

# Problem: Plane Geometry – Bài Tập: Hình Học Phẳng

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 31 tháng 1 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

Latest version:

- *Problem: Plane Geometry – Bài Tập: Hình Học Phẳng.*  
URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_6/plane\\_geometry/problem/NQBH\\_plane\\_geometry\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/problem/NQBH_plane_geometry_problem.pdf).
- *Problem & Solution: Plane Geometry – Bài Tập & Lời Giải: Hình Học Phẳng.*  
URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_6/plane\\_geometry/solution/NQBH\\_plane\\_geometry\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_6/plane_geometry/solution/NQBH_plane_geometry_solution.pdf).

## Mục lục

<b>1 Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng</b>	<b>1</b>
<b>2 Line segment – Đoạn Thẳng</b>	<b>4</b>
2.1 Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng	7
2.2 Compute length of a segment – Tính 1 đoạn thẳng	9
<b>3 Ray – Tia</b>	<b>9</b>
3.1 Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia	11
<b>4 Angle – Góc</b>	<b>11</b>
4.1 Số đo góc	12
4.2 2 góc bù nhau, phụ nhau	12
4.3 2 góc kề nhau	13
4.4 Tia phân giác của 1 góc	13
<b>5 Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác</b>	<b>14</b>
<b>6 Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc</b>	<b>15</b>
<b>7 Đếm Số. Đếm Hình</b>	<b>16</b>
<b>Tài liệu</b>	<b>17</b>

## 1 Plane. Point. Line – Mặt Phẳng. Điểm. Đường Thẳng

[1] 3 hình hình học không định nghĩa: mặt phẳng, điểm, đường thẳng. Điểm được đặt tên bằng chữ cái in hoa, e.g.,  $A, B, C, D, \dots, M, N, P, Q, \dots, X, Y, Z$ . Đường thẳng được đặt tên bằng chữ cái in thường, e.g.,  $a, b, c, d, \dots, m, n, p, q, \dots, x, y, z$ . [2] Về vị trí của điểm & đường thẳng: Với 1 đường thẳng bất kỳ, có vô số điểm thuộc đường thẳng đó & có vô số điểm không thuộc đường thẳng đó. Điểm  $A$  thuộc đường thẳng  $d$  ký hiệu là  $A \in d$ . Điểm  $B$  không thuộc đường thẳng  $d$  ký hiệu là  $B \notin d$ . [3] Tiên đề về sự xác định đường thẳng: Có 1 & chỉ 1 đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt. Khi 1 đường thẳng đi qua 2 điểm  $A, B$ , có đường thẳng  $AB$  hoặc đường thẳng  $BA$ . 1 quan hệ hình học được định nghĩa: 3 điểm thẳng hàng. Khi 3 điểm  $A, B, C$  cùng thuộc 1 đường thẳng thì chúng *thẳng hàng*. Nếu 3 điểm  $A, B, C$  không cùng thuộc bất cứ 1 đường thẳng nào thì chúng *không thẳng hàng*. [4] 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào. [5] Với 2 đường thẳng bất kỳ thì giữa chúng hoặc có 1 điểm chung (2 đường thẳng cắt nhau), hoặc không có điểm chung nào (2 đường thẳng song song), hoặc có vô số điểm chung (2 đường thẳng trùng nhau). [6] Tính chất về thứ tự của 3 điểm trên đường thẳng: Trong 3 điểm thẳng hàng, có 1 điểm & chỉ 1 điểm nằm giữa 2 điểm còn lại. 1 quan hệ hình học không định nghĩa: Điểm nằm giữa 2 điểm khác. [7] Với 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng mà điểm  $B$  không nằm giữa 2 điểm  $A, C$ , điểm  $C$  không nằm giữa 2 điểm  $A, B$ , thì điểm  $A$  phải nằm giữa 2 điểm  $B, C$ . [8] Với 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng mà 2 điểm  $A, B$  nằm cùng phía đối với điểm  $C$  & 2 điểm  $A, C$  nằm cùng phía đối với điểm  $B$ , thì điểm  $A$  nằm giữa 2

\*e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com), website: <https://nqbh.github.io>, Ben Tre City, Vietnam.

điểm  $B, C$ . [9] Nếu điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $B, C$  mà điểm  $M$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$  & điểm  $N$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$  thì điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $M, N$ . [10] Vị trí tương đối của 2 đường thẳng: Song song:  $a \parallel b \Leftrightarrow a \cap b = \emptyset$ , i.e.,  $a, b$  không có điểm chung. Cắt nhau:  $|a \cap b| = 1$ , i.e.,  $a, b$  có đúng 1 điểm chung. Trùng nhau:  $a \equiv b \Leftrightarrow |a \cap b| \geq 2 \Leftrightarrow |a \cap b| = \infty$ , i.e.,  $a, b$  có (ít nhất) 2 điểm chung.

SGK: [Thá+23, §1, p. 79]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. SBT: [Thá23]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.

1 ([Bin+23], H1–H4, p. 57). Đ/S? Nếu sai, sửa cho đúng. (a) Với mỗi đường thẳng  $a$ , có các điểm thuộc  $a$  & các điểm không thuộc  $a$ . (b) Nếu 2 đường thẳng có 2 điểm chung thì chúng có vô số điểm chung. (c) Nếu điểm  $M$  không nằm giữa  $A, B$  thì 3 điểm  $A, B, M$  không thẳng hàng. (d) Cho 3 điểm  $A, B, C$ . Nếu không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại thì 3 điểm đó không thẳng hàng.

2 ([Bin+23], VD1, p. 57). (a) Vẽ 2 đường thẳng  $a, b$  cắt nhau tại  $O$ . Lấy  $A \in a, B \in b, A \neq O, B \neq O$ . (b)  $A, O, B$  thẳng hàng không?

3 ([Bin+23], VD2, p. 57). Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, 3 điểm  $B, C, D$  cũng thẳng hàng.  $A, B, C, D$  thẳng hàng không?

4 ([Bin+23], VD3, p. 58). Trên đường thẳng  $d$  lấy 4 điểm  $E, F, G, H$  theo thứ tự đó. (a)  $F$  nằm giữa 2 điểm nào? (b)  $G$  nằm giữa 2 điểm nào? (c) Đếm số bộ 3 điểm thẳng hàng.

5 ([Bin+23], VD4, p. 58). Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$  trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tìm số đường thẳng vẽ được bằng 2 phương pháp: (a) Liệt kê. (b) Lập luận.

6. Chứng minh: (a) Có  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  đoạn thẳng tạo bởi  $n$  điểm phân biệt. (b) Có  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  đường thẳng tạo bởi  $n$  điểm phân biệt trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

7 ([Bin+23], VD5, p. 59). Cho 1 số điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm được tất cả 36 đường thẳng. Tính số điểm đã cho.

8 ([Bin+23], VD6, p. 59). Cho 3 đường thẳng phân biệt. Tính số giao điểm của 3 đường thẳng này.

9. (a) Tính số giao điểm của 4 đường thẳng phân biệt. (b) Tính số giao điểm của  $n \in \mathbb{N}^*$  đường thẳng phân biệt.

10 ([Bin+23], VD7, p. 60). Cho 10 đường thẳng đôi một cắt nhau, trong đó có đúng 3 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm. Đếm số giao điểm.

11. Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  đường thẳng đôi một cắt nhau, trong đó có 1 số bộ đường thẳng cùng đi qua 1 điểm. Đếm số giao điểm.

12 ([Bin+23], 10.1., p. 60). Trên đường thẳng  $d$  lấy 5 điểm  $A, B, C, D, E$  theo thứ tự đó.  $C$  nằm giữa 2 điểm nào?

13 ([Bin+23], 10.2., p. 60). Cho 3 điểm  $A, B, C$ . Biết mỗi điểm  $A, B$  đều không nằm giữa 2 điểm còn lại. Tìm điều kiện để: (a)  $C$  nằm giữa 2 điểm còn lại. (b)  $C$  không nằm giữa 2 điểm còn lại.

14 ([Bin+23], 10.3., p. 60). Cho 201 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

15 ([Bin+23], 10.4., p. 60). Cho 15 điểm trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

16 ([Bin+23], 10.5., p. 60). Cho 12 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Nếu bớt đi 4 điểm thì số đường thẳng vẽ được giảm đi bao nhiêu?

17 ([Bin+23], 10.6., p. 60). Cho 1 số điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tính số điểm cho trước nếu số đường thẳng vẽ được là: (a) 120. (b) 300.

18 ([Bin+23], 10.7., p. 60). Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$ . Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đường thẳng.

19 ([Bin+23], 10.8., p. 60). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Tìm điều kiện của 4 điểm để số đường thẳng vẽ được là 4.

20 ([Bin+23], 10.9., p. 60). Vẽ 4 đường thẳng trong đó có đúng 2 đường thẳng song song sao cho số giao điểm: (a) Nhiều nhất. (b) Ít nhất.

21 ([Bin+23], 10.10., p. 61). Cho 1 số điểm trong đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Biết số đường thẳng vẽ được là 53. Tính số điểm.

22 ([Bin+23], 10.11., p. 61). Cho biết 3 đường thẳng  $a, b, m$  cùng đi qua 1 điểm. 3 đường thẳng  $a, b, n$  cùng đi qua 1 điểm. Chứng minh 4 đường thẳng  $a, b, m, n$  đồng quy.

23 ([Bin+23], 10.12., p. 61). Cho 3 đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một tại  $A, B, C$ .  $A, B, C$  thẳng hàng không?

24 ([Bin+23], 10.13., p. 61). Vẽ điểm  $M$  nằm giữa  $P, Q$ , điểm  $Q$  nằm giữa 2 điểm  $P, N$ . Chứng minh  $M, N, P, Q$  thẳng hàng.

- 25 ([Bin+23], 10.14., p. 61). Cho 8 đường thẳng đôi một cắt nhau. Đếm số giao điểm nếu: (a) Trong số các đường thẳng đã cho, không có 3 đường thẳng nào cùng đi qua 1 điểm. (b) Mỗi giao điểm đều là điểm chung của 2 đường thẳng, chỉ trừ 1 giao điểm là điểm chung của đúng 4 đường thẳng.
- 26 ([Bin+23], 10.15., p. 61). Cho 1 số điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng. Vẽ các đường thẳng đi qua các cặp điểm. Biết số đường thẳng vẽ được là 31. Đếm số điểm.
- 27 ([Bin+23], p. 61). Trồng 7 cây thành 5 hàng, mỗi hàng 3 cây.
- 28 ([Tuy23], VD8, p. 87, [Bin23], 1., p. 65). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  sao cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng; 3 điểm  $B, C, D$  cũng thẳng hàng. Hỏi 4 điểm  $A, B, C, D$  có thẳng hàng không? Vì sao?
29. Trên mặt phẳng, cho  $n$  điểm  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Giả sử 3 điểm bất kỳ trong số chúng đều thẳng hàng. Hỏi  $n$  điểm đó có thẳng hàng không?
30. Trên mặt phẳng, cho  $n$  điểm  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Giả sử 3 điểm  $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$  thẳng hàng  $\forall i = 1, 2, \dots, n-2$ . Hỏi  $n$  điểm đó có thẳng hàng không?
- 31 ([Tuy23], VD9, p. 88). Trên đường thẳng  $a$  lấy 4 điểm  $M, N, P, Q$  theo thứ tự đó. Hỏi: (a) Điểm  $N$  nằm giữa 2 điểm nào? (b) Điểm  $P$  không nằm giữa 2 điểm nào?
- 32 ([Tuy23], VD10, p. 88). Cho 12 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi: (a) Vẽ được tất cả bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu thay 12 điểm bằng  $n$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , thì vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 33 ([Tuy23], 38., p. 88). Vẽ 5 điểm  $C, D, E, F, G$  không thẳng hàng nhưng 3 điểm  $C, D, E$  thẳng hàng; 3 điểm  $E, F, G$  thẳng hàng.
- 34 ([Tuy23], 39., p. 89). Trái Đất quay quanh Mặt Trời; Mặt Trăng quay quanh Trái Đất. Mặt Trời chiếu sáng tới Trái Đất & Mặt Trăng. Khi 3 thiên thể này thẳng hàng thì xảy ra nhật thực hoặc nguyệt thực (là hiện tượng Mặt Trời hoặc Mặt Trăng đang sáng bỗng nhiên bị che lấp & tối đi). Hỏi: (a) Khi xảy ra nhật thực thì Mặt Trăng ở vị trí nào? (b) Khi xảy ra nguyệt thực thì Trái Đất ở vị trí nào?
- 35 ([Tuy23], 40., p. 89). Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm 2 đường chéo. Qua  $O$ , vẽ 2 đường thẳng  $a, b$  sao cho  $a$  cắt cạnh  $AB, CD$  lần lượt tại  $M, N$ ,  $b$  cắt cạnh  $AD, BC$  lần lượt tại  $E, F$ . Có bao nhiêu trường hợp 1 điểm nằm giữa 2 điểm khác? Kể ra tất cả các trường hợp đó.
- 36 ([Tuy23], 41., p. 89). Theo bài toán trước, ta có thể trồng 9 cây thành 8 hàng, mỗi hàng 3 cây. Vẽ sơ đồ trồng 9 cây thành: (a) 9 hàng, mỗi hàng 3 cây; (b) 10 hàng, mỗi hàng 3 cây.
- 37 ([Tuy23], 42., p. 89). Cho 2 điểm  $A, B$ . (a) Vẽ đường thẳng  $m$  đi qua  $A, B$ ; (b) Vẽ đường thẳng  $n$  đi qua  $A$  nhưng không đi qua  $B$ ; (c) Vẽ đường thẳng  $p$  không có điểm chung nào với đường thẳng  $m$ .
- 38 ([Tuy23], 43., p. 89). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xác định điểm  $M$  sao cho 3 điểm  $M, A, B$  thẳng hàng; 3 điểm  $M, C, D$  thẳng hàng.
- 39 ([Tuy23], 44., p. 89). Cho 3 điểm  $C, O, D$  thẳng hàng. Biết điểm  $C$  không nằm giữa 2 điểm  $O, D$ , điểm  $O$  không nằm giữa 2 điểm  $C, D$ . Hỏi trong 3 điểm đã cho, điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 40 ([Tuy23], 45., p. 89). Cho 3 điểm  $A, B, C$  trong đó không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại. Hỏi 3 điểm  $A, B, C$  có thẳng hàng không?
- 41 ([Tuy23], 46., p. 89). Cho 6 điểm. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Hỏi: (a) Nếu trong 6 điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng? (b) Nếu trong 6 điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng thì sẽ vẽ được bao nhiêu đường thẳng?
- 42 ([Tuy23], 47., p. 89). Giải bóng đá vô địch quốc gia hạng chuyên nghiệp có 16 đội tham gia đấu vòng tròn 2 lượt đi & về. Tính tổng số trận đấu.
- 43 ([Tuy23], 48., p. 89). Cho  $n$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Biết số đường thẳng vẽ được là 36, tính giá trị của  $n$ .
- 44 ([Tuy23], 49., p. 89). Cho 11 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hỏi: (a) Nếu trong số đó không có 3 đường thẳng nào cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng? (b) Nếu trong 11 đường thẳng đó có đúng 5 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm thì có tất cả bao nhiêu giao điểm của chúng?
- 45 ([Tuy23], 50., p. 90). Cho  $n$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Tìm  $n$  biết nếu có thêm 1 điểm (không thẳng hàng với bất kỳ 2 điểm nào trong số  $n$  điểm đã cho) thì số đường thẳng vẽ được tăng thêm là 8.
- 46 ([Tuy23], 51., p. 90). Cho 13 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Nếu ta bớt đi 4 điểm thì số đường thẳng vẽ được giảm đi bao nhiêu?

- 47 ([Tuy23], 52., p. 90). Cho  $n$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nếu bớt đi 1 điểm thì số đường thẳng vẽ được qua các cặp điểm giảm đi 10 đường thẳng, tính  $n$ .
- 48 ([Bin23], VD1, p. 64). Cho 2 đường thẳng cắt nhau. Nếu vẽ thêm 1 đường thẳng thứ 3 cắt cả 2 đường thẳng trên thì số giao điểm của các đường thẳng thay đổi như thế nào?
- 49 ([Bin23], VD2, p. 64). Giải thích vì sao 2 đường thẳng phân biệt hoặc có 1 điểm chung, hoặc không có điểm chung nào.
- 50 ([Bin23], 2., p. 65). Vẽ 5 điểm  $A, B, C, D, O$  sao cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, 3 điểm  $B, C, D$  thẳng hàng, 3 điểm  $C, D, O$  không thẳng hàng. (a)  $A, B, D$  có thẳng hàng không? Vì sao? (b) Kẻ các đường thẳng, mỗi đường thẳng đi qua ít nhất 2 điểm trong 5 điểm nói trên. Kể tên các đường thẳng trong hình vẽ (các đường thẳng trùng nhau chỉ kể là 1 đường thẳng).
- 51 ([Bin23], 3., p. 65). Cho các điểm  $A, B, C, D, E$  thuộc cùng 1 đường thẳng theo thứ tự ấy. Điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm nào? Điểm  $C$  không nằm giữa 2 điểm nào?
- 52 ([Bin23], 4., p. 65). Cho  $A, B, C$  là 3 điểm thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu  $A$  không nằm giữa  $B$  &  $C$ ,  $B$  không nằm giữa  $A$  &  $C$ ?
- 53 ([Bin23], 5., p. 65). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  trong đó điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A$  &  $C$ , điểm  $B$  nằm giữa  $A$  &  $D$ . Có thể khẳng định điểm  $D$  nằm giữa  $B$  &  $C$  không?
- 54 ([Bin23], 6., p. 65). (a) Xếp 10 điểm thành 5 hàng, mỗi hàng có 4 điểm. (b) Xếp 7 điểm thành 6 hàng, mỗi hàng có 3 điểm. (c) Người ta trồng 12 cây thành 6 hàng, mỗi hàng có 4 cây. Vẽ sơ đồ vị trí của 12 cây đó.
- 55 ([BC23], VD1.1, p. 6). Vẽ 5 điểm  $A, B, C, M, N$  trong đó 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, 3 điểm  $A, B, M$  không thẳng hàng & 3 điểm  $A, B, N$  thẳng hàng. (a) Giải thích vì sao vẽ được như vậy. (b) Chứng minh 4 điểm  $A, B, C, N$  cùng thuộc 1 đường thẳng  $d$ . (c)  $D/S$ ?  $A \in d, B \notin d, M \in d, N \notin d$ . (d) 2 đường thẳng  $AN, BC$  có phân biệt không? 2 đường thẳng  $AB, MN$  trùng nhau không? (e) Có bao nhiêu đường thẳng đi qua từng cặp 2 điểm trong số 5 điểm đó.
- 56 ([BC23], VD1.2, p. 7). (a) Cho 4 điểm phân biệt. Cút qua 2 điểm, vẽ được 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng. (b) Qua 5 điểm vẽ được nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng?
- 57 ([BC23], VD1.3, p. 9). Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E, F$  lần lượt cùng thuộc 1 đường thẳng  $d$ . (a)  $C$  nằm giữa 2 điểm nào? (b)  $B$  nằm giữa 2 điểm nào? (c)  $E$  không nằm giữa 2 điểm nào?
- 58 ([BC23], VD1.4, p. 9). Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Biết 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, 3 điểm  $B, C, E$  thẳng hàng, 3 điểm  $C, E, F$  thẳng hàng. Chứng minh 5 điểm  $A, B, C, D, E, F$  thẳng hàng.

## 2 Line segment – Đoạn Thẳng

[1] Đoạn thẳng  $AB$  là hình gồm 2 điểm  $A, B$  & tất cả các điểm nằm giữa  $A, B$ . Đoạn thẳng  $AB$  còn gọi là đoạn thẳng  $BA$ . 2 điểm  $A, B$  là 2 *mút* (hoặc 2 *đầu*) của đoạn thẳng  $AB$ . Mỗi đoạn thẳng có 1 độ dài. Độ dài đoạn thẳng là 1 số lớn hơn 0. [2] Có thể so sánh 2 đoạn thẳng bằng cách so sánh độ dài của chúng. [3] 2 đoạn thẳng  $AB, CD$  cắt nhau tại điểm  $O$ . Điểm  $O$  gọi là *giao điểm* của 2 đoạn thẳng  $AB, CD$ , viết  $AB \cap CD = \{O\}$ . Điểm  $O$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ , điểm  $O$  nằm giữa 2 điểm  $C, D$ . [4] Đoạn thẳng  $AB$  & tia  $Ox$  cắt nhau tại điểm  $I$ , gọi là *giao điểm* của tia  $Ox$  & đoạn thẳng  $AB$ , viết  $Ox \cap AB = \{I\}$ . Điểm  $I$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ , 2 tia  $OI, Ox$  trùng nhau. [5] Đoạn thẳng  $AB$  & đường thẳng  $xy$  cắt nhau tại điểm  $K$ , gọi là *giao điểm* của đường thẳng  $xy$  & đoạn thẳng  $AB$ , viết  $xy \cap AB = \{K\}$ . Điểm  $K$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ , 2 tia  $Kx, Ky$  đối nhau. [6] Tính chất cộng các đoạn thẳng: Điểm  $M$  nằm giữa  $A, B \Leftrightarrow AM + MB = AB$ . Tổng quát: Độ dài đường gấp khúc  $A_1A_2 \dots A_n$  bằng độ dài đoạn thẳng  $A_1A_n$ , i.e.,  $\text{length}(A_1A_2 \dots A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$  thẳng hàng theo thứ tự ấy. Nếu  $A, B$  thuộc tia  $Ox$  &  $OA < OB$  thì  $A$  nằm giữa  $O, B$ . [7] Vẽ đoạn thẳng trên tia: Trên tia  $Ox$  bao giờ cũng vẽ được 1 & chỉ 1 điểm  $M$  sao cho  $OM = a$ . Trên tia  $Ox$  nếu có 2 điểm  $M, N$  sao cho  $OM < ON$  thì điểm  $M$  nằm giữa  $O, N$ . See [Wikipedia/line segment](#).

- 59 ([Bin+23], VD1, p. 67). Cho đoạn thẳng  $AB = 6$ . Lấy điểm  $M$  nằm giữa  $A, B$ , điểm  $N$  nằm giữa  $B, M$  sao cho  $AM = 3, MN = 1$ . Tính  $BN$ .
- 60 ([Bin+23], VD2, p. 68). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$ . Lấy 2 điểm  $C, D$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AC = BD = 2$ . Tính  $CD$ .
- 61 ([Bin+23], VD3, p. 68). Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy 2 điểm  $E, F$  sao cho  $E$  nằm giữa  $A, F$ ,  $F$  nằm giữa  $B, E$ . Biết  $AF = BE$ , so sánh  $AE, BF$ .
- 62 ([Bin+23], VD4, p. 68). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $OM = 2, ON = a > 2$ . Tìm  $a$  để: (a)  $MN = 2OM$ . (b)  $MN = bOM$  với  $b \in (0, \infty)$ .
- 63 ([Bin+23], VD5, p. 69). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = a, OB = 4$ . Tính  $AB$ .
- 64 ([Bin+23], VD6, p. 69). Cho 3 điểm  $A, B, C$ . Biết  $AB = 3, BC = 4, CA = 5$ . Chứng minh: (a) Trong 3 điểm đã cho, không có điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại. (b)  $A, B, C$  không thẳng hàng.



- 65 ([Bin+23], 12.1., p. 70). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Vẽ các đoạn thẳng đi qua các cặp điểm. Đếm số đoạn thẳng & liệt kê.
- 66 ([Bin+23], 12.2., p. 70). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  điểm. Vẽ được tất cả 21 đoạn thẳng đi qua các cặp điểm. Tính  $n$ .
- 67 ([Bin+23], 12.3., p. 70). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Lấy 1 số điểm nằm trên đoạn thẳng này không trùng với 2 đầu đoạn thẳng. Tính số điểm phải lấy để có 15 đoạn thẳng.
- 68 ([Bin+23], 12.4., p. 70). Cho điểm  $M$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ . Chứng minh  $\max\{AM, BM\} < AB$ .
- 69 ([Bin+23], 12.5., p. 70). Cho đoạn thẳng  $AB = 6$ . Lấy điểm  $M$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AM = 2BM$ . Tính  $AM, BM$ .
- 70 ([Bin+23], 12.6., p. 70). Cho 3 điểm  $A, B, M$  nằm trên đường thẳng  $xy$ . Biết  $AB = 4$ , tính: (a) Tổng  $MA + MB$  nếu  $M$  nằm giữa  $A, B$ . (b) Hiệu  $MA - MB$  nếu  $M$  nằm trên tia đối của tia  $BA$ . (c) Hiệu  $MB - MA$  nếu  $M$  nằm trên tia đối của tia  $AB$ .
- 71 ([Bin+23], 12.7., p. 70). Cho 3 điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.  $M$  không nằm giữa 2 điểm còn lại. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu  $MN = 5, PM = 3$ ?
- 72 ([Bin+23], 12.8., p. 70). Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Biết  $AB = 2, BC = 5$ . Tính  $AC$ .
- 73 ([Bin+23], 12.9., p. 70). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, M$  sao cho  $OA = 2, AM = m > 2$ . Tính  $OM$ .
- 74 ([Bin+23], 12.10., p. 70). Trên tia  $Ox$  lấy 3 điểm  $C, D, E$  sao cho  $OC = 2, OD = 3, OE = 5$ . Tìm các cặp đoạn thẳng bằng nhau.
- 75 ([Bin+23], 12.11., p. 70). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 1, OB = 4$ . Trên tia đối của tia  $Bx$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 2$ . (a) Tính  $AB$ . (b) So sánh  $OA, AM$ .
- 76 ([Bin+23], 12.12., p. 70). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 1 điểm  $O$  & 2 điểm  $C, D$  sao cho  $OC = 2, OD = 3$ . Tính  $CD$ .
- 77 ([Bin+23], 12.13., p. 70). Cho đoạn thẳng  $MN = 3$ . Trên tia đối của tia  $MN$  lấy điểm  $P$ , trên tia đối của tia  $NM$  lấy điểm  $Q$  sao cho  $MP = NQ = 1$ . Chứng minh  $PN = MQ$ .
- 78 ([Bin+23], 12.14., p. 70). Cho đoạn thẳng  $AB = 3$ . Trên tia  $AB$  lấy điểm  $E$  sao cho  $AE = a > 3$ . Trên tia  $BA$  lấy điểm  $F$  sao cho  $BF = b > 3$ . Tìm điều kiện của  $a, b$  để  $BE < AF$ .
- 79 ([Bin+23], 12.15., p. 70). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $OM = 3, MN = 2$ . Tính  $ON$ .
- 80 ([Bin+23], p. 71). Có thể vẽ bằng 1 đường liền nét mà không nhấc bút khỏi tờ giấy & không vẽ đoạn thẳng nào quá 1 lần không? (a) Hình chữ nhật  $ABCD$  với đường chéo  $AC$ . (b) Hình chữ nhật  $ABCD$  với 2 đường chéo  $AC, BD$ .
- 81 ([Bin23], VD7, p. 68). Chứng minh nếu 2 điểm  $A, B$  cùng thuộc tia  $Ox$  &  $OA < OB$  thì điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $O, B$ .
- 82 ([Bin23], VD8, p. 69). Cho đoạn thẳng  $AB = 3$  cm. Điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $AB$  sao cho  $BC = 1$  cm. Tính đoạn thẳng  $AC$ .
- 83 ([Bin23], 15., p. 69). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Trên tia đối của tia  $AB$  lấy  $C$ , trên tia đối của tia  $BA$  lấy  $D$  sao cho  $BD = AC$ . Chứng minh  $BC = AD$ .
- 84 ([Bin23], 16., p. 69). Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài 8 cm. Trên tia  $AB$  lấy  $C$  sao cho  $AC = 2$  cm, trên tia  $BA$  lấy  $D$  sao cho  $BD = 3$  cm. Tính  $CB, CD$ .
- 85 ([Bin23], 17., p. 69). Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Biết  $AB = 5$  cm,  $BC = 2$  cm. Tính  $AC$ .
- 86 ([Bin23], 18., p. 69). Trên tia  $Ox$ , vẽ 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = a, OB = b$ . Điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $AC = \frac{1}{2}BC$ . Tính  $OC$ .
- 87 ([Bin23], 19., p. 69, triangle number). Gọi  $T_n, n \in \mathbb{N}^*$ , là số điểm trên mặt phẳng sao cho chúng tạo thành 1 tam giác đều có cạnh bằng  $n - 1$  đơn vị & 2 điểm gần nhau (không có điểm nào ở giữa 2 điểm đó trong số  $T_n$  điểm đó) thì cách nhau 1 đơn vị. Tìm công thức các số tam giác  $T_n$ .
- See, e.g., [Wikipedia/số tam giác](#), [Wikipedia/triangle number](#).  
[Bin23, 20., p. 70].
- 88 ([Bin23], VD9, p. 70). Cho điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Chứng minh  $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ .
- 89 ([Bin23], VD10, p. 71). Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài  $a$ . Trên tia  $AB$  lấy  $M$  sao cho  $AM = \frac{a}{2}$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $AB$ .
- 90 ([Bin23], VD11, p. 71). Cho đoạn thẳng  $OA = a$ , điểm  $B$  nằm trong đoạn thẳng  $OA$  sao cho  $OB = b$ .  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm  $OA, OB, AB$ . Tính  $IM, IN$  theo  $a, b$ .
- 91 ([Bin23], 21., p. 71). Cho  $\triangle ABC$ , 2 đường trung tuyến  $BD, CE$  cắt nhau ở  $K$ . Kẻ đoạn thẳng  $DE$ . Do độ dài rồi cho biết mỗi cạnh của  $\triangle KDE$  bằng nửa cạnh nào của  $\triangle KBC$ .

- 92 ([Bin23], 22., p. 71). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$  cm, điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$ , 2 điểm  $D, E$  lần lượt là trung điểm  $AC, CB$ . Tính  $DE$ .
- 93 ([Bin23], 23., p. 71). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$  cm, điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AC = 2$  cm, 2 điểm  $D, E$  lần lượt là trung điểm  $AC, CB$ .  $I$  là trung điểm  $DE$ . Tính  $DE, CI$ .
- 94 ([Bin23], 24., p. 71). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng theo thứ tự ấy.  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . (a) Biết  $AC = 4$  cm,  $BD = 6$  cm, tính  $MN$ . (b) Biết  $MN = 5$  cm, tính  $AC + BD$ .
- 95 ([Bin23], 25., p. 71). Cho đoạn thẳng  $AB$  với  $O$  là trung điểm. Điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $OB$ ,  $OC = 1$  cm. Tính  $CA - CB$ .
- 96 ([Bin23], 26., p. 72). Cho đoạn thẳng  $AB$ , điểm  $C$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$ ,  $O$  là trung điểm của  $AC$ . Biết  $OB = 3$  cm. Tính  $AB + BC$ .
- 97 ([Bin23], 27., p. 72). (a) Cho đoạn thẳng  $AB = 2a$ , điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$ , 2 điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $AC, BC$ . Chứng minh  $MN = a$ . (b) Kết quả (a) còn đúng không nếu điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $AB$ ?
- 98 ([Bin23], 28., p. 72). Cho điểm  $C$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  có  $CA = a, CB = b$ .  $I$  là trung điểm  $AB$ . Tính  $IC$ .
- 99 ([Bin23], 29., p. 72). Cho điểm  $C$  thuộc đường thẳng  $AB$  nhưng không thuộc đoạn thẳng  $AB$ . Biết  $CA = a, CB = b$ .  $I$  là trung điểm  $AB$ . Tính  $IC$ .
- 100 ([Bin23], 30., p. 72). Trên tia  $Ox$  có 2 điểm  $A, B$ ,  $OA = a, OB = b$ .  $I$  là trung điểm  $AB$ . Tính  $OI$ .
- 101 ([Bin23], 31., p. 72). Cho điểm  $O$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$  có  $OA = a, Ob = b$ .  $M, N, I$  lần lượt là trung điểm  $OA, OB, AB$ . Tính  $IM, IN$ .
- 102 ([BC23], VD1.11, p. 13). Vẽ 2 đoạn thẳng  $AB, CD$  cắt nhau tại điểm  $I$ . Kể tên các đoạn thẳng.
- 103 ([BC23], VD1.12, p. 13). Cho 2 đường thẳng phân biệt  $AB, CD$ . Biết đường thẳng  $AB$  cắt đoạn thẳng  $CD$  ở đường thẳng  $CD$  cắt đoạn thẳng  $AB$ . Chứng minh đoạn thẳng  $AB$  cắt đoạn thẳng  $CD$ .
- 104 ([BC23], VD1.13, p. 14). 2 đường thẳng  $d, d'$  cắt nhau tại  $O$ . Lấy 4 điểm  $A, B, M, N$  trên đường thẳng  $d'$  sao cho  $O$  nằm giữa  $A, B$ ,  $B$  nằm giữa  $O, M$ ,  $N$  nằm giữa  $O, A$ .  $d$  có cắt 3 đoạn thẳng  $AB, AM, AN$  không?
- 105 ([BC23], VD1.14, p. 15). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Nếu không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (b) Nếu có 3 điểm thẳng hàng, giả sử là  $A, B, C$ , đếm số đoạn thẳng. (c) Xét trường hợp cả 4 điểm thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng. (d) Trong trường hợp 4 điểm thuộc đường thẳng  $xy$ , tính số đoạn thẳng, tia.
- 106 ([BC23], VD1.15, p. 16). Qua 2 điểm vẽ được 1 & chỉ 1 đường thẳng. (a) Cho 3 điểm không thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong 3 điểm đó? (b) Cho 4 điểm, 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó? (c) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 trong các điểm đó?
- 107 ([BC23], VD1.16, p. 17). Cho 50 điểm. Vẽ được bao nhiêu đường thẳng qua 2 điểm trong 50 điểm đó nếu: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng? (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng? (c) Có đúng 10 điểm thẳng hàng. (d) Có đúng  $n$  điểm thẳng hàng với  $n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 50$ .
- 108 ([BC23], VD1.17, p. 18). Cho  $n$  điểm mà không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Biết  $n = 123$ . Tính số đường thẳng vẽ được. (b) Biết số đường thẳng vẽ được là 378. Tính số điểm  $n$ . (c) Số đường thẳng có thể là 2012 không?
- 109 ([BC23], VD1.18, p. 19). Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng khác nhau. (a) Có thể vẽ 4 đường thẳng đôi một cắt nhau sao cho số giao điểm của các đường thẳng là 1, 2, 3 không? (b) Tính số giao điểm vẽ được nhiều nhất.
- 110 ([BC23], VD1.19, p. 19). Biết bất kỳ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau & không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của các đường thẳng nếu có  $n$  đường thẳng: (a)  $n \in \{3, 4, 5\}$ . (b)  $n = 100$ . (c) Xét trường hợp tổng quát  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .
- 111 ([BC23], 1.1., pp. 20–21). Cho 6 điểm  $A, B, C, O, M, N$  sao cho  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $A, B, O$  thẳng hàng,  $O, C, M$  thẳng hàng,  $C, M, N$  thẳng hàng. (a) Chứng minh  $O, C, M, N$  cùng thuộc 1 đường thẳng. (b) 2 đường thẳng  $MN, AB$  trùng nhau không? (c) Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng được vẽ & liệt kê.
- 112 ([BC23], 1.2., p. 21). Chứng minh 5 điểm  $A, B, C, M, N$  thẳng hàng biết  $A, B, M$  thẳng hàng,  $B, C, N$  thẳng hàng,  $A, M, N$  thẳng hàng.
- 113 ([BC23], 1.3., p. 21). Cho 4 điểm  $A, B, C, M$  trong đó  $B$  nằm giữa  $A, C$ ,  $M$  nằm giữa  $A, B$ . Trong 3 điểm  $B, C, M$ , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 114 ([BC23], 1.4., p. 21). Cho 2 tia  $AM, AN$  đối nhau. (a) Lấy điểm  $B$  sao cho điểm  $N$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ .  $A$  có nằm giữa 2 điểm  $M, N$  không? (b) Lấy điểm  $C \neq A$  nằm giữa 2 điểm  $M, N$ .  $C$  có nằm giữa  $B, M$  không? (c) Trong 3 điểm  $A, B, C$ , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?

- 115** ([BC23], 1.5., p. 21). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) Đếm số đoạn thẳng & liệt kê. (b) Nếu 4 điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng nhưng không theo thứ tự đó, đếm số đoạn thẳng. (c) Lấy điểm  $O$  không thuộc đường thẳng  $AB$ . Nối điểm  $O$  với  $A, B, C, D$ . Đếm số đoạn thẳng.
- 116** ([BC23], 1.6., p. 21). Cho  $n$  đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường nào đồng quy. (a) Tính số giao điểm của các đường thẳng khi  $n = 124$ . (b) Tìm  $n$  để số giao điểm bằng 124.
- 117** ([BC23], 1.7., p. 21). Cho  $n$  điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. (a) Tính số đường thẳng vẽ được khi  $n = 24$ . (b) Tìm  $n$  để số đường thẳng bằng 240.
- 118** ([BC23], 1.8., p. 21). Cho  $n$  điểm, nối từng cặp 2 điểm. (a) Tính số đoạn thẳng khi  $n = 100$ . (b) Tìm  $n$  để số đoạn thẳng bằng tổng các số từ 1 đến 99.
- 119** ([BC23], 1.9., p. 21). 5 đường thẳng chia mặt phẳng thành nhiều nhất bao nhiêu miền?
- 120** ([BC23], VD2.1, p. 22). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$  cm. Lấy điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $AB$  mà  $BM = 2$  cm. Tính đoạn thẳng  $AM$ .
- 121** ([BC23], VD2.2, p. 22). Cho đoạn thẳng  $AB = a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $AB$  mà  $BM = b$ . Tính đoạn thẳng  $AM$  theo  $a, b \in (0, \infty)$ .
- 122** ([BC23], VD2.3, p. 23). Cho  $C$  là 1 điểm thuộc đoạn thẳng  $AB$  & không trùng với 2 điểm  $A, B$ .  $A$  có nằm giữa  $B, C$  không?
- 123** ([BC23], VD2.4, p. 24). 3 điểm  $A, B, C$  có thẳng hàng không nếu: (a)  $AB = 2, BC = 7, AC = 5$ ? (b)  $AB = 3, BC = 7, AC = 5$ ? (c) Đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Tìm điều kiện của  $a, b, c \in (0, \infty)$  để: (i)  $A, B, C$  thẳng hàng. (ii)  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- 124** ([BC23], VD2.5, p. 24). Cho độ dài 3 đoạn thẳng  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại biết:  $0 < \min\{b, c\} \leq \max\{b, c\} < a$  nhưng  $a < b + c$ ?
- 125** ([BC23], 2.1., p. 25). Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  theo thứ tự đó cùng thuộc 1 đường thẳng  $xy$ . (a) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng  $xy$  & liệt kê. (b) Chỉ ra các đoạn thẳng là tổng các đoạn thẳng khác.
- 126** ([BC23], 2.2., p. 25). Cho 3 điểm  $A, B, C$  mà độ dài của 3 đoạn thẳng thỏa mãn  $AB + BC > AC$ . Có thể kết luận  $A, B, C$  không thẳng hàng không?
- 127** ([BC23], 2.3., p. 25).  $A, B, C$  có thẳng hàng không nếu: (a)  $AB = \frac{1}{2}, BC = \frac{1}{3}, CA = \frac{1}{6}$ ? (b)  $AB = 5, BC = 11, CA = 7$ ?
- 128** ([BC23], 2.4., p. 25). Cho  $A, B, C$  thẳng hàng. Điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại nếu: (a)  $AB = 2, BC = 13, CA = 11$ ? (b)  $AC = 7, BC = 11$ ?
- 129** ([BC23], 2.5., p. 25). Cho  $A, B, C, D$  thẳng hàng theo thứ tự đó. (a) So sánh  $AB, CD$  biết  $AC = BD$ . (b) So sánh  $AC, BD$  biết  $AB = CD$ .
- 130** ([BC23], 2.6., p. 25).  $A, B, O$  thuộc đường thẳng  $xy$ . Tính đoạn thẳng  $AB$  biết  $OA + OB = a, OA - OB = b, 0 < b < a$ .
- 131** ([BC23], 2.7., p. 25). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$ . Trên tia  $BA$  lấy  $M$  sao cho  $AM = 2$ . (a) Trong 3 điểm  $A, B, M$ , điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại? (b) Tính đoạn thẳng  $BM$ . (c) Lấy điểm  $N$  thuộc tia đối của tia  $BA$  sao cho  $BN = 1$ . Tính  $MN$ .
- 132** ([BC23], 2.8., p. 25). Cho đoạn thẳng  $AB = 7$  & điểm  $M$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $BM = 5$ . Trên tia đối của tia  $MA$  lấy  $N$  sao cho  $MN = 7$ . Chứng minh  $AM = BN$ .

## 2.1 Midpoint of a segment – Trung điểm của 1 đoạn thẳng

[1] Trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là điểm nằm giữa  $A, B$  & cách đều  $A, B$ . Điểm  $M$  cách đều  $A, B$  có nghĩa là độ dài 2 đoạn thẳng  $MA, MB$  bằng nhau:  $MA = MB$ . Trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  còn được gọi là *điểm chính giữa* của đoạn thẳng  $AB$ . Mỗi đoạn thẳng chỉ có 1 trung điểm duy nhất. [2] Nếu  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $M$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$  &  $MA = MB$ . [3] Tính chất trung điểm: Nếu  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì: (i)  $AM = BM = \frac{1}{2}AB$ . (ii) Các đoạn thẳng có chung 1 trung điểm: Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  cùng thuộc đường thẳng  $xy$  theo thứ tự đó. Nếu biết các đoạn thẳng  $AD, BC$  có chung trung điểm thì  $AB = CD, AC = BD$ . [4] Dấu hiệu trung điểm (nhận biết trung điểm của 1 đoạn thẳng): (i) Nếu trên đoạn thẳng  $AB$  tồn tại 1 điểm  $M$  sao cho  $AM = \frac{1}{2}AB$  (hoặc  $BM = \frac{1}{2}AB$ ) thì điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . (ii) Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  thuộc đường thẳng  $xy$  theo thứ tự đó. Nếu  $AB = CD$  thì  $AD, BC$  có chung 1 trung điểm. Nếu  $AC = BD$  thì  $AD, BC$  có chung 1 trung điểm.

- 133** ([Bin+23], H1, p. 72).  $O$  là trung điểm của  $AB$ , &  $K$  là trung điểm của  $AO$ . Tính  $OA, OB, AK, BK$  theo  $AB$ .
- 134** ([Bin+23], H2, p. 72). 4 điểm  $A, B, C, D$  cùng nằm trên đường thẳng  $xy$  theo thứ tự đó. Biết  $AB = BC = CD$ . Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 135** ([Bin+23], H3, p. 73). Điểm  $M$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$  &  $AM = \frac{1}{2}AB$ .  $M$  có phải là trung điểm của  $AB$  không?

- 136** ([Bin+23], H4, p. 73). Cho 3 điểm  $O, A, B$ . Biết  $OA = OB = 2, AB = 3$ .  $O$  là trung điểm của  $AB$  không?
- 137** ([Bin+23], VD1, p. 73). Cho 3 điểm  $M, N, O$ , trong đó  $OM = ON = 3$ . Tính  $MN$  để  $O$  là trung điểm của  $MN$ .
- 138** ([Bin+23], VD2, p. 73). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 3, OB = 5$ .  $M$  là trung điểm  $AB$ . Tính  $OM$ .
- 139** ([Bin+23], VD3, p. 74). Cho đoạn thẳng  $AB = 5$ . Lấy điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AC = 2$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AB$ . Tính  $MN$ .
- 140** ([Bin+23], VD4, p. 74). Trên tia  $Ox$  lấy  $M, N, P$  sao cho  $OM = 1, ON = 3, OP = 5$ . Chứng minh  $N$  là trung điểm  $MP$ .
- 141** ([Bin+23], VD5, p. 74). Cho điểm  $O$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $OA, OB$ . Biết  $AB = 6$ , tính  $MN$ .
- 142** ([Bin+23], VD6, p. 75). Cho đoạn thẳng  $AB = 6$ .  $O$  là trung điểm  $AB$ . Lấy điểm  $M$  nằm giữa  $O, A$ ,  $N$  nằm giữa  $O, B$  sao cho  $AM = BN = 1$ . Chứng minh 2 đoạn thẳng  $MN, AB$  có chung 1 trung điểm.
- 143** ([Bin+23], VD7, p. 75). Cho  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ .  $O$  là điểm nằm giữa  $A, M$ . Chứng minh  $OM = \frac{1}{2}(OB - OA)$ .
- 144** ([Bin+23], 13.1., p. 76). Cho đoạn thẳng  $AB$ .  $O$  là trung điểm  $AB$ ,  $K$  là trung điểm  $OB$ . Biết  $AK = 6$ , tính  $AB$ .
- 145** ([Bin+23], 13.2., p. 76). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 5 điểm  $A, B, C, D, E$  theo thứ tự đó sao cho  $AB = BC = CD = DE$ . Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 146** ([Bin+23], 13.3., p. 76). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 1 điểm  $O$ . Trên tia  $Ox$  lấy điểm  $A$ , trên tia  $Oy$  lấy 2 điểm  $B, C$  sao cho  $OA = OB = 2, OC = 4$ . Tìm các trung điểm của các đoạn thẳng.
- 147** ([Bin+23], 13.4., p. 76). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 3, OB = 4$ .  $M$  là trung điểm  $OB$ . Chứng minh  $A$  là trung điểm  $BM$ .
- 148** ([Bin+23], 13.5., p. 76). Cho 3 điểm  $M, O, N$  thẳng hàng. Biết  $MO = ON = 3$ . Chứng minh  $O$  là trung điểm  $MN$ .
- 149** ([Bin+23], 13.6., p. 76). Cho đoạn thẳng  $AB$  &  $M$  là 1 điểm nằm giữa  $A, B$ . Xác định vị trí của điểm  $M$  để  $AM + AB = 3BM$ .
- 150** ([Bin+23], 13.7., p. 76). Trên tia  $Ox$  lấy 3 điểm  $M, N, P$  sao cho  $OM = 3, ON = 4, OP = 6$ . Chứng minh: (a)  $M$  là trung điểm  $OP$ . (b)  $N$  không là trung điểm  $MP$ .
- 151** ([Bin+23], 13.8., p. 76). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 1 điểm  $O$ . Trên tia  $Ox$  lấy điểm  $C$ , trên tia  $Oy$  lấy 2 điểm  $D, E$  sao cho  $OC = OD = 2, OE = 3$ . Chứng minh: (a)  $O$  là trung điểm  $CD$ . (b)  $D$  không phải là trung điểm  $OE$ .
- 152** ([Bin+23], 13.9., p. 76). Cho đoạn thẳng  $PQ = 6$ .  $N$  nằm giữa  $P, Q$  sao cho  $PN = 2$ .  $M$  nằm giữa  $N, Q$  sao cho  $NM = 1$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $PQ$ .
- 153** ([Bin+23], 13.10., p. 76). Cho đoạn thẳng  $AB = 6$ . Lấy 2 điểm  $M, N$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AM = BN = 4$ . Chứng minh  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BN, AM$ .
- 154** ([Bin+23], 13.11., p. 76). Cho đoạn thẳng  $AB = 7.5$ .  $E$  nằm giữa  $A, B$  sao cho  $AE = \frac{2}{3}AB$ .  $F$  là trung điểm  $AE$ . Chứng minh: (a)  $AF = BF = BE$ . (b)  $E$  là trung điểm  $BF$ .
- 155** ([Bin+23], 13.12., p. 76). Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 2, OB = 3$ . Trên tia  $Bx$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = 1$ . Chứng minh: (a)  $B$  là trung điểm  $AC$ . (b)  $A$  là trung điểm  $OC$ .
- 156** ([Bin+23], 13.13., p. 76). Trên tia  $Ox$  lấy  $A, B$  sao cho  $OB > OA = 4$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $OB, AB$ . Tính  $MN$ .
- 157** ([BC23], VD3.1, p. 28). Cho 2 tia đối nhau  $Ox, Ox'$ . (a) Trên tia  $Ox$  lấy  $A$  sao cho  $OA = 6$ . Trên tia  $Ox'$  lấy  $B$  sao cho  $OB = 6$ . Chứng minh  $O$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ . (b) Lấy  $C$  thuộc tia  $Ox'$  sao cho  $OC = 3$ .  $C$  là trung điểm của cá đoạn thẳng nào?
- 158** ([BC23], VD3., p. 28). Trên tia  $Ox$  lấy 3 điểm  $A, B, C$  sao cho  $OA = 3, OB = 6, OC = 9$ . (a) Trên tia  $Ox$  có bao nhiêu đoạn thẳng mà các điểm đầu là 2 trong số 4 điểm  $A, B, C, O$  & liệt kê. (b) Trong 4 điểm  $A, B, C, O$ , điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng đã liệt kê. (c) Chứng minh  $OC, AB$  có chung 1 trung điểm.
- 159** ([BC23], VD3.3, p. 29). Cho  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ ,  $C, D$  lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng  $AM, BM$ .  $E, G$  lần lượt là trung điểm của  $MC, MD$ .  $AB, EF$  có chung 1 trung điểm không?
- 160** ([BC23], VD3.4, p. 30). Ghi 5 điểm  $O, A, B, C, D$  tại các điểm biểu diễn số  $0, 1, -2, -4, 4$  trên trục số. Có các điểm nào là trung điểm của các đoạn thẳng có điểm đầu là 2 trong số 5 điểm đã cho?



## 2.2 Compute length of a segment – Tính 1 đoạn thẳng

[1] Nếu  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  thì  $AM + MB = AB$ . [2] Nếu  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $AM = MB = \frac{1}{2}AB$ .

**161** ([BC23], VD3.5, p. 31). Cho đoạn thẳng  $AB$  & 1 điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ .  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ . (a) Biết  $AB = 20$ . Tính đoạn thẳng  $MN$ . (b) Giả sử  $MN = a$ . Tính đoạn thẳng  $AB$ .

**162** ([BC23], VD3.6, p. 32). Trên đường thẳng  $xy$  đặt điểm  $O$ . Lấy 2 điểm  $A, B$  thuộc đường thẳng  $xy$  sao cho  $OA = a, OB = b, 0 < b < a$ , trong đó  $O$  nằm giữa  $A, B$ . (a) Tính đoạn thẳng  $AB$ . (b)  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OB$ . Tính đoạn thẳng  $MN$ . (c)  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Tính đoạn thẳng  $OC$ . (d) 2 đoạn thẳng  $MC, AN$  có chung 1 trung điểm không?

**163** ([BC23], VD3.7, pp. 32–33). Trên đường thẳng  $xy$  đặt điểm  $O$ . Lấy  $A, B \in xy$  sao cho  $OA = a, OB = b, 0 < b < a$ , trong đó  $B$  nằm giữa  $O, A$ . (a) Tính đoạn thẳng  $AB$ . (b)  $M, N$  lần lượt là trung điểm  $OA, OB$ . Tính đoạn thẳng  $MN$ . (c)  $C$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ . Tính đoạn thẳng  $OC$ . (d) 2 đoạn thẳng  $MC, AN$  có chung 1 trung điểm không?

**164** ([BC23], VD3.8, p. 34). (a) Trên đường thẳng  $xy$  đặt 2 điểm  $A, B$ .  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Lấy  $M \in xy, M \notin \{A, B, O\}$ . So sánh 2 đoạn thẳng  $MA, MB$ . (b) Trên đường thẳng  $xy$  đặt 3 điểm  $A, B, C$  theo thứ tự đó. Xác định vị trí điểm  $M$  trên đường thẳng  $xy$  sao cho  $MB < \min\{MA, MC\}$ .

**165** ([BC23], 3.1., p. 36). Lấy 5 điểm  $A, B, C, D, E$  trên tia  $Ox$  sao cho  $OA = 3, OB = 5, OC = 7, OD = 11, OE = 13$ . (a) Điểm nào là trung điểm của đoạn thẳng nào? (b) Các đoạn thẳng nào có chung 1 trung điểm?

**166** ([BC23], 3.2., p. 36). Cho  $O$  thuộc đường thẳng  $xy$ . Lấy  $A$  thuộc tia  $Ox$  mà  $OA = 5$ ,  $B$  thuộc tia  $Oy$  mà  $OB = 8$ . Giả sử  $C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ . (a) Tính đoạn thẳng  $BC$ . (b) Lấy điểm  $D$  thuộc tia  $Ox$  sao cho  $OD = 8$ . Chứng minh 2 đoạn thẳng  $AC, BD$  có chung 1 trung điểm.

**167** ([BC23], 3.3., p. 36). Trên đoạn thẳng  $AC = 12$ , lấy  $B$  sao cho  $AB = 5$ . (a) Tính đoạn thẳng  $MN$  biết 2 điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của 2 đoạn thẳng  $AB, BC$ . (b) Lấy điểm  $D$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $CD = 7$ . Chứng minh  $C$  là trung điểm đoạn thẳng  $BD$ . (c)  $N$  có là trung điểm đoạn thẳng  $MK$  nếu  $K$  là trung điểm đoạn thẳng  $CD$  không?

**168** ([BC23], 3.4., p. 37). Cho 2 tia đối nhau  $Ox, Ox'$ . Trên tia  $Ox$  lấy 2 điểm  $A, B$  sao cho  $OA = 1, OB = 7$ . Trên tia  $Ox'$  lấy  $C$  sao cho  $OC = 5$ .  $A$  có là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  không?

**169** ([BC23], 3.5., p. 37). Cho 4 điểm  $A, C, D, B$  theo thứ tự thuộc đường thẳng  $xy$ . Biết  $AB = 6, AC = 2, CD = 1$ . Chứng minh  $D$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ .

**170** ([BC23], 3.6., p. 37). Trên đường thẳng  $xy$  đặt 3 điểm  $O, A, B$ . Giả sử  $OA = a, OB = a + b$ . Tính khoảng cách giữa trung điểm  $M$  của  $OA$  & trung điểm  $N$  của  $OB$ .

**171** ([BC23], 3.7., p. 37). Trên đường thẳng  $xy$  đặt 4 điểm phân biệt  $A, B, C, D$  theo thứ tự đó sao cho  $AB = 60, BC = 20, CD = 60$ . Các cặp đoạn thẳng nào có chung trung điểm?

**172** ([BC23], 3.8., p. 37). Cho  $C$  thuộc tia đối của tia  $AB$  hoặc tia đối của tia  $BA$ . Chứng minh  $CM = \frac{1}{2}(AC + BC)$  với  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$ .

**173** ([BC23], 3.9., p. 37). Cho đoạn thẳng  $AA_0 = 1$ . (a) Lấy  $A_1$  là trung điểm đoạn thẳng  $AA_0$ . Tính tỷ số  $\frac{AA_0}{AA_1}$ . (b) Tương tự, lấy các điểm  $A_2, A_3, \dots, A_{2012}$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AA_1, AA_2, \dots, AA_{2021}$ . Đặt  $S := \sum_{i=1}^{2012} \frac{AA_0}{AA_i} = \frac{AA_0}{AA_1} + \frac{AA_0}{AA_2} + \dots + \frac{AA_0}{AA_{2012}}$ . So sánh  $S, S^{2013}$ .

## 3 Ray – Tia

[1] Hình gồm điểm  $O$  & 1 phần đường thẳng bị chia ra bởi điểm  $O$  gọi là 1 tia gốc  $O$ . Tia  $Ox$  còn gọi là 1 nửa đường thẳng gốc  $O$ . Tia  $Ox$  không bị giới hạn về phía  $x$ . [2] 2 tia chung gốc  $Ox, Oy$  tạo thành đường thẳng  $xy$  gọi là 2 tia đối nhau. Mỗi điểm trên đường thẳng là gốc chung của 2 tia đối nhau. Mỗi tia chỉ có 1 tia đối. [3] Cho 2 tia chung gốc  $Ox, Oy$ , có: hoặc đó là 2 tia đối nhau, hoặc là 2 tia trùng nhau, hoặc là 2 tia không đối nhau, không trùng nhau. [4] Về thứ tự của 3 điểm trên 1 đường thẳng: Cho 3 điểm  $A, B, C$  thẳng hàng, nếu 2 tia  $AB, AC$  đối nhau thì điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $B, C$ . [5] Về sự xác định tia: Nếu điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $B, C$  thì 2 tia  $AB, AC$  đối nhau, 2 tia  $BA, BC$  trùng nhau, 2 tia  $CA, CB$  trùng nhau. [6] Điểm  $M$  thuộc tia  $Ox$  thì 2 tia  $OM, Ox$  trùng nhau.  $M \in Ox \wedge M \neq O \Leftrightarrow OM \equiv Ox$ . [7] 2 tia chung gốc & có thêm 1 điểm chung thì trùng nhau.

**174** ([Bin+23], VD1, p. 63). Trên đường thẳng  $xy$  lấy điểm  $O$ . Trên tia  $Ox$  lấy điểm  $A$ , trên tia  $Oy$  lấy điểm  $B$ . (a) Kể tên các tia trùng nhau gốc  $A$  (các tia này chỉ coi là 1). (b) Kể tên các tia đối nhau.

**175** ([Bin+23], VD2, p. 63). Lấy 3 điểm  $C, O, D$  theo thứ tự đó trên đường thẳng  $xy$ . Vẽ tia  $Ot \not\subset xy$ . Lấy  $E, F$  thuộc tia  $Ot$ . Đếm số tia & liệt kê.

- 176** ([Bin+23], VD3, p. 64). Cho 2 tia  $Ox, Oy$  đối nhau. (a) Nêu cách vẽ 2 điểm  $E, F$  sao cho tia  $OE$  trùng với tia  $Ox$ , tia  $OF$  trùng với tia  $Oy$ . (b) Điểm nào nằm giữa 2 điểm khác?
- 177** ([Bin+23], VD4, p. 64). Cho điểm  $O$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ . Vẽ điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm  $A, O$ .  $O$  nằm giữa 2 điểm nào?
- 178** ([Bin+23], VD5, p. 64). Cho điểm  $O$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ . Điểm  $M$  nằm giữa  $O, A$ , điểm  $N$  nằm giữa  $O, B$ .  $O$  nằm giữa 2 điểm nào?
- 179** ([Bin+23], 11.1., p. 64). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 2 điểm  $M, N$ ,  $N$  thuộc tia  $My$ . Xác định vị trí của điểm  $O$  sao cho: (a) 2 tia  $OM, ON$  đối nhau. (b) 2 tia  $OM, ON$  trùng nhau.
- 180** ([Bin+23], 11.3., p. 64). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 2 điểm  $A, B$ ,  $B$  thuộc tia  $Ay$ . Lấy điểm  $O$  nằm ngoài  $xy$ . 1 điểm  $C$  di động trên  $xy$ . Vẽ tia  $OC$ . Xác định vị trí của  $C$  để: (a) Tia  $OC$  không cắt tia  $By$ . (b) Tia  $OC$  không cắt 2 tia  $Ax, By$ . (c) Tia  $OC$  cắt cả 2 tia  $Bx, By$ .
- 181** ([Bin+23], 11.4., p. 64). Cho tia  $Ox$  & 3 điểm  $A, B, C$  sao cho 2 tia  $OA, Ox$  trùng nhau, 2 tia  $OB, OC$  đều là tia đối của tia  $Ox$ . (a) Chứng minh  $O, A, B, C$  thẳng hàng. (b)  $O$  nằm giữa 2 điểm nào?
- 182** ([Bin+23], 11.5., p. 65). Cho biết 2 tia  $NM, NP$  đối nhau, 2 tia  $PN, PQ$  đối nhau. Chứng minh: (a)  $M, N, P, Q$  thẳng hàng. (b)  $P$  nằm giữa 2 điểm  $M, Q$ .
- 183** ([Bin+23], 11.6., p. 65). Cho đường thẳng  $xy$  & điểm  $O \notin xy$ . Lấy  $n \in \mathbb{N}^*$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  trên  $xy$ . Vẽ các tia gốc  $O$  lần lượt đi qua  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Có tất cả 40 tia. Tính  $n$ .
- 184** ([Bin23], VD3, p. 66). Cho 3 điểm  $A, B, C$  trong đó 2 tia  $BA, BC$  đối nhau. Trong 3 điểm  $A, B, C$  điểm nào nằm giữa 2 điểm còn lại?
- 185** ([Bin23], VD4, p. 66). Điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ . Tìm các tia đối nhau, trùng nhau.
- 186** ([Bin23], VD5, p. 66). Cho 2 đoạn thẳng  $AB, CD$  cắt nhau tại điểm  $O$  nằm giữa 2 đầu của mỗi đoạn thẳng. (a) Kể tên các đoạn thẳng. (b) Điểm  $O$  là điểm chung của 2 đoạn thẳng nào?
- [Bin23, VD6, p. 66, 14., p. 68].
- 187** ([Bin23], 7., p. 67).  $O$  là 1 điểm của đường thẳng  $xy$ . Vẽ điểm  $A$  thuộc tia  $Ox$ , vẽ 2 điểm  $B, C$  thuộc tia  $Oy$  sao cho  $C$  nằm giữa  $B, O$ . (a) Đếm số tia, số đoạn thẳng. (b) Kể tên các cặp tia đối nhau.
- 188** ([Bin23], 8., p. 67). Cho 5 điểm  $A, B, C, M, N$  thỏa điểm  $C$  nằm giữa  $A, B$ , điểm  $M$  nằm giữa  $A, C$ , điểm  $N$  nằm giữa  $B, C$ . (a) Tia  $CM, CN$  trùng với tia nào? (b) Vì sao điểm  $C$  nằm giữa  $M, N$ ?
- 189** ([Bin23], 9., p. 67). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ , điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm  $B, D$ . Vì sao điểm  $B$  nằm giữa  $A, D$ ?
- 190** ([Bin23], 10., p. 67). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ , điểm  $D$  nằm giữa 2 điểm  $B, C$ . Điểm  $D$  có nằm giữa  $A, B$  không?
- 191** ([Bin23], 11., p. 67). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ , điểm  $D$  thuộc tia  $BC$  & không trùng  $B$ . Điểm  $B$  có nằm giữa  $A, D$  không?
- 192** ([Bin23], 12., p. 67). Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Vẽ đường thẳng  $a$  không đi qua  $A, B, C$  sao cho đường thẳng  $a$ : (a) Cắt 2 đoạn thẳng  $AB, AC$ . (b) Không cắt mỗi đoạn thẳng  $AB, BC, CA$ .
- 193** ([Bin23], 13., p. 67). (a) Vẽ 6 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác. (b) Vẽ 8 đoạn thẳng sao cho mỗi đoạn thẳng cắt đúng 3 đoạn thẳng khác.
- 194** ([BC23], VD1.5, p. 10). Cho điểm  $O$  thuộc đường thẳng  $xx'$ . Lấy 2 điểm  $A, B$  thuộc tia  $Ox$  sao cho  $A$  nằm giữa  $B, O$ . Đếm số tia. Đếm số cặp tia đối nhau.
- 195** ([BC23], VD1.6, p. 11). Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Đặt tên đường thẳng  $BC$  là  $xx'$ , đường thẳng  $CA$  là  $yy'$  & đường thẳng  $AB$  là  $zz'$ . Liệt kê các cặp tia đối nhau, trùng nhau.
- 196** ([BC23], VD1.7, p. 11). Cho 3 điểm  $A, B, C$ . (a) Khi nào 2 tia  $BA, BC$  đối nhau? (b) Khi nào 2 tia  $CA, CB$  trùng nhau? (c) Khi nào 2 tia  $AB, AC$  không là 2 tia đối nhau & cùng không là 2 tia trùng nhau?
- 197** ([BC23], VD1.8, p. 12). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ . Điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm  $B, D$ .  $C$  có nằm giữa  $A, D$  không?
- 198** ([BC23], VD1.9, p. 12). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, D$  & điểm  $C$  nằm giữa 2 điểm  $B, D$ .  $C$  có nằm giữa  $A, B$  không?
- 199** ([BC23], VD1.10, p. 12). Cho điểm  $A$  nằm giữa 2 điểm  $B, C$ . Biết  $M$  nằm giữa  $A, B$ ,  $N$  nằm giữa  $A, C$ .  $A$  có nằm giữa  $M, N$  không?

### 3.1 Nửa mặt phẳng. Tia nằm giữa 2 tia

[1] Hình gồm đường thẳng  $a$  & 1 phần mặt phẳng bị chia ra bởi  $a$  gọi là 1 nửa mặt phẳng bờ  $a$ . 2 nửa mặt phẳng (I), (II) có chung bờ  $a$  gọi là 2 nửa mặt phẳng đối nhau. [2] Mỗi đường thẳng  $a$  chia mặt phẳng thành 2 phần: Nếu 2 điểm  $A, B$  thuộc 1 phần thì đường thẳng  $a$  không cắt đoạn thẳng  $AB$ . Nếu 2 điểm  $A, B$  thuộc 2 phần khác nhau thì đường thẳng  $a$  cắt đoạn thẳng  $AB$ . [3] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 3 tia  $Ox, Oy, Oz$  chung gốc  $O$ . Nếu có điểm  $A$  thuộc tia  $Ox$ , điểm  $B$  thuộc tia  $Oy$ ,  $A \neq O, B \neq O$ , mà tia  $Oz$  cắt đoạn thẳng  $AB$  tại điểm  $I$  nằm giữa  $A, B$  thì tia  $Oz$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oy$ . [4] Nếu 2 tia  $Ox, Oy$  đối nhau thì mọi tia  $Oz$  khác  $Ox, Oy$  đều nằm giữa 2 tia  $Ox, Oy$ . [5] Dấu hiệu đường thẳng cắt đoạn thẳng: ĐỊNH LÝ PASCH VỀ TAM GIÁC: Có 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng & không điểm nào thuộc đường thẳng  $a$ . Nếu đường thẳng  $a$  cắt đoạn thẳng  $BC$  thì đường thẳng  $a$  hoặc cắt đoạn thẳng  $AB$  hoặc cắt đoạn thẳng  $AC$ . [6] Dấu hiệu nhận biết tia nằm giữa 2 tia: Cho 2 tia  $Oy, Oz$  cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia  $Ox$ . Biết tia  $Oy$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oz$ . Nếu tia  $Om$  nằm giữa 2 tia  $Oy, Oz$ , hoặc tia  $Om$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oy$ , thì tia  $Om$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oz$ .

200 ([BC23], VD4.1, p. 40). Cho 4 điểm  $O, A, B, C$  trong đó  $A, B, C$  thẳng hàng. Biết  $A$  không nằm giữa  $B, C$ ,  $B$  không nằm giữa  $A, C$ . (a) Trong 3 tia  $OA, OB, OC$ , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Vẽ tia  $Om$  là tia đối của tia  $OC$ ,  $M \neq O$ . Trong 3 tia  $OA, OB, OM$ , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

## 4 Angle – Góc

[1] Góc là 1 hình gồm 2 tia chung gốc. Góc chung của tia gọi là đỉnh của góc, 2 tia gọi là 2 cạnh của góc. Có nhiều cách ký hiệu 1 góc, e.g., góc  $xOy$ , góc  $MON$ , góc  $O$ ,  $\angle xOy$ ,  $\widehat{xOy}$ ,  $\widehat{MON}$ . [2] Góc bẹt là góc có 2 cạnh là 2 tia đối nhau. [3] Để vẽ góc thì vẽ đỉnh & vẽ 2 cạnh của góc. Dùng thước đo góc để đo độ lớn của 1 góc.

201 ([Bin23], VD12, p. 72). Cho đường thẳng  $a$  & 3 điểm  $A, B, C$  sao cho  $a$  không cắt 2 đoạn thẳng  $AB, AC$ .  $a$  có cắt đoạn thẳng  $BC$  không?

202 ([Bin23], VD1, p. 73). Cho 5 tia chung gốc  $OA, OB, OC, OD, OE$ . Kể tên các góc.

203 ([Bin23], 32., p. 73). Cho 3 điểm  $A, B, C$  không nằm trên đường thẳng  $a$ , trong đó  $a$  cắt 2 đoạn thẳng  $AB, AC$ .  $a$  có cắt đoạn thẳng  $BC$  không?

204 ([Bin23], 33., p. 73). Cho 3 điểm  $A, B, C$  không nằm trên đường thẳng  $a$  sao cho  $a$  cắt đoạn thẳng  $AB$ , không cắt đoạn thẳng  $BC$ .  $a$  có cắt đoạn thẳng  $AC$  không?

205 ([Bin23], 34., p. 73). 3 điểm  $A, B, C$  không nằm trên đường thẳng  $a$ . Chứng minh hoặc đường thẳng  $a$  không cắt đoạn thẳng nào trong 3 đoạn thẳng  $AB, BC, CA$ , hoặc đường thẳng  $a$  chỉ cắt 2 trong 3 đoạn thẳng đó.

206 ([Bin23], 35., p. 73). 4 điểm  $A, B, C, D$  không nằm trên đường thẳng  $a$ . Chứng minh  $a$  hoặc không cắt, hoặc cắt 3, hoặc cắt 4 đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ .

207 ([Bin23], 36., p. 73). Cho góc bẹt  $xOy$ , vẽ 3 tia  $Oa, Ob, Oc$  thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng có bờ  $xy$ . Đếm số góc & kể tên chúng.

208 ([BC23], VD4.2, p. 41). Đếm số góc tạo bởi: (a) 3 tia chung gốc  $OA, OB, OC$  theo thứ tự đó. (b) 4 tia tia chung gốc  $OA, OB, OC, OD$  theo thứ tự đó. (c) 5 tia tia chung gốc  $OA, OB, OC, OD, OE$  theo thứ tự đó. (d) 100 tia chung gốc. (e)  $n \in \mathbb{N}^*$  tia chung gốc.

209 ([BC23], 4.1., p. 42). Lấy 2 điểm  $M, N$  trên tia  $Ox$  &  $P$  thuộc  $Oy$  là tia đối của tia  $Ox$ ,  $M, N, P$  khác  $O$ . (a) Liệt kê các tia có trên đường thẳng  $xy$ . (b) Đếm số đoạn thẳng trên đường thẳng  $xy$  & liệt kê. (c)  $O$  thuộc các đoạn thẳng nào?

210 ([BC23], 4.2., p. 42). Cho  $A, B, C$  không thuộc đường thẳng  $a$ . (a)  $a$  có thể cắt chỉ 1 trong 3 đoạn thẳng  $AB, BC, CA$  được không? (b) Biết  $a$  không cắt 2 đoạn thẳng  $AB, AC$ .  $a$  có cắt đoạn thẳng  $BC$  không?

211 ([BC23], 4.3., pp. 42–43). Cho đường thẳng  $a$ . (a) Nếu 4 điểm  $A, B, C, D$  không nằm trên đường thẳng  $a$ , hỏi  $a$  có thể cắt bao nhiêu đoạn thẳng trong 6 đoạn thẳng  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ ? (b) Nếu 4 điểm  $A, B, C, D$  không thuộc đường thẳng  $a$  mà đường thẳng  $a$  không cắt các đoạn thẳng  $AB, AC, CD$  thì  $a$  có cắt đoạn thẳng  $AD$  không?

212 ([BC23], 4.4., p. 43). Cho  $M$  nằm giữa 2 điểm  $A, B$ . Lấy  $O$  không thuộc đường thẳng  $AB$ . Vẽ 3 tia  $OA, OB, OM$ . (a) Trong 3 tia  $OA, OB, OM$  thì tia nào không nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Lấy  $N$  sao cho  $A$  nằm giữa  $O, N$ . Trong 2 tia  $OM, ON$  thì tia nào cắt đoạn thẳng  $BN$ ?

213 ([BC23], 4.5., p. 43). Cho 3 điểm  $A, B, C$  nằm ngoài đường thẳng  $a$ . (a) Biết  $a$  cắt 2 đoạn thẳng  $AB, AC$ .  $a$  có cắt đoạn thẳng  $BC$  không? (b) Chứng minh nếu đường thẳng  $a$  cắt đoạn thẳng  $AB$  & không cắt đoạn thẳng  $AC$  thì  $a$  sẽ cắt đoạn thẳng  $BC$ .

## 4.1 Số đo góc

[1] Mỗi góc có 1 số đo, số đo của mỗi góc  $\leq 180^\circ$ . Đơn vị của góc là độ, phút, giây. Các góc đặc biệt: góc nhọn  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , góc vuông  $\alpha = 90^\circ$ , góc tù  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , góc bẹt  $\alpha = 180^\circ$ . [2] So sánh 2 góc bằng cách so sánh các số đo của chúng. [3] Nếu tia  $Oy$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oz$  thì  $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$ . [4] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu có đẳng thức về góc  $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = \widehat{xOz}$  thì tia  $Oy$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oz$ . [5] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Nếu 2 tia  $Oy, Oz$  cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ chứa tia  $Ox$  & có  $\widehat{xOy} < \widehat{xOz}$  thì tia  $Oy$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oz$ .

**214** ([Bin23], VD14, p. 74). Cho tia  $Oc$  nằm giữa 2 tia  $Oa, Ob$  không đối nhau, tia  $Om$  nằm giữa tia  $Oa, Oc$ , tia  $On$  nằm giữa 2 tia  $Ob, Oc$ . Tia  $Oc$  có nằm giữa 2 tia  $Om, On$  không?

**215** ([Bin23], VD15, p. 74). Chứng minh nếu 1 đường thẳng không đi qua các đỉnh của 1 tam giác & cắt 1 cạnh của tam giác ấy thì nó cắt 1 & chỉ 1 trong 2 cạnh còn lại.

**216** ([Bin23], VD16, p. 74). Cho góc tù  $AOB$ . Vẽ 2 tia  $OC, OD$  nằm trong góc  $AOB$  sao cho  $AOC, BOD$  là 2 góc vuông. Chứng minh: (a)  $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ . (b)  $\widehat{AOB}, \widehat{COD}$  bù nhau.

**217** ([Bin23], 37., p. 75). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ , điểm  $D$  thuộc tia  $BC$  & không trùng  $B$ , điểm  $O$  nằm ngoài đường thẳng  $AC$ . Trong 3 tia  $OA, OB, OD$ , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

**218** ([Bin23], 38., p. 75). Cho 2 tia  $Oa, Ob$  không đối nhau. Trên tia  $Oa$  lấy  $A \neq O$ , trên tia  $Ob$  lấy  $B \neq O$ . 1 điểm  $C$  bất kỳ nằm giữa  $A, B$ . Vẽ điểm  $M$  sao cho điểm  $O$  nằm giữa  $C, M$ . (a) Chứng minh tia  $OC$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$ . (b) Trong 3 tia  $OA, OB, OM$ , có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại không? Phát biểu thành 1 tính chất.

**219** ([Bin23], 39., p. 75). Có thể khẳng định trong 3 tia chung gốc, bao giờ cũng có 1 tia nằm giữa 2 tia còn lại không?

**220** ([Bin23], 40., p. 75). 2 đường thẳng  $AB, CD$  cắt nhau ở  $O$ . Biết  $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = 5^\circ$ . Tính  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}, \widehat{AOD}$ .

**221** ([Bin23], 41., p. 75). Cho điểm  $B$  nằm giữa 2 điểm  $A, D$ , điểm  $O$  nằm ngoài đường thẳng  $AD$ . Biết  $\widehat{AOD} = 80^\circ, \widehat{AOB} = 50^\circ$ . Tính  $\widehat{BOD}$ .

**222** ([Bin23], 42., p. 75). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ , vẽ tia  $Oz$  thỏa  $\widehat{yOz} = 30^\circ$ . (a) Tia  $Oz$  có xác định duy nhất không? (b) Tính  $\widehat{xOz}$  trong từng trường hợp.

**223** ([Bin23], 43., p. 75). 2 đường thẳng  $AB, CD$  cắt nhau ở  $O$ . Biết  $\widehat{AOC} = 70^\circ$ . Tính  $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}$ .

**224** ([Bin23], 44., p. 75). Tính góc tạo bởi kim giờ & kim phút của đồng hồ lúc: (a) 2:10. (b) 10:42.

**225** ([Bin23], 45., p. 76). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  nằm giữa  $A, C$ ,  $E$  nằm giữa  $A, B$ . Chứng minh đường thẳng  $BD$  cắt đoạn thẳng  $CE$ , đường thẳng  $CE$  cắt đoạn thẳng  $BD$ .

**226** ([Bin23], 46., p. 76). Cho  $\triangle ABC$ . Chứng minh bao giờ cũng vẽ được 1 đường thẳng không đi qua 3 đỉnh của  $\triangle ABC$  & cắt cả 3 tia  $AB, BC, CA$ .

**227** ([Bin23], 47., p. 76). Cho điểm  $O$  nằm trong  $\triangle ABC$ . Chứng minh: (a) Tia  $BO$  cắt đoạn thẳng  $AC$  tại 1 điểm  $D$  nằm giữa  $A, C$ . (b) Điểm  $O$  nằm giữa  $B, D$ . (c) Trong 3 tia  $OA, OB, OC$ , không có tia nào nằm giữa 2 tia còn lại.

**228** ([BC23], VD5.1, p. 44). Cho 3 tia  $Ox, Oy, Oz$ . Tính  $\widehat{yOz}$  nếu: (a) Tia  $Ox$  nằm giữa 2 tia  $Oy, Oz$  sao cho  $\widehat{xOy} = 80^\circ, \widehat{xOz} = 30^\circ$ . (b)  $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$ .

**229** ([BC23], VD5.2, p. 45). Cho  $\widehat{xOy} = 45^\circ, \widehat{yOz} = 80^\circ, \widehat{zOx} = 35^\circ$ . Trong 3 tia  $Ox, Oy, Oz$  thì tia nào nằm giữa 2 tia còn lại?

## 4.2 2 góc bù nhau, phụ nhau

[1] 2 góc kề nhau là 2 góc có 1 cạnh chung & 2 cạnh còn lại nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa cạnh chung. [2] 2 góc phụ nhau là 2 góc có tổng số đo bằng  $90^\circ$ . 2 góc bù nhau là 2 góc có tổng số đo bằng  $180^\circ$ . [3] 2 góc kề bù là 2 góc vừa kề nhau, vừa bù nhau. [4] Trên nửa mặt phẳng cho trước có bờ chứa tia  $Ox$ , bao giờ cũng vẽ được 1 & chỉ 1 tia  $Oy$  sao cho  $\widehat{xOy} = \alpha$ . [5] Dấu hiệu về tia đối nhau: Nếu  $\widehat{xOy}, \widehat{yOz}$  kề nhau mà  $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$  thì tia  $Ox, Oz$  đối nhau. [6] Dấu hiệu về thứ tự của tia: Cho 2 tia đối nhau  $Ox, Oy$  & 2 điểm  $A, B$  thuộc 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $xy$ . Biết  $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta$ . Nếu  $\alpha + \beta > 180^\circ$  thì tia  $Oy$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$ . Nếu  $\alpha + \beta \leq 180^\circ$  thì tia  $Ox$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$ .

**230** ([BC23], VD5.3, p. 47). Cho góc bẹt  $xOy$ . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $xy$ , vẽ 3 tia  $OA, OB, OC$  sao cho  $\widehat{AOx} = 35^\circ, \widehat{BOx} = \frac{1}{2}\widehat{AOx}, \widehat{COy} = \frac{1}{2}\widehat{AOy}$ . Tính  $\widehat{BOC}$ .

**231** ([BC23], 5.1., p. 48). Cho 3 tia chung gốc  $Ox, Oy, Oz$  sao cho tia đối của tia  $Oz$  nằm giữa 2 tia  $Ox, Oy$ . Chứng minh  $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} + \widehat{zOx} = 360^\circ$ .



**232** ([BC23], 5.2., p. 48). Cho  $\widehat{xOy} = 180^\circ$ . Vẽ 2 tia  $OM, ON$  cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ  $xy$  sao cho  $\widehat{MOx} = \alpha, \widehat{NOy} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$ . Tính  $\widehat{MON}$ .

**233** ([BC23], 5.3., p. 48). Cho  $\widehat{xOy} = 105^\circ, \widehat{xOz} = 125^\circ$ . Tính  $\widehat{yOz}$ .

**234** ([BC23], 5.4., p. 48). Cho 3 tia chung gốc  $OA, OB, OC$  sao cho  $\widehat{AOB} = 40^\circ, \widehat{AOC} = 35^\circ$ . (a) Tính  $\widehat{BOC}$ . (b) Vẽ tia  $OD$  là tia đối của tia  $OA$ . Tính  $\widehat{BOD}, \widehat{COD}$ .

**235** ([BC23], 5.5., p. 48). Cho 3 đường thẳng  $AM, BN, CD$  đồng quy tại  $O$ . (a) Liệt kê các góc kề với  $\widehat{AOD}$ . (b) Liệt kê các góc kề bù với  $\widehat{AOD}$ . (c) Tìm các góc bằng nhau.

**236** ([BC23], 5.6., p. 48). Cho 2 đường thẳng  $AB, CD$  cắt nhau tại  $O$ . Tính  $\widehat{BOC}, \widehat{BOD}$  nếu: (a)  $\widehat{AOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ . (b) Biết  $\widehat{AOC} - \widehat{BOC} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

**237** ([BC23], 5.7., p. 48). Cho 2 tia đối nhau  $OA, OB$ . Chứng minh 2 tia  $OM, ON$  đối nhau, biết 2 tia  $OM, ON$  nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $AB$  mà  $\widehat{AOM} = \widehat{BON} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

### 4.3 2 góc kề nhau

**238** ([Bin23], VD17, p. 76). Chứng minh: (a) Nếu 2 góc kề nhau có 2 cạnh ngoài là 2 tia đối nhau thì 2 góc đó bù nhau. (b) Nếu 2 góc kề nhau mà bù nhau thì 2 cạnh ngoài của chúng là 2 tia đối nhau.

**239** ([Bin23], VD18, p. 77). Cho 3 tia chung gốc  $OA, OB, OC$ . Tính  $\widehat{BOC}$  biết: (a)  $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 30^\circ$ . (b)  $\widehat{AOB} = 130^\circ, \widehat{AOC} = 80^\circ$ . (c)  $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$  với  $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

**240** ([Bin23], 48., p. 78). Cho 3 đường thẳng  $AD, BE, CF$  đồng quy ở  $O$ , trong đó tia  $OB$  nằm giữa 2 tia  $OA, OC$ . Kể tên các góc kề với  $\widehat{AOB}$ .

**241** ([Bin23], 49., p. 78). Cho 2 tia  $Ox, Oy$  đối nhau. Trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau có bờ chứa tia  $Ox$ , vẽ 2 tia  $Om, On$  sao cho  $\widehat{xOm} = 70^\circ, \widehat{yOn} = 70^\circ$ . Chứng minh 2 tia  $Om, On$  đối nhau.

**242** ([Bin23], 50., p. 78). Cho  $\widehat{xOy}, \widehat{xOz}$  kề nhau. Tính  $\widehat{yOz}$  biết: (a)  $\widehat{xOy} = 40^\circ, \widehat{xOz} = 140^\circ$ . (b)  $\widehat{xOy} = 50^\circ, \widehat{xOz} = 70^\circ$ . (c)  $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 130^\circ$ . (d)  $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$  với  $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

**243** ([Bin23], 51., p. 78). Cho 3 tia  $Ox, Oy, Oz$ . Tính  $\widehat{yOz}$  biết: (a)  $\widehat{xOy} = 60^\circ, \widehat{xOz} = 40^\circ$ . (b)  $\widehat{xOy} = 120^\circ, \widehat{xOz} = 100^\circ$ . (c)  $\widehat{xOy} = \alpha, \widehat{xOz} = \beta$  với  $\alpha, \beta \in (0^\circ, 180^\circ)$ .

**244** ([Bin23], 52., p. 78). Cho 4 tia  $OA, OB, OC, OD$  tạo thành 4 góc  $AOB, BOC, COD, DOA$  không có điểm trong chung. Tính số đo mỗi góc ấy biết: (a)  $\widehat{BOC} = 3\widehat{AOB}, \widehat{COD} = 5\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = 6\widehat{AOB}$ . (b)  $\widehat{BOC} = a\widehat{AOB}, \widehat{COD} = b\widehat{AOB}, \widehat{DOA} = c\widehat{AOB}$  với  $a, b, c > 0$ .

**245** ([Bin23], 52., p. 78). Cho 3 góc  $AOB, BOC, COD$  không có điểm trong chung & đều có số đo bằng  $\alpha$ . Tính  $\widehat{AOD}$ .

### 4.4 Tia phân giác của 1 góc

[1]  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB} \Leftrightarrow$  Tia  $OM$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$  &  $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ . Đường thẳng chứa tia phân giác của 1 góc là đường phân giác của góc đó. Mỗi góc không là góc bẹt chỉ có 1 tia phân giác. [2] Nếu tia  $OM$  là phân giác của  $\widehat{AOB}$  thì: Tia  $OM$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$ ,  $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ . [3] Tính chất phân giác của 1 góc: (i) Nếu  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$  thì  $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ . (ii) Cho 4 tia chung gốc  $OA, OB, OC, OD$  xếp theo thứ tự đó mà  $\widehat{AOD} < 180^\circ$ . Nếu  $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$  có chung tia phân giác  $OM$  thì  $\widehat{AOB} = \widehat{COD}, \widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ . [4] Dấu hiệu nhận biết tia phân giác của 1 góc: (i) Nếu trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia  $OA$  vẽ 2 tia  $OB, OM$  sao cho  $\widehat{AOM} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$  thì  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ . (ii) Cho 4 tia chung gốc  $OA, OB, OC, OD$  xếp theo thứ tự đó sao cho  $\widehat{AOD} < 180^\circ$ . Nếu  $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$  thì  $\widehat{AOD}, \widehat{BOC}$  có chung tia phân giác.

**246** ([BC23], VD6.1, p. 51). Cho 2 điểm  $A, B$  nằm trên 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ chứa tia  $Ox$ . (a) Biết  $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 30^\circ$ . Chứng minh tia  $Ox$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ . (b) Cho  $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = 130^\circ$ . Tia  $Ox$  có là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ ? (c) Cho  $\widehat{AOx} = \widehat{BOx} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ . Tìm điều kiện của  $\alpha$  để tia  $Ox$  là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ .

**247** ([BC23], VD6.2, p. 52). Cho góc bẹt  $\widehat{AOB}$ . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ 2 tia  $OM, OC$  sao cho  $\widehat{AOM} = 50^\circ, \widehat{BOC} = 80^\circ$ . Chứng minh tia  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOC}$ .

**248** ([BC23], VD6.3, p. 52). Cho điểm  $O$  thuộc đường thẳng  $xy$ . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $xy$ , vẽ 4 tia  $OA, OB, OC, OD$  sao cho  $\widehat{AOx} = 30^\circ, \widehat{BOx} = 60^\circ, \widehat{COx} = 90^\circ, \widehat{DOx} = 120^\circ$ . Tìm các tia phân giác của các góc.

**249** ([BC23], VD6.4, p. 53). Cho  $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$  không kề nhau. (a) Vẽ hình biết  $\widehat{AOx} = 38^\circ, \widehat{BOx} = 112^\circ$ . Trong 3 tia  $OA, OB, Ox$ , tia nào nằm giữa 2 tia còn lại? (b) Tính  $\widehat{AOB}$ . (c) Vẽ tia phân giác  $OM$  của  $\widehat{AOB}$ . Tính  $\widehat{MOx}$ . (d) Cho  $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ, \alpha \neq \beta$ . Tìm điều kiện giữa  $\alpha, \beta$  để tia  $OA$  nằm giữa 2 tia  $OB, Ox$ . Tính  $\widehat{MOx}$  theo  $\alpha, \beta$ .

**250** ([BC23], VD6.5, p. 54). Cho  $\widehat{AOx}, \widehat{BOx}$  kề nhau. Biết  $\widehat{AOx} = \alpha, \widehat{BOx} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$ . Vẽ tia phân giác  $OM$  của  $\widehat{AOB}$ . Tính  $\widehat{MOx}$  theo  $\alpha, \beta$ .

**251** ([BC23], VD6.6, p. 55). Cho  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$  kề nhau. (a) Vẽ hình biết  $\widehat{AOC} = 54^\circ, \widehat{BOC} = 118^\circ$ . (b) Vẽ tia phân giác  $OM$  của  $\widehat{AOC}$  & tia phân giác  $ON$  của  $\widehat{BOC}$ . Tính  $\widehat{MON}$ . (c) Giả sử  $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$ . Tìm điều kiện của  $\alpha, \beta$  để  $\widehat{MON} = 45^\circ, \widehat{MON} = 90^\circ$ , biết  $0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ$ .

**252** ([BC23], VD6.7, p. 56). Cho  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ . Biết  $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta, 0^\circ < \alpha + \beta \leq 180^\circ, \alpha \neq \beta$ . Vẽ 2 tia phân giác  $OM, ON$  của  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ . Tính  $\widehat{MON}$  theo  $\alpha, \beta$ .

**253** ([BC23], VD6.8, p. 57). Vẽ  $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$  kề với  $\widehat{AOB}$ . (a) Tính tổng số đo  $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$ . (b) Chứng minh 2 tia phân giác  $OM, OM'$  của  $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$  đối nhau.

**254** ([BC23], 6.1., p. 58). Cho  $\widehat{xOy} = 70^\circ$ . Vẽ 2 tia phân giác  $OM, ON$  lần lượt của  $\widehat{xOy}, \widehat{MOx}$ . Tính  $\widehat{MOy}, \widehat{MON}, \widehat{NOy}$ .

**255** ([BC23], 6.2., p. 58). Cho 2 tia đối nhau  $OA, OB$ . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $AB$  vẽ 2 tia  $OC, OD$  sao cho  $\widehat{AOC} = 140^\circ, \widehat{BOD} = 80^\circ$ . Tia  $OC$  có là tia phân giác của  $\widehat{BOD}$ ?

**256** ([BC23], 6.3., pp. 58–59). Cho  $\widehat{AOD} = 120^\circ$ . Vẽ 2 tia  $OB, OC$  cùng thuộc 1 nửa mặt phẳng bờ chứa 2 tia  $OA, OD$  sao cho  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD}$ . (a) Tìm các tia phân giác của các góc. (b) Nếu  $OM$  là tia phân giác của  $\widehat{AOD}$  thì  $OM$  có là tia phân giác của  $\widehat{BOC}$ ?

**257** ([BC23], 6.4., p. 59). Cho  $\widehat{AOB} = 80^\circ$ . Vẽ tia  $OC$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$  sao cho  $\widehat{AOC} = 30^\circ$ . Vẽ tia  $OD$  nằm giữa 2 tia  $OA, OB$  sao cho  $\widehat{COD} = 10^\circ$ .  $OD$  có là tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ ?

**258** ([BC23], 6.5., p. 59). Trên đường thẳng  $xy$  lấy 1 điểm  $O$ . Vẽ  $\widehat{AOx} = 90^\circ, \widehat{MOy} = 45^\circ$ . (a) Nếu 2 tia  $OA, OM$  cùng nằm trong 1 nửa mặt phẳng bờ  $xy$  thì tia  $OM$  có là tia phân giác của  $\widehat{AOy}$ ? (b) Chứng minh nếu 2 tia  $OA, OM$  nằm trong 2 nửa mặt phẳng đối nhau bờ  $xy$  thì  $\widehat{AOM} = \widehat{MOx}$ . Trong trường hợp này tia  $OM$  có là tia phân giác của  $\widehat{AOx}$ ?

**259** ([BC23], 6.6., p. 59). Cho 3 góc chung đỉnh  $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$ . Chứng minh tia đối của tia  $OA$  là tia phân giác của  $\widehat{BOC}$ .

**260** ([BC23], 6.7., p. 59). Cho  $\widehat{AOB} = 35^\circ$ . Vẽ  $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$  cùng kề với  $\widehat{AOB}$ . Vẽ  $Ox, Oy$  là 2 tia phân giác của  $\widehat{AOA'}, \widehat{BOB'}$ . (a) Chứng minh 2 tia  $Ox, Oy$  không đối nhau. (b) Tính  $\widehat{AOB}$  để 2 tia  $Ox, Oy$  đối nhau.

**261** ([BC23], 6.8., p. 59). Cho  $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = 90^\circ$  cùng không kề với  $\widehat{AOB}$ . Vẽ 2 tia  $OM, OM'$  lần lượt là tia phân giác của  $\widehat{AOB}, \widehat{A'OB'}$ . (a) 2 tia  $OM, OM'$  đối nhau không? (b) Tính số đo góc hợp bởi các tia phân giác của  $\widehat{AOB'}, \widehat{BOA'}$ .

**262** ([BC23], 6.9., p. 59). Cho  $\widehat{BAC}$ . Vẽ  $\widehat{CAM}$  kề với  $\widehat{BAC}$  sao cho  $\widehat{CAM} = \widehat{BAM} = \alpha$ . (a) Chứng minh  $\alpha \geq 90^\circ$ . (b) Chứng minh tia  $AM$  là tia đối của tia phân giác của  $\widehat{BAC}$ .

**263.** Vẽ tia phân giác  $OA_1$  của  $\widehat{AOB} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ]$ . Vẽ tia phân giác  $OA_2$  của  $\widehat{AOA_1}$ , vẽ tia phân giác  $OA_3$  của  $\widehat{AOA_2}, \dots$  vẽ tia phân giác  $OA_n$  của  $\widehat{AOA_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_mOA_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ .

**264.** Cho  $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$ . Vẽ  $OA_1, OB_1$  lần lượt là 2 tia phân giác  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ , vẽ  $OA_n, OB_n$  lần lượt là 2 tia phân giác  $\widehat{AOA_{n-1}}, \widehat{BOB_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_nOC}, \widehat{AOB_n}, \widehat{BOB_n}, \widehat{B_nOC}, \widehat{A_mOA_n}, \widehat{A_mOB_n}, \widehat{B_mOB_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ .

**265.** Cho  $\widehat{AOC} = \alpha, \widehat{BOC} = \beta$ . Vẽ  $OA_1, OB_1$  lần lượt là 2 tia phân giác  $\widehat{AOC}, \widehat{BOC}$ , vẽ  $OA_n, OB_n$  lần lượt là 2 tia phân giác  $\widehat{COA_{n-1}}, \widehat{COB_{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Tính  $\widehat{AOA_n}, \widehat{A_nOB}, \widehat{A_nOC}, \widehat{AOB_n}, \widehat{BOB_n}, \widehat{B_nOC}, \widehat{A_mOA_n}, \widehat{A_mOB_n}, \widehat{B_mOB_n}, \forall m, n \in \mathbb{N}^*$ .

## 5 Circle. Triangle – Đường Tròn. Tam Giác

[1] Đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$  là hình gồm các điểm cách  $O$  1 khoảng bằng  $R$ , ký hiệu  $(O; R) := S_R(O) = \partial B_R(O) = \{M \in \mathbb{R}^2 | OM = R\}$ . [2] Hình tròn là hình gồm các điểm nằm trên đường tròn & các điểm nằm bên trong đường tròn:  $B_R(O) := \{M \in \mathbb{R}^2 | OM \leq R\}$ . [3] 2 điểm  $A, B \in (O; R)$  chia đường tròn thành 2 cung tròn. Đoạn thẳng nối 2 điểm  $A, B$  là dây cung. Dây đi qua tâm là đường kính. [4] Tam giác  $ABC$  là hình gồm 3 đoạn thẳng  $AB, BC, CA$  khi 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng, i.e.,  $\Delta ABC := AB \cup BC \cup CA, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^2, C \notin AB$ .

**266** ([BC23], VD7.1, p. 60). Cho 5 điểm bất kỳ thuộc đường tròn  $(O)$ . Đếm số dây cung, số cung tạo bởi 2 trong 5 điểm đó.

**267** ([BC23], VD7.2, p. 61). Trên cạnh  $AC$  của  $\Delta ABC$  lấy điểm  $M$ . Vẽ đoạn thẳng  $BM$ . Tính  $\widehat{CBM}$ , biết  $\widehat{ABC} = 70^\circ, \widehat{ABM} = 30^\circ$ .

- 268** ([BC23], VD7.3, p. 61). Cho điểm  $M$  không thuộc đường thẳng  $xy$ . Lấy  $A, B \in xy$  thì tồn tại 1 tam giác có đỉnh là điểm  $M$  & 2 đỉnh còn lại là 2 điểm  $A, B$ . (a) Nếu có thêm 1 điểm thứ 3 cũng thuộc đường thẳng  $xy$  thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là  $M$  & 2 đỉnh còn lại là 2 trong 3 điểm thuộc  $xy$ ? (b) Nếu có 100 điểm trên  $xy$  thì vẽ được bao nhiêu tam giác có đỉnh là  $M$  & 2 đỉnh còn lại là 2 trong số 100 điểm thuộc  $xy$ ?
- 269** ([BC23], VD7.4, pp. 61–62). (a) Vẽ  $\triangle ABC$  có  $\widehat{A} = 60^\circ, AC = 9$ . (b) Trên tia  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = 2$ , trên tia  $CA$  lấy điểm  $D$  sao cho  $CD = 5$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm đoạn thẳng  $AD$ . (c) Vẽ 2 đoạn thẳng  $BM, BD$ . Đếm số tam giác & liệt kê. (d)  $\widehat{BAC}, \widehat{BMC}$  là góc của các tam giác nào? (e) Tìm các góc kề bù với  $\widehat{BMC}, \widehat{BDC}$ .
- 270** ([BC23], VD7.5, p. 62). Cho 6 điểm trên mặt phẳng sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đoạn thẳng & tô đoạn thẳng đó bằng màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong số 6 điểm đã cho & có các cạnh cùng được tô màu xanh hoặc cùng màu đỏ.
- 271** ([BC23], 7.1., p. 63). Cho  $\triangle ABC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy 3 điểm  $D, I, K$ . Kẻ 3 đoạn thẳng  $BD, BI, BK$ . Liệt kê các tam giác.
- 272** ([BC23], 7.2., p. 63). Cho  $\triangle ABC$ . Lấy  $D, E$  lần lượt thuộc 2 cạnh  $AC, AB$ . 2 đoạn thẳng  $BD, CE$  giao nhau tại  $O$ . Nối  $AO$ . Đếm số tam giác.
- 273** ([BC23], 7.3., p. 63). Cho  $\triangle ABC$ . Đường thẳng  $a$  cắt cạnh  $AB$  tại  $D$  nằm giữa  $A, B$ , cắt cạnh  $AC$  tại  $E$  nằm giữa  $A, C$ .  $a$  có cắt cạnh  $BC$  không?
- 274** ([BC23], 7.4., p. 63). Cho  $A, B, C, D, E$  nằm trên 1 đường tròn. Nối từng cặp điểm. Đếm số tam giác & liệt kê.

## 6 Tính Số Điểm, Số Đường Thẳng, Số Đoạn Thẳng, Số Tam Giác, Số Góc

- 275** ([Bin23], VD19, p. 78). (a) Cho 100 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng.
- 276** ([Bin23], VD20, p. 79). Trên mặt phẳng có 4 đường thẳng. Số giao điểm của các đường thẳng có thể bằng bao nhiêu?
- 277** ([Bin23], VD21, p. 80). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Nối từng cặp 2 điểm trong  $n$  điểm đó thành các đoạn thẳng. (a) Đếm số đoạn thẳng nếu trong  $n$  điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Đếm số đoạn thẳng nếu trong  $n$  điểm đó có đúng 3 điểm thẳng hàng. (c) Tính  $n$  biết có tất cả 1770 đoạn thẳng.
- 278** ([Bin23], VD22, p. 80). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D, E$  lần lượt nằm trong cạnh  $AC, AB$ ,  $K$  là giao điểm của  $BD, CE$ . Kẻ đoạn thẳng  $DE$ . Đếm số tam giác.
- 279** ([Bin23], VD23, p. 81). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Vẽ  $n$  tia chung gốc. Đếm số góc.
- 280** ([Bin23], 54., p. 81). Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. (a) Kể tên các đường thẳng nếu  $n = 4$ . (b) Tính số đường thẳng nếu  $n = 20$ . (c) Tính số đường thẳng theo  $n$ . (d) Tính  $n$  biết số đường thẳng kẻ được là 1128. (e) Số đường thẳng có thể bằng 2004 không?
- 281** ([Bin23], 55., p. 81). Cho 100 điểm trong đó có đúng 4 điểm thẳng hàng, ngoài ra không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.
- 282** ([Bin23], 56., p. 81). Cho  $n$  điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, vẽ 1 đường thẳng. Biết có tất cả 105 đường thẳng. Tính  $n$ .
- 283** ([Bin23], 57., p. 81). Cho 4 điểm, bất cứ 2 điểm nào cũng có ít nhất 1 đường thẳng đi qua. Có thể có bao nhiêu đường thẳng?
- 284** ([Bin23], 58., p. 81). (a) Cho 3 đường thẳng cắt nhau đôi một. Có thể có bao nhiêu giao điểm? (b) Vẽ 3 đường thẳng sao cho số giao điểm (của 2 hoặc 3 đường thẳng) lần lượt là 0, 1, 2, 3.
- 285** ([Bin23], 59., p. 81). Cho 101 đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Tính số giao điểm của chúng.
- 286** ([Bin23], 60., p. 81). Cho  $n$  đường thẳng trong đó bất cứ 2 đường thẳng nào cũng cắt nhau, không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Biết số giao điểm của đường thẳng đó là 780. Tính  $n$ .
- 287** ([Bin23], 61., p. 81). Cho 10 điểm. Nối từng cặp điểm trong 10 điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính số đoạn thẳng mà 2 mút thuộc tập 10 điểm đã cho, nếu trong các điểm đã cho: (a) Không có 3 điểm nào thẳng hàng. (b) Có đúng 3 điểm thẳng hàng.
- 288** ([Bin23], 62., p. 82). Cho  $n$  điểm. Nối từng cặp điểm trong  $n$  điểm đó thành các đoạn thẳng. Tính  $n$  biết có tất cả 435 đoạn thẳng.
- 289** ([Bin23], 63., p. 82). 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền. (a) 2 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (b) 3 đường thẳng có thể chia mặt phẳng thành mấy miền? (c) 4 đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền? (d)  $n \in \mathbb{N}^*$  đường thẳng chia mặt phẳng nhiều nhất thành mấy miền?
- 290** ([Bin23], 64., p. 82). Cho 10 điểm thuộc đường thẳng  $a$  & 1 điểm nằm ngoài  $a$ . Đếm số tam giác có 3 đỉnh trong 11 điểm đó.

**291** ([Bin23], 65., p. 82). Cho  $\widehat{xOy} \neq 180^\circ$ . Trên tia  $Ox$  lấy 3 điểm không trùng  $O$  là  $A, B, C$ . Trên tia  $Oy$  lấy 4 điểm không trùng  $O$  là  $D, E, F, G$ . Đếm số tam giác mà 3 đỉnh nằm trong 8 điểm  $O, A, B, C, D, E, F, G$ .

**292** ([Bin23], 66., p. 82). (a) Cho  $n$  tia chung gốc tạo thành tất cả 190 góc. Tính  $n$ . (b) Cho  $n$  tia chung gốc tạo thành tất cả  $m$  góc. Tính  $n$  theo  $m$ .

**293** (Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng tổng quát). Cho  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . (a) Cho  $n$  điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng. (b) Cho  $n$  điểm trong đó có đúng 1 bộ  $m$  điểm thẳng hàng với nhau, đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng. (c) Cho  $n$  điểm trong đó có đúng  $m$  bộ điểm thẳng hàng với nhau lần lượt nằm trên các đường thẳng  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Biết đường thẳng  $a_i$  có đúng  $a_i$  điểm trong  $n$  điểm đã cho thẳng hàng. Đếm số đoạn thẳng, đường thẳng đi qua 2 điểm trong chúng.

## 7 Đếm Số. Đếm Hình

**294** ([Bin23], VD24, p. 82). Đếm số số tự nhiên có 3 chữ số, các chữ số khác nhau, lập từ 3 trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

**295** ([Bin23], VD25, p. 83). Đếm số cách sắp xếp nhất, nhì, ba trong: (a) 6 đội bóng thi đấu. (b)  $n \in \mathbb{N}$  đội bóng thi đấu.

**296** ([Bin23], VD26, p. 83). Đếm số cách gọi tên tam giác có 3 đỉnh là  $A, B, C$ .

**297** ([Bin23], VD27, p. 83). Đếm số cách giao hoán các thừa số của tích  $abcd$ .

**298** ([Bin23], VD28, p. 84). Đếm số cách sắp xếp 5 người ngồi: (a) Trên 1 ghế dài. (b) Xung quanh 1 bàn tròn.

**299** ([Bin23], VD29, p. 84). Đếm số đoạn thẳng mà 2 đầu mút là 2 trong 5 điểm đã cho.

**300** ([Bin23], VD30, p. 84). Cho 9 điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.

**301** ([BC23], VD9.8, p. 79). Đếm số hình chữ nhật tạo bởi  $m$  đường thẳng đứng &  $n$  đường nằm ngang đôi một cắt nhau với  $m, n \in \mathbb{N}^*$ .

**302** ([Bin23], VD31, p. 85). Trong số 4 học sinh giỏi Văn & 9 học sinh giỏi Toán, lập ra 1 nhóm gồm 7 học sinh, trong đó có ít nhất 2 học sinh giỏi Văn. Đếm số cách lập nhóm.

**303** ([Bin23], VD32, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 2 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy. (c) Đếm số cách xếp  $m$  bi đen,  $n$  bi trắng thành 1 dãy với  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**304** ([Bin23], VD33, p. 85). (a) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 4 bi trắng thành 1 dãy. (b) Đếm số cách xếp 3 bi đen, 9 bi trắng thành 1 dãy.

**305** ([Bin23], VD34, p. 86). Đếm số số tự nhiên không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.

**306** ([Bin23], VD35, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 4.

**307** ([Bin23], VD36, p. 87). Đếm số số tự nhiên không quá 4 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.

**308** ([Bin23], 67., p. 87). Dùng 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 để: (a) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, trong đó các chữ số khác nhau? Tính tổng các số được lập. (b) Lập được bao nhiêu số chẵn, số lẻ có 5 chữ số khác nhau? (c) Lập được bao nhiêu số có 5 chữ số, trong đó 2 chữ số kề nhau phải khác nhau? (d) Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số, các chữ số khác nhau, trong đó có 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn?

**309** ([Bin23], 68., p. 87). Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên: (a) Gồm 5 chữ số khác nhau? (b) Gồm 4 chữ số khác nhau. (c) Gồm 3 chữ số khác nhau. (d) Gồm 3 chữ số có thể giống nhau.

**310** ([Bin23], 69., pp. 87–88). Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 6, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau thỏa 1 trong các điều kiện: (a)  $\nmid 2$ . (b)  $\div 2$ . (c)  $\div 5$ .

**311** ([Bin23], 70., p. 88). (a) Dùng 3 chữ số 1, 2, 7 có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số sao cho 2 chữ số 2, 7 có mặt 1 lần, còn chữ số 1 có mặt 3 lần? (b) Như (a) nếu thêm điều kiện các số phải đếm lớn hơn 20000.

**312** ([Bin23], 71., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số lập bởi các số 1, 2, 3 & 9?

**313** ([Bin23], 72., p. 88). Đếm số tự nhiên có 11 chữ số, gồm 5 chữ số 1 & 6 chữ số 2 sao cho đọc xuôi & đọc ngược đều giống nhau.

**314** ([Bin23], 73., p. 88). Đếm số số tự nhiên có không quá 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng 9.

**315** ([Bin23], 74., p. 88). Đếm số số tự nhiên có 4 chữ số mà tích các chữ số bằng 24.

**316** ([Bin23], 75., p. 88). Đếm số số nguyên dương có 5 chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng tích các chữ số đó.

**317** ([Bin23], 76., p. 88). Cho 10 điểm trên mặt phẳng, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm, kẻ 1 đường thẳng. Đếm số đường thẳng.



- 318 ([Bin23], 77., p. 88). Có  $n \in \mathbb{N}^*$  điểm trên mặt phẳng. Có tất cả 91 đoạn thẳng nối 2 trong  $n$  điểm đó. Tính  $n$ .
- 319 ([Bin23], 78., p. 88). Cho  $n \in \mathbb{N}^*$  tia chung gốc tạo thành tất cả 153 góc. Tính  $n$ .
- 320 ([Bin23], 79., p. 88). Đếm số cách gọi tên: (a) Hình vuông  $ABCD$ . (b) Đa giác lồi  $A_1A_2 \dots A_n$  với  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .
- 321 ([Bin23], 80., p. 88). Cho hình vuông  $4 \times 4$ . Đếm số hình chữ nhật, số hình vuông.
- 322 ([Bin23], 81., p. 88). Có 12 điểm trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Đếm số tam giác tạo thành.
- 323 ([Bin23], 82., p. 88). Cho  $\widehat{x\hat{A}y} \neq 180^\circ$ . Trên tia  $Ax$  lấy 6 điểm khác  $A$ , trên tia  $Ay$  lấy 5 điểm khác  $A$ . Trong 12 điểm này, kể cả điểm  $A$ , 2 điểm nào cũng được nối với nhau bởi 1 đoạn thẳng. Đếm số tam giác mà các đỉnh là 3 trong 12 điểm đó.
- 324 ([Bin23], 83., p. 89). Có 9 đội bóng tham dự 1 giải bóng đá, mỗi đội phải đấu 2 trận với mỗi đội khác, ở sân nhà & ở sân khách. Đếm số trận đấu.
- 325 ([Bin23], 84., p. 89). Có 2 viên bi đỏ giống nhau, 8 viên bi xanh giống nhau. Đếm số cách xếp thành 1 hàng gồm cả 10 viên bi.
- 326 ([Bin23], 85., p. 89). 1 ô tô có 8 chỗ, kể cả chỗ của người lái xe. Đếm số cách xếp chỗ 8 người trên xe, biết trong đó có 2 người biết lái xe.
- 327 ([Bin23], 86., p. 89). Có 2 cặp bạn ngồi trên 1 ghế băng có 4 chỗ để chụp ảnh. Đếm số cách sắp xếp sao cho 2 người cùng cặp phải ngồi cạnh nhau.
- 328 ([Bin23], 87., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn  $A, B, C, D, E$  ngồi trên 1 ghế dài sao cho  $A, B$  ngồi cạnh nhau.
- 329 ([Bin23], 88., p. 89). Đếm số cách sắp xếp 5 bạn  $A, B, C, D, E$  ngồi xung quanh 1 bàn tròn sao cho  $A, B$  ngồi cạnh nhau.
- 330 ([Bin23], 89., p. 89). 1 nhóm 5 bạn gồm 3 nam, 2 nữ xếp thành 1 hàng ngang để chụp ảnh, sao cho 2 bạn nữ không đứng cạnh nhau. Đếm số cách sắp xếp.
- 331 ([Bin23], 90., p. 89). Đếm số cách chọn 3 tấm ảnh từ 6 tấm ảnh khác nhau.
- 332 ([Bin23], 91., p. 89). Đếm số cách lập nhóm 3 người từ 1 tổ 10 người để làm nhiệm vụ trực nhật.
- 333 ([Bin23], 92., p. 89). 1 tổ học sinh có 5 nam, 3 nữ. Đếm số cách lập nhóm 5 người gồm 3 nam, 2 nữ.
- 334 ([Bin23], 93., p. 89). Đếm số cách chia 8 chiếc kẹo cho 3 người để ai cũng được nhận kẹo.

## Tài liệu

- [BC23] Vũ Hữu Bình and Đàm Hiếu Chiến. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 6. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 108.
- [Bin+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Thị Quỳnh Anh, Phan Thanh Hồng, Bùi Văn Tuyên, Đặng Văn Tuyên, and Nguyễn Thị Thanh Xuân. *Bồi Dưỡng Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ 1. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 112.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ 2. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 152.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 128.
- [Thá23] Đỗ Đức Thái. *Bài Tập Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.