

得分

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

1、 $\operatorname{Im}(e^{3+i}) =$ _____。

2、求主辐角 $\arg(-1-i) =$ _____。

3、 $\int_0^i z \cos z \, dz =$ _____。

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (3-4i)^n z^n$ 的收敛半径为_____。

5、 $i^{(1+i)} =$ _____。

6、 $(z+3)\operatorname{Re}(z+3)$ 的可导点为 $z =$ _____。

7、设 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) =$ _____。

8、 $\sqrt[6]{(1+i)^2}$ 在复平面上有_____个相异根。

9、 $\cos 3t + \sin t$ 的 Fourier 变换为_____。

10、 $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}} dz =$ _____。

得分

二、计算题（每题 5 分，共 20 分）

1、计算 $\sin(4+7i)$

2、解方程 $e^z = -3+4i$

- 3、 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 3; \\ 0, & |t| > 3. \end{cases}$ 的 Fourier 变换。 4、计算 $(1+i)^{11}(1-i)^7$

得 分

三、计算留数与积分。(每题 8 分，共 40 分)

- 1、计算留数 $\text{Res}\left[\frac{1-e^{3z}}{z^3}, 0\right]$ 。

- 2、计算积分 $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+1} dz$ 。

3、计算积分 $\int_C (x + y^2 + iy) dz$ ，其中 C 是从 0 到 $2+i$ 的直线段。

4、计算积分 $\int_{|z|=4} \frac{z}{\sin z} dz$ 。

5、利用留数计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos 5x}{(1+x^2)^2} dx$ 。

得 分

四、求已知函数的展开式。(共 15 分)

1、把函数 $f(z) = e^z$ 在 $z_0 = 1+i$ 展开成泰勒级数。(5 分)

2、将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)}$ 在在下列圆环域内展成洛朗级数。(10 分)

1) $0 < |z+2| < 2$; 2) $2 < |z| < +\infty$.

得 分

五、证明：（5 分）

设 $f(z)$ 在复平面上解析。设 M 为 $|f(z)|$ 在曲线 $C: |z - z_0| = 2$ 上的最大值，即

$$M = \max_{|z-z_0|=2} |f(z)|。$$

证明： $\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; 0! = 1)。$