卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	**总成绩**
满分	30	10	10	10	12	12	8	8	
得分									

得 分

一．填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；$a=a$型答案无效）

1. $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & a \\ 4 & 1 & 9 & a^2 \\ 8 & -1 & 27 & a^3 \end{pmatrix}$. 若方程组$AX=0$有非零解，且$a<1$，则$a=$__$-1$__

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$中的所有元素之和 $=$__36__

3. 若3×5型实矩阵A和5×2型实矩阵B满足$AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}$，则齐次线性方程组$B^TX=0$的基础解系中含有解向量的个数是__3__

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}=$ __$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$__

5. 若$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$相似，则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2$的正惯性指数 $=$__1__

6. A是2阶实方阵. 若齐次线性方程组$(2A-E)X=0$和$(A+E)X=0$均有非零解，则行列式$\left|8A^*+A^{-1}+2E\right|=$____ -20 ____

7. 若A是2阶实方阵，α_1,α_2是线性无关的2维实列向量，满足$A\alpha_1=\alpha_1-5\alpha_2$，$A\alpha_2=-2\alpha_1-2\alpha_2$，则$A$的正特征值是____ 3 ____

8. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. 由$A^*$与$A^{-1}$的关系可知$A^*=$____ $-4A$ ____

9. 若3维向量空间R^3中的两个向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2$满足$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1+2\beta_2\\ \alpha_2=-\beta_1+\beta_2\\ \alpha_3=5\beta_1+8\beta_2\end{cases}$，而且，$\beta_1,\beta_2$线性无关，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2$的秩 =____ 2 ____

10. 若实矩阵$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2\\ a_4 & b_3 & c_2 & d\end{pmatrix}$满足$5A^5-2A^4+3A^3-4A^2=2E$，则行列式$\begin{vmatrix}a_3 & a_1 & a_2\\ b_2 & a_2 & b_1\\ c_1 & a_3 & b_2\end{vmatrix}$____ > ____ 0（ 填比较符号 >, <, = 之一 ）.

得 分

二（10 分）．计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）．

解：

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-6\times(-8)=48.$$

得 分

三（10 分）．用初等变换的方法，解方程$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

得 分

四（10 分）．a取何值时，线性方程组$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3+5x_4=1\\x_1+x_2-x_3+2x_4=-2\\x_1-3x_2+3x_3+x_4=a\end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

解：

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2&-2\\3&-1&1&5&1\\1&-3&3&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&2&-2\\0&-4&4&-1&7\\0&0&0&0&a-5\end{pmatrix},$$

$\therefore\ a-5=0$即$a=5$时，给定的方程组有解。

有解时，

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2&-2\\0&-4&4&-1&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&-1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2&-2\\0&-4&4&-1&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{7}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&-1&\frac{1}{4}&-\frac{7}{4}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}x_1+\frac{7}{4}x_4=-\frac{1}{4}\\x_2-x_3+\frac{1}{4}x_4=-\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}x_4\\x_2=-\frac{7}{4}+x_3-\frac{1}{4}x_4\end{cases}.$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}x_4\\-\frac{7}{4}+x_3-\frac{1}{4}x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{7}{4}\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}\\-\frac{1}{4}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

其中，x_3,x_4可取任意实数。此即原方程组的通解。

得 分

五（12 分）． 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$． 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

解：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -3\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ 0 & -3 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+4)=0$$

$\Rightarrow \lambda=1,3,-4.$

$$(1E-A)X=0\text{: } 1E-A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_2=0\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.\ 记\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$(3E-A)X=0\text{: } 3E-A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_3=0\\ x_2-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=2x_3\end{cases}\Rightarrow X=x_3\begin{pmatrix}-1/2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.\ 记\alpha_2=\begin{pmatrix}-1/2\\ 2\\ 1\end{pmatrix};$$

$$(-4E-A)X=0\text{: } -4E-A=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -3\\ 0 & -6 & -2\\ 0 & -3 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 11/15\\ 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1+11/15\,x_3=0\\ x_2+1/3\,x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-11/15\,x_3\\ x_2=-1/3\,x_3\end{cases}\Rightarrow X=x_3\begin{pmatrix}-11/15\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}.记\alpha_3=\begin{pmatrix}-11/15\\ -1/3\\ 1\end{pmatrix}.$$

若记 $P=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$，则$P$可逆，

$$而且\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

得 分

六（12 分）．给定列向量组

$$\alpha_1=(2,1,-1,-1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T,$$
$$\alpha_3=(-1,1,-5,2)^T,\alpha_4=(11,18,-50,6)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

解：

$$\left(\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 11\\ 1 & 1 & 1 & 18\\ -1 & -1 & -5 & -50\\ -1 & -1 & 2 & 6\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

所以，

1 给定向量组的秩是 3；

2 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是给定向量组的一个极大线性无关组；

3 $\alpha_4=9\alpha_1+\alpha_2+8\alpha_3.$

得 分

七（8 分）. 对一般的 $m\times n$ 型实矩阵 A 而言，线性方程组 $AX=\beta$ 不一定有解；但 $(A^TA)X=A^T\beta$ 一定有解. 请证明这后一结论.

证明：

$$R\left\{\left(A^TA\,|\,A^T\beta\right)\right\}\ge R\left(A^TA\right);$$

$$R\left\{\left(A^TA\,|\,A^T\beta\right)\right\}=R\left\{A^T\left(A\,|\,\beta\right)\right\}\le R(A^T)=R(A)=R\left(A^TA\right).$$

$$\therefore\ R\left\{\left(A^TA\,|\,A^T\beta\right)\right\}=R\left(A^TA\right).$$

所以，$(A^TA)X=A^T\beta$ 一定有解。

得 分

八（8 分）. 证明：若 A 是正定矩阵，则其逆矩阵 A^{-1} 也是正定矩阵。

证明：

（1）n 阶方阵 A 正定 $\Rightarrow A^T=A\Rightarrow\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}$.

亦即，A^{-1} 是对称矩阵；

（2）若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，则

A 正定 $\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 皆 >0

$\Rightarrow A^{-1}$ 的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 皆 >0 。

综合（1）、（2）可知，A^{-1} 也是正定矩阵。