

北京工业大学 2022 —2023 学年第 一 学期

《复变函数与数学物理方程》 期末考试试卷 A 卷

考试说明: 闭卷考试, 不可携带计算器 时间: 2022.12.18 10:10-11:45

线上考试:

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》, 承诺在考试过程中自觉遵守有关规定, 服从监考教师管理, 诚信考试, 做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反, 愿接受相应的处分。

承诺人: _____ 学号: _____ 班号: _____

.....
注: 本试卷共 4 大题, 共 4 页, 满分 100 分, 考试时必须使用卷后附加的统一答题纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表 (阅卷教师填写)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总成绩
满分	4	2	2	4	2	2	2	2	8	
得分										
题号	10	11	12	13	14	15	16	17		
满分	10	12	10	12	6	10	6	6		
得分										

可能用到的公式:

1. 柯西-黎曼方程: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

2. 柯西公式: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz$

3. 高阶导数公式: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots)$

4. 常见函数的 Taylor 展开式:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, |z| < \infty;$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z| < 1;$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, |z| < 1;$$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

一、填空题（每空 2 分,共 20 分）

1、已知复数 $z = 2 - \sqrt{2}i$, 则 其共轭复数 $\bar{z} =$ _____, z 的辐角主值 $\arg z =$ _____。

2、若复数 $z = \sqrt{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则 $z^2 =$ _____。

3、已知二元实变函数 $\varphi(x, y)$ 为区域 D 内的调和函数, 则该函数需满足的拉普拉斯方程为_____。

4、 $\oint_{|z-4|=1} \frac{dz}{z-4} =$ _____, $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10}} =$ _____。

5、级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2022}$ 的收敛半径 $R =$ _____。

6、已知 $f(t)$ 为连续函数, $\delta(t)$ 为单位脉冲函数, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + t_0)f(t)dt =$ _____。

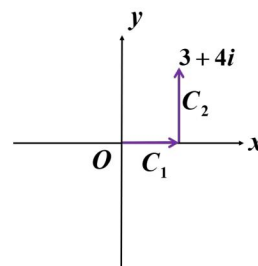
7、若已知函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的绝对可积函数, 则函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 Fourier 卷积定义式为 $f_1(t) * f_2(t) =$ _____。

8、在典型的三类数学物理方程中, 常用来描述振动及其传播过程的方程名称是_____。

二、计算题（共 52 分）

9、（8 分）根据柯西-黎曼方程, 对于复变函数 $f(z) = 2x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + 3y^2)$ 其中的 a 、 b 、 c 、 d 均为常数, $z = x + iy$ 。请问当 a 、 b 、 c 、 d 取何值时可以确保 $f(z)$ 在整个复平面上处处（即 $z = x + iy$ 取任意值的情况下）解析。

10、（10 分）沿右图所示路径计算积分 $\int_C (z+1)dz$ ，其中 C 为从原点到点 $3+4i$ 的折线段



11、（12 分）求下列函数的所有奇点，并指出其类型。如果是极点，指出其级数。

(1) $f(z) = \frac{z^4}{1+z^2}$ (2) $f(z) = \frac{2}{z^3-z^2-z+1}$

12、（10 分）设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外处处解析， C 是 D 内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向简单闭曲线，

(1) 根据上述条件及留数定理，写出计算 $\oint_C f(z)dz$ 的表达式，

(2) 根据留数定理计算积分 $I = \oint_{|z|=2} \frac{4e^{2z}}{(z-1)^2} dz$,

13、（12 分）(1) 求函数的 Fourier 积分 $f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & t^2 \leq 1 \\ 0, & t^2 > 1 \end{cases}$

(2) 求脉冲矩阵函数 $f(t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 的 Fourier 变换

三、求已知函数的展开式（共 16 分）

14、（6 分）将函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$ 在 $|z| < \frac{1}{2}$ 的区域内表示成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的幂级数

15、（10 分）将函数 $f(z) = \frac{2}{(z-1)(3-z)}$ 在圆环域 $1 < |z| < 3$ 内展开为 Laurent 级数

四、证明题（共 12 分）

16、（6 分）已知 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续或只有有限个可去间断点，且当 $|t| \rightarrow +\infty$ 时， $f(t) \rightarrow 0$ 。请写出 $f(t)$ 的 Fourier 变换象函数，并证明 Fourier 变换的微分性质，即 $\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$

17、（6 分）请写出 $f(t)$ 的 Laplace 变换象函数，并证明 Laplace 变换的位移性质，即如果函数 $f(t)$ 及 $F(s)$ 满足变换关系 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ，则有 $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$ ($\text{Re}(s-a) > c$)