北京工业大学 2021—2022 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期中考试试卷(参考答案)

考试说明：考试日期：2022 年 4 月　日，考试时间：95 分钟，考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人： ________　**学号：** ________　**班号：** ________

注： 本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 计算二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=$ 0

2. 微分方程 $xyy'=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解为 $y^2=x^2(\ln x^2+1)$

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}+(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 是收敛还是发散？ 发散

4. 函数 $y=x^2\cos\dfrac{x}{2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2022} 的系数为 $\dfrac{1}{2020!\,2^{2020}}$

5. 设 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x}+C_3\sin x+C_4\cos x$ 是某个常系数线性微分方程的通解 (C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数)，则该微分方程为 $y^{(4)}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$

6. 设 2π 周期函数 f 在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & -\pi\le x<0\\ 0, & x=0,\\ x+\pi, & 0<x<\pi\end{cases}$ 其 Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(2022\pi)=$ $\dfrac{\pi+1}{2}$

7. 由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与圆锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围立体在 xOy 坐标面的投影是 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ z=0 \end{cases}$

8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛(开)区间为 $(-3,1)$

9. 设 $z=uv+\sin t$，而 $u=e^t$，$v=\cos t$，则全导数 $\frac{dz}{dt}=$ $e^t(\cos t-\sin t)+\cos t$

10. 方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分为 $dz=$ $dx-\sqrt{2}\,dy$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 的二阶偏导数 $f''_{xx}(0,0)$ 与 $f''_{xy}(0,0)$.

解：当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f'_x(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$$

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(0+x,0)-f'_x(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^4}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,0+y)-f'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0.$$

得 分

12．求微分方程 $y''+3y'+2y=3(x-1)\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

解：特征方程 $\varphi(r)=r^2+3r+2=0 \Rightarrow$ 特征根 $r_1=-1,\ r_2=-2$.

故对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

令 $y=ze^{-x}$，则原方程化为 $z''+\varphi'(-1)z'+\varphi(-1)z=3(x-1)$，

即 $z''+z'=3(x-1)$.

设 $z^*=ax^2+bx$，则 $z^{*\prime}=2ax+b$，$z^{*\prime\prime}=2a$. 代入上式，

$2a+2ax+b=3x-3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$，$b=-6$.

$\therefore z^*=\frac{3}{2}x^2-6x$，$y^*=(\frac{3}{2}x^2-6x)e^{-x}$.

$\therefore$ 原方程通解为 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(\frac{3}{2}x^2-6x)e^{-x}$，

其中 C_1, C_2 为任意常数.

得 分

13．设 $z=f(2x-y, y\sin x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f_1'+y\cos x f_2'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4f_{11}''+2f_{12}''y\cos x+y(-\sin x)f_2'+y\cos x(2f_{21}''+f_{22}''y\cos x)$$

$$=4f_{11}''+4y\cos x\cdot f_{12}''-y\sin x f_2'+y^2\cos^2 x f_{22}''.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2(f_{11}''(-1)+f_{12}''\cdot\sin x)+\cos x f_2'+y\cos x(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\sin x)$$

$$=-2f_{11}''+(2\sin x-y\cos x)f_{12}''+\cos x f_2'+y\sin x\cos x f_{22}''.$$

得 分

14. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ 的收敛域与和函数.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \Rightarrow$ 收敛半径为1. 当$x=\pm1$时, 级数发散.

∴ 收敛域 $(-1,1)$. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$, $x\in(-1,1)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x^n)'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n)'=[x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}]'$

$=[x(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n)']'=[x\cdot(\frac{x}{1-x})']'$

$=[\frac{x}{(1-x)^2}]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,1)$.

得 分

15. 已知函数f满足方程$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x^2+1$, 试讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$ 的敛散性.

解: 对上述积分方程两边同时求导, 得 $f'(x)=f(x)+x$ 且满足 $f(0)=1$.

故 $f(x)=e^{-\int(-1)dx}\left[\int xe^{\int(-1)dx}dx+C\right]$

$=e^x(\int xe^{-x}dx+C)=Ce^x-x-1$.

由 $f(0)=1$ 知 $C=2$, 即 $f(x)=2e^x-x-1$.

于是, $f(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}=2(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})$.

由Taylor公式, $2(e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^2}$ $(n\to\infty)$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛且 $e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}>0$, 所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}]$ 收敛.

得 分

16. 设2π周期函数f在$[-\pi,\pi)$上满足 $f(x)=x^2\ (-\pi\le x<\pi)$, 将其展开成 Fourier 级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解：由题意，f为2π周期函数且在$\mathbb{R}$上处处连续，在$[-\pi,\pi)$上满足收敛定理条件，故由f诱导出的Fourier级数在$[-\pi,\pi)$收敛于$f(x)$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2\,d\sin nx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,dx^2\right)$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos nx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{4}{n^2\pi}\pi\cdot\cos n\pi=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

$n=1,2,\cdots$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0,\quad n=1,2,\cdots$$

$$\therefore\ x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi).$$

上式中令$x=0$，则 $0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}-4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 验证函数 $u=\arctan\frac{y}{x}$ 是 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的解.

证明：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 证毕.

得 分

18. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均绝对收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

证明：由 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛知 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$.

故 $\exists N\in\mathbb{N}_+$, $\forall n>N$, $a_n^2\le|a_n|$. 由比较审敛法，$\sum_{n=N}^{\infty}a_n^2$ 收敛

从而，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛. 同理，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛.

$\forall n\in\mathbb{N}_+$, $(a_n+b_n)^2=a_n^2+2a_nb_n+b_n^2\le2(a_n^2+b_n^2)$

再由比较审敛法，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛. 证毕.