

# Problem: Circle – Bài Tập: Đường Tròn

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 14 tháng 10 năm 2023

## Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set Q of circles \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/set_Q_of_circles.pdf).<sup>1</sup> [\[TeX\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex).<sup>2</sup>

## Mục lục

1	Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn . . . . .	1
2	Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây . . . . .	4
3	Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn . . . . .	5
4	Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn . . . . .	8
5	Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau . . . . .	9
6	Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác . . . . .	9
7	Miscellaneous . . . . .	9
	Tài liệu . . . . .	9

## 1 Sự Xác Định Đường Tròn. Tính Chất Đối Xứng của Đường Tròn

- 1 ([BBN23], p. 99). *Tại sao các nan hoa của bánh xe đạp dài bằng nhau?*
- 2 ([BBN23], H1, p. 101). *Có bao nhiêu đường tròn bán kính  $R$  đi qua 1 điểm cho trước? Tâm các đường tròn đó nằm ở đâu?*
- 3 ([BBN23], H2, p. 101). *Qua 3 điểm bất kỳ có luôn vẽ được 1 đường tròn?*
- 4 ([BBN23], H3, p. 101). *Vẽ đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm đường kính.*
- 5 ([BBN23], H4, p. 101). *Tính đường kính của các đường tròn  $(O; 2R)$ ,  $(O; aR)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ .*
- 6 ([BBN23], H5, p. 101). *D/S? (a) Dây vuông góc với đường kính thì bị đường kính chia làm đôi. (b) Dây vuông góc với đường kính thì chia đôi đường kính. (c) Đường kính đi qua trung điểm 1 dây thì vuông góc với dây ấy. (d) Đường trung trực của 1 dây là trục đối xứng của đường tròn.*
- 7 ([BBN23], VD1, p. 101). *Chứng minh: (a) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông là trung điểm cạnh huyền. (b) Nếu 1 tam giác có 1 cạnh là đường kính của đường tròn ngoại tiếp thì tam giác đó là tam giác vuông (đường kính là cạnh huyền). (c) Các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông có chung cạnh huyền cùng thuộc 1 đường tròn đường kính là cạnh huyền chung đó. (d) Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được trong đường tròn.*
- 8 ([BBN23], VD2, p. 102). *Khi nào thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm: (a) trong tam giác? (b) ngoài tam giác?*
- 9 ([BBN23], VD3, p. 102). *Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 13$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CA = 12$  cm. Xác định tâm  $\mathcal{O}$  tính bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .*
- 10 ([BBN23], VD4, p. 103). *Cho đường tròn đường kính  $AB$ ,  $M$  là 1 điểm bất kỳ. Chứng minh  $M$  nằm trong đường tròn khi & chỉ khi  $\widehat{AMB} > 90^\circ$ .*

\*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam  
e-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com); website: <https://nqbh.github.io>.

<sup>1</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/circle/problem/NQBH\\_circle\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf).

<sup>2</sup>URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_9/rational/problem/NQBH\\_circle\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex).

- 11 ([BBN23], VD5, p. 103). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 2 điểm  $A, B$  nằm trong đường tròn. Chứng minh tồn tại 1 đường tròn  $(C)$  đi qua 2 điểm  $A, B$  & nằm hoàn toàn bên trong  $(O)$ .
- 12 ([BBN23], VD6, p. 103). Có 1 miếng bìa hình tròn bị khoét đi 1 lỗ thủng cũng hình tròn. Dùng kéo cắt (theo 1 đường thẳng) để chia đôi miếng bìa đó.
- 13 ([BBN23], VD7, p. 104). Cho đoạn thẳng  $AB$ , điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$ . Dụng 2 đường tròn đường kính  $AB$  & đường kính  $BM$ . 1 đường thẳng  $d$  vuông góc với  $AB$  tại  $N$  cắt đường tròn đường kính  $AB$  tại  $E, F$ , cắt đường tròn đường kính  $BM$  tại  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $PE = QF$ . (b)  $\widehat{PMB} > \widehat{EAB}$ .
- 14 ([BBN23], VD8, p. 104). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Dụng qua  $A$  cát tuyến cắt đường tròn tại  $B, C$  sao cho  $B$  là trung điểm  $AC$ .
- 15 ([BBN23], VD9, p. 105). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$ , 2 dây  $AB \parallel CD$ . (a) Chứng minh  $AC = BD, AD = BC$ . (b) Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $AC$ , biết khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$  là 2 cm, khoảng cách từ  $O$  đến  $CD$  là 4 cm.
- 16 ([BBN23], 4.1., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường trung tuyến  $AM$ ,  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $AC = 8\text{ cm}$ . Trên tia  $AM$  lấy 3 điểm  $D, E, F$  sao cho  $AD = 9\text{ cm}$ ,  $AE = 11\text{ cm}$ ,  $AF = 10\text{ cm}$ . Xác định vị trí của mỗi điểm  $D, E, F$  đối với đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 17 ([BBN23], 4.2., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Từ điểm  $M$  bất kỳ trên cạnh  $BC$  kẻ  $MD \perp AB, ME \perp AC$ . Chứng minh 5 điểm  $A, D, M, H, E$  cùng nằm trên 1 đường tròn.
- 18 ([BBN23], 4.3., p. 106). Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ . So sánh  $AC, BD$ .
- 19 ([BBN23], 4.4., p. 106). Cho đường tròn đường kính  $AB$ ,  $C, D$  là 2 điểm khác nhau thuộc đường tròn,  $C, D$  không trùng với  $A, B$ . 2 điểm  $E, F$  thuộc đường tròn sao cho  $CE \perp AB, DF \perp AB$ . Chứng minh  $CF, ED, AB$  đồng quy.
- 20 ([BBN23], 4.5., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB = 2a$ ,  $a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính độ dài  $AD$  theo  $a, R$ .
- 21 ([BBN23], 4.6., p. 106). Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{C} + \widehat{D} = 90^\circ$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $AB, BD, DC, CA$ . Chứng minh 4 điểm  $M, N, P, Q$  cùng thuộc 1 đường tròn.
- 22 ([BBN23], 4.7., p. 106). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường cao  $AH$  cắt  $(O)$  ở  $D$ . Biết  $BC = 24, AC = 20$ . Tính chiều cao  $AH$  & bán kính  $(O)$ .
- 23 ([BBN23], 4.8., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$ .
- 24 ([BBN23], 4.9., p. 106). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $A$  nằm ngoài đường tròn. Xác định vị trí của điểm  $M$  trên đường tròn sao cho đoạn  $MA$  là ngắn nhất, dài nhất.
- 25 ([BBN23], 4.10., p. 107). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $P$  nằm bên trong nó. 2 dây  $AB, CD$  thay đổi luôn đi qua  $P$  & vuông góc với nhau. Chứng minh  $AB^2 + CD^2$  là đại lượng không đổi.
- 26 ([BBN23], 4.11., p. 107). Cho đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ ,  $E$  là điểm nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cdot AC + BE \cdot BD = 4R^2$ .
- 27 ([BBN23], 4.12., p. 107). Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .
- 28 ([BBN23], 4.13., p. 107). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$  & điểm  $M$  nằm trong nửa đường tròn. Chỉ bằng thước kẻ, dựng qua  $M$  đường thẳng vuông góc với  $AB$ .
- 29 ([Tuy23], Thí dụ 5, pp. 113–114). Trên đường tròn  $(O, R)$  đường kính  $AB$  lấy 1 điểm  $C$ . Trên tia  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $C$  là trung điểm  $AM$ . (a) Xác định vị trí của điểm  $C$  để  $AM$  có độ dài lớn nhất. (b) Xác định vị trí của điểm  $C$  để  $AM = 2R\sqrt{3}$ . (c) Chứng minh khi  $C$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $M$  di động trên 1 đường tròn cố định.
- 30 ([Tuy23], 36., p. 114). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH = BC = a$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- 31 ([Tuy23], 37., p. 114). Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Chứng minh: các đường tròn  $(AFE), (BFD), (CDA)$  bằng nhau & cùng đi qua 1 điểm. Xác định điểm chung đó.
- 32 ([Tuy23], 38., p. 114). Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh 1, 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $R_1$  &  $R_2$  lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các  $\triangle ABC, \triangle ABD$ . Chứng minh:  $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = 4$ .
- 33 ([Tuy23], 39., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , cạnh  $AB$  cố định, đường chéo  $AC = 2\text{ cm}$ . Chứng minh điểm  $D$  di động trên 1 đường tròn cố định.
- 34 ([Tuy23], 40., p. 115). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 1 dây  $BC$  cố định. Trên đường tròn lấy 1 điểm  $A$  ( $A \neq B, A \neq C$ ). Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Chứng minh khi  $A$  di động trên đường tròn  $(O)$  thì điểm  $G$  di động trên 1 đường tròn cố định.

- 35 ([Tuy23], 41., p. 115). Trong mặt phẳng cho  $2n + 1$  điểm,  $n \in \mathbb{N}$ , sao cho 3 điểm bất kỳ nào cũng tồn tại 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh: trong các điểm này có ít nhất  $n + 1$  điểm nằm trong 1 đường tròn có bán kính bằng 1.
- 36 ([Tuy23], 42., p. 115). Cho hình bình hành  $ABCD$ , 2 đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Vẽ đường tròn tâm  $O$  cắt các đường thẳng  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt tại  $M, N, P, Q$ . Xác định dạng của tứ giác  $MNPQ$ .
- 37 ([Tuy23], 43., p. 115). 2 người chơi 1 trò chơi như sau: Mỗi người lần lượt đặt lên 1 chiếc bàn hình tròn 1 cái cốc. Ai là người cuối cùng đặt được cốc lên bàn thì người đó thắng cuộc. Muốn chắc thắng thì phải chơi theo “chiến thuật” nào? (các chiếc cốc đều như nhau).
- 38 ([Bin23], Ví dụ 8, p. 95). Cho hình thang cân  $ABCD$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn đi qua cả 4 đỉnh của hình thang.
- 39 ([Bin23], 50., p. 95). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $AC = 40$  cm,  $BC = 48$  cm. Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $BC$ .
- 40 ([Bin23], 51., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , cạnh bên bằng  $b$ , đường cao  $AH = h$ . Tính bán kính của đường tròn  $(O)$ .
- 41 ([Bin23], 52., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Giả sử  $O$  nằm trong  $\triangle AMC$  hoặc  $O$  nằm giữa  $A$  &  $M$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AC$ . Chứng minh: (a) Chu vi  $\triangle IMC$  lớn hơn  $2R$ . (b) Chu vi  $\triangle ABC$  lớn hơn  $4R$ .
- 42 ([Bin23], 53., p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA, AB$ . Kẻ 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  sao cho  $DD' \parallel OA, EE' \parallel OB, FF' \parallel OC$ . Chứng minh 3 đường thẳng  $DD', EE', FF'$  đồng quy.
- 43 ([Bin23], 54., p. 96). Cho 3 điểm  $A, B, C$  bất kỳ & đường tròn  $(O; 1)$ . Chứng minh tồn tại 1 điểm  $M$  nằm trên đường tròn  $(O)$  sao cho  $MA + MB + MC \geq 3$ .
- 44 ([Bin+23], VD1, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, BD$ . Chứng minh  $AC \parallel BD \Leftrightarrow CD$  là đường kính.
- 45 ([Bin+23], VD2, p. 20). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  song song với nhau. Gọi  $E, F$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $E, F, O$  thẳng hàng.
- 46 ([Bin+23], VD3, p. 20). Dựng 1 đường tròn nhận đoạn thẳng  $AB$  cho trước làm dây cung có bán kính  $r$  cho trước.
- 47 ([Bin+23], VD4, p. 21). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$ . Kéo dài  $AB$  về phía  $B$  lấy điểm  $C$  sao cho  $BC = R$ . Chứng minh  $\widehat{AOC} = 180^\circ - 3\widehat{ACO}$ .
- 48 ([Bin+23], VD5, p. 21). Cho  $\triangle ABC$ . Từ trung điểm 3 cạnh kẻ các đường vuông góc với 2 cạnh kia tạo thành 1 lục giác. Chứng minh diện tích  $\triangle ABC$  gấp 2 lần diện tích lục giác.
- 49 ([Bin+23], VD6, p. 21). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Gọi  $H, E$  là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh  $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$ .
- 50 ([Bin+23], VD7, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  nằm trong đường tròn,  $A \neq O$ . Tìm trên đường tròn điểm  $M$  sao cho  $\widehat{OMA}$  lớn nhất.
- 51 ([Bin+23], VD8, p. 22). Cho đường tròn  $(O)$ ,  $A, B, C$  là 3 điểm trên đường tròn sao cho  $AB = AC$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .
- 52 ([Bin+23], VD9, p. 23). Dựng  $\triangle ABC$ . Biết  $\widehat{A} = \alpha < 90^\circ$ , đường cao  $BH = h$  & trung tuyến  $CM = m$ .
- 53 ([Bin+23], VD10, p. 23). Cho  $\triangle ABC$  nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O, r)$ ,  $AB = r\sqrt{3}$ ,  $AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 54 ([Bin+23], VD11, p. 23). Cho đoạn thẳng  $BC$  cố định,  $I$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $A$  trên mặt phẳng sao cho  $AB = BC$ . Gọi  $H$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $AI$  cắt đường thẳng  $BH$  tại  $M$ . Chứng minh  $M$  nằm trên 1 đường tròn cố định khi  $A$  thay đổi.
- 55 ([Bin+23], VD12, p. 24). Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , kẻ  $BH \perp AC$ . Trên cạnh  $AC, CD$  lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AH} = \frac{DN}{CD}$ . Chứng minh 4 điểm  $B, C, M, N$  nằm trên 1 đường tròn.
- 56 ([Bin+23], VD13, p. 24). Cho đường tròn  $(O, R)$ , dây  $AB = 2a$ ,  $a < R$ . Từ  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt đường tròn tại  $D$ . Tính độ dài  $AD$  theo  $a, R$ .
- 57 ([Bin+23], VD14, p. 25). Cho đường tròn  $(O, R)$ , đường kính  $AB$ , điểm  $E$  nằm trong đường tròn,  $AE$  cắt đường tròn tại  $C$ ,  $BE$  cắt đường tròn tại  $D$ . Chứng minh  $AE \cot AC + BE \cdot BD$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $E$ .
- 58 ([Bin+23], VD15, p. 25). Cho tứ giác lồi  $ABCD$ . Chứng minh 4 hình tròn có đường kính  $AB, BC, CD, DA$  phủ kín miền tứ giác  $ABCD$ .
- 59 ([Bin+23], 4.1., p. 26). Tính độ dài cạnh của tam giác đều, bát giác đều,  $n$ -giác đều nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ .
- 60 ([Bin+23], 4.2., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $P$  ở trong đường tròn. Xác định dây lớn nhất & dây ngắn nhất đi qua  $P$ .

- 61 ([Bin+23], 4.3., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 bán kính  $OA, OB$  vuông góc với nhau. Kẻ tia phân giác của  $\widehat{AOB}$ , cắt đường tròn ở  $D$ ,  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $AB$ , từ  $M$  kẻ  $MH \perp OB$  cắt  $OD$  tại  $K$ . Chứng minh  $MH^2 + KH^2$  có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$ .
- 62 ([Bin+23], 4.4., p. 26). Chứng minh bao giờ cũng chia được 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân, trong đó có 3 tam giác bằng nhau.
- 63 ([Bin+23], 4.5., p. 26). Cho đường tròn  $(O)$ , 1 dây cung  $EF$  có khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây là  $d$ . Dựng 2 hình vuông nội tiếp trong mỗi phần đó, sao cho mỗi hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn, 2 đỉnh còn lại nằm trên dây  $EF$ . Tính hiệu của 2 cạnh hình vuông đó theo  $d$ .
- 64 ([Bin+23], 4.6., p. 26). Cho 2 đường tròn đồng tâm. Dựng 1 dây cắt 2 đường tròn theo thứ tự tại  $A, B, C, D$  sao cho  $AB = BC = CD$ .
- 65 ([Bin+23], 4.7., p. 26). Cho  $\triangle ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$ ,  $AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ,  $AC = R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 66 ([Bin+23], 4.8., p. 26). Cho hình thoi  $ABCD$ . Gọi  $R_1$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ ,  $R_2$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABD$ . Tính cạnh của hình thoi  $ABCD$  theo  $R_1, R_2$ .
- 67 ([Bin+23], 4.9., p. 26). Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi 1 trong 3 màu xanh, đỏ, vàng. Chứng minh tồn tại ít nhất 2 điểm được tô cùng 1 màu mà khoảng cách giữa 2 điểm đó bằng 1.
- 68 ([Bin+23], 4.10., p. 26). Cho đường tròn  $(O, R)$  & dây  $AB$  cố định. Từ điểm  $C$  thay đổi trên đường tròn dựng hình bình hành  $CABD$ . Chứng minh giao điểm 2 đường chéo của hình bình hành  $CABD$  nằm trên 1 đường tròn cố định.

## 2 Đường Kính & Dây của Đường Tròn. Liên Hệ Giữa Dây & Khoảng Cách Từ Tâm Đến Dây

- 69 ([BBN23], H1, p. 109). Giải thích kết luận “Đường kính là dây lớn nhất trong đường tròn” dựa vào so sánh khoảng cách từ tâm đến dây.
- 70 ([BBN23], H2, p. 109). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB \parallel CD$  &  $AB = CD$ ,  $A, D$  cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ  $BC$ . Tứ giác  $ABCD$  là hình gì?
- 71 ([BBN23], H3, p. 109). Cho 1 đường tròn  $(O, R)$  & dây  $CD$  thay đổi nhưng có độ dài bằng  $a$  không đổi. Tập hợp các trung điểm dây  $CD$  là đường nào?
- 72 ([BBN23], H4, p. 110). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$  & cát tuyến  $ABCD$ . So sánh  $AB, CD$ .
- 73 ([BBN23], VD1, p. 110). Cho đường tròn  $(O, R)$  & 1 điểm  $M$  nằm trong đường tròn. Vẽ qua  $M$  2 dây  $AB, CD$  sao cho  $AB \perp OM$ . (a) So sánh độ dài 2 dây  $AB, CD$ . (b) Chứng minh  $\widehat{ODM} < \widehat{OBM}$ . (c) Xác định vị trí của dây đi qua  $M$  sao cho độ dài của nó là nhỏ nhất, lớn nhất.
- 74 ([BBN23], VD2, p. 111). Cho 2 dây  $MN, EF$  bằng nhau & cắt nhau tại 1 điểm  $A$  nằm trong đường tròn. Chứng minh  $ME = NF$ .
- 75 ([BBN23], VD3, p. 111). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ . Trên đoạn thẳng  $AB$  lấy 2 điểm  $C, D$  sao cho  $AC = BD$ . Từ  $C, D$  kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt nửa đường tròn tương ứng tại  $M, N$ . (a) Chứng minh tứ giác  $CMND$  là hình thang vuông. (b) Xác định vị trí của  $M, N$  để  $CM + DN$  nhỏ nhất.
- 76 ([BBN23], VD4, p. 112). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  kéo dài cắt nhau tại điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Gọi  $H, E$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Chứng minh:  $AB < CD \Leftrightarrow MH < ME$ .
- 77 ([BBN23], 5.1., p. 112). Cho đường tròn  $(O)$  có tâm  $O$  nằm trên đường phân giác  $\widehat{xTy}$ ,  $(O)$  cắt tia  $Ix$  ở  $A, B$ , cắt tia  $Iy$  ở  $C, D$ . Chứng minh  $AB = CD$ .
- 78 ([BBN23], 5.2., p. 112). Cho 2 đường tròn đồng tâm  $O$ , bán kính  $r_1 > r_2$ . Từ điểm  $M$  trên  $(O, r_1)$  vẽ 2 dây  $ME, MF$  theo thứ tự cắt  $(O, r_2)$  tại  $A, B$  &  $C, D$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm  $AB, CD$ . Biết  $AB > CD$ . So sánh: (a)  $ME, MF$ . (b)  $MH, MK$ .
- 79 ([BBN23], 5.3., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính 5 cm & dây  $AB = 8$  cm. (a) Tính khoảng cách từ tâm  $O$  đến dây  $AB$ . (b) Lấy điểm  $I$  trên dây  $AB$  sao cho  $AI = 1$  cm. Kẻ dây  $CD$  đi qua  $I$  & vuông góc với  $AB$ . Chứng minh  $AB = CD$ .
- 80 ([BBN23], 5.4., p. 112). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$ . 2 đường vuông góc với  $CD$  tại  $C, D$  tương ứng cắt  $AB$  ở  $M, N$ . Chứng minh  $AM = BN$ .
- 81 ([BBN23], 5.5., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$ , 2 dây  $AB, CD$  bằng nhau & cắt nhau tại điểm  $I$  nằm trong đường tròn. Chứng minh: (a)  $IO$  là tia phân giác của 1 trong 2 góc tạo bởi 2 đường thẳng  $AB, CD$ . (b) Điểm  $I$  chia  $AB, CD$  thành 2 cặp đoạn thẳng bằng nhau đôi một.



- 82 ([BBN23], 5.6., p. 113). Cho đường tròn  $(O, 6\text{cm})$  & 2 dây  $AB = 8, CD = 10$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  là trung điểm  $CD$ . (a) So sánh  $\widehat{OMN}, \widehat{ONM}$  trong trường hợp 2 dây  $AB, CD$  không song song. (b) So sánh diện tích  $\triangle OCD, \triangle OAB$ .
- 83 ([BBN23], 5.7., p. 113). Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & dây  $CD$  cắt đường kính  $AB$  tại  $I$ . Hạ  $AH, BK$  vuông góc với  $CD$ . Chứng minh  $CH = DK$ .
- 84 ([BBN23], 5.8., p. 113). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ 2 cát tuyến  $CAF, DAE, C, D \in (O), E, F \in (O')$ , sao cho  $\widehat{CAB} = \widehat{EAB}$ . Chứng minh  $CF = DE$ .
- 85 ([BBN23], 5.9., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABI$ . Chứng minh  $OG \perp BI$ .
- 86 ([BBN23], 5.10., p. 113). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O, r)$ , biết  $AB = r\sqrt{3}, AC = r\sqrt{2}$ . Giải  $\triangle ABC$ .
- 87 ([Bin23], Ví dụ 9, p. 96). Cho  $\triangle ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Điểm  $M$  bất kỳ thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ . Gọi  $D, E$  theo thứ tự là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $AB, AC$ . Tìm vị trí của  $M$  để  $DE$  có độ dài lớn nhất.
- 88 ([Bin23], Ví dụ 10, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính  $OA = 11\text{ cm}$ . Điểm  $M$  thuộc bán kính  $OA$  & cách  $O$  7 cm. Qua  $M$  kẻ dây  $CD$  có độ dài 18 cm. Tính  $MC, MD$  với  $MC < MD$ .
- 89 ([Bin23], Ví dụ 11, p. 97). Cho  $(O)$  bán kính 15 cm, điểm  $M$  cách  $O$  9 cm. (a) Vẽ dây  $AB$  đi qua  $M$  & có độ dài 26 cm. (b) Có bao nhiêu dây đi qua  $M$  & có độ dài là 1 số nguyên cm?
- 90 ([Bin23], 55., p. 98). Tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ . (a) Chứng minh  $AC \leq BD$ . (b) Trong trường hợp nào thì  $AC = BD$ ?
- 91 ([Bin23], 56., p. 98). Cho  $(O)$  đường kính  $AB$ , 2 dây  $AC, AD$ . Điểm  $E$  bất kỳ trên đường tròn,  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $E$  trên  $AC, AD$ . Chứng minh  $HK \leq AB$ .
- 92 ([Bin23], 57., p. 98). Cho  $(O)$ , dây  $AB = 24\text{ cm}$ , dây  $AC = 20\text{ cm}$  ( $\widehat{BAC} < 90^\circ$  & điểm  $O$  nằm trong  $\widehat{BAC}$ ). Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ . Khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  bằng 8 cm. (a) Chứng minh  $\triangle ABC$  cân tại  $C$ . (b) Tính bán kính đường tròn.
- 93 ([Bin23], 58., p. 98). Cho  $(O)$  bán kính 5 cm, 2 dây  $AB$  &  $CD$  song song với nhau có độ dài theo thứ tự bằng 8 cm & 6 cm. Tính khoảng cách giữa 2 dây.
- 94 ([Bin23], 59., p. 98). Cho  $(O)$ , đường kính  $AB = 13\text{ cm}$ . Dây  $CD$  có độ dài 12 cm vuông góc với  $AB$  tại  $H$ . (a) Tính  $AH, BH$ . (b) Gọi  $M, N$  lần lượt là hình chiếu của  $H$  trên  $AC, BC$ . Tính diện tích tứ giác  $CMHN$ .
- 95 ([Bin23], 60., p. 99). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ , dây  $CD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là chân 2 đường vuông góc kẻ từ  $A, B$  đến  $CD$ . (a) Chứng minh  $CH = DK$ . (b) Chứng minh  $S_{AHKB} = S_{ABC} + S_{ABD}$ . (c) Tính diện tích lớn nhất của tứ giác  $AHKB$ , biết  $AB = 30\text{ cm}, CD = 18\text{ cm}$ .
- 96 ([Bin23], 61., p. 99). Cho  $\triangle ABC$ , 3 đường cao  $AD, BE, CF$ . Đường tròn đi qua  $D, E, F$  cắt  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $M, N, P$ . Chứng minh 3 đường thẳng kẻ từ  $M$  vuông góc với  $BC$ , kẻ từ  $N$  vuông góc với  $AC$ , kẻ từ  $P$  vuông góc với  $AB$  đồng quy.
- 97 ([Bin23], 62., p. 99).  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp  $(O)$ . Gọi  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trọng tâm của  $\triangle ACD$ . Chứng minh  $OE \perp CD$ .

### 3 Vị Trí Tương Đối của Đường Thẳng & Đường Tròn. Dấu Hiệu Nhận Biết Tiếp Tuyến của Đường Tròn

- 98 ([Bin23], Ví dụ 12, p. 99). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB < AC$ , đường cao  $AH$ . Điểm  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $H$ . Đường tròn có đường kính  $EC$  cắt  $AC$  ở  $K$ . Chứng minh  $HK$  là tiếp tuyến của đường tròn.
- 99 ([Bin23], Ví dụ 13, p. 100). Cho 1 hình vuông  $8 \times 9$  gồm 64 ô vuông nhỏ. Đặt 1 tấm bìa hình tròn có đường kính 8 sao cho tâm  $O$  của hình tròn trùng với tâm của hình vuông. (a) Chứng minh hình tròn tiếp xúc với 4 cạnh của hình vuông. (b) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp hoàn toàn? (c) Có bao nhiêu ô vuông nhỏ bị tấm bìa che lấp (cả che lấp 1 phần & che lấp hoàn toàn)?
- 100 ([Bin23], 63., pp. 100–101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $M$  là 1 điểm thuộc nửa đường tròn. Qua  $M$  vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn. Gọi  $D, C$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên tiếp tuyến ấy. (a) Chứng minh  $M$  là trung điểm  $CD$ . (b) Chứng minh  $AB = BC + AD$ . (c) Giả sử  $\widehat{AOM} \geq \widehat{BOM}$ , gọi  $E$  là giao điểm của  $AD$  với nửa đường tròn. Xác định dạng của tứ giác  $BCDE$ . (d) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên nửa đường tròn sao cho tứ giác  $ABCD$  có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó theo bán kính  $R$  của nửa đường tròn đã cho.
- 101 ([Bin23], 64., p. 101). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ ,  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng  $AC$  với đường tròn  $(O)$  ngoại tiếp  $\triangle BIC$ . (b) Gọi  $H$  là trung điểm  $BC$ ,  $IK$  là đường kính của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh  $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$ .

**102** ([Bin23], 65., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $Ax$  là tiếp tuyến của nửa đường tròn ( $Ax$  & nửa đường tròn nằm cùng phía đối với  $AB$ ),  $C$  là 1 điểm thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Đường thẳng qua  $O$  & vuông góc với  $AC$  cắt  $Ax$  tại  $M$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MB$  &  $CH$ . Chứng minh  $IC = IH$ .

**103** ([Bin23], 66., p. 101). Cho hình thang vuông  $ABCD$ ,  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ , có  $\widehat{BMC} = 90^\circ$  với  $M$  là trung điểm  $AD$ . Chứng minh: (a)  $AD$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $BC$ . (b)  $BC$  là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính  $AD$ .

**104** ([Bin23], 67., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $C$  là 1 điểm thuộc nửa đường tròn,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Qua trung điểm  $M$  của  $CH$ , kẻ đường vuông góc với  $OC$ , cắt nửa đường tròn tại  $D$  &  $E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của  $(C; CD)$ .

**105** ([Bin23], 68., p. 101). Cho đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ . Gọi  $d, d'$  lần lượt là 2 tiếp tuyến tại  $A, B$  của đường tròn,  $C \in d$  bất kỳ. Đường vuông góc với  $OC$  tại  $O$  cắt  $d'$  tại  $D$ . Chứng minh  $CD$  là tiếp tuyến của  $(O)$ .

**106** ([Bin23], 69., p. 101). Cho nửa đường tròn tâm  $O$  đường kính  $AB$ ,  $C$  là 1 điểm thuộc nửa đường tròn. Qua  $C$  kẻ tiếp tuyến  $d$  với nửa đường tròn. Kẻ 2 tia  $Ax, By$  song song với nhau, cắt  $d$  theo thứ tự tại  $D, E$ . Chứng minh  $AB$  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $DE$ .

**107** ([Bin23], 70., pp. 101–102). Cho đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $d$  là tiếp tuyến của đường tròn,  $A$  là tiếp điểm. Điểm  $M$  bất kỳ thuộc  $d$ . Qua  $O$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BM$ , cắt  $d$  tại  $N$ . (a) Chứng minh tích  $AM \cdot AN$  không đổi khi điểm  $M$  chuyển động trên đường thẳng  $d$ . (b) Tìm GTNN của  $MN$ .

**108** ([Bin23], 71., p. 102). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{A} = \alpha$ , đường cao  $AH = h$ . Vẽ đường tròn tâm  $A$  bán kính  $h$ . 1 tiếp tuyến bất kỳ ( $\neq BC$ ) của đường tròn  $(A)$  cắt 2 tia  $AB, AC$  theo thứ tự tại  $B', C'$ . (a) Chứng minh  $S_{ABC} = S_{AB'C'}$ . (b) Trong các  $\triangle ABC$  có  $\widehat{A} = \alpha$  & đường cao  $AH = h$ , tam giác nào có diện tích nhỏ nhất?

**109** ([Bin+23], 1, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  thì  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ .

**110** ([Bin+23], 2, p. 28). Chứng minh: Nếu  $I$  nằm trong  $\triangle ABC$  &  $\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ ,  $\widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{B}}{2}$  thì  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .

**111** ([Bin+23], 3, p. 28). Chứng minh: Nếu  $J$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$  thì  $\widehat{BJC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ .

**112** ([Bin+23], 4, p. 28). Cho  $\triangle ABC$ , đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,  $a + b + c = 2p$ ,  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp,  $S$  là diện tích  $\triangle ABC$ . Chứng minh:  $r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = (p - b) \tan \frac{B}{2} = (p - c) \tan \frac{C}{2}$ ,  $S = pr$ .

**113** ([Bin+23], 5, p. 28). Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $F, E$ . Chứng minh:  $AE = AF = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .

**114** ([Bin+23], VD1, p. 29). Cho  $\widehat{xOy} = 90^\circ$ , đường tròn  $(I)$  tiếp xúc với 2 cạnh  $Ox, Oy$  tại  $A, B$ . 1 tiếp tuyến của đường tròn  $(I)$  tại điểm  $E$  cắt  $Ox, Oy$  tại  $C, D$ .

**115** ([Bin+23], VD2, p. 29). Cho  $\widehat{xOy}$ , 2 điểm  $A, B$  lần lượt chuyển động trên  $Ox$  &  $Oy$  sao cho chu vi  $\triangle OAB$  không đổi. Chứng minh  $AB$  luôn tiếp xúc với đường tròn cố định.

**116** ([Bin+23], VD3, p. 29). Cho hình vuông  $ABCD$ , lấy điểm  $E$  trên cạnh  $BC$  & điểm  $F$  trên cạnh  $CD$  sao cho  $AB = 3BE = 2DF$ . Chứng minh  $EF$  tiếp xúc với cung tròn tâm  $A$ , bán kính  $AB$ .

**117** ([Bin+23], VD4, p. 30). Cho đường tròn  $(O, R)$ , & đường thẳng  $a$  cắt đường tròn tại  $A, B$ . Gọi  $M$  là điểm trên  $a$  & nằm ngoài đường tròn, qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến  $MC, MD$ . Chứng minh khi  $M$  thay đổi trên  $a$ , đường thẳng  $CD$  luôn đi qua 1 điểm cố định.

**118** ([Bin+23], VD5, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  dựng đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ . Chứng minh: (a)  $\frac{BM}{CN} = \frac{BI^2}{CI^2}$ . (b)  $BM \cdot AC + CN \cdot AB + AI^2 = AB \cdot AC$ .

**119** ([Bin+23], VD6, p. 31). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D, E, F$  theo thứ tự là 3 tiếp điểm của đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  với 3 cạnh  $BC, CA, AB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $D$  trên  $EF$ . Chứng minh  $DH$  là tia phân giác của  $\widehat{BHC}$ .

**120** ([Bin+23], VD7, p. 32). Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .  $D, E$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $BI, CI$  với cạnh  $AC, AB$ . Chứng minh  $\triangle ABC$  vuông tại  $A \Leftrightarrow BI \cdot CI = \frac{1}{2}BD \cdot CF$ .

**121** ([Bin+23], VD8, p. 32). Cho đường tròn  $(O, R)$  & điểm  $M$  cách tâm  $O$  1 khoảng bằng  $3R$ . Từ  $M$  kẻ 2 đường thẳng tiếp xúc với đường tròn  $(O, R)$  tại  $A, B$ , gọi  $I, E$  lần lượt là trung điểm  $MA, MB$ . Tính khoảng cách từ  $O$  đến  $IE$ .

**122** ([Bin+23], VD9, p. 33). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $O$  là trung điểm  $BC$ , dựng đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  tại  $D, E$ .  $M$  là điểm chuyển động trên cung nhỏ  $\widehat{DE}$ , tiếp tuyến với đường tròn  $(O)$  tại  $M$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh: (a)  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$ . Từ đó xác định vị trí của  $M$  để diện tích  $\triangle APQ$  đạt GTLN. (b) Nếu  $BC^2 = 4BP \cdot CQ$  thì  $PQ$  là tiếp tuyến.

**123** ([Bin+23], VD10, p. 34). Cho đường tròn  $(O)$ , điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Qua  $M$  kẻ 2 tiếp tuyến cắt đường tròn tại  $A, B$ ,  $MA > MB$ , gọi  $CD$  là đường kính vuông góc với  $AB$ , đường thẳng  $MC, MD$  cắt đường tròn tại  $E, K$ , giao điểm của  $DE, CK$  là  $H$ ,  $I$  là trung điểm  $MH$ . Chứng minh  $IE, IK$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ .

**124** ([Bin+23], VD11, p. 34). Cho  $\triangle ABC$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $AD, AE$  là đường phân giác của 2 góc  $\widehat{BAH}, \widehat{CAH}$ . Chứng minh tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$ .

**125** ([Bin+23], VD12, p. 35). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , 3 tiếp điểm trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$ , đường thẳng  $MI$  cắt cạnh  $AB$  tại  $N$ , đường thẳng  $DF$  cắt đường cao  $AH$  của  $\triangle ABC$  tại  $P$ . Chứng minh  $\triangle ANP$  cân.

**126** ([Bin+23], VD13, p. 36). Tính  $\widehat{A}$  của  $\triangle ABC$ , biết đỉnh  $B$  cách đều tâm 2 đường tròn bàng tiếp của  $\widehat{A}, \widehat{B}$  của  $\triangle ABC$ .

**127** ([Bin+23], VD14, p. 36). Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2AC$  & đường phân giác  $AD$ . Gọi  $r, r_1, r_2$  lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ . Chứng minh  $AD = \frac{pr}{3} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right) - p$  với  $p$  là nửa chu vi  $\triangle ABC$ .

**128** ([Bin+23], VD15, p. 37). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $A$  cố định nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến  $AB$  & cát tuyến qua  $A$  cắt đường tròn tại  $C, D$ ,  $AC < AD$ . Hỏi trọng tâm  $\triangle BCD$  chạy trên đường nào khi cát tuyến  $ACD$  thay đổi?

**129** ([Bin+23], 5.1., p. 38). Cho nửa đường tròn bán kính  $AB = 2R$ .  $C$  là điểm trên nửa đường tròn, khoảng cách từ  $C$  đến  $AB$  là  $h$ . Tính bán kính đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$  theo  $R, h$ .

**130** ([Bin+23], 5.2., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  là điểm trên  $BC$ . Đường tròn nội tiếp  $\triangle ABD$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $E$ , đường tròn nội tiếp  $\triangle ADC$  tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $F$ , đồng thời 2 đường tròn này cùng tiếp xúc với đường thẳng  $d \neq BC$ , đường thẳng  $d$  cắt  $AD$  tại  $I$ . Chứng minh  $AI = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$ .

**131** ([Bin+23], 5.3., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Đường tròn đường kính  $BH$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ , đường tròn đường kính  $HC$  cắt cạnh  $AC$  tại  $N$ . Chứng minh  $MN$  là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn đường kính  $BH, CH$ .

**132** ([Bin+23], 5.4., p. 38). Cho  $\triangle ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AK$ . Gọi  $H$  là trực tâm  $\triangle ABC$ , đường tròn đường kính  $AH$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $KD, KE$  là 2 tiếp tuyến của đường tròn đường kính  $AH$ .

**133** ([Bin+23], 5.5., p. 38). Cho đường tròn  $(O)$  & điểm  $M$  ở ngoài đường tròn. Từ  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MA, MB$  với đường tròn,  $A, B$  là 2 tiếp điểm, tia  $OM$  cắt đường tròn tại  $C$ , tiếp tuyến tại  $C$  cắt tiếp tuyến  $MA, MB$  tại  $P, Q$ . Chứng minh diện tích  $\triangle MPQ$  lớn hơn  $\frac{1}{2}$  diện tích  $\triangle ABC$ .

**134** ([Bin+23], 5.6., p. 38). Trong tất cả các tam giác có cùng cạnh  $a$ , đường cao kẻ từ đỉnh đối diện với cạnh  $a$  bằng  $h$ , xác định tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

**135** ([Bin+23], 5.7., p. 38). Cho  $\triangle ABC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Qua  $I$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $IA$  cắt 2 cạnh  $AB, AC$  tại  $D, E$ . Chứng minh  $\frac{BD}{CE} = \left( \frac{IB}{IC} \right)^2$ .

**136** ([Bin+23], 5.8., p. 38). Cho 3 điểm  $A, B, C$  cố định nằm trên 1 đường thẳng theo thứ tự đó. Đường tròn  $(O)$  thay đổi luôn đi qua  $B, C$ . Từ  $A$  kẻ 2 tiếp tuyến  $AM, AN$  với đường tròn  $(O)$ ,  $M, N$  là 2 tiếp điểm. Đường thẳng  $MN$  cắt  $AO$  tại  $H$ , gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh khi đường tròn  $(O)$  thay đổi tâm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OHE$  nằm trên 1 đường thẳng cố định.

**137** ([Bin+23], 5.9., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ ,  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $BC$  là cạnh nhỏ nhất. Trên  $AB$  lấy điểm  $D$ , trên  $AC$  lấy điểm  $E$  sao cho  $BD = CE = BC$ . Gọi  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp  $\triangle ABC$ . Chứng minh  $OI = DE$  &  $OI \perp DE$ .

**138** ([Bin+23], 5.10., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  ngoại tiếp đường tròn  $(I, r)$ , kẻ các tiếp tuyến với đường tròn & song song với 3 cạnh  $\triangle ABC$ . Các tiếp tuyến này tạo với 3 cạnh  $\triangle ABC$  thành 3 tam giác nhỏ, gọi diện tích 3 tam giác nhỏ là  $S_1, S_2, S_3$  & diện tích  $\triangle ABC$  là  $S$ . Tìm GTNN của biểu thức  $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$ .

**139** ([Bin+23], 5.11., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp,  $I_A$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\widehat{A}$  &  $M$  là trung điểm  $BC$ . Gọi  $H, D$  là hình chiếu của  $I, I_A$  trên cạnh  $BC$ . Chứng minh  $M$  là trung điểm  $DH$ , từ đó suy ra đường thẳng  $MI$  đi qua trung điểm  $AH$ .

**140** ([Bin+23], 5.12., p. 39). Cho đường tròn  $(O, r)$  & điểm  $A$  cố định trên đường tròn. Qua  $A$  dựng tiếp tuyến  $d$  với đường tròn  $(O, r)$ .  $M$  là điểm chuyển động trên  $d$ , từ  $M$  kẻ tiếp tuyến đến đường tròn  $(O, r)$  có tiếp điểm là  $B \neq A$ . Tâm của đường tròn ngoại tiếp & trực tâm của  $\triangle AMB$  chạy trên đường nào?

**141** ([Bin+23], 5.13., p. 39). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , từ điểm  $M$  trên đường tròn kẻ tiếp tuyến  $d$ . Gọi  $H, K$  là hình chiếu của  $A, B$  trên  $d$ . Chứng minh  $AH + BK$  không đổi từ đó suy ra đường tròn đường kính  $HK$  luôn tiếp xúc với  $AH, BK, AB$ .

**142** ([Bin+23], 5.14., p. 39). Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  trong tam giác, gọi  $H, D, E$  là hình chiếu của  $M$  thứ tự trên  $BC, CA, AB$ . Xác định vị trí của  $M$  sao cho giá trị của biểu thức  $\frac{BC}{MH} + \frac{CA}{MD} + \frac{AB}{ME}$  đạt GTNN.

**143** ([Bin+23], 5.15., p. 39). Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $O, I$  là tâm đường tròn ngoại & nội tiếp  $\triangle ABC$ . Biết  $\triangle BIO$  vuông tại  $I$ . Chứng minh  $\frac{BC}{5} = \frac{CA}{4} = \frac{AB}{3}$ .



## 4 Vị Trí Tương Đối của 2 Đường Tròn

- 144** ([Bin+23], VD1, p. 42). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  cắt nhau tại  $A, B$ . Qua  $A$  kẻ cát tuyến  $CAD$  &  $EAF$ ,  $C, E \in (O)$ ,  $D, F \in (O')$ , sao cho  $AB$  là phân giác của  $\widehat{CAF}$ . Chứng minh  $CD = EF$ .
- 145** ([Bin+23], VD2, pp. 42–43). Cho hình chữ nhật  $ABCD$  & 4 đường tròn  $(A, R_A), (B, R_B), (C, R_C), (D, R_D)$  sao cho  $R_A + R_C = R_B + R_D < AC$ . Gọi  $d_1, d_3$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(A, R_A), (C, R_C)$ ,  $d_2, d_4$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của  $(B, R_B), (D, R_D)$ . Chứng minh tồn tại 1 đường tròn tiếp xúc với cả 4 đường thẳng  $d_1, d_2, d_3, d_4$ .
- 146** ([Bin+23], VD3, p. 43). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau,  $AB, CD$  là 2 tiếp tuyến chung ngoài của 2 đường tròn, đường thẳng  $AD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $M$ , cắt đường tròn  $(O')$  tại  $N$ . Chứng minh  $AM = DN$ .
- 147** ([Bin+23], VD4, p. 44). Cho 3 đường tròn  $(O_1), (O_2), (O_3)$  tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi các tiếp điểm của  $(O_1), (O_2)$  là  $A$ , của  $(O_2), (O_3)$  là  $B$ , của  $(O_3), (O_1)$  là  $C$ .  $AB, AC$  kéo dài cắt đường tròn  $(O_3)$  tại  $Q, P$ . Chứng minh  $P, O_3, Q$  thẳng hàng.
- 148** ([Bin+23], VD5, p. 44). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài, tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A \in (O), B \in (O')$ . Đường tròn  $(I, r)$  tiếp xúc với  $AB$  & 2 đường tròn  $(O), (O')$ . Chứng minh: (a)  $AB = 2\sqrt{RR'}$ . (b)  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}$ .
- 149** ([Bin+23], VD6, p. 45). Cho 3 đường tròn  $(A, a), (B, b), (C, c)$  tiếp xúc với nhau từng đôi một. Tại tiếp điểm  $D$  của đường tròn  $(A, a), (B, b)$ , kẻ tiếp tuyến chung cắt đường tròn  $(C, c)$  tại  $M, N$ . Tính  $MN$  theo  $a, b, c$ .
- 150** ([Bin+23], VD7, p. 45). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại  $A, B$ . Trong nửa mặt phẳng bờ  $OO'$  có chứa điểm  $B$ , kẻ 2 bán kính  $OC \parallel O'D$ . Chứng minh  $B$  là trực tâm của  $\triangle ACD$ .
- 151** ([Bin+23], VD8, p. 46). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ ,  $\widehat{xOy} = 90^\circ$  thay đổi luôn đi qua  $A$ , cắt đường tròn  $(O, R), (O', R')$  tại  $B, C$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $BC$ . Xác định vị trí của  $B, C$  để  $AH$  có độ dài lớn nhất.
- 152** ([Bin+23], VD9, p. 47). Cho 2 đường tròn  $(O, R), (O', R')$ ,  $R > R'$  cắt nhau tại  $A, B$ . Kẻ đường kính  $AC$  & đường kính  $AD$ . Tính độ dài  $BC, BD$  biết  $CD = a$ .
- 153** ([Bin+23], VD10, p. 47). Cho  $\triangle ABC$ . Tìm điểm  $M$  sao cho  $\triangle MAB, \triangle MBC, \triangle MCA$  có chu vi bằng nhau.
- 154** ([Bin+23], VD11, p. 48). Cho đường tròn  $(O)$  & dây cung  $AB$ .  $M$  là điểm trên  $AB$ . Dựng đường tròn  $(O_1)$  qua  $A, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , đường tròn  $(O_2)$  qua  $B, M$  & tiếp xúc với  $(O)$ , 2 đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $N$ . Chứng minh  $\widehat{MNO} = 90^\circ$ .
- 155** ([Bin+23], VD12, p. 48). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  ngoài nhau, tiếp tuyến chung trong  $CD$  & tiếp tuyến chung ngoài  $AB$ ,  $A, C \in (O)$ ,  $B, D \in (O')$ . Chứng minh  $AC, BD, OO'$  đồng quy.
- 156** ([Bin+23], VD13, p. 49). Dựng 2 đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau có tâm là 2 điểm  $A, B$  cho trước, sao cho 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài đi qua điểm  $M$  cho trước.
- 157** ([Bin+23], 6.1., p. 50). Cho đường tròn  $(O, R)$  ngoại tiếp  $\triangle ABC$  đều. Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với 2 cạnh  $AB, AC$  & đường tròn  $(O, R)$ . Tính khoảng cách từ  $O'$  đến  $B$  theo  $R$ .
- 158** ([Bin+23], 6.2., p. 50). Cho nửa đường tròn đường kính  $AB$ , điểm  $C$  trên nửa đường tròn sao cho  $CA < CB$ ,  $H$  là hình chiếu của  $C$  trên  $AB$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $CH$ , đường tròn  $(I, CH/2)$  cắt nửa đường tròn tại  $D$  & cắt 2 cạnh  $CA, CB$  thứ tự tại  $M, N$ , đường thẳng  $CD$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $CMHN$  là hình chữ nhật. (b)  $E, I, M, N$  thẳng hàng.
- 159** ([Bin+23], 6.3., p. 50). Cho 3 đường tròn  $O_1, O_2, O_3$  có cùng bán kính  $R$  cắt nhau tại điểm  $O$  cho trước.  $A, B, C$  là 3 giao điểm còn lại của 3 đường tròn. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  có bán kính  $R$ .
- 160** ([Bin+23], 6.4., p. 50). 3 đường tròn có bán kính bằng nhau cùng đi qua điểm  $O$ , từng đôi cắt nhau tại điểm thứ 2 là  $A, B, C$ . Chứng minh  $O$  là trực tâm  $\triangle ABC$ .
- 161** ([Bin+23], 6.5., p. 50). Cho 2 đường tròn  $(O_1), (O_2)$  cắt nhau tại  $A, B$ , kẻ dây  $AM$  của đường tròn  $(O_1)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_2)$  tại  $A$ , kẻ dây  $AN$  của  $(O_2)$  tiếp xúc với đường tròn  $(O_1)$  tại  $A$ . Trên đường thẳng  $AB$  lấy điểm  $D$  sao cho  $BD = AB$ . Chứng minh 4 điểm  $A, M, N, D$  nằm trên 1 đường tròn.
- 162** ([Bin+23], 6.6., p. 50). Cho đường tròn  $(O, R)$ , 1 điểm  $A$  trên đường tròn & đường thẳng  $d$  không đi qua  $A$ . Dựng đường tròn tiếp xúc với  $(O, R)$  tại  $A$  & tiếp xúc với đường thẳng  $d$ .
- 163** ([Bin+23], 6.7., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O), (O')$  có cùng bán kính  $R$  sao cho tâm của đường tròn này nằm trên đường tròn kia, chúng cắt nhau tại  $A, B$ . Tính bán kính của đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với 2 cung nhỏ  $\widehat{AO}, \widehat{AO'}$  đồng thời tiếp xúc với  $OO'$ .
- 164** ([Bin+23], 6.8., p. 51). Cho đường tròn  $(O)$  & dây  $AB$  cố định, điểm  $M$  tùy ý thay đổi trên đoạn thẳng  $AB$ . Qua  $A, M$  dựng đường tròn tâm  $I$  tiếp xúc với đường tròn  $(O)$  tại  $A$ . Qua  $B, M$  dựng đường tròn tâm  $J$  tiếp xúc với  $(O)$  tại  $B$ . 2 đường tròn tâm  $I, J$  cắt nhau tại điểm thứ 2  $N$ . Chứng minh  $MN$  luôn đi qua 1 điểm cố định.



**165** ([Bin+23], 6.9., p. 51). Cho đoạn thẳng  $AB$  có độ dài bằng  $a$  cho trước & 2 tia  $Ax, By$  vuông góc với  $AB$ , nằm về cùng 1 phía đối với  $AB$ . Gọi  $(O), (O')$  là 2 đường tròn thay đổi thỏa mãn đồng thời: (a)  $(O)$  tiếp xúc với  $(O')$ . (b) Đường tròn  $(O)$  tiếp xúc với  $Ax, AB$ . (c) Đường tròn  $(O')$  tiếp xúc với  $By$  & tiếp xúc với  $BA$ . Tính GTLN của diện tích hình thang  $HOO'E$ , trong đó  $H, E$  là hình chiếu của  $O, O'$  trên  $AB$ .

**166** ([Bin+23], 6.10., p. 51). Cho 2 đường tròn  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$ . 1 đường tròn  $(O)$  thay đổi tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ . Giả sử  $MN$  là đường kính của đường tròn  $(O)$  sao cho  $MN \parallel OO'$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $MO_2, NO_1$ . Chứng minh điểm  $H$  thuộc 1 đường thẳng cố định.

## 5 Tính Chất của 2 Tiếp Tuyến Cắt Nhau

**167** ([Bin23], Ví dụ 14, p. 102). Cho đoạn thẳng  $AB$ . Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ  $AB$ , vẽ nửa đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$  & 2 tiếp tuyến  $Ax, By$ . Qua điểm  $M$  thuộc nửa đường tròn này, kẻ tiếp tuyến cắt  $Ax, By$  lần lượt tại  $C, D$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $AD$  &  $BC$ . Chứng minh  $MN \perp AB$ .

**168** ([Bin23], Ví dụ 15, p. 103). Cho  $(O)$ , điểm  $K$  nằm bên ngoài đường tròn. Kẻ 2 tiếp tuyến  $KA, KB$  với đường tròn ( $A, B$  là 2 tiếp điểm). Kẻ đường kính  $AOC$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh: (a)  $\triangle KBC \sim \triangle OBE$ . (b)  $CK \perp OE$ .

**169** ([Bin23], 72., p. 103).

**170** ([Bin23], 73., p. 104).

**171** ([Bin23], 74., p. 104).

**172** ([Bin23], 75., p. 104).

**173** ([Bin23], 76., p. 104).

**174** ([Bin23], 77., p. 104).

**175** ([Bin23], 78., p. 105).

**176** ([Bin23], 79., p. 105).

**177** ([Bin23], 80., p. 105).

## 6 Đường Tròn Nội Tiếp Tam Giác

## 7 Miscellaneous

### Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [Bin+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đàm, Nguyễn Bá Dang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.
- [Bin23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.