得 分

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分. 注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者a，或者b”型答案失分）

1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&a\\4&9&a^2\end{pmatrix}$. 若$AX=0$有非零解，且 $a>0$，则$\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&3&9\\1&a&a^2\end{vmatrix}=$ <u>-12</u>

2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&6&4\\0&0&5\end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$的迹（即主对角线上元素之和）$trA^*=$ <u>41</u>

3. A是3阶非零实矩阵，秩$R(A)=R(A^*)$，则$AX=0$的解空间的维数是 <u>0</u>

4. $\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\7&8&9&0\\1&2&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=$ <u>$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\12&11&10&3\\-3&2&1&6\end{pmatrix}$</u>

5. 若$1,2,2,3$是4阶实方阵A的特征值，而且A不能相似对角化，则$A-2E$的秩$R(A-2E)=$ <u>3</u>

6. $a=\begin{vmatrix}2&-1&-1&-1\\-1&2&-1&-1\\-1&-1&2&-1\\-1&-1&-1&2\end{vmatrix}$. A是2阶实方阵. 若齐次线性方程组$(A+aE)X=0$和$(E-A)X=0$均有非零解，则行列式$\left|A^*-22A^{-1}+E\right|=$ <u>$\dfrac{64}{9}$</u>

7. 若 A 是 2 阶实方阵，α_1,α_2 是线性无关的 2 维实列向量，满足$A\alpha_1=2\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=3\alpha_1+2\alpha_2$，则$A$的负特征值是 <u>$-1$</u>

8. $A=\begin{pmatrix}-3&3&3&3\\3&-3&3&3\\3&3&-3&3\\3&3&3&-3\end{pmatrix}$. 由正交矩阵的概念可知，$A^*=$ <u>$-36A$</u>

9. 若 $-1,8$ 是实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & b_2 & c \end{pmatrix}$ 的两个特征值， $\alpha=(1,1+2t,-5)^T$，

$\beta=(-3t,1,2)^T$ 是分别属于 $-1,8$ 的特征向量，则 $t=$ ____−9____

10. 实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 & c_3 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & d_2 \\ a_5 & b_4 & c_3 & d_2 & e \end{pmatrix}$ 满足 $A^{10}+9A^7+2A^6+5A^2+2A+3E=0$，

则行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ a_2 & b_1 & b_4 \\ a_5 & b_4 & e \end{vmatrix} \underline{\quad < \quad} 0$$（填 $>,=,<$ 之一）.

得 分

二（10 分） 计算行列式$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 2\\3 & 3 & 2 & 1 & 1\\1 & 6 & 8 & 6 & 1\\2 & -1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 3 & 3\end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

解：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 2\\3 & 3 & 2 & 1 & 1\\1 & 6 & 8 & 6 & 1\\2 & -1 & -1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 3 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & -1 & 2\\3 & 3 & 2 & 1 & 1\\1 & 6 & 8 & 6 & 1\\1 & 1 & 2 & 3 & 3\\2 & -1 & -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 3\\4 & 4 & 4 & 4 & 4\\1 & 6 & 8 & 6 & 1\\1 & 1 & 2 & 3 & 3\\2 & -1 & -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0 & 0\\4 & 4 & 4 & 0 & 0\\1 & 6 & 8 & 0 & 0\\1 & 1 & 2 & 2 & 2\\2 & -1 & -1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\4 & 4 & 4\\1 & 6 & 8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=16\times(-6)=-96$$

得 分

三（10 分） 用初等变换的方法，解方程 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 5 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

得 分

四（10 分） a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = a \end{cases}$ 有解？有解时，写出其通解.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -6 & 5 & -4 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6 \end{pmatrix}.$$

当 $a = -6$ 时，给定的方程组有解.

有解时，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ x_2 = 1 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \end{cases}.$$

方程组的通解是：

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ 1 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中，x_3, x_4 可取任意实数.

得 分

五（12 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda=0,0,1\,;$$

$$(0E-A)X=0\text{: } 0E-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$x_3=0\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\,;$$

$$(1E-A)X=0\text{: } 1E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=2x_3\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\,;$$

若记

$$P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

则，P 是可逆的，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

得 分

六（12 分） 给定列向量组

$\alpha_1=(-1,0,2,1,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,0,-2,1)^T,$

$\alpha_3=(1,-1,0,3,-2)^T,\alpha_4=(-6,-5,18,14,-13)^T,\alpha_5=(0,-9,2,-12,5)^T$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

解：

$$\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -5 & -9\\ 2 & 0 & 0 & 18 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 14 & -12\\ -1 & 1 & -2 & -13 & 5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 9 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

1 向量组的秩是3；

2 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量组的一个极大线性无关组；

3 $\alpha_4=9\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,\ \alpha_5=\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3$.

得 分

七（8 分） 已知：A,B 是 n 阶可逆实矩阵。证明：伴随矩阵 A^*,B^*

满足 $(AB)^* = B^*A^*$.

证明：

$$(AB)(AB)^* = |AB|E = |A||B|E = |B||A|E;$$
$$(AB)(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = A(|B|E)A^*$$
$$= |B|(AA^*) = |B|(|A|E) = |B||A|E;$$

所以，$(AB)(AB)^* = (AB)(B^*A^*)$. （1）

A,B **可逆** $\Rightarrow AB$ **可逆**. （2）

由（1）、（2）可知，$(AB)^* = B^*A^*$.

得 分

八（8 分）. 证明：如果 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 $a_1 d_4 > a_4{}^2$.

证明：

记给定的4阶正定矩阵为 A； $X = (x_1, x_2 x_3, x_4)^T$.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^T AX$ 是正定二次型；

进而 $f(x_1, 0, 0, x_4)$ 是正定二次型；

因此，$f(x_1, 0, 0, x_4)$ 的矩阵 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ d_1 & d_4 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵. （1）

A 正定 $\Rightarrow A$ 对称 $\Rightarrow a_4 = d_1$. （2）

由（1）、（2）可知，$|B| = a_1 d_4 - a_4 d_1 = a_1 d_4 - a_4{}^2 > 0$.