北京工业大学 2010-2011 学年第一学期期末

复变函数与积分变换 课程试卷

考试方式：闭卷　　　　考试时间：2010 年 1 月 10 日

学号＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿＿＿＿

注：本试卷共八大题，满分 100 分

得分登记（由阅卷教師填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
分数									

一、 填空题（每空 3 分，共 30 分）

[illegible]

1、$z=-1+i$，则 $\mathrm{Re}(z)=$ ＿-1＿，$Arg\ z=$ ＿$\frac{3}{4}\pi+2k\pi$＿。

其中 a, b 均为实数

2、设函数 $\lim\limits_{z\to(1+i)}\dfrac{bz}{az-1}=2-2i$ 解析，则 $a=$ ＿1＿ $b=$ ＿2＿。

① $3iz^2$

3、解析函数 $f(z)=y^3-3x^2y+i(x^3-3xy^2)$，则 $f'(z)=$ ② ＿$-6xy+i(3x^2-3y^2)$＿。

4、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛区域为＿[0, 2) 1＿。

5、$z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(e^z+1)}$ 的＿2＿级极点。

6、$\int_{3\pi i}^{9\pi i}e^{\frac{2z}{3}}dz=$ ＿0＿。 $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}z}\Big|$ [illegible]

7、积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\cos t\,dt=$ ＿1＿。

8 函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的频谱函数为＿$\frac{2\sin w}{w}$＿。

二、计算题（每题5分，共25分）

1. $(-1)^{\frac{1}{3}}$

解：$(-1)^{\frac{1}{3}}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$

$=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}$ ---2分

$k=0,1,2$

$w_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ---1分

$w_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=-1$ ---1分

$w_2=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ---1分

2. $Ln5i$

解 $=\ln|5i|+i\,Arg(5i)$

$=\ln 5+(2k\pi+\frac{\pi}{2})i \rightarrow$ 缺 减1分

$\{k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

3分

3. 解方程 $\cos z=1$

解：① $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1$ 3分

整理得：$(e^{iz}-1)^2=0$

于是 $e^{iz}=1=e^{2k\pi i}$

$z=2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

② $z=Arc\cos 1$

$=-i\,Ln(1+\sqrt{1^2-1})$

$=-i\,Ln1$ 2分

$=-i(\ln 0+2k\pi i)=2k\pi \ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$

4. 求函数 $w=x^2+ixy$ 的可导点。

解：$\because u(x,y)=x^2,\ v(x,y)=xy$

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x$

$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=y$

$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=x\\ 0=-y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 1分 1分

3分

于是函数仅在(0,0)可导。

5. 求函数 $f(z)=\frac{z-\sin z}{z^7}$ 的奇点，并判断其类型，若是极点指出它的级。

解 显然 $f(z)$ 的奇点为 $z=0$ 2分

$\because \frac{z-\sin z}{z^7}=\frac{z-(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\frac{1}{9!}z^9+\cdots)}{z^7}$

$=\frac{1}{3!}z^{-4}-\frac{1}{5!}z^{-2}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}z^2+\cdots$ 2分

$\therefore z=0$ 为四级极点 1分

② 令 $z-\sin z=g(z)$ 则 $g(0)=0$. $g'(0)=1-\cos 0=0$ 3分 2分

$g''(0)=\sin 0=0$. $g'''(0)=\cos 0=1$ $\therefore z=0$ 为 $g(z)$ 三级零点，故为 $f(z)$ 四级极点

注2：*定义 2分； +1分
积定义 1分； +1分
2分

三、设函数 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\ge 0\end{cases}$，$f_2(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 $f_1(t)*f_2(t)$ 的 Fourier 变换。（5 分）

解：$\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-t(i\omega+\beta)}dt$ 2分

$$=\frac{e^{-t(i\omega+\beta)}\Big|_0^{+\infty}}{-(i\omega+\beta)}=\frac{e^{-ti\omega}\cdot e^{-t\beta}\Big|_{t=+\infty}-e^0}{-(i\omega+\beta)}=\frac{1}{i\omega+\beta}=\frac{\beta-i\omega}{\omega^2+\beta^2}$$

$$\mathscr{F}[f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2\sin\omega}{\omega}$$ 2分

$$\therefore \mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\mathscr{F}[f_1(t)]\cdot\mathscr{F}[f_2(t)]=\frac{\beta-i\omega}{\omega^2+\beta^2}\cdot\frac{2\sin\omega}{\omega}$$

$$=\frac{2\sin\omega(\beta-i\omega)}{\omega(\omega^2+\beta^2)}$$ 1分

四、把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(1+z)^2}$ 在指定圆环域内展开成洛朗级数。（10 分）

1. $0<|z|<1$．　2. $0<|z+1|<1$．

2分（求導枸1分）

解：1. $0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{-1}{z^2}\cdot\left(\frac{1}{1+z}\right)'=\frac{-1}{z^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right]'$$ 2分

$$=\frac{-1}{z^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}z^{n-3}$$ —1分

2. $0<|z+1|<1$

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)^2}\cdot\frac{1}{[1-(z+1)]^2}=\frac{1}{(z+1)^2}\left[\frac{1}{1-(z+1)}\right]'$$

$$=\frac{1}{(z+1)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\right)'=\frac{1}{(z+1)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-3}$$

五、设曲线 $C:|z|=2$，计算下列积分。（10 分）

1. $\oint\limits_C \bar{z}\,dz$

2. $\oint\limits_C \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i)(z-1)^8}\,dz$

解：1 $C:\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 2分

$\oint_C \bar{z}\,dz=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-2i\sin\theta)(2\cos\theta+i2\sin\theta)'\,d\theta$ 2分

$=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-2i\sin\theta)\cdot 2\cdot(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$

$=4i\int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 8\pi i$ 1分

2. $\oint_C \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i)(z-1)^8}\,dz$

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i)(z-1)^8}$ 共有三个奇点，分别为

$z_1=0$ $z_2=i$ $z_3=1$ 均在 C 内 2分

故 C 外只有 ∞ 一个孤立奇点.

故 $\oint_C \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i)(z-1)^8}\,dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-i)(z-1)^8},\infty\right]$ 2分

$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{z}\cdot\frac{1}{z^2}}{(\frac{1}{z}-i)(\frac{1}{z}-1)^8},0\right]$

$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{z}z^7}{(1-iz)(1-z)^8},0\right]$ 1分

$=0$

六、计算定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-ai)^n(x-i)}dx$，其中 a 为不为零的实数，n 为正整数。(7分)

解：被积函数 $f(z)=\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)}$ 共有两个奇点，分别为

$z_1=ai$，$z_2=i$ 1分

其中 $z_1=ai$ 为 n 级极点，$z_2=i$ 为一级极点

当 $a<0$ 时，只有 $z_2=i$ 在上半平面

$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-ai)^n(x-i)}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)},i\right] \quad 1分$$

$$=2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)}=\frac{2\pi}{(1-a)^n}i^{(1-n)} \quad 1分$$

当 $a>0$ 时，z_1 与 z_2 均在上半平面 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-ai)^n(x-i)}dx=2\pi i\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)},ai\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)},i\right]\right\} \quad 1分$$

$$=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-ai)^n(z-i)},\infty\right]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}}{(1-aiz)^n(1-iz)},0\right] \quad 1分$$

$\because n\geq 1$，故 $n-1\geq 0$ 即 $z=0$ 不是 $\frac{z^{n-1}}{(1-aiz)^n(1-iz)}$ 的奇点

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x-ai)^n(x-i)}dx=0$

1分

七、证明函数 $u=2x(y-1)$ 是调和函数，并求解析函数 $f(z)=u+iv$。（8分）

解：证明：$u_x=2(y-1)$，$u_{xx}=0$

$u_y=2x$　1分　$u_{yy}=0$

∴ $u_{xx}+u_{yy}=0$　1分　故u为调和函数

解：$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2x$　1分　两边对x求积分　2分

$v=-x^2+g(y)$ ⇒ $\frac{\partial v}{\partial y}=g'(y)$

~~有 $v=-2xy+g(y)$，于是 $\frac{\partial v}{\partial y}=-2x+g'(y)$~~

~~又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2(y-1)$，故~~

~~故 $g'(y)=2x+2(y-1)$　两边对y求积分有~~

~~$g(y)=2xy+y^2-2y+C$~~

~~故 $v=y^2-2y+C$~~

又 $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2(y-1)$　1分

故 $g'(y)=2(y-1)$

于是 $g(y)=(y-1)^2+C$

故 $v=-x^2+(y-1)^2+C$　2分

八、证明：设 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 z_0 为 $f(z)$ 的m级零点的充要条件为

$$f^{(n)}(z_0)=0,(n=1,2,\cdots m-1),f^{(m)}(z_0)\neq0\text{。（5分）}$$

证明：⇒ 若 z_0 为 $f(z)$ 的m级零点，则∃在 z_0 解析的函数 $\varphi(z)$ 满足 $\varphi(z_0)\neq0$ 使得 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$　1分

设 $\varphi(z)$ 在 z_0 的展开式为 $\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$ 其中 $c_0\neq0$　1分

于是 $f(z)=c_0(z-z_0)^m+c_1(z-z_0)^{m+1}+c_2(z-z_0)^{m+2}+\cdots$

即 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式的前m项系数为零。

又 $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$　于是 $f^{(n)}(z_0)=n!c_n=0$　1分　$n=1,2,\cdots,m-1$

$f^{(m)}(z_0)=m!c_0\neq0$

⇐ 设 $f(z)$ 的泰勒展式为

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n$　1分

∵ $f^{(n)}(z_0)=0$，$(n=1,2,\cdots m-1)$，$f^{(m)}(z_0)\neq0$

故 $f(z)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^m+\frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(z_0)(z-z_0)^{m+1}+\cdots$　1分