北京工业大学 2017—2018 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期：2018 年 1 月 9 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

。。

注：本试卷共 三 大题，共 7 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2}=$ _____2_____________

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数

$a=$ _______3____________

3. 设函数 $y=\sin^2 x+3$，则 $\mathrm{d}y=$ ___ $2\sin x\cos x dx$ __________________

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+\ln y=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ __ $-\dfrac{1}{2}$ _________________

5. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t)\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则

$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$ ______ 1 ______________________

6. 曲线 $y=\ln(1+x^2)-3x$ 的拐点为____$(1,\ln 2-3)$_, $(-1,\ln 2+3)$__________

7. 设函数 $y=\int_0^x\cos(2t+1)\mathrm{d}t$ ，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ _______ $\cos(2x+1)$ ____________

8. 曲线 $y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\ln(1+e^x)$ 的水平渐近线为____ $y=0$ _____________

9. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3}=$ ______ $\dfrac{1}{2}$ _________

10. $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=$ _____ $\dfrac{\pi}{2}$ ____________________

得 分

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y', y'', y^{(2018)}(0)$.

解：$\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，

$y'=-(x-2)^{-2}+(x-1)^{-2}$，

$y''=2(x-2)^{-3}-2(x-1)^{-3}$，

$y^{(n)}=(-1)^n n!(x-2)^{-n-1}+(-1)^{n+1}n!(x-1)^{-n-1}$，

$y^{(2018)}(0)=2018!(1-2^{-2019})$。

12. 求函数 $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的极值。

解：$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$，

$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$，

令 $f'(x)=0$，求得驻点 $x=\dfrac{\pi}{6}$，又 $f''(\dfrac{\pi}{6})=-3<0$，

所以 极大值为 $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3}{2}$。

13．计算不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$。

解：原式 $=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})dx$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$$

14．计算定积分 $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x$.

解：设 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$，$dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$ ，

当 $x=0$ 时，$t=0$；$x=\ln 5$ 时，$t=2$。

原式 $=\int_0^2\frac{(t^2+1)t}{t^2+4}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t$

$$=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t=2t\Big|_0^2-8\int_0^2\frac{1}{t^2+4}\mathrm{d}t$$

$$=4-4\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^2$$

$$=4-\pi$$

15．设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2}\\ \sin 2x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0\\ \frac{1}{A+x^2}, & x\ge 0\end{cases}$，其中 $A>0$，

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 求常数 A，使得 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$.

解：$x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$。

$-\dfrac{\pi}{2}\le x<0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sin 2t\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\text{。}$$

$x\ge 0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=0-\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\int_{0}^{x}\frac{1}{A^2+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-1+\frac{1}{\sqrt{A}}\arctan\frac{x}{\sqrt{A}}\text{。}$$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{t\to+\infty}(-1+\dfrac{1}{\sqrt{A}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{A}})=-1+\dfrac{\pi}{2\sqrt{A}}=1$，

所以 $A=\dfrac{\pi^2}{16}$。

16. 设抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 过点 $(1,0)$ 的切线与该抛物线及 x 轴所围成的平面图形为 D。

（1）求 D 的面积.

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

解：（1）设切点为 $\left(x_0,\sqrt{x_0-2}\right)$，

抛物线过点 $(1,0)$ 的切线斜率 $k=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-2}}=\dfrac{\sqrt{x_0-2}}{x_0-1}$，解得切点为 $(3,1)$，

切线方程是 $x-2y-1=0$。

面积 $S=\int_0^1(y^2+2-2y-1)dy=(\dfrac{y^3}{3}-y^2+y)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$。

（2）圆锥的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{2}{3}\pi$，

抛物线和 $x=3$ 和 x 轴所围成的图形绕轴旋转一周得到的立体体积

$V_2=\int_2^3 \pi(\sqrt{x-2})^2 dx=\pi(\frac{x^2}{2}-2x)\Big|_2^3=\frac{\pi}{2}$，

所求体积 $V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}$。

得 分

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $0<x<1$，证明：$e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$.

证明：设 $f(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x)$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$，$f''(x)=-4xe^{2x}<0$ ，

所以 $f'(x)$ 单减，$f'(x)<f'(0)=0$，

$f(x)$ 单减，$f(x)<f(0)=0$， 命题得证。

18. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$。又在 (a,b) 内 $g(x)$ 恒不为 0，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)=2g'(\xi)f(\xi)$。

证明：设 $F(x)=\frac{f(x)}{g^2(x)}$ ，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

$F(a)=F(b)=0$， 又 $F'(x)=\frac{f'(x)g^2(x)-2g(x)g'(x)f(x)}{g^4(x)}$，

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，

即 $f'(\xi)g(\xi)=2g'(\xi)f(\xi)$。