一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解为______.

2．已知函数 $u = x^{\frac{y}{z}}$，则 $du\big|_{(2,1,1)} =$ ______________________________.

3．函数 $u(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\big|_M =$ ________

4．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散？ ________________.

5．函数 $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ 展开成麦克劳林级数为__________________.

6．椭圆抛物面 $z = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1$ 的平行与平面 $2x + y + z = 0$ 的切平面方程

为______.

7. 已知曲线 $L: y = x^2\ (0 \le x \le \sqrt{2})$，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}s =$__________________.

8. 已知积分区域 D 为 $x^2 + y^2 \le 4$，则 $\iint\limits_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2})\,dxdy =$ ______________.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x \le 0 \\ 2 + x^2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数，其傅立叶级数的和函数

记为 $S(x)$，则 $S(11\pi) =$ __________________.

10. 设 Σ 为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限部分，则 $\iint\limits_\Sigma (3z + 6x + 4y)\mathrm{dS} =$ ____________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求函数 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在条件 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 下的最值.

12. 计算$I=\int\limits_{L}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 其中$L$是抛物线

$2x=\pi y^2$上由点$(0, 0)$到点$(\dfrac{\pi}{2}, 1)$的一段弧.

13. 计算二次积分$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$.

14. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+(z+1)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

的上侧.

15. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

16. 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $y=\varphi(x+\lambda t)+\psi(x-\lambda t)$, 其中 φ,ψ 是任意的二次可导函数, 求证:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\lambda^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

证明：

18.设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数，证明：

(1)此方程存在唯一的正实根 x_0；(2)当常数 $\lambda>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_0^{\lambda}$ 收敛.