Problem: Limit – Bài Tập: Giới Hạn

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 9 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Limit – Bài Tập: Giới Hạn.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/limit/problem/NQBH_limit_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/limit/problem/NQBH_limit_problem.tex.
- *Problem & Solution: Limit – Bài Tập & Lời Giải: Giới Hạn.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/limit/solution/NQBH_limit_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/limit/solution/NQBH_limit_solution.tex.

Mục lục

1 Limit of Sequence – Giới Hạn của Dãy Số

1 ([Hùn+23], VD1, p. 86). *Cho dãy số* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn là* 1.

2 ([Hùn+23], VD2, p. 87). *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

3 ([Hùn+23], VD3, p. 87). *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ *nếu* $0 < |q| < 1$.

4 ([Hùn+23], VD4, p. 87). *Chứng minh dãy* $u_n = (-1)^n$ *phân kỳ.*

5 ([Hùn+23], VD5, p. 88). *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 + 3n + 1}{2n^3 - 1}$.

6 ([Hùn+23], VD6, p. 88). *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4 + 2n^3 + 7n^2 + 8n + 9}{2n^4 + 3n^3 + n + 10}$.

7 ([Hùn+23], VD7, p. 88). *Tìm* $\lim_{n\to+\infty}(n - \sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$.

8 ([Hùn+23], VD1, p. 89). *Tìm* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

9 ([Hùn+23], VD2, p. 89). *Chứng minh nếu* $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ *thì* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

10 ([Hùn+23], VD3, p. 89). *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

11 ([Hùn+23], VD4, p. 89). *Cho dãy số nguyên dương* (u_n) *thỏa mãn* $u_n > u_{n-1}u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Tính giới hạn* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \dfrac{i}{u_i} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{2}{u_2} + \cdots + \dfrac{n}{u_n}\right)$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

12 ([Hùn+23], VD5, p. 90). *Tính* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^{n} i \cos \frac{\pi}{i}$.

13 ([Hùn+23], VD1, p. 90). *Cho dãy số* (u_n) *được xác định theo công thức* $u_n = f(u_{n-1})$. *Giả sử* $u_n \in [a,b]$ *với mọi chỉ số* n *&* f *là hàm tăng trên* $[a,b]$. *Chứng minh: (a) Nếu* $u_1 \le u_2$ *thì* (u_n) *là dãy tăng. (b) Nếu* $u_1 \ge u_2$ *thì* (u_n) *là dãy giảm. (c) Nếu hàm* f *bị chặn thì* (u_n) *hội tụ.*

14 ([Hùn+23], VD2, p. 90). *Cho dãy* (u_n) *được xác định bởi* $u_n = \frac{1}{3}\left(2u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}^2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy* (u_n) *hội tụ & tìm giới hạn của dãy.*

15 ([Hùn+23], VD3, p. 91). *Tìm* u_1 *để dãy* $u_n = u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1$ *hội tụ.*

16 ([Hùn+23], VD4, p. 92). *Chứng minh tồn tại* $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

17 (Số Napier e). *Đặt* $e \coloneqq \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Chứng minh: (a)* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(b)* $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, *trong đó* $\ln x$ *là logarith cơ số* e *của* x.

18 ([Hùn+23], VD5, p. 91). *Chứng minh dãy* $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ *có giới hạn hữu hạn.*

Lưu ý 1. $C = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ *được gọi là* hằng số Euler.

19 ([Hùn+23], VD1, p. 92). *Chứng minh không tồn tại* $\lim_{n\to+\infty} \cos \frac{n\pi}{2}$.

20 ([Hùn+23], VD2, p. 92). *Cho hàm* $f : [0,+\infty) \to (0,b)$ *liên tục & nghịch biến. Giả sử hệ phương trình*

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x = f(y), \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x = y = q$. *Chứng minh dãy* $u_n = f(u_{n-1})$ *hội tụ tới* q *với* $u_1 > 0$.

21 ([Hùn+23], VD3, p. 93). *Cho dãy số* $u_n = 1 + \frac{2}{1 + u_{n-1}}$, $u_1 > 0$. *Chứng minh dãy hội tụ & tìm giới hạn.*

22 ([Hùn+23], VD1, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này hội tụ.*

23 ([Hùn+23], VD2, p. 93). *Cho dãy* $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy này phân kỳ.*

24 ([Hùn+23], VD3, p. 94). *Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

25 ([Hùn+23], VD1, p. 94). *Khảo sát sự hội tụ của* dãy Héron (u_n) *được xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

26 ([Hùn+23], VD2, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $|x_{n+1} - a| \le \alpha |x_n - a|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *trong đó* $a \in \mathbb{R}$ *&* $0 < \alpha < 1$. *Chứng minh dãy số* (x_n) *hội tụ về* a.

27 ([Hùn+23], VD3, p. 95). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ.*

28 ([Hùn+23], VD4, p. 95, Canada 1985). *Dãy số* (x_n) *thỏa mãn* $1 < x_1 < 2$ *&* $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh* (x_n) *hội tụ. Tìm* $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

29 ([Hùn+23], VD5, p. 95, VMO2023). *Xét dãy số* (a_n) *thỏa mãn* $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ *&* $0 \le a_n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (a_n) *có giới hạn hữu hạn.*

30 ([Hùn+23], VD6, p. 96, VMO2022). *Cho dãy số* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 6$, $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n + 4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *Chứng minh dãy* (u_n) *có giới hạn hữu hạn.*

31 ([Hùn+23], VD7, p. 96, VMO2019). *Cho dãy số* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 1$ *&* $x_{n+1} = x_n + 3\sqrt{x_n} + \frac{n}{\sqrt{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *(a) Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = 0$. *(b) Tính giới hạn* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{x_n}$.

32 ([Hùn+23], VD1, p. 97, VMO1984)**.** *Dãy số* (u_n) *được xác định như sau:* $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$*. Dãy số* (v_n) *được xác định như sau:* $v_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{arccot} u_i$*. Tìm giới hạn* $\lim_{n\to+\infty} v_n$*.*

33 ([Hùn+23], VD2, p. 97, VMO1988)**.** *Dãy số* (u_n) *bị chặn thỏa mãn điều kiện* $u_n + u_{n+1} \ge 2u_{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *có nhất thiết hội tụ không?*

34 ([Hùn+23], VD3, p. 98, Olympic 30.4 lần V)**.** *Cho* $x_k = \sum_{i=1}^k \dfrac{i}{(i+1)!} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{k}{(k+1)!}$*. Tính* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{1999} x_i^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{1999}^n}$*.*

35 ([Hùn+23], VD4, p. 98, VMO2013A)**.** *Gọi* F *là tập hợp tất cả các hàm số* $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *thỏa mãn* $f(3x) \ge f(f(2x)) + x$, $\forall x > 0$*. Tìm hằng số* A *lớn nhất để* $f(x) \ge Ax$, $\forall f \in F$, $\forall x > 0$*.*

36 ([Hùn+23], VD5, p. 98, Hải Dương 2019–2020)**.** *Cho dãy số thực* (x_n) *thỏa mãn* $x_1 = \dfrac{1}{6}$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n}{2x_n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. Tìm số hạng tổng quát của dãy số & tính giới hạn của dãy số đó.*

37 ([Hùn+23], VD6, p. 99, Hải Dương 2015–2016)**.** *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = -1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ *& dãy số* (v_n) *thỏa mãn* $u_n v_n - u_n + 2v_n + 2 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. Tính* v_{2015} *&* $\lim_{n\to+\infty} u_n$*.*

38 ([Hùn+23], VD7, p. 99, Hải Dương 2013–2014)**.** *Cho dãy số* (u_n) *thỏa mãn* $u_1 = \dfrac{5}{2}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2$*. Tính* $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{u_i}$*.*

39 ([Hùn+23], VD1, p. 99)**.** *Cho dãy số* (u_n) *được xác định:* u_1, $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta$*. Biện luận theo tham số* α, β *giá trị giới hạn của dãy số.*

40 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.** *Cho* (u_n) *là dãy số hội tụ &* $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$*. Khi đó, dãy trung bình cộng* $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i$ *cũng hội tụ &* $\lim_{n\to+\infty} v_n = u$*.*

41 ([Hùn+23], VD2, p. 100)**.** *Giả sử* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$*. Chứng minh* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b}{}$ ab*. Từ đó, suy ra* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$*.*

42 ([Hùn+23], VD3, p. 101)**.** *Giả sử* $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$*. Chứng minh nếu* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$ *thì* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$*.*

43 ([Hùn+23], VD4, p. 101)**.**

44 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

45 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

46 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

47 ([Hùn+23], VD1, p. 100)**.**

2 Giới Hạn của Hàm Số

Tài liệu

[Hùn+23] Trần Quang Hùng, Lê Thị Việt Anh, Phạm Việt Hải, Khiếu Thị Hương, Tạ Công Sơn, Nguyễn Xuân Thọ, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 11 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.