

## 2023-2024-2 工科数学分析期中试题解答 (A 卷)

### 一、选择题(每小题 4 分, 共 20 分)

1. 已知二元函数  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ , 下面命题正确的是 ( C ).

(1)  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ ; (2)  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在;

(3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ ; (4)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  不存在.

A. (1) (3); B. (2) (3); C. (1) (4); D. (2) (4).

2. 已知集合  $E = \{(x, y, z) | x + y + z \neq 0\}$ , 下面命题正确的是 ( C ).

(1) 集合  $E$  是开集; (2) 集合  $E$  是闭集; (3) 集合  $E$  是有界集;

(4) 集合  $E$  是区域; (5) 集合  $E$  的导集  $E' = R^3$ .

A. (1) (3); B. (2) (3) (4); C. (1) (5); D. (2) (4) (5).

3. 下列论断正确的是 ( D ).

A. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处两个偏导数都存在, 则其在此点处可微;

B. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则其在此点处两个偏导数都连续;

C. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处连续, 则其在此点处两个偏导数都存在;

D. 函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处可微, 则其在此点处沿任意方向的方向导数都存在.

4. 设  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ , 则此函数的梯度为  $(0, 0)$  的点为 ( A ).

A.  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$ ; B.  $(0, 0)$  和  $(-1, -1)$ ;

C.  $(1, 1)$  和  $(-1, -1)$ ; D. 这样的点不存在.

5. 下列级数收敛的一组是 ( D ).

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n}{n+1}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n}$ ; (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ ; (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ .

A. (2) (3); B. (1) (4); C. (2) (4); D. (3) (4).

### 二、计算题(每小题 5 分, 共 30 分)

1. 讨论函数列  $f_n(x) = \frac{n+x^2}{n+x}$  在区间  $(0, +\infty)$  上的一致收敛性.

解:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 1$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 - x}{n+x} \right|$$

取  $x_n = n$ , 则  $\beta_n \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \frac{n-1}{2} > \frac{1}{2}$  (当  $n > 2$  时), 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \neq 0$

函数列非一致收敛

2. 将函数  $f(x) = 1 - x^2$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 展成余弦级数.

解: 将函数进行偶延拓, 则  $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) dx = 2(1 - \frac{\pi^2}{3})$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1-x^2) \left( \frac{\sin nx}{n} \right)' dx = \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \left( \frac{\cos nx}{n} \right)' dx = -\frac{4}{n^2} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2}$$

$$\text{故 } f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n^2} \cos nx, -\pi \leq x \leq \pi$$

3. 设  $z = f(x+y, e^{xy})$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $z_{xy}$ .

解: 对  $x$  求偏导:  $z_x = f_1 + f_2 e^{xy} y$ ,

$$\begin{aligned} \text{上式对 } y \text{ 求偏导: } z_{xy} &= f_{11} + f_{12} e^{xy} x + (f_{21} + f_{22} e^{xy} x) e^{xy} y + f_2 e^{xy} (1+xy) \\ &= f_{11} + f_{12} e^{xy} (x+y) + f_{22} e^{2xy} xy + f_2 e^{xy} (1+xy) \end{aligned}$$

4. 求曲面  $z = \sqrt{3x^2 + y^2}$  与曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$  的交线在点  $(1, -1, 2)$  处的切线方程.

解: 交线方程为  $\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$  其中  $y(x), z(x)$  由隐函数组  $\begin{cases} z = \sqrt{3x^2 + y^2}, \\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, \end{cases}$  确定

对隐函数组两边关于  $x$  求导得:

$$\begin{cases} zz_x = 3x + yy_x, \\ 2x + 3yy_x + zz_x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_x = \frac{7x}{4z} \\ y_x = -\frac{5x}{4y} \end{cases} \Rightarrow \text{在切点处} \begin{cases} z_x = \frac{7}{8} \\ y_x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

故切向量为  $(1, \frac{5}{4}, \frac{7}{8})$

$$\text{切线方程为 } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{\frac{5}{4}} = \frac{z-2}{\frac{7}{8}}$$

5. 求函数  $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2 + 1$  的极值.

$$\text{解: } \begin{cases} f_x = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ f_y = 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点}(0, 0), (2, 2)$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x - 8 \\ f_{xy} = 2 \\ f_{yy} = -2 \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  点,  $AC - B^2 = 12 > 0$ , 且  $A < 0$ , 故为极大值点, 极大值为 1

在  $(2, 2)$  点,  $AC - B^2 = -12 < 0$ , 故非极值点

6. 求函数  $f(x, y) = \ln(1+2x) \sin \frac{y}{2}$  在  $(0, 0)$  处的带 Peano 余项的 3 阶 Taylor 公式.

$$\text{解: } \ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin \frac{y}{2} = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(y^3), \text{ 记 } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{故 } f(x, y) = \left(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)\right) \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(y^3)\right) = xy - x^2y + o(\rho^3)$$

三. (10 分) 讨论数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^2}$  ( $a > 0$ ) 的敛散性.

解: (1) 当  $0 < a < 1$  时,  $\ln(1+a^n) \sim a^n (n \rightarrow \infty)$ , 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}} = a < 1$ , 所以级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^2}$  收敛.

(2) 当  $a=1$  时, 原级数变为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^2}$ , 故收敛.

(3) 当  $a > 1$  时,  $\ln(1+a^n) > n \ln a$ , 从而  $\frac{\ln(1+a^n)}{n^2} > \frac{\ln a}{n}$ , 易知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln a}{n}$  发散,

由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^2}$  发散。

四、(10 分) 讨论数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \ln n}{n} \cos \frac{2n}{n^2+1}$  的敛散性, 若收敛, 判别其是绝对收敛还是条件收敛.

证明: (第一部分收敛性)

因为  $\left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$ , 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  的部分和有界,

又  $\{\frac{\ln n}{n}\}$  单调递减, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ , 由 Dirichlet 判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \ln n}{n}$  收敛.

又因为  $\cos \frac{2n}{n^2+1}$  单调且有界, 再由 Abel 判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \ln n}{n} \cos \frac{2n}{n^2+1}$  收敛.

(第二部分不绝对收敛), 由于

$$\left| \frac{\sin n \cdot \ln n}{n} \cos \frac{2n}{n^2+1} \right| \geq \cos 1 \cdot \frac{\sin^2 n \cdot \ln n}{n} = \cos 1 \cdot \frac{\ln n - \cos(2n) \ln n}{2n}$$

同样由 Dirichlet 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n) \ln n}{2n}$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n}$  发散,

由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n \cdot \ln n}{n} \cos \frac{2n}{n^2+1} \right|$  发散, 从而原级数条件收敛.

五、(10 分) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$  的收敛域及和函数, 并计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)2^n}$  的和.

证明: 法一: 令  $y = x^2$ , 则原级数变为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(2n-1)}$ , 取  $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$ , 则新级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(2n-1)}$  的收敛半径为

$$R_y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1, \text{ 故 } |x^2| \leq 1, \text{ 即 } |x| \leq 1, \text{ 所以 } R_x = 1.$$

法二: 取  $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(2n-1)}} = 1$ , 所以收敛半径  $R = 1$ .

当  $x = \pm 1$  时, 易知数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$  收敛.

所以幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$  的收敛域是  $[-1, 1]$ .

令  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ , 则我们有当  $x \neq \pm 1$  时,

$$\begin{aligned}
S(x) &= 2 \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} dt = 2 \int_0^x \left[ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} u^{2n-2} du \right] dt = 2 \int_0^x \left[ \int_0^t \frac{1}{1-u^2} du \right] dt \\
&= \int_0^x \left[ \int_0^t \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \right] dt = \int_0^x [\ln(1+t) - \ln(1-t)] dt \\
&= (x+1) \ln(1+x) + (1-x) \ln(1-x) \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)2^n} &= S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

六. (10 分) 证明函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{x}{n^2+x^2} + \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} \right]$  在  $[-1,1]$  上一致收敛, 且它的和函数在  $[-1,1]$  上是连续的。

证明: 法一: 因为  $\left| \frac{x}{n^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , 由 Weierstrass 判别法知,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$  在  $[-1,1]$  上一致收敛。

对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$ , 令  $a_n(x) = (-1)^n$ ,  $b_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  的部分和一致有界。对于固定的  $x \in [-1,1]$ ,  $\{b_n(x)\}_n$  单调下降数列, 且  $0 \leq b_n(x) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  当  $n \rightarrow \infty$ , 即  $b_n(x)$  一致收敛于 0, 故由 Dirichlet 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$  在  $[-1,1]$  上一致收敛, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{x}{n^2+x^2} + \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} \right]$  在  $[-1,1]$  上一致收敛。

因为  $\frac{x}{n^2+x^2} + \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2}$  在  $[-1,1]$  上连续, 从而和函数在  $[-1,1]$  上连续。

法二:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{x}{n^2+x^2} + \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} \left[ \frac{x}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} \right]$ , 对于取定的  $x \in [-1,1]$ ,  $\frac{n^2}{n^2+x^2}$  是单调递增数列且一致有界, 即  $\left| \frac{n^2}{n^2+x^2} \right| \leq 1$ , 而易知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  在  $[-1,1]$  上都是一致收敛的, 故由 Abel 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{x}{n^2+x^2} + \frac{n(-1)^n}{n^2+x^2} \right]$  在  $[-1,1]$  上一致收敛。从而和函数在  $[-1,1]$  上连续。

七. (10 分) 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$  在  $(0,0)$  处的连续性、偏导数的存在性与可微性。

证明: 法一: 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 根据不等式  $|f(x, y)| \leq \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = |r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)| \leq 2|r| \rightarrow 0$  当  $r \rightarrow 0$ , 即  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$ . 所以

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

$f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续。

法二：对任意的  $(x, y) \neq (0, 0)$  时， $|f(x, y)| \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |x| + |y|$ ，从而有夹逼定理知， $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ 。即  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续。

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x^3)}{\Delta x^3} = 1,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta y^3)}{\Delta y^3} = 1.$$

$$\text{记 } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} = \frac{\sin(x^3 + y^3) - (x + y)(x^2 + y^2)}{\rho^3},$$

则当沿着  $y = kx$  且  $x \rightarrow 0$  时，

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} = \frac{\sin((1+k^3)x^3) - (1+k)(1+k^2)x^3}{(1+k^2)^{3/2}x^3} \rightarrow \frac{1+k^3 - (1+k)(1+k^2)}{(1+k^2)^{3/2}},$$

$$\text{即 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} \text{ 不存在，从而 } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} \neq 0,$$

所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不可微。