一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．已知函数 $z = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)} =$ ____________.

2. 设 L 是 xOy 面的圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 的顺时针方向，则 $\oint_L x^5 \mathrm{d}s =$ ________________.

3．函数 $u = xyz - 2yz - 3$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $(2,2,1)$ 的方向导数等于__________________.

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散？_______________.

5． $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数为____________________________________.

6. 微分方程 $(y+1)^2\mathrm{d}y + x^3\mathrm{d}x = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解为_________________________.

7. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (a > 0)$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}S =$ __________________.

8.曲线 $\begin{cases} xyz = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线方程为______________.

9.螺旋线 $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 2\theta$ 在点 $(1,0,0)$ 的切线方程为________________.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S\left(99\pi\right) =$ __________________________________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域及和函数.

12. 求由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 与曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体的体积.

13. 计 算 曲 面 积 分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ， 其 中 Σ 为 曲 面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

14. 求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通

15.求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

16. 计算 $I=\int_L(12xy+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y$, 其中 L 是由点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $O(0,0)$, 再沿 x 轴到点 $B(2,0)$ 的曲线.

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $\{x_n\}$ 是正数列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(e^{\frac{1}{n}}-1)}{x_n}=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

18. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，

又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，证明：$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2+y^2$.