# Problem: Trigonometry In Triangles
# Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 14 tháng 10 năm 2024

**Tóm tắt nội dung**

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Trigonometry In Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.
- *Problem & Solution: Trigonometry In Triangles – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.tex.

## Mục lục



## 1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

$\Delta ABC$ vuông tại $A$: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$. $\boxed{1}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền: $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận*: Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông. *Định lý Pythagore đảo*: 1 tam giác là tam giác vuông nếu bình phương 1 cạnh bằng tổng bình phương 2 cạnh còn lại. $\Delta ABC$ vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài đường cao bằng tích độ dài hình chiếu của 2 cạnh góc vuông lên cạnh huyền: $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ Trong tam giác vuông, tích độ dài 2 cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với đường cao tương ứng: $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ Trong tam giác vuông, nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

**1** ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại $H$. Biết $AB = 3\sqrt{5}$* cm, *$HA = 3$* cm*. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$. (c) Tính $AD, CD$.*

**2** ([Tuy23], 1., p. 105)**.** *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$* cm, *$BD = 12$* cm*. Tính chiều cao của hình thang.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

**3** ([Tuy23], 2., p. 105)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường cao* $AH$*, đường phân giác* $AD$*. Biết* $BH = 63$ cm*,* $CH = 112$ cm*, tính* $HD$*.*

**4** ([Tuy23], 3., p. 105)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*. 2 đường trung tuyến* $AD, BE$ *vuông góc với nhau tại* $G$*. Biết* $AB = \sqrt{6}$ cm*. Tính cạnh huyền* $BC$*.*

**5** ([Tuy23], 4., p. 105)**.** *Gọi* $a, b, c$ *là các cạnh của 1 tam giác vuông,* $h$ *là đường cao ứng với cạnh huyền* $a$*. Chứng minh tam giác có các cạnh* $a + h, b + c$*, &* $h$ *cũng là 1 tam giác vuông.*

**6** ([Tuy23], 5., p. 105)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường cao* $AH$*. Gọi* $I, K$ *thứ tự là hình chiếu của* $H$ *trên* $AB, AC$*. Đặt* $c = AB$*,* $b = AC$*. (a) Tính* $AI, AK$ *theo* $b, c$*. (b) Chứng minh* $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$*.*

**7** ([Tuy23], 6., p. 105)**.** *Cho* $\Delta ABC$*,* $AB = 1$*,* $\widehat{A} = 105^\circ$*,* $\widehat{B} = 60^\circ$*. Trên cạnh* $BC$ *lấy điểm* $E$ *sao cho* $BE = 1$*. Vẽ* $ED \parallel AB$*,* $D \in AC$*. Chứng minh:* $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$*.*

**8** ([Tuy23], 7., p. 105)**.** *Cho hình chữ nhật* $ABCD$*,* $AB = 2BC$*. Trên cạnh* $BC$ *lấy điểm* $E$*. Tia* $AE$ *cắt đường thẳng* $CD$ *tại* $F$*. Chứng minh:* $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$*.*

**9** ([Tuy23], 8., p. 105)**.** *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài* $a, b, c$*. Dựng đoạn thẳng* $x$ *sao cho* $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$*.*

**10** ([Tuy23], 9., p. 105)**.** *Cho hình thoi* $ABCD$ *có* $\widehat{A} = 120^\circ$*. 1 đường thẳng* $d$ *không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo* $AC$ *trên đường thẳng* $d$ *không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng* $d$*.*

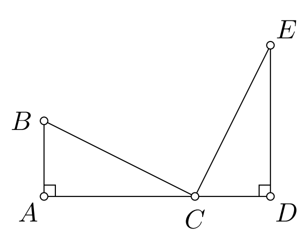
**11** ([Tuy23], 10., p. 106)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*. Từ 1 điểm* $O$ *ở trong tam giác ta vẽ* $OD \perp BC$*,* $OE \perp CA$*,* $OF \perp AB$*. Xác định vị trí của* $O$ *để* $OD^2 + OE^2 + OF^2$ *nhỏ nhất.*

**12** ([Bìn23], VD1, p. 84)**.** *Tính diện tích hình thang* $ABCD$ *có đường cao bằng* 12 cm*, 2 đường chéo* $AC, BD$ *vuông góc với nhau,* $BD = 15$ cm*.*

**13** ([Bìn23], VD2, p. 85)**.** *Hình thang cân* $ABCD$ *có đáy lớn* $CD = 10$ cm*, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

**14** ([Bìn23], VD3, p. 85)**.** *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi* 72 cm*, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng* 7 cm*.*

**15** ([Bìn23], 1., p. 86)**.** *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau* $\Delta ABC = \Delta DCE$*:*




**16** ([Bìn23], 2., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *cân có* $AB = AC = 9$ cm*,* $BC = 12$ cm*, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của* $\Delta ABC$*. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

**17** ([Bìn23], 3., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *có* $\widehat{A} = 120^\circ$*,* $BC = a$*,* $AC = b$*,* $AB = c$*. Chứng minh* $a^2 = b^2 + c^2 + bc$*.*

**18** ([Bìn23], 4., p. 86)**.** *Tính cạnh đáy* $BC$ *của* $\Delta ABC$ *cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng* 15.6 cm *& đường cao ứng với cạnh bên bằng* 12 cm*.*

**19** ([Bìn23], 5., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết* $BD = 7.5$ cm*,* $CD = 10$ cm*. Tính AH, BH, DH.*

**20** ([Bìn23], 6., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường cao AH,* $AB = 20$ cm*,* $CH = 9$ cm*. Tính độ dài AH.*

**21** ([Bìn23], 7., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường cao AH. Tia phân giác của* $\widehat{HAC}$ *cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết* $BC = 25$ cm*,* $DK = 6$ cm*. Tính AB.*

**22** ([Bìn23], 8., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *có* $AB = 6$ cm*,* $AC = 8$ cm*, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

**23** ([Bìn23], 9., p. 86)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *có* $\widehat{B} = 60^\circ$*,* $BC = 8$ cm*,* $AB + AC = 12$ cm*. Tính AB, AC.*

**24** ([Bìn23], 10., p. 86)**.** *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng* 54 cm$^2$ *&* 96 cm$^2$*. Tính độ dài cạnh huyền.*

**25** ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$, đường trung tuyến $BM$. Gọi $D$ là hình chiếu của $C$ trên $BM$, $H$ là hình chiếu của $D$ trên $AC$. Chứng minh $AH = 3DH$.*

**26** ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng $k$. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng $5 : 4$ & cạnh huyền dài 82 cm.*

**27** ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với $1 : 3$. Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

**28** ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho $\Delta ABC$ có độ dài 3 cạnh $AB$, $BC$, $CA$ là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao $AH$, đường trung tuyến $AM$. Chứng minh $HM = 2$.*

**29** ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài 14 cm, đáy lớn dài 50 cm.*

**30** ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

**31** ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh $A$ của hình vuông $ABCD$ cạnh $a$, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh $BC$ ở $M$ & cắt đường thẳng $CD$ ở $I$. Chứng minh $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.*

**32** ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh 1 dm. Tính cạnh của $\Delta AEF$ đều có $E$ thuộc cạnh $CD$ & $F$ thuộc cạnh $BC$.*

**33** ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) $3, 4, 5$. (b) $12, 15, 20$.*

**34** (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác $ABC$ có 3 đường cao có độ dài lần lượt là $h_a, h_b, h_c$. Tìm điều kiện cần & đủ theo $h_a, h_b, h_c$ để $\Delta ABC$ vuông.*

**35** ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh $\Delta ABC$ là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác $BD$, $CE$ cắt nhau tại $I$ thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.*

**36** ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các $\Delta ABC$ vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi $AH$ là đường cao của tam giác, $D$, $E$ lần lượt là hình chiếu của $H$ trên $AC$, $AB$. Tìm GTLN của: (a) $DE$. (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.*

**37** ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

**38** ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho $\Delta ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.*

**39** ([Bìn23], 24., p. 88). *$\Delta ABC$ vuông tại $A$, đường phân giác $BD$. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt $BD$ ở $I$. Biết $BI = 10\sqrt{5}$ cm, $DI = 5\sqrt{5}$ cm. Tính diện tích $\Delta ABC$.*

**40** ([Bìn23], 25., p. 88). *$\Delta ABC$ vuông tại $A$, gọi $I$ là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$ cm, $CI = 6$ cm. Tính $BC$. (b) Biết $BI = \sqrt{5}$ cm, $CI = \sqrt{10}$ cm. Tính $AB$, $AC$.*

**41** ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, gọi $I$ là giao điểm của 3 đường phân giác, $M$ là trung điểm của $BC$. (a) Biết $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính $\widehat{BIM}$. (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của $\Delta ABC$ tỷ lệ với 3 số nào?*

**42** ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: $17, 13, 35, 41, 22$?*

**43** ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, $BC = 3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông $ADEF$ cạnh 2 cm có $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. Tính $AB$, $AC$.*

**44** ([Bìn23], 29., p. 88). *$\Delta ABC$ cân tại $A$, gọi $I$ là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$ cm, $IB = 3$ cm. Tính $AB$.*

**45** ([Bìn23], 30., p. 88). *$\Delta ABC$ cân tại $A$, đường cao $AD$, trực tâm $H$. Tính độ dài $AD$, biết $AH = 14$ cm, $BH = CH = 30$ cm.*

**46** ([Bìn23], 31., p. 88). *$\Delta ABC$ có $BC = 40$ cm, đường phân giác $AD$ dài 45 cm, đường cao $AH$ dài 36 cm. Tính $BD$, $CD$.*

**47** ([Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$ cm. (a) Tính các cạnh của $\Delta ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn $AH, BH, CH$.*

**48** (Mở rộng [Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$ cm. (a) Tính các cạnh của $\Delta ABC$. (b) Tính độ dài các đoạn $AH, BH, CH$.*

**49** ([Bìn+23], VD2, p. 6). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{B} = 60°$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

**50** ([Bìn+23], VD3, p. 7). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, đường cao $CK$, $H$ là trực tâm. Gọi $M$ là 1 điểm trên $CK$ sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. $S, S_1, S_2$ theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.*

**51** ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại $A$ & điểm $M$ nằm giữa $B$ & $C$ Gọi $D, E$ lần lượt là hình chiếu của điểm $M$ lên $AB, AC$. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

**52** ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm $O$ nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.*

**53** ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ $D$ vuông góc với $AC$ tại $E$, cắt cạnh $AB$ tại $F$. Tính độ dài các đoạn thẳng $DE, DF, AE, CE, AF, BF$.*

**54** ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho $\Delta ABC$ có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh $B$ chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

**55** ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

**56** ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi $O$ là giao điểm của $AH$ & $EF$. Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.*

**57** ([Bìn+23], 1.7., p. 8). *Cho $\Delta ABC$, 2 đường cao $BD, CE$ cắt nhau tại $H$. Gọi $M, N$ lần lượt là 2 điểm thuộc $HC, HB$ sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90°$. $\Delta AMN$ là tam giác gì?*

**58** ([Bìn+23], 1.8., p. 8). *Cho hình vuông ABCD, cạnh a. (a) $M$ là 1 điểm trên cạnh $AD$ sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. Tính $AM, BM$ theo $a$. (b) Qua $A$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BM$ tại $F$, đường thẳng này cắt $CD$ tại $N$. Tính độ dài 3 đoạn thẳng $AF, MF, BF$ theo $a$.*

**59** ([Bìn+23], 1.9., p. 8). *Cho hình vuông $ABCD$ & điểm $I$ thay đổi giữa $A, B$. Tia $DI$ cắt $BC$ tại $E$. Đường thẳng kẻ qua $D$ vuông góc với $DE$ cắt $BC$ tại $F$. Chứng minh tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm $I$.*

**60** ([Bìn+23], 1.10., p. 8). *Cho $\Delta ABC$, đường cao $BH$. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\widehat{A} < 90°$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\widehat{A} > 90°$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.*

**61** ([Bìn+23], 1.11., p. 8). *Cho $\Delta ABC$, đường cao $AH$. Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30°$. Tính diện tích $\Delta ABC$.*

**62** ([Bìn+23], 1.12., p. 8). *Cho $\Delta ABC$, các đường cao ứng với các cạnh $a, b, c$ lần lượt là $h_a, h_b, h_c$. Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì $\Delta ABC$ vuông tại $A$.*

**63** ([Bìn+23], 1.13., p. 9). *Cho $\Delta ABC$, 2 đường phân giác $BD, CE$ cắt nhau tại $I$ thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. $\Delta ABC$ là tam giác gì? Vì sao?*

**64** ([Bìn+23], 1.14., p. 9). *Cho $\Delta ABC$, $\widehat{A} = 90°$, $BC = 2a$, đường cao $AH$. Kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng $DE$. (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.*

**65** ([Bìn+23], 1.15., p. 9). *Cho $\Delta ABC$ đều có cạnh bằng 60 cm. Trên đoạn $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của $AD$ cắt $AB$ tại $E$, cắt $AC$ tại $F$. Tính độ dài các cạnh của $\Delta DEF$.*

**66** ([Bìn+23], 1.16., p. 9). *Cho $\Delta ABC$. Đường trung tuyến $AD$, đường cao $BH$, đường phân giác $CE$ đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.*

**67** (Program: Trigonometry in right triangles). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$. (a)* (Tính độ dài cạnh, đường cao, hình chiếu trong tam giác vuông) *Cho trước 2 yếu tố trong $6 + 15 = 21$ yếu tố gồm 6 số $a, b, c, b', c', h$ & $C_6^2 = 15$ tỷ số của chúng:*

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{b'}, \frac{a}{c'}, \frac{a}{h}, \frac{b}{c}, \frac{b}{b'}, \frac{b}{c'}, \frac{b}{h}, \frac{c}{b'}, \frac{c}{c'}, \frac{c}{h}, \frac{b'}{c'}, \frac{b'}{h}, \frac{c'}{h}.$$

*Tìm công thức của 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong $14+91 = 105$ yếu tố gồm 14 số $a, b, c, b', c', h$, $m_a, m_b, m_c$, $d_a, d_b, d_c$, $p, S$, & $C_{14}^2 = 91$ tỷ số của chúng, với $d_a, d_b, d_c$ lần lượt là 3 đường phân giác ứng với $BC, CA, AB$. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để giải bài toán.*

## 2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 74–81]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. HD4. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

**68** ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107)**.** *Cho* $\cot\alpha = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$ *trong đó* $\alpha$ *là góc nhọn,* $a > b > 0$*. Tính* $\cos\alpha$*.*

**69** ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *nhọn,* $BC = a$*,* $CA = b$*,* $AB = c$*. Chứng minh:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$*. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

**70** ([Tuy23], 12., p. 108)**.** *Chứng minh: (a)* $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$*. (b)* $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$*. (c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$*. (d)* $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

**71** ([Tuy23], 13., p. 108)**.** *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$*. (b)* $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$*. (c)* $C = \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$*.*

**72** ([Tuy23], 14., p. 108)**.** *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$*.*

**73** ([Tuy23], 15., p. 108)**.** *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$*. (b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$*.*

**74** ([Tuy23], 16., p. 108)**.** *Cho* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*. Chứng minh:* $\sin\alpha < \tan\alpha$*,* $\cos\alpha < \cot\alpha$*. Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:* $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$*. (b) Xác định* $\alpha$ *thỏa mãn điều kiện:* $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$*.*

**75** ([Tuy23], 17., p. 108)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*. Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$*, tính* $\tan C$*.*

**76** ([Tuy23], 18., p. 108)**.** *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$*,* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*, tính* $\tan\alpha$*.*

**77** ([Tuy23], 19., p. 109)**.** $\Delta ABC$*, đường trung tuyến* $AM$*. Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$*.*

**78** ([Tuy23], 20., p. 109)**.** *Cho* $\Delta ABC$*, trực tâm* $H$ *là trung điểm của đường cao* $AD$*. Chứng minh* $\tan B\tan C = 2$*.*

**79** ([Tuy23], 21., p. 109)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *nhọn, 2 đường cao* $BD, CE$*. Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$*. (b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$*.*

**80** ([Tuy23], 22., p. 109)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *nhọn. Từ 1 điểm* $M$ *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$*,* $ME\perp AC$*,* $MF\perp AB$*. Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$*, trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* $MA, MB, MC$ *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* $MD, ME, MF$*.*

**81** ([Bìn23], VD4, p. 89)**.** *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

**82** ([Bìn23], VD4, p. 90)**.** *Xét* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*,* $AB < AC$*,* $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$*, đường trung tuyến* $AM$*, đường cao* $AH$*,* $MA = MB = MC = a$*. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*. (b)* $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$*. (c)* $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$*.*

**83** ([Bìn23], 32., p. 91)**.** *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* $72^\circ$ *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm*. (b) Dựng góc* $20^\circ$ *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm*, cạnh bên* 6 cm*.*

**84** ([Bìn23], 33., p. 91)**.** $\Delta ABC$ *có đường trung tuyến* $AM$ *bằng cạnh* $AC$*. Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$*.*

**85** ([Bìn23], 34., p. 91)**.** *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$*. Tính* $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$*.*

**86** ([Bìn23], 35., p. 91)**.** *Cho hình vuông* $ABCDN$*.* $M$*,* $N$ *lần lượt là trung điểm của* $BC$*,* $CD$*. Tính* $\cos\widehat{MAN}$*.*

**87** ([Bìn23], 36., p. 91)**.** *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$*, đường cao* $AH$*. Gọi* $D$ *là điểm đối xứng với* $A$ *qua* $B$*. Gọi* $E$ *là điểm thuộc tia đối của tia* $AH$ *sao cho* $HE = 2HA$*. Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$*.*

**88** ([Bìn23], 37., p. 91)**.** *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

**89** ([Bìn23], 38., p. 91)**.** *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

**90** ([Bìn23], 39., p. 91)**.** *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$*,* $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

**91** ([Bìn23], 40., p. 91)**.** *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

**92** ([Bìn+23], VD1, p. 10)**.** *Biết* $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$*. Tính* $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$*.*

**93** ([Bìn+23], VD2, p. 11). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, 2 đường cao $AD, BE$ cắt nhau tại $H$. Biết $HD : HA = 1 : 2$, chứng minh* $\tan B \tan C = 3$.

**94** ([Bìn+23], VD3, p. 12). *Biết* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$. *Tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

**95** ([Bìn+23], 2.1., p. 12). *(a) Biết* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, *tính* $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$. *(b) Biết* $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, *tính* $B = 4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$.

**96** ([Bìn+23], 2.2., p. 13). *(a) Biết* $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, *tính* $A = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. *(b) Biết* $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$, *tính* $B = \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

**97** ([Bìn+23], 2.3., p. 13). *Cho $\Delta ABC$, trung tuyến AM. Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$.

**98** ([Bìn+23], 2.4., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ có $BC \ge AC \ge AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh $CH \ge AD$.*

**99** ([Bìn+23], 2.5., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

**100** ([Bìn+23], 2.6., p. 13). *Cho $\Delta ABC$, 2 đường cao $BD, CE$. Chứng minh: (a)* $S_{ADE} = S_{ABC}\cos^2 A$. *(b)* $S_{BCDE} = S_{ABC}\sin^2 A$.

**101** ([Bìn+23], 2.7., p. 13). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

**102** ([Bìn+23], 2.8., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, đường phân giác AD. Biết $AB = c, AC = b$, tính độ dài đoạn AD theo $b, c$.*

**103** ([Bìn+23], 2.9., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$ & $b+c = 2a$. Chứng minh: (a)* $2\sin A = \sin B + \sin C$. *(b)* $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, *trong đó $h_a, h_b, h_c$ lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với cạnh $a, b, c$.*

**104** ([Bìn+23], 2.10., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ nhọn & 2 đường trung tuyến $BN, CM$ vuông góc với nhau. Chứng minh* $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$.

**105** ([Bìn+23], 2.11., p. 13). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, $AB < AC$, & trung tuyến AM. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh* $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.

**106** ([Bìn+23], 2.12., p. 14). *Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh* $\cos 36^\circ \cos 72^\circ = \dfrac{1}{4}$.

**107** ([Bìn+23], 2.13., p. 14). *Tìm góc nhọn $\alpha$ thỏa* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

**108** ([Bìn+23], 2.14., p. 14). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, trung tuyến AM, đường cao AH, $BC = a$. Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *(b)* $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. *(c)* $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

**109** ([Bìn+23], 2.15., p. 14). *Cho $\Delta ABC$. Chứng minh: (a)* $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. *(b)* $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \Delta ABC$ *đều.*

## 3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 82–87]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

**110** ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác ABCD có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết* $\widehat{AOD} = 70^\circ$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. *Tính diện tích tứ giác ABCD.*

**111** ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

**112** ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành ABCD, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

**113** ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho $\Delta ABC$, $\widehat{A} = 120^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$, $AB = 12.25$* dm. *Giải $\Delta ABC$.*

**114** ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, $\widehat{A} = 75^\circ$, $AB = 30$* mm, *$BC = 35$* mm. *Giải $\Delta ABC$.*

**115** ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho $\Delta ABC$ cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải $\Delta ABC$.*

**116** ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành ABCD có $\widehat{A} = 120^\circ$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác MNPQ. Tính diện tích tứ giác MNPQ.*

**117** ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho $\Delta ABC$, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh* $AC\cos A = BC\cos C$.

**118** ([Bìn23], VD6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

*Chứng minh.* Gọi $\alpha$ là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng $AB, AC$ của $\Delta ABC$ ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90^\circ$ & $\alpha = 180^\circ - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90^\circ$). Vẽ đường cao $BH$, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

**119** (Mở rộng [Bìn23], VD6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với* sin *của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

*Chứng minh.* Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90^\circ$. Vì $\sin 90^\circ = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90^\circ = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90^\circ$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90^\circ$. Vì $\sin x = \sin(180^\circ - x), \forall x \in [0^\circ, 180^\circ]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi $\Delta ABC$. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát*:

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

**120** ([Bìn23], VD7, p. 92). *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của $\Delta ABC$. (b) Tính $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$.*

**121** (Tổng quát [Bìn23], VD7, p. 92). *Nếu $\Delta ABC$ có $\widehat{A}$ tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng* $2, 3, 4$.

**122** ([Bìn23], 41., p. 94). *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh* 40 cm *của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng* $40^\circ, 55^\circ$. *(b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng* $60^\circ, 80^\circ$.

**123** ([Bìn23], 42., p. 94). *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 105^\circ, \widehat{B} = 45^\circ, BC = 4$ cm. Tính $AB$, $AC$.*

**124** ([Bìn23], 43., p. 94). *$\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 60^\circ$, $AB = 28$ cm, $AC = 35$ cm. Tính $BC$.*

**125** ([Bìn23], 44., p. 94). *Cho 1 hình vuông có cạnh* 1 dm. *Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

**126** ([Bìn23], 45., p. 94). *$\Delta ABC$ đều có cạnh* 60 cm. *Trên cạnh $BC$ lấy điểm $D$ sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của $AD$ cắt 2 cạnh $AB$, $AC$ theo thứ tự ở $E$, $F$. Tính độ dài 3 cạnh của $\Delta DEF$.*

**127** ([Bìn23], 46., p. 94). *Cho $\Delta ABC$ có $AB = c$, $CA = b$, đường phân giác $AD$, đường trung tuyến $AM$. Đường thẳng đối xứng với $AM$ qua $AD$ cắt $BC$ ở $N$. Tính $\dfrac{BN}{CN}$.*

**128** ([Bìn23], 47., p. 94). *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

**129** ([Bìn23], 48., p. 94). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau ở $O$ & không vuông góc với nhau. Gọi $H$ & $K$ lần lượt là trực tâm của $\Delta AOB, \Delta COD$. Gọi $G, I$ lần lượt là trọng tâm của $\Delta BOC, \Delta AOD$. (a) Gọi $E$ là trọng tâm của $\Delta AOB$, $F$ là giao điểm của $AH$ & $DK$. Chứng minh $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$. (b) Chứng minh $IG \perp HK$.*

**130** ([Bìn23], 49., p. 94). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, 3 điểm $D, E, F$ lần lượt thuộc 3 cạnh $AB$, $BC$, $CA$. Chứng minh trong 3 $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$, tồn tại 1 tam giác có diện tích $\le \frac{1}{4}$ diện tích $\Delta ABC$. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích $\Delta ABC$?*

**131** ([Bìn+23], VD1, p. 15). *$\Delta ABC$ có $AB = 16, AC = 14, \widehat{B} = 60^\circ$. (a) Tính độ dài cạnh $BC$. (b) Tính diện tích $\Delta ABC$.*

**132** ([Bìn+23], VD2, p. 15). *Cho $\Delta ABC$ nhọn có $\widehat{A} = 75^\circ, AB = 30, BC = 35$. Giải $\Delta ABC$.*

**133** ([Bìn+23], VD3, p. 16). *Không dùng bảng số & máy tính. Chứng minh* $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

**134** ([Bìn+23], 3.1., p. 17). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{BAC} = 30^\circ, AC = 10$. Tính chu vi & diện tích của hình chữ nhật đó.*

**135** ([Bìn+23], 3.2., p. 17). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $B$, $\widehat{A} = \alpha$, $BO$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền $AC$. Từ $B$ kẻ đường thẳng vuông góc với $BO$ cắt $AC$ tại $D$. Đặt $AC = a$. Chứng minh $AD = \dfrac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2\cos 2\alpha}$.*

**136** ([Bìn+23], 3.3., p. 17). *Cho $\Delta ABC$, đường cao $AA'$, trực tâm $H$. Cho biết $\dfrac{AH}{A'H} = k$. Chứng minh* $\tan B \tan C = 1 + k$.

**137** ([Bìn+23], 3.4., p. 17). *Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 45°$, $AB = BD = 18$. (a) Tính độ dài cạnh $AD$. (b) Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.*

**138** ([Bìn+23], 3.5., p. 17). *Cho $\Delta ABC$ có góc $A$ nhọn, 2 đường cao $BH, CK$. Chứng minh nếu $AB > AC$ thì $BH > CK$.*

**139** ([Bìn+23], 3.6., p. 17). *Cho $\Delta ABC$, phân giác $AD$. Biết $AB = c, AC = b, \widehat{A} = 2\alpha$ với $\alpha < 45°$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.*

**140** ([Bìn+23], 3.7., p. 17). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, đường cao $AH$. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $AH = a\sin B\cos B, BH = a\cos^2 B, CH = a\sin^2 B$.*

**141** ([Bìn+23], 3.8., p. 17). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.*

**142** ([Bìn+23], 3.9., p. 17). *Cho $\Delta ABC$ cân tại $A$, đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng $h$, góc ở đáy của tam giác bằng $\alpha$. Chứng minh $S_{ABC} = \dfrac{h^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}$.*

**143** ([Bìn+23], 3.10., p. 18). *Ở độ cao* 920 m, *từ 1 máy bay trực thăng, người ta nhìn 2 điểm $A, B$ của 2 đầu 1 chiếc cầu 2 góc so với phương nằm ngang lần lượt là $\alpha = 37°, \beta = 31°$. Tính chiều dài $AB$ của chiếc cầu.*

**144** ([Bìn+23], 3.11., p. 18). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, 3 đường cao $AH, BI, CK$. Chứng minh: $S_{HIK} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)S_{ABC}$.*

**145** ([Bìn+23], 3.12., p. 18). *Chứng minh $\Delta ABC$ cân tại $C \Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$.*

**146** ([Bìn+23], 3.13., p. 18). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$. 2 đường trung tuyến $AE, BD$ vuông góc với nhau. Biết $AB = 1$. Tính diện tích $\Delta ABC$.*

**147** ([Bìn+23], 3.14., p. 18). *Cho $\Delta ABC$, $AB = 8, AC = 7, \widehat{ABC} = 30°$. Giải $\Delta ABC$.*

**148** ([Bìn+23], 3.15., p. 18). *(a) Không dùng bảng số, máy tính, tính $\tan 15°$. (b) Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105°$ & $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$. Tính $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$.*

## 4 Application of Trigonometrical Functions of Acute Angle – Ứng Dụng Của Tỷ Số Lượng Giác Của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 88–91]: LT1. LT2. 1. 2. 3. 4. 5.

## 5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 92–93]: 1. 2. 3. 4.

**149** ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$. Gọi $M, N$ lần lượt là 2 điểm trên cạnh $AB, AC$ sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Biết độ dài $BN = \sin\alpha$, $CM = \cos\alpha$ với $0° < \alpha < 90°$. Tính cạnh huyền $BC$.*

**150** ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho $\Delta ABC$ nhọn, $BC = a$, $AC = b$, $CA = b$ trong đó $b - c = \frac{a}{k}$, $k > 1$. Gọi $h_a, h_b, h_c$ lần lượt là các đường cao hạ từ $A, B, C$. Chứng minh: (a) $\sin A = k(\sin B - \sin C)$. (b) $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.*

**151** ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải $\Delta ABC$ biết $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$.*

**152** ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\widehat{DC'D'} = 45°$, $\widehat{BC'B'} = 60°$. Tính $\widehat{BC'D}$.*

**153** ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho $\Delta ABC$, $AB = AC = 1$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $0° < \alpha < 45°$. Vẽ các đường cao $AD, BE$. (a) Các tỷ số lượng giác $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$, từ đó suy ra các hệ thức sau: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. (c) Chứng minh: $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$, $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$.*

**154** ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho $\alpha = 22°30'$, tính $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.*

**155** ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho $\Delta ABC$, đường phân giác $AD$. Biết $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{A} = 2\alpha$, $\alpha < 45°$. Chứng minh $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.*

**156** ([Kiê21], VD1, p. 9). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$, *dựng đường cao* $AH$. *Tính độ dài các yếu tố còn lại* $(a, b, c, h, b', c', \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ *của* $\Delta ABC$ *trong mỗi trường hợp: (a)* $AB = a$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. *(b)* $BC = 2a$, $BH = \frac{1}{4}BC$. *(c)* $AB = a$, $CH = \frac{3}{2}a$. *(d)* $AC = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. *(e)* $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, $BC = 5a$.

**157** ([Kiê21], VD2, p. 10). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$, $BC = 2a$, *gọi* $O$ *là trung điểm của* $BC$. *Dựng* $AH \perp BC$. *(a) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$. *Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$. *Gọi* $M$ *là trung điểm của* $AC$. *Tính độ dài* $BM$. *(c) Khi* $\widehat{ACB} = 30°$. *2 đoạn thẳng* $AO, BM$ *cắt nhau ở điểm* $G$. *Tính độ dài* $CG$. *(d) Giả sử điểm* $A$ *thay đổi sao cho* $\widehat{BAC} = 90°$, $BC = 2a$. $\Delta ABC$ *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích* $\Delta AHO$ *lớn nhất? (e) Giả sử* $CG$ *cắt* $AB$ *tại điểm* $N$. *Tứ giác* $AMON$ *là hình gì?* $\Delta ABC$ *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác* $AMON$ *lớn nhất?*

**158** ([Kiê21], VD3 p. 10). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$, *kẻ đường cao* $AH$. *Từ* $H$ *dựng* $HM, HN$ *lần lượt vuông góc với* $AC, AB$. *Chứng minh: (a)* $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$. *(b)* $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$. *(c)* $AM \cdot AN = \frac{AH^3}{BC}$. *(d)* $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BN}{CM}$. *(e)* $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$. *(f)* $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.

**159** ([Kiê21], VD4, p. 12). *Cho* $\Delta ABC$ *nhọn có 3 đường cao* $AD, BE, CF$ *cắt nhau tại* $H$, *gọi* $O$ *là trung điểm của* $BC$, $I$ *là trung điểm của* $AH$, $K$ *là giao điểm của* $EF, OI$ *biết* $BC = 2a$. *Chứng minh: (a)* $\Delta IEO, \Delta IFO$ *là 2 tam giác vuông. (b)* $OI$ *là trung trực của* $EF$. *(c)* $AH^2 = 4IK \cdot IO$. *(d)* $\frac{EF}{BC} = \cos A$. *(e)* $\frac{EF}{BC} \cdot \frac{FD}{CA} \cdot \frac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$. *(f)* $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$. *(g)* $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$. *(h)* $\tan B \tan C = \frac{AD}{DH}$. *(i) Giả sử* $\widehat{ABC} = 60°$, $\widehat{ACB} = 45°$. *Tính* $S_{ABC}$ *theo* $a$. *(j) Gọi* $M$ *là điểm trên* $AH$ *sao cho* $\widehat{BMC} = 90°$. *Chứng minh* $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC} S_{BHC}}$.

**160** ([Kiê21], VD5, p. 14). *Cho* $\Delta ABC$ *có* $BC = a, CA = b, AB = c$. *Chứng minh: (a)* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. *(b) Công thức Heron:* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *với* $p = \frac{a+b+c}{2}$. *(c)* $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. *(d)* $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$. *(e)* $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ *với* $R$ *là bán kính đường tròn ngoại tiếp* $\Delta ABC$.

**161** ([Kiê21], VD6, p. 16). *Cho* $\Delta ABC$ *với 3 đỉnh* $A, B, C$ *& 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là* $a, b, c$. *Gọi* $D$ *là chân đường phân giác trong góc* $A$. *Chứng minh: (a)* $\frac{BD}{AB} = \frac{a}{b+c}$. *(b)* $\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{b+c}$. *(c)* $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$. *(d)* $AD = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

**162** ([Kiê21], VD7, p. 19). *Cho* $\Delta ABC$ *cân,* $\widehat{A} = 20°$, $AB = AC$, $AC = b$, $BC = a$. *Chứng minh* $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

**163** ([Kiê21], VD8, p. 20). *Tính* $\sin 22°30', \cos 22°30', \tan 22°30', \cot 22°30'$.

**164** ([Kiê21], VD9, p. 20). *Cho* $\Delta ABC$. *Chứng minh* $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$.

**165** ([Kiê21], VD10, p. 21). *Chứng minh* $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

**166** ([Kiê21], VD11, p. 22). *Chứng minh* $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**167** ([Kiê21], VD12, p. 22). *Chứng minh* $\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**168** ([Kiê21], VD13, p. 23). *Chứng minh hệ thức: (a)* $\tan^2 36° + \tan^2 72° = 10$. *(b)* $\tan^4 36° + \tan^4 72° = 90$.

**169** ([Kiê21], VD14, p. 23). *Cho* $\Delta ABC$, *có* $\widehat{A} = 60°$ *& đường phân giác* $AD$. *Chứng minh* $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{AD}$.

**170** ([Kiê21], VD15, p. 24). *Chứng minh trong* $\Delta ABC$, $\widehat{A} = 60° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $\widehat{A} = 120° \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$.

**171** ([Kiê21], VD16, p. 24). *Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.*

**172** ([Kiê21], VD17, p. 25). *Cho* $\Delta ABC$. *Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ* $B, C$ *vuông góc với nhau khi & chỉ khi* $b^2 + c^2 = 5a^2$.

**173** ([Kiê21], VD18, p. 25). *Cho* $\Delta ABC$. *Trung tuyến* $AD$, *đường cao* $BH$, *& phân giác* $CE$ *đồng quy. Chứng minh đẳng thức* $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.

**174** ([Kiê21], VD19, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *thỏa* $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. *Chứng minh* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

**175** ([Kiê21], VD20, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *vuông tại* $A$, *đường cao* $AH$. *Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn* $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AH} = 1$. *Xác định 3 cạnh của tam giác.*

**176** ([Kiê21], VD21, p. 26). *Cho* $\Delta ABC$ *thỏa mãn* $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180°$. *Chứng minh* $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.

# Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Kiê21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9*. Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.