Problem: Trigonometry In Triangles
Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 13 tháng 10 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set $\mathbb{Q}$ of trigonometrys [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$.
Tính chất. $\boxed{1}$ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận & đảo*: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

1 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$. (c) Tính AD, CD.*

2 ([Tuy23], 1., p. 105)**.** *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

3 ([Tuy23], 2., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD.*

4 ([Tuy23], 3., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

5 ([Tuy23], 4., p. 105)**.** *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

6 ([Tuy23], 5., p. 105)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$.*

7 ([Tuy23], 6., p. 105)**.** *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.*

---

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.
[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

8 ([Tuy23], 7., p. 105). *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh:* $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$.

9 ([Tuy23], 8., p. 105). *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho* $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

10 ([Tuy23], 9., p. 105). *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

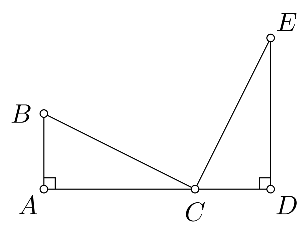
11 ([Tuy23], 10., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

12 ([Bìn23], VD1, p. 84). *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng* 12 cm, *2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD =$* 15 cm.

13 ([Bìn23], VD2, p. 85). *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD =$* 10 cm, *đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

14 ([Bìn23], VD3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm, *hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm.

15 ([Bìn23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*



16 ([Bìn23], 2., p. 86). *Cho ΔABC cân có $AB = AC =$* 9 cm, *$BC =$* 12 cm, *đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

17 ([Bìn23], 3., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

18 ([Bìn23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm.

19 ([Bìn23], 5., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD =$* 7.5 cm, *$CD =$* 10 cm. *Tính AH, BH, DH.*

20 ([Bìn23], 6., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB =$* 20 cm, *$CH =$* 9 cm. *Tính độ dài AH.*

21 ([Bìn23], 7., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC =$* 25 cm, *$DK =$* 6 cm. *Tính AB.*

22 ([Bìn23], 8., p. 86). *Cho ΔABC có $AB =$* 6 cm, *$AC =$* 8 cm, *2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

23 ([Bìn23], 9., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60°$, $BC =$* 8 cm, *$AB + AC =$* 12 cm. *Tính AB, AC.*

24 ([Bìn23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm^2 *&* 96 cm^2. *Tính độ dài cạnh huyền.*

25 ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho ΔABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh $AH = 3DH$.*

26 ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5 : 4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm.

27 ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1 : 3$. *Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

28 ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh $HM = 2$.*

29 ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm, *đáy lớn dài* 50 cm.

30 ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

31 ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh* $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

32 ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông ABCD có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của ΔAEF đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

33 ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a)* $3, 4, 5$. *(b)* $12, 15, 20$.

34 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c. Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để ΔABC vuông.*

35 ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh ΔABC là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn* $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.

36 ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các ΔABC vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

37 ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

38 ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a)* $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. *(b)* $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. *(c)* $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.

39 ([Bìn23], 24., p. 88). *ΔABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BD ở I. Biết* $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. *Tính diện tích ΔABC.*

40 ([Bìn23], 25., p. 88). *ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết* $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. *Tính BC. (b) Biết* $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. *Tính AB, AC.*

41 ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết* $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. *Tính $\widehat{BIM}$. (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của ΔABC tỷ lệ với 3 số nào?*

42 ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$*?*

43 ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho ΔABC vuông tại A,* $BC = 3\sqrt{5}$ cm. *Hình vuông ADEF cạnh* 2 cm *có $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. Tính AB, AC.*

44 ([Bìn23], 29., p. 88). *ΔABC cân tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. *Tính AB.*

45 ([Bìn23], 30., p. 88). *ΔABC cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết* $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

46 ([Bìn23], 31., p. 88). *ΔABC có* $BC = 40$ cm, *đường phân giác AD dài* 45 cm, *đường cao AH dài* 36 cm. *Tính BD, CD.*

47 ([Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết* $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

48 (Mở rộng [Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết* $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

49 ([Bìn+23], VD2, p. 6). *Cho hình thang ABCD có* $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. *Tính diện tích của hình thang.*

50 ([Bìn+23], VD3, p. 7). *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho* $\widehat{AMB} = 90^\circ$. *S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh* $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

51 ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh* $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

52 ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật ABCD & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh* $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.

53 ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật ABCD có* $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. *Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

54 ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

55 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng* 40 : 41. *Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng* $\sqrt{41}$ cm.

56 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE\perp AB$, $HF\perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB\cdot HC = 4OE\cdot OF$.*

57 ([Bìn+23], 1.7., p. 8). *Cho ΔABC, 2 đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm thuộc HC, HB sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. ΔAMN là tam giác gì?*

58 ([Bìn+23], 1.8., p. 8). *Cho hình vuông ABCD, cạnh a. (a) M là 1 điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Tính AM, BM theo a. (b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài 3 đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.*

59 ([Bìn+23], 1.9., p. 8). *Cho hình vuông ABCD & điểm I thay đổi giữa A, B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.*

60 ([Bìn+23], 1.10., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao BH. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.*

61 ([Bìn+23], 1.11., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao AH. Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Tính diện tích ΔABC.*

62 ([Bìn+23], 1.12., p. 8). *Cho ΔABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c. Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì ΔABC vuông tại A.*

63 ([Bìn+23], 1.13., p. 9). *Cho ΔABC, 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD\cdot CE = 2BI\cdot CI$. ΔABC là tam giác gì? Vì sao?*

64 ([Bìn+23], 1.14., p. 9). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 2a$, đường cao AH. Kẻ $HD\perp AC$, $HE\perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

65 ([Bìn+23], 1.15., p. 9). *Cho ΔABC đều có cạnh bằng* 60 cm. *Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E, cắt AC tại F. Tính độ dài các cạnh của ΔDEF.*

66 ([Bìn+23], 1.16., p. 9). *Cho ΔABC. Đường trung tuyến AD, đường cao BH, đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC\cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.*

67 (Tổng quát ⋆). *Cho ΔABC vuông tại A. (a) Cho trước 2 trong 6 số a, b, c, b', c', h. Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S. Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để mô phỏng.*

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

68 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho $\cot\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos\alpha$.*

69 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

70 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. (b) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. (c) $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$. (d) $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$.*

71 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a) $A = \dfrac{1 + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. (b) $B = (1 + \tan^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) - (1 + \cot^2\alpha)(1 - \cos^2\alpha)$. (c) $C = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.*

72 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.*

73 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a) $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. (b) $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.*

74 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$. (b) Xác định α thỏa mãn điều kiện: $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.*

75 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$, *tính* $\tan C$.

76 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$, $0° < \alpha < 90°$, *tính* $\tan\alpha$.

77 ([Tuy23], 19., p. 109). ΔABC, *đường trung tuyến* AM. *Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$.

78 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho* ΔABC, *trực tâm* H *là trung điểm của đường cao* AD. *Chứng minh* $\tan B\tan C = 2$.

79 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE. *Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$. *(b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$.

80 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn. Từ 1 điểm* M *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$, $ME\perp AC$, $MF\perp AB$. *Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$, *trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* MA, MB, MC *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* MD, ME, MF.

81 ([Bìn23], VD4, p. 89). *Tính* $\tan 15°$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

82 ([Bìn23], VD4, p. 90). *Xét* ΔABC *vuông tại* A, $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45°$, *đường trung tuyến* AM, *đường cao* AH, $MA = MB = MC = a$. *Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *(b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. *(c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

83 ([Bìn23], 32., p. 91). *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* $72°$ *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm. *(b) Dựng góc* $20°$ *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm, *cạnh bên* 6 cm.

84 ([Bìn23], 33., p. 91). ΔABC *có đường trung tuyến* AM *bằng cạnh* AC. *Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$.

85 ([Bìn23], 34., p. 91). *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. *Tính* $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

86 ([Bìn23], 35., p. 91). *Cho hình vuông ABCDN. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính* $\cos\widehat{MAN}$.

87 ([Bìn23], 36., p. 91). *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho* $HE = 2HA$. *Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90°$.

88 ([Bìn23], 37., p. 91). *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

89 ([Bìn23], 38., p. 91). *Tính* $\tan 22°30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

90 ([Bìn23], 39., p. 91). *Chứng minh* $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

91 ([Bìn23], 40., p. 91). *Tính* $\cos 36°, \cos 72°$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

92 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo cắt nhau tại* O. *Cho biết* $\widehat{AOD} = 70°$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. *Tính diện tích tứ giác* $ABCD$.

93 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

94 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành* $ABCD$, $BD\perp BC$. *Biết* $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, *tính diện tích hình bình hành đó.*

95 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho* ΔABC, $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 35°$, $AB = 12.25$ dm. *Giải* ΔABC.

96 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho* ΔABC *nhọn,* $\widehat{A} = 75°$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. *Giải* ΔABC.

97 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho* ΔABC *cân tại* A, *đường cao* BH. *Biết* $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. *Giải* ΔABC.

98 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành* $ABCD$ *có* $\widehat{A} = 120°$, $AB = a$, $BC = b$. *Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác* $MNPQ$. *Tính diện tích tứ giác* $MNPQ$.

99 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho* ΔABC, *các đường phân giác* AD, *đường cao* BH, *đường trung tuyến* CE *đồng quy tại điểm* O. *Chứng minh* $AC\cos A = BC\cos C$.

100 ([Bìn23], VD6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng* $\frac{1}{2}$ *tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của ΔABC ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90°$ & $\alpha = 180° - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90°$). Vẽ đường cao BH, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BH = \frac{1}{2}AC\cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

101 (Mở rộng [Bìn23], VD6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với sin của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90°$. Vì $\sin 90° = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90° = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90°$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90°$. Vì $\sin x = \sin(180° - x)$, $\forall x \in [0°, 180°]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180° - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi ΔABC. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát*:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

102 ([Bìn23], VD7, p. 92). *ΔABC có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của ΔABC. (b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.*

103 (Tổng quát [Bìn23], VD7, p. 92). *Nếu ΔABC có $\widehat{A}$ tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng $2, 3, 4$.*

104 ([Bìn23], 41., p. 94). *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh 40 cm của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng $40°, 55°$. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng $60°, 80°$.*

105 ([Bìn23], 42., p. 94). *ΔABC có $\widehat{A} = 105°, \widehat{B} = 45°, BC = 4$ cm. Tính AB, AC.*

106 ([Bìn23], 43., p. 94). *ΔABC có $\widehat{A} = 60°$, $AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính BC.*

107 ([Bìn23], 44., p. 94). *Cho 1 hình vuông có cạnh 1 dm. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

108 ([Bìn23], 45., p. 94). *ΔABC đều có cạnh 60 cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F. Tính độ dài 3 cạnh của ΔDEF.*

109 ([Bìn23], 46., p. 94). *Cho ΔABC có $AB = c$, $CA = b$, đường phân giác AD, đường trung tuyến AM. Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N. Tính $\dfrac{BN}{CN}$.*

110 ([Bìn23], 47., p. 94). *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

111 ([Bìn23], 48., p. 94). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau ở O & không vuông góc với nhau. Gọi H & K lần lượt là trực tâm của $\Delta AOB, \Delta COD$. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của $\Delta BOC, \Delta AOD$. (a) Gọi E là trọng tâm của ΔAOB, F là giao điểm của AH & DK. Chứng minh $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.*

112 ([Bìn23], 49., p. 94). *Cho ΔABC nhọn, 3 điểm D, E, F lần lượt thuộc 3 cạnh AB, BC, CA. Chứng minh trong 3 $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$, tồn tại 1 tam giác có diện tích $\le \frac{1}{4}$ diện tích ΔABC. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích ΔABC?*

4 Miscellaneous

113 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0° < \alpha < 90°$. Tính cạnh huyền BC.*

114 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

115 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải ΔABC biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

116 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45°$, $\widehat{BC'B'} = 60°$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

117 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho ΔABC, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0° < \alpha < 45°$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.*

118 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho* $\alpha = 22°30'$*, tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

119 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho* ΔABC*, đường phân giác* AD*. Biết* $AB = c$*,* $AC = b$*,* $\widehat{A} = 2\alpha$*,* $\alpha < 45°$*. Chứng minh* $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.

120 ([Kiê21], VD1, p. 9). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, dựng đường cao* AH*. Tính độ dài các yếu tố còn lại* $(a, b, c, h, b', c', \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ *của* ΔABC *trong mỗi trường hợp: (a)* $AB = a$*,* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*. (b)* $BC = 2a$*,* $BH = \dfrac{1}{4}BC$*. (c)* $AB = a$*,* $CH = \dfrac{3}{2}a$*. (d)* $AC = a\sqrt{3}$*,* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*. (e)* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$*,* $BC = 5a$*.*

121 ([Kiê21], VD2, p. 10). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*,* $BC = 2a$*, gọi* O *là trung điểm của* BC*. Dựng* $AH \perp BC$*. (a) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$*. Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$*. Gọi* M *là trung điểm của* AC*. Tính độ dài* BM*. (c) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$*. 2 đoạn thẳng* AO, BM *cắt nhau ở điểm* G*. Tính độ dài* CG*. (d) Giả sử điểm* A *thay đổi sao cho* $\widehat{BAC} = 90°$*,* $BC = 2a$*.* ΔABC *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích* ΔAHO *lớn nhất? (e) Giả sử* CG *cắt* AB *tại điểm* N*. Tứ giác* $AMON$ *là hình gì?* ΔABC *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác* $AMON$ *lớn nhất?*

122 ([Kiê21], VD3 p. 10). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, kẻ đường cao* AH*. Từ* H *dựng* HM, HN *lần lượt vuông góc với* AC, AB*. Chứng minh: (a)* $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$*. (b)* $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$*. (c)* $AM \cdot AN = \dfrac{AH^3}{BC}$*. (d)* $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BN}{CM}$*. (e)* $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$*. (f)* $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$*.*

123 ([Kiê21], VD4, p. 12). *Cho* ΔABC *nhọn có 3 đường cao* AD, BE, CF *cắt nhau tại* H*, gọi* O *là trung điểm của* BC*,* I *là trung điểm của* AH*,* K *là giao điểm của* EF, OI *biết* $BC = 2a$*. Chứng minh: (a)* $\Delta IEO, \Delta IFO$ *là 2 tam giác vuông. (b)* OI *là trung trực của* EF*. (c)* $AH^2 = 4IK \cdot IO$*. (d)* $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$*. (e)* $\dfrac{EF}{BC} \cdot \dfrac{FD}{CA} \cdot \dfrac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$*. (f)* $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$*. (g)* $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$*. (h)* $\tan B \tan C = \dfrac{AD}{DH}$*. (i) Giả sử* $\widehat{ABC} = 60°$*,* $\widehat{ACB} = 45°$*. Tính* S_{ABC} *theo* a*. (j) Gọi* M *là điểm trên* AH *sao cho* $\widehat{BMC} = 90°$*. Chứng minh* $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC}S_{BHC}}$*.*

124 ([Kiê21], VD5, p. 14). *Cho* ΔABC *có* $BC = a, CA = b, AB = c$*. Chứng minh: (a)* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$*. (b) Công thức Heron:* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *với* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$*. (c)* $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$*. (d)* $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$*. (e)* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ *với* R *là bán kính đường tròn ngoại tiếp* ΔABC*.*

125 ([Kiê21], VD6, p. 16). *Cho* ΔABC *với 3 đỉnh* A, B, C *& 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là* a, b, c*. Gọi* D *là chân đường phân giác trong góc* A*. Chứng minh: (a)* $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$*. (b)* $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$*. (c)* $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$*. (d)* $AD = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$*.*

126 ([Kiê21], VD7, p. 19). *Cho* ΔABC *cân,* $\widehat{A} = 20°$*,* $AB = AC$*,* $AC = b$*,* $BC = a$*. Chứng minh* $a^3 + b^3 = 3ab^2$*.*

127 ([Kiê21], VD8, p. 20). *Tính* $\sin 22°30', \cos 22°30', \tan 22°30', \cot 22°30'$*.*

128 ([Kiê21], VD9, p. 20). *Cho* ΔABC*. Chứng minh* $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$*.*

129 ([Kiê21], VD10, p. 21). *Chứng minh* $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$*.*

130 ([Kiê21], VD11, p. 22). *Chứng minh* $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$*,* $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$*.*

131 ([Kiê21], VD12, p. 22). *Chứng minh* $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$*.*

132 ([Kiê21], VD13, p. 23). *Chứng minh hệ thức: (a)* $\tan^2 36° + \tan^2 72° = 10$*. (b)* $\tan^4 36° + \tan^4 72° = 90$*.*

133 ([Kiê21], VD14, p. 23). *Cho* ΔABC*, có* $\widehat{A} = 60°$ *& đường phân giác* AD*. Chứng minh* $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$*.*

134 ([Kiê21], VD15, p. 24). *Chứng minh trong* ΔABC*,* $\widehat{A} = 60° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$*,* $\widehat{A} = 120° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$*.*

135 ([Kiê21], VD16, p. 24). *Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.*

136 ([Kiê21], VD17, p. 25). *Cho* ΔABC*. Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ* B, C *vuông góc với nhau khi & chỉ khi* $b^2 + c^2 = 5a^2$*.*

137 ([Kiê21], VD18, p. 25). *Cho* ΔABC*. Trung tuyến* AD*, đường cao* BH*, & phân giác* CE *đồng quy. Chứng minh đẳng thức* $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$*.*

138 ([Kiê21], VD19, p. 26)**.** *Cho* ΔABC *thỏa* $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. *Chứng minh* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

139 ([Kiê21], VD20, p. 26)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *đường cao* AH. *Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn* $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AH} = 1$. *Xác định 3 cạnh của tam giác.*

140 ([Kiê21], VD21, p. 26)**.** *Cho* ΔABC *thỏa mãn* $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180°$. *Chứng minh* $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Kiê21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9*. Tái bản lần thứ 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.