北京工业大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷（答案）

考试说明：考试日期: 2022 年 10 月 28 日，考试时间：95 分钟，考试方式：闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：____________　　学号：_____________　　班号：____________

。。。

注： 本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan 3x)^{\frac{1}{\sin(\sin x)}} =$ ______ e^3 __________

2. 曲线 $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 上斜率为 1 的切线方程为 $y-2=x-(\pi-2)$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=xy$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ______ $\dfrac{y(y-1)}{x(1-y\ln x)}$ ____________

4. 函数 $y=1-x^2\sqrt{3-x^2}$ 在 $[0,\sqrt{3}]$ 上的最小值为_______ -1 ______________

5. 曲线 $y=\dfrac{x|x+1|}{x^2-1}+(x-1)\sin\dfrac{1}{x^2+1}$ 的水平渐近线和垂直渐近线共____ 3 ___条。

6. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+\pi)-f(x)]=$ _______ πA __________________

7. 已知 $\lim\limits_{h\to\infty} h\left[f\left(\sin\dfrac{2}{h}\right)-f(0)\right]=\dfrac{1}{2}$，则 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=0}=$ ______ $\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x$ ____________

8. 设 $y=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$，则 $y^{(2022)}(0)=$ ______ 2019×2022 ______

9. 已知当 $x\to 0$ 时函数 $\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{1-\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}$ 与 $x^{\alpha}(1+\sqrt{x})$ 为同阶无穷小，则 $\alpha=$ ____ $\dfrac{11}{4}$ __

10. 设 $y=f(\operatorname{arccot}x+\sec x)e^{f(x)}$，其中函数 $f(x)$ 可微，则

$$\frac{dy}{dx}=f'(\operatorname{arccot}x+\sec x)(\sec x\tan x-\frac{1}{1+x^2})e^{f(x)}+f(\operatorname{arccot}x+\sec x)e^{f(x)}f'(x)$$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设 $y=\ln\dfrac{2x+1}{2-3x+x^2}(x>2)$，求 y',y'',y''' 以及 $y^{(n)}(x)$.

解 $y=\ln\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\ln(2x+1)-\ln(x-1)-\ln(x-2)$

$=\ln 2+\ln(x+\dfrac{1}{2})-\ln(x-1)-\ln(x-2)$ ------ 2'

$y'=\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=(x+\dfrac{1}{2})^{-1}-(x-1)^{-1}-(x-2)^{-1}$ ------4'

$y''=(-1)(x+\dfrac{1}{2})^{-2}-(-1)(x-1)^{-2}-(-1)(x-2)^{-2}$ ------6'

$y'''=(-1)(-2)(x+\dfrac{1}{2})^{-3}-(-1)(-2)(x-1)^{-3}-(-1)(-2)(x-2)^{-3}$ ------8'

$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x+\dfrac{1}{2})^{-n}-(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x-1)^{-n}-(-1)(-2)\cdots(-n+1)(x-2)^{-n}$

$=(-1)^{n-1}(n-1)![(x+\dfrac{1}{2})^{-n}-(x-1)^{-n}-(x-2)^{-n}]$ ------10'

得 分

12．求函数 $y=(x-6)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

解　$y=(x-1-5)\sqrt[3]{(x-1)^2}$，$y'=\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{5(x-3)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}$，　----1’

$$y''=\frac{5}{3}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}-(x-3)\cdot\frac{1}{3}\cdot(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{10x}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$ ------2’

函数在 $x=1$ 处不可导. 令一阶导数 $y'=0$，得驻点 $x=3$, .　------3’

在 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 上，$y'>0$，在 $(1,3)$ 上，$y'<0$，所以 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ 是单增区间，$(1,3)$ 是单减区间，　------5’

函数在 $x=1$ 处取得极大值 $y(1)=0$，$x=3$ 处取得极小值 $y(3)=-3\sqrt[3]{4}$. ------7’

在 $(-\infty,0)$ 上，$y''<0$，在 $(0,+\infty)$ 上，$y''>0$，所以 $(-\infty,0)$ 是凸区间，$(0,+\infty)$ 是凹区间.　------9’

$(0,-6)$ 是拐点.　------10’

得 分

13. 求函数 $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}+\frac{\sin(x+1)}{x(x+1)}\cos\frac{1}{\pi-x}$ 的间断点，并判断其类型。

解　函数定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\pi)\cup(\pi,+\infty)$，

$x=-1,x=0,x=1,x=\pi$ 是间断点.　------2’

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}-1}{e^{-\frac{1}{2}}+1}-\cos\frac{1}{\pi+1}$，$x=-1$ 是第一类间断点中的可去间断点. ------4’

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，$x=0$ 是第二类间断点中的无穷间断点.　------6’

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1-\frac{\sin2}{2}\cos\frac{1}{\pi-1}$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1-\frac{\sin2}{2}\cos\frac{1}{\pi-1}$，

$x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.　------8’

$\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 不存在，$x=\pi$ 是第二类间断点中的振荡型间断点. ------10’

得 分

14. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上二阶可导，$g(x)=\begin{cases} ax^2+b\sin x+c, x>0 \\ f(x), \quad x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶可导，求常数 a,b,c.

解 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，可推出 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，一阶可导。------1’

(1)因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)$，

由 $\lim\limits_{x\to0^+}ax^2+b\sin x+c=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\Rightarrow c=f(0)$. ------4’

(2) 因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处一阶可导，所以 $g'(0)=g'_-(0)=g'_+(0)$，

由 $g'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax^2+b\sin x+f(0)-f(0)}{x}=b$，$g'_-(0)=f'_-(0)$，$\Rightarrow b=f'_-(0)$. ---7’

(3)当 $x>0$ 时，$g'(x)=2ax+b\cos x$，

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，所以 $g''_-(0)=g''_+(0)$，

由 $g''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g'(x)-g'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2ax+f'_-(0)(\cos x-1)}{x}=2a$， $g''_-(0)=f''_-(0)$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}f''_-(0)$. ------10’

得 分

15. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{\tan\ln(1+3x^2)(e^{-x^2}+1)\arcsin(x+x^2)}$.

解 原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{3x^3}$ ------2’

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-1-2x}{9x^2}$ ------4’

$=\dfrac{1}{18}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-1}{x}$ ------6’

$=\dfrac{1}{18}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-e^x\sin x}{1}$ ------8’

$=\dfrac{1}{18}$. ------10’

得 分

16.设参数方程 $\begin{cases} x = te^{2t} \\ e^{2t} - e^{y^2} - = 1 - e \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$，求

$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

解 $\dfrac{dx}{dt} = (2t+1)e^{2t}$ ------1’

方程 $e^{2t} - e^{y^2} - = 1 - e$ 两端同时对 t 求导，得

$2e^{2t} - e^{y^2} \cdot 2y \cdot \dfrac{dy}{dt} = 0$ ------2’

解出 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^{2t}}{ye^{y^2}}$ ------3’

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{(2t+1)ye^{y^2}}$$ ------4’

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{[2ye^{y^2} + (2t+1)\frac{dy}{dt}e^{y^2} + (2t+1)ye^{y^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt}]}{(2t+1)^2 y^2 e^{2y^2}}$$

$$= -\frac{2y^2e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^2 y^3 e^{2y^2}}$$ ------5’

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2y^2e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^3 y^3 e^{2y^2} e^{2t}}$$ ------6’

$t = 0$ 时代入 $e^{2t} - e^{y^2} - = 1 - e$，得 $y = \pm 1$. ------8’

$y = -1$ 时，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \dfrac{2e+3}{e^2}$ ------9’

$y = +1$ 时，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = -\dfrac{2e+3}{e^2}$ ------10’

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明： $\sin x+\tan x>2x$.

证　设 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$， ------1’

$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2$， ------2’

$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x(\dfrac{2-\cos^3 x}{\cos^3 x})>0$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$. ------3’

故$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时， $f'(x)$单调增加， $f'(x)>f'(0)=0$， ------4’

故$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时， $f(x)$单调增加， $f(x)>f(0)=0$，

所以 $\sin x+\tan x>2x$. ------5’

得 分

18. 设 $f(x)$ 在$\left[a,b\right](a>0)$上可微，证明：至少存在一点$\xi\in\left(a,b\right)$，使得

$$\frac{a^n f(b)-b^n f(a)}{a^n-b^n}=f(\xi)-\frac{1}{n}\xi f'(\xi)\ (n\geq 1).$$

证　设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^n}, h(x)=\dfrac{1}{x^n}$， $x\in[a,b]$，

对 $g(x),h(x)$ 在$[a,b]$上应用柯西中值定理，得： ------3’

至少存在一点$\xi\in\left(a,b\right)$，使得

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b^n}-\dfrac{f(a)}{a^n}}{\dfrac{1}{b^n}-\dfrac{1}{a^n}}=\left.\frac{[\dfrac{f(x)}{x^n}]'}{[\dfrac{1}{x^n}]'}\right|_{x=\xi}=\frac{f'(\xi)\xi^{-n}-n\xi^{-(n+1)}f(\xi)}{-n\xi^{-(n+1)}}=f(\xi)-\frac{1}{n}\xi f'(\xi)$$

即 $\dfrac{a^n f(b)-b^n f(a)}{a^n-b^n}=f(\xi)-\dfrac{1}{n}\xi f'(\xi)$. -------5’