Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates
Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 11 tháng 11 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/problem/NQBH_2D_method_coordinate_problem.tex.
- *Problem & Solution: 2D Method of Cartesian Coordinates – Bài Tập & Lời Giải: Phương Pháp Tọa Độ Cartesian Trong Mặt Phẳng.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/2D_method_coordinate/solution/NQBH_2D_method_coordinate_solution.tex.

Mục lục

1 2D Coordinate Vector – Tọa Độ của Vector Trong Mặt Phẳng

$\boxed{1}$ Tọa độ của 1 điểm: Ký hiệu $M(x_M, y_M)$ với $x_M, y_M \in \mathbb{R}$ lần lượt là hoành độ, tung độ của điểm $M \in \mathbb{R}^2$, cặp số (x_M, y_M) được gọi là *tọa độ* của điểm M trong mặt phẳng tọa độ Oxy. $\boxed{2}$ Tọa độ của 1 vector: $\overrightarrow{OM} = (a, b) \Leftrightarrow M(a, b)$. $\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$ lần lượt là *vector đơn vị* trên trục Ox, Oy. Với mỗi vector $\vec{u}$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vector $\vec{u}$ là tọa độ của điểm $A(x_A, y_A)$ thỏa $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, khi đó x_A, y_A lần lượt là hoành độ, tung độ của vector $\vec{u}$. $\boxed{3}$ $\vec{u} = (a, b) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$. $\boxed{4}$ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_{\vec{a}} = x_{\vec{b}} \wedge y_{\vec{a}} = y_{\vec{b}}$. $\boxed{4}$ $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. $\boxed{5}$ Các điểm đối xứng với điểm $A(x_A, y_A)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy qua gốc O, trục Ox, trục Oy lần lượt là $(-x_A, -y_A), (x_A, -y_A), (-x_A, y_A)$. See Wikipedia/coordinate vector.

1 (Cf. segment vs. vector). *(a) So sánh 2 khái niệm '2 đoạn thẳng bằng nhau' & '2 vectors bằng nhau'. (b) So sánh 2 khái niệm '2 đoạn thẳng song song' & '2 vectors song song'. (c) So sánh 2 khái niệm '2 tia đối nhau' & '2 vectors đối nhau'.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

2 (Mở rộng [Thá+25b], 5., p. 65). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho trước tọa độ của 3 trong 5 điểm gồm 4 đỉnh của hình bình hành $ABCD$ & tâm đối xứng I của nó. (a) Tìm tọa độ các điểm còn lại. (b) Tính chu vi, độ dài 2 đường cao, & diện tích của hình bình hành $ABCD$ theo tọa độ của 3 điểm cho trước đó.*

3 (Mở rộng [Thá+25b], 6., p. 65). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$. Tìm điều kiện cần & đủ để tứ giác $ABCD$ là: (a) hình bình hành. (b) hình thang. (c) hình thang cân. (d) hình thoi. (e) hình chữ nhật. (f) hình vuông. (g) tứ giác nội tiếp. (h) tứ giác ngoại tiếp.*

Hint. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \wedge y_A + y_C = y_B + y_D$.

4 (Mở rộng [Thá+25b], 7., p. 65: Tọa độ 3 đỉnh tam giác). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. (a) Cho biết tọa độ trung điểm 3 cạnh ΔABC. Tìm tọa độ 3 đỉnh A, B, C.*

Hint. Hoặc giải 2 hệ phương trình "khuyết" 3 ẩn (x_A, x_B, x_C) & (y_A, y_B, y_C). Hoặc dùng nhận xét nếu M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB thì $ANMP, BMNP, CMPN$ là 3 hình bình hành.

5 (Tọa độ 4 đỉnh tứ giác). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. (a) Liệu nếu chỉ biết tọa độ 4 trung điểm của 4 cạnh tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (b) Nếu cho thêm tọa độ của trung điểm của 1 trong 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? (c) Nếu cho thêm tọa độ của 2 trung điểm của 2 đường chéo của tứ giác $ABCD$ thì có thể tìm được tọa độ của 4 đỉnh A, B, C, D không? Nếu được thì 6 tọa độ này phải thỏa điều kiện gì để bài toán có nghiệm? (d) Mở rộng bài toán cho đa giác n cạnh $A_1A_2 \ldots A_n$.*

6 (Điều kiện cần & đủ để 2 vectors bằng nhau). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 2 vector $\vec{u}_1(a_1m + b_1n, c_1m + d_1n), \vec{u}_2(a_2m + b_2n, c_2m + d_2n)$. Tìm điều kiện cần & đủ của m, n theo $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ cho trước để: (a) $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. (b) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$. (c) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương. (d) $\vec{u}_1 \uparrow\uparrow \vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương, cùng hướng. (e) $\vec{u}_1 \uparrow\downarrow \vec{u}_2$, i.e., $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương, ngược hướng. (f) $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ với $k \in \mathbb{R}^\star$ cho trước. (g) $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$.*

7 (Mở rộng [Thá+25a], 11., p. 62). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tọa độ 3 điểm không thẳng hàng $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ & $CD = aAB$ với $a > 0$ cho trước.*

2 Vector Calculus in Cartesian Coordinates – Biểu Thức Tọa Độ của Các Phép Toán Vector

$\boxed{1}$ Biểu thức tọa độ của phép $\pm$ vectors, phép nhân vô hướng của vector: Nếu $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ hay viết gộp chung thành $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$, $k\vec{u} = (kx_1, ky_1)$, $\forall k \in \mathbb{R}$; $\vec{u} \parallel \vec{v} \neq \vec{0}$, i.e., $\vec{u} \parallel \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 = kx_2 \wedge y_1 = ky_2$. $\boxed{2}$ *Tọa độ trung điểm* của đoạn thẳng AB với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ là $M(x_M, y_M)$ với $x_M \coloneqq \frac{1}{2}(x_A + x_B), y_M \coloneqq \frac{1}{2}(y_A + y_B)$. $\boxed{3}$ *Tọa độ trọng tâm* của tam giác ΔABC với $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ là $G(x_G, y_G)$ với $x_G \coloneqq \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), y_G \coloneqq \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$. $\boxed{4}$ Biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$. $\vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Nếu $\vec{a} = (x, y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Nếu $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. $\boxed{5}$ Với $\vec{u} = (x_1, y_1), \vec{v} = (x_2, y_2) \neq \vec{0}$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ &

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}},\ (\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \tag{1}$$

8 (Coordinate of linear combination of vectors – Tọa độ của tổ hợp tuyến tính các vectors). *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$ số thực a_i & n vectors $\vec{u}_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tìm tọa độ của vector $\sum_{i=1}^n a_i\vec{u}_i$.*

9 (Điều kiện cần & đủ để hệ điểm thẳng hàng). *(a) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để 3 điểm A, B, C thẳng hàng, không thẳng hàng. (b) Tìm điều kiện cần & đủ theo tọa độ để $n \in \mathbb{N}^\star$ điểm A_i, $i = 1, \ldots, n$ thẳng hàng, không thẳng hàng.*

10. *Cho 2 điểm $A(x_A, y_A), M(x_M, y_M)$. Tìm tọa độ điểm $B(x_B, y_B)$ sao cho M là trung điểm đoạn thẳng AB.*

11. *(a) Cho 3 điểm $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), G(x_G, y_G)$ không thẳng hàng. Tìm tọa độ điểm $C(x_C, y_C)$ để G là trọng tâm ΔABC. (b) M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Tìm biểu thức tọa độ của tính chất hình học $AG = 2GM, BG = 2GN, CG = 2GP$.*

12 (Giải tam giác trên mặt phẳng tọa độ). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. (a) Viết định lý sin & định lý cos phiên bản tọa độ. (b) Giải ΔABC.*

13 (Tổng hợp lực). *(a) Tính lực tổng hợp $\vec{F}$ của 2 lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$, i.e., $\overrightarrow{F} \coloneqq \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ biết số đo $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2})$. (b) Tính lực tổng hợp $\vec{F}$ củan $\in \mathbb{N}^\star$ lực $\overrightarrow{F_i}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$, i.e., $\overrightarrow{F} \coloneqq \sum_{i=1}^n \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_1} + \cdots + \overrightarrow{F_n}$ biết số đo các góc $(\overrightarrow{F_i}, \overrightarrow{F_j})$ với $1 \le i < j \le n$.*

14 (Tọa độ tâm tỷ cự). *(a) Tìm tọa độ của tâm tỷ cự của hệ $n \in \mathbb{N}^\star$ điểm $A_i(x_i, y_i)$ với trọng số $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i.e., $\sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{AA_i} = \vec{0}$. (b) Viết biểu thức vector $n\overrightarrow{MA} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overrightarrow{MA_i}$ phiên bản tọa độ.*

15. *Cho $\Delta ABC, \Delta MNP$ với tọa độ 6 đỉnh. Tìm điều kiện cần & đủ của 6 tọa độ này để $\Delta ABC, \Delta MNP$ có cùng: (a) trọng tâm. (b) trực tâm. (c) tâm đường tròn nội tiếp. (d) tâm đường tròn ngoại tiếp. (e) Mở rộng cho các tâm tỷ cự khác.*

3 2D Line Equation – Phương Trình Đường Thẳng Trong Mặt Phẳng

16 ([Hải+25], VD1, p. 48). *Cho 3 điểm $A(0,2), B(2,2), C(4,-2)$. (a) Viết phương trình 3 cạnh ΔABC. (b) Viết phương trình 3 đường cao của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại trực tâm H. (c) Viết phương trình 3 đường trung tuyến của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại trọng tâm G. (d) Viết phương trình 3 đường trung trực của ΔABC. Từ đó chứng minh chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp E. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. (e) Kiểm tra lại đường thẳng Euler theo tọa độ. Từ đó viết phương trình đường thẳng Euler. (f) Viết phương trình các đường trung bình của ΔABC.*

17 ([Hải+25], VD2, p. 49). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình 2 đường cao $BB_2 : x - y = 0, CC_2 : x = 4$. Tìm tọa độ B, C.*

18 ([Hải+25], VD3, p. 50). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$ & phương trình đường trung tuyến $CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C.*

19 ([Hải+25], VD4, p. 50). *Cho điểm $A(1,1)$, điểm C nằm trên trục hoành & điểm B thuộc đường thẳng $d : y - 3 = 0$. Tìm tọa độ B, C để ΔABC đều.*

20 ([Hải+25], VD5, p. 51). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB = c, AC = b$, $b, c > 0$ không đổi. B, C lần lượt chuyển động trên $(x'Ox), (y'Oy)$. Tìm quỹ tích của điểm A.*

21 ([Hải+25], VD6, p. 52). *Cho $A(a,0), B(0,b)$ với $a, b \in \mathbb{R}^\star$: hằng số. M, N lần lượt thuộc trục hoành, trục tung thỏa mãn $\dfrac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2$, $(AN) \cap (BM) = E$. Tìm quỹ tích của E.*

22 ([Hải+25], VD7, p. 52). *Cho điểm $M(1,2)$. Xét đường thẳng d đi qua M cắt 2 tia Ox, Oy lần lượt tại $A, B \neq O$. Viết phương trình đường thẳng d nếu: (a) $OA = OB$. (b) $OA = 2OB$, $OA = aOB$ với $a \in (0, \infty)$. (c) S_{OAB} nhỏ nhất. (d) $OA + OB$ nhỏ nhất. (e) $\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}\right)$ nhỏ nhất.*

23 ([Hải+25], VD8, p. 53). *Trên mặt phẳng tọa độ cho $A(1,3), B(4,2)$. Viết phương trình đường thẳng d biết: (a) d đi qua A & cách B 3 đơn vị. (b) d đi qua A & cách B 1 khoảng nhỏ nhất. (c) d đi qua A & cách B 1 khoảng lớn nhất. (d) d cách A 1 đơn vị & cách B 2 đơn vị.*

24 ([Hải+25], VD9, p. 54). *Cho đường thẳng d & 2 điểm $M_1, M_2 \notin d$. Tìm thuật toán để xác định điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.*

25 ([Hải+25], VD10, p. 54). *Cho $M_1(1,2), M_2(0,3), d : 3x - 4y + 6 = 0$. Tìm điểm $M \in d$ thỏa: (a) $MM_1 + MM_2$ nhỏ nhất. (b) $|MM_1 - MM_2|$ lớn nhất.*

26 ([Hải+25], VD11, p. 55). *Cho 2 đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Tìm & lập phương trình quỹ tích các điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2.*

27 ([Hải+25], VD12, p. 55). *Cho 2 đường thẳng $d_1 : x + y + 2 = 0, d_2 : 7x - y + 5 = 0$. Tìm quỹ tích của điểm M sao cho M cách đều 2 đường thẳng d_1, d_2.*

28 ([Hải+25], VD13, p. 56). *Cho ΔABC, biết tọa độ 3 đỉnh. Tìm thuật toán xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.*

29 ([Hải+25], VD14, p. 56). *Cho điểm $A(\frac{28}{3}, \frac{22}{3}), B(1,1), C(0,-6)$. Xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp, tâm 3 đường tròn bàng tiếp & tính 4 bán kính tương ứng.*

30 ([Hải+25], 25.1., p. 57). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình đường cao $BB_2 : x - y = 0$, phương trình đường trung tuyến $BB_1 : x = 2$. Tìm tọa độ B, C.*

31 ([Hải+25], 25.2., p. 57). *Cho ΔABC biết $A(0,2)$, phương trình 2 đường trung tuyến $BB_1 : x = 2$, $CC_1 : 4x + 3y - 10 = 0$. Tìm tọa độ B, C.*

32 ([Hải+25], 25.3., p. 57). *Cho đường thẳng $d : x - 2y + 1 = 0$. (a) Viết phương trình đường thẳng $\Delta \parallel d$ & cách d 3 đơn vị. (b) Trong các đường thẳng thu được, đường thẳng nào & gốc tọa độ nằm về 2 phía của d?*

4 Relative Position – Vị Trí Tương Đối & Góc Giữa 2 Đường Thẳng. Khoảng Cách Từ 1 Điểm Đến 1 Đường Thẳng

5 Circle Equation – Phương Trình Đường Tròn

6 3 Conics – 3 Đường Conic

7 Miscellaneous

Tài liệu

[Hải+25] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2025, p. 168.

[Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Bài Tập Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 112.

[Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, Phạm Minh Phương, and Phạm Hoàng Quân. *Toán 10 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 111.