

# Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 10 tháng 12 năm 2024

## Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:

URL: [https://nqbh.github.io/elementary\\_STEM](https://nqbh.github.io/elementary_STEM).

Latest version:

- *Problem: Derivative – Bài Tập: Đạo Hàm*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/problem/NQBH\\_derivative\\_problem.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/problem/NQBH\\_derivative\\_problem.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/problem/NQBH_derivative_problem.tex).

- *Problem & Solution: Derivative – Bài Tập & Lời Giải: Đạo Hàm*.

PDF: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/solution/NQBH\\_derivative\\_solution.pdf](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.pdf).

TEX: URL: [https://github.com/NQBH/elementary\\_STEM\\_beyond/blob/main/elementary\\_mathematics/grade\\_11/derivative/solution/NQBH\\_derivative\\_solution.tex](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_11/derivative/solution/NQBH_derivative_solution.tex).

## Mục lục

1 Basic	1
2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm	2
3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm	2
4 Các định lý giá trị trung bình	3
5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2	3
6 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao	3
7 Miscellaneous	3
Tài liệu	4

## 1 Basic

### Resources – Tài nguyên.

1. [Hạo+22]. TRẦN VĂN HẠO, VŨ TUẤN, ĐÀO NGỌC NAM, LÊ VĂN TIẾN, VŨ VIẾT YÊN. *Đại Số & Giải Tích 11*.
2. [Tuấ+22]. VŨ TUẤN, TRẦN VĂN HẠO, ĐÀO NGỌC NAM, LÊ VĂN TIẾN, VŨ VIẾT YÊN. *Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*.
3. [Quỳ+20a]. ĐOÀN QUỲNH, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN XUÂN LIÊM, NGUYỄN KHẮC MINH, ĐẶNG HÙNG THẮNG. *Đại Số & Giải Tích 11 nâng cao*.
4. [Thá+25b]. ĐỖ ĐỨC THÁI, PHẠM XUÂN CHUNG, NGUYỄN SƠN HÀ, NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN, PHẠM SỸ NAM, PHẠM MINH PHƯƠNG. *Toán 11 Tập 1. Cánh Diều*.
5. [Thá+25a]. ĐỖ ĐỨC THÁI, PHẠM XUÂN CHUNG, NGUYỄN SƠN HÀ, NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN, PHẠM SỸ NAM, PHẠM MINH PHƯƠNG. *Bài Tập Toán 11 Tập 1. Cánh Diều*.
6. [Quỳ+20c]. ĐOÀN QUỲNH, TRẦN NAM DŨNG, NGUYỄN VŨ LƯƠNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số & Giải Tích 11*.
7. [Quỳ+20b]. ĐOÀN QUỲNH, TRẦN NAM DŨNG, NGUYỄN VŨ LƯƠNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số & Giải Tích 11*.

\*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Bến Tre City, Việt Nam.

## 2 Định Nghĩa Đạo Hàm. Ý Nghĩa Hình Học Của Đạo Hàm

Nếu quỹ đạo chuyển động của 1 vật hay 1 chất điểm được miêu tả bằng hàm số  $\mathbf{x}(t)$  theo thời gian thì vận tốc  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$  biểu thị độ nhanh chậm của chuyển động tại 1 thời điểm  $t$ .

1 (Derivative of polynomials – Đạo hàm của các đa thức). *Tính đạo hàm của hàm số đa thức*

$$P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad (\text{P})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa, với  $\deg P(x; n, \mathbf{a}) = n \in \mathbb{N}$  & vector chứa các hệ số của đa thức  $P(x; n, \mathbf{a})$  là  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$ .

2 (Derivative of rational function – Đạo hàm của phân thức). *Tính đạo hàm của hàm số phân thức*

$$Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad (\text{Q})$$

tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.

3 (Đạo hàm của căn thức). *Tính đạo hàm của hàm số căn thức  $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ , tại  $x = x_0$  bằng định nghĩa.*

Ta có 3 dạng hàm số sơ cấp thường gặp: hàm đa thức  $P(x; n, \mathbf{a}) := \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , hàm phân thức  $Q(x; m, n, \mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$ , hàm căn thức  $R_n(x) := \sqrt[n]{x}$ .

4 ([Quỳ+20b], 1., p. 49). *Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số tại điểm  $x_0$ : (a)  $y = 2x + 1, x_0 = 2$ . (b)  $y = x^2 + 3x, x_0 = 1$ . (c)  $y = ax + b$  tại  $x = x_0$ . (d)  $y = ax^2 + bx + c$  tại  $x = x_0$ .*

5 ([Quỳ+20b], 2., p. 49). *Cho parabol  $y = x^2$  & 2 điểm  $A(2, 4), B(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$  trên parabol đó. (a) Tính hệ số góc của cát tuyến  $AB$  biết  $\Delta x \in \{1, 0.1, 0.01\}$ . (b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm  $A$ . (c) Mở rộng cho parabol  $y = ax^2 + bx + c$  & 2 điểm  $A(x_0, y_0), B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .*

6 ([Quỳ+20b], 3., p. 49). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3$  biết: (a) Tiếp tuyến có hoành độ bằng 1. (b) Tiếp điểm của tung độ bằng 8. (c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.*

7 ([Quỳ+20b], 4., p. 49). *1 vật rơi tự do có phương trình chuyển động  $S = \frac{gt^2}{2}$  với  $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$  &  $t$  (s). Tính: (a) Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ  $t$  đến  $t + \Delta t$  với độ chính xác 0.001, biết  $t = 5$  &  $\Delta t \in \{0.1, 0.001, 0.001\}$ . (b) Vận tốc tại thời điểm  $t = 5$ .*

8 ([Quỳ+20b], 5., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x}$  trên  $(0, \infty)$ .*

9 ([Quỳ+20b], 6., p. 49). *Tính đạo hàm của hàm số  $y = x|x|$  tại điểm  $x_0 = 0$  (nếu có).*

10 ([Quỳ+20b], 7., p. 49). *Tính  $f'(x)$  với*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{if } x < 1, \\ x^2 + 2 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (1)$$

## 3 Differentiation Rules – Các Quy Tắc Tính Đạo Hàm

11 ([Quỳ+20b], 8., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 7x + 9$ . (b)  $y = (x - 1)^5(x + 1)^7$ . (c)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$ . (d)  $y = (x + 1)^3(x + 2)^4(x + 3)^5$ .*

12 ([Quỳ+20b], 9., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . (b)  $y = \sin x^2 + x \cos x^2$ . (c)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . (d)  $y = (x^3 + x^2 + x + 1)e^{x^2+x}$ .*

13 ([Quỳ+20b], 10., p. 50). *Tính đạo hàm của hàm số: (a)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ . (b)  $y = \frac{\sin x - 1}{\sin x + \cos x}$ .*

14 ([Quỳ+20b], 11., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: (a)  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  biết hoành độ tiếp điểm là  $x_0 = \frac{1}{2}$ . (b)  $y = \sqrt{x+2}$  biết tung độ tiếp điểm là  $y_0 = 2$ .*

15 ([Quỳ+20b], 12., p. 50). *Chứng minh hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$  có đạo hàm bằng 0.*

16 ([Quỳ+20b], 13., p. 50). *Viết phương trình tiếp tuyến của parabol  $y = x^2$  biết tiếp tuyến đó đi qua điểm  $A(0, -1)$ .*

17 ([Quỳ+20b], 14., p. 50). *1 viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu  $v_0 = 196 \text{ m/s}$  (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu m?*

## 4 Các định lý giá trị trung bình

- 18 ([Quỳ+20b], 15., p. 50). Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}, 2a + 3b + 6c = 0$ . Chứng minh phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  có ít nhất 1 nghiệm thuộc  $(0, 1)$ .
- 19 ([Quỳ+20b], 16., p. 50). Cho  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ . Đếm số nghiệm của phương trình  $f'(x) = 0$ .
- 20 ([Quỳ+20b], 17., p. 51). Xét hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  có đạo hàm trên  $(a, b)$ . Giả sử phương trình  $f(x) = 0$  có đúng 2 nghiệm  $x_1, x_2$  với  $x_1 \neq x_2$ . Chứng minh phương trình  $f'(x) = 0$  có nghiệm, hơn nữa biểu thức  $f'(x)$  phải đổi dấu.
- 21 ([Quỳ+20b], 18., p. 51). Chứng minh  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 22 ([Quỳ+20b], 19., p. 51). Cho  $0 < a < b$  &  $f$  là 1 hàm liên tục trên  $[a, b]$ , có đạo hàm trên  $(a, b)$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (a, b)$  thỏa  $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - f'(c)$ .
- 23 ([Quỳ+20b], 20., p. 51). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\sqrt[n]{1+x} - 1}$ . (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ .
- 24 ([Quỳ+20b], 21., p. 51). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot x}$ .

## 5 2nd-Order Derivative – Đạo Hàm Cấp 2

## 6 Vi Phân & Đạo Hàm Cấp Cao

- 25 ([Quỳ+20b], 22., p. 51). Tính vi phân của hàm số: (a)  $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ . (b)  $y = x \sin x$ . (c)  $y = x^2 + \sin^2 x$ . (d)  $y = e^x \ln x$ .
- 26 ([Quỳ+20b], 23., p. 51). Làm tròn đến hàng phần nghìn: (a)  $\frac{1}{0.9995}$ . (b)  $\ln 1.001$ . (c)  $\cos 61^\circ$ .
- 27 ([Quỳ+20b], 24., p. 51). Chứng minh nếu  $f, g$  là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp 2 thì  $fg$  cũng có đạo hàm đến cấp 2 & có công thức  $(f(x)g(x))'' = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + g''(x)$ .
- 28 ([Quỳ+20b], 25., p. 51). Tính đạo hàm: (a)  $f(x) = x^4 - \cos 2x$ , tính  $f^{(4)}(x)$ . (b)  $f(x) = \cos^2 x$ , tính  $f^{(5)}(x)$ . (c)  $f(x) = (x+10)^6$ , tính  $f^{(n)}(x)$ .
- 29 ([Quỳ+20b], 26., p. 52). Vận tốc của 1 chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức  $v(t) = 8t + 3t^2$ , với  $t > 0$ ,  $t$  được tính bằng giây s &  $v(t)$  tính bằng m/s. Tính gia tốc của chất điểm: (a) Lúc  $t = 4$ . (b) Lúc vận tốc chuyển động bằng 11.
- 30 ([Quỳ+20b], 27., p. 52). Chứng minh  $\forall n \geq 1$ : (a) Nếu  $f(x) = \frac{1}{x}$  thì  $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ . (b) Nếu  $f(x) = \cos x$  thì  $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .
- 31 ([Quỳ+20b], 28., p. 52). Cho  $f(x) = \sqrt{x}$ . Tính  $f^{(n)}(x)$ .

## 7 Miscellaneous

- 32 ([Quỳ+20b], 29., p. 52). Tính  $f'(x)$  với

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{if } x < 1, \\ x^2+1 & \text{if } 1 \leq x \leq 2, \\ x^3-x^2-4x+10 & \text{if } x > 2. \end{cases} \quad (2)$$

- 33 ([Quỳ+20b], 30., p. 52). Tính  $f'(x) + f(x) + 2$  nếu  $f(x) = x \sin 2x$ .
- 34 ([Quỳ+20b], 31., p. 52). Chứng minh nếu  $f(x) = 3e^{x^2}$  thì  $f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{3}f(0) - f'(0) = 1$ .
- 35 ([Quỳ+20b], 32., p. 52). Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong  $y = 4x - x^2$  tại các điểm mà đường cong cắt trục hoành.
- 36 ([Quỳ+20b], 33., p. 52). Cho đa thức bậc 4  $P(x)$  thỏa mãn điều kiện  $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh  $P(x) + P'(x) + P''(x) + P^{(3)}(x) + P^{(4)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 37 ([Quỳ+20b], 34., p. 53). Áp dụng định lý Rolle cho hàm số  $f(x) = e^x P(x)$  để chứng minh nếu đa thức  $P(x)$  bậc  $n$  có  $n$  nghiệm thực phân biệt thì đa thức  $P(x) + P'(x)$  cũng có  $n$  nghiệm thực phân biệt.

- 38 ([Quỳ+20b], 35., p. 53). Cho hàm số  $f(x)$  khả vi trên đoạn  $[0, 1]$  và  $f'(0)f'(1) < 0$ . Chứng minh tồn tại  $c \in (0, 1)$  thỏa  $f'(c) = 0$ .
- 39 ([Quỳ+20b], 36., p. 53). Giả sử  $f(x)$  là 1 hàm số lẻ và khả vi trên  $\mathbb{R}$ . Chứng minh  $f'(x)$  là 1 hàm số chẵn.
- 40 ([Quỳ+20b], 37., p. 53). Tính đạo hàm cấp 100 của hàm số  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .
- 41 ([Quỳ+20b], 38., p. 53). Tính giới hạn: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{2x^2} x$ . (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{5}{x} 3x$ .
- 42 ([Quỳ+20b], 39., p. 53). Chứng minh: (a) (Phương trình dao động điều hòa) Nếu  $y = A \sin(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi)$  với  $A, B, \omega, \varphi$  là 4 hằng số thì  $y'' + \omega^2 y = 0$ . (b) Nếu  $y = \sqrt{2x - x^2}$  thì  $y^3 y'' + 1 = 0$ .
- 43 ([Quỳ+20b], 40., p. 53, công thức Newton–Leibnitz). Cho  $f, g$  là 2 hàm số có đạo hàm đến cấp  $n$ , chứng minh công thức:  $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ .
- 44 ([Quỳ+20b], 41., p. 53). Cho hàm số  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Tính  $f^{(100)}(0), f^{(101)}(0)$ .

## Tài liệu

- [Hạo+22] Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, and Vũ Viết Yên. *Đại Số và Giải Tích 11*. Tái bản lần 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 191.
- [Quỳ+20a] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, and Đặng Hùng Thắng. *Đại Số và Giải Tích 11 nâng cao*. Tái bản lần 13. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 241.
- [Quỳ+20b] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Bài Tập Đại Số và Giải Tích 11*. Tái bản lần 9. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 248.
- [Quỳ+20c] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, and Đặng Hùng Thắng. *Tài Liệu Chuyên Toán Đại Số và Giải Tích 11*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 327.
- [Thá+25a] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Bài Tập Toán 11 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 136.
- [Thá+25b] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 11 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2025, p. 127.
- [Tuấ+22] Vũ Tuấn, Trần Văn Hạo, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, and Vũ Viết Yên. *Bài Tập Đại Số và Giải Tích 11*. Tái bản lần 15. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 240.