北京工业大学 2016——2017 学年第 1 学期

《集合与图论》考试试卷 B 卷

考试说明： ____________________

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： __________ **学号：** __________ **班号：** __________

注：本试卷共 10 大题，共 8 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总成绩
满分											
得分											

得 分

一、选择题（8 分）

1、设 A={1，2，3}，则 A 上的二元关系有（ C ）个。

A． 23 ； B． 32 ； C． $2^{3\times3}$； D． $3^{2\times2}$。

2、设 R，S 是集合 A 上的关系，则下列说法正确的是（ A ）

A．若 R，S 是自反的， 则 $R\circ S$ 是自反的；

B．若 R，S 是反自反的， 则 $R\circ S$ 是反自反的；

C．若 R，S 是对称的， 则 $R\circ S$ 是对称的；

D．若 R，S 是传递的， 则 $R\circ S$ 是传递的。

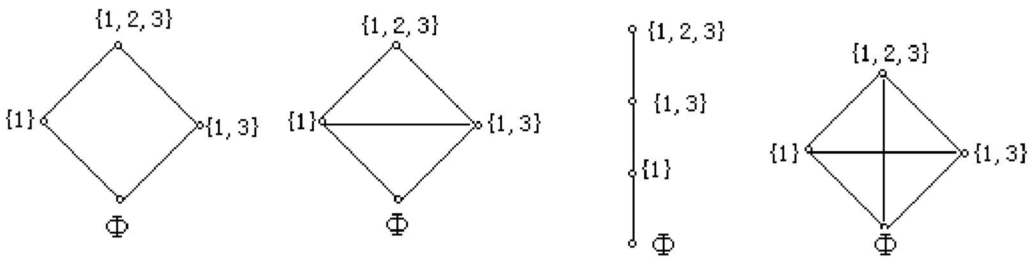
3、设 A={1，2，3，4}，P（A）（A 的幂集）上规定二元系如下

$R=\{<s,t>| s,t\in p(A)\wedge(|s|=|t|\}$ 则 P（A）/ R=（　D　）

A. A ；B. P(A) ；C. {{{1}}，{{1，2}}，{{1，2，3}}，{{1，2，3，4}}}；

D. {{Φ}，{2}，{2，3}，{{2，3，4}}，{A}}

4、设 A={Φ，{1}，{1，3}，{1，2，3}}则 A 上包含关系“⊆”的哈斯图为（　C　）



(A)　(B)　(C)　(D)

得 分

二、判断题（8 分）

1.（T）一条回路和任何一棵生成树至少有一条公共边

2.（F）T 是一棵 m 叉树，它有 t 片树叶，i 个分枝点，则(m-1)i = t-1

3.（F）设集合 A={1，2，3，4 }，B={6，8，12}， A 到 B 的二元关系 R＝$\{<x,y>|y=2x,x\in A,y\in B\}$ 那么 R^{-1}＝{<6,12>,<8,4>}

4.（F）设正则 5 叉树的树叶数为 17，则分支数为 i =3_

得 分

三、（10 分）R 是集合 X 上的一个自反关系，求证：R 是对称和传递的，当且仅当

< a，b> 和<a ，c>在 R 中有<.b ，c>在 R 中。

“ ⇒ ”　$\forall a,b,c\in X$　若 $<a,b>,<a,c>\in R$ 由 R 对称性知 $<b,a>,<c,a>\in R$，由 R 传递性得 $<b,c>\in R$　3 分

"⇐" 若 $<a,b>\in R$，$<a,c>\in R$ 有 $<b,c>\in R$ 任意 $a,b\in X$，因 $<a,a>\in R$ 若 $<a,b>\in R$ $\therefore$ $<b,a>\in R$ 所以 R 是对称的。7 分

若 $<a,b>\in R$，$<b,c>\in R$ 则 $<b,a>\in R\wedge <b,c>\in R$ $\therefore$ $<a,c>\in R$ 即 R 是传递的。 10 分

得 分

四、(10 分)证明在 6 个结点 12 条边的连通平面简单图中，每个面的面数都是 3。

证：n=6,m=12

欧拉公式 n-m+f=2 知 f=2-n+m=2-6-12=8 3 分

由图论基本定理知：

$\sum\deg(F)=2\times m=24$，而 $\deg(F_i)\geq 3$， 6 分

所以必有 $\deg(F_i)=3$， 8 分

即每个面用 3 条边围成。 10 分

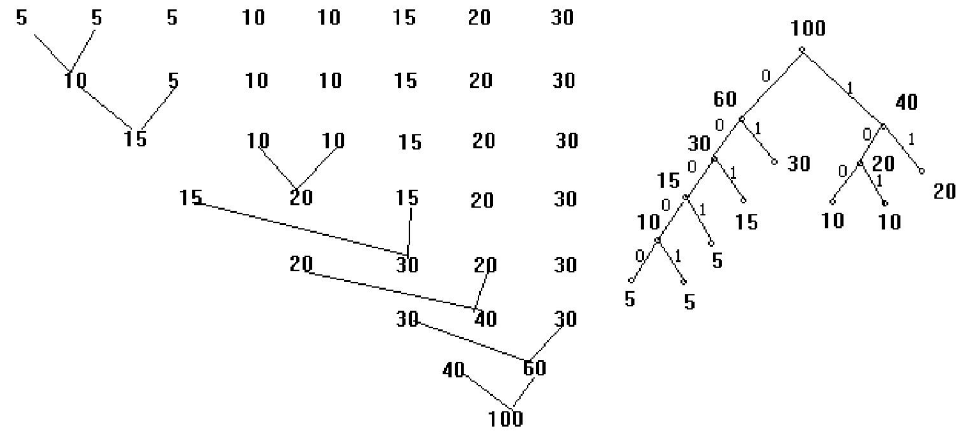
得 分

五、(12 分) 在通讯中，八进制数字出现的频率如下：0：30%、1：20%、2：15% 、3：10%、4：10%、5：5%、6：5%、7：5%求传输它们最佳前缀码（写出求解过程）。

解：用 100 乘各频率并由小到大排列得权数

$w_1=5,w_2=5,w_3=5,w_4=10,w_5=10,w_6=15,w_7=20,w_8=30$ 3 分

(1) 用 Huffman 算法求最优二叉树：



6 分

（2）前缀码

用 00000 传送 5；00001 传送 6；0001 传送 7；100 传送 3；101 传送 4；001 传送 2；11 传送 1；01 传送 0 （频率越高传送的前缀码越短）。 12 分

得 分

六、（10 分）设函数 g：A→B，f：B→C，则：

(1) f∘g 是 A 到 C 的函数；

(2) 对任意的 x∈A，有 f∘g(x)＝f(g(x))。

证明 (1) 对任意的 x∈A，因为 g：A→B 是函数，则存在 y∈B 使〈x，y〉∈g。对于 y∈B，因 f：B→C 是函数，则存在 z∈C 使〈y，z〉∈f。根据复合关系的定义，由〈x，y〉∈g 和〈y，z〉∈f 得〈x，z〉∈g*f，即〈x，z〉∈f∘g。所以 Df∘g＝A。 3 分

对任意的 x∈A，若存在 y1、y2∈C，使得〈x，y1〉、〈x，y2〉∈f∘g＝g*f，则存在 t1 使得〈x，t1〉∈g 且〈t1， y1〉∈f，存在 t2 使得〈x，t2〉∈g 且〈t2，y2〉∈f。因为 g：A→B 是函数，则 t1＝t2。又因 f：B→C 是函数，则 y1＝y2。所以 A 中的每个元素对应 C 中惟一的元素。

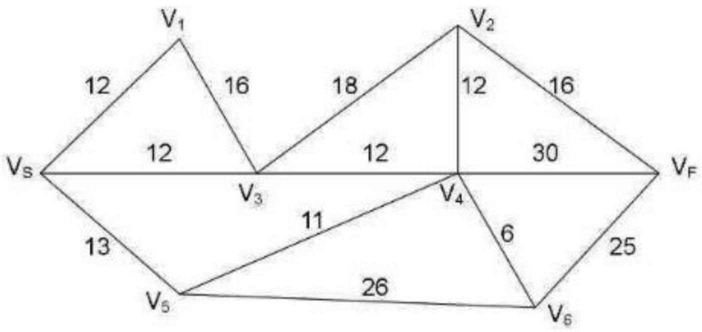
综上可知，f∘g 是 A 到 C 的函数。 6 分

(2) 对任意的 x∈A，由 g：A→B 是函数，有〈x，g(x)〉∈g 且 g(x)∈B，又由 f：B→C 是函数，得〈g(x)，f(g(x))〉∈f，于是〈x，f(g(x))〉

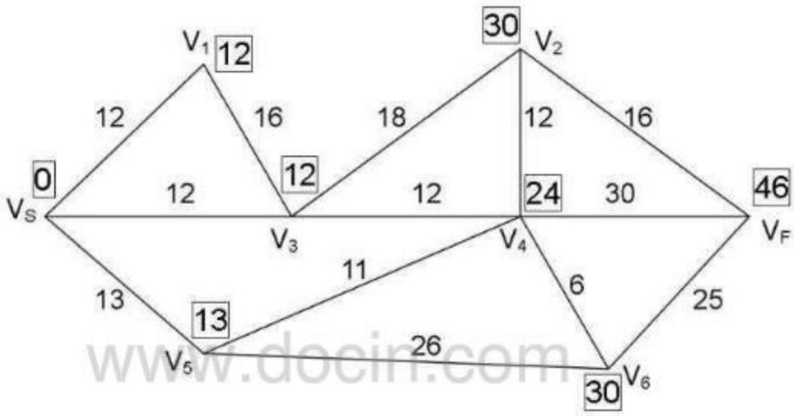
 10 分

得 分

七、（10 分）用 Dijkstra 算法求图中起点V_s到各点的最短距离以及起点V_s到终点V_F的最短路。



解：



解：采用 Dijkstra 算法，可解得最短路径为：

由 Vs 选择下一个节点 V3； 3 分

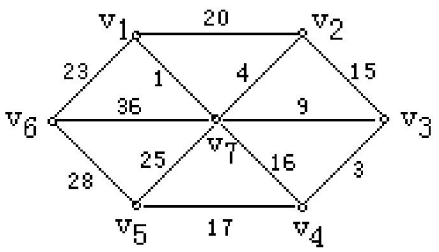
计算经过集合{Vs，V3}出发的最短路径节点 V2； 6 分

计算从集合{Vs，V3，V2}出发的下一个最短路径节点 VF； 8 分

V_s到V_F的最短路为 Vs-V3-V2-VF，最短距离为 46 10 分

得 分

八、（12 分）如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先测算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信而且总造价最小。



解： 用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1, v_7) = 1$ 选 $e_1 = v_1 v_7$

$w(v_7, v_2) = 4$ 选 $e_2 = v_7 v_2$

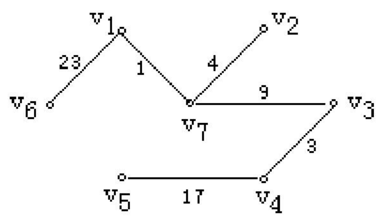
$w(v_7, v_3) = 9$ 选 $e_3 = v_7 v_3$

$w(v_3, v_4) = 3$ 选 $e = v_3 v_4$

$w(v_4, v_5) = 17$ 选 $e = v_4 v_5$

$w(v_1, v_6) = 23$ 选 $e = v_1 v_6$ 6 分

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价 12 分

得 分

九、（10 分）设 G 是阶数 n≥11 的无向平面图，证明 G 和 $\overline{G}$ 不可能全是平面图.

证明：只需证明 G 和 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平面图. 采用反证法. 否则 $\overline{G}$ 与 G 都是平面图，下面来推出矛盾.

G 与 $\overline{G}$ 的边数 m, m' 应满足 $m + m' = \frac{n(n-1)}{2}$ （K_n 的边数① 2 分

由鸽巢原理知 m 或 m'，不妨设 m，$m \ge \frac{n(n-1)}{4}$ ② 4 分

又由推论 知 $m \le 3n-6$ ③ 6 分

由②与③得 $n^2-13n+24 \le 0$ ④ 8 分

由④解得 $2 \le n \le 10$ ⑤

⑤与 $n \ge 11$ 矛盾.

其实，当 n=9, 10 时，命题结论已真. 10 分

得 分

十、（10 分）设 n 阶非平凡的无向树 T 中，$\Delta(T) \ge k$，$k \ge 1$. 证明 T 至少有 k 片树叶.

证明：采用反证法. 否则，T 至多有 s 片树叶，$s < k$，下面利用握手定理及树的性质 $m = n-1$ 推出矛盾.

由于$\Delta(T) \ge k$，故存在 v_0，$d(v_0) \ge k$. 4 分

于是，

$$2m = 2n-2 = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge 2(n-s-1)+k+s$$ 8 分

由此解出 $s \ge k$，这与 $s < k$ 矛盾. 10 分

答　题　纸

姓名：____________　　　学号：________________

草　稿　纸

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　学号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿