

Problem: Cylinder, Cone, Sphere – Bài Tập: Hình Trụ, Hình Nón, Hình Cầu

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 3 năm 2024

Mục lục

1 Cylinder – Hình Trụ	1
2 Cone – Hình Nón	3
3 Sphere – Hình Cầu	3
4 Miscellaneous	4
Tài liệu	4

1 Cylinder – Hình Trụ

[1] Quay hình chữ nhật $ABCD$ 1 vòng quanh cạnh CD cố định (trục quay) được 1 hình trụ với 2 đáy: 2 hình tròn $(C; R), (D; R)$ với $R = AD = BC$, mặt xung quanh, đường sinh AB , chiều cao $AB = h$. [2] Thiết diện: Mặt cắt song song với đáy: Thiết diện là 1 hình tròn bằng đáy. Mặt cắt song song với trục: Thiết diện là 1 hình chữ nhật. [3] Hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi Rh$, diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, thể tích $V = S_d h = \pi R^2 h$.

[Thá+24, Chap. X, §1, pp. 92–97]: HD1. HD2. LT1. HD3. LT2. HD4. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 ([BBN23], H1, p. 114). Nếu tăng bán kính đáy của hình trụ lên gấp đôi, gấp a lần thì diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình trụ tăng mấy lần?

2 ([BBN23], H2, p. 114). Nếu giảm chiều cao của hình trụ đi 2 lần, a lần thì thể tích hình trụ giảm đi mấy lần?

3 ([BBN23], H3, p. 114). Có 2 cốc hình trụ, cốc to có chiều cao gấp rưỡi chiều cao cốc nhỏ & đường kính đáy gấp đôi đường kính đáy cốc nhỏ. Phải đong đầy bao nhiêu cốc nước nhỏ để đổ đầy được cốc to?

4 ([BBN23], VD1, p. 115). Cắt hình trụ bằng 1 mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là 1 hình vuông có diện tích bằng $S = 36 \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.

5 ([BBN23], VD2, p. 115). 1 hình trụ có chu vi đáy $P = 24\pi \text{ cm}$ & diện tích toàn phần là $S = 768\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hình trụ.

6 ([BBN23], VD3, p. 115). 1 hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính đáy là $a = 3 \text{ cm}$. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $S = 292.5\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hộp sữa đó.

7 ([BBN23], VD4, p. 116). 1 hình trụ có bán kính đáy R & chiều cao $2R$. Vẽ 1 đường sinh AB cố định. Lấy điểm M trên đường tròn đáy có chứa A & đặt $\widehat{ABM} = \alpha$. Tìm giá trị của α để độ dài BM lớn nhất. Tính GTLN đó.

Hint. Trong hình trụ, đường sinh vuông góc với đáy nên vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong đáy.

8 ([BBN23], VD5, p. 116). 1 con kiến bò trên mặt ngoài 1 cái cốc hình trụ từ A ở mép dưới để đến M ở mép trên. AB là đường sinh đi qua A . $AB = a = 15 \text{ cm}$, $\widehat{BOM} = \alpha = 105^\circ$, & bán kính đáy hộp là $r = 6 \text{ cm}$. Tính độ dài ngắn nhất mà kiến phải bò.

9 ([BBN23], 8.1., p. 117). 1 hình trụ có chiều cao $h = 5 \text{ cm}$. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính thể tích hình trụ.

10 ([BBN23], 8.2., p. 117). 1 thùng phuy hình trụ có số đo m^2 diện tích xung quanh đúng bằng số đo m^3 thể tích. Tính bán kính đáy của thùng.

11 ([BBN23], 8.3., p. 117). Tỷ số giữa diện tích xung quanh & diện tích toàn phần của 1 hình trụ là $a = \frac{3}{5}$. Biết bán kính đáy $r = 6 \text{ cm}$, tính chiều cao hình trụ.

*e-mail: nguyenquanhong@gmail.com, website: <https://nqbh.github.io>. Ben Tre City, Vietnam.

- 12 ([BBN23], 8.4., p. 117). 1 hình trụ có thể tích $V = 300 \text{ cm}^3$ & diện tích xung quanh $S = 120 \text{ cm}^2$. Tính diện tích toàn phần hình trụ.
- 13 ([BBN23], 8.5., p. 117). 1 hình trụ có diện tích xung quanh $s = 24\pi \text{ cm}^2$ & diện tích toàn phần $S = 42\pi \text{ cm}^2$. Tính thể tích hình trụ.
- 14 ([BBN23], 8.6., p. 117). 1 hình trụ có đường kính đáy bằng $a = \frac{2}{3}$ chiều cao. Cắt hình trụ này bằng 1 mặt phẳng chứa trục ta được 1 hình chữ nhật có diện tích $S = 54 \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.
- 15 ([BBN23], 8.7., p. 117). 1 chai thủy tinh dung tích $V = 0.75 \text{ l}$ có phần dưới là hình trụ. Trong chai có nước đến độ cao $h = 10.3 \text{ cm}$ & được đánh dấu bằng 1 vạch đỏ. Nút kín rồi bấc ngược chai thì mực nước vẫn đúng vạch đỏ. Tính bán kính đáy chai (phần bên trong chai).
- 16 ([BBN23], 8.8., p. 117). 1 hình trụ có chiều cao $h = 18 \text{ cm}$ & diện tích toàn phần $S = 176\pi \text{ cm}^2$. (a) Chứng minh diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy. (b) Tính tỷ số $\frac{S_{xq}}{S_d}$ trong trường hợp tổng quát.
- 17 ([BBN23], 8.9., p. 117). 1 lọ hình trụ được “đặc khít” trong 1 hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là $V = 270 \text{ cm}^3$, tính thể tích hộp giấy.
- 18 ([BBN23], 8.10., p. 117). 1 hình lăng trụ đứng có chiều cao $h = 5 \text{ cm}$. Đáy của lăng trụ là 1 tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông dài $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$. Tính thể tích hình trụ nội tiếp hình lăng trụ này.
- 19 ([BBN23], p. 118). 1 chiếc cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy sữa. Tìm cách để rót ra đúng 1 nửa cốc sữa.
- 20 ([BBN23], p. 118). Vì sao phích nước, bể chứa xăng đều là hình trụ?
- 21 ([BBN23], p. 118). Vì sao bể (có nắp) chứa chất lỏng hình trụ có đường kính bằng chiều cao thì tốn ít vật liệu nhất?
- 22 ([Tuy23], VD29, p. 158). 1 hình trụ có thiết diện qua trục là 1 hình vuông. Biết thể tích hình trụ là $128\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính bán kính đáy. (b) Tính tỷ số giữa diện tích xung quanh & diện tích toàn phần.
- 23 ([Tuy23], 156., p. 159). 1 thùng hình trụ có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần. Biết bán kính đáy là 40 cm , tính dung tích của thùng.
- 24 ([Tuy23], 157., p. 159). 1 hình trụ có bán kính đáy là 5 cm , có thể tích là $200\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính diện tích của thiết diện qua trục. (b) Thiết diện $ABB'A'$ song song với trục OO' , AB là dây cung của đường tròn tâm O . Tính khoảng cách từ O đến AB để cho thiết diện đó là 1 hình vuông.
- 25 ([Tuy23], 158., p. 160). Từ 1 tấm tôn hình chữ nhật có kích thước ab , $a > b$, cuộn lại thành mặt xung quanh của 1 hình trụ. Phải cuộn theo chiều nào của tấm tôn để được 1 hình trụ không đáy có thể tích lớn nhất?
- 26 ([Tuy23], 159., p. 160). Muốn sản xuất 1 loại thùng phuy hình trụ chứa xăng dầu có thể tích V cho trước. Tìm mối quan hệ giữa chiều cao h & bán kính R để tốn ít vật liệu nhất.
- 27 ([Tuy23], 160., p. 160). Muốn làm 1 thùng tôn hình trụ không có nắp để đựng nước, chứa được $\approx 8\pi \text{ l}$ nước. Phải làm chiếc thùng đó có chiều cao & bán kính đáy là bao nhiêu để tốn ít vật liệu nhất?
- 28 ([Bin23], VD46, p. 114). 1 chai nước có phía dưới là hình trụ chứa 1 lượng nước có chiều cao 10 cm . Lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là 1 hình trụ có chiều cao 8 cm . Tính thể tích của chai, biết đường kính của đáy chai bằng 10 cm .
- 29 ([Bin23], 341., p. 114). Có 3 vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm cùng có khối lượng bằng 2 kg & cùng có đường kính đáy bằng 10 cm . Tính chiều cao của mỗi vật, biết khối lượng riêng của chì là 11.3 kg/dm^3 , khối lượng riêng của sắt là 7.8 kg/dm^3 , khối lượng riêng của nhôm là 2.7 kg/dm^3 .
- 30 ([Bin23], 342., p. 114). 1 băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành 1 cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2 cm , đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6 cm . Tính chiều cao của băng giấy.
- 31 ([Bin23], 343., p. 114). Cần cưa 1 thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được 1 khúc gỗ hình chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước đáy của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.
- 32 ([Bin23], 344., p. 114, Kiến & mật). 1 con kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của 1 lọ thủy tinh hình trụ không có nắp, nhìn thấy 1 giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B ở mặt trong của lọ. Biết A cách miệng lọ 5 cm , B cách miệng lọ 2 cm , & độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48 cm . Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.
- 33 ([Bin23], 345., p. 114). Chứng minh trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

2 Cone – Hình Nón

[1] Quay $\triangle AOB$ vuông tại O 1 vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định được 1 hình nón có đáy: hình tròn $(O; R)$, đỉnh A , mặt xung quanh, đường sinh $AB = l$, chiều cao $AO = h$. [2] Hình nón có diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi Rl$, diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$, thể tích $V = \frac{1}{3}S_d h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. [3] Hình nón cắt với 2 đáy $(O'; r), (O; R)$ có diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi(R + r)l$, diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$, thể tích $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

[Thá+24, Chap. X, §2, pp. 98–103]: HD1. HD2. LT1. HD3. LT2. HD4. 1. 2. 3. 4.

34 ([Tuy23], VD30, p. 161). Mặt xung quanh của 1 hình nón khai triển thành 1 hình quạt $100^\circ 48'$, bán kính 25 cm. Tính diện tích toàn phần & thể tích hình nón đó.

35 ([Tuy23], 161., p. 162). Cho $\triangle ABC$ vuông tại C . Biết $BC = a, AC = b$. Quay tam giác vuông này 1 vòng lần lượt quanh cạnh AC, BC , được 1 hình nón đỉnh A & 1 hình nón đỉnh B . So sánh tỷ số thể tích của 2 hình nón với tỷ số diện tích xung quanh của 2 hình nón ấy.

36 ([Tuy23], 162., p. 162). Từ 1 khúc gỗ hình trụ, tiện thành 1 hình nón có thể tích lớn nhất. Biết thể tích phần gỗ bị tiện bỏ đi là $200\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính thể tích hình nón. (b) Giả sử chiều cao của hình nón là 12 cm. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

37 ([Tuy23], 163., p. 162). 1 hình nón có đường cao bằng h & có thiết diện qua trục là 1 tam giác đều. (a) Chứng minh diện tích đáy bằng $\frac{1}{2}$ diện tích xung quanh. (b) Cắt hình nón bằng 1 nửa mặt phẳng song song với đáy tạo ra 1 hình nón cắt. Tính chiều cao của hình nón cắt biết diện tích xung quanh của nó bằng diện tích đáy lớn.

38 ([Tuy23], 164., p. 163). 1 hình nón cắt có các bán kính đáy là $R = 20 \text{ cm}, r = 12 \text{ cm}$, & đường cao $h = 15 \text{ cm}$. (a) Tính diện tích xung quanh của hình nón cắt. (b) Tính thể tích của hình nón sinh ra hình nón cắt đó.

39 ([Tuy23], 165., p. 163). 1 hình nón cắt, bán kính đáy lớn bằng 8 cm, đường cao bằng 12 cm, & đường sinh bằng 13 cm. (a) Tính bán kính đáy nhỏ. (b) Tính diện tích xung quanh & thể tích của hình nón cắt đó.

40 ([Bin23], VD47, p. 115). Cho $\triangle OBC$ vuông tại O . Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được 1 hình nón có thể tích 800π , còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được 1 hình nón có thể tích 1920π . Tính OB, OC .

41 ([Bin23], 346., p. 116). An uống rượu ở 1 cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu. An đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?

42 ([Bin23], 347., p. 116). 1 hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O , đường kính AB , $\angle ASB = 60^\circ$. Qua trung điểm I của SO , kẻ đường thẳng song song với AB , cắt mặt xung quanh của hình nón ở C, D . Tính thể tích hình nón biết $CD = 6$.

43 ([Bin23], 348., p. 116). 1 hình nón có chiều cao h . 2 đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành 2 phần có tỷ số diện tích là $1 : 2$. Tính thể tích hình nón.

44 ([Bin23], 349., p. 116). $\triangle ABC$ có $BC = a$, chiều cao tương ứng bằng h . Tính thể tích hình tạo thành khi quay tam giác 1 vòng quanh cạnh BC .

45 ([Bin23], 350., p. 116). Hình thang vuông $ABCD$ có $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 2 tia phân giác $\angle C, \angle D$ cắt nhau tại trung điểm của AB . Biết $AB = 8$, diện tích hình thang bằng 40. Tính diện tích xung quanh của hình nón cắt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang 1 vòng quanh trục AB .

46 ([Bin23], 351., p. 116). Tính số đo của cung AB của 1 hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được 1 hình nón có thể tích lớn nhất.

3 Sphere – Hình Cầu

[1] Quay nửa hình tròn tâm O 1 vòng quanh đường kính AB cố định ta được 1 hình cầu. [2] Thiết diện: Cắt hình cầu (mặt cầu) bán kính R bởi 1 mặt phẳng ta được 1 hình tròn (đường tròn) bán kính r : Bán kính đường tròn lớn $r = R$ nếu mặt phẳng cắt đi qua tâm. Bán kính đường tròn $r < R$ nếu mặt phẳng cắt không đi qua tâm. [3] Hình cầu có diện tích $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$, thể tích $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. [4] Hình cầu nội tiếp hình trụ thì bán kính hình cầu bằng bán kính đáy hình trụ, chiều cao hình trụ bằng đường kính

hình cầu, $V_c = \frac{2}{3}V_{tr}$. [5] Công thức tính thể tích các vật thể có 2 đáy song song: $V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$ với h : chiều cao của vật thể, B_1 : diện tích đáy dưới, B_2 : diện tích thiết diện trung bình (thiết diện qua trung điểm của chiều cao), B_3 : diện tích đáy trên.

[Thá+24, Chap. X, §3, pp. 104–108]: HD1. HD2. LT1. HD3. HD4. LT2. HD5. 1. 2. 3. 4.

47 ([Tuy23], VD31, p. 163). 1 vật nặng hình cầu rơi xuống 1 nền cát phẳng để lại 1 vết lõm hình chảo có đường kính 72 cm & nơi sâu nhất là 24 cm. Tính thể tích của vật hình cầu đó.

- 48 ([Tuy23], 166., p. 164). Chứng minh diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần hình trụ ngoại tiếp nó.
- 49 ([Tuy23], 167., p. 164). 1 mặt phẳng cắt 1 hình cầu bán kính R theo 1 hình tròn có diện tích bằng $\frac{3}{16}$ diện tích mặt cầu. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng cắt.
- 50 ([Tuy23], 168., p. 165). 1 vật hình cầu nằm trên mặt sân bằng phẳng. Tại 1 thời điểm có ánh nắng mặt trời, bóng của quả cầu cách tiếp điểm của quả cầu trên mặt sân là 6 m, trong khi đó 1 chiếc cọc đóng vuông góc với mặt sân, cao 1 m có bóng dài 0.75 m. Tính thể tích khối cầu.
- 51 ([Tuy23], 169., p. 165). 1 hình nón có đỉnh là tâm 1 hình cầu, có đáy là hình tròn tạo bởi 1 mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $441\pi \text{ cm}^2$, thể tích của nó là $2940\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích mặt cầu.
- 52 ([Tuy23], 170., p. 165). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2a$, $\widehat{B} = 30^\circ$. Quay tam giác vuông này 1 vòng quanh AB được 1 hình nón đỉnh B . Chứng minh: (a) Diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB . (b) Thể tích hình nón bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình cầu đường kính AB .
- 53 ([Bin23], VD48, p. 117). Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được đồn khít trong 1 khung hình tam giác đều có chu vi bằng 858 mm. Tính bán kính của mỗi quả bi-a.
- 54 ([Bin23], 352., p. 117). 1 quả bóng hình cầu bán kính 13 cm nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18 cm. Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng & mặt hồ.
- 55 ([Bin23], 353., p. 117). 1 quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng là 1 hình elip với độ dài lớn nhất của bóng là 1 m. Biết 1 cột cao 1 m lúc đó có bóng dài 2 m, tính bán kính quả bóng.
- 56 ([Bin23], 354., pp. 117–118). 1 hình cầu nội tiếp 1 hình trụ, i.e., hình cầu được đặt khít vào trong hình trụ. Tính: (a) Tỷ số giữa diện tích mặt cầu & diện tích toàn phần hình trụ. (b) Tỷ số giữa thể tích hình cầu & thể tích hình trụ.
- 57 ([Bin23], 354., p. 117). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. (a) Chứng minh tồn tại 1 hình cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình hộp chữ nhật. (b) Tính thể tích của hình cầu đó biết 3 kích thước của hình hộp chữ nhật là: (i) 6, 8, 26. (ii) $a, b, c > 0$.

4 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCX, pp. 109–110]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

- 58 ([Tuy23], VD32, p. 165). Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ 2 tia tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đã cho. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = x \leq R$. Từ C vẽ 1 tiếp tuyến thứ 2 với nửa đường tròn, tiếp xúc với nửa đường tròn tại M , cắt By tại D . (a) Tính BD theo R, x . (b) Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác $ABDC$. (c) Quy hình vẽ 1 vòng quanh trục AB . Tính x để tổng thể tích 2 hình nón đỉnh O có đáy lần lượt là 2 hình tròn có bán kính AC, BD đúng bằng thể tích của hình cầu đường kính AB .
- 59 ([Tuy23], 171., p. 167). 1 bồn chứa xăng dầu có phần dưới là 1 hình trụ mà chiều cao bằng đường kính đáy & phần trên là 1 bán cầu có đường kính bằng đường kính hình trụ. Biết diện tích toàn phần của bồn chứa là 445 cm^2 , tính thể tích của nó.
- 60 ([Tuy23], 172., p. 167). Cho hình cầu $(O; R)$ đường kính AB . M là trung điểm OB . Mặt phẳng qua M & vuông góc với AB cắt hình cầu theo 1 hình tròn (M) . (a) Tính thể tích hình nón đỉnh A đáy là thiết diện hình tròn (M) . (b) 1 hình cầu nội tiếp hình nón này. Tính tỷ số diện tích mặt cầu này với diện tích hình tròn lớn của hình cầu $(O; R)$.

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.