Problem: Vector – Bài Tập: Vector

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 25 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Vector – Bài Tập: Vector.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.tex.
- *Problem & Solution: Vector – Bài Tập & Lời Giải: Vector.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/solution/NQBH_vector_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/solution/NQBH_vector_solution.tex.

Mục lục

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

Resources – Tài nguyên.

1. [Hà19]. Nguyễn Minh Hà. *Hướng Trong Hình Học Phẳng.*
2. [PD20]. Lê Hoành Phò, Trần Nam Dũng. *Tuyển Chọn Các Chuyên Đề Toán Phổ Thông Tập 1.*
3. [Quỳ+20]. *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 10.*

$\boxed{1}$ *Quy tắc 3 điểm*: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC}$, $\forall A,B,C\in\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}^\star$. $\boxed{2}$ Trung điểm. I là trung điểm của đoạn thẳng AB, M là 1 điểm bất kỳ $\Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. $\boxed{3}$ Trọng tâm. G là trọng tâm ΔABC, M là 1 điểm bất kỳ $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$. $\boxed{4}$ Hình bình hành. $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. $\boxed{5}$ Chia tỷ lệ. Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số $k\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$. $\boxed{6}$ Phân tích 2 vector không cùng phương. Nếu 2 vector $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương thì với mọi vector $\vec{c}$, tồn tại duy nhất $m,n\in\mathbb{R}$ thỏa $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. $\boxed{7}$ Tâm tỷ cự. Với $n\in\mathbb{N}^\star$ điểm A_i & $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$ có tổng khác 0, i.e., $\sum_{i=1}^n a_i\neq 0$, tồn tại duy nhất điểm I thỏa $\sum_{i=1}^n a_i\overrightarrow{IA_i}=\vec{0}$. Điểm I được gọi là *tâm tỷ cự* của hệ điểm $(A_i)_{i=1}^n$ với bộ trọng số $(a_i)_{i=1}^n$ tương ứng. $\boxed{8}$ Điều kiện vuông góc. $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. $\boxed{9}$ Điều kiện thẳng hàng. A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$. $\boxed{10}$ ΔABC có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$, $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

1 ([PD20], VD1.1, p. 9)**.** *Tứ giác $ABCD$, M,N chia AD,BC theo tỷ số $k\in(-\infty,0)$. (a) Tìm tập hợp trung điểm I của MN khi k thay đổi. (b) Biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},k$ để suy ra $MN\le\max\{AB,CD\}$.*

2 ([PD20], VD1.2, p. 10)**.** *Cho n-giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn (O,R) & điểm $M\in(O,R)$. Chứng minh: (a) $\sum_{i=1}^n\overrightarrow{OA_i}=\vec{0}$. (b) $\sum_{i=1}^n\cos\widehat{MOA_i}=0$, $\sum_{i=1}^n MA_i^2=2nR^2$.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

3 ([PD20], VD1.3, p. 11). ΔABC. *Chứng minh: (a)* $c^2CM^2 = a^2AM^2 + b^2BM^2 + (a^2+b^2-c^2)AM \cdot BM$ *với mọi điểm* M *thuộc cạnh* AB. *(b) Độ dài đường phân giác* $l_a^2 = \dfrac{4bc}{(a+b)^2}p(p-a)$.

4 ([PD20], VD1.4, p. 13). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo* AC, BD *cắt nhau tại* O. H, K *là trực tâm* $\Delta ABO, \Delta CDO$, I, J *lần lượt là trung điểm* AD, BC. *Chứng minh* $HK \perp IJ$.

5 ([PD20], VD1.5, p. 14). *Cho 3 dây cung song song* AA', BB', CC' *của đường tròn* (O). *Chứng minh 3 trực tâm của* $\Delta ABC', \Delta BCA', CAB'$ *thẳng hàng.*

6 ([Hải+22], VD1, p. 59). *Cho đoạn thẳng* AB *& I là trung điểm của* AB. *Chứng minh: (a)* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. *(b)* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ *với mọi điểm* M.

7 ([Hải+22], VD2, p. 59). *Cho* ΔABC *& điểm* M *nằm giữa* B, C. *Chứng minh:*

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC} + \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}.$$

8 ([Hải+22], VD3, p. 60). *Cho* ΔABC. *Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm* G. *(b)* $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. *(c)* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ *với mọi điểm* M.

9 ([Hải+22], VD4, p. 60). *Cho* ΔABC *& 1 điểm* M *bất kỳ trong tam giác. Đặt* $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. *Chứng minh:* $S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

10 ([Hải+22], VD5, p. 61). *Cho* ΔABC. *Đường tròn nội tiếp* (I) *tiếp xúc với cạnh* BC *tại* D. *Gọi* M *là trung điểm của* BC. *Chứng minh:* $a\overrightarrow{MD} + b\overrightarrow{MC} + c\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ *(với* a, b, c *là độ dài các cạnh* BC, AC, AB*).*

11 ([Hải+22], VD6, p. 61). *Cho* ΔABC *& điểm* P *bất kỳ. Gọi* A_1, B_1, C_1 *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Trên các tia* PA_1, PB_1, PC_1 *lần lượt lấy các điểm* X, Y, Z *sao cho* $\dfrac{PX}{PA_1} = \dfrac{PY}{PB_1} = \dfrac{PZ}{PC_1} = k$. *Chứng minh: (a)* AX, BY, CZ *đồng quy tại* T. *(b)* P, T, G *thẳng hàng &* $\dfrac{TG}{PG} = \left|\dfrac{3k}{2+k}\right|$.

12 ([Hải+22], VD7, p. 62). *Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm* L *thỏa mãn* $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$. *Điểm* L *như vậy gọi là* điểm Lemoine *của* ΔABC.

13 ([Hải+22], VD8, p. 62). *Cho* ΔABC *& điểm* P *bất kỳ.* PA, PB, PC *cắt các cạnh* BC, CA, AB *tương ứng tại các điểm* A_1, B_1, C_1. *Gọi* A_2, B_2, C_2 *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Gọi* A_3, B_3, C_3 *lần lượt là trung điểm của* AA_1, BB_1, CC_1. *(a) Chứng minh:* A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 *đồng quy. (b) Lấy điểm* A_4 *thuộc* BC *sao cho* QA_4 *song song với* PA. *Xác định các điểm* B_4 *&* C_4 *tương tự* A_4. *Chứng minh:* Q *là trọng tâm của* $\Delta A_4B_4C_4$.

14 ([Hải+22], VD9, p. 64). *Cho* ΔABC. *Đường tròn nội tiếp* (I) *tiếp xúc với* BC, CA, AB *lần lượt tại* D, E, F. *Chứng minh:* $a\overrightarrow{ID} + b\overrightarrow{IE} + c\overrightarrow{IF} = \vec{0}$.

15 ([Hải+22], VD10, p. 64). *Cho* ΔABC *có* $\widehat{A} = 90°$ *& các đường phân giác* BE *&* CF. *Đặt* $\vec{u} = (AB+BC+CA)\overrightarrow{BC} + BC\overrightarrow{EF}$. *Chứng minh: giá của* $\vec{u}$ *vuông góc với* BC.

16 ([Hải+22], 8.1., p. 65). *Cho vector* $\vec{u}$ *có 2 phương khác nhau, chứng minh* $\vec{u} = \vec{0}$.

17 ([Hải+22], 8.2., p. 65). *Cho* ΔABC *có* M *&* N *lần lượt là trung điểm của* AB *&* AC. *Lấy* P *đối xứng với* M *qua* N. *Chứng minh:* $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

18 ([Hải+22], 8.3., p. 65). *Cho* ΔABC *có tâm đường tròn ngoại tiếp* O, *trực tâm* H. *Lấy* K *đối xứng với* O *qua* BC. *Chứng minh:* $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AH}$.

19 ([Hải+22], 8.4., p. 65). *Cho 2 vector* $\vec{a}$ *&* $\vec{b}$ *thỏa mãn* $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$. *Chứng minh: 2 vector* $\vec{a}$ *&* $\vec{b}$ *có giá vuông góc.*

20 ([Hải+22], 8.5., p. 65). *Cho* ΔABC *&* ΔDEF *thỏa mãn* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. *Chứng minh:* ΔABC *&* ΔDEF *có cùng trọng tâm.*

21 ([Hải+22], 8.6., p. 65). *Cho 2 vector* $\vec{a}$ *&* $\vec{b}$ *thỏa mãn* $\vec{a}$ *có giá vuông góc với giá của vector* $\vec{a}+\vec{b}$. *Chứng minh:* $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$.

22 ([Hải+22], 8.7., p. 65). *Cho* ΔABC *& điểm* P *thỏa mãn* $|\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|$. *Chứng minh:* $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}|$.

23 ([Hải+22], 8.8., p. 65). *Cho* ΔABC *nội tiếp đường tròn* (O). *Cho* $(O), B, C$ *cố định & A di chuyển trên đường tròn* (O). BE, CF *là 2 đường cao của* ΔABC. *Giả sử có vector* $\vec{u}$ *thỏa mãn* $\dfrac{|\overrightarrow{EF} - \vec{u}|^2}{EF^2} + \dfrac{|\overrightarrow{OA} - \vec{u}|^2}{OA^2} = 1$. *Chứng minh* $\dfrac{1}{EF^2} - \dfrac{1}{|\vec{u}|^2}$ *luôn không đổi khi* A *thay đổi.*

24 ([Hải+22], 8.9., p. 65). *Cho* ΔABC *có các phân giác trong* AD, BE, CF. *Gọi* X, Y, Z *lần lượt là trung điểm của* EF, FD, DE. *(a) Chứng minh:* AX, BY, CZ *đồng quy tại điểm* P *thỏa mãn hệ thức:* $a(b+c)\overrightarrow{PA} + b(c+a)\overrightarrow{PB} + c(a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. *(b) Gọi* N *là tâm đường tròn Euler của* ΔABC. *Dựng vector* $\vec{u}$ *thỏa mãn* $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{NA}}{a} + \dfrac{\overrightarrow{NB}}{b} + \dfrac{\overrightarrow{NC}}{c}$. *Gọi* Q *là trung điểm* ON, *trong đó* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC. *Chứng minh:* PQ *song song hoặc trùng với giá của vector* $\vec{u}$.

2 Scalar Product – Tích Vô Hướng

25 ([Hải+22], VD1, p. 75). *(a) Cho đoạn AB & điểm M. Chứng minh* $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(MA^2+MB^2-AB^2)$. *(b) Cho đoạn thẳng AB,CD. Chứng minh* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(AD^2-AC^2+BD^2-BC^2)$. *(c) Chứng minh* $AB\perp CD\Leftrightarrow AD^2-AC^2=BD^2-BC^2$.

26 ([Hải+22], VD2, p. 76). *Cho* ΔABC*. Lấy I thỏa* $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ *với* $\alpha+\beta+\gamma=0$*. Chứng minh: (a)* $\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2=\dfrac{\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2+\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. *(b)* $\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma PC^2=(\alpha+\beta+\gamma)PI^2+\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2$ *với mọi điểm P. (c)* $PI^2=\dfrac{\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma PC^2}{\alpha+\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ *với mọi điểm P.*

27 ([Hải+22], VD3, p. 77). *Cho* $\vec{a},\vec{b}$ *không cùng phương. Tìm* $\vec{u}$ *thỏa* $\vec{a}\cdot\vec{u}=\alpha,\vec{b}\cdot\vec{u}=\beta$.

28 ([Hải+22], VD4, p. 77). *Cho* ΔABC *đều có trọng tâm O & điểm M bất kỳ. Chứng minh: (a)* $\cos\widehat{AOM}+\cos\widehat{BOM}+\cos\widehat{COM}=0$. *(b)* $\cos^2\widehat{AOM}+\cos^2\widehat{BOM}+\cos^2\widehat{COM}=\mathrm{const}$. *(c)* $\cos^4\widehat{AOM}+\cos^4\widehat{BOM}+\cos^4\widehat{COM}=\mathrm{const}$.

29 ([Hải+22], BĐ, p. 77). *Cho* ΔABC *đều. (a) Điểm N nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp* ΔABC*. Chứng minh* $AN^4+BN^4+CN^4$ *không đổi. (b) Chứng minh* $AN^4+BN^4+CN^4=18R^4+3(ON^2-R^2)(ON^2+5R^2)$ *với mọi điểm N. (c) Từ đó suy ra* $AN^4+BN^4+CN^4<18R^4\Leftarrow N$ *nằm trong (O),* $AN^4+BN^4+CN^4=18R^4\Leftarrow N\in(O)$*,* $AN^4+BN^4+CN^4>18R^4\Leftarrow N$ *nằm ngoài (O).*

30 ([Hải+22], VD5, p. 79). *Cho* ΔABC *đều nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng d đi qua O & cắt BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Chứng minh* $\dfrac{1}{OD^4}+\dfrac{1}{OE^4}+\dfrac{1}{OF^4}=\mathrm{const}$.

31 ([Hải+22], VD6, p. 79). *Cho 3 vector* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *thỏa* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ *(mô hình vector của tam giác đều) &* $\vec{u}$ *là vector bất kỳ. Chứng minh: (a)* $\cos(\vec{u},\vec{a})+\cos(\vec{u},\vec{b})+\cos(\vec{u},\vec{c})=0$. *(b)* $\cos^2(\vec{u},\vec{a})+\cos^2(\vec{u},\vec{b})+\cos^2(\vec{u},\vec{c})=\frac{3}{2}$. *(c)* $\cos^4(\vec{u},\vec{a})+\cos^4(\vec{u},\vec{b})+\cos^4(\vec{u},\vec{c})=\frac{9}{8}$. *(d) Tính* $\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{a})+\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{b})+\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{c})$ *với* $n\in\mathbb{N}$.

32 ([Hải+22], VD7, p. 79). *Cho* ΔABC *đều & M,N bất kỳ.* M_a,M_b,M_c *lần lượt là hình chiếu của M lên BC,CA,AB.* N_a,N_b,N_c *lần lượt là hình chiếu của N lên BC,CA,AB. Chứng minh* $M_aN_a^2+M_bN_b^2+M_cN_c^2=\frac{3}{2}MN^2$.

33 ([Hải+22], 10.1., p. 79). *Cho* ΔABC*, trọng tâm G. E,F nằm trên đường thẳng GC,GB sao cho* $EF\parallel BC$*, AG cắt (ABF),(ACE) tại N,M. Chứng minh* $FM=EN$.

34 ([Hải+22], 10.3., p. 80). *Cho* ΔABC *có DEF là tam giác Ceva của điểm P bất kỳ. L,K là tâm đường tròn ngoại tiếp* $\Delta PCA,\Delta PAB$*. Lấy* $S\in KL$ *thỏa* $DS\perp EF$*. Đường trung trực của BC cắt KL tại T. Chứng minh S,T đối xứng qua trung điểm KL.*

35 ([Hải+22], 10.4., p. 80). *Cho* ΔABC*, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA,AB tại E,F. Điểm P di chuyển trên EF,PB cắt CA tại M, MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua 1 điểm cố định khi P di chuyển.*

36 ([Hải+22], 10.5., p. 80). *Cho* ΔABC *& điểm* $I(\alpha,\beta,\gamma)$ *ở trong tam giác với mọi điểm P trong mặt phẳng. Chứng minh* $\alpha PA\cdot IA+\beta PB\cdot IB+\gamma PC\cdot IC\geq\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2$.

37 ([Hải+22], 10.6., p. 80). *Cho* ΔABC *& điểm P bất kỳ nằm trong tam giác.* A',B',C' *lần lượt là hình chiếu của P xuống đoạn BC,CA,AB & (I,r0 là đường tròn nội tiếp* ΔABC*. Tìm* GTNN *của biểu thức* $PA'+PB'+PC'+\dfrac{PI^2}{2r}$.

38 ([Hải+22], 10.7., p. 80). *Cho* ΔABC *với 3 trung tuyến* m_a,m_b,m_c*.* A',B',C' *di chuyển trên 3 đường thẳng BC,CA,AB. Tìm cực trị của* $\dfrac{B'C'^3}{m_a}+\dfrac{C'A'^3}{m_b}+\dfrac{A'B'^3}{m_c}$.

39 ([Hải+22], 10.8., p. 80). *Cho* ΔABC *nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Chứng minh* $MA+2OI\geq MB+MC\geq MA-2OI$.

40 ([Hải+22], 10.9., p. 80). *Cho* ΔABC*, trực tâm H, bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Với mọi M trên mặt phẳng, tìm* GTNN *của biểu thức* $MA^3+MB^3+MC^3-\frac{3}{2}R\cdot MH^2$.

Tài liệu

[Hà19] Nguyễn Minh Hà. *Hướng Trong Hình Học Phẳng*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2019, p. 127.

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.

[PD20] Lê Hoành Phò and Trần Nam Dũng. *Tuyển Chọn Các Chuyên Đề Toán Phổ Thông Tập 1*. Tủ sách Sputnik S055. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 315.

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, and Lê Bá Khánh Trình. *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 10*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 344.