Problem: Probability & Statistics – Bài Tập: Xác Suất & Thống Kê

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 27 tháng 1 năm 2024

Mục lục

1 Some Simple Probabilistic Model – 1 Số Mô Hình Xác Suất Đơn Giản 1

2 Theoretical Probability vs. Practical Probability – Xác Suất Lý Thuyết vs. Xác Suất Thực Nghiệm . . 1

Tài liệu 2

1 Some Simple Probabilistic Model – 1 Số Mô Hình Xác Suất Đơn Giản

$\boxed{1}$ Tung ngẫu nhiên 1 đồng xu để xem kết quả sấp (S) hay ngửa (N). Gieo xúc xắc xem mặt trên có mấy chấm. Lấy ngẫu nhiên các quả bóng cùng hình dáng, kích thước nhưng khác màu trong 1 hộp. Các hoạt động đó gọi là các *mô hình xác suất*. Mỗi lần tung đồng xu, gieo con xúc xắc, lấy quả bóng, ... gọi là 1 thí nghiệm ngẫu nhiên. $\boxed{2}$ Khi thực hiện các thí nghiệm ngẫu nhiên trên 1 mô hình xác suất, có thể liệt kê được tập hợp tất cả các khả năng có thể xảy ra nhưng không thể dự đoán trước được chính xác kết quả của mỗi lần thí nghiệm. *Phân loại khả năng*: Có thể xảy ra 3 khả năng: không thể xảy ra, có thể xảy ra, chắc chắn xảy ra.

1 ([Tuy23], VD3, p. 103)**.** *Gieo 1 con xúc xắc liên tiếp 2 lần & quan sát số chấm xuất hiện ở mặt trên của xúc xắc qua 2 lần gieo. (a) Đếm số kết quả có thể xảy ra. Liệt kê 6 trong các kết quả đó. (b) Liệt kê các kết quả có thể xảy ra để tổng số chấm xuất hiện ở mặt trên của xúc xắc trong 2 lần gieo là* 8*. (c) Phân loại khả năng: (i) Tổng số chấm xuất hiện là* 13*. (ii) Tổng số chấm xuất hiện là số* $x \in \mathbb{N}, 2 \le x \le 12$.

2 ([Tuy23], 6., p. 103)**.** *Trong 1 hộp kín có 3 quả bóng: 1 quả màu đỏ (Đ), 1 quả màu xanh (X), & 1 quả màu vàng (V). Các quả bóng giống nhau về kích thước & khối lượng, chỉ khác nhau về màu sắc. Liệt kê các khả năng có thể xảy ra của mỗi hoạt động: (a) Không nhìn vào hộp, lấy ra cùng 1 lúc 2 quả bóng. (b) Lấy ra 1 quả bóng, xem màu, trả bóng vào hộp rồi lại lấy ra 1 quả bóng nữa từ hộp (chú ý thứ tự của các quả bóng được lấy ra).*

3 ([Tuy23], 7., p. 104)**.** *Trong 1 hộp kín có 5 thẻ tre, mỗi thẻ tre ghi tên 1 bạn: An, Bách, Chung, Duyên, Đạt. Rút ngẫu nhiên 1 thẻ, trúng tên của ai, người đó hát 1 bài rồi tấm thẻ được trả về hộp để tiếp tục rút thẻ tìm người hát tiếp theo (có 5 lần rút thẻ). (a) Liệt kê tập hợp các khả năng có thể xảy ra của mỗi lần rút thẻ. (b) Sự kiện có bạn trong 5 bạn trên không được hát lần nào có xảy ra không? (c) Sự kiện có bạn phải hát nhiều lần có xảy ra không?*

4 ([Tuy23], 8., p. 104)**.** *1 hộp kín có* 30 *viên bi gồm* 10 *bi màu đỏ,* 10 *bi màu xanh, &* 10 *bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên* 1 *viên bi. (a) Viết tập hợp các màu bi có thể bị lấy ra khỏi hộp. (b) Bi màu nào có khả năng được lấy nhiều hơn các bi còn lại? (c) Phân loại trường hợp: Bi lấy ra có màu vàng? Bi lấy ra có màu đen? Bi lấy ra có màu đỏ hoặc xanh hoặc vàng?*

5 ([Tuy23], 9., p. 104)**.** *Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Phân loại sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm. (b) Tích các số chấm trên 2 mặt bằng* 7*. (c) Hiệu các số chấm trên 2 mặt nhỏ hơn* 6.

2 Theoretical Probability vs. Practical Probability – Xác Suất Lý Thuyết vs. Xác Suất Thực Nghiệm

$\boxed{1}$ Làm 1 thí nghiệm n lần liên tiếp. Khi ấy 1 sự kiện ngẫu nhiên nào đó có thể xảy ra, e.g., k lần. Gọi phân số $\frac{k}{n}$ là xác suất thực nghiệm của sự kiện ấy. Muốn tính xác suất của 1 sự kiện nào đó ta chia số lần xuất hiện của sự kiện ấy cho tổng số lần thực hiện thí nghiệm. $\boxed{2}$ Biểu thị khả năng xảy ra của 1 sự kiện bằng 1 phân số có giá trị từ 0 đến 1, có thể viết số đó dưới dạng phân số hay %. Số % càng cao thì sự kiện càng dễ xảy ra. $\boxed{3}$ Xác suất thực nghiệm được sử dụng để dự đoán khả năng xảy ra 1 sự kiện xảy ra trong tương lai là cao hay thấp để chuẩn bị phương án xử lý thích hợp.

*e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com, website: https://nqbh.github.io, Ben Tre City, Vietnam.

6 ([Tuy23], 10., p. 105). *Nhà bếp của công nhân 1 xí nghiệp mua 40 khay trứng gà. Kiểm tra thì thấy 3 khay, mỗi khay có ít nhất 1 quả trứng bị vỡ. (a) Tính xác suất thực nghiệm của sự kiện khay được kiểm tra có ít nhất 1 quả trứng vỡ. (b) Trong 1 tháng nhà bếp này mua* 160 *khay trứng. Dự đoán số trứng vỡ.*

7 ([Tuy23], 11., p. 105). *1 con xúc xắc được gieo 3 lần. Kết quả các lần thứ nhất, thứ 2, thứ 3 được ghi lại lần lượt là $x,y,z \in \mathbb{N}$. Biết $x+y=z$. Tính xác suất thực nghiệm của khả năng ít nhất 1 trong 3 số x,y,z là* 2.

8 ([Tuy23], 12., p. 105). *Khi chơi cá ngựa, thay vì gieo 1 con xúc xắc ta gieo cả 2 con xúc xắc cùng 1 lúc thì điểm thấp nhất là* 2, *cao nhất là* 12. *Các điểm khác là $3,4,5,\ldots,11$. (a) Điểm nào có khả năng xuất hiện nhiều nhất? (b) Tính xác suất thực nghiệm xuất hiện điểm đó.*

9 ([Tuy23], 13., p. 105). *Trong 1 hộp kín có 3 quả bóng: 1 đỏ (Đ), 1 xanh (X), 1 vàng (V). Lấy ngẫu nhiên 1 bóng, xem màu, ghi kết quả rồi trả bóng vào hộp. Lặp lại các thao tác trên nhiều lần, được* 15 *Đ,* 15 *X,* 20 *V. (a) Tính xác suất thực nghiệm của khả năng chọn được bóng của mỗi loại màu. (b) Khả năng chọn được bóng màu nào cao hơn?*

10 (Consecutive coin toss). *Cho $n,k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. Tung 1 đồng xu đồng chất ngẫu nhiên n lần. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (d) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau. (e) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau.*

11 (Simultaneous coin toss). *Cho $n,k \in \mathbb{N}^\star$, $k \le n$. Tung đồng thời n đồng xu đồng chất ngẫu nhiên. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) Toàn bộ đều là mặt sấp (ngửa). (b) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (c) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa). (d) Có đúng k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau. (e) Có ít nhất k lần xuất hiện mặt sấp (ngửa) liên tiếp nhau.*

12 (Consecutive 2 dice rolls – gieo 2 xúc xắc lần lượt). *Gieo lần lượt 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

13 (Simultaneous 2 dice rolls – gieo 2 xúc xắc đồng thời). *Gieo đồng thời 2 con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) 2 mặt có cùng số chấm, khác số chấm. (b) Số chấm 2 mặt có cùng tính chẵn lẻ, khác tính chẵn lẻ. (c) Số chấm 2 mặt đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên mặt còn lại. (e) Tổng số chấm 2 mặt bằng $n \in \mathbb{N}$.*

14 (Consecutive n dice rolls – gieo n xúc xắc lần lượt). *Gieo lần lượt $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

15 (Simultaneous n dice rolls – gieo n xúc xắc đồng thời). *Gieo đồng thời $n \in \mathbb{N}^\star$ con xúc xắc. Tính xác suất lý thuyết của sự kiện: (a) n mặt có cùng số chấm. (b) n mặt có khác số chấm. (c) Số chấm n mặt có cùng tính chẵn lẻ. (d) Số chấm 1 mặt là ước (bội) của số chấm trên các mặt còn lại. (e) Tổng số chấm n mặt bằng $a \in \mathbb{N}$.*

16 (Squares & rectangles with same perimeter – hình vuông & hình chữ nhật cùng chu vi). *Cho $n \in \mathbb{N}^\star$. Viết n thành tổng 2 số: $n=a+b$. Tính xác suất để a,b cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông, xác suất để a,b là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật nếu: (a) $a,b \in \mathbb{N}^\star$. (b) $a,b \in \mathbb{N}$.*

17 (Squares & rectangles with same area – hình vuông & hình chữ nhật cùng diện tích). *Cho $a \in \mathbb{N}^\star, a \ge 2$ có phân tích thừa số nguyên tố $a = \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n}$ với p_i là số nguyên tố, $a_i \in \mathbb{N}^\star$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$. (a) Viết ngẫu nhiên a thành tích của 2 số: $a=bc$. Tính xác suất để b,c là độ dài 2 cạnh của 1 hình chữ nhật, xác suất để b,c cùng là độ dài cạnh của 1 hình vuông nếu: (i) $b,c \in \mathbb{N}$. (ii) $b,c \in \mathbb{Z}$. (b) Lấy ngẫu nhiên 2 số $b,c \in$ Ư(a). Tính xác suất để phân số $\frac{b}{c}$: (i) tối giản. (ii) không tối giản.*

Definition 1 (Prime-counting function). *The* prime-counting function *is the function counting the number of prime numbers less than or equal to some real number x, denoted by $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ is a prime}, \ p \le x\}|$.*

Định nghĩa 1 (Hàm đếm số số nguyên tố). Hàm đếm số số nguyên tố *là hàm đếm số số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $x \in \mathbb{R}$, ký hiệu là $\pi(x) \coloneqq |\{p \in \mathbb{N}^\star | p \text{ là số nguyên tố}, \ p \le x\}|$.*

18 (Prime, composite – số nguyên tố, hợp số). *Cho $m,n,k \in \mathbb{N}^\star$. Đặt $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$ là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. (a) Lấy m số từ A_n. Tính xác suất để m số này cùng chẵn, cùng lẻ, có ít nhất 1 số chẵn, có ít nhất 1 số lẻ, có đúng k số chẵn, có đúng k số lẻ, có ít nhất k số chẵn, có ít nhất k số lẻ. (b) Lấy m số phân biệt từ A_n. Tính xác suất để m số này đều là số nguyên tố, đều là hợp số, có đúng k số nguyên tố, có đúng k hợp số, có ít nhất 1 số nguyên tố, có ít nhất 1 hợp số, có ít nhất k số nguyên tố, có ít nhất k hợp số.*

Tài liệu

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.