

行列式的性质

1. $D^T = D$ 行列互换值不变，如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

推论：对行成立的性质，对列也成立

2. 两行互换，值变号

推论：存在两行相等， $D=0$

3. 某一行都乘 K ，等于 K 乘 D

推论：某一行有公因式 K , K 提外面。如果有 n 行就提 K^n

4. 两行对应成比例， $D=0$

推论：某一行全为零， $D=0$

5. 行列式若有相加，可以拆开

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+5 & 6+7 & 8+9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

(相加的那一行分开，但其余行保持不变)

6. 某一行乘一个数，加到另一行去， D 不变

如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+3 & 5+6 & 6+9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (\text{第一行} \times 3, \text{加到第二行})$$

(可以利用此性质拼凑出三角模型)

行列式按行展开

余子式：去除第 i 行第 j 列剩下的行列式，表示为 M_{ij}

代数余子式： $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

按行展开： $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ (某行元素 \times 对应代数余子式 之和)

按列展开： $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ (某列元素 \times 对应代数余子式 之和)

异乘变零定理：（某行元素×另一行元素的代数余子式）之和为零

拉普拉斯定理：取定 k 行，（由 k 行元素组成的所有 k 阶子式×代数余子式）之和=D

回忆：拉普拉斯定理中 k 阶子式、余子式与代数余子式的概念（与前面不同）

（不太好解释和做笔记，详见宋浩老师视频 1.3 行列式按行展开 27:13——30:23）

应用举例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+1+2} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

行列式相乘规则：行列式①的行与行列式②的列按照顺序逐个相乘并相加（**仅限同阶行列式**）

举例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

技巧：四阶及以上行列式一般化成三角形式，左上角尽量变成 1

巧用等价法：将余子式转化为代数余子式，同时巧用定义构造出行列式

举例： 已知 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ ，求 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$

解答： $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = (-1)A_{41} + A_{42} + (-1)A_{43} + A_{44} = D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

制造行和：

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \text{从第二列起每一项都加到第一列，得}$$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & x & a & \dots & a \\ x+(n-1)a & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ x+(n-1)a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \text{提出来，得}$$

$$x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & a & a & \dots & a \\ 1 & x & a & \dots & a \\ 1 & a & x & \dots & a \\ & & \dots & & \\ 1 & a & a & \dots & x \end{vmatrix} \text{第一行} \times (-1) \text{加到后面每一行，得}$$

$$x+(n-1)a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

加边法（少用）： 举例：
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (\text{不能改变原行列式的值})$$

三叉型行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & a_2 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) a_1 a_2 \dots a_n$$

范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ & & \dots & & \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

对称行列式：
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
 ①主对角线无要求 ②上下对应元素相等 $a_{ij} = a_{ji}$

反对称行列式：
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
 ①主对角线全是 0 ②上下对应元素相反 $a_{ij} = -a_{ji}$

③奇数阶反对称行列式，D=0

克莱姆法则：①适用范围：方程=未知数 系数行列式：D

② $D \neq 0$ $x_j = \frac{D_j}{D}$ (D_j 是常数项替换列得到的，不好做笔记)

③齐次方程组（常数项都是 0），且 $D \neq 0$ ， $x_i = 0$ （仅有 x 全等于 0 的解）

④齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow D = 0$

⑤这个垃圾定理我们一般不用

矩阵概念

矩阵： $A_{m \times n}$ ，用()或[]表示，矩阵中0省略不写

①其它是零，对角线是 1 的矩阵是称为单位阵，记作 E

②矩阵相等的前提是同型矩阵（行列相等）

矩阵运算

数乘： $k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k & 3k \\ 4k & 5k & 6k \\ 7k & 8k & 9k \end{pmatrix}$

矩阵相乘特点（宋氏七字）：**中间相等取两头**

（可相乘条件：下标中间相等 相乘后矩阵类型：取两头）

特殊的相乘：

①矩阵与零矩阵相乘等于零矩阵，与原矩阵同型

②矩阵与 E 相乘等于原矩阵

矩阵相乘和数字相乘的区别：

①AB 不一定等于 BA，AB 有意义，BA 不一定有意义（若 AB=BA，则称 AB 可交换）

②AB=0，无法推出 A=0 或 B=0

③AB=AC，且 A≠0，无法推出 B=C

④ $(AB)^k$ 不一定等于 $A^k B^k$

⑤ $(A+B)^2$ 不一定等于 $A^2 + B^2 + 2AB$

矩阵的转置

$$① (A^T)^T = A$$

$$② (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$③ (kA)^T = kA^T$$

$$※④ (AB)^T = B^T A^T \text{ (注意顺序)} \quad \text{推广结论: } (A_1 A_2 \dots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \dots A_1^T$$

特殊矩阵

数量矩阵

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & \dots \\ & & & & a \end{pmatrix} = aE$$

对角型矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \dots \\ & & & & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

三角矩阵

参考行列式的各种三角

对称矩阵（定义参考行列式）

① $A = A^T$

② AB 对称 $\Leftrightarrow AB$ 可交换

反对称矩阵（定义参考行列式）

参考行列式

逆矩阵

方阵的行列式 $|A|$

性质①: $|A^T| = |A|$

性质②: $|kA| = k^n |A|$

性质③: $|AB| = |A| \times |B|$

伴随矩阵 A^* （只有方阵才有伴随矩阵）

按行求的代数余子式，按列放置形成矩阵

定理①: $AA^* = A^*A = |A|E$

定理②: $|A^*| = |A|^{n-1}$

逆矩阵的定义

有方阵 A ，存在同阶方阵 B ，使得 $AB=BA=E$ ，即 AB 互为逆矩阵，记作 $A^{-1} = B$

推论：只要 $AB=E$ 或 $BA=E$ 即可判断，不需要两个都验证

矩阵注意事项

- ①不是所有矩阵都可逆
- ②若矩阵可逆，逆矩阵唯一
- ③若 $|A| \neq 0$ ，则称 $|A|$ 为满秩矩阵（或非奇异矩阵，或非退化矩阵）

反之，则称 $|A|$ 为降秩矩阵（或奇异矩阵，或退化矩阵）

求逆矩阵的方法

①伴随矩阵法 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^*$ （基本不用）

- ②初等变换法

矩阵计算巨大的坑

- ①注意左乘还是右乘
- ②矩阵不能减一个数，提公因式的时候记得加个 E
- ③不要把矩阵放分母上
- ④先判断是否可逆，再写逆矩阵

逆矩阵的性质

- ① A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$
- ② $(A^{-1})^{-1} = A$
- ③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ （类似转置）
- ④ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- ⑤ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
- ⑥ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- ⑦ $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|} A$

A^* 的奇妙运算

- ① $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$
- ② $\left((A^*)^*\right)^* = |A|^{(n-1)(n-2)+1} A^{-1} = |A|^{n^3-3n+3} A^{-1}$

分块矩阵

标准型：左上角**不间断**一坨 1，接下来是 0，**可以不是方的，也可以没有 1 或 0。**

分块矩阵的运算

- ①加法运算：直接加
- ②k 乘：直接乘
- ③乘法运算：参考行列式和矩阵的乘法

特殊矩阵的逆矩阵：

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -AC^{-1}B^{-1} \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \begin{pmatrix} A & \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ -AC^{-1}B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

矩阵的初等变换

任何矩阵都可以经过初等变换变成标准型（从左上角开始）

初等方阵：对单位矩阵 E 进行**一次**初等变换得到的

- ① E(i, j) → 交换 i, j 两行得到
- ② E(i(k)) → 第 i 行乘 k 得到
- ③ E(i, j(k)) → 第 j 行乘 k 加到第 i 行得到

初等方阵的几个小结论

①初等方阵均可逆

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j)$$

$$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$$

$$E(i, j(k))^{-1} = E(i, j(-k))$$

②初等方阵的逆矩阵也是初等方阵

③初等方阵的转置也是初等方阵

④用初等方阵**左乘** A, 相当于对 A 实施了同种**行**变换

⑤用初等方阵**右乘** A, 相当于对 A 实施了同种**列**变换

两个充要条件

① $A \cong B \Leftrightarrow$ 存在两个初等方阵 P、Q, 使得 $PAQ=B$

② A 可逆 \Leftrightarrow A 的标准型为 E \Leftrightarrow 存在若干个初等方阵 P_n , 使得 $A=P_1P_2...P_n$

初等变换法求逆矩阵

$$(A, E) \xrightarrow{\text{做同等的变换}} (E, A^{-1})$$

矩阵的秩

秩, rank, $r(A)=r$ ——**非零子式的最高阶数**

矩阵的秩的一些结论 (对于矩阵 $A_{m \times n}$)

① $0 < r(A) \leq \min\{m, n\}$

② 若 $r(A) = \min\{m, n\}$, 则称 $A_{m \times n}$ 满秩, 反之则为降秩

③ 若 A 为方阵 (即 $m=n$): A 满秩 $\Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$r(A)=n \Leftrightarrow$ 存在 n 阶子式不为 0, 所有的 $n+1$ 阶子式都为 0

※阶梯型矩阵

- ①若有全是 0 的行, 都在最下面
- ②左起首个非零元个数随行数增加而严格增加

判断: 宋氏阶梯折线法 (竖线一次只能跨一列, 横线随意)

$r(A)$ = 非零行行数

行简化阶梯型

- ①是阶梯性矩阵
- ②非零行的首非零元都是 1
- ③首非零元所在 **列** 的其他元素的是 0

判断三步走: ①宋氏折线 ②圈出首非零元 ③按列画虚线

求矩阵的秩

- ①化成标准型 (基本不用)
- ②只用行变换化为阶梯型

几个重要性质

- ① $r(A) = r(A^T)$
- ②矩阵乘可逆矩阵, 秩不变

推论: 对于 $A_{m \times n}$, P 为 m 阶可逆方阵, Q 为 n 阶可逆方阵, $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

向量间的线性关系

$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是同维向量, 若存在 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$

则称 β 为 α 向量组的**线性组合**, k 成为**组合系数** (k 可以全取 0)

α 和 β 是同维向量组, 任取从一个向量组里一个向量, 都可以用另外一个向量组表示

则称**向量组 α 和 β 等价**

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 个同维向量, 若存在一组**不全为 0** k_1, k_2, \dots, k_n , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ **线性相关**

线性无关的向量组, 增加分量依然线性无关

线性相关的向量组, 减少分量依然线性无关

对于 n 个 n 维向量 (**个数等于维数**): $D = 0 \Leftrightarrow$ 线性相关

一些定理:

① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量表示

② $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 唯一表示

替换定理:

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 都可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 则 $s \leq t$

推论①: 当 $m > n$ 时, m 个 n 维向量**一定**线性相关

推论②: **等价**的线性**无关**向量组, 向量个数**相同**

向量组的秩

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中, 存在线性无关的 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \leq n)$, 可表示向量组中的所有向量
则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 为极大无关组, 其不一定唯一。

推论①: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意 $m+1$ 个向量的线性相关

推论②: 任意两个极大无关组向量个数相同。

向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$: 极大无关组的向量个数

推论①: $0 \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq \min\{\text{向量个数}, \text{向量维数}\}$

推论②: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 (相关) $\Leftrightarrow r = n (r < n)$

推论③: 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$

矩阵的行秩 (行向量组的秩) = 矩阵的列秩 (行列向量组的秩) = 矩阵的秩

初等行变换不改变列向量之间的线性关系

※求极大无关组的步骤:

①按列构成矩阵

②化成行简化阶梯形 (只做行变换)

③首非零元构成的列就是极大无关组

④按列读出答案

线性方程组

方程组系数构成系数矩阵 A ，等号右边的系数再加入到 A 中，构成**增广系数矩阵** \bar{A}

解线性方程组的本质是对 \bar{A} 做初等行变换

线性方程组有解判定：

- ①当 $r(A) = r(\bar{A}) = n$ 时，有唯一解
- ②当 $r(A) = r(\bar{A}) < n$ 时，有无穷解
- ③当 $r(A) \neq r(\bar{A})$ 时，无解

判断线性方程组有解的步骤：

- ①画出 \bar{A}
- ②化为**阶梯型**（只做行变换）
- ③观察 $r(A)$ 和 $r(\bar{A})$
- ④若有无穷解，化为**行简化阶梯形**，非零行的首非零元 1 留左边，其余的放右边。

齐次线性方程组的一些结论：

- ① $r(A) = n \Leftrightarrow$ 只有零解
- ② $r(A) < n \Leftrightarrow$ 有非零解，且解无穷多 \Leftrightarrow 方程个数 < 未知数个数
- ③ 方程个数 = 未知数个数，且有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆

若 $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ 都是齐次线性方程组的解，且 $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ 线性无关

该齐次方程组的解都能用 $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ 表示，则称 $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ 为该齐次方程组的**基础解系**

求基础解系的方法：

- ①求出一般解
- ② n 个自由未知量，就设 n 个线性无关的 n 维向量（一个 1 其余都是 0 即可）
- ③代入一般解得出 $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ 即可

$A_{m \times n}, B_{n \times s}$, 若 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$

$Ax = 0$ 称为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的**导出组**

一些关于非齐次线性方程组结论:

- ① 若 α_1, α_2 是 $Ax = b$ 的解, 则 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解
- ② 若 α_1 是 $Ax = b$ 的解, η_1 是 $Ax = 0$ 的解, 则 $\alpha_1 \pm \eta_1$ 是 $Ax = b$ 的解

非齐次线性方程组解的结构:

$$\alpha_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \dots + c_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 α_0 是 $Ax = b$ 的**特解**, 后面一串是 $Ax = 0$ 的**基础解系**

求解步骤: 先求 α_0 , 指出自由未知量, 再求基础解系即可

矩阵的特征值与特征向量

对于 n 阶**方阵** A 和常数 λ , 存在**非零列** 向量 α , 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$
则称 λ 为**特征值 (根)**, α 为**特征向量**

$|\lambda E - A|$ 称为**特征多项式**, $|\lambda E - A| = 0$ 称为**特征方程**、

λ 可以对应**无穷多个** α , α 只能对应**一个** λ ,

如何解特征方程?

- ①**不要用定义展开! 会算死!**
- ② 尽可能把某行 (列) 化为只剩一个非零数, 其余都是 0, 然后按行 (列) 展开
- ③ 观察是否提取含 λ 的公因子
- ④ 观察是否有相同数, 相反数, 和相同的行 (列), 制造 0

若 A 是对角形矩阵, 则 λ 为主对角线的所有数。

特征值 λ 的基本性质:

※①矩阵 T 后 λ 不变

$$\textcircled{2} \sum |a_{ij}| < 1 (i=1,2,\dots,n), \quad \sum |a_{ij}| < 1 (j=1,2,\dots,n), \quad |\lambda_k| < 1$$

$$\textcircled{3} \text{对于特征值 } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \text{ 满足 } \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} (\text{对角线上元素}), \text{ 且 } \prod_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = |A|$$

④互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 对应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关

⑤性质④中的 λ 对应的 α 不唯一但线性无关, 性质依然成立

⑥ k 重 λ 对应的线性无关的 α 的个数 $\leq k$ (多次方程造成的重根)

特征值 λ 的简单性质:

① $k\lambda$ 是 kA 的特征值

② λ^k 是 A^k 的特征值

③ $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值

④ $\frac{1}{\lambda}|A|$ 是 A^* 的特征值

$tr(A)$ 称为 A 的迹, 等于主对角线元素相加
(我猜全称是 trail)

相似矩阵、可对角化条件

对于 n 阶方阵 A, B ，存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = B$

则称 A, B 相似，记作 $A \sim B$ ，若 B 是对角形矩阵 ($diag/\Lambda$)，则称 A 可对角化

矩阵相似的性质：

- ①反身性： $A \sim A$
- ②对称性：若 $A \sim B$ ，则 $B \sim A$
- ③传递性：若 $A \sim B, B \sim C$ ，则 $A \sim C$

若 $A \sim B$ ，有如下性质：

- ① AB 的特征值相等
- ② $|A| = |B|$
- ③ $tr(A) = tr(B)$
- ④ A 可逆 $\Leftrightarrow B$ 可逆, $A^{-1} = B^{-1}$
- ④ $A^m = B^m$

若 $A \sim B$ ，且 B 为对角形矩阵，则 A 有 n 个线性无关的特征向量

若 A 有 n 个互异的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则 $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

P 的求法：

- ①求出特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
- ②求出特征向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
- ③ $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ (用列向量表示矩阵)

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow r_i$ 重特征根, 基础解系有 r_i 个解

向量的内积: 和高中一样, 对应相乘再相加, 记作 (α, β)

向量的模(长度/范数): 和高中的计算方式一样, 记录方法不同(区别于行列式)

记作 $\|\alpha\|$ (四条线), $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$, 若 $\|\alpha\| = 1$, 则称 α 为**单位向量**

将一个向量化为单位向量: $\frac{\beta}{\|\beta\|}$

柯西施瓦兹不等式(可惜湿袜子不能吃): $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

三角不等式: $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

若 $\alpha \cdot \beta = 0$, 则称 $\alpha\beta$ **正交(垂直)**, 记作 $\alpha \perp \beta$

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 两两都正交, 且**不含零向量**, 则 $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 称为**正交向量组**

若正交向量组中的向量**模都为1**, 称为**标准正交向量组**

施密特正交化:

$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是**线性无关**的向量, 存在与其**等价的正交向量组** $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$, 可套公式:

$$\beta_1 = \alpha_1 \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

.....

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1}$$

若 n 阶方阵 A 满足 $A^T A = E$, 则称 A 为**正交矩阵**

正交矩阵的性质 (若 A 正交):

- ① $|A| = 1$ or -1
- ② $A^{-1} = A^T$, 且 A^{-1}, A^T 均为正交矩阵
- ③ 若 B 也正交, 则 AB 也正交
- ④ 若 α, β 为列向量, 则 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$
- ⑤ A 的行 (列) 向量组为标准正交向量组

若 $a_{ij} = A_{ij}$ 可推出 $A^* = A^T$

全是实数的对称矩阵称为**实对称矩阵**

实对称矩阵 A 的**不同** λ 对应的 α 互相正交

对于 n 阶方阵 A, B , 存在**正交矩阵** Q , 使得 $Q^{-1}AQ = B$, 则称 A, B **正交相似**

实对称矩阵**一定**能对角化, 求 Q 和 Λ 的步骤:

- ① 求 λ
- ② 求 α
- ③ **对 α 进行正交化、对角化** (如果 λ 是单根, 那么 α 求出来**已经正交**了)
只对重根的 α 做施密特正交化即可, 简便计算
- ④ α 做成列构成 Q
- ⑤ λ 按照顺序放置构成 Λ

二次型

每一项都是二次的多项式称为**二次型**，如 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ， x_1^2, x_2^2 称**平方项**， x_1x_2 称**交叉项**

二次型化为矩阵表达式的步骤：

- ①平方项的系数按顺序放在主对角线上
- ②交叉项的系数 $\div 2$ 后按顺序放到对称位置
- ③左乘未知数构成的列向量 X^T ，右乘未知数构成的行向量 X
- ④得出结果 $f(x) = X^T AX$ ， A 称为**二次型矩阵**，秩称为该**二次型的秩**

例：将 $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$ 化为矩阵表达式

步骤①：
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

步骤②：
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{顺序： } x_1x_2 \text{ 的系数在第 1 行第 2 列和第 1 列第 2 行})$$

步骤③：原式
$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

二次型矩阵一定对称

若二次型只有平方项，称为**标准二次型**

$f(x) = X^T A X$ 中的 A 不一定是标准型，令 $X = CY$ 称为**线性替换**

使得 $B = C^T A C$ 为**对角形**，原式化为 $f(x) = Y^T B Y$

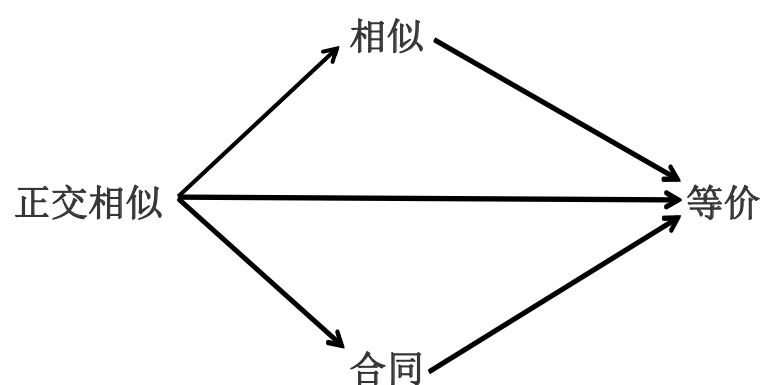
从以 X 为变量的二次型，二次型矩阵为 A

变成了以 Y 为变量的标准二次型，二次型矩阵为 B

若 A, B 是 n 阶方阵，存在可逆矩阵 C ，满足 $C^T A C = B$ ，则称 A, B 合同，记作 $A \underline{\sim} B$

若 A, B 合同，有如下性质：

- ①反身性，对称性，传递性
- ② $r(A) = r(B)$
- ③ $A = A^T \Leftrightarrow B = B^T$
- ④若 A, B 均可逆，则 $A^{-1} \underline{\sim} B^{-1}$
- ⑤ $A^T \underline{\sim} B^T$



化二次型为标准型

配方法：

①先配 x_1 ，再配 x_2, x_3, \dots, x_n

②配完 x_1 后，剩余的式子不能再出现 x_1

③记住最终结果是 $X = CY$

若式子全是交叉项，没有平方项，则令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \dots \\ x_n = y_n (n \neq 1, 2) \end{cases} \quad \text{即可}$$

初等变换法：

①对 A 和 E 做同样的初等列变换

②只对 A 做对应的初等行变换

③ A 化为对角形之时， E 就化为了 C

规范型：

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \dots - y_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = A$$

1 的个数称为正惯性指数，-1 的个数称为负惯性指数

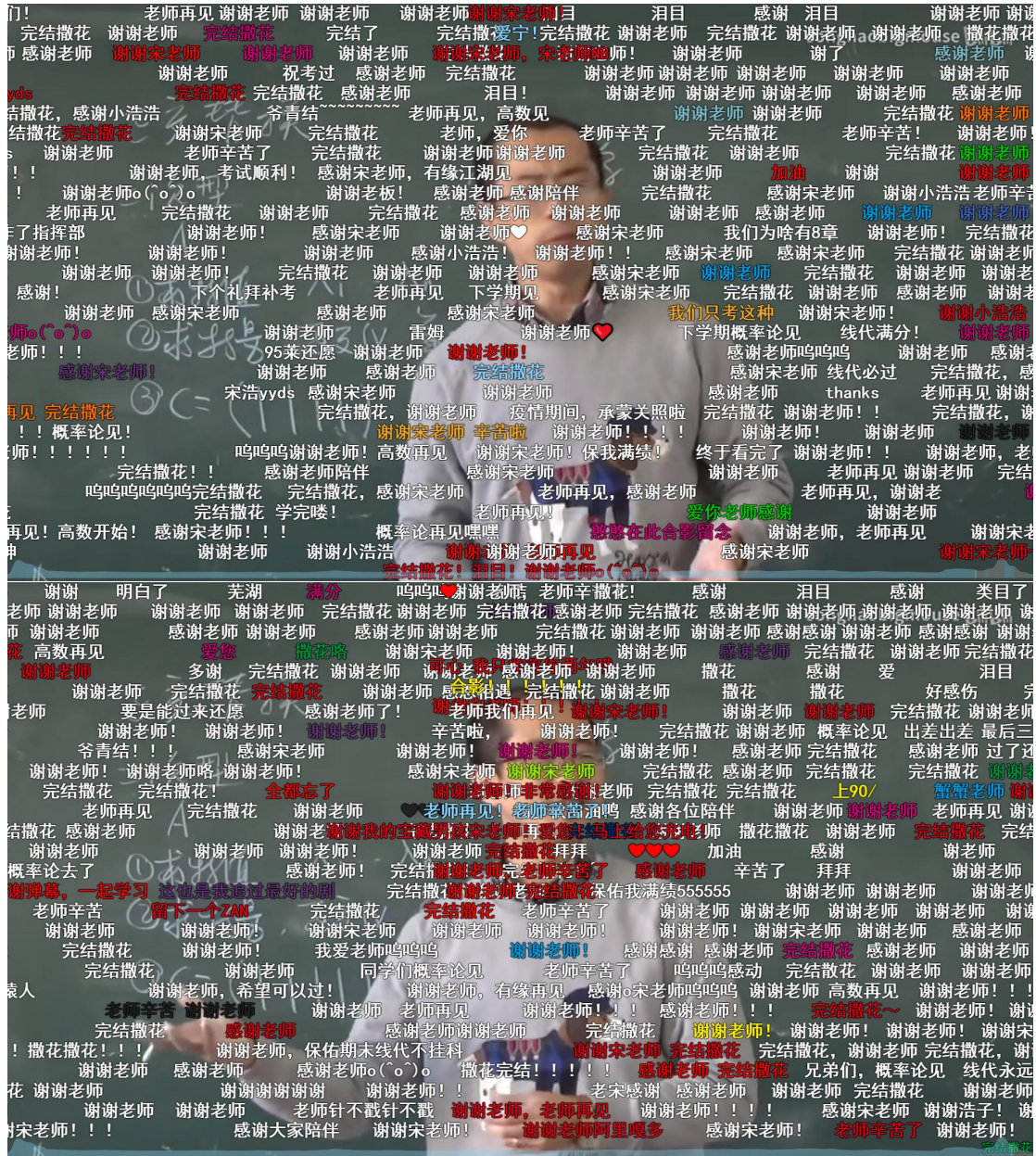
符号差 = 正惯性指数 - 负惯性指数

$r(A)$ = 正惯性指数 + 负惯性指数

正交替换法:

和实对称矩阵求 Q 和 Λ 的步骤一样，参考笔记 P19

(如果不是变态的老师，一般不用)



完结撒花