2013.1.7

一、每小题3分，共36分

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{3x}{1-x})^{\frac{1}{x}} =$ ______ e^3

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{3x}{1-x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{3x}{1-x})^{\frac{1-x}{3x}\cdot\frac{3x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}} = e^3$

2. 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)$，则 $f'(0)=$ ______ -1

解：$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)+(e^x-1)2e^{2x}$，$f'(0)=-1.$

3. 设 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=te^t \end{cases}$ 确定了 $y=f(x)$，则 $\frac{dy}{dx}=$ ______ $\frac{1}{2}e^t$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{e^t+te^t}{2+2t}=\frac{e^t}{2}$

4. 当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 x^n 为同阶无穷小

则 $n=$ ______ 3

解：$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$，

当 $\frac{1}{2}x^3$ 与 x^n 同阶时，必有 $n=3$

5. 设 $y=f(x)$ 由 $e^{x+y}-xy=e$ 确定，则曲线

$y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为= ______ $e^{-1}-1$

解：$(1+y')e^{x+y}-(y+xy')=0$，代 $(0,1)$，

得 $(1+y')e-(1+0)=0$，即 $y'=k=y'=e^{-1}-1$

6. 设 $y=2^{\sin x}$，则 $dy=$ $\underline{\ln 2\cdot\cos x\cdot 2^{\sin x}dx}$

解：$dy=y'dx=\ln 2\cdot\cos x\cdot 2^{\sin x}dx$

7. 曲线 $y=e^{\frac{1}{|x|}}+\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线是 $\underline{y=1}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{|x|}}+\dfrac{\sin x}{x})=1+0=1$

8. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，则 $F'(x)=$ $\underline{2x\sqrt{1+x^2}}$

9. 函数 $f(x)=x-\cos x$ 的单调增区间是 $\underline{(-\infty,+\infty)}$

解：$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=1+\sin x\geq 0$

即 $-a(b-\xi)^{a-1}f(x)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0$

$$-af(x)+(b-\xi)f'(\xi)=0,$$

$$f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$$

所以 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}g(\xi).$

10. $\int \frac{x}{1+x^2}dx =$ $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

11. $\int_{-2}^{2}(2+x^{2013})\sqrt{4-x^2}\,dx =$ 4π

解：原式 $=\int_{-2}^{2}2\sqrt{4-x^2}\,dx+\int_{-2}^{2}x^{2013}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$=4\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx+0=4\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2 =4\pi$$

12. 广义积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx =$ 1

解：原式 $=-\int_{1}^{+\infty}\ln x\,d(\frac{1}{x})=-[\frac{\ln x}{x}\Big|_{1}^{+\infty}-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\,]$

$$=-[0-0+\frac{1}{x}\Big|_{1}^{+\infty}\,]=1$$

二、计算题，每小题9分，共54分

13. 设 $y=\frac{1}{2x^2-3x+1}$，求 y',y'', 及 $y^{(2013)}(0)$

解：$y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}$

$$y'=-(x-1)^{-2}+4(2x-1)^{-2}$$

$$y''=2(x-1)^{-3}-16(2x-1)^{-3}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!(x-1)^{-n-1}-(-1)^n 2^{n+1}n!(2x-1)^{-n-1}$$

$$=(-1)^n n!\cdot[(x-1)^{-n-1}-2^{n+1}(2x-1)^{-n-1}]$$

$$y^{(2013)}(0)=-2013!\cdot[1-2^{2014}]=(2^{2014}-1)\cdot 2013!$$

14. 设 $f(x)$ 是首项系数为1的三次多项式，在 $x=1$ 处取得极大值，$(2,0)$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点，求 $f(x)$.

解：设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

因 $x=1$ 是极值点，

所以 $f'(x)=3\cdot1^2+2a\cdot1+b=0\cdots\cdots(1)$

因 $(2,0)$ 是拐点，

所以 $f''(2)=6\cdot2+2a=0\cdots\cdots(2)$

因 $(2,0)$ 在曲线上，

所以 $f(2)=2^3+a\cdot2^2+b\cdot2+c=0\cdots\cdots(3)$

(1),(2),(3) 联立，解出 $a=-6, b=9, c=-2.$

得 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

---

15. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}\cos x & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0\\ \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2} & x>0\end{cases}$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$.

解：(1) 当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$,

$$\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$$

当 $-\frac{\pi}{2} \le x < 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{1}{2}\cos tdt$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}$$

当 $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\cos tdt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{\pi}\arctan t\Big|_{0}^{x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$$

所以 $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2} & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x & x > 0 \end{cases}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\cos tdt + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}dx$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

16. 计算 $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

解: $\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{1+x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}d(x-1)$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}d(x-1) + \int \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}d(x-1)$

$= \arcsin(x-1) + \int \frac{1}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}d(x-1)^2$

$= \arcsin(x-1) - \int \frac{1}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}d[1-(x-1)^2]$

$= \arcsin(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + C$

17. 计算 $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx$

解：令 $\sqrt{x+1}=t$， 则 $x=t^2-1$, $dx=2tdt$

当 $x=0$ 时，由 $\sqrt{x+1}=t$，得 $t=1$,

当 $x=3$ 时，由 $\sqrt{x+1}=t$，得 $t=2$,

$\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 e^t \cdot 2tdt = 2\int_1^2 td(e^t)$

$= 2[te^t\big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt] = 2[2e^2 - e - e^t\big|_1^2]$

$= 2[2e^2 - e - (e^2 - e)] = 2e^2$

即 $C=(b-x)^a f(x)$

其中 C 的表达式就是本题的辅助函数.

证明：令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$

则 $F(a)=(b-a)f(a)=\int_a^a g(t)dt=0,$

$F(b)=(b-b)f(b)=0,$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导,

由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0,$

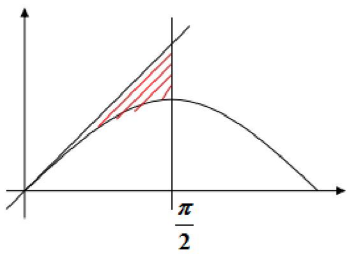
$$F'(x)=-a(b-x)^{a-1}f(x)+(b-x)^a f'(x)$$

$$F'(\xi)=-a(b-\xi)^{a-1}f(x)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0$$

18. 求曲线 $y=\sin x, y=x$ 及 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的平面图形的面积，以及该图形绕 x 轴旋转一周所得的体积

解：面积 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)dx$

$$=\frac{\pi^2}{8}-1$$



体积 $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi x^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\sin^2 xdx$

$$=\frac{\pi^4}{24}-\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}$$

三、证明题，每小题2分，共10分

19. 证明：对任意实数x，$(1-x)e^x \le 1$

[证明] 设 $f(x)=(1-x)e^x$,

$$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x,$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点$x=0$,

当$x<0$时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调增加，

当$x>0$时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调减少，

所以 $f(0)=1$是函数的最大值,

即 $(1-x)e^x \le 1$

20. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上连续，$f(x)=\int_a^x g(t)dt$,

证明：至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}g(\xi)$

分析：由 $f'(x)=g(x)$,

所以只要证$\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

考虑 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{a}{b-x}$,

两端积分$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{a}{b-x}dx$,

得 $\ln f=-a\ln(b-x)+\ln C$,