2014-2015年

得 分

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1、设复数 $z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$，则 $\mathrm{Re}(z)=$ $\frac{3}{2}$。

2、$\cos(2\pi+7i)=$ $\frac{e^{-7}+e^{7}}{2}$。

没讲不用做 → 3、设 $v(x,y)=-3xy^2+x^3$，$f(z)$ 是以 v 为虚部的解析函数，且 $f(0)=0$，则

$f(z)=$ ________。

4、设 $f(z)=x^2-y^2+ay+i(bxy+3x)$ 为解析函数，则 $a=$ -3，$b=$ 2。

5、$i^i=$ $e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ $k\in Z$。

6、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n$ 的收敛半径为 $R=$ 4。

7、$z=0$ 是 $\frac{1}{z^2\left(3\sin z+(z^3-3)\right)}$ 的 2 级极点。

8、计算留数 $\mathrm{Res}\left(\frac{ze^z}{z^2-1},1\right)=$ $\frac{e}{2}$。

9、$\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(w+2)+\delta(w-2)\right]=$ $\frac{\cos 2t}{\pi}$。

10、$\mathscr{F}\left[t^2\sin t\right]=$ $-i\pi(\delta''(w+1)-\delta''(w-1))$。

得 分

二、计算题（每题 5 分，共 25 分）

1、计算 $81^{\frac{1}{4}}$

解 $81^{\frac{1}{4}}=81^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right]$

$=3\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)$

$k=0,1,2,3.$

2、计算 $(-1-i)^{11}$

解：$(-1-i)^{11}=(-1-i)^{10}(-1-i)$

$=(2i)^5(-1-i)$

$=2^5\cdot i(-1-i)$

$=2^5(1-i)$

3、计算$Ln\left(1+\sqrt{3}i\right)$

解：$=\ln|1+\sqrt{3}i|+i\,Arg(1+\sqrt{3}i)$

$=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\quad k\in\mathbb{Z}$

4、计算$\int_0^i z\cos z\,dz$

解：$=\int_0^i z\,d\sin z$

$=z\sin z\Big|_0^i-\int_0^i \sin z\,dz$

$=i\sin i+\cos z\Big|_0^i$

$=i\sin i+\cos i-1$

$=e^{i\cdot i}-1=e^{-1}-1$

5、计算留数$\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)},1\right]$

解：$\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\Big|_{z=1}=0$，$\left(\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)'\Big|_{z=1}=\left(\cos\frac{z-1}{z+1}\right)\frac{z+1-(z-1)}{(z+1)^2}\Big|_{z=1}\neq 0$

得$z=1$是$\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$的1级~~极~~零点，∴是$\dfrac{1}{\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$的1级极点。

则由规则Ⅱ得：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)},1\right]=\frac{1}{\left(\sin\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right)'}\Bigg|_{z=1}=\frac{1}{\cos\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\cdot\frac{z+1-(z-1)}{(z+1)^2}}\Bigg|_{z=1}$$

$$=\frac{1}{1\cdot\frac{2}{2^2}}=2$$

得 分

三、计算积分。（共 30 分）

1、设 C 为自原点到 3+4i 的直线段，计算积分$\int_C |z-1|^2\,dz$。（10 分）

解：C的参数方程为 $z(t)=(3+4i)t,\ 0\le t\le 1$，

$dz=(3+4i)dt$

$\because \int_C |z-1|^2 dz=\int_0^1 |3t+4ti-1|^2(3+4i)dt$

$\cancel{=\int_0^1 |2+4i|^2(3+4i)dt}$

$=(3+4i)\int_0^1 (3t-1)^2+16t^2\,dt$

$=(3+4i)\int_0^1 (25t^2-6t+1)dt$

$=(3+4i)\left(\frac{25}{3}t^3-3t^2+t\right)\Big|_0^1$

$=(3+4i)\left(\frac{25}{3}-3+1\right)$

$=\frac{19}{3}(3+4i)$

2、计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]e^{\frac{z}{2-z}}\frac{dz}{z}$。（10分）

解：$I=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+2z+1}{z^2}\cdot e^{\frac{z}{2-z}}dz$

$z=0$，$z=2$ 为孤立奇点，其中只有 $z=0$ 在 $|z|=1$ 内，

且为2级极点，则由留数定理有

$$I=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[\frac{z^2+2z+1}{z^2}\cdot e^{\frac{z}{2-z}},0\right]$$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\cdot\frac{z^2+2z+1}{z^2}\cdot e^{\frac{z}{2-z}}\right)$$

$$=\lim_{z\to 0}(2z+2)e^{\frac{z}{2-z}}+(z^2+2z+1)\cdot e^{\frac{z}{2-z}}\cdot\frac{2-z-z\cdot(-1)}{(2-z)^2}=2\cdot e^0+1\cdot e^0\cdot\frac{2}{2^2}$$

$$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

3、利用留数计算积分 $\int_0^{2\pi}\frac{1}{7+\cos\theta}d\theta$。（10分）

解：设 $z=e^{i\theta}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$ $\therefore d\theta=\frac{1}{iz}dz$.

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+z^{-1}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{7+\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{7+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz$$

$$=-i\oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2+14z+1}dz$$

由 $z^2+14z+1=0$ 得：$z=-7\pm 4\sqrt{3}$，其中 $z=-7-4\sqrt{3}$ 在 $|z|=1$ 外，

$z=-7+4\sqrt{3}$ 在 $|z|=1$ 内且为 $\frac{2}{z^2+14z+1}$ 的一级极点。

$$\oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2+14z+1}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{2}{z^2+14z+1},-7+4\sqrt{3}\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{2}{2z+14}\Big|_{z=-7+4\sqrt{3}}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}i$$

$$\therefore\int_0^{2\pi}\frac{1}{7+\cos\theta}d\theta=-i\oint_{|z|=1}\frac{2}{z^2+14z+1}dz=-i\cdot\frac{\sqrt{3}\pi}{6}i=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

得 分

四、求已知函数的展开式。(共 15 分)

1、把函数 $f(z)=\dfrac{1}{5-4z}$ 在 $z_0=1+i$ 展开成泰勒级数。(7 分)

解:
$$f(z)=\frac{1}{5-4(z-(1+i))-4(1+i)}$$
$$=\frac{1}{(1-4i)-4(z-(1+i))}$$
$$=\frac{1}{1-4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{1-4i}(z-(1+i))} \qquad \left|\frac{4}{1-4i}(z-(1+i))\right|<1$$
$$=\frac{1}{1-4i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(1-4i)^n}(z-(1+i))^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}4^n(1-4i)^{-(n+1)}(z-(1+i))^n \qquad |z-(1+i)|<\frac{\sqrt{17}}{4}$$

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ 在 $0<|z-i|<2$ 内展成洛朗级数。(8 分)

解:
$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$$
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i+z-i}$$
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2i)^{-n}(z-i)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2i)^{-(n+1)}(z-i)^{n-1}$$

得 分

五、求函数 $f(t)=\begin{cases}1+t, & -1<t<0,\\ 1-t, & 0<t<1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ 的 Fourier 积分。(10 分)

解：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-1}^{0}(1+t)e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{1}(1-t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{i\omega}\left((1+t)e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{-i\omega t}dt\right)$$

$$-\frac{1}{i\omega}\left((1-t)e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}e^{-i\omega t}dt\right)$$

$$=-\frac{1}{i\omega}\left[1+\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0}+0-1-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}\right]$$

$$=-\frac{1}{i\omega}\left(\frac{1}{i\omega}(1-e^{i\omega})-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega}-1)\right)$$

$$=\frac{1}{\omega^2}\left(1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1\right)$$

$$=\frac{2-2\cos\omega}{\omega^2}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}\cdot e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}\cos\omega t}{\omega^2}d\omega \quad (t\neq\pm1,0)$$

当 $t=0$ 时 $f(0)=1$

当 $t=\pm1$ 时 $f(\pm1)=\frac{1}{2}$

2014-2015年填空

1 $z=\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=\frac{i}{i\cdot i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i-\frac{3}{2}(i-1)=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

$Re(z)=\frac{3}{2}$

2. $\cos(2\pi+7i)=\cos 7i=\frac{e^{i\cdot 7i}+e^{-i\cdot 7i}}{2}=\frac{e^{-7}+e^{7}}{2}$

4. 设 $u=x^2-y^2+ay$，$v=bxy+3x$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+a$

$\frac{\partial v}{\partial x}=by+3$，$\frac{\partial v}{\partial y}=bx$

由C-R方程得：

$$\begin{cases}2x=bx\\-2y+a=-(by+3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a=-3\end{cases}$$

5. $i^i=e^{i\mathrm{Ln}i}=e^{i(\ln|i|+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))}=e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

$=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$　$k\in Z$

6. $\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{4^n}\right|}=\frac{1}{4}$　$R=4$

7. $z=0$ 是 z^2 的2级零点，不是 $3\sin z+(z^3-3)$ 的零点，

$\therefore z=0$ 是 $\frac{1}{z^2(3\sin z+(z^3-3))}$ 的2级极点。

8. $z=1$ 是 z^2-1 的1级零点，不是 ze^z 的零点，

所以 $z=1$ 是 $\frac{ze^z}{z^2-1}$ 的1级极点，

则由规则Ⅲ得 $Res\left[\frac{ze^z}{z^2-1},1\right]=\frac{ze^z}{2z}\Big|_{z=1}=\frac{e}{2}$

9. $\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2)] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+2)e^{i\omega t}d\omega\right.$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2)e^{i\omega t}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[e^{-2it}+e^{2it}\right]$$

$$=\frac{\cos 2t}{\pi}$$

10. 利用Fourier变换的微分性质

$$\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)=(-i)^n\mathscr{F}[t^n f(t)]$$

$\therefore \mathscr{F}[t^2\sin t]=\frac{1}{(-i)^2}\frac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$

$F(\omega)=\mathscr{F}[\sin t] = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\, e^{-i\omega t}dt$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{it}-e^{-it})e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega-1)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega+1)t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[2\pi\delta(\omega-1)-2\pi\delta(\omega+1)\right]$$

$$=i\left[\pi\delta(\omega+1)-\pi\delta(\omega-1)\right]$$

$\therefore \mathscr{F}[t^2\sin t] = -\frac{d^2}{d\omega^2}\left(i\left(\pi\delta(\omega+1)-\pi\delta(\omega-1)\right)\right)$

$$=-i\pi\left(\delta''(\omega+1)-\delta''(\omega-1)\right)$$

上课讲过,但此次考试不要求掌握.