期中考试题

1. ⑴用$\varepsilon-\delta$语言给出$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$的定义。

⑵用定义证明$(i)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{3n^2}=-\frac{2}{3}$. $(ii)\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-2}=\frac{1}{2}$.

2. 求极限(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\sqrt{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+6x+5}}{3x-2}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$。

3. 设$0<x_0\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}, n=1,2\cdots$, 证明$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

4. 设$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, 讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性。

5. 若$f(1)=0$,且$f'(1)$存在, 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(sin^2x+cosx)}{(e^x-1)tanx}$.

6. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$, 试确定常数$a,b$使$f(x)$处处可导, 并求$f'(x)$.

7. 证明：$f(x)=\cos\frac{1}{x}$在$(0,1]$上不一致连续, 在$[1,+\infty)$上一致连续。

8. 证明$ax^3+bx^2+cx+d=0$至少有一个实根。

9. 设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续, $g(x)$在$[a,+\infty)$上连续, 且有$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$, 证明$g(x)$在$[a,+\infty)$上也是一致连续。