北京工业大学 2022—2023 学年第 一 学期

《复变函数与积分变换》 期末考试试卷 A 卷

考试说明: **考试日期: 2022 年 12 月 18 日, 考试时间: 95 分钟, 闭卷, 不可使用计算器. 解答题与证明题须给出必要的步骤, 否则不得分; 试卷中 i 表示虚数单位.**

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人: ____________ **学号:** ____________ **班号:** ____________

注: 本试卷共 四 大题，共 六 页，满分 100 分，考试时只可使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	60	16	18	6	
得分					

得 分

一、单项选择题(本大题共 20 小题, 每小题 3 分, 共 60 分).

1. 设 $z = \dfrac{2i}{-1+i}$, 则以下说法**错误**的是 (　　)

A. $\mathbf{Im} z = -1$;　　B. $|z| = \sqrt{2}$;

C. $\mathbf{Arg} z = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;　　D. $\bar{z} = 1 + i$.

2. 以下说法**正确**的是 (　　)

A. $i < 2i$;　　B. 函数 $\exp\left(\dfrac{z}{5}\right)$ 的周期是 $10n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}$;

C. $1^{\sqrt{2}} = 1$;　　D. 对任意的 $\mu, v \in \mathbb{C},\ z^{\mu} \cdot z^{v} = z^{\mu+v}$.

3. 将 $z = 1 + \sqrt{2}i$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{4}$ 得到的复数为 (　　)

A. $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}i$;　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} + \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}i$;

C. $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2} + \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}i$;　　D. $\dfrac{\sqrt{2}-2}{2} + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}i$.

4. 设$f(z)=x^2-2x+by^2+a(x-1)yi$在复平面内解析，则$a\times b=$（　　）

A. -2;　　B. 2;　　C. -1;　　D. 1.

5. 以下计算**正确**的是（　　）

A. $(z^2)^{\frac{1}{6}}=z^{\frac{1}{3}}$;　　B. $(z^2)^{\frac{1}{6}}=(z^{\frac{1}{6}})^2$;　　C. $(z^{\frac{1}{6}})^2=z^{\frac{1}{3}}$;　　D. 以上均正确.

6. 以下计算**错误**的是（　　）

A. $\mathrm{Ln}\left[(1+i)(-1+i)\right]=\ln 2+i(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$;

B. $(1+i)^i=e^{-2k\pi+\frac{\pi}{4}}\left[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})\right],\ k\in\mathbb{Z}$;

C. 方程$z^3+8=0$在复数域内一共有 3 个根;

D. 设$z=e^{it}$，则$z^{2022}+z^{-2022}=2\cos(2022t)$.

7. 计算$(\sqrt{3}-i)^5=$（　　）

A. $-16\sqrt{3}-16i$;　　B. $-16\sqrt{3}+16i$;　　C. $16\sqrt{3}-16i$;　　D. $16\sqrt{3}+16i$.

8. 以下说法**错误**的是（　　）

A. $\left(\dfrac{1}{z^2+1}\right)'=-\dfrac{2z}{(z^2+1)^2},\ \forall z\neq\pm i$;

B. 解析函数的导数仍解析;

C. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$解析，则$f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

D. 辐角主值函数$\mathbf{arg}z$在复平面内处处解析.

9. 计算复积分$\displaystyle\int_0^{1+i}ze^z\mathrm{d}z=$（　　）

A. ie^{1+i};　　B. $(1+i)e^{1+i}$;　　C. $ie^{1+i}+1$;　　D. $ie^{1+i}-1$.

10. 沿指定曲线的正向计算复积分$\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{\cos z}\mathrm{d}z=$（　　）

A. 0;　　B. 1;　　C. $\cos 1$;　　D. $\sin 1$.

11. 沿指定曲线的正向计算复积分$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=\pi}\frac{e^z}{z^{2022}}\mathrm{d}z=$（　　）

A. $\dfrac{e}{2021!}$;　　B. $\dfrac{e}{2022!}$;　　C. $\dfrac{1}{2021!}$;　　D. $\dfrac{1}{2022!}$.

12. 设$\alpha_n=\dfrac{2022}{n}e^{-\frac{n\pi i}{5}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=$（　　）

A. 0; B. 1; C. 2022; D. 不存在.

13. 判断复级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$的敛散性？ (　　)

A. 绝对收敛; B. 条件收敛; C. 发散; D. 无法判断.

14. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+2i)^n(z-1)^n$的收敛域为 (　　)

A. $|z|<\frac{\sqrt{5}}{5}$; B. $|z-1|<\frac{\sqrt{5}}{5}$; C. $|z|<\sqrt{5}$; D. $|z-1|<\sqrt{5}$.

15. 将函数$f(z)=\frac{1+i}{z}$在$z_0=1+i$处展开为 Taylor 级数正确的是 (　　)

A. $\frac{1+i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[z-(1+i)]^n}{(1+i)^n},\ |z-(1+i)|<\sqrt{2}$;

B. $\frac{1+i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[z-(1+i)]^n}{(1+i)^n},\ |z-(1+i)|<\sqrt{2}$;

C. $\frac{1+i}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[z-(1+i)]^n}{(1+i)^{n-1}},\ |z-(1+i)|<\sqrt{2}$;

D. $\frac{1+i}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{[z-(1+i)]^n}{(1+i)^{n-1}},\ |z-(1+i)|<\sqrt{2}$.

16. 设C为从0到$1+3i$的直线段，积分$I=\int_C\bar{z}\mathrm{d}z$的值为 (　　)

A. 0; B. $3i$; C. $-3i$; D. 5.

17. 判断 0 是$\frac{\sin z-z}{z^{2022}}$的奇点类型是 (　　)

A. 2018 级极点; B. 2019 级极点; C. 2020 级极点; D. 2021 级极点.

18. 计算$\mathbf{Res}\left[\frac{ze^z}{z^2-1},-1\right]=$ (　　)

A. $\frac{1}{e}$; B. $-\frac{1}{e}$; C. $\frac{1}{2e}$; D. $-\frac{1}{2e}$.

19. 利用留数计算$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$时，计算过程正确的是 (　　)

A. $I=2\pi i\left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}+\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3\pi}{4}i}}\right)$;

B. $I=2\pi i\left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{3\pi}{4}i}}+\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{5\pi}{4}i}}\right)$;

C. $I=2\pi i\left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{5\pi}{4}i}}+\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{7\pi}{4}i}}\right)$;

D. $I = 2\pi i\left(\left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{7\pi}{4}i}} + \left.\dfrac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)$.

20. 利用留数计算实积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2022x)}{x^2+1}\mathrm{d}x =$ （　　）

A. e^{2022}; B. e^{-2022}; C. πe^{2022}; D. πe^{-2022}.

得 分

二、判断题(对的在括号中画“√”，错的在括号中画“×”；本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分).

（　　）21. 因为 $f(z)=z$ 处处解析，所以 $f(z)=\bar{z}$ 也处处解析.

（　　）22. 设 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

（　　）23. 对任意的 $n\in\mathbb{Z}$，$\ln z^n = n\ln z$.

（　　）24. 微积分中的 Lagrange 中值定理对复变函数也成立.

（　　）25. 对任意的复数 z_1, z_2，$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

（　　）26. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 不可导.

（　　）27. 函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析等价于 $f(z)$ 在区域 D 内可导.

（　　）28. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 且 $A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 当且仅当 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0$.

得 分

三、计算题(本大题共 2 题, 29 题 8 分, 30 题 10 分，共 18 分).

29. 利用留数计算复积分 $I=\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z(z-i)^2}\mathrm{d}z$.

30. 将函数$\dfrac{1}{z^2(z-3)}$分别在圆环域 ①$0<|z-3|<3$; ②$3<|z|<\infty$

展开成 Laurent 级数.

得 分

四、证明题(共 6 分).

31. 设z_0是解析函数$f(z)$的 m 级极点, 证明$\mathbf{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right] = -m.$