

Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 10 tháng 12 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.

Latest version:

- *Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.tex.

- *Problem & Solution: Derivative – Bài Tập & Lời Giải: Đạo Hàm.*

PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.pdf.

TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.tex.

Mục lục

1 Basic	1
2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm	1
3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm	2
4 Các định lý giá trị trung bình	2
5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2	3
6 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao	3
7 Miscellaneous	3
Tài liệu	3

1 Basic

Resources – Tài nguyên.

1. [Thá+25]. ĐỖ ĐỨC THÁI, PHẠM XUÂN CHUNG, NGUYỄN SƠN HÀ, NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN, PHẠM SỸ NAM, PHẠM MINH PHƯƠNG. *Toán 11 Tập 1. Cánh Diều*.

2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số $\mathbf{x}(t)$ theo thời gian thì vận tốc $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$ biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm t .

1 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức). *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (\text{P})$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa, với $\deg P(x; n, \mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$ & vector chứa các hệ số của đa thức $P(x; n, \mathbf{a})$ là $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2 (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). Tính đạo hàm của hàm số phân thức

$$Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad (\text{Q})$$

tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.

3 (Đạo hàm của căn thức). Tính đạo hàm của hàm số căn thức $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, với $n \in \mathbb{N}^*$, tại $x = x_0$ bằng định nghĩa.

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức $P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$, hàm phân thức $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$, hàm căn thức $R_n(x) := \sqrt[n]{x}$.

4 ([Quỳ+20], 1., p. 49). Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 : (a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$. (b) $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$. (c) $y = ax + b$ tại $x = x_0$. (d) $y = ax^2 + bx + c$ tại $x = x_0$.

5 ([Quỳ+20], 2., p. 49). Cho parabol $y = x^2$ & 2 điểm $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$. (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A . (c) Mở rộng cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ & 2 điểm $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

6 ([Quỳ+20], 3., p. 49). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

7 ([Quỳ+20], 4., p. 49). 1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động $S = \frac{gt^2}{2}$ với $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ & t (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0.001, biết $t = 5$ & $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$. (b) Vận tốc tại thời điểm $t = 5$.

8 ([Quỳ+20], 5., p. 49). Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ trên $(0, \infty)$.

9 ([Quỳ+20], 6., p. 49). Tính đạo hàm của hàm số $y = x|x|$ tại điểm $x_0 = 0$ (nếu có).

10 ([Quỳ+20], 7., p. 49). Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (1)$$

Tính $f'(x)$.

3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

11 ([Quỳ+20], 8., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$. (b) $y = (x - 1)^5(x + 1)^7$. (c) $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$. (d) $y = (x + 1)^3(x + 2)^4(x + 3)^5$.

12 ([Quỳ+20], 9., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. (b) $y = \sin x^2 + x \cos x^2$. (c) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. (d) $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2+x}$.

13 ([Quỳ+20], 10., p. 50). Tính đạo hàm của hàm số: (a) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. (b) $y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$.

14 ([Quỳ+20], 11., p. 50). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = \frac{1}{2}$. (b) $y = \sqrt{x+2}$ biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.

15 ([Quỳ+20], 12., p. 50). Chứng minh hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

16 ([Quỳ+20], 13., p. 50). Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0, -1)$.

17 ([Quỳ+20], 14., p. 50). 1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?

4 Các định lý giá trị trung bình

18 ([Quỳ+20], 15., p. 50). Cho $a, b, c \in \mathbb{R}, 2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0, 1)$.

19 ([Quỳ+20], 16., p. 50). Cho $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$. Dếm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

20 ([Quỳ+20], 17., p. 51). Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ có đạo hàm trên (a, b) . Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$. Chứng minh phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, hơn nữa biểu thức $f'(x)$ phải đổi dấu.

21 ([Quỳ+20], 18., p. 51). Chứng minh $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

22 ([Quỳ+20], 19., p. 51). Cho $0 < a < b$ & f là 1 hàm liên tục trên $[a, b]$, có đạo hàm trên (a, b) . Chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ thỏa $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - f'(c)$.

23 ([Quỳ+20], 20., p. 51). Tính giới hạn: (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$. (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$. (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

24 ([Quỳ+20], 21., p. 51). Tính giới hạn: (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$. (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x}$.

5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

6 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

25 ([Quỳ+20], 22., p. 51). Tính vi phân của hàm số: (a) $y = \sqrt{x^2 + a^2}$. (b) $y = x \sin x$. (c) $y = x^2 + \sin^2 x$. (d) $y = e^x \ln x$.

26 ([Quỳ+20], 23., p. 51). Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a) $\frac{1}{0.9995}$. (b) $\ln 1.001$. (c) $\cos 61^\circ$.

27 ([Quỳ+20], 24., p. 51). Chứng minh nếu f, g là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì fg cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức $(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)$.

28 ([Quỳ+20], 25., p. 51). Tính đạo hàm: (a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, tính $f^{(4)}(x)$. (b) $f(x) = \cos^2 x$, tính $f^{(5)}(x)$. (c) $f(x) = (x+10)^6$, tính $f^{(n)}(x)$.

29 ([Quỳ+20], 26., p. 52). Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, với $t > 0$, t được tính bằng giây s & $v(t)$ tính bằng m/s. Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc $t = 4$. (b) Lúc vận tốc chuyển động bằng 11.

30 ([Quỳ+20], 27., p. 52). Chứng minh $\forall n \geq 1$: (a) Nếu $f(x) = \frac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. (b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

31 ([Quỳ+20], 28., p. 52). Cho $f(x) = \sqrt{x}$. Tính $f^{(n)}(x)$.

7 Miscellaneous

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.

[Thá+25] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 1*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 127.