Problem: Antiderivative, Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm, Tích Phân

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 15 tháng 2 năm 2024

Mục lục

1 Antiderivative – Nguyên Hàm

$\boxed{1}$ $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. $\boxed{2}$ Tính chất của nguyên hàm: $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \forall a\in\mathbb{R}$. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 3–8]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 ([Quỳ+20], VD1, p. 106). *Tính* $\int \cos^2 3xdx$.

2 ([Quỳ+20], VD2, p. 106). *Tìm hàm số* f *thỏa* $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4, f(0) = 4, f(1) = 1$.

3. *Tìm hàm số* f *thỏa* $f(a) = b$ *&: (a)* $f'(x) = c$. *(b)* $f'(x) = cx + d$. *(c)* $f'(x) = cx^2 + dx + e$. *(d)* $f'(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$.

4. *Tìm hàm số* f *thỏa* $f(a) = m, f(b) = n$ *&: (a)* $f''(x) = c$. *(b)* $f''(x) = cx+d$. *(c)* $f''(x) = cx^2+dx+e$. *(d)* $f''(x) = \sum_{i=0}^n a_ix^i$.

5 ([Quỳ+20], VD3, p. 106). *Cho* $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$. *(a) Viết* $f(x)$ *dưới dạng* $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$. *(b) Tính* $\int f(x)dx$.

6 ([Quỳ+20], VD4, p. 108). *Tính* $\int x^2(1-x)^7dx$.

7 ([Quỳ+20], VD5, p. 108). *Tính: (a)* $\int \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$. *(b)* $\int \dfrac{7\cos x - 4\sin x}{\cos x + \sin x}dx$.

8 ([Quỳ+20], VD6, p. 109). *Tính: (a)* $\int xe^{-x}dx$. *(b)* $\int \sqrt{x}\ln xdx$.

9 ([Quỳ+20], VD7, p. 110). *Tính* $\int \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}dx$.

10 ([Quỳ+20], VD8, p. 110). *Tính* $\int \sin x\cos xdx$.

11 ([Quỳ+20], 1., p. 110). *Tính* $\int \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$.

12 ([Quỳ+20], 2., p. 110). *Tính: (a)* $\int \sin 2x\cos xdx$. *(b)* $\int \cot^2 2xdx$.

13 ([Quỳ+20], 3., p. 111). *Tìm hàm số* $f(x)$ *thỏa: (a)* $f'(x) = 4\sqrt{x} - x, f(4) = 0$. *(b)* $f'(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 2, f(1) = 2$.

14 ([Quỳ+20], 4., p. 111). *Tính: (a)* $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$. *(b)* $\int \dfrac{2x+4}{x^2+4x-5}dx$.

15 ([Quỳ+20], 5., p. 111). *Tính* $\int xe^{x^2}dx$.

16 ([Quỳ+20], 6., p. 111). *Tính: (a)* $\int x^3\ln 2xdx$. *(b)* $\int x^2\cos 2xdx$.

17 ([Quỳ+20], 7., p. 111). *Tính: (a)* $\int \dfrac{x^3}{(6x^4+5)^5}dx$. *(b)* $\int x^2e^xdx$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp

$\boxed{1}$ (a) $\int dx = x + C$. (b) $\int (x+a)^\alpha dx = \dfrac{(x+a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\forall a, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$. (c) $\int \dfrac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (d) $\int \sin\alpha dx = -\dfrac{\cos\alpha x}{\alpha} + C$, $\int \cos\alpha x dx = \dfrac{\sin\alpha x}{\alpha} + C$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star$. (e) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\forall a \in (0,\infty), a \neq -1$. (f) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$, $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$. $\boxed{2}$ Công thức đổi biến: $\boxed{\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C}$, $\boxed{\int f(u)du = F(u(x)) + C}$. $\boxed{5}$ Công thức nguyên hàm từng phần: $\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx}$, $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$.

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 9–16]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. HD4. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

3 Integral – Tích Phân

$\boxed{1}$ $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)|_a^b$. $\boxed{2}$ (a) Tính chất của tích phân: (a) $\int_a^a f(x)dx = 0$. (b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$. (c) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. (d) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. (f) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$. $\boxed{3}$ Công thức đổi biến: $\boxed{\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du}$. $\boxed{4}$ Công thức tích phân từng phần: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$, $\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$.

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 17–27]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. LT8. LT9. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

18 ([Quỳ+20], VD1, p. 113). *Tính: (a)* $\int_4^5 \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^2 dx$. *(b)* $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\sin 2x}$. *(c)* $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

19 ([Quỳ+20], VD2, p. 114). *Cho* $a \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Chứng minh* $\int_e^{\tan a} \dfrac{xdx}{1+x^2} + \int_e^{\cot a} \dfrac{dx}{x(1+x^2)} = -1$.

20 ([Quỳ+20], VD3, p. 114). *Tìm nguyên hàm của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < -1, \\ 1, & \text{if } -1 \le x \le 1, \\ x, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

21 ([Quỳ+20], VD4, p. 115). *Cho hàm số* $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t}\sin t dt$ *xác định với* $x > 0$. *Tìm* $g'(x)$.

22 ([Quỳ+20], VD5, p. 117). *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi công thức* $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{\dfrac{i}{n}}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

23 ([Quỳ+20], VD6, p. 118). *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi công thức* $u_n = \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{2n+2i-1} = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} + \cdots + \dfrac{1}{4n-1}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty} u_n$.

24 ([Quỳ+20], VD7, p. 119). *Tính* $I = \int_1^2 xe^{x^2} dx$.

25 ([Quỳ+20], VD8, p. 120). *Tính: (a)* $I = \int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2+1}$. *(b)* $I = \int_\pi^{2\pi} \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

26 ([Quỳ+20], VD9, p. 121). *Tính* $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{(1+\sin x\cos x)e^x}{1+\cos 2x}dx$.

27 ([Quỳ+20], VD10, p. 121). *Tính* $u_n = \int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$.

28 ([Quỳ+20], VD11, p. 122). *Giả sử f là hàm liên tục. Chứng minh* $\int_0^a f(x)(a-x)dx = \int_0^a \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx$.

29 ([Quỳ+20], 8., p. 123). *Tính: (a)* $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. *(b)* $I = \int_0^{\ln 2} e^{7x} dx$.

30 ([Quỳ+20], 9., p. 123). *Tính: (a)* $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$. *(b)* $I = \int_0^3 \dfrac{xdx}{1+x^2}$.

31 ([Quỳ+20], 10., p. 123). *Tính: (a)* $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$. *(b)* $I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

32 ([Quỳ+20], 11., p. 123). *Tính: (a)* $I = \int_0^1 x^2 e^{4x} dx$. *(b)* $I = \int_4^7 \dfrac{dx}{\sqrt{(x-4)(7-x)}}$.

33 ([Quỳ+20], 12., p. 123). *Cho hàm số*

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & \text{khi } x\le 0,\\ k(1-x^2), & \text{khi } x>0.\end{cases}$$

Tìm $k\in\mathbb{R}$ *để* $\int_{-1}^1 f(x)dx=1$.

34 ([Quỳ+20], 13., p. 123). *Cho hàm số* $g(x)=\int_{2x}^{3x}\frac{t^2-1}{t^2+1}dt$. *Tìm* $g'(x)$.

35 ([Quỳ+20], 14., p. 123). *Tìm hàm số* f *&* $a\in(0,\infty)$ *thỏa* $\int_a^x\frac{f(t)}{t^2}dt+6=2\sqrt{x}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

36 ([Quỳ+20], 15., p. 123). *Cho hàm* $f(x)$ *liên tục &* $a\in(0,\infty)$. *Giả sử* $\forall x\in[0,a]$, *có* $f(x)>0, f(x)f(a-x)=1$. *Tính* $I=\int_0^a\frac{dx}{1+f(x)}$ *theo* a.

37 ([Quỳ+20], 16., p. 123). *Tính* $I=\int_{-1}^1\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

38 ([Quỳ+20], 17., p. 123). *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi công thức* $u_n=\sum_{i=1}^n\frac{i^3}{n^4}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty}u_n$.

39 ([Quỳ+20], 18., p. 123). *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi công thức* $u_n=\sum_{i=1}^n\frac{i^2}{i^3+n^3}$. *Tính* $\lim_{n\to\infty}u_n$.

4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân

Cho các hàm $f,g\in C(\mathbb{R})$. $\boxed{1}$ Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x),y=g(x)$ & 2 đường thẳng $x=a,x=b$ có diện tích $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$. $\boxed{2}$ Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong với phương trình $x=f(y),x=g(y)$ & 2 đường thẳng $y=c,y=d$, $c<d$ có diện tích $S=\int_c^d|f(y)-g(y)|dy$. $\boxed{3}$ Đường cong $\mathcal{C}:y=f(x),f\in C^2([a,b])$ từ điểm $A(a,f(a))$ đến điểm $B(b,f(b))$ có độ dài $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$. $\boxed{4}$ Đường cong $\mathcal{C}:x=f(y),f\in C^2([c,d])$ từ điểm $C(g(c),c)$ đến điểm $D(g(d),d)$ có độ dài $L=\int_c^d\sqrt{1+(g'(y))^2}dy$.

[Thá+24, Chap. IV, §4, pp. 28–41]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

40 ([Quỳ+20], VD1, p. 126). *Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị 2 hàm số* $y=\sin x, y=\cos x$ *& 2 đường thẳng* $x=0,x=\frac{\pi}{2}$.

41 ([Quỳ+20], VD2, p. 126). *Tính diện tích hình phẳng* $\mathcal{H}$ *giới hạn bởi đường thẳng* $y=x-1$ *& parabol* $y^2=2x+6$.

42 ([Quỳ+20], VD3, p. 128). *Tính độ dài đường cong* $\mathcal{C}:y^2=x^3$ *đi từ điểm* $A(1,1)$ *đến điểm* $B(4,8)$.

43 ([Quỳ+20], VD4, p. 129). *Tìm độ dài cung parabol* $\mathcal{C}:y^2=x$ *từ điểm* $A(0,0)$ *đến điểm* $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 42–44]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 111.