Problem: Vector

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 9 năm 2024

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 10/vector/problem: vector [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 Vector & Các Phép Toán Trên Vector

1 ([Hải+22], VD1, p. 59)**.** *Cho đoạn thẳng AB & I là trung điểm của AB. Chứng minh: (a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. (b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với mọi điểm M.*

2 ([Hải+22], VD2, p. 59)**.** *Cho ΔABC & điểm M nằm giữa B,C. Chứng minh:*

$$\overrightarrow{AM}=\frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}+\frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB}.$$

3 ([Hải+22], VD3, p. 60)**.** *Cho ΔABC. Chứng minh: (a) 3 đường trung tuyến đồng quy tại 1 điểm G. (b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. (c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M.*

4 ([Hải+22], VD4, p. 60)**.** *Cho ΔABC & 1 điểm M bất kỳ trong tam giác. Đặt $S_{MBC}=S_a$, $S_{MCA}=S_b$, $S_{MAB}=S_c$. Chứng minh: $S_a\overrightarrow{MA}+S_b\overrightarrow{MB}+S_c\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.*

5 ([Hải+22], VD5, p. 61)**.** *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại D. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $a\overrightarrow{MD}+b\overrightarrow{MC}+c\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (với a,b,c là độ dài các cạnh BC,AC,AB).*

6 ([Hải+22], VD6, p. 61)**.** *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Trên các tia PA_1,PB_1,PC_1 lần lượt lấy các điểm X,Y,Z sao cho $\frac{PX}{PA_1}=\frac{PY}{PB_1}=\frac{PZ}{PC_1}=k$. Chứng minh: (a) AX,BY,CZ đồng quy tại T. (b) P,T,G thẳng hàng & $\dfrac{TG}{PG}=\left|\dfrac{3k}{2+k}\right|$.*

7 ([Hải+22], VD7, p. 62)**.** *Đường đối trung trong tam giác là đường đối xứng với trung tuyến qua phân giác. Chứng minh: 3 đường đối trung đồng quy tại điểm L thỏa mãn $a^2\overrightarrow{LA}+b^2\overrightarrow{LB}+c^2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$. Điểm L như vậy gọi là* điểm Lemoine *của ΔABC.*

8 ([Hải+22], VD8, p. 62)**.** *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ. PA,PB,PC cắt các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại các điểm A_1,B_1,C_1. Gọi A_2,B_2,C_2 lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Gọi A_3,B_3,C_3 lần lượt là trung điểm của AA_1,BB_1,CC_1. (a) Chứng minh: A_2A_3,B_2B_3,C_2C_3 đồng quy. (b) Lấy điểm A_4 thuộc BC sao cho QA_4 song song với PA. Xác định các điểm B_4 & C_4 tương tự A_4. Chứng minh: Q là trọng tâm của $\Delta A_4B_4C_4$.*

9 ([Hải+22], VD9, p. 64)**.** *Cho ΔABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Chứng minh: $a\overrightarrow{ID}+b\overrightarrow{IE}+c\overrightarrow{IF}=\vec{0}$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: `nguyenquanbahong@gmail.com`; website: https://nqbh.github.io.

[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/vector/problem/NQBH_vector_problem.tex.

10 ([Hải+22], VD10, p. 64). *Cho ΔABC có $\widehat{A}=90^\circ$ & các đường phân giác BE & CF. Đặt $\vec{u}=(AB+BC+CA)\overrightarrow{BC}+BC\overrightarrow{EF}$. Chứng minh: giá của $\vec{u}$ vuông góc với BC.*

11 ([Hải+22], 8.1., p. 65). *Cho vector $\vec{u}$ có 2 phương khác nhau, chứng minh $\vec{u}=\vec{0}$.*

12 ([Hải+22], 8.2., p. 65). *Cho ΔABC có M & N lần lượt là trung điểm của AB & AC. Lấy P đối xứng với M qua N. Chứng minh: $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}$.*

13 ([Hải+22], 8.3., p. 65). *Cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H. Lấy K đối xứng với O qua BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AH}$.*

14 ([Hải+22], 8.4., p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Chứng minh: 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ có giá vuông góc.*

15 ([Hải+22], 8.5., p. 65). *Cho ΔABC & ΔDEF thỏa mãn $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. Chứng minh: ΔABC & ΔDEF có cùng trọng tâm.*

16 ([Hải+22], 8.6., p. 65). *Cho 2 vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a}$ có giá vuông góc với giá của vector $\vec{a}+\vec{b}$. Chứng minh: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2$.*

17 ([Hải+22], 8.7., p. 65). *Cho ΔABC & điểm P thỏa mãn $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$. Chứng minh: $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$.*

18 ([Hải+22], 8.8., p. 65). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Cho $(O),B,C$ cố định & A di chuyển trên đường tròn (O). BE,CF là 2 đường cao của ΔABC. Giả sử có vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\dfrac{|\overrightarrow{EF}-\vec{u}|^2}{EF^2}+\dfrac{|\overrightarrow{OA}-\vec{u}|^2}{OA^2}=1$. Chứng minh $\dfrac{1}{EF^2}-\dfrac{1}{|\vec{u}|^2}$ luôn không đổi khi A thay đổi.*

19 ([Hải+22], 8.9., p. 65). *Cho ΔABC có các phân giác trong AD,BE,CF. Gọi X,Y,Z lần lượt là trung điểm của EF,FD,DE. (a) Chứng minh: AX,BY,CZ đồng quy tại điểm P thỏa mãn hệ thức: $a(b+c)\overrightarrow{PA}+b(c+a)\overrightarrow{PB}+c(a+b)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. (b) Gọi N là tâm đường tròn Euler của ΔABC. Dựng vector $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{NA}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{NB}}{b}+\dfrac{\overrightarrow{NC}}{c}$. Gọi Q là trung điểm ON, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh: PQ song song hoặc trùng với giá của vector $\vec{u}$.*

2 Scalar product – Tích vô hướng

20 ([Hải+22], VD1, p. 75). *(a) Cho đoạn AB & điểm M. Chứng minh $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(MA^2+MB^2-AB^2)$. (b) Cho đoạn thẳng AB,CD. Chứng minh $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(AD^2-AC^2+BD^2-BC^2)$. (c) Chứng minh $AB\perp CD \Leftrightarrow AD^2-AC^2=BD^2-BC^2$.*

21 ([Hải+22], VD2, p. 76). *Cho ΔABC. Lấy I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ với $\alpha+\beta+\gamma=0$. Chứng minh: (a) $\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2=\dfrac{\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha CA^2+\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. (b) $\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma PC^2=(\alpha+\beta+\gamma)PI^2+\alpha IA^2+\beta IB^2+\gamma IC^2$ với mọi điểm P. (c) $PI^2=\dfrac{\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma PC^2}{\alpha+\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$ với mọi điểm P.*

22 ([Hải+22], VD3, p. 77). *Cho $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương. Tìm $\vec{u}$ thỏa $\vec{a}\cdot\vec{u}=\alpha,\vec{b}\cdot\vec{u}=\beta$.*

23 ([Hải+22], VD4, p. 77). *Cho ΔABC đều có trọng tâm O & điểm M bất kỳ. Chứng minh: (a) $\cos\widehat{AOM}+\cos\widehat{BOM}+\cos\widehat{COM}=0$. (b) $\cos^2\widehat{AOM}+\cos^2\widehat{BOM}+\cos^2\widehat{COM}=\mathrm{const}$. (c) $\cos^4\widehat{AOM}+\cos^4\widehat{BOM}+\cos^4\widehat{COM}=\mathrm{const}$.*

24 ([Hải+22], BĐ, p. 77). *Cho ΔABC đều. (a) Điểm N nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh $AN^4+BN^4+CN^4$ không đổi. (b) Chứng minh $AN^4+BN^4+CN^4=18R^4+3(ON^2-R^2)(ON^2+5R^2)$ với mọi điểm N. (c) Từ đó suy ra $AN^4+BN^4+CN^4<18R^4 \Leftarrow N$ nằm trong (O), $AN^4+BN^4+CN^4=18R^4\Leftarrow N\in(O)$, $AN^4+BN^4+CN^4>18R^4\Leftarrow N$ nằm ngoài (O).*

25 ([Hải+22], VD5, p. 79). *Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng d đi qua O & cắt BC,CA,AB lần lượt tại D,E,F. Chứng minh $\dfrac{1}{OD^4}+\dfrac{1}{OE^4}+\dfrac{1}{OF^4}=\mathrm{const}$.*

26 ([Hải+22], VD6, p. 79). *Cho 3 vector $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ thỏa $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0},|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ (mô hình vector của tam giác đều) & $\vec{u}$ là vector bất kỳ. Chứng minh: (a) $\cos(\vec{u},\vec{a})+\cos(\vec{u},\vec{b})+\cos(\vec{u},\vec{c})=0$. (b) $\cos^2(\vec{u},\vec{a})+\cos^2(\vec{u},\vec{b})+\cos^2(\vec{u},\vec{c})=\frac{3}{2}$. (c) $\cos^4(\vec{u},\vec{a})+\cos^4(\vec{u},\vec{b})+\cos^4(\vec{u},\vec{c})=\frac{9}{8}$. (d) Tính $\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{a})+\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{b})+\cos^{2^n}(\vec{u},\vec{c})$ với $n\in\mathbb{N}$.*

27 ([Hải+22], VD7, p. 79). *Cho ΔABC đều & M,N bất kỳ. M_a,M_b,M_c lần lượt là hình chiếu của M lên BC,CA,AB. N_a,N_b,N_c lần lượt là hình chiếu của N lên BC,CA,AB. Chứng minh $M_aN_a^2+M_bN_b^2+M_cN_c^2=\frac{3}{2}MN^2$.*

28 ([Hải+22], 10.1., p. 79). *Cho ΔABC, trọng tâm G. E,F nằm trên đường thẳng GC,GB sao cho $EF\parallel BC$, AG cắt $(ABF),(ACE)$ tại N,M. Chứng minh $FM=EN$.*

29 ([Hải+22], 10.3., p. 80)**.** *Cho ΔABC có DEF là tam giác Ceva của điểm P bất kỳ. L,K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta PCA, \Delta PAB$. Lấy $S \in KL$ thỏa $DS \perp EF$. Đường trung trực của BC cắt KL tại T. Chứng minh S,T đối xứng qua trung điểm KL.*

30 ([Hải+22], 10.4., p. 80)**.** *Cho ΔABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA,AB tại E,F. Điểm P di chuyển trên EF,PB cắt CA tại M, MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua 1 điểm cố định khi P di chuyển.*

31 ([Hải+22], 10.5., p. 80)**.** *Cho ΔABC & điểm $I(\alpha,\beta,\gamma)$ ở trong tam giác với mọi điểm P trong mặt phẳng. Chứng minh $\alpha PA \cdot IA + \beta PB \cdot IB + \gamma PC \cdot IC \geq \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2$.*

32 ([Hải+22], 10.6., p. 80)**.** *Cho ΔABC & điểm P bất kỳ nằm trong tam giác. A',B',C' lần lượt là hình chiếu của P xuống đoạn BC,CA,AB & $(I,r0$ là đường tròn nội tiếp ΔABC. Tìm* GTNN *của biểu thức $PA' + PB' + PC' + \dfrac{PI^2}{2r}$.*

33 ([Hải+22], 10.7., p. 80)**.** *Cho ΔABC với 3 trung tuyến m_a, m_b, m_c. A',B',C' di chuyển trên 3 đường thẳng BC,CA,AB. Tìm cực trị của $\dfrac{B'C'^3}{m_a} + \dfrac{C'A'^3}{m_b} + \dfrac{A'B'^3}{m_c}$.*

34 ([Hải+22], 10.8., p. 80)**.** *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O), I là tâm đường tròn nội tiếp, M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Chứng minh $MA + 2OI \geq MB + MC \geq MA - 2OI$.*

35 ([Hải+22], 10.9., p. 80)**.** *Cho ΔABC, trực tâm H, bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Với mọi M trên mặt phẳng, tìm* GTNN *của biểu thức $MA^3 + MB^3 + MC^3 - \frac{3}{2}R \cdot MH^2$.*

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.