一．填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者 a，或者 b”型答案失分）

1. 记 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ 第三列和第二列各三个位置（从上到下）的代数余子式分别为

$A_{13},A_{23},A_{33};A_{12},A_{22},A_{32}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}-A_{12}+A_{22}-3A_{32}=$ __-26__

2. 若 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，则 $f(A)=A^2-3A+E$ 的迹 $trf(A)=$ __39__

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=$ __$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$__

4. 若 n 阶实方阵 A 满足 $A^2-2A+5E=0$，则 $(A-3E)^{-1}=$ __$-\frac{1}{8}(A+E)$__

5. A 是 3 阶实方阵。若齐次线性方程组 $(A+E)X=0$、$(3A-E)X=0$、

$(A-2E)X=0$ 均有非零解，则行列式 $\left|3A^*-A^{-1}+6E\right|=$ __$-\frac{243}{2}$__

6. $2,1,3,3,5$ 是 5 阶实方阵 A 的特征值，且 A 不能相似对角化，则 $3E-A$ 的伴随矩阵 $(3E-A)^*$ 的秩 $R\left\{(3E-A)^*\right\}=$ __1__

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由正交矩阵可知，$A^*$ 的特征值之和 $=$ __-16__

8. 若 A 是 3 阶实方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基底，满足

$A\alpha_1=\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3$，$A\alpha_2=6\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3$，$A\alpha_3=6\alpha_1+6\alpha_2+\alpha_3$，

则 $A+2E$ 的行列式 $|A+2E|=$ __135__

9. 若$3,-9$是实矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & j \\ d & g & j & k \end{pmatrix}$的两个特征值，$\alpha=(3,1-t,\ 1,\ 6)^T$，

$\beta=(t,2,\ -3,-1\ )^T$是分别属于$3,\ -9$的特征向量，则 $t=$ <u>7</u>

10. 若实矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & j \\ d & g & j & k \end{pmatrix}$满足 $A^{21}+5A^{12}+6A^{11}+A^{10}+E=0$，

则行列式 $\begin{vmatrix} a-2 & b & c \\ b & e-2 & f \\ c & f & h-2 \end{vmatrix}$ <u>$<$</u> -8 （填 $>,=,<$ 之一）.

二（12 分） 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

解

$$D=-3\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-3\times 14\times 1=-42\ .$$

三（12 分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

解

$$X\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$X^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

四（12） a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-2x_4=0 \\ x_1-2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+x_2-7x_3=a \end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 0 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

当 $a-2=0$ 即 $a=2$ 时，原方程组有解。

有解时，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}: \begin{cases} x_1-2x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3-3x_4=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1+2x_3-x_4 \\ x_2=-1+x_3+3x_4 \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2x_3-x_4 \\ -1+x_3+3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

其中，x_3,x_4 可取任意实数。

五（12分） 实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$，$a\neq 0$. 求一个可逆矩阵 P，

使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -a\\ -a & \lambda-1 & -a\\ -a & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2a-1)(\lambda-1+a)^2=0$$

$\Rightarrow \lambda=2a+1,\ 1-a,\ 1-a$；

$\{(2a+1)E-A\}X=0$：$(2a+1)E-A=\begin{pmatrix}2a & -a & -a\\ -a & 2a & -a\\ -a & -a & 2a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 记 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$;

$\{(1-a)E-A\}X=0$：$(1-a)E-A=\begin{pmatrix}-a & -a & -a\\ -a & -a & -a\\ -a & -a & -a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

记 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

若记 $P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 P 可逆，且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2a+1 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}.$$

六（12 分）　给定列向量组

$$\alpha_1=(0,2,-1,0,-3)^T,\alpha_2=(1,0,2,0,-1)^T,\alpha_3=(-2,1,-1,0,1)^T,$$
$$\alpha_4=(0,5,1,0,-7)^T,\alpha_5=(-2,4,1,0,-3)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

解

$$\left(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}1&0&-2&0&-2\\0&2&1&5&4\\2&-1&-1&1&1\\0&0&0&0&0\\-1&-3&1&-7&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

1 向量组的秩是3；

2 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是给定向量组的一个极大线性无关组；

3 $\alpha_4=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$， $\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$.

七（5分）已知：A 为 n 阶非零实矩阵（$n>2$），且满足 $A^T=A^*$.

证明：A 是可逆矩阵。

证明：

$R(A^*)$ 的值只有三种情况：$0,1,n$ 。

$R(A^*)=0$ 时，$A^*=0$，因此 $A^T=A^*=0\Rightarrow A=0$。与条件矛盾。

$R(A^*)=1$ 时, $R(A)=n-1$；

同时 $A^T=A^*\Rightarrow R(A)=R(A^T)=R(A^*)=1$；

因此，$n-1=1\Rightarrow n=2$。与条件矛盾。

综上可知，$R(A^*)=n$。此时，$R(A)=n$，即，A 是可逆矩阵。

八（5分） 已知：B 为 $m\times n$ 型实矩阵，$R(B)=n$，$A=B^TB$.

证明：A 是正定矩阵。

证明:

$A^T=(B^TB)^T=B^T(B^T)^T=B^TB=A$, 即，$A$ 是对称矩阵。

记列向量 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 。

$R(B)=n\Rightarrow BX=0$ 的解空间的维数 $=n-R(B)=0$，

因此，

$$X\neq 0\Rightarrow BX\neq 0$$
$$\Rightarrow X^TAX=X^TB^TBX=(BX)^T(BX)>0.$$

即 X^TAX 是正定二次型，A 是正定矩阵。