# 北京工业大学 2013 —2014 学年第 二 学期

# 《概率论与数理统计》工 考试试卷

**考试说明： 考试方式：闭卷 考试时间：2014 年 6 月 11 日**

**承诺：**本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

**承诺人：__________ 学号：____________ 班号：__________**

**注：**本试卷共 六 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸或草稿纸。

**卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）**

| **题号** | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | **总成绩** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **得分** | | | | | | | |

**一．填空题：每空 2 分，共 30 分。**

1．设 $A,B$ 为随机事件，且 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$ 则 $P(\overline{AB})=$ 0.6 。

2．已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(B\mid A\cup\overline{B})$ = 1/4 。

3．设 A，B 为随机事件，则 A 与 B 互斥的充要条件是 $AB=\phi$。 ；

A 与 B 相互独立的充要条件是 P(AB)=P(A)P(B) 。

4．设 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，且 P{X=0}=1/2 ，则 $\lambda=\ln 2$； $E(X+3)=\ln 2+3$； $\mathrm{Var}(2X+1)=4\ln 2$。

5．设 $X\sim B(n,p)$，已知 $E(X)=1.6, Var(X)=1.28$，则 n = 8 ； p= 0.2 。

6．若 $X\sim N(1,\sigma^2)$，且 $P\{0<X<2\}=0.9544$，则 $P\{X<0\}=$ 0.0228 。

7．已知随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & x>0 \\ 0 & 其它\end{cases}$， 则 $Y=\ln X$ 的概率密度 $f_Y(y)=$ $f(x)=\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})} \quad -\infty<y<+\infty$

8. 若 $X_1,X_2,...,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\mu,\sigma^2$ 未知，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$。 则 $\bar{X}\sim$ $\underline{N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})}$；$(n-1)S^2/\sigma^2\sim\underline{\chi^2_{n-1}}$；$\mu$ 的置信度为$1-\alpha$ 的双侧置信区间为 $\underline{[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2),\ \ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)]}$； $\sigma^2$ 的置信度为$1-\alpha$ 的双侧置信区间为 $\underline{[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\ \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}]}$。

二.(14 分) 按以往概率统计考试结果分析，努力学习的学生有 90%的可能考试及格，不努力学习的学生有 90%的可能考试不及格。据调查，学生中有 80%的人是努力学习的。试问：（1）概率统计考试的及格率是多少?（2）考试及格的学生有多大可能是不努力学习的学生?

**解：** 设 $A$={被调查学生是努力学习的}，则 $\bar{A}$={被调查学生是不努力学习的}. 由题意知 $P$（$A$）=0.8，$P$（$\bar{A}$）=0.2，又设 $B$={被调查学生考试及格}. 由题意知 $P$（$B|A$）=0.9，$P$（$\bar{B}$ | $\bar{A}$）=0.9。

(1)应用全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(A)P(B|\bar{A})$$
$$=0.8\times0.9+0.2\times0.1=0.74$$

（2）应用 Bayes 公式：

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|\bar{A})}$$
$$=\frac{0.2\times0.1}{0.8\times0.9+0.2\times0.1}=\frac{1}{37}=0.02702$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.702%

三. （14 分）已知 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，求:

(1) $X$的分布函数 $F(x)$；(2) $P\left\{-2<X<\frac{1}{3}\right\}$ ；(3) $Y=2X^2+1$的概率密度 $f_Y(y)$。

解：由(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{x} & 0<x<1\\ 1 & x>1\end{cases}$ ；

(2) $P\left\{-2<X<\frac{1}{3}\right\}=F(\frac{1}{3})-F(-2)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；

（3）对 $y<1$ 有 $F_Y(y)=0$；

对 $y>1$ 有：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X^2+1\}=P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}<X<\sqrt{\frac{y-1}{2}}\}=F_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})$$

$$\therefore f_Y(y)=F_Y^{'}(y)=f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}})(\sqrt{\frac{y-1}{2}})'=\frac{1}{2^{\frac{9}{4}}(y-1)^{\frac{3}{4}}}\quad ;1<y<3$$ ；

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}2^{-\frac{9}{4}}(y-1)^{-\frac{3}{4}}，1<y<3\\ 0, \text{其它}\end{cases}$$

四．（14 分）设二维随机变量 $(X,Y)$ 有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}cy, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其 他}\end{cases}$$

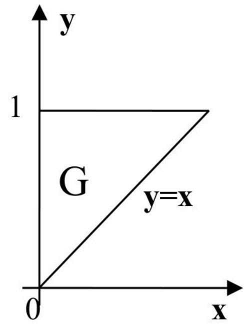
（1）求常数 $c$；（2）求 $X,Y$ 的边缘概率密度 $f_X(x),\ \ f_y(y)$；（3）判断 $X$ 与 $Y$ 是

否独立？（4）令 $Z=X+Y$，求 $Z$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

解： (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y c\cdot ydx=c\int_0^1 y^2dx=c/3$，

得 $c=3$；

(2) $\because$ 当 $0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_x^1 3ydy=\frac{3}{2}(1-x^2)$，其它情形 $f_X(x)=0$



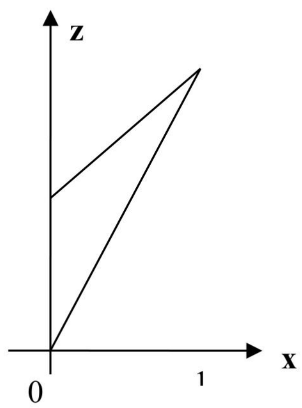

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2),\ 0<x<1\\ 0,\ 其它\end{cases}$$

$\because$ 当 $0<y<1$ 时 $f_Y(y)=\int_0^y 3ydx=3y^2$，其它情形 $f_Y(y)=0$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}3y^2,\quad 0<y<1\\ 0,\qquad 其它\end{cases}$$

(3) 有 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 从而 X 与 Y 不独立.

(4) 由卷积公式， $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\ (x,z-x)dx$




要被积式 $\neq 0$，有 $0<x<z-x<1$ 即 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 2x<z<1+x\end{cases}$

当 $0<z\le 1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{z/2}3(z-x)dx=\frac{9}{8}z^2$

当 $1<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z/2}3(z-x)dx=\frac{3}{2}-\frac{3z^2}{8}$

从而
$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{9}{8}z^2,\quad 0<z\le 1\\ \frac{3}{2}-\frac{3}{8}z^2,\quad 1<z<2\\ 0，其它\end{cases}$$

五. （14 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的样本，总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta^2\ x\ \ e^{-\theta\ x} & 当 x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$$，其中未知参数 $\theta$>0，

求：（1）$\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）$\theta$ 的极大似然估计量 $\theta^*$。

解:　(注: 请将以下解答中的$\beta$换成$\theta$.)

3. (本题 14 分) 设总体 $X$ 具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\beta^2xe^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1). 求 $\beta$ 的矩估计; (2). 求 $\beta$ 的极大似然估计.

解: (1). 由 $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}\beta^2x^2e^{-\beta x}dx=\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty}y^2e^{-y}dy=\frac{2}{\beta}$ 及 $EX=\overline{X}$, 得 $\hat{\beta}=\frac{2}{\overline{X}}$.

(2). 建立似然函数

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\prod_{i=1}^{n}\beta^2x_ie^{-\beta x_i}=\beta^{2n}\Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)e^{-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

取其对数, 得对数似然函数

$$\ln L(\beta)=2n\ln\beta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

对对数似然函数求导, 并令其等于零, 得

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta}=\frac{2n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

从而, 得 $\beta^*=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\overline{X}}$.

六. （14 分）检验某批矿砂中的含镍量，随机抽取 7 份样品，测得含镍量百分比分别为：3.69，2.67，3.33，3.69，3.01，3.98，3.15。假设这批矿砂中的含镍量的百分比服从正态分布，在显著性水平$\alpha=0.05$下

（1）检验这批矿砂中的含镍量百分比是否为3.25？；

（2）检验这批矿砂含镍量百分比的方差是否小于 0.2?

**附表：**$t$分布的分位点表：

$t_6(0.05)=1.9432$　$t_6(0.025)=2.4469$　$t_7(0.05)=1.8946$　$t_7(0.025)=2.3646$

$\chi^2$分布的分位点表：

$\chi_6^2(0.05)=12.592$　$\chi_6^2(0.025)=14.449$　$\chi_7^2(0.05)=14.067$　$\chi_7^2(0.025)=16.013$

解：(1)　$H_0:\mu=3.25$　$H_1:\mu\neq 3.25$

当$H_0$成立时，………，故拒绝域为 ……… (写出此步,后边算错数也能得分,强烈建议写全!)

由样本值得$\bar{x}=3.36, S^2=0.2076$，从而

$$t=\left|\frac{\bar{X}-3.25}{S/\sqrt{n}}\right|=0.6386$$

对$\alpha=0.05$，查$t-$分布上分位数表得$t_6(0.25)=2.4469$，由于$t<t_6(0.025)$，故接受假设，即这批矿砂中的含镍量百分比是3.25。

(2)　$H_0:\sigma^2<0.2$　$H_1:\sigma^2\geq 0.2$，

**由……,拒绝域是…….　　(写出此步,后边算错数也能得分,强烈建议写全!)**

计算得 $\chi^2=\left|\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right|=\left|\frac{6\times 0.2076}{0.2}\right|=6.22$

对$\alpha=0.05$，查$\chi^2$分布上侧分位数表得$\chi_6^2(0.05)=14.449$，由于$\chi^2<\chi_6^2(0.05)$，故接受假设$\sigma^2<0.2$，即这批矿砂含镍量百分比的方差小于 0.2。