

Problem & Solution: Trigonometry In Triangles

Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry [pdf].).¹ [TeX]².

Mục lục

1	1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2	Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	3
3	1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông	4
4	Miscellaneous	5
	Tài liệu	5

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. $\triangle ABC$ vuông tại A : $a := BC$, $b := CA$, $c := AB$, $b' := CH$, $c' := BH$, $h := AH$.

Tính chất. [1] $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. [2] Định lý Pythagore thuận & đảo: $\triangle ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. [3] $h^2 = b'c'$. [4] $ah = bc = 2S_{ABC}$. [5] $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bin23], Ví dụ 1, p. 84). Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC , BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.

Giải. Kẻ $BE \parallel AC$, $E \in CD$. Gọi BH là đường cao của hình thang. $BE \parallel AC$ & $AC \perp BD \Rightarrow BE \perp BD$. Áp dụng định lý Pythagore cho $\triangle BDH$ vuông tại H : $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm. Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ vào $\triangle BDE$ vuông tại B : $DE = \frac{BD^2}{DH} = \frac{15^2}{9} = \frac{225}{9} = 25$ cm. $AB \parallel CE$ & $AC \parallel BE \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CE \Rightarrow AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$ cm². \square

Bài toán 2 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 85). Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

Giải. Gọi AH, BK là 2 đường cao của hình thang $ABCD$. Đặt $x := AB = AH = BK$. Tứ giác $ABKH$ có $AB \parallel HK$, $AH \parallel BK$ (vì $AH \perp CD$ & $BK \perp CD$) nên $ABKH$ là hình bình hành, mà $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật, kết hợp với $AB = AH$, suy ra $ABKH$ là hình vuông, nên $HK = AB = x$ (1). $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AD = BC$ & $\widehat{C} = \widehat{D}$, suy ra $\triangle AHD = \triangle BKC$ (2 tam giác vuông lần lượt tại H, K , trường hợp cạnh huyền–góc nhọn³) $\Rightarrow DH = CK$ (2). Từ (1) & (2), suy ra: $DH = CK = \frac{CD - HK}{2} = \frac{10 - x}{2} \Rightarrow CH = CK + HK = \frac{10 - x}{2} + x = \frac{10 + x}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng $h^2 = b'c'$ cho $\triangle ACD$ vuông tại A (đường chéo $AC \perp AD$: giả thiết): $AH^2 = DH \cdot CH \Leftrightarrow x^2 = \frac{10 + x}{2} \cdot \frac{10 - x}{2} = \frac{100 - x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{100}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Vậy đường cao của hình thang $ABCD$ bằng $2\sqrt{5}$ cm. \square

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

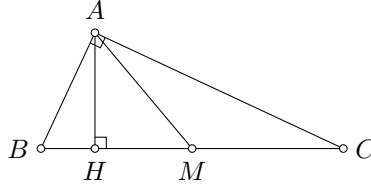
¹URL: https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

³Hoặc có thể lý luận: $\triangle AHD = \triangle BKC$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông) vì 2 tam giác vuông này có $AD = BC$ (2 cạnh bên của hình thang cân $ABCD$) & $AH = BK$ (cùng bằng chiều cao của hình thang $ABCD$).

Bài toán 3 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.*

Giải. Xét $\triangle ABC$, $AB < AC$, M là trung điểm BC , $AH \perp BC$, $H \in BC$, như hình:

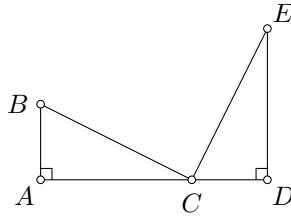


Đặt $x := AM$, $BC = 2AM = 2x$, $AH = AM - 7 = x - 7$. Áp dụng định lý Pythagore & hệ thức lượng $bc = ah$ cho $\triangle ABC$ vuông tại A: $b^2 + c^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2$, $bc = ah = 2x(x - 7)$. Giải hệ phương trình:⁴

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4x^2, \\ bc = 2x(x - 7). \end{cases}$$

Có $a + b + c = 72 \Leftrightarrow b + c = 72 - a = 72 - 2x$. Từ hệ phương trình vừa thu được: $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4x^2 + 4x(x - 7) = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72 - 2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 2x + 4x^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 4x^2 + 260x - 72^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x - 16)(x + 81) = 0 \Leftrightarrow x = 16 \vee x = -81$ (loại vì $x > 0$) $\Rightarrow x = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = x(x - 7) = 16(16 - 7) = 144 \text{ cm}^2$. \square

Bài toán 4 ([Bin23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\triangle ABC = \triangle DCE$:*



Bài toán 5 ([Bin23], 2., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ cân có $AB = AC = 9 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, đường cao AH , I là hình chiếu của H trên AC . (a) Tính độ dài CI . (b) Kẻ đường cao BK của $\triangle ABC$. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A , C .*

Bài toán 6 ([Bin23], 3., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

Bài toán 7 ([Bin23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của $\triangle ABC$ cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.*

Bài toán 8 ([Bin23], 5., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác AD , đường cao AH . Biết $BD = 7.5 \text{ cm}$, $CD = 10 \text{ cm}$. Tính AH , BH , DH .*

Bài toán 9 ([Bin23], 6., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , $AB = 20 \text{ cm}$, $CH = 9 \text{ cm}$. Tính độ dài AH .*

Bài toán 10 ([Bin23], 7., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của \widehat{HAC} cắt HC ở D . Gọi K là hình chiếu của D trên AC . Biết $BC = 25 \text{ cm}$, $DK = 6 \text{ cm}$. Tính AB .*

Bài toán 11 ([Bin23], 8., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$, 2 đường trung tuyến BD , CE vuông góc với nhau. Tính BC .*

Bài toán 12 ([Bin23], 9., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ có $\hat{B} = 60^\circ$, $BC = 8 \text{ cm}$, $AB + AC = 12 \text{ cm}$. Tính AB , AC .*

Bài toán 13 ([Bin23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng 54 cm^2 & 96 cm^2 . Tính độ dài cạnh huyền.*

Bài toán 14 ([Bin23], 11., p. 86). *Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , đường trung tuyến BM . Gọi D là hình chiếu của C trên BM , H là hình chiếu của D trên AC . Chứng minh $AH = 3DH$.*

Bài toán 15 ([Bin23], 12., pp. 86–87). (a) *1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k . Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền.* (b) *Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng $5 : 4$ & cạnh huyền dài 82 cm .*

Bài toán 16 ([Bin23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với $1 : 3$. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

⁴Xem cách giải của dạng tổng quát của hệ phương trình này ở bài viết sau của tác giả: *Problem & Solution: System of Equations of 2 Variables – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình 2 Biến*: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/miscellaneous/system_of_equations_2_variables/problem/NQBH_system_of_equations_2_variables_problem.pdf.

Bài toán 17 ([Bin23], 14., p. 87). Cho $\triangle ABC$ có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH , đường trung tuyến AM . Chứng minh $HM = 2$.

Bài toán 18 ([Bin23], 15., p. 87). 1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài 14 cm, đáy lớn dài 50 cm.

Bài toán 19 ([Bin23], 16., p. 87). 1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.

Bài toán 20 ([Bin23], 17., p. 87). Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ cạnh a , vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I . Chứng minh $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.

Bài toán 21 ([Bin23], 18., p. 87). Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1 dm. Tính cạnh của $\triangle AEF$ đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC .

Bài toán 22 ([Bin23], 19., p. 87). Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) 3, 4, 5. (b) 12, 15, 20.

Bài toán 23 (Mở rộng [Bin23], 19., p. 87). Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c . Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để $\triangle ABC$ vuông.

Bài toán 24 ([Bin23], 20., p. 87). Chứng minh $\triangle ABC$ là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.

Bài toán 25 ([Bin23], 21., p. 87). Xét các $\triangle ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB . Tìm GTLN của: (a) DE . (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.

Bài toán 26 ([Bin23], 22., pp. 87–88). Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

Bài toán 27 ([Bin23], 23., p. 88). Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.

Bài toán 28 ([Bin23], 24., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của \widehat{A} cắt BD ở I . Biết $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích $\triangle ABC$.

Bài toán 29 ([Bin23], 25., p. 88). $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính BC . (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính AB, AC .

Bài toán 30 ([Bin23], 26., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC . (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính \widehat{BIM} . (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của $\triangle ABC$ tỷ lệ với 3 số nào?

Bài toán 31 ([Bin23], 27., p. 88). 1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) DQ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: 17, 13, 35, 41, 22?

Bài toán 32 ([Bin23], 28., p. 88). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $BC = 3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông $ADEF$ cạnh 2 cm có $D \in AB, E \in BC, F \in CA$. Tính AB, AC .

Bài toán 33 ([Bin23], 29., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính AB .

Bài toán 34 ([Bin23], 30., p. 88). $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao AD , trục tâm H . Tính độ dài AD , biết $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

Bài toán 35 ([Bin23], 31., p. 88). $\triangle ABC$ có $BC = 40$ cm, đường phân giác AD dài 45 cm, đường cao AH dài 36 cm. Tính BD, CD .

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

Bài toán 36 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 89). Tính $\tan 15^\circ$ mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.

Bài toán 37 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 90). Xét $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, đường trung tuyến AM , đường cao AH , $MA = MB = MC = a$. Chứng minh: (a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. (b) $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$. (c) $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.

Bài toán 38 ([Bin23], 32., p. 91). Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc 72° bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng 1 cm & 3 cm. (b) Dựng góc 20° bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy 2 cm, cạnh bên 6 cm.

Bài toán 39 ([Bin23], 33., p. 91). $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC . Tính $\frac{\tan B}{\tan C}$.

Bài toán 40 ([Bin23], 34., p. 91). Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$.

Bài toán 41 ([Bin23], 35., p. 91). Cho hình vuông $ABCDN$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Tính $\cos \widehat{MAN}$.

Bài toán 42 ([Bin23], 36., p. 91). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với A qua B . Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho $HE = 2HA$. Chứng minh $\widehat{DEC} = 90^\circ$.

Bài toán 43 ([Bin23], 37., p. 91). Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.

Bài toán 44 ([Bin23], 38., p. 91). Tính $\tan 22^\circ 30'$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

Bài toán 45 ([Bin23], 39., p. 91). Chứng minh $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

Bài toán 46 ([Bin23], 40., p. 91). Tính $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ mà không dùng bảng số hay máy tính.

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

Bài toán 47 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 92). Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của $\triangle ABC$ ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao BH , có $BH = AB \sin \alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB \sin \alpha = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. \square

Bài toán 48 (Mở rộng [Bin23], Ví dụ 6, p. 91). Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với sin của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với \widehat{A} , chứng minh công thức ứng với \widehat{B}, \widehat{C} hoàn toàn tương tự.

- Trường hợp $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc \sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc \sin A$.
- Trường hợp $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- Trường hợp $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x)$, $\forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc \sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ đúng cho mọi $\triangle ABC$. \square

★ Công thức tính diện tích tam giác tổng quát:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C, \forall \triangle ABC.$$

Bài toán 49 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 92). $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của $\triangle ABC$. (b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.

Bài toán 50 (Tổng quát [Bin23], Ví dụ 7, p. 92). Nếu $\triangle ABC$ có \widehat{A} tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng 2, 3, 4.

Bài toán 51 ([Bin23], 41., p. 94). Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh 40 cm của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng $40^\circ, 55^\circ$. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng $60^\circ, 80^\circ$.

Bài toán 52 ([Bin23], 42., p. 94). $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm. Tính AB, AC .

Bài toán 53 ([Bin23], 43., p. 94). $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ, AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính BC .

Bài toán 54 ([Bin23], 44., p. 94). Cho 1 hình vuông có cạnh 1 dm. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.

Bài toán 55 ([Bin23], 45., p. 94). $\triangle ABC$ đều có cạnh 60 cm. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt 2 cạnh AB, AC theo thứ tự ở E, F . Tính độ dài 3 cạnh của $\triangle DEF$.

Bài toán 56 ([Bin23], 46., p. 94). Cho $\triangle ABC$ có $AB = c, CA = b$, đường phân giác AD , đường trung tuyến AM . Đường thẳng đối xứng với AM qua AD cắt BC ở N . Tính $\frac{BN}{CN}$.

Bài toán 57 ([Bìn23], 47., p. 94). *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

Bài toán 58 ([Bìn23], 48., p. 94). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau ở O & không vuông góc với nhau. Gọi H & K lần lượt là trực tâm của $\triangle AOB, \triangle COD$. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm của $\triangle BOC, \triangle AOD$. (a) Gọi E là trọng tâm của $\triangle AOB$, F là giao điểm của AH & DK . Chứng minh $\triangle IEG \sim \triangle HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.*

Bài toán 59 ([Bìn23], 49., p. 94). *Cho $\triangle ABC$ nhọn, 3 điểm D, E, F lần lượt thuộc 3 cạnh AB, BC, CA . Chứng minh trong 3 $\triangle ADF, \triangle BDE, \triangle CEF$, tồn tại 1 tam giác có diện tích $\leq \frac{1}{4}$ diện tích $\triangle ABC$. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích $\triangle ABC$?*

4 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.