

Problem: Multivariate Polynomial – Bài Tập: Đa Thức Nhiều Biến

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 24 tháng 10 năm 2023

Mục lục

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến	1
2 Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến	1
3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến	2
4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ	2
5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường	4
6 Miscellaneous	4
Tài liệu	4

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến

- 1 ([Tuy23], VD1, p. 4). Cho 3 biểu thức $A = \frac{4xy}{x^2 - 2xy + y^2}$, $B = x^2 - 2xy + y^2$, $C = -4xy$. (a) Cho biết biểu thức nào là đơn thức nhiều biến, là đa thức nhiều biến? (b) Với $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, chứng minh 2 biểu thức B, C có cùng 1 giá trị.
- 2 ([Tuy23], 1., p. 5). Cho đơn thức $A = -2mx^3y^4$, m là hằng. Cho biết: (a) Hệ số & phần biến của đơn thức A . (b) Bậc của đơn thức A đối với từng biến & đối với tập hợp các biến.
- 3 ([Tuy23], 2., p. 5). Cho $x^2 = 3$, $y^2 = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của đa thức $A = x^4 - x^2y^2 + y^4$.
- 4 ([Tuy23], 3., p. 5). Tìm các đơn thức đồng dạng trong 5 đơn thức sau ($a \neq 0$ là hằng): $P = \frac{4}{5}x^4y^3xy$, $Q = \frac{2}{3}a^3x^3y^2x^2y$, $R = 6a^2x^2y^4ax^3$, $M = -10$, $N = \frac{7}{6}$.
- 5 ([Tuy23], 4., p. 5). Cho 3 đơn thức nhiều biến: $A = ab^2x^4y^3$, $B = ax^4y^3$, $C = b^2x^4y^3$. Các đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu: (a) a, b là hằng $\neq 0$ còn x, y là biến. (b) $a \neq 0$ là hằng còn b, x, y là biến. (c) $b \neq 0$ là hằng còn a, x, y là biến.
- 6 ([Tuy23], 5., p. 5). Cho biểu thức $A = \frac{-4ax^2y^5}{(b+1)^3}$. Trong 3 trường hợp sau đây, trường hợp nào A là đơn thức? (a) a, b là hằng. (b) a là hằng. (c) b là hằng. Trong trường hợp đó, cho biết hệ số & bậc của đơn thức đối với mỗi biến & đối với tập hợp của biến.

2 Operators \pm Multivariate Polynomials – Phép \pm Đa Thức Nhiều Biến

- 7 ([Tuy23], VD2, p. 6). Cho 2 đơn thức $A = 3m^2x^2y^3z$, $B = 12x^2y^3z$ ($m \neq 0$ là hằng). (a) Tính hiệu $A - B$. (b) Xác định m để giá trị của 2 đơn thức A, B luôn bằng nhau với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- 8 ([Tuy23], VD3, p. 6). Cho 3 đa thức $A = 8a - 9b$, $B = 5b - c$, $C = 3c - 2a$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}$. Không thực hiện phép tính, cho biết tích ABC có giá trị là số chẵn hay lẻ?
- 9 ([Tuy23], 6., p. 7). Cho 2 đa thức $A = 3x^4 - 2x^3y + 5xy^3 - y^4$, $B = -8x^4 + 2x^3y - 9x^2y^2 - xy^3 + 4y^4$. Tính tổng $A + B$ hiệu $A - B$ bằng 2 cách: Cộng trừ theo hàng ngang. Cộng trừ theo cột dọc.
- 10 ([Tuy23], 7., p. 7). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$: (a) $8 \cdot 2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0. (b) $3^{n+3} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+5} - 7 \cdot 2^n : 25$. (c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n : 300$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

- 11 ([Tuy23], 8., p. 7). Viết tích $31 \cdot 5^2$ thành tổng của 3 lũy thừa cơ số 5 với số mũ là 3 số tự nhiên liên tiếp.
- 12 ([Tuy23], 9., p. 7). Viết 2 số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức có 2 biến x, y : (a) $\overline{xy\overline{z}}$. (b) $\overline{yxy\overline{5}}$.
- 13 ([Tuy23], 10., p. 7). Cho đa thức $P = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$. biết a, b là hằng & đa thức P có bậc 3, tìm a, b .
- 14 ([Tuy23], 11., p. 7). Tính tổng $S = \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{ba} - \overline{bac}$.
- 15 ([Tuy23], 12., p. 7). Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.
- 16 ([Tuy23], 13., p. 7). Cho 3 đa thức $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$, $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$. Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 17 ([Tuy23], 14., p. 7). Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$. (a) Thu gọn A . (b) Tìm x để $A = 2$.
- 18 ([Tuy23], 15., p. 7). Tính giá trị của 2 đa thức sau biết $x - y = 0$. (a) $A = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$. (b) $B = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3$.
- 19 ([Tuy23], 16., p. 7). Cho 2 đa thức $A = xyz - xy^2 - xz^2$, $B = y^3 + z^3$. Chứng minh nếu $x - y - z = 0$ thì A, B là 2 đa thức đối nhau.
- 20 ([Tuy23], 17., p. 7). Tính giá trị của đa thức $A = 4x^4 + 7x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.

3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến

- 21 ([Tuy23], VD4, p. 8). Cho 3 đơn thức $A = -3xy^3$, $B = 8xy^2$, $C = \frac{5}{3}x^2y$. Chứng minh 3 đơn thức này không thể cùng có giá trị dương.
- 22 ([Tuy23], VD5, p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x + y)(x + y + 2) - 2(x + 1)(y + 1) + 2 = x^2y^2$.
- 23 ([Tuy23], VD6, p. 9). Tìm giá trị của biểu thức $A = (5x^5 + 5x^4) : 5x^2 - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 12) : (2x - 4)$ tại $x = -2$.
- 24 ([Tuy23], 18., p. 9). Cho biểu thức $E = x(x - y) + y(x + y) - (x + y)(x - y) - 2y^2$. Với mọi giá trị của x, y thì giá trị của biểu thức E là 1 số âm hay là 1 số dương?
- 25 ([Tuy23], 19., p. 9). Cho $xy = 1$. Chứng minh đẳng thức $x(y + 1) + y(x + 1) = (x + 1)(y + 1)$.
- 26 ([Tuy23], 20., p. 9). Chứng minh đẳng thức $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$.
- 27 ([Tuy23], 21., p. 9). Tìm $n \in \mathbb{N}$ để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết: (a) $7x^{n+2}y^n : 4x^3y^4$. (b) $-\frac{2}{3}x^{2n}y^7 : \frac{4}{9}x^{n+3}y^n$.
- 28 ([Tuy23], 22., p. 10). Tìm x, y biết: $[(x - 2y)(x - 7y) - (x - 2y)(x + 2y)] : (x - 2y) = 18$.
- 29 ([Tuy23], 23., p. 10). Tìm giá trị của biểu thức $A = (3x^4 - x^2 - 2x) : (3x^2 + 3x + 2) + (x^4 - x^2) : (x^2 - x)$ tại $x = -5$.
- 30 ([Tuy23], 24., p. 10). Không làm phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong 3 trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{101} + x^{102} + x^{103} + 51$, $g(x) = x + 1$. (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 17$, $g(x) = x - 2$. (c) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x + 30$, $g(x) = x + 5$.
- 31 ([Tuy23], 25., p. 10). Tìm các giá trị của m, n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.
- 32 ([Tuy23], 26., p. 10). Chứng minh đa thức $f(x) = (x^2 + 4x - 20)^{51} + (x^3 - 2x - 22)^{50} - 2$ chia hết cho đa thức $x - 3$.
- 33 ([Tuy23], 27., p. 10). Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ & dư $x + 6$. Tìm đa thức B .
- 34 ([Tuy23], 28., p. 10). Cho đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho 2 đa thức $x - 2$ & $x + 1$. Tính $2a - 3b$.
- 35 ([Tuy23], 29., p. 10). Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 19$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.

4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

- 36 ([Tuy23], VD7, p. 11). Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Tính giá trị của 3 biểu thức: $x - y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$.
- 37 ([Tuy23], VD8, p. 12). Tìm GTNN của biểu thức $A = (x + 3y - 5)^2 - 6xy + 26$.
- 38 ([Tuy23], 30., p. 12). Chứng minh đẳng thức: (a) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) = 2^{32} - 1$. (b) $100^2 + 103^2 + 105^2 + 94^2 = 101^2 + 98^2 + 96^2 + 107^2$.

- 39 (Mở rộng [Tuy23], 30., p. 12). *Tính: (a) $\prod_{i=1}^n (2^{2^i} + 1) = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)$, $\prod_{i=m}^n (2^{2^i} + 1) = (2^{2^m} + 1)(2^{2^{m+1}} + 1) \cdots (2^{2^n} + 1)$. (b) $\prod_{i=1}^n (a^{2^i} + 1)$, $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + 1)$. (c) $\prod_{i=m}^n (a^{2^i} + b^{2^i})$.*
- 40 ([Tuy23], 31., p. 12). *Tính hợp lý, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$: (a) $\frac{258^2 - 242^2}{254^2 - 246^2}$. (b) $263^2 + 74 \cdot 263 + 37^2$. (c) $136^2 - 92 \cdot 136 + 46^2$. (d) $(50^2 + 48^2 + 46^2 + \cdots + 2^2) - (49^2 + 47^2 + 45^2 + \cdots + 1^2)$.*
- 41 ([Tuy23], 32., p. 12). *Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa $2(a^2 + b^2) = (a - b)^2$. Chứng minh a, b là 2 số đối nhau.*
- 42 ([Tuy23], 33., p. 12). *Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ thỏa $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$. Tìm hệ thức liên hệ giữa 4 số a, b, x, y .*
- 43 ([Tuy23], 34., p. 12). *Cho $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh $a = b = c$.*
- 44 ([Tuy23], 35., p. 12). *Chứng minh không có $x, y \in \mathbb{R}$ nào thỏa mãn đẳng thức: (a) $3x^2 + y^2 + 10x - 2xy + 26 = 0$. (b) $4x^2 + 3y^2 - 4x + 30y + 78 = 0$.*
- 45 ([Tuy23], 36., p. 12). *Cho $a \in \mathbb{N}$. Chứng minh đẳng thức $(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$. Áp dụng để tính nhẩm $35^2, 85^2, 105^2$.*
- 46 ([Tuy23], 37., p. 13). *Chứng minh: (a) Biểu thức $A = x^2 + x + 1$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$. (b) Biểu thức $B = x^2 - xy + y^2$ luôn luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. (c) Biểu thức $C = 4x - 10 - x^2$ luôn luôn âm $\forall x \in \mathbb{R}$. (d) Tìm các biểu thức bậc 2 luôn dương dương, luôn luôn âm tương tự.*
- 47 ([Tuy23], 38., p. 13). *Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = 25x^2 + 3y^2 - 10x + 11$. (b) $B = (x - 3)^2 + (x - 11)^2$. (c) $C = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x - 6)$.*
- 48 ([Tuy23], 39., p. 13). *Tìm GTLN của biểu thức: (a) $2x - x^2$. (b) $B = 19 - 6x - 9x^2$.*
- 49 ([Tuy23], 40., p. 13). *Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho 16. (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu bình phương của chúng chia hết cho 24.*
- 50 ([Tuy23], 41., p. 13). *Cho $x > y > 0, x - y = 7, xy = 60$. Không tính x, y , tính: (a) $x^2 - y^2$. (b) $x^4 + y^4$.*
- 51 ([Tuy23], 42., p. 13). *Cho $a + b + c = 2p$. Chứng minh: (a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = 4(p - b)(p - c)$. (b) $p^2 + (p - a)^2 + (p - b)^2 + (p - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.*
- 52 ([Tuy23], 43., p. 13). *Cho $a = m^2 + n^2, b^2 = m^2 - n^2, c = 2mn$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2$.*
- 53 ([Tuy23], 44., p. 13). *Tính giá trị biểu thức: (a) $A = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ với $x = -103$. (b) $B = x^3 - 15x^2 + 75x$ với $x = 25$. (c) $C = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ với $x = -3$.*
- 54 ([Tuy23], 45., p. 13). *Cho $x - y = 2$. Tính giá trị biểu thức $A = 2(x^3 - y^3) - 3(x + y)^2$.*
- 55 ([Tuy23], 46., p. 13). *Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.*
- 56 ([Tuy23], 47., p. 13). *Rút gọn biểu thức $A = (x - y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 + 6(x - y)^2$.*
- 57 ([Tuy23], 48., p. 13). *Cho $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0, (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$. Tìm x, y .*
- 58 ([Tuy23], 49., p. 13). *Chứng minh: $742^3 - 692^3 : 200$. (b) $685^3 + 315^3 : 25000$.*
- 59 ([Tuy23], 50., p. 13). *Cho $a + b + c + d = 0$. Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$.*
- 60 ([Tuy23], 51., p. 13). *Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh: (a) $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. (b) $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$.*
- 61 ([Tuy23], 52., p. 14). *Xác định 2 hệ số a, b để đa thức $A = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của 1 đa thức.*
- 62 ([Tuy23], 53., p. 14). *Cho $a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.*
- 63 ([Tuy23], 54., p. 14). *Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong 3 biểu thức sau có giá trị dương: $x = (a - b + c)^2 + 8ab, y = (a - b + c)^2 + 8bc, z = (a - b + c)^2 - 8ca$.*
- 64 ([Tuy23], 55., p. 14). *Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x - 3)^2$. (b) $(3x - 4y)^{20}$.*
- 65 ([Tuy23], 56., p. 14). *Đa thức $(x + 2)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x . Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x = a, y = b$, trong đó a, b là 2 số thực dương, $a - b = 1$. Tìm a, b .*
- 66 ([Tuy23], 57., p. 14). *Tính: (a) $(x + 2)^5$. (b) $(x - 1)^6$. (c) $(x - 1)^5$.*
- 67 ([Tuy23], 58., p. 14). *Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.*
- 68 ([Tuy23], 59., p. 14). *Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.*

- 5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường
- 6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác
- 7 Miscellaneous

Tài liệu

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.