

# Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 10 tháng 12 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/problem/NQBH\\_derivative\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/problem/NQBH\\_derivative\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.tex).

- *Problem & Solution: Derivative – Bài Tập & Lời Giải: Đạo Hàm.*

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/solution/NQBH\\_derivative\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/solution/NQBH\\_derivative\\_solution.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.tex).

## Mục lục

1 Basic	1
2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm	1
3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm	2
4 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2	2
5 Miscellaneous	2
Tài liệu	2

## 1 Basic

### Resources – Tài nguyên.

1. [Thá+25]. ĐỖ ĐỨC THÁI, PHẠM XUÂN CHUNG, NGUYỄN SƠN HÀ, NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN, PHẠM SỸ NAM, PHẠM MINH PHƯƠNG. *Toán 11 Tập 1. Cánh Diều*.

## 2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số  $\mathbf{x}(t)$  theo thời gian thì vận tốc  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$  biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm  $t$ .

1 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức). *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (\text{P})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa, với  $\deg P(x; n, \mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$  & vector chứa các hệ số của đa thức  $P(x; n, \mathbf{a})$  là  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$ .

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

**2** (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). *Tính đạo hàm của hàm số phân thức*

$$Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad (\text{Q})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.

**3** (Đạo hàm của căn thức). *Tính đạo hàm của hàm số căn thức  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.*

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức  $P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , hàm phân thức  $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$ , hàm căn thức  $R_n(x) := \sqrt[n]{x}$ .

**4** ([Quỳ+20], 1., p. 49). *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm  $x_0$ : (a)  $y = 2x + 1, x_0 = 2$ . (b)  $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$ . (c)  $y = ax + b$  tại  $x = x_0$ . (d)  $y = ax^2 + bx + c$  tại  $x = x_0$ .*

**5** ([Quỳ+20], 2., p. 49). *Cho parabol  $y = x^2$  và 2 điểm  $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$  trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến  $AB$  biết  $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$ . (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm  $A$ . (c) Mở rộng cho parabol  $y = ax^2 + bx + c$  và 2 điểm  $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .*

**6** ([Quỳ+20], 3., p. 49). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3$  biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.*

**7** ([Quỳ+20], 4., p. 49). *1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động  $S = \frac{gt^2}{2}$  với  $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$  và  $t$  (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ  $t$  đến  $t + \Delta t$  với độ chính xác 0.001, biết  $t = 5$  và  $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$ . (b) Vận tốc tại thời điểm  $t = 5$ .*

**8** ([Quỳ+20], 5., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x}$  trên  $(0, \infty)$ .*

**9** ([Quỳ+20], 6., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số  $y = x|x|$  tại điểm  $x_0 = 0$  (nếu có).*

**10** ([Quỳ+20], 7., p. 49). *Xét hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (1)$$

Tính  $f'(x)$ .

### 3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

**11** ([Quỳ+20], 8., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$ . (b)  $y = (x - 1)^5(x + 1)^7$ . (c)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ . (d)  $y = (x + 1)^3(x + 2)^4(x + 3)^5$ .*

**12** ([Quỳ+20], 9., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . (b)  $y = \sin x^2 + x \cos x^2$ . (c)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . (d)  $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2+x}$ .*

**13** ([Quỳ+20], 10., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ . (b)  $y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$ .*

**14** ([Quỳ+20], 11., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  biết hoành độ tiếp điểm là  $x_0 = \frac{1}{2}$ . (b)  $y = \sqrt{x+2}$  biết tung độ tiếp điểm là  $y_0 = 2$ .*

**15** ([Quỳ+20], 12., p. 50). *Chứng minh hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$  có đạo hàm bằng 0.*

**16** ([Quỳ+20], 13., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol  $y = x^2$  biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(0, -1)$ .*

**17** ([Quỳ+20], 14., p. 50). *1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu  $v_0 = 196 \text{ m/s}$  (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?*

## 4 Các định lý giá trị trung bình

## 5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

## 6 Miscellaneous

### Tài liệu

- [Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.
- [Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 127.