北京工业大学 2007—2008 年度第一学期

“概率论与数理统计”课程考试试题(工类)

学号______________ 姓名___________ 得分__________

题号	一	二(1)	二(2)	二(3)	二(4)	二(5)
得分						

一. **填空题(每空两分,共 30 分)**

1. 若 A,B 为随机事件，且 P(A)=0.6，P(B)=0.3。 当 A,B 相互独立时，P(A∪B) = 0.72，P(A-B)= 0.42。

2. 袋中有同型号小球 9 只，其中 5 只是黑色的， 4 只是白色的，现不放回地从中抽取 3 只，每次抽一只。则依次抽到黑球、白球和黑球的概率为 10/189；若已知第二次抽到黑球，则第一次抽到黑球的概率为 1/2。

3. 若 X 服从[0,1]区间上均匀分布，记 $A=\{0.1\le X\le 0.3\}$，Y 表示对 X 进行 20 次独立观测时事件 A 发生的次数。则 $E(Y)=$ 4，$Var(Y)=$ 3.2。

4. 若随机变量 X 只能取 $-2,\ 0,\ 1$ 三个值，且 $P(X=-2)=0.25$，$P(X=1)=0.35$。则 $E(X)=$ -0.15，$Var(X)=$ 1.3275。

6. 若随机变量 $X\sim U(-1,\ 2),\ Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且二者相互独立。其中 μ,σ^2 为常数。当 $E(X-Y)=2,\quad Var(2X-Y)=4$ 时，$\mu=$ -3/2，$\sigma^2=$ 1。

6. 设(X,Y)服从区域 G 上的均匀分布，其中 G={(x , y) : 0<y<1, |x|<1}，则 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)=$ 1 (-1< x < 1)，Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)=$ 2 (0<y< 1)。

7. 若 X_1,X_2,Λ,X_n 为抽自正态总体 $N(0,4)$ 的随机样本，记

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad S_1^2=\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2.$$

则 $\bar{X}\sim$ $(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，E($S^2$)= σ^2，E(S_1^2)= $\tilde{\sigma}^2$。

注：做以下各题须写出计算步骤，否则不能得分。

二.（本题 14 分）有型号相同的产品两箱，第一箱装 12 件产品，其中两件为次品；第二箱装 8 件产品，其中一件为次品。先从第一箱中随机抽取两件产品放入第二箱，再从第二箱中随机抽取一件产品。

(1). 求从第二箱中取出次品的概率；

(2). 若从第二箱中取出了次品，求从第一箱中未取到次品的概率。

解 以 A_i 表示从第一箱中取到 i 件次品，$i=0,1,2$；B 表示从第二箱中取到次品。

则 (1). $P(B)=P(A_0B)+P(A_1B)+P(A_2B)$

$$=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$

$$=\frac{C_{10}^2C_2^0}{C_{12}^2}\frac{1}{10}+\frac{C_{10}^1C_2^1}{C_{12}^2}\frac{2}{10}+\frac{C_{10}^0C_2^2}{C_{12}^2}\frac{3}{10}$$

$$=\frac{10\times 9}{12\times 11\times 10}+\frac{10\times 8}{12\times 11\times 10}+\frac{2\times 3}{12\times 11\times 10}$$

$$=\frac{2}{15};$$

(2). $P(A_0\mid B)=\dfrac{P(A_0B)}{P(B)}=\dfrac{10\times 9}{12\times 11\times 10}\cdot\dfrac{15}{2}=\dfrac{45}{88}$.

三.（本题 16 分）设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\in(-1,0],\\ 1-x, & x\in(0,1],\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 令 $Y=X^2$。

(1). 求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

(2). 求 $P(0.25<Y<1.96)$；

(3). 求 Y 的期望 $E(Y)$ 与方差 $Var(Y)$。

解 (1). 记 $F_Y(y)$ 为随机变量 Y 的分布函数，则 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；$y\in(0,1]$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=2\sqrt{y}-y;$$

$y>1$ 时，$F_Y(y)=1$。于是，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{y^{-1}}-1, & y\in(0,1],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

(2). $P(0.25<Y<1.96)=\int_{0.25}^{1.96}f_Y(y)dy$

$$=\int_{0.25}^{1}f_Y(y)dy$$
$$=F_Y(1)-F_Y(0.25)$$
$$=0.25\text{；}$$

(3). $E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\dfrac{1}{6}$；

由 $E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^4(1-x)dx=\dfrac{1}{15}$ 及

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(X^4)-[E(X^2)]^2,$$

得 $Var(Y)=\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{7}{180}$.

四. (本题 16 分)设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot e^{-y}, & 0\le x\le y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1). 求常数c；

(2). 求X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$；

(3). 求$P(X+Y<1)$。

解 (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{\infty}dy\int_{0}^{y}c\cdot e^{-y}dx=c\int_{0}^{\infty}ye^{-y}dx=c$,

得$c=1$；

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}y\cdot e^{-y} & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

(3). $P(X+Y<1)=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=\int_0^{0.5}(e^{-x}-e^{x-1})dx=(1-e^{-1/2})^2$

五．（本题 14 分）若 $X_1, X_2, \Lambda, X_n (n>2)$ 为抽自总体 X 的随机样本，总体 X 有概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 为待估参数，求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 与极大似然估计 θ^*。

解　记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。由 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$。利用 $\overline{X} = E(X)$，得 $\overline{X} = \frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}$。解该式，得 $\hat{\theta} = \frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

记 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = (\theta+1)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta+1}$ 为参数 θ 的似然函数。则

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + (\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

与

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ .$$

解似然方程 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$，得 $\theta = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$。故

$$\theta^* = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

六. (本题 14 分)对一批锰的熔点做 5 次测定，测定结果为 1269, 1267, 1271, 1263 和 $1265\,^oC$, 已知锰的熔点服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 给定检验的显著性水平 $\alpha=0.05$, 问

(1). 在 σ^2 未知的情况下，可否通过样本推断出“总体均值等于1270.6”？

(2). 可否通过样本推断出“总体方差不超过4.25”？

附　　　　　　t 分布与 χ^2 分布表

$t_4(0.025)=2.7764$	$t_4(0.05)=2.1318$	$t_5(0.025)=2.5706$	$t_5(0.05)=2.0150$
$\chi_4^2(0.025)=11.143$	$\chi_4^2(0.05)=9.488$	$\chi_4^2(0.95)=0.711$	$\chi_4^2(0.975)=0.484$
$\chi_5^2(0.025)=12.833$	$\chi_5^2(0.05)=11.071$	$\chi_5^2(0.95)=1.145$	$\chi_5^2(0.975)=0.831$

解 易见：$n=5$，$\alpha=0.05$。由 $x_1=1269$，$x_2=1267,\Lambda$，$x_5=1265$，得

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=1267,\quad s^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10,\quad s=\sqrt{10}.$$

(1). 记 $H_0:\ \mu=1270.6(\mu_0)\ \leftrightarrow\ H_1:\ \mu\neq 1270.6(\mu_0)$.

由 $|\bar{x}-1270.6|=3.6<3.9263=(s/\sqrt{n})\cdot t_{n-1}(\alpha/2)$,

知：可通过样本推断 H_0 为真，即接受“总体均值等于1270.6”;

(2). 记 $H_0':\ \sigma^2\leq 4.25(\sigma_0^2)\ \leftrightarrow\ H_1':\sigma^2>4.25(\sigma_0^2)$.

由 $(n-1)s^2/\sigma_0^2=2.2145<9.488=\chi_{n-1}^2(\alpha)$,

知：可通过样本推断 H_0' 为真，即接受“总体方差不超过4.25”。