

一、填空题:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$
2. 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  连续, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}.$
3. 曲线  $y = \frac{1}{x+1} e^{-x^2}$  的铅直渐近线为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
4. 设  $f'(1) = -1$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}.$
5. 设  $y = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ , 则  $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$
6. 曲线  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  过对应于  $t = \frac{\pi}{6}$  的点  $P$  的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}}.$
7. 设  $y = f(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$
8. 曲线  $y = \ln(1+x^2)$  在区间  $\underline{\hspace{2cm}}$  上是凹的.
9.  $\int_{-1}^1 \frac{1+x^3}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$
10.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题:

11. 设  $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$ , 求 (1)  $f'(x), f''(x)$ ; (2)  $f(x)$  带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式; (3)  $f^{(2021)}(0).$
12. 计算不定积分  $\int x \arctan \sqrt{x} dx.$
13. 计算  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx.$

14. 求函数  $f(x) = x^2 \ln x$  的极值.

15. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq e \\ \frac{A}{x(2 \ln x + \ln^2 x)}, & x > e \end{cases}$

(1) 求函数  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的表达式;

(2) 设  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = A$ , 试确定  $A$  的值.

16. 记曲线段  $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$  与直线  $x=0, x=1$  及  $x$  轴所围的图形为  $D$ ,

(1) 求平面图形  $D$  的面积;

(2) 求图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、证明题:

17. 当  $x > 4$  时, 证明:  $2^x > x^2$ .

18. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = -f(1) = 1$ ,

证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$ .