

Problem: Root – Bài Tập: Căn Thúc

Nguyễn Quân Bá Hồng*

Ngày 2 tháng 9 năm 2023

Tóm tắt nội dung

Last updated version: [GitHub/NQBH/elementary STEM & beyond/elementary mathematics/grade 9/circle/problem: set Q of circles \[pdf\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/set_Q_of_circles.pdf).¹ [\[TeX\]](https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.tex).²

Mục lục

| | |
|--|----------|
| 1 Bất Phương Trình | 1 |
| 1.1 Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối | 1 |
| 2 Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ | 2 |
| 3 Căn Thúc Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = A$ | 3 |
| 4 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương | 5 |
| 5 nth Root – Căn Bậc n | 7 |
| 6 Miscellaneous | 7 |
| Tài liệu | 7 |

1 Bất Phương Trình

Ta xét các dạng bất đẳng thức & bất phương trình được sử dụng nhiều để tìm điều kiện xác định (ĐKXD) của căn thức bậc 2 & tổng quát hơn là căn thức bậc chẵn (căn thức bậc lẻ luôn xác định miễn là biểu thức dưới dấu căn có nghĩa, không nhất thiết phải không âm như căn bậc chẵn bắt buộc).

1.1 Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Với $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ là 1 hàm số biến x , có $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$:

$$|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a, \quad |f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a, \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -a, \\ f(x) > a, \end{cases}, \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -a, \\ f(x) \geq a. \end{cases}$$

Để giải bất phương trình tích, ta thường sử dụng:

Định lý 1 (Dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$). *Nhị thức $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, cùng dấu với a với mọi giá trị của x lớn hơn nghiệm của nhị thức (i.e., $a(ax + b) > 0$, $\forall x > -\frac{b}{a}$), trái dấu với a với mọi giá trị của x nhỏ hơn nghiệm của nhị thức (i.e., $a(ax + b) < 0$, $\forall x < -\frac{b}{a}$).*

- ([Bin23], Ví dụ 1, p. 5). *Giải bất phương trình bậc 2: (a) $x^2 - 4x - 5 < 0$. (b) $x^2 - 2x - 1 > 0$. (c) $2x^2 - 6x + 5 > 0$.*
- ([Bin23], 1., p. 6). *Giải bất phương trình bậc 2: (a) $x^2 - 4x - 21 > 0$. (b) $x^2 - 4x + 1 < 0$. (c) $3x^2 - x + 1 > 0$. (d) $2x^2 - 5x + 4 < 0$.*
- (Giải bất phương trình bậc nhất tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình: (a) $ax + b > 0$. (b) $ax + b < 0$. (c) $ax + b \leq 0$. (d) $ax + b \geq 0$.*

*Independent Researcher, Ben Tre City, Vietnam

e-mail: nguyenquanbahong@gmail.com; website: <https://nqbh.github.io>.

¹URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/circle/problem/NQBH_circle_problem.pdf.

²URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/rational/problem/NQBH_circle_problem.tex.

4 (Giải bất phương trình bậc nhất chứa trị tuyệt đối dạng tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) $|ax + b| > c$. (b) $|ax + b| < c$. (c) $|ax + b| \leq c$. (d) $|ax + b| \geq c$.

5 (Giải bất phương trình bậc 2 tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) $ax^2 + bx + c > 0$. (b) $ax^2 + bx + c < 0$. (c) $ax^2 + bx + c \leq 0$. (d) $ax^2 + bx + c \geq 0$.

6 (Giải bất phương trình bậc 2 chứa trị tuyệt đối dạng tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) $|ax^2 + bx + c| > d$. (b) $|ax^2 + bx + c| < d$. (c) $|ax^2 + bx + c| \leq d$. (d) $|ax^2 + bx + c| \geq d$.

7 (Giải bất phương trình dạng tích tổng quát). *Giải & biện luận theo $a, x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, với $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, bất phương trình:* (a) Bất phương trình bậc nhất dạng tích tổng quát: $a(x - x_0) > 0$, $a(x - x_0) < 0$, $a(x - x_0) \leq 0$, $a(x - x_0) \geq 0$. (b) Bất phương trình bậc 2 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2$, $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$. (c) Bất phương trình bậc 3 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \geq 0$. (d) Bất phương trình bậc 4 dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) < 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \leq 0$, $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \geq 0$. (e*) Bất phương trình bậc $n \in \mathbb{N}^*$ dạng tích tổng quát: Với $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) > 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) < 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) \leq 0$, $a \prod_{i=1}^n (x - x_i) \geq 0$, trong đó sử dụng ký hiệu tích $\prod_{i=1}^n (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

8 (Programming: Solve general inequations of product-form). *Viết chương trình Pascal, Python, C/C++ để giải các bất phương trình $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$, với $P(x) := a \prod_{i=1}^n (x - x_i) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.*

- Input. Dòng 1: Số bộ test. Dòng 2: $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Dòng 3: n số thực không nhất thiết phân biệt chưa được sắp xếp thứ tự: x_1, x_2, \dots, x_n .
- Output. 4 tập nghiệm của 4 bất phương trình $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \geq 0$.
- Sample.

| polynomial_inequation.inp | polynomial_inequation.out |
|---------------------------|------------------------------|
| 2 | P(x) > 0: x < 2 |
| 1 -1.5 | P(x) < 0: x > 2 |
| 2 | P(x) <= 0: x >= 2 |
| 2 100 | P(x) >= 0: x <= 2 |
| 3 -4 | P(x) > 0: x < -4 or x > 3 |
| | P(x) < 0: -4 < x < 3 |
| | P(x) <= 0: -4 <= x <= 3 |
| | P(x) >= 0: x <= -4 or x >= 3 |

2 Căn Bậc 2 & Số Vô Tỷ

Ở Toán 7 (xem, e.g., [Thá+23, §5, pp. 27–29]), ta đã biết dạng biểu diễn thập phân của số hữu tỷ là hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn, dạng biểu diễn thập phân của số vô tỷ là vô hạn không tuần hoàn. Số hữu tỷ $a \in \mathbb{Q}$ nào cũng viết được dưới dạng $a = \frac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Chứng minh tổng, hiệu, tích, thương của 2 số hữu tỷ (số chia $\neq 0$) là 1 số hữu tỷ.

Chứng minh. Gọi 2 số hữu tỷ bất kỳ là $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$. Tổng, hiệu, tích, thương của 2 số hữu tỷ (số chia $\neq 0$) là 1 số hữu tỷ vì:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bd \neq 0; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, bcd \neq 0,$$

trong đó điều kiện $bcd \neq 0$ đã đảm bảo số chia khác 0. □

10 ([Bin23], Ví dụ 2, p. 7). Chứng minh tổng & hiệu của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.

Giải. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại 2 số $a \in \mathbb{Q}$ & $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sao cho $c = a + b \in \mathbb{Q}$. Ta có $b = c - a$, mà hiệu của 2 số hữu tỷ c, a là 1 số hữu tỷ nên $b \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn với giả thiết, nên c phải là số vô tỷ. Chứng minh tương tự cho hiệu. □

11. (a) Chứng minh tích, & thương của 1 số hữu tỷ khác 0 với 1 số vô tỷ là 1 số vô tỷ.³ (b) Chứng minh nếu tích hoặc thương của 1 số hữu tỷ với 1 số vô tỷ là 1 số hữu tỷ thì số hữu tỷ đó bằng 0.

³Không cần yêu cầu số vô tỷ khác 0 vì 0 là số hữu tỷ nên hiển nhiên 1 số vô tỷ bất kỳ luôn khác 0.

12. Xét tính hữu tỷ, vô tỷ của 2 số $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn: (a) $a + b \in \mathbb{Q}$. (b) $a - b \in \mathbb{Q}$. (c) $ab \in \mathbb{Q}$. (d) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. (e) $a^2 + b^2 \in \mathbb{Q}$. (f) $a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}$. (g) $a^3 + b^3 \in \mathbb{Q}$. (h) $a^3 - b^3 \in \mathbb{Q}$. (i) $a^m + b^n \in \mathbb{Q}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$. (j) $a^m - b^n \in \mathbb{Q}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.
- 13 ([Bin23], Ví dụ 3, p. 7). Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không, nếu: (a) $a + b$ & $a - b$ là 2 số hữu tỷ. (b) $a - b$ & ab là 2 số hữu tỷ.
- 14 ([Bin23], Ví dụ 4, p. 7). Chứng minh: Nếu số tự nhiên a không là số chính phương thì \sqrt{a} là số vô tỷ.
- 15 (Mở rộng [Bin23], Ví dụ 4, p. 7). Chứng minh: Nếu số hữu tỷ a không có dạng $\frac{m^2}{n^2}$ với $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, thì \sqrt{a} là số vô tỷ.
- 16 ([Bin23], 2., p. 8). Chứng minh các số sau là số vô tỷ: (a) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. (b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Q}, n \neq 0$.
- 17 (Mở rộng [Bin23], 2., p. 8). Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Tìm điều kiện của a, b để: (a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$. (b) $a + \frac{\sqrt{b}}{c} \in \mathbb{Q}$.
- 18 ([Bin23], 3., p. 8). Xét xem 2 số a, b có thể là số vô tỷ hay không nếu: (a) ab & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ. (b) $a + b$ & $\frac{a}{b}$ là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$). (c) $a + b, a^2$, & b^2 là các số hữu tỷ ($a + b \neq 0$).
- 19 ([Bin23], 4., p. 8). So sánh 2 số: (a) $2\sqrt{3}$ & $3\sqrt{2}$. (b) $6\sqrt{5}$ & $5\sqrt{6}$. (c) $\sqrt{24} + \sqrt{45}$ & 12 . (d) $\sqrt{37} - \sqrt{15}$ & 2 .
- 20 ([Bin23], 5., p. 8). (a) Cho 1 ví dụ để chứng tỏ khẳng định $\sqrt{a} \leq a$ với mọi số a không âm là sai. (b) Cho $a > 0$. Với giá trị nào của a thì $\sqrt{a} > a$?
- 21 ([Bin23], 6*, pp. 8–9). (a) Chỉ ra 1 số thực x mà $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên ($x \neq \pm 1$). (b) Chứng minh nếu $x - \frac{1}{x}$ là số nguyên & $x \neq \pm 1$ thì x & $x + \frac{1}{x}$ là số vô tỷ. Khi đó $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$ & $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ là số hữu tỷ hay số vô tỷ?

3 Căn Thức Bậc 2 & Hằng Đẳng Thức $\sqrt{A^2} = |A|$

- 22 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 9). Trên 1 khúc sông, dòng chảy của nước ở bề mặt sông lớn hơn dòng chảy của nước ở đáy sông. Gọi v km/h là vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông, f km/h là vận tốc dòng chảy ở đáy sông, các nhà vật lý (physicists) đã tính được $\sqrt{f} = \sqrt{v} - 1.3$. (a) Nếu vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông là 9 km/h thì vận tốc dòng chảy ở đáy sông là bao nhiêu? (b) Tính vận tốc dòng chảy ở bề mặt sông khi vận tốc dòng chảy ở đáy sông là 20.25 km/h.
- 23 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 9). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $x^2 = 10$. (b) $\sqrt{2x + 1} = 5$. (c) $\sqrt{2x + 1} = \sqrt{3x - 1}$.
24. Giải & biện luận phương trình theo các tham số $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: (a) $x^2 = a$. (b) $\sqrt{ax + b} = c$. (c) $\sqrt{ax + b} = \sqrt{cx + d}$.
- 25 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 10). So sánh: (a) 6 & $\sqrt{32}$. (b) $\sqrt{17} + \sqrt{10}$ & $\sqrt{48}$. (c) $\sqrt{4 + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}$ & 3.
- 26 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 10). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(a - 3)^2}$ với $a \leq 3$. (b) $2\sqrt{a^2 - 10a + 25}$ với $a \geq 5$.
- 27 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 10). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{4x^2 - 28x + 49} = 7$. (b) $\sqrt{x - 10\sqrt{x + 25}} = 3$.
- 28 ([BBN23], Ví dụ 6, p. 11). Nguyên biện toán học: “Bất kỳ 2 số nào cũng bằng nhau”: Với 2 số a, b tùy ý, ta luôn có: $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 = (b - a)^2$. Khai căn bậc 2 2 vế, ta được: $a - b = b - a$, suy ra $2a = 2b \Leftrightarrow a = b$. Vậy bất kỳ 2 số nào cũng bằng nhau. Tìm điểm sai.
- 29 ([BBN23], Ví dụ 7, p. 11). (a) Tìm GTNN của biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 8x + 20} - 12$. (b) Tìm GTLN của biểu thức $B = 5 + \sqrt{-4x^2 - 4x + 6}$.

Lưu ý 1. (a) Để tìm GTNN của 1 biểu thức A có dạng $A = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$, ta cần biến đổi biểu thức dưới dấu căn của A về dạng $f^2(x) + C$ ($C \geq 0$ là hằng số) rồi nhận xét $\sqrt{f^2(x) + C} \geq \sqrt{C}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = 0$. (b) Để tìm GTLN của 1 biểu thức B có dạng $B = \sqrt{ax^2 + bx + c} + d$, ta cần biến đổi biểu thức dưới dấu căn của B về dạng $-f^2(x) + C$ ($C \geq 0$ là hằng số) rồi nhận xét $\sqrt{-f^2(x) + C} \leq \sqrt{C}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = 0$.

- 30 ([BBN23], 1.1., p. 12). Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Điền số thích hợp vào ô trống trong bảng:

| | | | |
|------|-------|-------|-------|
| AB | 7 cm | 0.3 m | |
| AC | 24 cm | | 12 dm |
| BC | | 0.5 m | 15 dm |

- 31 ([BBN23], 1.2., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $3\sqrt{x + 1} = 18$. (b) $(2x)^2 = 64$. (c) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 7$.

- 32 ([BBN23], 1.3., p. 12). Tìm ĐKXD: (a) $\sqrt{15 - 3x}$. (b) $\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$. (c) $\sqrt{2x + 10} + \frac{1}{x^2 - 4}$.

33 ([BBN23], 1.4., p. 12). Tính: (a) $\sqrt{0.09} \cdot \sqrt{25} - \sqrt{49} + \sqrt{\frac{121}{100}}$. (b) $\sqrt{8^2 + 6^2} + 2\sqrt{\sqrt{625}}$.

34 ([BBN23], 1.5., p. 12). Cho 6 số: $\sqrt{21}, 5, \sqrt{38}, -\sqrt{50}, 7, -\sqrt{37}$. Sắp xếp 6 số trên theo thứ tự tăng dần & tìm số dương nhỏ nhất.

35 ([BBN23], 1.6., p. 12). Tính cạnh của hình vuông, biết diện tích của hình vuông đó bằng diện tích hình tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông là 12.8 m, 40 m.

36 ([BBN23], 1.7., p. 12). Rút gọn biểu thức: (a) $\sqrt{(\sqrt{3}-4)^2}$. (b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. (c) $\sqrt{4a^2} - 5a$ với $a > 0$. (d) $\sqrt{a^2 - 6a + 9} - 2\sqrt{a^2 + 8a + 16}$ với $-4 \leq a < 3$.

37 ([BBN23], 1.8., p. 12). Để tính giá trị của biểu thức $A = 3a + \sqrt{1-6a+9a^2}$ tại $a = 2$, Việt làm như sau: $A = 3a + \sqrt{(1-3a)^2} = 3a + (1-3a) = 1$. Nam lại tính: $A = 3 \cdot 2 + \sqrt{1-6 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2} = 6 + \sqrt{25} = 6 + 5 = 11$. Ai đúng ai sai? Sai ở đâu?

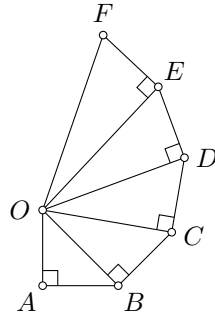
38 ([BBN23], 1.9., p. 12). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{25x^2} = |-3|$. (b) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

39 ([BBN23], 1.10., p. 12). Tìm GTLN của biểu thức: (a) $A = \sqrt{7-2x^2}$. (b) $B = 7 + \sqrt{-4x^2 + 2x}$.

40 ([BBN23], 1.11., p. 13). Tìm GTNN của biểu thức: (a) $A = 2\sqrt{x^2 + 3x + 5}$. (b) $B = \frac{3}{1 + \sqrt{2x - x^2 + 8}}$.

41 ([BBN23], 1.12., p. 13). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ thỏa $a + b + c + d = 0$. Chứng minh $\sqrt{(ab - cd)(bc - ad)(ca - bd)} \in \mathbb{Q}$.

42 ([BBN23], 1.13., p. 13). Cho hình vẽ:



với $OA = AB = BC = CD = DE = EF = 1$ cm. (a) Tính độ dài 5 đoạn thẳng OB, OC, OD, OE, OF . (b) Vẽ đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{10}$ cm. (c) Nêu cách vẽ đoạn thẳng có độ dài \sqrt{n} cm với $n \in \mathbb{N}$ bằng thước thẳng & compa.

43 ([BBN23], 1.14., p. 13). Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho $\sqrt{4n+1} \in \mathbb{N}$.

44 ([BBN23], 1.15., p. 13). Cho $A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ gồm 2015 dấu căn bậc 2. Chứng minh $A \notin \mathbb{N}$.

45 ([BBN23], p. 14). Chứng minh đồng nhất thức: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

46 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*$ sao cho $a + b + c = 0$.

47 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$.

48 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{a^2}{(ab+1)^2}} = \left|a + \frac{1}{b} - \frac{a}{ab+1}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $ab \neq -1$.

49 ([BBN23], p. 14). Chứng minh: $\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}} = \left|a + b - \frac{ab}{a+b}\right|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -b$.

50 ([BBN23], 1., p. 14). Chứng minh với $a, b, c \in \mathbb{R}$ đôi một khác nhau: $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}} = \left|\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right|$.

51 ([BBN23], 2., p. 15). Đơn giản biểu thức $A = \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{(a^2 + b^2)^2}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq -b$.

52 ([BBN23], 3., p. 15). Tính $A = \sqrt{1 + 2015^2} + \frac{2015^2}{2016^2} + \frac{2015}{2016}$.

53 ([BBN23], 4., p. 15). Tính $A = \sqrt{0.43^2 + 0.57^2 + 0.43^2 \cdot 0.57^2}$.

54. Tính $A = \sqrt{x^2 + (1-x)^2 + x^2 \cdot (1-x)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

55 ([BBN23], p. 15). (a) Tính $A = \sum_{i=2}^{2015} \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2016^2}}$.

(b) Tính $A_n = \sum_{i=2}^n \sqrt{1 + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

56 ([BBN23], p. 15). (a) Tính $A = \sqrt{1 + \underbrace{99 \dots 9^2}_{2015} + \underbrace{0.99 \dots 9^2}_{2015}}$. (b) Tính $A_n = \sqrt{1 + \underbrace{99 \dots 9^2}_n + \underbrace{0.99 \dots 9^2}_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

57 ([Bin23], Ví dụ 5, p. 7). Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$. (a) Tìm điều kiện xác định của biểu thức A. (b) Rút gọn biểu thức A.

58 ([Bin23], Ví dụ 6, p. 8). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $A = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$. (b) $B = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 1}}}$.

59 ([Bin23], Ví dụ 7, p. 8). Tìm các giá trị của x sao cho $\sqrt{x+1} < x+3$.

60 ([Bin23], 7., p. 9). Tìm điều kiện xác định của các biểu thức: (a) $3 - \sqrt{1 - 16x^2}$. (b) $\frac{1}{1 - \sqrt{x^2 - 3}}$. (c) $\sqrt{8x - x^2 - 15}$. (d) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$. (e) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$. (f) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 14}$.

61 ([Bin23], 8., p. 9). Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$. (a) Rút gọn biểu thức A. (b) Tìm các giá trị của x để $A = 1$.

62 ([Bin23], 9., p. 9). Tìm các giá trị của x sao cho: (a) $\sqrt{x^2 - 3} \leq x^2 - 3$. (b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > x - 6$.

63 ([Bin23], 10., p. 9). Cho $a + b + c = 0$ & $abc \neq 0$. Chứng minh hằng đẳng thức: $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$.

4 Liên Hệ Giữa Phép Nhân, Phép Chia & Phép Khai Phương

64 ([BBN23], p. 16). Với A, B là 2 biểu thức đại số. Khi nào thì: $\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$. (b) $\sqrt{A-B} = \sqrt{A} - \sqrt{B}$?

65 ([BBN23], Ví dụ 1, p. 17). Tính: (a) $\sqrt{12.5 \cdot 10 \cdot 4500}$. (b) $\sqrt{685^2 - 684^2}$. (c) $\sqrt{\frac{27}{13}} : \sqrt{14\frac{10}{13}}$. (d) $(\sqrt{9 - \sqrt{17}} + \sqrt{9 + \sqrt{17}})^2$.

66 ([BBN23], Ví dụ 2, p. 18). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa: (a) $\sqrt{8x} \cdot \sqrt{2} = 10$. (b) $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x+3} = 0$. (c) $\frac{\sqrt{9x^2 - 25}}{\sqrt{3x - 5}} = 4$.

67 ([BBN23], Ví dụ 3, p. 18). 2 bạn Việt & Nam cùng giải bài toán tìm $x \in \mathbb{R}$: $\frac{\sqrt{2x-5}}{\sqrt{x-2}} = 2$. Việt làm như sau: $\frac{\sqrt{2x-5}}{\sqrt{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x-5}{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} = 4 \Leftrightarrow 2x-5 = 4x-8 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1.5$. Nam làm như sau: Điều kiện $2x-5 \geq 0$ & $x-2 > 0$, suy ra $x \geq 2.5$. Rồi cũng giải để tìm ra $x = 1.5$ như Việt. Đối chiếu với điều kiện $x \geq 2.5$, Nam kết luận phương trình vô nghiệm. Ai đúng ai sai? Giải thích.

68 ([BBN23], Ví dụ 4, p. 19). Rút gọn $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b < 0$.

69 ([BBN23], Ví dụ 5, p. 19). Rút gọn $A = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

70 ([BBN23], Ví dụ 6, p. 19). Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x+4+2\sqrt{16-x^2}}{8-2x+\sqrt{16-x^2}}$ tại $x = \frac{8}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

71 ([BBN23], Ví dụ 7, p. 20). (a) Cho $a \geq b \geq 0$. Chứng minh: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a-b} \leq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. (b) Áp dụng: Tìm GTNN của $A = \sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ & GTLN của $B = \sqrt{2x-7} - \sqrt{2x-11}$.

Lưu ý 2. Khi chứng minh bất đẳng thức chứa căn thức ta thường bình phương 2 vế & sử dụng tính chất: Với $A \geq 0, B \geq 0$, $A^2 > B^2 \Rightarrow A > B$, $A^2 \geq B^2 \Rightarrow A \geq B$.

72 ([BBN23], 2.1., p. 20). Tính đường kính của 1 mặt ghế hình tròn, biết diện tích của nó bằng diện tích hình vuông có cạnh là 2.6 dm.

73 ([BBN23], 2.2., p. 20). Rút gọn $\left(\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\sqrt{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}, x < 0, y < 0$.

74 ([BBN23], 2.3., p. 20). Tìm $x \in \mathbb{R}$ thỏa $\sqrt{4x^2 - 25} = \sqrt{4x + 10}$.

75 ([BBN23], 2.4., p. 20). Tính: (a) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) : \left(\frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}\right)$. (b) $\sqrt{27(1 - \sqrt{3})^2} : 3\sqrt{75}$.

76 ([BBN23], 2.5., p. 21). So sánh: (a) $x = \sqrt{16} + \sqrt{28}, y = \sqrt{14} + \sqrt{30}$. (b) $x = \frac{\sqrt{319^2 - 306^2}}{\sqrt{67^2 - 54^2}}, y = \sqrt{23 - 8\sqrt{7}}(4 + \sqrt{7}) : (3\sqrt{3})$.

77 ([BBN23], 2.6., p. 21). Tính: $A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{2}}}}$.

78 ([BBN23], 2.7., p. 21). Cho 6 số thực dương $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Chứng minh:

$$\sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a_2 + b_2 + c_2)} = \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{b_1 b_2} + \sqrt{c_1 c_2}.$$

79 ([BBN23], 2.8., p. 21). Tìm GTLN: (a) $A = \sqrt{3x - 5} - \sqrt{3x - 10}$. (b) $B = \sqrt{4x + 1} - \sqrt{16x - 12}$.

80 ([BBN23], 2.9., p. 21). Chứng minh: nếu 3 đoạn thẳng có độ dài $a, b, c \in \mathbb{R}$ lập thành 1 tam giác thì 3 đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng lập thành 1 tam giác.

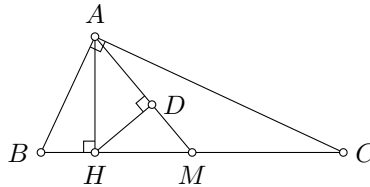
81 ([BBN23], 2.10., p. 21). Cho $x = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$. (a) Chứng minh $x^2 - 2x = 4$. (b) Tính giá trị của biểu thức $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x + 4}{x^3 - 3x + 5}$.

82 ([BBN23], p. 21, Vận tốc của máy thăm dò vũ trụ). Vận tốc tối thiểu của máy thăm dò vũ trụ để thắng sức hút của Trái Đất là $v = 1.15 \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{m}{r}}$, trong đó m là khối lượng của Trái Đất tính theo kg, r là bán kính Trái Đất tính theo m, v là vận tốc máy thăm dò tính theo m/s. Biết $m \approx 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $r \approx 6.38 \cdot 10^6$ m. Tính vận tốc tối thiểu của máy thăm dò vũ trụ.

Định nghĩa 1 (Trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa). Cho $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. $m := \frac{a+b}{2}$ được gọi là trung bình cộng của a, b . $n := \sqrt{ab}$ được gọi là trung bình nhân của a, b . $p := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ được gọi là trung bình điều hòa của a, b .

83 ([BBN23], p. 22). Cho $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Gọi m, n, p lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa của a, b . Chứng minh $p \leq n \leq m$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

84 ([BBN23], p. 22). Vẽ $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM sao cho $BH = a, CH = b$. Hạ $HD \perp AM$ tại D . Chứng minh $AD \leq AH \leq AO$. Từ đó suy ra bất đẳng thức $p \leq n \leq m$ với m, n, p lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa của a, b .



Định nghĩa 2 (Căn thức đồng dạng). 2 căn thức bậc 2 được gọi là đồng dạng nếu chúng có cùng biểu thức dưới dấu căn.

Ví dụ 1 ([BBN23], p. 22). (a) 3 biểu thức $\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, -5\sqrt{7}$ được gọi là đồng dạng với nhau. (b) 3 biểu thức $\frac{1}{2}\sqrt{x}, 5\sqrt{x}, -\frac{4}{7}\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, được gọi là đồng dạng với nhau.

Muốn cộng trừ các căn thức bậc 2 ta thu gọn các căn thức đồng dạng.

85 ([BBN23], p. 23, Công thức căn phức tạp). Chứng minh:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, a^2 \geq b. \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là công thức căn phức tạp. Nhờ công thức này, biểu thức $a \pm \sqrt{b}$ có thể dễ dàng viết được thành bình phương của 1 tổng hoặc hiệu, do đó tính được $a \pm \sqrt{b}$.

86 ([BBN23], p. 23). Tính: (a) $A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$. (b) $B = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{2}}}}$.

5 Biến Đổi Đơn Giản Biểu Thức Chứa Căn Thức Bậc 2

6 n th Root – Căn Bậc n

7 Miscellaneous

Tài liệu

- [BBN23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Xuân Bình, and Phạm Thị Bạch Ngọc. *Bồi Dưỡng Toán 9 Tập 1*. Tái bản lần thứ 7. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 176.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 7 Tập 1*. Tái bản lần thứ 1. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 111.