北京工业大学 2015—2016 学年第 一 学期

《高等数学（管）-1》考试卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注：本试卷共 三 大题，18 小题，共 6 页，满分 100 分。

考试时必须使用卷后附的草稿纸。（可以撕下）

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
得分				

得 分

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

$\because \int \sec x dx = \ln|\sec x+\tan x|+C$ 用

1. 设 $\int f(x)dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$，那么 $\int f''(x)dx =$ $\sec x \cdot \tan x + C$

2. 若 $F'(x) = f(x)$，那么 $\int \frac{f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx =$ $-2F(-\sqrt{x})+C$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}} =$ $e^{1/3}$ （用 $\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}} = e^{\frac{1}{x-3}\cdot\ln\frac{x}{3}}$）

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right)^{x} =$ e^2 （$(e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x})^x = e\cdot(1+\frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}})^x$，用第二个重要极限）

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x + \sin\frac{1}{x}}{\ln x + \cos\frac{1}{x}} =$ 1 （上下同除 $\ln x$）.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x-1} - ax - b\right) = 0$，则 $a =$ $\sqrt{2}$，$b =$ $\sqrt{2}$

7. 设 $y = x^{\sin x}$，则 $y' =$ $x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x + \frac{\sin x}{x})$

8. 设 $y^2 + e^{xy} = 2$，则 $dy =$ $-\frac{ye^{xy}}{2y+xe^{xy}}dx$

9. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+1}dx = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C.$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx = 2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+C.$

得 分

二、计算题（每题 10 分，共 60 分）

11. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ 令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 代入，整理.

$$= -\int t\sqrt{a^2t^2-1}\,dt = -\frac{1}{2}\int\sqrt{a^2t^2-1}\,dt^2 = -\frac{1}{2a^2}\int\sqrt{a^2t^2-1}\,d(a^2t^2-1)$$

$$= -\frac{1}{3a^2}(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

☆ 也可令 $x=a\sin t$，$dx=a\cos t\,dt$ 代入得 $\boxed{\text{令}x=a\cos t\text{更方便}}$

$$\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^4 t} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t\cos^2 t}dt = \frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\tan^4 t}d\tan t.$$

$= -\frac{1}{3a^2}\cot^3 t+C$ 由

得 $-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)^3+C$

$$= -\frac{1}{3a^2}\left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)^3+C$$

$$= -\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{3/2}+C.$$

12. 设 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-4x) & x\le 0\\ a+be^x & x>0\end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解：若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故有

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\ln(1-4x)) = \lim\limits_{x\to 0^+}(a+be^x)$

$\Rightarrow a+b=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a+be^x-1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1+\ln(1-4x)-1}{x-0} = -4$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a+be^x-1}{x} = -4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(a+be^x-1)=0$

故由洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{be^x}{1}=-4 \Rightarrow b=-4.$

则 $a=5$.

13.求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ 不宜直接用洛必达法则.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \cos x \sqrt{\cos 2x} + 1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$ （在分子加减 $\sqrt{\cos 2x}$）

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\cos x)}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}$$ 利用 $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x \to 0} \frac{(4x^2/2)}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})} = \frac{3}{2}$$

14.$\int \dfrac{1}{x^2+6x+8} dx = \int \dfrac{dx}{x^2+6x+9-9+8}$ （此题也可拆分有理分式）

$$= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+3-1}{x+3+1} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C.$$ 利用 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

另：$\dfrac{1}{x^2+6x+8} = \dfrac{1}{(x+2)(x+4)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+4} \Rightarrow A(x+4) + B(x+2) = 1$

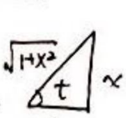
令 $x=-2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$，令 $x=-4 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.故

$$\int \frac{1}{x^2+6x+8} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+4} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+4| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + C.$$

15. $\int\frac{1}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}dx$

此题可令 $x=\tan t$，但稍繁。



原式 $=-\frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

令 $x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$ 代入，整理

得 $-\int\frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt^2}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{1+t^2}}d(t^2+1)$

$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2+1}\,d(t^2+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}d(t^2+1)$

$=-\frac{1}{3}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{t^2+1}+C$

$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$

$=-\frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

$-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}d(1+t^2)$

$=-\int t^2\,d\sqrt{1+t^2}$

$=-t^2\sqrt{1+t^2}+\int\sqrt{1+t^2}\cdot d(t^2+1)$

$=-t^2\sqrt{1+t^2}+\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$

16. $\int\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

此题不论是令 $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t$ 还是令 $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=t$ 都较繁。宜直接分部积分。

$=x\cdot\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\int x\,d\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$=x\cdot\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\int\frac{x}{x^2-1}dx=x\cdot\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1}$

$=x\cdot\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$

除了直接分部积分 也可如下作法：

$\int\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx=\frac{1}{2}\int\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]dx$

$=\frac{1}{2}\int\ln|x-1|dx-\frac{1}{2}\int\ln|x+1|dx$

$=\frac{x}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{1}{(x-1)}dx-\frac{x}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{x}{(x+1)}dx.$

$=\frac{x}{2}\ln|x-1|-\frac{x}{2}\ln|x+1|.$ [redacted]

$-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x+1}dx$

$=x\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$

由于原题中有 $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，故 $x-1$ 与 $x+1$ 同时大于 or 小于零

得 分

三、综合题（每小题 5 分，共 10 分）

17.设$f''(x_0)$存在，试用泰勒公式证 明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)$$

证]: $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2)$　　(1)

$f(x_0-h)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot h^2+o(h^2)$　　(2)

(1)+(2)

$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2f(x_0)+f''(x_0)h^2+o(h^2)$.

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)+o(h^2).$$

两边同时取极限，令$h\to 0$即可.

凡是最后一步说(1)+(2)即可，没有取极限的都扣2分.

18.设$x>0$,证明$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$

证]: 设$F(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$　当$x\to 0^+$时 $F(x)\to+\infty$

又当$x\to+\infty$时. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})-1}{1+x}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})+(1+x)\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}\right]=0.$$

且$F'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{-\frac{1}{x}}{(1+x)^2}<0$　　$(x>0)$

故$F(x)$单调递减 故$F(x)>0$，故原式得证.