

Problem: System of 1st-Order Equations – Bài Tập: Hệ Phương Trình Bậc Nhất

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: System of 1st-Order Equations – Bài Tập: Hệ Phương Trình Bậc Nhất $Ax = b$.*
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/problem/NQBH_system_1st_order_equations_problem.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/problem/NQBH_system_1st_order_equations_problem.tex.
- *Problem & Solution: Cylinder, Cone, Sphere – Bài Tập & Lời Giải: Hình Trụ, Hình Nón, Hình Cầu.*
- *Problem & Solution: System of 1st-Order Equations – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình Bậc Nhất $Ax = b$.*
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/solution/NQBH_system_1st_order_equations_solution.pdf.
TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/system_1st_order_equations/solution/NQBH_system_1st_order_equations_solution.tex.

Mục lục

1	Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn	1
2	1st-Order Equations of 2 Unknowns – Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn	2
3	Diophantine Equation – Phương Trình Nghiệm Nguyên	4
4	System of 1st-Order Equations of 2 Unknowns – Hệ Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn	5
5	Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Hệ Phương Trình	18
6	Hệ Phương Trình Dạng Đặc Biệt	20
6.1	Hệ phương trình đối xứng loại I	20
6.2	Hệ phương trình đối xứng loại II	21
6.3	Hệ có yếu tố đẳng cấp	21
6.4	Phương pháp biến đổi tương đương	21
6.5	Phương pháp đặt ẩn phụ	22
6.6	Phương pháp đưa về hằng đẳng thức	22
6.7	Hệ phương trình có chứa phương trình bậc 2	22
6.8	Phương pháp đánh giá	22
7	Miscellaneous	22
	Tài liệu	23

1 Phương Trình Quy Về Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn

[1] Phương trình tích các phương trình bậc nhất: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thỏa $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$:
 $\prod_{i=1}^n a_i x + b_i = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2) \cdots (a_n x + b_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 x + b_1 = 0 \vee a_2 x + b_2 = 0 \vee \cdots \vee a_n x + b_n = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b_1}{a_1} \vee x = -\frac{b_2}{a_2} \vee \cdots \vee x = -\frac{b_n}{a_n} \Leftrightarrow S = \left\{ -\frac{b_i}{a_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}$. [2] Đặt ẩn phụ thích hợp để quy phương trình (bậc cao, phân thức, vô tỷ,

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

...) ban đầu về phương trình trung gian có dạng phương trình bậc nhất hoặc phương trình tích các phương trình bậc nhất đối với ẩn phụ để giải.

[Thá+24, §1, pp. 5–11]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

- *Problem: 1st-Order Function – Bài Tập: Hàm Số Bậc Nhất* $y = ax + b, a \neq 0$.

URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/1st_order_function/problem/NQBH_1st_order_function_problem.pdf.

- *Problem & Solution: 1st-Order Function – Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số Bậc Nhất* $y = ax + b, a \neq 0$.

URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_8/1st_order_function/solution/NQBH_1st_order_function_solution.pdf.

2 1st-Order Equations of 2 Unknowns – Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

[1] Phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y : $ax + by = c$ (1), 3 hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$.¹ [2] $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow (x_0, y_0) \in S \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$. [3] Tập nghiệm S biểu diễn bởi đường thẳng $(d) : ax + by = c$, i.e., $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c\} = (d)$. [4] Nếu $ab \neq 0$ thì $(d) : ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (hàm số bậc nhất ẩn x) là đường thẳng cắt cả 2 trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại 2 điểm $(\frac{c}{a}, 0), (0, \frac{c}{b})$, $S = \{(x, -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}) | x \in \mathbb{R}\}$ với nghiệm tổng quát của phương trình: $(t, -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b})$, $t \in \mathbb{R}$. [5] Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì $(d) : ax = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{a}$ là đường thẳng song song nếu $c \neq 0$ hoặc trùng với trục tung Oy nếu $c = 0$, $S = \{(\frac{c}{a}, y) | y \in \mathbb{R}\}$. [6] Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì $(d) : by = c \Leftrightarrow y = \frac{c}{b}$ là đường thẳng song song nếu $c \neq 0$ hoặc trùng với trục hoành Ox nếu $c = 0$, $S = \{(x, \frac{c}{b}) | x \in \mathbb{R}\}$. [7] Khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $ax + by = c$: $h = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. [8] Phương trình đường thẳng (d) có dạng tổng quát: $ax + by = c, a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$. (a) Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ cho trước & song song hoặc trùng với đường thẳng $y = ax$ cho trước là: $y - y_0 = a(x - x_0)$ hay $y = a(x - x_0) + y_0$. (b) Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cho trước $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$: $\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$. Quy ước: mẫu bằng 0 thì tử bằng 0. (c) Phương trình đường thẳng cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $m \in \mathbb{R}^*$, cắt trục tung tại điểm có tung độ $n \in \mathbb{R}^*$: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

1 ([BBN23], VD1, p. 8). Cho phương trình $2x - y = 6$. (a) Tìm công thức nghiệm tổng quát của phương trình. (b) Vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm.

2 ([BBN23], VD2, p. 9). (a) Cho phương trình $ax + 2y = 4$. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để đường thẳng (d) biểu diễn tập nghiệm của phương trình đi qua điểm $A(1, 1.5)$. (b) Vẽ 2 đường thẳng $(d), (t) : -2x + y = -3$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng.

3 ([BBN23], VD3, p. 9). (a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x - 3y = 6$. (b) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $2x + 5y = 9$.

4 ([BBN23], 1.1., p. 10). Trong các cặp số $(0, 3), (2, 1), (1.5, -2), (4, -6), (-2, 0)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình: (a) $2x - 5y = -1$. (b) $3x + 4y = -6$.

5 ([BBN23], 1.2., p. 10). Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để: (a) Điểm $A(0, -3)$ thuộc đường thẳng $2x + by = -6$. (b) Điểm $B(-2, 1)$ thuộc đường thẳng $ax + 4y = 8$. (c) Điểm $C(2.5, 0)$ thuộc đường thẳng $ax - 5y = 7.5$. (d) Điểm $D(2, -4)$ thuộc đường thẳng $5x + by = -4$.

6 ([BBN23], 1.3., p. 10). Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: (a) $3x - 5y = 15$. (b) $5x + 0y = -4$. (c) $0x + 9y = 27$. Vẽ 3 đường thẳng biểu diễn 3 tập nghiệm & nhận xét.

7 ([BBN23], 1.4., p. 10). Tìm nghiệm tổng quát của phương trình: (a) $2x + y = -6$. (b) $x - 2y = 2$. Vẽ 2 đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của 2 phương trình trên cùng 1 hệ trục tọa độ. Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng.

8 ([BBN23], 1.5., p. 11). Tìm nghiệm nguyên của phương trình: (a) $x + 2y = 0$. (b) $3x - y = 0$. (c) $2x - 5y = 10$. (d) $7x + 4y = 13$.

9 ([BBN23], 1.6., p. 11). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: (a) $5x + 3y - 13 = 0$. (b) $28x + 31y = 273$.

10 ([BBN23], 1.7., p. 11). Cho đường thẳng $(d) : (a - 2)x + (2a + 3)y - a - 5 = 0$. (a) Tìm a để (d) song song với trục hoành. (b) Tìm a để (d) song song với trục tung. (c) Tìm a để (d) đi qua điểm $A(-3, 5)$. (d) Tìm điểm cố định mà (d) luôn đi qua $\forall a \in \mathbb{R}$.

11 ([BBN23], 1.8., p. 11). Cho 2 đường thẳng $(d_1) : ax - 4y = 8, (d_2) : 5x - 10y = b - 5$. (a) Tính $2016a + 100b$ khi $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại $A(2, -3)$. (b) Tính $10a - 3b$ khi 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$ có vô số điểm chung.

¹ $(a, b) \neq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$.

12 ([BBN23], 1.9., p. 11). Trên 1 đoạn đường phố thẳng dài 100 m 1 đội công nhân lắp đường ống dẫn nước. Có 2 loại ống, 1 loại dài 3 m, 1 loại dài 5 m. Hỏi có bao nhiêu các lắp các ống nước trên đoạn đường đó (các mối nối không đáng kể)?

13 ([BBN23], p. 12). 1 người bán hàng phải trả lại cho khách 45000 đồng. Người đó chỉ có 1 tờ 10000 đồng đã trả lại cho khách hàng, còn lại chỉ có 2 loại tiền lẻ là 2000 đồng & 5000 đồng. Cho biết người bán hàng sẽ có các cách nào trả lại tiếp cho khách hàng đúng số tiền trên?

14 ([BBN23], p. 12). Chứng minh khoảng cách h từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $ax + by = c$ được cho bởi công thức $h = OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ với H là hình chiếu của O lên đường thẳng.

15 ([BBN23], p. 12, Điều kiện để phương trình bậc nhất 2 ẩn có nghiệm nguyên). Chứng minh phương trình $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, có nghiệm nguyên khi & chỉ khi $c : \text{UCLN}(a, b)$.

Định nghĩa 1 (Điểm nguyên). Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là điểm nguyên nếu $x, y \in \mathbb{Z}$.

16 ([BBN23], p. 12). Tìm tất cả các điểm nguyên trên đường thẳng $4x - 5y + 6 = 0$, nằm giữa 2 đường thẳng: (a) $x = -10, x = 20$. (b) $x = a, x = b$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

17 ([Tuy23], VD20, p. 44). Cho đường thẳng $(d) : (m + 1)x + (m - 4)y = 6$. (a) Khi $m = 2$, vẽ đồ thị (d) . Viết công thức tổng quát nghiệm của phương trình & tìm nghiệm nguyên của nó. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $(d) \parallel Oy$. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để khoảng cách h từ gốc O đến (d) lớn nhất.

18 ([Tuy23], 126., p. 46). Cho 2 đường thẳng $(d_1) : 3x - 2y = m + 3, (d_2) : (m - 5)x + 3y = 6$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (d_1) cắt (d_2) . (b) Chứng minh $\forall m \in \mathbb{R}$ thì $(d_1), (d_2)$ là 2 đường thẳng phân biệt.

19 ([Tuy23], 127., p. 46). Cho đường thẳng $(d) : (2m - 1)x + (m - 2)y = m^2 - 3$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để: (a) (d) đi qua gốc tọa độ. (b) (d) đi qua điểm $A(3, 5)$. (c) (d) cắt mỗi trục tọa độ tại 1 điểm khác gốc. (d) (d) song song với 1 trong 2 trục tọa độ.

20 ([Tuy23], 128., p. 46). Cho đường tròn có tâm là gốc tọa độ O bán kính 1 & đường thẳng (d) có phương trình $3x - 4y = m^2 - m + 3$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn. (b) Tính GTNN của khoảng cách từ O đến đường thẳng (d) .

21 ([Tuy23], 129., p. 47). Cho 2 đường thẳng $(d_1) : (4m - 3)x + (m - 2)y = m + 1, m \neq 2, (d_2) : -2x + 3y = 5$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $(d_1) \perp (d_2)$.

22 ([Tuy23], 130., p. 47). Cho các đường thẳng $(d_1) : mx + 9y = -3, (d_2) : 4x + my = n$. Đếm số cặp $(m, n) \in \mathbb{R}^2$ để (d_1) trùng (d_2) .

23 ([Tuy23], 131., p. 47). Dùng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình: (a) $|x + 1| + |x - 1| = m$. (b) $|x - a| + |x - b| = m$. (c) $\sum_{i=1}^n b_i |x - a_i| = m$ với $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$.

24 ([Tuy23], 132., p. 47). Cho đường thẳng $(d) : 3x + 4y = 21$. (a) Viết công thức tổng quát nghiệm của phương trình. (b) Tìm các điểm trên đường thẳng (d) có tọa độ nguyên & nằm trong góc phần tư thứ I).

25 ([Bin23], VD66, p. 5). Cho đường thẳng: $d : (m - 2)x + (m - 1)y = 1$ với tham số m . (a) Chứng minh đường thẳng d luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi giá trị của m . (b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d lớn nhất.

26 ([Bin23], VD67, p. 6). Tìm các điểm thuộc đường thẳng $3x - 5y = 8$ có tọa độ là các số nguyên & nằm trên dải song song tạo bởi 2 đường thẳng $y = 10, y = 20$.

27 ([Bin23], 198., p. 8). Xét các đường thẳng d có phương trình: $(2m + 3)x + (m + 5)y + 4m - 1 = 0$ với tham số m . (a) Vẽ đường thẳng d ứng với $m = -1$. (b) Tìm điểm cố định mà mọi đường thẳng d đều đi qua.

28 ([Bin23], 199., p. 8). Tìm các giá trị của b, c để các đường thẳng $4x + by + c = 0, cx - 3y + 9 = 0$ trùng nhau.

29 ([Bin23], 200., p. 8). Vẽ đồ thị biểu diễn tập nghiệm của phương trình $x^2 - 2xy + y^2 = 1$.

30 ([Bin23], 201., p. 8). Đường thẳng $ax + by = 6$ với $a > 0, b > 0$, tạo với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích bằng 9. Tính ab .

31 ([Bin23], 202., p. 8). Cho đường thẳng $d : (m + 2)x - my = -1$ với tham số m . (a) Tìm điểm cố định mà d luôn đi qua. (b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d lớn nhất.

32 ([Bin23], 203., p. 8). Trong hệ trục tọa độ Oxy , $A(1, 1), B(9, 1)$. Viết phương trình của đường thẳng $d \perp AB$ & chia ΔOAB thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

33 ([Bin23], 204., p. 8). Tìm các điểm nằm trên đường thẳng $8x + 9y = -79$, có hoành độ & tung độ là các số nguyên & nằm bên trong góc vuông phần tư III.

34 ([Bin23], 205., p. 8). Cho 2 điểm $A(3, 17), B(33, 193)$. (a) Viết phương trình của đường thẳng AB . (b) Có bao nhiêu điểm thuộc đoạn thẳng AB & có hoành độ & tung độ là các số nguyên?

- 35 ([Bin23], 206., p. 8). (a) Vẽ đồ thị hàm số (d) : $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$. (b) Có bao nhiêu điểm nguyên nằm trên cạnh hoặc nằm trong tam giác tạo bởi 3 đường thẳng $x = 6, y = 0, (d)$.
- 36 ([BNS23], VD10.1, p. 52). Giải & biện luận phương trình $(m - 1)x + my = m + 3$.
- 37 ([BNS23], VD10.2, p. 52). Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $x - y + 1 = 0$ thỏa mãn đẳng thức $y^2 - y\sqrt{x} - 2x = 0$.
- 38 ([BNS23], VD10.3, pp. 52-53). Xét phương trình $ax + by = c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$. Đặt $d = \text{ƯCLN}(a, b)$. Chứng minh: (a) Phương trình $ax + by = c$ có nghiệm nguyên $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ khi & chỉ khi $c : d$. (b) Nếu biết 1 nghiệm nguyên $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ thì phương trình $ax + by = c$ giải được hoàn toàn.
- 39 ([BNS23], VD10.4, p. 53). Giải phương trình $11x + 7y = 5$ trong \mathbb{Z} .
- 40 ([BNS23], VD10.5, p. 54). Đếm số bộ $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ thỏa phương trình: $x + y + z = 2012$. (b) $x + y + z = a \in \mathbb{N}$.
- 41 ([BNS23], 10.1., p. 55). Giải phương trình $5x - 7y = 1$.
- 42 ([BNS23], 10.2., p. 55). Giải & biện luận phương trình $mx + (3m - 2)y = 2m + 1$.
- 43 ([BNS23], 10.3., p. 55). Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $x - y + 1 = 0$ thỏa đẳng thức $(y - 1)^2 + 2(y - 1)\sqrt{x} - 3x = 0$.
- 44 ([BNS23], 10.4., p. 55). Giải phương trình $123x - 5y = 0$ trong \mathbb{Z} .
- 45 ([BNS23], 10.5., p. 55). Cho phương trình $3x + my = m + 2$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để phương trình: (a) Nhận cặp $(3, 5)$ làm 1 nghiệm. (b) Nhận cặp $(\frac{5}{3}, 0)$ làm nghiệm.
- 46 ([BNS23], 10.6., p. 55). Đếm số cặp $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ với $x \geq 12, y \geq 17$ thỏa phương trình $x + y = 100$.
- 47 ([BNS23], 10.7., p. 55). Đếm số bộ $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ với $x \geq 1, y \geq 7, z \geq 0$ thỏa phương trình $x + y + z = 2012$.
- 48 ([BNS23], 10.8., p. 55). Chứng minh tổng số các nghiệm tự nhiên của các phương trình $x + 2y = n, 2x + 3y = n - 1, \dots, nx + (n + 1)y = 1, (n + 1)x + (n + 2)y = 0$ đúng bằng $n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 49 ([BNS23], 10.9., p. 55). Chứng minh tổng số nghiệm tự nhiên của các phương trình $x + 4y = 3n - 1, 4x + 9y = 5n - 4, 9x + 16y = 7n - 9, \dots, n^2x + (n + 1)^2y = n(n + 1)$ đúng bằng $n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3 Diophantine Equation – Phương Trình Nghiệm Nguyên

Định lý 1 (Nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất 2 ẩn). Phương trình $ax + by = c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (0, 0)$ có nghiệm nguyên khi & chỉ khi $c : \text{ƯCLN}(a, b)$.

50 ([Tuy23], VD21, p. 48). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $35x + 20y = 600$.

51 ([Tuy23], VD22, p. 48). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $7x + 4y = 23$.

Định lý 2 (Phương pháp tìm 1 nghiệm riêng). Nếu $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ là 1 nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, ab \neq 0$ thì phương trình có vô số nghiệm nguyên & mọi nghiệm nguyên của nó đều có thể biểu diễn dưới dạng $(x, y) = (x_0 + bt, y_0 - at)$ với $t \in \mathbb{Z}$, i.e., $S = \{(x_0 + bt, y_0 - at) | t \in \mathbb{Z}\}$.

Cặp số nguyên (x_0, y_0) gọi là 1 nghiệm riêng. Theo định lý, để tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, ab \neq 0$, chỉ cần tìm ra 1 nghiệm riêng của phương trình. Trong trường hợp đơn giản ta có thể tính nhẩm nghiệm riêng này bằng cách thử chọn. Có nhiều công thức cùng biểu thị tập hợp các nghiệm nguyên của 1 phương trình bậc nhất 2 ẩn, tùy theo nghiệm riêng đã tìm được.

52 ([Tuy23], VD23, p. 50). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $5x - 3y = 2$.

Định nghĩa 2 (Phương trình đa thức). Phương trình có dạng $f(x, y, z, \dots) = 0$ trong đó $f(x, y, z, \dots) \in \mathbb{R}[x, y, z, \dots]$ là đa thức của các biến x, y, z, \dots gọi là phương trình đa thức.

53 ([Tuy23], VD24, p. 4). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x + y + xy = 4$.

Định nghĩa 3 (Phương trình ước số). Phương trình có dạng $\prod_{i=1}^n (a_i x_i + b_i) = (a_1 x_1 + b_1)(a_2 x_2 + b_2) \cdots (a_n x_n + b_n) = a$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a, a_i, b_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ gọi là phương trình ước số với n biến x_1, x_2, \dots, x_n .

54 ([Tuy23], VD25, p. 52). Chứng minh phương trình $4x^2 + 4x = 8y^3 - 2z^2 + 4$ không có nghiệm nguyên.

55 ([Tuy23], VD26, p. 52). Tìm nghiệm nguyên dương & nghiệm nguyên của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

1 số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên: Phương pháp phát hiện tính chia hết của 1 ẩn. Phương pháp tách ra các giá trị nguyên. Phương pháp tìm 1 nghiệm riêng. Phương pháp đưa về phương trình ước số. Phương pháp xét số dư từng vế. Phương pháp dùng bất đẳng thức. See [Bin21].

- 56 ([Tuy23], 133., p. 53). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $18x - 30y = 59$.
- 57 ([Tuy23], 134., p. 53). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $22x - 5y = 77$.
- 58 ([Tuy23], 135., p. 54). Cho phương trình $12x + 19y = 94$. (a) Tìm các nghiệm nguyên. (b) Tìm các nghiệm nguyên dương.
- 59 ([Tuy23], 136., p. 54). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: (a) $13x + 3y = 50$. (b) $21x + 31y = 280$.
- 60 ([Tuy23], 137., p. 54). Cho phương trình $ax + by = ab$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$. Phương trình có nghiệm nguyên dương không?
- 61 ([Tuy23], 138., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x + 10y = m^2 - 1$ với $m \in \mathbb{Z}$.
- 62 ([Tuy23], 139., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $4x + 6y - 5z = 10$.
- 63 ([Tuy23], 140., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2y^3 + 3x^2 - 10y^3 = -2$.
- 64 ([Tuy23], 141., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $7(x - 1) + 3y = 2xy$.
- 65 ([Tuy23], 142., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2xy + 2y^2 - 10yz + 25z^2 = 567$.
- 66 ([Tuy23], 143., p. 54). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 1$.
- 67 ([Tuy23], 144., p. 54). Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.
- 68 ([Tuy23], 145., p. 54). Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $\sqrt{199 - x^2 - 2x} + 2$ là 1 số chính phương chẵn.
- 69 ([Tuy23], 146., p. 54). 1 người bán hàng cần phải trả lại cho khách 25000 đồng mà chỉ còn 2 loại tiền lẻ là 2000, 5000. Có các cách nào để trả lại cho khách hàng đúng số tiền trên?
- 70 ([Tuy23], 147., p. 54). 2 đội thi đấu cờ với nhau. Mỗi đấu thủ của đội này phải đấu 1 ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết tổng số ván cờ đã đấu bằng bình phương số đấu thủ của đội thứ nhất cộng với 2 lần số đấu thủ của đội thứ 2. Tính số người mỗi đội.

4 System of 1st-Order Equations of 2 Unknowns – Hệ Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

[1] Phương pháp hình học: Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn: $a, b, a', b' \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0), (a', b') \neq (0, 0)$,²

$$\begin{cases} ax + by = c, & (d) \\ a'x + b'y = c', & (d') \end{cases} \quad (1)$$

có 1 nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (d)$ cắt $(d') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, vô nghiệm $\Leftrightarrow S = \emptyset \Leftrightarrow (d) \parallel (d') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d) \equiv (d') \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, $S = (d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c\}$, $(d) \perp (d') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$. [2] Phương pháp thế: Biểu diễn 1 ẩn theo ẩn kia. Biến hệ phương trình thành hệ mới có 1 phương trình 1 ẩn. Giải phương trình 1 ẩn rồi suy ra nghiệm của hệ. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $b \neq 0$. Rút y từ phương trình thứ nhất & thế vào phương trình thứ 2:

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \\ a'x + b' \left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right) = c', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \\ (ab' - a'b)x = b'c - bc'. \end{cases}$$

Giải & biện luận: (i) Nếu $ab' - a'b \neq 0$ thì hệ phương trình có đúng 1 nghiệm $(x, y) = \left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \frac{c'a - ca'}{ab' - a'b} \right)$. (ii) Nếu

$ab' - a'b = 0, cb' - c'b \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm. (iii) Nếu $ab' - a'b = cb' - c'b = 0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm thỏa $ax + by = c$. Điều kiện $ab' - a'b = 0, cb' - c'b \neq 0$ tương đương với điều kiện $ab' - a'b = 0, ca' - c'a \neq 0$. Điều kiện $ab' - a'b = cb' - c'b = 0$ thường được viết thành $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ nếu $a'b'c' \neq 0$, & $ac' - a'c = 0$. [3] Phương pháp cộng đại số: Nhân 2 vế của 2 phương trình với 1 số thích hợp để các hệ số của 1 ẩn nào đó trong 2 phương trình bằng nhau hoặc đối nhau. Dùng quy tắc cộng được hệ mới có 1 phương trình 1 ẩn. Giải phương trình 1 ẩn rồi suy ra nghiệm của hệ. Vì $b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = cb' - c'b, a'(ax + by) - a(a'x + b'y) = ca' - c'a$ nên $(ab' - a'b)x = cb' - c'b, (ab' - a'b)y = ac' - a'c$, nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (ab' - a'b)x = cb' - c'b, \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c. \end{cases}$$

² $(a, b) \neq (0, 0), (a', b') \neq (0, 0) \Leftrightarrow (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) \neq 0$.

Giải & biện luận hệ này tương tự. [4] *Giải hệ phương trình bằng phương pháp định thức/Cramer*: Đặt $D = ab' - a'b, D_x = b'c - bc', D_y = c'a - ca'$. Nếu $D \neq 0$, hệ (1) có 1 nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \frac{c'a - ca'}{ab' - a'b}\right)$. Nếu $D = 0, (D_x, D_y) \neq (0, 0)$, hệ (1) vô nghiệm. Nếu $D = D_x = D_y = 0$, hệ (1) có vô số nghiệm. Biểu thức $pq' - p'q$ gọi là 1 *định thức cấp 2*. Phương pháp định thức rất có lợi trong việc giải & biện luận hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn. [5] Khái niệm hệ 2 phương trình còn được mở rộng thành *hệ phương trình tuyến tính* (linear system) $n \in \mathbb{N}^*$ ẩn có dạng $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ với $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: ma trận, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$: vector, bao gồm n phương trình bậc nhất n ẩn. Hệ phương trình tuyến tính là 1 trong các đối tượng nghiên cứu cơ bản của *Đại Số Tuyến Tính* (Linear Algebra).

[Thá+24, §2, pp. 12–18]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. [Thá+24, §3, pp. 19–25]: HD1. LT1. LT2. LT3. HD2. LT4. HD3. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

71 (Program: Solve system of linear equations with 2 unknowns). *Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn (1).*

- **Input**: 6 hệ số $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ được nhập từ bàn phím.
- **Output**: Số nghiệm của hệ phương trình: 0: vô nghiệm. 1: duy nhất 1 nghiệm, xuất ra nghiệm này với định dạng (x0,y0). Infinity: vô số nghiệm, xuất ra phương trình đường thẳng chứa tất cả các nghiệm này với định dạng $Ax + By = C$.

72 (Program: Solve system of linear equations with 3 unknowns). *Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

- **Input**: 12 hệ số $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$ được nhập từ bàn phím.
- **Output**: Số nghiệm của hệ phương trình: 0: vô nghiệm. 1: duy nhất 1 nghiệm, xuất ra nghiệm này với định dạng (x0,y0,z0). Infinity: vô số nghiệm, xuất ra phương trình đường thẳng chứa tất cả các nghiệm này với định dạng $Ax + By + Cz = D$.

73 ([BBN23], H1, p. 14). *Doán số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 2 - 3x. \end{cases}$$

74 ([BBN23], H2, p. 14). *Doán số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 4x + 4y = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 5, \\ -4x + 4y = -20. \end{cases}$$

75 ([BBN23], H3, p. 14). *Biện luận theo 2 tham số $a, b \in \mathbb{R}$ số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} ax - 3y = b, \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$$

76 ([BBN23], H4, p. 14). *Biện luận theo 2 tham số $m, n \in \mathbb{R}$ số nghiệm của hệ phương trình:*

$$\begin{cases} y = mx - 4, \\ y = -3x + n. \end{cases} \quad \begin{cases} mx - y = 6, \\ x - \frac{1}{3}y = n. \end{cases}$$

77 ([BBN23], H5, p. 14). Đ/S? Nếu sai, sửa cho đúng. (a) 2 hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn vô nghiệm thì tương đương với nhau. (b) 2 hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn cùng có vô số nghiệm thì tương đương với nhau.

78 ([BBN23], VD1, p. 15). *Cho 2 hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x + 2y = m, \\ x + y = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2, \\ mx - 4y = 12. \end{cases}$$

(a) Chứng minh với $m = 4$ thì 2 hệ tương đương với nhau. (b) Chứng minh với $m = 2$ thì 2 hệ không tương đương với nhau. (c) Tìm tất cả $m \in \mathbb{R}$ để 2 hệ tương đương với nhau.

79 ([BBN23], VD2, p. 15). *Cho 2 hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ -x + 3y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} mx - y = 4, \\ 2x + ny = 16. \end{cases}$$

(a) Tìm nghiệm của hệ 1 bằng cách vẽ đồ thị của 2 đường thẳng trong hệ. (b) Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ để 2 hệ tương đương với nhau.

80 ([BBN23], VD3, p. 16).

$$\begin{cases} 2x = 4, \\ -3x + 4y = -2. \end{cases}$$

(a) Đoán số nghiệm của hệ. (b) Tìm tập nghiệm của hệ bằng phương pháp đồ thị. (c) Vẽ thêm đường thẳng $x + 2y = 4$ trên cùng hệ trục tọa độ. Nhận xét về nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -3x + 4y = -2. \end{cases}$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế để kiểm tra.

81 ([BBN23], VD4, p. 17). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 1, \\ (m^2 + 2)x - 6y = 3m, \end{cases}$$

trong các trường hợp: (a) $m = -1$. (b) $m = 0$. (c) $m = 1$. (d) $m \in \mathbb{R}$.

82 ([BBN23], VD5, p. 17). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + \sqrt{2}y = 2, \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases}$$

(a) Bằng phương pháp thế. (b) Bằng phương pháp cộng đại số.

83 ([BBN23], VD6, p. 18). Cho 2 hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{1}{2}, \\ 0.25x + 0.5y = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}ax + \sqrt{3}by = 5, \\ -\sqrt{3}ax + \sqrt{2}by = 5\sqrt{6}. \end{cases}$$

(a) Giải hệ 1 bằng phương pháp cộng đại số. (b) Biết 2 hệ tương đương với nhau. Tìm a, b .

84 ([BBN23], VD7, p. 19). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{2}{2x+1} - \frac{5}{2y-1} = 8, \\ \frac{3}{2x+1} - \frac{2}{2y-1} = 1. \end{cases}$$

85 ([BBN23], VD8, p. 19). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} |x+2| + |y-1| = 4, \\ |x+2| - y = 1. \end{cases}$$

86 ([BBN23], 2.1., p. 20). Không cần vẽ hình, cho biết số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -5x + 8, \\ y = 3x - 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 1.2x + 5.4y = 15, \\ 1.2x + 5.4y = -7. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 10, \\ x - \frac{1}{5}y = 2. \end{cases}$$

87 ([BBN23], 2.2., p. 20).

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

(a) Tìm tập nghiệm của hệ 1 bằng phương pháp đồ thị. (b) Nghiệm của hệ 1 có phải là nghiệm của phương trình $2.5x - 3y = -4$ hay không? (c) Liệu hệ 1 có tương đương với hệ

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0, \\ x - 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

88 ([BBN23], 2.3., p. 20). Cho 2 hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ -x + y = -3. \end{cases} \quad \begin{cases} mx - ny = 8, \\ 2mx + 3ny = 26. \end{cases}$$

(a) Tìm nghiệm của hệ 1 bằng phương pháp đồ thị. (b) Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ để 2 hệ tương đương với nhau.

89 ([BBN23], 2.4., p. 20). Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế:

$$\begin{cases} 2x - y = 10, \\ 4x + 5y = -8. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 4, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

90 ([BBN23], 2.5., p. 20). Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số:

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 1.5y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3y = 11, \\ 4x - 6y = 14. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - \frac{2y}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{12}, \\ x - (\sqrt{2} - 1)y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

91 ([BBN23], 2.6., p. 20). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{5x + 3}{9} + \frac{4x - y}{3} = 4, \\ \frac{2x - 5y}{6} - \frac{2x - 4y}{3} = 2. \end{cases}$$

92 ([BBN23], 2.7., p. 20). Tìm $a, b \in \mathbb{R}$ để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua 2 điểm $A(3, -4), B(-1, 4)$.

93 ([BBN23], 2.8., p. 21). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{10}{x + 3y} + \frac{7}{x - 3y} = 3, \\ \frac{15}{x + 3y} - \frac{14}{x - 3y} = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 2\sqrt{x - 2} - 5\sqrt{y + 1} = -4, \\ \sqrt{x - 2} + 3\sqrt{y + 1} = 9. \end{cases} \quad \begin{cases} (x + 2)^2 - 2(y - 1)^3 = 25, \\ 3(x + 2)^2 + 5(y - 1)^3 = -13. \end{cases}$$

94 ([BBN23], 2.9., p. 21). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1.5|x - 1| - 2|y + 2| = -3, \\ \frac{|x - 1|}{4} + \frac{|y + 2|}{6} = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 3, \\ |x - y| + |x + 4y - 5| = 7. \end{cases}$$

95 ([BBN23], 2.10., p. 21). Biết 1 đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bằng đa thức 0 khi & chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng 0. Tìm các giá trị của $a, b \in \mathbb{R}$ để đa thức $P(x) = (\sqrt{a - 1} + 3\sqrt{b - 2} - 9)x + 2\sqrt{a - 1} - 5\sqrt{b - 2} + 4$ bằng đa thức 0.

96 ([BBN23], 2.11., p. 21).

$$\begin{cases} x - my = 3, \\ mx - 9y = 2m - 3. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $m = 1$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất, đồng thời thỏa mãn điều kiện $x > y$.

Định lý 3 (Bézout). Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$, i.e., $f(a)$.

Hệ quả 1. Đa thức $f(x) : x - a$ khi & chỉ khi $f(a) = 0$.

$$\text{i.e., } f(x) : x - a \Leftrightarrow f(a) = 0, \forall f \in \mathbb{R}[x].$$

97 ([BBN23], VD1, p. 22). Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho đa thức $f(x) = mx^3 + (2m - 1)x^2 - (m + 2n - 3)x + 4n : x^2 - 1$.

98 ([BBN23], VD2, p. 22). Tìm $m, n \in \mathbb{R}$ sao cho đa thức $f(x) = mx^3 + (m - 3)x^2 - (2m + n - 4)x - (m + 5n - 2) : (x - 1)(x + 2)$.

99 ([BBN23], VD, p. 23). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ 2x - 3y + 4z = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = 5, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{4}{z} = -8, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = -3. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 5, \\ y + z + t = 9, \\ z + t + x = 7, \\ t + x + y = 24. \end{cases} \quad \begin{cases} 4(x + y) = 3xy, \\ 12(y + z) = 5yz, \\ 3(z + x) = 2zx. \end{cases}$$

100 ([BBN23], VD, p. 24). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2.5xy, \\ x - y = 0.25xy. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$$

101 ([Tuy23], VD27, p. 56).

$$\begin{cases} ax + by = 3, \\ bx + ay = 3. \end{cases}$$

với $a, b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$. (a) Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất. (b) Tìm $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ để hệ có nghiệm nguyên dương.

102 ([Tuy23], 148., p. 56). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình sau: (a) Vô nghiệm. (b) Vô số nghiệm.

$$\begin{cases} x - my = m, \\ mx - 9y = m + 6. \end{cases}$$

103 ([Tuy23], 149., p. 57). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để 2 hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 2x - y = 6, \end{cases} \& \begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ x - \frac{1}{2}y = m. \end{cases} \begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 2x + 5y = 9, \end{cases} \& \begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 3x + y = m. \end{cases}$$

104 ([Tuy23], 150., p. 57, [Đôn21], 171., p. 72).

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

(a) Chứng minh với $a = -2$ thì hệ này vô nghiệm. (b) Giải & biện luận hệ phương trình theo tham số $a \in \mathbb{R}$.

105 ([Tuy23], 151., p. 57). Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $A = x - 2y + 3z$ biết $x, y, z \geq 0$ & thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 8, \\ 3x + y - 3z = 2. \end{cases}$$

106 ([Tuy23], 152., p. 57, [BNS23], 11.6, p. 64).

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ bx + cy = a, \\ cx + ay = b, \end{cases}$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Biết hệ phương trình này có nghiệm, chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

107 ([Tuy23], 153., p. 57). Biết mua 3 bút, 7 quyển vở, & 1 tập giấy hết 14500 đồng. Nếu mua 4 bút, 10 quyển vở, & 1 tập giấy thì hết 19500. Tính số tiền để mua 1 bút, 1 quyển vở, & 1 tập giấy.

Giải hệ phương trình:

108 ([Tuy23], VD28, p. 58).

$$\begin{cases} \frac{4x + 5y}{xy} = 2, \\ 20x - 30y + xy = 0. \end{cases}$$

109 ([Tuy23], VD29, p. 59).

$$\begin{cases} 2x - y + z = 12, \\ 3x + 4y - 5z = -17, \\ 8x - 6y - 3z = 42. \end{cases}$$

110 ([Tuy23], VD30, p. 60). Giải phương trình $\sqrt{1 + \sqrt{x}} + \sqrt{7 - \sqrt{x}} = 4$.

Giải hệ phương trình:

111 ([Tuy23], 154., p. 61).

$$\begin{cases} 4[x] + y = 10, \\ x + 3[y] = 9. \end{cases}$$

112 ([Tuy23], 155., p. 61).

$$\begin{cases} x + (m - 1)y = 2, \\ (m + 1)x - y = m + 1. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình khi $m = \frac{1}{2}$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn điều kiện $x > y$.

113 ([Tuy23], 156., p. 61). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - my = 2, \\ mx - 4y = m - 2. \end{cases}$$

114 ([Tuy23], 157., p. 61). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x - 3y = 1, \\ mx + 3y = m^2 + 6. \end{cases}$$

115 ([Tuy23], 158., p. 61). Tìm GTNN của biểu thức $A = (6x - 5y - 16)^2 + x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 2$.

Giải hệ phương trình:

116 ([Tuy23], 159., p. 62).

$$\begin{cases} \frac{5(x-1)}{x+2y} + \frac{3(y+1)}{x-2y} = 8, \\ \frac{20(x-1)}{x+2y} - \frac{7(y+1)}{x-2y} = -6. \end{cases}$$

117 ([Tuy23], 160., p. 62).

$$\begin{cases} 5x + 3y = 31, \\ \sqrt{\frac{x+2}{y-3}} + \sqrt{\frac{y-3}{x+2}} = 2. \end{cases}$$

118 ([Tuy23], 161., p. 62).

$$\begin{cases} (2m+1)x + y = 2m-2, \\ m^2x - y = m^2 - 3m. \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{Z}, m \neq -1$ để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

119 ([Tuy23], 162., p. 62). Cho đường thẳng $(d) : 2(m+2)x - (3m-1)y + 5m - 11 = 0$. Chứng minh khi m thay đổi thì (d) luôn đi qua 1 điểm cố định. Tìm tọa độ điểm đó.

120 ([Tuy23], 163., p. 62). Cho đường thẳng $(d) : (m^2 + 2m + 3)x + (6m^2 + 3m - 2)y + 2m^2 - 5m + 1 = 0$. Khi m thay đổi, (d) có đi qua 1 điểm cố định nào không?

Giải hệ phương trình:

121 ([Tuy23], 164., p. 62).

$$\begin{cases} x - |y - 5| = 8, \\ |x + 1| + 3|y - 5| = 21. \end{cases}$$

122 ([Tuy23], 165., p. 62).

$$\begin{cases} x - 4y = 5, \\ 2|x - 2y| + |x + y - 1| = 7. \end{cases}$$

123 ([Tuy23], 166., p. 62).

$$\begin{cases} 6xy = 5(x+y), \\ 3yz = 2(y+z), \\ 7zx = 10(z+x). \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{6}{5}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{4}{3}, \\ \frac{zx}{z+x} = \frac{12}{7}. \end{cases}$$

124 ([Tuy23], 167., p. 63).

$$\begin{cases} xy - x - y = 5, \\ yz - y - z = 11, \\ zx - z - x = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} x(y-z) = -4, \\ y(z-x) = 9, \\ z(x+y) = 1. \end{cases}$$

125 ([Tuy23], 168., p. 63).

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 - 2x + 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + xz - yz + y^2 = 2, \\ y^2 + xy - yz + z^2 = 0, \\ x^2 - xy - xz - z^2 = 2. \end{cases}$$

126 ([Tuy23], 169., p. 63). Giải phương trình: (a) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{10-2x} = 5$. (b) $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{2-x} = 5$.

127 ([Tuy23], 170., p. 63). Tìm hàm số $f(x)$ biết hàm số này xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ & $f(x) - 2f(-x) = x + 1$.

128 ([Đồn21], 141., p. 60).

$$\begin{cases} 2x + my = 1, \\ mx + 2y = 1. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$. (b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để cho hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

129 ([Đồn21], 142., p. 60).

$$\begin{cases} mx + 4y = 10 - m, \\ x + my = 4. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$. (b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để cho hệ có nghiệm $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

130 ([Đồn21], 143., p. 61).

$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1, \\ 2x - y = m + 5. \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mà $A = x^2 + y^2$ đạt GTNN.

131 ([Đồn21], 144., p. 61).

$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m - 1, \\ mx - y = m^2 - 2. \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mà $P = xy$ đạt GTLN.

132 ([Đồn21], 145., p. 62).

$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my = m + 1. \end{cases}$$

(a) Giải hệ khi $m = -1$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

133 ([Đồn21], 146., p. 62). Giải & biện luận hệ phương trình theo tham số $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1, \\ 2x + my = 3. \end{cases}$$

134 ([Đồn21], 147., p. 62).

$$\begin{cases} x + my = 1, \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases}$$

(a) Giải hệ khi $m = -3$. (b) Giải & biện luận hệ phương trình theo tham số $m \in \mathbb{R}$.

135 ([Đồn21], 148., p. 63).

$$\begin{cases} x + my = 2, \\ mx - 2y = 1. \end{cases}$$

(a) Giải hệ khi $m = 2$. (b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mà $x > 0, y < 0$. (c) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

136 ([Đồn21], 149., p. 64).

$$\begin{cases} 2x + y = m, \\ 3x - 2y = 35. \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mà $x > 0, y < 0$.

137 ([Đồn21], 150., p. 64).

$$\begin{cases} mx - y = 2, \\ 3x + my = 5. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận hệ. (b) Tìm điều của $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn hệ thức $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$.

138 ([Đồnn21], 151., p. 64).

$$\begin{cases} mx + 2my = m + 1, \\ x + (m + 1)y = 2. \end{cases}$$

(a) Chứng minh nếu hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thì điểm $M(x, y)$ luôn thuộc 1 đường thẳng cố định khi m thay đổi. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để M thuộc góc phần tư thứ nhất. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ & bán kính bằng $\sqrt{5}$.

139 ([Đồnn21], 152., p. 65). Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + 4y = m + 2, \\ x + my = m, \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

140 ([Đồnn21], 153., p. 65).

$$\begin{cases} 2x + my = 1, \\ mx + 2y = 1. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$. (b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. (c) Chứng minh khi hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên 1 đường thẳng cố định. (d) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để điểm M thuộc đường tròn có tâm là gốc tọa độ & bán kính bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

141 ([Đồnn21], 154., p. 66). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3, \\ m(x+y) - 2y = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = m + 1, \\ x + y = 2 - m. \end{cases} \quad \begin{cases} x - my = 1, \\ x - y = m. \end{cases}$$

142 ([Đồnn21], 155., p. 66).

$$\begin{cases} -2mx + y = 5, \\ mx + 3y = 1. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình lúc $m = 1$. (b) Giải & biện luận theo tham số $m \in \mathbb{R}$.

143 ([Đồnn21], 156., p. 67).

$$\begin{cases} mx - y = 1, \\ -x + y = -m. \end{cases}$$

(a) Chứng minh khi $m = 1$, hệ phương trình có vô số nghiệm. (b) Giải hệ khi $m \neq 1$.

144 ([Đồnn21], 157., p. 67).

$$\begin{cases} \frac{x-y}{7} + \frac{2x+y}{17} = 7, \\ \frac{4x+y}{5} + \frac{y-7}{19} = 15. \end{cases}$$

145 ([Đồnn21], 158., p. 67).

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 4z = 8, \\ x + 3y + 9z = 27. \end{cases}$$

146 ([Đồnn21], 159., p. 68).

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11, \\ 2x + 3y + z = -2, \\ 3x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

147 ([Đồnn21], 160., p. 68).

$$\begin{cases} \frac{3}{2x+y} + z = 2, \\ 2y - 3z = 4, \\ \frac{2}{2x+y} - y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

148 ([Đồn21], 161., p. 68). Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{2} = 50, \\ 5x+3y+\frac{z}{3} = 100. \end{cases}$$

149 ([Đồn21], 162., p. 69). Tìm nghiệm nguyên, nguyên dương của phương trình $5x+7y=112$.

150 ([Đồn21], 163., p. 69). Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình: (a) $16x-25y=1$. (b) $41x-37y=187$.

151 ([Đồn21], 164., p. 70). Tìm nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình:

$$\begin{cases} x=5y+3, \\ x=11z+7. \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=20, \\ 3x+5y+4z=37. \end{cases}$$

152 ([Đồn21], 165., p. 70). Cần đặt 1 ống nước dài 21 m bằng 2 loại ống: ống dài 2 m & ống dài 3 m. Mỗi loại cần mấy ống?

153 ([Đồn21], 166., p. 71). 1 trường Phổ thông Trung học dùng 100000 đồng để mua 1 số thiệp hoa làm tặng phẩm cho các học sinh giỏi. Trong số thiệp này, loại 2000 đồng/cái ít hơn 10 lần loại 1000 đồng/cái, số thiệp hoa còn lại là loại 5000 đồng/cái. Tính số cái mỗi loại thiệp nhà trường mua.

154 ([Đồn21], 167., p. 71).

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x-3y-5z=-19, \\ 4x+9y+25z=97. \end{cases}$$

155 ([Đồn21], 168., p. 72).

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x+2y+2z=3, \\ x+3y+3z=4. \end{cases}$$

156 ([Đồn21], 169., p. 72).

$$\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ x-y+5z=4, \\ x+8y-z=6. \end{cases}$$

157 ([Đồn21], 170., p. 72).

$$\begin{cases} x+y+z+t=14 \\ x+y-z-t=-4, \\ x-y-z+t=0, \\ x-y+z-t=-2. \end{cases}$$

158 ([Đồn21], 172., p. 73).

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=a^2, \\ x+by+b^2z=b^2, \\ x+cy+c^2z=c^2. \end{cases}$$

159 ([Đồn21], 173., p. 6).

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2000} &= 1, \\ x_1+x_3+x_4+\cdots+x_{2000} &= 2, \\ x_1+x_2+x_4+\cdots+x_{2000} &= 3, \\ \vdots & \\ x_1+x_2+\cdots+x_{1999} &= 2000. \end{cases}$$

160 ([Kie19], VD1, p. 82). Xác định 2 hệ số $a, b \in \mathbb{R}$ của hàm số $y=ax+b$ để: (a) Đồ thị đi qua 2 điểm $A(1,3), B(2,4)$. (b) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4 & cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

161 ([Kie19], VD2, p. 83).

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y-1} = 3, \\ \frac{x}{x+1} + \frac{3y}{y-1} = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2, \\ 2\sqrt{2x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 1. \end{cases}$$

162 ([Kie19], VD3, p. 83).

$$\begin{cases} \frac{x}{x-5} + \frac{y}{y-6} = 5, \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{1}{|2y-1|} = 1, \\ 3\sqrt{2x-1} - \frac{2}{|2y-1|} = -2. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6}. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x}{x+1} + \sqrt{y} = -1, \\ \frac{1}{x+1} + 2y = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \frac{2y}{y+1} = 2, \\ \sqrt{4x+4} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2}, \\ xy + \frac{1}{xy} = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} + \frac{2y}{y+1} = 5, \\ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{4x-4} - \frac{1}{2x-y} = 1, \\ \sqrt{x-1} + \frac{7}{2x-y} = 8. \end{cases}$$

163 ([Kie19], VD4, p. 86).

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ mx - y = 4. \end{cases}$$

(a) Giải hệ với $m = 2$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ trong đó x, y trái dấu. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thỏa $x = |y|$.

164 ([Kie19], VD5, p. 87).

$$\begin{cases} x + my = m + 1, \\ mx + y = 3m - 1. \end{cases}$$

(a) Không giải hệ, tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất. (b) Giải & biện luận hệ phương trình theo $m \in \mathbb{R}$. (c) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ sao cho hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. (d) Chứng minh khi hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thì điểm $M(x, y)$ luôn chạy trên 1 đường thẳng cố định. (e) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất sao cho xy đạt GTNN.

165 ([Kie19], VD6, p. 88).

$$\begin{cases} x - my = 2 - 4m, \\ mx + y = 3m + 1. \end{cases}$$

Chứng minh $\forall m \in \mathbb{R}$ hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là 1 cặp nghiệm của phương trình. Chứng minh $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$.

166 ([Kie19], VD7, p. 89).

$$\begin{cases} x + my = 3, \\ mx + y = 2m + 1. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = x^2 + 3y^2$. (b) $B = x^4 + y^4$.

167 ([Kie19], VD8, p. 90, TS2015 10CT ĐHSPhN).

$$\begin{cases} mx + (m+1)y = 1, \\ (m+1)x - my = 8m + 3. \end{cases}$$

Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tìm GTNN của biểu thức $A = |x^2 + y^2 + (4 + 2\sqrt{3})y|$.

168 ([Bin23], VD68, p. 9). Cho hệ phương trình với tham số $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $a = 2$. (b) Giải & biện luận hệ phương trình. (c) Tìm các giá trị nguyên của a để hệ phương trình có nghiệm nguyên. (d) Tìm các giá trị nguyên của a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn điều kiện $x + y$ nhỏ nhất.

169 ([Bin23], VD69, p. 10). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn cả 2 phương trình $2a + 3b = 6, 3a + 4c = 1$.

170 ([Bin23], VD70, p. 10). Cho 2 đường thẳng: $d: 2x - 3y = 4, d': 3x + 5y = 2$. Tìm trên trục Ox điểm có hoành độ là số nguyên dương nhỏ nhất, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với Ox thì đường vuông góc ấy cắt 2 đường thẳng d, d' tại 2 điểm có tọa độ là các số nguyên.

171 ([Bin23], VD71, p. 11). Giải hệ phương trình với 3 ẩn x, y, z & các tham số a, b, c khác nhau đôi một:

$$\begin{cases} a^2x + ay + z = 5, \\ b^2x + by + z = 5, \\ c^2x + cy + z = 5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:

172 ([Bin23], 207., p. 12).

$$\begin{cases} (x+3)(y-5) = xy, \\ (x-2)(y+5) = xy, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

173 ([Bin23], 208., p. 12).

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{x}{y+12} = 1, \\ \frac{x}{y-12} - \frac{x}{y} = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 4(x+y) = 5(x-y), \\ \frac{40}{x+y} + \frac{40}{x-y} = 9. \end{cases}$$

174 ([Bin23], 209., p. 12).

$$\begin{cases} |x-2| + 2|y-1| = 9, \\ x + |y-1| = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + |x| = 25, \\ x - y + |y| = 30. \end{cases}$$

175 ([Bin23], 210., p. 12). Tìm các giá trị của $a \in \mathbb{R}$ để 2 hệ phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 3x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} ax - 3y = -2, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

176 ([Bin23], 211., p. 12). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để nghiệm của hệ phương trình sau là 2 số dương:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ mx + y = 3. \end{cases}$$

177 ([Bin23], 212., p. 12). Chứng minh tam giác tạo bởi 3 đường thẳng $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = -2x + 8$ là tam giác vuông cân.

178 ([Bin23], 213., p. 13). Tìm các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình sau vô nghiệm, vô số nghiệm:

$$\begin{cases} 2(m+1)x + (m+2)y = m-3, \\ (m+1)x + my = 3m+7. \end{cases}$$

179 ([Bin23], 214., p. 13). Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} mx + 2y = 1, \\ 3x + (m+1)y = -1. \end{cases}$$

(a) Giải hệ phương trình với $m = 3$. (b) Giải & biện luận hệ phương trình theo m . (c) Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên.

180 ([Bin23], 215., p. 13). Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m-4, \\ x + (m-1)y = m. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận hệ phương trình theo m . (b) Tìm các giá trị nguyên của m để nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên. (c) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

181 ([Bin23], 216., p. 13). Cho hệ phương trình với tham số m :

$$\begin{cases} x + my = m+1, \\ mx + y = 3m-1. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận hệ phương trình theo m . (b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất, tìm các giá trị của m để tích xy nhỏ nhất.

182 ([Bin23], 217., p. 13). Các số không âm x, y, z thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1, \\ 8x + 4y + z = 8. \end{cases}$$

(a) Biểu thị x, y theo z . (b) Tìm GTNN, GTLN của biểu thức $A = x + y - z$.

183 ([Bin23], 218., p. 13). Tìm $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 5, \\ 3a - 4c = 6. \end{cases}$$

184 ([Bin23], 219., p. 14). Tìm trên trục tung các điểm có tung độ là số nguyên, sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường vuông góc với trục tung thì đường vuông góc ấy cắt 2 đường thẳng: $d : x + 2y = 6, d' : 2x - 3y = 4$ tại các điểm có tọa độ là các số nguyên.

185 ([Bin23], 220., p. 14). Tìm trên trục hoành các điểm có hoành độ là số nguyên sao cho nếu qua điểm đó ta dựng đường thẳng vuông góc với trục hoành thì đường vuông góc ấy cắt cả 3 đường thẳng sau tại các điểm có tọa độ là các số nguyên: $d_1 : x - 2y = 3, d_2 : x - 3y = 2, d_3 : x - 5y = -7$.

Giải hệ phương trình ẩn x, y, z :

186 ([Bin23], 221., p. 14).

$$\begin{cases} x + y + z = 11, \\ 2x - y + z = 5, \\ 3x + 2y + z = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + t = 4, \\ x + y - z - t = 8, \\ x - y + z - t = 12, \\ x - y - z + y = 16. \end{cases}$$

187 ([Bin23], 222., p. 14).

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ ax + 5y + 4z = 46, \\ 5x + ay + 3z = 38, \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = a^2, \\ x + ay + z = 3a, \\ x + y + az = 2. \end{cases}$$

188 ([Bin23], 223., p. 14). $a, b, c \in \mathbb{R}$ là tham số, $a + b + c \neq 0$.

$$\begin{cases} (a + b)(x + y) - cz = a - b, \\ (b + c)(y + z) - ax = b - c, \\ (c + a)(z + x) - by = c - a. \end{cases}$$

189 ([Bin23], 224., p. 14). Giải hệ phương trình với 3 tham số $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau, $a + b + c \neq 0$:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ bx + cy + az = 0, \\ cx + ay + bz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by + cz = a + b + c, \\ bx + cy + az = a + b + c, \\ cx + ay + bz = a + b + c. \end{cases}$$

190 ([Bin23], 225., p. 14).

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 2, \\ y^2 + yz + xy = 3, \\ z^2 + xz + yz = 4. \end{cases}$$

191 ([BNS23], VD11.1, p. 58).

$$\begin{cases} \frac{4}{x + y - 1} - \frac{5}{2x - y + 3} = -\frac{5}{2}, \\ \frac{3}{x + y - 1} + \frac{1}{2x - y + 3} = -\frac{7}{5}. \end{cases}$$

192 ([BNS23], VD11.2, p. 59).

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x + y}{2}} + \sqrt{\frac{x - y}{3}} = 14, \\ \sqrt{\frac{x + y}{8}} - \sqrt{\frac{x - y}{12}} = 3. \end{cases}$$

193 ([BNS23], VD11.3, p. 59).

$$\begin{cases} mx + y = 2m - 1, \\ (2m + 1)x + 7y = m + 3. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận hệ phương trình theo tham số $m \in \mathbb{R}$. (b) Khi hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, xác định hệ thức liên hệ giữa x_0, y_0 không chứa m .

194 ([BNS23], VD11.4, p. 60).

$$\begin{cases} mx + y = 2, \\ -3mx + my = m - 3. \end{cases}$$

(a) Giải & biện luận hệ phương trình theo tham số $m \in \mathbb{R}$. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

195 ([BNS23], VD11.5, p. 61).

$$\begin{cases} x + my = 2, \\ mx - 3my = 3m + 3. \end{cases}$$

Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình có đúng 1 nghiệm (x, y) thỏa mãn $y = 8x^2$.

196 ([BNS23], VD11.6, p. 62).

$$\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 2x - my = 4. \end{cases}$$

(a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình có nghiệm. (b) Tìm GTNN của biểu thức $A = (x + 2y - 1)^2 + (2x - my - 4)^2$ với $m \neq -4$ & với $m = -4$.

197 ([BNS23], VD11.7, p. 62). Có 50 con gà & chó. Tính số gà & chó để có 140 chân.

198 ([BNS23], VD11.8, p. 63). Tất cả có 120 bó cỏ để làm thức ăn cho 30 con gồm trâu & bò trong 1 tuần. Biết trong 1 tuần mỗi con trâu ăn hết 5 bó cỏ, còn mỗi con bò ăn hết 3 bó cỏ. Tính số trâu & số bò.

199 ([BNS23], 11.1., p. 63). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 2m, \\ x + my = m + 1. \end{cases}$$

200 ([BNS23], 11.2., p. 63). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2, \\ bx + ay = a^2 - b^2. \end{cases}$$

201 ([BNS23], 11.3., p. 63).

$$\begin{cases} mx + (2 - m)y = -1, \\ (m - 1)x - my = 2. \end{cases}$$

(a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình có nghiệm. (b) Giả sử $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ là 1 nghiệm của hệ. Tìm 1 hệ thức của x, y không chứa m .

202 ([BNS23], 11.4., p. 63).

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1, \\ 12x - my = 2. \end{cases}$$

(a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ phương trình có nghiệm. (b) Tìm GTNN của biểu thức $A = (3x + 2y + 1)^2 + (12x - my - 2)^2$.

203 ([BNS23], 11.5., p. 63). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by = a + b, \\ bx - ay = -2ab. \end{cases}$$

204 ([BNS23], 11.7., p. 64).

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + 3y + 4z = 18, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

205 ([BNS23], 11.8., p. 64). Giải & biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ ax + by + 4z = a + b, \\ ax - by + 6z = a - b. \end{cases}$$

206 ([BNS23], 11.9., p. 64). 18 chiếc xe tải có 106 bánh gồm 3 loại: Loại 4 bánh chở 5 tấn, loại 6 bánh chở 6 tấn, & loại 8 bánh chở 6 tấn. Tính số xe mỗi loại biết chúng chở được 101 tấn.

207 ([BNS23], 11.10., p. 64). Có 100 trâu gồm trâu đứng, trâu nằm, trâu già, & chúng ăn hết cỏ 100 bó cỏ. Tìm số trâu mỗi loại, biết mỗi con trâu đứng ăn 5 bó cỏ, mỗi con trâu nằm ăn 3 bó cỏ & 3 con trâu già mới ăn hết 1 bó cỏ.

5 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Hệ Phương Trình

1 Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình: *Bước 1:* Lập hệ phương trình: Chọn 2 đại lượng chưa biết làm ẩn, đặt đơn vị & điều kiện thích hợp của ẩn. Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác trong bài toán theo ẩn. Lập hệ 2 phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng trong bài toán. *Bước 2:* Giải hệ phương trình. *Bước 3:* Chọn kết quả phù hợp & kết luận. **2** Các dạng toán: Toán chuyển động đều/không đều, toán năng suất lao động, toán về quan hệ giữa các số, ...

208 ([BBN23], H1–H2, p. 26). So sánh các bước giải toán bằng cách lập hệ phương trình với các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

209 ([BBN23], VD1, p. 26). 1 ô tô xuất phát từ A dự định đến B lúc 11:00. Cùng thời gian xuất phát từ A: Nếu vận tốc tăng 10 km/h thì xe đến B lúc 10:00. Nếu vận tốc giảm 10 km/h thì xe đến B lúc 12:30. Tính vận tốc dự định của xe, quãng đường AB & giờ xuất phát từ A.

210 ([BBN23], VD2, p. 27). 2 người dự định làm chung 1 công việc & hoàn thành trong 6 h. Khi thực hiện người thứ nhất đã làm 1 mình trong 2 h thì người thứ 2 mới cùng làm chung do đó phải 4 h 48 ph nữa công việc mới hoàn thành. Nếu mỗi người làm 1 mình thì bao lâu xong công việc?

211 ([BBN23], VD3, p. 27). Tìm 1 số có 2 chữ số biết trung bình cộng của nó với số viết theo thứ tự ngược lại bằng 77 & số đó hơn số viết theo thứ tự ngược lại 18 đơn vị.

212 ([BBN23], VD4, p. 28). Nếu giảm chiều dài 1 thửa ruộng hình chữ nhật 5 m & tăng chiều rộng của thửa ruộng ấy thêm 5 m thì thửa ruộng thành hình vuông. Nếu tăng chiều dài của thửa ruộng đó thêm 5 m & tăng chiều rộng thêm 8m thì diện tích thửa ruộng tăng thêm 640 m². Tính các kích thước của thửa ruộng đó.

213 ([BBN23], VD5, p. 28). 2 bến sông A, B cách nhau 50 km. 1 canô chạy xuôi từ A đến B, nghỉ tại bến B trong 1 h rồi quay lại A hết tất cả 5 h 10 ph. 1 canô thứ 2 cũng khởi hành từ A với vận tốc riêng bằng vận tốc riêng của canô thứ nhất. Cùng lúc canô thứ 2 khởi hành từ A, 1 bè nửa trôi từ A theo dòng nước. Canô thứ 2 đi được nửa quãng đường AB rồi quay lại ngay thì gặp bè nửa tại 1 điểm cách A là $8\frac{1}{3}$ km. Biết cả đi & về 2 canô đi với vận tốc riêng không đổi. Tính vận tốc riêng của 2 canô & vận tốc dòng nước.

214 ([BBN23], VD6, p. 29). 100 con vịt, gà cùng thỏ, chó. Tất cả có 270 chân. Số chó hơn thỏ là 7. Số vịt hơn gà 15. Tính số con mỗi loại.

215 ([BBN23], 3.1., p. 30). 1 ô tô tải & 1 ô tô khách cùng khởi hành 1 lúc từ 2 đầu quãng đường AB dài 285 km. Ô tô khách khởi hành từ A, đi được 1 h phải dừng lại nghỉ trên đường 30 ph sau đó đi tiếp 1 h 30 ph nữa thì gặp ô tô tải đi từ B đến. Biết vận tốc ô tô khách hơn vận tốc ô tô tải là 15 km/h. Tính vận tốc mỗi ô tô.

216 ([BBN23], 3.2., p. 30). Trên 1 dòng sông, canô thứ nhất xuôi dòng 84 km & ngược dòng 50 km hết 5 h 30 ph, canô thứ 2 xuôi dòng 56 km & ngược dòng 60 km hết 5 h. Biết vận tốc riêng của 2 canô bằng nhau. Tính vận tốc riêng của 2 canô & vận tốc dòng nước.

217 ([BBN23], 3.3., p. 30). Theo kế hoạch 2 tổ sản xuất 800 sản phẩm trong thời gian nhất định. Do cải tiến kỹ thuật, tổ 1 vượt mức 20%, tổ 2 vượt mức 30% nên cả 2 tổ sản xuất trong thời gian quy định được là 1010 sản phẩm. Tính số sản phẩm được giao theo kế hoạch của mỗi tổ.

218 ([BBN23], 3.4., p. 30). 2 vòi nước cùng chảy vào 1 bể nước sau 4 h được 90% bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 h rồi bị khóa, vòi thứ 2 chảy tiếp 3 h thì được 55% bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy 1 mình sau bao lâu thì đầy bể?

219 ([BBN23], 3.5., p. 30). Tìm 1 số có 2 chữ số biết chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục 2 đơn vị. Nếu ta thêm chữ số 0 vào giữa 2 chữ số thì được số có 3 chữ số hơn 2 lần số có 2 chữ số ban đầu 472 đơn vị.

220 ([BBN23], 3.6., p. 30). 1 thư viện nhà trường có 2 tủ sách. Nếu chuyển 100 quyển từ tủ thứ nhất sang tủ thứ 2 thì số sách 2 tủ bằng nhau. Nếu chuyển 300 quyển từ tủ thứ 2 sang tủ thứ nhất đồng thời tủ thứ 2 cho mượn 100 cuốn thì số sách còn lại của tủ thứ 2 bằng nửa số sách có trong tủ thứ nhất. Lúc đầu mỗi tủ có bao nhiêu cuốn sách?

221 ([BBN23], 3.7., p. 30). 1 đội xe vận tải chở 256 tấn hàng trên 29 xe gồm 3 loại: Xe 4 bánh, mỗi xe chở 5 tấn hàng, xe 4 bánh mỗi xe chở 8 tấn hàng, xe 6 bánh mỗi xe chở 11 tấn hàng. Tổng số bánh xe là 144 bánh. Tính số xe mỗi loại.

222 ([BBN23], 3.8., p. 30). Tính diện tích hình thang có chiều cao 12 m. Biết nếu giảm đáy lớn 4 m, tăng đáy nhỏ 5 m & tăng chiều cao 3 m thì diện tích tăng thêm 60 m². Nếu chiều cao hình thang không là 12 m mà bằng hiệu của 2 đáy thì diện tích hình thang bằng 87.5 m².

223 ([BBN23], BT1, p. 31, Ai Cập 3000 B.C.). Chia 100 đấu lúa mì cho 5 người sao cho người thứ 2 nhận được hơn người thứ nhất 1 số lúa bằng số lúa mà người thứ 3 nhận được hơn người thứ 2, người thứ 4 hơn người thứ 3 & người thứ 5 hơn người thứ 4. Thêm vào đó 2 người đầu tiên nhận được 1 số lúa ít hơn 7 lần số lúa của 3 người còn lại. Tính số lúa mỗi người nhận.

224 ([BBN23], BT2, p. 31). Ngựa & La đi cạnh tranh nhau & cùng chở vật nặng trên lưng. Ngựa than thở về hành lý quá nặng của mình. La đáp: “Cậu than thở nỗi gì? Nếu tôi lấy của cậu 1 bao thì hành lý của tôi nặng gấp đôi của cậu. Còn nếu cậu lấy ở trên lưng tôi 1 bao thì hành lý của cậu mới bằng của tôi.” Tính số bao Ngựa & La mang.

- 225** ([BBN23], p. 32). Trăm trâu trăm cỏ. Trâu đứng ăn 5. Trâu nằm ăn 3. Lợn khộm trâu già. 3 con 1 bó. Tính số trâu đứng, trâu nằm, & trâu già.
- 226** ([BBN23], p. 32). Ngày xuân dạo chơi chợ phiên. Chỉ có 1 tiền (= 60 đồng) mua đủ trái cây. Cam 3 đồng 1 trái dứa. Quýt đường 5 trái trả ngay 1 đồng. Doan Hùng buổi đó vô song. 5 đồng 1 quả cùng không đắt nào. 1 giờ liệu đã liệu mua sao. Cả cam, quýt, buổi vừa vào 100.
- 227** ([TVM22], VD6, p. 180, TS10 Hải Dương 2017–2018). Tháng đầu, 2 tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ 2, do cải tiến kỹ thuật nên tổ 1 vượt mức 10% & tổ 2 vượt mức 12% so với tháng đầu, nên 2 tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Tính số chi tiết máy mỗi tổ sản xuất trong tháng đầu.
- 228** ([TVM22], VD8, p. 181). Nếu vòi A chảy trong 2 h & vòi B chảy trong 3 h thì được $\frac{3}{4}$ bể. Nếu vòi A chảy trong 3 h & vòi B chảy trong 1 h 30 ph thì được $\frac{1}{2}$ bể. Nếu chảy 1 mình thì mỗi vòi chảy bao lâu mới đầy bể?
- 229** ([TVM22], VD11, p. 183). 1 dung dịch chứa 30% acid nitric HNO_3 (tính theo thể tích) & 1 dung dịch khác chứa 55% acid nitric. Cần trộn bao nhiêu l dung dịch loại 1 & loại 2 để được 100 l dung dịch 50% acid nitric?
- 230** ([TVM22], VD12, p. 183). Tìm 1 số có 2 chữ số biết chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 5 & nếu đem số đó chia cho tổng các chữ số của nó thì được thương là 7 & dư là 6.
- 231** ([Tuy23], VD31, p. 63). 2 bến sông A, B cách nhau 40 km. 1 canô xuôi từ A đến B rồi quay ngay về A với vận tốc riêng không đổi hết tất cả 2 h 15 ph. Khi canô khởi hành từ A thì cùng lúc đó, 1 khúc gỗ cũng trôi tự do từ A theo dòng nước & gặp canô trên đường trở về tại 1 điểm cách A là 8 km. Tính vận tốc riêng của canô & vận tốc của dòng nước.
- 232** ([Tuy23], 171., pp. 64–65). 1 lớp học chỉ có 2 loại học sinh là giỏi & khá. Nếu có 1 học sinh giỏi chuyển đi thì $\frac{1}{6}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi. Nếu có 1 học sinh khá chuyển đi thì $\frac{1}{5}$ số học sinh còn lại là học sinh giỏi. Tính số học sinh của lớp.
- 233** ([Tuy23], 172., p. 65). 4 người góp vốn kinh doanh được tổng số tiền 6 tỷ đồng. Số tiền người thứ nhất, thứ 2, thứ 3 góp lần lượt bằng $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ tổng số tiền 3 người còn lại. Tính số tiền vốn người thứ 4 góp.
- 234** ([Tuy23], 173., p. 65). 2 địa điểm A, B cách nhau 360 km. Cùng 1 lúc, 1 xe tải khởi hành từ A chạy về B & 1 xe con chạy từ B về A. Sau khi gặp nhau xe tải chạy tiếp trong 5 h nữa thì đến B & xe con chạy 3 h 12 ph nữa thì tới A. Tính vận tốc mỗi xe.
- 235** ([Tuy23], 174., p. 65). Để làm xong 1 công việc, nếu A, B cùng làm thì mất 6 h, nếu B, C cùng làm thì mất 4.5 h, nếu A, C cùng làm thì chỉ mất 3 h 36 ph. Tính thời gian để làm xong công việc đó nếu cả 3 cùng làm.
- 236** ([Tuy23], 175., p. 65). Để vận chuyển 1 số gạch đến công trình xây dựng, có thể dùng 1 xe loại lớn chở 10 chuyến hoặc dùng 1 xe loại nhỏ chở 15 chuyến. Người ta dùng cả 2 loại xe đó. Biết tổng cộng có tất cả 11 chuyến xe vừa lớn vừa nhỏ. Tính số chuyến mỗi loại xe đã chở.
- 237** ([Tuy23], 176., p. 65). Khi thêm 1 l acid vào dung dịch acid thì dung dịch mới có nồng độ acid 40%. Lại thêm 1 l nước vào dung dịch mới ta được dung dịch acid có nồng độ $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ acid trong dung dịch đầu tiên.
- 238** ([Kie19], VD3, p. 123). 1 canô xuôi dòng 78 km & ngược dòng 44 km mất 5 h với vận tốc dự định. Nếu canô xuôi 13 km & ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 h. Tính vận tốc riêng của canô & vận tốc dòng nước.
- 239** ([Kie19], VD4, p. 124). 1 ô tô đi từ A đến B với vận tốc dự định trong 1 thời gian dự định. Nếu ô tô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 h so với dự định. Nếu ô tô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian đi tăng hơn 3 h so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB.
- 240** ([Kie19], VD4, p. 126). Để hoàn thành 1 công việc, nếu 2 tổ cùng làm chung thì hết 6 h. Sau 2 h làm chung thì tổ 2 được điều đi làm việc khác, tổ 1 tiếp tục làm & đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 h. Tính thời gian mỗi tổ sẽ hoàn thành công việc này nếu làm riêng.
- 241** ([Kie19], VD5, p. 127). Cho 1 bể cạn. Nếu 2 vòi nước cùng được mở để chảy vào bể này thì sẽ đầy bể sau 4 h 48 ph. Nếu mở riêng từng vòi chảy vào bể thì thời gian vòi 1 chảy đầy bể sẽ ít hơn thời gian vòi 2 chảy đầy bể là 4 h. Mỗi vòi chảy 1 mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?
- 242** ([Kie19], VD6, p. 128). 1 mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13 m & chiều dài lớn hơn chiều rộng là 7 m. Tính chiều dài & chiều rộng của mảnh đất.
- 243** ([Kie19], 1., p. 129). 1 canô xuôi dòng 108 km rồi ngược dòng 63 km, tổng thời gian cả đi lẫn về là 7 h. Nếu canô xuôi dòng 81 km & ngược dòng 84 km thì tổng thời gian cũng hết 7 h. Biết vận tốc riêng của dòng nước không thay đổi. Tính vận tốc canô & vận tốc riêng dòng nước.
- 244** ([Kie19], 8., p. 132). Nếu giảm chiều rộng của 1 mảnh vườn hình chữ nhật đi 3 m & tăng chiều dài thêm 8 m thì diện tích hình chữ nhật giảm đi 54 m^2 . Nếu tăng chiều rộng mảnh vườn thêm 2 m & giảm chiều dài đi 4 m thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 32 m^2 . Tính các kích thước của mảnh vườn.

245 ([Kie19], 12., p. 133). 1 ô tô & 1 xe máy ở 2 địa điểm A, B cách nhau 180 km, khởi hành cùng 1 lúc đi ngược chiều nhau & gặp nhau sau 2 h. Tính vận tốc mỗi xe, biết ô tô có vận tốc lớn hơn xe máy 10 km/h.

246 ([Kie19], 13., p. 134). Để chuẩn bị cho chuyến đánh bắt cá ở Hoàng Sa, 2 ngư dân đảo Lý Sơn cần chuyển 1 số lương thực, thực phẩm lên tàu. Nếu người thứ nhất chuyển xong $\frac{1}{2}$ số lương thực, thực phẩm sau đó người thứ 2 chuyển nốt số còn lại thì thời gian hoàn thành lâu hơn người thứ nhất 3 h. Nếu cả 2 cùng làm chung thì thời gian chuyển số lương thực, thực phẩm đó lên tàu là $\frac{20}{7}$ h. Nếu làm riêng 1 mình thì mỗi người cần bao nhiêu lâu để chuyển hết số lương thực, thực phẩm lên tàu?

247 ([Bin23], VD72., p. 15). Điểm trung bình của 100 học sinh trong 2 lớp 8A, 8B là 7.2. Tính điểm trung bình của các học sinh mỗi lớp, biết số học sinh lớp 8A gấp rưỡi số học sinh lớp 8B & điểm trung bình của lớp 8B gấp rưỡi điểm trung bình của lớp 8A.

248 ([Bin23], VD73., p. 15). Giả sử có 1 cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy. Biết 9 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 2 tuần, 6 con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 4 tuần. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên cánh đồng trong 6 tuần? (mỗi con bò ăn số cỏ như nhau).

249 ([Bin23], 226., p. 16). Có 45 người gồm bác sĩ & luật sư, tuổi trung bình của họ là 40. Tính số bác sĩ, số luật sư, biết tuổi trung bình của các bác sĩ là 35, tuổi trung bình của các luật sư là 50.

250 ([Bin23], 227., p. 16). Trong 1 hội trường có 1 số ghế băng, mỗi ghế băng quy định ngồi 1 số người như nhau. Nếu bớt 2 ghế băng & mỗi ghế băng ngồi thêm 1 người thì thêm được 8 chỗ. Nếu thêm 3 ghế băng & mỗi ghế băng ngồi rút đi 1 người thì giảm 8 chỗ. Tính số ghế băng trong hội trường.

251 ([Bin23], 228., p. 17). Có 2 loại quặng sắt: quặng loại I chứa 70% sắt, quặng loại II chứa 40% sắt. Trộn 1 lượng quặng loại I với 1 lượng quặng loại II thì được hỗn hợp quặng chứa 60% sắt. Nếu lấy tăng hơn lúc đầu 5 tấn quặng loại I & lấy giảm hơn lúc đầu 5 tấn quặng loại II thì được hỗn hợp quặng chứa 65% sắt. Tính khối lượng mỗi loại quặng đem trộn lúc đầu.

252 ([Bin23], 229., p. 17). Cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ acid là 20% (nồng độ acid là tỷ số của khối lượng acid so với khối lượng dung dịch). Sau đó lại cho thêm 1 kg acid vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ acid là $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ acid trong dung dịch A.

253 ([Bin23], 230., p. 17). 2 vòi nước cùng chảy vào 1 bể trong 1 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Nếu vòi I chảy trong 3 giờ, vòi II chảy trong 2 giờ thì mới được $\frac{4}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy 1 mình thì trong bao lâu bể sẽ đầy?

254 ([Bin23], 231., p. 17). Lúc 7:00, An khởi hành từ A để đến gặp Bích tại B lúc 9:30. Nhưng đến 9:00, An được biết Bích bắt đầu đi từ B để đến C (không nằm trên quãng đường AB) với vận tốc bằng 3.25 lần vận tốc của An. Ngay lúc đó, An tăng thêm vận tốc 1km/h & khi tới B, An đã đi theo đường tắt đến C chỉ dài bằng $\frac{1}{3}$ quãng đường mà Bích đi từ B đến C, do đó An & Bích đến C cùng 1 lúc. Nếu Bích cũng đi theo đường tắt như An thì Bích đến B trước An là 2 giờ. Tính vận tốc lúc đầu của An.

255 ([Bin23], 232., p. 17, Newton's problem). 1 cánh đồng cỏ dày như nhau, mọc cao đều như nhau trên toàn bộ cánh đồng & trong suốt thời gian bò ăn cỏ trên cánh đồng ấy. Biết 75 con bò ăn hết cỏ trên 60 a đồng cỏ trong 12 ngày, 81 con bò ăn hết cỏ trên 72 a đồng cỏ đó trong 15 ngày. Hỏi bao nhiêu con bò ăn hết cỏ trên 96 a đồng cỏ trong 18 ngày? 1 a = 100 m².

256 ([Bin23], 233., p. 17). Tìm 1 số có 2 chữ số biết nếu lấy bình phương của số đó trừ đi bình phương của số gồm chính 2 chữ số của số phải tìm viết theo thứ tự ngược lại thì được 1 số chính phương.

257 ([Bin23], 234., p. 17). 3 tổ nhân công A, B, C có tuổi trung bình lần lượt là 37, 23, 41. Tuổi trung bình của 2 tổ A, B là 29, tuổi trung bình của 2 tổ B, C là 33. Tính tuổi trung bình của cả 3 tổ.

6 Hệ Phương Trình Dạng Đặc Biệt

6.1 Hệ phương trình đối xứng loại I

Định nghĩa 4 (Hệ phương trình đối xứng loại I). 1 hệ phương trình 2 ẩn x, y gọi là hệ phương trình đối xứng loại I nếu mỗi phương trình không đổi khi đổi vai trò của x, y cho nhau.

Tính chất của hệ phương trình đối xứng loại I: Nếu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là 1 nghiệm của hệ phương trình đối xứng loại I thì (y_0, x_0) cũng là 1 nghiệm. Cách giải: Đặt $S = x + y, P = xy$, với điều kiện $S^2 \geq 4P$, để quy hệ phương trình về 2 ẩn S, P .

258 ([Kie19], VD, p. 91).

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 2, \\ x^3 + y^3 = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (x + y)(8 + xy) = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}), \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5, \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 9. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3y(1 + y) + x^2y^2(2 + y) + xy^3 = 30, \\ x^2y + x(1 + y + y^2) + y = 11. \end{cases}$$

6.2 Hệ phương trình đối xứng loại II

Định nghĩa 5 (Hệ phương trình đối xứng loại II). 1 hệ phương trình 2 ẩn x, y gọi là hệ phương trình đối xứng loại II nếu trong hệ phương trình ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia, i.e.,

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0, \end{cases} \text{ là hệ phương trình đối xứng loại II} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(y, x) = f_2(x, y), \\ f_2(y, x) = f_1(x, y). \end{cases}$$

Tính chất của hệ phương trình đối xứng loại II: Nếu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là 1 nghiệm của hệ phương trình đối xứng loại II thì (y_0, x_0) cũng là 1 nghiệm của hệ. Cách giải: Trừ vế với vế 2 phương trình của hệ, ta được 1 phương trình có dạng

$$f_1(x, y) - f_2(x, y) = (x - y)f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ f(x, y) = 0. \end{cases}$$

259 ([Kie19], VD, p. 95, (d) TS2017 10CT Hà Nội).

$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y, \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x. \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1), \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1). \end{cases} \quad \begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y, \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x. \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 = y + \frac{3}{y}, \\ 4y^2 = x + \frac{3}{x}. \end{cases}$$

6.3 Hệ có yếu tố đẳng cấp

Định nghĩa 6. Phương trình đẳng cấp bậc n là phương trình có dạng $f(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n = 0$ với $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Định nghĩa 7. Hệ phương trình có yếu tố đẳng cấp (đồng cấp, cùng cấp) là các hệ chứa các phương trình đẳng cấp hoặc các phương trình của hệ khi nhân hoặc chia cho nhau thì tạo ra phương trình đẳng cấp.

Cách giải hệ có yếu tố đẳng cấp: Từ các phương trình của hệ, nhân hoặc chia cho nhau để tạo ra phương trình đẳng cấp bậc $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + \dots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n = 0$. Xét 2 trường hợp: Nếu $y = 0$, thay vào hệ để tìm x . Nếu $y \neq 0$, đặt $x = ty$ (hoặc $y = tx$), thu được phương trình $\sum_{i=0}^n a_i t^i = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$. Giải phương trình tìm t sau đó thay $x = ty$ vào hệ ban đầu để tìm x, y .

260 ([Kie19], VD, p. 98).

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y, \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1). \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2 y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0, \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 3} + 2y - 3 = 0, \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^3 - y^3 = \frac{1}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \sqrt{y+1} - 2xy - 2x = 1, \\ x^3 - 3x - 3xy = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + x + 3 = 0, \\ (x+1)^2 + 3(y+1) + 2(xy - \sqrt{x^2 y + 2y}) = 0. \end{cases}$$

6.4 Phương pháp biến đổi tương đương

261 ([Kie19], VD1, p. 101, (d): TS2018 10CT Hà Nội).

$$\begin{cases} 3y^2 + 1 + 2y(x+1) = 4y\sqrt{x^2 + 2y + 1}, \\ y(y-x) = 3 - 3y. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + (3 - 2xy)y^2 = 3, \\ 2x^2 - x^3 y = 2x^2 y^2 - 7xy + 6. \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + 2xy + 6y - (7 + 2y)x^2 = -9, \\ 2yx^2 - x^3 = 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1, \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x+y) = 2, \\ x^3 + y^3 + 6 = 8x^2 y^2. \end{cases} \quad \begin{cases} 7xy - x + y = 7, \\ x^3 + y^3 = 1 + xy - x + y. \end{cases}$$

262 ([Kie19], VD2, p. 103).

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 6 = 0, \\ x^2 + xy + y + 4x + 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 2xy + y = 5, \\ y^2 + xy + 5x = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 2xy + 3x + 4y + 6 = 0, \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + x - y = x^2 y, \\ (x+1)\sqrt{x^2 - 2y + 3} = y^2 + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 5x - y - 3. \end{cases}$$

263 ([Kie19], VD3, p. 106, (e): TS2018 10CT KHTN Hà Nội).

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49, \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + 3x^2 y = 6xy - 3x - 49, \\ x^2 - 6xy + y^2 = 10y - 25x - 9. \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 35, \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(3x+y) = 4, \\ 7x^3 + 11 = 3(x+y)(x+y+1). \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x+y) = 2, \\ x^3 + y^3 + x^3 y^3 + 7(x+1)(y+1) = 31. \end{cases}$$

6.5 Phương pháp đặt ẩn phụ

264 ([Kiê19], VD, p. 9).

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy - y^2 = 2, \\ 2x^3 - 3x^2 - 3xy^2 - y^3 + 1 = 0. \end{cases} \begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0, \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0. \end{cases} \begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y + 1) = 25(y + 1), \\ x^2 + xy + 2y^2 + x - 8y = 9. \end{cases} \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3, \\ 4x^2y + 6x = y^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{9}{8} = 0, \\ 2y - \frac{1}{x-y} + \frac{5}{4} = 0. \end{cases} \begin{cases} \frac{x}{x^2-y} + \frac{5y}{x+y^2} = 4, \\ 5x + y + \frac{x^2-5y^2}{xy} = 5. \end{cases} \begin{cases} (xy+3)^2 + (x+y)^2 = 8, \\ \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} = -\frac{1}{4}. \end{cases} \begin{cases} 3xy + y + 1 = 21x, \\ 9x^2y^2 + 3xy + 1 = 117x^2. \end{cases}$$

6.6 Phương pháp đưa về hằng đẳng thức

265 ([Kiê19], VD, p. 112).

$$\begin{cases} (3-x)\sqrt{2-x} - 2y\sqrt{2y-1} = 0, \\ \sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt{y+2} = 5. \end{cases} \begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6, \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6, \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6. \end{cases} \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y}, \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (17-3x)\sqrt{5-x} + (3y-14)\sqrt{4-y} = 0, \\ 2\sqrt{2x+y+5} + 3\sqrt{3x+2y+11} = x^2 + 6x + 13. \end{cases} \begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3+1}), \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1}. \end{cases}$$

6.7 Hệ phương trình có chứa phương trình bậc 2

266 ([Kiê19], VD, p. 115).

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2, \\ x\sqrt{2y-y}\sqrt{x-1} = 2x - 2y. \end{cases} \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y = -1, \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y}. \end{cases}$$

6.8 Phương pháp đánh giá

267 ([Kiê19], VD1, p. 116).

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}, \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9}. \end{cases} \begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x-y)^3}, \\ 76x^2 - 20y^2 + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)}. \end{cases}$$

268 ([Kiê19], VD2, p. 117).

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y, \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x. \end{cases} \begin{cases} 3x + 10\sqrt{xy} - y = 12, \\ x + \frac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2} - \sqrt{2(x^2+y^2)} \leq 3. \end{cases} \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y, \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24. \end{cases} \begin{cases} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}, \\ \sqrt{y} - \sqrt{2x-3} = 6-2x. \end{cases}$$

7 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCI, pp. 26–27]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

269 ([Tuy23], VD32, pp. 65–66).

$$\begin{cases} mx - y = 2m, \\ x - my = 1 + m. \end{cases}$$

(a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm duy nhất. (b) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để hệ có nghiệm nguyên. (c) Chứng minh $A(x, y)$, với (x, y) là nghiệm của hệ, luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định. (d) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để biểu thức $A = xy$, với (x, y) là nghiệm của hệ có GTLN. Tìm GTLN đó.

- 270** ([Tuy23], 177., pp. 67–68). Cho các đường thẳng $(d_1) : 2x - y = 2m - 1, (d_2) : 4x - 3y = 4m + 1$. (a) Chứng minh khi m thay đổi, $(d_1), (d_2)$ luôn cắt nhau. Tìm tọa độ giao điểm M theo m . (b) Chứng minh khi m thay đổi thì M luôn di động trên 1 đường thẳng cố định. (c) Tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + y^2$ với x, y thỏa mãn phương trình của $(d_1), (d_2)$.
- 271** ([Tuy23], 178., p. 68). Cho đường thẳng $(d_1) : 2x - y = 3$. Đường thẳng $(d_2) : y = ax + b$ đối xứng với đường thẳng (d_1) qua trục hoành. Tính $a + b$.
- 272** ([Tuy23], 179., p. 68). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(3, 2)$. Dếm số đường thẳng đi qua M , cắt Ox tại điểm có hoành độ là 1 số nguyên dương, đồng thời cắt Oy tại 1 điểm có tung độ là 1 số nguyên dương.
- 273** ([Tuy23], 180., p. 68). Tìm 1 số biết nếu thêm 12 hay bớt đi 12 thì đều được 1 số chính phương.
- 274** ([Tuy23], 181., p. 68). 2 công nhân được giao làm cùng 1 loại sản phẩm với số lượng thời gian như nhau. Người thứ nhất mỗi giờ làm tăng 1 sản phẩm nên đã hoàn thành công việc trước thời hạn 2 h. Người thứ 2 mỗi giờ làm tăng 2 sản phẩm nên chẳng những đã hoàn thành công việc trước thời hạn 3 h mà còn vượt mức 7 sản phẩm nữa. Tính số lượng sản phẩm mà mỗi người được giao làm.
- 275** ([Tuy23], 182., p. 68). 1 người mua 30 con chim gồm 3 loại: chim sẻ, chim ngói, & bồ câu hết tất cả 30 đồng. Biết 3 con chim sẻ giá 1 đồng, 2 con chim ngói giá 1 đồng, & mỗi con bồ câu giá 2 đồng. Tính số con mỗi loại.
- 276** ([Tuy23], 183., p. 68). 1 con ngựa giá 204 đồng. Có 3 người mua ngựa nhưng mỗi người đều không đủ tiền mua. Người thứ nhất nói với 2 người kia: Mỗi người cho tôi vay 1 nửa số tiền của mình thì tôi đủ tiền mua ngựa. Người thứ 2 nói với 2 người kia: Mỗi người cho tôi vay $\frac{1}{3}$ số tiền của mình, tôi sẽ mua được ngựa. Người thứ 3 nói: Chỉ cần 2 anh cho tôi vay $\frac{1}{4}$ số tiền của mình thì con ngựa sẽ là của tôi. Tính số tiền mỗi người.
- 277** ([Tuy23], 272., p. 101). Có 2 bình đựng nước: Bình 1 chứa 18 l nước, bình 2 chứa 10 l nước. Nếu rót từ bình 1 sang cho đầy bình 2 thì lượng nước còn lại trong bình 1 chỉ bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của nó. Nếu rót từ bình 2 sang cho đầy bình 1 thì lượng nước còn lại trong bình 2 chỉ bằng $\frac{1}{5}$ thể tích của nó. Tính thể tích mỗi bình.

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bin21] Vũ Hữu Bình. *Phương Trình Nghiệm Nguyên & Kinh Nghiệm Giải*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2021, p. 224.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.
- [Đồn21] Nguyễn Đức Đồng. *23 Chuyên Đề Giải 1001 Bài Toán Sơ Cấp I: 12 Chuyên Đề Về Đại Số Sơ Cấp*. Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 298.
- [Kiê19] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Đại Số 9*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2019, p. 311.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.
- [TVM22] Nguyễn Tất Thu, Đoàn Quốc Việt, and Vũ Công Minh. *Tư Luyện Giải Toán THCS Theo Chuyên Đề. Tập 3: Phương Trình Bậc 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm TP Hồ Chí Minh, 2022, p. 215.