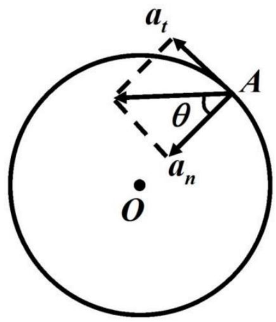
模拟试题答案

一、（10 分）如图所示，一电动机转子半径 $R = 0.1$ m，转子转过的角位移与时间的关系为 $\theta = 2 + 4t^3$，试求：(1) t 时刻转子的角速度 ω 和角加速度 α；(2) 当 $t = 2$ s 时，边缘上一点 A 的法向加速度 a_n 和切向加速度的 a_t 大小；(3) 当电动机的转角等于多大时，其总加速度与半径成 45°角？



第一题图

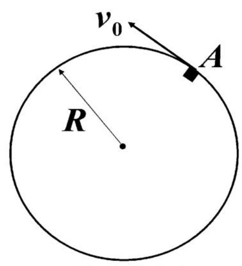
解：(1) $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = 12t^2$， $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = 24t$；

(2) $a_n = R\omega^2 = 144Rt^4$，$a_t = R\alpha = 24Rt$，当 t=2s 时，$a_n = 230\text{m/s}^2$，$a_t = 4.8\text{m/s}^2$；

(3) 若总加速度与半径成 45°角，则 a_n 与 a_t 相等，有：$144Rt^4 = 24Rt$，

$\rightarrow t = \sqrt[3]{1/6} \approx 0.55\text{s}$，$\rightarrow \theta = 2 + 4\times(\sqrt[3]{1/6)})^3 = 8/3 \approx 2.67\text{rad}$

二、（10 分）光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带，半径为 R，一质量为 m 的物体贴着环带内侧运动，物体与环带间的滑动摩擦系数为 μ_k，设物体在 $t = 0$ 时经过 A 点，速率为 v_0，求：(1) 物体位于 A 点时受到的滑动摩擦力 f；(2) t 时刻物体的速率 v；(3) t 时刻物体经过的路程 S。



第二题图

解：(1) A 点时，$N = m\dfrac{v_0^{\ 2}}{R}$， $f = \mu_k N = \dfrac{\mu_k m v_0^{\ 2}}{R}$

(2) 在任意时刻，物体在法向上有 $N = m\dfrac{v^2}{R}$，又 $f = \mu_k N$，

在切向上有：$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m} = \dfrac{-\mu_k m v^2 / R}{m} = -\dfrac{\mu_k v^2}{R}$

两边分离变量并积分得：$\displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2}dv = \int_0^t -\frac{\mu_k}{R}dt \rightarrow v = \frac{v_0 R}{R + v_0\mu_k t}$

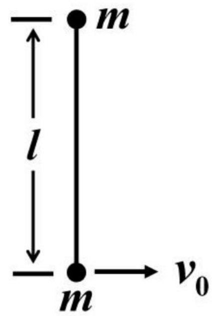
(3) t 时刻经过的路程为: $\displaystyle S = \int_0^t v dt = v_0 R\int_0^t \frac{dt}{R + v_0\mu_k t} = \frac{R}{\mu_k}\ln\left(1 + \frac{v_0\mu_k t}{R}\right)$

三、（10 分）如图，两个质量为 m 的小球，用长为 l 的轻质刚性绳连接起来，放在一光滑的水平桌面上。给其中的一个小球以垂直于绳子方向的速度 v_0，之后两小球共同运动。试求：

(1) 分析两小球组成的系统的质心的运动并求其运动速度 v；

(2) 求系统相对于质心的角动量 L，该角动量是否守恒，为什么？

(3) 运动过程中两小球相对于质心转动的角速度 ω.



第 3 题图

解：(1) 根据质心运动定理，系统质心作匀速直线运动，速度为：

$$v=\frac{mv_0+0}{2m}=\frac{1}{2}v_0$$

(2) 无外力矩作用，角动量守恒。相对于质心的角动量为：$L=mv_0\cdot\frac{l}{2}=\frac{mv_0 l}{2}$

(3) 转动惯量 $J=2\times m(l/2)^2=ml^2/2$，运动过程中 $L=J\omega\rightarrow\omega=L/J=v_0/l$

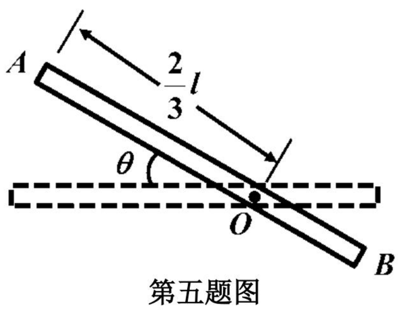
四、（10 分）质量 2 kg 的物体，t=0 时刻在坐标原点 O 处静止出发沿 X 轴运动到 $x=1$ m 处，物体所受合力为 $\vec{F}=(2+6x^2)\vec{i}$(SI)，试求：(1) 运动过程中力 $\vec{F}$ 所作的功 A；(2) 在 $x=1$ m 处，物体运动速度 $\vec{v}$；(2) 运动过程中力 $\vec{F}$ 产生冲量 $\vec{I}$ 。

解：(1) $A=\int_0^1 F\mathrm{d}x=\int_0^1(2+6x^2)\mathrm{d}x=4\,\mathrm{J}$

(2) 初动能为 0，根据动能定理，$A=\frac{1}{2}mv^2\rightarrow v=\sqrt{\frac{2A}{m}}=2\,\mathrm{m/s}\rightarrow\vec{v}=2\vec{i}$ m/s

(3) 初动量为 0，根据动量定理，$\vec{I}=m\vec{v}=4\vec{i}$ kg·m/s

五、（10 分）如图所示，质量为 m、长为 l 的均匀细棒，在竖直平面内绕 O 点自由转动，转轴 O 与 A 端的距离为 $2l/3$. 开始时，细棒静止，并与水平成 30°角，重力加速度为 g. 试求：(1) 细棒相对于 O 轴的转动惯量 J; (2) 细棒转到水平位置时的角加速度α和角速度ω; (3) 细棒水平时受 O 轴支持力 F 在竖直方向的分量 F_y.



第五题图

解：(1) $J=\frac{1}{3}m_1l_1^2+\frac{1}{3}m_2l_2^2=\frac{1}{3}(\frac{2}{3}m)(\frac{2}{3}l)^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}m)(\frac{1}{3}l)^2=\frac{ml^2}{9}$

(2) 重力的力矩M：$M = mg\dfrac{l}{6}$，根据定轴转动定律，$\alpha = \dfrac{M}{J} = \dfrac{3g}{2l}$

细棒转动到水平位置的动能为：$E_k = mg\dfrac{l}{12} = \dfrac{1}{2}J\omega^2 \to \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$

(3) 在竖直方向应用质心运动定理，$F_y + mg = ma_t = m\dfrac{l}{6}\dfrac{3g}{2l} \to F_y = -\dfrac{3}{4}mg$

六、（10分）一物体沿x轴作简谐振动，振幅A=0.12m，周期T=2s，当t=0时，物体的位移x = 0.06 m，且向x轴正方向运动。求：(1) 求此简谐振动的初相φ_0 ($\varphi_0 \in [-\pi,\pi]$)，并写出振动方程x(t)(以余弦函数表示)；(2) $t=T/4$时物体的位置、速度和加速度；(3) 求物体从t = 0到第一次回到平衡位置所需的时间。

解：(1) 初相$\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{3}$；$x = 0.12\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$ (SI)

(2) $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi\sin(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$ (SI) $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \dfrac{\pi}{3})$ (SI)

$t=T/4$时，$x = 0.06\sqrt{3} = 0.104\text{m}$；$v = -0.06\pi = -0.18\text{m/s}$；

$a = -0.06\sqrt{3}\pi^2 = -1.03\text{m/s}^2$

(3) $\Delta t = \dfrac{\pi/3 + \pi/2}{2\pi} \cdot T = 0.83\,\text{s}$

七、（10分）有一在绳上传播的入射波，其方程为$y_1 = A\cos(\omega t + 2\pi\dfrac{x}{\lambda})$，入射波在绳端($x$ = 0)反射，反射端为固定端，设反射波不衰减，试求：(1)入射波及反射波在x = 0引起的振动方程；(2) 反射波的波动方程；(3)合成的驻波方程，并求驻波波节、波腹的位置。(已知$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$)

解：(1) 入射波在x=0处引起的振动为：$y = A\cos\omega t$；

反射端有半波损失，反射波振动方程：$y = A\cos(\omega t + \pi)$；

(2) 反射波波动方程：$y_2 = A\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{x}{\lambda} + \pi)$

(3) 驻波方程：$y = y_1 + y_2 = 2A\sin(2\pi\dfrac{x}{\lambda})\cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$

波腹：令$\left|\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1$，$\to x = \dfrac{(2k+1)\lambda}{4}\ (k = 0,1,2,\cdots)$

波节：令$\left|\sin\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0$，$\to x = \dfrac{k\lambda}{2}\ (k = 0,1,2,\cdots)$

八、（10 分）在地面上有一长 l_0=100 m 的跑道，运动员从起点跑到终点，用时 10 s，现从以 0.8 c (c 为光速)速度沿跑道向前飞行的飞船 S'系中观察，求：(1) 跑道的长度 l；(2) 运动员跑过的距离$\Delta x'$和所用的时间$\Delta t'$；(3) 运动员的平均速度 v'. (注意运动员从起点跑到终点既非同时性亦非同地性事件；已知洛仑兹变换公式 $x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$，$t'=\dfrac{t-(v/c^2)x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$，$c$ 取 3×10^8 m/s)

解：(1) L=100 m 为原长，根据长度收缩公式，

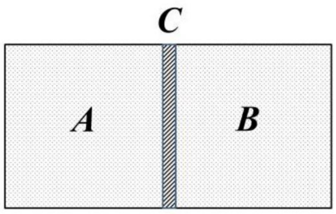
$$l=l_0\sqrt{1-(v/c)^2}=100\times\sqrt{1-(0.8c/c)^2}=60\,\text{m}$$

(2) $$\Delta x'=\frac{\Delta x-v\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{100-0.8c\times10}{\sqrt{1-(0.8c/c)^2}}=-4.0\times10^9\,\text{m}$$

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-(v/c^2)\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{10-0.8c/c^2\times100}{\sqrt{1-(0.8c/c)^2}}=16.6\,\text{s}$$

(3) $$v'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=\frac{-4.0\times10^9}{16.6}=-2.4\times10^8\ \text{m/s}$$

九、(10 分) 如图，一容器体积为 2 V_0，由绝热板 C(体积忽略不计)将其隔成相等的两部分 A 和 B。设 A 内贮有 1 mol 的单原子气体，B 内贮有 2 mol 的刚性双原子气体，A、B 两部分的压强均为 P_0，若将两种气体都视为理想气体，试求：(1) A、B 两种气体的自由度 i_A、i_B；(2) A、B 内气体的内能 E_A、E_B；(3) 现抽去绝热板，求两种气体混合后达到平衡态时的热力学温度 T 和压强 P.



第 9 题图

解：(1) i_A=3；i_B=5

(2) $E_A=\upsilon_A\dfrac{i_A}{2}RT_A=\dfrac{i_A}{2}PV=\dfrac{3}{2}P_0V_0$；$E_B=\upsilon_A\dfrac{i_B}{2}RT_B=\dfrac{i_B}{2}PV=\dfrac{5}{2}P_0V_0$

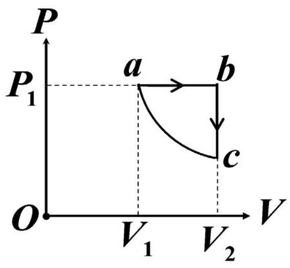
(3) 混合后内能不变，有：$\upsilon_A\dfrac{i_A}{2}RT+\upsilon_B\dfrac{i_B}{2}RT=\dfrac{3}{2}P_0V_0+\dfrac{5}{2}P_0V_0$

$$\frac{3}{2}RT+2\cdot\frac{5}{2}RT=4P_0V_0\to T=\frac{4P_0V_0}{\frac{3}{2}R+5R}=\frac{8P_0V_0}{13R}$$

根据理想气体状态方程，

$$PV=\upsilon RT\to P=\frac{\upsilon RT}{V}=\frac{(1+2)R(8P_0V_0)/13R}{2V_0}=\frac{12P_0}{13}$$

十、(10 分) 有 25 mol 单原子气体作如图所示循环。其中 ab 为等压过程，bc 为等体过程，ca 为等温过程，且 $P_1 = 4.155\times10^5\,\text{Pa}$，$V_1 = 0.02\,\text{m}^3$，$V_2 = 0.04\,\text{m}^3$，已知 $R = 8.31\,\text{J/mol.K}$。取 ln2=0.69. 试求：



第 10 题图

(1) 写出该分子气体的自由度 i，定体摩尔热容 C_V 与定压摩尔热容 C_P；

(2) 求状态 a、b、c 的热力学温度 T_a、T_b、T_c；

(3) 判断过程 ab、bc、ca 的吸放热情况，并求其具体值；

(4) 求该循环的效率。

解：(1) $i = 3$；$C_V = \dfrac{3}{2}R$；$C_P = \dfrac{5}{2}R$

(2) 对 a 点，$T_a = \dfrac{P_1V_1}{\nu R} = \dfrac{4.155\times10^5\times0.02}{25\times8.31} = 40K$，同理，$T_b = 80K$

$T_a = T_c = 40K$

(3) ab 为等压过程，吸热，$Q_{ab} = \nu C_P\Delta T = 25\times\dfrac{5}{2}R\times40 = 2.08\times10^4 J$

bc 为等体过程，放热，$Q_{bc} = \nu C_V\Delta T = 25\times\dfrac{3}{2}R\times(-40) = -1.25\times10^4 J$

ca 为等温过程，放热，$Q_{ca} = \nu RT\ln\dfrac{1}{2} = 25\times R\times40\times0.69 = -5.73\times10^3 J$

(4) $\eta = 1-\dfrac{Q_2}{Q_1} = 1-\dfrac{1.25\times10^4+5.73\times10^3}{2.08\times10^4} = 12.36\%$