复变期末试题及答案

一、 填空题。

1.$z_1 = 5 - 5i$， $z_2 = -3 + 4i$，则$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

2.$\left(\sqrt{3} + i\right)^{10} =$1024∠300° 。

3.设$x^2 - 2x + by^2 + 1 + a(x-1)yi$为解析函数，则 a=2 ,b=-1 .

4.Ln(1+i)(-3+4i)=2ln5+ln2+2π(k+arctan(-$\frac{1}{7}$))

5.设 C 为从原点到 3+4i 的直线段，则$\oint_c \bar{z}dz =$12.5。

6.$\int_1^{1+i} ze^z dz = ie^{1+i}$

7.级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} z^n$的收敛半径为 R= 1/e .

8.z=0 是$\frac{1}{(1-\cos z)^2}$的 4 级极点。

9.$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-jwt} dt = 1$ 。

二、计算题。

1.求$f(z) = \frac{1}{\sin z}$的所有孤立奇点。z=2kπ

2.计算$27^{\frac{1}{3}}$。3∠2π($\frac{k}{3}$)，k=0,1,2.

3.若$(1+i)^n = (1-i)^n$，求 n。n=4k(k 为自然数)

4.计算$i^{\sqrt{3}}$。$e^{2\sqrt{3}k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi i}$。

三、综合题。

1.把函数$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-2)}$在 4<|z-2|<+∞内展开为洛朗级数。

$$f(z)=\frac{z}{(z+2)(z-2)}=\frac{1}{z-2}\times\frac{z-2+2}{z-2+4}=\frac{1}{z-2+4}+\frac{2}{z-2}\times\frac{1}{z-2+4}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}\right)\times\left(1+\frac{2}{z-2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{z-2}\right)\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n$$

$$=\frac{1}{4}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n(z-2)^{n-1}$$

4<|z-2|<+∞

2.把函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-3)^2}$ 在 0<|z-3|<3 内展开为洛朗级数。

$$f(z)=\frac{-1}{(z-3)^2}\times\left(\frac{1}{z}\right)'=\frac{-1}{(z-3)^2}\times\left(\frac{1}{3+z-3}\right)'=\frac{-1}{(z-3)^2}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{3}}\right)'$$

$$=\frac{-1}{3(z-3)^2}\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n\right)'=\frac{-1}{9(z-3)^2}\times\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\times n\times\left(\frac{z-3}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\times n\times\frac{(z-3)^{n-3}}{3^{n+1}}$$

0<|z-3|<3

四、用留数计算。

1.计算 $\operatorname{Re}s\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]$，原式=0

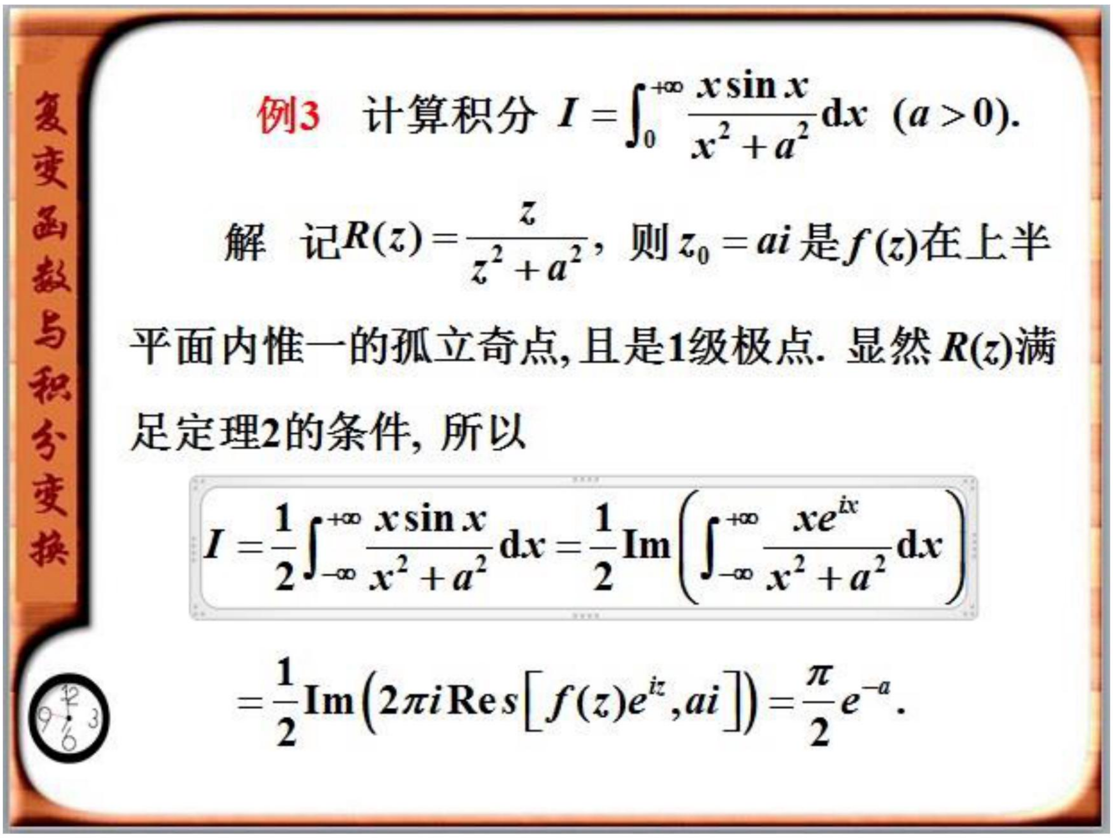
2.计算 $\oint_{|z|=1}\frac{2i}{z^2+4z+1}dz$，一级极点 $\sqrt{3}-2$ 和 $-\sqrt{3}-2$（略去）

原式= $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

3.计算 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(2+\sqrt{3}\cos x\right)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dz}{iz\left(2+\sqrt{3}\,\dfrac{z^2+1}{2z}\right)}$$

4.计算$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+1} dx$



参考上图便可得出答案

五、设$v(x,y)=x^3-3xy^2$，求以 v 为虚部的解析函数。

$u(x,y)=y^3-3x^2y+C$

$f(z)=y^3-3x^2y+C+(x^3-3xy^2)i$