Problem: Multivariate Polynomial – Bài Tập: Đa Thức Nhiều Biến

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 24 tháng 10 năm 2023

Mục lục

1 Multivariate Monomial Polynomial – Đơn Thức & Đa Thức Nhiều Biến

1 ([Tuy23], VD1, p. 4). *Cho 3 biểu thức* $A = \dfrac{4xy}{x^2-2xy+y^2}$, $B = x^2-2xy+y^2$, $C = -4xy$. *(a) Cho biết biểu thức nào là đơn thức nhiều biến, là đa thức nhiều biến? (b) Với* $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$, *chứng minh 2 biểu thức* B, C *có cùng 1 giá trị.*

2 ([Tuy23], 1., p. 5). *Cho đơn thức* $A = -2mx^3y^4$, m *là hằng. Cho biết: (a) Hệ số & phần biến của đơn thức* A*. (b) Bậc của đơn thức* A *đối với từng biến & đối với tập hợp các biến.*

3 ([Tuy23], 2., p. 5). *Cho* $x^2 = 3$, $y^2 = \frac{1}{3}$. *Tính giá trị của đa thức* $A = x^4 - x^2y^2 + y^4$.

4 ([Tuy23], 3., p. 5). *Tìm các đơn thức đồng dạng trong 5 đơn thức sau (*$a \ne 0$ *là hằng):* $P = \frac{4}{5}x^4y^3xy$, $Q = \frac{2}{3}a^3x^3y^2x^2y$, $R = 6a^2x^2y^4ax^3$, $M = -10$, $N = \frac{7}{6}$.

5 ([Tuy23], 4., p. 5). *Cho 3 đơn thức nhiều biến:* $A = ab^2x^4y^3$, $B = ax^4y^3$, $C = b^2x^4y^3$. *Các đơn thức nào đồng dạng với nhau nếu: (a)* a, b *là hằng* $\ne 0$ *còn* x, y *là biến. (b)* $a \ne 0$ *là hằng còn* b, x, y *là biến. (c)* $b \ne 0$ *là hằng còn* a, x, y *là biến.*

6 ([Tuy23], 5., p. 5). *Cho biểu thức* $A = \dfrac{-4ax^2y^5}{(b+1)^3}$. *Trong 3 trường hợp sau đây, trường hợp nào* A *là đơn thức? (a)* a, b *là hằng. (b)* a *là hằng. (c)* b *là hằng. Trong trường hợp đó, cho biết hệ số & bậc của đơn thức đối với mỗi biến & đối với tập hợp của biến.*

2 Operators ± Multivariate Polyonimals – Phép ± Đa Thức Nhiều Biến

7 ([Tuy23], VD2, p. 6). *Cho 2 đơn thức* $A = 3m^2x^2y^3z$, $B = 12x^2y^3z$ *(*$m \ne 0$ *là hằng). (a) Tính hiệu* $A - B$*. (b) Xác định* m *để giá trị của 2 đơn thức* A, B *luôn bằng nhau với mọi* $x, y, z \in \mathbb{R}$.

8 ([Tuy23], VD3, p. 6). *Cho 3 đa thức* $A = 8a - 9b$, $B = 5b - c$, $C = 3c - 2a$ *trong đó* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Không thực hiện phép tính, cho biết tính* ABC *có giá trị là số chẵn hay lẻ?*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

9 ([Tuy23], 6., p. 7). *Cho 2 đa thức $A = 3x^4 - 2x^3y + 5xy^3 - y^4$, $B = -8x^4 + 2x^3y - 9x^2y^2 - xy^3 + 4y^4$. Tính tổng $A + B$ & hiệu $A - B$ bằng 2 cách: Cộng trừ theo hàng ngang. Cộng trừ theo cột dọc.*

10 ([Tuy23], 7., p. 7). *Chứng minh o$\forall n \in \mathbb{N}^\star$: (a) $8 \cdot 2^n + 2^{n+1}$ có tận cùng bằng chữ số 0. (b) $3^{n+3} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+5} - 7 \cdot 2^n \vdots 25$. (c) $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n \vdots 300$.*

11 ([Tuy23], 8., p. 7). *Viết tích $31 \cdot 5^2$ thành tổng của 3 lũy thừa cơ số 5 với số mũ là 3 số tự nhiên liên tiếp.*

12 ([Tuy23], 9., p. 7). *Viết 2 số tự nhiên sau dưới dạng 1 đa thức có 2 biến x, y: (a) $\overline{xyz}$. (b) $\overline{yxy5}$.*

13 ([Tuy23], 10., p. 7). *Cho da thức $P = ax^4y^3 + 10xy^2 + 4y^3 - 2x^4y^3 - 3xy^2 + bx^3y^4$. biết a, b là hằng & đa thức P có bậc 3, tìm a, b.*

14 ([Tuy23], 11., p. 7). *Tính tổng $S = \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{ba} - \overline{bac}$.*

15 ([Tuy23], 12., p. 7). *Chứng minh tổng của 4 số lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.*

16 ([Tuy23], 13., p. 7). *Cho 3 đa thức $A = 16x^4 - 8x^3y + 7x^2y^2 - 9y^4$, $B = -15x^4 + 3x^3y - 5x^2y^2 - 6y^4$, $C = 5x^3y + 3x^2y^2 + 17y^4 + 1$. Chứng minh ít nhất 1 trong 3 đa thức này có giá trị dương $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

17 ([Tuy23], 14., p. 7). *Cho đa thức $A = 2x^2 + |7x - 1| - (5 - x + 2x^2)$. (a) Thu gọn A. (b) Tìm x để $A = 2$.*

18 ([Tuy23], 15., p. 7). *Tính giá trị của 2 đa thức sau biết $x - y = 0$. (a) $A = 7x - 7y + 4ax - 4ay - 5$. (b) $B = x(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2) + 3$.*

19 ([Tuy23], 16., p. 7). *Cho 2 đa thức $A = xyz - xy^2 - xz^2$, $B = y^3 + z^3$. Chứng minh nếu $x - y - z = 0$ thì A, B là 2 đa thức đối nhau.*

20 ([Tuy23], 17., p. 7). *Tính giá trị của đa thức $A = 4x^4 + 7x^2y^2 + 3y^4 + 5y^2$ với $x^2 + y^2 = 5$.*

3 Operators $\cdot, :$ Multivariate Polynomial – Phép $\cdot, :$ Đa Thức Nhiều Biến

21 ([Tuy23], VD4, p. 8). *Cho 3 đơn thức $A = -3xy^3$, $B = 8xy^2$, $C = \frac{5}{3}x^2y$. Chứng minh 3 đơn thức này không thể cùng có giá trị dương.*

22 ([Tuy23], VD5, p. 9). *Chứng minh đẳng thức $(x + y)(x + y + 2) - 2(x + 1)(y + 1) + 2 = x^2y^2$.*

23 ([Tuy23], VD6, p. 9). *Tìm giá trị của biểu thức $A = (5x^5 + 5x^4) : 5x^2 - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 12) : (2x - 4)$ tại $x = -2$.*

24 ([Tuy23], 18., p. 9). *Cho biểu thức $E = x(x - y) + y(x + y) - (x + y)(x - y) - 2y^2$. Với mọi giá trị của x, y thì giá trị của biểu thức E là 1 số âm hay là 1 số dương?*

25 ([Tuy23], 19., p. 9). *Cho $xy = 1$. Chứng minh đẳng thức $x(y + 1) + y(x + 1) = (x + 1)(y + 1)$.*

26 ([Tuy23], 20., p. 9). *Chứng minh đẳng thức $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$.*

27 ([Tuy23], 21., p. 9). *Tìm $n \in \mathbb{N}$ để mỗi phép chia sau đều là phép chia hết: (a) $7x^{n+2}y^n : 4x^3y^4$. (b) $-\frac{2}{3}x^{2n}y^7 : \frac{4}{9}x^{n+3}y^n$.*

28 ([Tuy23], 22., p. 10). *Tìm x, y biết: $[(x - 2y)(x - 7y) - (x - 2y)(x + 2y)] : (x - 2y) = 18$.*

29 ([Tuy23], 23., p. 10). *Tìm giá trị của biểu thức $A = (3x^4 - x^2 - 2x) : (3x^2 + 3x + 2) + (x^4 - x^2) : (x^2 - x)$ tại $x = -5$.*

30 ([Tuy23], 24., p. 10). *Không làm phép chia đa thức, tìm số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ trong 3 trường hợp sau: (a) $f(x) = x^{101} + x^{102} + x^{103} + 51$, $g(x) = x + 1$. (b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 17$, $g(x) = x - 2$. (c) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x + 30$, $g(x) = x + 5$.*

31 ([Tuy23], 25., p. 10). *Tìm các giá trị của m, n để đa thức $A = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + mx + n$ chia hết cho đa thức $B = x^2 + 1$.*

32 ([Tuy23], 26., p. 10). *Chứng minh đa thức $f(x) = (x^2 + 4x - 20)^{51} + (x^3 - 2x - 22)^{50} - 2$ chia hết cho đa thức $x - 3$.*

33 ([Tuy23], 27., p. 10). *Cho đa thức $A = -3x^3 + 20x^2 + 20x + 10$. Chia đa thức A cho đa thức B được thương là $3x + 1$ & dư $x + 6$. Tìm đa thức B.*

34 ([Tuy23], 28., p. 10). *Cho đa thức $4x^3 + ax + b$ chia hết cho 2 đa thức $x - 2$ & $x + 1$. Tính $2a - 3b$.*

35 ([Tuy23], 29., p. 10). *Tìm giá trị nguyên của x để giá trị của đa thức $A = 10x^4 - 13x^3 - 9x^2 + x + 19$ chia hết cho giá trị của đa thức $B = 2x - 3$.*

4 Algebraic Identity – Hằng Đẳng Thức Đáng Nhớ

36 ([Tuy23], VD7, p. 11). *Cho $x+y=9$, $xy=14$. Tính giá trị của 3 biểu thức: $x-y, x^2+y^2, x^3+y^3$.*

37 ([Tuy23], VD8, p. 12). *Tìm* GTNN *của biểu thức $A=(x+3y-5)^2-6xy+26$.*

38 ([Tuy23], 30., p. 12). *Chứng minh đẳng thức: (a) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=2^{32}-1$. (b) $100^2+103^2+105^2+94^2=101^2+98^2+96^2+107^2$.*

39 (Mở rộng [Tuy23], 30., p. 12). *Tính: (a) $\prod_{i=1}^n(2^{2^i}+1)=(2+1)(2^{2^1}+1)(2^{2^2}+1)(2^{2^3}+1)\cdots(2^{2^n}+1)$, $\prod_{i=m}^n(2^{2^i}+1)=(2^{2^m}+1)(2^{2^{m+1}}+1)\cdots(2^{2^n}+1)$. (b) $\prod_{i=1}^n(a^{2^i}+1)$, $\prod_{i=m}^n(a^{2^i}+1)$. (c) $\prod_{i=m}^n(a^{2^i}+b^{2^i})$.*

40 ([Tuy23], 31., p. 12). *Tính hợp lý, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m\le n$: (a) $\dfrac{258^2-242^2}{254^2-246^2}$. (b) $263^2+74\cdot263+37^2$. (c) $136^2-92\cdot136+46^2$. (d) $(50^2+48^2+46^2+\cdots+2^2)-(49^2+47^2+45^2+\cdots+1^2)$.*

41 ([Tuy23], 32., p. 12). *Cho $a,b\in\mathbb{R}$ thỏa $2(a^2+b^2)=(a-b)^2$. Chứng minh a,b là 2 số đối nhau.*

42 ([Tuy23], 33., p. 12). *Cho $a,b,x,y\in\mathbb{R}^\star$ thỏa $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$. Tìm hệ thức liên hệ giữa 4 số a,b,x,y.*

43 ([Tuy23], 34., p. 12). *Cho $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$. Chứng minh $a=b=c$.*

44 ([Tuy23], 35., p. 12). *Chứng minh không có $x,y\in\mathbb{R}$ nào thỏa mãn đẳng thức: (a) $3x^2+y^2+10x-2xy+26=0$. (b) $4x^2+3y^2-4x+30y+78=0$.*

45 ([Tuy23], 36., p. 12). *Cho $a\in\mathbb{N}$. Chứng minh đẳng thức $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$. Áp dụng để tính nhẩm $35^2,85^2,105^2$.*

46 ([Tuy23], 37., p. 13). *Chứng minh: (a) Biểu thức $A=x^2+x+1$ luôn luôn dương $\forall x\in\mathbb{R}$. (b) Biểu thức $B=x^2-xy+y^2$ luôn luôn dương $\forall x\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. (c) Biểu thức $C=4x-10-x^2$ luôn luôn âm $\forall x\in\mathbb{R}$. (d) Tìm các biểu thức bậc 2 luôn dương dương, luôn luôn âm tương tự.*

47 ([Tuy23], 38., p. 13). *Tìm* GTNN *của biểu thức: (a) $A=25x^2+3y^2-10x+11$. (b) $B=(x-3)^2+(x-11)^2$. (c) $C=(x+1)(x-2)(x-3)(x-6)$.*

48 ([Tuy23], 39., p. 13). *Tìm* GTLN *của biểu thức: (a) $2x-x^2$. (b) $B=19-6x-9x^2$.*

49 ([Tuy23], 40., p. 13). *Chứng minh: (a) 2 số chẵn hơn kém nhau 4 đơn vị thì hiệu các bình phương của chúng chia hết cho* 16*. (b) 2 số lẻ hơn kém nhau 6 đơn vị thì hiệu bình phương của chúng chia hết cho* 24*.*

50 ([Tuy23], 41., p. 13). *Cho $x>y>0$, $x-y=7, xy=60$. Không tính x,y, tính: (a) x^2-y^2. (b) x^4+y^4.*

51 ([Tuy23], 42., p. 13). *Cho $a+b+c=2p$. Chứng minh: (a) $a^2-b^2-c^2+2bc=4(p-b)(p-c)$. (b) $p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2=a^2+b^2+c^2$.*

52 ([Tuy23], 43., p. 13). *Cho $a=m^2+n^2, b^2=m^2-n^2, c=2mn$. Chứng minh $a^2=b^2+c^2$.*

53 ([Tuy23], 44., p. 13). *Tính giá trị biểu thức: (a) $A=x^3+9x^2+27x+27$ với $x=-103$. (b) $B=x^3-15x^2+75x$ với $x=25$. (c) $C=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ với $x=-3$.*

54 ([Tuy23], 45., p. 13). *Cho $x-y=2$. Tính giá trị biểu thức $A=2(x^3-y^3)-3(x+y)^2$.*

55 ([Tuy23], 46., p. 13). *Cho $x+y+z=0$. Chứng minh $x^3+y^3+z^3=3xyz$.*

56 ([Tuy23], 47., p. 13). *Rút gọn biểu thức $A=(x-y-1)^3-(x-y+1)^3+6(x-y)^2$.*

57 ([Tuy23], 48., p. 13). *Cho $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0, (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$. Tìm x,y.*

58 ([Tuy23], 49., p. 13). *Chứng minh: $742^3-692^3\;\vdots\;200$. (b) $685^3+315^3\;\vdots\;25000$.*

59 ([Tuy23], 50., p. 13). *Cho $a+b+c+d=0$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+d^3=3(b+c)(ad-bc)$.*

60 ([Tuy23], 51., p. 13). *Cho $a+b+c=0$. Chứng minh: (a) $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$. (b) $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.*

61 ([Tuy23], 52., p. 14). *Xác định 2 hệ số a,b để đa thức $A=x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ là bình phương của 1 đa thức.*

62 ([Tuy23], 53., p. 14). *Cho $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.*

63 ([Tuy23], 54., p. 14). *Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ không đồng thời bằng 0. Chứng minh có ít nhất 1 trong 3 biểu thức sau có giá trị dương: $x=(a-b+c)^2+8ab, y=(a-b+c)^2+8bc, z=(a-b+c)^2-8ca$.*

64 ([Tuy23], 55., p. 14). *Tính tổng các hệ số của tất cả các hạng tử trong khai triển của nhị thức: (a) $(5x-3)^2$. (b) $(3x-4y)^{20}$.*

65 ([Tuy23], 56., p. 14). *Đa thức $(x+2)^5$ được khai triển theo lũy thừa giảm của x. Biết hạng tử thứ 2 & hạng tử thứ 3 có giá trị bằng nhau khi cho $x=a, y=b$, trong đó a,b là 2 số thực dương, $a-b=1$. Tìm a,b.*

66 ([Tuy23], 57., p. 14). *Tính: (a) $(x+2)^5$. (b) $(x-1)^6$. (c) $(x-1)^5$.*

67 ([Tuy23], 58., p. 14). *Tìm số dư của phép chia 38^{10} cho 13 & 38^9 cho 13.*

68 ([Tuy23], 59., p. 14). *Chứng minh 2 chữ số tận cùng của 7^{43} là 43.*

5 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử. Các Phương Pháp Thông Thường

69 ([Tuy23], VD9, p. 15). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, thỏa $9x(x-y) - 10(y-x)^2 = 0$. Chứng minh $x = 10y$.*

70 ([Tuy23], VD10, p. 15). *Cho $A = 4a^2b^2 - (a^2+b^2+c^2)^2$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ là độ dài 3 cạnh 1 tam giác. Chứng minh $A > 0$.*

71 ([Tuy23], 60., p. 16). *Phân tích đa thức thành nhân tử: (a) $5x(x-2y) + 2(2y-x)^2$. (b) $7x(y-4)^2 - (4-y)^3$. (c) $(4x-8)(x^2+6) - (4x-8)(x+7) + 9(8-4x)$.*

72 ([Tuy23], 61., p. 16). *Chứng minh: (a) $43^2 + 43 \cdot 17 \vdots 60$. (b) $27^5 - 3^{11} \vdots 80$.*

73 ([Tuy23], 62., p. 16). *Tìm 1 số biết 3 lần bình phương của nó đúng bằng 2 lần lập phương của số ấy.*

74 ([Tuy23], 63., p. 16). *Có $x, y, z \in \mathbb{Z}$ nào thỏa mãn đồng thời:x*

$$\begin{cases} x^3 + xyz = 957, \\ y^3 + xyz = 795, \\ z^3 + xyz = 579. \end{cases}$$

75 ([Tuy23], 64., p. 16). *Chứng minh số $\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{2\ldots2}_{n}$ là tích 2 số nguyên liên tiếp.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

76 ([Tuy23], 65., p. 16). *(a) $100x^2 - (x^2+25)^2$. (b) $(x-y+5)^2 - 2(x-y+5) + 1$.*

77 ([Tuy23], 66., p. 16). $(x^2+4y^2-5)^2 - 16(x^2y^2+2xy+1)$.

78 ([Tuy23], 67., p. 16). *Chứng minh: (a) $21^{10} - 1 \vdots 200$. (b) $39^{20} + 39^{13} \vdots 40$. (c) $2^{60} + 5^{30} \vdots 41$. (d) $2025^{2027} + 2027^{2025} \vdots 2026$.*

79 ([Tuy23], 68., p. 16). *Cho $n \in \mathbb{N}$ lẻ. Chứng minh $24^n + 1 \vdots 25$ nhưng $24^n + 1 \not\vdots 23$.*

80 ([Tuy23], 69., p. 16). *Cho $a \in \mathbb{N}$ lẻ, $a > 1$. Chứng minh $(a-1)^{\frac{1}{2}(a-1)} - 1 \vdots a - 2$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

81 ([Tuy23], 70., p. 16). *(a) $x^2 - xz - 9y^2 + 3yz$. (b) $x^3 - x^2 - 5x + 125$. (c) $x^3 + 2x^2 - 6x - 27$. (d) $12x^3 + 4x^2 - 27x - 9$.*

82 ([Tuy23], 71., p. 16). *(a) $x^4 - 25x^2 + 20x - 4$. (b) $x^2(x^2-6) - x^2 + 9$. (c) $ab(x^2+y^2) - xy(a^2+b^2)$.*

83 ([Tuy23], 72., p. 16). *Tìm các cặp số $x, y \in \mathbb{R}$ sao cho $x - y = xy - 1$.*

84 ([Tuy23], 73., p. 16). *Cho $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ sao cho $x^2 - y = y^2 - x$. Tính giá trị biểu thức $A = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$.*

85 ([Tuy23], 74., p. 16). *Cho $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{c-d}{d-a}$. Chứng minh $a = c$ hoặc $a + c = b + d$.*

Phân tích đa thức thành nhân tử:

86 ([Tuy23], 75., p. 17). *(a) $4x^4 + 4x^3 - x^2 - x$. (b) $x^6 - x^4 - 9x^3 + 9x^2$. (c) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.*

87 ([Tuy23], 76., p. 17). *(a) $(xy+4)^2 - 4(x+y)^2$. (b) $(ab-xy)^2 - (bx-ay)^2$. (c) $(x^2+8x-34)^2 - (3x^2-8x-2)^2$.*

88 ([Tuy23], 77., p. 17). *(a) $(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - 4b^2$. (b) $a(b^2-c^2) - b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2)$. (c) $a^5 + b^5 - (a+b)^5$.*

89 ([Tuy23], 78., p. 17). *Chứng minh: (a) $999^4 + 999$ tận cùng 3 chữ số 0. (b) $49^5 - 49 \vdots 100$.*

90 ([Tuy23], 79., p. 17). *Chứng minh: (a) Lập phương của 1 số nguyên trừ đi số nguyên đó thì chia hết cho 6. (b) Nếu tổng của 3 số nguyên chia hết cho 6 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 6.*

91 ([Tuy23], 80., p. 17). *Cho $a \neq \pm b, a(a+b)(a+c) = b(b+c)(b+a)$. Chứng minh $a + b + c$.*

92 ([Tuy23], 81., p. 17). *Cho $x^2y - y^2x + x^2z - z^2x + y^2z + z^2y = 2xyz$. Chứng minh trong 3 số x, y, z ít nhất cũng có 2 số bằng nhau hoặc đối nhau.*

93 ([Tuy23], 82., p. 17). *1 tập hợp gồm $n \in \mathbb{N}$ số nguyên dương khác nhau có tổng là 360, $n > 2$. Chia tập hợp này thành 2 tập hợp con của A, B sao cho chúng không có phần tử chung, tập hợp A gồm có 2 phần tử, tập hợp B gồm các phần tử còn lại. Hỏi có tồn tại hay không cách chia như trên để tích các phần tử của A bằng tổng các phần tử của B.*

6 Phân Tích Đa Thức Thành Nhân Tử Bằng 1 Số Phương Pháp Khác

Phân tích đa thức thành nhân tử:

94 ([Tuy23], VD11, p. 17). $A = 4x^2 - 8x + 3$.

95 ([Tuy23], VD12, p. 18). $A = 4x^4 + y^4$.

96 ([Tuy23], VD13, p. 18). $A = (x^2 - 3x - 1)^2 - 12(x^2 - 3x - 1) + 27$.

97 ([Tuy23], VD14, p. 19). *Phân tích đa thức thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên:* $A = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 3$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

98 ([Tuy23], 83., p. 19). *(a)* $3x^2 - 11x + 6$. *(b)* $8x^2 + 10x - 3$. *(c)* $8x^2 - 2x - 1$.

99 ([Tuy23], 84., p. 19). *(a)* $6x^2 + 7xy + 2y^2$. *(b)* $9x^2 - 9xy - 4y^2$. *(c)* $x^2 - y^2 + 10x - 6y + 16$.

100 ([Tuy23], 85., p. 19). *(a)* $x^3 + x + 2$. *(b)* $x^3 - 2x - 1$. *(c)* $x^3 + 3x^2 - 4$.

101 ([Tuy23], 86., p. 19). *(a)* $x^3y^3 + x^2y^2 + 4$. *(b)* $x^3 + 3x^2y - 9xy^2 + 5y^3$.

102 ([Tuy23], 87., p. 20). *(a)* $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$. *(b)* $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 36$. *(c)* $x^8y^8 + x^4y^4 + 1$.

103 ([Tuy23], 88., p. 20). *(a)* $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2$. *(b)* $x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2$.

104 ([Tuy23], 89., p. 20). *(a)* $x^4 + y^4 + (x + y)^4$. *(b)* $2(x^2 + x + 1)^2 - (2x + 1)^2 - (x^2 + 2x)^2$.

105 ([Tuy23], 90., p. 20). *(a)* $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz$. *(b)* $xy(x + y) - yz(y + z) - zx(z - x)$. *(c)* $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

106 ([Tuy23], 91., p. 20). *Cho* $a \in \mathbb{Z}$. *Chứng minh* $a^5 - a \vdots 30$.

107 ([Tuy23], 92., p. 20). *Cho* $x > y > z$. *Chứng minh biểu thức* $A = x^4(y - z) + y^4(z - x) + z^4(x - y)$ *luôn luôn dương.*

108 ([Tuy23], 93., p. 20). *Cho* x, y, z *là 3 số thực dương thỏa* $(x + y)(y + z)(z + x) = 8xyz$. *Chứng minh* $x = y = z$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

109 ([Tuy23], 94., p. 20). *(a)* $x^4 + 5x^3 + 10x - 4$. *(b)* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

110 ([Tuy23], 95., p. 20). *(a)* $x^7 + x^2 + 1$. *(b)* $x^8 + x + 1$.

111 ([Tuy23], 96., p. 20). *(a)* $x^5 + x^4 + 1$. *(b)* $x^{10} + x^5 + 1$.

112 ([Tuy23], 97., p. 20). *Cho* $x \in \mathbb{Z}$. *Chứng minh* $x^{200} + x^{100} + 1 \vdots x^4 + x^2 + 1$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

113 ([Tuy23], 98., p. 20). *(a)* $A = x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4$. *(b)* $B = (12x^2 - 12xy + 3y^2) - 10(2x - y) + 8$.

114 ([Tuy23], 99., p. 20). *(a)* $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$. *(b)* $B = (a + b - 2c)^3 + (b + c - 2a)^3 + (c + a - 2b)^3$.

115 ([Tuy23], 100., p. 20). *(a) Chứng minh:* $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x)$. *(b) Phân tích đa thức thành nhân tử:* $A = (a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (b - c - a)^3 + (c - a - b)^3$.

Phân tích đa thức thành nhân tử:

116 ([Tuy23], 101., p. 20). *(a)* $A = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$. *(b)* $B = (x^2 + 4x - 3)^2 - 5x(x^2 + 4x - 3) + 6x^2$. *(c)* $C = (x^2 + x + 4) + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2$.

117 ([Tuy23], 102., p. 20). $2(x^2 - 6x + 1)^2 + 5(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1)^2$.

118 ([Tuy23], 103., p. 21). *Cho* $A = 4(x - 2)(x - 1)(x + 4)(x + 8) + 25x^2$. *Chứng minh A không có giá trị âm.*

119 ([Tuy23], 104., p. 21). *Cho đa thức* $A = 3x^4 + 11x^3 - 7x^2 - 2x - 1$. *Phân tích A thành tích của 1 nhị thức bậc nhất với 1 đa thức bậc 3 có hệ số nguyên sao cho hệ số cao nhất của đa thức bậc 3 là 1.*

120 ([Tuy23], 105., p. 21). *Cho đa thức* $A = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$. *Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên.*

121 ([Tuy23], 106., p. 21). *Cho đa thức* $A = x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x - 5$. *Phân tích A thành tích của 2 tam thức bậc 2 với hệ số nguyên & các hệ số cao nhất đều mang dấu dương.*

7 Số Chính Phương

122 ([Tuy23], VD15, p. 22). *Chứng minh* $A = \underbrace{1\ldots1}_{2n} - 8 \cdot \underbrace{1\ldots1}_{n} + 1$ *là 1 số chính phương.*

123 ([Tuy23], VD16, p. 22). *Chứng minh: (a) Tổng của 3 số chính phương liên tiếp không là 1 số chính phương. (b) Tổng* $S = \sum_{i=1}^{30} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$ *không là 1 số chính phương.*

124 ([Tuy23], 107., p. 23). *Có 2 số chính phương nào mà: (a) Có tổng bằng* 4567*? (b) Có hiệu bằng* 7654*?*

125 ([Tuy23], 108., p. 23). *Chứng minh tổng của* 20 *số chính phương liên tiếp không thể là số chính phương.*

126 ([Tuy23], 109., p. 23). *Cho 5 số chính phương bất kỳ có chữ số hàng đơn vị đều bằng* 6 *còn chữ số hàng chục thì khác nhau. Chứng minh tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó cũng là 1 số chính phương.*

127 ([Tuy23], 110., p. 23). *Cho* $a, b, c \neq 0$ *là các chữ số. (a) Tính tổng* S *của tất cả các số có 3 chữ số tạo thành bởi cả 3 chữ số* a, b, c*. (b) Chứng minh* S *không phải là số chính phương.*

128 ([Tuy23], 111., p. 23). *Tìm 1 số chính phương có 4 chữ số biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.*

129 ([Tuy23], 112., p. 23). *Chứng minh nếu* $n + 1, 2n + 1$ *đều là số chính phương thì* $n \,\vdots\, 24$.

130 ([Tuy23], 113., p. 23). *Tìm* $n \in \mathbb{N}$ *biết trong 3 mệnh đề sau có 2 mệnh đề đúng & 1 mệnh đề sai: (a)* n *có chữ số tận cùng là* 2*. (b)* $n + 20$ *là 1 số chính phương. (c)* $n - 69$ *là 1 số chính phương.*

131 ([Tuy23], 114., p. 23). *Cho* a *là tổng của 2 số chính phương. Chứng minh: (a)* $2a$ *cũng là tổng của 2 số chính phương. (b)* a^2 *cũng là tổng của 2 số chính phương.*

132 ([Tuy23], 115., p. 23). *Cho* a, b, c, d *là 4 số chính phương. Chứng minh* $(a + b)(c + d)$ *là tổng của 2 số chính phương.*

133 ([Tuy23], 116., p. 23). *Cho* $x, y, z \in \mathbb{Z}$ *sao cho* $x = y + z$*. Chứng minh* $2(xy + xz - yz)$ *là tổng của 3 số chính phương.*

134 ([Tuy23], 117., p. 23). *Cho* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *thỏa* $a - b = c + d$*. Chứng minh* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *luôn là tổng của 3 số chính phương.*

135 ([Tuy23], 118., p. 23). *Cho 2 số chính phương liên tiếp. Chứng minh tổng của 2 số đó cộng với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ.*

136 ([Tuy23], 119., p. 24). *Cho* $a_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$*. (a) Tính* a_{n+1}*. (b) Chứng minh* $a_n + a_{n+1}$ *là 1 số chính phương.*

137 ([Tuy23], 120., p. 24). *Cho* a *là tích của 4 số nguyên liên tiếp. Chứng minh* $a + 1$ *là 1 số chính phương.*

138 ([Tuy23], 121., p. 24). *(a) Cho* $a = \underbrace{1\ldots1}_{n}5, b = \underbrace{1\ldots1}_{n}9$*. Chứng minh* $ab + 4$ *là 1 số chính phương. (b) Cho* $a = \underbrace{1\ldots1}_{n}, b = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-2}11$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*. Chứng minh* $ab + 4$ *là 1 số chính phương.*

139 ([Tuy23], 122., p. 24). *Cho* $A = \underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{5\ldots5}_{n} + 1$*. Chứng minh* A *là 1 số chính phương.*

140 ([Tuy23], 123., p. 24). *Chứng minh: (a)* $A = \underbrace{1\ldots1}_{2n} + \underbrace{4\ldots4}_{n} + 1$*,* $n \in \mathbb{N}$ *là số chính phương. (b)* $B = \underbrace{1\ldots1}_{2n} + \underbrace{1\ldots1}_{n+1} + \underbrace{6\ldots6}_{n} + 8$*,* $n \in \mathbb{N}$ *là số chính phương.*

141 ([Tuy23], 124., p. 24). *Cho* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *thỏa* $ab + bc + ca = 1$*. Chứng minh* $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ *là 1 số chính phương.*

142 ([Tuy23], 125., p. 24). *Tìm tất cả* $n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $n^2 + 1234$ *là 1 số chính phương.*

143 ([Tuy23], 126., p. 24). *Tìm tất cả* $n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $2^n + 2^4 + 2^7$ *là 1 số chính phương.*

144 ([Tuy23], 127., p. 24). *Tìm tất cả* $n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $n^2 + 2x + 200$ *là 1 số chính phương.*

145 ([Tuy23], 128., p. 24). *Cho* $A = p^4$ *với* p *là 1 số nguyên tố. (a) Số* A *có các ước dương nào? (b) Tìm các giá trị của* p *để tổng các ước dương của* A *là 1 số chính phương.*

146 ([Tuy23], 129., p. 24). *Cho* $a, b \in \mathbb{N}^\star$ *thỏa* $ab + 1$ *là 1 số chính phương. Chứng minh tồn tại* $c \in \mathbb{N}^\star$ *sao cho* $ac + 1, bc + 1$ *đều là số chính phương.*

8 Miscellaneous

Tài liệu

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.