

# Problem: Fraction & Decimal – Bài Tập: Phân Số & Số Thập Phân

Nguyễn Quân Bá Hồng\*

Ngày 13 tháng 1 năm 2024

## Mục lục

1 Basic Properties of Fraction. Simplify Fraction – Phân Số. Tính Chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số . . . . .	1
2 Quy Đồng Mẫu Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số . . . . .	5
3 Calculus of Fraction – Tính Toán với Phân Số . . . . .	7
4 Hỗn Số Dương . . . . .	10
5 Các Bài Toán Về Phân Số & Tỷ Số . . . . .	10
6 Percentage – Phần Trăm % . . . . .	12
7 Movement Problem – Toán Chuyển Động . . . . .	12
8 Hệ Ghi Số Với Cơ Số Bất Kỳ . . . . .	13
9 Dãy Số Viết Theo Quy Luật . . . . .	14
10 Miscellaneous . . . . .	18
Tài liệu . . . . .	18

## 1 Basic Properties of Fraction. Simplify Fraction – Phân Số. Tính Chất Cơ Bản của Phân Số. Rút Gọn Phân Số

- 1 ([Bin+23], H1, p. 5). Các cách viết nào sau đây là phân số?  $\frac{6}{7}, \frac{-1.3}{5}, \frac{12}{-8}, \frac{-7}{0}, \frac{2.34}{-6.5}, \frac{-0}{3}$ .
- 2 ([Bin+23], H2, p. 5). Rút gọn  $\frac{30+6}{30+12}$  về phân số tối giản.
- 3 ([Bin+23], H3, p. 6). (a) Khi nào thì 1 phân số có thể viết được dưới dạng 1 số nguyên? (b) 2 phân số  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{-a}{-b}$  có bằng nhau không? (c) Nếu chia cả tử & mẫu của 1 phân số cho cùng 1 số nguyên  $n \neq 0$  thì ta có được 1 phân số bằng nó không? (d) Khi chia cả tử & mẫu của phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $a, b > 0$ , cho 1 ước chung của  $a, b$  thì ta có thu được 1 phân số tối giản không? (e) Nếu  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản thì mọi phân số bằng  $\frac{a}{b}$  có dạng gì?
- 4 ([Bin+23], VD1, p. 6). Cho tập hợp  $A = \{-2, 0, 7\}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ .
- 5 ([Bin+23], VD2, p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{x}{15} = \frac{24}{y} = \frac{-6}{5}$ .
- 6 ([Bin+23], VD3, p. 6). Rút gọn: (a)  $\frac{-64}{96}$ . (b)  $\frac{131313}{252525}$ . (c)  $\frac{3510-135}{4680-180}$ . (d)  $\frac{2^4 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 5}$ .
- 7 ([Bin+23], VD4, p. 7). Viết tất cả các phân số bằng  $\frac{30}{102}$  mà có tử & mẫu là các số tự nhiên có 2 chữ số.
- 8 ([Bin+23], VD5, p. 7). Tìm phân số bằng  $\frac{35}{80}$  biết tổng của mẫu số & 2 lần tử số bằng 210.

\*Ben Tre City, Vietnam. E-mail: [nguyenquanbahong@gmail.com](mailto:nguyenquanbahong@gmail.com). Website: <https://ngbh.github.io>.

- 9 ([Bin+23], VD6, p. 8). Cho biểu thức  $A = \frac{2n-1}{n+3}$  với  $n \in \mathbb{Z}$ . Tìm  $n$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .
- 10 ([Bin+23], VD7, p. 8). Cho phân số  $\frac{25}{49}$ . Hỏi cần bớt ở tử số & mẫu của phân số đã cho cùng 1 số nào để được 1 phân số mới bằng  $\frac{5}{13}$ ?
- 11 ([Bin+23], 1.1., p. 8). Rút gọn các phân số trong trả lời của các câu hỏi sau thành phân số tối giản: (a) 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta? 1 ha = 10000 m<sup>2</sup>. (b) Mỗi khoảng thời gian sau bằng bao nhiêu phần của 1 giờ: 15 phút, 30 phút, 45 phút, 90 phút, 4500 giây? (c) Pound là đơn vị đo khối lượng được dùng phổ biến ở nước Anh & 1 số nước khác. Biết 100 pound = 45 kg, hỏi 1 pound bằng mấy phần của 1 kg? (d) Inch là 1 trong các đơn vị đo chiều dài phổ biến trên thế giới. Biết 1 in = 2.54 cm, hỏi 1 cm bằng mấy phần của 1 inch?
- 12 ([Bin+23], 1.2., p. 8). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x-2}{15} = \frac{9}{5}$ . (b)  $\frac{2-x}{16} = \frac{-4}{x-2}$ .
- 13 ([Bin+23], 1.3., p. 9). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{7} = \frac{5}{y}$  &  $x > y$ . (b)  $\frac{2}{x} = \frac{y}{-7}$  &  $x > 0$ .
- 14 ([Bin+23], 1.4., p. 9). Cho phân số  $\frac{7}{11}$ . Cần cộng vào tử số & mẫu số của phân số đã cho với cùng 1 số nào để được phân số mới bằng  $\frac{3}{4}$ ?
- 15 ([Bin+23], 1.5., p. 9). Cho phân số  $\frac{89}{143}$ . Tìm 1 số tự nhiên để khi thêm vào tử số & bớt đi ở mẫu số của phân số đã cho với cùng số đó thì ta được 1 phân số mới bằng  $\frac{12}{17}$ .
- 16 ([Bin+23], 1.6., p. 9). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{147}{252}$  biết phân số đó có: (a) Tổng của tử & mẫu bằng 228. (b) Hiệu của tử & mẫu bằng 40. (c) Tích của tử & mẫu bằng 756.
- 17 ([Bin+23], 1.7., p. 9). Tìm phân số có mẫu bằng 7 biết khi cộng tử với 12 & nhân mẫu với 3 thì ta được 1 phân số mới bằng phân số ban đầu.
- 18 ([Bin+23], 1.8., p. 9). Giải thích tại sao  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , giá trị của 2 biểu thức sau là phân số tối giản: (a)  $\frac{2n+5}{3n+7}$ . (b)  $\frac{6n-14}{2n-5}$ .
- 19 ([Bin+23], 1.9., p. 9). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  bằng phân số  $\frac{54}{126}$  biết: (a) ƯCLN( $a, b$ ) = 12. (b) BCNN( $a, b$ ) = 105.
- 20 ([Bin+23], 1.10., p. 9). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để 3 biểu thức sau đồng thời có giá trị nguyên:  $\frac{-8}{n}, \frac{13}{n-1}, \frac{4}{n+2}$ .
- 21 ([Bin+23], p. 10). Làm sao để cắt ra được 1 đoạn dây dài 10 m từ 1 sợi dây dài 16 m mà không dùng thước đo?
- 22 ([Tuy23], Ví dụ 49, p. 45). Cho  $A = \{-5, 0, 9\}$ . Viết tất cả các phân số  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in A$ . Có bao nhiêu phân số thỏa mãn?
- 23 ([Tuy23], VD50, p. 46). Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{7}{-15}$  với mẫu dương có 2 chữ số.
- 24 (Mở rộng [Tuy23], VD50, p. 46). Cho trước  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , &  $n \in \mathbb{N}^*$ . Viết tập hợp  $B$  các phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$  với mẫu dương có  $n$  chữ số.
- 25 ([Tuy23], VD51, p. 46). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{32}{60}$ , biết tổng của tử & mẫu là 115.
- 26 (Mở rộng [Tuy23], VD51, p. 46). Cho trước  $a, b, n \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ . Tìm phân số bằng phân số  $\frac{a}{b}$ , biết tổng của tử & mẫu là  $n$ .
- 27 ([Tuy23], 236., p. 47). Trong các phân số sau, những phân số nào bằng nhau?  $\frac{15}{60}, \frac{-7}{5}, \frac{6}{15}, \frac{28}{-20}, \frac{3}{12}$ .
- 28 ([Tuy23], 237., p. 47). Cho  $A = \frac{3n-5}{n+4}$ . Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để  $A \in \mathbb{Z}$ .
- 29 ([Tuy23], 238., p. 47). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để cho các phân số sau đồng thời có giá trị nguyên:  $\frac{-12}{n}, \frac{15}{n-2}, \frac{8}{n+1}$ .
- 30 ([Tuy23], 239., p. 47). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  biết: (a)  $\frac{x-1}{9} = \frac{8}{3}$ . (b)  $\frac{-x}{4} = \frac{-9}{x}$ . (c)  $\frac{x}{4} = \frac{18}{x+1}$ .
- 31 ([Tuy23], 240., p. 47). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{x-4}{y-3} = \frac{4}{3}$  &  $x-y=5$ .

- 32 ([Tuy23], 241., p. 47). Viết dạng tổng quát các phân số bằng phân số  $\frac{-12}{30}$ .
- 33 ([Tuy23], 242., p. 47). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{990}{2610}$ . (b)  $\frac{374}{506}$ . (c)  $\frac{3600 - 75}{8400 - 175}$ . (d)  $\frac{9^{14} \cdot 25^5 \cdot 8^7}{18^{12} \cdot 625^3 \cdot 24^3}$ .
- 34 ([Tuy23], 243., p. 47). Cho phân số  $\frac{a}{b}$ . Chứng minh: Nếu  $\frac{a-x}{b-y} = \frac{a}{b}$  thì  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .
- 35 ([Tuy23], 244., p. 47). Cho phân số  $A = \frac{1+3+5+\dots+19}{21+23+25+\dots+39}$ . (a) Rút gọn A. (b) Xóa 1 số hạng ở tử & xóa 1 số hạng ở mẫu để được 1 phân số mới vẫn bằng A.
- 36 ([Tuy23], 245., p. 47). Rút gọn phân số  $A = \frac{71 \cdot 52 + 53}{530 \cdot 71 - 180}$  mà không cần thực hiện các phép tính ở tử.
- 37 ([Tuy23], 246., p. 47). 2 phân số sau có bằng nhau không?  $\frac{\overline{abab}}{\overline{cdcd}}, \frac{\overline{ababab}}{\overline{cdcdcd}}$ .
- 38 ([Tuy23], 247., p. 47). Chứng minh: (a)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 39}{21 \cdot 22 \cdot 23 \dots 40} = \frac{1}{2^{20}}$ . (b)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3) \dots 2n} = \frac{1}{2^n}$  với  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 39 ([Tuy23], 248., p. 47). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  bằng phân số  $\frac{60}{108}$  biết: (a) ƯCLN(a,b) = 15. (b) BCNN(a,b) = 180.
- 40 ([Tuy23], 249., p. 48). Tìm phân số bằng phân số  $\frac{200}{520}$  sao cho: (a) Tổng của tử & mẫu là 306. (b) Hiệu của tử & mẫu là 184. (c) Tích của tử & mẫu là 2340.
- 41 ([Tuy23], 250., p. 48). Chứng minh:  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , các phân số sau là các phân số tối giản: (a)  $\frac{3n-2}{4n-3}$ . (b)  $\frac{4n+1}{6n+1}$ .
- 42 ([Tuy23], 251., p. 48). Cho  $\frac{a}{b}$  là 1 phân số chưa tối giản. Chứng minh các phân số sau chưa tối giản: (a)  $\frac{a}{a-b}$ . (b)  $\frac{2a}{a-2b}$ .
- 43 ([Tuy23], 252., p. 48). 1 mẫu Bắc Bộ bằng 3600m<sup>2</sup>. Hỏi 1 mẫu Bắc Bộ bằng mấy phần của 1 hecta?
- 44 ([Bin23], VD1, p. 4). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{n+10}{2n-8} \in \mathbb{Z}$  (i.e., có giá trị là 1 số nguyên).
- 45 (Mở rộng [Bin23], VD1, p. 4). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d} \in \mathbb{Z}$ .
- 46 ([Bin23], VD2, p. 5). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{21n+3}{6n+4}$  rút gọn được.
- 47 (Mở rộng [Bin23], VD2, p. 5). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{an+b}{cn+d}$  rút gọn được.
- 48 ([Bin23], VD3, p. 5). Tìm  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{b}{c} = \frac{12}{21}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{6}{11}$ .
- 49 ([Bin23], VD4, p. 5). Tìm số tự nhiên lớn nhất có 3 chữ số sao cho số đó bằng mỗi tổng  $a+b, c+d, e+f$  &  $\frac{a}{b} = \frac{35}{49}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{130}{143}$ ,  $\frac{e}{f} = \frac{7}{13}$ .
- 50 ([Bin23], 1., p. 6). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{199\dots9}{99\dots95}$  (10 chữ số 9 ở tử, 10 chữ số 9 ở mẫu). (b)  $\frac{121212}{424242}$ . (c)  $\frac{187187187}{221221221}$ . (d)  $\frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 39 - 10101}{505050 + 70707}$ .
- 51 ([Bin23], 2., p. 6). Chứng minh các phân số sau có giá trị là số tự nhiên: (a)  $\frac{10^{2002} + 2}{3}$ . (b)  $\frac{10^{2003} + 8}{9}$ .
- 52 ([Bin23], 3., p. 6). Chứng minh các phân số sau bằng nhau: (a)  $\frac{1717}{2929}$  &  $\frac{171717}{292929}$ . (b)  $\frac{3210-34}{4170-41}$  &  $\frac{6420-68}{8340-82}$ . (c)  $\frac{2106}{7320}$ ,  $\frac{4212}{14640}$ , &  $\frac{6318}{21960}$ .
- 53 ([Bin23], 4., p. 6). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ . (b)  $\frac{x}{28} = \frac{y}{35}$ .
- 54 ([Bin23], 5., p. 6). Tìm các phân số  $\frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ , có giá trị bằng: (a)  $\frac{36}{45}$  biết BCNN(a,b) = 300. (b)  $\frac{21}{35}$  biết ƯCLN(a,b) = 30. (c)  $\frac{15}{35}$  biết ƯCLN(a,b) · BCNN(a,b) = 3549.

- 55 ([Bin23], 6., p. 7). Chứng minh các phân số sau tối giản với mọi  $n \in \mathbb{N}$ . (a)  $\frac{n+1}{2n+3}$ . (b)  $\frac{2n+3}{4n+8}$ . (c)  $\frac{3n+2}{5n+3}$ .
- 56 ([Bin23], 7., p. 7). Cho phân số  $A = \frac{63}{3n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . (a) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A$  rút gọn được? (b) Với giá trị nào của  $n$  thì  $A \in \mathbb{N}$ ?
- 57 ([Bin23], 8., p. 7). Tìm các số tự nhiên  $n$  để các phân số sau là phân số tối giản: (a)  $\frac{2n+3}{4n+1}$ . (b)  $\frac{3n+2}{7n+1}$ . (c)  $\frac{2n+7}{5n+2}$ .
- 58 ([Bin23], 9., p. 7). Có bao nhiêu số nguyên dương  $n$  không vượt quá 1000 để phân số  $\frac{n+12}{n^2+9n-13}$  là phân số tối giản?
- 59 ([Bin23], 10., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $\frac{n+3}{2n-2} \in \mathbb{Z}$ .
- 60 ([Bin23], 11., p. 7). Tìm các số nguyên  $n$  sao cho các phân số sau có giá trị là số nguyên: (a)  $\frac{12}{3n-1}$ . (b)  $\frac{2n+3}{7}$ .
- 61 ([Bin23], 12., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  để phân số  $A = \frac{8n+193}{4n+3}$ : (a) Có giá trị là số tự nhiên. (b) Là phân số tối giản. (c) Với giá trị nào của  $n$  trong khoảng từ 150 đến 170 thì phân số  $A$  rút gọn được?
- 62 ([Bin23], 13., p. 7). Tìm các phân số tối giản nhỏ hơn 1 có tử & mẫu đều dương, biết tích của tử & mẫu của phân số bằng 120.
- 63 ([Bin23], 14., p. 7). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất để các phân số sau đều là phân số tối giản:  $\frac{5}{n+8}, \frac{6}{n+9}, \frac{7}{n+10}, \dots, \frac{17}{n+20}$ .
- 64 ([Bin23], 15., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{15}{42}, \frac{49}{56}, \frac{36}{51}$ . Biến đổi 3 phân số trên thành các phân số bằng chúng sao cho mẫu của phân số thứ nhất bằng tử của phân số thứ 2, mẫu của phân số thứ 2 bằng tử của phân số thứ 3.
- 65 ([Bin23], 16., p. 7). Cho 3 phân số  $\frac{5}{8}, \frac{11}{20}, \frac{4}{15}$ . Tìm 3 phân số (có tử & mẫu đều dương) theo thứ tự bằng 3 phân số trên sao cho hiệu của mẫu & tử của mỗi phân số này đều bằng nhau & hiệu đó có giá trị nhỏ nhất.
- 66 ([Bin23], 17., p. 8). Tìm các phân số lớn hơn  $\frac{1}{5}$  & khác số tự nhiên biết nếu lấy mẫu nhân với 1 số, lấy tử cộng với số đó thì giá trị của phân số không đổi.
- 67 ([Bin23], 18., p. 8). Cho phân số  $A = \frac{23+22+21+\dots+13}{11+10+9+\dots+1}$ . Nếu cách xóa 1 số hạng ở tử & 1 số hạng ở mẫu của  $A$  để được 1 phân số mới vẫn bằng phân số  $A$ .
- 68 ([Bin23], 19., p. 8, Bộ sử Hume). Người Anh có thói quen xếp bộ sử nước Anh của Hume (David Hume, nhà sử học Scotland) gồm 9 tập ở tủ sách đặc biệt gồm 2 ngăn: ngăn trên xếp 5 cuốn, ngăn dưới xếp 4 cuốn, ở gáy các cuốn sách đó ghi các số  $1, 2, 3, \dots, 9$ . Nếu chủ nhân xếp  $\frac{13458}{6729}$  (phân số này có giá trị bằng 2) thì chứng tỏ chủ nhân đã đọc 2 tập (riêng trường hợp mới đọc 1 tập thì xếp  $\frac{12345}{6789}$ ). Nếu cách xếp 9 cuốn sách đó để chứng tỏ chủ nhân của bộ sách đã đọc 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tập.
- 69 ([BS23], VD8.1, p. 51). Quan sát dãy phân số  $\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$  để viết tiếp 1 phân số nữa theo quy luật của dãy.
- 70 ([BS23], VD8.2, p. 52). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để cả 3 phân số  $\frac{15}{n}, \frac{12}{n+2}, \frac{6}{2n-5} \in \mathbb{Z}$ .
- 71 ([BS23], VD8.3, p. 52). Cho phân số  $\frac{1+2+\dots+20}{6+7+\dots+36}$ . Xóa 1 số hạng ở tử & 1 số hạng ở mẫu của phân số này để giá trị của phân số đó không đổi.
- 72 ([BS23], VD8.4, p. 53). Tìm  $a, b \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{a}{b} = \frac{132}{143}$ , BCNN( $a, b$ ) = 1092.
- 73 ([BS23], 8.1., p. 53). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{7}{x} = \frac{x}{28}$ . (b)  $\frac{10+x}{17+x} = \frac{3}{4}$ . (c)  $\frac{40+x}{77-x} = \frac{6}{7}$ .
- 74 ([BS23], 8.2., p. 53). Tìm  $a, b \in \mathbb{Z}$  thỏa  $a^3 + b^3 = 1216$  & phân số  $\frac{a}{b}$  rút gọn được thành  $\frac{3}{5}$ .
- 75 ([BS23], 8.3., p. 53). Viết các phân số tối giản  $\frac{a}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$  &  $ab = 100$ .
- 76 ([BS23], 8.4., p. 53). Rút gọn phân số: (a)  $\frac{10 \cdot 11 + 50 \cdot 55 + 70 \cdot 77}{11 \cdot 12 + 55 \cdot 60 + 77 \cdot 84}$ . (b)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 49}{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 50}$ .

77 ([BS23], 8.5., p. 53). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{n+3}{n-2}$  là số nguyên âm. (b)  $\frac{n+7}{3n-1} \in \mathbb{Z}$ . (c)  $\frac{3n+2}{4n-5} \in \mathbb{Z}$ .

78 ([BS23], 8.6., p. 54). Chứng minh phân số  $\frac{n-5}{3n-14}$  tối giản  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

79 ([BS23], 8.7., p. 54). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{2n-1}{3n+2}$  rút gọn được.

80 ([BS23], 8.8., p. 54). Tìm  $n \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất để 5 phân số  $\frac{n+7}{3}, \frac{n+8}{4}, \frac{n+9}{5}, \frac{n+10}{6}, \frac{n+11}{7}$ .

81 ([BS23], 8.9., p. 54). Tìm  $a, b \in \mathbb{Z}$  biết  $\frac{a}{b} = \frac{49}{56}$ ,  $\text{UCLN}(a, b) = 12$ .

82 ([BS23], 8.10., p. 54). Tìm  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất thỏa  $\frac{a}{b} = \frac{5}{14}, \frac{b}{c} = \frac{21}{28}, \frac{c}{d} = \frac{6}{11}$ .

## 2 Quy Đồng Mẫu Nhiều Phân Số. So Sánh Phân Số

83 ([Bin+23], H1, p. 12). Đ/S? (a) 1 cách để quy đồng mẫu 2 phân số  $\frac{a}{b}$  &  $\frac{c}{d}$  là  $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$ . (b) Phân số dương lớn hơn phân số âm. (c) Trong 2 phân số có cùng mẫu, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn. (d) Trong 2 phân số có mẫu số dương & tử bằng nhau, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (e)  $3\frac{7}{5}$  là 1 hỗn số. (f) Phân số  $\frac{22}{5}$  viết dưới dạng hỗn số là  $4\frac{2}{5}$ .

84 ([Bin+23], H2, p. 12). Đ/S? Thực hiện quy đồng mẫu 2 phân số  $\frac{10}{12}$  &  $\frac{5}{8}$ , Sơn & Huy đã làm như sau: Sơn:  $\frac{10}{12} = \frac{10 \cdot 8}{12 \cdot 8} = \frac{80}{96}$ ,  $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 12}{8 \cdot 12} = \frac{60}{96}$ . Huy:  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$ ,  $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$ .

85 ([Bin+23], H3, p. 12). Đ/S? Để so sánh 2 phân số  $\frac{23}{-5}$  &  $\frac{24}{-5}$ , Hà đã giải thích như sau:  $\frac{23}{-5}$  &  $\frac{24}{-5}$  là 2 phân số có cùng mẫu &  $23 < 24$  nên  $\frac{23}{-5} < \frac{24}{-5}$ .

86 ([Bin+23], VD1, p. 12). Quy đồng mẫu các phân số: (a)  $\frac{-3}{16}, \frac{5}{-24}$ . (b)  $\frac{3}{14}, \frac{-5}{18}, \frac{25}{-42}$ . (c)  $\frac{3}{16}, \frac{5}{48}, \frac{-7}{4}$ . (d)  $\frac{3}{7}, \frac{-8}{5}, \frac{5}{12}$ . (e)  $\frac{-15}{18}, \frac{42}{-72}, \frac{32}{120}$ .

87 ([Bin+23], VD2, p. 13). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: (a)  $\frac{5}{24}, \frac{11}{36}, \frac{17}{60}$ . (b)  $\frac{23}{47}, \frac{69}{85}, \frac{92}{137}$ . (c)  $\frac{17}{60}, \frac{16}{73}$ .

88 ([Bin+23], VD3, p. 14). (a) Viết 2 phân số sau dưới dạng hỗn số:  $\frac{26}{5}, \frac{153}{25}$ . (b) Viết 2 hỗn số sau dưới dạng phân số:  $3\frac{2}{7}, 8\frac{3}{5}$ .

89 ([Bin+23], VD4, p. 14). So sánh  $\frac{62}{15}, \frac{70}{17}$ .

90 ([Bin+23], VD5, p. 15). 2 bạn Mai & Đào đi xe đạp đến trường với cùng tốc độ. Mai đi hết  $\frac{2}{3}$  giờ, Đào đi hết  $\frac{3}{4}$  giờ. Hỏi nhà ai cách xa trường hơn?

91 ([Bin+23], VD6, p. 15). Tìm các phân số có mẫu là 5, lớn hơn  $\frac{-2}{3}$  & nhỏ hơn  $\frac{1}{-6}$ .

92 ([Bin+23], 2.1., p. 15). Quy đồng mẫu các phân số: (a)  $\frac{13}{30}, \frac{-7}{120}$ . (b)  $\frac{36}{75}, \frac{6}{11}$ . (c)  $\frac{3}{25}, \frac{4}{5}, \frac{-8}{75}$ . (d)  $\frac{-5}{18}, \frac{17}{60}, \frac{32}{-45}$ .

93 ([Bin+23], 2.2., p. 15). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn: (a)  $\frac{6}{7}, \frac{9}{10}$ . (b)  $\frac{10}{-21}, \frac{-4}{7}, \frac{7}{9}$ . (c)  $\frac{-5}{-28}, \frac{6}{35}, \frac{27}{-180}$ . (d)  $\frac{3}{5}, \frac{-5}{3}, \frac{-36}{-60}, \frac{18}{21}$ .

94 ([Bin+23], 2.3., p. 15). 2 bạn mai & Đào vào hiệu sách chọn được 1 cuốn sách mà cả 2 cùng thích, mỗi bạn mua 1 quyển. Sau ngày nghỉ cuối tuần, Mai đã đọc được  $\frac{7}{8}$  số trang còn Đào đã đọc được  $\frac{4}{5}$  số trang của cuốn sách đó. Hỏi ai đã đọc được nhiều hơn?

95 ([Bin+23], 2.4., p. 16). Sơ kết học kỳ I, lớp 6A có  $\frac{3}{4}$  số học sinh là học sinh giỏi môn Toán,  $\frac{3}{5}$  số học sinh là học sinh giỏi môn Ngữ Văn,  $\frac{2}{3}$  số học sinh là học sinh giỏi môn Anh văn. Sắp xếp theo thứ tự các môn học này theo số lượng học sinh giỏi từ nhiều nhất đến ít nhất.

96 ([Bin+23], 2.5., p. 16). Tìm 4 phân số lớn hơn  $\frac{5}{12}$  & nhỏ hơn  $\frac{5}{8}$ .

97 ([Bin+23], 2.6., p. 16). Tìm các phân số thỏa mãn: (a) Có mẫu là 20, lớn hơn  $\frac{4}{13}$ , & nhỏ hơn  $\frac{5}{13}$ . (b) Có mẫu là 14, lớn hơn  $\frac{-2}{21}$ , & nhỏ hơn  $\frac{2}{9}$ .

98 ([Bin+23], 2.7., p. 16). Tìm các số nguyên  $n$  lớn hơn  $\frac{283}{23}$  & nhỏ hơn  $\frac{467}{31}$ .

99 ([Bin+23], 2.8., p. 16). An & Bình đạp xe với tốc độ không đổi trên cùng 1 quãng đường. An đi hết 36 phút, Bình đi hết 44 phút. (a) So sánh quãng đường mà An đi được trong 20 phút với quãng đường mà Bình đi được trong 26 phút. (b) Bình phải đi trong bao lâu để được quãng đường bằng quãng đường An đi được trong 18 phút?

100 ([Bin+23], 2.9., p. 16). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{-7}{12} < \frac{x-1}{4} < \frac{2}{3}$ .

101 ([Bin+23], 2.10., p. 16). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{-1}{3} < \frac{x}{36} < \frac{y}{118} < \frac{-1}{4}$ . (b)  $\frac{1}{220} < \frac{x}{165} < \frac{y}{132} < \frac{1}{60}$ .

102 ([Bin+23], 2.11., p. 16). Cho  $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ . Chứng minh: (a) Nếu  $\frac{a}{b} < 1$  thì  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ . (b) Nếu  $\frac{a}{b} > 1$  thì  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ . Áp dụng: So sánh  $\frac{17}{18}$  &  $\frac{26}{27}$ .

103 ([Tuy23], VD52, p. 48). So sánh 2 phân số  $\frac{-101}{-100}$  &  $\frac{200}{201}$ .

104 (Mở rộng [Tuy23], VD52, p. 48). Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $a > b > 0$ ,  $d > c > 0$ . So sánh:  $\frac{\pm a}{\pm b}$  &  $\frac{\pm c}{\pm d}$ .

105 ([Tuy23], VD53, p. 48). Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần:  $\frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{2}{-3}, \frac{-7}{12}$ .

106 ([Bin23], VD5, p. 8). So sánh  $A = \frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$  &  $B = \frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$ .

107 ([Bin23], VD6, p. 9). 1 phân số có tử & mẫu đều là số nguyên dương. Nếu cộng tử & mẫu của phân số đó với cùng  $n \in \mathbb{N}^*$  thì phân số thay đổi thế nào?

108 ([Bin23], VD7, p. 9). So sánh  $\left(\frac{1}{32}\right)^7$  &  $\left(\frac{1}{16}\right)^9$ .

109 ([Bin23], VD8, p. 9). Chứng minh  $95^8$  là 1 số có 16 chữ số khi viết kết quả của nó trong hệ thập phân.

110 ([Bin23], VD9, p. 10). Cho  $a, b \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $\frac{5}{7} < \frac{a}{b} < \frac{9}{11}$ . Tìm  $a + b$  khi  $b$  nhỏ nhất.

111 ([Bin23], 20., p. 10). So sánh  $a, b \in \mathbb{N}$  biết  $\frac{1+2+3+\dots+a}{a} < \frac{1+2+3+\dots+b}{b}$ .

112 ([Bin23], 21., p. 10). So sánh: (a)  $\frac{18}{91}$  &  $\frac{23}{114}$ . (b)  $\frac{21}{52}$  &  $\frac{213}{523}$ . (c)  $\frac{1313}{9191}$  &  $\frac{1111}{7373}$ .

113 ([Bin23], 22., p. 10). So sánh các phân số sau, với  $n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{n}{n+1}$  &  $\frac{n+2}{n+3}$ . (b)  $\frac{n+1}{n+4}$  &  $\frac{n}{n+5}$ . (c)  $\frac{n}{2n+1}$  &  $\frac{3n+1}{6n+3}$ .

114 ([Bin23], 23., p. 11). So sánh  $A$  &  $B$ : (a)  $A = \frac{20}{39} + \frac{22}{27} + \frac{18}{43}$ ,  $B = \frac{14}{39} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$ . (b)  $A = \frac{3}{8^3} + \frac{7}{8^4}$ ,  $B = \frac{7}{8^3} + \frac{3}{8^4}$ . (c)  $A = \frac{10^7 + 5}{10^7 - 8}$ ,  $B = \frac{10^8 + 6}{10^8 - 7}$ . (d)  $A = \frac{10^{1992} + 1}{10^{1991} + 1}$ ,  $B = \frac{10^{1993} + 1}{10^{1992} + 1}$ .

115 ([Bin23], 24., p. 11). Tìm  $x \in \mathbb{N}$  sao cho  $\frac{4}{11} < \frac{x}{20} < \frac{5}{11}$ .

116 ([Bin23], 25., p. 11). Tìm 2 phân số có các mẫu bằng 9, các tử là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{4}{7}$  nằm giữa 2 phân số đó.

117 ([Bin23], 26., p. 11). Tìm 2 phân số có các tử bằng 1, các mẫu là 2 số tự nhiên liên tiếp sao cho phân số  $\frac{13}{84}$  nằm giữa 2 phân số đó.

118 ([Bin23], 27., p. 11). Tìm 2 phân số có mẫu bằng 21 biết nó lớn hơn  $\frac{5}{7}$  & nhỏ hơn  $\frac{5}{6}$ .



119 ([Bin23], 28., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  sao cho  $a$  là số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn  $\frac{4}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{3}$ .

120 ([Bin23], 29., p. 11). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  lớn nhất nhỏ hơn 1 với  $a, b$  là các số nguyên dương có 1 chữ số.

121 ([Bin23], 30., p. 11). So sánh 2 phân số  $\left(\frac{1}{243}\right)^9$  &  $\left(\frac{1}{83}\right)^{13}$ .

122 ([BS23], VD9.1, p. 55). (a) Chứng minh trong 2 phân số có cùng 1 tử, tử & mẫu đều dương, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn. (b) Áp dụng tính chất này để so sánh phân số: (i)  $\frac{10}{11}, \frac{12}{13}, \frac{15}{16}$ . (ii)  $\frac{n+1}{n+5}, \frac{n+2}{n+3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

123 ([BS23], VD9.2, p. 56). Chứng minh nếu cộng cả tử & mẫu của 1 phân số nhỏ hơn 1, tử & mẫu đều dương, với cùng 1 số nguyên dương thì giá trị của phân số đó tăng thêm.

124 ([BS23], VD9.3, p. 56). So sánh  $A = \frac{13579}{34567}, B = \frac{13580}{34569}$ .

125 ([BS23], VD9.4, p. 57). So sánh  $A = \frac{10^8 + 1}{10^9 + 1}, B = \frac{10^9 + 1}{10^{10} + 1}$ .

126 ([BS23], 9.1., p. 57). Xếp các phân số  $\frac{10}{19}, \frac{12}{23}, \frac{15}{17}, \frac{20}{29}, \frac{60}{71}$  theo thứ tự tăng dần.

127 ([BS23], 9.2., p. 57). Tìm phân số tối giản  $\frac{a}{b} < 1$  có  $ab = 80$ .

128 ([BS23], 9.3., p. 58). Tìm  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$ . (b)  $\frac{5}{8} < \frac{x}{x} < \frac{5}{7}$ .

129 ([BS23], 9.4., p. 58). So sánh phân số mà không quy đồng mẫu hoặc tử: (a)  $\frac{7}{15}, \frac{20}{39}$ . (b)  $\frac{14}{41}, \frac{17}{54}$ .

130 ([BS23], 9.5., p. 58). So sánh phân số  $\forall n \in \mathbb{N}$ : (a)  $\frac{n}{2n+3}$ . (b)  $\frac{n}{3n+1}, \frac{2n}{6n+1}$ .

131 ([BS23], 9.6., p. 58). So sánh phân số: (a)  $A = \frac{35420}{35423}, B = \frac{25343}{25345}$ . (b)  $C = \frac{5^{12} + 1}{5^{13} + 1}, D = \frac{5^{11} + 1}{5^{12} + 1}$ .

132 ([BS23], 9.7., p. 58). Cho  $x, y \in \mathbb{N}, 1 \leq y < x \leq 30$ . (a) Tìm GTLN của phân số  $\frac{x+y}{x-y}$ . (b) Tìm GTLN của phân số  $\frac{xy}{x-y}$ .

### 3 Calculus of Fraction – Tính Toán với Phân Số

133 ([Bin+23], H1–H4, p. 19). (a) Cách để cộng, nhân 2 phân số? (b) Tính:  $x = \frac{1}{2} + \frac{-2}{5}, y = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, z = \frac{-8}{3} \cdot \frac{9}{-14}, t = \frac{6}{5} : \frac{-9}{10}$ .

134 ([Bin+23], VD1, p. 19). Tính: (a)  $\frac{4}{5} + \frac{-6}{5}$ . (b)  $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}$ . (c)  $\frac{-5}{9} - \frac{2}{9}$ . (d)  $\frac{37}{19} + \frac{12}{-19}$ . (e)  $\frac{2}{3} + \frac{-1}{4}$ . (f)  $\frac{1}{-3} + \frac{8}{9}$ . (g)  $-\frac{1}{6} + \frac{3}{-8}$ . (h)  $2 - \frac{1}{15} + \frac{2}{3}$ .

135 ([Bin+23], VD2, p. 20). Tính: (a)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{-4}$ . (b)  $\frac{-2}{3} \cdot \frac{9}{-14}$ . (c)  $3 \cdot \frac{11}{6}$ . (d)  $\frac{-8}{5} \cdot \frac{-25}{24}$ . (e)  $\frac{3}{10} : \frac{-9}{15}$ . (f)  $-12 : \frac{4}{5}$ . (g)  $\frac{2}{-5} : \frac{-8}{25}$ . (h)  $\frac{3}{5} : (-9)$ .

136 ([Bin+23], VD3, p. 20). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ . (b)  $\frac{6}{7} - 2x = \frac{2}{3}$ . (c)  $\frac{-2}{3}x = \frac{8}{9}$ . (d)  $x : \frac{24}{5} = \frac{-5}{4}$ .

137 ([Bin+23], VD4, p. 21). Tính hợp lý: (a)  $A = \frac{3}{-7} + \frac{6}{11} + \frac{17}{7} - \frac{9}{11}$ . (b)  $B = \frac{3}{5} \cdot \frac{-6}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{13}$ . (d)  $D = \frac{3 - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{4}{4} - \frac{6}{6}}$ .

138 ([Bin+23], VD5, p. 21). (a) Chứng minh  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (b) Tính  $A = \sum_{i=1}^{2020} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}$ .

139 ([Bin+23], VD6, p. 21).  $\frac{2}{3}$  số công nhân trong 1 nhà máy là nữ &  $\frac{3}{4}$  trong số họ đang nuôi con nhỏ. Số công nhân nữ đang nuôi con nhỏ bằng mấy phần tổng số công nhân của nhà máy?

140 ([Bin+23], 3.1., p. 22). Tính: (a)  $\frac{5}{2} + \frac{-4}{3}$ . (b)  $\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$ . (c)  $2 - \frac{5}{4}$ . (d)  $\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$ . (e)  $\frac{7}{2} \cdot \frac{-6}{5}$ . (f)  $-16 \cdot \frac{3}{8}$ . (g)  $\frac{-8}{5} : \frac{2}{-3}$ . (h)  $\frac{-6}{5} : 12$ .

141 ([Bin+23], 3.2., p. 22). Tính: (a)  $\frac{3}{4} - \frac{5}{2} + \frac{-3}{16}$ . (b)  $\frac{1}{3} - \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{25}$ . (c)  $\left(\frac{7}{10} - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} - 2$ . (d)  $\left(1 + \frac{7}{3}\right) : \left(2 - \frac{5}{12} - \frac{3}{2}\right)$ .

142 ([Bin+23], 3.3., p. 22). Tính hợp lý: (a)  $\frac{3}{17} + \frac{1}{22} + \frac{5}{3} - \frac{23}{22} + \frac{14}{17}$ . (b)  $\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5}$ . (c)  $\frac{8}{7} \cdot \frac{9}{19} - \frac{8}{19} \cdot \frac{5}{7} + \frac{3}{19} \cdot \frac{8}{7}$ . (d)  $\frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{8}{19}$ .  $\frac{9}{5} - \frac{6}{7} + \frac{12}{19}$ .

143 ([Bin+23], 3.4., p. 22). Tìm  $x \in \mathbb{R}$  thỏa: (a)  $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ . (b)  $x + \frac{2}{5} = \frac{-7}{10}$ . (c)  $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{5} = \frac{4}{3}$ . (d)  $\frac{1}{3} : x - \frac{3}{2} = 5$ . (e)  $x \in \mathbb{Z}$  thỏa  $\frac{-2}{3} - 1 + \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{10} + \frac{27}{5} - \frac{3}{2}$ .

144 ([Bin+23], 3.5., p. 22). Tính giá trị biểu thức  $A = 2(a + b) - ab$  với  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{5}$ .

145 ([Bin+23], 3.6., p. 22). Huy viết ra 2 phân số, biết mẫu số của phân số thứ nhất bằng 3 lần tử số của phân số thứ 2, mẫu số của phân số thứ 2 bằng 2 lần tử số của phân số thứ nhất. Tính tích 2 phân số đó.

146 ([Bin+23], 3.7., p. 22). 1 tổ sản xuất trong tuần thứ nhất làm được  $\frac{1}{4}$  kế hoạch công việc của tháng, tuần thứ 2 làm được  $\frac{2}{5}$  kế hoạch, tuần thứ 3 làm được  $\frac{4}{10}$  kế hoạch. Sau 3 tuần làm việc, tổ sản xuất đã thực hiện vượt kế hoạch hay còn phải làm tiếp bao nhiêu phần kế hoạch công việc của tháng đó?

147 ([Bin+23], 3.8., p. 22). Minh đã ăn  $\frac{3}{4}$  của 1 nửa chiếc pizza. Minh đã ăn mấy phần của chiếc pizza?

148 ([Bin+23], 3.9., p. 22). So sánh:  $A = \frac{17^{13} + 1}{17^{14} + 1}, B = \frac{17^{14} + 1}{17^{15} + 1}$ .

149 ([Bin+23], 3.10., p. 22). Tính: (a)  $A = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \frac{3}{10 \cdot 13} + \frac{3}{13 \cdot 16} + \frac{3}{16 \cdot 19}$ . (b)  $B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2023}$ . (c)  $C = 5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \dots + \frac{5}{729} + \frac{5}{2187}$ . (d)  $D = \prod_{i=2}^{1000} 1 - \frac{1}{i} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1000}\right)$ . (e)  $E = \sum_{i=1}^{98} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}$ .

150 ([Bin+23], 3.11., p. 22). Chứng minh: (a)  $\sum_{i=101}^{200} \frac{1}{i} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$ . (b)  $\sum_{i=2}^{2050} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2050^2} < 1$ . (c)  $\frac{2}{10 \cdot 12} + \frac{2}{12 \cdot 14} + \frac{2}{14 \cdot 16} + \dots + \frac{2}{98 \cdot 100} < \frac{1}{10}$ .

151 ([BS23], VD10.1, p. 59). Tìm  $a, b \in \mathbb{N}$  thỏa  $\frac{a}{5} + \frac{b}{3} = \frac{13}{15}$ .

152 ([BS23], VD10.2, p. 59). (a) Cho trước phân số  $\frac{a}{b} \neq -1$ . Tìm phân số  $\frac{c}{d}$  thỏa  $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ . (b) Tìm phân số  $\frac{c}{d}$  có tính chất trên, nếu phân số  $\frac{a}{b}$  bằng  $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ .

153 ([BS23], VD10.3, p. 60). Tính  $A = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{11}{12} + \frac{19}{20} + \frac{29}{30} + \frac{41}{42} + \frac{55}{56} + \frac{71}{72} + \frac{89}{90}$ .

154 ([BS23], VD10.4, p. 60). Cho  $A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \dots \frac{43}{46} \cdot \frac{45}{48}, B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \dots \frac{44}{47} \cdot \frac{46}{49}$ . (a) So sánh  $A, B$ . (b) Chứng minh  $A < \frac{1}{133}$ .

155 ([BS23], VD10.5, p. 61). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$  lớn nhất sao cho khi chia mỗi phân số  $\frac{12}{35}, \frac{8}{21}, \frac{52}{91}$  cho  $\frac{a}{b}$ , ta đều được các số tự nhiên.

156 ([BS23], VD10.6, p. 62). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $\frac{20n+13}{4n+3}$  có GTNN.

157 ([BS23], VD10.7, p. 62). Tìm  $x, y \in \mathbb{N}$  thỏa  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ .

158 ([BS23], VD10.8, p. 63). Viết tiếp các phân số vào dãy các phân số có quy luật:  $3, 4\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}, 10\frac{1}{8}, 15\frac{3}{16}$ .



- 159 ([BS23], VD10.9, p. 63). Thay  $a, b$  bởi 2 chữ số thích hợp:  $\overline{0.ab} \cdot (a + b) = 0.36$ .
- 160 ([BS23], 10.1., p. 64). Tìm phân số  $\frac{a}{b}$ , biết nó bằng trung bình cộng của 3 phân số  $\frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{1}{d} \cdot \frac{a}{b}$ .
- 161 ([BS23], 10.2., p. 64). Chứng minh phân số có thể viết được dưới dạng tổng của 2 phân số có tử bằng 1, mẫu khác nhau:  
(a)  $\frac{7}{10}$ . (b)  $\frac{2}{3}$ .
- 162 ([BS23], 10.3., p. 64). Chứng minh phân số có thể viết được dưới dạng tổng của 3 phân số có tử bằng 1, mẫu khác nhau:  
(a)  $\frac{17}{18}$ . (b)  $\frac{5}{8}$ .
- 163 ([BS23], 10.4., p. 64). Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  thỏa: (a)  $\frac{x}{10} - \frac{1}{y} = \frac{3}{10}$ . (b)  $\frac{1}{x} + \frac{y}{2} = \frac{5}{8}$ .
- 164 ([BS23], 10.5., p. 64). Cho phân số  $\frac{a}{b} \neq 1$ . Tìm phân số  $\frac{c}{d}$  thỏa  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ .
- 165 ([BS23], 10.6., p. 64). Tính  $\frac{3 - \frac{3}{20} + \frac{3}{13} - \frac{3}{2013}}{7 - \frac{3}{20} + \frac{3}{13} - \frac{3}{2013}}$ .
- 166 ([BS23], 10.7., p. 64). Tính  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{41 \cdot 45}$ .
- 167 ([BS23], 10.8., p. 65). Cho  $A = \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{60}$ . Chứng minh  $A > \frac{7}{12}$ .
- 168 ([BS23], 10.9., p. 65). Cho  $A = \sum_{i=3}^{50} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{50^2}$ . Chứng minh: (a)  $A > \frac{1}{4}$ . (b)  $A < \frac{4}{9}$ .
- 169 ([BS23], 10.10., p. 65). Tính  $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{48}{49} \cdot \frac{63}{64}$ .
- 170 ([BS23], 10.11., p. 65). Cho  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{79}{80}$ . Chứng minh  $A < \frac{1}{9}$ .
- 171 ([BS23], 10.12., p. 65). Chứng minh  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 19 = \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{13}{2} \dots \frac{20}{2}$ .
- 172 ([BS23], 10.13., p. 65). Chứng minh  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{20}$ .
- 173 ([BS23], 10.14., p. 65). Tính  $\frac{\frac{1}{19} + \frac{2}{18} + \frac{3}{17} + \dots + \frac{18}{2} + \frac{19}{1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}}$ .
- 174 ([BS23], 10.15., p. 65). Tính: (a)  $A = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9}$ . (b)  $B = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{972}$ .
- 175 ([BS23], 10.16., p. 65). Tìm  $a, b \in \mathbb{Q}$  thỏa  $a + b = 3(a - b) = 2 \cdot \frac{a}{b}$ .
- 176 ([BS23], 10.17., p. 65). Cho  $\frac{a}{b} = \sum_{i=2}^9 \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9}$ . Chứng minh  $a : 11$ .
- 177 ([BS23], 10.18., p. 66). Chứng minh  $\sum_{i=2}^{50} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \notin \mathbb{N}$ .
- 178 ([BS23], 10.19., p. 66). Tìm  $a \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất, biết nhân  $a$  với  $\frac{8}{15}$  hoặc  $\frac{21}{36}$  thì 2 kết quả đều là số tự nhiên.
- 179 ([BS23], 10.20., p. 66). So sánh  $A = \frac{8^9 + 12}{8^9 + 7}, B = \frac{8^{10} + 4}{8^{10} - 1}$ .
- 180 ([BS23], 10.21., p. 66). Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $\frac{4n+9}{2n+3}$  có GTLN.
- 181 ([BS23], 10.22., p. 66). Tìm số tự nhiên có 2 chữ số sao cho tỷ số của số đó & tổng các chữ số của nó có GTNN.
- 182 ([BS23], 10.23., p. 66). Tìm tỷ số lớn nhất của số tự nhiên có 3 chữ số & tổng các chữ số của nó.
- 183 ([BS23], 10.24., p. 66). So sánh  $A = \frac{7^{10}}{1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^9}, B = \frac{5^{10}}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^9}$ .
- 184 ([BS23], 10.25., p. 66). Tìm 3 số nguyên dương khác nhau sao cho tổng các nghịch đảo của chúng bằng 1.

## 4 Hỗn Số Dương

Hỗn số dương = hỗn hợp của số nguyên dương & phân số dương.

**185** ([Bin23], VD2, p. 32). (a) Viết phân số  $\frac{7}{4}$  dưới dạng tổng của 1 số nguyên dương & 1 phân số bé hơn 1. (b) Viết phân số  $\frac{21}{5}$  dưới dạng hỗn số.

**186** ([Bin23], VD3, 2, p. 33). (a) Viết hỗn số  $2\frac{3}{5}$  thành phân số. (b) Viết mỗi phân số sau thành hỗn số:  $\frac{14}{3}, \frac{22}{7}$ . (c) Viết mỗi hỗn số sau thành phân số:  $2\frac{3}{4}, 5\frac{1}{6}$ .

**187** ([Thá+23], 4., p. 33). (a) Viết các số đo thời gian dưới dạng hỗn số với đơn vị là giờ: 2 giờ 15 phút, 10 giờ 20 phút. (b) Viết các số đo diện tích sau dưới dạng hỗn số với đơn vị là hecta biết  $1\text{ha} = 100\text{a}$ :  $1\text{ha}7\text{a}$ ,  $3\text{ha}50\text{a}$ ,

**188** (Chuyển đổi phân số & hỗn số dương). (a) Khi nào 1 phân số có thể chuyển thành 1 hỗn số dương? (b) Ngược lại, khi nào 1 hỗn số dương có thể chuyển thành 1 phân số? (c) Nếu định nghĩa 1 hỗn số âm là 1 số đối của hỗn số dương tương ứng thì khi nào 1 hỗn số âm có thể chuyển thành 1 phân số?

**189** (Công thức hỗn số dương). Chứng minh:

$$\frac{ac+b}{c} = a + \frac{b}{c} = a\frac{b}{c}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}^*,$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} \rfloor b + \left\{ \frac{a}{b} \right\}}{b} = \left[ \frac{a}{b} \right] + \frac{\left\{ \frac{a}{b} \right\}}{b} = \left[ \frac{a}{b} \right] \frac{\left\{ \frac{a}{b} \right\}}{b}, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}^*, a > b.$$

## 5 Các Bài Toán Về Phân Số & Tỷ Số

**1** Giá trị  $\frac{m}{n}$  của 1 số  $a \in \mathbb{R}$  là  $b = a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ . **2** Biết  $\frac{m}{n}$  của  $a \in \mathbb{R}$  bằng  $b \in \mathbb{R}$  thì  $a = b : \frac{m}{n}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ .

**190** ([Bin+23], H1–H4, p. 21). Tính: (a)  $\frac{5}{2}$  của 50. (b)  $\frac{2}{3}$  h. (c) 1 số biết  $\frac{3}{4}$  của số đó bằng 15000. (d)  $\frac{1}{4}$  số quả táo nặng 3 kg. Tính cân nặng tất cả số quả táo đó.

**191** ([Bin+23], VD1, p. 26).  $\frac{3}{4}$  trong số 240 vật nuôi ở 1 trang trại là gà, số còn lại là lợn. Tính số gà, số lợn của trang trại.

**192** ([Bin+23], VD2, p. 26). Tại 1 điểm trong giữ xe, người trông xe đã phát ra 120 vé gửi xe các loại. Có  $\frac{3}{4}$  số xe gửi là xe máy &  $\frac{2}{3}$  số xe máy là xe tay ga. Tính số xe máy tay ga ở điểm trong giữ xe lúc đó.

**193** ([Bin+23], VD3, p. 26). An thu hoạch  $\frac{2}{5}$  diện tích trồng lúa thì được khoảng 2000 kg thóc. Tính số tấn thóc nếu An thu hoạch hết diện tích trồng lúa của mình.

**194** ([Bin+23], VD4, p. 26). Kết thúc học kỳ I, lớp 6A có 27 học sinh có điểm trung bình môn Toán đạt từ 8.0 trở lên & chiếm  $\frac{3}{4}$  tổng số học sinh của lớp. Tính số học sinh lớp 6A.

**195** ([Bin+23], 4.1., p. 26). Bác Minh gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào 1 ngân hàng với lãi suất 7% 1 năm. Tính số tiền lãi bác Minh nhận được sau 1 năm.

**196** ([Bin+23], 4.2., p. 26). Có 84 quả,  $\frac{4}{7}$  số quả là táo, còn lại là lê. Tính số táo, số lê.

**197** ([Bin+23], 4.3., p. 26). Hoa đã đọc được  $\frac{3}{5}$  số trang của 1 cuốn truyện & còn 64 trang nữa thì hết cuốn truyện đó. Tính số trang cuốn truyện của Hoa.

**198** ([Bin+23], 4.4., p. 27). 1 mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài 20 m, chiều dài bằng  $\frac{5}{3}$  chiều rộng. Tính diện tích mảnh vườn đó.

**199** ([Bin+23], 4.5., p. 27). An đếm  $\frac{2}{3}$  kho hàng thì thấy có 1600 sản phẩm. Hôm nay, kho hàng xuất bán  $\frac{1}{4}$  số hàng trong kho, tức là bao nhiêu sản phẩm?

- 200** ([Bin+23], 4.6., p. 27). Bộ sưu tập tem của Tuấn có  $\frac{3}{4}$  số tem về chủ đề động vật,  $\frac{1}{12}$  số tem về chủ đề các loài hoa, số còn lại là tem về các sự kiện lịch sử. Biết Tuấn có tất cả 16 con tem thuộc chủ đề các sự kiện lịch sử, tính tổng số tem & số tem thuộc các chủ đề còn lại trong bộ sưu tập của Tuấn.
- 201** ([Bin+23], 4.7., p. 27). 1 bác nông dân mang trứng gà ra chợ bán. Bác bán cho người thứ nhất 1 nửa số trứng bớt lại 6 quả, bán cho người thứ 2  $\frac{1}{3}$  số trứng còn lại bớt đi 6 quả, bán cho người thứ 3  $\frac{1}{4}$  số trứng còn lại bớt đi 6 quả. Kiểm tra lại, bác nông dân thấy mình vẫn còn đúng 1 nửa số trứng lúc đem ra chợ. Tính số trứng bác nông dân đã mang ra chợ.
- 202** ([BS23], VD11.1, pp. 66–67). Tâm đã có 1 số điểm kiểm tra Toán & còn 1 bài kiểm tra nữa, các bài kiểm tra đều tính hệ số 1 ngang nhau. Nếu bài kiểm tra này Tâm được 10 điểm thì Tâm đạt điểm trung bình là 9. Nhưng vì trong bài kiểm tra cuối, Tâm chỉ được 7.5 điểm (điểm không làm tròn thành 1 số nguyên) nên điểm trung bình của Tâm chỉ là 8.5. Hỏi Tâm có tất cả bao nhiêu bài kiểm tra?
- 203** ([BS23], VD11.2, p. 67). Có 20 viên bi đỏ, 30 viên bi trắng, & 1 số viên bi xanh, tất cả để trong hộp. Nếu lấy ra trong hộp 1 viên bi thì cơ hội có thể lấy được 1 viên bi xanh là  $\frac{9}{11}$ . Tính số bi xanh.
- 204** ([BS23], VD11.3, p. 67). 1 lớp học mua 1 số vở về chia đều cho các học sinh. Nếu chỉ chia cho các bạn nữ thì mỗi bạn nhận 15 quyển. Nếu chỉ chia cho các bạn nam thì mỗi bạn nhận 10 quyển. Hỏi nếu chia đều cho tất cả các bạn trong lớp thì mỗi bạn nhận được bao nhiêu quyển vở?
- 205** ([BS23], VD11.4, p. 68). 4 bạn An, Bách, Cảnh, Dũng đi chơi, nhưng Dũng không mang tiền. An cho Dũng  $\frac{1}{5}$  số tiền của mình. Bách cho Dũng  $\frac{1}{4}$  số tiền của mình. Cảnh cho Dũng  $\frac{1}{3}$  số tiền của mình. Kết quả số tiền Dũng nhận được từ 3 bạn đều bằng nhau. Hỏi cuối cùng Dũng có số tiền bằng mấy phần tổng số tiền của cả nhóm?
- 206** ([BS23], 11.1., p. 69). Tổng của 3 số bằng 148. Nếu nhân số thứ nhất với 4, nhân số thứ 2 với 5, nhân số thứ 3 với 6 thì được 3 tích bằng nhau. Tính mỗi số.
- 207** ([BS23], 11.2., p. 69). Tổng của 3 số bằng 147. Biết  $\frac{2}{3}$  số thứ nhất bằng  $\frac{3}{4}$  số thứ 2 & bằng  $\frac{4}{5}$  số thứ 3. Tính mỗi số.
- 208** ([BS23], 11.3., p. 69). Trong 1 buổi đi tham quan, số nữ đăng ký tham gia bằng  $\frac{1}{4}$  số nam. Nhưng sau đó 1 bạn nữ xin nghỉ, 1 bạn nam xin đi thêm nên số nữ đi tham quan bằng  $\frac{1}{5}$  số nam. Tính số học sinh nữ & nam đã đi tham quan.
- 209** ([BS23], 11.4., p. 69). Tú có 2 ngăn sách. Số sách ở ngăn I bằng  $\frac{2}{5}$  tổng số sách ở 2 ngăn. Tú cho bạn mượn 4 quyển sách ở ngăn I nên số sách ở ngăn I bằng  $\frac{1}{3}$  tổng số sách ở 2 ngăn. Tính tổng số sách ở 2 ngăn lúc đầu.
- 210** ([BS23], 11.5., p. 70). Hiện nay, tuổi mẹ gấp 3 tuổi con. Cách đây 4 năm, tuổi mẹ gấp 4 tuổi con. Tính tuổi mỗi người hiện nay.
- 211** ([BS23], 11.6., p. 70). 2 máy cày làm việc trên 1 cánh đồng. Nếu cả 2 máy cùng cày thì 10 h xong công việc. Nhưng thực tế 2 máy chỉ cùng làm việc 7 h đầu, sau đó máy thứ nhất đi cày nơi khác, máy thứ 2 làm tiếp 9 h nữa mới xong. Hỏi nếu máy thứ 2 làm việc 1 mình thì trong bao lâu cày xong cánh đồng?
- 212** ([BS23], 11.7., p. 70). 3 vòi nước I, II, III nếu chảy 1 mình vào 1 bể cạn thì chảy đầy bể lần lượt trong 4 h, 6 h, 9 h. Lúc đầu, mở 2 vòi I & II trong 1 h 30 ph, sau đó đóng vòi I rồi mở tiếp vòi III cùng chảy với vòi II cho đến khi đầy bể. Hỏi vòi III chảy trong bao lâu?
- 213** ([BS23], 11.8., p. 70). Có 3 vòi nước chảy vào 1 bể cạn. Nếu 2 vòi I & II cùng chảy thì bể đầy sau 45 ph. Nếu 2 vòi II & III cùng chảy thì bể đầy sau 1 h. Nếu 2 vòi I & III cùng chảy thì bể đầy sau 36 ph. (a) Nếu cả 3 vòi cùng chảy thì bể đầy trong bao lâu? (b) Riêng mỗi vòi chảy 1 mình thì bể đầy trong bao lâu?
- 214** ([BS23], 11.9., p. 70). 3 người đến cửa hàng mua 1 số táo. Người I mua  $\frac{1}{2}$  số táo rồi mua thêm  $\frac{1}{2}$  quả. Người II mua  $\frac{2}{3}$  số còn lại rồi mua thêm  $\frac{2}{3}$  quả. Người III mua  $\frac{3}{4}$  số còn lại rồi mua thêm  $\frac{3}{4}$  quả thì vừa hết số táo của cửa hàng. Tính số táo của cửa hàng có lúc đầu.
- 215** ([BS23], 11.10., p. 70). 1 số học sinh được thưởng 1 số vở. Bạn I được thưởng 2 quyển vở &  $\frac{1}{5}$  số còn lại. Bạn II được thưởng 4 quyển vở &  $\frac{1}{5}$  số còn lại. Bạn III được thưởng 6 quyển vở &  $\frac{1}{5}$  số còn lại. ... Cứ như vậy thì số vở được chia đều cho các bạn & không còn thừa quyển nào. Tính số học sinh được thưởng & số vở.

## 6 Percentage – Phần Trăm %

- 216** ([BS23], VD12.1, p. 71). 1 cửa hàng có 2 loại quạt, giá tiền như nhau. Quạt màu vàng được giảm giá 2 lần, mỗi lần giảm giá 10%. Quạt màu xanh được giảm giá 1 lần 20%. Hỏi sau khi giảm giá như trên thì loại quạt nào rẻ hơn?
- 217** ([BS23], VD12.2, p. 71). (a) Chiều dài 1 hình chữ nhật tăng 25%. Chiều rộng hình chữ nhật phải giảm bao nhiêu % để chu vi hình chữ nhật không đổi, biết chiều dài gấp đôi chiều rộng? (b) Chiều dài 1 hình chữ nhật tăng 25%. Chiều rộng hình chữ nhật phải giảm bao nhiêu % để diện tích hình chữ nhật không đổi?
- 218** ([BS23], VD12.3, p. 72). 1 quả dưa hấu có khối lượng 1000 g chứa 93% nước. 1 tuần sau, lượng nước chỉ còn 90%. Khi đó, khối lượng quả dưa hấu còn bao nhiêu g?
- 219** ([BS23], VD12.4, p. 73). 1 cửa hàng trong ngày khai trương hạ giá hàng 12% so với giá bán trong ngày thường. Tuy vậy, cửa hàng vẫn lãi 10% so với giá gốc. Hỏi nếu không hạ giá thì cửa hàng lãi bao nhiêu % so với giá gốc?
- 220** ([BS23], 12.1., p. 73). Phân số  $\frac{1}{2}$  tăng thành  $\frac{7}{8}$  thì giá trị của phân số đó tăng thêm bao nhiêu %?
- 221** ([BS23], 12.2., p. 73). 1 xí nghiệp có khối lượng công việc tăng thêm 40%, còn năng suất lao động của công nhân tăng thêm 25%. Hỏi số công nhân cần tăng thêm bao nhiêu %?
- 222** ([BS23], 12.3., p. 73). Giá lúa tăng 25%. Hỏi giá lúa phải giảm bao nhiêu % để trở lại giá cũ?
- 223** ([BS23], 12.4., p. 73). Giá rau tháng 4 cao hơn so với tháng 3 là 10%. Giá rau tháng 5 thấp hơn so với tháng 4 là 10%. Hỏi giá rau tháng 5 so với tháng 3 bằng bao nhiêu %?
- 224** ([BS23], 12.5., p. 73). 1 cửa hàng nhập 1 loại đồ chơi, rồi định giá bán là 50000 đ/chiếc. Trong ngày Tết thiếu nhi 1.6, cửa hàng hạ giá 12%, tính ra so với giá nhập vào vẫn lãi 10%. (a) Tính giá nhập của đồ chơi ấy. (b) So với giá nhập, thì giá bán trong ngày thường lãi bao nhiêu %?
- 225** ([BS23], 12.6., p. 74). 1 cửa hàng bán quần áo thanh lý hàng nên đã giảm 10% so với giá bình thường, nhưng không bán được nên giảm tiếp 10% nữa (so với giá đã giảm) & đã bán hết hàng. Tính ra cửa hàng vẫn lãi 5.4% so với giá gốc. Hỏi giá bình thường bằng bao nhiêu % giá gốc?
- 226** ([BS23], 12.7., p. 74). 1 hãng điện thoại có 3 phương án trả tiền cước điện thoại: Phương án I: Trả 99 xu cho 20 phút đầu, sau đó từ phút thứ 21 thì mỗi phút trả thêm 5 xu. Phương án II: Kể từ lúc đầu tiên, mỗi phút trả 10 xu. Phương án III: Trả 25 xu, sau đó kể từ phút đầu tiên mỗi phút trả 8 xu. 1 khách hàng trong tháng có 10% cuộc gọi 1 phút, 10% cuộc gọi 5 phút, 30% cuộc gọi 10 phút, 30% cuộc gọi 20 phút, 20% cuộc gọi 30 phút. Người đó nên chọn phương án nào để tiền cước ít nhất?
- 227** ([BS23], 12.8., p. 74). 1 cửa hàng sách hạ giá 10% trong ngày lễ, tuy vậy cửa hàng vẫn còn lãi 8%. Hỏi trong ngày thường cửa hàng lãi bao nhiêu %?
- 228** ([BS23], 12.9., p. 74). Nước biển chứa 5% muối. Cần thêm bao nhiêu kg nước lã vào 20 kg nước biển để tỷ lệ muối trong dung dịch là 2%?
- 229** ([BS23], 12.10., p. 74). Ông Ngọc có 500 kg hạt cà phê tươi, đem phơi khô để tỷ lệ nước trong hạt cà phê còn 5%. Biết tỷ lệ nước trong hạt cà phê tươi là 24%. Tính khối lượng nước cần bay hơi.
- 230** ([BS23], 12.11., p. 74). Phơi 450 kg hạt tươi thì được hạt khô. Biết tỷ lệ nước trong hạt tươi là 20%, tỷ lệ nước trong hạt khô là 10%. Tính khối lượng hạt khô.
- 231** ([BS23], 12.12., p. 74). Chị Mai ngâm 15 kg hạt giống có tỷ lệ nước là 4% vào 1 thùng nước. Chị muốn tỷ lệ nước trong hạt giống sau khi ngâm là 10% để cho khả năng nảy mầm cao hơn. Tính khối lượng hạt giống sau khi ngâm.
- 232** ([BS23], 12.13., p. 74). Phơi 60 kg cỏ tươi, sau 1 tuần thì còn 30 kg cỏ khô. Biết tỷ lệ nước trong cỏ tươi là 70%. Hỏi tỷ lệ nước trong cỏ khô là bao nhiêu %?

## 7 Movement Problem – Toán Chuyển Động

- 233** ([BS23], VD13.1, p. 75). Lúc 8:00, người thứ nhất đi từ A & đến B lúc 12:00. Lúc 8:30, người thứ 2 đi từ A & đến B lúc 11:30. Hỏi người thứ 2 đuổi kịp người thứ nhất lúc mấy giờ?
- 234** ([BS23], VD13.2, p. 77). Trên quãng đường AB, 2 xe cùng khởi hành 1 lúc, xe tải đi từ A đến B hết 6 h, xe con đi từ B đến A hết 4 h. 2 xe gặp nhau sau bao lâu?
- 235** ([BS23], VD13.3, p. 77). 1 người phải đi từ A đến B trong 5 h. Lúc đầu, người đó đi với vận tốc 30 km/h. Khi còn 75 km nữa thì được nửa đường, người đó đi với vận tốc 45 km/h để kịp B đúng dự định. Tính quãng đường AB.
- 236** ([BS23], VD13.4, p. 78). Hòa bơi xuôi dòng nước từ A đến B hết 6 ph, còn bơi ngược từ B về A hết 10 ph. 1 cụm bèo trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

- 237** ([BS23], VD13.5, p. 79). 1 xe lửa chạy với vận tốc 45 km/h. Xe lửa chui vào 1 đường hầm có chiều dài gấp 9 lần chiều dài của xe lửa  $\mathcal{E}$  cần 2 phút để xe lửa vào  $\mathcal{E}$  ra khỏi đường hầm. Tính chiều dài của xe lửa.
- 238** ([BS23], VD13.6, p. 80). 1 ô tô đi nửa đầu của quãng đường AB với vận tốc 30 km/h  $\mathcal{E}$  đi nửa sau với vận tốc 60 km/h. Tính vận tốc trung bình của ô tô trên cả quãng đường AB.
- 239** ([BS23], 13.1., p. 80). 1 chiếc tàu chạy trên sông, khi còn 90 km nữa mới cập bến thì tàu bị hỏng, cứ 5 ph có 2 tấn nước tràn vào tàu. Nếu có 105 tấn nước tràn vào tàu thì tàu sẽ bị chìm. Trên tàu có 1 máy bơm, mỗi giờ bơm ra được 10 tấn nước. Tàu phải chạy ít nhất với vận tốc nào để khi cập bến, tàu vẫn chưa bị chìm?
- 240** ([BS23], 13.2., p. 80). Hiện nay là 4:00. Sau ít nhất bao lâu thì kim phút gặp với kim giờ?
- 241** ([BS23], 13.3., p. 80). Trên quãng đường AB, 2 ô tô khởi hành cùng 1 lúc, xe thứ nhất đi từ A đến B hết 2 h, xe thứ 2 đi từ B đến A hết 3 h. Đến chỗ gặp nhau, quãng đường xe thứ nhất đã đi nhiều hơn quãng đường xe thứ 2 đã đi là 30 km. Tính quãng đường AB.
- 242** ([BS23], 13.4., p. 81). Trên quãng đường AB dài 300 km, người thứ nhất đi từ A đến B, người thứ 2 đi từ B đến A. Họ khởi hành cùng 1 lúc thì sẽ gặp nhau sau 5 h. Nhưng người thứ 2 có việc bận, đã khởi hành sau người thứ nhất 40 ph, do đó sau 4 h 42 ph mới gặp người thứ nhất. Tính vận tốc mỗi người.
- 243** ([BS23], 13.5., p. 81). 2 xe khởi hành từ A  $\mathcal{E}$  từ B cùng 1 lúc, đi ngược chiều  $\mathcal{E}$  sẽ gặp nhau sau 6 h. Vận tốc của xe con bằng  $\frac{4}{3}$  vận tốc của xe tải. Muốn gặp nhau ở chính giữa quãng đường AB thì xe con phải đi sau xe tải bao lâu?
- 244** ([BS23], 13.6., p. 81). 1 người đi từ A đến B. Người đó tính: nếu đi với vận tốc 40 km/h thì đến B sau giờ hẹn là 20 ph, còn nếu đi với vận tốc 60 km/h thì đến B trước giờ hẹn là 10 ph. Tính quãng đường AB.
- 245** ([BS23], 13.7., p. 81). 3 người cùng khởi hành 1 lúc từ A để đến B, vận tốc người I, người II lần lượt là 40 km/h, 60 km/h. Người III đến B trước người I là 18 ph  $\mathcal{E}$  sau người II là 12 ph. Tính quãng đường AB  $\mathcal{E}$  vận tốc người III.
- 246** ([BS23], 13.8., p. 81). 2 người cùng đi từ A về 1 phía, người I khởi hành lúc 7:00, người II khởi hành lúc 7:30. 2 người gặp nhau lúc mấy giờ, biết quãng đường người I đi trong 30 ph bằng quãng đường người II đi trong 20 ph?
- 247** ([BS23], 13.9., p. 81). 1 ô tô đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Trên đường đi từ B về A, sau khi đi  $\frac{1}{3}$  quãng đường với vận tốc cũ, ô tô dừng lại chữa trong 30 ph. Muốn thời gian từ B về A vẫn bằng thời gian từ A đến B, ô tô phải đi tiếp với vận tốc 60 km/h. Tính quãng đường AB.
- 248** ([BS23], 13.10., p. 81). Thành đi xe đạp từ A đến B. Sau khi đi 10 km trong 40 ph, Thành tính: nếu tiếp tục đi với vận tốc như vậy thì đến B trước giờ hẹn 24 ph. Anh đã giảm vận tốc đi 3 km/h mà vẫn đến B trước giờ hẹn 10 ph. Tính quãng đường AB.
- 249** ([BS23], 13.11., p. 81). 1 người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h, rồi đi tiếp từ B đến D với vận tốc 60 km/h. Quãng đường BD dài hơn AB là 10 km. Thời gian đi BD ít hơn đi AB là 20 ph. Tính 2 quãng đường AB, BD.
- 250** ([BS23], 13.12., p. 82). 1 canô xuôi khúc sông từ A đến B hết 3 h  $\mathcal{E}$  ngược khúc sông đó hết 4.5 h. Biết vận tốc dòng nước là 3 km/h. Tính vận tốc xuôi, vận tốc ngược,  $\mathcal{E}$  chiều dài khúc sông AB.
- 251** ([BS23], 13.13., p. 82). Thắng đi xe máy với vận tốc 36 km/h. Anh gặp 1 xe lửa dài 75 m đi cùng chiều chạy song song bên cạnh mình trong 15 s. Tính vận tốc xe lửa với đơn vị m/s.
- 252** ([BS23], 13.14., p. 82). 1 người đi từ A đến B. Người đó đi  $\frac{1}{3}$  quãng đường với vận tốc 20 km/h rồi đi phần còn lại với vận tốc 10 km/h. Tính vận tốc trung bình của người đó trên cả quãng đường AB.
- 253** ([BS23], 13.15., p. 82). Lúc 6:00, 1 xe tải  $\mathcal{E}$  1 xe máy cùng xuất phát từ A để đến B. Vận tốc xe tải là 50 km/h, vận tốc xe máy là 30 km/h. Sau đó 2 h, 1 xe con cũng đi từ A để đến B, vận tốc 60 km/h. Đến mấy giờ thì xe con ở chính giữa xe máy  $\mathcal{E}$  xe tải?
- 254** ([BS23], 13.16., p. 82). 2 xe bus cùng khởi hành 1 lúc với vận tốc không đổi, xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ 2 đi từ B đến A. Xe thứ nhất đến B thì quay lại ngay, xe thứ 2 đến A thì quay lại ngay. 2 xe gặp nhau lần thứ nhất tại C cách A là 5 km  $\mathcal{E}$  gặp nhau lần thứ 2 tại D cách B là 4 km. Tính quãng đường AB.

## 8 Hệ Ghi Số Với Cơ Số Bất Kỳ

- 255** ([BS23], VD14.1, p. 83). Đổi số  $1304_{(5)}$  thành số viết trong hệ thập phân.
- 256** ([BS23], VD14.2, p. 83). Đổi số 204 trong hệ thập phân thành số viết trong hệ cơ số 5.
- 257** ([BS23], VD14.3, p. 84). 1 đội quân được tổ chức theo nguyên tắc “tam tam chế”, i.e., cứ 3 lính thì lập thành 1 tổ, cứ 3 tổ thì lập thành 1 tiểu đội, cứ 3 tiểu đội thì lập thành 1 trung đội, ... Các cấp từ nhỏ đến lớn là tổ, tiểu đội, trung đội, đại đội, tiểu đoàn, ... Có 422 lính thì lập được thành các cấp nào?



- 258** ([BS23], VD14.4, p. 85). Tính trong hệ cơ số 4: (a)  $321 + 103$ . (b)  $123 - 31$ .
- 259** ([BS23], VD14.5, p. 85). Đổi số  $1101_{(2)}$  thành số viết trong hệ thập phân.
- 260** ([BS23], VD14.6, p. 85). Đổi số 43 thành số viết trong hệ nhị phân.
- 261** ([BS23], VD14.7, p. 86). Mai có 31 chiếc tem đựng trong 5 phong bì. Muốn lấy ra 1 số tem bất kỳ từ 1 đến 30, Mai chỉ cần lấy ra 1 số phong bì là có đúng số tem định lấy. Tính số chiếc tem trong mỗi phong bì.
- 262** ([BS23], VD14.8, p. 86). Tính trong hệ nhị phân: (a)  $1101 + 110$ . (b)  $1101 - 110$ . (c)  $1101 \cdot 11$ .
- 263** ([BS23], 14.1., p. 87). Có bao nhiêu đơn vị trong số lớn nhất có 1 chữ số được viết trong: (a) Hệ thập phân? (b) Hệ cơ số 7?
- 264** ([BS23], 14.2., p. 87). Có bao nhiêu đơn vị trong số lớn nhất có 2 chữ số được viết trong: (a) Hệ thập phân? (b) Hệ cơ số 6?
- 265** ([BS23], 14.3., p. 87). Nếu viết thêm vào bên phải số sau 1 chữ số 0 thì nó tăng gấp mấy lần? (a) 41. (b)  $35_{(8)}$ .
- 266** ([BS23], 14.4., p. 87). Tính trong hệ cơ số 6: (a)  $132 + 241$ . (b)  $553 - 315$ .
- 267** ([BS23], 14.5., p. 87). Tính tổng hệ nhị phân: (a)  $1001 + 11$ . (b)  $10010 - 1011$ . (c)  $101 \cdot 101$ .
- 268** ([BS23], 14.6., p. 88). Trong hệ cơ số nào, có: (a)  $3 + 4 = 10$ ? (b)  $3 + 2 = 11$ ? (c)  $2 \cdot 3 = 10$ ?
- 269** ([BS23], 14.7., p. 88). Tìm  $x$  thỏa: (a)  $43_{(x)} = 31$ . (b)  $23_{(4)} = x_{(3)}$ . (c)  $145_{(x)} = 145 \cdot 2$ .
- 270** ([BS23], 14.8., p. 88). Để cân các vật có khối lượng là 1 số tự nhiên từ 1 kg–29 kg, có thể dùng 1 cân đĩa có 2 đĩa cân với 5 quả cân, các quả cân chỉ để ở 1 đĩa cân. 5 quả cân đó có khối lượng bao nhiêu?
- 271** ([BS23], 14.9., p. 88). Cho  $A = \sum_{i=0}^{20} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$ . Viết  $A + 1$  dưới dạng 1 lũy thừa.
- 272** ([BS23], 14.11., p. 88). Chứng minh trong mọi hệ cơ số: (a) Số 100 là số chính phương. (b) Số 110 là hợp số.
- 273** ([BS23], 14.12., p. 88). Chứng minh trong hệ cơ số 4:  $\overline{abc}_{(4)} : 3 \Leftrightarrow a + b + c : 3$ .
- 274** ([BS23], 14.13., p. 88). Tìm số  $\overline{abc}$  viết trong hệ thập phân bằng số  $\overline{cba}$  viết trong hệ cơ số 9.

## 9 Dãy Số Viết Theo Quy Luật

- 275** ([BS23], VD15.1, p. 90). Viết thêm 3 số hạng rồi tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số: (a) 1, 4, 7, 10, ... (b) 1, 2, 3, 5, 8, ... (c) 2, 12, 30, 56, 90, ... (d)  $-1, -2, -6, -24, -120, \dots$  (e) 1, 6, 15, 28, 45, ... (f) 4, 18, 40, 70, 108, ...
- 276** ([BS23], VD15.2, p. 91). Tính  $A = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n$ .
- 277** ([BS23], VD15.3, p. 91). (a) Tính bằng nhiều cách  $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98$ . (b) Tính  $B = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 2011 - 2012 + 2013$ . (c) Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  thỏa  $3 + 4 + 5 + \dots + n = 525$ . (d) Tìm  $n \in \mathbb{N}^*$  để chữ số  $a$  biết  $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \overline{aaa}$ .
- 278** ([BS23], VD15.4, p. 92). Cho dãy số 5, 9, 13, 17, 21, ... (a) Nhận xét dãy số trên và tìm số hạng thứ 10, số hạng thứ  $n$ . (b) 2 số 12345, 2011 có mặt trong dãy số đó không? là số thứ bao nhiêu của dãy? (c) Tìm tổng 100 số đầu tiên của dãy số đó.
- 279** ([BS23], VD15.5, p. 93). Cho dãy số tự nhiên chẵn liên tiếp 2, 4, 6, ..., 2010, 2012. (a) Nếu viết liên tiếp các số của dãy thành số  $a = 2468101214 \dots 20102012$  thì  $a$  có bao nhiêu chữ số? (b) Tìm chữ số thứ 2012 của  $a$ .
- 280** ([BS23], VD15.6, p. 93). (a) Rút gọn tổng  $A = \sum_{i=0}^{50} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{50}$ . (b) Rút gọn tổng  $B = \sum_{i=1}^{100} 5^i = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$ . (c) Rút gọn tổng  $C = \sum_{i=1}^{2010} (-1)^{i+1} 3^i = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{2007} - 3^{2008} + 3^{2009} - 3^{2010}$ . (d) Chứng minh  $S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}a$ . Áp dụng rút gọn tổng  $S_{100} = 5 + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^3 + \dots + 5 \cdot 9^{99}$ .
- 281** ([BS23], VD15.7, p. 94). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  thỏa  $(x + 2) + (4x + 4) + (7x + 6) + \dots + (25x + 18) + (28x + 20) = 1560$ .
- 282** ([BS23], VD15.8, p. 94). (a) Tính tổng  $A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 99 \cdot 100$ . (b) Chứng minh  $A_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . (c) Sử dụng a), tính nhanh  $B = \sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ . (d) Tính nhanh  $C = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + \dots + 98 \cdot 3 + 99 \cdot 2 + 100 \cdot 1$ .
- 283** ([BS23], VD15.9, p. 95). Cho  $A = \sum_{i=0}^{11} 4^i = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{11}$ . Chứng minh: (a)  $A : 21$ . (b)  $A : 105$ . (c)  $A : 4097$ .
- 284** ([BS23], VD15.10, p. 95). Cho  $a_n = \underbrace{1 \dots 1}_{2n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Xét xem dãy  $a_1, a_2, \dots, a_{2013}$  có bao nhiêu số chia hết cho 13?
- 285** ([BS23], VD15.11, p. 96). Tính  $A = 1 + \sum_{i=1}^{100} ii! = 1 + 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 100 \cdot 100!$ .
- 286** ([BS23], VD15.12, p. 96). (a) Tính  $A = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} + \frac{1}{50 \cdot 51}$ . (b) Chứng minh  $A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .



- 287** ([BS23], VD15.13, p. 97). *Tính tổng 50 số hạng đầu tiên của dãy*  $\frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 8}, \dots$
- 288** ([BS23], VD15.14, p. 97). *Tính: (a)  $A = \sum_{i=1}^{48} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{48 \cdot 49 \cdot 50}$ . (b)  $A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .*
- 289** ([BS23], VD15.15, p. 98). *(a) Cho  $A = \sum_{i=2}^{200} \frac{1}{i!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{200!}$ . Chứng minh  $A < 1$ . (b) Chứng minh  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$ .*
- 290** ([BS23], VD15.16, p. 98). *Cho  $A = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{100!}$ . Chứng minh  $3! - A > 4$ .*
- 291** ([BS23], VD15.17, p. 98). *(a) Tính  $A = 1 + 2.25 + 3.5 + 4.75 + \dots + 26$ . (b) Tính  $B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12 + \dots + 18.19$ .*
- 292** ([BS23], VD15.18, p. 99). *Tính nhanh  $A = \frac{18 \cdot 275 + 3 \cdot 666 + 9 \cdot 614 \cdot 2}{1 + 4 + 7 + \dots + 58 + 61 + 62 + 62.2 + 62.3 + 62.4 - 271}$ .*
- 293** ([BS23], VD15.19, p. 99). *Rút gọn  $A = \frac{1 + 15^4 + 15^8 + \dots + 15^{96} + 15^{100}}{1 + 15^2 + 15^4 + \dots + 15^{98} + 15^{100} + 15^{102}}$ .*
- 294** ([BS23], VD15.20, pp. 99–100). *Tính nhanh: (a)  $A = \prod_{i=2}^{2012} 1 - \frac{1}{i} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2012}\right)$ . (b)  $B = \prod_{i=1}^{99} \frac{i^2}{i(i+1)} = \frac{1^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 4} \dots \frac{99^2}{99 \cdot 100}$ . (c)  $C = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{6} - 1\right) \left(\frac{1}{10} - 1\right) \left(\frac{1}{15} - 1\right) \left(\frac{1}{21} - 1\right) \left(\frac{1}{28} - 1\right) \left(\frac{1}{36} - 1\right)$ . (d)  $D = \left(\frac{6}{8} + 1\right) \left(\frac{6}{18} + 1\right) \left(\frac{6}{30} + 1\right) \dots \left(\frac{6}{10700} + 1\right)$ .*
- 295** ([BS23], VD15.21, p. 100). *Cho  $A = \frac{100^2 + 1^2}{100 \cdot 1} + \frac{99^2 + 2^2}{99 \cdot 2} + \frac{98^2 + 3^2}{98 \cdot 3} + \dots + \frac{52^2 + 49^2}{52 \cdot 49} + \frac{51^2 + 50^2}{51 \cdot 50}$ ,  $B = \sum_{i=2}^{101} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{101}$ ,  $C = \frac{1}{100 \cdot 1} + \frac{1}{99 \cdot 2} + \frac{1}{98 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{52 \cdot 49} + \frac{1}{51 \cdot 50}$ . (b) Tính  $\frac{A}{B}$ . (b) Tính  $B - 101C$ .*
- 296** ([BS23], 15.1., p. 101). *Viết thêm 2 số hạng tiếp theo của dãy số & tìm số hạng tổng quát của dãy: (a) 2, 6, 12, 20, ... (b) 4, 10, 18, 28, 40, ... (c) 3, 6, 11, 18, 27, ...*
- 297** ([BS23], 15.2., p. 101). *Cho dãy số 1, 5, 9, 13, ..., 37, ... (a) 37 là số hạng thứ mấy của dãy? (b) Tìm số hạng thứ 100. Tìm số hạng tổng quát của dãy. (c) Số 2000, số 2013 có thuộc dãy này không?*
- 298** ([BS23], 15.3., p. 101). *Cho dãy số 2, 11, 29, 56, 92, ... (a) Tìm số hạng thứ 100 của dãy. (b) Số 407 là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?*
- 299** ([BS23], 15.4., p. 101). *(a) Tính tổng  $A = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2011 + 2013$ . (b) Tính tổng của 100 số tự nhiên chẵn liên tiếp bắt đầu từ số 100.*
- 300** ([BS23], 15.5., p. 102). *Tính hợp lý: (a)  $A = -1 + 3 - 5 = 7 - 9 + \dots - 2009 + 2011 - 2013$ . (b)  $B = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2006 - 2008 + 2010 - 2012$ . (c)  $C = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 111 - 112 + 113 + 114 + 115$ .*
- 301** ([BS23], 15.6., p. 102). *Cho dãy số 7, 10, 13, 16, 19, ... (a) Tìm số thứ n. (b) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy.*
- 302** ([BS23], 15.7., p. 102). *(a) Cho a là tổng các số tự nhiên chẵn không vượt quá 200, b là tổng các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 200. Tính a - b. (b) Tìm n  $\in \mathbb{N}^*$  thỏa  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 1225$ .*
- 303** ([BS23], 15.8., p. 102). *Tìm x  $\in \mathbb{Q}$  thỏa  $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + 100) = 5750$ . (b)  $(2x - 1) + (4x - 2) + \dots + (400x - 200) = 5 + 10 + \dots + 1000$ .*
- 304** ([BS23], 15.9., p. 102). *Viết liên tiếp các số tự nhiên thành dãy 123456789101112... (a) Tìm tổng các chữ số của a = 12345...9899100. (b) Chữ số 2 ở hàng nghìn của số 2012 là chữ số thứ bao nhiêu của dãy?*
- 305** ([BS23], 15.10., p. 102). *Viết liên tiếp các số tự nhiên lẻ thành dãy 13579111315... (a) Tìm chữ số thứ 100 của dãy. (b) Chữ số 1 của số 2013 là chữ số thứ bao nhiêu của dãy?*
- 306** ([BS23], 15.11., p. 102). *Cho a = 46 · 47 · 48 · ... · 89 · 90. (a) Có bao nhiêu thừa số 2 khi phân tích a ra thừa số nguyên tố? (b) a có tận cùng là bao nhiêu chữ số 0 sau khi thực hiện phép nhân?*
- 307** ([BS23], 15.12., p. 102). *(a) Cho  $A = \sum_{i=0}^{2010} 2013^i = 2013^0 + 2013^1 + 2013^2 + \dots + 2013^{2009} + 2013^{2010}$ . Tính  $2012A + 1$ . (b) Cho a, n  $\in \mathbb{N}^*$ , a  $\neq 0$ , a  $\neq 1$ . Rút gọn tổng  $S = \sum_{i=0}^n a^i = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$ .*

**308** ([BS23], 15.13., p. 102). (a) Cho  $A = \sum_{i=1}^{99} 3^i = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{99}$ . Tìm  $n \in \mathbb{N}$  biết  $2A + 3 = 3^{2n}$ . (b) Chứng minh  $4B + 25$  là 1 lũy thừa của 5 với  $B = \sum_{i=2}^{2012} 5^i = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{2012}$ . (c) Cho  $C = \sum_{i=0}^{400} 4^i = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{100}$ ,  $D = 4^{101}$ . Chứng minh  $3C < D$ .

**309** ([BS23], 15.14., p. 102). Tính  $A = 10 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 12 \cdot 13 + \dots + 28 \cdot 29 + 29 \cdot 30$ .

**310** ([BS23], 15.15., p. 103). Tính: (a)  $A = \sum_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$ . (b)  $B = \sum_{i=101}^{200} 101^2 + 102^2 + \dots + 199^2 + 200^2$ . (c)  $C = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 101 + 100 \cdot 102$ . (d)  $D = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + \dots + 99 \cdot 2 + 100 \cdot 1$ . (e)  $E = \sum_{i=1}^{98} i(i+1)(i+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 98 \cdot 99 \cdot 100$ .

**311** ([BS23], 15.16., p. 103). Cho  $S_1 = 3, S_2 = 9, S_3 = 18, S_4 = 30, S_5 = 45, \dots$  Tính  $S_{100}$ .

**312** ([BS23], 15.17., p. 103). (a) Khi phân tích ra thừa số nguyên tố,  $100!$  chứa thừa số nguyên tố 3 với số mũ bằng bao nhiêu? (b) Tích  $30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot \dots \cdot 89 \cdot 90$  có bao nhiêu thừa số 3 khi phân tích ra thừa số nguyên tố?

**313** ([BS23], 15.18., p. 103). Trong dãy số tự nhiên  $1, 2, 3, \dots, n$ , lập các tổng:  $A_1 = 1, A_2 = 2 + 3, A_3 = 4 + 5 + 6, A_4 = 7 + 8 + 9 + 10, A_5 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15, \dots$  Tính  $A_{101} - A_{100}$ .

**314** ([BS23], 15.19., p. 103). Tính  $A = \sum_{i=1}^{100} \underbrace{3 \dots 3}_i = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{3 \dots 3}_{100}$ .

**315** ([BS23], 15.20., p. 103). Tính tổng  $S$  các số hạng đứng trước số 1 cuối cùng trong tổng:  $1 + 5 + 1 + 5 + 5 + 1 + 5 + 5 + 5 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 + \dots + 1 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{2012} + 1$ .

**316** ([BS23], 15.21., p. 103). Gọi  $S_n$  là tổng các chữ số của  $n \in \mathbb{N}$ . Tính  $\sum_{i=1}^{2013} S_i = S_1 + S_2 + \dots + S_{2013}$ .

**317** ([BS23], 15.22., p. 103). Tính: (a)  $A = \sum_{i=15}^{2012} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{15 \cdot 16} + \frac{1}{16 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{2011 \cdot 2012} + \frac{1}{2012 \cdot 2013}$ . (b)  $B = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{512}\right) + \left(1 - \frac{1}{1024}\right)$ . (c)  $C = 4 \cdot 5^{100} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{100}}\right) + 1$ .

**318** ([BS23], 15.23., p. 104). Tính  $A = 50 + \frac{50}{3} + \frac{25}{3} + \frac{20}{4} + \frac{10}{3} + \frac{10}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{100}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99}$ .

**319** ([BS23], 15.24., p. 104). Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy: (a)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \dots$  (b)  $\frac{1}{5}, \frac{1}{45}, \frac{1}{117}, \frac{1}{221}, \dots$

**320** ([BS23], 15.25., p. 104). Tính: (a)  $A = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} - \frac{1}{99 \cdot 100 \cdot 101}$ . (b)  $B = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{47 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50}$ .

**321** ([BS23], 15.26., p. 104). Tìm  $x$  thỏa: (a)  $\frac{1}{2013}x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = 2$ . (b)  $2x + \frac{7}{6} + \frac{13}{12} + \frac{21}{20} + \frac{31}{30} + \frac{43}{42} + \frac{57}{56} + \frac{73}{72} + \frac{91}{90} = 10$ .

**322** ([BS23], 15.27., p. 104). Tìm  $x$  thỏa: (a)  $\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100}\right)x = \frac{49}{200}$ . (b)  $\frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 14} + \dots + \frac{1}{x(x+3)} = \frac{98}{1545}$ .

**323** ([BS23], 15.28., p. 104). Cho 9 số 36, 60, 90, 126, 168, 216, 270, 330, 396. Tính tỷ số giữa tổng nghịch đảo của 9 số này & tổng của chúng.

**324** ([BS23], 15.29., p. 104). Rút gọn: (a)  $A = \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+100)}{(1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + \dots + 99 \cdot 2 + 100 \cdot 1) \cdot 2013}$ .

(b)  $B = \left(\frac{5^3}{6} + \frac{5^3}{12} + \frac{5^3}{20} + \frac{5^3}{30} + \frac{5^3}{42} + \frac{5^3}{56} + \frac{5^3}{72} + \frac{5^3}{90}\right) : \frac{1124 \cdot 2247 - 1123}{1124 + 1123 \cdot 2247}$ .

**325** ([BS23], 15.30., p. 104). Tính  $A = \frac{4 + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{95} + \frac{3}{97} + \frac{3}{99}}{\frac{1}{1 \cdot 99} + \frac{1}{3 \cdot 97} + \frac{1}{5 \cdot 95} + \dots + \frac{1}{95 \cdot 5} + \frac{1}{97 \cdot 3} + \frac{1}{99 \cdot 1}}$ .

**326** ([BS23], 15.31., p. 105). (a) Chứng minh  $A = \sum_{i=2}^{100} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1$ . (b) Chứng minh  $B = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1\frac{3}{4}$ . (c) Chứng minh  $C = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{2}$ . (d) Chứng minh  $D = 2 + \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{2499}{2500} > 50$ .

**327** ([BS23], 15.32., p. 105). (a) Cho  $A = \sum_{i=4}^{100} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$ . Chứng minh  $\frac{1}{5} < A < \frac{1}{3}$ . (b) Cho  $B = \sum_{i=100}^{199} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{100^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{199^2}$ . Chứng minh  $\frac{1}{200} < B < \frac{1}{99}$ .

**328** ([BS23], 15.33., p. 105). (a) Chứng minh  $A = \sum_{i=1}^{2012} \frac{1}{i!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{2012!} < 2$ . (b) Chứng minh  $\frac{9}{10!} + \frac{10}{11!} + \frac{11}{12!} + \cdots + \frac{99}{100!} < \frac{1}{9!}$ .

**329** ([BS23], 15.34., p. 105). (a) Cho  $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2011} - \frac{1}{2012}$ ,  $B = \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \cdots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}$ . Tính  $A : B$ . (b) Cho  $C = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{8} + \cdots + \frac{197}{198} - \frac{199}{200}$ ,  $D = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{100}$ . Tính  $D : C$ .

**330** ([BS23], 15.35., p. 105). Tính  $A = \sum_{i=2}^{2012} \frac{1}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2012}$ ,  $B = \frac{1}{2011} + \frac{2}{2010} + \frac{3}{2009} + \cdots + \frac{2009}{3} + \frac{2010}{2} + \frac{2011}{1}$ .

**331** ([BS23], 15.36., pp. 105–106). Tính: (a)  $A = 1.1 + 2.6 + 4.1 + 5.6 + \cdots + 148.1 + 149.6$ . (b)  $B = 1.2 + 2.3 + \cdots + 8.9 + 9.10 + 10.11 + \cdots + 98.99 + 99.100 + 100.101 + \cdots + 998.999$ . (c)  $C = 1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 5.10 + 6.12 + \cdots + 45.90$ . (d)  $D = 1.2 + 2.4 + 3.6 + 4.8 + 6 + 7.2 + \cdots + 120$ .

**332** ([BS23], 15.37., p. 106). Tính nhanh: (a)  $A = \prod_{i=10}^{100} \left( \frac{1}{10} - 1 \right) \left( \frac{1}{11} - 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{100} - 1 \right)$ . (b)  $B = \prod_{i=2}^{10} 1 - \frac{1}{i^2} = \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) \cdots \left( 1 - \frac{1}{10^2} \right)$ . (c)  $C = \left( \frac{7}{9} + 1 \right) \left( \frac{7}{20} + 1 \right) \left( \frac{7}{33} + 1 \right) \cdots \left( \frac{7}{10800} + 1 \right)$ . (d)  $D = \left( 1 - \frac{28}{10} \right) \left( 1 - \frac{52}{22} \right) \left( 1 - \frac{80}{36} \right) \cdots \left( 1 - \frac{21808}{10900} \right)$ .

**333** ([BS23], 15.38., p. 106). Rút gọn: (a)  $A = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2012}}{\frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} + \cdots + \frac{1}{4023} + \frac{1}{4024} - \frac{1}{2012}}$ .

(b)  $B = \frac{\prod_{i=1}^{1000} 1 + \frac{2012}{i}}{\prod_{i=1}^{1000} 1 + \frac{1000}{i}} = \frac{\left( 1 + \frac{2012}{1} \right) \left( 1 + \frac{2012}{2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{2012}{1000} \right)}{\left( 1 + \frac{1000}{1} \right) \left( 1 + \frac{1000}{2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{1000}{2012} \right)}$ .

**334** ([BS23], 15.39., p. 106). Tìm  $x \in \mathbb{Q}$  thỏa: (a)  $\frac{2}{1^2} \cdot \frac{6}{2^2} \cdot \frac{12}{3^2} \cdot \frac{20}{4^2} \cdots \frac{110}{10^2} x = -20$ . (b)  $\left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2013} \right) x + 2013 = \frac{2014}{1} + \frac{2015}{2} + \cdots + \frac{4025}{2012} + \frac{4026}{2013}$ . (c)  $\left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) x = \frac{2012}{51} + \frac{2012}{52} + \cdots + \frac{2012}{99} + \frac{2012}{100}$ . (d)  $\left( \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{19 \cdot 21} \right) \cdot 420 = [0.4 \cdot (7.5 - 2.5x)] : 0.25 = 212$ .

**335** ([BS23], 15.40., p. 107). Cho  $A = \frac{333}{444} \cdot \frac{888}{999} \cdot \frac{1515}{1616} \cdot \frac{2424}{2525} \cdot \frac{3535}{3636} \cdot \frac{4848}{4949} \cdot \frac{6363}{6464} \cdot \frac{8080}{8181}$ ,  $B = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \left( 1 - \frac{1}{10} \right) \left( 1 - \frac{1}{15} \right) \left( 1 - \frac{1}{21} \right) \left( 1 - \frac{1}{28} \right) \left( 1 - \frac{1}{36} \right)$ . (a) Tính  $A : B$ . (b) Tính tổng các nghịch đảo của  $A, B$ . (c) Tìm  $x, y \in \mathbb{Z}$  sao cho  $B < \frac{x}{36} < A, -B \geq \frac{-10}{y} \geq -A$ .

**336** ([BS23], 15.41., p. 107). (a) Chứng minh  $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20} \notin \mathbb{Z}$ . (b) Cho  $\frac{a}{b} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{97 \cdot 98} + \frac{1}{99 \cdot 100}$ . Chứng minh  $a : 151$ .

**337** ([BS23], 15.42., p. 107). Tính  $1.1 + 1.11 + 1.111 + \cdots + 1.\underbrace{1 \dots 1}_9 + 1.\underbrace{1 \dots 1}_{10}$ .

**338** ([BS23], 15.43., p. 107). Tìm số hạng thứ 100 trong dãy:  $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

**339** ([BS23], 15.44., p. 107). Cho  $A = \prod_{i=1}^{99} 1 + \frac{2}{i} = \left( 1 + \frac{2}{1} \right) \left( 1 + \frac{2}{2} \right) \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \cdots \left( 1 + \frac{2}{99} \right)$ ,  $B = (-1 - 2 - 3 - \cdots - 99 - 100) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} \right)$ . Tính  $\frac{A}{B}$ .

**340** ([BS23], 15.45., p. 107). Tính nhanh  $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} + \cdots + \frac{1}{14850}$ .

**341** ([BS23], 15.46., p. 107). Cho  $A = 1.01 + 1.02 + \cdots + 9.98 + 9.99 + 10$ ,  $B = 2 - \frac{5}{3} + \frac{7}{6} - \frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{13}{21} + \frac{15}{28} - \frac{17}{36} + \frac{19}{45}$ . Tính  $2A + \frac{455}{3}B$ .

## 10 Miscellaneous

### Tài liệu

- [Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Thị Quỳnh Anh, Phan Thanh Hồng, Bùi Văn Tuyên, Đặng Văn Tuyên, and Nguyễn Thị Thanh Xuân. *Bồi Dưỡng Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ 1. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 112.
- [Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 6 Tập 2*. Tái bản lần thứ 2. Kết nối tri thức với cuộc sống. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 152.
- [BS23] Vũ Hữu Bình and Nguyễn Tam Sơn. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 6. Tập 1: Số Học*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 172.
- [Thá+23] Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 6 Tập 2*. Cánh Diều. Nhà Xuất Bản Đại Học Sư Phạm, 2023, p. 108.
- [Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 6*. Tái bản lần thứ 1. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 184.