得 分

一. 填空题

1. 若记 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 的第一列三个位置（从上到下）的代数余子式分别为

A_{11}, A_{21}, A_{31}，则 $A_{11}+A_{21}+9A_{31}=$ __-16__

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的迹 $trA^{-1}=$ __$-\dfrac{1}{3}$__

3. A 是6阶非零实矩阵，$R(A)=R(A^*)$，则 $A^*X=0$ 的解空间的维数是__0__

4. 若 $-1,3,3,-3,-2,5$ 是6阶实方阵 A 的特征值，而且 A 不能相似对角化，则

$A-3E$ 的秩 $R(A-3E)=$ __5__

5. A 是2阶实方阵. 若齐次线性方程组 $(A+3E)X=0$ 和 $(E-2A)X=0$ 均有非零解，则行列式 $|2A^*-A^{-1}+6E|=$ __$-\dfrac{44}{3}$__

6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & -6 & 10 & 0 \end{pmatrix}=$ __$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$__

7. 若 A 是3阶实方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的3维实列向量，满足

$A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3, A\alpha_2=3\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3, A\alpha_3=3\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，

则 A 的负特征值是 __-2__

8. $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}$. 由正交矩阵可知，$A^{-1}=\underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}}$

9. 若$2,3$是实矩阵$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_2&b_1&b_2\\a_3&b_2&c\end{pmatrix}$的两个特征值，$\alpha=\left(-2,1+t,6\right)^T$，

$\beta=\left(t,1,-1\right)^T$是分别属于$2,3$的特征向量，则$t=$ $\underline{\quad -5 \quad}$

10. 实矩阵$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\a_2&b_1&b_2\\a_3&b_2&c\end{pmatrix}$满足$A^{11}-A^6-A^2+6A-5E=0$，则行列式

$|A+5E|$ $\underline{\quad > \quad}$ 123（填 $>,=,<$ 之一）.

得 分

二 计算行列式$D=\begin{vmatrix}3&-3&6&-6&9\\2&1&0&-1&5\\1&3&9&3&1\\5&-1&0&1&2\\3&-2&2&-1&1\end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

解：

$$D=3\begin{vmatrix}1&-1&2&-2&3\\2&1&0&-1&5\\1&3&9&3&1\\5&-1&0&1&2\\3&-2&2&-1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4&-3&4&-3&4\\7&0&0&0&7\\1&3&9&3&1\\5&-1&0&1&2\\3&-2&2&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}4&-3&4&0&0\\7&0&0&0&0\\1&3&9&0&0\\5&-1&0&2&-3\\3&-2&2&1&-2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4&-3&4\\7&0&0\\1&3&9\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&-3\\1&-2\end{vmatrix}=-819$$

得 分

三（12 分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\quad\left(\text{或 } \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

得 分

四（12） a取何值时，线性方程组$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=a \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=-1 \\ x_1+4x_2+5x_3+8x_4=2 \end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+5 \end{pmatrix}.$$

当$a+5=0$即$a=-5$时，给定的方程组有解.

有解时，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1+x_3+\frac{4}{3}x_4=-2 \\ x_2+x_3+\frac{5}{3}x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2-x_3-\frac{4}{3}x_4 \\ x_2=1-x_3-\frac{5}{3}x_4 \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-x_3-\frac{4}{3}x_4 \\ 1-x_3-\frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中x_3,x_4可取任意实数.

得 分

五（12 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}1&9&9\\9&1&9\\9&9&1\end{pmatrix}$． 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-9&-9\\-9&\lambda-1&-9\\-9&-9&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-19)(\lambda+8)^2=0: \lambda=19,-8,-8;$$

$$(19E-A)X=0:\ 19E-A=\begin{pmatrix}18&-9&-9\\-9&18&-9\\-9&-9&18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}:\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \text{记}\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$$

$$(-8E-A)X=0:\ -8E-A=\begin{pmatrix}-9&-9&-9\\-9&-9&-9\\-9&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3:\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{记}\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$$

若记

$$P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

则其可逆，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}19&0&0\\0&-8&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$$

得 分

六（12 分） 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,1,1,-1)^T,\alpha_2=(1,0,2,-1)^T,$$
$$\alpha_3=(1,-1,1,3)^T,\alpha_4=(0,1,1,2)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

解：

$$\left(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\2&1&1&1\\-1&-1&3&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1 向量组的秩是 3 ；

2 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是给定向量组的一个极大线性无关组 ；

3 $\alpha_4=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

得 分

七（5 分）已知：n 阶实方阵 A 满足 $A^2+2A=3E$.

证明：$R(A-E)+R(A+3E)=n$.

证明:

$$A^2+2A-3E=0:\ (A-E)(A+3E)=0$$

$$\Rightarrow R(A-E)+R(A+3E)\le n\ ;\quad (1)$$

$$R(A-E)+R(A+3E)\ge R(-4E)=n\ .\ (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow R(A-E)+R(A+3E)=n\ .$$

得 分

八（5 分）. 已知: 实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ 满足 $a>0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}>0,\ |A|>0$.

证明：$B=\begin{pmatrix} f & c & e \\ c & a & b \\ e & b & d \end{pmatrix}$的特征值都大于 0 .

证明：

实对称矩阵A的顺序主子式都大于零，

说明它是正定矩阵，即，X^TAX 是正定二次型，

其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ ；

若记 $Y=(x_3,x_1,x_2)^T$，则 $X^TAX=Y^TBY$，

亦即 Y^TBY 是正定二次型；

所以 B 是正定矩阵：它的特征值都大于零.