“概率论与数理统计”课程(工)模拟题

一、填空题（每空2分，共30分）

1\. 设 A,B 为事件，且 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$。当 A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ <u>0.5</u>；互斥时，$P(B)=$ <u>0.3</u>.

2\. 在区间 (0, 1) 中随机地抽取两个数 X 和 Y，则 $P(|X-Y|<0.5)=$ <u>0.75</u>.

3\. 设随机变量 X 服从 $[-2,2]$ 上均匀分布，则 $Y=X^2$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=$ <u>$0.25/\sqrt{y}$</u>（$0<y<4$）.

4\. 若 X 服从 $[0,1]$ 区间上均匀分布，记 $A=\{0.1\le X\le 0.3\}$，Y 表示对 X 进行 20 次独立观测后事件 A 发生的次数。则 $E(Y)=$ <u>4</u>，$Var(Y)=$ <u>3.2</u>.

5\. 设随机变量 X 可能取的三个值为 −2, 0 和 1，且 $P(X=-2)=0.4$，$P(X=0)=0.3$，则 $E(X)=$ <u>−0.5</u>，$Var(X)=$ <u>1.65</u>.

6\. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $2X-Y\sim$ <u>$N(0,8)$</u>.

7\. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

则 $\overline{X}\sim$ <u>$N(\mu,\sigma^2/n)$</u>，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ <u>t_{n-1}</u>，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ <u>χ^2_{n-1}</u>；

8\. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是抽自参数为 2 的泊松分布总体 X 的简单样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值与样本方差，求 $P\{X=E(2\overline{X}-S^2)\}=$ <u>$2e^{-2}$</u>。

9\. 设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的随机样本，且 $\overline{X}=5$，则未知参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[<u>4.51</u>，<u>5.49</u>]。（$Z_{0.025}=1.96$）

二、解答题（每小题 14 分，共 70 分）

注： 每题要有解题过程，无解题过程不能得分

1．一批同型号零件由编号为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的三台机器同时生产，各台机器生产零件零件数量分别占 35%，40%和 25%，次品率分别为 2.0%，2.5%和 1.6%。

(1)．求该批零件的次品率；

(2)．现从该批零件中抽到一件次品，求该次品由各台机器生产的概率。

解： 设 A ={零件是次品}，B_1={零件由Ⅰ号机器生产}，B_2={零件由Ⅱ号机器生产}，B_3={零件由Ⅲ号机器生产}。则

$$P(B_1)=0.35,\quad P(B_2)=0.40,\quad P(B_3)=0.25;$$
$$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.025,\quad P(A|B_3)=0.016.$$

(1)．由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\&=0.35\times0.02+0.40\times0.025+0.25\times0.016\\&=0.021;\end{aligned}$$

(2)．由贝叶斯公式，得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.35\times0.02}{0.021}=\frac{1}{3}\approx0.33333,$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.40\times0.025}{0.021}=\frac{10}{21}\approx0.47619,$$

$$P(B_3|A)=1-P(B_1|A)-P(B_2|A)=\frac{4}{21}\approx0.19048.$$

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

I

$$F(x)=\begin{cases} a-e^{-0.5x^2}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

其中 a 为常数。求：

(1). a 的值；(2). X 的概率密度函数 $f_X(x)$；(3). $Y=\sqrt{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$。

解 (1). 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=a=1$，得 $a=1$；

(2). 由 $f_X(x)=F'(x)$，得 $f_X(x)=\begin{cases} xe^{-0.5x^2}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0; \end{cases}$

(3). 记 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)$. 于是，当 $y>0$ 时，

$F_Y(y)=P(X\le y^2)=1-e^{-0.5y^4}$；当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(\Phi)=0$. 故 $f_Y(y)=\begin{cases} 2y^3e^{-0.5y^4}, & y\ge 0 \\ 0, & y<0. \end{cases}$

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy^2, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 求常数 c；(2). 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；(3). 计算 $E(XY)$。

解 (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x cy^2\mathrm{d}y=\frac{c}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{c}{12}$，得 $c=12$；

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases} \int_0^x 12y^2\mathrm{d}y, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} 4x^3, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

(3). $E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 12xy^3dy=3\int_0^1 x^5dx=0.5.$

4.（本题 14 分）设总体 X 有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\, e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体 X 中抽出的随机样本。求：

(1). λ 的矩估计； (2). λ 的极大似然估计。

解 (1). 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$。由 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx=\cdots=\frac{2}{\lambda}$。利用

$\overline{X}=E(X)$，得 $\overline{X}=\frac{2}{\hat{\lambda}}$。解该式，得 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$；

(2). 记 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\lambda^{2n}(\prod_{i=1}^n x_i)\,e^{-n\lambda\overline{x}}$ 为参数 λ 的似然函数。则

$$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n \ln x_i-n\lambda\overline{x},$$

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-n\overline{x}=0$，解得 $\tilde{\lambda}=\frac{2}{\overline{x}}$。 故 $\tilde{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$.

5. (本题 14 分) 假设某品牌日光灯的使用寿命(单位：小时)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验，测得寿命的平均值为 100.4，样本方差为 0.49。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，从样本看：

(1). 可否认为 $\mu=100$？

(2). 可否认为 $\sigma^2=0.5$？

解 $n=9$，$\alpha=0.05$, $\bar{x}=100.4$，$s^2=0.49$，$\mu_0=100$, $\sigma_0^2=0.5$。

(1). 因 $|\bar{x}-\mu_0|=|100.4-100|=0.4<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=\frac{0.7}{3}\times 2.306=0.538$，故接受原假设，即可认为“$\mu=100$”；

(2). 因 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times 0.49}{0.5}=7.84\in(2.180,\ 17.535)=(\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2),\chi_{n-1}^2(\alpha/2))$，故接受原假设，即可认为 $\sigma^2=0.5$。