

# Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 12 tháng 10 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Elementary Inequality – Bất Đẳng Thức Sơ Cấp*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/inequality/NQBH\\_inequality.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/inequality/NQBH\\_inequality.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/NQBH_inequality.tex).

- *A Substitution & Its Application To Prove Inequalities – 1 Cách Đổi Biến & Ứng Dụng Trong Chứng Minh Bất Đẳng Thức*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/inequality/substitution/NQBH\\_a\\_substitution\\_in\\_proving\\_inequality.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.pdf).

TeX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/inequality/substitution/NQBH\\_a\\_substitution\\_in\\_proving\\_inequality.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/inequality/substitution/NQBH_a_substitution_in_proving_inequality.tex).

## Mục lục

<b>1 Basic</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation	2
1.2 2-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 2 biến	2
1.3 3-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 3 biến	2
1.4 $n$ -variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức $n$ biến	2
<b>2 Introduction to Inequality</b>	<b>3</b>
2.1 Properties on the number line $\mathbb{R}$	3
<b>3 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz</b>	<b>3</b>
<b>4 Miscellaneous</b>	<b>4</b>
<b>5 Warm-up – Khởi động</b>	<b>4</b>
<b>6 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz</b>	<b>4</b>
<b>7 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz Để Tìm Cực Trị</b>	<b>6</b>
<b>8 Uncategorized</b>	<b>7</b>
<b>9 Methods in Proving Inequalities – Các Phương Pháp Chứng Minh Bất Đẳng Thức</b>	<b>8</b>
9.1 Undefined Coefficient Technique (UCT) – Kỹ thuật hệ số bất định	8
<b>10 Miscellaneous</b>	<b>9</b>
<b>Tài liệu</b>	<b>9</b>

## 1 Basic

### Resources – Tài nguyên.

- [AQ25]. NGUYỄN TUẤN ANH, CAO MINH QUANG. *Bất Đẳng Thức Dưới Góc Nhìn của Các Bỏ Dề*.

---

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

- [HLP52]. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA. *Inequalities*.
- [DCA20]. NGUYỄN VĂN DŨNG, VÕ QUỐC BÁ CẦN, TRẦN QUỐC ANH. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9*.
- PHẠM KIM HÙNG. *Sáng Tạo Bất Đẳng Thức*.
- [KH22]. PHAN HUY KHẢI, ĐOÀN THANH HƯƠNG. *Các Phương Pháp Hiệu Quả Giải Bài Toán Về Bất Đẳng Thức & Giá Trị Lớn Nhất Nhỏ Nhất*.
- [Sơn+25]. NGUYỄN NGỌC SƠN, CHU ĐÌNH NGHIỆP, LÊ HẢI TRUNG, VÕ QUỐC BÁ CẦN. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*.
- NGUYỄN VĂN HUYỀN's WordPress blog. [The Simplest Solution Is The Best Solution](#).
- LÊ VIỆT HẢI's WordPress blog.

## 1.1 Motivation

**Question 1.** *Why do we need to learn elementary inequality in Elementary Mathematics? – Tại sao chúng ta cần học bất đẳng thức sơ cấp ở Toán Sơ Cấp?*

*Answer.* Some reasons:

1. To sharp computation skills on algebraic manipulations – Để mài bén kỹ năng tính toán về các biến đổi đại số.
2. To become better at mathematics – Để trở nên giỏi Toán hơn.
3. To become mathematical analyst – Để trở thành nhà Toán học về Giải tích .
4. To become mathematical optimist – Để trở thành nhà Toán học về Tối ưu.

□

## 1.2 2-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 2 biến

1. Sum  $S(a, b) := a + b$ .
2. Product  $P(a, b) := ab$ .
3. Sum of squares  $S_2(a, b) := a^2 + b^2$ .
4. Sum of cubes  $S_3(a, b) := a^3 + b^3$ .
5. Sum of  $n$ th powers  $S_n(a, b) := a^n + b^n, \forall n \in \mathbb{R}$ .

## 1.3 3-variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức 3 biến

1. Sum  $S(a, b, c) := a + b + c$ .
2.  $A(a, b, c) := ab + bc + ca$ .
3. Product  $P(a, b, c) := abc$ .
4. Sum of squares  $S_2(a, b, c) := a^2 + b^2 + c^2$ .
5. Sum of cubes  $S_3(a, b, c) := a^3 + b^3 + c^3$ .
6. Sum of  $n$ th powers  $S_n(a, b, c) := a^n + b^n + c^n, \forall n \in \mathbb{R}$ .

## 1.4 $n$ -variable inequality hypotheses – Giả thiết của bất đẳng thức $n$ biến

1. Sum  $S(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ .
2. Arithmetic mean  $\bar{x} := \frac{1}{n}S(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ . [Wikipedia/arithmetic mean](#).
3. Product  $P(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \dots x_n$ .
4. Sum of squares  $S_2(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ .
5. Sum of cubes  $S_3(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ .
6. Sum of  $m$ th powers  $S_m(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^m = x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m$ .

## 2 Introduction to Inequality

**Definition 1** (Inequality). “In mathematics, an inequality is a relation which makes a non-equal comparison between 2 numbers or other mathematical expressions.

It is used most often to compare 2 numbers on the **number line** by the size. There are several different notations used to represent different kinds of inequalities: The notation  $a < b$  means that  $a$  is *less than*  $b$ . The notation  $a > b$  means that  $a$  is *greater than*  $b$ . In either case,  $a$  is not equal to  $b$ . These relations are known as *strict inequalities*, meaning that  $a$  is strictly less than or strictly greater than  $b$ . Equivalence is excluded.

In contrast to strict inequalities, there are 2 types of inequality relations that are not strict: The notation  $a \leq b$  means that  $a$  is *less than or equal to*  $b$  (or, equivalently, at most  $b$ , or not greater than  $b$ ). The notation  $a \geq b$  means that  $a$  is *greater than or equal to*  $b$  (or, equivalently, at least  $b$ , or not less than  $b$ ).

The relation *not great than* can also be represented by  $a \not> b$ , the symbol for “greater than” bisected by a slash, “not”. The same is true for *not less than* &  $a \not< b$ .

The notation  $a \neq b$  means that  $a$  is not equal to  $b$ ; this **inequation** sometimes is considered a form of strict inequality. It does not say that one is greater than the other; it does not even require  $a, b$  to be member of an **ordered set**.

In engineering science, less formal use of the notation is to state that 1 quantity is “much greater” than another, normally by several **orders of magnitude**. The notation  $a \ll b$  means that  $a$  is *much less than*  $b$ . The notation  $a \gg b$  means that  $a$  is *much greater than*  $b$ . This implies that the lesser value can be neglected with little effect on the accuracy of an **approximation** (e.g., the case of **ultrarelativistic limit** in physics).

In all of the cases above, any 2 symbols mirroring each other are symmetrical;  $a < b$  &  $b > a$  are equivalent, etc.” – [Wikipedia/inequality \(mathematics\)](#)

### 2.1 Properties on the number line $\mathbb{R}$

## 3 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality:  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

**1** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm). *Chứng minh:*

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**2.** Với  $m, n, p$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . (b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**3** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm). *Chứng minh:*

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**4.** Với  $m, n, p, q$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0$ . (b)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**5** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho  $n$  số không âm). *Chứng minh:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**6.** Với bộ  $(m, m_1, m_2, \dots, m_n)$  nào thì bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

*đúng với:* (a)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . (b)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

## 4 Miscellaneous

**7** ([Son+25], Bổ đề 1.1, p. 5). *Chứng minh:*  $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ,  $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**8** ([Son+25], Bổ đề 1.2, p. 5). *Chứng minh:*  $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**9** ([Son+25], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ,  $\forall a, b > 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**10** ([Son+25], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ,  $\forall a, b, c > 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**11** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho  $n$  số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**12** ([Son+25], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:*  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ ,  $\forall a, b \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**13** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:*  $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$ ,  $\forall a, b, c \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**14** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho  $n$  số). *Chứng minh:*  $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$ ,  $\forall a_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**15** ([Son+25], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:*  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**16** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:*  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

## 5 Warm-up – Khởi động

The general structure of a problem on inequality is given by:

**Problem 1.** Let  $x_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  satisfy the condition  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  &  $C^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . Prove that: (a)  $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ . (b)  $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . (c) Find the minimum & maximum of  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  &  $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Cấu trúc tổng quát của 1 bài toán bất đẳng thức:

**17.** Cho các biến  $x_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  thỏa mãn điều kiện  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . *Chứng minh:* (a)  $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ . (b)  $B(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ . (c) Tìm GTNN & GTLN của biểu thức  $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$  &  $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Để nghiên cứu các bài toán bất đẳng thức & cực trị 1 cách có hệ thống, ta sẽ nghiên cứu 1 số dạng thường gặp của các biểu thức cần tìm cực trị  $A, B$  & đặc biệt là các đẳng thức điều kiện  $C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  & bất đẳng thức điều kiện  $C^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ .

## 6 Cauchy-Schwarz Inequality – Bất Đẳng Thức Cauchy-Schwarz

The most basic inequality:  $x^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .  $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .

Ý nghĩa hình học: Diện tích hình vuông thì không âm. Diện tích của hình vuông bằng 0  $\Leftrightarrow$  hình vuông đó suy biến thành 1 điểm. Cụ thể, công thức tính diện tích hình vuông cạnh  $a$ :  $S = a^2$ . Khi đó  $S = a^2 \geq 0$ ,  $\forall a \geq 0$  &  $S = 0 \Leftrightarrow a = 0$ .

**18.** *Chứng minh:*

$$4ab \leq 2(|ab| + ab) \leq (a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

1st chứng minh. (a)  $4ab \leq 2(|ab| + ab) \Leftrightarrow 2ab \leq 2|ab| \Leftrightarrow ab \leq |ab|$  luôn đúng  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow ab \geq 0$ . (b)  $2(|ab| + ab) \leq (a + b)^2 \Leftrightarrow 2|ab| + 2ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2|ab| \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \geq 0$  luôn đúng  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow |a| = |b|$ . (c)  $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \Leftrightarrow ab \leq |ab|$  luôn đúng  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow ab \geq 0$ . (d)  $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \geq 0$  luôn đúng  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow |a| = |b|$ .  $\square$

2nd chứng minh. (d) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số  $a^2$  &  $b^2$ :  $a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab|$ ,  $\square$

**Lưu ý 1.** Trị tuyệt đối của 1 số thực không nhỏ hơn số thực đó, i.e.,  $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$ .  $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$ .

**19.** Bất đẳng thức  $(a + b)^2 \geq 4|ab|$  đúng khi nào?

**20** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 2 số không âm). Chứng minh:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

1st proof.  $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . “=”  $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

2nd proof.  $(a + b)^2 - (2\sqrt{ab})^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq (2\sqrt{ab})^2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$  (vì  $a, b \geq 0$  nên  $a + b \geq 0$  &  $2\sqrt{ab} \geq 0$ ). “=”  $\Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

**Lưu ý 2.** Ở 2nd proof, ta đã vận dụng tính chất cơ bản của căn bậc 2:  $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Phiên bản chặt/ngắt (strict) là:  $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . Ý nghĩa hình học của 2 tính chất này: Hình vuông nào có cạnh lớn hơn thì có diện tích lớn hơn & ngược lại, hình vuông nào có diện tích lớn hơn thì có cạnh lớn hơn.

3rd proof. Đặt  $x := \sqrt{a}, y := \sqrt{b}, x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ . Có  $a + b - 2\sqrt{ab} = x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$ . “=”  $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b$ .  $\square$

**Lưu ý 3.** Ở 3rd proof, ta đã sử dụng tính chất giao hoán của phép nhân & phép khai phương:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ .

**21.** Với  $m, n, p$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb \geq p\sqrt{ab}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ . (b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**22** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho 3 số không âm). Chứng minh:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**23.** Với  $m, n, p, q$  nào thì bất đẳng thức  $ma + nb + pc \geq q\sqrt[3]{abc}$  luôn đúng: (a)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c \geq 0$ . (b)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

**24** (Bất đẳng thức Cauchy–Schwarz cho  $n$  số không âm). Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**25.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ . Với bộ  $(m, m_1, m_2, \dots, m_n)$  nào thì bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n m_i a_i \geq m \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n \geq m \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

đúng với: (a)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . (b)  $\forall a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

## 7 Áp Dụng Bất Đẳng Thức Cauchy–Schwarz Để Tìm Cực Trị

**26** ([Tuy23], Ví dụ 9, p. 23). Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ .

*1st proof.* Vì  $x, y > 0$  nên  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \sqrt{x}, \sqrt{y} > 0$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ , được:  $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 4$ . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ , được:  $A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4} = 4$ . “=”  $\Leftrightarrow x = y$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$ . Vậy  $\min A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$ .  $\square$

*2nd proof.* Áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho  $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$  &  $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ , được:

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}} = 2\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 4.$$

“=”  $\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y$  &  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = 4$ . Vậy  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A = 4 \Leftrightarrow x = y = 4$ .  $\square$

**Nhận xét 1.** “Trong thí dụ trên ta đã vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo 2 chiều ngược nhau. Lần thứ nhất ta đã “làm trội”  $\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}$  bằng cách vận dụng  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  để dùng điều kiện tổng  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ , từ đó được  $\sqrt{xy} \geq 4$ . Lần thứ 2 ta đã “làm giảm” tổng  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  bằng cách vận dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz theo chiều  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  để dùng kết quả  $\sqrt{xy} \geq 4$ . Không phải lúc nào ta cũng có thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy–Schwarz đối với các số trong đề bài.” – [Tuy23, p. 24]

**Lưu ý 4.** TXD của  $A$  chỉ là  $D_A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$ , nhưng để điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$  có nghĩa thì cần thêm  $x \neq 0, y \neq 0$ , nên ta cần xét  $A$  trên tập hợp  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}\} \subset D_A$ . Hơn nữa, nếu viết GTNN của biểu thức  $A = A(x, y)$  trên tập  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$  1 cách chính xác về mặt toán học thì nên viết tường minh là  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A(x, y)$  hoặc  $\min_{(x, y) \in D} A(x, y)$  hoặc  $\min_{x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0} A$  như trong 2nd proof thay vì chỉ đơn giản là  $\min A$  như trong 1st proof.

Ta có thể mở rộng & tổng quát bài toán trên như sau:

**27.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = m > 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**28.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m > 0$ ,  $a, b, m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**29.** Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = m > 0$ ,  $a, b, c, m \in \mathbb{R}$  cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**30.** Cho  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i > 0$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , thỏa mãn điều kiện  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x_i} = m > 0$ ,  $a_i, m \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ , cho trước. Có thể tìm GTNN & GTLN của các biểu thức nào? Liệt kê & chứng minh nhiều nhất có thể.

**31** ([Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$ .

*Giải.* ĐKXD:  $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ .  $A^2 = 3x - 5 + 7 - 3x + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \leq 2 + (3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow A \leq 2$  ( $A \geq 0$  vì  $\sqrt{3x-5} \geq 0$ ,  $\sqrt{7-3x} \geq 0$ ). “=”  $\Leftrightarrow 3x-5 = 7-3x \Leftrightarrow x = 2$ . Mặt khác,  $A^2 = 2 + 2\sqrt{3x-5}\sqrt{7-3x} \geq 2$ . “=”  $\Leftrightarrow (3x-5)(7-3x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$ . Vậy  $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 2$  &  $\min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \{\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\}$ .  $\square$

**32** (Mở rộng [Tuy23], Ví dụ 10, p. 24). Biện luận theo các tham số  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  để tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$ .

**33** ([Tuy23], Ví dụ 11, p. 25). Tìm GTLN & GTNN của biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x}$ .

**34** ([Tuy23], Ví dụ 12, p. 25). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{3x^4+16}{x^3}$ .  $A$  có GTLN không?

**35** ([Tuy23], Ví dụ 13, p. 26). Cho  $0 < x < 2$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$ .

**36** ([Tuy23], Ví dụ 14, p. 27). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,  $x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 2$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ .

**37** ([Tuy23], 63., p. 28). Cho  $a, x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a, x, y > 0$ ,  $x + y = 2a$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

38 ([Tuy23], 64., p. 28). Tìm GTLN của biểu thức  $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{23-x}$ .

39 ([Tuy23], 65., p. 28). Cho  $x+y=15$ , tìm GTNN, GTLN của biểu thức  $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{y-3}$ .

40 ([Tuy23], 66., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{2x^2-6x+5}{2x}$  với  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ .

41 ([Tuy23], 67., p. 28). Cho  $a, b, x \in \mathbb{R}, a, b, x > 0$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$ .

42 ([Tuy23], 68., p. 28). Cho  $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2+2x+17}{2(x+1)}$ .

43 ([Tuy23], 69., p. 28). Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x+6\sqrt{x}+36}{\sqrt{x}+3}$ .

44 ([Tuy23], 70., p. 28). Cho  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^3+2000}{x}$ .

45 ([Tuy23], 71., p. 28). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0$  &  $x+y \geq 6$ . Tìm GTNN của biểu thức:  $A = 5x + 3y + \frac{12}{x} + \frac{16}{y}$ .

46 ([Tuy23], 72., p. 29). Cho  $x, y \in \mathbb{R}, x > y$  &  $xy = 5$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x^2+1.2xy+y^2}{x-y}$ .

47 ([Tuy23], 73., p. 29). Cho  $x \in \mathbb{R}, x > 1$ , tìm GTLN của biểu thức  $A = 4x + \frac{25}{x-1}$ .

48 ([Tuy23], 74., p. 29). Cho  $x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$ , tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{3}{1-x} + \frac{4}{x}$ .

49 ([Tuy23], 75., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x+y+z=a$ . (a) Tìm GTLN của biểu thức  $A = xy + yz + zx$ . (b) Tìm GTNN của biểu thức  $B = x^2 + y^2 + z^2$ .

50 ([Tuy23], 76., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x+y+z \geq 12$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}}$ .

51 ([Tuy23], 77., p. 29). Cho  $x, y, z \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$  thỏa mãn điều kiện  $x+y+z=a$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \left(1 + \frac{a}{y}\right) \left(1 + \frac{a}{z}\right)$ .

52 ([Tuy23], 78., p. 29). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, a, b, c > 0$  thỏa mãn điều kiện  $a+b+c=1$ . Tìm GTNN của biểu thức  $A = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$ .

53 ([Tuy23], 79., p. 29). Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện  $x+y=1$  &  $x > 0$ . Tìm GTLN của biểu thức  $B = x^2y^3$ .

54 ([Dung\_Can\_Anh\_BDT\_8\_9], Ví dụ 1.5.1, p. 73, TS PTNK ĐHQG Tp HCM 2006). Cho  $x, y \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $x+y=2$ . Chứng minh  $xy(x^2+y^2) \leq 2$ .

1st chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức  $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$  ở (1), có:  $xy(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(2xy)(x^2+y^2) \leq \frac{1}{8}[2xy+(x^2+y^2)]^2 = \frac{1}{8}(x+y)^4 = 2$ . “=”  $\Leftrightarrow x+y=2$  &  $2xy=x^2+y^2 \Leftrightarrow x+y=2$  &  $(x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y=1$ .  $\square$

2nd chứng minh. Sử dụng kỹ thuật đồng bậc, cần chứng minh  $8xy(x^2+y^2) \leq (x+y)^4$  (cả 2 vế đều là bậc 4). Bất đẳng thức này đúng vì  $8xy(x^2+y^2) \leq (x+y)^4 \Leftrightarrow 8xy(x^2+y^2) \leq x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \Leftrightarrow x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^4 \geq 0$  hiển nhiên đúng  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow x=y$  &  $x+y=2 \Leftrightarrow x=y=1$ .  $\square$

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau:

55. Cho  $x, y, m \in \mathbb{R}$  thỏa mãn  $x+y=m$ . Biện luận theo tham số  $m$  để tìm GTLN & GTNN của: (a)  $A = xy(x^2+y^2)$ . (b)  $B = xy(x^3+y^3)$ . (c)  $B = xy(x^4+y^4)$ . (d\*)  $x^a y^a (x^b+y^b)$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

## 8 Uncategorized

56 ([Son+25], Bổ đề 1.1, p. 5). Chứng minh:  $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?

Hint.  $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0, 2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow a=b$ .  $\square$

57 ([Son+25], Bổ đề 1.2, p. 5). Chứng minh:  $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ , hay có thể viết dưới dạng  $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . Đẳng thức xảy ra khi nào?



*Hint.*  $(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$ ,  $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ . “=”  $\Leftrightarrow a = b = c$ .  $\square$

**58** ([Son+25], Bổ đề 1.3, p. 6). *Chứng minh:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ,  $\forall a, b > 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

*Hint.*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$ ,  $\forall a, b > 0$ . “=”  $\Leftrightarrow a = b > 0$ .  $\square$

**59** ([Son+25], Bổ đề 1.4, p. 6). *Chứng minh:*  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ , hay có thể viết dưới dạng  $\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{9} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ ,  $\forall a, b, c > 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**60** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.3–1.4, p. 6 cho  $n$  số). *Chứng minh:*

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}, \text{ i.e., } \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right), \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n,$$

hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}, \text{ i.e., } \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}, \forall a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**61** ([Son+25], Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:*  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$ ,  $\forall a, b \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**62** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7). *Chứng minh:*  $\sqrt{a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$ ,  $\forall a, b, c \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**63** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.5, p. 7 cho  $n$  số). *Chứng minh:*  $\sqrt{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt{a_1} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n(a_1 + \dots + a_n)}$ ,  $\forall a_i \geq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , hay có thể được viết gọn lại như sau:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i}, \forall a_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n.$$

*Đẳng thức xảy ra khi nào?*

**64** ([Son+25], Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:*  $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \geq 0$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

*Hint.*  $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a+b \geq 0$ . “=”  $\Leftrightarrow a = \pm b$ .  $\square$

**65** ([Son+25], Mở rộng Bổ đề 1.6, p. 7). *Chứng minh:*  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

## 9 Methods in Proving Inequalities – Các Phương Pháp Chứng Minh Bất Đẳng Thức

### 9.1 Undefined Coefficient Technique (UCT) – Kỹ thuật hệ số bất định

**66.** Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a+b+c = S \in (0, \infty)$ . Tìm điều kiện cần & đủ của  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  để

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 \geq \gamma x + \delta, \forall x \in (0, S), \\ \frac{\alpha}{x^2} + \beta x^2 = \gamma x + \delta \Leftrightarrow x = \frac{S}{3}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra các bất đẳng thức có dạng

$$m \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + n(a^2 + b^2 + c^2) \geq p(a+b+c) + 3q = pS + 3q, \quad (2)$$

$$m \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + n(a^2 + b^2 + c^2) = p(a+b+c) + 3q = pS + 3q \Leftrightarrow a = b = c = \frac{S}{3}. \quad (3)$$

**67** ([Son+25], VD4.1, p. 76). Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a+b+c = 3$ . *Chứng minh*  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 5$ .

*Hint.*  $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{3}a^2 \geq -\frac{2}{3}a + \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(a^2+6a+3)}{3a^2} \geq 0$ ,  $\forall a > 0$ .



68. Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = S_2$ . Tìm điều kiện cần & đủ của  $m, n, p, q \in \mathbb{R}$  để

$$mx + \frac{n}{x} \geq px^2 + q, \quad \forall x \in (0, \sqrt{S_2}).$$

Từ đó suy ra các bất đẳng thức có dạng

$$m(a+b+c) + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq p(a^2 + b^2 + c^2) + 3q = pS_2 + 3q,$$

$$m(a+b+c) + n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = p(a^2 + b^2 + c^2) + 3q = pS_2 + 3q \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{\frac{S_2}{3}}.$$

69 ([Son+25], VD4.2, p. 77). Cho  $a, b, c > 0$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 = S_2$ . Chứng minh  $2(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ .

## 10 Miscellaneous

### Tài liệu

- [AQ25] Nguyễn Tuấn Anh and Cao Minh Quang. *Bất Đẳng Thức Dưới Góc Nhìn của Các Bổ Đề*. Nhà Xuất Bản Thông Tin & Truyền Thông, 2025, p. 345.
- [DCA20] Nguyễn Văn Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, and Trần Quốc Anh. *Phương Pháp Giải Toán Bất Đẳng Thức & Cực Trị Dành Cho Học Sinh Lớp 8, 9*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2020, p. 280.
- [HLP52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. 2nd ed. Cambridge, at the University Press, 1952, pp. xii+324.
- [KH22] Phan Huy Khải and Đoàn Thanh Hương. *Các Phương Pháp Hiệu Quả Giải Bài Toán Về Bất Đẳng Thức & Giá Trị Lớn Nhất Nhỏ Nhất*. Nhà Xuất Bản Dân Trí, 2022, p. 298.
- [Sơn+25] Nguyễn Ngọc Sơn, Chu Đình Nghiệp, Lê Hải Trung, and Võ Quốc Bá Cẩn. *Các Chủ Đề Bất Đẳng Thức Ôn Thi Vào Lớp 10*. Tái bản lần 3. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2025, p. 143.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.