《线性系统理论基础》期末考试试卷（A）

北京工业大学电控学院　　日期：2011 年 6 月 17 日

姓名：____________　学号：____________　得分：____________

题号	一	二	三	四	五	六
分数	20	20	20	10	10	20
得分						

一、（20 分）按如下要求建立系统的状态空间模型

（1）已知系统的微分方程描述为 $\dddot{y}+3\ddot{y}-2\dot{y}+y=6u$，写出其状态空间模型。

（2）已知系统由图 1 所示的基本模块构成，写出其状态空间模型。

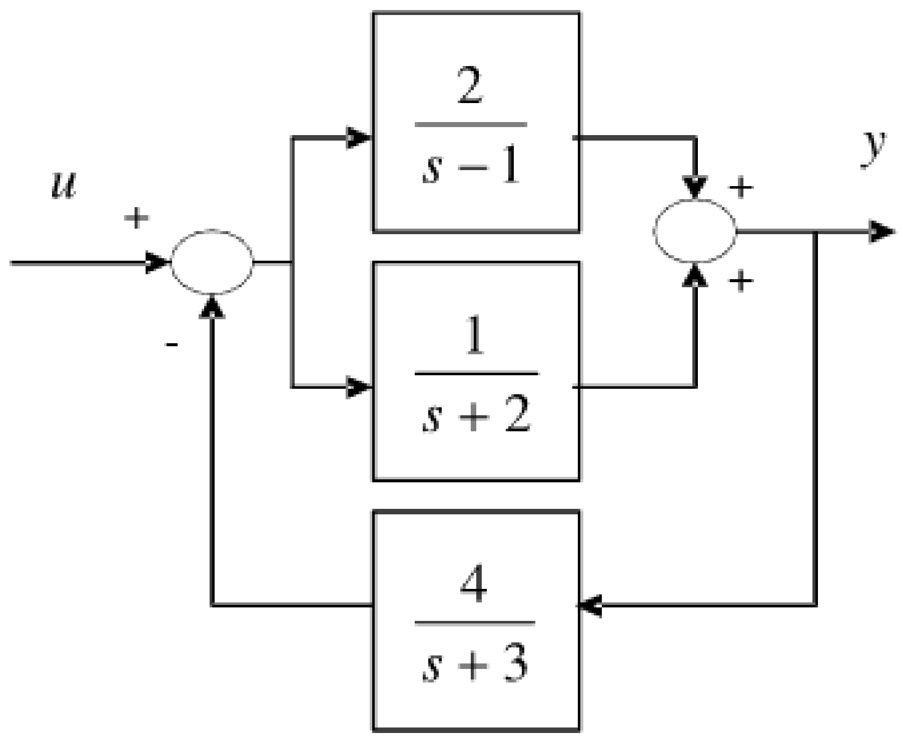


图 1

解：（1）$a_0=1,\ a_1=-2,\ a_2=3.\quad b=6$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}u$$

$$y=[\ 1\quad 0\quad 0\ ]x$$

（2）

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+2u_1 & u_1=u_2=u-x_3\\ \dot{x}_2=-2x_2+u_2 & u_3=x_1+x_2\\ \dot{x}_3=-3x_3+4u_3 & y=x_1+x_2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-2x_3+2u\\ \dot{x}_2=-2x_2-x_3+u \qquad y=x_1+x_2\\ \dot{x}_3=4x_1+4x_2-3x_3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&-2&-1\\4&4&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=[\ 1\quad 1\quad 0\ ]x$$

二、(20 分) 已知系统的状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=[2 \quad 0]x$$

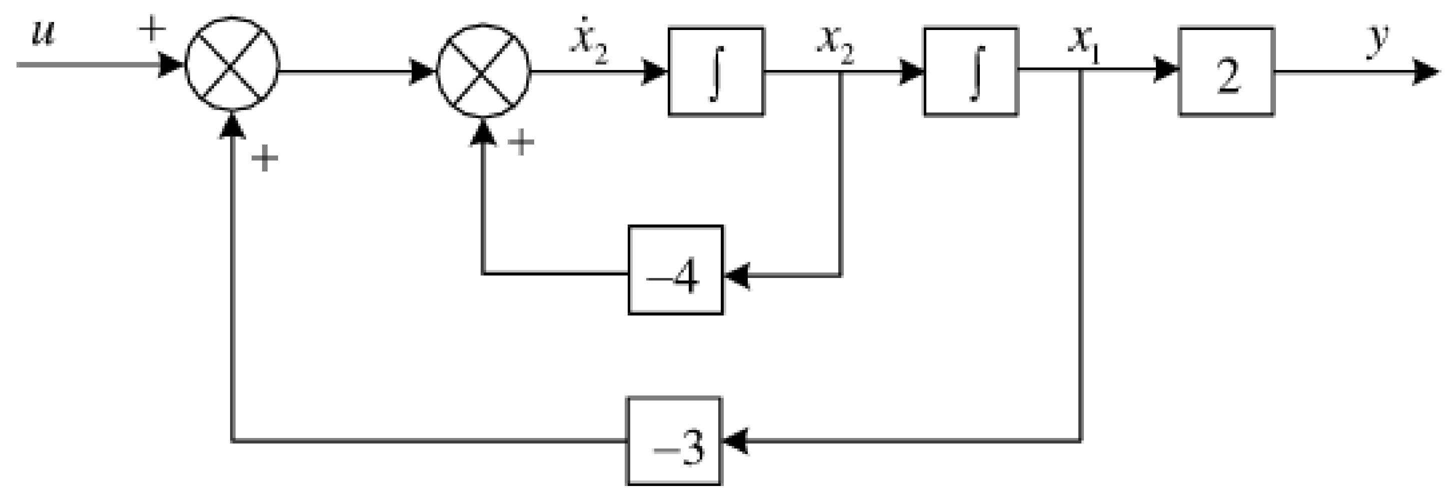
（1）画出系统的结构框图。

（2）将该系统化为约当（或对角线）标准型。

（3）计算标准型系统在 $u=e^{-t}$ 激励下的零初态响应和输出响应。

解：（1）因为 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-3x_1-4x_2+u\\ y=2x_1\end{cases}$

所以系统的结构框图如下：



（2）

$$\left|\lambda I-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 3 & \lambda+4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+4)+3=\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)$$

所以：$\lambda_1=-1\ \lambda_2=-3$

交换矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 9\end{bmatrix}\qquad P^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}9 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}\qquad CP=\begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}$$

所以约旦标准型为：

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}u$$
$$y=[-3 \quad -1]x$$

（3）

$$\bar{x}(t)=\int_0^t e^{\begin{bmatrix}-1&0\\0&-3\end{bmatrix}(t-\tau)}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&-e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int_0^t e^{\tau}e^{-\tau}d\tau&0\\0&\int_0^t e^{3\tau}e^{-\tau}d\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&-e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t&0\\0&\frac{1}{2}(e^{2t}-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}te^{-t}\\ \frac{1}{12}(e^{-t}-e^{-3t})\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\frac{3}{2}te^{-t}-\frac{1}{12}(e^{-t}-e^{-3t})$$

三、(20 分)给定系统状态空间模型如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&2\end{bmatrix}x$$

（1）判断该系统的能控性，写出判断过程。若不能控，分别指出能控和不能控的状态分量，并进行能控子空间分解。

（2）写出原系统的对偶系统，并判断对偶系统的能控性。

解：（1） x_1、x_3 能控， x_2 不能控。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}-2&0&1\\0&3&0\\ \hline 0&0&-2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\\ \hline x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\ \hline 0\end{bmatrix}u$$

（2）

$$\begin{cases}\dot{\psi}=-A^T\psi+C^T\eta\\ \varphi=B^T\psi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{\psi}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\psi+\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\eta\\ \varphi=[1\ \ 0\ \ 1]\psi\end{cases}$$

原系统能观，所以对偶系统能控。

四、（10）给定线性系统如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}x$$

（1）将其化成能控标准 1 型。

（2）判断系统的能观性。若不能观，则进行能观性子空间分解。

解：（1）

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)+2=\lambda^2+3\lambda+2$$

所以：$a_0=2$ ，$a_1=3$

$$T_{C1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\qquad T_{C1}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{C1}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\qquad b_{C1}=T_{C1}^{-1}b=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$C_{C1}=CT_{C1}=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$$

（2）

由于 $rank\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=1<2=n$

所以系统不可观测。

$$T_0=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$T_0^{-1}AT_0=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix},$$

$$T_0^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$$

$$CT_0=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

五、（10 分）给定线性系统如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}x$$

（1）当 $a=1$ 时求系统的所有平衡点；给出系统仅有唯一一个平衡点时参数 a 满足的条件。

（2）当 $a=-2$ 时通过李亚普诺夫直接法（即求李亚普诺夫方程 $A^TP+PA=-I$ 的解 P 并验证其为正定矩阵）判断系统的渐近稳定性。

解：

（1）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0, \quad \Rightarrow \quad \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2=0\}$$

$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时仅有平衡点 $(0,0)$。

（2）

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} -2p_1 & -2p_2 \\ p_1-p_3 & p_2-3p_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2p_1 & p_1-3p_2 \\ -2p_2 & p_2-3p_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0$$

化简得：

$$\begin{cases} -4p_1+1=0 \\ p_1-5p_2=0 \\ 2p_2-6p_3=0 \end{cases} \quad \text{所以：}\begin{cases} p_1=\dfrac{1}{4} \\ p_2=\dfrac{1}{20} \\ p_3=\dfrac{1}{60} \end{cases}$$

$$p=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{20} & \dfrac{1}{60} \end{bmatrix}$$

$$\text{因为：}|p_1|=\frac{1}{4}>0,\ |p|=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{20} & \dfrac{1}{60} \end{vmatrix}=\frac{1}{240}-\frac{1}{400}>0,$$

所以 $p>0$，即当 $a=-2$ 时，系统在平衡点 $(0,0)$ 处渐进稳定。

六、（20 分）给定单输入单输出系统的状态空间模型 $\dot{x} = Ax + bu, y = cx$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设计一个带有全维状态观测器 $\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + bu + ly$ 的极点配置状态反馈控制 $u = -kx$，即计算状态反馈增益矩阵 k 和观测器反馈矩阵 l，使得闭环系统的期望极点为 $\bar{\lambda}_1 = -2, \bar{\lambda}_2 = -5$，观测器的期望极点为 $\lambda_1^* = -2$， $\lambda_2^* = -7$。

解：（1）

$$\left|\lambda I - (A - bk)\right| = (\lambda + 2)(\lambda + 5),$$

因为：

$$\left|\lambda I - \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[k_1 \ \ k_2]\right)\right| = \lambda^2 + 7\lambda + 10,$$

即：$\begin{vmatrix} \lambda + k_1 & k_2 - 3 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10,$

所以：$\lambda^2 + k_1\lambda + 3 - k_2 = \lambda^2 + 7\lambda + 10,$

即：$\begin{cases} k_1 = 7 \\ k_2 = -7 \end{cases}$

（2）

$$\left|\lambda I - \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}[0 \ 1]\right)\right| = (\lambda + 2)(\lambda + 7)$$

因为：

$$\begin{vmatrix} \lambda & \rho_1 - 3 \\ 1 & \lambda + \rho_2 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 7)$$

所以：$\lambda^2 + \rho_2\lambda + 3 - \rho_1 = \lambda^2 + 9\lambda + 14$

即：$\begin{cases} \rho_1 = -11 \\ \rho_2 = 9 \end{cases}$