Problem: Trigonometry In Triangles
Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác

Nguyễn Quản Bá Hồng*

Ngày 14 tháng 10 năm 2024

Tóm tắt nội dung

This text is a part of the series *Some Topics in Elementary STEM & Beyond*:
URL: https://nqbh.github.io/elementary_STEM.
Latest version:

- *Problem: Trigonometry In Triangles – Bài Tập: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/problem/NQBH_trigonometry_problem.tex.
- *Problem & Solution: Trigonometry In Triangles – Bài Tập & Lời Giải: Hệ Thức Lượng Trong Tam Giác.*
  PDF: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.pdf.
  TEX: URL: https://github.com/NQBH/elementary_STEM_beyond/blob/main/elementary_mathematics/grade_9/trigonometry/solution/NQBH_trigonometry_solution.tex.

Mục lục

1 1 Số Hệ Thức Lượng về Cạnh & Đường Cao Trong Tam Giác Vuông

ΔABC vuông tại A: $a \coloneqq BC$, $b \coloneqq CA$, $c \coloneqq AB$, $b' \coloneqq CH$, $c' \coloneqq BH$, $h \coloneqq AH$. $\boxed{1}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài mỗi cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền & hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền: $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$. $\boxed{2}$ *Định lý Pythagore thuận*: Trong tam giác vuông, bình phương độ dài cạnh huyền bằng tổng bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông. *Định lý Pythagore đảo*: 1 tam giác là tam giác vuông nếu bình phương 1 cạnh bằng tổng bình phương 2 cạnh còn lại. ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$. $\boxed{3}$ Trong tam giác vuông, bình phương độ dài đường cao bằng tích độ dài hình chiếu của 2 cạnh góc vuông lên cạnh huyền: $h^2 = b'c'$. $\boxed{4}$ Trong tam giác vuông, tích độ dài 2 cạnh góc vuông bằng tích độ dài cạnh huyền với đường cao tương ứng: $ah = bc = 2S_{ABC}$. $\boxed{5}$ Trong tam giác vuông, nghịch đảo bình phương độ dài đường cao bằng tổng nghịch đảo bình phương độ dài 2 cạnh góc vuông: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

1 ([Tuy23], Thí dụ 1, p. 103)**.** *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$, 2 đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh: (a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$. (b) $\dfrac{1}{AB^2} - \dfrac{1}{CD^2} = \dfrac{1}{HB^2} - \dfrac{1}{HC^2}$. (c) Tính AD, CD.*

2 ([Tuy23], 1., p. 105)**.** *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, 2 đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 16$ cm, $BD = 12$ cm. Tính chiều cao của hình thang.*

*A Scientist & Creative Artist Wannabe. E-mail: nguyenquanbahong@gmail.com. Bến Tre City, Việt Nam.

3 ([Tuy23], 2., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết $BH = 63$ cm, $CH = 112$ cm, tính HD.*

4 ([Tuy23], 3., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A. 2 đường trung tuyến AD, BE vuông góc với nhau tại G. Biết $AB = \sqrt{6}$ cm. Tính cạnh huyền BC.*

5 ([Tuy23], 4., p. 105). *Gọi a, b, c là các cạnh của 1 tam giác vuông, h là đường cao ứng với cạnh huyền a. Chứng minh tam giác có các cạnh $a + h, b + c$, & h cũng là 1 tam giác vuông.*

6 ([Tuy23], 5., p. 105). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC. Đặt $c = AB$, $b = AC$. (a) Tính AI, AK theo b, c. (b) Chứng minh $\dfrac{BI}{CK} = \dfrac{c^3}{b^3}$.*

7 ([Tuy23], 6., p. 105). *Cho ΔABC, $AB = 1$, $\widehat{A} = 105^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = 1$. Vẽ $ED \parallel AB$, $D \in AC$. Chứng minh: $\dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{4}{3}$.*

8 ([Tuy23], 7., p. 105). *Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = 2BC$. Trên cạnh BC lấy điểm E. Tia AE cắt đường thẳng CD tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{4AF^2}$.*

9 ([Tuy23], 8., p. 105). *Cho 3 đoạn thẳng có độ dài a, b, c. Dựng đoạn thẳng x sao cho $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.*

10 ([Tuy23], 9., p. 105). *Cho hình thoi ABCD có $\widehat{A} = 120^\circ$. 1 đường thẳng d không cắt các cạnh của hình thoi. Chứng minh: tổng các bình phương hình chiếu của 4 cạnh với 2 lần bình phương hình chiếu của đường chéo AC trên đường thẳng d không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng d.*

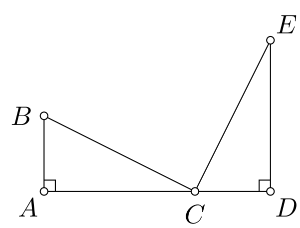
11 ([Tuy23], 10., p. 106). *Cho ΔABC vuông tại A. Từ 1 điểm O ở trong tam giác ta vẽ $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$. Xác định vị trí của O để $OD^2 + OE^2 + OF^2$ nhỏ nhất.*

12 ([Bìn23], VD1, p. 84). *Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12 cm, 2 đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, $BD = 15$ cm.*

13 ([Bìn23], VD2, p. 85). *Hình thang cân ABCD có đáy lớn $CD = 10$ cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.*

14 ([Bìn23], VD3, p. 85). *Tính diện tích 1 tam giác vuông có chu vi 72 cm, hiệu giữa đường trung tuyến & đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7 cm.*

15 ([Bìn23], 1., p. 86). *Chứng minh định lý Pythagore bằng cách đặt 2 tam giác vuông bằng nhau $\Delta ABC = \Delta DCE$:*



16 ([Bìn23], 2., p. 86). *Cho ΔABC cân có $AB = AC = 9$ cm, $BC = 12$ cm, đường cao AH, I là hình chiếu của H trên AC. (a) Tính độ dài CI. (b) Kẻ đường cao BK của ΔABC. Chứng minh điểm K nằm giữa 2 điểm A, C.*

17 ([Bìn23], 3., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{A} = 120^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

18 ([Bìn23], 4., p. 86). *Tính cạnh đáy BC của ΔABC cân biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15.6 cm & đường cao ứng với cạnh bên bằng 12 cm.*

19 ([Bìn23], 5., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường phân giác AD, đường cao AH. Biết $BD = 7.5$ cm, $CD = 10$ cm. Tính AH, BH, DH.*

20 ([Bìn23], 6., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH, $AB = 20$ cm, $CH = 9$ cm. Tính độ dài AH.*

21 ([Bìn23], 7., p. 86). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Tia phân giác của $\widehat{HAC}$ cắt HC ở D. Gọi K là hình chiếu của D trên AC. Biết $BC = 25$ cm, $DK = 6$ cm. Tính AB.*

22 ([Bìn23], 8., p. 86). *Cho ΔABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, 2 đường trung tuyến BD, CE vuông góc với nhau. Tính BC.*

23 ([Bìn23], 9., p. 86). *Cho ΔABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$ cm, $AB + AC = 12$ cm. Tính AB, AC.*

24 ([Bìn23], 10., p. 86). *Trong 1 tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành 2 phần có diện tích bằng 54 cm^2 & 96 cm^2. Tính độ dài cạnh huyền.*

25 ([Bìn23], 11., p. 86). *Cho ΔABC vuông cân tại A, đường trung tuyến BM. Gọi D là hình chiếu của C trên BM, H là hình chiếu của D trên AC. Chứng minh $AH = 3DH$.*

26 ([Bìn23], 12., pp. 86–87). *(a) 1 tam giác vuông có tỷ số các cạnh góc vuông bằng k. Tính tỷ số các hình chiếu của 2 cạnh góc vuông trên cạnh huyền. (b) Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền của 1 tam giác vuông, biết tỷ số 2 cạnh góc vuông bằng* $5:4$ *& cạnh huyền dài* 82 cm.

27 ([Bìn23], 13., p. 87). *Trong 1 tam giác vuông, đường phân giác của góc vuông chia cạnh huyền thành 2 đoạn thẳng tỷ lệ với* $1:3$. *Đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỷ số nào?*

28 ([Bìn23], 14., p. 87). *Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh AB, BC, CA là 3 số tự nhiên liên tiếp tăng dần. Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Chứng minh $HM = 2$.*

29 ([Bìn23], 15., p. 87). *1 hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi & diện tích hình thang biết đáy nhỏ dài* 14 cm, *đáy lớn dài* 50 cm.

30 ([Bìn23], 16., p. 87). *1 hình thoi có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ diện tích hình vuông có cạnh bằng cạnh của hình thoi. Tính tỷ số của đường chéo dài & đường chéo ngắn của hình thoi.*

31 ([Bìn23], 17., p. 87). *Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh a, vẽ 1 đường thẳng cắt cạnh BC ở M & cắt đường thẳng CD ở I. Chứng minh* $\dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{a^2}$.

32 ([Bìn23], 18., p. 87). *Cho hình vuông ABCD có cạnh* 1 dm. *Tính cạnh của ΔAEF đều có E thuộc cạnh CD & F thuộc cạnh BC.*

33 ([Bìn23], 19., p. 87). *Trong 2 tam giác sau, tam giác nào là tam giác vuông, nếu độ dài 3 đường cao bằng: (a) $3, 4, 5$. (b) $12, 15, 20$.*

34 (Mở rộng [Bìn23], 19., p. 87). *Cho tam giác ABC có 3 đường cao có độ dài lần lượt là h_a, h_b, h_c. Tìm điều kiện cần & đủ theo h_a, h_b, h_c để ΔABC vuông.*

35 ([Bìn23], 20., p. 87). *Chứng minh ΔABC là tam giác vuông nếu 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$.*

36 ([Bìn23], 21., p. 87). *Xét các ΔABC vuông có cạnh huyền $BC = 2a$. Gọi AH là đường cao của tam giác, D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AC, AB. Tìm* GTLN *của: (a) DE. (b) Diện tích tứ giác ADHE.*

37 ([Bìn23], 22., pp. 87–88). *Chứng minh trong 1 tam giác: (a) Bình phương của cạnh đối diện với góc nhọn bằng tổng các bình phương của 2 cạnh kia trừ đi 2 lần tích của 1 trong 2 cạnh ấy với hình chiếu của cạnh kia trên nó.*

38 ([Bìn23], 23., p. 88). *Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: (a) $b^2 < c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} < 90^\circ$. (b) $b^2 > c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} > 90^\circ$. (c) $b^2 = c^2 + a^2 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$.*

39 ([Bìn23], 24., p. 88). *ΔABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của $\widehat{A}$ cắt BD ở I. Biết $BI = 10\sqrt{5}$* cm, *$DI = 5\sqrt{5}$* cm. *Tính diện tích ΔABC.*

40 ([Bìn23], 25., p. 88). *ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. (a) Biết $AB = 5$* cm, *$CI = 6$* cm. *Tính BC. (b) Biết $BI = \sqrt{5}$* cm, *$CI = \sqrt{10}$* cm. *Tính AB, AC.*

41 ([Bìn23], 26., p. 88). *Cho ΔABC vuông tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác, M là trung điểm của BC. (a) Biết $AB = 6$* cm, *$AC = 8$* cm. *Tính $\widehat{BIM}$. (b) Biết $\widehat{BIM} = 90^\circ$. 3 cạnh của ΔABC tỷ lệ với 3 số nào?*

42 ([Bìn23], 27., p. 88). *1 tam giác vuông có độ dài 1 cạnh bằng trung bình cộng của độ dài 2 cạnh kia. (a) ĐỘ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó tỷ lệ với 3 số nào? (b) Nếu độ dài 3 cạnh của tam giác vuông đó là 3 số nguyên dương thì số nào trong 5 số sau có thể là độ dài 1 cạnh của tam giác đó: $17, 13, 35, 41, 22$?*

43 ([Bìn23], 28., p. 88). *Cho ΔABC vuông tại A, $BC = 3\sqrt{5}$* cm. *Hình vuông ADEF cạnh* 2 cm *có $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in CA$. Tính AB, AC.*

44 ([Bìn23], 29., p. 88). *ΔABC cân tại A, gọi I là giao điểm của 3 đường phân giác. Biết $IA = 2\sqrt{5}$* cm, *$IB = 3$* cm. *Tính AB.*

45 ([Bìn23], 30., p. 88). *ΔABC cân tại A, đường cao AD, trực tâm H. Tính độ dài AD, biết $AH = 14$* cm, *$BH = CH = 30$* cm.

46 ([Bìn23], 31., p. 88). *ΔABC có $BC = 40$* cm, *đường phân giác AD dài* 45 cm, *đường cao AH dài* 36 cm. *Tính BD, CD.*

47 ([Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = 3 : 4$ & $AB + AC = 21$* cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

48 (Mở rộng [Bìn+23], VD1, p. 5). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AB : AC = m : n$ & $AB + AC = p$* cm. *(a) Tính các cạnh của ΔABC. (b) Tính độ dài các đoạn AH, BH, CH.*

49 ([Bìn+23], VD2, p. 6). *Cho hình thang $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{B} = 60°$, $CD = 30$ cm, $CA \perp CB$. Tính diện tích của hình thang.*

50 ([Bìn+23], VD3, p. 7). *Cho ΔABC nhọn, đường cao CK, H là trực tâm. Gọi M là 1 điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90°$. S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các $\Delta AMB, \Delta ABC, \Delta ABH$. Chứng minh $S = \sqrt{S_1 S_2}$.*

51 ([Bìn+23], 1.1., p. 7). *Cho ΔABC vuông cân tại A & điểm M nằm giữa B & C Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AC. Chứng minh $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.*

52 ([Bìn+23], 1.2., p. 7). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ & điểm O nằm trong hình chữ nhật đó. Chứng minh $OA^2 + OC^2 = OB^2 + CD^2$.*

53 ([Bìn+23], 1.3., p. 8). *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 6$ cm, $CD = 8$ cm. Đường thẳng kẻ từ D vuông góc với AC tại E, cắt cạnh AB tại F. Tính độ dài các đoạn thẳng DE, DF, AE, CE, AF, BF.*

54 ([Bìn+23], 1.4., p. 8). *Cho ΔABC có $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 5$ cm. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 gam giác không có điểm trong chung. Tính diện tích của mỗi tam giác đó.*

55 ([Bìn+23], 1.5., p. 8). *Trong 1 tam giác vuông tỷ số giữa đường cao & đường trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng $40 : 41$. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác đó, biết cạnh huyền bằng $\sqrt{41}$ cm.*

56 ([Bìn+23], 1.6., p. 8). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ $HE \perp AB$, $HF \perp AC$. Gọi O là giao điểm của AH & EF. Chứng minh $HB \cdot HC = 4OE \cdot OF$.*

57 ([Bìn+23], 1.7., p. 8). *Cho ΔABC, 2 đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm thuộc HC, HB sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90°$. ΔAMN là tam giác gì?*

58 ([Bìn+23], 1.8., p. 8). *Cho hình vuông $ABCD$, cạnh a. (a) M là 1 điểm trên cạnh AD sao cho $\widehat{ABM} = 30°$. Tính AM, BM theo a. (b) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BM tại F, đường thẳng này cắt CD tại N. Tính độ dài 3 đoạn thẳng AF, MF, BF theo a.*

59 ([Bìn+23], 1.9., p. 8). *Cho hình vuông $ABCD$ & điểm I thay đổi giữa A, B. Tia DI cắt BC tại E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC tại F. Chứng minh tổng $\dfrac{1}{DI^2} + \dfrac{1}{DE^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm I.*

60 ([Bìn+23], 1.10., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao BH. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, AH = c'$. Chứng minh: (a) Nếu $\widehat{A} < 90°$ thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$. (b) Nếu $\widehat{A} > 90°$ thì $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$.*

61 ([Bìn+23], 1.11., p. 8). *Cho ΔABC, đường cao AH. Biết $AB = 8$ cm, $BC - AC = 2$ cm, $\widehat{BAH} = 30°$. Tính diện tích ΔABC.*

62 ([Bìn+23], 1.12., p. 8). *Cho ΔABC, các đường cao ứng với các cạnh a, b, c lần lượt là h_a, h_b, h_c. Chứng minh nếu $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ thì ΔABC vuông tại A.*

63 ([Bìn+23], 1.13., p. 9). *Cho ΔABC, 2 đường phân giác BD, CE cắt nhau tại I thỏa mãn $BD \cdot CE = 2BI \cdot CI$. ΔABC là tam giác gì? Vì sao?*

64 ([Bìn+23], 1.14., p. 9). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 90°$, $BC = 2a$, đường cao AH. Kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Tìm giá trị lớn nhất của: (a) Độ dài đoạn thẳng DE. (b) Diện tích tứ giác $ADHE$.*

65 ([Bìn+23], 1.15., p. 9). *Cho ΔABC đều có cạnh bằng 60 cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho $BD = 20$ cm. Đường trung trực của AD cắt AB tại E, cắt AC tại F. Tính độ dài các cạnh của ΔDEF.*

66 ([Bìn+23], 1.16., p. 9). *Cho ΔABC. Đường trung tuyến AD, đường cao BH, đường phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(AB + CA)(BC^2 + CA^2 - AB^2) = 2BC \cdot CA^2$ hay $(b + c)(a^2 + b^2 - c^2) = 2ab^2$.*

67 (Program: Trigonometry in right triangles). *Cho ΔABC vuông tại A. (a) Cho trước 2 trong 6 số a, b, c, b', c', h. Tính 4 số còn lại theo 2 số đã cho. (c) Cho trước 2 trong 8 số a, b, c, b', c', h, p, S. Tính 6 số còn lại theo 2 số đã cho. (b) Cho trước 2 trong 14 số a, b, c, b', c', h, $m_a, m_b, m_c, d_a, d_b, d_c, p, S$ với d_a, d_b, d_c lần lượt là 3 đường phân giác ứng với BC, CA, AB. Tính 12 số còn lại theo 2 số đã cho. Viết các chương trình* Pascal, Python, C/C++ *để mô phỏng.*

2 Tỷ Số Lượng Giác của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §1, pp. 74–81]: HD1. LT1. HD2. LT2. LT3. HD3. HD4. LT4. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

68 ([Tuy23], Thí dụ 2, p. 107). *Cho $\cot\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$ trong đó α là góc nhọn, $a > b > 0$. Tính $\cos\alpha$.*

69 ([Tuy23], 11., p. 108, định lý sin). *Cho ΔABC nhọn, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$. Đẳng thức này còn đúng với tam giác vuông & tam giác tù hay không?*

70 ([Tuy23], 12., p. 108). *Chứng minh: (a)* $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. *(b)* $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$. *(c)* $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$. *(d)* $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

71 ([Tuy23], 13., p. 108). *Rút gọn biểu thức: (a)* $A = \dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$. *(b)* $B = (1+\tan^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)-(1+\cot^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$. *(c)* $C = \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

72 ([Tuy23], 14., p. 108). *Tính giá trị của biểu thức* $A = 5\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha$ *biết* $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

73 ([Tuy23], 15., p. 108). *Không dùng máy tính hoặc bảng số, tính: (a)* $A = \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ$. *(b)* $B = \sin^2 5^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 65^\circ + \sin^2 85^\circ$.

74 ([Tuy23], 16., p. 108). *Cho* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. *Chứng minh:* $\sin\alpha < \tan\alpha$, $\cos\alpha < \cot\alpha$. *Áp dụng: (a) Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:* $\sin 65^\circ, \cos 65^\circ, \tan 65^\circ$. *(b) Xác định* α *thỏa mãn điều kiện:* $\tan\alpha > \sin\alpha > \cos\alpha$.

75 ([Tuy23], 17., p. 108). *Cho* ΔABC *vuông tại* A. *Biết* $\sin B = \frac{1}{4}$, *tính* $\tan C$.

76 ([Tuy23], 18., p. 108). *Cho biết* $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, *tính* $\tan\alpha$.

77 ([Tuy23], 19., p. 109). ΔABC*, đường trung tuyến* AM. *Chứng minh nếu* $\cot B = 3\cot C$ *thì* $AM = AC$.

78 ([Tuy23], 20., p. 109). *Cho* ΔABC*, trực tâm* H *là trung điểm của đường cao* AD. *Chứng minh* $\tan B \tan C = 2$.

79 ([Tuy23], 21., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* BD, CE. *Chứng minh: (a)* $S_{\Delta ADE} = S_{\Delta ABC}\cos^2 A$. *(b)* $S_{BCDE} = S_{\Delta ABC}\sin^2 A$.

80 ([Tuy23], 22., p. 109). *Cho* ΔABC *nhọn. Từ 1 điểm* M *nằm trong tam giác vẽ* $MD\perp BC$, $ME\perp AC$, $MF\perp AB$. *Chứng minh* $\max\{MA, MB, MC\} \ge 2\min\{MD, ME, MF\}$, *trong đó* $\max\{MA, MB, MC\}$ *là đoạn thẳng lớn nhất trong các đoạn thẳng* MA, MB, MC *&* $\min\{MD, ME, MF\}$ *là đoạn thẳng nhỏ nhất trong các đoạn thẳng* MD, ME, MF.

81 ([Bìn23], VD4, p. 89). *Tính* $\tan 15^\circ$ *mà không cần dùng bảng số, không dùng máy tính.*

82 ([Bìn23], VD4, p. 90). *Xét* ΔABC *vuông tại* A, $AB < AC$, $\widehat{C} = \alpha < 45^\circ$, *đường trung tuyến* AM, *đường cao* AH, $MA = MB = MC = a$. *Chứng minh: (a)* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. *(b)* $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. *(c)* $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

83 ([Bìn23], 32., p. 91). *Tính sai số của 2 phép dựng: (a) Dựng góc* 72° *bằng cách dựng góc nhọn của tam giác vuông có 2 cạnh góc vuông bằng* 1 cm *&* 3 cm. *(b) Dựng góc* 20° *bằng cách dựng góc ở đỉnh của tam giác cân có đáy* 2 cm, *cạnh bên* 6 cm.

84 ([Bìn23], 33., p. 91). ΔABC *có đường trung tuyến* AM *bằng cạnh* AC. *Tính* $\dfrac{\tan B}{\tan C}$.

85 ([Bìn23], 34., p. 91). *Cho* $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. *Tính* $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

86 ([Bìn23], 35., p. 91). *Cho hình vuông ABCDN. M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tính* $\cos\widehat{MAN}$.

87 ([Bìn23], 36., p. 91). *Cho* ΔABC *vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua B. Gọi E là điểm thuộc tia đối của tia AH sao cho* $HE = 2HA$. *Chứng minh* $\widehat{DEC} = 90^\circ$.

88 ([Bìn23], 37., p. 91). *Chứng minh trong 1 tam giác, đường phân giác ứng với cạnh lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng đường cao ứng với cạnh nhỏ nhất.*

89 ([Bìn23], 38., p. 91). *Tính* $\tan 22^\circ 30'$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

90 ([Bìn23], 39., p. 91). *Chứng minh* $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

91 ([Bìn23], 40., p. 91). *Tính* $\cos 36^\circ, \cos 72^\circ$ *mà không dùng bảng số hay máy tính.*

92 ([Bìn+23], VD1, p. 10). *Biết* $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$. *Tính* $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

93 ([Bìn+23], VD2, p. 11). *Cho* ΔABC *nhọn, 2 đường cao* AD, BE *cắt nhau tại* H. *Biết* $HD : HA = 1 : 2$, *chứng minh* $\tan B\tan C = 3$.

94 ([Bìn+23], VD3, p. 12). *Biết* $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$. *Tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

95 ([Bìn+23], 2.1., p. 12). *(a) Biết* $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, *tính* $A = 5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$. *(b) Biết* $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, *tính* $B = 4\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha$.

96 ([Bìn+23], 2.2., p. 13). *(a) Biết* $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$, *tính* $A = \dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$. *(b) Biết* $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$, *tính* $B = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

97 ([Bìn+23], 2.3., p. 13). *Cho ΔABC, trung tuyến AM. Chứng minh nếu $\cot B = 3\cot C$ thì $AM = AC$.*

98 ([Bìn+23], 2.4., p. 13). *Cho ΔABC có $BC \ge AC \ge AB$, đường phân giác AD, đường cao CH. Chứng minh $CH \ge AD$.*

99 ([Bìn+23], 2.5., p. 13). *Cho ΔABC nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.*

100 ([Bìn+23], 2.6., p. 13). *Cho ΔABC, 2 đường cao BD, CE. Chứng minh: (a) $S_{ADE} = S_{ABC}\cos^2 A$. (b) $S_{BCDE} = S_{ABC}\sin^2 A$.*

101 ([Bìn+23], 2.7., p. 13). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh với $\sin$ của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

102 ([Bìn+23], 2.8., p. 13). *Cho ΔABC nhọn, đường phân giác AD. Biết $AB = c, AC = b$, tính độ dài đoạn AD theo b, c.*

103 ([Bìn+23], 2.9., p. 13). *Cho ΔABC nhọn có $BC = a, CA = b, AB = c$ & $b+c = 2a$. Chứng minh: (a) $2\sin A = \sin B + \sin C$. (b) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với cạnh a, b, c.*

104 ([Bìn+23], 2.10., p. 13). *Cho ΔABC nhọn & 2 đường trung tuyến BN, CM vuông góc với nhau. Chứng minh $\cot B + \cot C \ge \dfrac{2}{3}$.*

105 ([Bìn+23], 2.11., p. 13). *Cho ΔABC vuông tại A, $AB < AC$, & trung tuyến AM. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha, \widehat{AMB} = \beta$. Chứng minh $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin\beta$.*

106 ([Bìn+23], 2.12., p. 14). *Không sử dụng các công thức lượng giác, chứng minh $\cos 36° \cos 72° = \dfrac{1}{4}$.*

107 ([Bìn+23], 2.13., p. 14). *Tìm góc nhọn α thỏa $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.*

108 ([Bìn+23], 2.14., p. 14). *Cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{C} = \alpha < 45°$, trung tuyến AM, đường cao AH, $BC = a$. Chứng minh: (a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. (b) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$. (c) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.*

109 ([Bìn+23], 2.15., p. 14). *Cho ΔABC. Chứng minh: (a) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. (b) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.*

3 1 Số Hệ Thức về Cạnh & Góc trong Tam Giác Vuông

[Thá+24, Chap. IV, §2, pp. 82–87]: HD1. LT1. LT2. HD2. LT3. LT4. LT5. LT6. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

110 ([Tuy23], Thí dụ 3, p. 109). *Tứ giác $ABCD$ có 2 đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $\widehat{AOD} = 70°$, $AC = 5.3$ cm, $BD = 4$ cm. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.*

111 ([Tuy23], 23., p. 110). *Chứng minh: (a) Diện tích của 1 tam giác bằng nửa tích của 2 cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy. (b) Diện tích hình bình hành bằng tích của 2 cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

112 ([Tuy23], 24., p. 110). *Cho hình bình hành $ABCD$, $BD \perp BC$. Biết $AB = a$, $\widehat{A} = \alpha$, tính diện tích hình bình hành đó.*

113 ([Tuy23], 25., p. 110). *Cho ΔABC, $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 35°$, $AB = 12.25$ dm. Giải ΔABC.*

114 ([Tuy23], 26., p. 110). *Cho ΔABC nhọn, $\widehat{A} = 75°$, $AB = 30$ mm, $BC = 35$ mm. Giải ΔABC.*

115 ([Tuy23], 27., p. 110). *Cho ΔABC cân tại A, đường cao BH. Biết $BH = h$, $\widehat{C} = \alpha$. Giải ΔABC.*

116 ([Tuy23], 28., p. 110). *Hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{A} = 120°$, $AB = a$, $BC = b$. Các đường phân giác của 4 góc cắt nhau tạo thành tứ giác $MNPQ$. Tính diện tích tứ giác $MNPQ$.*

117 ([Tuy23], 29., p. 110). *Cho ΔABC, các đường phân giác AD, đường cao BH, đường trung tuyến CE đồng quy tại điểm O. Chứng minh $AC\cos A = BC\cos C$.*

118 ([Bìn23], VD6, p. 92). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác không vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với $\sin$ của góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng chứa 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Gọi α là góc nhọn tạo bởi 2 đường thẳng AB, AC của ΔABC ($\alpha = \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} < 90°$ & $\alpha = 180° - \widehat{A}$ nếu $\widehat{A} > 90°$). Vẽ đường cao BH, có $BH = AB\sin\alpha$, suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2}AC \cdot AB\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. □

119 (Mở rộng [Bìn23], VD6, p. 91). *Chứng minh diện tích của 1 tam giác bằng $\frac{1}{2}$ tích của 2 cạnh nhân với $\sin$ của góc tạo bởi 2 cạnh ấy.*

Chứng minh. Ta xét 3 trường hợp ứng với $\widehat{A}$, chứng minh công thức ứng với $\widehat{B}, \widehat{C}$ hoàn toàn tương tự.

- *Trường hợp* $\widehat{A} = 90°$. Vì $\sin 90° = 1$ nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc\sin 90° = \frac{1}{2}bc\sin A$.
- *Trường hợp* $\widehat{A} < 90°$. Đã chứng minh ở bài toán ngay trên.
- *Trường hợp* $\widehat{A} > 90°$. Vì $\sin x = \sin(180° - x), \forall x \in [0°, 180°]$ nên theo bài toán ngay trên: $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(180° - A) = \frac{1}{2}bc\sin A$.

Vậy công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$ đúng cho mọi ΔABC. □

⋆ *Công thức tính diện tích tam giác tổng quát:*

$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C,\ \forall \Delta ABC.}$$

120 ([Bìn23], VD7, p. 92). ΔABC *có* $\widehat{A} = \widehat{B} + 2\widehat{C}$ *& độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp. (a) Tính độ dài 3 cạnh của* ΔABC*. (b) Tính* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$*.*

121 (Tổng quát [Bìn23], VD7, p. 92). *Nếu* ΔABC *có* $\widehat{A}$ *tù & độ dài 3 cạnh là 3 số tự nhiên liên tiếp thì 3 độ dài đó bằng* $2, 3, 4$*.*

122 ([Bìn23], 41., p. 94). *Tính: (a) Chiều cao ứng với cạnh* 40 cm *của 1 tam giác, biết 2 góc kề với cạnh này bằng* $40°, 55°$*. (b) Góc tạo bởi đường cao & đường trung tuyến kẻ từ 1 đỉnh của tam giác, biết 2 góc ở 2 đỉnh kia bằng* $60°, 80°$*.*

123 ([Bìn23], 42., p. 94). ΔABC *có* $\widehat{A} = 105°, \widehat{B} = 45°, BC = 4$ cm*. Tính* AB*,* AC*.*

124 ([Bìn23], 43., p. 94). ΔABC *có* $\widehat{A} = 60°$*,* $AB = 28$ cm*,* $AC = 35$ cm*. Tính* BC*.*

125 ([Bìn23], 44., p. 94). *Cho 1 hình vuông có cạnh* 1 dm*. Cắt đi ở mỗi góc của hình vuông 1 tam giác vuông cân để được 1 bát giác đều. Tính tổng diện tích của 4 tam giác vuông cân bị cắt đi.*

126 ([Bìn23], 45., p. 94). ΔABC *đều có cạnh* 60 cm*. Trên cạnh* BC *lấy điểm* D *sao cho* $BD = 20$ cm*. Đường trung trực của* AD *cắt 2 cạnh* AB*,* AC *theo thứ tự ở* E*,* F*. Tính độ dài 3 cạnh của* ΔDEF*.*

127 ([Bìn23], 46., p. 94). *Cho* ΔABC *có* $AB = c$*,* $CA = b$*, đường phân giác* AD*, đường trung tuyến* AM*. Đường thẳng đối xứng với* AM *qua* AD *cắt* BC *ở* N*. Tính* $\dfrac{BN}{CN}$*.*

128 ([Bìn23], 47., p. 94). *Độ dài 2 đường chéo của 1 hình bình hành tỷ lệ với độ dài 2 cạnh liên tiếp của nó. Chứng minh các góc tạo bởi 2 đường chéo bằng các góc của hình bình hành.*

129 ([Bìn23], 48., p. 94). *Tứ giác* $ABCD$ *có 2 đường chéo cắt nhau ở* O *& không vuông góc với nhau. Gọi* H *&* K *lần lượt là trực tâm của* $\Delta AOB, \Delta COD$*. Gọi* G, I *lần lượt là trọng tâm của* $\Delta BOC, \Delta AOD$*. (a) Gọi* E *là trọng tâm của* ΔAOB*,* F *là giao điểm của* AH *&* DK*. Chứng minh* $\Delta IEG \backsim \Delta HFK$*. (b) Chứng minh* $IG \perp HK$*.*

130 ([Bìn23], 49., p. 94). *Cho* ΔABC *nhọn, 3 điểm* D, E, F *lần lượt thuộc 3 cạnh* AB*,* BC*,* CA*. Chứng minh trong 3* $\Delta ADF, \Delta BDE, \Delta CEF$*, tồn tại 1 tam giác có diện tích* $\le \frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC*. Khi nào cả 3 tam giác đó cùng có diện tích bằng* $\frac{1}{4}$ *diện tích* ΔABC*?*

131 ([Bìn+23], VD1, p. 15). ΔABC *có* $AB = 16, AC = 14, \widehat{B} = 60°$*. (a) Tính độ dài cạnh* BC*. (b) Tính diện tích* ΔABC*.*

132 ([Bìn+23], VD2, p. 15). *Cho* ΔABC *nhọn có* $\widehat{A} = 75°, AB = 30, BC = 35$*. Giải* ΔABC*.*

133 ([Bìn+23], VD3, p. 16). *Không dùng bảng số & máy tính. Chứng minh* $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$*.*

134 ([Bìn+23], 3.1., p. 17). *Cho hình chữ nhật* $ABCD$ *có* $\widehat{BAC} = 30°, AC = 10$*. Tính chu vi & diện tích của hình chữ nhật đó.*

135 ([Bìn+23], 3.2., p. 17). *Cho* ΔABC *vuông tại* B*,* $\widehat{A} = \alpha$*,* BO *là trung tuyến ứng với cạnh huyền* AC*. Từ* B *kẻ đường thẳng vuông góc với* BO *cắt* AC *tại* D*. Đặt* $AC = a$*. Chứng minh* $AD = \dfrac{a(\cos 2\alpha + 1)}{2\cos 2\alpha}$*.*

136 ([Bìn+23], 3.3., p. 17). *Cho* ΔABC*, đường cao* AA'*, trực tâm* H*. Cho biết* $\dfrac{AH}{A'H} = k$*. Chứng minh* $\tan B \tan C = 1 + k$*.*

137 ([Bìn+23], 3.4., p. 17). *Cho hình bình hành* $ABCD$ *có* $\widehat{A} = 45°$*,* $AB = BD = 18$*. (a) Tính độ dài cạnh* AD*. (b) Tính diện tích hình bình hành* $ABCD$*.*

138 ([Bìn+23], 3.5., p. 17). *Cho* ΔABC *có góc* A *nhọn, 2 đường cao* BH, CK*. Chứng minh nếu* $AB > AC$ *thì* $BH > CK$*.*

139 ([Bìn+23], 3.6., p. 17). *Cho* ΔABC*, phân giác* AD*. Biết* $AB = c, AC = b, \widehat{A} = 2\alpha$ *với* $\alpha < 45°$*. Chứng minh* $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$*.*

140 ([Bìn+23], 3.7., p. 17). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, đường cao* AH*. Đặt* $BC = a, CA = b, AB = c$*. Chứng minh: (a)* $AH = a\sin B\cos B, BH = a\cos^2 B, CH = a\sin^2 B$*.*

141 ([Bìn+23], 3.8., p. 17). *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a, CA = b, AB = c$*. Chứng minh* $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$*.*

142 ([Bìn+23], 3.9., p. 17). *Cho* ΔABC *cân tại* A*, đường cao ứng với cạnh bên có độ dài bằng* h*, góc ở đáy của tam giác bằng* α*. Chứng minh* $S_{ABC} = \dfrac{h^2}{4\sin\alpha\cos\alpha}$*.*

143 ([Bìn+23], 3.10., p. 18). *Ở độ cao* 920 m*, từ 1 máy bay trực thăng, người ta nhìn 2 điểm* A, B *của 2 đầu 1 chiếc cầu 2 góc so với phương nằm ngang lần lượt là* $\alpha = 37^\circ, \beta = 31^\circ$*. Tính chiều dài* AB *của chiếc cầu.*

144 ([Bìn+23], 3.11., p. 18). *Cho* ΔABC *nhọn, 3 đường cao* AH, BI, CK*. Chứng minh:* $S_{HIK} = (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)S_{ABC}$*.*

145 ([Bìn+23], 3.12., p. 18). *Chứng minh* ΔABC *cân tại* $C \Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$*.*

146 ([Bìn+23], 3.13., p. 18). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. 2 đường trung tuyến* AE, BD *vuông góc với nhau. Biết* $AB = 1$*. Tính diện tích* ΔABC*.*

147 ([Bìn+23], 3.14., p. 18). *Cho* ΔABC*,* $AB = 8, AC = 7, \widehat{ABC} = 30^\circ$*. Giải* ΔABC*.*

148 ([Bìn+23], 3.15., p. 18). *(a) Không dùng bảng số, máy tính, tính* $\tan 15^\circ$*. (b) Cho* ΔABC *có* $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 105^\circ$ *&* $AB + AC\sqrt{2} = 2BC$*. Tính* $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$*.*

4 Application of Trigonometrical Functions of Acute Angle – Ứng Dụng Của Tỷ Số Lượng Giác Của Góc Nhọn

[Thá+24, Chap. IV, §3, pp. 88–91]: LT1. LT2. 1. 2. 3. 4. 5.

5 Miscellaneous

[Thá+24, BTCCIV, pp. 92–93]: 1. 2. 3. 4.

149 ([Tuy23], Thí dụ 4, p. 111). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*. Gọi* M, N *lần lượt là 2 điểm trên cạnh* AB, AC *sao cho* $AM = \frac{1}{3}AB$*,* $AN = \frac{1}{3}AC$*. Biết độ dài* $BN = \sin\alpha$*,* $CM = \cos\alpha$ *với* $0^\circ < \alpha < 90^\circ$*. Tính cạnh huyền* BC*.*

150 ([Tuy23], 30., p. 112). *Cho* ΔABC *nhọn,* $BC = a$*,* $AC = b$*,* $CA = b$ *trong đó* $b - c = \frac{a}{k}$*,* $k > 1$*. Gọi* h_a, h_b, h_c *lần lượt là các đường cao hạ từ* A, B, C*. Chứng minh: (a)* $\sin A = k(\sin B - \sin C)$*. (b)* $\frac{1}{h_a} = k\left(\frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$*.*

151 ([Tuy23], 31., p. 112). *Giải* ΔABC *biết* $AB = 14$*,* $BC = 15$*,* $CA = 13$*.*

152 ([Tuy23], 32., p. 112). *Cho hình hộp chữ nhật* $ABCD.A'B'C'D'$*. Biết* $\widehat{DC'D'} = 45^\circ$*,* $\widehat{BC'B'} = 60^\circ$*. Tính* $\widehat{BC'D}$*.*

153 ([Tuy23], 33., p. 112). *Cho* ΔABC*,* $AB = AC = 1$*,* $\widehat{A} = 2\alpha$*,* $0^\circ < \alpha < 45^\circ$*. Vẽ các đường cao* AD, BE*. (a) Các tỷ số lượng giác* $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin 2\alpha, \cos 2\alpha$ *được biểu diễn bởi các đoạn thẳng nào? (b) Chứng minh* $\Delta ADC \backsim \Delta BEC$*, từ đó suy ra các hệ thức sau:* $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$*,* $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$*. (c) Chứng minh:* $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$*,* $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$*.*

154 ([Tuy23], 34., p. 112). *Cho* $\alpha = 22^\circ 30'$*, tính* $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$*.*

155 ([Tuy23], 35., p. 112). *Cho* ΔABC*, đường phân giác* AD*. Biết* $AB = c$*,* $AC = b$*,* $\widehat{A} = 2\alpha$*,* $\alpha < 45^\circ$*. Chứng minh* $AD = \dfrac{2bc\cos\alpha}{b + c}$*.*

156 ([Kiê21], VD1, p. 9). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*, dựng đường cao* AH*. Tính độ dài các yếu tố còn lại* $(a, b, c, h, b', c', \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ *của* ΔABC *trong mỗi trường hợp: (a)* $AB = a$*,* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*. (b)* $BC = 2a$*,* $BH = \dfrac{1}{4}BC$*. (c)* $AB = a$*,* $CH = \dfrac{3}{2}a$*. (d)* $AC = a\sqrt{3}$*,* $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$*. (e)* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{4}$*,* $BC = 5a$*.*

157 ([Kiê21], VD2, p. 10). *Cho* ΔABC *vuông tại* A*,* $BC = 2a$*, gọi* O *là trung điểm của* BC*. Dựng* $AH \perp BC$*. (a) Khi* $\widehat{ACB} = 30^\circ$*. Tính độ dài các yếu tố còn lại của tam giác. (b) Khi* $\widehat{ACB} = 30^\circ$*. Gọi* M *là trung điểm của* AC*. Tính độ dài BM. (c) Khi* $\widehat{ACB} = 30^\circ$*. 2 đoạn thẳng* AO, BM *cắt nhau ở điểm* G*. Tính độ dài CG. (d) Giả sử điểm* A *thay đổi sao cho* $\widehat{BAC} = 90^\circ$*,* $BC = 2a$*.* ΔABC *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích* ΔAHO *lớn nhất? (e) Giả sử* CG *cắt* AB *tại điểm* N*. Tứ giác* $AMON$ *là hình gì?* ΔABC *phải thỏa mãn điều kiện gì để diện tích tứ giác* $AMON$ *lớn nhất?*

158 ([Kiê21], VD3 p. 10). *Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Từ H dựng HM, HN lần lượt vuông góc với AC, AB. Chứng minh: (a) $CM \cdot CA \cdot BN \cdot AB = AH^4$. (b) $CM \cdot BN \cdot BC = AH^3$. (c) $AM \cdot AN = \dfrac{AH^3}{BC}$. (d) $\dfrac{AB^3}{AC^3} = \dfrac{BN}{CM}$. (e) $AN \cdot BN + AM \cdot CM = AH^2$. (f) $\sqrt[3]{BC^2} = \sqrt[3]{BN^2} + \sqrt[3]{CM^2}$.*

159 ([Kiê21], VD4, p. 12). *Cho ΔABC nhọn có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H, gọi O là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH, K là giao điểm của EF, OI biết $BC = 2a$. Chứng minh: (a) $\Delta IEO, \Delta IFO$ là 2 tam giác vuông. (b) OI là trung trực của EF. (c) $AH^2 = 4IK \cdot IO$. (d) $\dfrac{EF}{BC} = \cos A$. (e) $\dfrac{EF}{BC} \cdot \dfrac{FD}{CA} \cdot \dfrac{DE}{AB} = \cos A \cos B \cos C$. (f) $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \cos^2 A$. (g) $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$. (h) $\tan B \tan C = \dfrac{AD}{DH}$. (i) Giả sử $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Tính S_{ABC} theo a. (j) Gọi M là điểm trên AH sao cho $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Chứng minh $S_{BMC} = \sqrt{S_{ABC} S_{BHC}}$.*

160 ([Kiê21], VD5, p. 14). *Cho ΔABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh: (a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. (b) Công thức Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. (c) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$. (d) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B$. (e) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.*

161 ([Kiê21], VD6, p. 16). *Cho ΔABC với 3 đỉnh A, B, C & 3 cạnh đối diện với 3 đỉnh tương ứng là a, b, c. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A. Chứng minh: (a) $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{b+c}$. (b) $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{b+c}$. (c) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$. (d) $AD = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.*

162 ([Kiê21], VD7, p. 19). *Cho ΔABC cân, $\widehat{A} = 20^\circ$, $AB = AC$, $AC = b$, $BC = a$. Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.*

163 ([Kiê21], VD8, p. 20). *Tính $\sin 22^\circ 30', \cos 22^\circ 30', \tan 22^\circ 30', \cot 22^\circ 30'$.*

164 ([Kiê21], VD9, p. 20). *Cho ΔABC. Chứng minh $\widehat{A} = 2\widehat{B} \Leftrightarrow a^2 = b(b+c)$.*

165 ([Kiê21], VD10, p. 21). *Chứng minh $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.*

166 ([Kiê21], VD11, p. 22). *Chứng minh $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.*

167 ([Kiê21], VD12, p. 22). *Chứng minh $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.*

168 ([Kiê21], VD13, p. 23). *Chứng minh hệ thức: (a) $\tan^2 36^\circ + \tan^2 72^\circ = 10$. (b) $\tan^4 36^\circ + \tan^4 72^\circ = 90$.*

169 ([Kiê21], VD14, p. 23). *Cho ΔABC, có $\widehat{A} = 60^\circ$ & đường phân giác AD. Chứng minh $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{AD}$.*

170 ([Kiê21], VD15, p. 24). *Chứng minh trong ΔABC, $\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $\widehat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$.*

171 ([Kiê21], VD16, p. 24). *Tính độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác, biểu thị qua 3 cạnh của tam giác ấy.*

172 ([Kiê21], VD17, p. 25). *Cho ΔABC. Chứng minh 2 đường trung tuyến kẻ từ B, C vuông góc với nhau khi & chỉ khi $b^2 + c^2 = 5a^2$.*

173 ([Kiê21], VD18, p. 25). *Cho ΔABC. Trung tuyến AD, đường cao BH, & phân giác CE đồng quy. Chứng minh đẳng thức $(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2ab^2$.*

174 ([Kiê21], VD19, p. 26). *Cho ΔABC thỏa $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Chứng minh $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.*

175 ([Kiê21], VD20, p. 26). *Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Độ dài 3 cạnh của tam giác là 3 số nguyên thỏa mãn $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AH} = 1$. Xác định 3 cạnh của tam giác.*

176 ([Kiê21], VD21, p. 26). *Cho ΔABC thỏa mãn $2\widehat{B} + 3\widehat{C} = 180^\circ$. Chứng minh $BC^2 = BC \cdot AC + AB^2$.*

Tài liệu

[Bìn+23] Vũ Hữu Bình, Nguyễn Ngọc Đạm, Nguyễn Bá Đang, Lê Quốc Hán, and Hồ Quang Vinh. *Tài Liệu Chuyên Toán Trung Học Cơ Sở Toán 9. Tập 2: Hình Học.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 240.

[Bìn23] Vũ Hữu Bình. *Nâng Cao & Phát Triển Toán 9 Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 275.

[Kiê21] Nguyễn Trung Kiên. *Tổng Hợp Chuyên Đề Trọng Tâm Thi Vào 10 Chuyên & Học Sinh Giỏi Hình Học 9.* Tái bản lần 2. Nhà Xuất Bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2021, p. 311.

[Thá+24] Đỗ Đức Thái, Lê Tuấn Anh, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Sơn Hà, Nguyễn Thị Phương Loan, Phạm Sỹ Nam, and Phạm Đức Quang. *Toán 9 Cánh Diều Tập 1.* Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2024, p. 127.

[Tuy23] Bùi Văn Tuyên. *Bài Tập Nâng Cao & Một Số Chuyên Đề Toán 9.* Tái bản lần 18. Nhà Xuất Bản Giáo Dục Việt Nam, 2023, p. 340.