Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions
Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 19 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/problem/NQBH_derivative_application_problem.tex.

- *Problem & Solution: Application of Derivative to Survey & Draw Graph of Functions – Bài Tập & Lời Giải: Ứng Dụng Đạo Hàm Để Khảo Sát & Vẽ Đồ Thị Của Hàm Số.*

  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.pdf.

  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_12/derivative_application/solution/NQBH_derivative_application_solution.tex.

Mục lục

1 Monotonicity of Function – Tính Đơn Điệu của Hàm Số . . . 2

2 Maximum & Minimum of Function – GTLN & GTNN của Hàm Số . . . 2

3 Graph of a Function & Some Graph Transformations – Đồ Thị của Hàm Số & 1 Số Phép Biến Đổi Đồ Thị . . . 4
3.1 Phép tịnh tiến hệ tọa độ . . . 4

4 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số . . . 5

5 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số . . . 6
5.1 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức . . . 6
5.1.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 1 $y = ax + b$, $a \neq 0$ . . . 6
5.1.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 2 $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ . . . 7
5.1.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ . . . 7
5.1.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$ . . . 7
5.1.5 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ [$\star$] . . . 7
5.2 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ . . . 7
5.2.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ . . . 7
5.2.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & tử thức $\not\vdots$ mẫu thức . . . 8
5.2.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & mẫu thức $\not\vdots$ tử thức . . . 8
5.2.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung . . . 8
5.2.5 Miscellaneous . . . 8
5.3 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị . . . 8
5.3.1 Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị hàm số . . . 8
5.3.2 Họ đường cong phụ thuộc tham số . . . 8

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

5.3.3 Ứng dụng đồ thị hàm số trong các bài toán biện luận số nghiệm của phương trình . . . 9

6 Miscellaneous . . . **9**

Tài liệu . . . **9**

1 Monotonicity of Function – Tính Đơn Điệu của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §1, pp. 5–14]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. HD3. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

Dạng toán 1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến & nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.*

Cách giải. Nhìn vào đồ thị, từ trái sang phải, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi lên là khoảng đồng biến của hàm số $y = f(x)$, khoảng nào hàm số $y = f(x)$ đi xuống là khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$. □

1 ([Quỳ+22], VD1, p. 5). *Chứng minh hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[0,1]$.*

2 ([Quỳ+22], VD2, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$.*

3 ([Quỳ+22], H1, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.*

4 ([Quỳ+22], VD3, p. 6). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 3$.*

5 ([Quỳ+22], H2, p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số $y = 2x^5 + 5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{3}$.*

6 ([Quỳ+22], 1., p. 7). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$. (b) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. (c) $y = x + \frac{3}{x}$. (d) $y = x - \frac{2}{x}$. (e) $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (f) $y = \sqrt{4-x^2}$.*

7 ([Quỳ+22], 2., p. 7). *Chứng minh: (a) Hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó. (b) Hàm số $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.*

8 ([Quỳ+22], 3., p. 8). *Chứng minh các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$: (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$. (b) $f(x) = x^3 + x - \cos x - 4$.*

9 ([Quỳ+22], 4., p. 8). *Với giá trị nào của a hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?*

10 ([Quỳ+22], 5., p. 8). *Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.*

11 ([Quỳ+22], 6., p. 8). *Xét chiều biến thiên của hàm số: (a) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$. (b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$. (c) $y = \dfrac{x^2-8x+9}{x-5}$. (d) $y = \sqrt{2x-x^2}$. (e) $y = \sqrt{x^2-2x+3}$. (f) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2x$.*

12 ([Quỳ+22], 7., p. 8). *Chứng minh hàm số $f(x) = \cos 2x - 2x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

13 ([Quỳ+22], 8., pp. 8–9). *Chứng minh bất đẳng thức: (a) $\sin x < x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$. (b) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. (c) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$; $\sin x < x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.*

14 ([Quỳ+22], 9., p. 9). *Chứng minh: $\sin x + \tan x > 2x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.*

15 ([Quỳ+22], 10., p. 9). *Số dân của 1 thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \dfrac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). (a) Tính số dân của thị trấn vào năm 1980 & năm 1995. (b) Xem f là 1 hàm số xác định trên nửa khoảng $[0,+\infty)$. Tìm f' & xét chiều biến thiên của hàm số f trên nửa khoảng $[0,+\infty)$. (c) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Tính tốc độ tăng dân số vào năm 1990 & năm 2008 của thị trấn. Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0.125 nghìn người/năm?*

2 Maximum & Minimum of Function – GTLN & GTNN của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §2, pp. 15–20]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

16 ([Quỳ+22], VD1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

17 ([Quỳ+22], H1, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x} - 3$.*

18 ([Quỳ+22], VD2, p. 14). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = |x|$.*

19 ([Quỳ+22], VD3, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{4}{3}$.*

20 ([Quỳ+22], H2, p. 16). *Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2\sin 2x - 3$.*

21 ([Quỳ+22], 11., pp. 16–17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-1$. *(b)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-10$. *(c)* $f(x)=x+\frac{1}{x}$. *(d)* $f(x)=|x|(x+2)$. *(e)* $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+2$. *(f)* $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

22 ([Quỳ+22], 12., p. 17). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $y=x\sqrt{4-x^2}$. *(b)* $y=\sqrt{8-x^2}$. *(c)* $y=x-\sin 2x+2$. *(d)* $y=3-2\cos x-\cos 2x$.

23 ([Quỳ+22], 13., p. 17). *Tìm 4 hệ số* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ *của hàm số* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *sao cho hàm số* f *đạt cực tiểu tại điểm* $x=0$, $f(0)=0$, *& đạt cực đại tại điểm* $x=1$, $f(1)=1$.

24 ([Quỳ+22], 14., p. 17). *Xác định 3 hệ số* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *sao cho hàm số* $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ *đạt cực trị bằng 0 tại điểm* $x=-2$ *& đồ thị của hàm số đi qua điểm* $A(1,0)$.

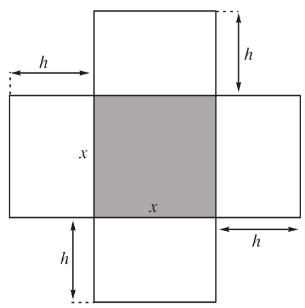
25 ([Quỳ+22], 15., p. 17). *Chứng minh với mọi giá trị của m, hàm số* $y=\dfrac{x^2-m(m+1)x+m^3+1}{x-m}$ *luôn có cực đại & cực tiểu.*

26 ([Quỳ+22], VD1, p. 18). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

27 ([Quỳ+22], VD2, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x^3-3x+3$ *trên đoạn* $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

28 ([Quỳ+22], H, p. 19). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$ *trên khoảng* $(1,+\infty)$.

29 ([Quỳ+22], VD3, p. 20). *1 hộp không nắp được làm từ 1 mảnh các tông theo mẫu như hình:*



Hộp có đáy là 1 hình vuông cạnh x cm, *chiều cao là h* cm, *& có thể tích là* 500 cm^3. *(a) Biểu diễn h theo x. (b) Tìm diện tích* $S(x)$ *của mảnh các tông theo x. (c) Tìm giá trị của x sao cho* $S(x)$ *nhỏ nhất.*

30 ([Quỳ+22], VD4, p. 21). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=x^3-3x+3$ *trên đoạn* $[0,2]$.

31 ([Quỳ+22], 16., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số* $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$.

32 ([Quỳ+22], 17., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $f(x)=x^2+2x-5$ *trên đoạn* $[-2,3]$. *(b)* $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x-4$ *trên đoạn* $[-4,0]$. *(c)* $f(x)=x+\frac{1}{x}$ *trên khoảng* $(0,+\infty)$. *(d)* $f(x)=-x^2+2x+4$ *trên đoạn* $[2,4]$. *(e)* $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$ *trên đoạn* $[0,1]$. *(f)* $f(x)=x-\frac{1}{x}$ *trên nửa khoảng* $(0,2]$.

33 ([Quỳ+22], 18., p. 22). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a)* $y=2\sin^2 x+2\sin x-1$. *(b)* $\cos^2 2x-\sin x\cos x+4$.

34 ([Quỳ+22], 19., p. 22). *Cho* ΔABC *đều cạnh a. Dựng 1 hình chữ nhật* $MNPQ$ *có cạnh* MN *nằm trên cạnh* BC, *2 đỉnh* P,Q *theo thứ tự nằm trên 2 cạnh* AC,AB *của tam giác. Xác định vị trí của điểm* M *sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất & tìm* GTLN *đó.*

35 ([Quỳ+22], 20., p. 22). *Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, 1 nhà sinh vật học thấy: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau 1 vụ cân nặng* $P(n)=480-20n$ g. *Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên 1 đơn vị diện tích của mặt hồ để sau 1 vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?*

36 ([Quỳ+22], 21., p. 23). *Tìm cực trị của hàm số: (a)* $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. *(b)* $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$. *(c)* $f(x)=\sqrt{5-x^2}$. *(d)* $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

37 ([Quỳ+22], 22., p. 23). *Tìm giá trị của m để hàm số* $f(x)=\dfrac{x^2+mx-1}{x-1}$ *có cực đại & cực tiểu.*

38 ([Quỳ+22], 23., p. 23). *Độ giảm huyết áp của 1 bệnh nhân được cho bởi công thức* $G(x)=0.025x^2(30-x)$, *trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng* mg*). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất & tính độ giảm đó.*

39 ([Quỳ+22], 24., p. 23). *Cho parabol $(\mathcal{P}): y = x^2$ & điểm $A(-3,0)$. Xác định điểm M thuộc parabol $(\mathcal{P})$ sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất & tìm khoảng cách ngắn nhất đó.*

40 ([Quỳ+22], 25., p. 23). *1 con cá hồi bơi ngược dòng để vượt 1 khoảng cách là* 300 km. *Vận tốc dòng nước là* 6 km/h. *Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v* km/h *thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là 1 hằng số, E được tính bằng jule. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.*

41 ([Quỳ+22], 26., pp. 23–24). *Sau khi phát hiện 1 bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0,1,2,\ldots,25$. Nếu coi f là hàm số xác định trên đoạn $[0,25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. (a) Tính tốc độ truyền bệnh vào ngày thứ 5. (b) Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất & tính tốc độ đó. (c) Xác định các ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn* 600. *(d) Xét chiều biến thiên của hàm số f trên đoạn $[0,25]$.*

42 ([Quỳ+22], 27., p. 24). *Tìm* GTLN, GTNN *của hàm số: (a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ trên đoạn $[-3,1]$. (b) $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$. (c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^2 x + 2$. (d) $f(x) = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.*

43 ([Quỳ+22], 28., p. 24). *Trong các hình chữ nhật có chu vi là* 40 cm, *xác định hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.*

3 Graph of a Function & Some Graph Transformations – Đồ Thị của Hàm Số & 1 Số Phép Biến Đổi Đồ Thị

$\boxed{1}$ Đồ thị hàm số: Nếu f là 1 hàm số có miền xác định D (also D_f, $\mathrm{dom}(f)$) thì đồ thị hàm số f là tập hợp các cặp sắp thứ tự $G_f := \{(x, f(x)); x \in D\}$, i.e., đồ thị của f bao gồm tất cả các điểm (x,y) trong mặt phẳng tọa độ Oxy với $y = f(x)$ & x thuộc vào miền xác định của f; đôi khi cũng gọi đồ thị đó là 1 *đường cong* (curve), đặc biệt khi miền xác định là 1 khoảng, đoạn. $\boxed{2}$ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (G) của hàm số $y = f(x)$, $p, q \in (0,\infty)$. Phép tịnh tiến song song với trục tọa độ: Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$, xuống dưới q đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$, sang trái p đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x+p)$, sang phải p đơn vị được đồ thị hàm số $y = f(x-p)$. Phép đối xứng song song với trục tọa độ: Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Oy, được đồ thị hàm số $y = f(-x)$. Nếu lấy phần $(G^{\rm r})$ của (G) nằm bên phải (right) của trục Oy hợp với ảnh của $(G^{\rm r})$ qua phép đối xứng qua trục Oy, được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$. Nếu lấy hình đối xứng của (G) qua trục Ox, được đồ thị hàm số $y = -f(x)$. Nếu lấy phần $(G^{\rm a})$ của (G) nằm bên trên (above) trục Ox hợp với ảnh của $(G^{\rm b})$ – phần của (G) nằm bên dưới (below) trục Ox – qua phép đối xứng qua trục Ox, được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

44. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy: (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $M(a,b)$, với $a,b \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với trục đối xứng $d: y = ax + b$, với $a,b \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đồ thị của hàm số nào?*

45. *Trong không gian tọa độ Oxyz: (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $M(a,b,c)$, với $a,b,c \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $z = f(x,y)$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với mặt phẳng trục đối xứng $(P): ax+by+cz+d = 0$, với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, của đồ thị hàm số $z = f(x,y)$ là đồ thị của hàm số nào?*

46 (Mở rộng phép tịnh tiến & phép đối xứng cho không gian Euclid $\mathbb{R}^d$). *Trong không gian tọa độ $d \in \mathbb{N}^\star$ (d: dimension) chiều $Ox_1x_2\ldots x_d$: (a) Hình thu được qua phép đối xứng tâm $A(a_1,a_2,\ldots,a_d)$, với $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1,\ldots,d$, của đồ thị hàm số $x_d = f(x_1,x_2,\ldots,x_{d-1})$ là đồ thị của hàm số nào? (b) Hình thu được qua phép đối xứng trục với siêu phẳng $d-1$-chiều trục đối xứng $H: x_n = \sum_{i=1}^{d-1} b_ix_i$, với $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1,\ldots,d$, của đồ thị hàm số $x_n = f(x_1,x_2,\ldots,x_{d-1})$ là đồ thị của hàm số nào?*

3.1 Phép tịnh tiến hệ tọa độ

47 ([Quỳ+22], Ví dụ, p. 26). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình: $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2,-1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

48 ([Quỳ+22], H, p. 26). *(a) Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $(\mathcal{P})$ có phương trình là $y = 2x^2 - 4x$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY.*

49 ([Quỳ+22], 29., p. 27). *Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathcal{P})$ sau. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 3x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 3$. (c) $y = x - 4x^2$. (d) $y = 2x^2 - 5$.*

50 ([Quỳ+22], 30., p. 27). *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác điểm I thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số đã cho biết hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overline{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$. (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathcal{C})$ tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh trên khoảng $(-\infty,1)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của $(\mathcal{C})$ & trên khoảng $(1,+\infty)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

Hint. Trên khoảng $(-\infty,1)$, đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến $y = ax + b$ nếu $f(x) < ax + b$ với mọi $x < 1$.

51 ([Quỳ+22], 31., p. 27). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ & điểm $I(-2,2)$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của $(\mathcal{C})$.*

52 ([Quỳ+22], 32., p. 28). *Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$.*

53 ([Quỳ+22], 33., p. 28). *Cho đường cong $(\mathcal{C})$ có phương trình $y = ax + b + \dfrac{c}{x - x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$ & điểm I có tọa độ (x_0, y_0) thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{C})$.*

54 ([Quỳ+20], VD1, p. 7). *Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 - 1$ & điểm $I(2;-1)$. (a) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. (b) Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).*

55 ([Quỳ+20], **1.**, p. 9). *Xác định đỉnh I của mỗi parabol (P) sau đây. Viết công thức chuyển tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của parabol (P) đối với hệ tọa độ IXY. (a) $y = 2x^2 - 4x + 1$. (b) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$. (c) $y = x - x^2$. (d) $y = x^2 + 3x + 2$.*

56 ([Quỳ+20], **2.**, p. 9). *Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. (a) Xác định điểm I thuộc đồ thị (C) của hàm số, biết rằng hoành độ của điểm I là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$. (b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ & viết phương trình của đường cong (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C). (c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm I đối với hệ tọa độ Oxy. Chứng minh rằng trên khoảng $(-\infty;1)$, đường cong (C) nằm phía dưới tiếp tuyến tại I của (C) & trên khoảng $(1;+\infty)$, đường cong (C) nằm phía trên tiếp tuyến đó.*

57 ([Quỳ+20], **3.**, p. 9). *Xác định tâm đối xứng của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{2}{x-1} + 1$. (b) $y = \frac{3x-1}{x+1}$. (c) $y = (x-2)^3 - 1$. (d) $y = x^3 - 3x + 2$.*

58 ([Quỳ+20], **4.**, p. 10). *Cho đường cong (C) có phương trình $y = ax + b + \frac{c}{x - x_0}$, trong đó $a \neq 0$, $c \neq 0$, & điểm I có tọa độ $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $y_0 = ax_0 + b$. Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến vector $\overrightarrow{OI}$ & phương trình của (C) đối với hệ tọa độ IXY. Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong (C).*

59 ([Quỳ+20], **5.**, p. 10). *(a) Vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |x|$. (b) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm sô $y = |x-3|$. (c) Từ đồ thị (G), suy ra đồ thị của hàm số $y = 2|x|$.*

60 ([Quỳ+20], **6.**, p. 10). *Từ đồ thị (G) của hàm số $y = x^2 - 2x$, suy ra đồ thị hàm số: (a) $y = |x^2 - 2x|$. (b) $y = 2x^2 - 4x$. (c) $y = |x|(x-2)$.*

61 ([Quỳ+20], **7.**, p. 10). *Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, suy ra đồ thị các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin 2x$ bằng các phép biến đổi đồ thị thích hợp.*

4 Đường Tiệm Cận của Đồ Thị Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §3, pp. 21–27]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. 1. 2. 3. 4. 5.

62 ([Quỳ+22], VD1, p. 31). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$.*

63 ([Quỳ+22], VD2, p. 31). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.*

64 ([Quỳ+22], H1, p. 32). *Tiệm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{5-3x^2}{1-x^2}$.*

65 ([Quỳ+22], VD3, p. 33). *Tìm tiệm cận xiêng của đồ thị hàm số $f(x) = x + \dfrac{x}{x^2-1}$.*

66 ([Quỳ+22], H1, p. 33). *Chứng minh đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$.*

67 ([Quỳ+22], VD4, p. 34). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.*

68 ([Quỳ+22], H3, p. 35). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$.*

69 ([Quỳ+22], 34., p. 35). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a) $y = \dfrac{x-2}{3x+2}$. (b) $y = \dfrac{-2x-2}{x+3}$. (c) $y = x + 2 - \dfrac{1}{x-3}$. (d) $y = \dfrac{x^2-3x+4}{2x+1}$. (e) $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. (f) $y = \dfrac{x}{x^3+1}$.*

70 ([Quỳ+22], 35., p. 35). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \dfrac{2x-1}{x^2} + x - 3$. *(b)* $y = \dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$. *(c)* $y = \dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$. *(d)* $y = \dfrac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$.

71 ([Quỳ+22], 36., p. 36). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. *(c)* $y = x + \sqrt{x^2+1}$. *(d)* $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

72 ([Quỳ+22], 37., p. 36). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = x + \sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = \sqrt{x^2-4x+3}$. *(c)* $y = \sqrt{x^2+4}$. *(d)* $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$.

73 ([Quỳ+22], 38., p. 36). *(a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị* $(\mathcal{C})$ *của 3 hàm số* $y = f_1(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$, $y = f_2(x) = \dfrac{x^2+x-4}{x+2}$, $y = f_3(x) = \dfrac{x^2-8x+19}{x-5}$. *(b) Xác định giao điểm* I *của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overrightarrow{OI}$. *(c) Viết phương trình của đường cong* $(\mathcal{C})$ *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra* I *là tâm đối xứng của đường cong* $(\mathcal{C})$.

74 ([Quỳ+20], VD1, p. 12). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{2x+1}{x+2}$.

75 ([Quỳ+20], VD2, p. 12). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

76 ([Quỳ+20], H1, p. 13). *Tìm tiệm cận ngang & tiệm cận đứng của đồ thị hàm số* $y = \frac{1-4x^2}{1-x^2}$.

77 ([Quỳ+20], VD3, p. 14). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $f(x) = x + \frac{x}{x^2+1}$.

78 ([Quỳ+20], H1, p. 14). *Chứng minh rằng đường thẳng* $y = x+1$ *là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $y = \frac{x^2}{x-1}$.

79 ([Quỳ+20], VD4, p. 15). *Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

80 ([Quỳ+20], **8.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \frac{2x-3}{3x-2}$. *(b)* $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$. *(c)* $y = \frac{x+2}{x^2-1}$. *(d)* $y = \frac{x^2-3x+5}{2x+1}$. *(e)* $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$. *(f)* $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

81 ([Quỳ+20], **9.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2-1}$. *(b)* $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$. *(c)* $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

82 ([Quỳ+20], **10.**, p. 15). *Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số: (a)* $y = \sqrt{x^2+x+1}$. *(b)* $y = \frac{x^2+1}{x^2-4}$. *(c)* $y = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

83 ([Quỳ+20], **11.**, p. 16). *(a) Tìm tiệm cận đứng & tiệm cận xiên của đồ thị* (C) *của hàm số* $y = \frac{x^2+x}{x-2}$. *(b) Xác định giao điểm* I *của 2 tiệm cận trên & viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vector* $\overrightarrow{OI}$. *(c) Viết phương trình đường cong* (C) *đối với hệ tọa độ* IXY. *Từ đó suy ra rằng* I *là tâm đối xứng của đường cong* (C).

84 ([Quỳ+20], **12.**, p. 16). *Cho* (C_m) *là đường cong có phương trình* $y = \frac{2x^2+(m+1)x-3}{x+m}$. *(a) Tìm* m *để tiệm cận xiên của* (C_m) *đi qua* $A(1;1)$. *(b) Tìm* m *để giao điểm của 2 tiệm cận nằm trên đường cong* (P): $y = x^2+3$.

85 ([Quỳ+20], **13.**, p. 16). *Cho* (C): $y = \frac{x^2+x}{x-2}$. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm* M *bất kỳ trên* (C) *đến 2 tiệm cận của* (C) *bằng 1 hằng số.*

86 ([Quỳ+20], **14.**, p. 16). *Tìm những điểm trên đường cong* (C) *có phương trình* $y = \frac{x^2+x+1}{x+2}$ *sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.*

5 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của Hàm Số

[Thá+24, Chap. I, §4, pp. 28–44]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

87 ([Quỳ+22], VD1, p. 37). *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị* $(\mathcal{C})$ *của hàm số* $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$.

5.1 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Đa Thức

Dạng toán 2. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *với hàm số* f *cho trước có thể chứa tham số.*

88 ([Quỳ+20], VD1, p. 17). *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

5.1.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 1 $y = ax+b$, $a \neq 0$

89. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc nhất* $y = f(x) = ax+b$, $a \neq 0$.

5.1.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 2 $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

90. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số /tam thức bậc 2 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.*

5.1.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

91. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 3 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.*

92 ([Quỳ+20], VD2, p. 19)**.** *Cho hàm số bậc 3 $y = x^3 - 3x^2 + mx$ với m là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số có điểm cực đại, cực tiểu. Trong trường hợp đó, viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị.*

93 ([Quỳ+20], **15.**, p. 22)**.** *(a) Biết rằng đồ thị của hàm số $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có 2 điểm cực trị là $(1; -7)$, $(2, -8)$. Xác định $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. (b) Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ luôn cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại đúng 2 điểm phân biệt với mọi giá trị m.*

94 ([Quỳ+20], **16.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$ với m là tham số thực. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$.*

95 ([Quỳ+20], **18.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ với m là tham số. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$. (b) Xác định tất cả các giá trị m để hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.*

96 ([Quỳ+20], **19.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số (C). (b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-1; -13)$.*

97 ([Quỳ+20], **20.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ với tham số m. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho khi $m = 0$. (b) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.*

5.1.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$

98. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4 dạng trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.*

99 ([Quỳ+20], VD3, p. 19)**.** *Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C_m) với m là tham số. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$. (b) Tìm m để đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị tạo thành 1 tam giác có diện tích bằng 32.*

100 ([Quỳ+20], **17.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số trên. (b) Dựa vào đồ thị trên, biện luận theo m số nghiệm của phương trình lượng giác $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0; \pi]$.*

101 ([Quỳ+20], **21.**, p. 23)**.** *Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị (C). (b) Trên đồ thị (C) lấy 2 điểm phân biệt là A & B có hoành độ lần lượt là a, b. Tìm điều kiện của a, b để tiếp tuyến tại (C) tại các điểm A & B song song với nhau.*

5.1.5 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số bậc 4 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ [$\star$]

102 ($\star$)**.** *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số bậc 4 $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$.*

5.2 Khảo Sát Sự Biến Thiên & Vẽ Đồ Thị của 1 Số Hàm Phân Thức Hữu Tỷ

5.2.1 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

103. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.*

104 ([Quỳ+20], VD1, p. 24)**.** *Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. (a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số. (b) Gọi M là 1 điểm di động trên (C). Tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) cắt 2 đường tiệm cận tại A & B. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn AB.*

105 ([Quỳ+20], **22.**, p. 29)**.** *Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ac \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ có tâm đối xứng là $I\left(2; \frac{1}{2}\right)$ & đi qua gốc tọa độ. Xác định tung độ của điểm có hoành độ là 1 thuộc đồ thị.*

106 ([Quỳ+20], **23.**, p. 29)**.** *(a) Chứng minh rằng $\forall m \neq 1$ thì đồ thị của hàm số $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ luôn tiếp xúc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất. (b) Tìm m để tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + (m+2)x + 2m + 2}{x+2}$ tiếp xúc với đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 8x$.*

107 ([Quỳ+20], **25.**, pp. 29–30)**.** *Cho hàm số $y = \frac{x}{4(x-3)}$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị của hàm số đã cho. (b) Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại 2 điểm A, B & diện tích ΔOAB là $\frac{3}{8}$.*

108 ([Quỳ+20], **26.**, p. 30)**.** *Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x+3}$ có đồ thị (C). (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Với mỗi điểm M bất kỳ thuộc (C), tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách từ M đến 2 trục tọa độ.*

5.2.2 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & tử thức $\not\vdots$ mẫu thức

109. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ *& tử thức không chia hết cho mẫu thức.*

110 ([Quỳ+20], VD2, p. 27)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ *có đồ thị* (C)*. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Biết rằng* A *&* B *là 2 điểm phân biệt trên đồ thị sao cho tiếp tuyến tại 2 điểm này song song với nhau. Chứng minh rằng* A, B *đối xứng với nhau qua tâm đối xứng của đồ thị* (C)*.*

111 ([Quỳ+20], **27.**, p. 30)**.** *Cho hàm số* $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$*. (a) Khảo sát & vẽ đồ thị hàm số. (b) Tìm tọa độ điểm* M *thuộc đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ* M *đến 2 đường tiệm cận nhỏ nhất.*

5.2.3 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$ & mẫu thức $\not\vdots$ tử thức

112. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax+b}{a'x^2+b'x+c}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, *& mẫu thức không chia hết cho tử thức.*

5.2.4 Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung

113. *Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$, $a \neq 0$, $a' \neq 0$, *& tử thức & mẫu thức không có nhân tử chung.*

114 ([Quỳ+20], **24.**, p. 29)**.** *(a) Cho hàm số* $y = \frac{x^2+px+q}{x^2+1}$ *trong đó* $p \neq 0$, $p^2 + q^2 = 1$*. Tìm tất cả các giá trị* p, q *sao cho khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là* $\sqrt{10}$*. (b) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$ *thì đồ thị của hàm số* $y = \frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}$ *luôn có 2 điểm cực trị & khoảng cách giữa chúng không đổi.*

5.2.5 Miscellaneous

115 ([Quỳ+20], **28.**, p. 30)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(x-1)^3+a+1}{x}$*. (a) Tìm các giá trị của* a *để đồ thị của hàm số có 3 cực trị & chứng minh rằng với các giá trị đó thì các cực trị này sẽ nằm trên 1 parabol cố định. (b) Chứng minh rằng* $\forall a \in \mathbb{R}$*, đồ thị của hàm số* $y = \frac{x+a}{x^2+x+1}$ *luôn có 3 điểm uốn thẳng hàng.*

5.3 1 Số Bài Toán Thường Gặp về Đồ Thị

5.3.1 Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm đặc biệt của đồ thị hàm số

116 ([Quỳ+20], VD1, p. 31)**.** *Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số* $y = x^3 - 3x + 2$*.*

117 ([Quỳ+20], VD2, p. 31)**.** *Chứng minh rằng* $\forall a \in \mathbb{R}$*, đồ thị của hàm số* $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ *luôn có 3 điểm thẳng hàng.*

5.3.2 Họ đường cong phụ thuộc tham số

118 ([Quỳ+20], VD3, p. 32)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$ (C_m)*. (a) Tìm điểm cố định của họ* (C_m) *khi* m *thay đổi. (b) Tìm* m *để* (C_m) *cắt* $y = 0$ *tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.*

119 ([Quỳ+20], VD4, p. 33)**.** *Cho hàm số* $y = (m+1)x^3 - (2m+1)x - m + 1$ (C_m)*. (a) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$*,* (C_m) *luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng. (b) Với giá trị nào của* m *thì* (C_m) *có tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng chứa 3 điểm cố định nói trong câu (a).*

120 ([Quỳ+20], VD5, p. 34)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(3m+1)x-(m^2-m)}{x+m}$ $(m \neq 0)$*. Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng mà đồ thị không thể đi qua khi* m *thay đổi.*

121 ([Quỳ+20], VD6, p. 35)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x + 1 - m^2$ (C_m)*. Tìm* m *để* (C_m) *có 2 điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.*

122 ([Quỳ+20], VD7, p. 35)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$*. Tìm tất cả các giá trị của* m *để hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng* (d)*:* $x - 2y - 5 = 0$*.*

123 ([Quỳ+20], VD8, p. 36)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{2x+1}{x-2}$ *có đồ thị* (C)*. Tìm phương trình đường cong* (C') *đối xứng với* (C) *qua đường thẳng* (d) *có phương trình* $y = 2$*.*

5.3.3 Ứng dụng đồ thị hàm số trong các bài toán biện luận số nghiệm của phương trình

124 ([Quỳ+20], VD9, p. 36)**.** *Biện luận số nghiệm của phương trình sau theo tham số m:* $x^3 - 3x + 2 = m$.

125 ([Quỳ+20], VD10, p. 37)**.** *Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $4|x|^3 - 3|x| = m$.

126 ([Quỳ+20], VD11, p. 37)**.** *Tìm m để phương trình sau có 1 nghiệm duy nhất:* $x^3 - x^2 = mx - 1$.

127 ([Quỳ+20], H3, p. 38)**.** *Tìm tất cả các giá trị m sao cho phương trình* $x^3 - x^2 = (m^2 + m)x - 1$ *có nghiệm duy nhất.*

128 ([Quỳ+20], **29.**, p. 39)**.** *Cho* (C_m) *có phương trình* $y = x^3 + (m-1)x - (m+3)x - 1$. *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị* (C) *của hàm số khi* $m = 1$. *(b) Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$, *hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị. (c) Tìm những cặp điểm nguyên trên* (C) *đối xứng với nhau qua đường thẳng* $y = x$ *& không nằm trên đường thẳng đó.*

129 ([Quỳ+20], **30.**, p. 39)**.** *Cho họ đường cong* (C_m): $y = \frac{-x^2+mx-m^2}{x-m}$. *(a) Khảo sát & vẽ đồ thị* (C) *của hàm số khi* $m = 1$. *(b) Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại & cực tiểu của đồ thị hàm số. (c) Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng 2 đường của của họ* (C_m) *đi qua.*

130 ([Quỳ+20], **31.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1)$ (C_m). *(a) Chứng minh rằng* (C_m) *luôn đi qua 1 điểm cố định khi m thay đổi. (b) Tìm m sao cho* (C_m) *cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.*

131 ([Quỳ+20], **32.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{x^2}{x-1}$ (C). *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị* (C). *(b) Tìm 2 điểm* $A, B \in (C)$ *& đối xứng nhau qua đường thẳng* $y = x - 1$.

132 ([Quỳ+20], **33.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{2x^2+(6-m)x+4}{mx+2}$. *Chứng minh rằng* $\forall m \in \mathbb{R}$, *đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định duy nhất. Xác định tọa độ của điểm đó.*

133 ([Quỳ+20], **34.**, p. 39)**.** *Cho hàm số* $y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$. *(a) Khảo sát sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số đã cho. (b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình* $\frac{(x-1)^2}{|x+2|} = m$.

134 ([Quỳ+20], **35.**, p. 39)**.** *Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:* $4|x|^3 - 3|x| - 1 = mx - m$.

6 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCI, pp. 45–48]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.

[Quỳ+22] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, and Đặng Hùng Thắng. *Giải Tích 12 nâng cao*. Tái bản lần 14. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 231.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 95.