北京工业大学 2014——2015 学年第 Ⅱ 学期

"概率论与数理统计"课程(工)考试试卷

考试说明： 考试闭卷；可使用文曲星除外的计算器。

承诺： 本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ______________ **学号：** ________________ **班号：** __________

注： 本试卷共 6 页，满分 100 分；考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二(1)	二(2)	二(3)	二(4)	二(5)	总成绩
满分	30	14	14	14	14	14	
得分							

一、 填空题（每空 2 分，共 28 分）

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
$0.7 = 0.4+P(B)-0.4P(B)$

1. 设 A 与 B 为事件，且 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$。则当 A 与 B 互不相容时，$P(B)=$ __0.3__；A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ __0.5__。

X	-1	1	2
P	0.2	0.4	0.4

X^2	1	4
P	0.6	0.4

$0.6+1.6 = 2.2$　$E(X^2)-[E(X)]^2$

2. 若离散型随机变量 X 只取 ±1 和 2，且 $P(X=-1)=0.2$，$P(X=1)=0.4$。则 $P(X=2)$ = __0.4__；$E(X)=$ __1__，方差 $Var(X)=$ __1.2__。

$-0.2+0.4+0.8=1$　$2.2-1=$

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $\lambda=$ __2__，$E(X)=$ __2__。

$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$　$\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$　$\lambda^2-2\lambda=0$

$9+4\times4$　$N(1,25)$

4. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(3,\ 3^2)$，$X_2\sim N(1,\ 2^2)$。令 $X=X_1-2X_2$，则 $EX=$ __1__，$Var(X)=$ __25__。进一步，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，且 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{-4<X<11\}=$ __0.8185__。

0.1587　$\frac{-4-1}{5}$　$\frac{11-1}{5}$

5. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，分别记 $\overline{X}$ 与 S^2 为样本均值与样本方差(无偏方差)。则 $\overline{X}\sim$ __$N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$__，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ __χ^2_{n-1}__。

$t_{24}(0.025)$

6. 设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 是抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，经计算得 $\bar{x}=5$，$s^2=0.09$。根据本试卷第 6 页上的 t 分布表与 χ^2 分布表，得未知参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为 [__4.876166, 5.123834__]；σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间为 [__0.05482, 0.174180__]。

$\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$　$(n-1)S^2 = 24\times0.09 = 2.16$

$\frac{0.3}{5}\times2.0639 = 0.123834$

39.364　12.401

二、 解答题（共 72 分）

注：每题要有解题过程，无解题过程不能得分！

1.（本小题 14 分）有型号相同的产品两箱，第一箱装 12 件产品，其中两件为次品；第二箱装 8 件产品，其中一件为次品。先从第一箱中随机抽取两件产品放入第二箱，再从第二箱中随机抽取一件产品。

10

(1). 求从第二箱中取出次品的概率；

(2). 若从第二箱中取出了次品，求从第一箱中未取到次品的概率。

(1) 设 $A=\{$第二箱中取出次品$\}$

$B_i=\{$从~~第~~箱有 i 件次品$\}$ ~~$C_i=\{$有 i 件次品时取出为次品的概率$\}$~~

$$B_1=\frac{C_{10}^2}{C_{12}^2}=\frac{10\times9}{12\times11}=\frac{15}{22}$$

~~$C_1=0.1$ $C_2=0.2$ $C_3=0.3$~~

$$B_2=\frac{C_{10}^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{10\times2}{\frac{12\times11}{2}}=\frac{10}{33}$$

$$B_3=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{\frac{12\times11}{2}}=\frac{2}{132}=\frac{1}{66}$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)=\frac{15}{22}\times0.1+\frac{10}{33}\times0.2+\frac{1}{66}\times0.3=\frac{2}{15}$$

(2) $$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{22}\times\frac{1}{10}}{\frac{2}{15}}=\frac{45}{88}=0.511$$

2.(本小题 15 分) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且都服从参数为 1 的指数分布，令 $U = \min\{X,Y\}$， $V = \max\{X,Y\}$，求：

$\lambda e^{-\lambda x}$

$f(x) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(1). U 的概率密度函数 $f_U(x)$； 用X表了、

(2). $U+V$ 的概率密度函数 $f_{U+V}(x)$。

(1) $X = e^{-x}$ $Y = e^{-y}$

$F_X(x) = \int_0^x e^{-x} dx = 1 - e^{-x}$ $x \geq 0$

$F_Y(y) = \int_0^y e^{-x} dy = 1 - e^{-y}$ $y \geq 0$

$U = \min\{X, Y\}$

$F(U) = 1 - [1 - F_X(x)][1 - F_Y(y)]$

$= 1 - e^{-x}e^{-y} = 1 - e^{-x-y}$ $x>0, y>0$.

∵ 独立同分布.

$\cancel{f(u) =}$ $F(U) = 1 - [1 - F_X(x)]^2 = 1 - e^{-2x}$

$F(U) \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$f_U(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(2) ~~设~~ $Z = U + V$

$F(V) = [F_X(x)]^2 \cancel{[F_Y(y)]} = [1 - e^{-x}]^2 = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$ $x \geq 0$

$f_V(x) = \begin{cases} -2e^{-2x} + 2e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

3.（本小题 15 分）设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

同2012～2013

ce^{-x} , $0\le y\le x<\infty$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\cancel{c祇^{x},\quad 0\quad y?\,x\quad ?,}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1). 求常数 c；　　(2). 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；

(3). 问 X 和 Y 是否独立？为什么？　　(4). 求 $E(Y)$。

北京工业大学 2014—2015 学年第II学期“概率论与数理统计”课程考试试卷

4.（本小题 14 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知，求：

(1). σ^2 的矩估计 $\tilde{\sigma}^2$；

(2). σ^2 的极大似然估计估计 $\hat{\sigma}^2$；

(3). $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $Var(\hat{\sigma}^2)$。

5.（本小题 14 分）设学生某次考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 76.5，标准差为 4.05。问在显著性水平 0.05 下，从样本看，

(1). 是否接受“$\mu=75$”的假设？ 接受

(2). 是否接受“$\sigma\le 4.0$”的假设？

附 t 分布与 χ^2 分布表

$t_{24}(0.025)=2.0639$	$t_{24}(0.05)=1.7109$	$t_{25}(0.025)=2.0595$	$t_{25}(0.05)=1.7081$
$\chi^2_{24}(0.025)=39.364$	$\chi^2_{24}(0.05)=36.415$	$\chi^2_{25}(0.025)=40.646$	$\chi^2_{25}(0.05)=37.652$
$\chi^2_{24}(0.975)=12.401$	$\chi^2_{24}(0.95)=13.848$	$\chi^2_{25}(0.975)=13.120$	$\chi^2_{25}(0.95)=14.611$

(1) 拒绝域 $\boxed{|x-\mu_0|\ge\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}} = \frac{4.05}{5}\times 1.96=1.5876$

$|x-\mu_0|=|75-76.5|=1.5<\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}$

(2) $\left[\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2),\ \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\right]$

12.401　　39.364

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{24\times 16.4025}{16}=24.6$ ✓

拒绝域 $\begin{cases}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\ge\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})\end{cases}$

$\frac{24\times 4.05^2}{4^2}=24.6038$

$\chi^2_{24}(0.025)=39.364$

$\chi^2_{24}(0.975)=12.401$

$\begin{cases}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\ge 39.364\\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le 12.401\end{cases}$

接受