得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y' = e^{2x-y}$ 的满足初始条件 $y(0)=0$ 特解为______________.

2. 已知函数 $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，则 $du\big|_{(2,1,1)} =$ ______________________________.

3．设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(1,2,3)} =$ ________.

4．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2n+1}$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散？______________.

5．函数 $f(x)=\ln x$ 在 $\boldsymbol{x}=1$ 处的泰勒级数展开式为_______________________.

6．在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x-2y+3z=1$ 垂直的切线方程为______________________________.

7. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则曲线积分 $\int_L x^2 \mathrm{d}s =$ __________________________.

8. 已知积分区域 D 为 $x^2+y^2\le 1$，则 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy =$ _______________________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数，其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(-3\pi)=$ ____.

10. 设 Σ 为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\dfrac{4}{3}y)\mathrm{dS}=$ ______________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求函数 $f(x,y)=(x^2+2x+y)\mathrm{e}^{2y}$ 的极值.

得 分

12. 计算 $I=\int\limits_L (2xe^y+\cos x^2)\mathrm{d}x+(x^2e^y+2x)\mathrm{d}y$, 其中 L 是上半圆周 $(x-1)^2+y^2=9$ 上沿顺时针方向.

得 分

13. 计算二重积分 $\int_0^e dy \int_1^2 \frac{\ln x}{e^x} dx + \int_e^{e^2} dy \int_{\ln y}^2 \frac{\ln x}{e^x} dx$.

得 分

14. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} z^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (0 \le z \le 1)$ 的下侧.

得 分

15. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n+1}$的收敛域及和函数.

得 分

16. 求微分方程$y'' - y = (x+1)\mathrm{e}^{x}$的通解.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，其中 F 具有连续的一阶偏导数，求证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$

得 分

18. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.