

# Problem: Trigonometry In Triangles

## Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

### Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set Q of trigonometry [pdf].).<sup>1</sup> [\[TeX\]](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex).<sup>2</sup>

## Mục lục

1	1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông	1
2	Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn	3
3	Miscellaneous	3
	Tài liệu	3

## 1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

**Ký hiệu.**  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ :  $a := BC$ ,  $b := CA$ ,  $c := AB$ ,  $b' := CH$ ,  $c' := BH$ ,  $h := AH$ .

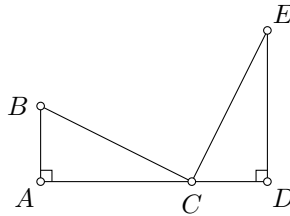
**Tính chất.**  $\boxed{1}$   $b^2 = ab'$ ,  $c^2 = ac'$ .  $\boxed{2}$  Định lý Pythagore thuận & đảo:  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ .  $\boxed{3}$   $h^2 = b'c'$ .  $\boxed{4}$   $ah = bc = 2S_{ABC}$ .  $\boxed{5}$   $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ .

**Bài toán 1** ([Bin23], Ví dụ 1, p. 84). Tính diện tích hình thang  $ABCD$  có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo  $AC, BD$  vuông góc với nhau,  $BD = 15$  cm.

**Bài toán 2** ([Bin23], Ví dụ 2, p. 85). Hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $CD = 10$  cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

**Bài toán 3** ([Bin23], Ví dụ 3, p. 85). Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.

**Bài toán 4** ([Bin23], 1., p. 86). Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau  $\triangle ABC = \triangle DCE$ :



**Bài toán 5** ([Bin23], 2., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  cân có  $AB = AC = 9$  cm,  $BC = 12$  cm, đường cao  $AH$ ,  $I$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AC$ . (a) Tính độ dài  $CI$ . (b) Kẻ đường cao  $BK$  của  $\triangle ABC$ . Chứng minh điểm  $K$  nằm giữa 2 điểm  $A, C$ .

**Bài toán 6** ([Bin23], 3., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  có  $\hat{A} = 120^\circ$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .

**Bài toán 7** ([Bin23], 4., p. 86). Tính cạnh đáy  $BC$  của  $\triangle ABC$  cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem/NQBH\\_trigonometry\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade 9/rational/problem/NQBH\\_trigonometry\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary STEM & beyond/blob/main/elementary mathematics/grade 9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex).

**Bài toán 8** ([Bin23], 5., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $AD$ , đường cao  $AH$ . Biết  $BD = 7.5$  cm,  $CD = 10$  cm. Tính  $AH$ ,  $BH$ ,  $DH$ .

**Bài toán 9** ([Bin23], 6., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ ,  $AB = 20$  cm,  $CH = 9$  cm. Tính độ dài  $AH$ .

**Bài toán 10** ([Bin23], 7., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Tia phân giác của  $\widehat{HAC}$  cắt  $HC$  ở  $D$ . Gọi  $K$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AC$ . Biết  $BC = 25$  cm,  $DK = 6$  cm. Tính  $AB$ .

**Bài toán 11** ([Bin23], 8., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm, 2 đường trung tuyến  $BD$ ,  $CE$  vuông góc với nhau. Tính  $BC$ .

**Bài toán 12** ([Bin23], 9., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $BC = 8$  cm,  $AB + AC = 12$  cm. Tính  $AB$ ,  $AC$ .

**Bài toán 13** ([Bin23], 10., p. 86). Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng  $54$  cm<sup>2</sup> &  $96$  cm<sup>2</sup>. Tính độ dài cạnh huyền.

**Bài toán 14** ([Bin23], 11., p. 86). Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$ , đường trung tuyến  $BM$ . Gọi  $D$  là hình chiếu của  $C$  trên  $BM$ ,  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $AC$ . Chứng minh  $AH = 3DH$ .

**Bài toán 15** ([Bin23], 12., pp. 86–87). (a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng  $k$ . Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng  $5 : 4$  & cạnh huyền dài  $82$  cm.

**Bài toán 16** ([Bin23], 13., p. 87). Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với  $1 : 3$ . Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?

**Bài toán 17** ([Bin23], 14., p. 87). Cho  $\triangle ABC$  có độ dài 3 cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao  $AH$ , đường trung tuyến  $AM$ . Chứng minh  $HM = 2$ .

**Bài toán 18** ([Bin23], 15., p. 87). 1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài  $14$  cm, đáy lớn dài  $50$  cm.

**Bài toán 19** ([Bin23], 16., p. 87). 1 hình thoi có diện tích bằng  $\frac{1}{2}$  diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.

**Bài toán 20** ([Bin23], 17., p. 87). Qua đỉnh  $A$  của hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh  $BC$  ở  $M$  & cắt đường thẳng  $CD$  ở  $I$ . Chứng minh  $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$ .

**Bài toán 21** ([Bin23], 18., p. 87). Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $1$  dm. Tính cạnh của  $\triangle AEF$  đều có  $E$  thuộc cạnh  $CD$  &  $F$  thuộc cạnh  $BC$ .

**Bài toán 22** ([Bin23], 19., p. 87). Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) 3, 4, 5. (b) 12, 15, 20.

**Bài toán 23** (Mở rộng [Bin23], 19., p. 87). Cho tam giác  $ABC$  có 3 đường cao có độ dài lần lượt là  $h_a, h_b, h_c$ . Tìm điều kiện cần & đủ theo  $h_a, h_b, h_c$  để  $\triangle ABC$  vuông.

**Bài toán 24** ([Bin23], 20., p. 87). Chứng minh  $\triangle ABC$  là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác  $BD$ ,  $CE$  cắt nhau tại  $I$  thỏa mãn  $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$ .

**Bài toán 25** ([Bin23], 21., p. 87). Xét các  $\triangle ABC$  vuông có cạnh huyền  $BC = 2a$ . Gọi  $AH$  là đường cao của tam giác,  $D$ ,  $E$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AC$ ,  $AB$ . Tìm GTLN của: (a)  $DE$ . (b) Diện tích tứ giác  $ADHE$ .

**Bài toán 26** ([Bin23], 22., pp. 87–88). Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.

**Bài toán 27** ([Bin23], 23., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Chứng minh: (a)  $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$ . (b)  $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$ . (c)  $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$ .

**Bài toán 28** ([Bin23], 24., p. 88).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường phân giác  $BD$ . Tia phân giác của  $\widehat{A}$  cắt  $BD$  ở  $I$ . Biết  $BI = 10\sqrt{5}$  cm,  $DI = 5\sqrt{5}$  cm. Tính diện tích  $\triangle ABC$ .

**Bài toán 29** ([Bin23], 25., p. 88).  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết  $AB = 5$  cm,  $CI = 6$  cm. Tính  $BC$ . (b) Biết  $BI = \sqrt{5}$  cm,  $CI = \sqrt{10}$  cm. Tính  $AB$ ,  $AC$ .

**Bài toán 30** ([Bin23], 26., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác,  $M$  là trung điểm của  $BC$ . (a) Biết  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Tính  $\widehat{BIM}$ . (b) Biết  $\widehat{BIM} = 90^\circ$ . 3 cạnh của  $\triangle ABC$  tỷ lệ với 3 số nào?

**Bài toán 31** ([Bin23], 27., p. 88). 1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) DQĐ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: 17, 13, 35, 41, 22?

**Bài toán 32** ([Bin23], 28., p. 88). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = 3\sqrt{5}$  cm. Hình vuông  $ADEF$  cạnh 2 cm có  $D \in AB$ ,  $E \in BC$ ,  $F \in CA$ . Tính  $AB$ ,  $AC$ .

**Bài toán 33** ([Bin23], 29., p. 88).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết  $IA = 2\sqrt{5}$  cm,  $IB = 3$  cm. Tính  $AB$ .

**Bài toán 34** ([Bin23], 30., p. 88).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AD$ , trục tâm  $H$ . Tính độ dài  $AD$ , biết  $AH = 14$  cm,  $BH = CH = 30$  cm.

**Bài toán 35** ([Bin23], 31., p. 88).  $\triangle ABC$  có  $BC = 40$  cm, đường phân giác  $AD$  dài 45 cm, đường cao  $AH$  dài 36 cm. Tính  $BD$ ,  $CD$ .

## 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

## 3 Miscellaneous

### Tài liệu

[Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.