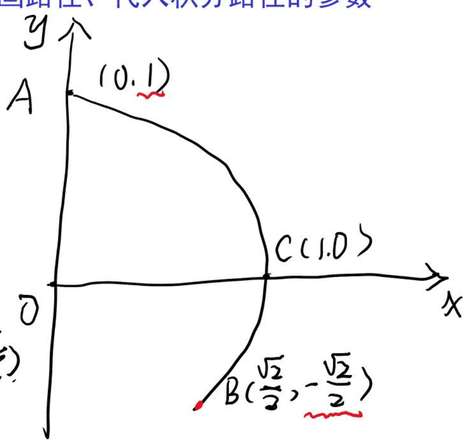
1.设L是从$A(0,1)$沿圆周$x^2+y^2=1$到$B(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$的一段劣弧，则$\int_L x\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$?

目的：考察第一型(对弧长)曲线积分的计算,平面曲线积分，具体步骤为：画路径、代入积分路径的参数表达式，写成全微分形式并计算。



解：方法一：选y作参数，则$\widehat{AB}: x=\sqrt{1-y^2},\ y=y,\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1)$

则$ds=\sqrt{[x'(y)]^2+1}\,dy=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy$，及$x^2+y^2=1$，代入被积式，得：

$$\int_{\widehat{AB}} xe^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,e\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=e\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})e.$$

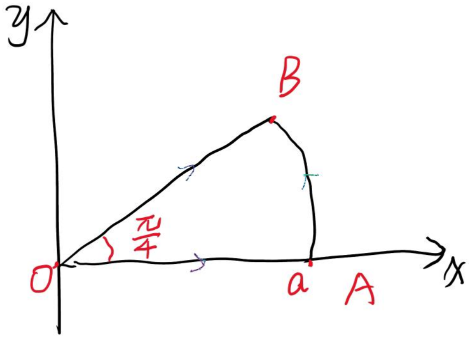
方法二：选圆心角θ为参数，$\widehat{AB}: x=\cos\theta,\ y=\sin\theta,\ (-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

$ds=\sqrt{x_\theta'^2+y_\theta'^2}\,d\theta=d\theta$,

故$\int_{\widehat{AB}} xe^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot e\cdot d\theta=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})e.$

2. 计算对弧长的曲线积分$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线$y=x$及$x$轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界。

目的：考察第一型（对弧长）曲线积分的计算，平面曲线积分，具体步骤为：画路径、代入积分路径的参数表达式，写成全微分形式。



解：曲线L如图所示

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{\overline{OA}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{\overset{\frown}{AB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{\overline{OB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds;$$

L由线段$\overline{OA}$：$y=0$，$(0\le x\le a)$，

圆弧$\overset{\frown}{AB}$：$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$，$(0\le\theta\le\frac{\pi}{4})$

和线段$\overline{OB}$：$y=x$，$(0\le x\le\frac{a}{\sqrt{2}})$ 所组成.

$$\int_{\overline{OA}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x\cdot dx=e^a-1.$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\cdot\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2}\,d\theta=a\cdot e^a\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}a\cdot e^a.$$

$y=x$，

$ds=\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=\sqrt{2}dx$.

$$\int_{\overline{OB}}e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{1+1^2}\,dx=e^a-1.$$

$$\therefore \text{原式}=e^a-1+\frac{\pi}{4}a\cdot e^a+e^a-1=e^a(2+\frac{\pi a}{4})-2.$$

3. 计算曲线积分$\oint_{\Gamma}(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$,其中Γ是曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$从$Z$轴正向看去，Γ取顺时针方向。目的：考察第二型(对坐标)曲线积分的计算，空间曲线积分。

解：首先将Γ化为参数方程 $x=\cos t$, $y=\sin t$, 再由 $z=2-x+y$ 得 $z=2-\cos t+\sin t$,

其中 $2\pi\le t\le 0$. $t:2\pi\to 0$.

于是：原式 $=\int_{2\pi}^{0}[(2-\cos t)(-\sin t)+(2\cos t-2-\sin t)\cos t+(\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)]dt$

$=\int_{2\pi}^{0}[-2\sin t+\cancel{\cos t\cdot\sin t}+\underbrace{2\cos^2 t}_{1+\cos 2t}-2\cos t-\cancel{\sin t\cdot\cos t}+\underbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}_{\cos 2t}]dt$

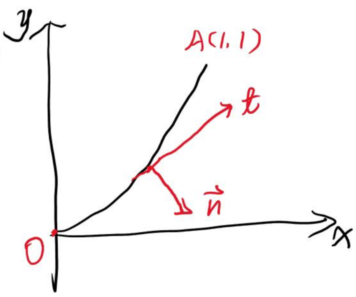
$=\int_{2\pi}^{0}[-2\sin t-2\cos t+2\cos 2t+1]dt$

$=-2\pi$

4. 设$u(x,y)=x^2-xy+y^2$, L为抛物线$y=x^2$自原点至点$A(1,1)$的有向弧段，$\boldsymbol{n}$为L的切向量顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$角所得的法向量，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$为函数u沿法向量$\boldsymbol{n}$的方向导数，计算$\int_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} ds$.

目的：考察两类曲线积分的转化。

解：设L的单位切向量 $\vec{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得单位法向量 $\vec{n}=(\cos\beta,-\cos\alpha)$，由于 $dx=ds\cos\alpha$，$dy=ds\cos\beta$，



$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=x; \ 0\le x\le 1, \end{cases}$$

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot \vec{n}\cdot ds = \int_L \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot(\underbrace{ds\cos\beta}_{dy}, \underbrace{-ds\cos\alpha}_{-dx})$$

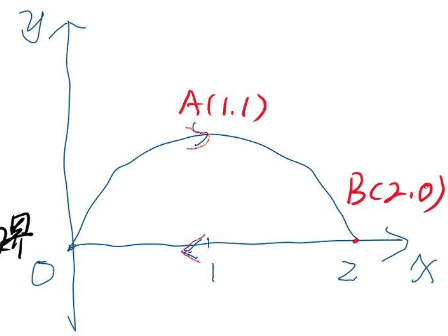
$$= \int_L -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \int_L (x-2y)dx + (2x-y)dy$$

$$= \int_0^1 [(x-2x^2)+(2x-x^2)\cdot 2x] ds$$

$$= \int_0^1 (-2x^3+2x^2+x)dx = \frac{2}{3}.$$

5. 计算曲线积分$\int_L ydx + xdy$，其中积分路径L为从$O(0,0)$经$A(1,1)$到$B(2,0)$的$x^2 + y^2 = 2x$的上半圆弧.

目的：考察第二型（对坐标）曲线积分的计算，平面曲线积分，格林公式、对坐标的曲线积分与积分路径无关和全微分准则。



解：方法一：利用格林公式：$L=\overset{\frown}{OB}$

$$\oint_L Pdx+Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

加直线$\overline{BO}$，则：

$$\int_{\underset{L}{\overset{\frown}{OB}}} = \oint_{\underset{L}{\overset{\frown}{OB}}+\overline{BO}} - \int_{\overline{BO}}$$

补线$\overline{BO}$：$y=0$，$x:2\to 0$. 则封闭曲线$L+\overline{BO}$构成平面区域D的边界负向，其中：$D:\begin{cases}x^2+y^2\le 2x,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 利用格林公式，有：

$$\int_L ydx+xdy = \oint_{L+\overline{BO}} \underbrace{y}_{P}dx+\underbrace{x}_{Q}dy - \int_{\overline{BO}} ydx+xdy = -\iint_D (1-1)d\sigma - \int_2^0 0\cdot dx = 0.$$

方法二：利用对坐标的曲线积分与积分路径无关的条件进行计算.

记$P=P(x,y)=y$，$Q=Q(x,y)=x$. 因为P、Q有连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$. 所以积分与路径无关，

因此，选取便于积分的路径. $OB: y=0$，$x: 0\to 2$.

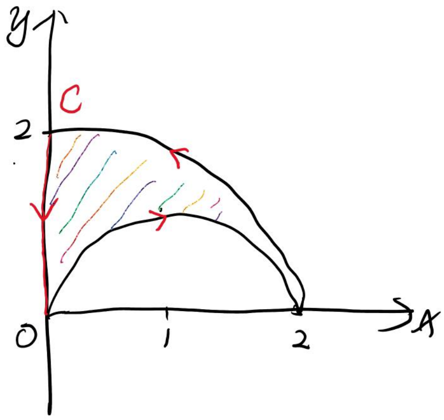
$$\int_L ydx+xdy = \int_{OB} ydx+xdy = \int_0^2 0\cdot dx = 0.$$

方法三：利用全微分准则.

所以$ydx+xdy$是某个函数的全微分. 即

$$\int_L ydx+xdy = \int_{O(0,0)}^{B(2,0)} d(xy) = xy\Big|_{(0,0)}^{(2,0)} = 0$$

6. 已知L是第一象限中从点(0,0)沿圆周$x^2+y^2=2x$到点(2,0)，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点(0,2)的曲线段，计算曲线积分$I=\int_L 3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)dy$.



目的：考察间接用格林公式计算第二类曲线积分，加辅助线由不封闭到封闭。

解：设圆$(x-1)^2+y^2=1$为圆C_1，圆$x^2+y^2=4$为圆C_2，

所补直线运用格林公式即可求得.

设所补直线$\overline{CO}$为：$x=0$，$y:2\to 0$.

如图所示运用格林公式得：

原式$=\oint_{L+\overline{CO}}\underbrace{3x^2y}_{P}dx+\underbrace{(x^3-x-2y)}_{Q}dy+\int_{\overline{CO}}3x^2y\,dx+(x^3+x-2y)dy$

$=\iint_D(3x^2-1-3x^2)dxdy-\int_2^0 -2y\,dy$

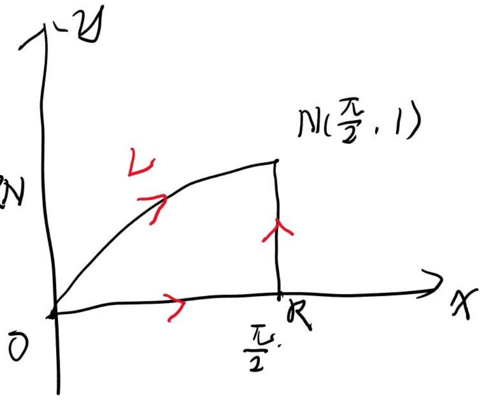
$S=\pi r^2$（r为半径）

$=\frac{1}{4}S_{C_2}-\frac{1}{2}S_{C_1}-4$

$=\frac{1}{4}\times\pi\times4-\frac{1}{2}\times\pi\times1-4=\frac{\pi}{2}-4$

7. 利用格林公式计算曲线积分 $\int_L \underbrace{\left(2xy^3 - y^2\cos x\right)}_{P}dx + \underbrace{\left(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2\right)}_{Q}dy$，其中$L$为在抛物线$2x = \pi y^2$上由点$(0,0)$到$(\frac{\pi}{2}, 1)$的一段弧。

目的：考察平面上的曲线积分与积分路径无关。P, Q 在xoy平面内具有一阶偏导数



解：由于 $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$，

故所给曲线积分与路径无关，于是将原路径L改变为折线ORN

$O(0,0)$, $R(\frac{\pi}{2}, 0)$, $N(\frac{\pi}{2}, 1)$. 如图所示：

$\overline{OR}$：$y=0$, $x: 0 \to \frac{\pi}{2}$,

$\overline{RN}$：$x = \frac{\pi}{2}$, $y: 0 \to 1$,

$$\int_L = \int_{\overline{OR}} + \int_{\overline{RN}}$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left(1 - 2y\sin\frac{\pi}{2} + 3\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y^2\right)dy = \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2 y^2\right)dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

8. 设曲线积分$\int_L yf(x)dx+\left[2xf(x)-x^2\right]dy$在右半平面$(x>0)$内与路径无关，其中$f(x)$,可导，且$f(1)=1$，求$f(x)$.

目的：考察曲线积分与路径无关，求解一阶线性非齐次微分方程的常数变异法。

解：∵当$x>0$时，所给积分与路径无关，

∴ $\frac{\partial}{\partial y}[\underbrace{yf(x)}_{P}]=\frac{\partial}{\partial x}[\underbrace{2xf(x)-x^2}_{Q}]$ 即：$f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x$.

整理：$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1$.

$\frac{dy}{dx}+\quad P(x)y=Q(x)$

解微分方程得：$f(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}\cdot\left(C+\int e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx\right)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}\left(C+\int e^{\frac{1}{2}\ln x}dx\right)$

$=x^{-\frac{1}{2}}\left(\int x^{\frac{1}{2}}dx+C\right)=x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\right)=\frac{2}{3}x+Cx^{-\frac{1}{2}}$.

由$f(1)=1$，$C=\frac{1}{3}$，　　故：$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}$

9. 判别方程$\underbrace{e^y}_{P}dx+\underbrace{(xe^y-2y)}_{Q}dy=0$是否为全微分方程，对于全微分方程，求出它的通解。目的：考察平面上曲线积分与路径无关的条件，凑微分方法求通解。

解：$\frac{\partial P}{\partial y}=(e^y)'_y=e^y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=(xe^y-2y)'_x=e^y$.

因 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故原方程是全微分方程，下面，

方程的左端$=\underbrace{(e^y dx+x\cdot e^y dy)}-2ydy=d(xe^y)-d(y^2)=d(xe^y-y^2)$.

即原方程为 $d(xe^y-y^2)=0$.

故所求通解：$xe^y-y^2=C$，

10. 设$Pdx+Qdy=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$, 求$u(x,y)$, 得$du(x,y)=Pdx+Qdy$.

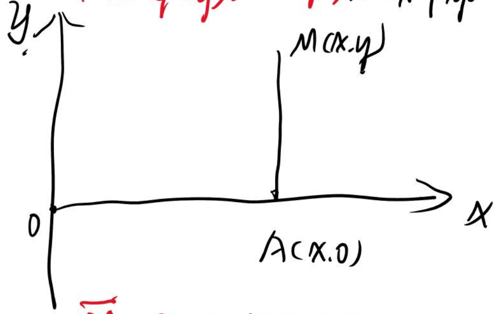
目的：考察格林公式及其应用小节，全微分求积分问题，具体为不定积分法、~~特殊积分路径~~法(积分与路径~~无关~~)、凑微分法。

解：方法一：不定积分法.

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2+2xy-y^2$ 积分得：$u=\int(x^2+2xy-y^2)dx+\varphi(y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2+\varphi(y)$.

对y求导 $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2-2xy+\varphi'(y)=Q=x^2-2xy-y^2$. 所以 $\varphi'(y)=-y^2$，从而 $\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+C$.

故 $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.



方法二：特殊路径积分法.

因 $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以积分在平面上与路径无关，

取折线 OAM, 其中 O(0,0), A(x,0), M(x,y) 则

$\overline{OA}$: $y=0$, $x:0\to x$

$\overline{AM}$: $x=x$, $y:0\to y$.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy=\int_{OA}Pdx+Qdy+\int_{AB}Pdx+Qdy$$

$$=\int_0^x x^2dx+\int_0^y(x^2-2x-y^2)dy=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3$$，这是一个原函数.

∴全体原函数为 $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.

方法三 凑微分法

$$(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=x^2dx+(2xydx+x^2dy)-(y^2dx+2xydy)-y^2dy$$

$$=\frac{1}{3}dx^3+d(x^2y)-d(xy^2)-\frac{1}{3}dy^3=d\left(\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3\right)$$

所以原函数为 $u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.