

第四章 微分中值定理及导数应用

1、

设 $a > b > 0$, $n > 1$, 证明不等式:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$$

2、

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, \pi]$ 上连续, 在开区间 $(0, \pi)$ 内可导, 试证: 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得

$$f'(\xi) = -f(\xi)\cot\xi。$$

3、求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$$

4、求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}};$$

5、

设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f(1) = 0$,

证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

6、

证明方程 $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ 在 $(0, 1)$

内至少有一实根。 a, b, c 是常数。

7、

求函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ 的极值.

8、

求函数 $y = xe^x$ 的拐点及凹凸区间

9、

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3-e^x}{(\cos x - e^{x^2})\sin x}$

10、

求函数曲线 $\frac{e^x-1}{1+x}$ 的渐近线

11、

若 $a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 有 $f(a) = f(b) = 0, f'(a) < 0, f'(b) < 0$, 证明 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少 存在一个根。