

# 1 B. Statistik

- Qualitative Merkmale:
  - Variieren nach Beschaffenheit
  - Bspw. Geschlecht
- Quantitative Merkmale:
  - Variieren nach Wert/Zahlen
  - Bspw. Alter, Einkommen
- Diskrete Merkmale:
  - abgestufte Werte
  - Bspw. Einkommensklasse
- Stetige Merkmale:
  - können im Intervall jeden reellen Wert annehmen
  - Bspw. Körpergröße

## Skalenniveaus

- Nominal
  - nur Gleichheit oder Andersartigkeit feststellbar (keine Bewertung)
  - stets qualitativ (Religion, Beruf etc.)
- Ordinal
  - natürliche oder festzulegende Rangfolge
  - IQ, Schulnoten
- Kardinal
  - numerischer Art
  - Ausprägung und Unterschied sind messbar
  - verhältnisskaliert (Absoluter Nullpunkt vorhanden; Gewicht, Preis (Doppelt so viel.))
  - intervallskaliert (Kein Nullpunkt, nur Differenzen; Temperatur (10 Grad wärmer als gestern))

## Werte

- Arithmetisches Mittel  $\bar{x}$ 
  - $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
  - Summe aller Abweichungen vom Mittel = 0
  - Verschiebung um konstanten Wert  $a + \bar{x}$
  - Multiplikation mit konstantem Wert  $a \cdot \bar{x}$
- Median  $\tilde{x}$

- Mittleres Element der geordneten Liste
- Bei gerader Anzahl, Durchschnitt der mittleren Elemente
- Quartile (FEHLT)
  - Unteres Quartil  $\tilde{x}_{0,25}$
  - Oberes Quartil  $\tilde{x}_{0,75}$
- Varianz  $\sigma^2$ 
  - Populations Varianz  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$
  - Sample Varianz  $S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
  - Altn. Formel  $\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$
  - Eigenschaften:
    - \* Immer  $\geq 0$
    - \* Addition mit a, Varianz unverändert
    - \* Multiplikation mit b,  $Varianz * b^2$
- Standardabweichung  $\sigma$ 
  - $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
- StichprobenSDA  $S = \sqrt{S_{n-1}^2}$
- Quartilsabstand (FEHLT)

## Zweidimensionale Häufigkeitstabellen

- Statistische Variablen X und Y mit versch. Ausprägungen
- Spaltensummen sowie Zeilensummen = n
- Relative Häufigkeit  $h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$
- Randverteilung = Betrachtung einer einzigen Variable
- $Z = X + Y$ ;  $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ ;

## Kovarianz

- Arithmetisches Mittel des Produkts der Abweichung der einzelnen Beobachtungen von ihrem Mittel
- $C_{XY} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})$
- $C_{XY} = \overline{xy} - \bar{x} * \bar{y}$
- $C_{XY} > 0$  "große X-Werte zu großen Y-Werten"
- $C_{XY} < 0$  "große Werte zu kleine Werten"
- Sind zwei Variablen statistisch unabhängig ist die Kovarianz = 0

## Korrelation

- Normal (Pearson)  $r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x * \sigma_y}$ 
  - normiertes Maß für Strenge des linearen statistischen Zusammenhangs
  - $r_{XY}$  hat das gleiche Vorzeichen wie  $C_{XY}$
  - Bleibt unverändert bei linearer Transformation
  - $r_{XY} = r_{YX}$
- Rangkorrelation (Spearman)  $r_{XY}^{Sp} = r_{rg(X),rg(Y)}$ 
  - für ordinale Variablen
  - misst monotonen Anteil des stat. Zusammenhangs
  - Ränge müssen vorher berechnet werden
- Kovarianz und Korrelation bedeuten nicht zwangsweise eine kausale Beziehung!

## Kontingenzkoeffizient

- beschreibt die Stärke des Zusammenhangs zweier Merkmale, nicht deren Richtung
- Chi-Quadrat  $QK = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$ 
  - $E_{ij} = \frac{1}{n} * n_i * n_j = \frac{1}{n} n(x_i) * n(y_j)$
  - Siehe Erweiterte Kontingenztafel
  - X und Y unabhängig:  $QK = 0$
  - Sonst  $QK > 0$
  - Für 2x2 Matrix:  $QK = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$
  - a bis d sind Inhalte der Tabelle, Summen sind Randhäufigkeiten
- Kontingenzkoeffizient  $K := \sqrt{\frac{QK}{QK+n}}$ 
  - normiertes Maß
  - X und Y unabhängig:  $K = 0$
  - $0 \leq K \leq K_{max} = \sqrt{\frac{m-1}{m}} < 1$
  - m = Minimum von Zeilenzahl und Spaltenzahl
- Korrigierter K.-koeffizient  $K^* := \frac{K}{K_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{QK * m}{(QK+n)(m-1)}}}{K_{max}}$ 
  - $0 \leq K^* \leq 1$
  - Vergleichbar mit anderen K-Tabellen

# 2 Regression

- Lineare Regression  $y(x) = a + bx$ 
  - $b = \frac{C_{XY}}{s_x^2}$  und  $a = \bar{y} - b\bar{x}$
  - Interpret: b\*x erhöht und Achsenabschnitt (meist nicht anwendbar)
  - Regressionswerte  $= \hat{y}_i = y(x_i)$
  - Residuen (Fehler)  $e_i = y_i - \hat{y}_i$
- Andere Regressionen:
  - $\hat{y} = a + bx + cx^2$  Quadr. Regr.
  - $\hat{y} = a + x^b$  Potenzfunkt.
  - $\hat{y} = ab^x$  Expo-funkt.
- Meth. kleinste Quadrate
- Varianzzerlegung  $SSQ_{Total} = SSQ_{Reg} + SSQ_{Resi}$ 
  - $SSQ_{Reg} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  (Abweichung von Vorhersage und Mittelwert)
  - $SSQ_{Total} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  (Gesamtabweichung)
  - $SSQ_{Resi} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  (Abweichung von Vorhersage und y)
- Bestimmtheitsmaß  $R^2 = \frac{SSQ_{Reg}}{SSQ_{Total}} = \frac{S_y^2}{S_y^2} = r^2$ 
  - $r^2$  gilt nicht für Quadr. Reg. !!!
  - Schlecht  $0 \leq R^2 \leq 1$  Gut
  - $R^2 \geq 0.8$  akzeptabel
- Multiple Regr.
  - Y wird durch mehrere Variablen erklärt
  - $\hat{y} = a + b_1x_3 + b_2x_3 + b_3x_3$
- Adjustiertes Bestimmtheitsmaß  $R_a^2 = R^2 - \frac{k}{n-k-1} * (1 - R^2)$ 
  - Hinzunahme von Params, erhöht den  $R^2$  automatisch, auch wenn es nicht besser wird
  - $n = \text{Anzahl der Messwerte}$
  - $k = \text{Anzahl der Reg. Params}$
  - $R_a^2$  kann auch kleiner/negativ werden
  - $>$  Variable nicht aufnehmen
- Anmerkungen:
  - Residualplot: Gutes Modell, wenn kein Muster erkennbar!
  - Optimum finden: 1. Ableitung = 0 setzen

$n_{ij}$	$(n_{ij} - E_{ij})^2$
$n_{ij} - E_{ij}$	$E_{ij}$

- "Faktor Größe" hat nichts mit Einfluss zutun, nur bei standardisierten Daten

### 3 Wahrsch. Rech.

- Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X(\omega) = x$ 
  - Funktion, die jedem Möglichen Ergebnis eine reelle Zahl zuordnet
  - Wahrscheinlichkeits-/ Dichtefunktion  $f : P(X = x)$
  - Verteilungsfunktion  $F : P(X \leq t)$
  - $F$  ist Stammfunktion für  $f$  aber muss mit  $+C$  angepasst werden
- Diskrete
  - $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = P(X = x)$
  - $P(X = x)$  Wahrscheinlichkeit mit der  $X$  die Realisation  $x$  annimmt
  - $F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x_i \leq t} P(X = x_i)$
- Stetige
  - Zufallsvariable ist stetig, wenn Wahrscheinlichkeit durch Dichtefunktion abbilden lässt
  - Dichtefunktion, wenn  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  und  $f(x) \geq 0$
  - $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$
- Erwartungswert
  - Diskret:  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i * f(x_i)$
  - Stetig:  $E(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x * f(x)dx$
- Varianz ( $Var(X) = \sigma^2$ ) & SDA ( $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ )
  - Es gilt:  $\sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
  - Diskret:  $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 * f(x_i)$
  - Stetig:  $Var(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - E(X))^2 * f(x)dx$

- Rechenregeln
  - $E(a + b * X) = a + b * E(X)$
  - $Var(a + b * X) = b^2 * Var(X)$
  - $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Stichprobe:
  - Stichprobenmittel von unabhängigen Variablen  $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$
  - $E(\bar{X} = \mu)$  und  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Normalverteilung
  - SD-normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$
  - z-Transformation  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- Zentr.Grenz.Satz: Für hinreichend großes  $n$  jeder Verteilung gilt  $\bar{X}_n \tilde{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  "normalverteilt"

### 4 Schl. Statistik

#### Anmerkungen

- $\alpha$  meist 5% oder 1%

#### Mittelwerttest

- GG ist norm. verteilt oder  $n > 30$
- Stichprobenmittel  $\bar{x}$  und ggf. Stichprobenvarianz  $s^2$  bekannt
- $\sigma$  der GG bekannt
  - $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
  - $\rightarrow$  Tabelle Norm. Verteilung
- $\sigma$  der GG unbekannt
  - $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n-1}}}$
  - $\rightarrow$  t Tabelle!
- Zweiseitig:  $|z| \leq z[1 - \alpha/2]$   $H_0$  behalten;  $|z| > z[1 - \alpha/2]$   $H_0$  verwerfen
- Ober/Rechts:  $z \leq z[1 - \alpha]$   $H_0$  behalten;  $z > z[1 - \alpha]$   $H_0$  verwerfen

- Unten/Links:  $z \geq z[1 - \alpha]$   $H_0$  behalten;  $z < z[1 - \alpha]$   $H_0$  verwerfen
- Gleiches für t-1

#### Varianztest

- GG ist normalverteilt,  $\alpha$  und  $\sigma_0$  bekannt
- $\mu$  von GG. bekannt
  - $t_n = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$
  - $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  Krit:  $t_n < \chi_n^2[\alpha/2]$  und  $t_n > \chi_n^2[1 - \alpha/2]$
  - $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$  Krit:  $t_n < \chi_n^2[\alpha]$
  - $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  Krit:  $t_n > \chi_n^2[1 - \alpha]$
- $\mu$  von GG. unbekannt
  - $t_n = n * \frac{s_n^2}{\sigma_0^2}$
  - $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  Krit:  $t_n < \chi_{n-1}^2[\alpha/2]$  und  $t_n > \chi_{n-1}^2[1 - \alpha/2]$
  - $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$  Krit:  $t_n < \chi_{n-1}^2[\alpha]$
  - $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  gegen  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  Krit:  $t_n > \chi_{n-1}^2[1 - \alpha]$

#### Differenztest

- GG ist normalverteilt
- $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$  gleich aber unbekannt
- $\delta_0$  vorgegeben oder  $\delta = \mu_X - \mu_Y$
- $t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} * s}$
- $s = \sqrt{\frac{n * s_x^2 + m * s_y^2}{n + m - 2}}$
- $H_0 : \delta = \delta_0$  gegen  $H_1 : \delta \neq \delta_0$  Krit:  $|t_n| > t_{n+m-2}[1 - \alpha/2]$
- $H_0 : \delta \geq \delta_0$  gegen  $H_1 : \delta < \delta_0$  Krit:  $t_n < t_{n+m-2}[\alpha]$
- $H_0 : \delta \leq \delta_0$  gegen  $H_1 : \delta > \delta_0$  Krit:  $t_n > t_{n+m-2}[1 - \alpha]$

#### $\chi^2$ Test

- $E_{ij} \text{ immer} \geq 5$
- $H_0 = X, Y$  sind unabhängig;  $H_1 = X, Y$  sind abhängig
- Prüfgröße  $\chi^2$  (wie oben, mit erw. Kont.-Tabelle)
- Krit.Wert:  $c = \chi_{(k-1)(l-1)}^2[1 - \alpha]$
- $\chi^2 \leq c$   $H_0$  behalten
- $\chi^2 > c$   $H_0$  verwerfen

#### P-Test

### Excel Tests

- Koeffizienten für jede  $X_i$  – > Formel lässt sich daraus ableiten
- Parameter wird nur im Modell behalten wenn  $t > |\frac{\beta_j}{\hat{\sigma}_j}| > 2$
- Signifikanzniveau von ca. 5%
- Alternativ: p-Werte  $\leq \alpha$  werden behalten, p-Werte  $> \alpha$  werden verworfen
- F-Test des Bestimmtheitsmaßes:
  - Testet ob, nicht auch alle Parameter = 0 sein könnten (Sinnhaftigkeit der Regression)
  - Prüfgröße F aus Excel
  - FWert: aus F-Verteilung oder gegeben
  - $F \geq F_{\text{Wert}} H_0$  verwerfen, Regressionsansatz sinnvoll
  - $F < F_{\text{Wert}} H_0$  behalten, Regressionsansatz schlecht
  - Einfacher: Über F.Krit
  - $p\text{Wert} < F.\text{Krit}$   $H_0$  behalten, Regressionsansatz sinnvoll
  - $p\text{Wert} > F.\text{Krit}$   $H_0$  verwerfen, Regressionsansatz schlecht