2013-2014年

1、设 $z_1=1-2i$， $z_2=-3+4i$，则 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=$ $-\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$ 。

2、$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{10}=$ $2^9(1+i\sqrt{3})$ 。

3、设 $x^2-2x+by^2+1+a(x-1)yi$ 为解析函数，则 $a=$ 2 ，$b=$ -1 。

4、$Ln\left[(1+i)(-1+i)\right]=$ $\ln 2+i(\pi+2k\pi)\quad k\in\mathbb{Z}$ 。

5、$\int\limits_{|z|=\frac{2}{3}}\frac{dz}{\left(z^{10}-1\right)\left(z+1\right)^3}=$ 0 。

6、$\int_1^{1+i}ze^z dz=$ $e(-\sin 1+i\cos 1)$ 。

7、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n$ 的收敛域为 $|z|<\frac{1}{e}$ 。

8、$z=0$ 是 $\frac{1}{(1-\cos z)^2}$ 的 4 级极点。

9、$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-iwt}dt=$ 1 。

不用做，没讲！ → 10、$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=$ ______ 。

得 分

二、计算题（每题 5 分，共 20）

1、求 $f(z)=\frac{1}{\sin z}$ 的所有孤立奇点。

解：$\sin z=0$

$z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\therefore$ $f(z)$ 的所有孤立奇点为 $z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2、计算 $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right]$ $k=0,1,2.$

$=3\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$ $k=0,1,2.$

3、若$(1+i)^n=-4$，求n的值。

解：$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

$=-4$

$\therefore n=4$

4、计算$i^{\sqrt{3}}$

$i^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\,\mathrm{Ln}\,i}$

$=e^{\sqrt{3}\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}$

$=\cos\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$

$k\in\mathbb{Z}$.

得分

三、求已知函数的展开式。（每题10分，共20分）

1、把函数$f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z-2)}$展开为z的泰勒级数。

解：$f(z)=z\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}\right)$

$=\frac{z}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right)$

$=\frac{z}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^n}{2^n}\right)\qquad |z|<2$

$=-\frac{z}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{z^n}{2^n}\right)$

$=-\frac{z}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^{2n}}\quad=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2^{2(n+1)}}\qquad |z|<2$

2、把函数$f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$在$0<|z-3|<3$内展成洛朗级数。

解：$f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(z-3)^2}\left(-\left(\frac{1}{z}\right)'\right)$

$=-\frac{1}{(z-3)^2}\left(\frac{1}{3+z-3}\right)'$

$=-\frac{1}{(z-3)^2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}}\right)'$

$=-\frac{1}{(z-3)^2}\left(\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(z-3)^n}{3^n}\right)'$

$=-\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n3^{-(n+1)}\cdot n\cdot(z-3)^{n-1}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{-(n+1)}\cdot n(z-3)^{n-3}$

得 分

四、设 C 为从原点到 $3+4i$ 的线段，计算 $\int_C \mathrm{Im}\, z dz$ （10 分）

解：C的参数方程为 $z(t)=(3+4i)t,\ 0\le t\le 1$

$dz=(3+4i)dt$

$$\int_C \mathrm{Im}\, z\, dz = \int_0^1 4t(3+4i)dt$$

$$=4(3+4i)\int_0^1 t\,dt$$

$$=2(3+4i)\cdot t^2\Big|_0^1$$

$$=2(3+4i)$$

$$=6+8i$$

得 分

五、利用留数计算。（20 分）

1、计算 $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)\sin \pi z} dz$。（10 分）

解：$z=1$ 为孤立奇点，$\sin\pi z=0$，$\pi z=k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$\therefore z=k$，$k\in\mathbb{Z}$ 亦为孤立奇点 $\because (\sin\pi z)'\big|_{z=k}=\pi\cos\pi z\big|_{z=k}\neq$

$\therefore z=k\ (k\in\mathbb{Z})$ 是 $\sin\pi z$ 的一级零点

$\therefore z=1$ 为2级极点，且在 $|z-1|=\frac{1}{2}$ 内，$z=k\ (k\in\mathbb{Z}$，且$k\neq 1)$均不在

$|z-1|=\frac{1}{2}$ 内，则由留数定理得

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-1)\sin\pi z}dz = 2\pi i \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-1)\sin\pi z},1\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)\sin\pi z}\right)$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{\sin\pi z-\pi\cos\pi z(z-1)}{\sin^2\pi z}$$

$$=2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z-\pi\cos\pi z+\pi^2\sin\pi z(z-1)}{\pi\cdot 2\sin\pi z\cos\pi z}$$

$$=\pi^2 i\lim \frac{z-1}{\cdots}=0$$

2、计算$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx$。（10 分）

解：$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx=Im\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2+1}dx\right]$

令$R(z)=\frac{z}{z^2+1}$ 其在上半平面的孤立奇点为$z=i$ 且为一级极点

$\therefore \int_0^{+\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx=Im\left(\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot Res\left[R(z)e^{2iz},i\right]\right)$

$=Im\left(\pi i\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{ze^{2iz}}{(z-i)(z+i)}\right)$

$=Im\left(\pi i\cdot\frac{e^{-2}}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{2e^2}$

得 分

六、求函数$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2\le 1,\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$的 Fourier 积分。（10 分）

解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$

$=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-i\omega t}dt$

$=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{1}t^2de^{-i\omega t}$

$=-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}-e^{i\omega})+\frac{1}{i\omega}\left(t^2e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}te^{-i\omega t}d\right.$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}+\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)+\frac{2}{(i\omega)^2}\int_{-1}^{1}t\,de^{-i\omega t}$

$=\frac{2}{(i\omega)^2}te^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{(i\omega)^2}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt$

$=-\frac{2}{\omega^2}\left(e^{-i\omega}+e^{i\omega}\right)+\frac{2}{\omega^2}\cdot\left(-\frac{1}{i\omega}\right)e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}$

$=-\frac{4\cos\omega}{\omega^2}-\frac{2}{i\omega^3}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)$

$=-\frac{4\cos\omega}{\omega^2}+\frac{4\sin\omega}{\omega^3}=\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}$

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4(\sin\omega-\omega\cos\omega)}{\omega^3}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^3}\cos\omega t\,d\omega\ (t\ne\pm1)$ 当$t=\pm1$时 $f(\pm1)=\frac{1}{2}$

2013-2014年填空

1. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1-2i}{-3+4i}\right)} = \overline{\left(\frac{(1-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}\right)} = \overline{\left(\frac{-3-8+(4+6)i}{25}\right)}$

$$= \overline{\left(-\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i\right)} = -\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i$$

2. $(-\sqrt{3}+i)^{10} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^{10}$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{50}{6}\pi + i\sin\frac{50}{6}\pi\right)$$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2^{9}(1+i\sqrt{3})$$

3. $u = x^2-2x+by^2+1$

$v = a(x-1)y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x-2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2by$

$\frac{\partial v}{\partial x} = ay$, $\frac{\partial v}{\partial y} = a(x-1)$

由C-R方程得 $\begin{cases} 2x-2 = a(x-1) \\ 2by = -ay \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

4. $\mathrm{Ln}[(1+i)(-1+i)] = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi+2k\pi) \quad k\in\mathbb{Z}$

5. $z = 1^{\frac{1}{10}} = \cos\frac{2k\pi}{10} + i\sin\frac{2k\pi}{10} \qquad k=0,1,2,\cdots,9$

$z=-1$

均为被积函数的孤立奇点，但均在$|z|=\frac{2}{3}$外.

$\therefore \oint_{|z|=\frac{2}{3}} \frac{dz}{(z^{10}-1)(z+1)^3} = 0$ 由柯西-古萨基本定理.

6. $\int_1^{1+i} ze^z dz = \int_1^{1+i} z\, de^z = ze^z\Big|_1^{1+i} - \int_1^{1+i} e^z dz$

$$= (1+i)e^{1+i} - e - e^z\Big|_1^{1+i}$$

$$= (1+i)e^{1+i} - e - (e^{1+i} - e)$$

$$= ie^{1+i}$$

$$= i\cdot e(\cos 1 + i\sin 1)$$

$$= e(-\sin 1 + i\cos 1)$$

7. $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(1+\frac{1}{n})^{n^2}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$\therefore R = \frac{1}{e}$ $\therefore$ 收敛域为 $|z| < \frac{1}{e}$

8. $1-\cos z\Big|_{z=0} = 0$

$(1-\cos z)'\Big|_{z=0} = \sin z\Big|_{z=0} = 0$

$(1-\cos z)''\Big|_{z=0} = \cos z\Big|_{z=0} = 1 \neq 0$

$\therefore z=0$ 是 $1-\cos z$ 的2级零点，$\therefore$ 是 $(1-\cos z)^2$ 的4级零点。

$\therefore$ 是 $\frac{1}{(1-\cos z)^2}$ 的4级极点，

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ← 没讲 不用会.