北京工业大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 A 卷

一、填空题（本大题共 10 道小题，每题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(y+x\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________ .

2. 设 $u=x+y^2+z^3$，则梯度 $\mathbf{grad}\,u=$______________.

3. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？ 条件收敛 .

4. 设 $L: x^2+y^2=4$， 则 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{d}s=$___________.

5. $\mathbf{D}$: $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, 将二重积分 $I=\iint_D f(x^2+y^2)\mathbf{d}\sigma$ 转化为极坐标系下的累次积分，$I=$_______________.

6. 函数 $f(x)=x^2\sin\frac{x}{2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2017} 的系数为________ .

7. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为________ .

8. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 是收敛还是发散?_____________.

9. 定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开为以 2π 为周期的傅立叶级数，其和函数记为 $S(x)$，则 $S(7\pi)=$______.

10. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则 $I=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2)\mathbf{d}S=$_______.

二、计算题（本大题共 6 道小题，每题 10 分，共 60 分）

11. 求平面 $3x+y+z=2$ 上最靠近坐标原点的点.

12. 计算二重积分 $I=\iint_D\frac{1}{x^2y^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$，其中 D 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $y=x$ 和 $y=2$ 围成的有界闭区域.

13. 求微分方程 $y''+3y'+2y=\left(x^2+3x\right)e^{-x}$ 的通解.

14. 计算曲线积分 $\boldsymbol{I=\int_L x^2y\mathrm{d}x+(-xy^2+\sin y^3)\mathrm{d}y}$, 其中 L 为沿着 $x^2+y^2=1$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的上半圆弧.

15. 求幂级数 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}}$ 的收敛域及和函数，并求 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}}$.

16. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\le z\le h)$ 部分的下侧.

三、证明题（本大题共 2 道小题，每题 5 分，共 10 分）

17. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，若 $u(x,y)=f(x)g(y)$，证明：

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

18. 证明:交错级数 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n\ge 0)}$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}}$ 和 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}}$ 都收敛.