Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates
Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 11 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.tex.
- *Problem & Solution: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập & Lời Giải: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.tex.

Mục lục

Resources – Tài nguyên.

1. [Hải+25]. Phan Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10. Tập 2.*

1 2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng

$\boxed{1}$ Tọa độ của 1 điểm: Ký hiệu $M(x_M, y_M)$ với $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ lần lượt là hoành độ, tung độ của điểm $M \in \mathbb{R}^2$, cặp số (x_M, y_M) được gọi là *tọa độ* của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy. $\boxed{2}$ Tọa độ của 1 vector: $\overrightarrow{OM} = (a,b) \Leftrightarrow M(a,b)$. $\vec{i}(1,0), \vec{j}(0,1)$ lần lượt là *vector đơn vị* trên trục Ox, Oy. Với mỗi vector $\vec{u}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vector $\vec{u}$ là tọa độ của điểm $A(x_A, y_A)$ thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, khi đó x_A, y_A lần lượt là hoành độ, tung độ của vector $\vec{u}$. $\boxed{3}$ $\vec{u} = (a,b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. $\boxed{4}$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_{\vec{a}} = x_{\vec{b}} \wedge y_{\vec{a}} = y_{\vec{b}}$. $\boxed{4}$ $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. $\boxed{5}$ Các điểm đối xứng với điểm $A(x_A, y_A)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy qua gốc O, trục Ox, trục Oy lần lượt là $(-x_A, -y_A), (x_A, -y_A), (-x_A, y_A)$. See Wikipedia/coordinate vector.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 (Cf. segment vs. vector). *(a) So sánh 2 khái niệm '2 đoạn thẳng bằng nhau' & '2 vectors bằng nhau'. (b) So sánh 2 khái niệm '2 đoạn thẳng song song' & '2 vectors song song'. (c) So sánh 2 khái niệm '2 tia đối nhau' & '2 vectors đối nhau'.*

2 (Mở rộng [Thá+25b], 5., p. 65). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho trước tọa độ của 3 trong 5 điểm gồm 4 đỉnh của hình bình hành $ABCD$ & tâm đối xứng I của nó. (a) Tìm tọa độ các điểm còn lại. (b) Tính chu vi, độ dài 2 đường cao, & diện tích của hình bình hành $ABCD$ theo tọa độ của 3 điểm cho trước đó.*

3 (Mở rộng [Thá+25b], 6., p. 65). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),D(x_D,y_D)$. Tìm điều kiện cần & đủ để tứ giác $ABCD$ là: (a) hình bình hành. (b) hình thang. (c) hình thang cân. (d) hình thoi. (e) hình chữ nhật. (f) hình vuông. (g) tứ giác nội tiếp. (h) tứ giác ngoại tiếp.*

Hint. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow x_A+x_C=x_B+x_D \wedge y_A+y_C=y_B+y_D$.

4 (Mở rộng [Thá+25b], 7., p. 65: Tọa độ 3 đỉnh tam giác). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. (a) Cho biết tọa độ trung điểm 3 cạnh ΔABC. Tìm tọa độ 3 đỉnh A,B,C.*

Hint. Hoặc giải 2 hệ phương trình "khuyết" 3 ẩn (x_A,x_B,x_C) & (y_A,y_B,y_C). Hoặc dùng nhận xét nếu M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB thì $ANMP,BMNP,CMPN$ là 3 hình bình hành.

5 (Tọa độ 4 đỉnh tứ giác). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. (a) Liệu nếu chỉ biết tọa độ 4 trung điểm của 4 cạnh tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A,B,C,D không? (b) Nếu cho thêm tọa độ của trung điểm của 1 trong 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A,B,C,D không? (c) Nếu cho thêm tọa độ của 2 trung điểm của 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A,B,C,D không? Nếu được thì 6 tọa độ này phải thỏa điều kiện gì để bài toán có nghiệm? (d) Mở rộng bài toán cho đa giác n cạnh $A_1A_2\ldots A_n$.*

6 (Điều kiện cần & đủ để 2 vectors bằng nhau). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 vector $\vec{u}_1(a_1m+b_1n,c_1m+d_1n),\vec{u}_2(a_2m+b_2n,c_2m+d_2n)$. Tìm điều kiện cần & đủ của m,n theo $a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$ cho trước để: (a) $\vec{u}_1=\vec{u}_2$. (b) $\vec{u}_1+\vec{u}_2=\vec{0}$. (c) $\vec{u}_1\parallel\vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng phương. (d) $\vec{u}_1\uparrow\uparrow\vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng phương, cùng hướng. (e) $\vec{u}_1\uparrow\downarrow\vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng phương, ngược hướng. (f) $\vec{u}_1=k\vec{u}_2$ với $k\in\mathbb{R}^\star$ cho trước. (g) $\vec{u}_1\perp\vec{u}_2$.*

7 (Mở rộng [Thá+25a], 11., p. 62). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ 3 điểm không thẳng hàng $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$, $C(x_C,y_C)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB\parallel CD$ & $CD=aAB$ với $a>0$ cho trước.*

2 Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector

$\boxed{1}$ Biểu thức tọa độ của phép $\pm$ vectors, phép nhân vô hướng của vector: Nếu $\vec{u}=(x_1,y_1),\vec{v}=(x_2,y_2)$ thì $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$ hay viết gộp chung thành $\vec{u}\pm\vec{v}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$, $k\vec{u}=(kx_1,ky_1)$, $\forall k\in\mathbb{R}$; $\vec{u}\parallel\vec{v}\neq\vec{0}$, i.e., $\vec{u}\parallel\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{R}$ sao cho $x_1=kx_2\wedge y_1=ky_2$. $\boxed{2}$ *Tọa độ trung điểm* của đoạn thẳng AB với $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$ là $M(x_M,y_M)$ với $x_M\coloneqq\frac{1}{2}(x_A+x_B),y_M\coloneqq\frac{1}{2}(y_A+y_B)$. $\boxed{3}$ *Tọa độ trọng tâm* của tam giác ΔABC với $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C)$ là $G(x_G,y_G)$ với $x_G\coloneqq\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),y_G\coloneqq\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$. $\boxed{4}$ Biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Với $\vec{u}=(x_1,y_1),\vec{v}=(x_2,y_2)$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$. $\vec{i}^2=|\vec{i}|^2=\vec{j}^2=|\vec{j}|^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$. Nếu $\vec{a}=(x,y)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{x^2+y^2}$. Nếu $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ thì $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. $\boxed{5}$ Với $\vec{u}=(x_1,y_1),\vec{v}=(x_2,y_2)\neq\vec{0}$, $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2=0$ &

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}},\ (\vec{u},\vec{v})=\arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\arccos\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}. \tag{1}$$

8 (Coordinate of linear combination of vectors – Tọa độ của tổ hợp tuyến tính các vectors). *Cho $n\in\mathbb{N}^\star$ số thực a_i & n vectors $\vec{u}_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Tìm tọa độ của vector $\sum_{i=1}^n a_i\vec{u}_i$.*

9 (Điều kiện cần & đủ để hệ điểm thẳng hàng). *(a) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để 3 điểm A,B,C thẳng hàng, không thẳng hàng. (b) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để $n\in\mathbb{N}^\star$ điểm A_i, $i=1,\ldots,n$ thẳng hàng, không thẳng hàng.*

10. *Cho 2 điểm $A(x_A,y_A),M(x_M,y_M)$. Tìm tọa độ điểm $B(x_B,y_B)$ sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB.*

11. *(a) Cho 3 điểm $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),G(x_G,y_G)$ không thẳng hàng. Tìm tọa độ điểm $C(x_C,y_C)$ để G là trọng tâm ΔABC. (b) M,N,P lần lượt là trung điểm BC,CA,AB. Tìm biểu thức tọa độ của tính chất hình học $AG=2GM,BG=2GN,CG=2GP$.*

12 (Giải tam giác trên mặt phẳng tọa độ). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B),C(x_C,y_C)$. (a) Viết định lý sin & định lý cos phiên bản tọa độ. (b) Giải ΔABC.*

13 (Tổng hợp lực). *(a) Tính lực tổng hợp $\vec{F}$ của 2 lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$, i.e., $\overrightarrow{F}\coloneqq\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ biết số đo $(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2})$. (b) Tính lực tổng hợp $\vec{F}$ củan $\in\mathbb{N}^\star$ lực $\overrightarrow{F_i}$ với $i=1,2,\ldots,n$, i.e., $\overrightarrow{F}\coloneqq\sum_{i=1}^n\overrightarrow{F_i}=\overrightarrow{F_1}+\cdots+\overrightarrow{F_n}$ biết số đo các góc $(\overrightarrow{F_i},\overrightarrow{F_j})$ với $1\le i<j\le n$.*

14 (Tọa độ tâm tỷ cự). *(a) Tìm tọa độ của tâm tỷ cự của hệ $n\in\mathbb{N}^\star$ điểm $A_i(x_i,y_i)$ với trọng số $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$, i.e., $\sum_{i=1}^n\alpha_i\overrightarrow{AA_i}=\vec{0}$. (b) Viết biểu thức vector $n\overrightarrow{MA}=\sum_{i=1}^n\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ phiên bản tọa độ.*

15. *Cho $\Delta ABC,\Delta MNP$ với tọa độ 6 đỉnh. Tìm điều kiện cần & đủ của 6 tọa độ này để $\Delta ABC,\Delta MNP$ có cùng: (a) trọng tâm. (b) trực tâm. (c) tâm đường tròn nội tiếp. (d) tâm đường tròn ngoại tiếp. (e) Mở rộng cho các tâm tỷ cự khác.*

3 2D Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng Trong Mặt Phẳng

16 ([Hải+25], VD1, p. 48). *Cho 3 điểm $A(0,2), B(2,2), C(4,-2)$. (a) Viết phương trình 3 cạnh ΔABC. (b) Viết phương trình 3 đường cao của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại trực tâm H. (c) Viết phương trình 3 đường trung tuyến của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại trọng tâm G. (d) Viết phương trình 3 đường trung trực của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp E. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (e) Kiểm tra lại đường thẳng Euler theo tọa độ. Từ đó viết phương trình đường thẳng Euler. (f) Viết phương trình các đường trung bình của ΔABC.*

17 ([Hải+25], VD2, p. 49). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình 2 đường cao $BB_2 : x - y = 0, CC_2 : x = 4$. Tìm tọa độ B, C.*

18 ([Hải+25], VD3, p. 50). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$ & phương trình đường trung tuyến $CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C.*

19 ([Hải+25], VD4, p. 50). *Cho điểm $A(1,1)$, điểm C nằm trên trục hoành & điểm B thuộc đường thẳng $d : y - 3 = 0$. Tìm tọa độ B, C để ΔABC đều.*

20 ([Hải+25], VD5, p. 51). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = c, AC = b$, $b, c > 0$ không đổi. B, C lần lượt chuyển động trên $(x'Ox), (y'Oy)$. Tìm quỹ tích của điểm A.*

21 ([Hải+25], VD6, p. 52). *Cho $A(a,0), B(0,b)$ với $a, b \in \mathbb{R}^\star$: hằng số. M, N lần lượt thuộc trục hoành, trục tung thỏa mãn $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2$, $(AN) \cap (BM) = E$. Tìm quỹ tích của E.*

22 ([Hải+25], VD7, p. 52). *Cho điểm $M(1,2)$. Xét đường thẳng d đi qua M cắt 2 tia Ox, Oy lần lượt tại $A, B \neq O$. Viết phương trình đường thẳng d nếu: (a) $OA = OB$. (b) $OA = 2OB$, $OA = aOB$ với $a \in (0, \infty)$. (c) S_{OAB} nhỏ nhất. (d) $OA + OB$ nhỏ nhất. (e) $\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}\right)$ nhỏ nhất.*

23 ([Hải+25], VD8, p. 53). *Trên mặt phẳng tọa độ cho $A(1,3), B(4,2)$. Viết phương trình đường thẳng d biết: (a) d đi qua A & cách B 3 đơn vị. (b) d đi qua A & cách B 1 khoảng nhỏ nhất. (c) d đi qua A & cách B 1 khoảng lớn nhất. (d) d cách A 1 đơn vị & cách B 2 đơn vị.*

24 ([Hải+25], VD9, p. 54). *Cho đường thẳng d & 2 điểm $M_1, M_2 \notin d$. Tìm thuật toán để xác định điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.*

25 ([Hải+25], VD10, p. 54). *Cho $M_1(1,2), M_2(0,3), d : 3x - 4y + 6 = 0$. Tìm điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.*

26 ([Hải+25], VD11, p. 55). *Cho 2 đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Tìm & lập phương trình quỹ tích các điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2.*

27 ([Hải+25], VD12, p. 55). *Cho 2 đường thẳng $d_1 : x + y + 2 = 0, d_2 : 7x - y + 5 = 0$. Tìm quỹ tích của điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2.*

28 ([Hải+25], VD13, p. 56). *Cho ΔABC, biết tọa độ 3 đỉnh. Tìm thuật toán xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.*

29 ([Hải+25], VD14, p. 56). *Cho điểm $A(\frac{28}{3}, \frac{22}{3}), B(1,1), C(0,-6)$. Xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.*

30 ([Hải+25], 25.1., p. 57). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$, phương trình đường trung tuyến $BB_1 : x = 2$. Tìm tọa độ B, C.*

31 ([Hải+25], 25.2., p. 57). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình 2 đường trung tuyến $BB_1 : x = 2$, $CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C.*

32 ([Hải+25], 25.3., p. 57). *Cho đường thẳng $d : x - 2y + 1 = 0$. (a) Viết phương trình đường thẳng $\Delta \parallel d$ & cách d 3 đơn vị. (b) Trong các đường thẳng thu được, đường thẳng nào & gốc tọa độ nằm về 2 phía của d?*

4 Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng

5 2D Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn Trong Mặt Phẳng

33 ([Hải+25], VD1, p. 59). *Cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2(m+1)y - 2m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) là phương trình đường tròn. (b) Có tồn tại R_m nhỏ nhất hoặc lớn nhất không? (c) Tìm quỹ tích tâm I_m. (d) Đường tròn có đi qua điểm cố định không?*

34 ([Hải+25], VD2, p. 59). *Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2(\cos\alpha - 1)x - 2(\sin\alpha - 1)y - 1 = 0$ với tham số $\alpha \in \mathbb{R}$. (a) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) là phương trình đường tròn. (b) Có tồn tại R_m nhỏ nhất hoặc lớn nhất không? (c) Tìm quỹ tích tâm I_m. (d) Đường tròn có đi qua điểm cố định không?*

35 ([Hải+25], VD3, p. 60). *Cho 2 điểm A, B. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua 2 điểm A, B thỏa: (a) Đường tròn bé nhất. (b) Bán kính cho trước. (c) Có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước. (d) Tiếp xúc với đường thẳng d_1 cho trước. (e) Tiếp xúc với đường tròn (C_1) cho trước.*

36 ([Hải+25], VD4, p. 61). *Cho 3 điểm $A(0,2), B(-2,2), C(4,-2)$. Viết phương trình: (a) đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (b) đường tròn bé nhất chứa ΔABC.*

37 ([Hải+25], VD5, p. 62). *Cho ΔABC có $AB = AC$. Đường tròn (C) tiếp xúc với AB tại B, tiếp xúc với AC tại C & điểm $M \in (C)$ tùy ý. A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB. Chứng minh $MA_1^2 = MB_1 \cdot MC_1$.*

38 ([Hải+25], VD6, p. 63). *Cho đường tròn (O), điểm A cố định nằm ngoài đường tròn & điểm M thuộc đường tròn. Xét đường tròn $(M; MA)$. Chứng minh trục đẳng phương của 2 đường tròn luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.*

39 ([Hải+25], 26.1., p. 64). *Cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, & đường tròn $(C): x^2+y^2 = 1$. (a) Chứng minh có 2 đường tròn thuộc họ (C_m) tiếp xúc với (C). (b) Viết phương trình các tiếp tuyến chung của 2 đường tròn thu được. (c) Tìm $m \in \mathbb{R}$ để (C_m) cắt (C) theo 1 dây cung lớn nhất.*

40 ([Hải+25], 26.2., p. 64). *Cho ΔABC có $A(1,5), B(4,-1), C(-4,-5)$. Viết phương trình các đường tròn nội tiếp & bàng tiếp của ΔABC.*

41 ([Hải+25], 26.3., p. 64). *Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ & điểm $M(1,-1)$. Viết phương trình đường tròn (C_1) có bán kính $R_1 = 3$ & cắt đường tròn (C) theo dây cung bé nhất qua M.*

42 ([Hải+25], 26.4., p. 64). *Cho đường thẳng $\Delta_1: mx - (m+1)y + 2m - 1 = 0$, $\Delta_2: (m+1)x + my - m + 2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm quỹ tích giao điểm của Δ_1, Δ_2.*

43 ([Hải+25], 26.5., p. 64). *Cho đường tròn tâm O đường kính AB & điểm M chuyển động trên đường tròn. Kẻ $MH \perp AB$, $H \in AB$. Vẽ đường tròn $(M; MH)$ cắt đường tròn (O) tại C, D. Chứng minh đường thẳng CD là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính HA, HB.*

6 3 Conics – 3 Đường Conic

44 ([Hải+25], VD1, p. 68). *Cho đường tròn (O) & điểm $A \neq O$ cố định nằm trong đường tròn. Vẽ đường tròn tâm M tùy ý vừa qua A vừa tiếp xúc với đường tròn (O). Tìm quỹ tích điểm M.*

45 ([Hải+25], VD2, p. 68). *Cho 3 điểm A, B, C cố định & thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn (O) tùy ý tiếp xúc với đường thẳng ABC tại A. Từ B, C kẻ 2 tiếp tuyến với đường tròn (O), chúng cắt nhau tại $M \neq A$. Tìm quỹ tích điểm M.*

46 ([Hải+25], VD3, p. 68). *Cho ΔABC có BC cố định & điểm A chuyển động sao cho đường thẳng Euler của ΔABC song song với BC. Tìm quỹ tích điểm A.*

47 ([Hải+25], VD4, p. 69). *(a) Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. Tìm các yếu tố của (H). Tìm các đường tiệm cận, góc giữa 2 đường tiệm cận. Tìm diện tích, chu vi hình chữ nhật cơ sở, hình thoi $A_1B_1A_2B_2$. Tìm bán kính R_1 của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_2A_2$; bán kính R_2 của đường tròn ngoại tiếp $\Delta B_1A_2B_2$. (b) Viết phương trình chính tắc của (H) với 2 điều kiện xác định e & R_1, R_1 & R_2, d_1 & r.*

48 ([Hải+25], VD5, p. 70). *Cho ΔABC có B, C cố định, A chuyển động sao cho tâm đường tròn Euler của ΔABC nằm trên BC. Tìm quỹ tích điểm A.*

49 ([Hải+25], VD6, p. 71). *Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. 1 đường thẳng Δ tùy ý cắt 2 đường tiệm cận tại E, F, cắt (H) tại M, N. Chứng minh EF, MN có chung trung điểm.*

50 ([Hải+25], VD7, p. 73). *Cho ΔABC có B, C cố định, A chuyển động sao cho $|\widehat{B} - \widehat{C}| = 90°$. Tìm quỹ tích điểm A.*

51 ([Hải+25], VD8, p. 73). *Cho parabol $(P): y^2 = 4x$. (a) Cho đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Chứng minh d cắt (P) tại 2 điểm A, B. Tính độ dài AB. (b) Tìm 2 điểm $C, D \in (P)$ để F là trực tâm ΔOCD. Tính CD. (c) Tìm 2 điểm $M, N \in (P)$ để ΔOMN đều & tính cạnh ΔOMN.*

52 ([Hải+25], VD9, p. 74). *Cho đường tròn (O) có đường kính AB cố định & đường kính $CD \perp AB$. Điểm M chuyển động trên (O). Kẻ $MH \perp OC$. (a) Tìm quỹ tích điểm M_1 là giao điểm của AH, OM. (b) Tìm qũy tích điểm M_2 là giao điểm của BH, OM.*

53 ([Hải+25], VD10, p. 75). *Cho parabol $(P): y^2 = 32x$ & đường thẳng $d: 4x + 3y + 10 = 0$. Tìm điểm $M \in (P)$ để khoảng cách từ M đến d bằng 2.*

54 ([Hải+25], VD11, p. 75). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M chuyển động trên cạnh huyền. Vẽ hình chữ nhật $MDAE$. Đường phân giác trong của $\widehat{DME}$ cắt DE tại N. Tìm quỹ tích điểm N.*

55 ([Hải+25], VD12, p. 76). *Cho parabol $(P): y^2 = 2px$ & điểm $M \in (P)$ tùy ý. Kẻ $MH \perp Ox, MK \perp Oy$. Đường thẳng d đi qua K & vuông góc với HK. Chứng minh đường thẳng d đi qua 1 điểm cố định.*

56 ([Hải+25], VD13, p. 76). *Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. 2 đường thẳng d_1, d_2 tùy ý đi qua F & vuông góc với nhau, cắt (P) tương ứng tại A_1, B_1, A_2, B_2. Chứng minh $\dfrac{1}{A_1B_1} + \dfrac{1}{A_2B_2} = \mathrm{const}$.*

57 ([Hải+25], VD14, p. 77). *Cho đường conic (C). 1 đường thẳng tùy ý qua tiêu điểm cắt (C) tại A, B. Xác định vị trí tương đối của đường tròn đường kính AB đối với đường chuẩn tương ứng.*

58 ([Hải+25], VD15, p. 77). *Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Đường tiệm cận $d_1: y = \dfrac{b}{a}x$, đường chuẩn $\Delta_2: x = \dfrac{a^2}{c}$. $M \in (H)$ bất kỳ. Đường thẳng d đi qua M song song với d_1 & cắt Δ_2 tại N. Chứng minh $MN = MF_2$.*

59 ([Hải+25], 27.1., p. 78). *Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $AB = a = \mathrm{const}$, đáy nhỏ $CD = b = \mathrm{const}$ chuyển động. Tổng của 2 cạnh bên $= c = \mathrm{const}$. (a) Tìm quỹ tích của C, D. (b) Tìm quỹ tích giao điểm E của 2 đường chéo.*

60 ([Hải+25], 27.2., p. 78). *Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b$. $M \in (E)$ bất kỳ. (a) Chứng minh $b \le OM \le a$. (b) Tìm vị trí của M để MF_2 đạt GTLN, GTNN. (c) Tìm quỹ tích trực tâm ΔMA_1A_2. (d) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn nội tiếp ΔMF_1F_2.*

61 ([Hải+25], 27.3., p. 78). *Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm D để tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được.*

62 ([Hải+25], 27.4., p. 78). *Cho ΔABC có B, C cố định, A chuyển động sao cho $AB \cdot AC = AO^2$ với O là trung điểm BC. Tìm quỹ tích điểm A.*

63 ([Hải+25], 27.5., p. 78). *Cho hyperbol (H). Chứng minh tích 2 khoảng cách từ 1 điểm $M \in (H)$ tùy ý tới 2 đường tiệm cận nhận giá trị không đổi.*

64 ([Hải+25], 27.6., p. 78). *Cho hyperbol (H) & điểm $M \in (H)$ tùy ý. Vẽ 2 đường thẳng qua M song song với 2 đường tiệm cận & tạo với 2 đường tiệm cận 1 hình bình hành. Chứng minh diện tích hình bình hành không đổi. Tìm M để chu vi hình bình hành nhỏ nhất.*

65 ([Hải+25], 27.7., p. 78). *Cho parabol $(P): y^2 = 2px$. Đường thẳng d tùy ý đi qua F & cắt (P) tại A, B. (a) Chứng minh $\dfrac{1}{FA} + \dfrac{1}{FB} = \mathrm{const}$. (b) Tìm đường thẳng d để $FA \cdot FB$ nhỏ nhất. (c) H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên trục hoành. Chứng minh $AH \cdot BK = \mathrm{const}$. (d) Chứng minh đường tròn đường kính AB luôn tiếp xúc với đường chuẩn của (P). (e) Giả sử d cắt trục tung tại M. Chứng minh $MF^2 = MA \cdot MB$.*

66 ([Hải+25], 27.8., p. 78). *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB & điểm M chuyển động trên đường tròn. I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác cong OAM. Tìm quỹ tích điểm I.*

7 Sử Dụng $\vec{0}$ Để Chứng Minh Các Hệ Thức Vector Trong Hình Học Phẳng

67 ([Hải+25], VD1, p. 79). *(a) Cho ngũ giác đều $ABCDE$ có tâm O. Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$. (b) Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$, n-giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ tâm O. Chứng minh $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$.*

68 ([Hải+25], VD2, p. 82). *Cho ΔABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.*

69 ([Hải+25], VD3, p. 83). *Cho ΔABC có J_A là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với $\widehat{BAC}$. Chứng minh $-a\overrightarrow{J_AA} + b\overrightarrow{J_AB} + c\overrightarrow{J_AC} = \vec{0}$.*

70 ([Hải+25], VD4, p. 84). *Cho ΔABC, K, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của ΔABC trên 3 cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $a^2\overrightarrow{GK} + b^2\overrightarrow{GE} + c^2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$.*

71 ([Hải+25], VD5, p. 85). *Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh $\sin 2A\overrightarrow{OA} + \sin 2B\overrightarrow{OB} + \sin 2C\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.*

72 ([Hải+25], VD6, p. 85). *Cho ΔABC không vuông có trực tâm H. Chứng minh $\dfrac{a}{\cos A}\overrightarrow{HA} + \dfrac{b}{\cos B}\overrightarrow{HB} + \dfrac{c}{\cos C}\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.*

73 ([Hải+25], VD7, p. 86). *Cho điểm M tùy ý nằm trong ΔABC. Đặt $S_A \coloneqq S_{MBC}, S_B \coloneqq S_{MCA}, S_C \coloneqq S_{MAB}$. Chứng minh $S_A\overrightarrow{MA} + S_B\overrightarrow{MB} + S_C\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.*

74 ([Hải+25], VD, p. 8).

75 ([Hải+25], VD, p. 8).

8 Miscellaneous

Tài liệu

[Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.

[Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Bài Tập Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 112.

[Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 111.