得 分

一．填空题（每小题3分，共30 分．注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者a，或者b”型答案失分）

1. $A=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\8&4&2&1\\-27&9&-3&1\\a^3&a^2&a&1\end{pmatrix}$．若秩 $R\left(A^*\right)<4$，且 $|a|>2$，则 $a=$____-3____

2. $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&-1&-1\\3&2&1\end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$中的所有元素之和 $=$____-3____

3. 若2×6型实矩阵A和6×3型实矩阵B满足$AB=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}$，则齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中含有解向量的个数是____4____

4. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&0&0\\3&5&7&3\end{pmatrix}=$____$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&-1&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$____

5. 若$-1,3,3$是3阶实方阵A的特征值，而且A不能相似对角化，则$E+A$的秩$R\left(E+A\right)=$____2____

6. A是2阶实方阵．若齐次线性方程组$(3A-E)X=0$和$(A-E)X=0$均有非零解，则行列式$\left|6A^*-A^{-1}+9E\right|=$____120____

7. 若 A 是 3 阶 实 方 阵， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 线 性 无 关 的 3 维 实 列 向 量， 满 足 $A\alpha_1=2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\ A\alpha_2=-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,\ A\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$，则$A$的正特征值是____3____

8. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}$．由正交矩阵的概念可知$A^{-1}=$____$\dfrac{1}{4}A$____

9. 若$1,2$是实矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d \end{pmatrix}$的两个特征值，$\alpha=(t,1-t,-3,6)^T$

$\beta=(3,-1,t,2)^T$是分别属于$1,2$的特征向量，则$t=$____-11____

10. 若实矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d \end{pmatrix}$满足$A^9-3A^6+5A^3-2A^2=E$，则行列式

$\begin{vmatrix} b_2 & b_1 & b_3 \\ c_1 & b_2 & c_2 \\ c_2 & b_3 & d \end{vmatrix}$___$<$___0（填 $>,=,<$ 之一）.

得 分

二（10分）. 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

解:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 1 & -9 \\ -1 & 3 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=7\times(-25)=-175.$$

得 分

三（10分）．用初等变换的方法，解方程$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1&0\\-1&2&1&0&-1&1\\1&0&2&1&2&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1&0\\0&2&0&1&0&1\\0&0&3&0&1&1\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&8&2\\3&0&3\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

得 分

四（10 分）. a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+x_4=a \\ 5x_1+x_2-x_3+3x_4=1 \\ x_1+13x_2-5x_3-x_4=6 \end{cases}$ 有解？有解时，写出其通解.

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & 13 & -5 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 13 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & -64 & 24 & 8 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+\frac{5}{4} \end{pmatrix},$$

所以，当 $a+\frac{5}{4}=0$ 即 $a=-\frac{5}{4}$ 时，原方程组有解；有解时，

$$\begin{pmatrix} 1 & 13 & -5 & -1 & 6 \\ 0 & -64 & 24 & 8 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{64} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{29}{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1-\frac{1}{8}x_3+\frac{5}{8}x_4=\frac{7}{64} \\ x_2-\frac{3}{8}x_3-\frac{1}{8}x_4=\frac{29}{64} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{7}{64}+\frac{1}{8}x_3-\frac{5}{8}x_4 \\ x_2=\frac{29}{64}+\frac{3}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4 \end{cases},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{64}+\frac{1}{8}x_3-\frac{5}{8}x_4 \\ \frac{29}{64}+\frac{3}{8}x_3+\frac{1}{8}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{64} \\ \frac{29}{64} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以，方程组的通解是：

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{64} \\ \frac{29}{64} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中，x_3,x_4 可取任意实数。

得 分

五（12 分）． 已知 $A=\begin{pmatrix}3&-5&-5\\-5&3&-5\\-5&-5&3\end{pmatrix}$． 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&5&5\\5&\lambda-3&5\\5&5&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda-8)(\lambda+7)=0$$

$\Rightarrow \lambda=8,8,-7;$

$(8E-A)X=0$： $8E-A=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

记 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$(-7E-A)X=0$： $-7E-A=\begin{pmatrix}-10&5&5\\5&-10&5\\5&5&-10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow X=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 记 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

若记 $P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则其可逆，而且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&-7\end{pmatrix}.$$

得 分

六（12 分）. 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,1,-1,2)^T,\alpha_2=(1,-1,1,3)^T,$$
$$\alpha_3=(1,-1,0,5)^T,\alpha_4=(5,-4,1,23)^T,\alpha_5=(3,0,-1,17)^T$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

解:

$$\left(\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&5&3\\-1&1&-1&-4&0\\0&-1&1&1&-1\\5&2&3&23&17\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&1\\0&1&0&1&3\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以，

1. 向量组的秩是 3.

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是一个极大线性无关组.

3. $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$, $\alpha_5=3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

得 分

七（8 分）. 已知 A 是 n 阶实对称矩阵，E 是同阶单位矩阵. 证明：存在实数 t，使得 $A+tE$ 是正定矩阵.

证明：因为 A 是 n 阶实对称矩阵，所以（1）A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 皆为实数；（2）$A+tE$ 是实对称矩阵，且其特征值是 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$.

令 $\lambda_1+t>0,\lambda_2+t>0,\cdots,\lambda_n+t>0$ 可知，只要取实数 t 满足

$$t>-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n,$$

则 $A+tE$ 的特征值便全是正数，因此其为正定矩阵。这样的 t 显然有无穷多.

得 分

八（8 分）. 证明：如果 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}>0$.

证明：记 4 维列向量 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，题中给定的 4 阶正定矩阵为 A，则 4 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^TAX$ 是正定二次型

$\Rightarrow$ 3 元二次型 $f(0,x_2,x_3,x_4)$ 也是正定二次型

$\Rightarrow$ 3 元二次型 $f(0,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ 的顺序主子式 >0，

自然包括 2 阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}>0$.