

概率统计练习题一

一、填空题（每空 2 分, 共 36 分）

1. 设 A, B 为事件, $P(A)=a$, $P(B)=0.3$, $P(\bar{A} \cup B)=0.7$, 当 A 与 B 互不相容时, 则 $a =$ _____; 当 A 与 B 相互独立时, $a =$ _____。

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} a + be^{-0.5x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ 其中 a 与 b 为常数, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$, 则 $\lambda =$ _____, $E(X) =$ _____。

4. 随机变量 X, Y 满足 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = 3/4$, $P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = 4/7$, 则 $P(\max(X, Y) \geq 0) =$ _____。

5. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立, 且 $X_1 \sim N(0, 2), X_2 \sim N(1, 3), X_3 \sim N(3, 1)$, 令 $X = 2X_1 + 3X_2 - X_3$, 则 $E(X) =$ _____, $Var(X) =$ _____。进一步, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 且 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772$, 则 $P\{0 < X < 6\} =$ _____。

6. 某产品由甲、乙两车间生产, 甲车间占 60%, 乙车间占 40%, 且甲车间的正品率为 90%, 乙车间的正品率为 95%, 则任取一件是次品, 它是乙车间生产的概率为 _____。

7. 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则

$E(X) =$ _____, $Var(X) =$ _____, $Cov(X, Y) =$ _____, $\rho_{XY} =$ _____。

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机样本, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

则 $\bar{X} \sim$ _____, $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sqrt{S^2} \sim$ _____, $(n-1)S^2 / \sigma^2 \sim$ _____。

二、解答题

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

9. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ bx + c, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 又 $E(X) = 2$,

$P\{1 < X < 3\} = 3/4$, 求

(1). 常数 a, b, c .

(2). $Var(X)$.

10. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot e^{-y}, & 0 \leq x \leq y < \infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 求常数 c ;

(2). 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

(3). 问 X 和 Y 是否独立? 为什么?

(4). 求 $E(Y)$.

11. 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 令 $Y = X^2$, 求:

(1). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$; (2). $P\{0.25 < Y < 1.96\}$; (3). $E(Y)$ 和 $Var(Y)$.

12. 若 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为抽自总体 X 的随机样本, 总体 X 有概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 为待估参数, 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 与极大似然估计 θ^* .

13. 从工厂产品库中随机抽取 16 只零件, 测得他们的长度 (单位为厘米) 为

2.14, 2.10, 2.13, 2.15, 2.13, 2.12, 2.13, 2.10,

2.15, 2.12, 2.14, 2.10, 2.13, 2.11, 2.14, 2.11.

假设零件长度分布为 $N(\mu, \sigma^2)$, 求如下三种参数的情况求置信系数为 0.95 的置信区间:

(1). $\sigma^2 = 0.01^2$, 求 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间,

(2). σ^2 未知, 求 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间,

(3). 求 σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间.

附: 标准正太分布、 t 分布和 χ^2 分布表:

| | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|
| | | | |
| $t_9(0.025) = 2.2622$ | $t_9(0.05) = 1.8331$ | $t_{10}(0.025) = 2.2281$ | $t_{10}(0.05) = 1.8125$ |
| $\chi_9^2(0.025) = 19.023$ | $\chi_9^2(0.05) = 16.919$ | $\chi_9^2(0.975) = 2.700$ | $\chi_9^2(0.95) = 3.325$ |

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

| | | | |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| $\chi_{10}^2(0.025) = 20.483$ | $\chi_{10}^2(0.05) = 18.307$ | $\chi_{10}^2(0.975) = 3.247$ | $\chi_{10}^2(0.95) = 3.940$ |
|-------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|