

Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions

Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 8 tháng 8 năm 2023

Mục lục

1	Tính Đơn Điều của Hàm Số	1
2	Cực Trị của Hàm Số	2
3	GTLN & GTNN của Hàm Số	2
4	Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ	3
	Tài liệu	3

1 Tính Đơn Điều của Hàm Số

Bài toán 1 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 1, p. 5). Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0, 1]$.

Bài toán 2 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 2, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.

Bài toán 3 (Quỳnh et al., 2022, H1, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

Bài toán 4 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 3, p. 6). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Bài toán 5 (Quỳnh et al., 2022, H2, p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$.

Bài toán 6 (Quỳnh et al., 2022, 1., p. 7). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. (c) $y = x + \frac{3}{x}$. (d) $y = x - \frac{2}{x}$. (e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (f) $y = \sqrt{4-x^2}$.

Bài toán 7 (Quỳnh et al., 2022, 2., p. 7). Chứng minh: (a) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Bài toán 8 (Quỳnh et al., 2022, 3., p. 8). Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên \mathbb{R} : (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$. (b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.

Bài toán 9 (Quỳnh et al., 2022, 4., p. 8). Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} ?

Bài toán 10 (Quỳnh et al., 2022, 5., p. 8). Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài toán 11 (Quỳnh et al., 2022, 6., p. 8). Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$. (b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$. (c) $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$. (d) $y = \sqrt{2x - x^2}$. (e) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$. (f) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$.

Bài toán 12 (Quỳnh et al., 2022, 7., p. 8). Chứng minh hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài toán 13 (Quỳnh et al., 2022, 8., pp. 8-9). Chứng minh bất đẳng thức: (a) $\sin x < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$. (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. (c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.

Bài toán 14 (Quỳnh et al., 2022, 9., p. 9). Chứng minh: $\sin x + \tan x > 2x$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bài toán 15 (Quỳnh et al., 2022, 10., p. 9). Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0, +\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyentuanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

2 Cực Trị của Hàm Số

Bài toán 16 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 1, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

Bài toán 17 (Quỳnh et al., 2022, H1, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.

Bài toán 18 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 2, p. 14). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$.

Bài toán 19 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 3, p. 16). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.

Bài toán 20 (Quỳnh et al., 2022, H2, p. 16). Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2\sin 2x - 3$.

Bài toán 21 (Quỳnh et al., 2022, 11., pp. 16-17). Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 10$. (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$. (d) $f(x) = |x|(x + 2)$. (e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2$. (f) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

Bài toán 22 (Quỳnh et al., 2022, 12., p. 17). Tìm cực trị của hàm số: (a) $y = x\sqrt{4 - x^2}$. (b) $y = \sqrt{8 - x^2}$. (c) $y = x - \sin 2x + 2$. (d) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$.

Bài toán 23 (Quỳnh et al., 2022, 13., p. 17). Tìm 4 hệ số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$, và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$.

Bài toán 24 (Quỳnh et al., 2022, 14., p. 17). Xác định 3 hệ số $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm $A(1, 0)$.

Bài toán 25 (Quỳnh et al., 2022, 15., p. 17). Chứng minh với mọi giá trị của m , hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ luôn có cực đại và cực tiểu.

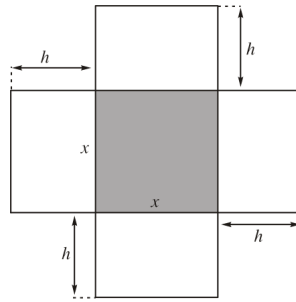
3 GTLN & GTNN của Hàm Số

Bài toán 26 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 1, p. 18). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Bài toán 27 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 2, p. 19). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $[-3, \frac{3}{2}]$.

Bài toán 28 (Quỳnh et al., 2022, H, p. 19). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1, +\infty)$.

Bài toán 29 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 3, p. 20). 1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, chiều cao là h cm, và có thể tích là 500 cm^3 . (a) Biểu diễn h theo x . (b) Tìm diện tích $S(x)$ của mảnh các tông theo x . (c) Tìm giá trị của x sao cho $S(x)$ nhỏ nhất.

Bài toán 30 (Quỳnh et al., 2022, Ví dụ 4, p. 21). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $[0, 2]$.

Bài toán 31 (Quỳnh et al., 2022, 16., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Bài toán 32 (Quỳnh et al., 2022, 17., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2, 3]$. (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4, 0]$. (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0, +\infty)$. (d) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2, 4]$. (e) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0, 1]$. (f) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0, 2]$.

Bài toán 33 (Quỳnh et al., 2022, 18., p. 22). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. (b) $\cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$.

Bài toán 34 (Quỳnh et al., 2022, 19., p. 22). Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Dựng 1 hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , 2 đỉnh P, Q theo thứ tự nằm trên 2 cạnh AC, AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm GTLN đó.

Bài toán 35 (Quỳnh et al., 2022, 20., p. 22). Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ g. Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Bài toán 36 (Quỳnh et al., 2022, 21., p. 23). Tìm cực trị của hàm số: (a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. (b) $f(x) = \frac{x^3}{x + 1}$. (c) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$. (d) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

Bài toán 37 (Quỳnh et al., 2022, 22., p. 23). Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có cực đại & cực tiểu.

Bài toán 38 (Quỳnh et al., 2022, 23., p. 23). Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0.025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng mg). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.

Bài toán 39 (Quỳnh et al., 2022, 24., p. 23). Cho parabol (\mathcal{P}): $y = x^2$ & điểm $A(-3, 0)$. Xác định điểm M thuộc parabol (\mathcal{P}) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

Bài toán 40 (Quỳnh et al., 2022, 25., p. 23). 1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là 1 hằng số, E được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

Bài toán 41 (Quỳnh et al., 2022, 26., pp. 23–24). Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0, 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . (a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 600. (d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0, 25]$.

Bài toán 42 (Quỳnh et al., 2022, 27., p. 24). Tìm GTLN, GTNN của hàm số: (a) $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ trên đoạn $[-3, 1]$. (b) $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$. (c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. (d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Bài toán 43 (Quỳnh et al., 2022, 28., p. 24). Trong các hình chữ nhật có chu vi là 40 cm, xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

4 Đồ Thị của Hàm Số & Phép Tịnh Tiến Hệ Tọa Độ

Tài liệu

Quỳnh, Đoàn, Nguyễn Huy Doan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng (2022). *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần thứ 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, p. 231.