北京工业大学 2010-2011 学年第 1 学期开学初

线性代数(工) 补考试卷

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）.

1. 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -2 & -1 & x^2 \\ 0 & x & 3 \end{vmatrix}$的完全展开式中，$x^3$的系数是________

2. 设n阶方阵A满足：$A^2-A+E=0$，E是n阶单位矩阵，则$A+E$可逆，且$(A+E)^{-1}=$________

3. 设A是3阶实方阵。$A, A-E, A-2E$均不可逆。则行列式$\left|A^2-A+E\right|=$________

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & & \\ \quad & & \end{pmatrix}$

5. 如果三维列向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$和$\{\beta_1,\beta_2\}$满足$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1-2\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_2 \\ \alpha_3 = 2\beta_1+3\beta_2 \end{cases}$，则矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$的行列式$\left|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\right|=$________（要求填具体数字）

6. 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$，$B$是3阶非零矩阵，且$AB=0$，则$a=$________

7. 设A为5阶方阵。若秩$r(A)=2$，则齐次线性方程组$AX=0$的基础解系中含有解向量的个数为________

8. **设$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$是实对称矩阵A的特征值，$\alpha=(-1,t+1,1)^T,\beta=(t,2,-1)^T$ 是分别属于$-1,1$的特征向量，则$t=$________**

9. 若矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ \cos\theta & \sin\theta & c \\ \sin\theta & e & d \end{pmatrix}$是正交矩阵，且$b<0$，则$A^{-1}=\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & & \\ \quad & & \end{pmatrix}$

10. 二次型$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$的正、负惯性指数之和＝ ______

二. 单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）。将正确答案的字母填入括号内。

1. 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的关系是 【　　　　　】

（A） 合同但不相似　　（B） 相似但不合同

（C） 合同而且相似　　（D） 既不合同又不相似

2. 若 $0,-1$ 是实对称矩阵 A 的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 A 的属于 0 的一个特征向量组，

β_1,β_2 是 A 的属于 -1 的一个特征向量组， 则 【　　　　　】

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 一定是线性无关向量组　　(B) α_1,β_2 一定正交

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 一定是线性相关向量组　　(D) 前三个选项都不正确

3. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足 $A^9=0$（其中 $n<9$），

那么，下列陈述中不正确的是 【　　　　　】

（A） A 的特征值是零　　（B） $A\neq 0$

(C) A 可以相似对角化　　（D） $A+E$ 是可逆矩阵

4. 下列陈述中不正确的是 【　　　　　】

（A）初等矩阵的行列式都是正数　　（B）若实方阵 A 的行列式 $|A|<-1$，则 $A^T\neq A^{-1}$

（C）有些初等矩阵的逆矩阵是其本身（D）实方阵 A 及其伴随矩阵 A^* 满足 $AA^*=|A|E$

5. 如果 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$ 是实正定矩阵，则 【　　　　　】

（A）$a>-1$　　（B） $a<-1$　　（C）$a=1$　　（D）a 可以是任何负实数

三.（10 分） 记行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & 27 \end{vmatrix}$ 的第三列元素位置的代数余子式依次是

$A_{13},A_{23},A_{33},A_{43}$。求 $A_{13}+A_{23}+4A_{33}+9A_{43}=?$（要求算出具体的数值）

四.（10 分） 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 分解成初等矩阵乘积的形式。

五.（10 分） 参数 b 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ \quad x_2 - x_3 - x_4 = b \end{cases}$$

有解？有解时,求出此方程组的通解。

六.（10 分） 对矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并写出这一对角矩阵。

七 （10 分）给定列向量组

$$\alpha_1 = (1,-1,0,1)^T, \alpha_2 = (1,2,-1,1)^T, \alpha_3 = (-1,-5,2,-1)^T, \alpha_4 = (3,0,-1,3)^T$$ 。

（1）求该向量组的一个极大线性无关组；

（2）把其余向量用（1）中的极大线性无关组线性表出。

八 证明题（5 分） 利用实对称矩阵和秩的知识， 证明：实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon & 1 \\ 1+\varepsilon & 1 & 1+\varepsilon \\ 1 & 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ 的三个特征值中，一个是 0，另两个不是 0。（其中，$\varepsilon \neq 0$）。