

Arith. Mittel	$\bar{x}$	Kovarianz	$C_{XY}$
Median	$\tilde{x}$	Korrelation	$r_{XY}$
Varianz	$\sigma^2$	Chi Quadrat	$\chi^2$
SDA	$\sigma$	KontingenzK	$K$
Sample Var.	$S^2$	Sample SDA	$S$
Bestimmtheit	$R^2$	Korrig. K	$K^*$
Adj. Best.	$R_a^2$	Erwartungswert	$E(X)$

## 1 B. Statistik

- Qualitative Merkmale:
  - Variieren nach Beschaffenheit
  - Bspw. Geschlecht
- Quantitative Merkmale:
  - Variieren nach Wert/Zahlen
  - Bspw. Alter, Einkommen
- Diskrete Merkmale:
  - abgestufte Werte
  - Bspw. Einkommensklasse
- Stetige Merkmale:
  - können im Intervall jeden reellen Wert annehmen
  - Bspw. Körpergröße

### Skalenniveaus

- Nominal
  - nur Gleichheit oder Andersartigkeit feststellbar (keine Bewertung)
  - stets qualitativ (Religion, Beruf etc.)
- Ordinal
  - natürliche oder festzulegende Rangfolge
  - IQ, Schulnoten
- Kardinal
  - numerischer Art
  - Ausprägung und Unterschied sind messbar
  - verhältnisskaliert (Absoluter Nullpunkt vorhanden; Gewicht, Preis (Doppelt so viel.))
  - intervallskaliert (Kein Nullpunkt, nur Differenzen; Temperatur (10 Grad wärmer als gestern))

### Werte

- Arithmetisches Mittel  $\bar{x}$

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$
- Summe aller Abweichungen vom Mittel = 0
- Verschiebung um konstanten Wert  $a + \bar{x}$
- Multiplikation mit konstantem Wert  $a \cdot \bar{x}$
- Median  $\tilde{x}$ 
  - Mittleres Element der geordneten Liste
  - Bei gerader Anzahl, Durchschnitt der mittleren Elemente

- Quartile
  - Unteres Quartil  $\tilde{x}_{0,25}$  (sortieren & ablesen)
  - Oberes Quartil  $\tilde{x}_{0,75}$
- Varianz  $\sigma^2$

$$\text{Populations Varianz } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\text{Sample Varianz } S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- Altn. Formel  $\sigma^2 = \bar{x^2} - \bar{x}^2$
- Eigenschaften:
  - Immer  $\geq 0$
  - Addition mit a, Varianz unverändert
  - Multiplikation mit b,  $\text{Varianz} * b^2$

- Standardabweichung  $\sigma$ 
  - $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
  - StichprobenSDA  $S = \sqrt{S_{n-1}^2}$
- Quartilsabstand  $\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}$

### Zweidimensionale Häufigkeitstabellen

- Statistische Variablen X und Y mit versch. Ausprägungen
- Spaltensummen sowie Zeilensummen = n
- Relative Häufigkeit  $h_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$
- Randverteilung = Betrachtung einer einzigen Variable
- $Z = X + Y; \bar{z} = \bar{x} + \bar{y};$

### Kovarianz

- Arithmetisches Mittel des Produkts der Abweichung der einzelnen Beobachtungen von ihrem Mittel
- $C_{XY} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \bar{xy} - \bar{x} * \bar{y}$
- $C_{XY} > 0$  "große X-Werte zu großen Y-Werten"

- $C_{XY} < 0$  "große Werte zu kleine Werten"
- Sind zwei Variablen statistisch unabhängig ist die Kovarianz = 0

### Korrelation

- Normal (Pearson)  $r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x * \sigma_y}$ 
  - normiertes Maß für Strenge des linearen statistischen Zusammenhangs
  - $r_{XY}$  hat das gleiche Vorzeichen wie  $C_{XY}$
  - Bleibt unverändert bei linearer Transformation
  - $-1 \leq r_{XY} \leq +1$
- Rangkorrelation (Spearman)  $r_{XY}^{Sp} = \frac{r_{rg(X),rg(Y)}}{r_{rg(X),rg(Y)}}$ 
  - für ordinale Variablen
  - misst monotonen Anteil des stat. Zusammenhangs
  - Ränge müssen vorher berechnet werden
  - $-1 \leq r_{XY}^{Sp} \leq +1$
- Kovarianz und Korrelation bedeuten nicht zwangsweise eine kausale Beziehung!

### Kontingenzkoeffizient

- beschreibt die Stärke des Zusammenhangs zweier Merkmale, nicht deren Richtung
- Chi-Quadrat  $QK = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{(n_{ji} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$ 
  - $E_{ij} = \frac{1}{n} * n_i * n_j = \frac{1}{n} n(x_i) * n(y_j)$
  - Siehe Erweiterte Kontingenztafel
  - X und Y unabhängig:  $QK = 0$
  - Sonst  $QK > 0$
  - Für 2x2 Matrix:  $QK = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$
  - a bis d sind Inhalte der Tabelle, Summen sind Randhäufigkeiten
- Kontingenzkoeffizient  $K := \sqrt{\frac{QK}{QK+n}}$ 
  - normiertes Maß
  - X und Y unabhängig:  $K = 0$
  - $0 \leq K \leq K_{max} = \sqrt{\frac{m-1}{m}} < 1$
  - m = Minimum von Zeilenzahl und Spaltenzahl
- Korrigierter K.-koeffizient  $K^* := \frac{K}{K_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{QK * m}{(QK+n)(m-1)}}}{K_{max}}$ 
  - $0 \leq K^* \leq 1$

- Vergleichbar mit anderen K-Tabellen

## 2 Regression

- Lineare Regression  $y(x) = a + bx$ 
  - $b = \frac{C_{XY}}{S_X^2}$  und  $a = \bar{y} - b\bar{x}$
  - Interpret: b\*x erhöht pro Einheit und a: Achsenabschnitt
  - Extrapolation (Punkte außerhalb der orig. Daten) nicht aussagekräftig
  - Regressionswerte  $\hat{y}_i = y(x_i)$
  - Residuen (Fehler)  $e_i = y_i - \hat{y}_i$
- Andere Regressionen:
  - $\hat{y} = a + bx + cx^2$  Quadr. Regr.
  - $\hat{y} = a + x^b$  Potenzfunkt.
  - $\hat{y} = ab^x$  Expo-funkt.
- Meth. kleinste Quadrate
- Varianzzerlegung  $SSQ_{Total} = SSQ_{Reg} + SSQ_{Resi}$ 
  - $SSQ_{Reg} = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$  (Abweichung von Vorhersage und Mittelwert)
  - $SSQ_{Total} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$  (Gesamtabweichung)
  - $SSQ_{Resi} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$  (Abweichung von Vorhersage und y)
- Bestimmtheitsmaß  $R^2 = \frac{SSQ_{Reg}}{SSQ_{Total}} = \frac{S_Y^2}{S_Y^2} = r^2$ 
  - $r^2$  gilt nicht für Quadr. Reg. !!!
  - Schlecht  $0 \leq R^2 \leq 1$  Gut
  - $R^2 \geq 0.8$  akzeptabel
- Multiple Regr.
  - Y wird durch mehrere Variablen erklärt
  - $\hat{y} = a + b_1 x_3 + b_2 x_3 + b_3 x_3$
- Adjustiertes Bestimmtheitsmaß  $R_a^2 = R^2 - \frac{k}{n-k-1} * (1 - R^2)$ 
  - Hinzunahme von Params, erhöht den  $R^2$  automatisch, auch wenn es nicht besser wird
  - $n = \text{Anzahl der Messwerte}$
  - $k = \text{Anzahl der Reg. Params}$
  - $R_a^2$  kann auch kleiner/negativ werden -> Variable nicht aufnehmen
- Anmerkungen:
  - Residualplot: Gutes Modell, wenn kein Muster erkennbar!

- Optimum finden: 1.Ableitung = 0 setzen
- "Faktor Größe" hat nichts mit Einfluss zu-tun, nur bei standardisierten Daten

### 3 Wahrsch. Rech.

- Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow R$  mit  $X(\omega) = x$ 
  - Funktion, die jedem Möglichen Erge-nis eine reelle Zahl zuordnet
  - Wahrscheinlichkeits-/ Dichtefunktion  $f : P(X = x)$
  - Verteilungsfunktion  $F : P(X \leq t)$
  - $F$  ist Stammfunktion für  $f$  aber muss mit +C angepasst werden
- Diskrete
  - $f : R \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = P(X = x)$
  - $P(X = x)$  Wahrscheinlichkeit mit der  $X$  die Realisation  $x$  annimmt
  - $F(t) = P(X \leq t) = \sum_{x_i \leq t} P(X = x_i)$
- Stetige
  - Zufallsvariable ist stetig, wenn Wahrscheinlichkeit durch Dichtefunk-tion abbilden lässt
  - Dichtefunktion, wenn  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  und  $f(x) \geq 0$
  - $F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$
- Erwartungswert
  - Diskret:  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i * f(x_i)$
  - Stetig:  $E(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x * f(x)dx$
- Varianz ( $Var(X) = \sigma^2$ ) & SDA ( $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ )
  - Es gilt:  $\sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$
  - Diskret:  $Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 * f(x_i)$
  - Stetig:  $Var(X) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} (x - E(X))^2 * f(x)dx$
- Rechenregeln
  - $E(a + b * X) = a + b * E(X)$
  - $Var(a + b * X) = b^2 * Var(X)$

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Stichprobe:
  - Stichprobenmittel von unabhängigen Variablen  $\bar{X} := \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$
  - $E(\bar{X}) = \mu$  und  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Normalverteilung
  - SD-normalverteilung mit  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$
  - z-Transformation  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
- Zentr.Grenz.Satz: Für hinreichend großes  $n$  jeder Vertilung gilt  $\bar{X}_n \tilde{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$  "nor-malverteilt"

### 4 Schl. Statistik

#### Anmerkungen

- $\alpha$  meist 5% oder 1%

#### Mittelwerttest

- GG ist norm. verteilt oder  $n > 30$
- Stichprobenmittel  $\bar{x}$  und ggf. Stichproben-varianz  $s^2$  bekannt
- $\sigma$  der GG bekannt
  - $z = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}$
  - $\rightarrow$  Tabelle Norm. Verteilung
- $\sigma$  der GG unbekannt
  - $t = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_n}$
  - $\rightarrow$  t Tabelle!
- Gleiches gilt für t-1

Seite:	$H_0$ behalten	$H_0$ verwerfen
Beide	$ z  \leq z[1 - \alpha/2]$	$ z  > z[1 - \alpha/2]$
Rechts	$z \leq z[1 - \alpha]$	$z > z[1 - \alpha]$
Links	$z \geq z[\alpha]$	$z < z[\alpha]$

#### Varianztest

- GG ist normalverteilt,  $\alpha$  und  $\sigma_0$  bekannt
- $\mu$  von GG. bekannt
- -  $t_n = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

- Siehe (II)
- $\mu$  von GG. unbekannt
  - $t_n = n * \frac{s_n^2}{\sigma_0^2}$
  - Siehe (III)

II

$H_0$	$H_1$	Krit.
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$t_n < \chi_n^2[\alpha/2]$ $t_n > \chi_n^2[1 - \alpha/2]$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$t_n < \chi_n^2[\alpha]$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$t_n > \chi_n^2[1 - \alpha]$

III

$H_0$	$H_1$	Krit.
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$t_n < \chi_{n-1}^2[\alpha/2]$ $t_n > \chi_{n-1}^2[1 - \alpha/2]$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$t_n < \chi_{n-1}^2[\alpha]$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$t_n > \chi_{n-1}^2[1 - \alpha]$

#### Differenztest

- GG ist normalverteilt
- $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$  gleich aber unbekannt
- $\delta_0$  vorgegeben oder  $\delta = \mu_X - \mu_Y$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} * \sqrt{\frac{n*s_n^2 + m*s_m^2}{n+m-2}}}}$$

$H_0$	$H_1$	Krit.
$\delta = \delta_0$	$\delta \neq \delta_0$	$ t_n  > t_{n+m-2}[1 - \alpha/2]$
$\delta \geq \delta_0$	$\delta < \delta_0$	$t_n < t_{n+m-2}[\alpha]$
$\delta \leq \delta_0$	$\delta > \delta_0$	$t_n > t_{n+m-2}[1 - \alpha]$

#### $\chi^2$ Test

- $E_{ij}$  immer  $\geq 5$
- $H_0 = X, Y$  sind unabhängig;  $H_1 = X, Y$  sind abhängig
- Prüfgröße  $\chi^2$  (wie oben, mit erw. Kont.-Tabelle)

- Krit.Wert:  $c = \chi_{(k-1)(l-1)}^2[1 - \alpha]$
- $\chi^2 \leq c$   $H_0$  behalten
- $\chi^2 > c$   $H_0$  verwerfen

#### P-Test

### Excel Tests

- Koeffizienten für jede  $X_i$  -  $\rightarrow$  Formel lässt sich daraus ableiten
- Parameter wird nur im Modell behalten wenn  $t > |\frac{\beta_j}{\sigma_j}| > 2$
- Signifikanzniveau von ca. 5%
- Alternativ: p-Werte  $< \alpha$  werden behalten, p-Werte  $> \alpha$  werden verworfen
- F-Test des Bestimmtheitsmaßes:
  - Testet ob, nicht auch alle Parameter = 0 sein könnten (Sinnhaftigkeit der Regression)
  - Prüfgröße  $F$  aus Excel
  - FWert: aus F-Verteilung oder gegeben
  - $F \geq FWert$   $H_0$  verwerfen, Regression-sansatz sinnvoll
  - $F < FWert$   $H_0$  behalten, Regression-sansatz schlecht
  - Einfacher: Über F.Krit
  - $pWert < F.Krit$   $H_0$  behalten, Regres-sionsansatz sinnvoll
  - $pWert > F.Krit$   $H_0$  verwerfen, Regres-sionsansatz schlecht

### Other

	$\frac{n_{ij}}{n_{ij} - E_{ij}}$	$\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$
Test\Realität	$H_0$ richtig	$H_1$ richtig
$H_0$ behalten	ok (Spezifität)	$\beta$ Fehler (FP)
$H_0$ verwerfen	$\alpha$ Fehler (FN)	ok (Sensitivität)