Cheatsheet Mathematics 9

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 4 tháng 1 năm 2024

Mục lục

1 Square, Cube, & nth Roots – Căn Bậc 2, 3, n

2 1st-Order Function – Hàm Số Bậc Nhất $y = ax + b$

3 System of 1st-Order Equations – Hệ Phương Trình Bậc Nhất 2 Ẩn

3.1 1st-order equations of 2 unknowns – Phương trình bậc nhất 2 ẩn $ax + by = c$

$\boxed{1}$ Phương trình bậc nhất 2 ẩn: $\boxed{ax + by = c}$ (1), $a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$. $\boxed{2}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow (x_0, y_0) \in S \Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$. $\boxed{3}$ Tập nghiệm S biểu diễn bởi đường thẳng $(d) : ax + by = c$, i.e., $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by = c\} = (d)$. $\boxed{4}$ Nếu $ab \neq 0$ thì $(d) : ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (hàm số bậc nhất) là đường thẳng cắt cả 2 trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại 2

*Ben Tre City, Vietnam. e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

điểm $\left(\frac{c}{a},0\right),\left(0,\frac{c}{b}\right)$. $\boxed{5}$ Nếu $a\neq 0, b=0$ thì $(d): ax+0y=c\Leftrightarrow x=\frac{c}{a}$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục tung Oy. $\boxed{6}$ Nếu $a=0, b\neq 0$ thì $(d): 0x+by=c\Leftrightarrow y=\frac{c}{b}$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành Ox.

3.2 System of 1st-order equations of 2 unknowns – Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn

$\boxed{1}$ Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn: $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} ax+by=c,\ (d),(a,b)\neq(0,0),\\ a'x+b'y=c',\ (d'),(a',b')\neq(0,0),\end{cases}\tag{1}$$

có 1 nghiệm $\Leftrightarrow (d)$ cắt $(d')\Leftrightarrow \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$, vô nghiệm $\Leftrightarrow (d)\parallel(d')\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$, vô số nghiệm $\Leftrightarrow (d)\equiv(d')\Leftrightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. $\boxed{2}$ *Phương pháp thế*: Biểu diễn 1 ẩn theo ẩn kia. Biến hệ phương trình thành hệ mới có 1 phương trình 1 ẩn. Giải phương trình 1 ẩn rồi suy ra nghiệm của hệ. $\boxed{3}$ *Phương pháp cộng đại số*: Nhân 2 vế của 2 phương trình với 1 số thích hợp để các hệ số của 1 ẩn nào đó trong 2 phương trình bằng nhau hoặc đối nhau. Dùng quy tắc cộng được hệ mới có 1 phương trình 1 ẩn. Giải phương trình 1 ẩn rồi suy ra nghiệm của hệ. $\boxed{4}$ *Giải hệ phương trình bằng phương pháp định thức/Cramer*: Đặt $D=ab'-a'b, D_x=b'c-bc', D_y=c'a-ca'$. Nếu $D\neq 0$, hệ (1) có 1 nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b},\frac{c'a-ca'}{ab'-a'b}\right)$. Nếu $D=0,(D_x,D_y)\neq(0,0)$, hệ (1) vô nghiệm. Nếu $D=D_x=D_y=0$, hệ (1) có vô số nghiệm. Biểu thức $pq'-p'q$ gọi là 1 *định thức cấp 2*. Phương pháp định thức rất có lợi trong việc giải & biện luận hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn.

3.3 Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

$\boxed{1}$ Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình: *Bước 1*: Lập hệ phương trình: Chọn 2 đại lượng chưa biết làm ẩn, đặt đơn vị & điều kiện thích hợp của ẩn. Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác trong bài toán theo ẩn. Lập hệ 2 phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng trong bài toán. *Bước 2*: Giải hệ phương trình. *Bước 3*: Chọn kết quả phù hợp & kết luận. $\boxed{2}$ Các dạng toán: Toán chuyển động đều/không đều, toán năng suất lao động, toán về quan hệ giữa các số, ...

4 2nd-Order Function. Quadratic Equation – Hàm Số $y=ax^2, a\neq 0$. Phương Trình Bậc 2 1 Ẩn $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

4.1 Hàm số $y=ax^2, a\neq 0$ & đồ thị

$\boxed{1}$ Hàm số bậc 2 $y=ax^2$, $a\neq 0$. TXĐ: $\mathbb{R}$. Nếu $a>0$, hàm số $y=ax^2$ nghịch biến khi $x<0$, đồng biến khi $x>0$. Nếu $a<0$, hàm số $y=ax^2$ nghịch biến khi $x>0$, đồng biến khi $x<0$. $\boxed{2}$ Đồ thị hàm số $y=ax^2, a\neq 0$ là 1 parabol đi qua gốc tọa độ O, nhận trục Oy là trục đối xứng, O là đỉnh của parabol. Nếu $a>0$, đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị. $\min_{x\in\mathbb{R}} y=0\Leftrightarrow x=0$. Nếu $a<0$, đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị. $\max_{x\in\mathbb{R}} y=0\Leftrightarrow x=0$.

4.2 Quadratic equation – Phương trình bậc 2 1 ẩn $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$

$\boxed{1}$ Phương trình bậc 2 1 ẩn $ax^2+bx+c=0$ (1), $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Biệt số $\Delta\coloneqq b^2-4ac$. Biệt số rút gọn $\Delta'\coloneqq b'^2-ac$ với $b=2b'$. $\boxed{2}$ Công thức nghiệm: $\Delta>0$, (1) có 2 nghiệm thực phân biệt $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\in\mathbb{R}$. $\Delta=0$, (1) có nghiệm kép $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$. $\Delta<0$, (1) vô nghiệm thực, nhưng có 2 nghiệm phức $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. $\boxed{3}$ Công thức nghiệm thu gọn: $\Delta'>0$, (1) có 2 nghiệm thực phân biệt $x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}\in\mathbb{R}$. $\Delta=0$, (1) có nghiệm kép $x_1=x_2=-\frac{b'}{a}$. $\Delta<0$, (1) vô nghiệm thực, nhưng có 2 nghiệm phức $x_{1,2}=\frac{-b'\pm i\sqrt{-\Delta'}}{a}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. $\boxed{4}$ Phương trình bậc 2 $ax^2+bx+c=0$ với a,c trái dấu, i.e., $ac<0$ bao giờ cũng có 2 nghiệm thực phân biệt vì $\Delta=b^2-4ac\geq -4ac>0$.

4.3 Viète theorem – Định lý Viète

$\boxed{1}$ Định lý Viète: Nếu x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ (1) thì $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$. $\boxed{2}$ Nếu $a+b+c=0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$. Nếu $a-b+c=0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}$. $\boxed{3}$ Nếu 2 số có tổng bằng S & tích bằng P với $S^2\geq 4P$ thì 2 số đó là 2 nghiệm của phương trình bậc 2 $x^2-Sx+P=0$. $\boxed{4}$ Nếu (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. $\boxed{5}$ Đặt $S\coloneqq x_1+x_2, P\coloneqq x_1x_2$. Điều kiện để (1): Có 2 nghiệm trái dấu là $P<0$. Có 2 nghiệm cùng dấu là $\Delta\geq 0, P>0$. Có 2 nghiệm dương là $\Delta\geq 0, P>0, S>0$. Có 2 nghiệm âm là $\Delta\geq 0, P>0, S<0$.

4.4 Phương trình quy về phương trình bậc 2

$\boxed{1}$ *Phương trình trùng phương*: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ (1). Đặt $t \coloneqq x^2 \geq 0$ được phương trình bậc 2 (trung gian) $at^2 + bt + c = 0$. $\boxed{2}$ *Phương trình chứa ẩn ở mẫu*: Tìm ĐKXĐ của phương trình. Quy đồng mẫu thức 2 vế rồi khử mẫu thức. Giải phương trình vừa nhận được. Trong các giá trị tìm được của ẩn: Loại các giá trị không thỏa mãn ĐKXĐ. Các giá trị thỏa mãn ĐKXĐ là nghiệm của phương trình. $\boxed{3}$ *Phương trình tích*: $\prod_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0$ or $f_2(x) = 0$ or ... or $f_n(x) = 0$.

4.5 Giải bài toán bằng cách lập phương trình

$\boxed{1}$ Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc 2: *Bước 1*: Lập phương trình: Chọn 1 đại lượng chưa biết làm ẩn, đặt đơn vị & điều kiện thích hợp cho ẩn. Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác trong bài toán theo ẩn & các đại lượng đã biết. Lập phương trình biểu thị sự tương quan giữa các đại lượng trong bài toán. *Bước 2*: Giải phương trình vừa lập được. *Bước 3*: Chọn kết quả thích hợp & kết luận. $\boxed{2}$ Các dạng toán: Toán chuyển động đều, toán năng suất lao động, toán về quan hệ giữa các số, ...

5 Trigonometry in Right Triangles – Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác Vuông

6 Circle – Đường Tròn

6.1 Góc ở tâm. Số đo cung

$\boxed{1}$ Cho đường tròn $(O;R)$, $\widehat{AOB} = \alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$: góc ở tâm. Nếu $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, cung nhỏ $\overset{\frown}{AmB}$ có số đo cung sđ$\overset{\frown}{AmB} = \alpha$, cung lớn $\overset{\frown}{AnB}$ có số đo cung sđ$\overset{\frown}{AnB} = 360^\circ - \alpha$. Nếu $\alpha = 0^\circ$, cung không có số đo 0° & cung cả đường tròn có số đo 360°. Nếu $\alpha = 180^\circ$, 2 cung $\overset{\frown}{AmB}, \overset{\frown}{AnB}$ là 2 nửa đường tròn với sđ$\overset{\frown}{AmB} =$ sđ$\overset{\frown}{AnB} = 180^\circ$. $\boxed{2}$ Trên cùng 1 đường tròn $(O;R)$ hoặc trên 2 đường tròn bằng nhau $(O;R), (O';R), O \neq O'$, sđ$\overset{\frown}{AB} =$ sđ$\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB = CD$, sđ$\overset{\frown}{AB} <$ sđ$\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow AB < CD$. Tính chất này không còn đúng khi xét trên 2 đường tròn không bằng nhau $(O;R), (O', R')$ với $R \neq R'$. $\boxed{3}$ $B \in \overset{\frown}{AC} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB} +$ sđ$\overset{\frown}{BC} =$ sđ$\overset{\frown}{AC}$.

6.2 Liên hệ giữa cung & dây

$\boxed{1}$ 2 cung chắn giữa 2 dây song song thì bằng nhau.

6.3 Góc nội tiếp

$\boxed{1}$ Cho đường tròn $(O;R)$, $\angle BAC$: góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{BC}$ thì $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$. $\boxed{2}$ Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau. $\boxed{3}$ Các góc nội tiếp cùng chắn 1 cung hoặc các cung bằng nhau thì bằng nhau. $\boxed{4}$ Góc nội tiếp $\leq 90^\circ$ có số đo bằng nữa số đo góc ở tâm cùng chắn 1 cung. $\boxed{5}$ Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

6.4 Góc tạo bởi tia tiếp tuyến & dây cung

$\boxed{1}$ Cho đường tròn $(O;R)$, Ax: tia tiếp tuyến, AB: dây cung, $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$. $\boxed{2}$ Trong 1 đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến & dây cung & góc nội tiếp cùng chắn 1 cung thì bằng nhau.

6.5 Góc có đỉnh ở bên trong/ngoài đường tròn

$\boxed{1}$ $\widehat{BEC}$: góc có đỉnh ở bên trong đường tròn $(O;R)$ chắn 2 cung $\overset{\frown}{DmA}, \overset{\frown}{BnC}$: $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}($sđ$\overset{\frown}{DmA} +$ sđ$\overset{\frown}{BnC})$. $\boxed{2}$ $\widehat{BEC}$: góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn $(O;R)$ chắn 2 cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CD}$: $\widehat{BEC} = \frac{1}{2}|$sđ$\overset{\frown}{AB} -$ sđ$\overset{\frown}{CD}|$.

6.6 Cung chứa góc

$\boxed{1}$ A, B cố định, $\widehat{AMB} = \alpha \in (0^\circ, 180^\circ) \Rightarrow$ Quỹ tích điểm M là 2 cung $\overset{\frown}{AmB}, \overset{\frown}{Am'B}$ chứa góc α dựng trên đoạn AB. Nếu $\alpha = 90^\circ$, quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính AB. $\boxed{2}$ Bài toán quỹ tích: *Phần thuận*: Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình $\mathcal{H}$. *Phần đảo*: Mọi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ đều có tính chất $\mathcal{T}$. *Kết luận*: Quỹ tích các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình $\mathcal{H}$.

6.7 Tứ giác nội tiếp

$\boxed{1}$ $A, B, C, D \in (O)$ (theo thứ tự đó) $\Leftrightarrow ABCD$: tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. $\boxed{2}$ Tứ giác nội tiếp có tổng 2 góc đối diện bằng 180°.

6.8 Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$: $\boxed{1}$ Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow (O;R)$ ngoại tiếp đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. $\boxed{2}$ Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O;R) \Leftrightarrow (O;R)$ nội tiếp đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. $\boxed{3}$ Mọi đa giác đều đều có đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp. Tâm 2 đường tròn ngoại tiếp & nội tiếp là tâm đa giác đều. $\boxed{4}$ Tam giác bất kỳ (không nhất thiết phải đều) luôn có đường tròn ngoại tiếp & đường tròn nội tiếp nhưng đa giác với $n \geq 4$ cạnh chưa chắc có đường tròn ngoại tiếp hay đường tròn nội tiếp. Đa giác với $n \geq 4$ cạnh phải thỏa 1 số điều kiện nhất định thì mới có đường tròn nội tiếp hoặc đường tròn nội tiếp hoặc cả 2.

6.9 Độ dài đường tròn, cung tròn. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

$\boxed{1}$ Chu vi/độ dài đường tròn $(O;R)$: $\boxed{C = 2\pi R = \pi d}$ với $d = 2R$: đường kính. Độ dài cung tròn $n^\circ \in [0^\circ, 360^\circ]$: $\boxed{l = \dfrac{\pi R n}{180}}$.

$\boxed{2}$ Diện tích hình tròn $\boxed{S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi d^2}$. Diện tích hình quạt tròn n°: $\boxed{S_{\text{q}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360} = \dfrac{lR}{2}}$. $\boxed{3}$ Diện tích hình vành khăn $S = \pi(R^2 - r^2)$.

7 Cylinder. Cone. Sphere – Hình Trụ. Hình Nón. Hình Cầu

7.1 Cylinder – Hình trụ

$\boxed{1}$ Quay hình chữ nhật $ABCD$ 1 vòng quanh cạnh CD cố định (trục quay) được 1 hình trụ với 2 đáy: 2 hình tròn $(C;R), (D;R)$ với $R = AD = BC$, mặt xung quanh, đường sinh AB, chiều cao $AB = h$. $\boxed{2}$ Thiết diện: *Mặt cắt song song với đáy*: Thiết diện là 1 hình tròn bằng đáy. *Mặt cắt song song với trục*: Thiết diện là 1 hình chữ nhật. $\boxed{3}$ Hình trụ có diện tích xung quanh $\boxed{S_{\text{xq}} = 2\pi Rh}$, diện tích toàn phần $\boxed{S_{\text{tp}} = 2\pi Rh + 2\pi R^2}$, thể tích $\boxed{V = S_{\text{đ}} h = \pi R^2 h}$.

7.2 Cone. Chopped Cone – Hình nón. Hình nón cụt

$\boxed{1}$ Quy ΔAOB vuông tại O 1 vòng quành cạnh góc vuông OA cố định được 1 hình nón có đáy: hình tròn $(O;R)$, đỉnh A, mặt xung quanh, đường sinh $AB = l$, chiều cao $AO = h$. $\boxed{2}$ Hình nón có diện tích xung quanh $\boxed{S_{xq} = \pi Rl}$, diện tích toàn phần $\boxed{S_{\text{tp}} = \pi Rl + \pi R^2}$, thể tích $\boxed{V = \frac{1}{3} S_{\text{đ}} h = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$. $\boxed{3}$ Hình nón cụt với 2 đáy $(O';r), (O;R)$ có diện tích xung quanh $\boxed{S_{\text{xq}} = \pi(R + r)l}$, diện tích toàn phần $\boxed{S_{\text{tp}} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)}$, thể tích $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)}$.

7.3 Sphere – Hình cầu

$\boxed{1}$ Quay nửa hình tròn tâm O 1 vòng quanh đường kính AB cố định ta được 1 hình cầu. $\boxed{2}$ Thiết diện: Cắt hình cầu (mặt cầu) bán kính R bởi 1 mặt phẳng ta được 1 hình tròn (đường tròn) bán kính r: Bán kính đường tròn lớn $r = R$ nếu mặt phẳng cắt đi qua tâm. Bán kính đường tròn $r < R$ nếu mặt phẳng cắt không đi qua tâm. $\boxed{3}$ Hình cầu có diện tích $\boxed{S = 4\pi R^2 = \pi d^2}$, thể tích $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$. $\boxed{4}$ Hình cầu nội tiếp hình trụ thì bán kính hình cầu bằng bán kính đáy hình trụ, chiều cao hình trụ bằng đường kính hình cầu, $V_{\text{c}} = \frac{2}{3} V_{\text{tr}}$. $\boxed{5}$ Công thức tính thể tích các vật thể có 2 đáy song song: $\boxed{V = \dfrac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)}$ với h: chiều cao của vật thể, B_1: diện tích đáy dưới, B_2: diện tích thiết diện trung bình (thiết diện qua trung điểm của chiều cao), B_3: diện tích đáy trên.