北京工业大学 2015-2016 学年

第一学期期末

高等数学—管

模拟试题&
复习参考手册

请注意：为了尊重会计 51 班同学劳动成果，拿到并阅览该份资料视为你已承诺会对该份资料保密，**禁止复印、扫描、拍照、外借**，出现泄露问题，承担全部责任，并不得再获取班级各项资料！！

感谢为本书编写工作作出巨大贡献的题目解析的王月等 15 名同学，感谢参与复审工作的田小可、汤旸、赵宇洁、赵天朗、高濛，特别感谢为本手册提供指导的天使级高数老师——付旭光老师！

学号：____________　姓名：____________

2015.12

北京工业大学 2015-2016 学年第一学期期末

高等数学（管）模拟试题

学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $\int xf'(ax^2+b)dx=$___________.

2. 设 $f'(x)=a^x, \int f(x)dx=$___________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$___________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x+1})^x=$___________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=$___________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-ax-b\right)=0, a=$____$, b=$____

7. $y=x^{\sin x}$，则 $y'=$___________.

8．设 $xe^y=y-1, dy=$___________.

9. $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=$___________.

10. $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}dx=$ ___________.

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. $\int\sec x\tan x\ln\tan x dx$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\arctan\frac{1}{x}$.

13. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 3x}\right]}{3^x-1}=3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

14. $\int \dfrac{dx}{9x^2+6x-8}$

15. $\int \dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}dx$

16. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ or $\int \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ (二选一)

三、综合题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

证： 存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$.

北京工业大学 2015-2016 学年第一学期期末

高等数学（管）模拟试题解析与复习参考

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. $\int xf'(ax^2+b)dx =$____________.

【解析】$\int xf'(ax^2+b)dx = \dfrac{1}{2a}\int f'(ax^2+b)d(ax^2+b) = \dfrac{1}{2a}f(ax^2+b)+C$

【考点】凑微分，求积分

【知识点】基础知识$\int g'(x)f'(g(x))dx = \int f'[g(x)]d[g(x)] = f[g(x)]$

常见凑微分类

1. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$

2. $\int f(ax^{m+1}+b)x^m\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a(m+1)}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b)$

3. $\int \dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $\int \dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$

5. $\int f(a^x)a^x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)$

6. $\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$

7. $\int \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$

8. $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$

9. $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$

10. $\int \dfrac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$

11. $\int \dfrac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$

12. $\int \dfrac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$

13. $\int \dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$

14. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$

【同类题参考及解析】（来源：自编&习题课，猜考原题或者不难）

1.计算不定积分 $\int \sec^2 x f'(\tan x)dx.$

【解析】$\int \sec^2 x f'(\tan x)dx = \int f'(\tan x)d\tan x = f(\tan x)$

2.计算不定积分 $\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

【解析】 $\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \sqrt{x^2+x+1}+C$

2. **设** $f'(x)=\mathrm{a}^x, \int f(x)dx =$____________.

【解析】$f(x)=\int \mathrm{f'(x)dx} = \int \mathrm{a^x dx} = \frac{\mathrm{a}^x}{\mathrm{lna}}+C_1$

$$\int \mathrm{f(x)dx} = \int (\frac{\mathrm{a^x}}{\mathrm{lna}}+C_1)\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{a^x}}{\mathrm{ln^2a}}+C_1x+C_2$$

【考　点】本题主要考察不定积分的定义、性质与基本公式的运用

【知识点】1.$\int \mathrm{kf(x)dx} = \mathrm{k}\int \mathrm{f(x)dx}$

2.$\int \mathrm{a^x dx} = \frac{\mathrm{a^x}}{\mathrm{lna}}+C$

3.$\int [\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}]\mathrm{dx} = \int \mathrm{f(x)dx} \pm \int \mathrm{g(x)dx}$

【同类参考及解析】（付老师的自测题）

设$\mathrm{f}(x)$的一个原函数为$-\mathrm{sinx}$，求$\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{f}(x)}$

解：由题，得：

$$f(x) = (-\sin x)' = -\mathrm{c}$$

$$\therefore \int \frac{\mathrm{dx}}{1+f(x)} = \int \frac{\mathrm{dx}}{1-\mathrm{co}}$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= -\cot x + \int \frac{1}{\sin^2 x}d\sin x \quad = -\cot x - \csc x + C$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=$____________.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left[1+\left(-2x\right)\right]^{\frac{-1}{2x}}\right]^{-2}=e^{-2}$

【考 点】**第二重要极限**

【知识点】 **第二重要极限，P37**

(1)数列形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ **存在（记为 e）**

(2)函数形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$

【同类参考及解析】**（付老师 ppt）**

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$.

【解析】**令** $\dfrac{x+1}{x+2}=1+\dfrac{1}{t}$，x=-(t+2)

当 x$\to\infty$ 时，t$\to\infty$,于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t-2}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}=e^{-1}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x}=$____________.

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1}}=e$

【考 点】第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 的应用

【知识点】 **第二重要极限，P37**

(1)数列形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ **存在（记为 e）**

(2)函数形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

【同类题参考及解析】（来源：付老师曾经上课讲的例题）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x}$=________

【解析】原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{(x+2)\cdot\frac{1}{(x+2)}\cdot 2x}$

$=e^{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\sin x-1}{\ln(1+x)}=$____________.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\sin x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\sin x-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[e^{x}+\sin x-1]'}{[x]'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+\cos x}{1}=2$

【考点】等价无穷小的应用 P49、洛必达法则 P97

【知识点】

1.需记住的等价无穷小

$sinx\sim x$ $\qquad$ $tanx\sim x$

$arcsinx\sim x$ $\qquad$ $arctanx\sim x$

$a^{x}-1\sim xlna$ $\qquad$ $ln(x+1)\sim x$

$log_{a}(1+x)\sim\dfrac{x}{lna}$ $\qquad$ $1-cosx\sim\dfrac{1}{2}x^{2}$

2. 另，洛必达法则仅可用于 0/0 或∞/∞ ，其它形式使用时需要替换

【同类题参考及解析】教材 p102

P_{102}. 1.(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\cdot\sin x}$ 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}$ 等价无穷小代换

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$ 洛必达法则

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}$ 三角恒等变换

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}}$ 等价无穷小代换

$= \dfrac{1}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-ax-b\right)=0, a=$____$, b=$____

【解　析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2+(a-b)x+b+1}{x-1}=0$

$\because x\to\infty, x-1\to\infty, \therefore$ 分子一定趋近一个常数，$\therefore x$ 的幂指数一定是 0

$\therefore 1-a=0, a-b=0 \therefore a=1, b=1$ （**此题还可以用渐近线法求解**）

【注　意】原式中要注意 $x\to 0$ 还是 $x\to\infty$

本题重点考察极限思想。

【考　点】判断极限是否存在及极限思想。

【知识点】利用极限思想及求极限方法确定 a,b 的值。

【同类题参考及解析】书上作业题：P52.N5　　P33.N4.(1) 、(2)

题型变换：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2\text{-}2\text{x-}3}=2, a$_____$, b=$_____

解：

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+m)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+m}{x+3}=\frac{1+\mathrm{m}}{4}=2$$

$\therefore m=7 \quad \therefore b=-7, a=6$

7. $y = x^{\sin x}$，则 $y' =$___________.

【解析】$\ln y = \ln x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \ln x$

两边求导，得

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$y' = (\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) x^{\sin x}$$

【考点】对数求导法 见书 P81

【知识点】 求导法则 公式见书 P77; 对数求导法 注意：适用于幂指函数和若干因式乘积或商的形式

【同类题参考及解析】书 P81 例题

$y = x^{\ln x}$，求 $y' =$

两边取对数

$\ln y = \ln x^{\ln x}$

$\ln y = \ln x \cdot \ln x$

两边求导

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x} \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = (\frac{2}{x} \ln x) \cdot x^{\ln x}$

$\therefore y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$

8. 设 $xe^{y} = y - 1, dy =$___________.

【解析】两边求导，得

$$e^{y} + xe^{y} y' = y'$$

$$y' = \frac{-e^{y}}{xe^{y} - 1}$$

即 $$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{y}}{xe^{y} - 1}$$

$$\therefore dy = \frac{-e^{y}}{xe^{y} - 1} dx$$

【考点】隐函数的导数 见书 P80

【知识点】 求导法则 公式见书 P77; 隐函数求导

注意：是对 x 求导，不是对 y 求导

【同类题参考及解析】（来源：积分之前自测题）

10. 求由 $y^2+e^{xy}=2$ 所确定的曲线在 $(0,1)$ 处的切线与法线方程

【解析】两边求导

$$2y\cdot y'+e^{xy}(y+xy')=0$$

$$2y\cdot y'+e^{xy}\cdot y+e^{xy}\cdot xy'=0.$$

$$(2y+e^{xy}\cdot x)y'=-e^{xy}\cdot y$$

$$\therefore y'=\frac{-e^{xy}\cdot y}{2y+e^{xy}\cdot x}$$

$$\therefore y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=-\frac{1}{2}$$

切线方程 $y-1=-\frac{1}{2}x$

法线方程 $y-1=2x$

9. $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=$___________.

【解析】

$$=\int\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\tan x+\int\frac{1}{\cos^2 x}d\cos x$$

$$=\tan x-\sec x+C$$

【考　点】本题主要考察不定积分

【知　识　点】本题涉及的知识点主要为高数书第 138 和 148 页公式

【同类参考及解析】（付老师的自测题）

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $-\sin x$，求 $\int \frac{dx}{1+f(x)}$.

【解析】由题，得：　$f(x)=(-\sin x)'=-\cos x$

$$\therefore \int \frac{dx}{1+f(x)}=\int \frac{dx}{1-\cos x}=\int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\int \frac{1}{\sin^2 x}dx+\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}d\sin x$$

$$=-\cot x+\int \frac{1}{\sin^2 x}d\sin x$$

$$=-\cot x-\csc x+C$$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}dx=$ ____________.

解：原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}=\int \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\int \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

化简为较简单形式

第二换元法，有理化

设 $t=\sqrt{x}$

则 $x=t^2$　$dx=2t\,dt$

则原式 $=\int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt=2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$　拆解为2个积分相加(减)

$=2\int 1dt+2\int \frac{-1}{t^2+1}dt$

$=2t-2\arctan t+C$

即为 $2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C$

【解析】能凑微分尽量不用第二换元积分，以下是付老师给出的解法。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})}dx=2\int \frac{d\sqrt{x}}{\frac{1}{x}(1+x)}=2\int \frac{xd\sqrt{x}}{1+x}=2\int \frac{x+1-1}{1+x}d\sqrt{x}=2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C$$

【考　点】第二换元法求解积分、常用的积分公式、凑微分

【知识点】

常用的积分公式巩固：

（1）$\int kdx=kx+C$　（**k 是常数**）　（2）$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ (u\neq -1)$

（3）$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ （4）$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

（5）$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ （6）$\int \cos x dx = \sin x + C$

（7）$\int \sin x dx = -\cos x + C$ （8）$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

（9）$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$ （10）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

（11）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ （12）$\int e^x dx = e^x + C$

（13）$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$，$(a>0, 且 a \neq 1)$ （14）$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a} arc\tan\frac{x}{a} + C$

（15）$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ （16）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arc\sin\frac{x}{a} + C$

（17）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$ （18）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

（19）$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ （20）$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

（21）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ （22）$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

第二换元法中的三角代换

一般规律如下：当被积函数中含有

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x = a\sin t$;

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x = a\tan t$;

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x = a\sec t$.

【同类题参考及解析】

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.（来源：付老师第一次自测题，难度较大，不必要求必须掌握）

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
$$= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int dx - \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx\right),$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\\
=&\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}}+\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x(x+1)}}+\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x(x+1)}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
=&\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int\mathrm{d}x-\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)\\
=&\sqrt{x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+C.
\end{aligned}
$$

求不定积分 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

解. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int dx-\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx\right)$

令 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，

$\therefore \int\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx=-2\int\frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt=-2\int\frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2}dt$

用待定系数法，可求得

$$\frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2}=-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{4(t+1)^2}+\frac{1}{4(t-1)}+\frac{1}{4(t-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ &-2\int\frac{t^2}{(t+1)^2(t-1)^2}dt\\
&=\frac{1}{2}\ln(t+1)-\frac{1}{2}\ln(t-1)+\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{2(t-1)}+C_1\\
&=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1}+\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}}{\frac{x+1}{x}-1}+C_1\\
&=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2+\sqrt{x(x+1)}+C_1\\
&=\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})+\sqrt{x(x+1)}+C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ &\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\\
&=\sqrt{x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2}+C.
\end{aligned}
$$

以上是不同外校同学给出的两种方法，下面的是王馨逸手书的

自测

$$9.\ \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$$

$$= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{(1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x})(1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x})}\,dx = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{\underbrace{(1+\sqrt{x})^2-(1+x)}_{1+2\sqrt{x}+x-1-x}}\,dx = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \int \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\,dx$$

→ 求 $\int \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$. 在这里设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$　$\frac{1+x}{x} = t^2$. 即 $1+\frac{1}{x} = t^2$. $x = \frac{1}{t^2-1}$

$$= \frac{1}{2}\int t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt = -\int \frac{t^2-1+1}{(t^2-1)^2}\,dt = -\int \frac{1}{t^2-1}\,dt - \int \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \int \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt$$

→ 求 $\int \frac{1}{(t^2-1)^2}\,dt$

利用多项式拆分

$$\frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2(t-1)^2} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1}$$

即 $(t-1)^2A + (t+1)(t-1)^2B + (t+1)^2C + (t-1)(t+1)^2D = 1$

当 $t=1$ 时　$4C = 1$　$C = \frac{1}{4}$

$t=-1$ 时　$4A = 1$　$A = \frac{1}{4}$

$t=0$ 时.　$A+B+C-D = 1$　$B-D = \frac{1}{2}$

$t=2$ 时.　$A+3B+9C+9D = 1$　$3B+9D = 1-\frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$　$B+3D = -\frac{1}{2}$

$-4D = 1$　$D = -\frac{1}{4}$

$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\overset{(t+1)^{-2}}{(t+1)^2}}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(t-1)^2}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4}\ln|t-1|$$

最终答案为：

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} + C$$

$$(\text{或} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)} + C$$

<u>**这个题如果实在有疑问可以等付老师来答疑**</u>

二、计算题（每小题 10 分，共 60 分）

11. $\int \sec x \tan x \ln \tan x dx$

【解析】先求$\int \sec x \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1}{\cos^2 x} d\cos x = \frac{1}{\cos x}$ **(公式)**

由此可得，

原式 $= -\int \ln \tan x\, d\frac{1}{\cos x} = \ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1}{\cos x} d\ln\tan x$ （第一次分部）

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x} dx$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1}{\sin x} d\tan x$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{\tan x}{\sin x} + \int \tan x\, d\frac{1}{\sin x}$$ （第二次分部）

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{\tan x}{\sin x} + \int \tan x d\frac{1}{\sin x}$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{\tan x}{\sin x} - \int \tan x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} - \int \frac{1}{\sin x} dx$$

$$=\ln\tan x \cdot \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} - \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

【考点】多次运用分部积分求积分；积分公式的灵活运用；首先求出原式部分原函数，再求积分

【知识点】1. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

2. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

3. $(\tan x)' = \sec^2 x$

4. $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ → 5. $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$

【同类题参考及解析】（来源：习题课&习题课补充）】

1. $\int \frac{\arctan\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$

【解析】首先先求$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} d\frac{1}{x}$

$$= -\int \frac{1}{x\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} d\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,d\left[1-\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

故原式 $=\int\arctan\sqrt{x^2-1}\,d\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$=\arctan\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,d\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$=\arctan\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\int\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\arctan\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\frac{1}{x}+C$$

2.（关于三角方面的转化问题）$\int\frac{1}{\cos^3x}dx$

$$=\int\sec x\,d\tan x$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\frac{\sin^2x}{\cos^3x}dx$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\sec^3x\,dx+\int\frac{1}{\cos x}dx$$

$$=\sec x\cdot\tan x-\int\frac{1}{\cos^3x}dx+\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

可得： $2I=\sec x\cdot\tan x+\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$

$$I=\frac{\sec x\cdot\tan x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$.

解: $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

令 $t=\frac{1}{x}$　原式 $=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t+1}{e^t-1}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^t}{e^t}=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

【解　析】原式中 x 的定义域是 R,应注意要从左右两侧趋于 0.

原式是一个连续函数 $e^{\frac{1}{x}}\to0,\arctan\dfrac{1}{x}\to\pm\dfrac{\pi}{2}$，

本题重点考查洛必达法则，其次为了方便运算利用了 t 和 x 的互换。

【考　点】等价无穷小代换、洛必达法则

【知识点】

1、 $x \sim \sin x \sim \sin^{-1} x \sim \tan x \sim \tan^{-1} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$

2、 $x^2 + x \sim x$

3、 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

4、 $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$

5、 $a^x - 1 \sim x \ln a$

6、 $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}x$

7、 $(1+\alpha x)^{\frac{m}{n}} - 1 \sim \frac{m}{n}\alpha x$

8、 $\sqrt{(1+x)} - \sqrt{(1-x)} \sim x$

【同类题参考及解析】（来源：付老师最后的习题课，**必考，也是模拟卷 18 题**）

1.**求极限** $\lim\limits_{x \to \infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$

【解析】令 $x = \frac{1}{t}, (t \to 0)$，

$$\lim_{x \to \infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] = \lim_{t \to 0}[\frac{1}{t^2}(e^t - 1) - \frac{1}{t}]$$

$$= \lim_{t \to 0}\frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \to 0}\frac{e^t - 1}{2t} \qquad = \lim_{t \to 0}\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

13. **若** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln\left[1 + \frac{f(x)}{\sin 3x}\right]}{3^x - 1} = 3$，**求** $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

【解析】$\because \lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln\left[1 + \frac{f(x)}{\sin 3x}\right]}{3^x - 1} = 3, \lim\limits_{x \to 0}3^x - 1 = 0 \therefore \lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln\left[1 + \frac{f(x)}{\sin 3x}\right]}{3^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{\frac{f(x)}{\sin 3x}}{x \ln 3}$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x \sin 3x \cdot \ln 3} = \lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{3x^2 \ln 3} = \frac{1}{3\ln 3}\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 9\ln 3$$

【考点】等价无穷小替换　见书 P49

【知识点】常见的等价无穷小　注意：**只有无穷小才能用!!!!**

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\quad \arctan x\sim x\quad \arcsin x\sim x\quad e^x-1\sim x$$

$$\ln(1+x)\sim x\quad (1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x\qquad a^x-1\sim x\ln a$$

【同类题参考及解析】

若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{e^x-1}=5$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{e^x-1}=5$，$\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{x}=5+\alpha(x)$，$\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=e^{(5+\alpha(x))x}-1$，

$f(x)=\sin 2x[e^{(5+\alpha(x))x}-1]$，$\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{\sin 2x[e^{(5+\alpha(x))x}-1]}{x^2}$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x[e^{(5+\alpha(x))x}-1]}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{e^{(5+\alpha(x))x}-1}{(5+\alpha(x))}\times\frac{(5+\alpha(x))x}{x}=10.$$

或 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{\sin 2x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=5$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10.$ **（证无穷小过程省略）**

14. $\displaystyle\int\frac{dx}{9x^2+6x-8}$

①. $I=\displaystyle\int\frac{1}{(3x+4)(3x-2)}dx$

$\dfrac{1}{(3x+4)(3x-2)}=\dfrac{A}{3x+4}+\dfrac{B}{3x-2}.$

$1=(3x-2)A+(3x+4)B.$

$\therefore\begin{cases}A=-\frac{1}{6}\\ B=\frac{1}{6}\end{cases}$

$\therefore I=-\frac{1}{6}\displaystyle\int\frac{1}{3x+4}dx+\frac{1}{6}\int\frac{1}{3x-2}dx$

$=-\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\displaystyle\int\frac{1}{3x+4}d(3x+4)+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x-2}d(3x-2)$

$=-\frac{1}{18}\ln|3x+4|+\frac{1}{18}\ln|3x-2|+C.$

②. $I=\displaystyle\int\frac{dx}{9[(x+\frac{1}{3})^2-1]}$

$=\frac{1}{9}\displaystyle\int\frac{1}{(x+\frac{1}{3})^2-1^2}dx$

$=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{3x-2}{3x+4}\right|+C$

$=\frac{1}{18}\ln\left|\dfrac{3x-2}{3x+4}\right|+C.$

【解析】

【解析】分母可进行因式分解，也可化成完全平方的形式，这两点是这道题解答的两个角度。

【考点】本题考查不定积分基本公式的灵活运用及基本的计算问题。

【知识点】不定积分基本公式 见书 P138&P147-148

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

【同类题参考及解析】（来源：付老师课上自测题）

1、$\int \frac{dx}{x^2-x-2}$.

①. $I = \int \frac{1}{(x-2)(x+1)}dx$

$\frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$.

$1 = (x+1)A + (x-2)B$.

$\therefore \begin{cases} A = \frac{1}{3}. \\ B = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

$\therefore I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}d(x-2) - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}d(x+1)$

$= \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$.

②. $I = \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2}dx$

$= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}dx$

$= \frac{1}{2\times\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$.

15. $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}dx$

【解析】

解：$\int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{x(1+x)}dx$ ， 令$ln(\frac{1+x}{x})=U$， $U'=\frac{x}{1+x}*\frac{x-(1+x)}{x^2}=\frac{-1}{(1+x)x}$

$\int -U * U'dx=\int -UdU=-\frac{1}{2}U^2+C=-\frac{1}{2}(\ln\left|\frac{1+x}{x}\right|)^2+C$

【考点】不定积分的第一换元积分法（凑微分法）

【知识点】P141 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C$

【同类题参考及解析】（来源：P148 习题 5.2）

1.**计算不定积分**$\int tan\sqrt{1+x^2} * \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

【解析】原式=$\int tan\sqrt{1+x^2}d\sqrt{1+x^2}$=$-ln|cos\sqrt{1+x^2}|+C$

16. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ or $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$（二选一）

【16-1】$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

【解析】

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\,d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

【考点】分部积分法 书 P150 5.3 分部积分法

【知识点】分部积分公式 $\int uv'\mathrm{d}x = \int u'\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = uv - \int u'v\mathrm{d}x$

【同类题参考及解析】

1.计算不定积分

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x$$

$$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - x + C$$

2.计算不定积分

习题课：$\int \frac{x^2}{x^2-1}\ln\frac{x-1}{x+1}dx$.

$$I = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\ln\frac{x-1}{x+1}dx$$

$$= \int \ln\frac{x-1}{x+1}dx + \int\frac{1}{x^2-1}\ln\frac{x-1}{x+1}dx.$$

$$= x\cdot\ln\frac{x-1}{x+1} - \int x\,d\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\int\ln\frac{x-1}{x+1}d\ln\frac{x-1}{x+1}$$

$$= x\ln\frac{x-1}{x+1} - \int\frac{-2}{x^2-1}dx - \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + C$$

$$= x\ln\frac{x-1}{x+1} + 2\ln|x^2-1| - \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + C$$

【16-2】$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

【解析】也可以用 $x=\frac{1}{t}$.

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \quad 设\ x=a\sin t\ (0<t<\frac{\pi}{2})$$
$$dx=a\cos t\,dt$$

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=\int\frac{a^2\cos^2 t}{a^4\sin^4 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cot^2 t}{\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\cot^2 t\cdot\csc^2 t\,dt$$

$$=-\frac{1}{a^2}\int\cot^2 t\,d(\cot t)$$

$$=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{3}\cot^3 t+C$$

$$=-\frac{1}{3a^2}\cot^3 t+C.$$

$$\because \sin t=\frac{x}{a} \quad \therefore \cot t=\frac{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}{x}$$

$$\therefore I=-\frac{a[1-(\frac{x}{a})^2]^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C$$

【考点】不定积分 书 P146 定理 5.3 第二类换元法、三角代换

【知识点】第二类换元法公式

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{F}(t)+\mathrm{C},$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(\varphi^{-1}(x))+\mathrm{C}.$$

【同类题参考及解析】

1.书 P146 例题

【解析】

$\int\sqrt{4-x^2}dx$. 令 $x=2\sin t$. $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

则有 $dx=2\cos t dt$.

$\therefore I=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt$

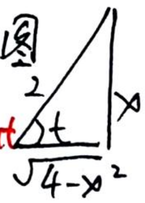
$=4\int\cos^2 t dt$

$=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$=2t+\sin 2t+C$

$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$.

当 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时. $x=2\sin t$ 如图



当函数中含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时. 设 $x=a\sin t$

2.计算不定积分

自测题10. $\int\frac{1}{2x+\sqrt{1-x^2}}dx$ 令 $x=\sin t$ $dx=\cos t dt$ 代入.

$I_1=\int\frac{\cos t}{2\sin t+\cos t}dt$ 取 $I_2=\int\frac{\sin t}{2\sin t+\cos t}dt$.

$I_1+2I_2=\int\frac{\cos t+2\sin t}{2\sin t+\cos t}dt=t+C$

$2I_1-I_1=\int\frac{2\cos t-\sin t}{2\sin t+\cos t}dt=\int\frac{d(2\sin t+\cos t)}{2\sin t+\cos t}$

$=\ln|2\sin t+\cos t|+C$

$5I_1=2\ln|2\sin t+\cos t|+C$

$I_1=\frac{2}{5}\ln|2x+\sqrt{1-x^2}|+C$

【解析】此题既运用三角代换又运用设方程组求积分的方法。

三、综合题（每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$

证： 存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

【解 析】设 $F(x)=e^{-x}f(x)$,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$,

即 $-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$ $\therefore f(\xi)-f'(\xi)=0$ 即 $\therefore f(\xi)=f'(\xi)$

【考 点】罗尔中值定理的应用、求导

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$. （同 12. 参考题，答案略）

泰勒公式部分：（泰勒 ppt 例题 1 也是）

例6 若函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可微,且 $f(0)=f(1)$, $|f''(x)|\le 1$,证明: $|f'(x)|\le\frac{1}{2},(x\in[0,1])$.

证 设 $x_0\in[0,1]$,在 x_0 处把 $f(x)$ 展成一阶泰勒公式,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

令 $x=0,x=1$,则有

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2 \qquad (1)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2, (2)$$

(1) − (2), 注意到 $f(0)=f(1)$, 则有

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$$

$\because |f''(x)|\le 1$

$$\therefore |f'(x_0)|\le\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}(1-x_0)^2=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

又由 $x_0\in[0,1]$ 知, $\left|x_0-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2}$, 于是有 $|f'(x_0)|\le\frac{1}{2}$

由 x_0 的任意性,可知命题成立

【知识点】泰勒公式

1.皮亚诺型余项的泰勒公式

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在1 到 n 阶导数，则当 $x\to x_0$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

2.拉格朗日型余项的泰勒公式

假设函数 $f(x)$ 在点 $x_0\in(a,b)$ 存在1 到 $n+1$ 阶导数，则当 $\forall x\in(a,b)$ 时，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{n+1!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

3.泰勒公式一般方法及形态

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots+o(x^n)$$

中值定理证明不等式：

1. **例 4.15 证明：不等式** $\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}(a>b>0)$.

证明 选择函数 $f(t)=\ln t$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (b,a)$，使得

$$\ln a-\ln b=\frac{1}{\xi}(a-b),$$

由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{b}$，即得

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}(a>b>0).$$

2. **设 a＞b＞0，n＞1，证明：** $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

证：

取函数 $f(x)=x^n$，f（x）在[b, a]上连续，在（b, a）内可导，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi \in (b,a)$ 使

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$$

即 $a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$. 又 $0<b<\xi<a$，$n>1$，故

$$0<b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$$

因此 $$nb^{n-1}(a-b)<n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b)$$

即 $$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$$

3.

例5 若在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \le M$，又 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，证明：$|f'(0)|+|f'(a)| \le aM$.

证 因 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值 所以 $\exists c \in (0,a)$，使 $f'(c)=0$.

$f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 上满足拉格朗日中值定理条件.

故 $f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)(c-0)$, $\xi_1 \in (0,c)$

$f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c)$, $\xi_2 \in (c,a)$

于是 $|f'(0)|+|f'(a)|=|f''(\xi_1)|c+|f''(\xi_2)|(a-c)$

$\le Mc+M(a-c)=aM$

例9 设 $e<x<y$，试证：$\frac{x}{y}<\frac{\ln x}{\ln y}<\frac{y}{x}$.

证 (由于 $y>x>e$，因此右侧的不等关系显然成立，只须证左侧)

要证左侧不等式，只要证 $x\ln y<y\ln x$

*进一步变形 左侧，只要证 $\Rightarrow \frac{\ln y-\ln x}{y-x}<\frac{\ln x}{x}$，

于是只要对 $f(u)=\ln u$ 在 $[x,y]$ 上应用*Lagrange*中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (x,y)$，

使 $\frac{\ln y-\ln x}{y-x}=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x}$.

【考点&知识点】书 p105～106

简单不等式证明是拉格朗日中值定理的一个直接应用：由

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

只要估计出 $A \leqslant f'(\xi) \leqslant B$，就可以同时得到两个不等式

$$A(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant B(b-a).$$