

考试说明：考试闭卷；可使用文曲星外的计算器。

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ 学号：_____ 班号：_____ 得分：_____

注：本试卷共 6 大题，共 7 页，满分 100 分。考试时必须使用卷后附加的统一答题纸或草稿纸。

页面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二 (1)	二 (2)	二 (3)	二 (4)	二 (5)	总分
得分							
教师							

一、填空题 (15 个空，每空 2 分，共 30 分)

1. 设 $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$. 则当 A 与 B 互斥时, $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$; A 与 B 相互独立时, $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在相同条件下做 4 次独立试验, 假设每次试验时事件 A 发生的概率都是 p , 且 4 次试验中 A 恰发生 1 次与发生 2 次的概率相等. 用 X 表示 4 次试验中 A 发生的次数时, $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$, $Var(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设随机变量 X 服从参数 λ 的泊松分布, 且 $P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-2}$, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$, $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设随机变量 X 可能取的值为 $-2, 0$ 和 1 , 且 $P\{X = -2\} = 0.4$, $P\{X = 0\} = 0.3$. 则 $E(X) = \underline{\hspace{2cm}}$, $Var(X) = \underline{\hspace{2cm}}$.
5. 若随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且 $X_1 \sim N(3, 3^2)$, $X_2 \sim N(1, 2^2)$, $X = X_1 - 2X_2$, 则 $X \sim \underline{N(1, 5)}$, $P\{-4 < X < 6\} = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为抽自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机样本, μ 与 σ^2 为未知常数, \bar{X} 与 S^2 分别为样本均值与方差, 即 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
 则 $\bar{X} \sim \underline{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \underline{\chi^2_{n-1}}$, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim \underline{t_{n-1}}$, μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间 $\underline{[\bar{X} - \sqrt{S^2/n} \cdot t_{\alpha/2}, \bar{X} + \sqrt{S^2/n} \cdot t_{\alpha/2}]}$, σ^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间 $\underline{[\frac{(n-1)S^2}{2}, \frac{(n-1)S^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha/2}]}$.

注：标准正态分布分布函数值 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(1.645) = 0.95$.

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享



二、解答题 (每题 14 分, 共 70 分)

注: 由此以下各题目要求写过程, 否则没有分数!

1. 有型号相同的产品三箱, 第一箱装 12 件, 其中 2 件为次品; 第二箱装 8 件, 其中只有 1 件为次品; 第三箱装 20 件, 其中 4 件为次品.

- (1). 从三箱抽取 1 箱, 然后从中随机抽取 1 件产品, 求抽到次品的概率;
- (2). 如发现抽到的产品为次品, 求其抽自第 1 箱的概率.



$$f(x_1, x_2) = \underline{f(x_1) f(x_2)} = 1$$

$$f(x) = \int_0^1 \underline{f(x_1, x_2)} dx = x$$

$$f(x) = \int_0^1 f(x_1, x_2) dx$$

2. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且二者均服从 $[0, 1]$ 区间上均匀分布, 令 $Y = X_1 + X_2$, 求

$$f(x) = 1$$

~ /

- (1). X 的概率密度函数 $f_X(x)$;
- (2). $E(X)$ 和 $Var(X)$;
- (3). $Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

$$f(x) = 2x \quad \frac{1}{2}x$$

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{12}$$

$$Var(X) = E(X^2) - \bar{E}(X^2) = \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

$$Y = X^2, \quad X = \sqrt{Y}$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) / \sqrt{y}' = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

资料由公众号【工本喵】收集整理并免费分享



3. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 有联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} ay(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1). 确定常数 a ;
- (2). 求边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;
- (3). 回答 X 与 Y 是否独立? 为什么?
- (4). 计算 $E(Y)$.

$$\int_0^1 \int_0^x ay(1-x) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} a x (1-x) dx$$

$$= \frac{1}{6} a$$

$$a = 1/2$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12}$$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享



数学建模与统计

4

$$E(X^2) - E(X)^2$$

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的随机样本, $\sigma^2 > 0$ 是未知参数. 求

(1). σ^2 的矩估计 $\hat{\sigma}^2$;

(2). σ^2 的极大似然估计 $\tilde{\sigma}^2$.

(3). 回答 $\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的无偏估计, 为什么?

$$\sigma^2 = S^2$$

$$\frac{\ln(\pi f(x))}{d\sigma}$$

$$G^2 = \bar{X}$$

$$\sigma^2 \rightarrow 0$$

$$(\ln, \sigma^2)$$

$$E(X^2) - E(X)^2$$

$$\frac{1}{n} \sum X_i^2 = G^2$$



5. 假设某品牌日光灯的使用寿命 (单位: 小时) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 未知. 现从该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验, 测得它们寿命的平均值为 100.4, 样本方差为 0.49. 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 从样本看:

(1). 能否认为 $\mu = 100$? (2). 能否认为 $\sigma^2 < 0.5$?

t 分布与 χ^2 分布表

$t_8(0.025) = 2.3060$	$t_8(0.05) = 1.8595$	$t_9(0.025) = 2.2622$	$t_9(0.05) = 1.8331$
$\chi_8^2(0.025) = 17.535$	$\chi_8^2(0.05) = 15.507$	$\chi_9^2(0.025) = 19.023$	$\chi_9^2(0.05) = 16.919$
$\chi_8^2(0.975) = 2.180$	$\chi_8^2(0.95) = 2.733$	$\chi_9^2(0.975) = 2.700$	$\chi_9^2(0.95) = 3.325$

$$\mu_0 = 100, \quad \mu \neq 100.$$

$$t = \frac{100.4 - 100}{S/\sqrt{n}} = \frac{0.4}{0.7/\sqrt{9}} = 1.714$$

$$t < t_8(0.025) \quad \text{接受 } H_0.$$

$$\sigma^2 < 0.5 \quad \sigma^2 > 0.5$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{8 \times 0.49}{0.5} = 7.84$$

$$\chi_8^2 > 0.95 \quad 7.33.$$

