

Problem: Antiderivative, Integral – Bài Tập: Nguyên Hàm, Tích Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 15 tháng 2 năm 2024

Mục lục

1 Antiderivative – Nguyên Hàm	1
2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyên Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp	2
3 Integral – Tích Phân	2
4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân	3
5 Miscellaneous	3
Tài liệu	3

1 Antiderivative – Nguyên Hàm

[1] $(\int f(x)dx)' = f(x)$. [2] Tính chất của nguyên hàm: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 3–8]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1 ([Quỳ+20], VD1, p. 106). Tính $\int \cos^2 3x dx$.

2 ([Quỳ+20], VD2, p. 106). Tìm hàm số f thỏa $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$, $f(1) = 1$.

3. Tìm hàm số f thỏa $f(a) = b$ &: (a) $f'(x) = c$. (b) $f'(x) = cx + d$. (c) $f'(x) = cx^2 + dx + e$. (d) $f'(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

4. Tìm hàm số f thỏa $f(a) = m$, $f(b) = n$ &: (a) $f''(x) = c$. (b) $f''(x) = cx + d$. (c) $f''(x) = cx^2 + dx + e$. (d) $f''(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

5 ([Quỳ+20], VD3, p. 106). Cho $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$. (a) Viết $f(x)$ dưới dạng $f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$. (b) Tính $\int f(x)dx$.

6 ([Quỳ+20], VD4, p. 108). Tính $\int x^2(1-x)^7 dx$.

7 ([Quỳ+20], VD5, p. 108). Tính: (a) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$. (b) $\int \frac{7 \cos x - 4 \sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

8 ([Quỳ+20], VD6, p. 109). Tính: (a) $\int x e^{-x} dx$. (b) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

9 ([Quỳ+20], VD7, p. 110). Tính $\int \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2} dx$.

10 ([Quỳ+20], VD8, p. 110). Tính $\int \sin x \cos x dx$.

11 ([Quỳ+20], 1., p. 110). Tính $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$.

12 ([Quỳ+20], 2., p. 110). Tính: (a) $\int \sin 2x \cos x dx$. (b) $\int \cot^2 2x dx$.

13 ([Quỳ+20], 3., p. 111). Tìm hàm số $f(x)$ thỏa: (a) $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$, $f(4) = 0$. (b) $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2$, $f(1) = 2$.

14 ([Quỳ+20], 4., p. 111). Tính: (a) $\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$. (b) $\int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx$.

15 ([Quỳ+20], 5., p. 111). Tính $\int x e^{x^2} dx$.

16 ([Quỳ+20], 6., p. 111). Tính: (a) $\int x^3 \ln 2x dx$. (b) $\int x^2 \cos 2x dx$.

17 ([Quỳ+20], 7., p. 111). Tính: (a) $\int \frac{x^3}{(6x^4 + 5)^5} dx$. (b) $\int x^2 e^x dx$.

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

2 Antivative of Some Elementary Functions – Nguyễn Hàm Của 1 Số Hàm Số Sơ Cấp

[1] (a) $\int dx = x + C$. (b) $\int (x+a)^\alpha dx = \frac{(x+a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall a, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$. (c) $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C, \forall a \in \mathbb{R}$. (d) $\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + C, \int \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$. (e) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \forall a \in (0, \infty), a \neq -1$. (f) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$. [2] Công thức đổi biến: $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C, \int f(u)du = F(u(x)) + C$. [5] Công thức nguyên hàm từng phần: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx, \int u dv = uv - \int v du$.

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 9–16]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. HD3. LT4. LT5. HD4. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

3 Integral – Tích Phân

[1] $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = (\int f(x)dx)|_a^b$. [2] (a) Tính chất của tích phân: (a) $\int_a^a f(x)dx = 0$. (b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (c) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$. (d) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. (f) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}$. [3] Công thức đổi biến: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. [4] Công thức tích phân từng phần: $\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du, \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 17–27]: LT1. LT2. LT3. LT4. LT5. LT6. LT7. LT8. LT9. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

18 ([Quỳ+20], VD1, p. 113). Tính: (a) $\int_4^5 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$. (b) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x}$. (c) $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$.

19 ([Quỳ+20], VD2, p. 114). Cho $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh $\int_e^{\tan a} \frac{x dx}{1+x^2} + \int_e^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = -1$.

20 ([Quỳ+20], VD3, p. 114). Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{if } x < -1, \\ 1, & \text{if } -1 \leq x \leq 1, \\ x, & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

21 ([Quỳ+20], VD4, p. 115). Cho hàm số $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t} \sin t dt$ xác định với $x > 0$. Tìm $g'(x)$.

22 ([Quỳ+20], VD5, p. 117). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

23 ([Quỳ+20], VD6, p. 118). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2n+2i-1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

24 ([Quỳ+20], VD7, p. 119). Tính $I = \int_1^2 x e^{x^2} dx$.

25 ([Quỳ+20], VD8, p. 120). Tính: (a) $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}$. (b) $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

26 ([Quỳ+20], VD9, p. 121). Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x \cos x)e^x}{1+\cos 2x} dx$.

27 ([Quỳ+20], VD10, p. 121). Tính $u_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos n x dx$.

28 ([Quỳ+20], VD11, p. 122). Giả sử f là hàm liên tục. Chứng minh $\int_0^a f(x)(a-x)dx = \int_0^a \left(\int_0^x f(t)dt\right) dx$.

29 ([Quỳ+20], 8., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. (b) $I = \int_0^{\ln 2} e^{7x} dx$.

30 ([Quỳ+20], 9., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$. (b) $I = \int_0^3 \frac{x dx}{1+x^2}$.

31 ([Quỳ+20], 10., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$. (b) $I = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

32 ([Quỳ+20], 11., p. 123). Tính: (a) $I = \int_0^1 x^2 e^{4x} dx$. (b) $I = \int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{(x-4)(7-x)}}$.

33 ([Quỳ+20], 12., p. 123). Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{khi } x \leq 0, \\ k(1-x^2), & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Tìm $k \in \mathbb{R}$ để $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$.

34 ([Quỳ+20], 13., p. 123). Cho hàm số $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} dt$. Tìm $g'(x)$.

35 ([Quỳ+20], 14., p. 123). Tìm hàm số f $\mathcal{E} a \in (0, \infty)$ thỏa $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt + 6 = 2\sqrt{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$.

36 ([Quỳ+20], 15., p. 123). Cho hàm $f(x)$ liên tục $\mathcal{E} a \in (0, \infty)$. Giả sử $\forall x \in [0, a]$, có $f(x) > 0$, $f(x)f(a-x) = 1$. Tính $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$ theo a .

37 ([Quỳ+20], 16., p. 123). Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$.

38 ([Quỳ+20], 17., p. 123). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

39 ([Quỳ+20], 18., p. 123). Cho dãy (u_n) xác định bởi công thức $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{i^3 + n^3}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

4 Geometrical Application of Integral – Ứng Dụng Hình Học Của Tích Phân

[Thá+24, Chap. IV, §4, pp. 28–41]: HD1. LT1. HD2. LT2. HD3. LT3. LT4. HD4. LT5. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 42–44]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

Tài liệu

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, and Nguyễn Trọng Tuấn. *Tài Liệu Chuyên Toán Giải Tích 12*. Tái bản lần thứ 4. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 364.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Minh Phương. *Toán 12 Cánh Diều Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 111.