Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 5 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.
- *Problem & Solution: Trigonometrical Identities in Triangles – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.pdf.
  TeX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_10/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.tex.

Mục lục

1 Trigometrical Functions of An Angle & Trigonometrical Identities in Triangles – Giá Trị Lượng Giác Của 1 Góc & Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

$\boxed{1}$ $\forall\alpha\in[0^\circ;180^\circ]$, $\sin\alpha\in[-1;1]$, $\cos\alpha\in[-1;1]$. $\boxed{2}$ $\cos\alpha>0\Leftrightarrow\alpha\in(0^\circ;90^\circ)\Leftrightarrow\alpha$ nhọn. $\cos\alpha<0\Leftrightarrow\alpha\in(90^\circ;180^\circ)\Leftrightarrow\alpha$ tù. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. $\tan\alpha\cot\alpha=1$, $\forall\alpha\ne0^\circ,90^\circ,180^\circ$. $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\forall\alpha\ne90^\circ$. $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\forall\alpha\ne0^\circ,180^\circ$. $\boxed{3}$ Định lý cosin: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=c^2+a^2-2ca\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ hay $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{4}$ Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ hay $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$. $\boxed{5}$ Công thức tính diện tích tam giác: $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$.

1. $\alpha\in[0^\circ;360^\circ)$. *Tìm các khoảng giá trị của α để các hàm $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ lần lượt bằng 0, âm, dương.*

2. *Dùng định lý sin, giải thích vì sao trong 1 tam giác, cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn & góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn.*

3 ([Hải+22], BĐ1, p. 22)**.** *ΔABC, đường phân giác AD. Chứng minh $AD^2<bc$.*

4 ([Hải+22], VD1, p. 22)**.** *ΔABC vuông tại A, 2 phân giác trong BE,CF cắt đường cao AH lần lượt tại P,Q. M là trung điểm BC. Chứng minh $PE+QF<AM$.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

5 ([Hải+22], VD2, p. 22). *ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $D \in AB$ thỏa $BH = BD = CD$. Chứng minh $\dfrac{AD}{BD} = \sqrt[3]{2} - 1$.*

6 ([Hải+22], VD3, p. 23). *ΔABC. Chứng minh $\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow (\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}) = \sqrt{2}(a+b+c)$.*

7 ([Hải+22], BĐ1, p. 23). *ΔABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Chứng minh $a^2 = b^2 + bc$.*

8 ([Hải+22], VD4, p. 23). *ΔABC vuông tại A. Lấy $D \in AC$ thỏa $\widehat{C} = 2\widehat{CBD}$. Chứng minh $AB + AD = BC \Leftrightarrow \widehat{C} = 30^\circ$ hoặc $\widehat{C} = 45^\circ$.*

9 ([Hải+22], VD5, p. 23). *ΔABC, trung tuyến AM. Giả sử $\widehat{B} + \widehat{MAC} = 90^\circ$. Chứng minh ΔABC vuông hoặc cân.*

10 ([Hải+22], VD6, p. 24). *ΔABC, tâm đường tròn nội tiếp I. IA,IB,IC cắt (ABC) lần lượt tại D,E,F. Chứng minh $\dfrac{1}{S_{DBC}} + \dfrac{1}{S_{EAC}} + \dfrac{1}{S_{FAB}} \ge \dfrac{9}{S_{ABC}}$.*

11 ([Hải+22], VD7, p. 24). *ΔABC, $x, y, z \in (0, +\infty)$. Chứng minh: (a) $xa^2 + yb^2 + zc^2 \ge 4\sqrt{xy + yz + zx}S$. (b) $xbc + yca + zab \ge 4\sqrt{xy + yz + zx}S$.*

12 ([Hải+22], VD8, p. 25). *Cho ΔABC, điểm P bất kỳ nằm trong ΔABC. Chứng minh $aPA + bPB + cPC \ge 4S$.*

13 ([Hải+22], VD9, p. 26). *ΔABC vuông tại A thỏa $\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2} = 6$. Chứng minh $\dfrac{R}{r} \ge \sqrt{6}$.*

14 ([Hải+22], VD10, p. 26). *ΔABC, 1 đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến qua đường phân giác của cùng 1 góc chia cạnh đối diện thành 2 đoạn thẳng. Tìm tỷ số giữa 2 đoạn thẳng này so với 2 cạnh còn lại.*

15 ([Hải+22], VD11, p. 27). *ΔABC. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc cạnh BC tại 1 điểm, điểm đó chia cạnh BC thành 2 đoạn có độ dài m, n. Tính S_{ABC} nếu biết $\widehat{A}$.*

16 ([Hải+22], VD12, p. 27). *Cho đường tròn (O). Xác định điều kiện để tồn tại tam giác ngoại tiếp (O) nếu cho trước 1 góc & cạnh đối diện góc đó.*

17 ([Hải+22], VD13, p. 28). *Tìm 1 hình thang có 3 cạnh bằng nhau sao cho diện tích của nó lớn nhất.*

18 ([Hải+22], VD14, p. 28). *Trong 1 hình thang cân, 1 đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tìm góc nhọn & đáy lớn nếu cho trước đường cao & cạnh đáy nhỏ.*

19 ([Hải+22], VD15, p. 29). *Cho $\widehat{A} = 90^\circ$, 1 điểm M nằm trong góc vuông & có khoảng cách đến 2 cạnh góc vuông là p, q. Xác định đường thẳng đi qua M tạo với góc vuông 1 tam giác có diện tích bằng S cho trước.*

20 ([Hải+22], VD16, p. 29). *Cho điểm M nằm trong $\widehat{AOB}$. Xác định đường thẳng đi qua M sao cho tam giác tạo thành có diện tích bằng c^2.*

21 ([Hải+22], 5.1., p. 30). *Cho 2 điểm A,B ở ngoài đường thẳng d cho trước. Xác định điểm M trên d thỏa $\dfrac{AM}{BM}$: (a) lớn nhất. (b) nhỏ nhất.*

22 ([Hải+22], 5.2., p. 30). *Biết 3 nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ đều dương. Tìm quan hệ giữa 3 hệ số p, q, r để cho 3 nghiệm của phương trình là số đo 3 cạnh 1 tam giác.*

23 ([Hải+22], 5.3., p. 30). *ΔABC là tam giác gì nếu 3 cạnh a, b, c thỏa $\sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.*

24 ([Hải+22], 5.4., p. 30). *Cho a, b, c là 3 cạnh 1 tam giác. Xác định 3 đường phân giác của tam giác đó. Tam giác đó là tam giác gì nếu biết 2 đường phân giác bằng nhau?*

25 ([Hải+22], 5.5., p. 30). *2 đường tròn bán kính $R, r, R > r$ tiếp xúc trong nhau. Xác định bán kính đường tròn thứ 3 tiếp xúc với 2 đường tròn đã cho & tiếp xúc với đường kính chung của chúng.*

26 ([Hải+22], 5.6., p. 30). *1 điểm A nằm ngoài đường tròn bán kính r. 1 đường thẳng đi qua A cắt đường tròn tại B,C. Biết khoảng cách từ tâm đường tròn đến điểm A bằng a. Tính $\tan\dfrac{\widehat{AOB}}{2}\tan\dfrac{\widehat{AOC}}{2}$.*

27 ([Hải+22], 5.7., p. 30). *1 hình thang ABCD có 2 đáy AB,CD. 2 đường chéo cắt nhau ở O. Cho $S_{AOB} = p^2, S_{COD} = q^2$. Biểu diễn diện tích của hình thang ABCD qua p, q.*

28 ([Hải+22], 5.8., p. 31). *Tính S_{ABC} nếu biết h_a, h_b, h_c.*

29 ([Hải+22], 5.9., p. 31). *ΔABC có 3 cạnh a, b, c. Biểu diễn cạnh c qua a, b biết đường trung tuyến AA_1, đường cao BB_1, & đường phân giác CC_1 gặp nhau tại 1 điểm.*

30 ([Hải+22], 5.10., p. 30). *Cho 2 đường thẳng song song & 1 điểm A nằm giữa 2 đường thẳng đó. ΔABC vuông tại A & 2 đỉnh còn lại thuộc 2 đường thẳng song song đã cho & có diện tích bằng k^2. Tìm sự phụ thuộc của 2 cạnh góc vuông vào k.*

31 ([Hải+22], 5.11., p. 30). *Cho A,B,C,D là 4 góc của 1 tứ giác, theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng. Tính giá trị 4 góc nếu $\sin A \sin B = \sin C \sin D$.*

32 ([Hải+22], 5.12., p. 30). *Cho $\widehat{AOB} < \pi$ & 1 điểm M ở trong góc đó. Tìm bán kính đường tròn đi qua M & cắt OA,OB thành các đoạn thẳng có độ dài bằng $2a$ với $a = OM$.*

33 ([Hải+22], 5.13., p. 30). *Cho đường tròn bán kính R & 1 điểm M ở bên trong đường tròn. Xác định hình thang nội tiếp đường tròn đó & có 2 đường chéo cắt nhau tại M sao cho hình thang này có thể ngoại tiếp 1 đường tròn.*

34 ([Hải+22], 5.14., p. 30). *1 hình quạt bán kính r có góc ở tâm bằng $\alpha \in (0;\pi)$. 1 hình chữ nhật nội tiếp hình quạt sao cho 2 đỉnh nằm trên cung tròn & 2 đỉnh còn lại nằm trên 2 bán kính giới hạn hình quạt. Cho diện tích hình chữ nhật bằng S. Tính các cạnh hình chữ nhật. Tìm điều kiện để bài toán giải được.*

35 ([Hải+22], 5.15., p. 30). *Cho 2 đường tròn đồng tâm bán kính $r,R,R > r$. Tìm cạnh hình vuông có 2 đỉnh nằm trên đường tròn bán kính r & 2 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn bán kính R. Tìm tỷ số giữa r,R để bài toán giải được.*

36 ([Hải+22], 5.16., p. 30). *Qua 1 điểm M thuộc miền trong ΔABC, kẻ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác, chúng chia tam giác thành 3 hình bình hành & 3 tam giác khác. Tìm vị trí điểm M để tổng diện tích 3 tam giác tạo thành nhỏ nhất.*

37 ([Hải+22], 5.17., p. 30). *ΔABC cân có góc ở đáy $\widehat{B} = \widehat{C} = \alpha$ thỏa $\sin^3\alpha + \sin^2\alpha + \sin\alpha = 1$. Tính tỷ số chu vi tam giác & đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

2 Solve Triangle – Giải Tam Giác

$\boxed{1}$ Cho a,b,c: áp dụng định lý cosin: $\widehat{A} = \arccos\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \widehat{B} = \arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C} = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{2}$ Cho $b,c,\widehat{A}$: áp dụng định lý cosin: $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$, $\widehat{B} = \arccos\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \widehat{C} = \arccos\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\boxed{3}$ Cho $a,\widehat{B},\widehat{C}$: $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C}$, áp dụng định lý sin: $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}, c = \dfrac{b\sin C}{\sin B}$.

38 ([Quỳ+20], VD1, p. 124). *ΔABC có đường cao $AH = h$, $\widehat{B} = \beta$, K trên cạnh BC thỏa $BK = 2CK$, $AK = AB$. Giải ΔABC.*

39 ([Quỳ+20], VD2, p. 124). *Cho $x,y \in [1;+\infty)$. Đặt $a = x^2+1, b = y^2+1, c = x^2+y^2+1$. Chứng minh tồn tại 1 tam giác có độ dài 3 cạnh là a,b,c & tam giác đó là tam giác tù.*

40 ([Quỳ+20], VD3, p. 126). *ΔABC có $BC = a, \widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta$, tâm đường tròn nội tiếp. Tính bán kính $(IBC),(ICA),(IAB)$.*

41 ([Quỳ+20], p. 124, hệ thức về bán kính các đường tròn nội tiếp & bàng tiếp). *ΔABC có bán kính đường tròn nội tiếp r, bán kính 3 đường tròn bàng tiếp góc A,B,C lần lượt là r_a,r_b,r_c. Chứng minh: (a) $(p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2} = r$. (b) $r_a\cot\dfrac{A}{2} = r_b\cot\dfrac{B}{2} = r_c\cot\dfrac{C}{2} = p$.*

42 ([Quỳ+20], p. 128). *Chứng minh $S = \dfrac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

43 ([Quỳ+20], VD4, p. 129). *ΔABC, $\widehat{A} = 60^\circ, R = 8, r = 3$. Tính S.*

44 ([Quỳ+20], VD5, p. 129). *Tính r theo a,b,c.*

45 ([Quỳ+20], VD6, p. 130). *Chứng minh $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.*

46 ([Quỳ+20], VD7, p. 130, công thức độ dài phân giác). *Gọi l_a,l_b,l_c lần lượt là độ dài 3 đường phân giác trong góc A,B,C. Chứng minh $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}, l_b = \dfrac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}, l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.*

47 ([Quỳ+20], VD8, p. 131, tứ giác điều hòa). *ΔABC nội tiếp đường tròn (O) có AM là trung tuyến đỉnh A. Đường thẳng qua A & đối xứng với AM qua phân giác trong góc A cắt (O) tại N. Chứng minh $AB \cdot CN = AC \cdot BN$.*

48 ([Quỳ+20], 37., p. 131). *ΔABC có 2 trung tuyến BM,CN cắt nhau tại G, $BM = \frac{3}{2}, CN = 3, \widehat{BGC} = 120^\circ$. Giải ΔABC.*

49 ([Quỳ+20], 38., p. 132). *ΔABC có $AC = b, AB = c, \widehat{A} = \alpha$, M là trung điểm BC, N trên cạnh AB thỏa $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{3}{2}$. Tính MN.*

50 ([Quỳ+20], 39., p. 132). *ΔABC có $BC = 10$, (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC & tiếp xúc với 2 cạnh AB,AC. (a) Biết $IA = 3, 2IB = 3IC$, tính AB,AC. (b) Biết (I) có bán kính bằng 3 & $2IB = 3IC$, tính R,AB,AC.*

51 ([Quỳ+20], 40., p. 132). *Hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được có 2 đáy $BC = b, AD = d > b$, góc giữa 2 cạnh bên bằng α. Tính bán kính đường tròn nội tiếp.*

52 ([Quỳ+20], 41., p. 132). *Hình thang cân $ABCD$ với đáy lớn AB ngoại tiếp 1 đường tròn bán kính r. (a) Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Tính độ dài 2 đáy & đường chéo theo r, α. (b) R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết $\frac{R}{r} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$, tính $\widehat{BAD}$.*

53 ([Quỳ+20], 42., p. 132). *Chứng minh $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.*

Định nghĩa 1. *$a, b, c \in \mathbb{R}$ được gọi là lập thành* cấp số cộng *nếu $a + c = 2b$. Lúc đó giá trị $d = b - a = c - b$ được gọi là* công sai *của cấp số cộng.*

54 ([Quỳ+20], 43., p. 132). *Chứng minh 3 cạnh a, b, c của ΔABC lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$. Chứng minh khi đó công sai của cấp số cộng này là $d = \frac{3}{2}r\left(\tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right)$.*

55 ([Quỳ+20], 44., p. 132). *Chứng minh: (a) $\sin A, \sin B, \sin C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng. (b) $\cos A, \cos B, \cos C$ lập thành cấp số cộng khi & chỉ khi $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ lập thành cấp số cộng.*

56 ([Quỳ+20], 45., p. 133). *ΔABC & điểm M thay đổi trên cạnh BC, r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp & ρ_1, ρ_2 là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A của $\Delta ABM, \Delta ACM$. Chứng minh $\frac{r_1 r_2}{\rho_1\rho_2}$ không đổi.*

57 ([Quỳ+20], 46., p. 133). *ΔABC, M,N trên cạnh BC thỏa $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$, P,Q là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\Delta BAM, \Delta CAN$ với cạnh BC. Chứng minh $\frac{1}{PB} + \frac{1}{PM} = \frac{1}{QC} + \frac{1}{QN}$.*

58 ([Quỳ+20], 47., p. 133). *Đường tròn $(O;R)$ & A bên ngoài (O). 1 đường thẳng thay đổi qua A cắt (O) tại B,C. Đặt $\widehat{AOB} = \alpha, \widehat{AOC} = \beta$. Chứng minh $\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$ không đổi.*

59 ([Quỳ+20], 48., p. 133). *ΔABC có diện tích S. (a) Chứng minh $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$. (b) M là trung điểm BC, đặt $\widehat{AMB} = \varphi$. Chứng minh $\cot C - \cot B = 2\cot\varphi$. (c) G là trọng tâm ΔABC. Đặt $\widehat{BGC} = \alpha$. Chứng minh $\cot\alpha = \frac{5bc\cos A - 2(b^2 + c^2)}{3bc\sin A}$.*

60 ([Quỳ+20], 49., p. 133). *Chứng minh: (a) $b^2 + c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A$. (b) $b^4 + c^4 = a^4 \Leftrightarrow \tan B\tan C = 2\sin^2 A$.*

61 ([Quỳ+20], 50., p. 133). *ΔABC có 2 trung tuyến BM,CN. (a) Chứng minh $BM \perp CN \Leftrightarrow \cot B + \cot C = \frac{1}{2}\cot A$. (b) Chứng minh nếu ΔABC không cân tại A thì $\frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \cot B + \cot C = 2\cot A$.*

62 ([Quỳ+20], 51., p. 133). *Hình chữ nhật $ABCD$ & 1 điểm M tùy ý. Chứng minh $\frac{\tan\widehat{AMC}}{\tan\widehat{BMD}} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMD}}$.*

63 ([Quỳ+20], 52., p. 134). *ΔABC, $\widehat{B} > \widehat{C}m$ O, I, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp, & đường tròn bàng tiếp góc A. Chứng minh $\tan\widehat{IOO_1} = \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}$.*

64 ([Quỳ+20], 53., p. 134). *Hình bình hành có a, b là độ dài các cạnh, m, n là độ dài 2 đường chéo. $a > b, m > n$. α là góc nhọn của hình bình hành & φ là góc giữa 2 đường chéo. Chứng minh: (a) $\cos\alpha\cos\varphi = \frac{(a^2 - b^2)(m^2 - n^2)}{4abmn}$. (b) $\tan\varphi = \frac{2ab\sin\alpha}{a^2 - b^2}$.*

65 ([Quỳ+20], 54., p. 134). *ΔABC, trực tâm H, 2 đường cao $BB' = \sqrt{5}, CC' = 2$. Tính S biết: (a) $\cos\widehat{BHC} = -\frac{2}{3}$. (b) $\cos\widehat{CBB'} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.*

66 ([Quỳ+20], 55., p. 134). *Hình bình hành $ABCD$, M,N là 2 giao điểm của (ABC) với AD,CD. (a) Biết khoảng cách từ M đến B,C,D là b, c, d. Tính S_{BMN}. (b) Biết góc nhọn của hình bình hành bằng α & bán kính (ABC) bằng R. Tính S_{BMN}.*

67 ([Quỳ+20], 56., p. 134). *ΔABC có O,I,G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp & trọng tâm. (a) Chứng minh $IA \perp IG \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} = \frac{2bc}{b+c}$. (b) Chứng minh $IA \perp IO \Leftrightarrow b + c = 2a$. (c) M,N là trung điểm AB,AC. Chứng minh A,I,M,N đồng viên $\Leftrightarrow b + c = 2a$.*

68 ([Quỳ+20], 57., p. 134). *ΔABC, D,E trên BC thỏa $BD = DE = EC = \frac{1}{3}BC$. Đặt $\widehat{BAD} = \alpha, \widehat{DAE} = \beta, \widehat{EAC} = \gamma$. Chứng minh $(\cot\alpha + \cot\beta)(\cot\beta + \cot\gamma) = 4(1 + \cot^2\beta)$.*

69 ([Quỳ+20], 58., p. 135)**.** *ΔABC, $\widehat{B} > \widehat{C}$, AM, AD lần lượt là trung tuyến & phân giác trong góc A. Đặt $\widehat{DAM} = \alpha$. (a) Chứng minh $\tan\alpha = \tan^2\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B-C}{2}$. (b) Đặt $\dfrac{AD}{AM} = k$. Chứng minh $\cos\alpha = \dfrac{k}{2}\sin^2\dfrac{A}{2} + \sqrt{\dfrac{k^2}{4}\sin^4\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{A}{2}}$.*

70. *Cho ΔABC vuông tại A. (a) Cho trước 2 trong 6 số a, b, c, b', c', h. Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S. Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số a, b, c, b', c', h, $m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để giải.*

71. *Cho ΔABC Cho trước 3 trong 14 số a, b, c, b', c', h, $m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để giải.*

72. *Cho ΔABC. Tính $\sin A, \sin B, \sin C, \tan A, \tan B, \tan C, \cot A, \cot B, \cot C$ theo a, b, c.*

73. *Nếu chỉ cho số đo 3 góc của 1 tam giác, có thể giải tam giác đó không? Nếu có thì mô tả tập nghiệm các tam giác thỏa mãn.*

74. *Nếu cho trước độ dài 2 cạnh & số đo 1 góc không nằm giữa 2 cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

75. *Nếu cho trước độ dài 1 cạnh & số đo 2 góc không cùng kề với cạnh đó của 1 tam giác thì có giải tam giác đó được không?*

76 (Program: Solve triangle)**.** *(a) Nêu các bộ 3 yếu tố cần cho trước về cạnh & góc của 1 tam giác để tam giác đó có thể giải được. (b) Viết chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để minh họa.*

77. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính độ dài 3 đường trung tuyến & 6 góc tạo bởi 3 đường trung tuyến đó.*

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}, m_b = \frac{\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}}{2}, m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

78. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường phân giác & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp I đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, l_b = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}, l_c = \frac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}.$$

79. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. (a) Tính độ dài 3 đường cao & 6 góc tạo bởi 3 đường cao đó & 6 đoạn tạo thành trên 3 cạnh. (b) Tính khoảng cách từ trực tâm đến 3 đỉnh & 3 cạnh.*

80. *Cho độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến 3 cạnh của tam giác đó.*

3 Miscellaneous

81. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo để giải 1 đa giác lồi đều n cạnh?*

82. *Cho độ dài 4 cạnh của 1 tứ giác lồi, liệu có thể giải được tứ giác đó không?*

83. *Cần cho trước bao nhiêu yếu tố về cạnh, góc, đường chéo của 1 tứ giác lồi để có thể giải được tứ giác đó?*

84. *Đặt 3 điện tích q_1, q_2, q_3 tại 3 đỉnh của ΔABC. Tính các lực điện từ tổng hợp ở 3 đỉnh.*

Tài liệu

[Hải+22] Phạm Việt Hải, Trần Quang Hùng, Ninh Văn Thu, and Phạm Đình Tùng. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 10 Tập 1*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2022, p. 176.

[Quỳ+20] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, and Lê Bá Khánh Trình. *Tài Liệu Chuyên Toán Hình Học 10*. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2020, p. 344.