Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions
Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 8 năm 2023

Mục lục

1 Tính Đơn Điệu của Hàm Số

1 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 5). *Chứng minh hàm số* $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ *nghịch biến trên đoạn* $[0,1]$.

2 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=x+\frac{4}{x}$.

3 ([Quỳ+22], H1, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-3$.

4 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=\frac{4}{3}x^3-2x^2+x-3$.

5 ([Quỳ+22], H2, p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số* $y=2x^5+5x^4+\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{3}$.

6 ([Quỳ+22], 1., p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a)* $y=2x^3+3x^2+1$. *(b)* $y=x^3-2x^2+x+1$. *(c)* $y=x+\frac{3}{x}$. *(d)* $y=x-\frac{2}{x}$. *(e)* $y=x^4-2x^2-5$. *(f)* $y=\sqrt{4-x^2}$.

7 ([Quỳ+22], 2., p. 7). *Chứng minh: (a) Hàm số* $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ *đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số* $y=\dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}$ *nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.*

8 ([Quỳ+22], 3., p. 8). *Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên* $\mathbb{R}$*: (a)* $f(x)=x^3-6x^2+17x+4$. *(b)* $f(x)=x^3+x-\cos x-4$.

9 ([Quỳ+22], 4., p. 8). *Với giá trị nào của* a *hàm số* $y=ax-x^3$ *nghịch biến trên* $\mathbb{R}$*?*

10 ([Quỳ+22], 5., p. 8). *Tìm các giá trị của tham số* a *để hàm số* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+3$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

11 ([Quỳ+22], 6., p. 8). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a)* $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-5$. *(b)* $y=-\frac{4}{3}x^3+6x^2-9x-\frac{2}{3}$. *(c)* $y=\dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. *(d)* $y=\sqrt{2x-x^2}$. *(e)* $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. *(f)* $y=\dfrac{1}{x+1}-2x$.

12 ([Quỳ+22], 7., p. 8). *Chứng minh hàm số* $f(x)=\cos 2x-2x+3$ *nghịch biến trên* $\mathbb{R}$.

13 ([Quỳ+22], 8., pp. 8–9). *Chứng minh bất đẳng thức: (a)* $\sin x<x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$; $\sin x>x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x<0$. *(b)* $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$. *(c)* $\sin x>x-\frac{x^3}{6}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>0$; $\sin x<x-\frac{x^3}{6}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x<0$.

14 ([Quỳ+22], 9., p. 9). *Chứng minh:* $\sin x+\tan x>2x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

15 ([Quỳ+22], 10., p. 9). *Số dân của 1 thị trấn sau* t *năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức* $f(t)=\dfrac{26t+10}{t+5}$ *(*$f(t)$ *được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem* f *là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng* $[0,+\infty)$*. Tìm* f' *& xét chiều biến thiên của hàm số* f *trên nửa khoảng* $[0,+\infty)$*. (c) Đạo hàm của hàm số* f *biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là* 0.125 *nghìn người/năm?*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

2 Cực Trị của Hàm Số

16 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

17 ([Quỳ+22], H1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.

18 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = |x|$.

19 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

20 ([Quỳ+22], H2, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số* $f(x) = 2\sin 2x - 3$.

21 ([Quỳ+22], 11., pp. 16–17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. *(b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$. *(c)* $f(x) = x + \frac{1}{x}$. *(d)* $f(x) = |x|(x+2)$. *(e)* $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2$. *(f)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

22 ([Quỳ+22], 12., p. 17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $y = x\sqrt{4 - x^2}$. *(b)* $y = \sqrt{8 - x^2}$. *(c)* $y = x - \sin 2x + 2$. *(d)* $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

23 ([Quỳ+22], 13., p. 17). *Tìm 4 hệ số* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *của hàm số* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *sao cho hàm số* f *đạt cực tiểu tại điểm* $x = 0$, $f(0) = 0$, *& đạt cực đại tại điểm* $x = 1$, $f(1) = 1$.

24 ([Quỳ+22], 14., p. 17). *Xác định 3 hệ số* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *sao cho hàm số* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *đạt cực trị bằng* 0 *tại điểm* $x = -2$ *& đồ thị của hàm số đi qua điểm* $A(1, 0)$.

25 ([Quỳ+22], 15., p. 17). *Chứng minh với mọi giá trị của* m, *hàm số* $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ *luôn có cực đại & cực tiểu.*

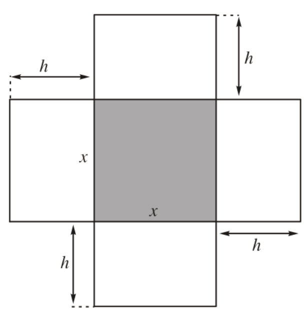
3 GTLN & GTNN của Hàm Số

26 ([Quỳ+22], Ví dụ 1, p. 18). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

27 ([Quỳ+22], Ví dụ 2, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x^3 - 3x + 3$ *trên đoạn* $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

28 ([Quỳ+22], H, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 1}$ *trên khoảng* $(1, +\infty)$.

29 ([Quỳ+22], Ví dụ 3, p. 20). *1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:*



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, *chiều cao là* h cm, *& có thể tích là* 500 cm^3. *(a) Biểu diễn* h *theo* x. *(b) Tìm diện tích* $S(x)$ *của mảnh các tông theo* x. *(c) Tìm giá trị của* x *sao cho* $S(x)$ *nhỏ nhất.*

30 ([Quỳ+22], Ví dụ 4, p. 21). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = x^3 - 3x + 3$ *trên đoạn* $[0, 2]$.

31 ([Quỳ+22], 16., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

32 ([Quỳ+22], 17., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $f(x) = x^2 + 2x - 5$ *trên đoạn* $[-2, 3]$. *(b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ *trên đoạn* $[-4, 0]$. *(c)* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *trên khoảng* $(0, +\infty)$. *(d)* $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ *trên đoạn* $[2, 4]$. *(e)* $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ *trên đoạn* $[0, 1]$. *(f)* $f(x) = x - \frac{1}{x}$ *trên nửa khoảng* $(0, 2]$.

33 ([Quỳ+22], 18., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. *(b)* $\cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

34 ([Quỳ+22], 19., p. 22). *Cho* ΔABC *đều cạnh* a. *Dựng 1 hình chữ nhật* $MNPQ$ *có cạnh* MN *nằm trên cạnh* BC, *2 đỉnh* P, Q *theo thứ tự nằm trên 2 cạnh* AC, AB *của tam giác. Xác định vị trí của điểm* M *sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất & tìm* GTLN *đó.*

35 ([Quỳ+22], 20., p. 22)**.** *Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ g. Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?*

36 ([Quỳ+22], 21., p. 23)**.** *Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. (b) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. (c) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$. (d) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$.*

37 ([Quỳ+22], 22., p. 23)**.** *Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{x^2+mx-1}{x-1}$ có cực đại & cực tiểu.*

38 ([Quỳ+22], 23., p. 23)**.** *Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng mg). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.*

39 ([Quỳ+22], 24., p. 23)**.** *Cho parabol $(\mathcal{P}): y = x^2$ & điểm $A(-3,0)$. Xác định điểm M thuộc parabol $(\mathcal{P})$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.*

40 ([Quỳ+22], 25., p. 23)**.** *1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là 1 hằng số, E được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.*

41 ([Quỳ+22], 26., pp. 23–24)**.** *Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0,1,2,\ldots,25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0,25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. (a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600. (d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0,25]$.*

42 ([Quỳ+22], 27., p. 24)**.** *Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ trên đoạn $[-3,1]$. (b) $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. (c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. (d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.*

43 ([Quỳ+22], 28., p. 24)**.** *Trong các hình chữ nhật có chu vi là 40 cm, xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.*

4 Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ

44 ([Quỳ+22], Ví dụ, p. 26)**.** *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình: $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2,-1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

45 ([Quỳ+22], H, p. 26)**.** *(a) Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $(\mathcal{P})$ có phương trình là $y = 2x^2 - 4x$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY.*

46 ([Quỳ+22], 29., p. 27)**.** *Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathcal{P})$ sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 3x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$. (c) $y = x - 4x^2$. (d) $y = 2x^2 - 5$.*

47 ([Quỳ+22], 30., p. 27)**.** *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác điểm I thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số đã cho biết hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$. (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathcal{C})$ tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh trên khoảng $(-\infty,1)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của $(\mathcal{C})$ & trên khoảng $(1,+\infty)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

Hint. Trên khoảng $(-\infty,1)$, đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax+b$ nếu $f(x) < ax+b$ với mọi $x < 1$.

48 ([Quỳ+22], 31., p. 27)**.** *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ & điểm $I(-2,2)$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của $(\mathcal{C})$.*

49 ([Quỳ+22], 32., p. 28)**.** *Xác định tâm đối xứng của đồ thị mỗi hàm số sau: (a) $y = \frac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \frac{3x-2}{x+1}$.*

Hint. (b) $y = 3 - \frac{5}{x+1}$.

50 ([Quỳ+22], 33., p. 28)**.** *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x-x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ & điểm I có tọa độ (x_0, y_0) thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\vec{OI}$ & phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

5 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

Tài liệu

[Quỳ+22] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng. *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 231.