北京工业大学 2016——2017 学年第 1 学期

《集合与图论》考试试卷 A 卷

考试说明： ______________________________

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： __________ **学号：** __________ **班号：** __________

注：本试卷共 10 大题，共 10 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总成绩
满分											
得分											

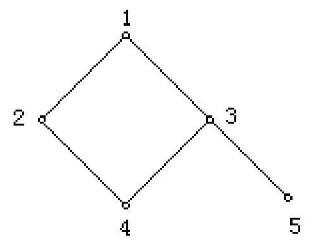
得 分

一、选择题（8 分）

1、设 A={1，2，3}，则 A 上的二元关系有（ C ）个。

A. 23 ； B. 32 ； C. $2^{3\times3}$； D. $3^{2\times2}$。

2、设集合 A={1，2，3，4，5}上偏序关系的哈斯图为（A）



则子集 B={2,3,4}的最大元(　　　　　);最小元(　　　　　);

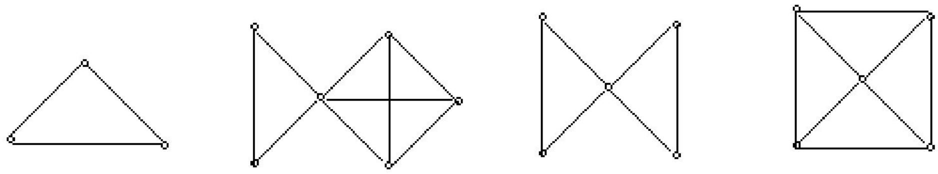
极大元（　　　）；极小元（　　　）；上界（　　　　　）；上

确界（　　　　）；下界（　　　）；下确界（　　　　）。

A、　无，4，2、3，4，1，1，4，4；　B、无，4、5，2、3，4、5，1，1，4，4；

C、无，4，2、3，4、5，1，1，4，4；　D、无，4，2、3，4，1，1，4，无。

3、下图中既不是 Euler 图，也不是 Hamilton 图的图是（　B　）



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

4．集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8}上的关系 R={<x，y>|x+y=10 且 x，y∈A}，则 R 的性质为（　　）.

A．自反的　　B．对称的

C．传递且对称的　　D．反自反且传递的

得 分

二、判断题（8 分）

1.（ F）若 R_1、R_2是非空集合 A 上的传递关系，则 $R_1 \cup R_2$是 A 上的传递关系。

2.（F ）设 f 是 A 到 B 的函数， g 是 B 到 C 的函数，若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射。

3.（F ）设正则 5 叉树的树叶数为 17，则分支数为 i=3

4.（ T）如果一个有向图 D 是欧拉图，则 D 是强连通图。

得 分

三、（10 分）证明：(A∪B)-(A∩B) = (B-A)∪(A-B)

证明： $(A\cup B)-(A\cap B) = (A\cup B)\cap\sim(A\cap B)$

根据 De.Morgan 定律：

$\sim(A\cap B) = \sim A\cup\sim B$

$\therefore (A\cup B)\cap\sim(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)$ 3 分

将$(A\cup B)$当作一个整体，利用分配律可知：

$(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B) = ((A\cup B)\cap\sim A)\cup((A\cup B)\cap\sim B)$ 5 分

再次利用分配律：

$((A\cup B)\cap\sim A)\cup((A\cup B)\cap\sim B) = ((A\cap\sim A)\cup(B\cap\sim A))\cup((A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B))$

$= (\Phi\cup(B\cap\sim A))\cup((A\cap\sim B)\cup(\Phi))$ 7 分

$= (B\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)$

$= (B-A)\cup(A-B)$ 10 分

得 分

四、（10 分）R 是 A 上一个二元关系，证明：若 R 是 A 上一个等价关系，则 S 也是 A 上的一个等价关系，其中 S 描述如下：$S=\{<a,b>|(a,b\in A)\wedge(\text{对于某一个}c\in A,\text{有}<a,c>\in R\text{且}<c,b>\in R)\}$

（1） S 自反的

$\forall a\in A$，由 R 自反，$\therefore (<a,a>\in R)\wedge(<a,a>\in R)$，$\therefore <a,a>\in S$ 3 分

（2） S 对称的

$\forall a,b\in A$

$<a,b>\in S \Rightarrow (<a,c>\in R)\wedge(<c,b>\in R)$ $\cdots S$ 定义

$\Rightarrow (<a,c>\in R)\wedge(<c,b>\in R)$ $\cdots R$ 对称

$\Rightarrow <b,a>\in S$ $\cdots R$ 传递 6 分

（3） S 传递的

$\forall a,b,c\in A$

$<a,b>\in S\wedge<b,c>\in S$

$\Rightarrow (<a,d>\in R)\wedge(<d,b>\in R)\wedge(<b,e>\in R)\wedge(<e,c>\in R)$

$\Rightarrow (<a,b>\in R)\wedge(<b,c>\in R)$ $\cdots R$ 传递

$\Rightarrow <a,c>\in S$ $\cdots S$ 定义

由（1）、（2）、（3）得；S 是等价关系。 10 分

得 分

五、(10 分) $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数，定义一个函数 $g:B\to 2^A$ 对任意 $b\in B$ 有 $g(b)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$ 证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是从 B 到 2^A 的单射。

证明 ：$\forall b_1,b_2\in B,(b_1\neq b_2)$

$\because f$ 满射 $\therefore \exists a_1,a_2\in A$ 　　3 分

使$f(a_1)=b_1, f(a_2)=b_2$, 且 $f(a_1)\neq f(a_2)$, 由于f是函数， $\therefore a_1\neq a_2$

又 $g(b_1)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_1)\}$, $g(b_2)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_2)\}$

$\therefore a_1\in g(b_1), a_2\in g(b_2)$ 但 $a_1\notin g(b_2), a_2\notin g(b_1)$ $\therefore g(b_1)\neq g(b_2)$ 　　7 分

由b_1,b_2任意性知， g为单射。 　　10 分

得 分

六、(12 分) 求递推关系 $a_n-4a_{n-1}+4a_{n-2}=2^n$ 的通解

解）分析：方程右边为2^n

特征根： q=2（二重根）， 　　2 分

特解： $a_n^*=An^2 2^n$ 　　4 分

代入原式：$An^2 2^n-4A(n-1)^2 2^{n-1}+4A(n-2)^2 2^{n-2}=2^n$ 　　6 分

展开：$An^2 2^n-2A(n^2-2n+1)^2 2^n+A(n^2-4n+4)^2 2^n=2^n$ 　　8 分

整理： $2A\,2^n=2^n$

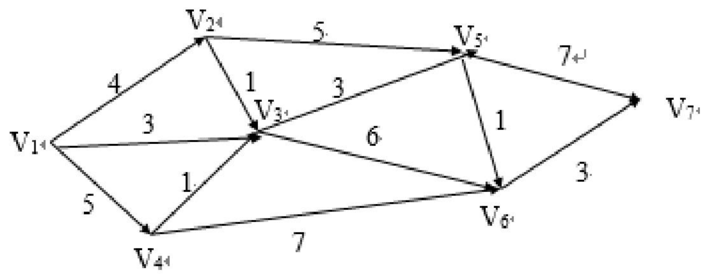
待定系数： $A=\frac{1}{2}$ 　　10 分

通解：$a_n=B_1 2^n+B_2 n 2^n+\frac{1}{2}n^2 2^n=\left(B_1+B_2 n+\frac{1}{2}n^2\right)2^n$。其中 B_1、B_2为任意常数。

12 分

得 分

七、(10 分) 用 Dijkstra 算法求图中起点 V1→V7 的最短路径及路长最短路。



解：采用 Dijkstra 算法，可解得最短路径为：

由 V1 选择下一个节点 V3； 2 分

计算经过集合{V1，V3}出发的最短路径节点 V5； 4 分

计算从集合{V1，V3，V5}出发的下一个最短路径节点 V6； 6 分

计算集合{V1，V3，V5}出发的下一个最短路径节点 V6； 8 分

计算集合{V1，V3，V5，V6}出发的下一个最短路径节点 V7；

所以最短路是：

V1-V3-V5-V6-V7 10 分

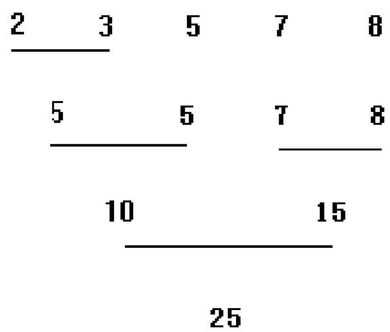
得 分

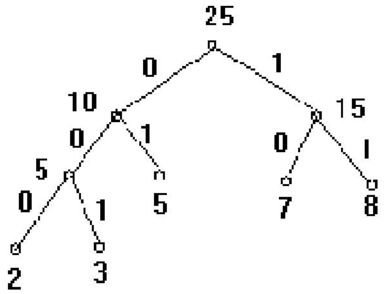
八、（12 分）在二叉树中

1. 求带权为 2，3，5，7，8 的最优二叉树 T。（5 分）

2. 求 T 对应的二元前缀码。（5 分）

（1）（5 分）由 Huffman 方法,得最佳二叉树为：





6 分

（2）（5 分）最佳前缀码为：000，001，01，10，11 12 分

得 分

九、（10 分）设 G 为 n 阶无向简单图，n≥5，证明 G 或 $\overline{G}$ 中必含圈.

反证法. 否则 G 与 $\overline{G}$ 的各连通分支都是树. 2 分

设 G 与 $\overline{G}$ 的连通分支分别为 G_1, G_2, …, G_s 和 G'_1, G'_2, …, $G'_{s'}$. 令 n_i, m_i 与 n'_j, m'_j 分别为 G_i, G'_j 的顶点数和边数. 4 分

于是 $\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{i=1}^{s}m_i+\sum_{j=1}^{s'}m'_j=\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)+\sum_{j=1}^{s'}(n'_j-1)=2n-(s+s')\le 2n-2$ 7 分

得 $n^2-5n+4\le 0$

解出 $1\le n\le 4$, 矛盾于 $n\ge 5$. 10 分

得 分

十、(10 分)设 G 是连通的简单的平面图,面数 r<12,δ(G)≥3.

（1）证明 G 中存在次数≤4 的面

（2）举例说明当 r=12 时，（1）中结论不真.

使用反证法证明. 设 G 的阶数、边数、面数分别为 n, m, r.

（1）否则，由欧拉公式得

$2m > 5r = 5\ (2+m-n)$ ① 2 分

由于 $\delta(G)\ge 3$ 及握手定理又有

$2m \ge 3n$ ② 4 分

由①与②得 $m\ge 30$ ③

又有

$r=2+m-n<12$ ④ 6 分

由④及②又可得

$m<30$ ⑤

③,⑤是矛盾的. 8 分

（2）正十二面体是一个反例. 12 分

答 题 纸

姓名：____________　　　　学号：________________

草　稿　纸

姓名：____________　　　学号：________________