得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y'=1+x+y^2+xy^2$ 的通解为____ $\arctan y = x+\frac{1}{2}x^2+C$ ______.

2．已知函数 $u=x^{\frac{y}{z}}$，则 $\mathrm{d}u\big|_{(2,1,1)}=$______ $\mathrm{d}x+2\ln 2\mathrm{d}y-2\ln 2\mathrm{d}z$ ____________.

3．函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\big|_M=$__ $(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$ ______.

4．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？ 条件收敛 ______.

5．函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林级数的第 2019 项为___ x^{2018} __________.

6．求曲线 Γ： $x=1+e^t$, $y=2+e^{2t}$, $z=3+e^{3t}$ 在 $t=0$ 的切线方程为________

$x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ _________.

7. 已知曲线 $L: y=x^2\,(0\le x\le\sqrt{2})$，则 $\int_L x\mathrm{d}s=$_______ $\frac{13}{6}$ _______.

8. 已知 D 为 $x^2+y^2\le 4$，则 $\iint\limits_D(2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________ $\frac{8}{3}\pi$ ______.

9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其中 $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x\le 0\\ 2+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$， $S(x)$ 是其傅立叶级数的和函数，则 $S(11\pi)=$____ $\frac{\pi^2}{2}$ __________.

10. 平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限部分的面积等于____ $\sqrt{61}$ ___________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上的点到平面 $x+y-z=2$ 的最短距离.

解：设旋转抛物面上点 (x,y,z) 到平面 $x+y-z=2$ 的距离最短，

最短距离 $d=\dfrac{|x+y-z-2|}{\sqrt{3}}$，

则可写出拉格朗日函数

$$L=(x+y-z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)\text{，}$$

$$\begin{cases} L'_x = 2(x+y-z-2)-2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2(x+y-z-2)-2\lambda y = 0, \\ L'_z = -2(x+y-z-2)+\lambda = 0, \\ L'_\lambda = z-x^2-y^2 = 0, \end{cases}$$

解得唯一驻点为 $x=y=z=\dfrac{1}{2}$，

故符合题意的最短距离为 $d=\dfrac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

得 分

12. 计算 $I=\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 是曲线 $y=\dfrac{2}{\pi}x\sin x$ 由点 $(0,0)$ 到点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$ 的一段弧.

解： $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x,\quad Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2,$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y\cos x+6xy^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 积分与路径无关,

设 $L_1: y=0,\ x$从0到$\dfrac{\pi}{2}$, $L_2: x=\dfrac{\pi}{2},\ y$从0到1,

$$I=\int_{L_1+L_2}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi^2}{4}.$$

得 分

13. 计算二重积分：$\iint\limits_D \sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$，直线 $y=2$ 和射线 $y=x(x\geq 1)$ 所围成的平面区域.

解：原式$=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi y}{2}\right)\mathrm{d}y$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y=-\frac{4}{\pi^2}\int_1^2 y\mathrm{d}\sin\frac{\pi y}{2}$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}y\sin\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2+\frac{4}{\pi^2}\int_1^2\sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{\pi^2}-\frac{8}{\pi^3}\cos\frac{\pi y}{2}\Big|_1^2$$

$$=\frac{4}{\pi^2}+\frac{8}{\pi^3}$$

得 分

14. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧.

解：$I=\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

补充平面 $\Sigma_1: z=0$, 方向向上， 记 Σ 和 Σ_1 所围成区域为 Ω，

且它在平面 xoy 上的投影为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$, 由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 3\mathrm{d}V=3\cdot\frac{2}{3}\pi=2\pi,$$

$$I=2\pi-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi-\pi=\pi.$$

得 分

15. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{2n+1}\right|=1$，该级数的收敛半径为1.

当 $x=\pm1$ 时原级数发散, 所以原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$,

又 $2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{2x}{(1-x)^2}, x\in(-1,1)$,

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$,

所以 $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x+1}{(1-x)^2}$， $x\in(-1,1)$.

得 分

16. 求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征方程： $r^2+2r+1=0$,

解得特征根 $r_1=r_2=-1$,

对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$,

设非齐次方程特解为 $y^*=ze^x$,

代入原方程得 $z''+4z'+4z=x$, 令 $z=ax+b$,

代入上式得 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{4}$,

所以非齐次方程特解为 $y^*=(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})e^x$,

原方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{4}(x-1)e^x$.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设 $y=f(x+\lambda t)+g(x-\lambda t)$, 其中 f,g 二次可导, 求证：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\lambda^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

证明： $\frac{\partial y}{\partial t}=\lambda f'(x+\lambda t)-\lambda g'(x-\lambda t)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\lambda^2 f''(x+\lambda t)+\lambda^2 g''(x-\lambda t)$,

$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(x+\lambda t)+g'(x-\lambda t)$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''(x+\lambda t)+g''(x-\lambda t)$,

所以 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\lambda^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

得 分

18.证明对任意正整数 n, 方程 $x^n+nx-1=0$ 有唯一正实根 x_n,

且当常数 $\lambda>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\lambda}$ 收敛.

证明：设 $f(x)=x^n+nx-1$, 则 $f(0)=-1$, $f(1)=n>0$,

由零点定理知原方程在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根 x_n.

又 $f'(x)=nx^{n-1}+n>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

故方程 $x^n+nx-1=0$ 有唯一正实根 x_n.

由 $x_n^n+nx_n-1=0$ 有 $0<x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n}$,

所以 $x_n^{\lambda}<\frac{1}{n^{\lambda}}$, 因为 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$ 收敛, 故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\lambda}$ 收敛.