1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{x})}{x^{2}}=$ ______ 0 ______________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0\\ a+x^{2}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ __1______.

3. 曲线 $y=\dfrac{1}{x+1}e^{-x^{2}}$ 的铅直渐近线为 ____ $x=-1$ ___________.

4. 设 $f'(1)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=$ _______ 2 ________________.

5. 设 $y=\int_{0}^{x^{2}}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}y=$ _____ $\dfrac{2\sin x^{2}}{x}\mathrm{d}x$ __________.

6. 曲线 $\begin{cases}x=\cos^{3}t\\ y=\sin^{3}t\end{cases}$ 过对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 的点 P 的法线方程为______ $y=\sqrt{3}x-1$ ______.

7. 设 $y=f(x)$ 由方程 $x^{3}+y^{3}-\sin x+6y=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______ $\dfrac{1}{6}$ __________.

8. 曲线 $y=\ln(1+x^{2})$ 在区间_______ $[-1,1]$ ___________上是凹的.

9. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1+x^{3}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=$ ____ $\dfrac{\pi}{2}$ ________________.

10. $\int_{1}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{2}}\mathrm{d}x=$ ______1_______.

11. 设 $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^{x}}$，求（1） $f'(x),f''(x)$；（2） $f(x)$ 带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式;（3） $f^{(2021)}(0)$.

解：（1） $f'(x)=3e^{-x}-(3x+1)e^{-x}$,

$f''(x)=-6e^{-x}+(3x+1)e^{-x}$.

（2） $f(x)=1+2x-\dfrac{5}{2}x^{2}+\dfrac{4}{3}x^{3}+o(x^{3})$,

（3） $f^{(2021)}(0)=6062$.

12. 计算不定积分 $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解： $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^{2}\arctan\sqrt{x}-\dfrac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{x}+C$

13. 计算$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x$.

解： $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$

14. 求函数$f(x)=x^2\ln x$的极值.

解： 在$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$取得极小值，极小值$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

15.记曲线段$x^2+y^2=4\left(y\geq 0, 0\leq x\leq 1\right)$与直线$x=0, x=1$及$x$轴所围的图形为$D$,

（1）求平面图形D的面积；（2）求图形D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） D的面积$S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）图形D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积$V=\frac{16}{3}\pi-2\sqrt{3}\pi$.

16. 设$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x\leq 0 \\ 0, & 0<x\leq e \\ \frac{A}{x(2\ln x+\ln^2 x)}, & x>e \end{cases}$

(1) 求函数$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$在$(-\infty, +\infty)$内的表达式；

(2) 设$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = A$，试确定$A$的值.

解：(1) $x\leq 0$时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{e^x}{2}$,

$0<x\leq e$时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$,

$x>e$时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}$.

（2） $A=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \;=\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}$，$A=\frac{1}{2-\ln 3}$.

17. 当 $x>4$ 时, 证明: $2^x>x^2$.

证明：设 $f(x)=2^x-x^2$， 用单调性即可

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=x^3f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导,

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，

由零点定理，$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=0$，

所以 $F(0)=F(\eta)=0$，

由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.