

---

## **Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras**

Versión en desarrollo del 16 de agosto de 2021

---

Juan Bruno Bazzano · Jorge Pérez Zerpa

En revisión.

Juan Bruno Bazzano  
Profesor Adjunto  
Instituto de Estructuras y Transporte  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay

Jorge Pérez Zerpa  
Profesor Adjunto  
Instituto de Estructuras y Transporte  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay

Versión de documento en desarrollo y revisión, 16 de agosto de 2021.  
Códigos disponibles en [github.com/jorgepz/libroANLE](https://github.com/jorgepz/libroANLE).

Primer edición disponible en este enlace al portal [colibri.udelar.edu.uy](http://colibri.udelar.edu.uy).

Título: Introducción al Análisis No Lineal de Estructuras

Sub-título: Texto del curso Análisis No Lineal de Estructuras

Primera Edición: Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

Diciembre de 2017, Montevideo, Uruguay.

ISBN: 978-9974-0-1525-8.

Este documento es publicado bajo una licencia *Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License*. Ver detalles de la licencia en [creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0).

This work is published under a CC BY-SA license (*Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License*), which means that you can copy, redistribute, remix, transform, and build upon the content for any purpose, even commercially, as long as you give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original. License details: [creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0).

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Documento producido usando software libre: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, TeXstudio, Geany, Inkscape, GNU-Octave y Linux.

## Lista de contenidos

---

<b>1</b>	<b>Motivación y Métodos Numéricos</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación y enfoque . . . . .	1
1.2	Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales . . . . .	4
1.2.1	Métodos Incrementales . . . . .	5
1.2.2	Métodos Iterativos . . . . .	10
1.2.3	Métodos de Longitud de Arco (Arc-Length) . . . . .	18
<b>2</b>	<b>No Linealidad Geométrica</b>	<b>25</b>
2.1	Principio de Mínima Energía Potencial Total . . . . .	25
2.1.1	Definición de Energía Potencial Total . . . . .	25
2.1.2	Equilibrio y Estabilidad . . . . .	27
2.1.3	Clasificación de Puntos Críticos . . . . .	29
2.1.4	Ejemplo de Análisis de Equilibrio y Estabilidad . . . . .	33
2.2	Principio de los Trabajos Virtuales . . . . .	34
2.2.1	PTV para Partículas y Sistemas de Partículas . . . . .	35
2.2.2	PTV para Cuerpos Rígidos . . . . .	36
2.2.3	PTV para Estructuras con Componentes Deformables. . . . .	38
2.2.4	PTV para Elementos de Tipo Biela. . . . .	41
2.3	Medidas No Lineales de Deformación . . . . .	42
2.3.1	Estructura de Referencia . . . . .	42
2.3.2	Deformación Unitaria Ingenieril Rotada . . . . .	43
2.3.3	Deformación Unitaria de Green . . . . .	44
2.3.4	Deformación Unitaria de Logarítmica Rotada . . . . .	45
2.3.5	Comparación de las Medidas de Deformación . . . . .	46
2.4	Método de Elementos Finitos Incremental. . . . .	48
2.4.1	Método de los Elementos Finitos en análisis lineal de reticulados . . . . .	49
2.4.2	Método de Newton-Raphson aplicado al PTV . . . . .	51
2.4.3	Método de Newton-Raphson Incremental . . . . .	63
2.4.4	Otras técnicas avanzadas . . . . .	65
2.4.5	Ejemplo: Arco bi-articulado. . . . .	66
2.5	Estabilidad estructural . . . . .	69
2.5.1	Clasificación de equilibrio . . . . .	70
2.5.2	Análisis lineal de pandeo (LBA) . . . . .	71
2.5.3	Análisis no lineal de pandeo . . . . .	72

2.5.4	Ejemplo: Análisis de estabilidad de cercha de Von Mises . . . . .	73
2.5.5	Ejemplo: modo de pandeo asimétrico de arco bi-articulado . . . . .	74
<b>3</b>	<b>No Linealidad Material</b> _____	<b>79</b>
3.1	Elasticidad no lineal . . . . .	79
3.1.1	Hiperelasticidad en sólidos . . . . .	79
3.1.2	Hiperelasticidad en barras . . . . .	84
3.1.3	Análisis de reticulados bi-modulares . . . . .	85
3.2	Introducción a la Teoría de Plasticidad . . . . .	86
3.2.1	Teoría unidimensional de plasticidad . . . . .	87
3.2.2	Método numérico de análisis elastoplástico . . . . .	91
3.2.3	Implementación y ejemplos . . . . .	95
3.2.4	Aplicación a reticulados . . . . .	97
3.3	Solicitaciones últimas en sección de hormigón armado . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Introducción al Análisis Dinámico</b> _____	<b>103</b>
4.1	Deducción de las Ecuaciones de Movimiento . . . . .	103
4.2	Dinámica Lineal . . . . .	105
4.2.1	Método de Diferencia Centrada - Explícito . . . . .	106
4.2.2	Método de Newmark - Implícito . . . . .	116
4.3	Dinámica No Lineal . . . . .	120
4.3.1	Método de Diferencia Centrada - Explícito . . . . .	121
4.3.2	Método de Newmark - Implícito . . . . .	128

## Capítulo 1: Motivación y Métodos Numéricos

---

El análisis de una estructura consiste en establecer ciertas hipótesis mecánicas y físicas sobre el comportamiento de la misma, obtener y resolver el modelo matemático correspondiente, e interpretar los resultados. Si las hipótesis establecidas son tales que las ecuaciones del modelo matemático son no lineales, el análisis es considerado no lineal. La validez de los resultados de un análisis estructural depende de las aproximaciones de la realidad dadas por las hipótesis definidas y de la precisión de la resolución del modelo matemático correspondiente.

Dado este marco, se enumeran a modo de motivación una serie de estructuras o problemas estructurales reales que requieren el uso de modelos no lineales. Posteriormente, se introducen algunos métodos numéricos que permiten, mediante herramientas computacionales, llevar a cabo el análisis no lineal de una estructura.

### 1.1. Motivación y enfoque

#### Motivación

El análisis no lineal de estructuras forma parte esencial de los conocimientos de los ingenieros estructurales en disciplinas como: Civil (infraestructura), Mecánica, Naval, Aeroespacial, Automotriz, Biomecánica, etc.

En algunas aplicaciones en el área Civil, en particular en estructuras de edificación sencillas, los efectos resultantes del comportamiento no lineal de las estructuras están contemplados mediante procedimientos codificados en las normas de diseño estructural (ver por ejemplo ACI 318-14, AISC 360-16, Eurocódigos).

No obstante, para estructuras que se apartan de las hipótesis asumidas en los procedimientos codificados, las normas mencionadas describen y admiten análisis más refinados de los efectos resultantes de la respuesta no lineal de las estructuras. La necesidad de llevar adelante estos análisis se vuelve imprescindible para ciertos tipos de estructuras que trabajan en régimen no lineal bajo cargas de servicio. Algunos ejemplos de estas estructuras son:

- mástiles atirantados (Sparling, 1995),
- puentes suspendidos (Larsen *et al.*, 2000),

- puentes atirantados (Wu *et al.*, 2015; Madrazo-Aguirre *et al.*, 2015),
- análisis de placas o cáscaras delgadas (Hunt y Wadee, 1998),
- estructuras reticuladas y aporticadas esbeltas (Morozov *et al.*, 2011),
- cubiertas con membranas tensas (Bridgens y Birchall, 2012),
- cubiertas formadas por cables (Feng *et al.*, 2013).

Adicionalmente, las normas modernas de diseño estructural admiten la determinación de la capacidad de las estructuras o componentes estructurales mediante análisis numéricos apropiados. A modo de ejemplo, la norma EN 1993-1-6 aplicable a cáscaras de acero propone una secuencia progresiva de análisis de distinta complejidad de manera de llegar a determinar la capacidad de una cáscara de acero. Dicha secuencia de análisis es resumida a continuación:

- 1) Análisis Elástico Lineal (LA),
- 2) Análisis de Bifurcación Elástico Lineal (LBA),
- 3) Análisis No Lineal Geométrico Elástico (GNA),
- 4) Análisis No Lineal Material (MNA),
- 5) Análisis No Lineal Geométrico Elástico con Imperfecciones (GNIA),
- 6) Análisis No Lineal Material y Geométrico con Imperfecciones (GMNIA).

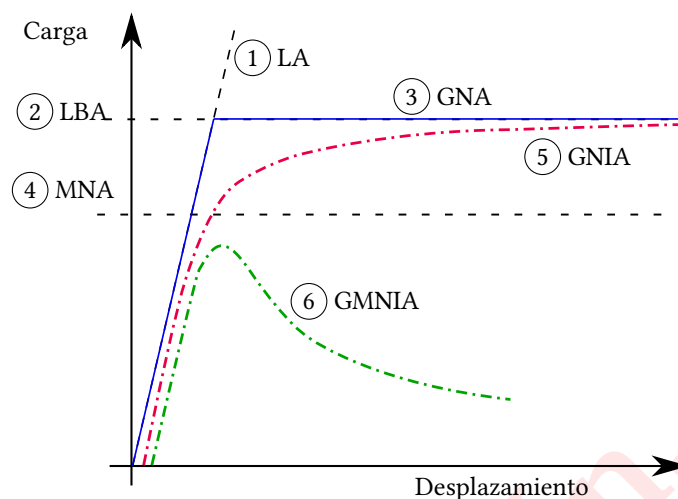
En la Figura 1.1 se presentan de forma esquemática las curvas de carga-deformación resultantes de los análisis enumerados anteriormente.

La norma recomienda realizar los distintos análisis utilizando el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual será presentado en la Sección 2.4. Al usar modelos numéricos para realizar la secuencia de análisis descritos se debe comenzar por el análisis más sencillo (LA) e incorporar gradualmente complejidades de análisis y examinando mediante un análisis crítico los resultados que se van obteniendo. Comenzar los análisis partiendo de un modelo complejo puede ser peligroso ya que no se tendrá una idea clara de qué resultados se deben esperar y sobre dónde podrían haber errores ocultos en el modelo o la solución numérica.

La capacidad de realizar análisis no lineales es crítica también al diseñar estructuras sometidas a acciones accidentales como por ejemplo impacto o explosión. Al realizar el diseño de estructuras bajo hipótesis de colapso progresivo, como puede ser la eliminación de una columna en un edificio, se debe considerar que la estructura experimenta grandes deformaciones y el equilibrio en esas situaciones debe necesariamente contemplar efectos no lineales tanto en la geometría como en los materiales.

## Sección 1.1. Motivación y enfoque

3



**Figura 1.1:** Curvas de carga-desplazamiento esquemáticas para distintos análisis.

### Enfoque

En este documento se aborda el análisis no lineal de estructuras discretas, es decir que no se presentan métodos para análisis no lineal de sólidos continuos arbitrarios. En particular, se consideran estructuras formadas mediante barras articuladas (reticulados) sometidas a distintas condiciones de apoyo y esfuerzos en las articulaciones o nodos.

La consideración de estructuras reticuladas permitirá presentar conceptos y formulaciones de complejidad relativamente baja sin dejar de lado los conceptos centrales referentes a modelos estructurales no lineales.

Estos elementos estructurales relativamente sencillos permitirán idealizar otros tipos de estructuras, como pórticos o arcos, mediante estructuras reticuladas equivalentes. Esto permitirá observar fenómenos como flexión en componentes estructurales y en estructuras completas sin necesidad de desarrollar formulaciones de elementos de tipo viga.

En el contexto de estructuras de barras, se introducen los conceptos de no linealidad geométrica, inestabilidad, no linealidad material y dinámica no lineal. Cabe aclarar que no se cubrirán todas las posibles fuentes de no linealidad en el comportamiento de estructuras, en particular no se estudiarán problemas de contacto entre componentes estructurales, ni cargas dependientes de la geometría de la estructura (*following loads*).

## 1.2. Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales

Determinar las configuraciones de equilibrio de una estructura con comportamiento no lineal requiere la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Por ende, los procedimientos de análisis no lineal de estructuras están directamente basados en métodos numéricos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. En varios casos, las aplicaciones prácticas de resolución de estructuras han sido las precursoras de los que posteriormente serían métodos numéricos aplicados a diversas ramas de la Ingeniería, como el Método de los Elementos Finitos (Zienkiewicz, 1972) (ver (Crisfield, 1996; Bathe, 2014) por más detalle).

Con el objetivo de evitar la asimilación en simultáneo de procedimientos numéricos y conceptos estructurales, se opta por comenzar presentando de forma aislada los métodos numéricos más importantes para, en capítulos posteriores, aplicarlos en el contexto de problemas estructurales.

El estudio y desarrollo de estos métodos numéricos forma parte del área llamada Continuación Numérica, perteneciente a la disciplina Matemática Aplicada (Doedel, 2014). En las siguientes secciones se presentan las tres clases principales de métodos numéricos que son de utilidad para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, descritos a continuación:

- Métodos Incrementales,
- Métodos Iterativos,
- Métodos de Longitud de Arco.

Actualmente existen diversos programas generales basados en implementaciones de estos métodos. Asimismo, estos programas pueden ser aplicados al estudio de problemas de estabilidad estructural, como se puede ver en trabajos como (Wadee y Gardner, 2012).

En este documento se utiliza la siguiente notación para representar vectores, matrices y escalares: letras minúsculas en negrita para vectores (ej.  $\mathbf{u}$ ), letras mayúsculas en negrita para matrices (ej.  $\mathbf{K}$ ) y letras mayúsculas o minúsculas para escalares (ej.  $x$  o  $E$ ).

Se considera una estructura discreta como aquella cuya geometría es determinada a partir de un número ( $n \in \mathbb{N}$ ) de valores, o grados de libertad, dados por  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . La estructura es sometida a un conjunto de cargas externas y se define un parámetro real  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  que corresponde al factor de carga. Es decir,  $\lambda$  es un parámetro que indica qué múltiplo de la carga externa definida está aplicada sobre la estructura. Se considera que  $\lambda = 0$  implica una estructura descargada y que eso corresponde a la estructura en la configuración sin deformaciones, o lo que es lo mismo  $\mathbf{x} = 0$ .

En situaciones donde  $\lambda > 0$ , las condiciones de equilibrio, compatibilidad y relación constitutiva del material proveen un sistema de ecuaciones no lineales que



## Sección 1.2. Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales

5

vinculan  $\mathbf{x}$  con  $\lambda$  mediante una función no lineal  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \lambda) = 0. \quad (1.1)$$

La ecuación anterior se puede reducir a un caso menos general asumiendo que las cargas son independientes de los desplazamientos. En ese caso, la no linealidad respecto de  $\mathbf{x}$  estará contenida completamente en una función vectorial de fuerzas internas  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mientras que las cargas externas están dadas por un vector fijo  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . La ecuación resultante es:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{v} = 0. \quad (1.2)$$

Las soluciones de los sistemas (1.1) o (1.2) determinan el conjunto de todas las parejas de valores  $(\lambda, \mathbf{x})$  que satisfacen dichos sistemas no lineales. De forma equivalente, las soluciones se pueden considerar como trayectorias que pasan por  $(0, 0)$  en el espacio de configuraciones de la estructura  $S \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  y que satisfacen la Ecuación (1.2) en todo punto de dichas trayectorias. Aquí y en los capítulos siguientes se llamará a dichas trayectorias como Curvas de Carga-Desplazamiento.

A continuación, se describen métodos para hallar soluciones numéricas de (1.1) o en su defecto (1.2).

### 1.2.1. Métodos Incrementales

En esta familia de métodos, se transforma el problema de determinar las trayectorias dadas por puntos  $P = (\lambda, \mathbf{x}) \in S$  que verifican la Ecuación (1.2), en hallar la solución de una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O).

Para ello se considera que las trayectorias se pueden parametrizar respecto de  $\lambda$ , con lo cual podemos escribir:  $(\lambda, \mathbf{x}(\lambda))$ . Estos puntos satisfacen la ecuación no lineal dada por la Ecuación (1.2) para todo  $\lambda$ , por lo tanto:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(\lambda)) - \lambda \mathbf{v} = 0. \quad (1.3)$$

Derivando ambos miembros de la Ecuación (1.3) respecto de  $\lambda$  se obtiene:

$$\mathbf{F}_x(\mathbf{x}(\lambda))\dot{\mathbf{x}}(\lambda) - \mathbf{v} = 0, \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{F}_x$  es una matriz cuadrada (llamada matriz tangente) cuya entrada  $ij$  está dada por  $(\mathbf{F}_x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ . Asumiendo que  $\mathbf{F}_x$  es invertible se obtiene la siguiente E.D.O. de primer orden:

$$\dot{\mathbf{x}}(\lambda) = \mathbf{F}_x^{-1}(\mathbf{x}(\lambda))\mathbf{v}. \quad (1.5)$$

La Ecuación (1.5) en conjunto con la condición inicial  $\mathbf{x}(0) = 0$ , determinan un

Problema de Valores Iniciales dado por:

$$\text{E.D.O} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\lambda) = \mathbf{F}_x^{-1}(\mathbf{x}(\lambda))\mathbf{v} \\ \mathbf{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Por conveniencia se hará referencia a este problema como una E.D.O.

A partir de este punto se puede aplicar cualquier método numérico para la resolución de E.D.Os. Ver por ejemplo (Kahaner *et al.*, 1989), (Butcher, 2016) o las Notas de Teórico del curso *Métodos Numéricos* (dictado por el Instituto de Matemáticas y Estadística de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República).

A modo de ejemplo, se introduce un método extremadamente sencillo y suficientemente general como para poder apreciar este tipo de soluciones: el Método de Euler Hacia Adelante (en inglés: *Forward Euler*).

#### Método de Euler Hacia Adelante

Dada una E.D.O. de primer orden genérica con variable independiente  $t$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t)$  y una aproximación numérica aceptable de la solución de la E.D.O. en  $t_k$ ,  $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}(t_k)$ , se puede escribir el siguiente desarrollo de Taylor de  $\mathbf{x}(t)$  en  $t_k$  (con  $\xi \in (t_k, t)$ ):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_k) + \dot{\mathbf{x}}(t_k)(t - t_k) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(\xi)(t - t_k)^2. \quad (1.7)$$

Evaluando la expresión dada por la Ecuación (1.7) en  $t = t_k + \Delta t$  y usando que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  se tiene:

$$\mathbf{x}(t_k + \Delta t) = \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(t_k), t_k)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{x}}(\xi)\Delta t^2. \quad (1.8)$$

Despreciando el término de segundo orden y llamando  $\mathbf{x}_{k+1}$  y  $\mathbf{x}_k$  a las aproximaciones de  $\mathbf{x}(t_k + \Delta t)$  y  $\mathbf{x}(t_k)$  respectivamente, se obtiene:

$$\text{F.Euler} \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta t \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \end{cases} \quad (1.9)$$

El Método de Euler Hacia Adelante (*Forward Euler*) queda definido mediante la expresión de la Ecuación (1.9) y es un método explícito dado que solo utiliza valores ya calculados para determinar el próximo incremento. Existen otros métodos, implícitos, en los cuales el incremento está dado por la solución de una ecuación implícita (ver las referencias sobre métodos numéricos para resolución de E.D.Os citadas por más detalle).

Es claro a partir de la Ecuación (1.8) que en cada paso este método se aleja de la solución exacta en un factor  $O(\Delta t^2)$ . Esto hace que este método, y todos los otros métodos incrementales también, sufran de un efecto de deriva, llamado *drift*, de la

solución numérica respecto de la solución exacta teórica.

Este *drift* se puede reducir utilizando métodos de mayor orden, los cuales son más costosos del punto de vista computacional, o usando incrementos  $\Delta t$  lo suficientemente pequeños como para alcanzar una precisión requerida en un cierto valor objetivo  $t^*$ .

Por último, es necesario comentar sobre el costo computacional del Método de Euler Hacia Adelante. A partir de la Ecuación (1.9) se puede ver que cada paso del método implica una evaluación de la función  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ . Generalmente, el costo de la evaluación de  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k)$  supera con facilidad al resto de las operaciones de punto flotante necesarias para completar el paso incremental. En el caso específico de la resolución de una ecuación no lineal mediante un método incremental, dicha evaluación corresponde a  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) = \mathbf{F}_x^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{v}$ , lo cual tiene el costo de evaluar  $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k)$  y luego resolver un sistema lineal  $(\mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k)\mathbf{z} = \mathbf{v})$  con costo de  $O(n^3)$  operaciones en punto flotante en general (posiblemente menor si  $\mathbf{F}_x$  es una matriz esparza).

### Ejemplo Numérico 1: Solución Incremental

A continuación se resuelve numéricamente la ecuación no lineal:

$$x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \lambda = 0. \quad (1.10)$$

Esta ecuación está vinculada al análisis geométricamente no lineal de una estructura conocida como cercha de Von Mises, ver la Sección 2.1.3. La estructura tiene un solo grado de libertad de desplazamiento vertical del centro de la cercha y exhibe un comportamiento de tipo *snap-through*, es decir que al alcanzar un cierto nivel de carga pierde estabilidad, produciéndose un “salto” a otra configuración de equilibrio.

Es claro que el problema de encontrar la carga ( $\lambda$ ) que corresponde a un cierto desplazamiento ( $x$ ) es trivial, solamente se debe despejar  $\lambda$  de la Ecuación (1.10) y evaluar dicha expresión en el valor de desplazamiento dado ( $x$ ).

El problema inverso, en el cual dado el nivel de carga se quiere hallar el desplazamiento correspondiente de la estructura, requiere el uso de un método numérico para resolución de ecuaciones no lineales, como por ejemplo el procedimiento incremental visto anteriormente.

Dada la Ecuación (1.10) y comparando con la Sección 1.2.1 se puede ver que  $\mathbf{v} = 1$  y que las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{F}_x$  quedan definidas como:

$$\mathbf{f}(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_x(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2, \quad (1.11)$$

respectivamente. Se desea obtener estimaciones de valores de la solución ( $x_k$ ) en incrementos  $\Delta\lambda = 0,02$  hasta alcanzar un valor objetivo  $\lambda^*$ .

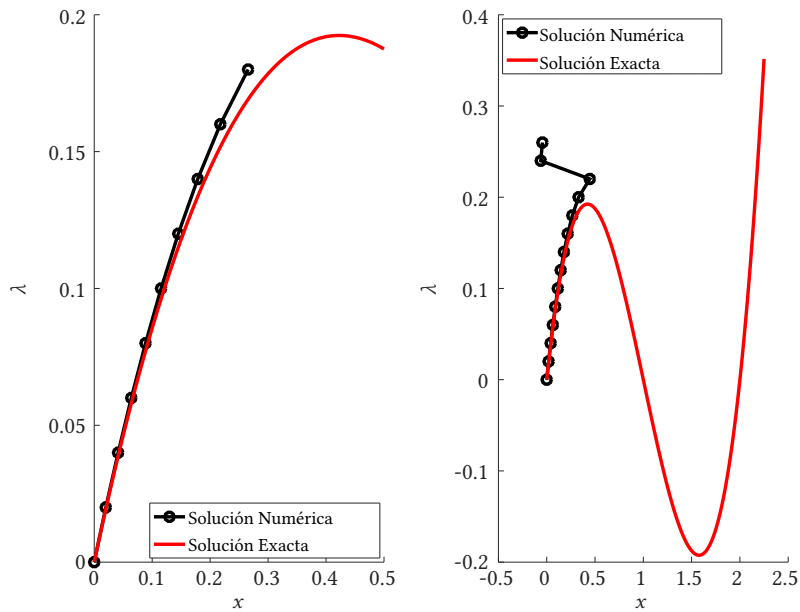
El Método de Euler Hacia Adelante permite, comenzando desde  $x_0 = 0$  y  $\lambda_0 = 0$ ,

hallar las soluciones  $(x_1, x_2, \dots)$  de forma incremental mediante la expresión:

$$x_{k+1} = x_k + 0,02 \left( \frac{1}{1 - 3x_k + \frac{3}{2}x_k^2} \right). \quad (1.12)$$

El método es implementado a través del código de Octave mostrado al final de esta sección en el Código 1.1.

En la Figura 1.2 se muestran los resultados obtenidos al aplicar el método para diferentes valores de  $\lambda$  objetivo. En la gráfica de la izquierda se puede ver el efecto de *drift*, o separación, entre la solución exacta y la solución numérica incremental. En la gráfica de la derecha se muestra lo que ocurre cuando el método es aplicado para un valor  $\lambda$  superior al correspondiente a un punto con tangente horizontal (que llamaremos: Punto Límite). Se ve claramente que la solución numérica se aleja desproporcionadamente de la solución exacta.



**Figura 1.2:** Soluciones obtenidas usando Euler Hacia Adelante. Izquierda: solución para  $\lambda^* = 0,18$ . Derecha: solución para  $\lambda^* = 0,26$ .

Los resultados obtenidos permiten establecer que el método incremental descrito tiene dificultades para resolver el sistema más allá de puntos en los cuales se cumple que:  $\det(\mathbf{F}_x) = 0$  ( $f' = 0$  en este caso). Por otra parte el efecto de *drift* puede

## Sección 1.2. Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales

9

provocar que las soluciones tengan errores considerables si el incremento no es cuidadosamente seleccionado. Estas desventajas del método motivan a introducir los métodos iterativos en la siguiente sección.

### Código 1.1: Implementación del Método de Euler para Ejemplo Numérico 1.

```

1  %% Ejemplo Numerico 1 : Solucion Incremental %%
2  clc, clear all, close all
3
4  % Condiciones Iniciales
5  x0 = 0; L0 = 0;
6
7  % Definicion de v
8  v = 1;
9
10 % Definicion de f(x)
11 f = @(x) x-3/2*x.^2+1/2*x.^3;
12
13 % Definicion de F_x(x)
14 Fx = @(x) 1-3*x+3/2*x.^2;
15
16 % Definicion de h(x,lambda)
17 h = @(x) Fx(x)\v;
18
19 %%%Solucion Incremental con Forward Euler %%%
20 % Defino hasta que Lambda incrementamos
21 Lmax = .25;
22
23 x(:,1) = x0 ; L(1)=0;
24
25 % Defino Incremento Delta Lambda
26 DL = .02;
27
28 % Comienza secuencia de incrementos
29 i=1;
30 while L(end)<Lmax
31     x(:,i+1) = x(:,i) + DL * h(x(:,i)); % Forward Euler
32     L(i+1) = L(i)+DL;
33     i = i+1;
34 end
35
36 % Genero graficas de las soluciones
37 subplot(1,2,1) % Solucion Por debajo de punto limite
38 plot(x(1,1:end-2),L(1:end-2),'*-k',0:.01:.5,f(0:.01:.5),'-r')
39 xlabel('x'), ylabel('$\lambda$')
40 legend('Solucion Numerica','Solucion Exacta')
41
42 subplot(1,2,2) % Solucion Por encima de punto limite
43 plot(x(1,1:end-2),L(1:end-2),'*-k',0:.01:2.25,f(0:.01:2.25),'-r')
44 xlabel('x'), ylabel('$\lambda$')
45 legend('Solucion Numerica','Solucion Exacta')

```

### 1.2.2. Métodos Iterativos

Luego de haber presentado los métodos incrementales y observar desventajas como el fenómeno de *drift*, se plantea en esta sección la resolución del problema en cuestión por medio de métodos iterativos.

La idea fundamental de los métodos iterativos es fijar el valor del parámetro  $\lambda = \lambda_k$  y hallar el vector  $\mathbf{x}_k$  que verifica la ecuación no lineal:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \lambda_k \mathbf{v} = 0$ . De esta manera las incógnitas del sistema no lineal son solamente las entradas del vector  $\mathbf{x}_k$ .

El procedimiento consiste en, dado un vector inicial  $\mathbf{x}_k^{(0)}$ , iterar mediante alguna regla de manera de asegurar que el vector obtenido ( $\mathbf{x}_k^{(N)}$ ) satisface la ecuación no lineal con una tolerancia definida a priori, siendo  $N$  el número de iteraciones requeridas. La expresión matemática asociada a satisfacer la ecuación no lineal es:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(N)}) - \lambda_k \mathbf{v}\| < \epsilon_{tol}. \quad (1.13)$$

Este procedimiento iterativo suele llamarse “iterar hasta obtener convergencia”. Iterar hasta satisfacer la condición dada por la Ecuación (1.13) garantiza que se habrá obtenido un punto  $(\lambda_k, \mathbf{x}_k^{(N)})$  para el cual se tiene un error controlado respecto de la solución exacta. Es por esto que los métodos iterativos eliminan el problema de *drift*.

A continuación se presenta una de las reglas iterativas más populares para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, el llamado Método de Newton-Raphson.

#### Método de Newton-Raphson

En el Método de Newton-Raphson (NR) se asume que se cuenta con un vector  $\mathbf{x}_k^{(0)}$  próximo a la solución buscada  $\mathbf{x}_k$  de la Ecuación (1.2). Para una ecuación no lineal con una sola incógnita, el método se puede deducir mediante un argumento geométrico, mientras que para un sistema de ecuaciones no lineales, la deducción requiere del concepto de linealización de funciones vectoriales.

A modo de referencia, el software SAP 2000®<sup>1</sup>, utiliza iteraciones de N-R para resolver problemas con no linealidad geométrica, permitiendo al usuario definir parámetros básicos del método.

**Una Ecuación y Una Variable:** Se describe a continuación la deducción geométrica para el caso de una sola incógnita. De acuerdo a lo que se muestra en la Figura 1.3, la idea del método es trazar la tangente a la curva  $(x, f(x))$  en el punto conocido  $x_k^{(0)}$  y hallar la intersección de esta recta tangente con la recta horizontal dada por el nivel de carga definido:  $\lambda_k \mathbf{v}$ . El valor de  $x$  en esta intersección será la nueva aproximación de la solución de la ecuación no lineal  $x_k^{(1)}$ .

<sup>1</sup>desarrollado por Computers and Structures Inc.

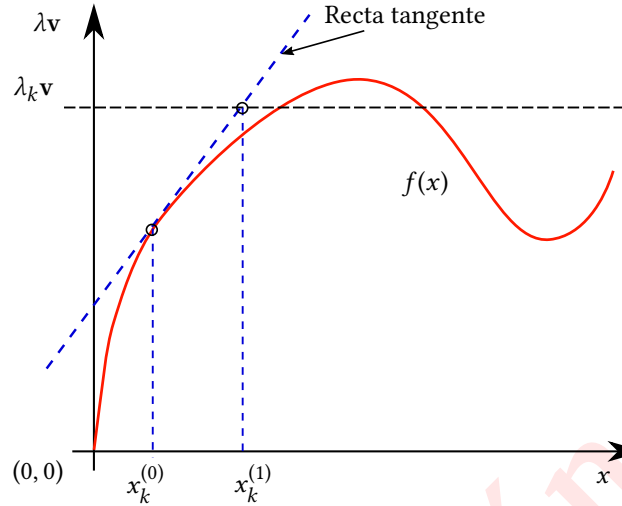


Figura 1.3: Representación geométrica de iteración de Newton-Raphson.

La ecuación de recta de la tangente en el punto  $x_k^{(0)}$  está dada por:

$$\lambda v = f(x_k^{(0)}) + f'(x_k^{(0)})(x - x_k^{(0)}), \quad (1.14)$$

mientras que la ecuación de la recta horizontal correspondiente al nivel de carga especificado es:

$$\lambda v = \lambda_k v. \quad (1.15)$$

La intersección de ambas rectas provee la siguiente ecuación lineal en  $x$ :

$$\lambda_k v = f(x_k^{(0)}) + f'(x_k^{(0)})(x - x_k^{(0)}). \quad (1.16)$$

Resolviendo  $x$  en la ecuación anterior y definiendo ese valor como la nueva aproximación de la solución:  $x_k^{(1)}$ , se llega a:

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - \frac{f(x_k^{(0)}) - \lambda_k v}{f'(x_k^{(0)})}. \quad (1.17)$$

El procedimiento anterior permite definir el método iterativo de Newton-Raphson:

$$\text{N-R} \begin{cases} x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{f(x_k^{(i)}) - \lambda_k v}{f'(x_k^{(i)})} \\ x_k^{(0)} \end{cases} \quad (1.18)$$

Es claro a partir de la Ecuación (1.18) que este método no puede iterar si la derivada primera de  $f(x)$  es igual a cero en el punto donde se traza la tangente. Esta limitación también estará presente en el caso de Newton-Raphson para varias variables.

**Sistema de  $n$  Ecuaciones y  $n$  Variables:** A continuación se presenta la deducción del método de Newton-Raphson para un sistema de  $n$  ecuaciones no lineales con  $n$  incógnitas. Se trabajará con el sistema de ecuaciones no lineales dado en la Ecuación (1.3). Para deducir el método, se linealiza el sistema de ecuaciones no lineales en el punto actual de la iteración  $\mathbf{x}_k^{(i)}$ . Esto se efectúa mediante un desarrollo de Taylor de  $\mathbf{f}$  respecto de la variable  $\mathbf{x}$  en un entorno de  $\mathbf{x}_k^{(i)}$ :

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(i)}) + \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k^{(i)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i)}) + O(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i)}\|^2) \quad (1.19)$$

Imponiendo que  $\lambda \mathbf{v} = \lambda_k \mathbf{v}$  y truncando el término de mayor orden se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en la variable  $\mathbf{x}$ :

$$\lambda_k \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(i)}) + \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k^{(i)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (1.20)$$

Se define el paso del método de Newton-Raphson como  $\Delta \mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i+1)} - \mathbf{x}_k^{(i)}$  y a partir de la Ecuación (1.20) se obtiene:

$$\text{N-R} \begin{cases} \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k^{(i)}) \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} = -(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(i)}) - \lambda_k \mathbf{v}) \\ \mathbf{x}_k^{(i+1)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \\ \mathbf{x}_k^{(0)} \end{cases} \quad (1.21)$$

#### Actividad

Verificar que si  $x \in \mathbb{R}$  el método dado por la Ecuación (1.21) se reduce al presentado en la Ecuación (1.18).

Asumiendo que el punto de arranque ( $\mathbf{x}_k^{(0)}$ ) está suficientemente cerca de la solución buscada, la sucesión de iterados que genera N-R converge con orden 2. Esto significa que las distancias entre cada iterado y la solución exacta ( $\mathbf{x}_k$ ) verifican  $\|\mathbf{x}_k^{(i+1)} - \mathbf{x}_k\| \approx \beta \|\mathbf{x}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k\|^2$ , siendo  $\beta > 0$  la velocidad de convergencia. En este documento no se presentarán formalmente los conceptos de orden y velocidad de convergencia, ver (Quarteroni *et al.*, 2007) por dichas definiciones.

El método de N-R presentado en (1.21) requiere que  $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}_k^{(i)})$  sea invertible para poder calcular el paso iterativo. Más en general, para poder tener pasos iterativos con precisión confiable se deberá cumplir que el número de condición de la matriz



$F_x(\mathbf{x}_k^{(i)})$  sea pequeño. Ver la Sección 7.6 del libro (Björk, A. and Dahlquist, 2008) por más detalles sobre estimación de número de condición, perturbaciones y errores en sistemas lineales.

En la introducción a los métodos iterativos, en la Sección 1.2.2, se introdujo un criterio de parada general, el cual es válido evidentemente para la iteración de N-R. Existen otros posibles criterios de parada, como por ejemplo fijar un límite máximo para el número de iteraciones:  $i \leq \text{MAXITER}$ . Otro criterio puede ser iterar hasta que la diferencia relativa entre dos iterados sea menor que una tolerancia  $\epsilon_{rel}$ :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}_k^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}_k^{(i+1)}\|} < \epsilon_{rel} \quad (1.22)$$

En cada iteración de N-R se debe resolver un sistema de tamaño  $(n \times n)$ . Dependiendo de la estructura de la matriz  $F_x(\mathbf{x}_k^{(i)})$  esta solución puede llevarse a cabo de maneras más eficientes que una escalerización de Gauss genérica. En el capítulo 8 de (Bathe, 2014) se pueden ver en detalle métodos numéricos eficientes usados para la solución de dichos sistemas lineales.

La evaluación de la matriz  $F_x$  y su factorización (solución del sistema lineal) en cada paso de N-R tiene un costo elevado. Existen otros métodos numéricos iterativos que evitan evaluar  $F_x$  en cada iteración, o que utilizan una definición distinta para  $F_x$  de manera de obtener solución con menor costo computacional en cada iteración.

#### Método de Newton-Raphson Modificado

El método de N-R modificado presenta una alternativa para no tener que evaluar y factorizar la matriz  $F_x$  en cada iteración. Precisamente esto es lo que define al método en cuestión, el mismo deja fija la matriz  $F_x(\mathbf{x}_k^{(0)})$  a lo largo de las iteraciones.

Algunas herramientas computacionales, como por ejemplo el software SAP 2000®, resuelven problemas con no linealidad geométrica realizando un cierto número de iteraciones de NR modificado para luego pasar a realizar iteraciones Newton-Raphson si no se alcanza convergencia.

La iteración de Newton-Raphson modificado puede ser escrita como:

$$\text{N-R Modif.} \begin{cases} F_x(\mathbf{x}_k^{(0)}) \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} = - \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^{(i)}) - \lambda_k \mathbf{v} \right) \\ \mathbf{x}_k^{(i+1)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \\ \mathbf{x}_k^{(0)} \end{cases} \quad (1.23)$$

Esto permite factorizar la matriz  $F_x(\mathbf{x}_k^{(0)})$  al comienzo de las iteraciones y almacenar dichos factores. Luego, en cada paso iterativo se deberá resolver una sustitución hacia adelante y una sustitución hacia atrás para hallar  $\Delta \mathbf{x}_k^{(i)}$ . El costo computacional de dichas sustituciones es un orden de magnitud menor (en  $n$ ) que el de la factori-

zación de la matriz  $F_x(\mathbf{x}_k^{(0)})$ .

Como contrapartida al costo computacional reducido de N-R Modificado, se destaca que el orden de convergencia del método es 1. Esto implica que las distancias entre cada iterado y la solución exacta  $(\mathbf{x}_k)$  verifican  $\|\mathbf{x}_k^{(i+1)} - \mathbf{x}_k\| \approx \beta \|\mathbf{x}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k\|$ , con  $\beta \in (0, 1)$ .

### Métodos Cuasi-Newton

La familia de métodos cuasi-Newton comprende a aquellos en los cuales se cambia la matriz  $F_x$  del método de Newton-Raphson (matriz tangente) por una matriz más económica de evaluar y factorizar (matriz secante).

En el caso de una sola ecuación y una sola incógnita, el Método de la Secante corresponde a un método cuasi-Newton. En éste método, en lugar de trazar la tangente por el punto actual  $(x_k^{(i)})$ , se traza la secante por el punto actual y el anterior como se muestra en la Figura 1.4.

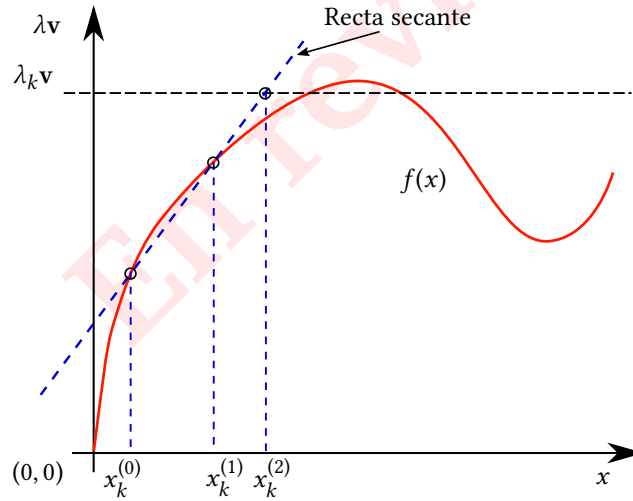


Figura 1.4: Esquema Geométrico del Método de la Secante

Es claro que se deben especificar dos puntos de arranque para poder comenzar a iterar con el Método de la Secante.

### Actividad

Verificar que la expresión de la iteración del Método de la secante está dada por:

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{x_k^{(i)} - x_k^{(i-1)}}{f(x_k^{(i)}) - f(x_k^{(i-1)})} (f(x_k^{(i)}) - \lambda_k \mathbf{v}) \quad (1.24)$$

El Método de la Secante tiene orden de convergencia super-lineal (Orden =  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ), lo cual lo posiciona como más lento que N-R pero más rápido que N-R Modificado.

La generalización del Método de la Secante a sistemas de ecuaciones no lineales corresponde al Método de Broyden. En ese método, en lugar de la matriz tangente  $F_x$  utilizada en N-R, se utiliza una matriz secante que verifica una relación en los incrementos de  $f(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}$  de la forma:  $\Delta f_k = B_k \Delta \mathbf{x}_k$ . La condición de matriz secante no es suficiente para definir la completamente y es ahí donde surgen distintas variantes. En la Sección 7.1.4 de (Quarteroni *et al.*, 2007) se presenta una definición más detallada del método.

Otro método cuasi-Newton que deriva de la condición secante mencionada anteriormente es el Método BFGS, cuya formulación puede encontrarse en la Sección 8.4.2 de (Bathe, 2014).

El motivo por el cual estos métodos son atractivos es que en ellos las inversas de las matrices secantes se actualizan de forma computacionalmente económica a partir de las anteriores. Se obtiene, por lo tanto, un compromiso entre velocidad y economía computacional.

### Ejemplo Numérico 2: Soluciones Iterativas

Se resuelve nuevamente la ecuación no lineal vista en el ejemplo dado en la Sección 1.2.1, dada por la expresión:

$$x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \lambda = 0 \quad (1.25)$$

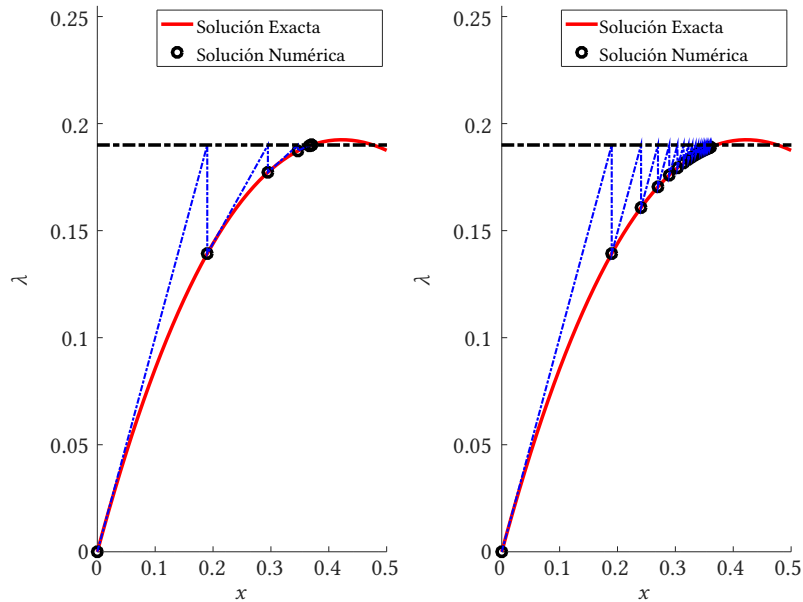
En este caso se fija el nivel de carga  $\lambda_k = 0,19$  y se comienza la iteración desde  $x_k^{(0)} = 0$ . La expresión del Método de Newton-Raphson para la ecuación no lineal a resolver está dada por:

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{x_k^{(i)} - \frac{3}{2}x_k^{(i)2} + \frac{1}{2}x_k^{(i)3} - 0,19}{1 - 3x_k^{(i)} + \frac{3}{2}x_k^{(i)2}}, \quad (1.26)$$

mientras que la iteración del Método de Newton-Raphson Modificado está dada por:

$$x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} - \frac{x_k^{(i)} - \frac{3}{2}x_k^{(i)2} + \frac{1}{2}x_k^{(i)3} - 0,19}{1}. \quad (1.27)$$

La implementación de ambos métodos se presenta al final de esta sección, en el Código 1.2. En la Figura 1.5 se muestran resultados obtenidos al aplicar los métodos a la resolución del ejemplo considerando  $\epsilon_{tol} = 10^{-8}$ .



**Figura 1.5:** Resultados obtenidos por métodos iterativos. Izquierda: método de Newton-Raphson. Derecha: método de Newton-Raphson Modificado.

El método Newton-Raphson Modificado requiere 20 iteraciones mientras que el método Newton-Raphson requiere 7. Vale la pena remarcar que, dado que  $f'(x)$  en la solución tiene un valor cercano a cero, el método requiere un número de iteraciones considerablemente elevado para converger. Esto se puede comprender mejor si se tiene en cuenta el siguiente resultado teórico: el método de N-R tiene orden de convergencia igual a 1 cuando  $f'(x)$  en la raíz es igual a 0.

## Sección 1.2. Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales

17

### Actividad

Modificar los parámetros de la implementación presentada y resolver el ejemplo para  $\lambda_k = 0,26$  y otros dos valores superiores a 0,2. Analizar los resultados y comparar con los obtenidos por el método incremental.

**Código 1.2:** Implementación de métodos iterativos para ejemplo numérico 2.

```

1  %% Ejemplo Numerico 2 — Solucion Iterativa %%
2  clc, clear all, close all
3
4  % Punto de Arranque
5  x0 = 0;
6
7  % Definicion de v
8  v = 1;
9
10 %Definicion de f(x) y F_x(x)
11 f = @(x) x-3/2*x.^2+1/2*x.^3 ;
12 Fx = @(x) 1-3*x+3/2*x.^2 ;
13
14 % Fijamos valor de Lambda_k
15 Lk = .19;
16
17 % Parametros de Criterios de Parada
18 EpsilonTol = 1e-10;    MAXITER = 20;
19
20 %%%Solucion Iterativa con N-R %%%
21 xnr(:,1) = x0;    i=1;    Error = inf;
22 while and(Error > EpsilonTol, i<=MAXITER) % Comienzan iteraciones
23     Deltax = -(f(xnr(:,i))-Lk*v)/Fx(xnr(:,i)) ; % Incremento N-R
24     xnr(:,i+1) = xnr(:,i) + Deltax; % Paso N-R
25     Error = abs(f(xnr(:,i+1))-Lk*v); % Evaluacion Error de Convergencia
26     i = i+1;
27 end
28
29 %%%Solucion Iterativa con N-R Modif. %%%
30 xnr(:,1) = x0 ;    i=1;    Error = inf;
31 while and(Error > EpsilonTol, i<=MAXITER) % Comienzan iteraciones
32     Deltax = -(f(xnr(:,i))-Lk*v)/Fx(xnr(:,1)) ; % Incremento N-R Modif
33     xnr(:,i+1) = xnr(:,i) + Deltax; % Paso N-R Modif.
34     Error = abs(f(xnr(:,i+1))-Lk*v); % Evaluacion Error de Convergencia
35     i = i+1;
36 end
37
38 % Genero graficas de solucion para NR y NR Modif
39 subplot(1,2,1) % Newton-Raphson
40 Nnr = length(xnr);
41 grid = 0:.01:.5;
42 Solexact = f(grid);
43 xnrz(1:2:2*Nnr-1) = xnr;    xnrz(2:2:2*Nnr-1) = xnr(2:Nnr);

```

```

44 ynrz(1:2:2*Nnr-1) = f(xnr); ynrz(2:2:2*Nnr-1) = Lk;
45 plot(grid,Solexact, '-r', xnrz, ynrz, '-.b', xnr, f(xnr), 'ok', [-1,6], [Lk,Lk], 'k-')
46 axis([0 0.5 0 0.255])
47 xlabel('x'), ylabel('\lambda'), legend('Solucion Exacta')
48
49 subplot(1,2,2) % Newton-Raphson Modificado
50 Nnr = length(xnrm);
51 grid = 0:.01:.5;
52 Solexact = f(grid);
53 xnrmz(1:2:2*Nnr-1) = xnrm; xnrmz(2:2:2*Nnr-1) = xnrm(2:Nnr);
54 ynrnz(1:2:2*Nnr-1) = f(xnrm); ynrnz(2:2:2*Nnr-1) = Lk;
55 plot(grid,Solexact, '-r', xnrmz, ynrnz, '-.b', xnrm, f(xnrm), 'ok', [-1,6], [Lk,Lk], 'k-')
56 axis([0 0.5 0 0.255])
57 xlabel('x'), ylabel('\lambda'), legend('Solucion Exacta')

```

### 1.2.3. Métodos de Longitud de Arco (Arc-Length)

En esta sección se presenta una variante de Método de Longitud de Arco para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales parametrizados del tipo dado en la Ecuación (1.3). Estos métodos son estudiados en matemática aplicada en el área de continuación numérica (ver notas del curso de *Análisis numérico de ecuaciones no-lineales* (Doedel, 2014) y el software AUTO-07p (Doedel y Oldeman, 2019)). Por otra parte, se destaca que estos métodos fueron inicialmente desarrollados en el área de análisis estructural. Una breve reseña histórica puede encontrarse en la Sección 9.3 de (Crisfield, 1996).

La ventaja fundamental de estos métodos sobre los expuestos en las secciones anteriores es que los Métodos de Longitud de Arco permiten resolver las ecuaciones no lineales en situaciones en las cuales los métodos anteriores fallan o encuentran problemas de convergencia.

Del punto de vista estructural, el interés en poder resolver el equilibrio de estructuras más allá de puntos críticos o puntos de soluciones con matriz tangente singular (más detalles en Capítulo 2) se justifica en que:

- Puede ocurrir que un punto crítico solamente sea un máximo local de la curva de carga-desplazamiento.
- Puede ocurrir que se desee analizar un componente aislado de una estructura, para luego incorporar ese componente a una estructura completa.
- En general es importante saber cual es la carga de colapso de una estructura, pero además es importante saber como es su comportamiento post-colapso, si es dúctil o frágil por ejemplo.
- Para saber que efectivamente se alcanzó la capacidad de carga máxima de la estructura, se debe ser capaz de resolver el equilibrio más allá de dicho punto para poder verificar que en efecto es un máximo.

- Para poder estudiar el estado de tensiones que la estructura tiene en su carga de colapso, se debe ser capaz de converger la solución en dicho punto de carga máxima. Esto es difícil con los métodos presentados anteriormente.
- En la solución de problemas elásticos-perfectamente plásticos, la carga máxima de la estructura (capacidad plástica) es difícil de obtener mediante los métodos anteriores dado que la curva de carga-desplazamiento alcanza una meseta plástica en dicha carga.

Es claro a partir de lo anterior que estos métodos son esenciales para el análisis computacional del colapso de estructuras. Algunas herramientas computacionales como: ABAQUS®, LUSAS®, ANSYS® o ADINA® tienen la capacidad de llevar a cabo análisis estáticos mediante este tipo de procedimientos.

En lo que sigue se presenta una versión básica del método de Longitud de Arco, la cual no es una implementación eficiente pero tiene como ventaja la claridad en su formulación. En la Sección 9.3 de (Crisfield, 1996) se presenta una exposición completa de estos métodos y su historia.

La idea básica de estos métodos es considerar a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  como incógnitas. Se requiere, naturalmente, que esas incógnitas satisfagan la Ecuación (1.3). Sin embargo, ésta condición por sí sola no es suficiente para tener un problema determinado, ya que se puede comprobar que en ese caso se tienen  $n + 1$  incógnitas y  $n$  ecuaciones. Por lo tanto, los métodos de Longitud de Arco imponen una restricción adicional de manera de obtener un problema determinado.

Dependiendo de cuál sea dicha restricción adicional y la implementación elegida, se obtienen los distintos métodos que forman parte de la familia de Métodos de longitud de arco. Ver en (Crisfield, 1996) Métodos de Longitud de Arco Linealizado, Cilíndrico y Esférico. La restricción adicional está, tal como lo indica el nombre de cada método, directamente relacionada al concepto de longitud del arco de la curva carga-desplazamiento. En la Figura 1.6 se presenta un esquema geométrico de la restricción de longitud de arco.

El incremento diferencial de la coordenada de longitud de arco  $s$  puede escribirse en función de los incrementos de carga y desplazamiento como:

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} + d\lambda^2 \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v}, \quad (1.28)$$

donde  $\psi$  es un factor de escala de la carga con respecto a los desplazamientos. Esta relación diferencial para la longitud de arco se puede traducir a una relación en los incrementos  $\Delta \mathbf{x}$  y  $\Delta \lambda$ :

$$\Delta l^2 = \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (1.29)$$

Observar que el parámetro  $\Delta l^2$  controla la distancia a la cual el método de Longitud de Arco busca el nuevo punto solución de la ecuación no lineal.

En lo que sigue, se asume que se tiene una solución de la ecuación  $(\mathbf{x}_{k-1}, \lambda_{k-1})$  y que el arco de radio  $\Delta l$  está centrado en ese punto. Con lo cual:  $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$  y  $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$ .

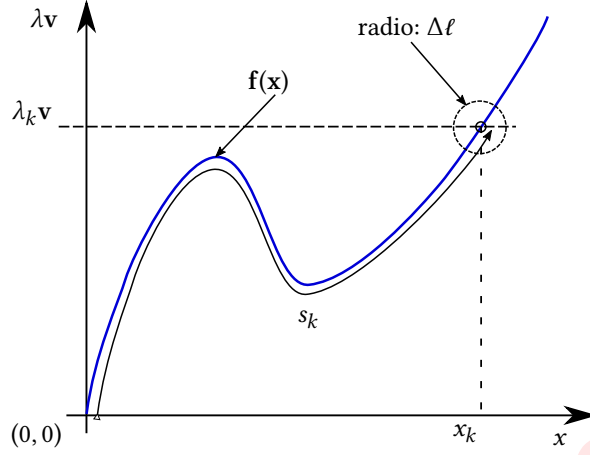


Figura 1.6: Esquema geométrico del Método de Longitud de Arco.

De esta manera el sistema de ecuaciones no lineales que se deberán satisfacer en el método de Longitud de Arco propuesto son:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_k) - \lambda_k \mathbf{v} = 0 \\ \Delta \mathbf{x}_k^T \Delta \mathbf{x}_k + \Delta \lambda_k^2 \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \Delta l^2 = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Para obtener la expresión de la iteración del método de Longitud de Arco se debe linealizar las ecuaciones no lineales dadas en la Ecuación (1.30) en torno al último punto iterado:

$$\left( \mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}, \lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k^{(i)} \right)$$

respecto de las incógnitas  $\Delta \mathbf{x}_k$  y  $\Delta \lambda_k$ .

Luego, se resuelve el sistema lineal resultante definiendo el paso iterativo del método. Notar que se expresa la linealización e iteraciones respecto de los incrementos de las variables  $\mathbf{x}$  y  $\lambda$ .

Las ecuaciones linealizadas resultantes son:

$$f(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}) - (\lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k^{(i)}) \mathbf{v} + \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)}) \delta \mathbf{x}_k^{(i)} - \delta \lambda_k^{(i)} \mathbf{v} = 0 \quad (1.31)$$

$$\Delta \mathbf{x}_k^{(i)T} \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} + \Delta \lambda_k^{(i)2} \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \Delta l^2 + 2 \Delta \mathbf{x}_k^{(i)T} \delta \mathbf{x}_k^{(i)} + 2 \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} \Delta \lambda_k^{(i)} \delta \lambda_k^{(i)} = 0 \quad (1.32)$$

con los incrementos iterativos definidos como

$$\delta \mathbf{x}_k^{(i)} = \Delta \mathbf{x}_k^{(i+1)} - \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \quad \text{y} \quad \delta \lambda_k^{(i)} = \Delta \lambda_k^{(i+1)} - \Delta \lambda_k^{(i)}. \quad (1.33)$$

La versión linealizada de la Ecuación (1.30) se traduce en el siguiente sistema



lineal a ser resuelto en cada iteración del método:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \left( \mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \right) & -\mathbf{v} \\ 2 \left( \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \right)^T & 2\psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} \Delta \lambda_k^{(i)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_k^{(i)} \\ \delta \lambda_k^{(i)} \end{bmatrix} = \quad (1.34)$$

$$\dots \begin{bmatrix} - \left( \mathbf{f} \left( \mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} \right) - \left( \lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k^{(i)} \right) \mathbf{v} \right) \\ - \left( \Delta \mathbf{x}_k^{(i)T} \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} + \Delta \lambda_k^{(i)2} \psi^2 \mathbf{v}^T \mathbf{v} - \Delta l^2 \right) \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

La regla para actualizar la solución en cada iteración se desprende de la Ecuación (1.33):

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{x}_k^{(i+1)} = \Delta \mathbf{x}_k^{(i)} + \delta \mathbf{x}_k^{(i)} \\ \Delta \lambda_k^{(i+1)} = \Delta \lambda_k^{(i)} + \delta \lambda_k^{(i)} \end{cases} \quad (1.36)$$

Como en cualquier método iterativo, se debe proporcionar un punto de arranque y algún criterio de parada para terminar las iteraciones. Respecto al criterio de parada, se usarán criterios iguales a los usados en Newton-Raphson (ver Sección 1.2.2). Respecto al punto de inicio de la iteración, se deben definir valores  $\Delta \mathbf{x}_k^{(0)}$  y  $\Delta \lambda_k^{(0)}$ . Una posible opción es considerarlos igual a una fracción de los incrementos dados por el método de Euler Hacia Adelante (ver la Sección 1.2.1).

Un punto adicional por comentar que surge de analizar la Figura 1.6, es que el círculo que queda definido por la restricción de Longitud de Arco corta a la curva de carga-desplazamiento en dos puntos, uno avanza la solución y el otro la retrocede. Dado lo anterior, es posible que la iteración converja al punto que hace que la solución retroceda en lugar de avanzar. Una manera de controlar esto es estudiando a medida que avanza la solución numérica si se pasó un punto crítico ( $\text{Det}(\mathbf{F}_x) = 0$ ) y en ese caso estudiar la necesidad de cambiar el signo del punto de arranque dado por Euler Hacia Adelante.

Una observación final del método presentado es que la matriz del sistema lineal dado en la Ecuación (1.34) que debe ser resuelto en cada iteración es no simétrica y eso presenta una desventaja económica en cuanto a la resolución numérica del sistema.

En el Capítulo 2 se describe una implementación del Método de Longitud de Arco para  $n$  grados de libertad que salva estas deficiencias. El mismo permite realizar primero un paso de tipo N-R y luego determinar el incremento de Longitud de Arco a partir de la solución de una ecuación polinómica de segundo grado. Se deben utilizar criterios adicionales para decidir cuál de las dos raíces del polinomio corresponde al avance de la solución.

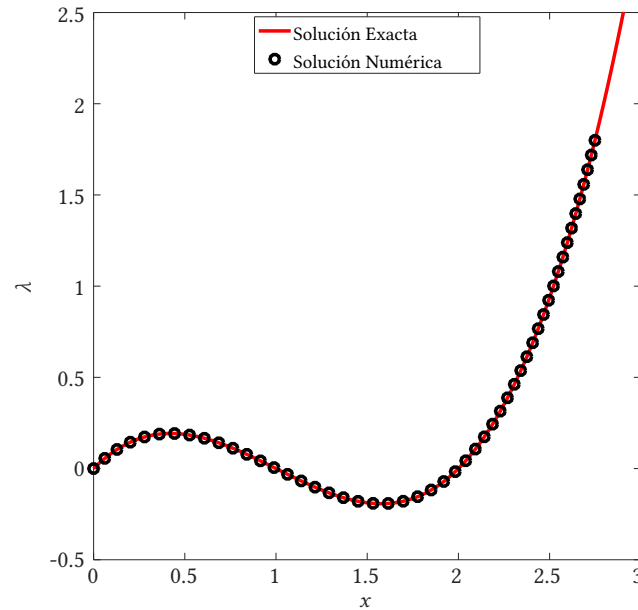
### Ejemplo Numérico 3: Solución con Método de Longitud de Arco

Se resuelve nuevamente la ecuación no lineal vista en el ejemplo dado en la Sección 1.2.1.

$$x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \lambda = 0 \quad (1.37)$$

En este caso se fijan los parámetros del método de Longitud de Arco con los valores: radio de Arco:  $\Delta l = 0,083$ , factor de escala de cargas:  $\psi = 1$  y pasos de Método de Longitud de Arco:  $k = 1, 2, \dots, 50$ .

Esto resulta en la solución numérica indicada con círculos negros en la Figura 1.7.



**Figura 1.7:** Soluciones Numéricas con Método de Longitud de Arco.

Notar que el método de Longitud de Arco utilizado logra pasar por dos puntos críticos, uno en  $x \approx 0,5$  y otro en  $x \approx 1,5$ .

También se puede observar en la Figura 1.7 que los puntos que componen la solución mediante el procedimiento de Longitud de Arco se encuentran equiespaciadas en la longitud de la curva correspondiente a la solución exacta. Se debe notar que para que dichos puntos parezcan equiespaciados, el gráfico debe tener el mismo escalado de ejes que la métrica usada como definición de longitud de arco en la Ecuación (1.29).

## Sección 1.2. Métodos Numéricos para Ecuaciones No Lineales

23

El código de Octave utilizado para generar la solución numérica se presenta en el Código 1.3.

### Actividad

Estudie cómo cambiar el código dado para poder resolver un sistema de ecuaciones no lineales en  $\mathbb{R}^n$ .

**Código 1.3:** Solución con Método de Longitud de Arco - Ejemplo Numérico 3.

```

1  %% Ejemplo Numerico 3 Solucion con Metodo de Longitud de Arco %%
2  clc, clear all, close all
3
4  % Punto Inicial
5  x0 = [0];    L0 = 0;
6
7  % Definicion de Ecuacion No-Lineal
8  v = 1;
9  f = @(x) x-3/2*x.^2+1/2*x.^3;
10 F_x = @(x) 1-3*x+3/2*x.^2;
11
12 % Pasos de Solucion con ArcLength
13 Nsteps = 50;
14
15 x = x0;    L = L0;
16
17 % Parametros de la restriccion de Long. Arco
18 psi = 1;    DL = .083;
19
20 for k=1:Nsteps
21     % Inicializacion de Incrementos para Iteracion. F.Euler,
22     % Se ajusta el signo de DL en base a pasaje de un punto critico.
23     DL_ki = DL/2;
24
25     if F_x(x(k))>0
26         DL_ki = DL_ki;    % si la rama es ascendente usa +Forw.Euler
27     else
28         DL_ki = -DL_ki;    % si la rama es descendente usa -Forw.Euler
29     end
30     Dx_ki = DL_ki*v/F_x(x(k)); % Incremento Forw.Euler
31
32     % Parametros de Control de Iteracion
33     tol_F = 1e-8;    Maxiter = 10;
34
35     % Iteracion de Metodo de Longitud de Arco.
36     i=1;    err_F = inf;
37     while and(i<Maxiter , err_F>tol_F)
38         A = [F_x(x(k)+Dx_ki), -v ; 2*Dx_ki , 2*psi^2*v^2*DL_ki];
39
40         b = [ -(f(x(k)+Dx_ki)-(L(k)+DL_ki)*v) ; -(Dx_ki^2+(psi*v*DL_ki)^2-DL^2)];
41
42         dIncr = A\b;    % solucion del sistema lineal

```

```
43
44     Dx_ki = Dx_ki + dIncr(1); % Actualizo el Incremento en x
45     DL_ki = DL_ki + dIncr(2); % Actualizo el Incremento en lambda
46
47     err_F = norm(f(x(k)+Dx_ki)-(L(k)+DL_ki)*v); % error para control de
48         convergencia
49
49     i = i+1; % incrementa contador de iteraciones
50 end
51
52 % Tenemos incrementos con convergencia deseada para el paso(k)
53 % Incremento x(k) para obtener x(k+1)
54 x(k+1) = x(k) + Dx_ki;      L(k+1) = L(k) + DL_ki;
55 end
56
57 % Genera graficas de Solucion Numerica y Exacta
58 grid = 0:.01:3; Solexact = f(grid);
59 plot(grid,Solexact,'-r',x,L,'ok')
60 xlabel('x'), ylabel('\lambda')
61 title('Solucion Con Metodo de Longitud de Arco')
62 legend('Solucion Exacta'), axis([0 3 -0.5 2.5], 'square')
```

## Capítulo 2: No Linealidad Geométrica

---

En este capítulo se presentan algunos conceptos centrales del análisis de estructuras que exhiben no linealidad geométrica. Se hará foco en estructuras discretas, es decir no se hará énfasis en cuerpos continuos.

En la primer sección se presenta el Principio de Mínima Energía Potencial Total como herramienta para hallar las ecuaciones de equilibrio de estructuras elásticas y estudiar la estabilidad de dichas estructuras, en la hipótesis de grandes desplazamientos. A continuación se presenta el Principio de los Trabajos Virtuales como una herramienta alternativa, y más general que la anterior, para determinar las ecuaciones de equilibrio de estructuras. Posteriormente se introducen diferentes medidas de deformación no lineal como función de desplazamientos, aplicadas a miembros de tipo biela. Habiendo cubierto los conceptos anteriores, se introduce una formulación de elementos finitos para bielas elásticas lineales. Dicha formulación permite analizar estructuras reticuladas sometidas a grandes desplazamientos y rotaciones con pequeñas deformaciones unitarias. Finalmente, se aplican los conceptos vistos para describir métodos de análisis de estabilidad estructural en reticulados.

### 2.1. Principio de Mínima Energía Potencial Total

En esta sección se introduce el Principio de Mínima Energía Potencial Total (PMEPT), el cual permite determinar las ecuaciones de equilibrio y estudiar la estabilidad de sistemas estructurales conservativos no lineales<sup>1</sup>. También es posible profundizar en el análisis, mediante enfoques energéticos, de la estabilidad elástica de estructuras siguiendo los libros (Thompson y Hunt, 1973; Crisfield, 1997) y en forma un poco menos específica con el libro (Timoshenko y Gere, 2009).

#### 2.1.1. Definición de Energía Potencial Total

Tal como fue indicado, se abordará el estudio de sistemas estructurales discretos en los cuales se puede definir completamente la configuración del sistema mediante un número ( $n$ ) de coordenadas generalizadas ( $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ).

---

<sup>1</sup>Como complemento a esta sección se recomienda ver la presentación, del Profesor M. A. Wade del *Imperial College London*, titulada *Sandwiches, snakes and stays: interacting with instabilities*, disponible en: <https://youtu.be/NSFqwxW7gRo> (último acceso mayo de 2021).

Un sistema estructural conservativo que se encuentra en la configuración dada por  $\mathbf{q}$  tendrá una energía potencial total  $V(\mathbf{q})$  definida como:

$$V(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - W_E(\mathbf{q}), \quad (2.1)$$

donde  $U(\mathbf{q})$  es la energía elástica interna del sistema en la configuración dada por  $\mathbf{q}$  y  $W_E(\mathbf{q})$  es el trabajo realizado por las fuerzas externas conservativas aplicadas sobre el sistema desde una configuración de referencia arbitraria hasta la configuración  $\mathbf{q}$ .

Un ejemplo sencillo mediante el cual se pueden fijar estos conceptos es el de un sistema de una masa puntal ( $m$ ) y un resorte elástico lineal de constante ( $K$ ) sujeto a la acción externa de la gravedad ( $g$ ), como el que se muestra en la Figura 2.1.

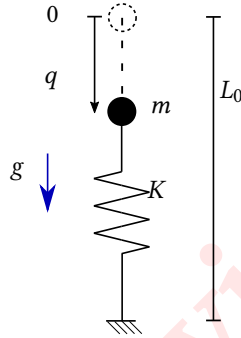


Figura 2.1: Esquema de sistema Masa-Resorte.

Se asume una configuración (no necesariamente de equilibrio) en la cual la masa se desplaza  $q$  respecto de la posición neutra del resorte. En dicha configuración, el resorte se encuentra comprimido, con una cierta energía elástica interna almacenada y la gravedad realizó un cierto trabajo,

$$U(q) = \frac{Kq^2}{2} + C_1 \quad \text{y} \quad W_E(q) = mgq + C_2, \quad (2.2)$$

respectivamente. Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  corresponden a las referencias que se tomen tanto para definir energía elástica interna como trabajo de fuerzas conservativas externas. Como se verá más adelante, estas constantes son intrascendentes para estudiar el equilibrio y la estabilidad y pueden ser consideradas nulas por conveniencia.

La expresión de energía elástica interna del resorte se puede obtener considerando el trabajo que se debe realizar sobre el resorte para llevarlo a una configuración comprimida (o extendida), en particular evaluando la siguiente integral:

$$U(q) = \int_{q_1}^q F(u) du = \int_{q_1}^q Ku du = \frac{Kq^2}{2} + C_1. \quad (2.3)$$

## Sección 2.1. Principio de Mínima Energía Potencial Total

27

Dicha integral es la definición de un componente elástico. Notar que uno podría eventualmente utilizar una expresión no lineal para  $F(u)$ , con lo cual se estaría considerando un resorte elástico pero no lineal.

A partir de lo anterior, el ejemplo de la masa y el resorte sometido a la acción de la gravedad resulta tener la siguiente expresión para la energía potencial total:

$$V(q) = \frac{Kq^2}{2} - mgq. \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Equilibrio y Estabilidad

La definición de Energía Potencial Total de la sección anterior permite expresar el equilibrio y la estabilidad de los sistemas estructurales de manera extremadamente sencilla.

#### Axioma 1

$\hat{q}$  es de Equilibrio  $\Leftrightarrow V(q)$  es estacionaria en  $\hat{q}$

Se puede mostrar que la condición de equilibrio estático correspondiente a esta definición es equivalente a la que se obtiene mediante la segunda ley de Newton. La ventaja de formular el equilibrio mediante el Principio de Mínima Energía Potencial Total es que dicho procedimiento es significativamente más sencillo y sistemático que el de Newton. Sin embargo, se puede argumentar que se pierde cierta cuota de intuición con lo cual la segunda ley de Newton sigue teniendo un importante valor.

#### Axioma 2

$\hat{q}$  es Estable  $\Leftrightarrow V(q)$  es tiene un mínimo relativo estricto en  $\hat{q}$

La definición de estabilidad del equilibrio estático dada por la expresión anterior es particularmente simple de estudiar, especialmente si se compara contra la alternativa de estudiar la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones dinámicas del sistema frente a perturbaciones respecto de los equilibrios estáticos.

Si la función  $V(q)$  es suficientemente suave, las condiciones de equilibrio y estabilidad pueden ser expresadas usando derivadas parciales de  $V(q)$ :

- **Equilibrio**  $\Leftrightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{\hat{q}} = 0$
- **Estabilidad**  $\Leftrightarrow H_V|_{\hat{q}}$  es definida positiva.

donde  $H_V$  es la matriz Hessiana de derivadas parciales segundas de  $V(q)$ . Una matriz  $A$  es definida positiva por definición si:  $\forall u \neq 0 \in \mathbb{R}^N$  se cumple  $u^T A u > 0$ . La

definición de matriz definida positiva en el caso de matrices reales diagonalizables es equivalente a que todos los valores propios sean positivos.

En el ejemplo del sistema masa-resorte, se puede ver que la condición de equilibrio resulta en:

$$\frac{dV(q)}{dq} = Kq - mg = 0, \quad (2.5)$$

lo cual resulta en la posición de equilibrio esperada para el sistema. Adicionalmente, se puede ver que  $\frac{d^2V(q)}{dq^2} = K > 0$ , a partir de lo cual el axioma de estabilidad garantiza que el equilibrio  $\hat{q} = mg/K$  es estable como era de esperar.

### Equilibrio y estabilidad en sistemas de un grado de libertad

La deducción de la condición de estabilidad para una  $V(q)$  diferenciable en un grado de libertad ( $q \in \mathbb{R}$ ) se presenta a continuación.

Haciendo un desarrollo de Taylor de  $V(q)$  en el punto  $\hat{q}$ , se tiene un entorno de radio  $\epsilon$  de  $\hat{q}$  tal que  $\forall \delta < \epsilon$ :

$$V(\hat{q} + \delta) = V(\hat{q}) + V'(\hat{q})\delta + \frac{1}{2!} V''(\hat{q})\delta^2 + \frac{1}{3!} V'''(\hat{q})\delta^3 + \dots \quad (2.6)$$

La condición de mínimo relativo estricto de  $V(q)$  en  $\hat{q}$  corresponde a que exista un entorno de  $\hat{q}$  tal que  $\forall \delta$  se cumpla:

$$V(\hat{q} + \delta) - V(\hat{q}) > 0. \quad (2.7)$$

Despejando de la Ecuación (2.6), se obtiene:

$$V(\hat{q} + \delta) - V(\hat{q}) = V'(\hat{q})\delta + \frac{1}{2!} V''(\hat{q})\delta^2 + \frac{1}{3!} V'''(\hat{q})\delta^3 + \dots \quad (2.8)$$

Dado que se considera una configuración de equilibrio, se debe verificar que  $V'(\hat{q}) = 0$ . De esa manera se obtiene la siguiente igualdad:

$$V(\hat{q} + \delta) - V(\hat{q}) = \frac{1}{2!} V''(\hat{q})\delta^2 + \frac{1}{3!} V'''(\hat{q})\delta^3 + \dots \quad \forall \delta < \epsilon \quad (2.9)$$

con lo cual, se observa que si  $V''(\hat{q}) > 0$  (y  $\delta$  es pequeño) entonces se satisface la desigualdad de la Ecuación (2.7) y por lo tanto  $\hat{q}$  es un punto estable.

Notar que podría ocurrir que  $V''(\hat{q}) = 0$  y se podría tener estabilidad si  $V'''(\hat{q}) = 0$  y  $V^{(4)}(\hat{q}) > 0$ . Con lo cual, estabilidad no necesariamente implica derivada segunda de  $V$  positiva. De todas formas, si ocurre lo anterior diremos que el sistema es débilmente estable.



### Clasificación de curvas de carga-desplazamiento

Las curvas de carga-desplazamiento pueden ser clasificadas a partir del estudio de la estabilidad de los equilibrios de los puntos que las integran. Partiendo de una estructura sin carga aplicada ( $\lambda = 0$ ) e incrementando el factor de carga gradualmente, se puede obtener un primer punto de equilibrio sobre la curva de carga-desplazamiento para el cual  $V''(q) = 0$ . Este punto es llamado *Punto Crítico*:  $C = (P^c, Q^c)$ . En la Figura 2.2 se presenta un ejemplo de curva carga-desplazamiento en la cual, para cada nivel de carga, se esquematiza la energía potencial total (ver (Thompson y Hunt, 1973) por otros ejemplos de este tipo de diagramas). En cuanto a las curvas de carga-desplazamiento, las líneas sólidas muestran equilibrios estables mientras que las punteadas muestran equilibrios inestables. Se debe notar la coincidencia de mínimos (máximos) de la Energía Potencial Total con puntos de equilibrio estable (inestable).

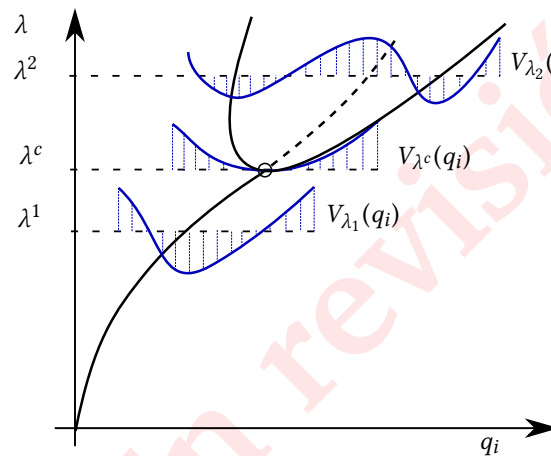


Figura 2.2: Curva carga-desplazamiento de sistema con bifurcación simétrica estable.

### 2.1.3. Clasificación de Puntos Críticos

En esta sección se presenta una clasificación de puntos críticos a través de un conjunto de sistemas estructurales formados por barras rígidas unidas por articulaciones y resortes elásticos lineales (de desplazamiento y/o de giro). Para cada estructura y sistema de cargas se muestran las curvas de carga-desplazamiento para la estructura sin imperfecciones (curva que parte del origen en color negro) y con imperfecciones geométricas (curvas que presentan un desplazamiento para carga nula en color azul). Los tramos de trazo continuo representan equilibrios estables mientras que los tramos discontinuos puntos de algún tipo de inestabilidad como se verá más adelante.

### Punto Límite

Un punto límite corresponde a una situación en la cual la estructura alcanza un punto de equilibrio inestable para el cual se produce un salto a otro equilibrio estable de manera dinámica (en inglés “*Snap-through*”). En la Figura 2.3a se puede observar una estructura con este comportamiento. La estructura es simétrica respecto al eje vertical y el resorte horizontal tiene comportamiento lineal. Las barras en la configuración de referencia forman un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, mientras que  $\theta$  indica el ángulo correspondiente a las barras en la posición deformada.

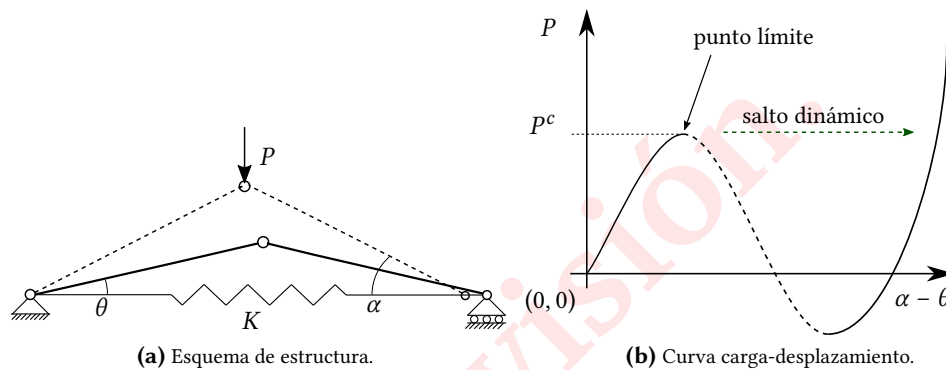


Figura 2.3: Estructura con comportamiento de punto límite.

En la Figura 2.3b se muestra la curva carga desplazamiento correspondiente. El tramo punteado indica puntos de equilibrio inestable. La estructura presenta un punto límite en el punto indicado en el gráfico. El comportamiento de estas estructuras no es sensible a imperfecciones.

### Bifurcación Simétrica Estable

Una bifurcación simétrica estable corresponde a una situación en la cual una estructura alcanza un punto crítico y a partir de ese punto, su curva de carga-desplazamiento se bifurca en varias ramas: una inestable y otras dos estables.

El pandeo de columnas elásticas pertenece a esta categoría. En la Figura 2.4a se puede ver una versión discreta de ese tipo de estructura. En estos casos, al alcanzarse la bifurcación las estructuras logran mantener la carga aunque sea con grandes deformaciones (ej. regla elástica en compresión). En la Figura 2.4b se muestra la curva carga-desplazamiento correspondiente. Notar que estas estructuras tampoco son sensibles a imperfecciones, siempre y cuando el comportamiento permanezca elástico.

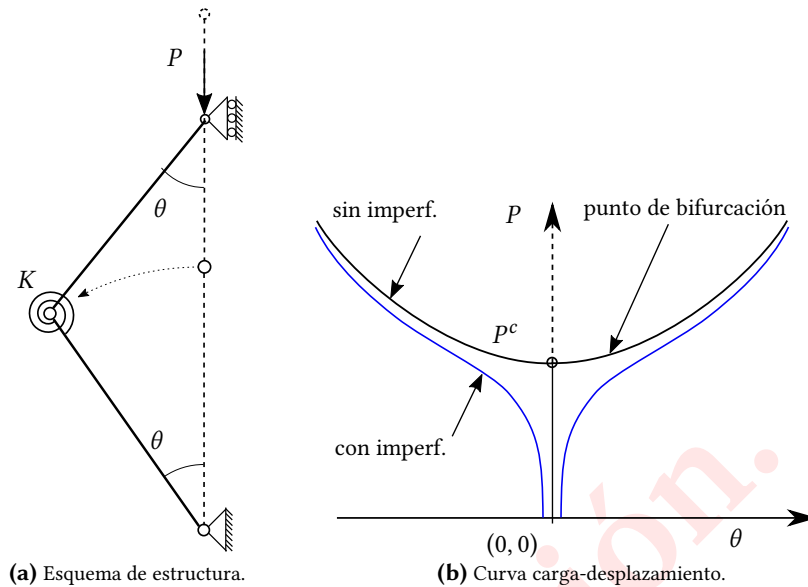


Figura 2.4: Estructura con comportamiento de bifurcación simétrica estable.

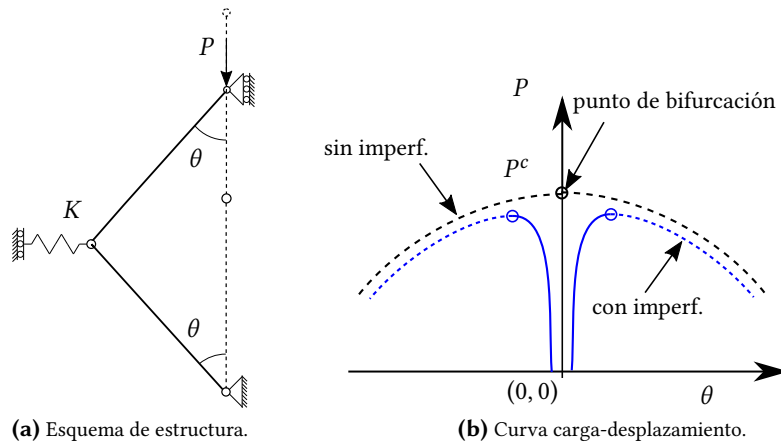
### Bifurcación Simétrica Inestable

Este tipo de comportamiento se corresponde al de estructuras y cargas tales que, al alcanzarse la carga crítica, la curva de carga-desplazamiento se divide en varias ramas, todas inestables. La rama inicial (fundamental) es la única estable.

Las cáscaras esbeltas sometidas a compresión meridional muestran este tipo de inestabilidad, ya que al alcanzar el punto de bifurcación pierden la capacidad de soportar la carga (ej. lata de aluminio en compresión). En la Figura 2.5a se muestra una estructura discreta que exhibe este comportamiento, la configuración de la estructura sin carga aplicada es representada por líneas punteada ( $\theta = 0$ ) mientras que en líneas sólidas se muestra la configuración deformada.

En la Figura 2.5b se muestran las curvas carga-desplazamiento, donde se recuerda que líneas sólidas corresponden a curvas con puntos de equilibrio estable y líneas punteadas corresponden a puntos de equilibrio inestable.

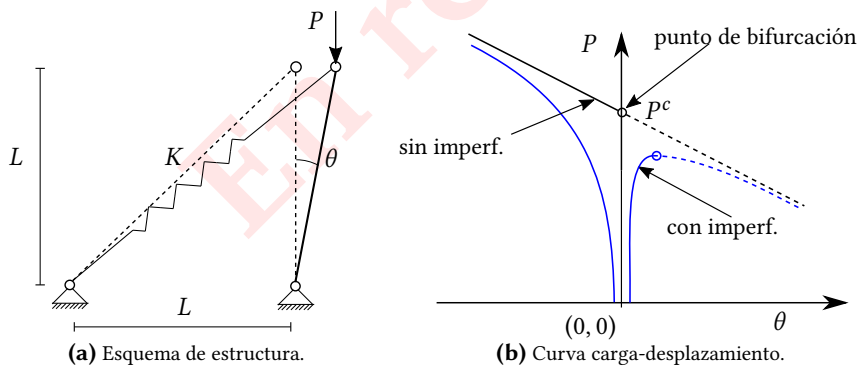
En el gráfico se observa que el comportamiento de estas estructuras es considerablemente sensible a imperfecciones. En general, la carga máxima soportada por la estructura decrece al considerar imperfecciones geométricas. El resultado observado en este ejemplo pone en evidencia la importancia de este tipo de análisis en estructuras como cáscaras.



**Figura 2.5:** Estructura con comportamiento de bifurcación simétrica inestable.

### Bifurcación Asimétrica

Este tipo de comportamiento corresponde a situaciones en las cuales la estructura alcanza una configuración de equilibrio inestable en la cual la curva de carga-desplazamiento se divide en varias ramas: dos ramas inestables y una estable. En la Figura 2.6a se muestra otro ejemplo de estructura con este comportamiento. En la Figura 2.6b se muestran las curvas carga-desplazamiento.



**Figura 2.6:** Ejemplo de estructura con comportamiento de bifurcación asimétrica.

Considerando perturbaciones o imperfecciones hacia un lado la estructura se sigue una rama estable, mientras que con perturbaciones hacia el otro lado se sigue una rama inestable, con lo cual, se clasifica como inestable en general. Consecuentemente la estructura es considerada como sensible a imperfecciones. El pórtico

in-desplazable conocido como *Roorda Frame* presenta un comportamiento de tipo bifurcación asimétrica (Thompson y Hunt, 1973).

#### 2.1.4. Ejemplo de Análisis de Equilibrio y Estabilidad

En lo que sigue se realiza el análisis, a modo de ejemplo, de la estructura correspondiente a una versión discreta de una viga-columna en compresión, la cual exhibe una bifurcación simétrica estable.

La configuración de la estructura queda totalmente definida por el ángulo que forma la barra rígida superior con la vertical ( $\theta$ ). Tomaremos como configuración de referencia para la energía interna y el trabajo externo la situación de:  $\theta = 0$ .

El giro relativo ( $\varphi$ ) entre las dos barras conectadas mediante el resorte de giro es igual a:  $\varphi = 2\theta$ . El descenso ( $\Delta$ ) del punto de aplicación de carga respecto de la configuración de referencia es:

$$\Delta = 2L(1 - \cos(\theta)) \quad (2.10)$$

A partir de esto, se puede escribir la energía elástica interna y el trabajo de la fuerza aplicada en función de  $\theta$  como:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K(2\theta)^2 \quad \text{y} \quad W_E(\theta) = 2PL(1 - \cos(\theta)), \quad (2.11)$$

respectivamente. La energía potencial total es, por lo tanto, igual a:

$$V(\theta) = \frac{1}{2}4K\theta^2 - 2PL(1 - \cos(\theta)). \quad (2.12)$$

La ecuación de equilibrio queda definida, mediante la condición  $V'(\theta) = 0$ , como:

$$4K\theta - 2PL \sin(\theta) = 0. \quad (2.13)$$

Las soluciones de esta ecuación no lineal cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Rama F:  $\theta = 0 \quad \forall P \in \mathbb{R}$
- Rama E:  $P = 2K\theta/(L \sin(\theta))$  con:  $\theta \in (-\pi, \pi) \setminus 0$ .

La rama de la solución hallada que pasa por el origen: ( $P = 0$ ,  $\theta = 0$ ) es llamada la *rama fundamental* (Rama F).

Se procede a estudiar la estabilidad de los equilibrios hallados. En primer lugar se analiza la estabilidad de la rama fundamental. Para ello primero se debe calcular la derivada segunda de la energía potencial total:  $V''(\theta)$

$$V''(\theta) = 4K - 2PL \cos(\theta), \quad (2.14)$$

luego, evaluando dicha función en la rama fundamental se obtiene:

$$V''(\theta)|_F = 4K - 2PL. \quad (2.15)$$

Se puede observar que  $P^C = 2K/L$  es el nivel de carga del punto crítico, ya que la derivada segunda se anula por primera vez para esa carga. En dicho nivel de carga la rama fundamental se bifurca, es decir que el equilibrio en  $\theta = 0$  es estable para cargas menores a  $P^C$  e inestable para cargas mayores a  $P^C$ .

Para estudiar la estabilidad de las ramas secundarias se evalúa la derivada segunda de  $V(\theta)$  obteniendo:

$$V''(\theta)|_E = 4K \left( 1 - \frac{\theta}{\tan(\theta)} \right) > 0. \quad (2.16)$$

A partir de la Ecuación (2.16) se comprueba que la Rama E ( $\theta \neq 0$ ) es estable.

#### Actividad

Repetir el análisis anterior considerando la aproximación:  $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$  en la Ecuación (2.10). Mostrar que es posible identificar el punto crítico y la simetría de la bifurcación. Verificar que no es posible establecer si el equilibrio de las ramas es estable o inestable y proponer una mejora de la aproximación para lograr esto.

## 2.2. Principio de los Trabajos Virtuales

En esta sección se introduce el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV), con el objetivo de generar intuición sobre su fundamento y validez para el análisis de estructuras. El PTV es una formulación variacional del equilibrio estático, esto significa que se plantea la condición de equilibrio como una relación que debe satisfacerse para perturbaciones virtuales arbitrarias del sistema estructural. Esta formulación del equilibrio es usualmente llamada forma débil y es frecuentemente utilizada para el desarrollo formal de métodos numéricos para análisis de estructuras (Hughes, 1987).

Se presentarán ejemplos triviales didácticos de aplicación del PTV para determinar las ecuaciones de equilibrio estático. Se introducen luego ejemplos de aplicación del PTV de mayor interés práctico en los que se incluyen componentes deformables. Adicionalmente, se mostrará la relación entre el equilibrio calculado mediante el Principio de Mínima Energía Potencial Total y el determinado mediante el PTV. Finalmente, se presenta la formulación del PTV para elementos de tipo biela (miembros puramente axiales) necesaria para la formulación sistemática del Método de Elementos Finitos.

Para la presentación de los conceptos de esta sección se adoptó un abordaje si-

## Sección 2.2. Principio de los Trabajos Virtuales

35

milar al de (McGuire *et al.*, 1999), sin embargo se puede encontrar otros desarrollos en libros como (Reddy, 2002) o (Bathe, 2014).

### 2.2.1. PTV para Partículas y Sistemas de Partículas

En lo que sigue se busca mostrar la equivalencia entre el enunciado del equilibrio estático de una partícula mediante la Segunda Ley de Newton y el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). En primer lugar se enuncia el PTV y luego se demostrará su equivalencia con Newton.

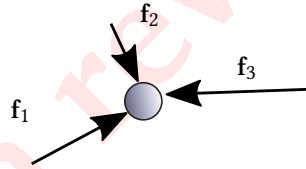
#### Principio de Trabajos virtuales para una partícula

Una partícula está en equilibrio estático si se cumple que: para todo desplazamiento virtual el trabajo de las fuerzas externas es nulo, es decir:

$$\delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{x}.$$

A continuación se muestra que el equilibrio estático según la Segunda Ley de Newton implica el PTV.

Sea una partícula sometida a un conjunto de fuerzas externas ( $\mathbf{f}_i$ ) en equilibrio estático tal como se muestra en la Figura 2.7.



**Figura 2.7:** Equilibrio de partícula sometida a fuerzas externas.

El equilibrio estático puede ser expresado mediante la Segunda Ley de Newton como la siguiente ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{n_f} \mathbf{f}_i = 0, \quad (2.17)$$

siendo  $n_f$  el número de fuerzas aplicadas (en este caso  $n_f = 3$ ).

Proyectando ambos lados de la igualdad dada en (2.17) según la dirección de un vector unitario cualquiera  $\hat{\mathbf{u}}$  se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n_f} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_i = 0. \quad (2.18)$$

Se define el Desplazamiento Virtual de la partícula como  $\delta \mathbf{x}$ , siendo éste un pequeño desplazamiento virtual o hipotético de la partícula, el cual no afecta el sistema de fuerzas externo aplicado. En base a este desplazamiento virtual definimos el Trabajo Virtual Externo,  $\delta W_{\text{ext}}$ , como aquel que realizan las fuerzas externas para el desplazamiento virtual:

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n_f} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f}_i. \quad (2.19)$$

Dado que el desplazamiento virtual es arbitrario, el mismo puede ser expresado como el producto de un vector unitario con dirección arbitraria  $\hat{\mathbf{u}}$  y una constante  $\delta x$  pequeña arbitraria. Es decir:  $\delta \mathbf{x} = \delta x \hat{\mathbf{u}}$ .

A partir de lo anterior y la definición de la Ecuación (2.19) se tiene que

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta x \sum_{i=1}^{n_f} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_i \quad \forall \delta x, \forall \hat{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

Usando el equilibrio estático dado por Newton en la Ecuación (2.18), se concluye que

$$\delta W_{\text{ext}} = 0 \quad \forall \delta x, \quad (2.21)$$

por lo que queda probado que el equilibrio de Newton implica que se cumpla el PTV para la partícula.

#### Actividad

Mostrar el recíproco del resultado anterior, es decir, mostrar que el PTV implica la segunda ley de Newton.

#### 2.2.2. PTV para Cuerpos Rígidos

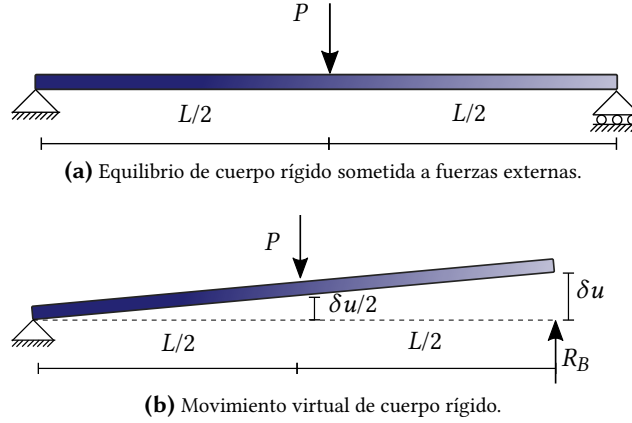
Se propone avanzar, usando el resultado anterior, hacia el planteo del PTV para un cuerpo rígido.

La hipótesis central considerada es que el cuerpo que estudiado es rígido, por lo tanto incluso ante desplazamientos virtuales el cuerpo permanece rígido. Se ilustra la situación mediante el ejemplo de una barra rígida simplemente apoyada en sus extremos y sometida a una fuerza lateral en la mitad de su largo, ver Figura 2.8a. Para poder realizar un desplazamiento virtual de la barra rígida, se cambia el apoyo deslizante derecho por una fuerza estáticamente equivalente (la reacción vertical), ver Figura 2.8b. Una vez liberado ese vínculo, se puede considerar un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{x}$  de la barra rígida. Dicho desplazamiento debe satisfacer la condición de borde en desplazamiento dada en el apoyo simple izquierdo y también la condición de cuerpo rígido de la barra. Se concluye que el desplazamiento virtual debe ser un giro rígido en torno al apoyo izquierdo.



## Sección 2.2. Principio de los Trabajos Virtuales

37



**Figura 2.8:** PTV aplicado a equilibrio de cuerpo rígido.

Dado que el PTV para una partícula también se aplica a un sistema de partículas, se puede considerar el cuerpo rígido como un sistema de partículas con la propiedad que las distancias relativas entre ellas se mantienen constantes. De lo anterior se concluye que las fuerzas entre partículas no realizan trabajo virtual ya que durante el desplazamiento virtual no hay cambios en las distancias relativas entre ellas y por consiguiente no hay trabajo virtual. Por otro lado, la fuerza externa aplicada sí realiza trabajo sobre el desplazamiento virtual y lo mismo vale para la reacción derecha. A partir del razonamiento anterior y el PTV para sistemas de partículas, se tiene:

$$\delta W_{\text{ext}} = -P \frac{\delta u}{2} + R_B \delta u = 0 \quad \forall \delta u \quad (2.22)$$

Se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left( -\frac{P}{2} + R_B \right) \delta u = 0 \quad \forall \delta u, \quad (2.23)$$

donde, para que el producto se anule para todo  $\delta u$  se debe cumplir:

$$R_B = \frac{P}{2}. \quad (2.24)$$

La reacción vertical del apoyo izquierdo se puede determinar mediante un procedimiento idéntico al presentado para la reacción del apoyo derecho.

En conclusión, el PTV para cuerpos rígidos tiene la misma forma que el dado para sistemas de partículas. Notar que se deben liberar vínculos de manera de poder realizar los desplazamientos virtuales necesarios para determinar las ecuaciones de equilibrio.

### Actividad

Determinar todas las reacciones del ejemplo visto en esta sección, liberando todos los vínculos de apoyo al mismo tiempo y generando así un sistema de ecuaciones para determinar dichas reacciones.

#### 2.2.3. PTV para Estructuras con Componentes Deformables

Dados los conceptos presentados hasta aquí, se puede pasar a estudiar el PTV aplicado a estructuras con componentes deformables. Puntualmente, se considerará como ejemplo la cercha de Von Mises, la cual fue introducida en la Sección 2.1.3.

La estructura está compuesta por dos barras de largo  $L$ , rígidas, unidas por una articulación perfecta. El extremo libre izquierdo de las barras se soporta mediante un apoyo fijo y el extremo libre derecho mediante un apoyo deslizable. Ambos apoyos se unen con un resorte, es decir, un cuerpo deformable (ver Figura 2.3a). Notar que no se especifica la relación constitutiva del resorte. La estructura se somete a una carga externa vertical descendente  $P$  y el ángulo que forma una de las barras inclinadas con la horizontal para  $P = 0$  es igual a  $\alpha$ .

El paso clave para determinar el equilibrio del sistema estructural consiste en sustituir el cuerpo deformable (resorte) por un conjunto de fuerzas estáticamente equivalente y equilibrado aplicado al resto de la estructura.

Cuando la estructura está en una configuración de equilibrio, el resorte puede ser sustituido por dos fuerzas opuestas de valor  $F_{\text{int}}$  aplicadas en los nodos de los extremos. De esta forma se vuelve a tener una estructura compuesta de cuerpos rígidos sometida a fuerzas externas (ver Figura 2.9), con lo cual se puede aplicar el PTV tal como fue presentado en la sección anterior, es decir:

$$\delta W_{\text{ext}} = 0. \quad (2.25)$$

Se plantea un desplazamiento virtual cinemáticamente admisible de la estructura representado por  $\delta\theta$  en torno a una configuración deformada  $\theta$ . La fuerza  $P$  hace trabajo sobre el desplazamiento virtual descendente  $\delta w$  y la fuerza interna del resorte  $F_{\text{int}}$  hace trabajo sobre el desplazamiento virtual horizontal del apoyo derecho  $\delta u$ .

Usando las relaciones cinemáticas

$$w = L(\sin(\alpha) - \sin(\theta)) \quad \text{y} \quad u = 2L(\cos(\theta) - \cos(\alpha)),$$

se pueden escribir todos los desplazamientos virtuales en función de  $\delta\theta$ :

$$\delta w = -L \cos(\theta) \delta\theta \quad \text{y} \quad \delta u = -2L \sin(\theta) \delta\theta. \quad (2.26)$$

Dadas las fuerzas y desplazamientos virtuales se calcula el trabajo virtual de estas

## Sección 2.2. Principio de los Trabajos Virtuales

39

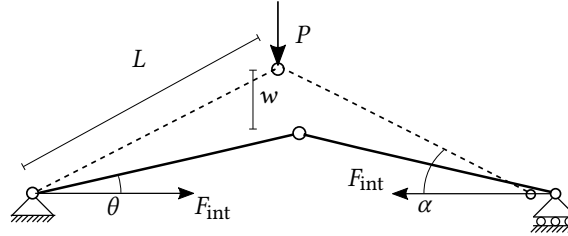


Figura 2.9: Cercha de Von Mises, con fuerzas internas.

fuerzas, para todo  $\delta\theta$ :

$$\delta W = P\delta w - F_{\text{int}}\delta u \quad (2.27)$$

Se define el primer término, dependiente de  $P$ , como el trabajo virtual de las fuerzas externas:  $\delta W_{\text{ext}}$  y el segundo término como menos el trabajo virtual de las fuerzas internas:  $-\delta W_{\text{int}}$ .

A partir de las definiciones anteriores y el PTV para cuerpos rígidos, el PTV para la estructura con cuerpos deformables resulta:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta\theta \quad (2.28)$$

Mediante la Ecuación (2.26) y el PTV se determina la ecuación de equilibrio para la cercha de Von Mises.

$$\begin{aligned} P\delta w &= F_{\text{int}}\delta u \\ PL\cos(\theta)\delta\theta &= F_{\text{int}}2L\sin(\theta)\delta\theta \\ (2F_{\text{int}}\sin(\theta) - P\cos(\theta))\delta\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Se concluye que el equilibrio de la estructura está dado por:

$$2F_{\text{int}}\sin(\theta) - P\cos(\theta) = 0 \quad (2.30)$$

El análisis realizado permite escribir el PTV para estructuras con cuerpos deformables de manera general como se enuncia a continuación.

### Principio de Trabajos Virtuales para Estructuras Deformables

Una estructura con componentes deformables está en equilibrio estático si para todo desplazamiento virtual admisible  $\delta u$  se cumple que:  $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$ .

### Relación con Principio Mínima Energía Potencial Total

Continuando el análisis de la cercha de Mises como ejemplo de un sistema estructural con componentes deformables, se procede a comparar los resultados obtenidos mediante el Principio de Mínima Energía Potencial Total con los del PTV.

Tal como se vio en la sección anterior, no es necesario especificar la relación constitutiva del componente deformable para poder plantear el equilibrio mediante el PTV. Se recuerda que para determinar completamente el comportamiento estático de un sólido se deben satisfacer las siguientes condiciones: Equilibrio, Relación Constitutiva y Compatibilidad.

En la cercha de Mises, es claro que el PTV garantiza la condición de Equilibrio y que la Compatibilidad queda dada por la relación entre desplazamientos y deformaciones del componente deformable. De esta forma queda por imponer la relación constitutiva para tener determinado el comportamiento estático de la estructura.

La relación constitutiva elástica para el componente deformable da la siguiente expresión para la energía interna ( $U$ ) del mismo:

$$U = \int_{u_0}^u F_{\text{int}}(s) ds \quad (2.31)$$

Por lo tanto, se puede escribir la fuerza interna como:

$$F_{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial u} \quad (2.32)$$

En base al PTV dado en la Ecuación (2.27), usando la definición de  $F_{\text{int}}$  para el caso de un componente deformable elástico:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} - F_{\text{int}} \delta u &= 0 \\ \delta W_{\text{ext}} - \frac{\partial U}{\partial u} \delta u &= 0 \\ \delta W_{\text{ext}} - \delta U &= 0 \\ \delta V &= 0 \end{aligned}$$

La última ecuación muestra que el PTV sumado a la relación constitutiva elástica resulta en la condición de equilibrio dada por el Principio de Mínima Energía Potencial Total. En conclusión, el PTV es un enunciado general del equilibrio que el Principio de Mínima Energía Potencial Total ya que no requiere que se cumpla una relación constitutiva en particular.

### Actividad

Determinar la ecuación de equilibrio de la cercha de Mises bajo la hipótesis de resorte elástico lineal de constante ( $K$ ). Comparar la solución hallada con el resultado mostrado en la Sección 2.1.3.

#### 2.2.4. PTV para Elementos de Tipo Biela

En base a los casos del PTV presentados en las secciones anteriores, se puede pasar a enunciar el PTV para el caso de elementos sólidos deformables de tipo Biela. Es decir, se estudia el PTV para barras que solamente pueden resistir esfuerzos axiales.

Se planteará el PTV para una barra aislada y esto permitirá estudiar estructuras compuestas de ensamblajes de barras de este tipo, simplemente sumando los trabajos virtuales de todos los elementos considerados.

A partir del PTV para estructuras con componentes deformables visto en la sección anterior, se puede obtener una expresión para barras tipo biela. La expresión del PTV es

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad (2.33)$$

considerando a la barra como una colección de componentes deformables de largo  $dx$  y definiendo  $\sigma = \frac{F_{\text{int}}}{A}$  y  $\delta \varepsilon = \frac{d\delta u}{dx}$  se puede llegar a expresar el trabajo virtual interno como una integral en el largo  $L$  de la barra en la configuración de equilibrio. Se obtiene entonces:

$$\int_V \sigma \delta \varepsilon dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \quad (2.34)$$

En la Ecuación (2.34), la integral se realiza sobre la configuración de equilibrio ( $V$ ), la tensión  $\sigma$  es la tensión en la configuración de equilibrio dada como fuerza por unidad de área en la configuración deformada. Dado que la configuración de equilibrio es desconocida, esta expresión del PTV es problemática en cuanto a que se integra sobre un volumen desconocido y a que las tensiones se refieren a un área también desconocida.

La manera de resolver esta dificultad es cambiando en la integral las medidas de deformación y tensión de manera que refieran a configuraciones conocidas. Las configuraciones de referencia que se suelen seleccionar son:

- La configuración indeformada ( $V_0$ ), resultando en lo que se conoce como *Total Lagrangean Formulation*.
- Una configuración deformada conocida en un paso anterior ( $V_k$ ), resultando en lo que se conoce como *Updated Lagrangean Formulation*.

Si se quiere analizar problemas con grandes deformaciones unitarias, es necesario distinguir respecto de cuál configuración se definen las tensiones, deformaciones

y volumen de integración. En el libro (Crisfield, 1996) se presenta un tratamiento conciso de estos temas mientras que en los libros (Bathe, 2014; Belytschko *et al.*, 2014) se puede encontrar un tratamiento más detallado.

En el caso de comportamientos con grandes desplazamientos, grandes rotaciones pero pequeñas deformaciones unitarias, podremos asumir que el área respecto de la cual se define la tensión  $\sigma$  no cambia y que el volumen de integración tampoco cambia. En este curso se estudian problemas de este tipo y se optó por utilizar la *Total Lagrangean Formulation*, con lo cual las integrales y áreas se refieren a la configuración inicial de la barra.

#### Principio de Trabajos Virtuales para Elemento de Biela

$$\int_{V_0} \sigma \delta \varepsilon \, dV_0 = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.35)$$

Las deformaciones virtuales  $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$  deberán ser suaves y cinemáticamente admisibles. Es decir, con derivadas continuas y deben respetar las condiciones de borde de desplazamientos.

### 2.3. Medidas No Lineales de Deformación

En esta sección se presentan medidas de deformación no lineales respecto de los desplazamientos. Las mismas se presentan en el contexto de una barra tipo biela, pero estas medidas de deformación se generalizan también al caso de cuerpos sólidos continuos. Dado que en este documento no se discute el comportamiento de sólidos continuos, se refiere al libro (Crisfield, 1996) por más detalle de la generalización a sólidos.

La definición de medidas de deformación no lineales en los desplazamientos permiten en conjunto con el PTV visto en la Sección 2.2.4 analizar la deformación de barras axiales (bielas) bajo hipótesis de grandes deformaciones, grandes rotaciones y pequeñas deformaciones unitarias.

Se verán algunas definiciones distintas, se compararán los resultados que se obtienen a partir de las mismas y se concluirá seleccionando una de ellas para que sirva de base del desarrollo de los elementos finitos que se formulan en la sección siguiente.

Esta sección se basa en el Capítulo 3 del libro (Crisfield, 1996). También se puede encontrar una presentación similar a esta en el libro (Bonet y Wood, 2008).

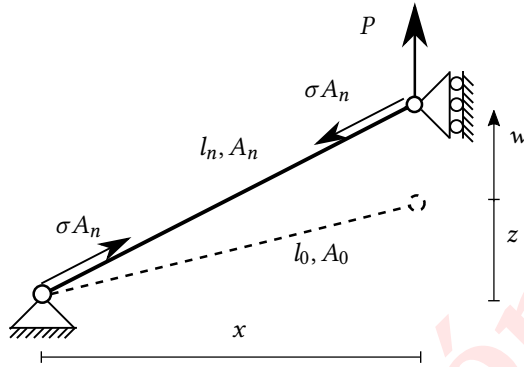
#### 2.3.1. Estructura de Referencia

La estructura mediante la cual se van a plantear las medidas de deformación no lineales es una versión de la cercha de Von Mises. En este caso se considera una barra

### Sección 2.3. Medidas No Lineales de Deformación

43

axialmente deformable (biela) inclinada, apoyada en su extremo izquierdo y sujeta lateralmente en su extremo derecho. El extremo derecho desliza verticalmente y sobre éste se aplica una carga vertical ( $P$ ) definida como positiva cuando es ascendente, ver Figura 2.10.



**Figura 2.10:** Estructura de Referencia para Medidas de Deformación No-Lineales.

La elevación del extremo derecho en la configuración indeformada ( $P = 0$ ) respecto del extremo izquierdo es igual a  $z$ . La coordenada  $w$  define completamente la configuración deformada de la estructura y es positiva en la dirección ascendente.

En la configuración indeformada, la barra tiene largo  $l_0$  y el área de su sección es  $A_0$ . Mientras que en una configuración deformada, la barra tiene largo  $l_n$  y el área de su sección es  $A_n$ .

#### 2.3.2. Deformación Unitaria Ingenieril Rotada

Se define la deformación unitaria ingenieril rotada como:

$$\varepsilon_E = \frac{l_n - l_0}{l_0}. \quad (2.36)$$

Notar que la deformación unitaria se mide respecto de una dirección que rota en conjunto con la barra y no respecto de ejes globales cartesianos fijos (ver Figura 2.10). El largo deformado puede ser escrito como:

$$l_n = ((z + w)^2 + x^2)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Se calcula la variación virtual de la deformación unitaria ingenieril rotada usando las definiciones dadas por las Ecuaciones (2.36) y (2.37).

$$\delta \varepsilon_E = \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial w} \delta w = \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial l_n} \frac{\partial l_n}{\partial w} \delta w = \frac{1}{l_0} \frac{2(z + w)}{2l_n} \delta w = \frac{(z + w)}{l_n l_0} \delta w \quad (2.38)$$

Usando la Ecuación (2.38) en la Ecuación (2.35) se obtiene la siguiente expresión del PTV:

$$\sigma_E \frac{(z+w)}{l_0 l_n} \delta w A_0 l_0 = P_E \delta w, \quad (2.39)$$

donde la tensión fue llamada  $\sigma_E$ . Usando que esta identidad se cumple para todo  $\delta w$ , sustituyendo la tensión en la barra por  $E\varepsilon_E$  y usando la definición de la deformación, se tiene:

$$EA_0 \frac{\left( \sqrt{(w+z)^2 + x^2} - l_0 \right)}{l_0} \frac{(z+w)}{\sqrt{(w+z)^2 + x^2}} = P_E, \quad (2.40)$$

por lo tanto

$$P_E(w) = \frac{EA_0(z+w) \left( \sqrt{(w+z)^2 + x^2} - l_0 \right)}{l_0 \sqrt{(w+z)^2 + x^2}}. \quad (2.41)$$

La expresión de la Ecuación (2.41) es no lineal con respecto a  $w$  y su evaluación numérica debe ser realizada con cierto cuidado para evitar errores debidos a *Cancelación Catastrófica*.

### 2.3.3. Deformación Unitaria de Green

Se define la deformación unitaria de Green como:

$$\varepsilon_G = \frac{l_n^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{2zw + w^2}{2l_0^2} \quad (2.42)$$

#### Actividad

Mostrar que se cumple la identidad:  $\varepsilon_G = \varepsilon_E(1 + \varepsilon_E/2)$ .

Dado el resultado de la actividad anterior se ve que para pequeñas deformaciones unitarias ingenieriles rotadas, ambas medidas de deformaciones tienen valores similares.

Se calcula la variación virtual de la deformación de Green usando las definiciones dadas por las Ecuaciones (2.42) y (2.37), obteniendo

$$\delta \varepsilon_G = \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial l_n} \frac{\partial l_n}{\partial w} \delta w = \frac{2l_n}{2l_0^2} \frac{2(z+w)}{2l_n} \delta w = \frac{(z+w)}{l_0^2} \delta w. \quad (2.43)$$

Usando la Ecuación (2.43) en la Ecuación (2.35) del PTV y llamando la tensión en la barra como  $\sigma_G$ :

$$P_G = \frac{\sigma_E A_0 (z+w)}{l_0} \quad (2.44)$$



### Sección 2.3. Medidas No Lineales de Deformación

45

Usando una relación constitutiva con módulo elástico constante  $E$  ( $\sigma_G = E\varepsilon_G$ ) y expresando todo en función de la variable  $w$ :

$$P_G(w) = \frac{EA_o(z+w)(2zw+w^2)}{2l_o^3} \quad (2.45)$$

Notar que la expresión de la Ecuación (2.45) es bastante más simple que la obtenida con la deformación unitaria ingenieril rotada. Además, se puede ver que si  $l_n \simeq l_o$  entonces tanto las deformaciones unitarias como las relaciones de equilibrio coinciden. En conclusión, en hipótesis de pequeñas deformaciones unitarias los resultados obtenidos con ambas deformaciones unitarias coincidirán de manera muy aproximada.

#### 2.3.4. Deformación Unitaria de Logarítmica Rotada

La deformación unitaria Logarítmica Rotada puede ser definida mediante la siguiente relación incremental:

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta l}{l}, \quad (2.46)$$

donde  $l$  es la longitud en una configuración deformada dada y  $\delta l$  es una variación de dicha longitud. La expresión de la deformación es obtenida integrando estas variaciones de deformación dadas por la Ecuación (2.46):

$$\varepsilon_L = \int_{l_o}^{l_n} \delta\varepsilon = \ln\left(\frac{l_n}{l_o}\right). \quad (2.47)$$

#### Actividad

Mostrar que las deformaciones unitarias vistas están relacionadas según la identidad:

$$\varepsilon_L = \ln(1 + \varepsilon_E) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2\varepsilon_G).$$

Se calcula la variación virtual de la deformación logarítmica rotada usando las definiciones (2.46) y (2.37).

$$\delta\varepsilon_L = \frac{\delta l_n}{l_n} = \frac{1}{l_n} \frac{\partial l_n}{\partial w} \delta w = \frac{1}{l_n} \frac{2(z+w)}{2l_n} \delta w = \frac{(z+w)}{l_n^2} \delta w \quad (2.48)$$

Usando la Ecuación (2.48) y la Ecuación (2.34), dado que la variación virtual de la deformación logarítmica está referida a la configuración deformada, y llamando

la tensión en la barra como  $\sigma_L$ , se obtiene:

$$P_L = \frac{\sigma_L(z+w)A_n l_n}{l_n^2}. \quad (2.49)$$

Se asume ahora que se trabaja bajo pequeñas deformaciones y por lo tanto:  $A_o \approx A_n$  y también  $l_o \approx l_n$ , lo cual permite asumir que el volumen de la barra no cambia al llegar a la configuración deformada:  $l_o A_o \approx l_n A_n$ .

Se asume una relación constitutiva con módulo elástico constante  $E$  ( $\sigma_L = E\varepsilon_L$ ) y luego se expresa todo en función de la variable  $w$ :

$$P_L(w) = \frac{E(z+w)A_o l_o}{(z+w)^2 + x^2} \ln \left( \frac{\sqrt{(z+w)^2 + x^2}}{l_o} \right) \quad (2.50)$$

Notar que la expresión de la Ecuación (2.50) es nuevamente bastante compleja en comparación con la dada por la deformación unitaria de Green.

### 2.3.5. Comparación de las Medidas de Deformación

Antes de pasar a la comparación numérica de las relaciones de equilibrio obtenidas para cada deformación unitaria asumida, se analiza el equilibrio de la barra mediante la segunda ley de Newton.

Proyectando la fuerza axial de la barra en la configuración deformada según la dirección vertical e igualando a la fuerza externa  $P$  se obtiene:

$$P = \sigma A_n \frac{w+z}{l_n} \quad (2.51)$$

La tensión axial de la barra definida como fuerza axial sobre área de la barra en la configuración deformada ( $\sigma = F/A_n$ ) se denomina tensión de Cauchy y se puede considerar como la tensión axial “real” de la barra. Esta es la tensión que es relevante del punto de vista ingenieril ya que tiene un claro significado físico.

Si se compara la relación de equilibrio dada por la Ecuación (2.51) con la obtenida a través de la deformación logarítmica rotada en la Ecuación (2.49) se nota que  $\sigma_L = \sigma$ . Por otro lado, comparando con las tensiones usadas con las otras medidas de deformaciones:  $\sigma_E = \sigma A_n/A_o$  y  $\sigma_G = \sigma A_n l_o/(A_o l_n)$ .

Por lo tanto las tensión que obtenemos usando la deformación de Green necesita ser corregida para obtener la tensión de real o de Cauchy. La tensión obtenida al usar la deformación unitaria de Green se llama la Segunda Tensión de Piola-Kirchoff y tiene generalización en forma de tensor para sólidos continuos.

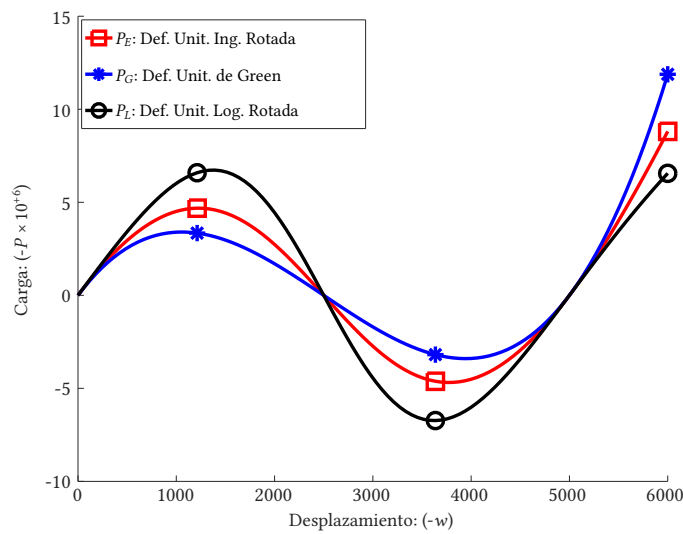
Como se mencionó anteriormente, si verifica que las deformaciones unitarias son pequeñas, entonces los largos de barras y áreas de barras pueden considerarse como aproximadamente constantes durante la deformación. Esto resulta en que  $\sigma_G \approx \sigma$

### Sección 2.3. Medidas No Lineales de Deformación

47

y de esta forma, con buen grado de aproximación, no se requiere corrección alguna para las tensiones.

A continuación, para comparar numéricamente las relaciones de equilibrio obtenidas, se asumen valores concretos para los parámetros de la estructura y se calculan los valores de  $q$  para cada medida de deformación considerada. Los valores asumidos son:  $x = 2500$ ,  $A_0 = 100$ ,  $E = 5 \times 10^5$ ,  $z = 2500$ . Los resultados se ven en la Figura 2.11.



**Figura 2.11:** Curvas carga-desplazamiento para distintas medidas de deformación.

Se puede ver como en las posiciones con pequeñas deformaciones los resultados de las distintas medidas de deformación coinciden, es decir cerca de  $w = 0$  y cerca de  $w = 5000$ . Mientras que en las posiciones con mayores deformaciones unitarias, los resultados dados por las distintas medidas de deformación difieren. Siendo la de Green la que presenta el comportamiento más flexible.

Cabe indicar que en el cálculo de  $\sigma_L$  se asumió que el volumen de la barra era constante.

Adicionalmente, se utilizó la misma relación constitutiva con un módulo  $E$  fijo para todas las deformaciones unitarias vistas. Es claro que imponer la misma relación lineal a distintas medidas de tensión y deformación resulta en distintas predicciones en la hipótesis de grandes deformaciones unitarias. Un tratamiento más detallado de estos temas corresponde al análisis con grandes deformaciones unitarias, lo cual está fuera del alcance de este curso.

Como conclusión a los conceptos presentados en este capítulo, se vieron distintas medidas de deformación unitarias no lineales respecto de los desplazamientos.

Cada una se relaciona a través del PTV a una medida de tensión conjugada. Se vieron las equivalencias tanto entre medidas de deformación como entre medidas de tensión y se introdujo la medida de tensión “real” de Cauchy. La equivalencia tanto entre medidas de tensiones y medidas de deformaciones fue mostrada para el caso de pequeñas deformaciones unitarias.

En secciones siguientes, se utilizará la deformación de Green como la base de desarrollo de elementos finitos de barra para grandes desplazamientos y rotaciones pero pequeñas deformaciones unitarias.

El código de Octave usado para generar la Figura 2.11 se presenta en el Código 2.1.

**Código 2.1:** Medidas de deformación no lineales - Gráfico comparativo.

```

1 %% Medidas de Deformacion No-Lineales %% Grafica de Resultados de Seccion 2.3
2 clc; clear
3
4 % Parametros de la Estructura
5 x=2500; z=2500;
6 A0 = 100; E = 5e5;
7
8 % Calculo longitud inicial barra
9 l0 = sqrt(z^2+x^2);
10
11 % Se define q para las distintas medidas de deformacion
12 PE = @(w) E*A0*(z+w).*(sqrt((w+z).^2+x^2)-l0)./(l0*sqrt((w+z).^2+x^2));
13 PG = @(w) E*A0*(z+w).*(2*z*w+w.^2)/(2*l0^3);
14 PL = @(w) E*A0*l0*(z+w).*log(sqrt((z+w).^2+x^2)/l0)./((z+w).^2+x^2);
15
16 % Se define rango de valores de w para graficar
17 w = linspace(-6000,0,100);
18
19 % Se grafica
20 plot(-w,-PE(w)/1e6,'-r',-w,-PG(w)/1e6,'-b',-w,-PL(w)/1e6,':k')
21 legend('P-E: Def. Unit. Ing. Rotada','P-G: Def. Unit. de Green','P-L: Def. Unit.
22      Log. Rotada')
23 xlabel('Desplazamiento: (-w)'); ylabel('Carga: (-P x 10^+6)')
```

## 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

Para realizar el análisis no lineal de estructuras es necesario contar con métodos matemáticos que permitan resolver las ecuaciones del principio de trabajos virtuales y obtener las configuraciones de equilibrio para cada carga considerada. Dado que la deformación es una función no lineal de los desplazamientos, las ecuaciones del principio de trabajos virtuales consisten en un sistema de ecuaciones no lineales. Las soluciones analíticas de estas ecuaciones permiten comprender conceptos estructurales importantes de cada estructura, sin embargo estas son obtenibles únicamente para esquemas estructurales de tamaño reducido. En esta sección se hará foco en

métodos utilizados para la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones del PTV.

En esta sección se describe un método numérico basado en el Método de Newton-Raphson y el Método de los Elementos Finitos para la resolución del principio de trabajos virtuales. El desarrollo es presentado utilizando una notación y metodología similares a las utilizadas en la literatura de referencia (Crisfield, 1996; de Souza Neto *et al.*, 2008; de Borst *et al.*, 2012), en la cual la formulación es usualmente llamada *Total Lagrangian Formulation*.

#### 2.4.1. Método de los Elementos Finitos en análisis lineal de reticulados

La necesidad de resolver problemas de análisis de estructuras de grandes dimensiones de forma eficiente llevó al desarrollo del Método de los Elementos Finitos (MEF) en la segunda mitad del siglo XX. Zienkiewicz es considerado como uno de los líderes más importantes en el proceso de concepción del método orientado al análisis de estructuras (Zienkiewicz, 1972), seguido por Bathe y Hughes quienes también lideraron el desarrollo del método para la resolución de diversos problemas de ingeniería mecánica (Bathe, 1982; Hughes, 1987). En las décadas posteriores, y gracias al creciente acceso a computadoras, el método se convirtió en la herramienta de referencia para la resolución práctica de problemas en diversas disciplinas de la ingeniería, particularmente en ingeniería estructural (Oñate, 2013; Zienkiewicz *et al.*, 2014). En esta sección se presentan, de forma esquemática, los conceptos básicos del MEF para el análisis lineal de estructuras de barras articuladas.

Sea una estructura que ocupa una cierta región del espacio, se establece una subdivisión de dicha región en *elementos*, los cuales forman una *mall*a. En el caso de estructuras reticuladas cada barra representa un elemento. Considerando en este caso que se tiene una estructura reticulada plana formada por  $n_e$  barras, el desplazamiento en el plano de todo punto de cada barra puede ser interpolado a partir del desplazamiento de sus nodos, esto es:

$$u(x^e) = \mathbf{N}_{loc}^e(x^e) \mathbf{u}_{loc}^e, \quad \mathbf{N}_{loc}^e = \begin{bmatrix} \frac{\ell^e - x^e}{\ell^e} & 0 & \frac{x^e}{\ell^e} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

donde  $\mathbf{u}^e$  es el vector de desplazamientos nodales del elemento (o barra)  $e$ ,  $\ell^e$  es el largo del elemento y  $x^e \in [0, \ell^e]$  es una coordenada auxiliar local del elemento. A pesar de que otras interpolaciones pueden ser consideradas, son utilizadas funciones lineales, las cuales son adecuadas para problemas de barras con fuerza de volumen aplicadas despreciables.

Aplicando la relación lineal entre desplazamientos y deformación (ingenieril) se obtiene la expresión:

$$\varepsilon^e = \mathbf{b}_{L,loc}^e(x^e) \mathbf{u}_{loc}^e \quad \text{con} \quad \mathbf{b}_{L,loc}^e = \frac{1}{\ell^e} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Para poder aplicar el PTV a toda la estructura es necesario considerar un sistema

de coordenadas global, para esto se realiza un cambio de base:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{Q}^e \mathbf{u}_{loc}^e \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}^e = \begin{bmatrix} \cos(\phi^e) & -\sin(\phi^e) & 0 & 0 \\ \sin(\phi^e) & \cos(\phi^e) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi^e) & -\sin(\phi^e) \\ 0 & 0 & \sin(\phi^e) & \cos(\phi^e) \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

donde se puede ver que  $\phi^e$  es el ángulo medido en sentido antihorario desde el eje  $x$  del sistema global al eje  $x$  local y  $\mathbf{Q}^e$  es la matriz de cambio de base del sistema local al global o la matriz asociada a la transformación lineal  ${}_{global}(\mathbf{I})_{loc}$ .

Sustituyendo en la Ecuación (2.53) se obtiene la expresión:

$$\varepsilon^e = \mathbf{b}_L^e \mathbf{u}^e, \quad \mathbf{b}_L^e = \frac{1}{\ell^e} \begin{bmatrix} -\cos(\phi^e) & -\sin(\phi^e) & \cos(\phi^e) & \sin(\phi^e) \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

y sustituyendo en la ecuación constitutiva se obtiene la tensión en función de los desplazamientos nodales:

$$\sigma^e = E \mathbf{b}_L^e \mathbf{u}^e, \quad (2.56)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad de la barra.

Se está en condiciones ahora de sustituir las expresiones en el principio de trabajos virtuales, comenzando por el trabajo interno. El trabajo interno de una barra está dado por:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^e) = \int_{\ell^e} \delta \varepsilon^e \sigma^e dx = \int_{\ell^e} (\delta \mathbf{u}^e)^T (\mathbf{b}_L^e)^T E A \mathbf{b}_L^e \mathbf{u}^e dx = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e) \quad (2.57)$$

donde fue definido el vector de fuerzas internas del elemento  $\mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e)$ . Este vector de fuerzas internas puede ser escrito de forma compacta como:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e) = \mathbf{K}_L^e \mathbf{u}^e, \quad (2.58)$$

donde la matriz  $\mathbf{K}_L^e$  es llamada matriz de rigidez del elemento  $e$  y está dada por:

$$\mathbf{K}_L^e = \int_{\ell^e} (\mathbf{b}_L^e)^T E A \mathbf{b}_L^e dx. \quad (2.59)$$

El trabajo virtual interno del conjunto de la estructura puede ser escrito como la suma del trabajo de todas las barras:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{K}_L^e \mathbf{u}^e = (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{K}_L \mathbf{u}, \quad (2.60)$$

donde para la matriz  $\mathbf{K}_L$  y el vector  $\mathbf{u}$  incluyen todos los grados de libertad de la estructura. Para obtenerlos se aplica el procedimiento llamado *ensamblado*, el cual consiste en considerar de forma acoplada todos los grados de libertad de la estructura

## Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

51

y es denotado como:

$$\mathbf{K}_L = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_L^e \quad \mathbf{u} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{u}^e. \quad (2.61)$$

Se puede también expresar el vector global de fuerzas internas de la estructura como  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_L \mathbf{u}$ . El ensamblado es presentado en forma más completa en la Sección 2.4.2.

Sea una estructura de barras formada por 8 nodos, sea una barra definida por los nodos 3 y 7 tal que  $x^e = 0$  corresponde al nodo 3. Los grados de libertad de esos nodos en el vector de desplazamientos globales serán:  $[2 \times 3 - 1, 2 \times 3, 2 \times 7 - 1, 2 \times 7]$ . En una implementación del MEF es de utilidad contar con una función que permita calcular los grados de libertad vinculados a un conjunto arbitrario de nodos. En la herramienta ONSAS se utiliza una función para dicho fin, llamada *nodes2dofs*, que es presentada en el Código ??.

El principio de trabajos virtuales establece entonces la igualdad entre el trabajo virtual interno y el trabajo virtual externo:

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad (2.62)$$

lo cual, sustituyendo las expresiones anteriores, es equivalente a la resolución del sistema lineal de ecuaciones:

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u} = \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (2.63)$$

La resolución del sistema es realizada tomando en cuenta las condiciones de contorno de desplazamiento conocido en los grados de libertad correspondientes. En el caso de desplazamientos impuestos no nulos se agrega un término correspondiente al término independiente. Por simplicidad no se considera dicho caso en este material.

### 2.4.2. Método de Newton-Raphson aplicado al PTV

En esta sección se aplica el método de Newton-Raphson a la resolución de las ecuaciones del PTV para estructuras de barras considerando la medida de deformación de Green y un único estado de cargas externas aplicado a la estructura.

#### Elemento finito de barra de Green

Tal como se vió en la Sección 2.2.4, al analizar bielas la única componente del tensor de tensiones que realiza trabajo es la axial. Considerando la Ecuación (2.35) y las hipótesis de pequeños cambios de área  $A \approx A_0$  y de longitud  $\ell \approx \ell_0$ , se obtiene la siguiente expresión del PTV para bielas:

$$A_0 \int_{\ell_0} \sigma \delta \varepsilon \, dx = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.64)$$

donde  $\sigma$  representa la tensión de Green en cada punto y  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  las fuerzas externas nodales, que en el caso de un único elemento estaría dada por:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = [f_{\text{ext},1,x}, f_{\text{ext},1,y}, f_{\text{ext},2,x}, f_{\text{ext},2,y}]^T. \quad (2.65)$$

En la Figura 2.12 se muestra un elemento de barra en la configuración de referencia y en la configuración deformada de equilibrio correspondiente. Se muestra

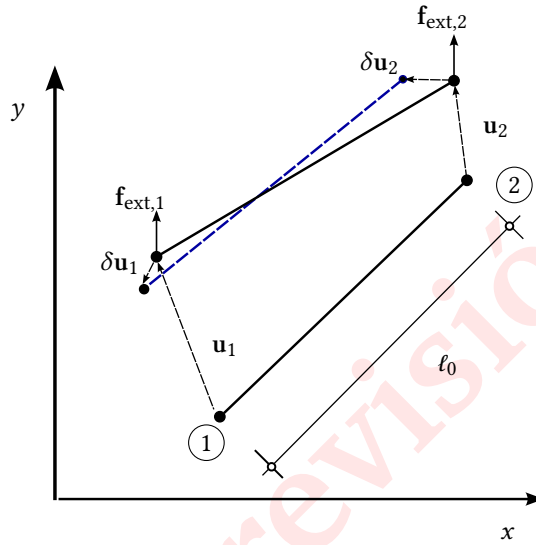


Figura 2.12: Esquema de desplazamientos y fuerzas de elemento de barra.

también, esquematizada con línea azul a trazos, una configuración virtual que puede adquirir la barra.

Para realizar un procedimiento similar al de elementos finitos lineal, se comienza buscando una expresión para las fuerzas internas del elemento  $\mathbf{f}_{\text{int}}$ . Para esto se deberá obtener una expresión para la variación de la deformación axial debida a los desplazamientos virtuales.

La expresión del largo de la barra en la configuración de referencia  $l_0$  está dada por:

$$l_0 = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}, \quad (2.66)$$

mientras que el largo en la configuración deformada  $l$  está dado por:

$$l(\mathbf{u}) = \sqrt{(\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{x}_2 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{u}_1)}. \quad (2.67)$$

Dado que se considera la medida de deformación de Green, se sustituyen estas



#### Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

53

expresiones en la Ecuación (2.42) y se desarrolla, obteniendo:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \frac{\ell(\mathbf{u})^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)}{\ell_0^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)^T (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)}{\ell_0^2}. \quad (2.68)$$

Se confirma que la deformación es cuadrática en los desplazamientos. Se considera ahora la relación con la notación usual del MEF para el vector de desplazamientos, en su expresión matricial:

$$\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}^e \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}^e \quad (2.69)$$

donde  $\mathbf{u}^e$  es el vector de desplazamientos nodales y  $\mathbf{x}^e$  el vector de posiciones iniciales de los nodos, ambos dados por las expresiones:

$$\mathbf{x}^e = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{u}^e = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T. \quad (2.70)$$

Sustituyendo las expresiones de la Ecuación (2.69) en la Ecuación (2.68) se obtiene la relación entre deformación de Green y desplazamientos nodales en forma matricial, dada por:

$$\varepsilon(\mathbf{u}^e) = \frac{1}{\ell_0^2} (\mathbf{x}^e)^T \mathbf{G}^e \mathbf{u}^e + \frac{1}{2} \frac{1}{\ell_0^2} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{G}^e \mathbf{u}^e \quad (2.71)$$

donde

$$\mathbf{G}^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Es importante destacar que la definición de deformación considerada provee un valor uniforme a lo largo de la barra, lo que es coherente con barras con cargas aplicadas en los extremos.

Será de utilidad contar con una expresión matricial compacta de la forma:

$$\varepsilon(\mathbf{u}^e) = \mathbf{b}_1^e \mathbf{u}^e + \frac{1}{2} \mathbf{b}_2^e (\mathbf{u}^e) \mathbf{u}^e \quad (2.73)$$

donde

$$\mathbf{b}_1^e = \frac{1}{\ell_0^2} (\mathbf{x}^e)^T \mathbf{G}^e \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2^e (\mathbf{u}^e) = \frac{1}{\ell_0^2} (\mathbf{u}^e)^T \mathbf{G}^e. \quad (2.74)$$

Se puede ahora calcular la variación de la deformación  $\delta\varepsilon$  debida a un desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{u}$ , dada por:

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{u}}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u}. \quad (2.75)$$

Previo a realizar el cálculo se aclara que la notación considerada para gradientes de funciones escalares o vectoriales es dado por vectores fila, decir, dada una función vectorial  $\mathbf{g}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se cumple:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) \approx \mathbf{g}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u})\delta\mathbf{u} \quad (2.76)$$

siendo  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u})$  una matriz tal que la entrada de la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna está dada por  $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u})\right)_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(\mathbf{u})$ . Dado que el vector  $\delta\mathbf{u}$  es un vector columna, el producto del segundo término del miembro derecho está bien definido.

Operando se obtiene:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_1^e + \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u}), \quad (2.77)$$

por lo que la variación de la deformación está dada por:

$$\delta\varepsilon = (\mathbf{b}_1^e + \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u})) \delta\mathbf{u}. \quad (2.78)$$

#### Actividad

Demostrar la identidad de la Ecuación (2.78) de dos formas:

- utilizando la definición y propiedades de la derivada,
- realizando una aproximación de primer orden de la diferencia  $\varepsilon(\mathbf{u}^e + \delta\mathbf{u}^e) - \varepsilon(\mathbf{u}^e)$ .

Dado que  $\delta\varepsilon$  es un escalar, es igual a su traspuesta, por lo que se traspone la Ecuación (2.78) y se sustituye en el miembro izquierdo de la Ecuación (2.64) obteniendo

$$(\delta\mathbf{u}^e)^T \left( A_0 \int_{\ell_0} (\mathbf{b}_1^e)^T \sigma^e dx + A_0 \int_{\ell_0} \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u}^e)^T \sigma^e dx \right) = (\delta\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e). \quad (2.79)$$

El miembro del trabajo virtual interno puede ser escrito en función del vector de fuerzas internas definido como:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}^e) = (\delta\mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e), \quad (2.80)$$

donde el vector de fuerzas internas está dado por:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e) = A_0 \int_{\ell_0} (\mathbf{b}_1^e)^T \sigma^e dx + A_0 \int_{\ell_0} \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u}^e)^T \sigma^e dx. \quad (2.81)$$

Usando que la deformación es uniforme en la barra y que la tensión depende

#### Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

55

únicamente de la deformación, se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e) = A_0 \sigma^e \ell_0 (\mathbf{b}_1^e + \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u}^e))^T. \quad (2.82)$$

#### Ensamblado

Para introducir el proceso de ensamblado se considera un ejemplo simple: una estructura formada por 2 barras articuladas. La barra 1 une los nodos 1 y 2, mientras que la barra 2 une los nodos 3 y 2 (en ambos casos se consideró una orientación definiendo ejes locales). Ambas barras tienen sección transversal de área  $A_0$  y largo  $\ell_0$ .

Sea un vector columna de desplazamientos virtuales de la estructura, formado por los vectores columna de desplazamientos de los tres nodos:  $\delta \mathbf{u}^T = [\delta \mathbf{u}_1^T, \delta \mathbf{u}_2^T, \delta \mathbf{u}_3^T]$ . El trabajo virtual de las fuerzas internas está dado por la suma de los trabajos virtuales de cada barra:

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = [\delta \mathbf{u}_1^T, \delta \mathbf{u}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int},1}^1 \\ \mathbf{f}_{\text{int},2}^1 \end{bmatrix} + [\delta \mathbf{u}_3^T, \delta \mathbf{u}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int},1}^2 \\ \mathbf{f}_{\text{int},2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

donde  $\mathbf{f}_{\text{int},i}^e$  representa el vector columna de fuerzas internas correspondiente al nodo  $i$  del elemento  $e$ . Desarrollando y factorizando se tiene

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = [\delta \mathbf{u}_1^T, \delta \mathbf{u}_2^T, \delta \mathbf{u}_3^T] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int},1}^1 \\ \mathbf{f}_{\text{int},2}^1 + \mathbf{f}_{\text{int},2}^2 \\ \mathbf{f}_{\text{int},1}^2 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Esta factorización permite escribir el trabajo interno en función de un único vector de fuerzas internas

$$\delta W_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{int}}, \quad (2.85)$$

donde el vector  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  es el resultado del ensamblado, denotado como:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{u}^e) = \bigcup_{e=1}^{n_e} A_0^e (\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^e))^T \sigma(\mathbf{u}^e) \ell_0^e. \quad (2.86)$$

siendo  $\ell_0^e$  y  $A_0^e$  los largos y áreas de las secciones transversales del elemento  $e$ -ésimo. En esta última ecuación se hizo explícita la dependencia de  $\sigma$  respecto a los desplazamientos y también se introdujo la notación abreviada

$$\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^e) = \mathbf{b}_1^e + \mathbf{b}_2^e(\mathbf{u}^e). \quad (2.87)$$

El principio de trabajos virtuales de la estructura completa está dado entonces por la expresión:

$$\delta \mathbf{u}^T (\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.88)$$

por lo tanto, utilizando que esta igualdad se debe cumplir para cualquier  $\delta \mathbf{u}$ , se llega

a que encontrar la solución del PTV es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (2.89)$$

donde  $\mathbf{r}$  representa el vector de fuerzas nodales residuales o fuerzas *no equilibradas*.

### Iteración de Newton-Raphson

Se está ahora en condiciones de aplicar un método iterativo para sistemas de ecuaciones no lineales como el de Newton-Raphson presentado en la Sección 1.2.2. Este método establece una regla para variar el vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$  hasta obtener una solución de acuerdo al criterio de parada definido. La expresión de la variación en  $\mathbf{u}$  está dada por:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}, \quad (2.90)$$

y la ecuación linealizada que impone el método en cada iteración es

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (2.91)$$

es decir:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{u}^{(k)} = -\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (2.92)$$

Sustituyendo la expresión de  $\mathbf{r}$  de la Ecuación (2.89) se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = -(\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k)}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}). \quad (2.93)$$

Se cuenta entonces con las ecuaciones (2.90) y (2.93), que junto con la condición de desplazamiento nulo para carga nula definen el procedimiento numérico a aplicar, similar al descrito en la Ecuación (1.21).

Se deben calcular las derivadas del vector de fuerzas internas, lo cual puede ser realizado para cada elemento dado que el ensamblado es un proceso de suma de términos. Para calcular la derivada se utiliza la siguiente identidad para derivada de producto de funciones:

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + g(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}},$$

con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial.

El vector de fuerzas internas es un producto de la función  $\sigma$  y el vector columna  $\mathbf{b}^T$ , por lo que se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) = A_0^e \ell_0^e \frac{\partial (\mathbf{b}^e)^T}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) \sigma^e(\mathbf{u}^{(k)}) + A_0^e \ell_0^e (\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}))^T \frac{\partial \sigma^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (2.94)$$

#### Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

57

donde por simplicidad de notación se omitió el superíndice  $e$  en el vector  $\mathbf{u}^k$ .

Para el cálculo de la derivada de la tensión se utiliza la regla de la cadena, obteniendo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)})) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (2.95)$$

Usando que el material tiene comportamiento constitutivo lineal, es decir  $\sigma = E\varepsilon$ , y sustituyendo la expresión de la derivada de  $\varepsilon$  dada por la Ecuación (2.77) se obtiene la identidad:

$$\frac{\partial \sigma^e}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) = E^e \mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (2.96)$$

Sustituyendo en la Ecuación (2.94) y calculando la derivada de  $\mathbf{b}$  a partir de la Ecuación (2.74) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) = \frac{\sigma^{(k)} A_0}{\ell_0} \mathbf{G}^e + (\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}))^T E^e A_0 \ell_0^e \mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (2.97)$$

Resulta conveniente utilizar una expresión matricial de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)}, \quad (2.98)$$

donde la matriz  $\mathbf{K}_T$  es llamada matriz tangente, la cual está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k)}) &= \underbrace{EA_0 \ell_0 \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1}_{\mathbf{K}_{T1}} \\ &\dots + \underbrace{EA_0 \ell_0 \left( \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_2(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{b}_2^T(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2^T(\mathbf{u}^{(k)}) \mathbf{b}_2(\mathbf{u}^{(k)}) \right)}_{\mathbf{K}_{T2}(\mathbf{u}^{(k)})} \\ &\dots + \underbrace{\frac{\sigma^{(k)} A_0}{\ell_0} \mathbf{G}}_{\mathbf{K}_\sigma}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde nuevamente se omitió el superíndice  $e$  por simplicidad de la notación. La matriz  $\mathbf{K}_{T1}$  es la matriz de rigidez lineal, la matriz  $\mathbf{K}_{T2}$  es llamada matriz de desplazamiento inicial y la matriz  $\mathbf{K}_\sigma$  la matriz de tensión inicial o matriz geométrica, donde  $\mathbf{G}$  es la matriz obtenida luego del proceso de ensamblado de  $\mathbf{G}^e$ .

La matriz  $\mathbf{K}_{T1}$  es la única que es considerada al realizar análisis lineales, es por esto que también pueden agruparse como una matriz de rigidez de análisis lineal y otra del análisis no lineal:

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{K}_{T1} \quad \mathbf{K}_{NL}(\mathbf{u}^{(k)}) = \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{u}^{(k)}) \quad (2.100)$$

donde se debe destacar que la dependencia de  $\mathbf{K}_\sigma$  respecto a  $\mathbf{u}^k$  está dada a través

de las tensiones en la iteración actual  $\sigma^{(k)}$ .

Sustituyendo en la Ecuación (2.93) y realizando también el ensamblado se obtiene el sistema a resolver en cada iteración del método NR:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k)}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k)}) \quad (2.101)$$

En la herramienta ONSAS los procesos de ensamblado de la matriz tangente y del vector de fuerzas internas son realizados en la función *assembly* presentada en el Código ??.

### Criterios de parada

En cada iteración el sistema es resuelto, los valores  $\mathbf{u}$  son actualizados,  $\sigma^k$  y  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  son calculados y se evalúa si se verifican las condiciones de parada. Algunos de los criterios de parada que se pueden considerar son:

1. Convergencia en desplazamientos:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\|}{\|\mathbf{u}^{(k)}\|} < tol_u$$

2. Fuerzas residuales despreciables:

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k+1)})\|}{\|\mathbf{f}_{\text{ext}}\|} < tol_f$$

3. Máximo de iteraciones: al igual que en cualquier otro método iterativo es necesario definir un criterio de parada vinculado a una cantidad máxima de iteraciones  $max_{it}$ .

$$k > max_{it}$$

En el Algoritmo 1 se muestra un pseudocódigo del método considerando como criterio de parada la variación en desplazamientos. Se puede optar por incluir el criterio de parada basado en des-balance de fuerzas también.

### Implementación en Octave y ejemplo

En esta sección se presenta una implementación del método presentado para calcular los desplazamientos de estructuras reticuladas planas. Como ejemplo se considera la misma estructura de la Sección 2.3.1 la cual, a pesar de su simpleza, permite observar y analizar comportamientos presentes en estructuras más complejas. Se considera la estructura simétrica formada por dos barras para resolver un problema que requiere el ensamblado de matrices.

## Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

59

### Algoritmo 1 Método de Elementos Finitos no lineales para un estado de cargas.

```

1: Asignar punto inicial:  $\mathbf{u}^{(k)} \leftarrow \mathbf{u}^0$  y  $\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{0}$ .
2: Calcular:  $\sigma^{(k)} \leftarrow \sigma(\mathbf{u}^{(k)})$ .
3: while  $\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\| > tol_u \|\mathbf{u}^{(k)}\|$  &  $k < max_{it}$  do
4:   Calcular:  $\mathbf{K}_T \leftarrow \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k)})$ 
5:   Calcular:  $\mathbf{f}_{int}^{(k)} \leftarrow \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}^{(k)})$ .
6:   Resolver:  $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}^{(k)}$ 
7:   Actualizar:  $k \leftarrow k + 1$ ,  $\mathbf{u}^{(k)} \leftarrow \mathbf{u}^{(k)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}$  y  $\sigma^{(k)} \leftarrow \sigma(\mathbf{u}^{(k)})$ .
8: end while

```

En el Código 2.2 se presenta la implementación en GNU-Octave del algoritmo, en la cual se utilizaron notaciones y comentarios con la intención de facilitar la vinculación de las sentencias y variables definidas con el desarrollo presentado en esta sección.

### Código 2.2: Método de Newton-Raphson aplicado a reticulado de Von Mises.

```

1 clear all, close all
2 Es = [ 5e5 ]; As = [ 100 ]; auxy = 2500 ; auxx = 2500; Pext = -2*3.0e6 ;
3
4 % conectividad
5 Nodes = [ 0 0 ; auxx auxy ; 2*auxx 0 ] ; l0 = sqrt(auxx^2+auxy^2) ;
6 Conec = [ 1 2 1 1 ; 2 3 1 1 ] ;
7
8 % calcula numero de nodos y elementos y guarda grados de libertad fijos
9 nnodes = size(Nodes,1); nelems = size(Conec,1);
10 fixeddofs = [ 1 2 5 6 ];
11
12 % carga externa
13 Fext = zeros(2*nnodes,1) ; Fext(4) = Pext ;
14
15 % tolerancias criterio de parada
16 tolk = 50; tolu = 1e-4;
17
18 %—— calculos previos ——
19 Ge = [ 1 0 -1 0; 0 1 0 -1; -1 0 1 0; 0 -1 0 1 ] ;
20
21 % calcula los grados de libertad libres
22 freeddofs = (1:(2*nnodes))'; freeddofs(fixeddofs) = [];
23
24 % calcula largos, angulos y cosenos de angulos que forman barras con x
25 largosini = sqrt( ( Nodes( Conec(:,2),1) - Nodes( Conec(:,1),1) ).^2 ...
26 + ( Nodes( Conec(:,2),2) - Nodes( Conec(:,1),2) ).^2 ) ;
27 thetasini = atan2( ( Nodes( Conec(:,2),2) - Nodes( Conec(:,1),2) ) , ...
28 ( Nodes( Conec(:,2),1) - Nodes( Conec(:,1),1) ) ) ;
29 cosini = cos( thetasini ) ; sinini = sin( thetasini ) ;
30 xelems = reshape( Nodes( Conec(:,1:2) ,1 )', nelems,2 ) ;
31 yelems = reshape( Nodes( Conec(:,1:2) ,2 )', nelems,2 ) ;

```

```

32
33 %—— iteracion de newton raphson ——
34 % inicializa Uk con un vector de zeros
35 Uk      = zeros(2*nnodes,1);  Stressk = zeros( nelems,1);
36 Fext(fixeddofs ) = [] ; histuks = [];
37
38 fin = 0 ; k = 0;
39 fprintf('iter &    $u^k(4)$ &$\\varepsilon^k$&  $\\sigma^k$ & fin? \\\\ \n \\\
    hline')
40 while fin == 0,
41     k += 1; % suma 1 al contador de iteraciones
42     KTk    = sparse( 2*nnodes , 2*nnodes ) ; Fintk = zeros ( 2*nnodes , 1      ) ;
43
44     for elem = 1:nelems
45         nodeselem = Conec(elem,1:2)' ; dofselem = nodes2dofs( nodeselem , 2 ) ;
46         E = Es(Conec(elem,3)) ; A = As(Conec(elem,4)) ; le = largosini(elem) ;
47
48         Xe = [ xelems( elem, 1) yelems( elem, 1) xelems( elem, 2) yelems( elem, 2) ]'
                ;
49         Ue = Uk(dofselem) ;
50
51         % calcula vectores b1 y b2
52         B1e = 1.0 / ( le^2 ) * Xe' * Ge ; B2e = 1.0 / ( le^2 ) * Ue' * Ge ;
53
54         % calcula matrices de rigidez y fuerzas internas
55         KT1e = E * A * le * ( B1e' * B1e ) ;
56         KT2e = E * A * le * ( B2e' * B1e + B1e' * B2e + B2e' * B2e ) ;
57         Ksige = A * Stressk(elem) / le * Ge ;
58         Finte = (B1e+B2e)' * A * le * Stressk(elem) ;
59
60         % ensamblado de matrices y vector de fuerzas internas
61         KTk ( dofselem, dofselem) = KTk (dofselem,dofselem) + KT1e + KT2e + Ksige
                ;
62         Fintk ( dofselem      ) = Fintk(dofselem) + Finte ;
63     end
64
65     KTk(fixeddofs, :) = [] ; KTk(:, fixeddofs) = [] ; Fintk(fixeddofs) = [] ;
66
67     DeltaUk      = KTk \ ( Fext — Fintk ) ; normUk = norm( Uk(freedofs) ) ;
68     Uk(freedofs) = Uk(freedofs) + DeltaUk ;
69
70     for elem = 1:nelems
71         nodeselem = Conec(elem,1:2)' ; dofselem = nodes2dofs( nodeselem , 2 ) ;
72         E = Es(Conec(elem,3)) ; A = As(Conec(elem,4)) ; le = largosini(elem) ;
73
74         Xe = [ xelems( elem, 1) yelems( elem, 1) xelems( elem, 2) yelems( elem, 2) ]'
                ;
75         Ue = Uk(dofselem) ;
76
77         B1e = 1.0 / ( le^2 ) * Xe' * Ge ; B2e = 1.0 / ( le^2 ) * Ue' * Ge ;
78         epsGelem = ( B1e + 0.5*B2e ) * Ue ; Stressk(elem) = E * epsGelem ;
79     end
80
81     if ( k > tolk ) || ( norm( DeltaUk ) < tolu * normUk ), fin = 1; end

```



## Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

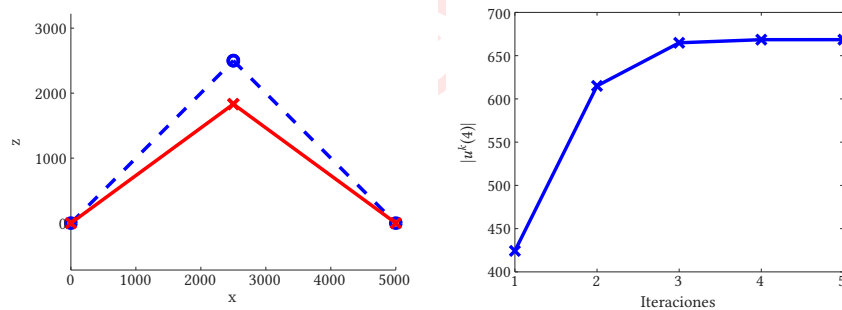
61

```

82     histuks = [ histuks; Uk(4) ] ;
83     fprintf(' %3i & %12.3e & %12.3e & %12.3e & %1i \\\n', k, ...
84             Uk(4), Stressk(1)/E, Stressk(1), fin )
85 end
86
87 NodesDef = Nodes + reshape( Uk , 2,nnodes)' ;
88 xelemsdef = reshape( NodesDef( Conec(:,1:2) ,1 )', nelems,2 ) ;
89 yelemsdef = reshape( NodesDef( Conec(:,1:2) ,2 )', nelems,2 ) ;
90
91 w = Uk(4) ; PGTeo = 2*Es*As*(auxy+w)*(2*auxy*w+w^2) / ( 2*l0^3)
92 PGNum = 2*Stressk(1)*A/l0*(auxy+w)
93 Error_relativo_PGNum = abs( Pext - PGNum ) / abs(Pext)
94 Error_relativo_PGTeo = abs( Pext - PGTeo ) / abs(Pext)
95
96 figure, hold on, grid on
97 plot(xelems, yelems, 'b-o','linewidth',4,'markersize',5)
98 plot(xelemsdef, yelemsdef, 'r-x','linewidth',4,'markersize',5)
99 xlabel('x'), ylabel('z'), axis equal
100
101 figure, grid on
102 plot(-histuks, 'b-x','linewidth',4,'markersize',5)
103 xlabel('iteracion'), ylabel('|u^k(4)|')
104

```

En la Figura 2.13 se muestran los resultados obtenidos al ejecutar el Código presentado.



**Figura 2.13:** Resultados de ejecución del Código 2.2: geometrías de referencia en trazo discontinuo en azul y deformada en rojo continuo (izquierda), gráfico de valores de desplazamiento vertical en cada iteración (derecha).

En la Tabla 2.1 se muestran los resultados obtenidos en cada iteración donde la entrada 4 del vector  $\mathbf{u}^k$  contiene el valor de desplazamiento vertical del nodo superior.

Se observa que existe una diferencia relativa de 36 % entre el valor de desplazamiento obtenido al realizar el análisis lineal y el dado por el análisis no lineal y las tensiones y deformaciones del análisis no lineal tienen mayor magnitud que las

iteración	$u^{(k)}[4](10^2)$	$\varepsilon^{(k)}(10^{-1})$	$\sigma^{(k)}(10^4)$	fin?
1	-4.243	-0.776	-3.883	0
2	-6.150	-1.079	-5.394	0
3	-6.649	-1.153	-5.765	0
4	-6.685	-1.158	-5.791	0
5	-6.685	-1.158	-5.791	1

**Tabla 2.1:** Valores obtenidos por el método para el problema de Von Mises.

del análisis lineal. Esto es provocado por el hecho de que la estructura pierde considerable rigidez global al deformarse y las barras deben desarrollar mayor tensión para equilibrar la fuerza aplicada. La deformación axial alcanza el 10 % por lo que se puede considerar que se deja de cumplir la hipótesis de pequeñas deformaciones. En el análisis de estructuras reales esto es algo importante a verificar.

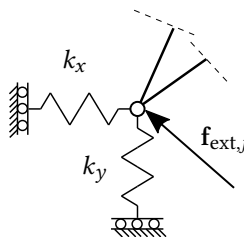
El código también calcula los errores con respecto a los valores analíticos obtenidos en la sección anterior. En clase se discutirán e interpretarán los resultados así como también se mostrarán variantes de los resultados al modificar los parámetros de la estructura.

### Actividad

Modificar los parámetros del Código 2.2 para reproducir los resultados presentados en el Ejemplo 1 del artículo (Li y Khandelwal, 2017).

### Apoyos elásticos

Se considera ahora el caso en el que un nodo  $j$  de la estructura está vinculado a tierra a través de resortes lineales de constante elástica  $k_x$  y  $k_y$  según  $x$  e  $y$ , tal como se muestra en la Figura 2.14.



**Figura 2.14:** Esquema resortes en nodo  $j$ .

Las fuerzas correspondientes a los resortes pueden ser consideradas como fuer-

#### Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

63

zas externas dadas por:

$$f_{\text{ext},s,x} = -u_{j,x}k_x \quad f_{\text{ext},s,y} = -u_{j,y}k_y. \quad (2.102)$$

Es posible recorrer los resortes de todos los nodos y ensamblar en un vector de fuerzas externas de resortes, el cual dependerá del desplazamiento actual  $\mathbf{u}^k$  e incluso utilizar una forma matricial:

$$\mathbf{f}_{\text{ext},s}(\mathbf{u}) = -\mathbf{K}_S \mathbf{u} \quad (2.103)$$

donde la matriz  $\mathbf{K}_S$  tiene las correspondientes constantes elásticas en las entradas de la diagonal.

Este vector de fuerzas externas debidas a los apoyos elásticos puede ser convenientemente considerado como un vector de fuerzas internas

$$\mathbf{f}_{\text{int},s}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_S \mathbf{u}, \quad (2.104)$$

al considerarlo en el otro miembro de la igualdad de trabajos virtuales.

##### Actividad

Mostrar que el sistema lineal asociado al método de Newton-Raphson considerando apoyos elásticos está dado por:

$$\left( \mathbf{K}_T(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}_S \right) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k)}) \quad (2.105)$$

#### 2.4.3. Método de Newton-Raphson Incremental

Se considera ahora que la estructura es analizada de forma incremental, esto quiere decir que las fuerzas externas son aplicadas de a incrementos en instantes de tiempo  $t$ . Se considera que las cargas externas varían simplemente de acuerdo a un factor de carga y que no dependen de la geometría deformada de la estructura. Esta variación de las fuerzas externas es representada a través de un superíndice  $t$ :

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t} = \lambda_t \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (2.106)$$

Las cargas son también consideradas como aplicadas de forma estática, o con velocidad de variación pequeña en comparación con la inercia y la cantidad de movimiento de la estructura. Es decir que el tiempo identifica los incrementos pero no se considera la dinámica.

### Método Incremental

El Método Incremental consiste en buscar la solución del PTV correspondiente a las fuerzas  $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$  partiendo de la solución correspondiente a  $\mathbf{f}_{\text{ext},t}$ . En la Figura 2.15 se muestra un esquema de un elemento de barra en su configuración de referencia y en las posiciones deformada  $\mathbf{u}_t$  y  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ .

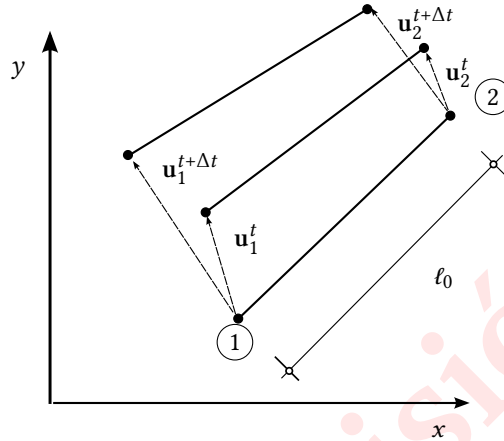


Figura 2.15: Esquema de deformadas incrementales de elemento de barra.

En el Algoritmo 2 se muestra un pseudo-código del Método de Newton-Raphson incremental para análisis de reticulados, en el cual se hace uso del algoritmo presentado en la sección anterior. El método permite obtener las soluciones de equilibrio

---

#### Algoritmo 2 Método Newton Raphson incremental para reticulados.

---

```

1: while  $t < t_{\max}$  do
2:   Calcular:  $\mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$ 
3:   Actualizar:  $\mathbf{u}_0 \leftarrow \mathbf{u}_t$  y  $\mathbf{f}_{\text{ext}} \leftarrow \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t}$ 
4:   Resolver: Algoritmo 1
5:   Actualizar:  $\mathbf{u}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{u}_k$ 
6:   Actualizar:  $t \leftarrow t + \Delta t$ 
7: end while

```

---

para cada valor de fuerza considerado, sin embargo presenta limitaciones para obtener soluciones aceptables para valores de carga de puntos límite.

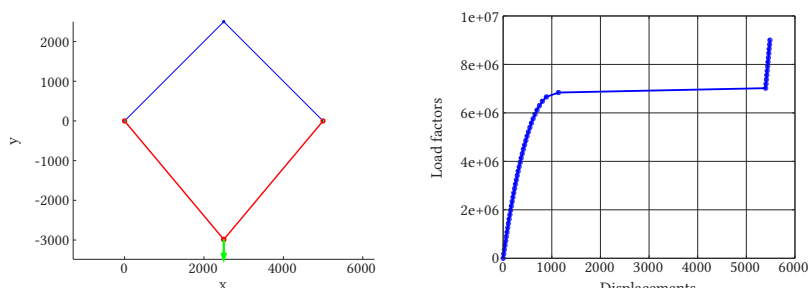
### Ejemplo de análisis de punto límite

Se considera el problema de la cercha de Von Mises, abordado en la Sección 2.4.2, y se resuelve aplicando el Método Incremental implementado en el código ONSAS.

## Sección 2.4. Método de Elementos Finitos Incremental

65

Como valor de fuerza final aplicada se considera  $9 \times 10^6$  con 50 incrementos de carga. A la izquierda en la Figura 2.16 se muestra un gráfico generado por el ONSAS con la estructura en la configuración deformada para carga final (trazo rojo grueso) y en la configuración de referencia (trazo azul fino). A la derecha en la misma figura se ve el gráfico de la curva carga-desplazamiento.



**Figura 2.16:** Gráficos obtenidos por el ONSAS al resolver una cercha de Von Mises.

Se observa que luego de superado un cierto valor de carga (punto límite) se produce un *salto* en los desplazamientos hacia la rama derecha en el gráfico. Esto no es una transición continua de las configuraciones de la estructura por lo que el método no es capaz de obtener el comportamiento completo de la estructura para un intervalo de fuerzas. En la sección siguiente se estudiarán las causas del fenómeno del salto. Este salto no está provocado por el pandeo local de las barras, fenómeno que no fue considerado en este análisis.

Lo mencionado anteriormente representa una limitación considerable del método si se desea realizar un análisis para grandes desplazamientos de una estructura con comportamiento de punto límite. Para poder obtener la curva completa de desplazamientos es necesario utilizar otras técnicas avanzadas que serán brevemente descritas a continuación.

### 2.4.4. Otras técnicas avanzadas

#### Métodos de Newton-Raphson Modificados y búsquedas lineales

Tal como se mostró en la Sección 1.2.2 es posible obtener convergencia a la solución sin la necesidad de calcular la matriz tangente en cada iteración. El concepto del método de Newton-Raphson modificado es fácilmente aplicable al análisis de elementos finitos visto en la sección anterior, por ejemplo definiendo que la línea 4 del Algoritmo 1 es realizada cada cierto número de iteraciones.

En la Sección 2.2.3 se mostró que en el caso de estructuras conservativas, el planteo del PTV es equivalente al Principio de Mínima Energía Potencial Total. El problema de minimización del funcional de energía potencial total puede ser abordado

utilizando un amplio importante conjunto de algoritmos para optimización no lineal, como métodos Quasi-Newton o de Búsqueda Lineal, que mejoran considerablemente la eficiencia de los procedimientos numéricos. A pesar de que algunos de estos métodos están basados en técnicas numéricas de varias décadas, el desarrollo de métodos eficientes de análisis no lineal de estructuras continúa siendo un área de interés científico en la actualidad (Magisano *et al.*, 2017).

### Métodos de Longitud de arco

En el ejemplo de la sección anterior se mostró que el método NR no es capaz de obtener todas las configuraciones de equilibrio intermedio en casos particulares. El Método de Longitud de Arco introducido en la Sección 1.2.3 puede ser extendido para la formulación del Método de Elementos Finitos presentada en la sección anterior, permitiendo resolver una más amplia gama de problemas. Se puede encontrar una implementación completa y didáctica del método en (de Souza Neto *et al.*, 2008). Este método está implementado en el código ONSAS.

Si el ejemplo de la sección anterior es resuelto usando el código ONSAS con el método de longitud de arco, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 2.17, donde el incremento de desplazamiento establecido para cada paso de carga es de 70 y se realizan 100 pasos de carga.

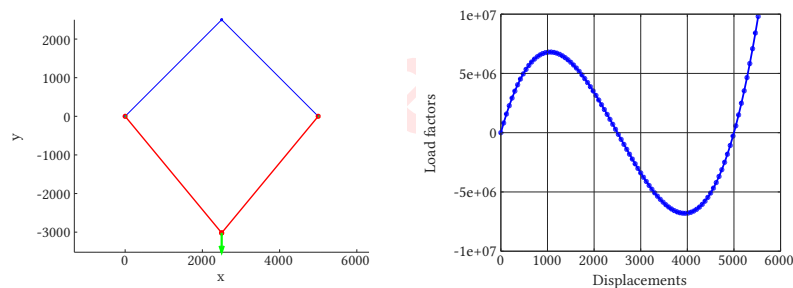


Figura 2.17: Ejemplo de cercha de Von Mises usando método de longitud de arco.

Se observa cómo este método permite obtener las fuerzas de equilibrio correspondientes a cada configuración intermedia del movimiento de la estructura.

Es importante destacar que los gráficos carga-desplazamiento generados por la versión actual del ONSAS no presentan los segmentos de puntos de equilibrio inestable punteados como se mostró al inicio del capítulo.

#### 2.4.5. Ejemplo: Arco bi-articulado

Los arcos han sido utilizados desde la antigüedad en estructuras de gran relevancia como por ejemplo el *Pont du Gard*, estructura que sostiene un acueducto

construido por los romanos hace casi 2000 años y que sigue en pie al día de hoy (Timoshenko, 1953). En la actualidad los arcos o estructuras con geometría de arco suelen ser utilizadas en soluciones originales de estructuras de puentes o como soporte de cubiertas de grandes luces. Frecuentemente se plantean soluciones con esbelteces considerables volviendo necesario considerar deformaciones de segundo orden.

En la Figura 2.18 se muestra un ejemplo de un arco reticulado utilizado como soporte del techo de la estación de Retiro en Buenos Aires, Argentina. Se puede ob-



**Figura 2.18:** Estación de trenes de Retiro, Buenos Aires, Argentina (foto: JPZ).

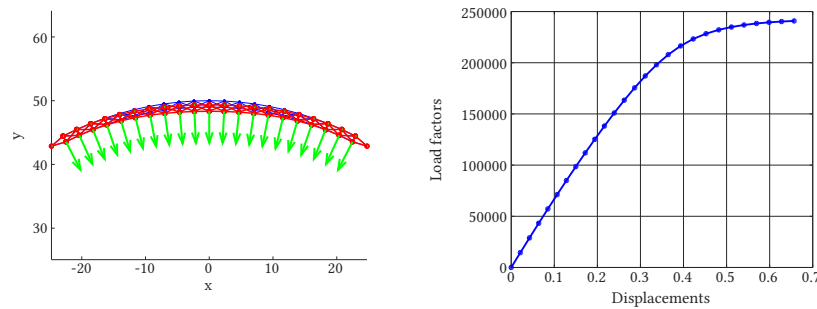
servar que la estructura consiste en un reticulado y el arco tiene sección transversal de altura decreciente hacia la clave.

En esta sección se considera una estructura de arco simplificada con el objetivo de mostrar el comportamiento observado en este tipo de estructuras. Se pueden encontrar diversos ejemplos de este tipo en la literatura (ver Sección 6.8.2 de (Bathe, 2014) o Sección 2.5 de (Crisfield, 1997)).

En esta sección se considera un arco perfecto simétrico formado por un reticulado hiperestático, con condiciones de apoyo y cargas similares a las de uno de los ejemplos considerados en (Timoshenko y Gere, 2009). La carga distribuida es radial y unitaria. El área de cada barra es  $A = 0,4\text{m} \times 0,01\text{m} = 4 \times 10^{-3}\text{m}^2$  y el módulo de Young es  $E = 210\text{ GPa}$ . Cada nodo extremo está apoyado (articulado) fijo.

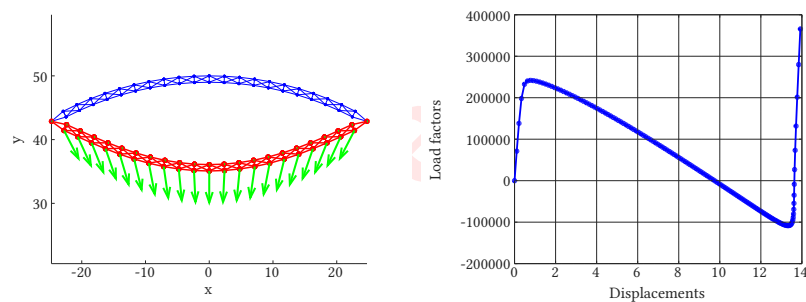
Para la resolución se utiliza la herramienta ONSAS realizando el análisis con el Método de Longitud de Arco. Se puede encontrar el archivo de entrada para este análisis en la Sección ??.

En la Figura 2.19 se muestran gráficos generados por el ONSAS para un valor de factor de carga correspondiente a una configuración cercana a la del punto límite. El desplazamiento considerado para la curva carga-desplazamiento es el desplazamiento vertical (positivo hacia abajo) de la clave del arco.



**Figura 2.19:** Gráficos obtenidos en ejemplo de Arco para carga de punto límite.

En la Figura 2.20 se muestra la geometría deformada luego de ocurrido el fenómeno de snap-through así como también la correspondiente gráfica de carga-desplazamiento. La configuración de referencia corresponde a la geometría dibujada con trazo fino y azul, mientras que la configuración deformada corresponde al trazo grueso en color rojo con círculos en los nodos.



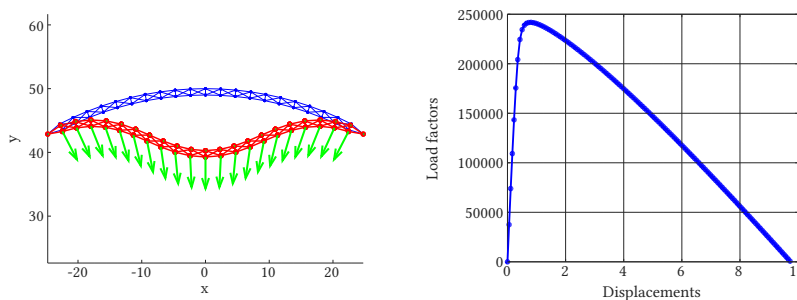
**Figura 2.20:** Gráficos obtenidos en ejemplo de Arco para carga superior a punto límite.

Se observa que la deformación es simétrica tal como se esperaba. Se puede ver que el máximo valor de factor de carga soportado por la estructura previo al *snap-through* es  $\lambda = 2,42 \times 10^5$ , sin embargo, hay que destacar que la estructura pierde estabilidad antes de alcanzar dicho factor de carga (esto será visto más adelante). También se puede verificar que no se supera el 5% de deformación axial lo que, recordando la Sección 2.3, representa una verificación importante para el modelo y la validez de los resultados usando la medida de deformación de Green y material elástico lineal.

Es de interés observar los gráficos mostrados en la Figura 2.21, donde a la izquierda se puede ver la configuración deformada para carga nula, es decir corres-



pendiente al punto de intersección de la curva carga-desplazamiento con la recta  $\lambda = 0$ . La máxima magnitud de deformación axial es 4,71 %.



**Figura 2.21:** Gráficos obtenidos en ejemplo de Arco para configuración de equilibrio inestable.

Esta configuración es claramente inestable ya que cualquier perturbación llevaría a la estructura a adoptar otra configuración. En la siguiente sección se aborda esta temática.

Se observa también que la deformación de la estructura es totalmente simétrica, lo cual está asociado al hecho de que no existen imperfecciones presentes en la geometría de la estructura. La inclusión de imperfecciones en el análisis es algo que brindaría resultados más realistas y será realizado más adelante.

## 2.5. Estabilidad estructural

La búsqueda de equilibrios inestables es un problema interesante a nivel teórico y fundamentalmente experimental dado que está vinculado a fenómenos de colapso por inestabilidad en estructuras. Esto atrajo el interés del matemático suizo Leonard Euler, quien a mitad del siglo XVIII publicó su trabajo sobre la carga crítica de una columna, lo que podría considerarse como el primer resultado del Análisis Lineal de Pandeo (o *Linear Buckling Analysis*) (Timoshenko, 1953). Dos siglos después de Euler, científicos de Ingeniería Aeroespacial siguieron trabajando en el estudio del comportamiento de estructuras simples sometidas a compresiones Huang y Vahidi (1971) y más recientemente Ingenieros Estructurales han obtenido resultados originales e interesantes (Bigoni *et al.*, 2014; Zaccaria *et al.*, 2011). Esto denota la importancia que tiene la comprensión de este tipo de fenómenos en estructuras.

En la Sección 2.1.2 se presentaron herramientas útiles para el análisis y clasificación de soluciones de equilibrio de sistemas estructurales. Para ello se aplicó el Principio de Mínima Energía Potencial, y se formularon las condiciones de mínimo con términos de condiciones sobre el gradiente y la matriz de derivadas segundas de la energía potencial.

En esta sección se presentan de forma abreviada conceptos básicos para el análisis de estabilidad de sistemas de estructuras reticuladas utilizando la notación matricial de la sección anterior. Se puede encontrar un desarrollo completo de estos conceptos en el capítulo 9 de (Crisfield, 1996) o el capítulo 20 de (Crisfield, 1997).

### 2.5.1. Clasificación de equilibrio

Sea una estructura cuyos desplazamientos nodales están dados por el vector  $\mathbf{u}$ , la función de energía potencial total está dada por:

$$V(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.107)$$

donde  $U(\mathbf{u})$  es la energía de deformación de toda la estructura y está dada por la suma de las energías de deformación de cada elemento:

$$U(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2} A_0 \int_0^{\ell_0^e} \sigma(\mathbf{u}^e) \varepsilon(\mathbf{u}^e) dx. \quad (2.108)$$

Si se considera una variación  $\delta \mathbf{u}$  respecto a la posición asociada a  $\mathbf{u}$  entonces se puede calcular la variación de la energía potencial correspondiente como:

$$\delta V = V(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - V(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - U(\mathbf{u}) - (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{f}_{\text{ext}}. \quad (2.109)$$

Realizando un desarrollo de Taylor de segundo orden de la energía de deformación, y sustituyendo las expresiones de la sección anterior se obtiene que la variación de energía potencial se puede aproximar por:

$$\delta V \approx (\delta \mathbf{u})^T (\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}) + \frac{1}{2} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u}, \quad (2.110)$$

donde  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  es el vector de fuerzas internas definido en la sección anterior. Se puede observar que la condición de equilibrio establecida por el principio de trabajos virtuales consiste en anular el término de primer orden de la variación de energía potencial.

Para poder distinguir diferentes tipos de soluciones de equilibrio se pasa a analizar el término de segundo orden. Se establece que una configuración dada por  $\mathbf{u}$  es de **equilibrio estable** si se cumple el PTV y la energía potencial total aumenta para cualquier perturbación virtual impuesta compatible con los vínculos.

Dado que el signo de la variación de energía potencial está dado por el signo de la forma cuadrática del segundo término, es posible y conveniente establecer las definiciones o clasificaciones de configuraciones de equilibrio en términos de la matriz  $\mathbf{K}_T$ :

- **Equilibrio estable:** se dice que la configuración  $\mathbf{u}$  es de equilibrio estable si  $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$  es definida positiva, es decir que todos sus valores propios son positivos.

Esto es equivalente a la condición

$$(\delta \mathbf{u})^T \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}.$$

- **Equilibrio inestable:** se dice que la configuración de equilibrio es inestable si se cumple

$$(\delta \mathbf{u})^T \mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \leq 0 \quad \text{para algún } \delta \mathbf{u}.$$

Esto permite asegurar que la estructura puede adquirir otra configuración de equilibrio, de igual o menor energía potencial, si se realiza una perturbación del equilibrio según  $\delta \mathbf{u}$ .

En los casos de inestabilidad, los vectores propios asociados a los valores propios nulos de  $\mathbf{K}_T$  corresponden a los modos de pandeo de la estructura. Existen otras definiciones o estudios más completos que pueden ser realizados utilizando términos de mayor orden, los cuales no serán abordados en este material.

Es de interés entonces clasificar los equilibrios que se obtienen al resolver un problema de forma incremental. Para eso es posible calcular los valores propios de la matriz tangente asociada a los desplazamientos luego de obtenida la convergencia. La herramienta ONSAS calcula, para cada incremento de carga, los valores propios de la matriz  $\mathbf{K}_T$  mostrando en pantalla la cantidad de valores propios positivos y negativos.

El cálculo de valores propios puede resultar costoso (en el caso de que no se consideren técnicas de factorización particulares en la resolución del sistema lineal (Bathe, 1982)) y en algunos casos poco eficiente ya que tendrá principal interés para valores de carga cercanos a la inestabilidad, y no necesariamente para valores previos.

Para estimar los valores de carga de inestabilidad, es posible realizar análisis aproximados de los modos de pandeo. En las siguientes secciones se presentan y realizan comentarios sobre dos de los métodos aproximados más frecuentemente utilizados.

### 2.5.2. Análisis lineal de pandeo (LBA)

El análisis lineal de pandeo, también llamado LBA por su sigla en inglés (*Linear Buckling Analysis*), es frecuentemente realizado en la práctica profesional para estimar la carga crítica de pandeo de una estructura y observar sus modos de colapso por inestabilidad (pandeo).

Se considera una estructura con un estado de fuerzas de referencia  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  y un factor de carga  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Partiendo de la expresión de la matriz tangente, asumiendo que la estructura no se deforma de manera significativa previo a pandear, se desprecian los términos que dependen directamente de  $\mathbf{u}$  (matriz de desplazamiento inicial)

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_{T2}(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{u}) \approx \mathbf{K}_{T1} + \mathbf{K}_\sigma(\mathbf{u}). \quad (2.111)$$

Respecto a la matriz de tensión inicial se considera una variación proporcional respecto al factor de carga  $\sigma = \lambda \bar{\sigma}$ , siendo  $\bar{\sigma}$  el estado tensional asociado a las fuerzas de referencia  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ , es decir para  $\lambda = 1$ . La matriz aproximada será:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \approx (\mathbf{K}_{T1} + \lambda \bar{\mathbf{K}}_{\sigma}), \quad (2.112)$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{K}}_{\sigma}$  puede ser fácilmente calculada obteniendo las tensiones de cada elemento mediante un análisis lineal considerando la carga de referencia y realizando el respectivo ensamblado de las matrices elementales.

El problema de LBA consiste en encontrar el factor de carga correspondiente a un equilibrio inestable utilizando la matriz aproximada. Esto es equivalente a encontrar los valores  $\lambda$  para los cuales la matriz  $\mathbf{K}_T$  se vuelve singular, es decir que pasa a tener algún valor propio nulo. Encontrar valor propios nulos de  $\mathbf{K}_T$  consiste en resolver el siguiente problema

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.113)$$

donde sustituyendo la expresión aproximada se puede ver que esto es equivalente a resolver el siguiente problema de valores propios generalizados:

$$\mathbf{K}_{T1}\mathbf{u} = -\lambda \bar{\mathbf{K}}_{\sigma}\mathbf{u}. \quad (2.114)$$

La aproximación realizada sobre la matriz tangente correspondiente a despreciar la matriz de desplazamiento inicial, es equivalente a asumir que la estructura no se deforma considerablemente durante el proceso de carga que la lleva hasta el nivel de carga de pandeo. En estructuras flexibles que sí se deforman apreciablemente durante el proceso de carga (cáscaras, arcos llanos), esta hipótesis es no conservadora y resulta en estimaciones de la carga de pandeo mayores a la verdadera. Esto puede representar un riesgo si no es considerado por los métodos de diseño o normativas aplicadas.

### 2.5.3. Análisis no lineal de pandeo

Es necesario tener en cuenta que para realizar un análisis realista de una estructura se debe poder estimar las cargas vinculadas a los equilibrios inestables de forma suficientemente precisa de forma de garantizar la seguridad de la estructura. En trabajos como (Wriggers y Simo, 1990) se proponen métodos aproximados para el cálculo de puntos de equilibrio inestable. Considerando literatura más reciente, se recomienda seguir el abordaje presentado en (Bathe, 2014) para este tipo de cálculos. La herramienta ONSAS realiza una estimación de la carga crítica de pandeo para cada valor de factor de carga a través de dicho tipo de análisis aproximado. El método utilizado también es presentado esquemáticamente en (Li y Khandelwal, 2017).

## Sección 2.5. Estabilidad estructural

73

### 2.5.4. Ejemplo: Análisis de estabilidad de cercha de Von Mises

En (Li y Khandelwal, 2017) se aplican ambas técnicas aproximadas de análisis de pandeo a una estructura tipo cercha de Von Mises usando elementos de barra de Green. En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el código ONSAS a la resolución del problema con los mismos parámetros de dicho ejemplo, se analizan los resultados y se verifican los resultados obtenidos.

En la Tabla 2.2 se muestran los resultados obtenidos al resolver el problema usando el código ONSAS. La columna *Iters* indica la cantidad de iteraciones en despla-

#Carga	Factor Carga	Iters	$ \epsilon $ (%)	NonLinBuck	$\#\lambda > 0$	$\#\lambda \leq 0$
1	1.250e+06	4	1.34	1.67180e+07	2	0
2	2.500e+06	4	2.72	1.64244e+07	2	0
3	3.750e+06	3	4.16	1.61137e+07	2	0
4	5.000e+06	3	5.66	1.57825e+07	2	0
5	6.250e+06	4	7.24	1.54268e+07	2	0
6	7.500e+06	4	8.91	1.50413e+07	2	0
7	8.750e+06	4	10.69	1.46179e+07	2	0
8	1.000e+07	4	12.63	1.41444e+07	2	0
9	1.125e+07	4	14.77	1.36000e+07	2	0
10	1.250e+07	4	17.25	1.29449e+07	2	0
11	1.375e+07	4	20.34	1.85131e+07	1	1
12	1.500e+07	6	26.17	1.56950e+07	1	1

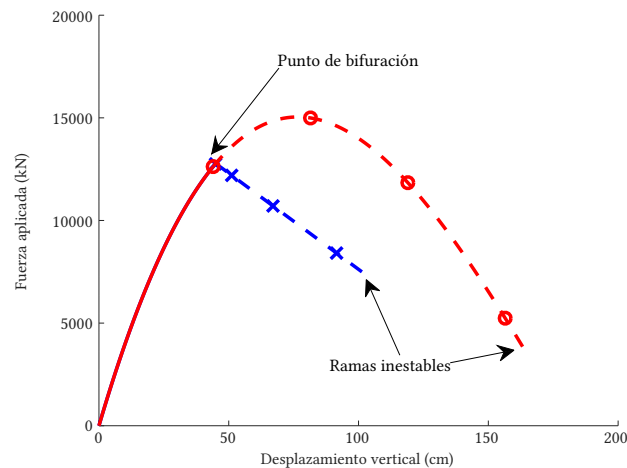
**Tabla 2.2:** Resultados obtenidos al resolver el ejemplo de la cercha de Von Mises usando el código ONSAS.

mientos realizadas para cada factor de carga. La columna  $|\epsilon|$  indica la magnitud de la deformación axial en porcentaje, se puede apreciar que se consideran deformaciones superiores a 5 % aunque esto no evita observar los fenómenos de inestabilidad de interés para el ejemplo. La columna NonLinBuck muestra el factor de carga de pandeo correspondiente al análisis no lineal. El código también realiza el análisis lineal y estima la carga de pandeo correspondiente al LBA el cual es  $\lambda_L = 1,69966 \times 10^7$ . El archivo de entrada para el ONSAS es presentado en el Código ??.

Se observa que luego de superado el factor de carga número 10, la matriz tangente pasa a tener un valor propio no positivo, esto está dado porque luego del punto de bifurcación se pasa a tener equilibrios inestables.

En la Figura 2.22 se muestra un gráfico con dos curvas carga desplazamiento una roja con círculos y azul con cruces. Un gráfico similar a este es presentado en el artículo citado.

Se observa que existe un punto de bifurcación entre las dos posibles ramas de equilibrio de la estructura y a partir de dicho punto los puntos de equilibrio corresponden a equilibrios inestables. Esto es coherente con el resultado visto en la



**Figura 2.22:** Gráfico de curvas carga-desplazamiento para cercha de Von Mises.

Tabla 2.2 donde a partir del décimo factor de carga se obtienen valores propios no nulos de la matriz tangente, correspondiendo esto a la bifurcación y generación de más de una rama de equilibrio.

En estructuras con imperfecciones el proceso de carga lleva a que la estructura adquiera configuraciones recorriendo la rama azul con cruces, por lo que la carga máxima soportada puede ser considerablemente menor que la del punto límite sin considerar imperfecciones. La resolución por el método de longitud de arco provoca que se opte por continuar el análisis siguiendo la rama principal o aquella cuya variación del sentido de los desplazamientos sea menor. Para estructuras con imperfecciones, este método es capaz de, para valores adecuados de los parámetros, obtener soluciones en esas ramas de equilibrio. Se pueden encontrar otros métodos de búsqueda de otras configuraciones o salto entre ramas en (de Souza Neto *et al.*, 2008; Crisfield, 1997).

En la Figura 2.23 se muestra una configuración obtenida realizando un análisis con el ONSAS considerando una imperfección en la geometría de referencia. El archivo de entrada del ONSAS es presentado en el Código ??.

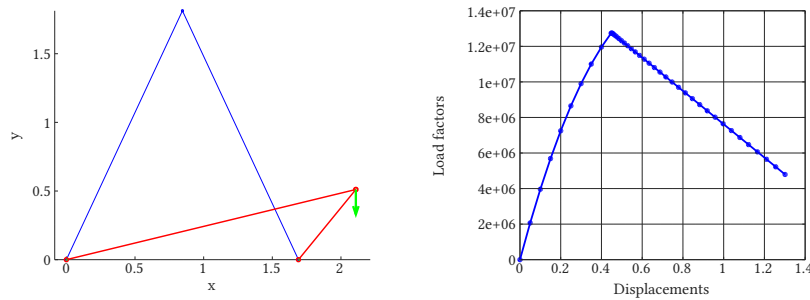
La carga máxima soportada por la estructura es  $1,27 \times 10^7$  lo cual coincide con el punto de bifurcación obtenido en el artículo citado.

### 2.5.5. Ejemplo: modo de pandeo asimétrico de arco bi-articulado

Para finalizar la sección se presentan los elementos básicos del análisis del modo de colapso del arco presentado en la Sección 2.4.5. Tal como se vió, al aumentar la carga aplicada al arco se produce una deformación simétrica hasta alcanzar el punto

## Sección 2.5. Estabilidad estructural

75



**Figura 2.23:** Gráficos obtenidos para ejemplo de cercha de Von Mises con imperfección.

límite provocando el *snap-through*. Sin embargo en este problema existe un valor de factor de carga menor al del punto límite para el cual se produce un pandeo según un modo no simétrico. En (Timoshenko y Gere, 2009) se presenta el cálculo del valor de carga distribuida crítica

$$q_{cr} = \frac{EI}{R^3} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right), \quad (2.115)$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia de la línea media del arco,  $E$  el módulo de Young,  $I$  la inercia de la sección transversal y  $\alpha$  es la mitad del ángulo del arco.

A partir del modelo de reticulado se calcula una inercia equivalente  $I_{eq} = 2A(h/2)^2$  donde  $A$  es el área de cada barra y fueron consideradas únicamente las áreas de la barras en los extremos superior e inferior de la sección transversal. Para obtener el valor teórico se asume que el arco es inextensible por lo que una de las posibles fuentes de diferencias con respecto al análisis de reticulados está asociado a la deformación axial por directa.

Los valores de carga crítica de pandeo teórico y obtenidos por el ONSAS mediante análisis de pandeo lineal, no lineal y considerando imperfecciones son mostrados en la Tabla 2.3. Las imperfecciones consideradas corresponden a una deformación de la configuración de referencia dada por el primer modo de pandeo lineal de la estructura, con una magnitud máxima del orden de un centímetro.

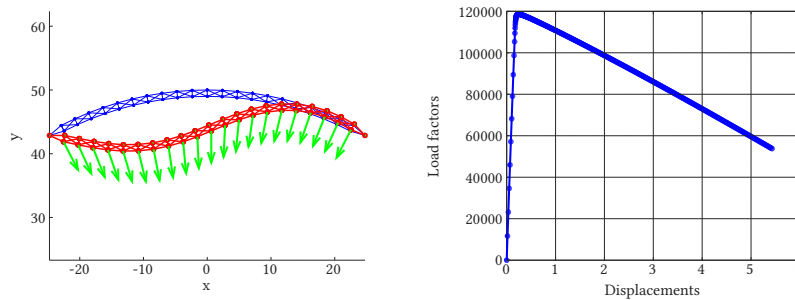
El primer comentario importante a realizar es que efectivamente la carga crítica de pandeo es aproximadamente la mitad de la carga del punto de tangente horizontal para la estructura de acuerdo a la deformación simétrica. Por otra parte se observa que nuevamente la carga crítica del análisis lineal de pandeo es mayor que la carga crítica del análisis no lineal de pandeo.

Para poder observar el modo de colapso por pandeo es necesario considerar imperfecciones geométricas en la estructura y realizar el análisis. En la Figura 2.24 se muestra la deformación posterior al colapso por pandeo así como también la curva

Método	Valor $q_{cr}$ ( $10^5$ )	Diferencia relativa (%)
Valor teórico	1.212	0
LBA ONSAS - Sin imperf.	1.235	1.9
NonLin ONSAS - Sin imperf.	1.206	-0.5
LBA ONSAS - Con imperf.	1.235	1.9
NonLin ONSAS - Con imperf.	1.186	-2.1

**Tabla 2.3:** Valores de carga crítica de pandeo teóricos y numéricos.

carga-desplazamiento.



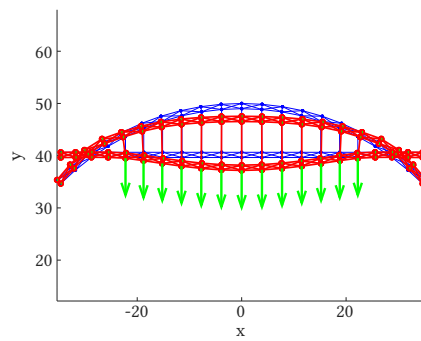
**Figura 2.24:** Gráficos obtenidos en ejemplo de Arco para configuración de equilibrio inestable.

A través de este ejemplo se muestra la importancia de realizar este tipo de análisis para la determinación de cargas críticas de forma adecuada.

Para finalizar el capítulo se destaca que en estructuras como puentes, los arcos pueden ser utilizados como soporte del tablero, conectado a través de cables. En la Figura 2.25 se muestra un modelo simplificado de un puente formado por un arco, el tablero y cables (sin resistencia a compresión) que los conectan, donde las cargas son aplicadas en el tablero en lugar del arco.

El análisis de elementos como cables o tensores es realizado considerando un comportamiento constitutivo no lineal, tema que se aborda en el siguiente capítulo.





**Figura 2.25:** Geometría de modelo simplificado de puente arco con tablero inferior.

En revisión.

## Capítulo 3: No Linealidad Material

En este capítulo se introducen herramientas básicas para el análisis de estructuras considerando no linealidad material, es decir relaciones no lineales entre tensiones y deformaciones. Se comienza presentando las ecuaciones para el análisis de estructuras de barras con relación tensión-deformación elástica no lineal, para luego pasar a introducir elementos básicos de la teoría de plasticidad.

### 3.1. Elasticidad no lineal

En esta sección se describen de forma sintética los conceptos básicos del análisis elástico considerando un comportamiento constitutivo no lineal, en particular el dado para sólidos hiperelásticos. A partir de esto se presentan las ecuaciones para estructuras de barras articuladas con comportamiento elástico no lineal. Se omitirán numerosas consideraciones teóricas importantes para el análisis de sólidos, las cuales se pueden encontrar en textos como (Holzapfel, 2000; Gurtin, 1981).

#### 3.1.1. Hiperelasticidad en sólidos

##### Aspectos básicos

Se considera un sólido que ocupa, en la configuración de referencia, la región  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ , cuyo contorno es unión disjunta de  $\Gamma_f$  y  $\Gamma_u$  ( $\partial\Omega_0 = \Gamma_u \cup \Gamma_f$  y  $\Gamma_u \cap \Gamma_f = \emptyset$ ), donde existe desplazamiento impuesto en  $\Gamma_u$  y tensiones externas  $\mathbf{t}_{\text{ext}}$  aplicadas en  $\Gamma_f$ . El Problema de Elasticidad no Lineal para sólidos consiste en encontrar la configuración deformada del cuerpo  $\Omega_t$  de forma tal de minimizar la energía potencial total.

Cada partícula  $P$  del sólido ocupa una posición  $\mathbf{x}_0$  en la configuración de referencia. En el instante de tiempo  $t$  (o más formalmente para el factor de carga correspondiente a  $t$ ) cada partícula  $P$  pasa a ocupar una posición dada por el vector  $\mathbf{x}_t$  el cual pertenece al conjunto de la configuración deformada  $\Omega_t$ . Se establece que existe una función  $\chi : \Omega_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega_t$  que relaciona las posiciones en la configuración de referencia con las posiciones deformadas de la forma:

$$\mathbf{x}_t = \chi(\mathbf{x}_0, t). \quad (3.1)$$

La función  $\chi$  debe cumplir un conjunto de hipótesis relevantes que no serán consideradas en este documento, entre las que se menciona la biyectividad.

Se define el campo vectorial de desplazamientos para el instante  $t$ , denotado como  $\mathbf{u}_t : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0. \quad (3.2)$$

La dependencia de  $t$  está dada de forma implícita a través del subíndice. El útil calcular el gradiente de dicho campo denotado por  $\mathbf{D}$  cuya expresión se obtiene derivando ambos miembros respecto a  $\mathbf{x}_0$ :

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{I}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{F}$  es un tensor llamado gradiente de deformación dado por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0).$$

Dado que se considera la deformada en un único instante, se omitió el tiempo  $t$  así como también se podrá omitir la evaluación en el punto  $\mathbf{x}$  de ahora en adelante.

Sean dos puntos  $\mathbf{x}_0$  y  $\hat{\mathbf{x}}_0$  cercanos de la configuración de referencia y sus correspondientes puntos deformados  $\mathbf{x}_t$  y  $\hat{\mathbf{x}}_t$ . Utilizando la definición de  $\chi$  y realizando un desarrollo de primer orden respecto a  $\mathbf{x}_0$  se obtiene la relación:

$$\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t = \chi(\hat{\mathbf{x}}_0, t) - \chi(\mathbf{x}_0, t) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0), \quad (3.4)$$

donde se consideró que la distancia entre los puntos  $\mathbf{x}_0$  y  $\hat{\mathbf{x}}_0$  es pequeña. Esta identidad permite tener una relación entre los segmentos en las configuraciones de referencia y deformada. La magnitud escalar  $J(\mathbf{x}_0) = |\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)|$  representa la razón de variación volumétrica local en un entorno de la partícula que ocupa la posición  $\mathbf{x}_0$  en la configuración de referencia. La función de deformación  $\chi$  debe cumplir ciertas hipótesis de continuidad, como por ejemplo verificar que la razón de variación volumétrica sea positiva durante todo el movimiento.

El estado local de deformaciones en un entorno de  $\mathbf{x}_0$  está definido por lo tanto por el tensor  $\mathbf{F}$ , sin embargo existen diferentes definiciones de tensores que permiten representar el estado de deformaciones local. Una herramienta útil es el tensor de deformaciones de Green  $\mathbf{E}$  el cual será definido de forma simplificada como una extensión de la definición considerada para elementos de barra.

Se consideran los segmentos  $d\mathbf{x}_0$  y  $d\mathbf{x}_t$  dados por:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0 \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t = d\mathbf{x}_t. \quad (3.5)$$

Se desea aplicar la definición de la deformación de Green para calcular la expresión

### Sección 3.1. Elasticidad no lineal

81

de la deformación unitaria del segmento  $d\mathbf{x}_0$ , esto es:

$$\varepsilon_{d\mathbf{x}_0} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x}_t^T d\mathbf{x}_t - d\mathbf{x}_0^T d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{x}_0^T d\mathbf{x}_0}. \quad (3.6)$$

Por otra parte los segmentos  $d\mathbf{x}_t$  y  $d\mathbf{x}_0$  están relacionados a través de la Ecuación (3.4) y las expresiones la Ecuación (3.3), por lo que se obtiene:

$$\varepsilon_{d\mathbf{x}_0} = \frac{1}{2} d\mathbf{x}_0^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{x}_0. \quad (3.7)$$

Por lo que definiendo el tensor de deformaciones de Green como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (3.8)$$

se obtiene la siguiente expresión simplificada de la deformación unitaria:

$$\varepsilon_{d\mathbf{x}_0} = d\mathbf{x}_0^T \mathbf{E} d\mathbf{x}_0. \quad (3.9)$$

Se puede ver que la matriz asociada de  $\mathbf{E}$  es simétrica por lo que tendrá valores propios reales. Estos valores propios representan las deformaciones unitarias de Green correspondientes a los segmentos dados por las direcciones principales.

Sustituyendo la expresión de  $\mathbf{F}$  en función del gradiente de desplazamiento dada por la Ecuación (3.3) se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{D}). \quad (3.10)$$

Se puede ver que tal como ocurre en el caso de barras, al considerar pequeñas deformaciones se obtienen equivalencias entre distintas medidas de deformación. En el caso de la medida de Green, al considerar las componentes de primer orden se obtiene:

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones infinitesimales asociado a la medida de deformación presentada en el capítulo anterior como deformación ingenieril.

#### Material Hiperelástico

Un material es elástico si y solo si las tensiones internas producidas en el sólido dependen únicamente de la deformación actual. En el caso de un material hiperelástico, existe una función escalar, llamada densidad de energía de deformación interna,  $\Psi(\mathbf{E}) : \text{Sym} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual determina el comportamiento constitutivo a través de la relación

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}), \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{S}$  es el tensor de tensiones de Cosserat (o segundo tensor de Piola). Este campo tensorial está definido en puntos de la configuración de referencia y representa una de las posibles medidas de tensión a utilizar. Por otra parte, el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  está definido en la configuración deformada y está relacionado con  $\mathbf{S}$  a través de la expresión:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}. \quad (3.13)$$

Esta función de densidad de energía de deformación permite calcular el total de energía potencial elástica  $U$  acumulada por el cuerpo al ser sometido a un desplazamiento  $\mathbf{u}$ , a través de la expresión:

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Psi(\mathbf{E}(\mathbf{u})) dV. \quad (3.14)$$

Tal como fue presentado en el capítulo anterior, el equilibrio está asociado a la configuración donde la energía potencial total  $V$  es mínima, por lo que el problema de hallar la configuración de equilibrio consiste en un problema de optimización no lineal:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} U(\mathbf{u}) - \int_{\Gamma_f} \mathbf{u}^T \mathbf{t}_{\text{ext}} dA, \quad (3.15)$$

donde  $\mathcal{U}$  es el conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles, es decir compatibles con los vínculos externos.

Al igual que en el caso de barras, las condiciones de optimalidad del problema llevan al principio de trabajos virtuales, donde las fuerzas internas están dadas por integrales en el volumen de la densidad de trabajo virtual de las tensiones internas, dadas por el producto escalar del tensor de tensiones y el tensor de deformaciones virtuales  $\mathbf{S} : \delta\mathbf{E}$ . Al igual que en el caso de elementos de barras existen diversos métodos numéricos que permiten resolver el problema, entre los que se encuentran algoritmos de optimización no lineal.

#### Funciones $\Psi$ para materiales compresibles

Dado que el comportamiento del material es determinado por la función  $\Psi$  se presentan un par de ejemplos de funciones propuestas para modelar el comportamiento constitutivo de sólidos isótropos.

**Saint-Venant Kirchhoff** El modelo de Saint-Venant-Kirchhoff establece una relación lineal entre el tensor de Cosserat y el tensor de deformaciones de Green. La expresión matemática de  $\Psi$  en este caso es:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{Tr}(\mathbf{E}^2), \quad (3.16)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son dos parámetros reales del modelo que caracterizan el comportamiento del material. Esta función establece entonces una expresión para las tensiones en todo punto a partir de la deformación, dada por:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (3.17)$$

Este modelo corresponde a la ley lineal considerada en el capítulo anterior para barras con medida de deformación de Green. En el caso de pequeñas deformaciones este modelo lleva a la conocida ley constitutiva de Hooke.

**Curnier** El modelo de Saint-Venant-Kirchoff permite representar el comportamiento a tracción para grandes deformaciones aunque no es capaz de proveer buenos resultados en compresión ya que, como fue visto, se produce una pérdida de rigidez. En (Curnier, 1994) (ver Sección 6.6.2) se describe un modelo modificado capaz de representar estados de compresión en grandes deformaciones. La expresión de la densidad de energía de deformación es:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \lambda(J - \log(J) - 1) + \mu \text{Tr}(\mathbf{E}^2), \quad (3.18)$$

siendo el tensor de Cosserat en este caso dado por:

$$\mathbf{S} = \lambda(J - 1)\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (3.19)$$

#### Funciones $\Psi$ para materiales incompresibles

Existen materiales con un comportamiento constitutivo tal que se requieren elevadas cantidades de energía para poder realizar deformaciones asociadas a variaciones de volumen, es decir que las deformaciones que efectivamente desarrolla el sólido cumplen  $J = 1$  en todo punto. Estos materiales son llamados incompresibles y no serán considerados en este documento ya que su uso no es considerablemente frecuente en soluciones estructurales.

Materiales como polímeros suelen ser analizados con este tipo de modelos por lo que el comportamiento de algunos elementos estructurales puede ser estudiado con este tipo de funciones  $\Psi$ . Existe una gran variedad de funciones de energía utilizadas en diversas aplicaciones, como por ejemplo: el modelo *Neo-Hookean* uno de los más simples (ver (Holzapfel, 2000)), el modelo presentado por Delfino *et al.* (1997) apropiado para el modelado de ciertos comportamientos observados experimentalmente en arterias carótidas o el modelo de Veronda y Westmann (1970) el cual fue aplicado para el desarrollo de una técnica de diagnóstico de tumores malignos en mamas (Goenezen *et al.*, 2012).

### Pequeñas deformaciones

En el caso de pequeñas deformaciones se tiene que el tensor  $\mathbf{E}$  es aproximadamente igual a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y que el tensor de tensiones  $\mathbf{S}$  es aproximadamente igual al tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en coordenadas locales (sistema co-rotacional) por lo que la definición de material hiperelástico puede ser considerada ahora como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (3.20)$$

No serán abordadas en este documento las condiciones que debe cumplir la función  $\psi$ , sin embargo se considerará que deberán ser funciones que garanticen al menos continuidad de la función  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ . Esta función determina la no linealidad material para comportamiento elástico en pequeñas deformaciones.

En el caso del material de Saint-Venant-Kirchhoff para pequeñas deformaciones se obtiene una expresión de  $\psi$  dada por:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\lambda}{2} (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)) \quad (3.21)$$

y la relación del tensor de tensiones está dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.22)$$

lo que coincide con la ecuación constitutiva del material elástico-lineal.

#### 3.1.2. Hiperelasticidad en barras

En el caso de barras con comportamiento hiperelástico el estado tensional corresponde a un estado uniaxial de tensiones. En (Castrillo *et al.*, 2014) se presenta la resolución de diversos ejemplos de reticulados tridimensionales con comportamiento hiperelástico para el material de Saint-Venant-Kirchhoff deduciendo las soluciones a partir de las ecuaciones válidas para sólidos.

Si un eje del sistema de coordenadas coincide con el eje de la barra entonces la componente asociada a dicha dirección será la única entrada no nula dada por

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_x}(\varepsilon_x) = \sigma(\varepsilon_x), \quad (3.23)$$

por simplicidad se considerará que la tensión está dada por la función  $\sigma(\varepsilon)$ .

En el capítulo anterior se presentaron las ecuaciones del PTV, cuya aplicación lleva al sistema de ecuaciones no lineales:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (3.24)$$



### Sección 3.1. Elasticidad no lineal

85

Para el desarrollo de los métodos numéricos la resolución de estas ecuaciones se asumió una relación constitutiva lineal. Si se continúa el desarrollo desde la Ecuación (2.94) y considerando ahora una relación general no lineal entre tensión y deformación, se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) = A_0^e \ell_0^e \left( \frac{\partial \mathbf{b}^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) \right)^T \sigma^e(\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)})) + A_0^e \ell_0^e (\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}))^T \frac{\partial \sigma^e}{\partial \varepsilon}(\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)})). \quad (3.25)$$

Usando la función del comportamiento no lineal y la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) = E^{\text{tan}}(\varepsilon(\mathbf{u})) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \quad (3.26)$$

donde  $E^{\text{tan}}$  es el llamado módulo tangente, dado por:

$$E^{\text{tan}}(\varepsilon) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(\varepsilon). \quad (3.27)$$

Sustituyendo en la ecuación de la derivada de las fuerzas internas se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}^e}(\mathbf{u}^{(k)}) = \frac{\sigma(\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)})) A_0}{\ell_0} \mathbf{G}^e + (\mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}))^T E^{\text{tan}}(\varepsilon(\mathbf{u}^{(k)})) A_0^e \ell_0^e \mathbf{b}^e(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (3.28)$$

El proceso de ensamblado de la matriz tangente y resolución del método Newton-Raphson es similar al realizado para análisis con no linealidad geométrica, teniendo en cuenta que el vector de fuerzas internas debe ser calculado con la tensión dada por la relación no lineal.

La herramienta ONSAS permite que el usuario introduzca cualquier modelo hiperelástico para el comportamiento de las barras a través de la función *hyperElasticModels* presentada en el Código ??.

#### 3.1.3. Análisis de reticulados bi-modulares

Existe un grupo importante de materiales llamados bi-modulares (en inglés *bi-modulus materials*), los cuales se caracterizan por tener diferente comportamiento constitutivo a tracción y a compresión. Entre algunos ejemplos se encuentran la madera y el hormigón, cuyo análisis simplificado es generalmente realizado sin tomar en cuenta esta no linealidad.

Por otra parte en elementos estructurales como cables o tensores se puede considerar que el elemento no soporta esfuerzos de compresión, lo que puede modelarse como un comportamiento constitutivo no lineal para desplazamientos pequeños.

### Abordaje mediante PTV y métodos iterativos

El abordaje asociado al PTV y los correspondientes métodos iterativos pueden ser aplicados considerando la función  $\sigma$  y su derivada en las ecuaciones de PTV y los correspondientes métodos numéricos. Estas expresiones son:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_T \varepsilon & \text{si } \varepsilon \geq 0 \\ E_C \varepsilon & \text{si } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) = \begin{cases} E_T & \text{si } \varepsilon \geq 0 \\ E_C & \text{si } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

donde  $E_C$  y  $E_T$  son los módulos de Young a compresión y tracción respectivamente. Un caso de particular interés es el del análisis de tensores en el cual se puede considerar  $E_C = 0$ .

#### Actividad

Modificar el Código 2.2 para resolver el problema de la cercha de Von Mises considerando un comportamiento bi-modular para ambas barras donde la rigidez a compresión es la mitad de la rigidez a tracción. Validar los resultados del código comparando con soluciones analíticas para pequeños desplazamientos.

### Formulaciones alternativas

Los métodos iterativos son eficientes y permiten garantizar convergencia considerando como hipótesis fundamental que la función de fuerzas residuales  $\mathbf{r}$  tiene derivadas continuas. Para este tipo de materiales esto no se cumple, por lo que los resultados de convergencia obtenidos para este tipo de estructuras podrían ser de menor calidad, provocando que para alguna estructura no sea posible obtener convergencia.

Existen otros enfoques basados en formulaciones de optimización y programación cuadrática que permiten resolver este tipo de problemas aplicando algoritmos eficientes logrando mejores resultados en términos de convergencia. En (Zhang *et al.*, 2013) se presenta una de estas formulaciones alternativas mostrando a través de la resolución de algunos ejemplos que, según los autores, el método de NR no logra converger a la solución para ciertos criterios de parada establecidos. En (Zhang *et al.*, 2016) se presenta también una extensión de este enfoque para problemas de sólidos, mientras que en (Du y Guo, 2014) se presenta una de las primeras formulaciones teóricas basadas en enfoques energéticos.

## 3.2. Introducción a la Teoría de Plasticidad

En esta sección se presenta una introducción a la Teoría de Plasticidad para cuerpos sometidos a pequeñas deformaciones. La presentación es realizada a través de la

descripción de las ecuaciones de la teoría de plasticidad unidimensional, suficiente para introducir todos los conceptos de la misma, dentro del objetivo de este documento.

Existen textos que presentan diversos enfoques a esta teoría, entre los que se destaca por una parte (Jirasek y Bazant, 2001) con un abordaje teórico orientado a aplicaciones estructurales, y por otra parte (de Souza Neto *et al.*, 2008; ?; ?) con enfoques teóricos generales de mecánica del continuo aplicables al análisis de sólidos sometidos a diversas acciones externas. Se recomienda complementar los conceptos presentados en esta sección con alguno de los libros mencionados.

### 3.2.1. Teoría unidimensional de plasticidad

Se considera una barra sometida a una historia de deformaciones tal que parte de la deformación axial es remanente, es decir que se mantendrá luego de retirar las cargas externas. Esta deformación remanente es producida cuando la magnitud de la tensión alcanza un cierto valor de tensión de fluencia  $\sigma_Y$ .

#### Descomposición aditiva de deformación y ley elástica

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, es posible descomponer de forma aditiva la deformación total  $\varepsilon$  en dos componentes: deformación elástica  $\varepsilon^e$  y deformación *plástica* o remanente  $\varepsilon^p$ , por lo tanto:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (3.30)$$

Por otra parte se considera la ley elástica que establece que la relación entre la tensión y la deformación elástica es lineal y dada por:

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad (3.31)$$

donde  $E$  es el módulo de Young. Esta ley se cumple durante todo el proceso de deformación para cualquier valor de deformación plástica.

Es importante destacar que la deformación plástica  $\varepsilon^p$  puede ser positiva o negativa, es decir estar asociada a una extensión o un acortamiento.

#### Función de fluencia

El proceso de plastificación se produce cuando la tensión alcanza un valor límite o de fluencia, lo que es escrito en términos de una función llamada *función de fluencia*  $\Phi$ . En esta sección se considerará, como ejemplo, una función dada por:

$$\Phi(\sigma, \sigma_Y) = |\sigma| - \sigma_Y. \quad (3.32)$$

Observe que el valor absoluto de  $\sigma$  establece un comportamiento idéntico para compresiones y tracciones, esto define que el proceso de fluencia o endurecimiento sea

isótropo. En modelos de mayor complejidad, y para materiales utilizados en ingeniería civil como hormigón, es usual considerar funciones que consideren de diferente forma las tensiones a compresión y tracción (ver un ejemplo en el Capítulo 1 de (?)).

El comportamiento del material es elástico si se verifica:

$$\Phi(\sigma, \sigma_Y) < 0, \quad (3.33)$$

donde  $\sigma_Y$  es un parámetro del modelo que puede variar en el proceso de plastificación. La función  $\Phi$  y el valor  $\sigma_Y$  establecen por lo tanto el rango de valores de tensión  $\sigma$  para los cuales el comportamiento es elástico.

En el caso de plastificación de sólidos la función  $\Phi$  depende del tensor de tensiones y puede adquirir diversas formas, entre las que se destacan la función asociada al criterio de fluencia de Von Mises.

Si la tensión es tal que la función de fluencia pasa a valer cero comienza un proceso de plastificación. En dicho proceso se deberá obtener un nuevo valor de  $\sigma$  y eventualmente de  $\sigma_Y$  tal que se continúe verificando que  $\Phi(\sigma, \sigma_Y) \leq 0$ . Para establecer cuáles son estos valores se utiliza el principio de máxima disipación plástica.

#### Principio de máxima disipación plástica

El principio de máxima disipación plástica (o máximo trabajo plástico) establece que de todas las posibles tensiones  $\sigma$  que cumplen  $\Phi(\sigma, \sigma_Y) \leq 0$ , la tensión real producida será aquella que maximice la disipación plástica por unidad de volumen dada por  $\sigma \dot{\epsilon}$ . Se puede remarcar que este último producto puede considerarse como una disipación de energía o también como una potencia de fuerzas internas, de cualquiera de las dos formas se produce una variación de energía total del sistema.

El enunciado del principio puede plantearse como un problema de maximización como:

$$(MDP) \begin{cases} \max_{\sigma} & \sigma \dot{\epsilon}^P \\ \text{s.a.} & \\ & \Phi(\sigma) \leq 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Para encontrar las condiciones que deben cumplir las tensiones solución del problema se plantean las condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). A continuación se presentan de forma esquemática las ecuaciones de KKT (ver (Luenberger y Ye, 2008) por detalles del desarrollo).

**Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker** Sean funciones  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones suaves, y un problema de optimización no lineal dado por

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & \\ & g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

### Sección 3.2. Introducción a la Teoría de Plasticidad

89

todo punto  $\mathbf{x}$  que satisface las condiciones de optimalidad de primer orden (“punto crítico”) debe necesariamente cumplir

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \eta \nabla g(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (3.37)$$

$$\eta \geq 0 \quad (3.38)$$

$$\eta g(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.39)$$

donde  $\eta$  es un escalar llamado multiplicador de Lagrange, a ser determinado. Estas condiciones representan un sistema de ecuaciones no lineales.

Escribiendo las condiciones de optimalidad para el problema MDP se obtiene que la tensión debe necesariamente cumplir:

$$\dot{\varepsilon}^p = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(\sigma, \sigma_Y) \quad (3.40)$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_Y) \leq 0 \quad (3.41)$$

$$\eta \geq 0 \quad (3.42)$$

$$\eta \Phi(\sigma, \sigma_Y) = 0. \quad (3.43)$$

Estas condiciones permiten derivar las siguientes leyes sobre el proceso de plastificación.

#### Ley de flujo plástico y condiciones de carga/descarga

La condición dada por la Ecuación (3.40) es llamada *ley de flujo plástico*. Calculando la derivada e introduciendo la variable  $\dot{\gamma}$  dada por  $\dot{\gamma} = \eta$  se tiene:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{signo}(\sigma), \quad (3.44)$$

donde se puede observar que si la tensión es de compresión, la deformación plástica decrece. Más adelante se presentará una interpretación física de la variable  $\dot{\gamma}$ .

Esto permite reescribir las condiciones adicionales del KKT obteniendo las llamadas condiciones de carga/descarga, dadas por:

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad (3.45)$$

$$\Phi(\sigma, \sigma_Y) \leq 0 \quad (3.46)$$

$$\dot{\gamma} \Phi(\sigma, \sigma_Y) = 0 \quad (3.47)$$

#### Función de endurecimiento

La magnitud  $\sigma_Y$  representa un parámetro constitutivo dado por la micro-estructura del cuerpo y otros parámetros asociados al correspondiente proceso de plastificación del material. En este modelo se considera que este valor depende de la deformación

plástica acumulada a través de una función llamada *función de endurecimiento*:

$$\sigma_Y = \sigma_Y(\bar{\epsilon}^P), \quad (3.48)$$

donde  $\bar{\epsilon}^P$  es la deformación plástica acumulada durante todo el proceso, es decir

$$\bar{\epsilon}^P(t) = \int_0^t |\dot{\epsilon}^P(\tau)| d\tau. \quad (3.49)$$

Esta nueva magnitud representa la *memoria* del material, siendo este el elemento conceptual más relevante que define al material como no elástico.

Derivando respecto al tiempo ambos miembros de la Ecuación (3.49) y utilizando la Ecuación (3.44) se obtiene:

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = |\dot{\epsilon}^P| = |\dot{\gamma} \text{signo}(\sigma)| = |\dot{\gamma}|. \quad (3.50)$$

Usando que  $\dot{\gamma} \geq 0$  se tiene

$$\dot{\bar{\epsilon}}^P = \dot{\gamma}, \quad (3.51)$$

por lo que la derivada de  $\gamma$  establece la variación de la deformación plástica acumulada. Si  $\gamma$  es considerada nula al inicio del proceso puede ser fácilmente interpretada como la deformación plástica acumulada, lo cual también es compatible con la condición dada por KKT de  $\dot{\gamma} \geq 0$ , es decir que la magnitud de la deformación plástica acumulada es creciente durante todo el proceso.

#### Módulo elastoplástico tangente

Durante un proceso de incremento de carga en el que ocurre plastificación el valor la función de fluencia debe mantenerse nulo en los instantes de tiempo inmediatamente posteriores, es decir que se verifican las condiciones:

$$\Phi = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\Phi} = 0. \quad (3.52)$$

Derivando respecto al tiempo ambos miembros de la Ecuación (3.32) se obtiene:

$$\dot{\Phi} = \text{signo}(\sigma)\dot{\sigma} - \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \bar{\epsilon}^P} \dot{\bar{\epsilon}}^P, \quad (3.53)$$

por lo tanto, igualando a cero se tiene que durante la plastificación se cumple:

$$\text{signo}(\sigma)\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \bar{\epsilon}^P} \dot{\bar{\epsilon}}^P. \quad (3.54)$$

Multiplicando ambos miembros por  $\text{signo}(\sigma)$ , recordando que  $\dot{\bar{\epsilon}}^P = \dot{\gamma}$  y usando la

### Sección 3.2. Introducción a la Teoría de Plasticidad

91

Ecuación (3.44) se obtiene:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p. \quad (3.55)$$

Por otra parte, derivando la ley elástica dada por la Ecuación (3.31) se tiene la relación:

$$\dot{\sigma} = E (\dot{\epsilon} - \dot{\bar{\epsilon}}^p). \quad (3.56)$$

Despejando  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$  de la Ecuación (3.55), sustituyendo en la Ecuación (3.56) y agrupando se tiene:

$$\dot{\sigma} = E^{\text{tan}} \dot{\epsilon} \quad (3.57)$$

donde  $E^{\text{tan}}$  es el módulo tangente elastoplástico, dado por

$$E^{\text{tan}}(\bar{\epsilon}^p) = \frac{E \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p}(\bar{\epsilon}^p)}{E + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p}(\bar{\epsilon}^p)}. \quad (3.58)$$

A partir de esta relación se puede también obtener una expresión para la pendiente de la función de endurecimiento en función de  $E^{\text{tan}}$ . Es importante resaltar que existe una relación implícita entre la deformación total y la deformación plástica acumulada cuyo análisis no debe ser despreciado.

La mayoría de los materiales utilizados en Ingeniería Civil suelen ser caracterizados a partir de valores de tensión y deformación (total) medidos a través de ensayos experimentales. Esto permite determinar el módulo tangente, el cual debe ser vinculado a algún modelo de elastoplasticidad a través de la función de endurecimiento para poder contar con un modelo teórico completo del comportamiento elastoplástico. En (Pérez Zerpa *et al.*, 2017) se presenta el desarrollo de un método para identificación de propiedades elastoplásticas y su aplicación a la caracterización mecánica de madera a partir de valores de tensión y deformación obtenidos mediante ensayos experimentales.

#### 3.2.2. Método numérico de análisis elastoplástico

##### Relaciones algebraicas

Para obtener un método numérico para resolver las ecuaciones que gobiernan el proceso de plastificación, es necesario utilizar alguna regla para integrar las ecuaciones diferenciales del modelo.

En esta sección se presenta el desarrollo de un método numérico para resolver las ecuaciones correspondientes a una barra sometida a una deformación axial, asumiendo que en cada paso se conoce la deformación total aplicada. Se considera que el rango temporal del proceso estudiado es discretizado en intervalos uniformes. Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se considera  $\Delta t = 1$ . Nuevamente, el tiempo no representa que las cargas sean aplicadas dinámicamente, sino simplemente

una referencia a factores de carga o deformación impuesta.

Sea un instante de tiempo  $n$  para el cual se conocen los valores de  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n^p$  y  $\gamma_n$ . Se aplica un incremento en la deformación total por lo que se conoce el valor de deformación en el instante de tiempo siguiente  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$ . Se desea determinar las otras magnitudes. Se comienza operando con la derivada de la ley elástica, dada por la Ecuación (3.56), donde se sustituye la Ley de flujo plástico dada por la Ecuación (3.44). Se obtiene por lo tanto:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\gamma}\text{signo}(\sigma)). \quad (3.59)$$

Se puede considerar una regla de integración de tipo Euler hacia atrás o *Backward Euler*, donde se integra en el tiempo numéricamente, evaluando el integrando en el instante  $n + 1$ , obteniendo:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon - \Delta\gamma\text{signo}(\sigma_{n+1}). \quad (3.60)$$

Resulta conveniente definir la magnitud  $\sigma_{E,n+1}$  dada por:

$$\sigma_{E,n+1} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon, \quad (3.61)$$

la cual representa la tensión que se obtendría si no se produce aumento de la deformación plástica para el incremento de deformación total aplicado. Esto equivale a que el incremento de tensión sea puramente elástico.

#### Actividad

Mostrar que se verifica la siguiente igualdad

$$\sigma_{E,n+1} = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p).$$

Usando esta nueva definición se obtiene la expresión:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{E,n+1} - E\Delta\gamma\text{signo}(\sigma_{n+1}). \quad (3.62)$$

Por otra parte se sabe que si  $\Delta\gamma > 0$  entonces se produce plastificación y la función  $\Phi$  debe continuar siendo nula en el instante  $n + 1$ , por lo tanto se deberá cumplir

$$\Phi(\sigma_{n+1}, \sigma_Y(\varepsilon_{n+1}^p)) = |\sigma_{n+1}| - \sigma_Y(\varepsilon_{n+1}^p) = 0. \quad (3.63)$$

Recordando la relación entre deformación plástica acumulada y  $\gamma$  se tiene

$$|\sigma_{n+1}| - \sigma_Y(\varepsilon_n^p + \Delta\gamma) = 0. \quad (3.64)$$

Esta relación, junto con la Ecuación (3.62) forman un sistema de ecuaciones no



### Sección 3.2. Introducción a la Teoría de Plasticidad

93

lineales, a resolver para encontrar la tensión y  $\gamma$  en el instante  $n + 1$ , dado por:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{E,n+1} - E\Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{n+1}), \quad (3.65)$$

$$|\sigma_{n+1}| = \sigma_Y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma). \quad (3.66)$$

Para poder obtener una expresión del valor absoluto de la tensión se continúa desarrollando la identidad de la Ecuación (3.62),

$$|\sigma_{n+1}| \operatorname{signo}(\sigma_{n+1}) = |\sigma_{E,n+1}| \operatorname{signo}(\sigma_{E,n+1}) - E\Delta\gamma \operatorname{signo}(\sigma_{n+1}) \quad (3.67)$$

por lo tanto se tiene:

$$\operatorname{signo}(\sigma_{n+1}) (|\sigma_{n+1}| + \Delta\gamma E) = |\sigma_{E,n+1}| \operatorname{signo}(\sigma_{E,n+1}). \quad (3.68)$$

Dado que  $\Delta\gamma \geq 0$ , los resultados de la función signo de cada miembro son multiplicados por valores no negativos por lo tanto deben tener el mismo resultado, obteniendo:

$$\operatorname{signo}(\sigma_{n+1}) = \operatorname{signo}(\sigma_{E,n+1}) \quad (3.69)$$

$$|\sigma_{n+1}| + \Delta\gamma E = |\sigma_{E,n+1}| \quad (3.70)$$

Sustituyendo en la Ecuación (3.66) se obtiene:

$$|\sigma_{E,n+1}| - \Delta\gamma E = \sigma_Y(\bar{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma) \quad (3.71)$$

la determinación de  $\Delta\gamma$  está asociada, por lo tanto, a la resolución de una ecuación no lineal de una variable. Luego de determinada esta magnitud pueden ser determinadas las restantes a través de las relaciones vistas.

#### Método numérico

A partir de las relaciones algebraicas obtenidas, se formula un método numérico que permite sistematizar el cálculo de las tensiones de deformaciones en el instante siguiente, considerando la ocurrencia de las dos posibilidades: incremento de deformación con plastificación o incremento elástico.

El método consiste en calcular el valor  $\sigma_{E,n+1}$ , el cual representa un caso de incremento de deformación puramente elástica, y evaluar la función de fluencia para dicha tensión. Si la función de fluencia tiene un valor negativa, se está por lo tanto ante una tensión compatible con la deformación impuesta y que cumple las condiciones de carga/descarga para  $\Delta\gamma = 0$ . Si la función de fluencia es no negativa, entonces ocurre plastificación y se debe calcular el valor  $\Delta\gamma$ . En el Algoritmo 3 se presenta un método esquemático que resumen el procedimiento descrito. Se recomienda complementar este desarrollo con los Pseudo-códigos presentados en textos

como (?).

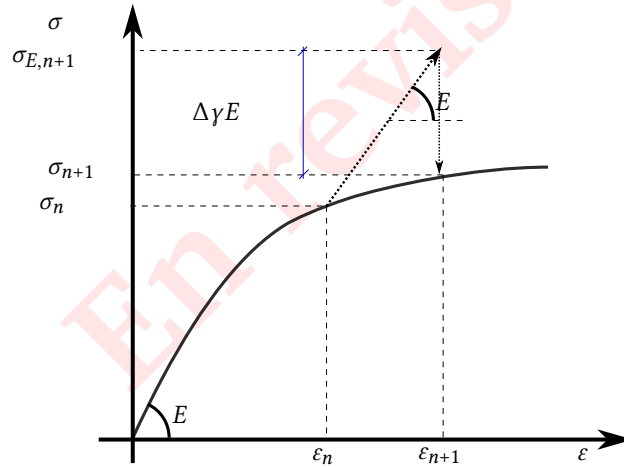
---

**Algoritmo 3** Cálculo de tensiones en plasticidad unidimensional.

---

- 1: Dados  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\bar{\varepsilon}_n^p$ ,  $\gamma_n$  y  $\Delta\varepsilon$ .
  - 2: Calcular:  $\sigma_{E,n+1} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon$
  - 3: Calcular:  $\Phi_{tr} = \Phi(\sigma_{E,n+1}, \sigma_Y(\bar{\varepsilon}_n^p))$
  - 4: **if**  $\Phi_{tr} < 0$  (se mantiene en región elástica) **then**
  - 5:   El incremento es puramente elástico, por lo tanto:  $\sigma_{n+1} = \sigma_{E,n+1}$  y  $\Delta\gamma = 0$
  - 6: **else**
  - 7:   Resolver la ecuación no lineal:  $|\sigma_{E,n+1}| - \Delta\gamma E = \sigma_Y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma)$
  - 8:   Usar el valor  $\Delta\gamma$  obtenido para calcular  $\sigma_{n+1}$ .
  - 9: **end if**
  - 10: Calcular las magnitudes  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$  y  $\varepsilon_{n+1}^p$  usando las relaciones con  $\Delta\gamma$ .
- 

En la Figura 3.1 es muestra un esquema gráfico del procedimiento realizado por el método numérico. Se muestra gráficamente que el valor  $E\Delta\gamma$  representa el *retorno* de un valor de tensión superior al de fluencia hacia la curva asociada a la fluencia.



**Figura 3.1:** Esquema de método iterativo para análisis elastoplástico.

Para realizar análisis elastoplástico de sólidos se debe resolver un problema de ecuaciones no lineales en varias variables y los métodos aplicados para esto son llamados *métodos de retorno*. Se recomienda profundizar sobre estos métodos en (de Souza Neto *et al.*, 2008).

### Modelo de endurecimiento lineal

Se considera en este apartado un caso de interés tanto práctico como académico por su simplicidad: el modelo de endurecimiento lineal. En este modelo la tensión de fluencia esté dada por una función de endurecimiento lineal de la forma:

$$\sigma_Y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{Y,0} + K\bar{\epsilon}^p, \quad (3.72)$$

donde  $\sigma_{Y,0}$  y  $K$  son parámetros del modelo, que determinan la tensión de fluencia inicial y la pendiente de la función, respectivamente.

Sustituyendo la función dada por este modelo en la Ecuación (3.71) se obtiene:

$$|\sigma_{E,n+1}| - \Delta\gamma E - \sigma_{Y,0} - K\bar{\epsilon}_n^p - K\Delta\gamma = 0, \quad (3.73)$$

donde se observa que en este caso la ecuación a resolver es lineal. Despejando el valor de  $\Delta\gamma$  se obtiene

$$\Delta\gamma = \frac{|\sigma_{E,n+1}| - \sigma_{Y,0} - K\bar{\epsilon}_n^p}{E + K} \quad (3.74)$$

### 3.2.3. Implementación y ejemplos

#### Implementación en GNU-Octave

El método numérico descrito en el Algoritmo 3 puede ser fácilmente implementado considerando el modelo de endurecimiento lineal. En el Código 3.1 se muestra una implementación en GNU-Octave. Los valores de deformaciones y parámetros utilizados corresponden a los ejemplos presentados a continuación.

**Código 3.1:** Análisis elastoplástico unidimensional con endurecimiento lineal.

```

1 %Codigo de ejemplo de implementacion de metodo de analisis elastoplastico
2 %Funcion de endurecimiento lineal. Historia de deformaciones dada.
3 clear all, close all
4
5 %parametros constitutivos
6 E      = 210e9 ; sigmaY = 250e6 ;
7 % K      = 0 ;
8 K      = 21e9 ;
9
10 %historia de deformaciones impuesta
11 epsmax = sigmaY/E * 1.5 ;
12 deps   = epsmax/20 ; % incremento
13 loadeps = (0:deps:epsmax)' ; % carga
14 perunloadeps = (epsmax:-deps:-epsmax)' ; % descarga
15 perloadeps = (-epsmax:deps:epsmax)' ; % carga
16 epshist = [ loadeps; perunloadeps; perloadeps; perunloadeps ] ;
17 ntimes  = length(epshist);
18

```

```

19 % vectores de historia tension, deformacion plastica, elastica y acumulada
20 epsplhist = zeros(ntimes,1) ; epsplachist = zeros(ntimes,1) ;
21 epselhist = zeros(ntimes,1) ; sigmahist = zeros(ntimes,1) ;
22
23 % se considera que en el tiempo inicial (1) todas las magnitudes son nulas
24 for i=2:ntimes
25     epsetrial = epshist(i) - epsplhist(i-1) ;
26     sigmatrual = E * epsetrial ;
27     epsplactrial = epsplachist(i-1) ;
28
29     phitrial = abs(sigmatrual) - ( sigmaY + K*epsplactrial ) ;
30
31     if phitrial <= 0 % se continua en rango elastico
32         sigmahist(i) = sigmatrual ;
33         epsplhist(i) = epsplhist(i-1);
34         epsplachist(i) = epsplachist(i-1);
35         Cep = E ;
36
37     else % se debe calcular la deformacion plastica
38         Deltagamma = phitrial / (E + K) ;
39         sigmahist(i) = (1-Deltagamma*E/abs(sigmatrual))* sigmatrual ;
40         epsplhist(i) = epsplhist(i-1) + Deltagamma * sign(sigmatrual) ;
41         epsplachist(i) = epsplachist(i-1) + Deltagamma ;
42         Cep = E*K/(E+K) ;
43     end
44 end
45
46 figure, grid on, lw = 3; ms = 5;
47 plot(epshist, sigmahist, 'b-x', 'linewidth', lw, 'markersize', ms)
48 labx=xlabel('Deformacion'), laby=ylabel('Tension')
49 set(labx, FontSize, 20); set(laby, FontSize, 20);
50 set(gca, 'linewidth', 2, 'fontsize', 20), print('plasticcycle2', '-depslatex')

```

### Ejemplo de comportamiento elastoplástico perfecto

El modelo elastoplástico perfecto corresponde a una función de endurecimiento constante, es decir:

$$\sigma_Y(\bar{\epsilon}^p) = \sigma_{Y,0}, \quad (3.75)$$

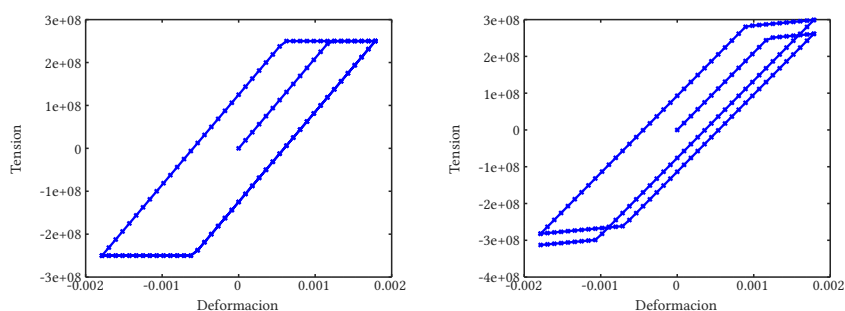
lo que corresponde a un valor  $K = 0$ .

Se consideran valores similares a los de un acero A36:  $E = 210$  GPa y  $\sigma_{Y,0} = 250$  MPa. Se realiza un proceso de carga y descarga y nuevamente carga (a través de deformaciones impuestas), llegando a una deformación máxima en magnitud de  $\epsilon_{max} = \sigma_{Y,0}/E \times 1.5$ . Esto representa un valor 50 % superior a la deformación de límite elástico.

Al utilizar el código se obtiene el gráfico mostrado a la izquierda en la Figura 3.2. Se puede observar que este modelo no es capaz de reproducir fallas por un elevado número de ciclos de carga-descarga.

### Ejemplo de endurecimiento lineal

En el caso de endurecimiento lineal se considera  $K = 21$  GPa junto con los otros parámetros definidos anteriormente. Al aplicar el método numérico se obtiene la gráfica de la derecha mostrada en la Figura 3.2.



**Figura 3.2:** Gráficos tensión-deformación de ejemplos de comportamiento elasto-plástico: modelo elastoplástico perfecto (izq.) y modelo con endurecimiento lineal (der.).

Se observa, como era de esperar, que la tensión va aumentando conforme continúa el proceso de carga descarga. Esto es explicado por el hecho de que a pesar de que la deformación total se mantenga acotada, la deformación plástica acumulada durante el proceso continua aumentando. Si los resultados experimentales o el modelo constitutivo del material establecen algún valor de tensión de rotura, el mismo podría ser alcanzado luego de un cierto número de ciclos.

### 3.2.4. Aplicación a reticulados

El desarrollo presentado anteriormente puede ser aplicado al análisis de estructuras formadas por elementos con comportamiento elasto-plástico. Para esto, se debe incluir el cálculo de las magnitudes asociadas a la plastificación dentro de los algoritmos iterativos para encontrar la configuración de equilibrio. En el primer capítulo de (?) se encuentra un desarrollo completo de los modelos unidimensionales y su integración en algoritmos basados en el MEF.

## 3.3. Ejemplo: cálculo de solicitaciones últimas en sección de hormigón armado

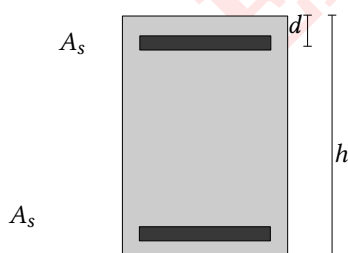
En esta sección se presenta una breve discusión sobre análisis no lineal de secciones y se resuelve un ejemplo de cálculo de solicitaciones últimas en una sección de hormigón armado considerando el comportamiento no lineal del hormigón.

A pesar de que el comportamiento del hormigón es usualmente considerado elastoplástico, en el ejemplo se considera un análisis elástico no lineal dado por una relación tensión-deformación sin calcular deformaciones plásticas. En el caso de que no se realice descarga este análisis elástico no lineal produce resultados iguales a los del análisis utilizando el modelo de elastoplasticidad. En el caso de que la estructura no se lleve a la falla, es decir que continúe en servicio luego de la descarga, este análisis no es útil, ya que se deben calcular o estimar las deformaciones remanentes correspondientes.

Es importante resaltar que este tipo de análisis no es un análisis no lineal completo de un elemento estructural. Para realizar un análisis no lineal de un elemento de viga se debe considerar la no linealidad no solamente en la sección transversal sino que también según el eje de la viga. En (Liew *et al.*, 2017; Lemes *et al.*, 2017) se presentan resultados de análisis no lineales de elementos de viga de acero y hormigón considerando la relación momento-curvatura dada por el comportamiento constitutivo. Utilizando un procedimiento similar al presentado en este ejemplo es posible construir el diagrama momento-curvatura de una sección de hormigón considerando efectos de complejidad de modelado como por ejemplo fisuración. En (Alhasawi *et al.*, 2017) se realiza un análisis de pórticos considerando elementos de viga con rótulas elasto-plásticas en los extremos, aplicando conceptos de plasticidad como los vistos en la sección anterior.

En el ejemplo desarrollado a continuación se calculan los momentos y directas integrando el diagrama de tensiones de la sección utilizando integración numérica. Para la integración se utiliza el método de cuadratura de Gauss (Quarteroni *et al.*, 2007), el cual permite calcular de forma eficiente las solicitaciones tal como se muestra en (Bonet *et al.*, 2006).

Se considera una sección de hormigón armado de geometría rectangular de ancho  $b = 0,25$  m y altura  $h = 0,6$  m con armadura simétrica dispuesta como se muestra en la Figura 3.3, con recubrimiento mecánico  $r_m = 0,06$  m. Los rectángulos oscuros representan barras de acero de refuerzo.



**Figura 3.3:** Esquema de sección transversal de hormigón armado.

El acero considerado es de tipo B500 y el hormigón es tipo C25 (resistencia característica  $f_{ck} = 25$  N/mm<sup>2</sup>).

### Sección 3.3. Solicitaciones últimas en sección de hormigón armado

99

Se desea obtener las sollicitaciones últimas resistidas por la sección para diferente cuantía, posición de línea neutra y curvatura, es decir los diagramas de interacción para la sección.

Para la resolución de este ejemplo nos guiaremos por el procedimiento descrito en (Jimenez Montoya *et al.*, 2009), material basado en la norma española EHE-2008<sup>1</sup>. Para determinar las sollicitaciones últimas soportadas por una sección rectangular se debe calcular las siguientes integrales

$$M_{\text{int}} = M_{\text{int}}^C + M_{\text{int}}^D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \sigma_x(y) y dy + \sum_{i=1}^{n_D} \sigma(y_i) y_i A_i \quad (3.76)$$

donde  $M^C$  es el momento último dado por el hormigón (tensión continua en la altura) y  $M^D$  es el momento producido por tensiones discretas (barras),  $y_i$  y  $A_i$  son las posiciones y áreas donde hay barras de acero, e  $y$  vale cero en la mitad de la altura.

Se considera además  $y_1 = -0,45h$ ,  $y_2 = 0,45h$  y armadura simétrica ( $A_1 = A_2 = A_s$ ).

De forma análoga se calcula la directa resultante:

$$N_{\text{int}} = N_{\text{int}}^C + N_{\text{int}}^D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b \sigma_x(y) dy + \sum_{i=1}^{n_D} \sigma(y_i) A_i \quad (3.77)$$

Pueden ser fácilmente implementadas funciones de Octave que permitan calcular los valores de directa y momento a partir de la curvatura y la posición de la línea neutra. A partir de dichas funciones, se pueden calcular las integrales numéricamente utilizando el método de cuadratura de Gauss, en este caso con cinco puntos de integración.

Las integrales se calculan evaluando el integrando que depende de la función  $\sigma(y)$ . Esta función  $\sigma(y)$  está dada a través de la ecuación constitutiva axial y la expresión de la deformación, es decir  $\sigma(y) = \sigma(\varepsilon(y))$ .

La función de deformación en función de la distancia a la línea neutra  $y - y_N$  y la curvatura  $\kappa$  se puede expresar de la siguiente forma:

$$\varepsilon(y) = -\kappa (y - y_N) \quad (3.78)$$

donde  $y_N$  es la posición de la línea neutra.

La ecuación constitutiva considerada para el hormigón es del tipo parábola-rectángulo, sin considerar resistencia a tracción, mientras que para el acero se utiliza un modelo elastoplástico perfecto. La expresión analítica de la ecuación constitutiva

<sup>1</sup>Enlace a norma en sitio web de ministerio de fomento español (último acceso diciembre 2017).

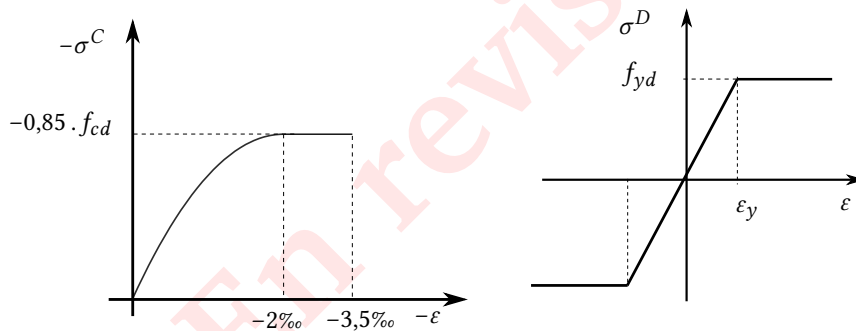
del hormigón es:

$$\sigma^C(\varepsilon) = \begin{cases} -f_{cd} & \text{si } \varepsilon \in [-3,5\text{‰}, -2\text{‰}] \\ 1000 \cdot f_{cd} \cdot \varepsilon \cdot (250 \cdot \varepsilon + 1) & \text{si } \varepsilon \in [-2\text{‰}, 0] \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3.79)$$

mientras que para el acero se tiene que la tensión de límite elástico es  $\varepsilon_y = 2,17\text{‰}$  y por lo tanto la ecuación está dada por

$$\sigma^D(\varepsilon) = \begin{cases} E \varepsilon & \text{si } |\varepsilon| < 2,17\text{‰} \\ f_{yd} \cdot \text{signo}(\varepsilon) & \text{si } |\varepsilon| \geq 2,17\text{‰} \end{cases} \quad (3.80)$$

Las relaciones constitutivas del hormigón y el acero son representadas gráficamente en la Figura 3.4 a la izquierda y derecha respectivamente.

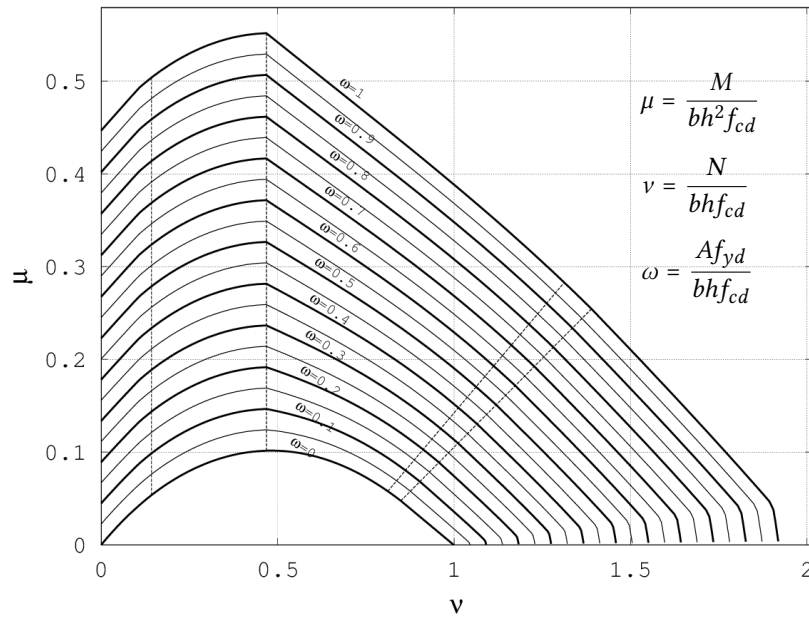


**Figura 3.4:** Relaciones constitutivas de hormigón (izquierda) y acero (derecha).

Finalmente, se calculan las solicitaciones para los valores de línea neutra y curvatura dados por el diagrama de pivotes y con los valores obtenidos se construye el diagrama de interacción mostrado en la Figura 3.5.

Los ejes del gráfico muestran los momentos y directas reducidos,  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente y las líneas punteadas conectan los puntos  $(\nu, \mu)$  en los cuales se produce el cambio de dominio en el diagrama de pivotes para las distintas cuantías consideradas.





**Figura 3.5:** Diagrama de interacción de sección rectangular de hormigón armado.

#### Actividad

Comparar el diagrama de interacción obtenido con el correspondiente presentado en (Jimenez Montoya *et al.*, 2009).



## Capítulo 4: Introducción al Análisis Dinámico

---

En capítulos anteriores se cubrió el análisis de estructuras en régimen no lineal bajo la hipótesis de una respuesta estática. Un gran número de problemas prácticos requieren la capacidad de realizar análisis dinámicos de estructuras, se enumeran algunos a modo de ejemplo:

- puentes y estructuras sometidas a cargas de tránsito dinámicas de tipo peatonal, carretero, ferroviario u otro,
- estructuras de soporte y/o fundaciones para maquinaria recíprocante o vibratoria,
- estructuras sometidas a movimientos sísmicos,
- impactos sobre estructuras,
- estructuras sometidas a explosiones.

Surge por lo tanto la necesidad de abandonar la hipótesis de carga estática y considerar el análisis dinámico de estructuras en régimen no lineal.

En este capítulo no se intenta cubrir el contenido de un curso de dinámica estructural, por el contrario, se busca únicamente sentar las bases de la resolución de problemas de dinámica no lineal, con lo cual, se omitirán conocimientos básicos de dinámica. Un libro recomendable para repasar dichos conocimientos básicos es (Clough y Penzien, 1993). La presentación que aquí se realiza está basada en los capítulos 9 y 24 de los libros (Bathe, 2014) y (Crisfield, 1997) respectivamente.

El presente capítulo consta a grandes rasgos de tres secciones. La primera presenta el planteo de las ecuaciones de movimiento de la estructura y describe sus componentes. La segunda sección presenta métodos de análisis dinámico y ejemplos para estructuras en régimen lineal. Finalmente, la tercera sección refiere a procedimientos de solución y ejemplos de estructuras no lineales.

### 4.1. Deducción de las Ecuaciones de Movimiento

Continuando con el material presentado en el Capítulo 2, se plantea a continuación la condición de equilibrio dinámico de una estructura compuesta por barras

axiales con grandes desplazamientos y rotaciones pero pequeñas deformaciones unitarias.

En este contexto, se recurre al Principio de D’Alambert para establecer las ecuaciones de movimiento de un elemento de barra axial. Dicho principio es el equivalente dinámico al PTV. El mismo incorpora las fuerzas inerciales como fuerzas externas y permite expresar el equilibrio dinámico en forma variacional equivalente al PTV.

En lo que sigue, se hace referencia al tiempo mediante la variable independiente  $t$  y se definen todas las variables estructurales (posición, desplazamiento, deformación unitaria, tensión, etc) como función del tiempo ( $\mathbf{x}_t$ ,  $\mathbf{u}_t$ ,  $\sigma_t$ , etc). Se utilizará la siguiente notación para expresar derivadas primera y segunda respecto del tiempo:  $\dot{\mathbf{u}}_t$  y  $\ddot{\mathbf{u}}_t$ .

Dado lo anterior, para una barra axial, el Principio de D’Alambert sostiene que  $\forall t$  y  $\forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$  se cumple:

$$\int_{V_t} \sigma_t \delta \varepsilon dV_t = \int_{V_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}_{\text{ext},t} dV_t - \int_{V_t} \rho_t \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}}_t dV_t - \int_{V_t} c \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}}_t dV_t, \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{b}_{\text{ext},t}$  representa el campo vectorial de fuerzas externas de volumen. Notar que, en la Ecuación (4.1), los vectores de desplazamiento  $\mathbf{u}_t$  pertenecen a  $\mathbb{R}^3$  que representan desplazamientos de partículas y no desplazamientos nodales.

En la Ecuación (4.1), la primer integral del miembro derecho corresponde a las fuerzas inerciales, siendo  $\rho$  la densidad del material. Por otro lado, la segunda integral del miembro derecho corresponde a fuerzas viscosas disipativas, siendo  $c > 0$  un factor de disipación arbitrario.

La disipación viscosa presentada en este contexto es un mecanismo artificial para introducir efectos de amortiguamiento estructural. La misma no tiene, en general, un significado físico directo y por ende la disipación no se determinará usando una expresión teórica para  $c$ , sino que se realizará por medios empíricos.

Aplicando una discretización de elementos finitos como la utilizada en el Capítulo 2 en la Ecuación (4.1) y mediante consideraciones ya discutidas sobre el volumen de la barra para pequeñas deformaciones unitarias, se llega a la siguiente ecuación de movimiento a nivel de estructura:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{f}_{\text{ext},t} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t. \quad (4.2)$$

Las cargas dinámicas externas están dadas por el vector  $\mathbf{f}_{\text{ext},t}$  y pueden ser periódicas (armónicas, no armónicas) o aperiódicas (impulsivas, transitorias). El tipo de carga influye en la definición del modelo estructural y a su vez en el método de resolución de las ecuaciones de movimiento resultantes.

El vector de fuerzas internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  incorpora los efectos de no linealidad geométrica y eventualmente otros tipos de comportamiento no lineal de los elementos de barra, como puede ser la no linealidad material.

La matriz  $\mathbf{M}$  es llamada Matriz de Masa. Si ésta se deduce usando las funciones de

interpolación de  $\mathbf{u}$  en la formulación de elementos finitos, se le suele llamar Matriz de Masa Consistente. Por el contrario, si es deducida concentrando la masa del elemento en sus nodos y asignándola a sus respectivos grados de libertad de desplazamiento, se la llama Matriz de Masa Concentrada. En este documento se consideran matrices de masa concentrada. Se puede verificar que los resultados obtenidos usando una u otra matriz son prácticamente equivalentes con una discretización suficientemente fina de elementos.

A modo de ejemplo se presenta la matriz de masa concentrada para el elemento de barra bi-dimensional:

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A \ell_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es llamada Matriz de Amortiguamiento y permite incorporar los efectos disipativos viscosos de la estructura. Tal como fue indicado anteriormente, es habitual elegir una matriz  $\mathbf{C}$  tal que de la aplicación de dicha matriz se obtengan amortiguamientos cercanos a valores empíricos conocidos para estructuras similares a la considerada. Por ejemplo, si se estudia una estructura metálica soldada y se sabe que una estructura de fabricación similar exhibió un cierto porcentaje del amortiguamiento crítico bajo vibraciones a ciertas frecuencias, se intentará elegir una matriz  $\mathbf{C}$  que reproduzca esas características de amortiguamiento.

Una formulación usual para la matriz  $\mathbf{C}$  es un tipo de amortiguamiento proporcional conocido como amortiguamiento de Rayleigh, ver (Clough y Penzien, 1993):

$$\mathbf{C} = \eta \mathbf{M} + \chi \mathbf{K}. \quad (4.4)$$

Esta matriz de amortiguamiento permite fijar valores aproximados de amortiguamiento para ciertos rangos de frecuencias y tiene la ventaja de ser esparza, al igual que  $\mathbf{K}$ . Es claro que otros tipos de amortiguamiento pueden ser incorporados mediante la matriz  $\mathbf{C}$ , por ejemplo amortiguadores conectados a dos nodos dados de la estructura. En estas situaciones se puede perder la característica de amortiguamiento proporcional.

## 4.2. Dinámica Lineal

Tal como fue mencionado, previo al abordaje de conceptos de dinámica no lineal, se presentará el problema y métodos de análisis de dinámica lineal.

En esta sección se introducen dos métodos de integración directa de las ecuaciones de movimiento de uso habitual en la práctica. El primero de ellos es un método explícito, condicionalmente estable, llamado Método de Diferencia Centrada y el segundo es un método implícito, incondicionalmente estable bajo ciertas hipótesis,

llamado Método de Newmark.

Antes de introducir los métodos, es conveniente escribir la ecuación de movimiento (ver Ecuación (4.2)) en la hipótesis de comportamiento lineal. Para ello, se asumen pequeñas deformaciones y desplazamientos y comportamiento material elástico lineal, de lo cual resulta una matriz de rigidez lineal  $\mathbf{K}$  a nivel de estructura como la vista en cursos de elementos finitos lineales. En el caso de los elementos de barra vistos en el Capítulo 2, la matriz lineal del elemento corresponde a  $\mathbf{K}^e = EA_0 \ell_0 \mathbf{b}_1^T \mathbf{b}_1$ . Sea  $\alpha$  el ángulo que forma la barra con la horizontal y llamando  $c = \cos(\alpha)$  y  $s = \sin(\alpha)$ , se obtiene:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{\ell_0} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Dado lo anterior, el vector de fuerzas internas  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t)$  está dado por  $\mathbf{K}\mathbf{u}_t$ , por lo que la ecuación de movimiento para el análisis dinámico lineal de la estructura resulta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{f}_{\text{ext},t} \quad (4.6)$$

La Ecuación (4.6) representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado, con coeficientes constantes y no homogéneas. Para determinar una solución, se deben dar condiciones iniciales en el instante  $t_0$  de desplazamiento ( $\mathbf{u}_{t_0}$ ) y velocidad ( $\dot{\mathbf{u}}_{t_0}$ ).

Las definiciones de las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$ , junto con comentarios generales sobre las mismas, ya fueron presentadas en la sección anterior y mantienen su validez.

#### 4.2.1. Método de Diferencia Centrada - Explícito

El Método de Diferencia Centrada, presentado en esta sección, es probablemente el más sencillo entre los métodos de integración directa de las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, este método puede resultar computacionalmente muy económico para ciertos modelos de elementos finitos y tipos de cargas dinámicas.

Se verá más adelante que el método solamente requiere conocer la solución de la ecuación de movimiento en un instante de tiempo dado  $t$  para poder determinar, mediante la evaluación de una expresión explícita, la solución en un tiempo posterior  $t + \Delta t$ . Esta característica es la que define a la clase de métodos *explícitos*. Estos métodos son especialmente adecuados para resolver problemas dinámicos con transitorios rápidos, como ser el análisis de estructuras sometidas a impacto, explosiones o propagación de ondas.

A modo de ejemplo, el software *Abaqus Explicit* utiliza este método de solución y permite modelar problemas del tipo indicado en el párrafo anterior<sup>1</sup>. La formulación

<sup>1</sup>ver sitio web de *Dassault Systèmes*®.

es levemente distinta a la presentada aquí, pero el método es el mismo.

#### Formulación y Pseudo-código

La formulación del método se basa en utilizar las siguientes aproximaciones de las derivadas de los desplazamientos, las cuales están basadas en diferencias centradas. Estas aproximaciones corresponden a las velocidades

$$\dot{\mathbf{u}}_t \approx \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{2\Delta t}, \quad (4.7)$$

y aceleraciones

$$\ddot{\mathbf{u}}_t \approx \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2}. \quad (4.8)$$

Se asume que se conoce la solución hasta el instante  $t$  y que, dado un incremento en el tiempo  $\Delta t$ , se desea hallar la solución en el instante  $t + \Delta t$ . Con lo cual, la incógnita a determinar es  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ .

Para completar la definición del método, se debe utilizar la ecuación de movimiento. En particular, se considera el equilibrio dinámico en el instante  $t$ , dado por la Ecuación (4.6) y se sustituyen las expresiones aproximadas para la aceleración y la velocidad, dadas por las Ecuaciones (4.8) y (4.7). Realizando esto se obtiene:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \right] + \mathbf{C} \left[ \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{f}_{\text{ext},t}. \quad (4.9)$$

Despejando el desplazamiento incógnita  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  se llega a que:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{t+\Delta t} = & \mathbf{f}_{\text{ext},t} - \left[ \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right] \mathbf{u}_t \\ & - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notar que en este método se aproximan las aceleraciones y velocidades en el instante  $t$ , este error suele llamarse error de truncamiento en referencia al truncamiento de una serie de Taylor. Cabe observar que este error de truncamiento puede ser reducido eligiendo un paso temporal  $\Delta t$  más pequeño. En segundo lugar, se introduce otro error al determinar la solución en el tiempo  $t + \Delta t$  a partir del equilibrio dinámico en el instante  $t$ . Es inmediato ver que las aceleraciones, velocidades y desplazamientos del tiempo  $t + \Delta t$  hallados mediante este método no satisfarán exactamente la ecuación de movimiento en el tiempo  $t + \Delta t$ .

En el Algoritmo 4 se presenta un Pseudo-Código del método.

Analizando la línea 12 del Pseudo-Código se puede ver que este método puede ser extremadamente económico desde el punto de vista computacional si la matriz  $\hat{\mathbf{M}}$  es invertible de manera económica, particularmente si esta matriz es diagonal. Es por esto que al aplicar este método se utiliza la matriz de Masa Concentrada y no la

---

**Algoritmo 4** Método de Diferencia Centrada.

---

```

1: Ensamblar:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{C}$  a nivel de estructura.
2: Definir: tiempo final de análisis dinámico:  $t_f$ 
3: Definir: Condiciones iniciales:  $\mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0$ 
4: Calcular:  $\ddot{\mathbf{u}}_0 \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{ext,t} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$ 
5: Definir:  $\Delta t$  tal que  $\Delta t < T_{min}/\pi$ 
6: Calcular:  $a_0 \leftarrow 1/\Delta t^2$ ,  $a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t)$ ,  $a_2 \leftarrow 2a_0$  y  $a_3 \leftarrow 1/a_2$ 
7: Calcular:  $\mathbf{u}_{-\Delta t} \leftarrow \mathbf{u}_0 - \Delta t\dot{\mathbf{u}}_0 + a_3\ddot{\mathbf{u}}_0$ 
8: Calcular y factorizar:  $\hat{\mathbf{M}} \leftarrow a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$ 
9:  $t \leftarrow 0$ 
10: while  $t < t_f$  do
11:   Calcular:  $\hat{\mathbf{f}}_t \leftarrow \mathbf{f}_{ext,t} - (\mathbf{K} - a_2\mathbf{M})\mathbf{u}_t - (a_0\mathbf{M} - a_1\mathbf{C})\mathbf{u}_{t-\Delta t}$ 
12:   Resolver:  $\mathbf{u}_{t+\Delta t} \leftarrow \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{f}}_t$ 
13:   Calcular aceleración:  $\ddot{\mathbf{u}}_t \leftarrow a_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t})$ 
14:   Calcular velocidad:  $\dot{\mathbf{u}}_t \leftarrow a_1(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t})$ 
15:    $t \leftarrow t + \Delta t$ 
16: end while

```

---

matriz de Masa Consistente. Adicionalmente, la matriz de efectos viscosos puede ser despreciada en fenómenos rápidos de muy corta duración. En su defecto, se utiliza una matriz  $\mathbf{C}$  diagonal de manera de no aumentar el costo computacional.

#### Estabilidad Numérica

En el Algoritmo 4 se indica que el valor del paso temporal elegido debe satisfacer la condición:  $\Delta t < T_{min}/\pi$ , donde  $T_{min}$  es el mínimo período de vibración natural del modelo de elementos finitos. Para entender esta restricción, se realiza el análisis de la estabilidad numérica del Método de Diferencia Centrada.

El análisis de estabilidad numérica se lleva a cabo en una estructura sin amortiguamiento, es decir con  $\mathbf{C} = 0$ . Sin embargo, es posible analizar la estabilidad tomando en cuenta el amortiguamiento, en particular bajo la hipótesis de amortiguamiento proporcional. Se realizará algún comentario adicional a este punto más adelante en esta sección.

Previo a realizar el análisis de estabilidad numérica, se debe reconocer que es suficiente estudiar la estabilidad de la solución numérica de un sistema con un grado de libertad. La justificación de este hecho se basa en la descomposición modal de la respuesta de la estructura y se describe brevemente a continuación.

Se definen los modos normales de vibración de la estructura como aquellas soluciones de vibración libre no forzada en las que todos los puntos de la estructura se desplazan de forma sinusoidal respecto del tiempo, en fase y a una misma frecuencia; es decir:  $\mathbf{u}_t = \sin(\omega(t - t_0))\phi$ , donde  $\phi$  es un vector de desplazamientos nodales asociados a las amplitudes del movimiento.



#### Sección 4.2. Dinámica Lineal

109

Sustituyendo el modo normal definido anteriormente en la ecuación de movimiento (sin amortiguamiento ni fuerzas externas) se obtiene la siguiente relación:

$$\omega^2 \mathbf{M}\phi = \mathbf{K}\phi. \quad (4.11)$$

La ecuación anterior define un problema de valores propios para una matriz simétrica definida positiva. Esto implica que existen tantos modos normales  $\{\phi_i, \omega_i^2\}$  como grados de libertad tenga la estructura ( $n$ ), es decir tantos como la dimensión de las matrices  $\mathbf{M}$  o  $\mathbf{K}$  (reducidas).

#### Actividad

Mostrar que los modos normales de vibración satisfacen la relación:

$$\phi_i^T \mathbf{M}\phi_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker.

Agrupando cada uno de los  $n$  modos normales  $\phi_i$  como columnas de una matriz  $\Phi$ , y sus respectivas frecuencias al cuadrado ( $\omega_i^2$ ) en la diagonal de una matriz  $\Lambda$ , se tiene:

$$\mathbf{M}\Phi\Lambda = \mathbf{K}\Phi \quad (4.12)$$

La Ecuación (4.12) define la relación matricial que verifican los modos normales de la estructura. Queda definida así una base de vectores dada por  $\Phi$  en la cual se pueden escribir los vectores de desplazamiento a lo largo del tiempo.

A partir del desarrollo anterior, se define  $\mathbf{u}_t = \Phi\mathbf{x}_t$ . Es decir,  $\mathbf{x}_t$  son las coordenadas que representan a  $\mathbf{u}_t$  en la base de modos normales  $\Phi$ . La ecuación de movimiento resulta:

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}\Phi\mathbf{x}_t = \mathbf{f}_{\text{ext},t}. \quad (4.13)$$

Si se multiplica la Ecuación (4.13) a la izquierda por  $\Phi^T$  se obtiene,

$$\Phi^T \mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{x}}_t + \Phi^T \mathbf{K}\Phi\mathbf{x}_t = \Phi^T \mathbf{f}_{\text{ext},t}. \quad (4.14)$$

Usando la condición de  $\mathbf{M}$ -ortonormalidad de los vectores  $\phi_i$  y definiendo  $\nu_t = \Phi^T \mathbf{f}_{\text{ext},t}$  se llega a:

$$\ddot{\mathbf{x}}_t + \Lambda\mathbf{x}_t = \nu_t. \quad (4.15)$$

De la Ecuación (4.15) se puede concluir que al cambiar la base a  $\Phi$ , la ecuación de movimiento queda diagonalizada o en otras palabras se desacoplan las ecuaciones de movimiento de los distintos grados de libertad. En la nueva base se tiene:

$$\ddot{x}_{i,t} + \omega_i^2 x_{i,t} = \nu_{i,t} \quad i = 1 \dots n. \quad (4.16)$$

Un breve comentario respecto del amortiguamiento. Si se considera el amortiguamiento, el argumento anterior es válido solamente si se asume que la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  cumple que  $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$  es una matriz diagonal. Queda como ejercicio verificar lo anterior. En esos casos se llega a ecuaciones de movimiento desacopladas de la forma:

$$\ddot{x}_{i,t} + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_{i,t} + \omega_i^2 x_{i,t} = v_{i,t} \quad (4.17)$$

Queda establecido que se puede analizar el comportamiento de la solución numérica de la ecuación de movimiento de un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento y considerando varias componentes se abarca el análisis de una estructura completa.

Se define por lo tanto el *Problema Test* con el cual se analiza la estabilidad numérica del Método de Diferencia Centrada:

$$\text{Problema Test} \begin{cases} \ddot{x}_t + \omega^2 x_t = 0 \\ x_0 = 1 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

La aplicación del método de Diferencia Centrada al Problema Test resulta en la siguiente ecuación,

$$x_{t+\Delta t} = (2 - \omega_i^2 \Delta t^2) x_t - x_{t-\Delta t}. \quad (4.19)$$

Se define el vector  $\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = [x_{t+\Delta t}, \dot{x}_t]^T$ . Usando la Ecuación (4.19) se puede presentar la solución con el método de Diferencia Centrada de la siguiente forma,

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_t, \quad (4.20)$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  está definida como,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 - \omega_i^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

El vector  $\hat{\mathbf{x}}_0$  es un vector constante, no nulo, que queda definido a partir de las condiciones iniciales del Problema Test. Se puede suponer sin perder generalidad que  $t = n\Delta t$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, la aplicación repetida de la Ecuación (4.20) permite obtener:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}^n \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.22)$$

Es aquí que se impone el criterio de estabilidad numérica. Un sistema de un grado de libertad, sin amortiguamiento y sin forzamiento externo, que parte de una condición inicial dada tiene una solución oscilatoria que permanece acotada. Es natural por lo tanto, requerir que la solución numérica no diverja. Es decir que para todo instante  $t$  se cumpla  $\|\hat{\mathbf{x}}_t\| < \infty$ .

Tomando normas en la Ecuación (4.22) se obtiene la identidad:

$$\|\hat{\mathbf{x}}_t\| = \|\mathbf{A}^n \hat{\mathbf{x}}_0\|. \quad (4.23)$$

El miembro derecho de la Ecuación (4.23) está acotado si, se cumple que el radio espectral de  $\mathbf{A}$  es menor a 1, es decir  $\rho(\mathbf{A}) < 1$ . El radio espectral de  $\mathbf{A}$  se define como el máximo de los módulos de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ , es decir:  $\rho(\mathbf{A}) = \max_i |\lambda_i|$ . Si la multiplicidad de los valores propios es uno, la condición se puede relajar a  $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ .

La justificación formal de este punto se puede buscar en las notas del curso *Métodos Numéricos* (Facultad de Ingeniería, *Universidad de la República*). Alternativamente, una idea intuitiva de la validez de este resultado puede obtenerse pensando en que si  $\mathbf{A}$  es diagonalizable ( $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$ ), entonces  $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$ . Si los módulos de todos los valores propios que hay en la diagonal de  $\mathbf{D}$  son menores a 1, se tiene que  $\mathbf{D}^n \rightarrow 0$ .

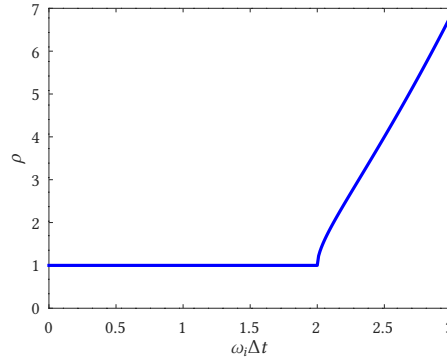
Por lo tanto, para evaluar la condición de estabilidad del método en cuestión debemos calcular los valores propios de  $\mathbf{A}$ , verificar que tienen multiplicidad igual a uno, e imponer que el módulo de éstos sea menor o igual a 1.

Se define  $z = \omega\Delta t > 0$  con lo cual los valores propios resultan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - z^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - z^2)^2}{4} - 1}. \quad (4.24)$$

Se puede ver que los valores propios tienen multiplicidad 1, incluso cuando  $z = 2$ .

En la Figura 4.1 se presenta la gráfica de la función  $\rho(\mathbf{A})(z) = \max\{|\lambda_1(z)|, |\lambda_2(z)|\}$  para valores  $z \in [0, 3]$ .



**Figura 4.1:** Condición de Estabilidad del Método de Diferencia Centrada.

Se observa que se satisface el criterio de estabilidad si se cumple  $\omega\Delta t \leq 2$ . Llamando  $T$  al período asociado a  $\omega$ , la condición es equivalente a:  $\Delta t/T \leq 1/\pi$ .

En una estructura completa, todos los grados de libertad deben satisfacer esta condición. Se observa que la condición más estricta para  $\Delta t$  corresponde al grado de libertad con el período natural más corto (es decir, el de mayor frecuencia), con lo cual el criterio de estabilidad numérica para una estructura completa es:

$$\Delta t \leq \frac{T_{\min}}{\pi}, \quad (4.25)$$

siendo  $T_{\min}$  el menor período natural.

#### Ejemplo - Edificio Sometido a Carga de Explosión

Se considera la estructura de un edificio de hormigón armado con tres niveles, conformada por pilares, vigas y losas. La estructura considerada no representa una estructura realista, sino simplemente una idealización simplificada de un edificio.

La geometría del edificio y la posición de la detonación considerada se muestra en la Figura 4.2 a través de una vista en planta (arriba) y un corte vertical (abajo).

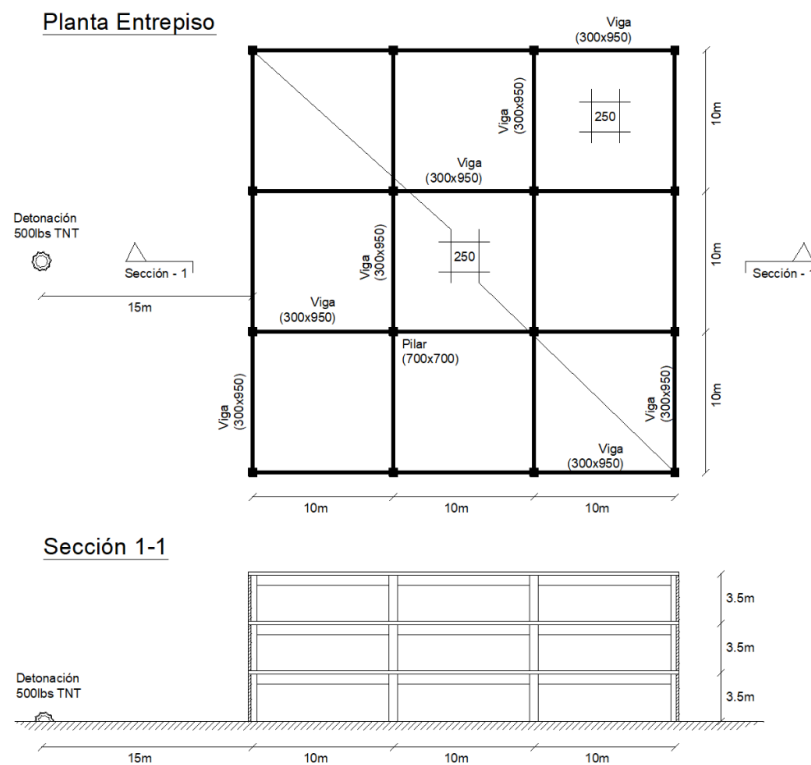


Figura 4.2: Esquema de la Estructura del Edificio.

Se considera que los pilares se empotran significativamente en los entrepisos y que los entrepisos son rígidos (a flexión y directa) en el plano. Con lo cual el movimiento lateral de la estructura en una dirección queda completamente definida por el desplazamiento lateral de cada piso ( $u_1, u_2, u_3$ ) respecto de la posición original vertical. Esto permite realizar una idealización de la estructura a través de un modelo unidimensional mostrado en la Figura 4.3.

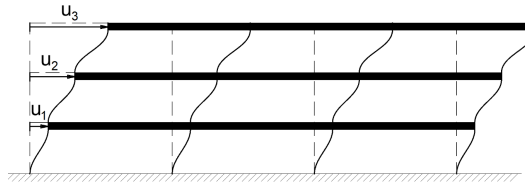


Figura 4.3: Modelo del Edificio con 3 Grados de Libertad.

Dada la idealización estructural considerada, se plantea realizar el análisis dinámico lineal de la estructura. Se utiliza una matriz de masas concentradas, en la cual cada grado de libertad concentra la masa entre pisos adyacentes. Por otro lado, la matriz de rigidez se obtiene considerando la rigidez de un pilar empotrado-empotrado deslizando y la cantidad de pilares que se conectan a un entrepiso. Siendo  $\mathbf{u}_t = [u_{1,t}, u_{2,t}, u_{3,t}]^T$ ,

$$\mathbf{K} = \frac{n_{cols} 12EI}{H^3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

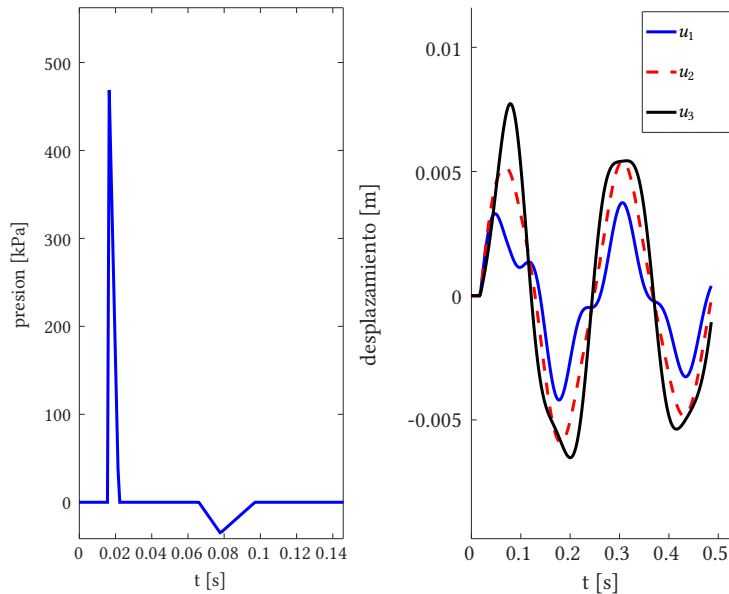
La carga dinámica a la cual es sometido el edificio corresponde a las presiones generadas sobre la envolvente del edificio a causa de la detonación equivalente a 500 lbs de TNT a nivel de piso y a una distancia de 15m del edificio. Las presiones que se utilizan en el ejemplo fueron obtenidas del documento (Gilsanz *et al.*, 2013).

Se resuelve la dinámica mediante el Método de Diferencia Centrada. La selección del paso temporal  $\Delta t$  se hizo considerando que se debía satisfacer la estabilidad numérica y que se debía capturar con suficiente precisión la súbita carga de presión de la explosión. El resultado del análisis numérico se muestra en la Figura 4.4.

Se puede ver el período de reposo previo al impacto de la explosión, seguido por una respuesta dinámica gobernada por el modo fundamental con los otros modos aportando en menor medida a la respuesta. Se puede también confirmar que el grado de libertad con mayor amplitud es el correspondiente al tercer piso del edificio.

#### Actividad

Obtener los valores de la fuerza cortante en un pilar en función del tiempo.



**Figura 4.4:** Solución numérica de dinámica de edificio sometido a carga de explosión: historia de presiones considerada (izquierda) y respuesta de la estructura (derecha).

En el Código 4.1 se presenta la implementación de GNU-Octave utilizada para obtener la solución numérica presentada.

**Código 4.1:** Ejemplo Numérico - Método Diferencia Centrada.

```

1 % Ejemplo de Metodo de Diferencia Centrada: Edificio Bajo Carga de Explosion %
2 clc, clear
3
4 % Definicion de la estructura
5 A = 30; %m                                Lado del Edificio
6 e = 0.25; %m                               Espesor Losa Piso
7 hv = 0.7; %m                              Altura Viga
8 bv = 0.3; %m                              Ancho Viga
9 muro = 300; %kg/m2                        Peso muro por uni. area
10 ncols = 16; %                             Cantidad de Columnas (4x4)
11
12 a = 0.7; %m                               Lado de Columna
13 E = 30e9; %N/m2                           Mod. Young Hormigon
14 I = a^4/12; %m4
15 H = 3.5; %m                               Altura Entre Pisos
16
17 % Definicion de Matriz de Rigidez
18 k = ncols * 12*E*I/H^3; %N/m

```

## Sección 4.2. Dinámica Lineal

115

```

19      %u1 u2 u3
20      K = k*[2 -1 0 ; -1 2 -1 ; 0 -1 1]; %N/m
21
22      % Definicion de Matriz de Masa
23      Mpiso = 2500*(e*A^2+hv*bv*A*8); %kg
24      Mpilar = 2500*ncols*a^2*H; %kg
25      Mmuro = muro*H*A*4*0.6; %kg
26      Mint = Mpiso + Mpilar + Mmuro;
27      Msup = Mpiso + Mpilar/2 + Mmuro/2;
28
29      M = diag([Mint, Mint, Msup]); %kg
30
31      % Definicion de Matriz Amortiguamiento
32      % Usamos Rayleigh Damping: C = eta*M + delta*K
33      % Amortiguamiento: 3% critico para 25rad/s y 106rad/s
34      C = 1.21*M + 4.6e-4*K;
35
36      % Calculo de Modos Normales
37      [PHI, w2] = eig(K,M);
38
39      w = sqrt(diag(w2)); %rad/s
40      f = w/2/pi; %Hz
41      T = 1./f %sec
42
43      % Calculo de Paso Critico para Diferencia Centrada
44      dtcr = min(T)/pi
45
46      % Definicion de Historia de Presiones y Fuerzas Laterales
47      Aint = A*H; %m2
48      Asup = A*H/2; %m2
49
50      % funcion analitica para evaluar presion triangular en el tiempo
51      press = @(t,ta,te,pr1,pr2) (pr1-(pr1-pr2)/te*(t-ta)).*and(t>ta,t<ta+te);
52
53      % historia de presion en el tiempo como suma de tramos lineales (triangulos)
54      pt = @(t) press(t,15.6e-3,6.2e-3,0.55e6,0)+ ...
55              press(t,66.0e-3,11.9e-3,0,-0.035e6)+...
56              press(t,77.9e-3,19.1e-3,-0.035e6,0); %N/m2
57
58      ft = @(t) pt(t)*[Aint;Aint;Asup]; %N
59
60      % Definicion de Condiciones Iniciales y Tiempo Final
61      t0 = 0; %sec
62      u0 = [0;0;0]; %m
63      v0 = [0;0;0]; %m
64      ac0 = M\ (ft(t0)-C*v0-K*u0); % de ec de movimiento Mu.. + Ku = ft
65
66      tf = 2*max(T); % 2 periodos del modo fundamental
67
68      % Inicializacion Diferencia Centrada
69      dt = dtcr/20;
70      a0 = 1/dt^2; a1=1/2/dt; a2=2*a0; a3=1/a2;
71
72      u(:,1) = u0 - dt*v0 + a3*ac0; % u(-dt)

```

```

73 u(:,2) = u0; % u(0)
74
75 Meff = a0*M+a1*C; Keff = (K-a2*M); M2 = a0*M-a1*C;
76
77 % Comienza Marcha en el Tiempo usando Diferencia Centrada
78 t(1) = t0-dt; t(2) = t0; k=2;
79 while t<tf
80     feff = ft(t(k)) - Keff*u(:,k) - M2*u(:,k-1);
81     u(:,k+1) = Meff\feff;
82     acc(:,k) = a0*(u(:,k+1)-2*u(:,k)+u(:,k-1)));
83     vel(:,k) = a1*(u(:,k+1)-u(:,k-1)));
84     k=k+1;
85     t(k)=t(k-1)+dt;
86 end
87
88 subplot(1,2,1), plot(t,pt(t)/1e3,'-b')
89 xlabel('t [sec]'), ylabel('presion [kPa]')
90 axis([t0,0.3*max(t),1.2*min(min(pt(t)/1e3)),1.2*max(max(pt(t)/1e3))])
91 title('Presion por Explosion')
92
93 subplot(1,2,2), plot(t,u(1,:),'-b',t,u(2,:),'-r',t,u(3,:),'-k')
94 legend('u1(t)','u2(t)','u3(t)'), xlabel('t [sec]'), ylabel('desplazamiento [m]')
95 axis([t0,1.1*max(t),1.5*min(min(u)),1.5*max(max(u))])
96 title('Respuesta de la Estructura')

```

#### 4.2.2. Método de Newmark - Implícito

El Método de Newmark es en realidad una familia de métodos, ya que se cuenta con dos parámetros ( $\alpha$  y  $\delta$ ) mediante los cuales se pueden obtener una variedad de métodos, con distintos comportamientos en cuanto a estabilidad y precisión.

Se comenzará formulando el método en su forma general, es decir sin especificar valores para los parámetros, aunque más adelante el análisis de estabilidad numérica y el ejemplo numérico dado corresponderán al caso de Newmark, también conocido como Método de Trapecio.

##### Formulación y Pseudo-código

La familia de métodos de Newmark resulta de utilizar las siguientes aproximaciones de la velocidad y aceleración, basadas en desarrollos de Taylor. Para las velocidades se considera:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + [(1 - \delta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t, \quad (4.27)$$

mientras que para las aceleraciones se utiliza:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + [(1/2 - \alpha)\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}]\Delta t^2. \quad (4.28)$$

En las Ecuaciones (4.27) y (4.28) fueron introducidos los parámetros  $\alpha$  y  $\delta$ . El



Método del Trapecio se obtiene cuando:  $\alpha = 1/4$  y  $\delta = 1/2$ .

Newmark considera el equilibrio dinámico en el instante  $t + \Delta t$ . Manipulando las aproximaciones dadas en las Ecuaciones (4.27) y (4.28), y sustituyendo en la ecuación de equilibrio se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{\hat{u}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}, \quad (4.29)$$

donde  $\hat{\mathbf{K}}$  está dada por:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}, \quad (4.30)$$

y  $\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$  está dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{\text{ext},t+\Delta t} + \mathbf{M} & \left[ \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{u}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \\ + \mathbf{C} & \left[ \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{u}_t + \left( \frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

Resulta inmediato, a partir de la Ecuación (4.29), que Newmark requiere en cada paso la solución de un sistema lineal no trivial. Es por esto que se lo clasifica como un método implícito, en cada paso se debe resolver una ecuación implícita para hallar  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ .

Adicionalmente, se puede observar que las velocidades ( $\dot{\mathbf{u}}_t$ ) y aceleraciones ( $\ddot{\mathbf{u}}_t$ ) son requeridas para poder calcular  $\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$ , por lo tanto en cada paso se deben calcular dichos vectores. Las siguientes expresiones se obtienen directamente de las Ecuaciones (4.27) y (4.28):

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t - \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (4.32)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t(1 - \delta)\ddot{\mathbf{u}}_t + \Delta t\delta\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (4.33)$$

Las Ecuaciones (4.29) a (4.33) son suficientes para poder llevar adelante el paso integración en el tiempo de Newmark. En el Algoritmo 5 se presenta un Pseudo-Código del Método de Newmark.

A partir del Pseudo-Código presentado, se puede observar que, a diferencia del Método de Diferencia Centrada (en el cual se puede evitar resolver un sistema lineal costoso), en el Método de Newmark se debe resolver un sistema lineal con una matriz de coeficientes esparza en cada paso. Eso hace que el paso de Newmark sea significativamente más costoso que el de Diferencia Centrada.

Sin embargo, Newmark tiene como beneficio el hecho que no hay restricción de paso mínimo por estabilidad numérica. Se mostrará en la siguiente sección que para ciertos valores de  $\alpha$  y  $\delta$  el método es incondicionalmente estable. En particular, el Método del Trapecio ( $\alpha = 1/4$ ,  $\delta = 1/2$ ) es incondicionalmente estable. Además, se puede verificar que en un sistema no amortiguado ( $\mathbf{C} = 0$ ) que vibra libremente

---

**Algoritmo 5** Método de Newmark

---

- 1: Ensamblar:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{C}$  a nivel de estructura.
  - 2: Definir: tiempo final de análisis dinámico:  $t_f$
  - 3: Definir: Condiciones iniciales:  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$
  - 4: Calcular:  $\ddot{\mathbf{u}}_0 \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{ext,0} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0)$
  - 5: Definir:  $\Delta t$ ,  $\delta$  y  $\alpha$  tal que:  $\delta \geq 0,5$  y  $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta^2)$ .
  - 6: Calcular:  $a_0 \leftarrow 1/(\alpha\Delta t^2)$ ,  $a_1 \leftarrow \delta/(\alpha\Delta t)$ ,  $a_2 \leftarrow 1/(\alpha\Delta t)$ ,  $a_3 \leftarrow (1/(2\alpha) - 1)$
  - 7: Calcular  $a_4 \leftarrow \delta/\alpha - 1$ ,  $a_5 \leftarrow \Delta t/2(\delta/\alpha - 2)$ ,  $a_6 \leftarrow \Delta t(1 - \delta)$  y  $a_7 \leftarrow \delta\Delta t$
  - 8: Calcular y factorizar:  $\hat{\mathbf{K}} \leftarrow \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C}$
  - 9:  $t \leftarrow 0$
  - 10: **while**  $t < t_f$  **do**
  - 11:   Calcular:  $\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} \leftarrow \mathbf{f}_{ext,t+\Delta t} + \mathbf{M}(a_0\mathbf{u}_t + a_2\dot{\mathbf{u}}_t + a_3\ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_1\mathbf{u}_t + a_4\dot{\mathbf{u}}_t + a_5\ddot{\mathbf{u}}_t)$
  - 12:   Resolver:  $\mathbf{u}_{t+\Delta t} \leftarrow \hat{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$
  - 13:   Calcular aceleración:  $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \leftarrow a_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - a_2\dot{\mathbf{u}}_t - a_3\ddot{\mathbf{u}}_t$
  - 14:   Calcular velocidad:  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \leftarrow \dot{\mathbf{u}}_t + a_6\ddot{\mathbf{u}}_t + a_7\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$
  - 15:    $t \leftarrow t + \Delta t$
  - 16: **end while**
- 

( $\mathbf{f}_{ext,t} = 0$ ) el Método del Trapecio conserva la energía mecánica total. Es decir que para cualquier  $\Delta t$  elegido, se cumple:

$$E_t = \frac{\dot{\mathbf{u}}_t^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_t}{2} + \frac{\mathbf{u}_t^T \mathbf{K} \mathbf{u}_t}{2} = \text{cte} \quad \forall t. \quad (4.34)$$

**Estabilidad Numérica**

Para evaluar la estabilidad numérica de Newmark, se debe estudiar la solución generada por numérica obtenida para el Problema Test visto en la Sección 4.2.1. Siguiendo un desarrollo similar al de dicha sección, se puede definir el vector  $\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = [\hat{x}_{t+\Delta t}, \dot{x}_{t+\Delta t}, \ddot{x}_{t+\Delta t}]^T$  y resumir el resultado de aplicar Newmark al Problema test de la siguiente forma:

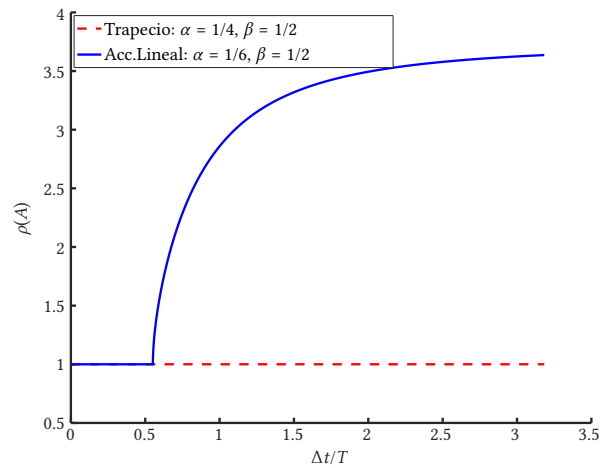
$$\hat{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_t. \quad (4.35)$$

La matriz  $\mathbf{A}$ , con  $\beta = (1/(\omega^2 \Delta t^2) + \alpha)^{-1}$ , tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1/2 - \alpha)\beta & -\beta/\Delta t & -\beta/\Delta t^2 \\ \Delta t[1 - \delta - (1/2 - \alpha)\delta\beta] & 1 - \beta\delta & -\beta\delta/\Delta t \\ \Delta t^2[1/2 - \alpha - (1/2 - \alpha)\alpha\beta] & \Delta t(1 - \alpha\beta) & 1 - \alpha\beta \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Se quiere evaluar la estabilidad del Método del Trapecio ( $\alpha = 1/4$ ,  $\delta = 1/2$ ). Usando dichos parámetros en la definición de  $\mathbf{A}$  y  $\beta$ , se puede evaluar el radio espectral de  $\mathbf{A}$  para distintos valores de  $\Delta t/T$  y verificar la estabilidad controlando que éste sea menor que 1.

En la Figura 4.5 se muestra la evaluación numérica de  $\rho(A)$  para: el Método del Trapecio (trazo discontinuo rojo) y para otra variante de Método de Newmark conocida como Método de Aceleración Lineal (trazo continuo azul).



**Figura 4.5:** Estabilidad de variantes del Método de Newmark (Trapecio y Acel. Lineal).

Se puede observar que el Método del Trapecio es incondicionalmente estable, mientras que el método de aceleración lineal es condicionalmente estable.

#### Ejemplo - Edificio bajo Acción Sísmica

Finalmente, se presenta un ejemplo en el cual se realiza el análisis dinámico lineal del edificio definido en la Sección 4.2.1 bajo una acción sísmica. Para analizar el edificio sometido a movimientos sísmicos laterales de su base, es necesario definir coordenadas absolutas para expresar el movimiento del suelo y otras coordenadas relativas al referencial solidario al suelo.

Los desplazamientos absolutos serán:  $\mathbf{u}_{G,t} = \mathbf{x}_{S,t}\boldsymbol{\iota} + \mathbf{u}_t$ . Donde  $\mathbf{u}_{G,t}$  son desplazamientos absolutos,  $\mathbf{x}_{S,t}\boldsymbol{\iota}$  indica la posición del suelo respecto del referencial absoluto y  $\mathbf{u}_t$  son desplazamientos del edificio relativos al referencial solidario al suelo. Notar que el vector:  $\boldsymbol{\iota}$ , llamado vector de influencia, indica cómo influye el movimiento de suelo en cada uno de los grados de libertad de la estructura.

Derivando dos veces respecto del tiempo se obtiene:  $\ddot{\mathbf{u}}_{G,t} = \ddot{\mathbf{x}}_{S,t}\boldsymbol{\iota} + \ddot{\mathbf{u}}_t$ .

Finalmente, notando que las fuerzas internas y los efectos disipativos de la estructura dependen de los desplazamientos relativos  $\mathbf{u}_t$  y de su derivada primera  $\dot{\mathbf{u}}_t$ ,

se llega a la ecuación de movimiento bajo acción sísmica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = -\ddot{\mathbf{x}}_{G,t}\mathbf{M}\mathbf{L}, \quad (4.37)$$

donde  $\ddot{\mathbf{x}}_{G,t}$  tiene el registro de aceleraciones de suelo medidos según una dirección dada.

En el presente ejemplo, los datos de aceleración corresponden al sismo de Loma Prieta, ocurrido el 17 de octubre de 1987 en California, U.S.A.

En la Figura 4.6 se muestran los resultados de la solución de la dinámica del edificio para la aceleración de terreno elegida. Comparando los resultados obtenidos con los de la solución de la dinámica del edificio sometido a una detonación, se observa mayores desplazamientos en el caso del sismo.

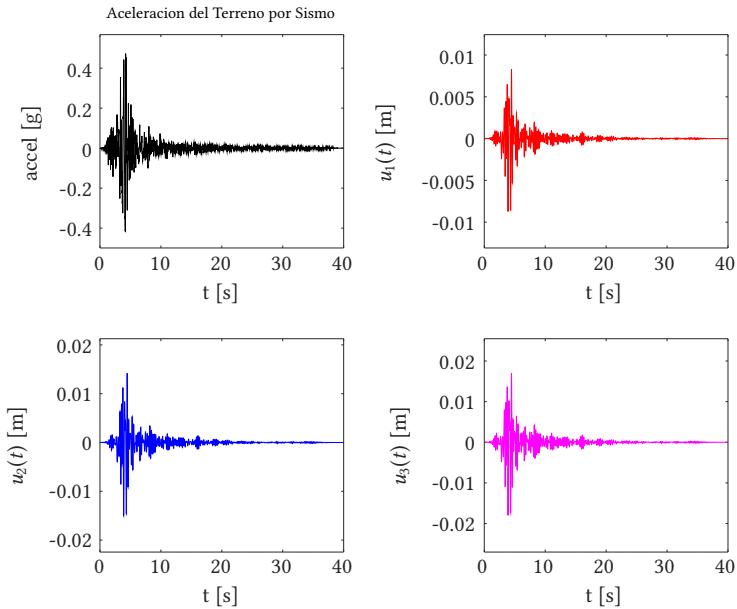


Figura 4.6: Solución numérica del movimiento del edificio bajo acción de sismo.

### 4.3. Dinámica No Lineal

Luego de haber estudiado los procedimientos de solución de la ecuación de movimiento para una estructura sin considerar no linealidades, se puede pasar a estudiar los cambios necesarios para poder resolver la dinámica considerando no linealidades, es decir Dinámica No Lineal.

Tal como fue presentada en la Sección 4.1, la ecuación de movimiento para una estructura no lineal tiene un vector de fuerzas internas que es función de  $\mathbf{u}_t$ . Dicho vector puede contemplar no linealidad material, geométrica o de ambos tipos.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{f}_{\text{ext},t} \quad (4.38)$$

Los procedimientos de solución explícitos e implícitos se deben ajustar al hecho de que el vector de fuerzas internas ya no es simplemente el producto de la matriz de rigidez por el vector de desplazamientos en el tiempo considerado. Este cambio tiene un efecto menor en el procedimiento correspondiente al Método de Diferencia Centrada, pero implica un cambio significativo en el procedimiento asociado al Método de Newmark.

De manera resumida, en el caso de dinámica no lineal, se deberá asegurar que el equilibrio se verifica para cada instante de tiempo. En el caso de métodos explícitos eso es inmediato, pero en el caso de métodos implícitos esto requerirá de iteraciones de tipo N-R para asegurar dicho equilibrio.

También cabe mencionar que los criterios de estabilidad numérica vistos para el caso de estructuras lineales no aplican de manera inmediata al caso no lineal. En particular, siempre y cuando el paso temporal ( $\Delta t$ ) sea suficientemente corto, tal que la estructura mantenga un comportamiento aproximadamente lineal durante varios instantes de tiempo, los criterios de estabilidad tendrán cierto grado de validez. Se debe tomar en cuenta que los periodos de vibración relevantes para determinar la estabilidad numérica corresponden a la rigidez de la estructura a medida que transcurre el tiempo. Una estructura que se vuelve más rígida por efectos geométricos a medida que avanza el tiempo, tendrá, para el Método de Diferencia Centrada, un paso temporal crítico cada vez menor debido a dicho aumento de la rigidez.

Para pasos temporales largos, tales que de un instante a otro el comportamiento de la estructura no puede considerarse aproximadamente lineal, los criterios de estabilidad no aplican y se pueden llegar a observar inestabilidades numéricas en métodos que se clasificaron como incondicionalmente estables para problemas lineales.

#### 4.3.1. Método de Diferencia Centrada - Explícito

La deducción del método es idéntica a la presentada en la sección de dinámica lineal. Se busca determinar  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ , para ello se considera el equilibrio dinámico en el tiempo  $t$  y se usan los mismos cocientes incrementales para aproximar las derivadas primera y segunda de  $\mathbf{u}_t$ . En este caso se debe simplemente tomar en cuenta que las fuerzas internas están dadas por  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t)$ .

Usando la Ecuación (4.10) se puede escribir,

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{ext,t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_t) + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_t - \left[ \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{t-\Delta t}. \quad (4.39)$$

La Ecuación (4.39) provee la regla mediante la cual se calcula  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ . Notar que en el caso de una estructura no lineal debemos en cada paso evaluar el vector de fuerzas internas en el instante de tiempo actual. Es claro que el método continúa siendo explícito.

Se destaca que sigue siendo necesario, tal como en la solución de problemas lineales, que la matriz de masa y eventualmente la de amortiguamiento sean diagonales de manera que la evaluación de  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  a partir de la Ecuación (4.39) sea computacionalmente económica.

A partir del desarrollo anterior, se puede actualizar el procedimiento de solución del Método de Diferencia Centrada para el caso de estructuras no lineales tal como se muestra en el Algoritmo 6.

---

**Algoritmo 6** Método de Diferencia Centrada - No-Lineal

---

- 1: Ensamblar:  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  a nivel de estructura.
  - 2: Definir: tiempo final de análisis dinámico:  $t_f$
  - 3: Definir: Condiciones iniciales:  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$
  - 4: Calcular:  $\ddot{\mathbf{u}}_0 \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{ext,t} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_0))$
  - 5: Definir:  $\Delta t$ , considerar estabilidad numérica.
  - 6: Calcular:  $a_0 \leftarrow 1/\Delta t^2$ ,  $a_1 \leftarrow 1/(2\Delta t)$ ,  $a_2 \leftarrow 2a_0$  y  $a_3 \leftarrow 1/a_2$
  - 7: Calcular:  $\mathbf{u}_{-\Delta t} \leftarrow \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_0$
  - 8: Calcular y factorizar:  $\hat{\mathbf{M}} \leftarrow a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$
  - 9:  $t \leftarrow 0$
  - 10: **while**  $t < t_f$  **do**
  - 11:   Calcular:  $\hat{\mathbf{f}}_t \leftarrow \mathbf{f}_{ext,t} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_t) + a_2 \mathbf{M} \mathbf{u}_t - (a_0 \mathbf{M} - a_1 \mathbf{C}) \mathbf{u}_{t-\Delta t}$
  - 12:   Resolver:  $\mathbf{u}_{t+\Delta t} \leftarrow \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{f}}_t$
  - 13:   Calcular aceleración:  $\ddot{\mathbf{u}}_t \leftarrow a_0(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t})$
  - 14:   Calcular velocidad:  $\dot{\mathbf{u}}_t \leftarrow a_1(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t})$
  - 15:    $t \leftarrow t + \Delta t$
  - 16: **end while**
- 

En este momento es una buena idea comentar sobre la elección del paso temporal ( $\Delta t$ ) para el Método de Diferencia Centrada en problemas no lineales. Tal como se mencionó anteriormente, la estabilidad numérica del método continúa restringiendo el paso temporal máximo que se puede usar. La elección del paso se vuelve más difícil en el caso de estructuras no lineales ya que el paso temporal crítico no es constante durante la solución. La rigidez de la estructura puede variar a lo largo del tiempo

por efectos de rigidez geométrica o por no linealidad material. Si se espera que la estructura solamente se flexibilice a medida que transcurre el tiempo, un criterio razonable puede ser determinar el paso temporal en base a la rigidez inicial de la estructura. Si este no es el caso, se debe prever el efecto de la rigidización de la estructura en el paso temporal crítico y asegurar que el paso elegido no superará el valor crítico mínimo previsto.

Al realizar análisis dinámicos de estructuras no lineales usando el Método de Diferencia centrada, la elección de un paso temporal demasiado largo en comparación con el mínimo paso temporal crítico previsto, puede llevar a acumular errores significativos durante aquellos instantes de tiempo en los cuales el paso temporal elegido superó al paso crítico. Esta acumulación acotada de errores es marcadamente distinta a la que se observa en análisis dinámicos lineales, en los cuales si se elige un paso temporal por encima del valor crítico, la solución diverge y el analista puede reconocer fácilmente que seleccionó un paso temporal erróneo.

#### Ejemplo Dinámica No Lineal - Cercha de Von Mises

Se considera una cercha de tipo de Von Mises bajo la acción de una carga dinámica. La estructura consiste en dos columnas flexibles empotradas en la base y dos bielas articuladas que trabajan como puntales de la cercha tal como se muestra en la Figura 4.7.

Se coloca una masa  $m$  suspendida de la cumbre de la cercha. Todas las barras de la cercha están formada por acero ( $E = 200$  GPa) y sección rectangular ( $a = 3,2$  mm y  $b = 25,4$  mm). Los parámetros que definen la geometría son:  $L_c = 240$  mm,  $L_x = 187$  mm y  $L_z = 84$  mm. Esta estructura es la utilizada por el profesor A. Wadee en la presentación referida al inicio del Capítulo 2 de este documento.

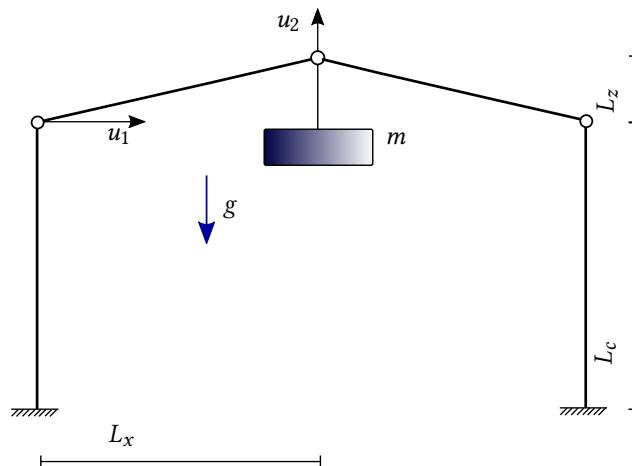


Figura 4.7: Geometría de Cercha de Von Mises.

La forma de cargar la estructura consiste en suspender la masa en la configuración indeformada y luego dejarla libre. Esto implica que el vector de deformación inicial es nulo y también lo es el vector de velocidades inicial.

Dada la simetría axial, respecto al eje vertical, presente en la estructura y las cargas aplicadas, se modela la mitad izquierda de la estructura. De esta forma solo se debe analizar una biela de Green con condición de borde deslizante vertical en el extremo derecho y deslizante horizontal con resorte en el extremo izquierdo tal como se muestra en la Figura 4.8. La constante elástica del resorte está dado por la rigidez flexional de los pilares.

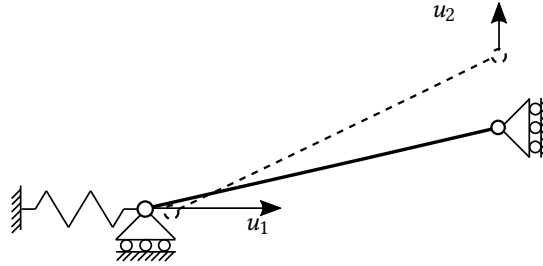


Figura 4.8: Modelo de Cálculo de Cercha de Von Mises.

El vector de desplazamientos es considerado  $\mathbf{u}_t = (u_{1,t}, u_{2,t})^T$  y por lo tanto la ecuación dinámica está dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \mathbf{f}_{\text{ext},t}. \quad (4.40)$$

Dado que se está analizando media estructura la matriz de masa es igual a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & (m_b + m)/2 \end{bmatrix},$$

donde  $m_b$  es la masa de una biela o columna y  $m$  es la masa suspendida del centro de la cercha. Dicha masa se considera rígidamente vinculada a la cercha en la dirección vertical.

Se considera que existe amortiguamiento, para lo cual se introduce una constante  $c$  empírica de amortiguamiento de manera de reproducir un amortiguamiento realista de la estructura. Se usa  $c$  para el grado de libertad de movimiento vertical y  $c/10$  para el de movimiento horizontal, por lo que la matriz  $\mathbf{C}$  está dada por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c/10 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

A través de estos amortiguamientos se pretende introducir el arrastre de la pesa debido al aire y la fricción existente en las bisagras que forman las articulaciones de



### Sección 4.3. Dinámica No Lineal

125

la cercha en el modelo.

Para resolver la dinámica de esta estructura se aplica el Método de Diferencia Centrada, el cual requiere que el usuario calcule únicamente el vector de fuerzas internas. En lo que sigue se deducirá  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t)$  asumiendo que las bielas son de tipo Green y que la columna se puede modelar como un resorte lineal horizontal de constante  $k_c$ , donde  $k_c$  está dado por la rigidez flexional  $3EI_c/L_c^3$ .

El vector de fuerzas internas de la biela se deduce usando el PTV. Evaluando el trabajo virtual interno se tiene:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \int_{l_0} \sigma_t \delta \varepsilon_G A dx + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_s \mathbf{u}_t, \quad (4.41)$$

donde el segundo sumando del trabajo virtual interno corresponde al trabajo virtual interno de la fuerza realizada por el resorte horizontal de constante  $k_c$ .

La deformación unitaria de Green para la biela está dada por:

$$\varepsilon_G = \frac{l_t^2 - l_0^2}{2l_0^2}. \quad (4.42)$$

Se asume una relación constitutiva elástica lineal entre tensión y deformación de Green, válido para pequeñas deformaciones unitarias pero grandes desplazamientos y rotaciones.

$$\sigma = E \varepsilon_G. \quad (4.43)$$

Los largos de barra iniciales (de referencia) y actuales (deformada) se pueden escribir como:

$$l_0^2 = L_x^2 + L_z^2 \quad \text{y} \quad l_t^2 = (L_x - u_{1,t})^2 + (L_z + u_{2,t})^2, \quad (4.44)$$

respectivamente, con lo cual la deformación de Green se reduce a:

$$\varepsilon_G = \frac{-2L_x u_{1,t} + 2L_z u_{2,t} + u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2}{2(L_x^2 + L_z^2)}. \quad (4.45)$$

Se procede a calcular la variación de la deformación de Green ( $\delta \varepsilon_G$ ):

$$\delta \varepsilon_G = \frac{1}{L_x^2 + L_z^2} [(-L_x + u_1) \delta u_1 + (L_z + u_2) \delta u_2] \quad (4.46)$$

$$= \delta \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} -L_x + u_{1,t} \\ L_z + u_{2,t} \end{bmatrix} \frac{1}{l_0^2}, \quad (4.47)$$

con lo cual, el vector de fuerzas internas para la barra de Green y el resorte lineal

resulta:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_t) = \frac{EAl_0(u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2 - 2L_x u_{1,t} + 2L_z u_{2,t})}{2l_0^4} \begin{bmatrix} -L_x + u_{1,t} \\ L_z + u_{2,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_c u_{1,t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Finalmente, la fuerza externa dinámica aplicada sobre la cercha resulta en un vector  $\mathbf{f}_{\text{ext},t}$  dado por:

$$\mathbf{f}_{\text{ext},t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(m_b + m)/2 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

#### Solución Numérica - Método de Diferencia Centrada:

Para obtener la solución numérica se debe definir un paso temporal  $\Delta t$  tal que el método de Diferencia Centrada sea estable.

#### Actividad

Discutir y estimar cuánto vale  $\Delta T_{cr}$  para el ejemplo de la cercha de Von Mises.

Luego de definido  $\Delta T_{cr}$  se procede a implementar el método. En el Código 4.2 se muestra una implementación para la resolución del ejemplo.

#### Código 4.2: Código para análisis dinámico de cercha de Von Mises.

```
1  %% Dinamica No-Lineal: Cercha Von Mises (Barra de Green) %%
2  clc, clear all
3
4  %% Parametros Estructura
5  rho = 7850; % kg/m3 (acero)
6  Lx = .374/2;
7  Lz = sqrt(.205^2 - Lx^2); %m
8  l0 = sqrt(Lx^2 + Lz^2); %m
9  Lc = .240; %m
10 Ic = .0254*.0032^3/12; %m4
11 Ac = .0254*.0032; %m2
12 E = 200000e6 %Pa (acero)
13 kc = 3*E*Ic/Lc^3; %N/m
14 mb = l0*Ac*rho; %kg
15 m = 1.4; %kg Pandeo incipiente en 1.4
16 c = 2; %kg/s (amortiguamiento por friccion juntas y arrastre pesa)
17 g = 9.81; %m/s2
18
19 %% Defino Vector de fuerzas Internas: fint(u) — u = [u1 , u2]^T
20 Fint = @(u) E*Ac*l0*(u(1)^2+u(2)^2-2*Lx*u(1)+2*Lz*u(2))/2/l0^4*[-Lx+u(1);Lz+u(2)]+[kc*u(1);0];
21
22 %% Defino Vector de fuerzas Externas: gravedad
```

### Sección 4.3. Dinámica No Lineal

127

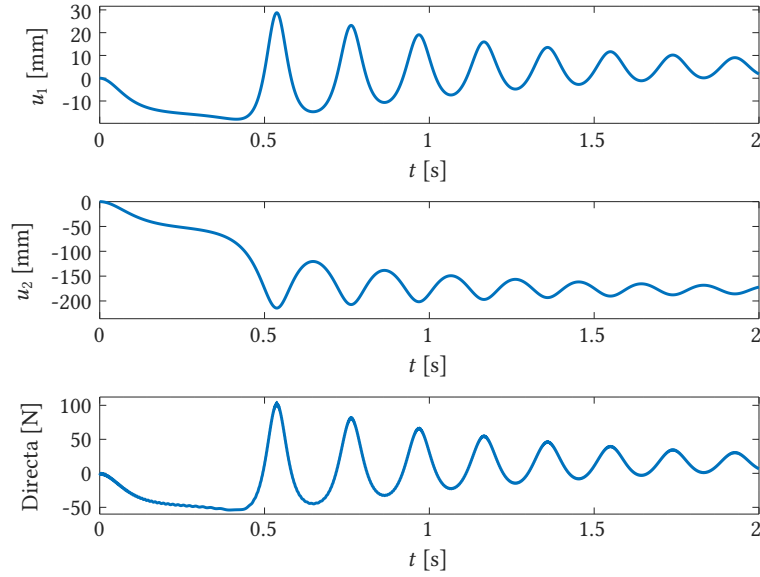
```

23 ft = @(t) [0;-(m+mb)/2*g]; %N
24
25 %% Defino Matriz de Masa Concentrada
26 M = [mb 0 ; 0 (mb+m)/2];
27
28 %% Defino Matriz de Amortiguamiento
29 C = [c/10 0 ; 0 c];
30
31 %% Defino Condiciones Iniciales
32 t0 = 0;
33 u0 = [0;0];
34 v0 = [0;0];
35 ac0 = M\ (ft(t0)-C*v0-Fint(u0)); % de ec de movimiento Mu.. + Fint(u) = ft
36
37 % Inicializacion Diferencia Centrada
38 tf = 2.0; dt = .000025; % sec
39
40 a0 = 1/dt^2; a1=1/2/dt; a2=2*a0; a3=1/a2;
41
42 u(:,1) = u0 - dt*v0 + a3*ac0; % u(-dt)
43 u(:,2) = u0; % u(0)
44
45 Meff = a0*M+a1*C;
46 M2 = a0*M-a1*C;
47
48 % Comienza Marcha en el Tiempo usando Diferencia Centrada
49 t(1) = t0-dt; t(2) = t0; k=2;
50
51 epsg(k) = (u(1,k)^2+2*Lz*u(2,k)-2*Lx*u(1,k)+u(2,k)^2)/2/l0^2;
52
53 while t<tf
54     feff = ft(t(k)) -Fint(u(:,k)) +a2*M*u(:,k) - M2*u(:,k-1);
55     u(:,k+1) = Meff\feff;
56     acc(:,k) = a0*(u(:,k+1)-2*u(:,k)+u(:,k-1));
57     vel(:,k) = a1*(u(:,k+1)-u(:,k-1));
58     epsg(k+1) = (u(1,k+1)^2+2*Lz*u(2,k+1)-2*Lx*u(1,k+1)+u(2,k+1)^2)/2/l0^2;
59     k=k+1; t(k)=t(k-1)+dt;
60 end
61
62 subplot(3,1,1)
63 plot(t(1:10:end),1000*u(1,1:10:end))
64 xlabel('t [s]'); ylabel('u_1 [mm]');
65 axis([0 2 1e3*min(u(1,:))*1.1 1e3*max(u(1,:))*1.1]);
66 subplot(3,1,2)
67 plot(t(1:10:end),1000*u(2,1:10:end))
68 xlabel('t [s]'); ylabel('u_2 [mm]');
69 axis([0 2 1e3*min(u(2,:))*1.1 1e3*max(u(2,:))*1.1]);
70 subplot(3,1,3)
71 plot(t(1:10:end),E*Ac*epsg(1:10:end))
72 xlabel('t [s]'); ylabel('Directa [N]')
73 axis([0 2 E*Ac*min(epsg)*1.1 E*Ac*max(epsg)*1.1]);

```

En la Figura 4.9 se muestra la solución de la dinámica para una masa suspendida

igual a  $m = 1,4$  kg.



**Figura 4.9:** Resultados de Cercha de Von Mises ( $m=1.4\text{kg}$ ) - Dinámica

Para valores de masa mayores a 1,4 kg se observa pandeo tipo *Snap-through* dinámico de la estructura.

#### Actividad

Compare este valor con el valor de carga crítica correspondiente a carga cuasi-estática.

#### 4.3.2. Método de Newmark - Implícito

La deducción de este método es similar a la presentada en la sección de dinámica lineal. El objetivo es determinar  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ , para ello Newmark considera el equilibrio dinámico en el tiempo  $t + \Delta t$  y se usan las mismas expresiones de tipo Taylor para aproximar  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  y  $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ . Se debe notar que las fuerzas internas en el tiempo  $t + \Delta t$  están dadas por  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ .

Lo anterior, en conjunto con las Ecuaciones (4.29) y (4.30), permiten obtener la expresión:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) + \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \right] \mathbf{u}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}, \quad (4.50)$$

donde la definición de  $\hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$  es la misma que la dada en la Sección 4.2.2.

Se observa por lo tanto que para determinar  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  mediante Newmark, para el caso de un problema dinámico no lineal, se debe resolver la ecuación no lineal dada por la Ecuación (4.50). Esto es claramente más laborioso que en el caso de un problema dinámico lineal, en el cual cada paso de Newmark consistía simplemente en resolver un sistema de ecuaciones lineales.

#### Actividad

Formular la solución de la ecuación no lineal definida en el paso de Newmark aplicando soluciones iterativas de tipo Newton-Raphson o incluso Newton-Raphson modificado.

Para los métodos de tipo Newton-Raphson se debe usar la matriz tangente  $\mathbf{K}_T = \partial \mathbf{f}_{\text{int}} / \partial \mathbf{u}$ , que ya fue presentada en el caso de análisis estáticos. Para que la solución sea correcta se debe iterar hasta obtener convergencia del equilibrio dinámico en el paso  $t + \Delta t$ , con lo cual los criterios de convergencia son similares a los ya discutidos anteriormente, aunque usando la ecuación no lineal dada en esta sección.

Tal como se indicó al comienzo de esta sección, si el paso temporal es suficientemente corto como para que la estructura se comporte de forma aproximadamente lineal durante varios instantes de tiempo, entonces Newmark presentará un comportamiento estable. A pesar de esto, es posible seleccionar pasos temporales suficientemente largos como para que los análisis de estabilidad numérica, hechos en la hipótesis de dinámica lineal, pierdan validez y el método presente inestabilidad numérica. Se puede ver un ejemplo de este tipo de comportamiento en el Capítulo 24 del libro (Crisfield, 1997).



## Bibliografía

---

- Alhasawi, A., Heng, P., Hjiar, M., Guezouli, S., y Battini, J.-M. (2017). Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges. *Engineering Structures*, 151:188–205.
- Bathe, K.-J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall.
- Bathe, K.-J. (2014). *Finite Element Procedures*. K.J. Bathe, Watertown, USA, 2 edición.
- Belytschko, T., Liu, W. K., y Moran, B. (2014). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2 edición.
- Bigoni, D., Bosi, F., Dal Corso, F., y Misseroni, D. (2014). Instability of a penetrating blade. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 64:411–425.
- Björk, A. and Dahlquist, G. (2008). *Numerical Methods in Scientific - Computing Volume II*. SIAM.
- Bonet, J., Barros, M., y Romero, M. (2006). Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending. *Computers & Structures*, 84(31-32):2184–2193.
- Bonet, J. y Wood, R. (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press.
- Bridgens, B. y Birchall, M. (2012). Form and function: The significance of material properties in the design of tensile fabric structures. *Engineering Structures*, 44:1–12.
- Butcher, J. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley.
- Castrillo, P., Mondino, F., Pérez Zepa, J. M., y Canelas, A. (2014). Desarrollo y extensión de una herramienta numérica de elementos finitos para el dictado de cursos de grado y de posgrado. En *Mecánica Computacional*, pp. 2073–2086. Asociacion Argentina de Mecanica Computacional.
- Clough, R. y Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.

- Crisfield, M. A. (1996). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials*. Wiley.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-Linear Finite Element Analysis Solids and Structure, Volume 2, Advanced Topics*. Wiley.
- Curnier, A. (1994). *Computational Methods in Solid Mechanics*. Springer.
- de Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. C., y Verhoosel, C. V. (2012). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- de Souza Neto, E. A., Peri, D., y Owen, D. R. J. (2008). *Computational Methods for Plasticity*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK.
- Delfino, A., Stergiopoulos, N., Moore, J. E., y Meister, J. J. (1997). Residual strain effects on the stress field in a thick wall finite element model of the human carotid bifurcation. *Journal of biomechanics*, 30(8):777–786.
- Doedel, E. (2014). An Introduction to Numerical Continuation Methods with Applications.
- Doedel, E. y Oldeman, B. (2019). AUTO-07p.
- Du, Z. y Guo, X. (2014). Variational principles and the related bounding theorems for bi-modulus materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 73:183–211.
- Feng, R.-Q., Ye, J., Yan, G., y Ge, J.-M. (2013). Dynamic Nonlinearity and Nonlinear Single-Degree-of-Freedom Model for Cable Net Glazing. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(10):1446–1459.
- Gilsanz, R., Hamburger, R., Barker, D., Smith, J. L., y Rahimian, A. (2013). *Design Guide 26: Design of Blast Resistant Structures*. American Institute of Steel Construction.
- Goenezen, S., Dord, J.-F., Sink, Z., Barbone, P. E., Jiang, J., Hall, T. J., y Oberai, A. A. (2012). Linear and Nonlinear Elastic Modulus Imaging: An Application to Breast Cancer Diagnosis. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 31(8):1628–1637.
- Gurtin, M. E. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, London.
- Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Wiley.
- Huang, N. y Vahidi, B. (1971). Snap-through buckling of two simple structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 6(3):295–310.



- Hughes, T. J. R. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1 edición.
- Hunt, G. W. y Wadee, M. A. (1998). Localization and mode interaction in sandwich structures. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1972):1197–1216.
- Jimenez Montoya, P., Garcia Meseguer, A., Morán Cabré, F., y Arroyo Portero, J. C. (2009). *Hormigón Armado*. 15 edición.
- Jirasek, M. y Bazant, Z. P. (2001). *Inelastic Analysis of Structures*. Wiley.
- Kahaner, D., Moler, C., Nash, S., y Forsythe, G. (1989). *Numerical methods and software*. Prentice-Hall.
- Larsen, A., Esdahl, S., Andersen, J. E., y Vejrum, T. (2000). Storebælt suspension bridge – vortex shedding excitation and mitigation by guide vanes. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 88(2-3):283–296.
- Lemes, Í. J., Silveira, R. A., Silva, A. R., y Rocha, P. A. (2017). Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM. *Engineering Structures*, 147:12–26.
- Li, L. y Khandelwal, K. (2017). Topology optimization of geometrically nonlinear trusses with spurious eigenmodes control. *Engineering Structures*, 131:324–344.
- Liew, A., Gardner, L., y Block, P. (2017). Moment-Curvature-Thrust Relationships for Beam-Columns. *Structures*, 11:146–154.
- Luenberger, D. G. y Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming*, volumen 116 de *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer US, Boston, MA, 3 edición.
- Madrazo-Aguirre, F., Wadee, M. A., y Ruiz-Teran, A. M. (2015). Non-linear stability of under-deck cable-stayed bridge decks. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77:28–40.
- Magisano, D., Leonetti, L., y Garcea, G. (2017). How to improve efficiency and robustness of the Newton method in geometrically non-linear structural problem discretized via displacement-based finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313:986–1005.
- McGuire, W., Gallagher, R., y Ziemian, R. (1999). *Matrix Structural Analysis*. Wiley.
- Morozov, E., Lopatin, A., y Nesterov, V. (2011). Finite-element modelling and buckling analysis of anisogrid composite lattice cylindrical shells. *Composite Structures*, 93(2):308–323.

- Oñate, E. (2013). *Structural Analysis with the Finite Element Method Linear Statics*, volumen 2 de *Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*. Springer Netherlands, Dordrecht.
- Pérez Zepa, J., Castrillo, P., y Baño, V. (2017). Development of a method for the identification of elastoplastic properties of timber and its application to the mechanical characterisation of Pinus taeda. *Construction and Building Materials*, 139:308–319.
- Quarteroni, A., Sacco, R., y Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*, volumen 37 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, New York, NY.
- Reddy, J. N. (2002). *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley.
- Sparling, B. F. (1995). *The Dynamic Behavior Of Guys And Guyed Masts In Turbulent Winds*. Phd, Western University.
- Thompson, J. y Hunt, G. (1973). *A General Theory of Elastic Stability*. Wiley.
- Timoshenko, S. y Gere, J. (2009). *Theory of Elastic Stability*. Dover Publications.
- Timoshenko, S. P. (1953). *History of Strength of Materials*. Dover Publications.
- Veronda, D. y Westmann, R. (1970). Mechanical characterization of skin—Finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 3(1):111–124.
- Wadee, M. A. y Gardner, L. (2012). Cellular buckling from mode interaction in I-beams under uniform bending. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 468(2137):245–268.
- Wriggers, P. y Simo, J. C. (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(1):155–176.
- Wu, J., Frangopol, D. M., y Soliman, M. (2015). Geometry control simulation for long-span steel cable-stayed bridges based on geometrically nonlinear analysis. *Engineering Structures*, 90:71–82.
- Zaccaria, D., Bigoni, D., Noselli, G., y Misseroni, D. (2011). Structures buckling under tensile dead load. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 467(2130):1686–1700.
- Zhang, L., Gao, Q., y Zhang, H. (2013). An efficient algorithm for mechanical analysis of bimodular truss and tensegrity structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 70:57–68.
- Zhang, L., Zhang, H. W., Wu, J., y Yan, B. (2016). A stabilized complementarity formulation for nonlinear analysis of 3D bimodular materials. *Acta Mechanica Sinica*, 32(3):481–490.

**Bibliografia**

**135**

Zienkiewicz, O. C. (1972). *Introductory Lectures on the Finite Element Method*. Springer Vienna, Vienna.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., y Fox, D. D. (2014). *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier.