Problem: Trigonometry In Triangles
Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 14 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Trigonometry In Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.
- *Problem & Solution: Trigonometry In Triangles – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.tex.

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$. $\boxed{1}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền: $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận*: Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông. *Định lý Pythagore đảo*: 1 tam giác là tam giác vuông nếu bình phương 1 cạnh bằng tổng bình phương 2 cạnh còn lại. ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài đường cao bằng tích độ dài hình chiếu của 2 cạnh góc vuông lên cạnh huyền: $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ Trong tam giác vuông, tích độ dài 2 cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với đường cao tương ứng: $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ Trong tam giác vuông, nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

1 ([Sơn+20], VD1, p. 11). *Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ phân giác CD, kẻ $AH \perp CD$ tại H. Tính AD, CD, AH theo a, b, c.*

2 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$. (c) Tính AD, CD.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

3 ([Tuy23], 1., p. 105). *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

4 ([Tuy23], 2., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD.*

5 ([Tuy23], 3., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

6 ([Tuy23], 4., p. 105). *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

7 ([Tuy23], 5., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$.*

8 ([Tuy23], 6., p. 105). *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105°$, $\widehat{B} = 60°$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.*

9 ([Tuy23], 7., p. 105). *Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$.*

10 ([Tuy23], 8., p. 105). *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.*

11 ([Tuy23], 9., p. 105). *Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

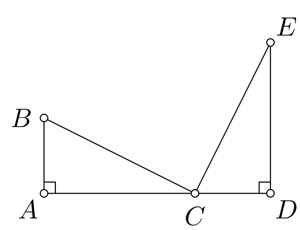
12 ([Tuy23], 10., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

13 ([Bìn23], VD1, p. 84). *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.*

14 ([Bìn23], VD2, p. 85). *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

15 ([Bìn23], VD3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.*

16 ([Bìn23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*



17 ([Bìn23], 2., p. 86). *Cho ΔABC cân có $AB = AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

18 ([Bìn23], 3., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

19 ([Bìn23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.*

20 ([Bìn23], 5., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH.*

21 ([Bìn23], 6., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH.*

22 ([Bìn23], 7., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB.*

23 ([Bìn23], 8., p. 86). *Cho ΔABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

24 ([Bìn23], 9., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60°$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC.*

25 ([Bìn23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm^2 *&* 96 cm^2. *Tính độ dài cạnh huyền.*

26 ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho* ΔABC *vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh* $AH = 3DH$.

27 ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5:4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm.

28 ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1:3$. *Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

29 ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho* ΔABC *có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh* $HM = 2$.

30 ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm*, đáy lớn dài* 50 cm.

31 ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng* $\frac{1}{2}$ *diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

32 ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh* $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

33 ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông ABCD có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của* ΔAEF *đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

34 ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a)* $3,4,5$. *(b)* $12,15,20$.

35 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là* h_a, h_b, h_c. *Tìm điều kiện cần & đủ theo* h_a, h_b, h_c *để* ΔABC *vuông.*

36 ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh* ΔABC *là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn* $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.

37 ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các* ΔABC *vuông có cạnh huyền* $BC = 2a$. *Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

38 ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

39 ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho* ΔABC *có* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. *Chứng minh: (a)* $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. *(b)* $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. *(c)* $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.

40 ([Bìn23], 24., p. 88). ΔABC *vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của* $\widehat{A}$ *cắt BD ở I. Biết* $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. *Tính diện tích* ΔABC.

41 ([Bìn23], 25., p. 88). ΔABC *vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết* $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. *Tính BC. (b) Biết* $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. *Tính AB, AC.*

42 ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho* ΔABC *vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết* $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. *Tính* $\widehat{BIM}$. *(b) Biết* $\widehat{BIM} = 90^\circ$. *3 cạnh của* ΔABC *tỷ lệ với 3 số nào?*

43 ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$*?*

44 ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho* ΔABC *vuông tại A,* $BC = 3\sqrt{5}$ cm. *Hình vuông ADEF cạnh* 2 cm *có* $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. *Tính AB, AC.*

45 ([Bìn23], 29., p. 88). ΔABC *cân tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. *Tính AB.*

46 ([Bìn23], 30., p. 88). ΔABC *cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết* $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

47 ([Bìn23], 31., p. 88). ΔABC *có* $BC = 40$ cm*, đường phân giác AD dài* 45 cm*, đường cao AH dài* 36 cm. *Tính BD, CD.*

48 ([Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH. Biết* $AB : AC = 3:4$ *&* $AB + AC = 21$ cm. *(a) Tính các cạnh của* ΔABC. *(b) Tính độ dài các đoạn* AH, BH, CH.

49 (Mở rộng [Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

50 ([Bìn+23], VD2, p. 6). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

51 ([Bìn+23], VD3, p. 7). *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1S_2}$.*

52 ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

53 ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.*

54 ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

55 ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

56 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

57 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.*

58 ([Bìn+23], 1.7., p. 8). *Cho ΔABC, 2 đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm thuộc HC, HB sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$. ΔAMN là tam giác gì?*

59 ([Bìn+23], 1.8., p. 8). *Cho hình vuông ABCD, cạnh a. (a) M là 1 điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30^\circ$. Tính AM, BM theo a. (b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài 3 đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.*

60 ([Bìn+23], 1.9., p. 8). *Cho hình vuông $ABCD$ & điểm I thay đổi giữa A, B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.*

61 ([Bìn+23], 1.10., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao BH. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\widehat{A} > 90^\circ$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.*

62 ([Bìn+23], 1.11., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao AH. Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30^\circ$. Tính diện tích ΔABC.*

63 ([Bìn+23], 1.12., p. 8). *Cho ΔABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c. Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì ΔABC vuông tại A.*

64 ([Bìn+23], 1.13., p. 9). *Cho ΔABC, 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. ΔABC là tam giác gì? Vì sao?*

65 ([Bìn+23], 1.14., p. 9). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 90^\circ$, $BC = 2a$, đường cao AH. Kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng DE. (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.*

66 ([Bìn+23], 1.15., p. 9). *Cho ΔABC đều có cạnh bằng 60 cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E, cắt AC tại F. Tính độ dài các cạnh của ΔDEF.*

67 ([Bìn+23], 1.16., p. 9). *Cho ΔABC. Đường trung tuyến AD, đường cao BH, đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.*

68 (Program: Trigonometry in right triangles). *Cho ΔABC vuông tại A. (a)* (Tính độ dài cạnh, đường cao, hình chiếu trong tam giác vuông) *Cho trước 2 yếu tố trong $6 + 15 = 21$ yếu tố gồm 6 số a, b, c, b', c', h & $C_6^2 = 15$ tỷ số của chúng:*

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{b'}, \frac{a}{c'}, \frac{a}{h}, \frac{b}{c}, \frac{b}{b'}, \frac{b}{c'}, \frac{b}{h}, \frac{c}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{c}{h}, \frac{b'}{c'}, \frac{b'}{h}, \frac{c'}{h}.$$

Tìm công thức của 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong $14 + 91 = 105$ yếu tố gồm 14 số $a, b, c, b', c', h, m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$, & $C_{14}^2 = 91$ tỷ số của chúng, với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình Pascal, Python, C/C++ *để giải bài toán.*

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 74–81]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. HD4. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

69 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107)**.** *Cho* $\cot\alpha = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$ *trong đó* α *là góc nhọn,* $a > b > 0$*. Tính* $\cos\alpha$*.*

70 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin)**.** *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a$*,* $CA = b$*,* $AB = c$*. Chứng minh:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$*. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

71 ([Tuy23], 12., p. 108)**.** *Chứng minh: (a)* $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$*. (b)* $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$*. (c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$*. (d)* $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

72 ([Tuy23], 13., p. 108)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$*. (b)* $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$*. (c)* $C = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$*.*

73 ([Tuy23], 14., p. 108)**.** *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$*.*

74 ([Tuy23], 15., p. 108)**.** *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$*. (b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$*.*

75 ([Tuy23], 16., p. 108)**.** *Cho* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*. Chứng minh:* $\sin\alpha < \tan\alpha$*,* $\cos\alpha < \cot\alpha$*. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:* $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$*. (b) Xác định* α *thỏa mãn điều kiện:* $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$*.*

76 ([Tuy23], 17., p. 108)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$*, tính* $\tan C$*.*

77 ([Tuy23], 18., p. 108)**.** *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$*,* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*, tính* $\tan\alpha$*.*

78 ([Tuy23], 19., p. 109)**.** ΔABC*, đường trung tuyến* AM*. Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$*.*

79 ([Tuy23], 20., p. 109)**.** *Cho* ΔABC*, trực tâm* H *là trung điểm của đường cao* AD*. Chứng minh* $\tan B\tan C = 2$*.*

80 ([Tuy23], 21., p. 109)**.** *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE*. Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$*. (b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$*.*

81 ([Tuy23], 22., p. 109)**.** *Cho* ΔABC *nhọn. Từ 1 điểm* M *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$*,* $ME\perp AC$*,* $MF\perp AB$*. Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$*, trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* MA, MB, MC *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* MD, ME, MF*.*

82 ([Bìn23], VD4, p. 89)**.** *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

83 ([Bìn23], VD4, p. 90)**.** *Xét* ΔABC *vuông tại* A*,* $AB < AC$*,* $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$*, đường trung tuyến* AM*, đường cao* AH*,* $MA = MB = MC = a$*. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*. (b)* $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$*. (c)* $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$*.*

84 ([Bìn23], 32., p. 91)**.** *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* 72° *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm*. (b) Dựng góc* 20° *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm*, cạnh bên* 6 cm*.*

85 ([Bìn23], 33., p. 91)**.** ΔABC *có đường trung tuyến* AM *bằng cạnh* AC*. Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$*.*

86 ([Bìn23], 34., p. 91)**.** *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$*. Tính* $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$*.*

87 ([Bìn23], 35., p. 91)**.** *Cho hình vuông* $ABCDN$*.* M*,* N *lần lượt là trung điểm của* BC*,* CD*. Tính* $\cos\widehat{MAN}$*.*

88 ([Bìn23], 36., p. 91)**.** *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, đường cao* AH*. Gọi* D *là điểm đối xứng với* A *qua* B*. Gọi* E *là điểm thuộc tia đối của tia* AH *sao cho* $HE = 2HA$*. Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$*.*

89 ([Bìn23], 37., p. 91)**.** *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

90 ([Bìn23], 38., p. 91)**.** *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

91 ([Bìn23], 39., p. 91)**.** *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$*,* $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

92 ([Bìn23], 40., p. 91)**.** *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

93 ([Bìn+23], VD1, p. 10)**.** *Biết* $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$*. Tính* $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$*.*

94 ([Bìn+23], VD2, p. 11). *Cho ΔABC nhọn, 2 đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Biết $HD : HA = 1 : 2$, chứng minh* $\tan B \tan C = 3$.

95 ([Bìn+23], VD3, p. 12). *Biết* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$. *Tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

96 ([Bìn+23], 2.1., p. 12). *(a) Biết* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, *tính* $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$. *(b) Biết* $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, *tính* $B = 4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$.

97 ([Bìn+23], 2.2., p. 13). *(a) Biết* $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, *tính* $A = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. *(b) Biết* $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$, *tính* $B = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

98 ([Bìn+23], 2.3., p. 13). *Cho ΔABC, trung tuyến AM. Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì $AM = AC$.*

99 ([Bìn+23], 2.4., p. 13). *Cho ΔABC có $BC \ge AC \ge AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh $CH \ge AD$.*

100 ([Bìn+23], 2.5., p. 13). *Cho ΔABC nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

101 ([Bìn+23], 2.6., p. 13). *Cho ΔABC, 2 đường cao BD, CE. Chứng minh: (a)* $S_{ADE} = S_{ABC}\cos^2 A$. *(b)* $S_{BCDE} = S_{ABC}\sin^2 A$.

102 ([Bìn+23], 2.7., p. 13). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

103 ([Bìn+23], 2.8., p. 13). *Cho ΔABC nhọn, đường phân giác AD. Biết $AB = c, AC = b$, tính độ dài đoạn AD theo b, c.*

104 ([Bìn+23], 2.9., p. 13). *Cho ΔABC nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$ & $b + c = 2a$. Chứng minh: (a)* $2\sin A = \sin B + \sin C$. *(b)* $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, *trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với cạnh a, b, c.*

105 ([Bìn+23], 2.10., p. 13). *Cho ΔABC nhọn & 2 đường trung tuyến BN, CM vuông góc với nhau. Chứng minh* $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$.

106 ([Bìn+23], 2.11., p. 13). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$, & trung tuyến AM. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh* $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.

107 ([Bìn+23], 2.12., p. 14). *Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh* $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \dfrac{1}{4}$.

108 ([Bìn+23], 2.13., p. 14). *Tìm góc nhọn α thỏa* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

109 ([Bìn+23], 2.14., p. 14). *Cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, trung tuyến AM, đường cao AH, $BC = a$. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *(b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. *(c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

110 ([Bìn+23], 2.15., p. 14). *Cho ΔABC. Chứng minh: (a)* $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. *(b)* $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \Delta ABC$ *đều.*

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 82–87]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

111 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác ABCD.*

112 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

113 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành ABCD, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

114 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$ dm. Giải ΔABC.*

115 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho ΔABC nhọn, $\widehat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải ΔABC.*

116 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải ΔABC.*

117 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác MNPQ. Tính diện tích tứ giác MNPQ.*

118 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho ΔABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh* $AC\cos A = BC\cos C$.

119 ([Bìn23], VD6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của ΔABC ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao BH, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

120 (Mở rộng [Bìn23], VD6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x), \forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi ΔABC. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát:*

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

121 ([Bìn23], VD7, p. 92). ΔABC *có* $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ *& độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của* ΔABC. *(b) Tính* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

122 (Tổng quát [Bìn23], VD7, p. 92). *Nếu* ΔABC *có* $\widehat{A}$ *tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng* $2, 3, 4$.

123 ([Bìn23], 41., p. 94). *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh* 40 cm *của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng* $40^\circ, 55^\circ$. *(b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng* $60^\circ, 80^\circ$.

124 ([Bìn23], 42., p. 94). ΔABC *có* $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm. *Tính* AB, AC.

125 ([Bìn23], 43., p. 94). ΔABC *có* $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. *Tính* BC.

126 ([Bìn23], 44., p. 94). *Cho 1 hình vuông có cạnh* 1 dm. *Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

127 ([Bìn23], 45., p. 94). ΔABC *đều có cạnh* 60 cm. *Trên cạnh* BC *lấy điểm* D *sao cho* $BD = 20$ cm. *Đường trung trực của* AD *cắt 2 cạnh* AB, AC *theo thứ tự ở* E, F. *Tính độ dài 3 cạnh của* ΔDEF.

128 ([Bìn23], 46., p. 94). *Cho* ΔABC *có* $AB = c$, $CA = b$, *đường phân giác* AD, *đường trung tuyến* AM. *Đường thẳng đối xứng với* AM *qua* AD *cắt* BC *ở* N. *Tính* $\dfrac{BN}{CN}$.

129 ([Bìn23], 47., p. 94). *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

130 ([Bìn23], 48., p. 94). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo cắt nhau ở* O *& không vuông góc với nhau. Gọi* H *&* K *lần lượt là trực tâm của* $\Delta AOB, \Delta COD$. *Gọi* G, I *lần lượt là trọng tâm của* $\Delta BOC, \Delta AOD$. *(a) Gọi* E *là trọng tâm của* ΔAOB, F *là giao điểm của* AH *&* DK. *Chứng minh* $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$. *(b) Chứng minh* $IG \perp HK$.

131 ([Bìn23], 49., p. 94). *Cho* ΔABC *nhọn, 3 điểm* D, E, F *lần lượt thuộc 3 cạnh* AB, BC, CA. *Chứng minh trong 3* $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$, *tồn tại 1 tam giác có diện tích* $\le \frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC. *Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng* $\frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC?

132 ([Bìn+23], VD1, p. 15). ΔABC *có* $AB = 16, AC = 14, \widehat{B} = 60^\circ$. *(a) Tính độ dài cạnh* BC. *(b) Tính diện tích* ΔABC.

133 ([Bìn+23], VD2, p. 15). *Cho* ΔABC *nhọn có* $\widehat{A} = 75^\circ, AB = 30, BC = 35$. *Giải* ΔABC.

134 ([Bìn+23], VD3, p. 16). *Không dùng bảng số & máy tính. Chứng minh* $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

135 ([Bìn+23], 3.1., p. 17). *Cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có* $\widehat{BAC} = 30^\circ, AC = 10$. *Tính chu vi & diện tích của hình chữ nhật đó.*

136 ([Bìn+23], 3.2., p. 17). *Cho* ΔABC *vuông tại* B, $\widehat{A} = \alpha$, BO *là trung tuyến ứng với cạnh huyền* AC. *Từ* B *kẻ đường thẳng vuông góc với* BO *cắt* AC *tại* D. *Đặt* $AC = a$. *Chứng minh* $AD = \dfrac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2\cos 2\alpha}$.

137 ([Bìn+23], 3.3., p. 17). *Cho* ΔABC, *đường cao* AA', *trực tâm* H. *Cho biết* $\dfrac{AH}{A'H} = k$. *Chứng minh* $\tan B\tan C = 1 + k$.

138 ([Bìn+23], 3.4., p. 17). *Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 45^\circ$, $AB = BD = 18$. (a) Tính độ dài cạnh AD. (b) Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.*

139 ([Bìn+23], 3.5., p. 17). *Cho ΔABC có góc A nhọn, 2 đường cao BH, CK. Chứng minh nếu $AB > AC$ thì $BH > CK$.*

140 ([Bìn+23], 3.6., p. 17). *Cho ΔABC, phân giác AD. Biết $AB = c, AC = b, \widehat{A} = 2\alpha$ với $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.*

141 ([Bìn+23], 3.7., p. 17). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $AH = a\sin B\cos B, BH = a\cos^2 B, CH = a\sin^2 B$.*

142 ([Bìn+23], 3.8., p. 17). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.*

143 ([Bìn+23], 3.9., p. 17). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng h, góc ở đáy của tam giác bằng α. Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{h^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.*

144 ([Bìn+23], 3.10., p. 18). *Ở độ cao 920 m, từ 1 máy bay trực thăng, người ta nhìn 2 điểm A, B của 2 đầu 1 chiếc cầu 2 góc so với phương nằm ngang lần lượt là $\alpha = 37^\circ, \beta = 31^\circ$. Tính chiều dài AB của chiếc cầu.*

145 ([Bìn+23], 3.11., p. 18). *Cho ΔABC nhọn, 3 đường cao AH, BI, CK. Chứng minh: $S_{HIK} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)S_{ABC}$.*

146 ([Bìn+23], 3.12., p. 18). *Chứng minh ΔABC cân tại $C \Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.*

147 ([Bìn+23], 3.13., p. 18). *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AE, BD vuông góc với nhau. Biết $AB = 1$. Tính diện tích ΔABC.*

148 ([Bìn+23], 3.14., p. 18). *Cho ΔABC, $AB = 8, AC = 7, \widehat{ABC} = 30^\circ$. Giải ΔABC.*

149 ([Bìn+23], 3.15., p. 18). *(a) Không dùng bảng số, máy tính, tính $\tan 15^\circ$. (b) Cho ΔABC có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105^\circ$ & $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$.*

4 Application of Trigonometrical Functions of Acute Angle – Ứng Dụng Của Tỷ Số Lượng Giác Của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 88–91]: LT1. LT2. 1. 2. 3. 4. 5.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 92–93]: 1. 2. 3. 4.

150 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho ΔABC vuông tại A. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính cạnh huyền BC.*

151 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ A, B, C. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

152 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải ΔABC biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

153 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$, $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

154 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho ΔABC, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Vẽ các đường cao AD, BE. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.*

155 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho $\alpha = 22^\circ 30'$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.*

156 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho ΔABC, đường phân giác AD. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45^\circ$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.*

157 ([Kiê21], VD1, p. 9). *Cho ΔABC vuông tại A, dựng đường cao AH. Tính độ dài các yếu tố còn lại $(a, b, c, h, b', c', \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ của ΔABC trong mỗi trường hợp: (a) $AB = a$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (b) $BC = 2a$, $BH = \dfrac{1}{4}BC$. (c) $AB = a$, $CH = \dfrac{3}{2}a$. (d) $AC = a\sqrt{3}$, $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (e) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$, $BC = 5a$.*

158 ([Kiê21], VD2, p. 10). *Cho ΔABC vuông tại A, $BC = 2a$, gọi O là trung điểm của BC. Dựng $AH \perp BC$. (a) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính độ dài BM. (c) Khi $\widehat{ACB} = 30^\circ$. 2 đoạn thẳng AO, BM cắt nhau ở điểm G. Tính độ dài CG. (d) Giả sử điểm A thay đổi sao cho $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $BC = 2a$. ΔABC phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích ΔAHO lớn nhất? (e) Giả sử CG cắt AB tại điểm N. Tứ giác AMON là hình gì? ΔABC phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác AMON lớn nhất?*

159 ([Kiê21], VD3 p. 10). *Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Từ H dựng HM, HN lần lượt vuông góc với AC, AB. Chứng minh: (a) $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$. (b) $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$. (c) $AM \cdot AN = \dfrac{AH^3}{BC}$. (d) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BN}{CM}$. (e) $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$. (f) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.*

160 ([Kiê21], VD4, p. 12). *Cho ΔABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH, K là giao điểm của EF, OI biết $BC = 2a$. Chứng minh: (a) $\Delta IEO, \Delta IFO$ là 2 tam giác vuông. (b) OI là trung trực của EF. (c) $AH^2 = 4IK \cdot IO$. (d) $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$. (e) $\dfrac{EF}{BC} \cdot \dfrac{FD}{CA} \cdot \dfrac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$. (f) $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$. (g) $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$. (h) $\tan B \tan C = \dfrac{AD}{DH}$. (i) Giả sử $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính S_{ABC} theo a. (j) Gọi M là điểm trên AH sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Chứng minh $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC} S_{BHC}}$.*

161 ([Kiê21], VD5, p. 14). *Cho ΔABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. (b) Công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. (d) $S = \dfrac{1}{2}ab \sin C = \dfrac{1}{2}bc \sin A = \dfrac{1}{2}ca \sin B$. (e) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

162 ([Kiê21], VD6, p. 16). *Cho ΔABC với 3 đỉnh A, B, C & 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là a, b, c. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Chứng minh: (a) $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$. (b) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$. (c) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. (d) $AD = \dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$.*

163 ([Kiê21], VD7, p. 19). *Cho ΔABC cân, $\widehat{A} = 20^\circ$, $AB = AC$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.*

164 ([Kiê21], VD8, p. 20). *Tính $\sin 22^\circ 30', \cos 22^\circ 30', \tan 22^\circ 30', \cot 22^\circ 30'$.*

165 ([Kiê21], VD9, p. 20). *Cho ΔABC. Chứng minh $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$.*

166 ([Kiê21], VD10, p. 21). *Chứng minh $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.*

167 ([Kiê21], VD11, p. 22). *Chứng minh $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.*

168 ([Kiê21], VD12, p. 22). *Chứng minh $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.*

169 ([Kiê21], VD13, p. 23). *Chứng minh hệ thức: (a) $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$. (b) $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$.*

170 ([Kiê21], VD14, p. 23). *Cho ΔABC, có $\widehat{A} = 60^\circ$ & đường phân giác AD. Chứng minh $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.*

171 ([Kiê21], VD15, p. 24). *Chứng minh trong ΔABC, $\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $\widehat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

172 ([Kiê21], VD16, p. 24). *Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.*

173 ([Kiê21], VD17, p. 25). *Cho ΔABC. Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ B, C vuông góc với nhau khi & chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.*

174 ([Kiê21], VD18, p. 25). *Cho ΔABC. Trung tuyến AD, đường cao BH, & phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.*

175 ([Kiê21], VD19, p. 26). *Cho ΔABC thỏa $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.*

176 ([Kiê21], VD20, p. 26). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AH} = 1$. Xác định 3 cạnh của tam giác.*

177 ([Kiê21], VD21, p. 26). *Cho ΔABC thỏa mãn $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180^\circ$. Chứng minh $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.*

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Kiê21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9*. Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.

[Sơn+20] Nguyễn Ngọc Sơn, Trần Văn Tình, Lê Hải Trung, and Quách Thị Nhuần. *Luyện Thi Vào Lớp 10 Môn Toán Chuyên Đề Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác Vuông*. Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 214.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.