Problem & Solution: Trigonometry In Triangles
Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 21 tháng 8 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/trigonometry/problem: set $\mathbb{Q}$ of trigonometrys [pdf].[1] [TEX][2].

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

Ký hiệu. ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$.
Tính chất. $\boxed{1}$ $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận & đảo*: ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

Bài toán 1 ([Bìn23], Ví dụ 1, p. 84)**.** *Tính diện tích hình thang $ABCD$ có đường cao bằng* 12 cm*, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.*

Giải. Kẻ $BE \parallel AC$, $E \in CD$. Gọi BH là đường cao của hình thang. $BE \parallel AC$ & $AC \perp BD \Rightarrow BE \perp BD$. Áp dụng định lý Pythagore cho ΔBDH vuông tại H: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm. Áp dụng hệ thức lượng $b^2 = ab'$ vào ΔBDE vuông tại B: $DE = \dfrac{BD^2}{DH} = \dfrac{15^2}{9} = \dfrac{225}{9} = 25$ cm. $AB \parallel CE$ & $AC \parallel BE \Rightarrow ABCE$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CE \Rightarrow AB + CD = CE + CD = DE = 25$ cm $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12 = 150$ cm^2. $\square$

Bài toán 2 ([Bìn23], Ví dụ 2, p. 85)**.** *Hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

Giải. Gọi AH, BK là 2 đường cao của hình thang $ABCD$. Đặt $x \coloneqq AB = AH = BK$. Tứ giác $ABKH$ có $AB \parallel HK$, $AH \parallel BK$ (vì $AH \perp CD$ & $BK \perp CD$) nên $ABKH$ là hình bình hành, mà $\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$ nên $ABKH$ là hình chữ nhật, kết hợp với $AB = AH$, suy ra $ABKH$ là hình vuông, nên $HK = AB = x$ (1). $ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AD = BC$ & $\widehat{C} = \widehat{D}$, suy ra $\Delta AHD = \Delta BKC$ (2 tam giác vuông lần lượt tại H, K, trường hợp cạnh huyền–góc nhọn[3]) $\Rightarrow DH = CK$ (2). Từ (1) & (2), suy ra: $DH = CK = \dfrac{CD - HK}{2} = \dfrac{10 - x}{2} \Rightarrow CH = CK + HK = \dfrac{10 - x}{2} + x = \dfrac{10 + x}{2}$. Áp dụng hệ thức lượng $h^2 = b'c'$ cho ΔACD vuông tại A (đường chéo $AC \perp AD$: giả thiết): $AH^2 = DH \cdot CH \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{10 + x}{2} \cdot \dfrac{10 - x}{2} = \dfrac{100 - x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{100}{5}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm. Vậy đường cao của hình thang $ABCD$ bằng $2\sqrt{5}$ cm. $\square$

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

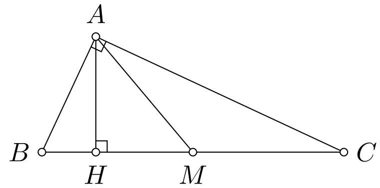
[1] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.

[2] URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.

[3] Hoặc có thể lý luận: $\Delta AHD = \Delta BKC$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông) vì 2 tam giác vuông này có $AD = BC$ (2 cạnh bên của hình thang cân $ABCD$) & $AH = BK$ (cùng bằng chiều cao của hình thang $ABCD$).

Bài toán 3 ([Bìn23], Ví dụ 3, p. 85)**.** *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm*, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm*.*

Giải. Xét ΔABC, $AB < AC$, M là trung điểm BC, $AH \perp BC$, $H \in BC$, như hình:

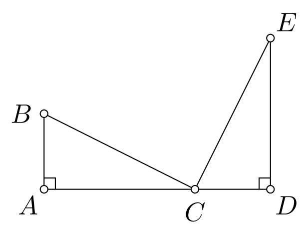


Đặt $x := AM$, $BC = 2AM = 2x$, $AH = AM - 7 = x - 7$. Áp dụng định lý Pythagore & hệ thức lượng $bc = ah$ cho ΔABC vuông tại A: $b^2 + c^2 = a^2 = (2x)^2 = 4x^2$, $bc = ah = 2x(x-7)$. Giải hệ phương trình:[4]

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4x^2, \\ \quad\quad bc = 2x(x-7). \end{cases}$$

Có $a + b + c = 72 \Leftrightarrow b + c = 72 - a = 72 - 2x$. Từ hệ phương trình vừa thu được: $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 4x^2 + 4x(x-7) = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow (72-2x)^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 72^2 - 2 \cdot 72 \cdot 2x + 4x^2 = 8x^2 - 28x \Leftrightarrow 4x^2 + 260x - 72^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 65x - 1296 = 0 \Leftrightarrow (x-16)(x+81) = 0 \Leftrightarrow x = 16 \vee x = -81$ (loại vì $x > 0$) $\Rightarrow x = 16 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = x(x-7) = 16(16-7) = 144$ cm^2. □

Bài toán 4 ([Bìn23], 1., p. 86)**.** *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*



Bài toán 5 ([Bìn23], 2., p. 86)**.** *Cho ΔABC cân có $AB = AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

Bài toán 6 ([Bìn23], 3., p. 86)**.** *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

Bài toán 7 ([Bìn23], 4., p. 86)**.** *Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm*.*

Bài toán 8 ([Bìn23], 5., p. 86)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH.*

Bài toán 9 ([Bìn23], 6., p. 86)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH.*

Bài toán 10 ([Bìn23], 7., p. 86)**.** *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB.*

Bài toán 11 ([Bìn23], 8., p. 86)**.** *Cho ΔABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

Bài toán 12 ([Bìn23], 9., p. 86)**.** *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC.*

Bài toán 13 ([Bìn23], 10., p. 86)**.** *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm^2 *&* 96 cm^2*. Tính độ dài cạnh huyền.*

Bài toán 14 ([Bìn23], 11., p. 86)**.** *Cho ΔABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh $AH = 3DH$.*

Bài toán 15 ([Bìn23], 12., pp. 86–87)**.** *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5 : 4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm*.*

Bài toán 16 ([Bìn23], 13., p. 87)**.** *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1 : 3$*. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

---

[4] Xem cách giải của dạng tổng quát của hệ phương trình này ở bài viết sau của tác giả: *Problem & Solution: System of Equations of 2 Variables – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Phương Trình 2 Biến*: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/miscellaneous/system_of_equations_2_variables/problem/NQBH_system_of_equations_2_variables_problem.pdf.

Bài toán 17 ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho* ΔABC *có độ dài 3 cạnh* AB, BC, CA *là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao* AH, *đường trung tuyến* AM. *Chứng minh* $HM = 2$.

Bài toán 18 ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm, *đáy lớn dài* 50 cm.

Bài toán 19 ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng* $\frac{1}{2}$ *diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

Bài toán 20 ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh* A *của hình vuông* $ABCD$ *cạnh* a, *vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh* BC *ở* M *& cắt đường thẳng* CD *ở* I. *Chứng minh* $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

Bài toán 21 ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông* $ABCD$ *có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của* ΔAEF *đều có* E *thuộc cạnh* CD *&* F *thuộc cạnh* BC.

Bài toán 22 ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a)* $3, 4, 5$. *(b)* $12, 15, 20$.

Bài toán 23 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác* ABC *có 3 đường cao có độ dài lần lượt là* h_a, h_b, h_c. *Tìm điều kiện cần & đủ theo* h_a, h_b, h_c *để* ΔABC *vuông.*

Bài toán 24 ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh* ΔABC *là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác* BD, CE *cắt nhau tại* I *thỏa mãn* $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.

Bài toán 25 ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các* ΔABC *vuông có cạnh huyền* $BC = 2a$. *Gọi* AH *là đường cao của tam giác,* D, E *lần lượt là hình chiếu của* H *trên* AC, AB. *Tìm* GTLN *của: (a)* DE. *(b) Diện tích tứ giác* $ADHE$.

Bài toán 26 ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

Bài toán 27 ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho* ΔABC *có* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. *Chứng minh: (a)* $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. *(b)* $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. *(c)* $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.

Bài toán 28 ([Bìn23], 24., p. 88). ΔABC *vuông tại* A, *đường phân giác* BD. *Tia phân giác của* $\widehat{A}$ *cắt* BD *ở* I. *Biết* $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. *Tính diện tích* ΔABC.

Bài toán 29 ([Bìn23], 25., p. 88). ΔABC *vuông tại* A, *gọi* I *là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết* $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. *Tính* BC. *(b) Biết* $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. *Tính* AB, AC.

Bài toán 30 ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho* ΔABC *vuông tại* A, *gọi* I *là giao điểm của 3 đường phân giác,* M *là trung điểm của* BC. *(a) Biết* $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. *Tính* $\widehat{BIM}$. *(b) Biết* $\widehat{BIM} = 90^\circ$. *3 cạnh của* ΔABC *tỷ lệ với 3 số nào?*

Bài toán 31 ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó:* $17, 13, 35, 41, 22$?

Bài toán 32 ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho* ΔABC *vuông tại* A, $BC = 3\sqrt{5}$ cm. *Hình vuông* $ADEF$ *cạnh* 2 cm *có* $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. *Tính* AB, AC.

Bài toán 33 ([Bìn23], 29., p. 88). ΔABC *cân tại* A, *gọi* I *là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết* $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. *Tính* AB.

Bài toán 34 ([Bìn23], 30., p. 88). ΔABC *cân tại* A, *đường cao* AD, *trực tâm* H. *Tính độ dài* AD, *biết* $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.

Bài toán 35 ([Bìn23], 31., p. 88). ΔABC *có* $BC = 40$ cm, *đường phân giác* AD *dài* 45 cm, *đường cao* AH *dài* 36 cm. *Tính* BD, CD.

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

3 Miscellaneous

Tài liệu

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.