北京工业大学 2013—2014 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 A 卷参考答案

一、填空题：(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分)

1. 函数 $z=y^x$ 在点 $(1,2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}z=\underline{2\ln 2\vec{i}+\vec{j}}$

2. 曲面 $xy+e^z=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{2x+y+z=4}$

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}}{2^n}$ 的收敛域为 $\underline{(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})}$

4. 函数 $f(x)=e^{2x}$ 的麦克劳林级数为 $\underline{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)}$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，其傅立叶级数的

和函数记为 $S(x)$，则 $S(6\pi)=\underline{\dfrac{1}{2}}$

6. 设 $D:x^2+y^2\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{\pi(e-1)}$

7. 设曲线 L 为 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\underline{\pi}$

8. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}(\sin z^3+1)\mathrm{d}S=\underline{4\pi a^2}$

9. 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围立体的体积为 $\underline{\pi}$

10. 微分方程 $y'=xy$ 满足 $y(0)=1$ 的特解为 $\underline{y=e^{\frac{1}{2}x^2}}$

二、计算题：(本大题共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分)

11. 求函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ 的极值。

【解】令 $\begin{cases}f'_x=3y-3x^2=0\\ f'_y=3x-3y^2=0\end{cases}$，得驻点 $(0,0)$，$(1,1)$ …………2 分

又 $f''_{xx}=-6x$，$f''_{xy}=3$，$f''_{yy}=-6y$ …………4 分

在点 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，所以，$(0,0)$ 不是极值点 …………7 分

在点(1,1)处，$\boldsymbol{AC-B^2=27>0}$，且 $A=-6<0$，所以极大值 $f(1,1)=1$ …10 分

12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的收敛域及和函数。

【解】设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$。则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1)$$ …………5 分

上式两端积分，得 $\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$，又 $f(0)=0$

所以 $f(x)=-\ln(1-x)$，$\boldsymbol{x\in[-1,1)}$ …………8 分

故，幂级数的收敛域为 $\boldsymbol{[-1,1)}$，和函数 $s(x)=-x\ln(1-x)$ …………10 分

13. 计算曲线积分 $I=\int_L(2xe^y+1)\mathrm{d}x+(x^2e^y+2x)\mathrm{d}y$，其中 L 是 $(x-1)^2+y^2=9$ 的上半圆周逆时针方向。

【解】设 $P=2xe^y+1, Q=x^2e^y+2x$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$ ……3 分

补直线段 AB，其中 A 点为 $(-2,0)$；B 点为 $(4,0)$。故

$$I=\oint_{L+AB}-\int_{AB}=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-2}^{4}(2x+1)\mathrm{d}x$$ …………8 分

$$=9\pi-18$$ …………10 分

14. 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-1)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(0\le z\le 1)$ 的上侧。

【解】设 $P=xy^2$，$Q=(x^2-1)y$，$R=z-1$，则 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2$ ……3 分

补平面 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le 1)$，取下侧。故

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iint_D-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ …………8 分

$$=\frac{7}{6}\pi$$ …………10 分

15．求微分方程 $y''-2y'+y=(x^2+2)e^x$ 的通解。

【解】特征根为 $r_1=r_2=1$

对应的齐次方程通解为：$Y=(C_1+C_2)e^x$ …………4 分

设非齐次方程特解为：$y^*=Q(x)e^{2x}$，代入原方程得 $Q''(x)=x^2+2$

解得 $Q(x)=\dfrac{1}{12}x^4+x^2$ …………6 分

所以特解为：$y^*=\left(\dfrac{x^4}{12}+x^2\right)e^x$ …………8 分

故，原方程通解为：$y=(C_1+C_2x)e^x+\left(\dfrac{x^4}{12}+x^2\right)e^x$ …………10 分

三、证明题：(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

16. 设方程 $F(x-2z,y-3z)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，证明：$2\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

【证】方程两边对 x 求导，有

$F_1'\cdot\left(1-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\cdot\left(-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'}{2F_1'+3F_2'}$ …………2 分

方程两边对 y 求导，有

$F_1'\cdot\left(-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+F_2'\cdot\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_2'}{2F_1'+3F_2'}$ …………4 分

因此 $2\dfrac{\partial z}{\partial x}+3\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$ ……………………5 分

17. 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，$(n=1,2,3,\Lambda\ ,a_n>0,b_n>0)$，证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛。

【证】由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$，可得 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\dfrac{a_n}{b_n}$ …………2 分

所以，正项数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$单调减少，从而有界。故$\exists M>0$，使得

$\dfrac{a_n}{b_n}\le M$ ，即$a_n \le Mb_n$，$(n=1,2,\Lambda)$ …………4 分

由正项级数比较判别法级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛 ………………………5 分