Giả sử* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$. *Từ đó, suy ra* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

**Bài toán 42** ([Hùn+23], VD3, p. 101)**.** *Giả sử* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ *thì* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$.

**Bài toán 43** ([Hùn+23], VD4, p. 101)**.**

**Bài toán 44** ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

**Bài toán 45** ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

**Bài toán 46** ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

**Bài toán 47** ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

## 2 Giới Hạn của Hàm Số

## Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Tái bản lần thứ 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.