Problem & Solution: 1st-Order Function
Bài Tập & Lời Giải: Hàm Số Bậc Nhất $y = ax + b$, $a \ne 0$

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 4 tháng 12 năm 2023

Mục lục

1 Mở Đầu Về Phương Trình. Phương Trình Bậc Nhất 1 Ẩn. Phương Trình Thu Gọn Được Về Dạng $ax + b = 0$

$\boxed{1}$ *Phương trình ẩn x* có dạng $A(x) = B(x)$, trong đó $A(x), B(x)$ là 2 biểu thức của cùng 1 biến x, trong đó D_A, D_B lần lượt là TXĐ của 2 biểu thức A, B. Giá trị $x = x_0 \in D_A \cap D_B \subset \mathbb{R}$ làm cho 2 vế của phương trình nhận cùng 1 giá trị gọi là 1 *nghiệm* (*root*) của phương trình. 1 phương trình có thể có 0 (i.e., vô nghiệm) $1, 2, 3, \ldots$ nghiệm hoặc vô số nghiệm. Tập hợp tất cả các nghiệm của 1 phương trình gọi là *tập nghiệm* của phương trình đó, ký hiệu là S, i.e., với phương trình $f(x) = 0$, $S_f \coloneqq \{x \in D_f \subset \mathbb{R} | f(x) = 0\}$.
$\boxed{2}$ *2 phương trình tương đương* là 2 phương trình có cùng 1 tập nghiệm: $(f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0) \Leftrightarrow S_f = S_g$ với $S_f \coloneqq \{x \in D_f \subset \mathbb{R} | f(x) = 0\}, S_g \coloneqq \{x \in D_g \subset \mathbb{R} | g(x) = 0\}$ lần lượt là 2 tập nghiệm của 2 phương trình $f(x) = 0, g(x) = 0$, trong đó D_f, D_g lần lượt là TXĐ của 2 hàm f, g. *Tính chất bắc cầu của quan hệ tương đương của các phương trình*: 2 phương trình cùng tương đương với 1 phương trình thứ 3 thì tương đương với nhau, i.e., $[(f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0) \wedge (g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0)] \Rightarrow (f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0)$, hay tương đương với $[(S_f = S_g) \wedge (S_g = S_h)] \Rightarrow S_f = S_h$.

1 ([Tuy23a], VD27, p. 41)**.** *Cho phương trình* $\dfrac{3(2x+1)}{4} - \dfrac{5x+3}{6} = \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{m}{12}$ (1) *với tham số $m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị của m để phương trình này: (a) có nghiệm. (b) vô nghiệm.*

Giải. (1) $\Leftrightarrow 9(2x+1) - 2(5x+3) = 4(2x-1) + m \Leftrightarrow 18x + 9 - 10x - 6 = 8x - 4 + m \Leftrightarrow 18x - 10x - 8x = m - 4 - 9 + 6 \Leftrightarrow 0x = m - 7$ (2). (a) (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 7$. Khi $m = 7$, (1) thậm chí có vô số nghiệm: $S = \mathbb{R}$. (b) (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm: $S = \emptyset \Leftrightarrow m - 7 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 7$. □

Nhận xét 1. *Phương trình (1) ban đầu nhìn có dạng phương trình bậc nhất 1 ẩn x, nhưng phương trình thu gọn không phải là 1 phương trình bậc nhất 1 ẩn, mà là bậc 0, i.e., phương trình có dạng $0x = c$. Phương trình này có vô số nghiệm thực $\Leftrightarrow S = \mathbb{R} \Leftrightarrow c = 0$, & vô nghiệm $\Leftrightarrow S = \emptyset \Leftrightarrow c \ne 0$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam
e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: https://nqbh.github.io.

2 ([Tuy23a], VD28, p. 41). *(a) Giải & biện luận phương trình* $\frac{m^2}{8}\left[(x+2)^2-(x-2)^2\right]-4x=(m-1)^2+3(2m+1)$ (1) *theo tham số* $m\in\mathbb{R}$. *(b) Mở rộng.*

Giải. (1) $\Leftrightarrow m^2x-4x=m^2+4m+4 \Leftrightarrow (m^2-4)x=(m+2)^2 \Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=(m+2)^2$ (2). Nếu $m=-2$, (2) trở thành $0x=0$ nên (1) có vô số nghiệm: $S=\mathbb{R}$. Nếu $m=2$, (2) trở thành $0x=16$ nên (1) vô nghiệm: $S=\emptyset$. Nếu $m\neq\pm2$, (1) có 1 nghiệm duy nhất $x=\frac{(m+2)^2}{(m-2)(m+2)}=\frac{m+2}{m-2}$ nên $S=\left\{\frac{m+2}{m-2}\right\}$. □

3 ([Tuy23a], 181., p. 42). *Cho 3 phương trình:* $(x+5)(2x-1)=0$, $(x+5)(2x-1)(x^2-3)=0$, $(x+5)(x^2-3)=0$. *Xét xem trong 3 phương trình này, có 2 phương trình nào tương đương không nếu: (a) x nhận giá trị trên tập* $\mathbb{R}$. *(b) x nhận giá trị trên tập* $\mathbb{Q}$. *(c) x nhận giá trị trên tập* $\mathbb{Z}$. *(d) x nhận giá trị trên tập* $\mathbb{N}$.

4 ([Tuy23a], 182., p. 42). *Tìm giá trị của hằng số a để phương trình sau vô nghiệm:* $\frac{a(3x-1)}{5}-\frac{6x-17}{4}+\frac{3x+2}{10}=0$.

5 ([Tuy23a], 183., p. 42). *Giải phương trình: (a)* $\frac{x+3}{1}+\frac{2x+3}{3}+\frac{3x+5}{5}+\cdots+\frac{20x+39}{39}=22+\frac{4}{3}+\frac{6}{5}+\cdots+\frac{40}{39}$. *(b)* $(x-20)+(x-19)+(x-18)+\cdots+100+101=101$.

6 ([Tuy23a], 184., p. 42). *Giải phương trình: (a)* $\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot10}\right)(x-1)+\frac{x}{10}=x-\frac{9}{10}$. *(b)* $\left(\frac{1}{1\cdot51}+\frac{1}{2\cdot52}+\frac{1}{3\cdot53}+\cdots+\frac{1}{10\cdot60}\right)x=\frac{1}{1\cdot11}+\frac{1}{2\cdot12}+\frac{1}{3\cdot13}+\cdots+\frac{1}{50\cdot60}$.

7 ([Tuy23a], 185., p. 42). *Giải & biện luận phương trình theo tham số m: (a)* $\frac{mx+5}{10}+\frac{x+m}{4}=\frac{m}{20}$. *(b)* $\frac{x-4m}{m+1}+\frac{x-4}{m-1}=\frac{x-4m-3}{m^2-1}$.

8 ([Tuy23a], 186., p. 42). *Giải & biện luận phương trình chứa 3 tham số a, b, c: (a)* $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ca}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. *(b)* $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}=a+b+c$.

2 Phương Trình Tích

Giải phương trình:

9 ([Tuy23a], VD29, p. 43). $\frac{x+16}{49}+\frac{x+18}{47}=\frac{x+20}{45}-1$.

10 ([Tuy23a], 187., p. 43). *(a)* $x^3-3x^2+4=0$. *(b)* $x^4+x^3-4x^2+5x-3=0$.

11 ([Tuy23a], 188., p. 43). *(a)* $(2x^2-3x-1)^2-3(2x^2-3x-5)-16=0$. *(b)* $x(x-1)(x+4)(x+5)=84$.

12 ([Tuy23a], 189., p. 44). *(a)* $\frac{x+43}{57}+\frac{x+46}{54}=\frac{x+49}{51}+\frac{x+52}{48}$. *(b)* $\frac{x-69}{30}+\frac{x-67}{32}+\frac{x-65}{34}=\frac{x-63}{36}+\frac{x-61}{38}+\frac{x-59}{40}$.

13 ([Tuy23a], 190., p. 44). *(a)* $\frac{x-17}{33}+\frac{x-21}{29}+\frac{x}{25}=4$. *(b)* $\frac{148-x}{25}+\frac{169-x}{23}+\frac{180-x}{21}+\frac{199-x}{19}=10$.

14 ([Tuy23a], 191., p. 44). *(a)* $(2x-5)^3-(3x-4)^3+(x+1)^3=0$. *(b)* $(x-1)^3+(2x-3)^3+(3x-5)^3-3(x-1)(2x-3)(3x-5)=0$. *(c)* $(x^2+3x-4)^3+(3x^2+7x+4)^3=(4x^2+10x)^3$.

15 ([Tuy23a], 192., p. 44). *(a)* $(x+5)^4+(x-4)^4=(2x+1)^4$. *(b)* $(x-4)^4+(x-2)^4=82$.

16 ([Tuy23a], 193., p. 44). *(a)* $x(x+2)+a^2-3=2a(x+1)$. *(b)* $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$. *(c)* $x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

3 Phương Trình Chứa Ẩn Ở Mẫu Thức

17 ([Tuy23a], VD30, p. 45). *Giải phương trình:* $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2+6\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2-\frac{7(x^2-9)}{x^2-4}=0$.

18 ([Tuy23a], VD31, p. 45). *Giải & biện phương trình theo tham số m:* $\frac{x-m}{x+5}+\frac{x-5}{x+m}=2$.

Giải phương trình:

19 ([Tuy23a], 194., p. 46). *(a)* $\frac{x+1}{x+2}+\frac{5}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}+1$. *(b)* $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{10}{x(x^4+x^2+1)}$.

20 ([Tuy23a], 195., p. 46). *(a)* $\frac{x+9}{10}+\frac{x+10}{9}=\frac{9}{x+10}+\frac{10}{x+9}$. *(b)* $\frac{x^2-2x+2}{x-1}+\frac{x^2-8x+20}{x-4}=\frac{x^2-4x+6}{x-2}+\frac{x^2-6x+12}{x-3}$.

21 ([Tuy23a], 196., p. 46). *(a)* $\frac{x-5}{x-5}+\frac{x-6}{x-5}+\frac{x-7}{x-5}+\cdots+\frac{1}{x-5}=4$. *(b)* $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\frac{1}{x^2+15x+56}=\frac{1}{14}$. *(c)* $\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\left(1+\frac{1}{3\cdot 5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x(x+2)}\right)=\frac{31}{16}$.

Giải & biện luận phương trình:

22 ([Tuy23a], 197., p. 47). $\frac{a}{1+bx}=\frac{b}{1+ax}$ *với tham số* $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\neq 0$.

23 ([Tuy23a], 198., p. 47). $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x-a+b}$ *với tham số* $a,b\in\mathbb{R}$.

24 ([Tuy23a], 199., p. 47). $\frac{3}{x-m}-\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-2m}$ *với tham số* $m\in\mathbb{R}$.

4 Giải Bài Toán Bằng Cách Lập Phương Trình

25 ([Tuy23a], VD32, p. 47). *1 sà lan xuôi dòng từ A đến B mất* 2.5 *giờ & ngược dòng từ B về A mất* 4 *giờ. Biết vận tốc dòng nước là* 3 km/h*, tính khoảng cách AB.*

26 ([Tuy23a], 200., p. 48). *Lúc* 7:00*, 1 người đi xe máy từ A đến B dài* 45 km*. Tới B, người đó giải quyết xong công việc trong 1 giờ 30 phút rồi quay ngay về, tới A lúc* 11:00*. Đoạn đường AB gồm 1 đoạn đường bằng & 1 đoạn lên dốc. Vận tốc lúc lên dốc là* 24 km/h*, lúc xuống dốc là* 45 km/h *(lúc về) & trên đường bằng là* 40 km/h*. Hỏi đoạn đường bằng dài bao nhiêu* km*?*

27 ([Tuy23a], 201., p. 48). *Vận động viên A chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi cách nhau* 6 km *với vận tốc* 10 km/h *rồi chạy xuống với vận tốc* 15 km/h*. Vận động viên B cũng chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi theo cùng 1 lộ trình với vận tốc* 12 km/h*. Biết B chạy sau A* 15 *phút, hỏi khi B gặp A từ đỉnh đồi chạy xuống, họ cách đỉnh đồi bao nhiêu* km*?*

28 ([Tuy23a], 202., p. 48). *1 người đi xe đạp, 1 người đi xe máy, & 1 ôtô cùng đi từ A đến B trên cùng 1 con đường. Người đi xe máy khởi hành sau người đi xe đạp* 2 *giờ, ôtô khởi hành sau xe máy* 1 *giờ. Biết vận tốc xe đạp, xe máy, ôtô lần lượt là* 15, 45, 60 km/h*. Đến* 10:30*, ôtô cách đều người đi xe đạp & người đi xe máy. Hỏi người đi xe đạp khởi hành lúc mấy giờ?*

29 ([Tuy23a], 203., p. 48). *Tìm 1 số tự nhiên có* 5 *chữ số, biết nếu viết thêm chữ số* 1 *vào bên phải số đó thì được 1 số gấp* 3 *lần số thu được nếu viết thêm chữ số* 1 *vào bên trái số đó.*

30 ([Tuy23a], 204., p. 48). *2 vòi nước khác nhau cùng chảy vào 1 bể. Thời gian cần cho vòi A chảy 1 mình đầy bể ít hơn thời gian cho vòi B chảy 1 mình đầy bể là* 2 *giờ. Tích 2 thời gian đó bằng* 4 *lần thời gian cần cho cả 2 vòi cùng chảy đầy bể. Hỏi mỗi vòi nếu chảy 1 mình mất bao nhiêu lâu mới đầy bể?*

31 ([Tuy23a], 205., p. 48). *Hiện nay tuổi cha gấp* 3 *lần tuổi con. Sau 1 thời gian nữa, khi tuổi của con bằng tuổi của cha hiện nay thì lúc đó tổng số tuổi của 2 cha con là* 112*. Tính tuổi cha, tuổi của con hiện nay.*

32 ([Tuy23a], 206., p. 48). *Tổng của 4 số là* 72*. Nếu lấy số thứ nhất cộng thêm* 5*, số thứ 2 trừ đi* 5*, số thứ 3 nhân* 5*, số thứ 4 chia cho* 5 *thì 4 kết quả bằng nhau. Tìm 4 số ban đầu.*

33 ([Tuy23a], 207., p. 48). *1 lớp học có* 20 *học sinh nữ & 1 số học sinh nam. Cuối năm tất cả đều đạt học sinh giỏi hoặc khá. Biết số nam sinh giỏi bằng số nữ sinh khá. Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh giỏi?*

34 ([Tuy23a], 208., p. 48). *1 công nhân dự định hoàn thành công việc được giao trong* 5 *giờ. Lúc đầu người đó thực hiện đúng tiến bộ, mỗi giờ làm được* 12 *sản phẩm. Sau khi đã làm được 1 nửa số lượng sản phẩm được giao, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi giờ người đó làm thêm được* 3 *sản phẩm, do đó công việc đã được hoàn thành sớm hơn* $\frac{1}{2}$ *giờ. Tính số lượng sản phẩm được giao.*

5 Khái Niệm Hàm Số

35 ([Tuy23a], VD34, p. 51). *Cho bảng:*

x	-1	0	1	2	3
y	2	0	-2	-4	-6

(a) Giải thích vì sao bảng này xác định y là 1 hàm số của x? (b) Liệt kê tất cả các cặp số (x,y) *của hàm số này. (c) Hàm số đó có thể được cho bởi công thức nào?*

36 ([Tuy23a], VD35, p. 51). *Cho hàm số có đồ thị đi qua 4 điểm: $A(-3,-1), B(3,1), C(6,2), O(0,0)$. Hàm số này có thể được cho bởi công thức nào?*

37 ([Tuy23a], 209., p. 52). *Cho 2 hàm số $y = f(x) = 2x$ & $y = g(x) = \frac{18}{x}$. Không vẽ đồ thị của chúng, tìm tọa độ giao điểm của 2 đồ thị.*

38 ([Tuy23a], 210., p. 52). *Nếu đại lượng y liên hệ với đại lượng x theo công thức $y = \frac{a}{x}$ hay $xy = a$ với hằng số $a \neq 0$ thì ta nói y tỷ lệ nghịch với x theo hệ số tỷ lệ a. Cho điểm $M(-2,3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$. Không vẽ đồ thị hàm số này, cho biết trong 3 điểm $A(1,5), B(-3,2), C(6,1)$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số đó.*

39 ([Tuy23a], 211., p. 52). *1 chiếc tàu ngầm chạy với vận tốc không đổi là 37 km/h ở độ sâu 100 m so với mực nước biển. (a) Viết hàm số f mô tả sự phụ thuộc giữa quãng đường s (km) & thời gian t (h) mà tàu ngầm đã đi. (b) Viết hàm số g mô tả sự phụ thuộc giữa độ sau h (m) của tàu ngầm so với mực nước biển & thời gian t (h). Tính $g(2), g(3.5)$.*

40 ([Tuy23a], 212., p. 52). *Hàm số $y = f(x)$ được xác định bởi các cặp số (x,y): $(-6,-4), (-3,-2), (0,0), (1.5,1), (9,6)$. (a) Vẽ sơ đồ mũi tên của hàm số đó. (b) Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức nào?*

41 ([Tuy23a], 213., p. 52). *Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 5$. (a) Tính $f(3), f\left(-\frac{1}{2}\right)$. (b) Tìm x để $f(x) = -1$. (c) Chứng minh $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

42 ([Tuy23a], 214., p. 52). *Cho hàm số $y = f(x) = \lfloor x \rfloor$ với $x \in \mathbb{Q}$. (a) Tìm $f(5), f\left(2\frac{1}{6}\right), f(-7.4)$. (b) Tìm x để $f(x) = 4$.*

43 ([Tuy23a], 215., p. 52). *Cho hàm số $y = f(x) = \{x\}$ với $x \in \mathbb{Q}$. (a) Tìm $f(5), f\left(2\frac{1}{6}\right), f(-7.4)$. (b) Tìm x để $f(x) = 0$.*

44 ([Tuy23a], 216., p. 52). *Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết y tỷ lệ thuận với x theo hệ số tỷ lệ $\frac{1}{2}$. (a) Tìm x để $f(x) = -5$. (b) Chứng minh nếu $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*

45 ([Tuy23a], 217., p. 52). *Viết công thức của hàm số $y = f(x)$ biết y tỷ lệ nghịch với x theo hệ số tỷ lệ $a = 12$. (a) Tìm x để $f(x) = 4, f(x) = 0$. (b) Chứng minh $f(-x) = -f(x)$.*

46 ([Tuy23a], 218., p. 52). *Cho hàm số $y = f(x) = kx$, $k \neq 0$: hằng số. Chứng minh: (a) $f(10x) = 10f(x)$. (b) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. (c) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. (d) $f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$, $\forall a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*

47 ([BBN23], H3, p. 49). *Tìm $a \in \mathbb{R}$ để điểm $A(-1,3)$ thuộc đồ thị hàm số $(P): y = ax^2$.*

Giải. $A(-1,3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = a(-1)^2 \Leftrightarrow a = 3$. □

48 (Mở rộng [BBN23], H3, p. 49). *Tìm $a \in \mathbb{R}$ để điểm $A(x_0, y_0)$, với $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ cho trước, thuộc đồ thị hàm số $(P): y = ax^2$.*

Giải. Nếu $x_0 = y_0 = 0$, có $0 = a0^2$, $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow A(0,0) \in (P)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Nếu $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ thì $ax_0^2 = a0^2 = 0 \neq y_0 \Rightarrow A(x_0, y_0) \notin (P)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Nếu $x_0 \neq 0$ thì $A(x_0, y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 \Leftrightarrow a = \frac{y_0}{x_0^2}$. Vậy

$$\{a \in \mathbb{R} | A(x_0, y_0) \in (P): y = ax\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{nếu } x_0 = y_0 = 0, \\ \emptyset, & \text{nếu } x_0 = 0, y_0 \neq 0, \\ \left\{\frac{y_0}{x_0^2}\right\}, & \text{nếu } x_0 \neq 0. \end{cases}$$

($\forall a \in \mathbb{R}^\star$, đồ thị hàm số bậc 2 $(P): y = ax^2$ là 1 đường parabol.) □

49 ([BBN23], H4, p. 49). *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. (a) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ cũng tăng lên thì hàm số $y = f(x)$ gọi là ... trên $\mathbb{R}$. (b) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ ... thì hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

Giải. (a) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ cũng *tăng lên* thì hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến* trên $\mathbb{R}$. (b) Nếu giá trị của biến x tăng lên mà giá trị tương ứng $f(x)$ *giảm đi* thì hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch* biến trên $\mathbb{R}$. □

50 ([BBN23], H5, p. 49). *(a) Tìm* TXĐ *của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. (b) Tìm* TXĐ *của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}$.*

Giải. (a) $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ xác định $\Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow$ TXĐ $D_y = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$. (b) $y = \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 2}$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \land x \neq 2 \Rightarrow$ TXĐ $D_y = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1 \land x \neq 2\}$. □

51 ([BBN23], VD1, p. 49)**.** *Ở bưu điện, giá tiền cước gửi thư trong nước được niêm yết như sau (chưa tính* VAT*):*

Nấc khối lượng (g)	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	2000
Trên 20 g đến 100 g	3000
Trên 100 g đến 250 g	4500
Mỗi 250 g tiếp theo đến 2000 g	2000

Nếu gọi khối lượng lá thư là x g, số tiền cước phải trả là y đồng. (a) y có là hàm số của x không? Vì sao? (b) Tìm TXĐ *của hàm số y. (c) 1 lá thư nặng* 300 g *cần phải trả tiền cước là bao nhiêu? (d) Hỏi x có là hàm số của y không? Vì sao? (e) Tìm 1 công thức tường minh của hàm số y theo x.*

Giải. (a) y là 1 hàm số của x vì ứng với 1 giá trị xác định của x ta tính được giá trị duy nhất của y. (b) TXĐ $D_y = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \le 2000\}$. (c) Vì $250 \text{ g} < 300 \text{ g} < 500 = 250 + 250$ g nên lá thư nặng 300 g phải trả tiền cước: $4500 + 2000 = 6500$ đồng. (d) x không phải là hàm số của y vì, e.g., ứng với giá trị xác định $y = 2000$, tìm được $x \in \{1, 2, \ldots, 20\}$. (e) Theo bảng niêm yết:

$$y = \begin{cases} 2000, & \text{khi } 0 < x \le 20, \\ 3000, & \text{khi } 20 < x \le 100, \\ 4500, & \text{khi } 100 < x \le 250, \\ 4500 + 2000 \left\lfloor \dfrac{x}{250} \right\rfloor, & \text{khi } x > 250, \end{cases}$$

hoặc $y = 2000\mathbf{1}_{0<x\le 20} + 3000\mathbf{1}_{20<x\le 100} + 4500\mathbf{1}_{100<x\le 250} + 2000 \left\lfloor \dfrac{x}{250} \right\rfloor \mathbf{1}_{x>250}$ với hàm đặc trưng của tập hợp $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in A, \\ 0, & \text{nếu } x \notin A. \end{cases}$$

□

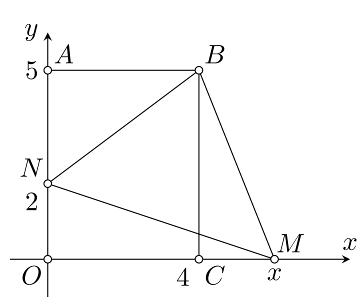
Nhận xét 2. *Theo định nghĩa hàm số: (a) y là hàm số của x trên tập xác định X nếu với mỗi $x \in X$ luôn xác định được duy nhất 1 giá trị tương ứng của y. (b) y không là hàm số của x trên X nếu tồn tại $x \in X$ sao cho xác định được ít nhất 2 giá trị tương ứng của y hoặc không tìm được giá trị nào của y.*

Nhận xét 3. *Dạng công thức của hàm số được cho trong lời giải trên, i.e., $y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, với $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = D_y$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne j$, i.e., 1 phân hoạch của tập xác định D_y của hàm số y, rất tiện lợi khi giải quyết các bài toán lập trình về tính tiền điện, nước, … với bảng giá niêm yết cho trước.*

52 ([BBN23], VD2, p. 50)**.** *1 ôtô có bình chứa xăng đựng được* 40 L *xăng. Cứ chạy* 100 km *thì ôtô tiêu thụ hết* 8 L *xăng. (a) Khi ôtô chạy x km thì số* L *xăng y tiêu thụ là bao nhiêu? (b) Hỏi y có là 1 hàm số của x không? (c) Hỏi x có là 1 hàm số của y không? (d) Khi ôtô chạy được* 200 km *thì số* L *xăng còn lại trong bình là bao nhiêu nếu lúc đầu bình đầy?*

Giải. (a) Khi ôtô chạy x km thì tiêu thụ hết $y = \dfrac{8}{100}x = \dfrac{2}{25}x = 0.08x$ L xăng. (b) y là 1 hàm số bậc nhất của x. (c) $y = \dfrac{2}{25}x \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{2}y = 12.5y \Rightarrow x$ là 1 hàm số của y. (d) $x = 200 \Rightarrow y = \dfrac{2}{25} \cdot 200 = 16$ L. Số lượng xăng còn lại trong bình: $40 - 16 = 24$ L. □

53 ([BBN23], VD3, p. 51)**.** *Vẽ trên mặt phẳng tọa độ Oxy các điểm $A(0,5), B(4,5), C(4,0), M(x, 0$ với $x > 4$, $N(0,2)$. (a) Tính diện tích S của tứ giác $OABC$. (b) Tính diện tích P của ΔBMN theo x. Chứng minh P là hàm số của x. (c) Tìm* TXĐ *của P. Hàm số P đồng biến hay nghịch biến trên* TXĐ *của nó? (d) Với giá trị nào của x thì $S = P$?*

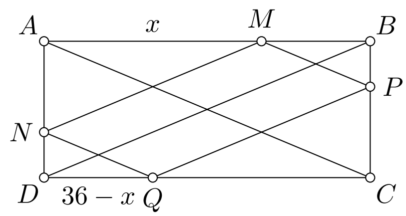


1st giải. (a) Tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật có $OA = 5, OC = 4$, $S_{OABC} = OA \cdot OC = 5 \cdot 4 = 20$. (b) $P = S_{OABM} - S_{ABN} - S_{OMN} = \dfrac{(4+x)\cdot 5}{2} - \dfrac{3 \cdot 4}{2} - \dfrac{2x}{2} = \dfrac{3x}{2} + 4 \Rightarrow P$ là hàm số bậc nhất của x. (c) TXĐ $D_P = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$. Vì P là hàm số bậc nhất của x với hệ số góc $\dfrac{3}{2} > 0$ nên P đồng biến trên D_P. (D) $S = P \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} + 4 = 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{32}{3} > 4$ (nhận vì $x \in D_P$). □

Để xét tính đơn điệu (i.e., đồng biến hoặc nghịch biến) của hàm số P, ta có thể sử dụng định nghĩa:

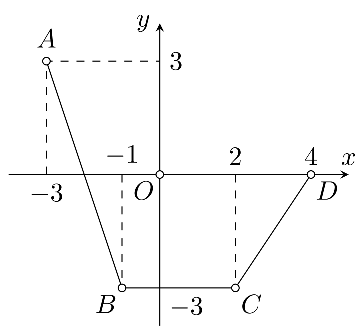
2nd giải. (c) TXĐ $D_P = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$. Lấy $x_2 > x_1 > 4$: $P_2 - P_1 = \frac{3x_1}{2} + 4 - \left(\frac{3x_2}{2} + 4\right) = \frac{3}{2}(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow P_2 > P_1$. Vậy hàm số P đồng biến trên D_P. □

54 ([BBN23], VD4, p. 51)**.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 36, BC = 15$. Trên cạnh AB lấy điểm M. Gọi $AM = x$, $0 < x < 36$. Qua M kẻ $MN \parallel BD$ với $N \in AD$. Qua M kẻ $MP \parallel AC$ với $P \in BC$. (a) Chứng minh độ dài MN, MP là 2 hàm số của x. (b) Trên cạnh CD lấy điểm Q sao cho $DQ = 36 - x$. Chứng minh chu vi tứ giác $MNQP$ là 1 hàm hằng.*



Giải. (a) Áp dụng định lý Pythagore cho ΔABC vuông tại A: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, $BD = AC = 39$. Áp dụng định lý Thales cho ΔABD với $MN \parallel BD$: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \Leftrightarrow MN = \frac{AM \cdot BD}{AB} = \frac{x \cdot 39}{36} = \frac{13}{12}x$ nên MN là 1 hàm số bậc nhất của x. Tương tự, áp dụng định lý Thales cho ΔABC với $MP \parallel AC$: $\frac{BM}{AB} = \frac{MP}{AC} \Leftrightarrow MP = \frac{BM \cdot AC}{AB} = \frac{(36-x) \cdot 39}{36} = -\frac{13}{12}x + 39$ nên MP cũng là 1 hàm số bậc nhất của x. (b) Áp dụng định lý Thales cho ΔABC với $MP \parallel AC$: $\frac{BP}{BC} = \frac{BM}{AB} = \frac{36-x}{36} = \frac{DQ}{CD}$, áp dụng định lý Thales đảo cho ΔBCD suy ra $PQ \parallel BD$, mà $MN \parallel BD$ (giả thiết), suy ra $MN \parallel PQ$. Tương tự, áp dụng định lý Thales cho ΔABD với $MN \parallel BD$: $\frac{DN}{AD} = \frac{BM}{AB} = \frac{36-x}{36} = \frac{DQ}{CD}$, áp dụng định lý Thales đảo cho ΔACD suy ra $QN \parallel AC$, mà $MP \parallel AC$ (giả thiết), suy ra $NQ \parallel MP$. Tứ giác $MNQP$ có 2 cặp cạnh đối song song $MN \parallel PQ$, $QN \parallel AC$, nên là hình bình hành. Suy ra $C_{MNPQ} = 2(MN + MP) = 2\left(\frac{13}{12}x - \frac{13}{12}x + 39\right) = 2 \cdot 39 = 78$ nên C_{MNPQ} là hàm hằng (i.e., không phụ thuộc vào biến x). □

55 ([BBN23], VD5, p. 52)**.** *Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên mặt phẳng tọa độ: $A(-3, 3), B(-1, -3), C(2, -3), D(4, 0)$.*



(a) Tìm TXĐ của hàm số y. (b) Tính $f(-3), f(-1), f(1), f(2), f(3), f(4)$. (c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến & nghịch biến trong khoảng nào? (d) Đ/S? Khi xét $x_1 = 2$, $f(x_1) = f(2) = -3$, $x_2 = -3$, $f(x_2) = f(-3) = 3$, ta thấy $x_2 < x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$ nên hàm số nghịch biến trong khoảng $[-3, 2]$.

Giải. (a) TXĐ của hàm số y: $D_y = \{x \in \mathbb{R} | -3 \le x \le 4\} = [-3, 4]$. (b) $f(-3) = 3, f(-1) = -3, f(1) = -3, f(2) = -3, f(3) = -1.5, f(4) = 0$. (c) Hàm số y nghịch biến trên đoạn $[-3, -1]$, hằng trên đoạn $[-1, 2]$, đồng biến trên đoạn $[2, 4]$. (d) Khẳng định hàm số y nghịch biến trong đoạn $[-3, 2]$ là sai, e.g., cho $x_1 = -1, x_2 = 2$, $x_1 < x_2$ nhưng $f(-1) = f(2) = -3$. □

Lưu ý 1. *Khi xét tính đơn điệu, i.e., đồng biến hoặc nghịch biến của 1 hàm số bất kỳ, ta xét từ trái sang phải, khoảng nào mà: Đồ thị hàm số đi lên thì hàm số đồng biến trong khoảng đó. Đồ thị hàm số đi xuống thì hàm số nghịch biến trong khoảng đó.*

Lưu ý 2. *Khi xét tính đồng biến, nghịch biến của 1 hàm số $y = f(x)$ ta phải chọn 2 giá trị tùy ý $x_1, x_2 \in D_y$, $x_1 < x_2$.*

56 ([BBN23], 6.1., p. 53)**.** *Bảng sau ghi các giá trị tương ứng của 2 đại lượng x, y phụ thuộc nhau.*

x	1	2	3	4	5	1	6	7	8
y	0	2	-1	5	4	-4	3	-2	-6

(a) y có là hàm số của x không? (b) x có là hàm số của y không? (c) Trường hợp là hàm số, nêu TXĐ.

Giải. (a) y không là hàm số của x vì với $x = 1$ lại có 2 giá trị tương ứng của y là $y = 0, y = -4$. (b) x là hàm số của y vì mỗi y xác định duy nhất 1 giá trị x tương ứng. (c) TXĐ của hàm số $x = x(y)$: $D_x = \{-6, -4, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$. □

57 ([BBN23], 6.2., p. 53)**.** *Cho hàm số $y = f(x) = 3x^2 + 1$. (a) Tính $f(-1), f(0), f(1)$. (b) Tìm x để $f(x) = 4$. (c) Trong 3 điểm $A(0,1), B(2,3), C(3,4)$, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số đã cho?*

Giải. (a) $f(-1) = 3(-1)^2+1 = 4, f(0) = 3\cdot 0^2+1 = 1, f(1) = 3\cdot 1^2+1 = 4$. (b) $f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x^2+1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. (c) Đặt $G_y \coloneqq \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y = 3x^2+1\} = \{(x, 3x^2+1)|x \in \mathbb{R}\}$. $f(0) = 1 \Rightarrow A(0,1) \in G_y$, $f(2) = 3\cdot 2^2+1 = 13 \neq 3 \Rightarrow B(2,3) \notin G_y$, $f(3) = 3\cdot 3^2+1 = 28 \neq 4 \Rightarrow C(3,4) \notin G_y$. □

58 ([BBN23], 6.3., p. 53)**.** *Bảng giá bán lẻ điện cho các hộ gia đình (chưa tính* VAT 10%*) (theo QĐ số 2256/QĐ-BCT 12.3.2015 của Bộ Công thương):*

Mức độ sử dụng của mỗi hộ trong tháng	Giá bán điện (đồng/kwh)
Bậc 1: cho kwh từ 0–50	1484
Bậc 2: cho kwh từ 51–100	1533
Bậc 3: cho kwh từ 101–200	1786
Bậc 4: cho kwh từ 201–300	2242
Bậc 5: cho kwh từ 301–400	2503
Bậc 6: cho kwh từ 401 trở lên	2587

Gọi số điện sử dụng của hộ gia đình là x kwh*, số tiền phải trả là y đồng. (a) y có phải là hàm số của x không? (b) Nếu dùng hết* 310 kwh *điện thì phải trả bao nhiêu tiền? (c) Tìm công thức của hàm số y theo x.*

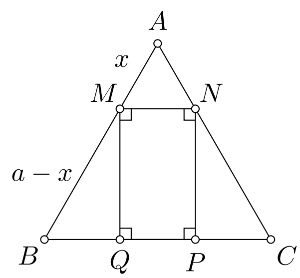
Giải. (a) Ứng với mỗi mức tiêu thụ điện phải trả 1 số tiền tương ứng, nên y là hàm số của x. (b) Nếu 1 hộ dùng hết 310 kwh điện thì phải trả (chưa tính VAT): $1484 \cdot 50 + 1533 \cdot 50 + 1786 \cdot 100 + 2242 \cdot 100 + 2503 \cdot 10 = 578680$ đồng. Sau khi tính cả VAT 10%, hộ đó phải trả: $578680 + 578680 \cdot 10\% = 578680 + 57868 = 636548$ đồng. □

59 ([BBN23], 6.4., p. 53)**.** *Chứng minh: (a) Hàm số $y = 2x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (b) Hàm số $y = -2x + 7$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.*

1st giải. (a) Vì $y = 2x + 3$ là hàm số bậc nhất có hệ số góc $2 > 0$ nên y đồng biến trên $D_y = \mathbb{R}$. (b) Vì $y = -2x + 7$ là hàm số bậc nhất có hệ số góc $-2 < 0$ nên y nghịch biến trên $D_y = \mathbb{R}$. □

2nd giải. Sử dụng định nghĩa: Với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ bất kỳ. (a) $y_1 - y_2 = (2x_1 + 3) - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2) < 0$ nên y đồng biến trên $D_y = \mathbb{R}$. (b) $y_1 - y_2 = (-2x_1 + 7) - (-2x_2 + 7) = 2(x_2 - x_1) > 0$ nên y nghịch biến trên $D_y = \mathbb{R}$. □

60 ([BBN23], 6.5., p. 53)**.** *Cho ΔABC đều có độ dài cạnh bằng a. Lấy $M \in AB$ sao cho $AM = x$ với $0 < x < a$. Vẽ hình chữ nhật $MNPQ$ với $N \in AC$, $P, Q \in BC$. (a) Chứng minh diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là hàm số của x. (b) Xác định x để diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất.*



Giải. (a) □

61 ([BBN23], p. 53, Công thức Lorentz cho số cân nặng lý tưởng tương ứng với chiều cao)**.** *Cách đây hơn 1 thế kỷ, nhà khoa học người Hà Lan Hendrick Lorentz (1853–1928) đưa ra công thức tính số cân nặng lý tưởng của con người theo chiều cao:*

$$\boxed{M = T - 100 - \frac{T - 150}{N}}$$

trong đó M: số cân nặng kg*, T: chiều cao* cm*, $N = 4$ với nam giới & $N = 2$ với nữ giới. (a) Kiểm chứng công thức với cân nặng & chiều cao của bản thân. (b) Viết công thức tính số cân nặng lý tưởng của nam giới (ký hiệu là P_1) & số cân nặng lý tưởng của nữ giới (ký hiệu là P_2) theo chiều cao. (c) Vẽ đồ thị hàm M theo T. (d) P_1, P_2 có phải là hàm số của T không? (c) Với T bằng bao nhiêu thì $P_1 = P_2$?*

62 ([Tuy23b], VD16, p. 33)**.** *Cho hàm số $y = 2k(x-1)^2 - kx(2x+1) + 5x$ với tham số $k \neq 1$. (a) Chứng minh y là hàm số bậc nhất. (b) Với giá trị nào của k thì hàm số đó là hàm số đồng biến? nghịch biến?*

63 ([Tuy23b], 98., p. 34). *Cho hàm số $y = f(x) = 4x + 1 - \sqrt{3}(2x+1)$. (a) Chứng minh y là 1 hàm số bậc nhất đồng biến. (b) Tìm x để $f(x) = 0$.*

64 ([Tuy23b], 99., p. 34). *Xác định k để hàm số $y = k(\sqrt{x}-3)^2 + (k+1)(\sqrt{x}+2)^2$ là hàm số bậc nhất. Lúc đó y là hàm số đồng biến hay nghịch biến?*

65 ([Tuy23b], 100., p. 34). *Cho 2 hàm số $f(x) = mx - 2$, $g(x) = (m^2+1)x + 5$, trong đó $m \in \mathbb{R}^\star$. Chứng minh: (a) Hàm số $f(x) + g(x)$ là hàm số bậc nhất đồng biến. (b) Hàm số $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất nghịch biến.*

66 ([Tuy23b], 101., p. 34). *Cho hàm số $y = (m^2-4)x^2 - (2m+n)(5m-n)x - 3$. Với giá trị nào của m,n thì y là hàm số bậc nhất đồng biến? nghịch biến?*

67 ([Tuy23b], 102., p. 34). *Cho hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$. Chứng minh $f(x+1) - f(x)$ là 1 hàm số bậc nhất.*

68 ([Tuy23b], 103., p. 34). *Cho hàm số $y - f(x)$. Biết $f(x-1) = 3x - 5$. Chứng minh hàm số $y = f(x)$ là 1 hàm số bậc nhất.*

69 ([Tuy23b], 104., p. 34). *Cho hàm số $y = ax + b$. Biết $f(1) \le f(2), f(5) \ge f(6), f(999) = 1000$. Tính $f(2010)$.*

70 ([Bìn23], VD17, p. 24). *Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 5$ với 3 hằng số $a,b,c \in \mathbb{R}$. Biết $f(-3) = 208$. Tính $f(3)$.*

71 ([Bìn23], VD18, p. 24). *Chứng minh công thức tính khoảng cách d giữa 2 điểm $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.*

72 ([Bìn23], 48., p. 25). *(a) Chứng minh: Nếu 2 điểm A,B theo thứ tự có tọa độ $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ thì trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. (b) Tìm trung điểm của đoạn thẳng tạo bởi cặp điểm: (i) $A(1,2), B(4,4)$. (ii) $A(-1,1), B(3,-1)$. (iii) $A(-2,-2), B(1,-1)$.*

73 ([Bìn23], 49., p. 25). *Tìm tập hợp các điểm A có tọa độ như sau với mọi $m \in \mathbb{R}$: (a) $A(m,-1)$. (b) $A(2,m)$. (c) $A(m,m)$. (d) $A(m,-m)$.*

74 ([Bìn23], 50., p. 25). *Xác định hàm số $f(x)$ biết $f(x+1) = x^2 - 2x + 3$.*

75 ([Bìn23], 51., p. 25). *Xác định hàm số $f(x)$ biết $g(x-5) = 2x - 1$.*

76 ([Bìn23], 52., p. 25). *Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số: (a) $y = ax + b$, $a \ne 0$. (b) $y = ax^3$, $a \ne 0$. (c) $y = ax^{2n+1}$, $a \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$. (d) $y = ax^{2n}$, $a \ne 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

77 ([Bìn23], 53., p. 25). *Chứng minh đồ thị hàm số chỉ là 1 điểm: (a) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$. (b) $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{a-x}$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (c) $y = \sqrt{x^n - a} + \sqrt{a - x^n}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n lẻ.*

78 ([Bìn23], 54., p. 25). *Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 điểm, xác định dạng của ΔABC & tính diện tích của tam giác đó biết: (a) $A(3,-1), B(-1,-3, C(2,-4)$. (b) $A(-2,2), B(0,3), C(1,1)$.*

79 ([Bìn23], 55., p. 25). *Cho hàm số $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 3$ với hằng số a,b. Biết $f(2) = 17$. Tính $f(-2)$.*

80 ([BNS23], VD6.1, p. 35). *Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định của hàm số.*

Giải. $f(x)$ xác định $\Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$. TXĐ $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 1\} = [1,\infty)$. $\forall x_1, x_2 \in D_f$ thỏa mãn $1 \le x_1 < x_2$, có $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2-1} - \sqrt{x_1-1} = \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}} > 0$, suy ra $f(x)$ đồng biến trên D_f. □

81 ([BNS23], VD6.2, p. 36). *Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + m$. Khi đó: (a) Chứng minh hàm số đồng biến khi $x \ge 0$. (b) Chứng minh hàm số nghịch biến khi $x \le 0$. (c) Xác định m để $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Với các giá trị đã tìm được của m, chứng minh $x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 29x + m > -\frac{98}{5}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

82 ([BNS23], VD6.3, p. 36). *Tìm* TXĐ *rồi xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.*

83 ([BNS23], VD6.4, p. 37). *Tìm* TXĐ *rồi xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^3 + 3x$.*

84 ([BNS23], VD6.5, p. 37). *Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{x^4+3x}{|x-1|}$.*

85 ([BNS23], 6.1., p. 37). *Tìm* TXĐ *của hàm số $y = \sqrt{x^2-9} + \sqrt[4]{x^3-1}$.*

Giải. y xác định $\Leftrightarrow x^2 - 9 \ge 0 \wedge x^3 - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge 9 \wedge x^3 \ge 1 \Leftrightarrow |x| \ge \sqrt{9} = 3 \wedge x \ge 1 \Leftrightarrow (x \le -3 \vee x \ge 3) \wedge x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3$. TXĐ $D_y = \{x \in \mathbb{R} | x \ge 3\} = [3,\infty)$. □

86 ([BNS23], 6.2., p. 37). *Tìm* TXĐ *của hàm số $y = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt[4]{1-x^4}$.*

87 ([BNS23], 6.3., p. 37). *Xác định giá trị của a để* TXĐ *của hàm số $y = \frac{2}{x-2a} + \sqrt{7a+1-2x}$ chứa đoạn $[-1,1]$.*

88 ([BNS23], 6.4., p. 37). *Tìm* TXĐ *của hàm số: (a)* $y = \dfrac{x}{x-2}$. *(b)* $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$. *(c)* $y = \dfrac{x^3-5}{x-1} + \sqrt{x} + 3$. *(d)* $y = \sqrt{x + \sqrt{x-2}}$.

89 ([BNS23], 6.5., p. 37). *Cho hàm số* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. *Xác định: (a)* $y = f(f(1))$. *(b)* $y = f(f(f \ldots (f(x) \ldots)))$ *với n ký hiệu* f.

90 ([BNS23], 6.6., p. 37). *Cho hàm số* $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$. *Tìm* TXĐ *của* y. *Tìm tất cả các cặp số nguyên* (a, b) *thuộc đồ thị của* y.

91 ([BNS23], 6.7., p. 37). *Chứng minh hàm số* $y = x^5 + 3x^3 + 1$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

92 ([BNS23], 6.8., p. 37). *Chứng minh hàm số* $y = x^4 + 4x^2 - 5$ *nghịch biến khi* $x \geq 0$.

93 ([BNS23], 6.9., p. 37). *Cho hàm số* $y = f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$. *(a) Tìm* TXĐ *của* y. *(b) Chứng minh* $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ *trên* D. *(c) Chứng minh bất đẳng thức* $\sum_{i=1}^{2011} \dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{2011 \cdot 2012} < 1$.

94 ([BNS23], 6.10., p. 38). *Cho hàm số* $y = f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$. *(a) Tìm* TXĐ D *của hàm số. (b) Xác định* a, b, c *biết* $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$ *trên* D. *(c) Tính tổng* $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)(i+2)} = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

95 ([BNS23], 6.11., p. 38). *Cho hàm số* $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. *(a) Xác định* a, b, c *biết* $f(x+1) - f(x) = x^2$ *thỏa mãn với mọi giá trị của* $x \in \mathbb{R}$. *(b) Tính tổng* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

96 ([BNS23], 6.12., p. 38). *Xác định tính chẵn lẻ của hàm số: (a)* $y = |2x-3| + |2x+3|$. *(b)* $y = \dfrac{|x-4| + |x+4|}{|x+3| - |x-3|}$.

97 ([BNS23], 6.13., p. 38). *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên tập* $\mathbb{R}$. *Chứng minh có thể biểu diễn* $y = f(x)$ *thành tổng của 1 hàm số chẵn & 1 hàm số lẻ. Chứng minh sự biểu diễn ấy là duy nhất.*

98 ([BNS23], 6.14., p. 38). *Giả sử* $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 + a^i x) = (1+ax)(1+a^2x) \cdots (1+a^n x)$. *(a) Chứng minh* $(1+ax)f(ax) = (1+a^{n+1})f(x)$. *(b) Xác định* A_i *theo* a, i, n *biết* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$.

99 ([BNS23], 6.15., p. 38). *Xác định hàm số* $g(f(x)), f(g(x))$ *biết* $f(x) = x^2 + 5, g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

100 ([BNS23], 6.16., p. 38). *Xác định hàm số* $g(f(x)), f(g(x))$ *biết* $f(2x-5) = x^2 + 3x - 1, g(5x+1) = \dfrac{x}{x-7}$.

6 Hàm Số $y = ax$

101 ([Bìn23], VD19, p. 26). *Trên mặt phẳng tọa độ, cho 3 điểm* A, B, C *có tọa độ* $A(0,4), B(3,4), C(3,0)$. *Tìm hệ số a sao cho đường thẳng* $y = ax$ *chia hình chữ nhật* $OABC$ *thành 2 phần, trong đó diện tích phần chứa điểm* A *gấp đôi diện tích phần chứa điểm* C.

102 ([Bìn23], VD20, p. 26). *Cho hàm số* $y = \sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-2x+1}$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số. (b) Dùng đồ thị tìm* GTNN, GTLN *của* y.

103 ([Bìn23], VD21, p. 27). *Cho 2 điểm* $A(1,4), B(3,1)$. *Xác định đường thẳng* $y = ax$ *sao cho* A, B *nằm về 2 phía của đường thẳng & cách đều đường thẳng đó.*

104 ([Bìn23], 56., p. 28). *Vẽ đồ thị hàm số: (a)* $y = |x| - x$. *(b)* $y = |2x| - x$.

105 ([Bìn23], 57., p. 28). *3 đường thẳng* $y = \sqrt{2}x$, $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = 2$ *cắt nhau tạo thành 1 tam giác. Tính diện tích tam giác đó.*

106 ([Bìn23], 58., p. 28). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2+4x+4}$ *rồi dùng đồ thị tìm* GTNN, GTLN *của* y.

107 ([Bìn23], 59., p. 28). *Trên mặt phẳng tọa độ, cho đa giác* $OABCDE$ *không lồi có tọa độ 5 đỉnh* $A(0,3), B(3,3), C(3,1), D(5,1), E(5,0)$ *Tìm hệ số* a *để đường thẳng* $y = ax$ *chia đa giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau.*

108 ([Bìn23], 60., p. 28). *Cho 2 điểm* $A(2,8), B(4,2)$. *Xác định đường thẳng* $y = ax$ *sao cho* A, B *nằm về 2 phía của đường thẳng & cách đều đường thẳng đó.*

109 ([Bìn23], 61., p. 28). *Cho biết đường thẳng* $y = \dfrac{1}{2}x$ *chia mặt phẳng tọa độ thành 2 miền: 1 miền gồm các điểm có tọa độ* (x, y) *mà* $y > \dfrac{1}{2}x$, *miền kia gồm các điểm có tọa độ* (x, y) *mà* $y < \dfrac{1}{2}x$. *Vẽ đường thẳng* $y = \dfrac{1}{2}x$ *& chỉ rõ 2 miền trên.*

7 1st-Order Function & Its Graph – Hàm Số Bậc Nhất & Đồ Thị

110 ([Tuy23a], VD36, p. 55). *Cho hàm số* $y = -\frac{1}{3}x$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số đó. (b) Trong 3 điểm* $A(-3,1), B(6,2), C(9,-3)$, *điểm nào thuộc đồ thị (không vẽ 3 điểm đó)?*

111 ([Tuy23a], VD37, p. 55). *Cho hàm số* $y = 2k(x-1)^2 - kx(2x+1) + 5x$ *với tham số* $k \neq 1$. *(a) Chứng minh hàm số này là hàm số bậc nhất. (b) Với giá trị nào của* $k \in \mathbb{R}$ *thì hàm số đó là hàm số đồng biến? nghịch biến?*

112 ([Tuy23a], VD38, pp. 55–56). *Cho hàm số* $y = mx - 2m + 5$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số khi* $m = 3$. *(b) Chứng minh với mọi giá trị của* $m \in \mathbb{R}$, *đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua 1 điểm cố định.*

113 ([Tuy23a], 219., p. 56). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = |x|$.

114 ([Tuy23a], 220., p. 56). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = \frac{|x|}{x}$.

115 ([Tuy23a], 221., p. 57). *Cho 2 hàm số* $y = f(x) = |2x|$ *&* $y = g(x) = 3$. *(a) Vẽ trên cùng 1 hệ trục tọa độ* Oxy *đồ thị của 2 hàm số đã cho. (b) Dùng đồ thị tìm các giá trị của* x *sao cho* $|2x| < 3$.

116 ([Tuy23a], 222., p. 57). *Cho hàm số* $y = f(x) = 4x + 1 - 3(x+1)$. *(a) Chứng minh* y *là 1 hàm số bậc nhất đồng biến. (b) Tìm* x *để* $f(x) = 0$.

117 ([Tuy23a], 223., p. 57). *Xác định* $k \in \mathbb{R}$ *để hàm số* $y = f(x) = (2k-4)x^2 + (2k+1)x + 13k + 4$ *là hàm số bậc nhất. Khi đó, hàm số này là hàm số đồng biến hay nghịch biến?*

118 ([Tuy23a], 224., p. 57). *Cho 2 hàm số* $f(x) = mx - 2, g(x) = (m^2+1)x + 5$, *trong đó* $m \in \mathbb{R}^\star$. *Chứng minh: (a) Hàm số* $f(x) + g(x)$ *là hàm số bậc nhất đồng biến. (b) Hàm số* $f(x) - g(x)$ *là hàm số bậc nhất nghịch biến.*

119 ([Tuy23a], 225., p. 57). *Cho hàm số* $f(x) = 3x^2 + 1$. *Chứng minh* $f(x+1) - f(x)$ *là 1 hàm số bậc nhất.*

120 ([Tuy23a], 226., p. 57). *Cho hàm số* $y = f(x)$. *Biết* $f(x-1) = 3x - 5$, *chứng minh hàm số* $y = f(x)$ *là 1 hàm số bậc nhất.*

121 ([Tuy23a], 227., p. 57). *Xác định hàm số* $y = ax + b$ *biết đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm* A *có tung độ bằng* -1, *cắt trục hoành tại điểm* B *có hoành độ bằng* 3.

122 ([Tuy23a], 228., p. 57). *Cho đường thẳng* $(d): y = (m-2)x - m + 4$. *Chứng minh với mọi* $m \in \mathbb{R}$ *thì đường thẳng* (d) *luôn đi qua 1 điểm cố định.*

123 ([Tuy23a], 229., p. 57). *Cho 4 điểm* $A(0,5), B(-3,0), C(1,1), M(-4.5,-2.5)$. *(a) Chứng minh 3 điểm* A, B, M *thẳng hàng, 3 điểm* A, B, C *không thẳng hàng. (b) Tính diện tích của* ΔABC.

124 ([Tuy23a], 230., p. 57). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = |x-1|$.

125 ([BBN23], H1, p. 55). y *là hàm số bậc nhất của* $x \Leftrightarrow$: A. $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. B. $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$. C. $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. D. $y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

126 ([BBN23], H2, p. 55). *Phân loại hàm số: (a)* $y = \sqrt{2}(x-1)$. *(b)* $y = \sqrt{2x} - 1$. *(c)* $y = \frac{x^2}{x} + 4$. *(d)* $y = \frac{2}{x} + 1$.

127 ([BBN23], H3, p. 56). *Cho hàm số* $y = (m+1)x + 3m$. *Khi đó:* A. y *là hàm số bậc nhất của biến* x. B. y *là hàm số bậc nhất của biến* m. C. y *là hàm số bậc nhất.* D. *Với* $m \neq -1$, y *là hàm số bậc nhất của biến* x.

128 ([BBN23], H4, p. 56). *Tìm điều kiện của* m *để hàm số* $y = (3m-6)x + 8$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$.

129 ([BBN23], H5, p. 56). *Vẽ đồ thị hàm số* $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

130 ([BBN23], VD1, p. 56). *Với các giá trị nào của* m *thì mỗi hàm số sau là hàm số bậc nhất? (a)* $y = \sqrt{4-m}(x-1)$. *(b)* $y = \frac{m+2}{m-2}x + 3.5 + x$.

131 ([BBN23], VD2, p. 57). *1 hình chữ nhật có 2 kích thước là* 10 cm, 15 cm. *Bớt mỗi kích thước của hình chữ nhật đi* x cm *với* $0 < x < 10$. *Gọi chu vi của hình chữ nhật mới là* y cm. *(a) Lập công thức tính chu vi* y *của hình chữ nhật mới theo* x. *(b) Chứng minh* y *là hàm số bậc nhất của* x *& vẽ đồ thị hàm số đó.*

132 ([BBN23], VD3, p. 57). *(a) Vẽ đồ thị 2 hàm số* $y = x - 2$ *&* $y = -x - 1$ *trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (a) 2 đường thẳng* $y = -x - 1$ *&* $y = x - 2$ *cắt nhau tại* C *& cắt trục* Ox *theo thứ tự* A, B. *Tìm tọa độ của 3 điểm* A, B, C. *(c) Chứng minh* ΔABC *vuông cân. (d) Tính chu vi & diện tích* ΔABC.

133 ([BBN23], VD4, p. 58). *Cho hàm số* $y = (2m+1)x + m - 1$ *với* $m \neq -\frac{1}{2}$. *(a) Xác định* m *trong mỗi trường hợp: (i) Đồ thị hàm số đi qua* $M(1,1)$. *(ii) Đồ thị cắt trục tung, trục hoành lần lượt tại* A, B *sao cho* ΔOAB *cân. (iii) Đồ thị cắt trục tung, trục hoành lần lượt tại* A, B *sao cho* ΔOAB *có diện tích bằng* $\frac{1}{2}$. *(b) Tìm giá trị nguyên của* m *để đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là số nguyên. (c) Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của* m.

134 ([BBN23], 7.1., p. 60)**.** *Cho 3 hàm số $y = 2x+1$, $y = 4x$, $y = -2x+5$ theo thứ tự có đồ thị là 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. (a) Trong 3 hàm số này, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến? (b) Vẽ $(d_1), (d_2), (d_3)$ trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Trong 4 điểm $A(1,3), B(0,4), C(-1,-4), D(-2,9)$ có điểm nào nằm trên (d_1) hoặc (d_2) hoặc (d_3) không?*

135 ([BBN23], 7.2., p. 61)**.** *Lập công thức biểu thị y theo x. Cho biết công thức nào là hàm số bậc nhất (chỉ rõ a, b). (a) Diện tích tam giác y* cm^2 *có đáy là x* cm *& chiều cao tương ứng là* 6 cm*. (b) Chu vi hình thoi y* cm *với cạnh là x* cm*. (c) Chu vi đường tròn y* cm *với bán kính là x* cm*. (d) Diện tích hình tròn y* cm^2 *với bán kính là x* cm*.*

136 ([BBN23], 7.3., p. 61)**.** *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm $A(2,-1), B(-1,-7), C(3,1)$. (a) Viết phương trình đường thẳng BC. (b) Chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng.*

137 ([BBN23], 7.4., p. 61)**.** *Cho hàm số $y = (m-2)x + 3$. (a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến, nghịch biến, hàm hằng? (b) Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1,4)$. (c) Vẽ đồ thị hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở (b).*

138 ([BBN23], 7.5., p. 61)**.** *Cho 6 đường thẳng chứa 4 cạnh & 2 đường chéo của 1 hình chữ nhật có tâm trùng với gốc tọa độ. Tìm số đường thẳng là đồ thị của 1 hàm số bậc nhất?*

139 ([BBN23], 7.6., p. 61)**.** *Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A, B với: (a) $A(2,3), B(2,5)$. (b) $A(1,4), B(-5,4)$. (c) $A(2,2), B(-4,3)$. Từ đó đưa ra công thức tổng quát phương trình đường thẳng đi qua $A(x_1,y_1)$ & $B(x_2,y_2)$.*

140 ([BBN23], 7.7., p. 61)**.** *Cho 3 đường thẳng $(d_1): y = 1-x$, $(d_2): x - y = 3$, $(d_3): (m+1)x + (m-1)y = 1+2m$. (a) Xác định m để 3 đường thẳng cùng đi qua 1 điểm. (b) Chứng minh khi m thay đổi, đường thẳng (d_3) luông đi qua 1 điểm cố định.*

141 ([BBN23], 7.8., p. 61)**.** *Cho hàm số $y = (m^2+m+1)x + 6$ có đồ thị (d). (a) Chứng minh: $\forall m \in \mathbb{R}$, y luôn là hàm số bậc nhất đồng biến. (b) Tìm m để (d) cắt Ox tại A, cắt Oy tại B sao cho: (i) Diện tích ΔAOB bằng 4. (ii) Diện tích ΔAOB lớn nhất.*

142 ([BBN23], p. 62, Mối quan hệ giữa độ F & độ C)**.** *Độ Fahrenheit (độ* F *hay* °F*) là thang nhiệt được đặt theo tên nhà Vật lý người Đức Gabriel Fahrenheit (1686–1736) – người đã đề xuất ra nó năm 1724. Theo đó, nước đóng bằng ở* 32°F *& sôi ở* 212°F *(2 trạng thái này chênh lệch* 180°F*). Độ Celsius (độ* C *hay* °C*) là thang nhiệt được đặt theo tên nhà thiên văn học người Thụy Điển Anders Celsius (1701–1744) – người đầu tiên đề nghị hệ thống đo nhiệt độ* C *năm 1742 & đến năm 1750, độ* C *còn gọi là độ bách phân. Theo đó, nước đóng băng ở* 0°C *& sôi ở* 100°C*. Do đó, mỗi độ thuộc thang đo Celcius bằng $\frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$ độ thuộc thang đo Fahrenheit. Ngày nay, đa số các nước sử dụng thang nhiệt độ là độ* C*, tuy nhiên 1 số nước, e.g., Mỹ, vẫn sử dụng nhiệt kế chia mức độ nhiệt độ theo độ* F*. Mối quan hệ giữa số đo độ* F*, ký hiệu là* $T_{\rm F}$*, & số đo độ* C*, ký hiệu là* $T_{\rm C}$*:* $T_{\rm F} = 1.8TT_{\rm C} + 32$*. (a)* $T_{\rm F}, T_{\rm C}$ *có là hàm số bậc nhất có nhau không. (b) Xét tính đồng biến, nghịch biến của 2 hàm số này.*

143 ([BBN23], VD1, p. 63)**.** *Xét sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số $y = |2x+3|$.*

144 ([BBN23], VD2, p. 63)**.** *Cho hàm số $y = |x-1| + |x-5|$. (a) Vẽ đồ thị hàm số. (b) Xác định* GTNN *của hàm số.*

145 ([BBN23], p. 64)**.** *Xét sự biến thiên & vẽ đồ thị hàm số: (a) $y = |-3x+1|$. (b) $y = |x+1| + |2x-3|$.*

146 ([Tuy23b], VD17, p. 36)**.** *Cho hàm số $y = mx - 2m + 5$. (a) Vẽ đồ thị hàm số với $m = 3$. (b) Chứng minh với mọi giá trị của m, đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua 1 điểm cố định.*

147 ([Tuy23b], 105., p. 37)**.** *Cho $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ là 2 điểm nằm trên đường thẳng $y = \sqrt{3}x + b$. Chứng minh $AB = 2|x_2 - x_1|$.*

148 ([Tuy23b], 106., p. 37)**.** *Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm A có tung độ bằng -1, cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ bằng 3.*

149 ([Tuy23b], 107., p. 37)**.** *Cho $A(0,5), B(-3,0), C(1,1), D(-4.5,-2.5)$. (a) Chứng minh 3 điểm A, B, D thẳng hàng, & 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. (b) Tính diện tích ΔABC.*

150 ([Tuy23b], 108., p. 37)**.** *Cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x - m + 4$. Chứng minh với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn đi qua 1 điểm cố định.*

151 ([Tuy23b], 109., p. 37)**.** *Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2}x + \frac{2\sqrt{x^2}}{x}$.*

152 ([Tuy23b], 110., p. 37)**.** *Vẽ đồ thị hàm số: (a) $y = |x-1|$. (b) $y = |x+1| + \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$.*

153 ([Tuy23b], 111., p. 37)**.** *Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$.*

154 ([Tuy23b], 112., p. 37)**.** *Cho điểm $A(-2,0)$ & (d) là đồ thị hàm số $y = 2x - \frac{3x}{x}$. Qua điểm A có thể vẽ được bao nhiêu đường thẳng không cắt (d)?*

155 ([Bìn23], VD22, p. 29). *Cho 2 điểm* $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ *với* $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$. *Chứng minh nếu đường thẳng* $y=ax+b$ *đi qua* A,B *thì* $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

156 ([Bìn23], VD23, p. 29). *Cho đường thẳng* $y=mx+m-1$ *với tham số* m. *(a) Chứng minh đường thẳng này luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi* $m\in\mathbb{R}$. *(b) Tính giá trị của* m *để đường thẳng này tạo với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích bằng* 2.

157 ([Bìn23], 62., p. 30). *Tìm điểm cố định mà mỗi đường thẳng sau luôn đi qua với mọi giá trị của* $m\in\mathbb{R}$*: (a)* $y=(m-2)x+3$. *(b)* $y=mx+m+2$. *(c)* $y=(m-1)x+2m-1$.

158 ([Bìn23], 63., p. 30). *Cho đường thẳng* $(d): y=2x+11$. *Tìm phương trình đường thẳng* d' *đối xứng với đường thẳng* d *qua trục hoành.*

159 ([Bìn23], 64., p. 30). *Cho đường thẳng* $(d): y=2x+4$. *Tìm phương trình đường thẳng* d' *đối xứng với đường thẳng* d *qua đường thẳng* $y=x$.

160 ([Bìn23], 65., p. 31). *Xác định đường thẳng đi qua 2 điểm* A,B*: (a)* $A(-2,0),B(0,1)$. *(b)* $A(1,4),B(3,0)$. *(c)* $A(-2,2),B(1,5)$. *(d)* $A(2,-33),B(-1,18)$.

161 ([Bìn23], 66., p. 31). *(a) Cho 4 điểm:* $A(0,-5),B(1,-2),C(2,1),D(2.5,2.5)$. *Chứng minh 4 điểm* A,B,C,D *thẳng hàng. (b) Tìm* $x\in\mathbb{R}$ *sao cho 3 điểm* $A(x,14),B(-5,20),C(7,-16)$ *thẳng hàng.*

162 ([Bìn23], 67., p. 31). *Điểm* $M(x,y)$ *cách đều trục tung, trục hoành, & đường thẳng* $y=-x+2$. *Tìm* $M(x,y)$.

163 ([Bìn23], 68., p. 31). *Chứng minh nếu 1 đường thẳng không đi qua gốc tọa độ, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng* a, *cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* b *thì đường thẳng có phương trình* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

164 ([Bìn23], 69., p. 31). *Xác định* $a,b\in\mathbb{Z}$ *sao cho đường thẳng* $y=ax+b$ *đi qua điểm* $A(4,3)$, *cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1 số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 1 số nguyên dương.*

165 ([Bìn23], 70., p. 31). *Xác định đường thẳng đi qua* $A(4,3)$, *cắt trục tung tại điểm có tung độ là 1 số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 1 số nguyên tố.*

166 ([Bìn23], 71., p. 31). *Vẽ đồ thị hàm số: (a)* $y=|x|-2$. *(b)* $y=|2x+1|$.

167 ([Bìn23], 72., p. 32). *Vẽ đồ thị hàm số* $y=|x-1|+|x-3|$ *rồi dùng đồ thị tìm* GTNN *của* y.

168 ([Bìn23], 73., p. 32). *Dùng đồ thị để chứng minh bất đẳng thức* $\sqrt{x^2-4x+4}>x-3$.

169 ([Bìn23], 74., p. 32). *Cho hàm số* $f(x)=ax+b$ *có tính chất* $f(3)\le f(1)\le f(2)$, $f(4)=2$. *Chứng minh* $a=0$, $f(0)=2$.

170 ([Bìn23], 75., p. 32). *Cho 2 điểm* $A(6,0),B(0,4)$. *1 điểm* M *di chuyển trên đoạn thẳng* AB. *Gọi* C,D *theo thứ tự là hình chiếu của* M *trên* OA,OB. *Điểm* N *thuộc đoạn thẳng* CD *sao cho* $DN=2CN$. *Chứng minh điểm* N *nằm trên 1 đường thẳng.*

171 ([Bìn23], 76., p. 32). *Tìm hệ số* $a>0$ *sao cho 3 đường thẳng* $y=ax-1,y=1,y=5$ *& trục tung tạo thành 1 hình thang có diện tích bằng* 8.

172 ([Bìn23], 77., p. 32). *Cho đường thẳng* $(d): y=(m-2)x+2$. *(a) Chứng minh đường thẳng* d *luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi* $m\in\mathbb{R}$. *(b) Tìm giá trị của* m *để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng* d *bằng* 1. *(c) Tìm giá trị của* m *để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng* d *có* GTLN.

173 ([Bìn23], 78., p. 32). *Cho 3 điểm* $A(7,2),B(2,8),C(8,4)$. *Xác định đường thẳng* d *đi qua* A *sao cho 2 điểm* B,C *nằm về 2 phía của* d *& cách đều* d.

174 ([Bìn23], 79., p. 32). *Với mỗi* $\in\mathbb{R}$, *gọi* $f(x)$ *là* GTNN *trong 3 số* $4x+1,x+2,-2x+6$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số* $y=f(x)$. *(b) Tìm* GTLN *của* $f(x)$.

175 ([BNS23], VD7.1, p. 40). *Cho hàm số bậc nhất* $y=ax+b$. *(a) Vẽ đồ thị* (d) *của hàm số khi* $a=b=3$. *Giả sử* (d) *đi qua điểm* $E\in Ox,F\in Oy$. *Tính diện tích* ΔOEF. *(b) Giả sử* $b=2a$. *Chứng minh với mỗi giá trị* $a\neq 0$ *đường thẳng* (d_a) *xác định bởi phương trình* $y=ax+2a$ *luôn đi qua 1 điểm cố định.*

176 ([BNS23], VD7.2, p. 40). *Cho hàm số* $y=f(x)=|x-1|+|x-6|$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số. (b) Xác định* GTLN *của* m *để* $f(x)\ge m$ *với mọi giá trị của* x.

177 ([BNS23], VD7.3, p. 41). *Cho hàm số* $y=f(x)=|x-2|+|x-5|-|3x+6|$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số. (b) Xác định* GTNN *của* m *để* $f(x)\le m$ *với mọi giá trị của* x.

178 ([BNS23], 7.1., p. 41). *Chứng minh hàm số*

$$y=\begin{cases}-1, & \text{nếu } x\le -1,\\ x, & \text{nếu } -1<x<1,\\ 1, & \text{nếu } x\ge 1,\end{cases}$$

là hàm số lẻ & vẽ đồ thị của nó.

179 ([BNS23], 7.2., p. 41). *Chứng minh hàm số*

$$y=\begin{cases}-x, & \text{nếu } x\le -1,\\ 1, & \text{nếu } -1<x<1,\\ x, & \text{nếu } x\ge 1,\end{cases}$$

là hàm số chẵn & vẽ đồ thị của nó.

180 ([BNS23], 7.3., p. 41). *Vẽ đồ thị hàm số* $y=2|3x-5|+|x-2|+4x$.

181 ([BNS23], 7.4., p. 42). *Cho hàm số* $y=f(x)=2|x-7|+3|x-1|-4|x|$. *(a) Vẽ đồ thị hàm số. (b) Giải & biện luận phương trình* $f(x)=m$.

182 ([BNS23], 7.5., p. 42). *Cho hàm số* $y=f(x)=|x-1|+|x-2|+|x+1|$. *(a) Vẽ đồ thị & tìm* GTNN *của hàm số. (b) Giải & biện luận phương trình* $f(x)=m$. *(c) Tìm* m *để phương trình* $f(x)=m$ *có vô số nghiệm.*

183 ([BNS23], 7.6., p. 42). *Giải & biện luận phương trình* $\dfrac{|x-5|+|x+5|}{|x-5|-|x+5|}=m$.

184 ([BNS23], 7.7., p. 42). *Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm* $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

185 ([BNS23], 7.8., p. 42). *Giả sử đường thẳng* $(d):y=ax+5$. *Xác định* a *biết đường thẳng* (d) *đi qua điểm* $A(5,5)$. *Tính khoảng cách từ* O *đến* (d).

186 ([BNS23], 7.9., p. 42). *Xác định các giá trị của* m *để phương trình* $|x-3|-|5x+7|+8|x+2|=m$ *có nhiều hơn 1 nghiệm.*

187 ([BNS23], 7.10., p. 42). *Xác định các giá trị của* m *để phương trình* $|x-3|+|x+7|=m$ *có vô số nghiệm.*

8 Đường Thẳng Song Song & Đường Thẳng Cắt Nhau. Hệ Số Góc Của Đường Thẳng $y=ax+b$, $a\ne 0$

$\boxed{1}$ Cho 2 đường thẳng $(d_1):y=ax+b,a\ne 0,(d_2):y=a'x+b',a'\ne 0$. $(d_1)\parallel(d_2)\Leftrightarrow a=a',b\ne b'$. $(d_1)\equiv(d_2)\Leftrightarrow a=a',b=b'$. (d_1) cắt $(d_2)\Leftrightarrow a\ne a'$ & hoành độ của giao điểm là nghiệm của *phương trình hoành độ* $ax+b=a'x+b'$. $(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow aa'=-1$.
$\boxed{2}$ Ký hiệu α là góc tạo bởi đường thẳng $y=ax+b$ & trục Ox. α là góc nhọn, i.e., $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)\Leftrightarrow a=\tan\alpha>0$. α là góc tù, i.e., $\alpha\in(90^\circ,180^\circ)\Leftrightarrow a=\tan\alpha<0$. Các đường thẳng có cùng hệ số a (hệ số của x) thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau. a gọi là *hệ số góc* của đường thẳng $y=ax+b$.

188 ([Tuy23a], VD39, p. 58). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1):y=mx-2(m+2)$ *với* $m\ne 0$, $(d_2):y=(2m-3)x+m^2-1$ *với* $m\ne\dfrac{3}{2}$. *(a) Chứng minh với mọi* $m\in\mathbb{R}$, *2 đường thẳng* $(d_1),(d_2)$ *không thể trùng nhau. (b) Tìm các giá trị của* $m\in\mathbb{R}$ *để: (i)* $(d_1)\parallel(d_2)$. *(ii)* (d_1) *cắt* (d_2). *(iii)* $(d_1)\perp(d_2)$.

Giải. (a) $(d_1)\equiv(d_2)\Leftrightarrow m=2m-3\wedge -2(m+2)=m^2-1\Leftrightarrow m=3\wedge(m+2)^2+2=0\Leftrightarrow(-3+2)^2+2=3=0$ vô lý nên $(d_1)\not\equiv(d_2)$. (b) (i) $(d_1)\parallel(d_2)\Leftrightarrow m=2m-3\wedge -2(m+2)=m^2-1\Leftrightarrow m=3\wedge(m+1)^2+2\ne 0\Leftrightarrow m=3$. (ii) (d_1) cắt $(d_2)\Leftrightarrow m\ne 2m-3\Leftrightarrow m\ne 3$. (iii) $(d_1)\perp(d_2)\Leftrightarrow m(2m-3)=-1\Leftrightarrow 2m^2-3m+1=0\Leftrightarrow(m-1)(2m-1)=0\Leftrightarrow m-1\vee m=\frac{1}{2}$. □

189 ([Tuy23a], 231, p. 59). *Xác định hàm số* $y=ax+b$ *biết đồ thị của nó song song với đường thẳng* $y=-\dfrac{2}{3}x+1$ *& đi qua điểm* $A(3,-1)$.

190 ([Tuy23a], 232, p. 59). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1):y=-2x+3,(d_2):y=-2x+m,(d_3):y=\dfrac{1}{2}x+1$. *Không vẽ 3 đường thẳng này, cho biết vị trí tương đối của chúng đối với nhau.*

191 ([Tuy23a], 233, p. 59). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1):y=(2m+1)x-(2m+3)$ *với* $m\ne-\dfrac{1}{2}$, $(d_2):y=(m-1)x+m$ *với* $m\ne 1$. *Tìm giá trị của* $m\in\mathbb{R}$ *để: (a)* (d_1) *cắt* (d_2). *(b)* $(d_1)\parallel(d_2)$. *(c)* $(d_1)\perp(d_2)$.

192 ([Tuy23a], 234, p. 59). *Cho điểm* $A(3,2)$. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua* A *& vuông góc với* OA.

193 ([Tuy23a], 235, p. 59). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1):y=-3x,(d_2):y=2x+5,(d_3):y=x+4$. *Chứng minh 3 đường thẳng này đồng quy.*

194 ([Tuy23a], 236, p. 59). *Tìm giá trị của* $m\in\mathbb{R}$ *để 3 đường thẳng* $(d_1):y=x-4,(d_2):y=-2x-1,(d_3):y=mx+2$ *đồng quy.*

195 ([BBN23], H1, p. 66). *Đồ thị hàm số* $y=(\sqrt{5}-2)x+3$ *cắt đồ thị hàm số:* A. $y=\sqrt{5}x-2x$. B. $y=(\sqrt{5}-1)x+4-x$. C. $y=-2x+\sqrt{5}$. D. $y=-2x+\sqrt{5}x+2$.

196 ([BBN23], H2, p. 66). *Cho 4 đường thẳng:* $(d_1): y = 1-5x$, $(d_2): y = -5x+2$, $(d_3): y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$, $(d_4): y = 3x + \frac{1}{3}$. *Đ/S? (a)* $(d_1)\perp(d_3)$. *(b)* $(d_1)\parallel(d_2)$. *(c)* $(d_1)\parallel(d_4)$. *(d)* (d_2) *cắt* (d_4).

197 ([BBN23], H3, p. 66). *Tìm m để 2 đường thẳng* $(d_1): y = m^2x - 5$ *&* $(d_2): y = 9x + 2m + 1$ *song song với nhau.*

198 ([BBN23], H4, p. 66). *Tìm hệ số góc của đường thẳng* $5x + 2y = 3$.

199 ([BBN23], VD1, p. 67). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1): y = (2m-1)x + 2m - 3$, $(d_2): y = (m+1)x + m$. *Xác định m để: (a)* (d_1) *cắt* (d_2). *(b)* $(d_1)\parallel(d_2)$. *(c)* $(d_1)\perp(d_2)$.

200 ([BBN23], VD2, p. 67). *Cho 2 đường thẳng* $(d_1): y = x - 7$, $(d_2): y = -2x - 1$. *Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của* (d_1) *&* (d_2) *đồng thời song song với đường thẳng* $(d_3): x - 2y + 1 = 0$.

201 ([BBN23], VD3, p. 68). *Cho hàm số* $y = (m-1)x + m + 3$, *m: tham số. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số tạo với trục Ox 1 góc bằng: (a)* 60°. *(b)* 120°. *(c)* α°.

202 ([BBN23], VD4, p. 68). *Cho 2 đường thẳng* $(d_1): y = 3x + 2$, $(d_2): y = (2m^2+1)x + m + 1$. *Xác định m để* (d_1) *song song với* (d_2). *Khi đó xác định khoảng cách giữa chúng.*

203 ([BBN23], VD5, p. 69). *Cho* ΔABC *vuông tại A,* $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. *Trên cạnh BC lấy điểm M & ký hiệu* $BM = x$ cm, $0 < x < 5$. *Gọi* $f(x)$ *là diện tích của* ΔABM, $g(x)$ *là diện tích của* ΔACM. *(a) Chứng minh* $f(x), g(x)$ *là 2 hàm số bậc nhất của x. (b) Vẽ đồ thị 2 hàm số trên cùng 1 mặt phẳng tọa độ. (c) Gọi I là giao điểm của 2 đồ thị. Xác định tọa độ điểm I. Hoành độbiết & tung độ của điểm I cho ta biết điều gì?*

204 ([BBN23], VD6, p. 70). *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm* $A(-1,1), B(0,2), C(3,1)$. *(a) Xác định tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành. (b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình vuông.*

205 ([BBN23], 8.1., p. 71). *Nêu điều kiện để 3 đường thẳng* $(d_1): y = a_1x + b_1$, $(d_2): y = a_2x + b_2$, $(d_3): y = a_3x + b_3$. *(a) Song song với nhau. (b) Đôi một cắt nhau. (c) Đồng quy tại 1 điểm.*

206 ([BBN23], 8.2., p. 71). *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* $A(2,-3)$ *&: (a) Song song với đường thẳng* $(d_1): y = 2x + 5$. *(b) Vuông góc với đường thẳng* $(d_2): y = -\frac{1}{3}x + 7$. *(c) Đồng quy với 2 đường thẳng* $(d_3): y = x - 1$ *&* $(d_4): y = 3x + 5$.

207 ([BBN23], 8.3., p. 71). *2 đường thẳng* $(d): 4mx + 3y = -2$ *&* $(d'): 2my = nx - 2$ *cắt nhau tại điểm* $M(1,-2)$. *Tìm hệ số góc của mỗi đường thẳng* $(d), (d')$.

208 ([BBN23], 8.4., p. 71). *(a) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua 2 điểm* $A(2,-1), B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. *(b) Chứng minh 3 điểm* $A, B, C(5,-7)$ *thẳng hàng. (c) Với giá trị nào của m thì đồ thị của 2 hàm số* $y = mx + 5$, $y = 3x - 7$, *& đường thẳng (d) đồng quy?*

209 ([BBN23], 8.5., p. 71). *(a) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm* $A(-3,2)$ *& song song với đường thẳng* $y = 3x - 5$. *(b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng song song đó.*

210 ([BBN23], 8.6., p. 71). *Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 điểm* $A(-3,2), B(-1,-1), C(2,0)$. *(a) Viết phương trình đường thẳng chứa 3 cạnh của* ΔABC. *(b) Viết phương trình đường cao* AD, BE, CF *của* ΔABC. *(c) Tìm tọa độ trực tâm H của* ΔABC.

211 ([BBN23], 8.7., p. 71). *Cho 2 hàm số bậc nhất với m: tham số,* $y = (m+1)x + 2m - 1$, $y = (2m-3)x + 3m - 6$. *(a) Xác định giá trị của m để đồ thị của chúng: (i) Song song với nhau. (ii) Cắt nhau tại 1 điểm trên trục tung. (iii) Cắt nhau tại 1 điểm nằm ở bên phải tung. (b) Chứng minh khi m thay đổi thì đồ thị của mỗi hàm số trên đều đi qua 1 điểm cố định.*

212 ([BBN23], 8.8., p. 71). *Cho 3 đường thẳng* $(d_1): y = 4x, (d_2): y = x + 3, (d_3): y = -x + 5$. *(a) Chứngm inh* $(d_1), (d_2), (d_3)$ *cắt nhau tại 1 điểm A. Xác định tọa độ điểm A. (b) Gọi B là giao điểm của* (d_2) *với trục hoành, C là giao điểm của* (d_3) *với trục hoành. Chứng minh* ΔABC *vuông cân.*

213 ([BBN23], p. 72, Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cho trước). *Cho 2 điểm* $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. *Chứng minh: (a) Nếu* $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ *thì đường thẳng AB cắt 2 trục tọa độ & có phương trình* $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. *(b) Nếu* $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$ *thì đường thẳng* $AB\perp Ox$, *cắt trục Ox tại điểm có hoành độ* x_1 *& có phương trình* $x = x_1$ $(= x_2)$. *(c) Nếu* $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$ *thì đường thẳng* $AB\perp Oy$, *cắt trục Ox tại điểm có tung độ* y_1 *& có phương trình* $y = y_1$ $(= y_2)$.

214 ([Tuy23b], VD18, p. 38). *Cho 2 đường thẳng* $(d_1): y = mx - 2(m+2)$ *với* $m \neq 0$, $(d_2): y = (2m-3)x + m^2 - 1$ *với* $m \neq \frac{3}{2}$. *(a) Chứng minh với mọi giá trị của m, 2 đường thẳng* $(d_1), (d_2)$ *không thể trùng nhau. (b) Tìm các giá trị của* $m \in \mathbb{R}$ *để: (i)* $(d_1)\parallel(d_2)$. *(ii)* (d_1) *cắt* (d_2). *(iii)* $(d_1)\perp(d_2)$.

215 ([Tuy23b], 113., pp. 39–40). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1): y = -2x + 3$, $(d_2): y = -2x + m$, $(d_3): y = \frac{1}{2}x + 1$. *Không vẽ 3 đường thẳng này, cho biết vị trí tương đối của chúng đối với nhau.*

216 ([Tuy23b], 114., p. 40). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1): y = (2m+1)x - (2m+3)$ *với* $m \ne -\frac{1}{2}$, $(d_2): y = (m-1)x + m$ *với* $m \ne 1$. *Tìm giá trị của m để: (a)* (d_1) *cắt* (d_2). *(b)* $(d_1) \parallel (d_2)$. *(c)* $(d_1) \perp (d_2)$.

217 ([Tuy23b], 115., p. 40). *Cho điểm* $A(3,2)$. *Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A & vuông góc với OA. Tính góc tạo thành bởi đường thẳng (d) & trục Ox.*

218 ([Tuy23b], 116., p. 40). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1): y = -3x$, $(d_2): y = 2x + 5$, $(d_3): y = x + 4$. *Chứng minh 3 đường thẳng này đồng quy.*

219 ([Tuy23b], 117., p. 40). *Tìm giá trị của m để 3 đường thẳng sau đồng quy:* $(d_1): y = x - 4$, $(d_2): y = -2x - 1$, $(d_3): y = mx + 2$.

220 ([Tuy23b], 118., p. 40). *Tìm diện tích hình giới hạn bởi 3 đường thẳng:* $(d_1): y = \frac{1}{3}x$, $(d_2): y = -3x$, $(d_3): y = -x + 4$.

221 ([Bìn23], VD24, p. 33). *Tìm* $m, n > 0$ *sao cho hệ số góc của đường thẳng* $y = mx$ *gấp 4 lần hệ số góc của đường thẳng* $y = nx$, *góc tạo bởi đường thẳng* $y = mx$ *với trục Ox gấp đôi góc tạo bởi đường thẳng* $y = nx$ *với trục Ox.*

222 ([Bìn23], VD25, p. 33). *Cho 2 đường thẳng* $(d): y = ax, (d'): y = a'x$ *với* $aa' \ne 0$. *Chứng minh điều kiện để 2 đường thẳng vuông góc với nhau, i.e.,* $d \perp d'$ *là* $aa' = 1$.

223 ([Bìn23], 80., p. 34). *Tìm giá trị của* $m \in \mathbb{R}$ *để 2 đường thẳng* $y = 2x + 3, y = (m-1)x + 2$*: (a) Song song. (b) Cắt nhau. (c) Vuông góc với nhau.*

224 ([Bìn23], 81., p. 34). *Tìm giá trị của* $m \in \mathbb{R}$ *để 2 đường thẳng* $y = mx + 1$ *&* $y = (3m-4)x - 2$*: (a) Song song. (b) Cắt nhau. (c) Vuông góc với nhau.*

225 ([Bìn23], 82., p. 34). *Xác định 2 hệ số* $a, b \in \mathbb{R}$ *để đường thẳng* $y = ax + b$ *cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* -2 *& song song với đường thẳng OA với* $A(\sqrt{2}, 1)$.

226 ([Bìn23], 83., p. 34). *Xác định đường thẳng đi qua gốc O & song song với đường thẳng AB biết: (a)* $A(-1,1), B(-1,3)$. *(b)* $A(1,2), B(3,2)$. *(c)* $A(1,5), B(4,3)$.

227 ([Bìn23], 84., p. 34). *Cho 3 điểm* $A(-1,6), B(-4,4), C(1,1)$. *Tìm tọa độ đỉnh D của hình bình hành ABCD.*

228 ([Bìn23], 85., p. 34). *Cho 4 điểm* $A(1,4), B(3,5), C(6,4), D(2,2)$. *Tứ giác ABCD là hình gì?*

229 ([Bìn23], 86., p. 34). *Các bộ 3 đường thẳng sau có cắt nhau tọa thành tam giác vuông không? (a)* $y = 2x - 5, y = \frac{1}{2}x + 1, y = 2x + 3$. *(b)* $y = 2x - 5, y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, y = x - 2$. *(c)* $y = -x + 1, y = x + 3, y = -2x + 6$.

230 ([Bìn23], 87., p. 35). *Tính hệ số góc của đường thẳng* $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

231 ([Bìn23], 88., p. 35). *2 điểm* $A(m,3), B(1,m)$ *nằm trên đường thẳng có hệ số góc* $m > 0$. *Tìm giá trị của m.*

232 ([Bìn23], 89., p. 35). *Chứng minh nếu 1 đường thẳng đi qua điểm* $A(x_1, y_1)$ *& có hệ số góc bằng a thì đường thẳng đó có phương trình* $y - y_1 = a(x - x_1)$.

233 ([BNS23], VD8.1, p. 44). *Xác định giá trị của m để 3 đường thẳng* $(d_1): y = 2x + 1, (d_2): y = 4x - 1, (d_3): y = 2mx - 3$ *đồng quy.*

234 ([BNS23], VD8.2, p. 44). *Cho 2 đường thẳng được xác định bởi* $(d_1): y = 3x + 5m + 2, (d_2): y = 7x - 3m - 6$. *(a) Xác định tọa độ giao điểm A của* $(d_1), (d_2)$. *(b) Chứng minh khi m thay đổi giao điểm A luôn luôn chạy trên 1 đường thẳng cố định.*

235 ([BNS23], VD8.3, p. 45). *Xác định giá trị của m để 2 đường thẳng* $(d_1): y = \frac{1}{2}x - 5, (d_2): y = 2mx - 5$ *vuông góc với nhau & tìm tọa độ giao điểm.*

236 ([BNS23], VD8.4, p. 45). *Giả sử đường thẳng* $(d_m): y = 2(m+1)x + m - 1$. *(a) Chứng minh với mọi giá trị của m đường thẳng* (d_m) *luôn luôn đi qua 1 điểm cố định A. (b) Xác định giá trị của m để đường thẳng* (d_m) *vuông góc với đường thẳng* $(d): y = 3x + 18$. *Tính khoảng cách từ A đến (d).*

237 ([BNS23], VD8.5, p. 45). *Cho các đường thẳng* $(d_m): y = 2x + m - 1$. *Tìm giá trị của m để khoảng cách từ mỗi đường thẳng ứng với giá trị ấy của m đến điểm* $A(-1,1)$ *bằng 2.*

238 ([BNS23], 8.1., p. 47). *2 đường thẳng được cho bởi* $(d_m): y = \frac{m+1}{2m}x + \frac{m-1}{2m}, (h_m): y = -\frac{1}{m}x - \frac{m-2}{m}$ *với* $m \ne 0$. *(a) Xác định giá trị của m để* $(d_m) \parallel (h_m)$. *(b) Xác định giá trị của m để* $(d_m) \equiv (h_m)$.

239 ([BNS23], 8.2., p. 47). *Xác định giá trị của m để 2 đường thẳng* $(d): y = mx - 5, (d'): y = x + m$ *cắt nhau tại 1 điểm thuộc: (a) Trục tung. (b) Trục hoành.*

240 ([BNS23], 8.3., p. 47). *ác định giá trị của m để 2 đường thẳng $(d_1): y = (m+2)x + 3, (d_2): y = 2mx - 3m$ song song với nhau.*

241 ([BNS23], 8.4., p. 47). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $(d_m): y = (1-m)x + 2, (h_m): y = (m+1)x - 3$. (a) Biện luận theo m vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng $(d_m), (h_m)$. (b) Xác định các giá trị của m để $(d_m) \perp (h_m)$.*

242 ([BNS23], 8.5., p. 48). *Cho đường thẳng $(d): y = x - 5$. (a) Xác định các điểm $M \in Ox$ sao cho khoảng cách từ M đến (d) bằng 2. (b) Xác định các điểm $N \in Ox$ sao cho khoảng cách từ N đến (d) bằng 2.*

243 ([BNS23], 8.6., p. 48). *Xác định các giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm $A(-1,1)$ đến đường thẳng $(d): y = x + m$ bằng 1.*

244 ([BNS23], 8.7., p. 48). *Cho đường thẳng $(d_m): y = \dfrac{m^2-1}{2m}x + \dfrac{2m+1}{m}$, $m \neq 0$, điểm $A(1,2)$. Tính khoảng cách từ A đến (d_m) & chứng minh $\forall m \neq 0$, các đường thẳng (d_m) luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.*

245 ([BNS23], 8.8., p. 48). *Cho 2 điểm $B(1,0), C(5,2)$. Xác định điểm $A(x,6)$ để ΔABC đều.*

246 ([BNS23], VD9.1, p. 49). *Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$, $a \neq 0$. Giả sử đường thẳng này cắt trục Ox tại $E\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$. Lấy điểm $M(x_1, y_1 = ax_1 + b)$ với $y_1 > 0$ & đặt $\alpha = \widehat{MEx}$. Chứng minh: (a) Góc α không phụ thuộc vào hệ số b. (b) Nếu $a > 0$ thì α là góc nhọn, nếu $a < 0$ thì α là góc tù.*

247 ([BNS23], VD9.2, p. 49). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy 4 điểm $A(6,0), B(8,0), C(0,4), D(0,12)$. Gọi M là trung điểm đoạn AC. (a) Xác định hệ số góc của đường thẳng OM. (b) Chứng minh $OM \perp BD$.*

248 ([BNS23], VD9.3, p. 50). *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy 3 điểm $A(u,v), B\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right), C\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$, với $u \neq \pm\dfrac{a}{2}$. Đặt $c \coloneqq AB, b \coloneqq AC, m \coloneqq AO$. Chứng minh: (a) $a^2 + 4m^2 = 2(b^2 + c^2)$. (b) Viết phương trình đường thẳng AB, AC.*

249 ([BNS23], 9.1., p. 50). *Giả sử đường thẳng (d) xác định bởi phương trình $y = x$. Xác định góc giữa (d) & tia Ox.*

Giải. Đặt $\alpha = ((d), Ox)$, $\tan\alpha = a = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = 45^\circ$. □

250 ([BNS23], 9.2., p. 50). *Xác định góc giữa đường thẳng (d') với tia Ox biết (d') đi qua điểm $A(1,1)$ & vuông góc với đường thẳng $(d): y = x$.*

Giải. Gọi $(d'): y = ax + b$. $(d) \perp (d') \Leftrightarrow a = -1$. $A(1,1) \in (d') \Leftrightarrow 1 = -1 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 2$, suy ra $(d'): y = -x + 2$. Đặt $\alpha = ((d'), Ox) \in [0^\circ, 180^\circ]$, có $\tan\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \arctan -1 = 135^\circ$. □

251 ([BNS23], 9.3., p. 50). *Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$. (a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ là 1 hình vuông. (b) Tìm phương trình xác định 4 cạnh AB, BC, CD, DA. (c) Tìm phương trình xác định đường thẳng đi qua trung điểm cạnh AB & trung điểm cạnh CD.*

252 ([BNS23], 9.4., p. 50). *Xác định giá trị của a để đường thẳng $(d): y = ax + b$ lập với tia Ox 1 góc 60°.*

253 ([BNS23], 9.5., p. 50). *Trong mặt phẳng Oxy cho 4 điểm $A(2,0), B(0,3), C(10,0), D(0,m)$. Xác định m để đường thẳng $OH \perp AB$ đi qua trung điểm CD.*

254 ([BNS23], 9.6., p. 50). *Cho ΔABC với độ dài 3 cạnh a, b, c. Gọi độ dài 3 đường trung tuyến là m_1, m_2, m_3. Chứng minh: $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$.*

255 ([BNS23], 9.7., p. 50). *Cho 2 điểm phân biệt $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Lập phương trình đường thẳng AB & tính hệ số góc của AB.*

Giải. Gọi $(d): y = ax + b$ là đường thẳng đi qua 2 điểmA $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, có hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn a, b:

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1, \\ ax_2 + b = y_2. \end{cases}$$

Trừ 2 phương trình của hệ, vế theo vế, được $a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$. Nếu $x_1 = x_2$, thay vào phương trình cuối được: $a \cdot 0 = 0 = y_2 - y_1 \Rightarrow y_1 = y_2$ vô lý vì$A(x_1, y_1) \neq B(x_2, y_2)$. $\Rightarrow a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. □

9 Miscellaneous

256 ([Tuy23a], VD40, p. 60). *Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(x,y)$, trong đó $x = m+2, y = 3m-1$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp các điểm A.*

257 ([Tuy23a], VD41, p. 60). *Giải phương trình:* $8\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 34\left(x+\frac{1}{x}\right) + 51 = 0.$

Giải phương trình:

258 ([Tuy23a], 237., p. 61). $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$

259 ([Tuy23a], 238., p. 61). $\frac{15x}{x^2+3x-4} - 1 = 12\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{3x-3}\right).$

260 ([Tuy23a], 239., p. 61). $\frac{2+4+6+\cdots+2x}{1+3+5+\cdots+(2x-1)} = \frac{16}{15}, x \in \mathbb{N}^\star.$

261 ([Tuy23a], 240., p. 61). *(a)* $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0.$ *(b)* $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 16.$

262 ([Tuy23a], 241., p. 61). *2 đội công nhân cùng làm 1 công việc thì sau 4 ngày sẽ xong. Nếu đội I làm 3 ngày rồi đội II làm tiếp trong 6 ngày nữa thì cũng xong. Hỏi mỗi đội làm 1 mình thì mất bao lâu mới xong công việc?*

263 ([Tuy23a], 242., p. 61). *2 trường A & B của 1 quận có tổng cộng 480 học sinh thi đỗ vào trường trung học phổ thông đạt tỷ lệ trúng tuyển 96%. Tính riêng thì trường A đỗ 94%, trường B đỗ 99%. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh thi đỗ vào trung học phổ thông?*

264 ([Tuy23a], 243., p. 62). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1): y = (m^2-1)x + m^2 - 5$ *với* $m \neq \pm 1$, $(d_2): y = x+1, (d_3): y = -x+3$. *(a) Chứng minh khi m thay đổi thì (d_1) luôn đi qua 1 điểm cố định. (b) Chứng minh nếu $(d_1) \parallel (d_3)$ thì $(d_1) \perp (d_2)$. (c) Xác định m để 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy.*

265 ([Tuy23a], 244., p. 62). *Xác định hàm số $y = ax+b$ biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1,2)$ & vuông góc với đồ thị hàm số* $y = \frac{1}{3}x - 1$.

266 ([Tuy23a], 245., p. 62). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1): y = mx - 5, (d_2): y = -3x + 1$. *(a) Xác định tọa độ giao điểm A của $(d_1), (d_2)$ khi $m = 3$. (b) Xác định giá trị của m để $A(3,-8)$ la giao điểm của $(d_1), (d_2)$.*

267 ([Tuy23a], 246., p. 62). *Cho 2 đường thẳng* $(d_1): y = 4mx - (m+5)$ *với* $m \neq 0$, $(d_2): y = (3m^2+1)x + (m^2-4)$. *(a) Chứng minh khi m thay đổi thì đường thẳng (d_1) luôn đi qua 1 điểm A cố định, đường thẳng (d_2) luôn đi qua 1 điểm B cố định. (b) Với giá trị nào của m thì $(d_1) \parallel (d_2)$? (c) Với giá trị nào của m thì (d_1) cắt (d_2)? Tìm tọa độ giao điểm của $(d_1), (d_2)$ khi $m = 2$.*

268 ([Tuy23b], VD19, p. 41). *Cho 3 đường thẳng:* $(d_1): y = (m^2-1)x + (m^2-5)$ *với* $m \neq \pm 1$, $(d_2): y = x+1$, $(d_3): y = -x+3$. *(a) Chứng minh khi m thay đổi thì (d_1) luôn đi qua 1 điểm cố định. (b) Chứng minh nếu $(d_1) \parallel (d_3)$ thì $(d_1) \perp (d_3)$. (c) Xác định m để 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy.*

269 ([Tuy23b], 119., p. 42). *Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0,1)$. Biết* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$. *Chứng minh: (a)* $f(\sqrt{3}-\sqrt{2}) > 0$. *(b)* $f\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) < 0$. *(c) Xét dấu của y.*

270 ([Tuy23b], 120., p. 42). *Trong mặt phẳng tọa độ, cho điểm $A(x,y)$ trong đó $x = m+2$, $y = 3m-1$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tập hợp các điểm A.*

271 ([Tuy23b], 121., p. 42). *Xác định hàm số $y = ax+b$ biết đồ thị của nó đi qua điểm $A(1,2)$ & vuông góc với đồ thị hàm số* $y = \frac{1}{3}x - 1$.

272 ([Tuy23b], 122., p. 42). *Dùng đồ thị để: (a) Giải phương trình* $|x| = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. *(b) Chứng minh phương trình $|x| = x-2$ vô nghiệm.*

273 ([Tuy23b], 123., p. 42). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1): y = mx-5$, $(d_2): y = -3x+1$. *(a) Xác định tọa độ giao điểm A của (d_1) & (d_2) khi $m = 3$. (b) Xác định giá trị của m để $M(3,-8)$ là giao điểm của $(d_1), (d_2)$.*

274 ([Tuy23b], 124., p. 42). *Cho 2 đường thẳng:* $(d_1): y = 4mx - (m+5)$ *với* $m \neq 0$, $(d_2): y = (3m^2+1)x + (m^2-4)$. *(a) Chứng minh khi m thay đổi thì đường thẳng (d_1) luôn đi qua 1 điểm A cố định, đường thẳng (d_2) luôn đi qua 1 điểm B cố định. (b) Tính khoảng cách AB. (c) Với giá trị nào của m thì $(d_1) \parallel (d_2)$? (d) Với giá trị nào của m thì (d_1) cắt (d_2)? Tìm tọa độ giao điểm khi $m = 2$ & cho m tổng quát.*

275 ([Tuy23b], 125., p. 42)**.** *Cho điểm* $A(0,-1), B(-4,3)$. *Viết phương trình đường thẳng* (d) *là đường trung trực của* AB. *Tính góc* α *tạo bởi đường thẳng* d *với tia* Ox.

276 ([Kiê19], VD1, p. 33)**.** *Cho đường tròn* $(d_1): y = x+2, (d_2): y = (2m^2-m)x + m^2 + m$. *(a) Tìm* m *để* $(d_1) \parallel (d_2)$. *(b) Gọi* $A \in (d_2)$ *có hoành độ* $x = 2$. *Viết phương trình đường thẳng* (d_3) *đi qua* A *vuông góc với* (d_1). *(c) Khi* $(d_1) \parallel (d_2)$. *Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng* $(d_1), (d_2)$. *(d) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ* O *đến đường thẳng* (d_1) *& tính diện tích* ΔOMN *với* M, N *lần lượt là giao điểm của* (d_1) *với 2 trục tọa độ* Ox, Oy.

277 ([Kiê19], VD2, p. 34)**.** *Cho đường thẳng* $(d): mx + (2-3m)y + m - 1 = 0$. *(a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng* (d) *luôn đi qua. (b) Tìm* m *để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng* (d) *là lớn nhất. (c) Tìm* m *để đường thẳng* (d) *cắt 2 trục tọa độ* Ox, Oy *lần lượt tại* A, B *sao cho* ΔOAB *cân.*

278 ([Kiê19], VD3, p. 36)**.** *Cho 2 đường thẳng* $(d_1): mx + (m-1)y - 2m + 1 = 0, (d_2): (1-m)x + my - 4m + 1 = 0$. *(a) Tìm các điểm cố định mà* $(d_1), (d_2)$ *luôn đi qua. (b) Tìm* m *để khoảng cách từ điểm* $P(0,4)$ *đến đường thẳng* (d_1) *là lớn nhất. (c) Chứng minh 2 đường thẳng này luôn cắt nhau tại điểm* I. *Tìm quỹ tích điểm* I *khi* m *thay đổi. (d) Tìm* GTLN *của diện tích* ΔIAB *với* A, B *lần lượt là 2 điểm cố định mà* $(d_1), (d_2)$ *đi qua.*

279 ([Kiê19], VD1, p. 37)**.** *Chứng minh:* $2(x+y+z) - (xy+yz+zx) \le 4, \forall x,y,z \in [0,2]$.

280 ([Kiê19], VD2, p. 33)**.** *Cho 3 số thực không âm* x, y, z *thỏa* $x+y+z = 1$. *Tìm* GTLN *của biểu thức* $A = xy + yz + zx - 2xyz$.

281 ([Kiê19], VD3, p. 33)**.** *Cho 3 số thực dương* a, b, c *thỏa* $a+b+c = 1$. *Chứng minh:* $5(a^2+b^2+c^2) - 6(a^3+b^3+c^3) \le 1$.

Tài liệu

[BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[BNS23] Vũ Hữu Bình, Phạm Thị Bạch Ngọc, and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 1: Đại Số*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 192.

[Kiê19] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Đại Số 9*. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2019, p. 311.

[Tuy23a] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 8*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 188.

[Tuy23b] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9*. Tái bản lần thứ 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.