

Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates

Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.tex.

- *Problem & Solution: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập & Lời Giải: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.tex.

Mục lục

1	2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng	1
2	Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector	2
3	Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng	3
4	Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng	3
5	Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn	3
6	3 Conics – 3 Đường Conic	3
7	Miscellaneous	3
	Tài liệu	3

1 2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng

[1] Tọa độ của 1 điểm: Ký hiệu $M(x_M, y_M)$ với $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ lần lượt là hoành độ, tung độ của điểm $M \in \mathbb{R}^2$, cặp số (x_M, y_M) được gọi là *tọa độ* của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy . [2] Tọa độ của 1 vector: $\overrightarrow{OM} = (a, b) \Leftrightarrow M(a, b)$. $\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$ lần lượt là *vector đơn vị* trên trục Ox, Oy . Với mỗi vector \vec{u} trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tọa độ của vector \vec{u} là tọa độ của điểm $A(x_A, y_A)$ thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, khi đó x_A, y_A lần lượt là hoành độ, tung độ của vector \vec{u} . [3] $\vec{u} = (a, b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. [4] $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_{\vec{a}} = x_{\vec{b}} \wedge y_{\vec{a}} = y_{\vec{b}}$. [4] $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. [5] Các điểm đối xứng với điểm $A(x_A, y_A)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy qua gốc O , trục Ox , trục Oy lần lượt là $(-x_A, -y_A), (x_A, -y_A), (-x_A, y_A)$.

1 (Cf. segment vs. vector). (a) So sánh 2 khái niệm ‘2 đoạn thẳng bằng nhau’ & ‘2 vectors bằng nhau’. (b) So sánh 2 khái niệm ‘2 đoạn thẳng song song’ & ‘2 vectors song song’. (c) So sánh 2 khái niệm ‘2 tia đối nhau’ & ‘2 vectors đối nhau’.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2 (Mở rộng [Thá+25b], 5., p. 65). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho trước tọa độ của 3 trong 5 điểm gồm 4 đỉnh của hình bình hành $ABCD$ & tâm đối xứng I của nó. (a) Tìm tọa độ các điểm còn lại. (b) Tính chu vi, độ dài 2 đường cao, & diện tích của hình bình hành $ABCD$ theo tọa độ của 3 điểm cho trước đó.

3 (Mở rộng [Thá+25b], 6., p. 65). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$. Tìm điều kiện cần & đủ để tứ giác $ABCD$ là: (a) hình bình hành. (b) hình thang. (c) hình thang cân. (d) hình thoi. (e) hình chữ nhật. (f) hình vuông. (g) tứ giác nội tiếp. (h) tứ giác ngoại tiếp.

Hint. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \wedge y_A + y_C = y_B + y_D$.

4 (Mở rộng [Thá+25b], 7., p. 65: Tọa độ 3 đỉnh tam giác). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . (a) Cho biết tọa độ trung điểm 3 cạnh $\triangle ABC$. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C .

Hint. Hoặc giải 2 hệ phương trình “khuyết” 3 ẩn (x_A, x_B, x_C) & (y_A, y_B, y_C) . Hoặc dùng nhận xét nếu M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB thì $ANMP, BMNP, CMPN$ là 3 hình bình hành.

5 (Tọa độ 4 đỉnh tứ giác). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy . (a) Liệu nếu chỉ biết tọa độ 4 trung điểm của 4 cạnh tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (b) Nếu cho thêm tọa độ của trung điểm của 1 trong 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (c) Nếu cho thêm tọa độ của 2 trung điểm của 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? Nếu được thì 6 tọa độ này phải thỏa điều kiện gì để bài toán có nghiệm? (d) Mở rộng bài toán cho đa giác n cạnh $A_1A_2 \dots A_n$.

6 (Điều kiện cần & đủ để 2 vectors bằng nhau). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 2 vector $\vec{u}_1(a_1m + b_1n, c_1m + d_1n), \vec{u}_2(a_2m + b_2n, c_2m + d_2n)$. Tìm điều kiện cần & đủ của m, n theo $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ cho trước để: (a) $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. (b) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$. (c) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương. (d) $\vec{u}_1 \uparrow \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương, cùng hướng. (e) $\vec{u}_1 \downarrow \vec{u}_2$, i.e., \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương, ngược hướng. (f) $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ với $k \in \mathbb{R}^*$ cho trước. (g) $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$.

7 (Mở rộng [Thá+25a], 11., p. 62). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tọa độ 3 điểm không thẳng hàng $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ & $CD = aAB$ với $a > 0$ cho trước.

See also [Wikipedia/coordinate vector](https://en.wikipedia.org/wiki/Coordinate_vector).

2 Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector

1 Biểu thức tọa độ của phép \pm vectors, phép nhân vô hướng của vector: Nếu $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ hay viết gộp chung thành $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $k\vec{u} = (kx_1, ky_1), \forall k \in \mathbb{R}; \vec{u} \parallel \vec{v} \neq \vec{0}$, i.e., $\vec{u} \parallel \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 = kx_2 \wedge y_1 = ky_2$. **2** Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ là $M(x_M, y_M)$ với $x_M := \frac{1}{2}(x_A + x_B), y_M := \frac{1}{2}(y_A + y_B)$. **3** Tọa độ trọng tâm của tam giác $\triangle ABC$ với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ là $G(x_G, y_G)$ với $x_G := \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G := \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$. **4** Biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2, \vec{v}^2 = |\vec{v}|^2 = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Nếu $\vec{a} = (x, y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nếu $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ thì $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **5** Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}, \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ &

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (1)$$

8 (Coordinate of linear combination of vectors – Tọa độ của tổ hợp tuyến tính các vectors). Cho $n \in \mathbb{N}^*$ số thực a_i & n vectors $\vec{u}_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$. Tìm tọa độ của vector $\sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$.

9 (Điều kiện cần & đủ để hệ điểm thẳng hàng). (a) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng, không thẳng hàng. (b) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để $n \in \mathbb{N}^*$ điểm $A_i, i = 1, \dots, n$ thẳng hàng, không thẳng hàng.

10. Cho 2 điểm $A(x_A, y_A), M(x_M, y_M)$. Tìm tọa độ điểm $B(x_B, y_B)$ sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB .

11. (a) Cho 3 điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), G(x_G, y_G)$ không thẳng hàng. Tìm tọa độ điểm $C(x_C, y_C)$ để G là trọng tâm $\triangle ABC$. (b) M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Tìm biểu thức tọa độ của tính chất hình học $AG = 2GM, BG = 2GN, CG = 2GP$.

12 (Giải tam giác trên mặt phẳng tọa độ). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. (a) Viết định lý sin & định lý cos phiên bản tọa độ. (b) Giải $\triangle ABC$.

13 (Tổng hợp lực). (a) Tính lực tổng hợp \vec{F} của 2 lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 , i.e., $\vec{F} := \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ biết số đo (\vec{F}_1, \vec{F}_2) . (b) Tính lực tổng hợp \vec{F} của $n \in \mathbb{N}^*$ lực \vec{F}_i với $i = 1, 2, \dots, n$, i.e., $\vec{F} := \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$ biết số đo các góc (\vec{F}_i, \vec{F}_j) với $1 \leq i < j \leq n$.

14 (Tọa độ tâm tỷ cự). (a) Tìm tọa độ của tâm tỷ cự của hệ $n \in \mathbb{N}^*$ điểm $A_i(x_i, y_i)$ với trọng số $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, i.e., $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{AA_i} = \vec{0}$. (b) Viết biểu thức vector $n\vec{MA} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA_i}$ phiên bản tọa độ.

15. Cho $\triangle ABC, \triangle MNP$ với tọa độ 6 đỉnh. Tìm điều kiện cần & đủ của 6 tọa độ này để $\triangle ABC, \triangle MNP$ có cùng: (a) trọng tâm. (b) trục tâm. (c) tâm đường tròn nội tiếp. (d) tâm đường tròn ngoại tiếp. (e) Mở rộng cho các tâm tỷ cự khác.

- 3 Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng
- 4 Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng
- 5 Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn
- 6 3 Conics – 3 Đường Conic
- 7 Miscellaneous

Tài liệu

- [Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Bài Tập Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 112.
- [Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 111.