得 分

一. 填空题(每小题 3 分, 共 30 分. 注意: 所有题目需给出计算结果; "$a=a$" 型答案失分; "或者 a, 或者 b" 型答案失分)

1. 若记 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的第一列三个位置（从上到下）的代数余子式分别为

A_{11}, A_{21}, A_{31}，则 $A_{11}+A_{21}+9A_{31}=$____________

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的迹 $trA^{-1}=$____________

3. A 是6阶非零实矩阵，$R(A)=R(A^*)$，则 $A^*X=0$ 的解空间的维数是____

4. 若 $-1,3,3,-3,-2,5$ 是6阶实方阵 A 的特征值，而且 A 不能相似对角化，则

$A-3E$ 的秩 $R(A-3E)=$____________

5. A 是2阶实方阵. 若齐次线性方程组 $(A+3E)X=0$ 和 $(E-2A)X=0$ 均有非

零解，则行列式 $\left|2A^*-A^{-1}+6E\right|=$____________

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & -6 & 10 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

7. 若 A 是3阶实方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的3维实列向量，满足

$A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3, A\alpha_2=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3, A\alpha_3=3\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，

则 A 的负特征值是____________

8. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 由正交矩阵可知，$A^{-1}=$ ____________

9. 若2,3是实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_1 & b_2\\ a_3 & b_2 & c\end{pmatrix}$ 的两个特征值，$\alpha=(-2,1+t,6)^T$、

$\beta=(t,1,-1)^T$ 是分别属于2,3的特征向量，则 $t=$ __________

10. 实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_1 & b_2\\ a_3 & b_2 & c\end{pmatrix}$ 满足 $A^{11}-A^6-A^2+6A-5E=0$，则行列式

$|A+5E|$ _______ 123（填 $>,=,<$ 之一）.

得 分

二（12分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & -3 & 6 & -6 & 9\\ 2 & 1 & 0 & -1 & 5\\ 1 & 3 & 9 & 3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

得 分

三（12分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

得 分

四（12） a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=a\\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=-1\\ x_1+4x_2+5x_3+8x_4=2\end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

得分

五（12分） 已知$A=\begin{pmatrix}1&9&9\\9&1&9\\9&9&1\end{pmatrix}$．求一个可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$是对角矩阵；并求出这一对角矩阵．

得分

六（12分） 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,1,1,-1)^T,\alpha_2=(1,0,2,-1)^T,$$
$$\alpha_3=(1,-1,1,3)^T,\alpha_4=(0,1,1,2)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题2中求出的极大线性无关组线性表出．

得分

七（5分）已知： n 阶实方阵 A 满足 $A^2+2A=3E$．

证明：$R(A-E)+R(A+3E)=n$ ．

得分

八(5分)．已知：实矩阵$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$ 满足 $a>0,\ \begin{vmatrix}a&b\\b&d\end{vmatrix}>0,\ |A|>0$．

证明：$B=\begin{pmatrix}f&c&e\\c&a&b\\e&b&d\end{pmatrix}$的特征值都大于0 ．