

Problem: Cylinder, Cone, Sphere – Bài Tập: Hình Trụ, Hình Nón, Hình Cầu

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*.

Latest version:

- *Problem: Cylinder, Cone, Sphere – Bài Tập: Hình Trụ, Hình Nón, Hình Cầu.*

URL:

PDF: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/cylinder_cone_sphere/problem/NQBH_cylinder_cone_sphere_problem.pdf.

T_EX: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/cylinder_cone_sphere/problem/NQBH_cylinder_cone_sphere_problem.tex.

- *Problem & Solution: Cylinder, Cone, Sphere – Bài Tập & Lời Giải: Hình Trụ, Hình Nón, Hình Cầu.*

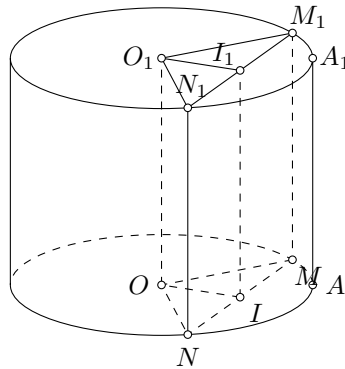
PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/cylinder_cone_sphere/solution/NQBH_cylinder_cone_sphere_solution.pdf.

T_EX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/cylinder_cone_sphere/solution/NQBH_cylinder_cone_sphere_solution.tex.

Mục lục

1	Cylinder – Hình Trụ	1
2	Cone – Hình Nón	3
3	Sphere – Hình Cầu	5
4	Miscellaneous	6
	Tài liệu	7

1 Cylinder – Hình Trụ



[1] Quay hình chữ nhật $ABCD$ 1 vòng quanh cạnh CD cố định (trục quay) được 1 hình trụ với 2 đáy: 2 hình tròn $(C; R), (D; R)$ với $R = AD = BC$, mặt xung quanh, đường sinh AB , chiều cao $AB = h$. [2] Thiết diện: *Mặt cắt song song với đáy*: Thiết diện là 1 hình tròn bằng đáy. *Mặt cắt song song với trục*: Thiết diện là 1 hình chữ nhật. [3] Hình trụ có diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi Rh$, diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, thể tích $V = S_d h = \pi R^2 h$.

[Thá+24, Chap. X, §1, pp. 92–97]: HD1. HD2. LT1. HD3. LT2. HD4. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

1 (Program: Cylinder). Cho 2 trong 6 yếu tố: $R, h, S_{xq}, S_d, S_{tp}, V$, tìm 4 yếu tố còn lại của hình trụ theo 2 yếu tố cho trước. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.

2 ([BBN23], H1, p. 114). Nếu tăng bán kính đáy của hình trụ lên gấp đôi, gấp a lần thì diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình trụ tăng mấy lần?

3 ([BBN23], H2, p. 114). Nếu giảm chiều cao của hình trụ đi 2 lần, a lần thì diện tích xung quanh & thể tích hình trụ giảm đi mấy lần?

4 ([BBN23], H3, p. 114). Có 2 cốc hình trụ, cốc to có chiều cao gấp rưỡi chiều cao cốc nhỏ & đường kính đáy gấp đôi đường kính đáy cốc nhỏ. Phải đong đầy bao nhiêu cốc nước nhỏ để đổ đầy được cốc to?

5 ([BBN23], VD1, p. 115). Cắt hình trụ bằng 1 mặt phẳng chứa trục. Biết thiết diện là 1 hình vuông có diện tích bằng $S = 36 \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.

6 ([BBN23], VD2, p. 115). 1 hình trụ có chu vi đáy $P = 24\pi \text{ cm}$ & diện tích toàn phần là $S = 768\pi \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.

7 ([BBN23], VD3, p. 115). 1 hộp sữa hình trụ có chiều cao hơn đường kính đáy là $a = 3 \text{ cm}$. Biết diện tích vỏ hộp (kể cả nắp) là $S = 292.5\pi \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hộp sữa đó.

8 ([BBN23], VD4, p. 116). 1 hình trụ có bán kính đáy R & chiều cao $2R$. Vẽ 1 đường sinh AB cố định. Lấy điểm M trên đường tròn đáy có chứa A & đặt $\widehat{ABM} = \alpha$. Tìm giá trị của α để độ dài BM lớn nhất. Tính GTLN đó.

Hint. Trong hình trụ, đường sinh vuông góc với đáy nên vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong đáy.

9 ([BBN23], VD5, p. 116). 1 con kiến bò trên mặt ngoài 1 cái cốc hình trụ từ A ở mép dưới để đến M ở mép trên. AB là đường sinh đi qua A . $AB = a = 15 \text{ cm}$, $\widehat{BOM} = \alpha = 105^\circ$, & bán kính đáy hộp là $r = 6 \text{ cm}$. Tính độ dài ngắn nhất mà kiến phải bò.

10 ([BBN23], 8.1., p. 117). 1 hình trụ có chiều cao $h = 5 \text{ cm}$. Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.

11 ([BBN23], 8.2., p. 117). 1 thùng phuy hình trụ có số đo m^2 diện tích xung quanh đúng bằng số đo m^3 thể tích. Tính bán kính đáy của thùng.

12 ([BBN23], 8.3., p. 117). Tỷ số giữa diện tích xung quanh & diện tích toàn phần của 1 hình trụ là $a = \frac{3}{5}$. Biết bán kính đáy $r = 6 \text{ cm}$, tính chiều cao hình trụ.

13 ([BBN23], 8.4., p. 117). 1 hình trụ có thể tích $V = 300 \text{ cm}^3$ & diện tích xung quanh $S = 120 \text{ cm}^2$. Tính diện tích toàn phần hình trụ.

14 ([BBN23], 8.5., p. 117). 1 hình trụ có diện tích xung quanh $s = 24\pi \text{ cm}^2$ & diện tích toàn phần $S = 42\pi \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.

15 ([BBN23], 8.6., p. 117). 1 hình trụ có đường kính đáy bằng $a = \frac{2}{3}$ chiều cao. Cắt hình trụ này bằng 1 mặt phẳng chứa trục ta được 1 hình chữ nhật có diện tích $S = 54 \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

16 ([BBN23], 8.7., p. 117). 1 chai thủy tinh dung tích $V = 0.75 \text{ l}$ có phần dưới là hình trụ. Trong chai có nước đến độ cao $h = 10.3 \text{ cm}$ & được đánh dấu bằng 1 vạch đỏ. Nút kín rồi bắc ngược chai thì mực nước vẫn đúng vạch đỏ. Tính bán kính đáy chai (phần bên trong chai).

17 ([BBN23], 8.8., p. 117). 1 hình trụ có chiều cao $h = 18 \text{ cm}$ & diện tích toàn phần $S = 176\pi \text{ cm}^2$. (a) Chứng minh diện tích xung quanh hình trụ bằng 9 lần diện tích đáy. (b) Tính tỷ số $\frac{S_{xq}}{S_d}$ trong trường hợp tổng quát. Ans: $\frac{2h}{R}$

18 ([BBN23], 8.9., p. 117). 1 lọ hình trụ được “đặc khít” trong 1 hộp giấy hình hộp chữ nhật. Biết thể tích của lọ hình trụ là $V = 270 \text{ cm}^3$, tính thể tích hộp giấy.

19 ([BBN23], 8.10., p. 117). 1 hình lăng trụ đứng có chiều cao $h = 5 \text{ cm}$. Đáy của lăng trụ là 1 tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông dài $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ nội tiếp hình lăng trụ này.

20 ([BBN23], p. 118). 1 chiếc cốc thủy tinh hình trụ đựng đầy sữa. Tìm cách để rót ra đúng 1 nửa cốc sữa.

21 ([BBN23], p. 118). Vì sao phích nước, bể chứa xăng đều là hình trụ?

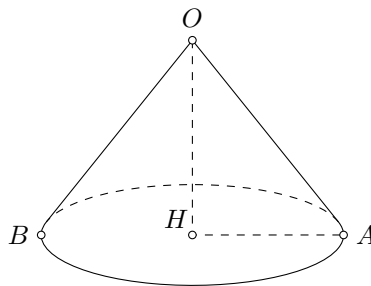
22 ([BBN23], p. 118). Vì sao bể (có nắp) chứa chất lỏng hình trụ có đường kính bằng chiều cao thì tốn ít vật liệu nhất?

23 ([Tuy23], VD29, p. 158). 1 hình trụ có thiết diện qua trục là 1 hình vuông. Biết thể tích hình trụ là $128\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính bán kính đáy. (b) Tính tỷ số giữa diện tích xung quanh & diện tích toàn phần.

24 ([Tuy23], 156., p. 159). 1 thùng hình trụ có diện tích xung quanh bằng $\frac{1}{2}$ diện tích toàn phần. Biết bán kính đáy là 40 cm , tính dung tích của thùng.

- 25 ([Tuy23], 157., p. 159). 1 hình trụ có bán kính đáy là 5 cm, có thể tích là $200\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính diện tích của thiết diện qua trục. (b) Thiết diện $ABB'A'$ song song với trục OO' , AB là dây cung của đường tròn tâm O . Tính khoảng cách từ O đến AB để cho thiết diện đó là 1 hình vuông.
- 26 ([Tuy23], 158., p. 160). Từ 1 tấm tôn hình chữ nhật có kích thước ab , $a > b$, cuộn lại thành mặt xung quanh của 1 hình trụ. Phải cuộn theo chiều nào của tấm tôn để được 1 hình trụ không đáy có thể tích lớn nhất?
- 27 ([Tuy23], 159., p. 160). Muốn sản xuất 1 loại thùng phuy hình trụ chứa xăng dầu có thể tích V cho trước. Tìm mối quan hệ giữa chiều cao h & bán kính R để tốn ít vật liệu nhất.
- 28 ([Tuy23], 160., p. 160). Muốn làm 1 thùng tôn hình trụ không có nắp để đựng nước, chứa được $\approx 8\pi$ l nước. Phải làm chiếc thùng đó có chiều cao & bán kính đáy là bao nhiêu để tốn ít vật liệu nhất?
- 29 ([Bin23], VD46, p. 114). 1 chai nước có phía dưới là hình trụ chứa 1 lượng nước có chiều cao 10 cm. Lật ngược chai lại thì phần chai không chứa nước là 1 hình trụ có chiều cao 8 cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của chai, biết đường kính của đáy chai bằng 10 cm.
- 30 ([Bin23], 341., p. 114). Có 3 vật hình trụ bằng chì, bằng sắt, bằng nhôm cùng có khối lượng bằng 2 kg & cùng có đường kính đáy bằng 10 cm. Tính chiều cao của mỗi vật, biết khối lượng riêng của chì là 11.3 kg/dm^3 , khối lượng riêng của sắt là 7.8 kg/dm^3 , khối lượng riêng của nhôm là 2.7 kg/dm^3 .
- 31 ([Bin23], 342., p. 114). 1 băng giấy dài được cuộn chặt lại 60 vòng làm thành 1 cuộn giấy hình trụ rỗng. Biết đường kính của đường tròn trong cùng bằng 2 cm, đường kính của đường tròn ngoài cùng bằng 6 cm. Tính chiều cao của băng giấy.
- 32 ([Bin23], 343., p. 114). Cần cưa 1 thân cây hình trụ có đường kính đáy bằng d để được 1 khúc gỗ hình chữ nhật có thể tích lớn nhất. Tính các kích thước đáy của khúc gỗ hình hộp chữ nhật.
- 33 ([Bin23], 344., p. 114, Kiến & mật). 1 con kiến ở vị trí A trên mặt ngoài của 1 lọ thủy tinh hình trụ không có nắp, nhìn thấy 1 giọt mật ở thẳng trước mặt tại vị trí B ở mặt trong của lọ. Biết A cách miệng lọ 5 cm, B cách miệng lọ 2 cm, & độ dài của đường tròn miệng lọ bằng 48 cm. Tính độ dài ngắn nhất để chú kiến bò được tới chỗ giọt mật.
- 34 ([Bin23], 345., p. 114). Chứng minh trong các hình trụ có cùng thể tích, hình trụ có đường cao bằng đường kính của đáy là hình có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

2 Cone – Hình Nón



- [1] Quy $\triangle AOB$ vuông tại O 1 vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định được 1 hình nón có đáy: hình tròn $(O; R)$, đỉnh A , mặt xung quanh, đường sinh $AB = l = \sqrt{R^2 + h^2}$, chiều cao $AO = h$. [2] Hình nón có diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi Rl$, diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$, thể tích $V = \frac{1}{3}S_d h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. [3] Hình nón cụt với 2 đáy $(O'; r)$, $(O; R)$ có diện tích xung quanh $S_{xq} = \pi(R + r)l$, diện tích toàn phần $S_{tp} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$, thể tích $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

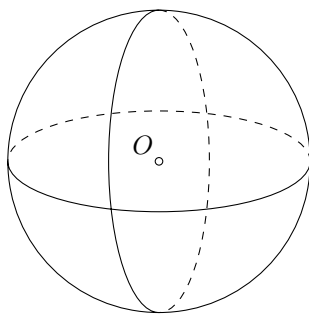
[Thá+24, Chap. X, §2, pp. 98–103]: HD1. HD2. LT1. HD3. LT2. HD4. 1. 2. 3. 4.

- 35 (Program: Cone). Cho 2 trong 7 yếu tố: $R, l, h, S_{xq}, S_d, S_{tp}, V$, tìm 5 yếu tố còn lại của hình nón theo 2 yếu tố cho trước. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.
- 36 (Program: Truncated cone). Cho 3 trong 8 yếu tố: $R, r, l, h, S_{xq}, S_d, S_{tp}, V$, tìm 5 yếu tố còn lại của hình nón cụt theo 2 yếu tố cho trước. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.
- 37 ([BBN23], H1, p. 120). 1 hình trụ & 1 hình nón có chung đáy, chiều cao bằng nhau, tính tỷ số thể tích của chúng.
- 38 ([BBN23], H2, p. 120). Cho $\triangle ABO$ vuông tại O . Biết $OA = a = 3 \text{ cm}$, $OB = b = 2 \text{ cm}$. So sánh thể tích của 2 hình nón tạo thành khi quay tam giác 1 vòng lần lượt quanh cạnh OA & cạnh OB .
- 39 ([BBN23], H3, p. 120). Tính đường sinh của 1 hình nón có bán kính đáy $r = 21 \text{ cm}$ & chiều cao $h = 17 \text{ cm}$.
- 40 ([BBN23], VD1, p. 120). 1 hình nón có bán kính đáy bằng $r = 20 \text{ cm}$ & diện tích xung quanh bằng $S = 580\pi \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón.

- 41 ([BBN23], VD2, p. 120). 1 hình nón có bán kính đáy $r = 5$ cm, đường sinh $l = 12$ cm. Khai triển hình nón này theo 1 đường sinh rồi trải phẳng ra ta được 1 hình quạt tròn. Tính số đo cung của hình quạt tròn.
- 42 ([BBN23], VD3, p. 121). 1 chiếc xô nhỏ đựng nước hình nón cắt làm bằng tôn. 2 bán kính đáy lần lượt là $R = 11, r = 6$, chiều cao của xô $h = 12$. (a) Tính dung tích chiếc xô. (b) Tính diện tích tôn để làm xô (diện tích các mối ghép không đáng kể).
- 43 ([BBN23], VD4, p. 122). Cho 1 hình nón đỉnh A, đường kính đáy $BC = d = 2R = 4$, đường sinh $AB = l = 6$. Khai triển mặt xung quanh của hình nón theo đường sinh AB ta được 1 hình quạt tròn. (a) Tính số đo cung của hình quạt đó. (b) Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến bò trên mặt xung quanh của hình nón từ B đến C.
- 44 ([BBN23], 9.1., p. 122). 1 hình quạt tròn bán kính $R = 20$ & góc ở tâm là $\alpha = 108^\circ$. Cuốn hình quạt này thành mặt xung quanh của 1 hình nón. Tính chiều cao của hình nón này.
- 45 ([BBN23], 9.2., p. 122). 1 hình nón có bán kính đáy $r = 5$, chiều cao $h = \frac{3}{4}$ bán kính đáy. Chứng minh số đo diện tích xung quanh cm^2 bằng số đo thể tích cm^3 .
- 46 ([BBN23], 9.3., p. 122). 1 hình nón có đáy là hình tròn ngoại tiếp hình vuông cạnh $a = 3\sqrt{2}$. Biết chiều cao hình nón $h = 4$, tính diện tích xung quanh & thể tích hình nón.
- 47 ([BBN23], 9.4., p. 122). 1 hình nón có bán kính đáy R. Thiết diện chứa trục hình nón là 1 tam giác đều. (a) Chứng minh diện tích xung quanh của hình nón bằng 2 lần diện tích đáy. (b) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón.
- 48 ([BBN23], 9.5., p. 123). 1 hình nón có thể tích bằng 120 cm^3 . Cắt hình nón này bằng 1 mặt phẳng song song với đáy & đi qua trung điểm đường cao. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của hình nón cắt.
- 49 ([BBN23], 9.6., p. 123). 1 hình nón cắt có 2 bán kính đáy là $r = 14, R = 26$. Biết diện tích xung quanh của nó là $1480\pi \text{ cm}^2$. Tính chiều cao, thể tích hình nón cắt.
- 50 ([BBN23], 9.7., p. 123). 1 hình nón có bán kính đáy là $R = 18$ & đường sinh $l = 40$. 1 mặt phẳng (P) song song với đáy cắt mặt xung quanh của hình nón theo đường tròn (O') chia mặt xung quanh của hình nón thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Tính bán kính đường tròn (O').
- 51 ([BBN23], 9.8., p. 123). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, $AB = c = 3, AC = b = 4$. Quay tam giác vuông này 1 vòng xung quanh cạnh BC cố định. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình tạo thành.
- 52 ([BBN23], 9.9., p. 123). Cho $\triangle ABC$, \hat{B} tù, $BC = a$, đường cao $AH = h$. Quay hình tam giác này 1 vòng quanh cạnh BC cố định. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của hình tạo thành.
- 53 ([BBN23], 9.10., p. 123). Cho hình thang ABCD có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, AB = a = 4, AD = b = 6, \hat{C} = \alpha = 30^\circ$. Quay hình thang vuông này 1 vòng quanh cạnh CD cố định ta được 1 hình (H). Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích (H).
- 54 ([BBN23], p. 123, công thức tính thể tích hình nón). Chứng minh công thức tính thể tích hình nón bằng cách xem nó là giới hạn của thể tích hình chóp n-giác đều nội tiếp trong hình nón khi số cạnh $n \rightarrow \infty$.
- 55 ([Tuy23], VD30, p. 161). Mặt xung quanh của 1 hình nón khai triển thành 1 hình quạt $100^\circ 48'$, bán kính 25 cm. Tính diện tích toàn phần & thể tích hình nón đó.
- 56 ([Tuy23], 161., p. 162). Cho $\triangle ABC$ vuông tại C. Biết $BC = a, AC = b$. Quay tam giác vuông này 1 vòng lần lượt quanh cạnh AC, BC, được 1 hình nón đỉnh A & 1 hình nón đỉnh B. So sánh tỷ số thể tích của 2 hình nón với tỷ số diện tích xung quanh của 2 hình nón ấy.
- 57 ([Tuy23], 162., p. 162). Từ 1 khúc gỗ hình trụ, tiện thành 1 hình nón có thể tích lớn nhất. Biết thể tích phần gỗ bị tiện bỏ đi là $200\pi \text{ cm}^3$. (a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón. (b) Giả sử chiều cao của hình nón là 12 cm. Tính diện tích xung quanh của hình nón.
- 58 ([Tuy23], 163., p. 162). 1 hình nón có đường cao bằng h & có thiết diện qua trục là 1 tam giác đều. (a) Chứng minh diện tích đáy bằng $\frac{1}{2}$ diện tích xung quanh. (b) Cắt hình nón bằng 1 nửa mặt phẳng song song với đáy tạo ra 1 hình nón cắt. Tính chiều cao của hình nón cắt biết diện tích xung quanh của nó bằng diện tích đáy lớn.
- 59 ([Tuy23], 164., p. 163). 1 hình nón cắt có các bán kính đáy là $R = 20 \text{ cm}, r = 12 \text{ cm}$, & đường cao $h = 15 \text{ cm}$. (a) Tính diện tích xung quanh của hình nón cắt. (b) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của hình nón sinh ra hình nón cắt đó.
- 60 ([Tuy23], 165., p. 163). 1 hình nón cắt, bán kính đáy lớn bằng 8 cm, đường cao bằng 12 cm, & đường sinh bằng 13 cm. (a) Tính bán kính đáy nhỏ. (b) Tính diện tích xung quanh & thể tích của hình nón cắt đó.
- 61 ([Bin23], VD47, p. 115). Cho $\triangle OBC$ vuông tại O. Nếu quay tam giác đó quanh cạnh OB cố định thì được 1 hình nón có thể tích 800π , còn nếu quay tam giác đó quanh cạnh OC cố định thì được 1 hình nón có thể tích 1920π . Tính OB, OC.
- 62 ([Bin23], 346., p. 116). An uống rượu ở 1 cốc có dạng hình nón. Chiều cao phần rượu còn lại bằng nửa chiều cao rượu lúc đầu. An đã uống bao nhiêu phần cốc rượu?

- 63 ([Bin23], 347., p. 116). 1 hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O , đường kính AB , $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Qua trung điểm I của SO , kẻ đường thẳng song song với AB , cắt mặt xung quanh của hình nón ở C, D . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón biết $CD = 6$.
- 64 ([Bin23], 348., p. 116). 1 hình nón có chiều cao h . 2 đường sinh vuông góc với nhau chia mặt xung quanh của hình nón thành 2 phần có tỷ số diện tích là $1 : 2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón.
- 65 ([Bin23], 349., p. 116). $\triangle ABC$ có $BC = a$, chiều cao tương ứng bằng h . Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình tạo thành khi quay tam giác 1 vòng quanh cạnh BC .
- 66 ([Bin23], 350., p. 116). Hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, 2 tia phân giác \widehat{C}, \widehat{D} cắt nhau tại trung điểm của AB . Biết $AB = 8$, diện tích hình thang bằng 40. Tính diện tích xung quanh của hình nón cắt do cạnh CD tạo thành khi quay hình thang 1 vòng quanh trục AB .
- 67 ([Bin23], 351., p. 116). Tính số đo của cung AB của 1 hình quạt tâm O bán kính R để khi cuộn hình quạt lại, ta được 1 hình nón có thể tích lớn nhất.

3 Sphere – Hình Cầu



- [1] Quay nửa hình tròn tâm O 1 vòng quanh đường kính AB cố định ta được 1 hình cầu. [2] Thiết diện: Cắt hình cầu (mặt cầu) bán kính R bởi 1 mặt phẳng ta được 1 hình tròn (đường tròn) bán kính r : Bán kính đường tròn lớn $r = R$ nếu mặt phẳng cắt đi qua tâm. Bán kính đường tròn $r < R$ nếu mặt phẳng cắt không đi qua tâm. [3] Hình cầu có diện tích $S = 4\pi R^2 = \pi d^2$, thể tích $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. [4] Hình cầu nội tiếp hình trụ thì bán kính hình cầu bằng bán kính đáy hình trụ, chiều cao hình trụ bằng đường kính hình cầu, $V_c = \frac{2}{3}V_{tr}$. [5] Công thức tính thể tích các vật thể có 2 đáy song song: $V = \frac{h}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$ với h : chiều cao của vật thể, B_1 : diện tích đáy dưới, B_2 : diện tích thiết diện trung bình (thiết diện qua trung điểm của chiều cao), B_3 : diện tích đáy trên.

[Thá+24, Chap. X, §3, pp. 104–108]: HD1. HD2. LT1. HD3. HD4. LT2. HD5. 1. 2. 3. 4.

- 68 (Program: Sphere). Cho 1 trong 4 yếu tố: R, d, S, V , tìm 3 yếu tố còn lại của hình cầu theo yếu tố cho trước. Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để minh họa.
- 69 ([BBN23], H1, p. 125). Khi bán kính 1 mặt cầu tăng gấp 3, a lần thì diện tích mặt cầu & thể tích hình cầu tăng lên mấy lần?
- 70 ([BBN23], H2, p. 125). 1 hình cầu có thể tích $V = 36\pi \text{ cm}^3$. Tính độ dài đường tròn lớn.
- 71 ([BBN23], H3, p. 125). 1 hình cầu có diện tích hình tròn lớn là $S = 144\pi \text{ cm}^2$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình cầu.
- 72 ([BBN23], H4, p. 125). 1 hình cầu có thể tích $V = 40 \text{ cm}^3$ nội tiếp 1 hình trụ. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình trụ.
- 73 ([BBN23], VD1, p. 125). 1 hình cầu nội tiếp 1 hình trụ. Chứng minh: (a) Diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần của hình trụ. (b) Thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ.
- 74 ([BBN23], VD2, p. 126). 1 hình nón có đường sinh bằng $l = 6$ & có bán kính đáy bằng bán kính 1 hình cầu. Biết diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu. Tính: (a) Bán kính hình cầu. (b) Diện tích mặt cầu & thể tích hình cầu.
- 75 ([BBN23], VD3, p. 126). 1 trái bưởi hình cầu có lớp vỏ dày $a = 1 \text{ cm}$. Biết thể tích của lớp vỏ là $V = 909 \text{ cm}^3$. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của các múi bưởi.
- 76 ([BBN23], VD4, p. 127). 1 bình thủy tinh hình trụ đang chứa nước, thả vào quả cầu có đường kính bên trong của đáy là $r = 6 \text{ cm}$ & ngập hoàn toàn trong nước làm mực nước trong bình dâng lên (nhưng chưa tràn ra ngoài). Mực nước trong bình dâng cao thêm nhiều?
- 77 ([BBN23], VD5, p. 127). 1 hình nón có bán kính đáy $R = 6$, chiều cao $h = 8$. 1 hình cầu nội tiếp hình nón đó. Chứng minh hình cầu này có số đo diện tích mặt cầu m^2 bằng số đo thể tích của nó m^3 .

78 ([BBN23], 10.1., p. 128). 1 hình cầu có số đo thể tích cm^3 bằng k lần số đo diện tích cm^2 . Chứng minh bán kính hình cầu là $3k$ cm.

79 ([BBN23], 10.2., p. 128). Vĩ độ của thủ đô Hà Nội là 21° Bắc. Tính độ dài của vĩ tuyến qua Hà Nội, biết bán kính Trái Đất là $R_{\text{earth}} = 6370$ km. Mở rộng cho vĩ độ a° .

80 ([BBN23], 10.3., p. 128). 1 hình nón có nửa góc phẳng ở đỉnh bằng 30° . Chứng minh diện tích toàn phần của nó bằng diện tích mặt cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón.

81 ([BBN23], 10.4., p. 128). 1 hình cầu nội tiếp 1 hình lập phương. Chứng minh tỷ số giữa thể tích hình cầu & thể tích hình lập phương đúng bằng tỷ số giữa diện tích mặt cầu & diện tích toàn phần của hình lập phương.

82 ([BBN23], 10.5., p. 128). Cho hình cầu tâm O , bán kính $R = 20$. Cắt hình cầu bởi 1 mặt phẳng ta được 1 hình tròn tâm K , với AB là 1 đường kính. (a) Biết $OK = a = 12$, tính bán kính của hình tròn tâm K . (b) Tính tỷ số % giữa diện tích của hình tròn tâm K & diện tích mặt cầu.

83 ([BBN23], 10.6., p. 128). Cho hình cầu tâm O , bán kính OA . Cắt hình cầu bởi 1 mặt phẳng vuông góc với OA ta được 1 hình tròn tâm M , có diện tích $s = 81\pi \text{ cm}^2$. Nếu cắt hình cầu này bởi 1 mặt phẳng đi qua tâm O ta được 1 hình tròn có diện tích là $S = 225\pi \text{ cm}^2$. (a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình cầu. (b) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón đỉnh O , đáy là hình tròn tâm M .

84 ([BBN23], 10.7., p. 128). Cho tam giác đều cạnh a , đường cao AH . Quay đường tròn nội tiếp & đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này 1 vòng quanh AH cố định. Tính: (a) Tỷ số diện tích 2 mặt cầu nội tiếp & ngoại tiếp hình nón. (b) Tỷ số thể tích 2 hình cầu.

85 ([BBN23], 10.8., p. 128). Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = d = 12$. Trên đường kính AB lấy điểm M . Vẽ vào trong nửa đường tròn đã cho các nửa đường tròn đường kính AM, BM . Quay toàn bộ hình vẽ 1 vòng quanh đường kính AB cố định ta được 3 hình cầu. Tìm thể tích lớn nhất của phần không gian được giới hạn bởi 3 hình cầu.

86 ([Tuy23], VD31, p. 163). 1 vật nặng hình cầu rơi xuống 1 nền cát phẳng để lại 1 vết lõm hình chỏm có đường kính 72 cm & nơi sâu nhất là 24 cm. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của vật hình cầu đó.

87 ([Tuy23], 166., p. 164). Chứng minh diện tích mặt cầu bằng $\frac{2}{3}$ diện tích toàn phần hình trụ ngoại tiếp nó.

88 ([Tuy23], 167., p. 164). 1 mặt phẳng cắt 1 hình cầu bán kính R theo 1 hình tròn có diện tích bằng $\frac{3}{16}$ diện tích mặt cầu. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng cắt.

89 ([Tuy23], 168., p. 165). 1 vật hình cầu nằm trên mặt sân bằng phẳng. Tại 1 thời điểm có ánh nắng mặt trời, bóng của quả cầu cách tiếp điểm của quả cầu trên mặt sân là 6 m, trong khi đó 1 chiếc cọc đóng vuông góc với mặt sân, cao 1 m có bóng dài 0.75 m. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích khối cầu.

90 ([Tuy23], 169., p. 165). 1 hình nón có đỉnh là tâm 1 hình cầu, có đáy là hình tròn tạo bởi 1 mặt phẳng cắt hình cầu. Biết diện tích đáy hình nón là $441\pi \text{ cm}^2$, thể tích của nó là $2940\pi \text{ cm}^3$. Tính diện tích mặt cầu.

91 ([Tuy23], 170., p. 165). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 2a, \hat{B} = 30^\circ$. Quay tam giác vuông này 1 vòng quanh AB được 1 hình nón đỉnh B . Chứng minh: (a) Diện tích toàn phần của hình nón bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB . (b) Thể tích hình nón bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình cầu đường kính AB .

92 ([Bin23], VD48, p. 117). Có 15 quả bi-a hình cầu đặt nằm trên mặt bàn, sao cho chúng được đồn khít trong 1 khung hình tam giác đều có chu vi bằng 858 mm. Tính bán kính của mỗi quả bi-a.

93 ([Bin23], 352., p. 117). 1 quả bóng hình cầu bán kính 13 cm nổi trên mặt hồ, đỉnh của quả bóng cao hơn mặt hồ 18 cm. Tính độ dài của đường tròn được tạo thành bởi quả bóng & mặt hồ.

94 ([Bin23], 353., p. 117). 1 quả bóng hình cầu đặt trên mặt đất có bóng là 1 hình elip với độ dài lớn nhất của bóng là 1 m. Biết 1 cột cao 1 m lúc đó có bóng dài 2 m, tính bán kính quả bóng.

95 ([Bin23], 354., pp. 117–118). 1 hình cầu nội tiếp 1 hình trụ, i.e., hình cầu được đặt khít vào trong hình trụ. Tính: (a) Tỷ số giữa diện tích mặt cầu & diện tích toàn phần hình trụ. (b) Tỷ số giữa thể tích hình cầu & thể tích hình trụ.

96 ([Bin23], 354., p. 117). Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. (a) Chứng minh tồn tại 1 hình cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình hộp chữ nhật. (b) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích của hình cầu đó biết 3 kích thước của hình hộp chữ nhật là: (i) 6, 8, 26. (ii) $a, b, c > 0$.

4 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCX, pp. 109–110]: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

97 ([Tuy23], VD32, p. 165). Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ 2 tia tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đã cho. Trên tia Ax lấy điểm C sao cho $AC = x \leq R$. Từ C vẽ 1 tiếp tuyến thứ 2 với nửa đường tròn, tiếp xúc với nửa đường tròn tại M , cắt By tại D . (a) Tính BD theo R, x . (b) Tính diện tích nhỏ nhất của tứ giác $ABDC$. (c) Quy hình vẽ 1 vòng quanh trục AB . Tính x để tổng thể tích 2 hình nón đỉnh O có đáy lần lượt là 2 hình tròn có bán kính AC, BD đúng bằng thể tích của hình cầu đường kính AB .

98 ([Tuy23], 171., p. 167). 1 bồn chứa xăng dầu có phần dưới là 1 hình trụ mà chiều cao bằng đường kính đáy & phần trên là 1 bán cầu có đường kính bằng đường kính hình trụ. Biết diện tích toàn phần của bồn chứa là 445 cm^2 , tính thể tích của nó.

99 ([Tuy23], 172., p. 167). Cho hình cầu $(O; R)$ đường kính AB . M là trung điểm OB . Mặt phẳng qua M & vuông góc với AB cắt hình cầu theo 1 hình tròn (M) . (a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, & thể tích hình nón đỉnh A đáy là thiết diện hình tròn (M) . (b) 1 hình cầu nội tiếp hình nón này. Tính tỷ số diện tích mặt cầu này với diện tích hình tròn lớn của hình cầu $(O; R)$.

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 2*. Tái bản lần 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 167.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 2*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 290.
- [Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.