

北京工业大学 2015 ——2016 学年第 1 学期

《普通物理 I-1》期末考试试卷 A 卷答案

一、(10 分) 已知质点的运动函数为 $\vec{r} = 2t\vec{i} + (6 - 2t^2)\vec{j}$ (SI), 求 t 时刻该质点的运动速度、加速度、切向加速度及该质点运动的轨道方程。

解: 速度: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$, (SI)

加速度: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$, (SI)

切向加速度为加速度在速度方向的分量: $a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$ (SI)

或者由 $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\sqrt{4+16t^2}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{32t}{\sqrt{4+16t^2}} = \frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$ 亦可得出结果。

轨道方程: $y = 6 - \frac{1}{2}x^2$ (SI)

二、(10 分) 在 $t=0$ 时刻, 质量为 m 的质点静止下落, 若空气阻力大小 $f = kv$, 其中 k 为大于 0 的常量, 求质点在任意时刻 t ($t > 0$) 的速度及质点下落的终极速率。(取竖直向下为正方向, 重力加速度为 g)

解: 运动过程中, 质量受到重力与空气阻力的作用。根据牛顿第二定律, 质点运动的动力学方程为:

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量并积分得:

$$\int_0^t dt = -\frac{m}{k} \int_0^v \frac{d(mg - kv)}{mg - kv}$$

$$t = -\frac{m}{k} \ln(mg - kv) \Big|_0^v = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg - kv}{mg} \rightarrow v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$t \rightarrow \infty$ 时的速度为终极速率: $v_T = \frac{mg}{k}$

此步骤若利用受力平衡求解: $mg = kv \rightarrow v_T = \frac{mg}{k}$ 亦可

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

三、(10 分) 质量为 m 的质点的运动函数为 $\vec{r} = a \cos(\omega t) \vec{i} + b \sin(\omega t) \vec{j}$, 其中 a, b, ω 皆为常量, 试求:

- (1) t 时刻物体所受合外力对原点的力矩 \vec{M} ;
- (2) t 时刻物体对原点的角动量 \vec{L} .
- (3) 该物体的角动量是否随时间变化? 为什么?

解: (1) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$

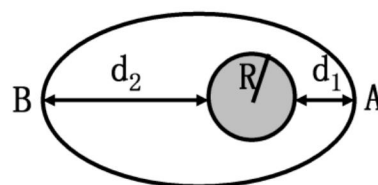
$$\begin{aligned} (2) \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= m(a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}) \times (-a \omega \sin \omega t \vec{i} + b \omega \cos \omega t \vec{j}) = mab \omega \vec{k} \end{aligned}$$

- (3) 角动量不随时间改变, 因为合外力矩为 0

四、(10 分) 我国第一颗人造地球卫星的质量 $m = 173 \text{ kg}$,

近地点 A 距地面距离 $d_1 = 439 \text{ km}$, 远地点 B 距地面的距

离 $d_2 = 2384 \text{ km}$ 。设地球半径 $R_E = 6378 \text{ km}$, 已知万有



第四题图

引力常量 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$, 地球质量 $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 求:

- (1) 以 ∞ 为势能零点, 求近地点和远地点卫星-地球系统的引力势能 E_{PA}, E_{PB} ;
- (2) 卫星的近地速度 v_A 和远地速度 v_B ;
- (3) 卫星的掠面速度 v_a 及运动周期 T 。(椭圆面积 $S = \frac{\pi}{2}(r_1 + r_2)\sqrt{r_1 r_2}$, π 取 3.14)

解: (1) 以 ∞ 为势能零点, 万有引力势能表达式为: $E_p = -\frac{GMm}{r}$

$$E_{PA} = -\frac{GMm}{d_1 + R} \quad E_{PB} = -\frac{GMm}{d_2 + R}$$

将各量数值代入, 可得: $E_{PA} = -1.01 \times 10^{10} \text{ J}$; $E_{PB} = -7.88 \times 10^9 \text{ J}$

注意 km 非国际单位, 应化为国际单位 m; 不能将地球半径 R 落掉。

- (2) 在近地点及远地点卫星的角动量守恒, 有: $mv_1 r_1 = mv_2 r_2$

在运动过程中系统机械能守恒, 有: $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$

$$\text{联立上式可得: } v_1 = \sqrt{\frac{2GM_2}{r_1(r_1+r_2)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM_1}{r_2(r_1+r_2)}}$$

$$\text{将 } r_1 = d_1 + R_E = 439 + 6378 = 6819 \text{ km}, \quad r_2 = d_2 + R_E = 2384 + 6378 = 8762 \text{ km}$$

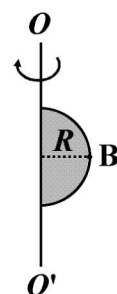
$$\text{代入上式得: } v_1 = 8.11 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad v_2 = 6.31 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$(3) \text{ 掠面速度为: } \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{mv_1 r_1}{2m} = \sqrt{\frac{1}{2}GM \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

$$\text{卫星轨道的面积为: } S = \pi \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2}$$

$$T = \frac{S}{dS/dt} = \frac{\pi (\sqrt{r_1 + r_2})^3}{\sqrt{2GM}} = 6.84 \times 10^3 \text{ s}$$

五、(10 分)如图, 质量为 m 、半径为 R 的均匀半圆盘可绕通过直径的光滑固定轴 OO' 转动, 设半圆盘从静止开始在恒力矩 M 作用下转动(不考虑重力), 求: (1) 半圆盘相对于转轴 OO' 的转动惯量 J ; (2) t 秒后半圆盘边缘上 B 点的切向加速度 a_t 与法向加速度 a_n 的大小。



第五题图

$$\text{解: (1) } J = \int r^2 dm = \int (r \cos \theta)^2 \frac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2} r dr d\theta$$

$$= \frac{2m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{mR^2}{4}$$

$$(2) \text{ 根据刚体定轴转动定律, } \because M = J\alpha \quad \alpha = \frac{M}{J} = \frac{4M}{mR^2}$$

$\because B$ 点绕 OO' 做半径为 R 的圆周运动,

$$a_t = R\alpha = \frac{4M}{mR}, \quad a_n = R\omega^2 = R(\alpha t)^2 = \frac{16M^2}{m^2 R^3} t^2$$

六、(10 分) 三个同方向, 同频率的简谐运动为: $x_1 = 0.1 \cos(100\pi t + \pi/6)$,

$x_2 = 0.1 \cos(100\pi t + \pi/2)$, $x_3 = 0.1 \cos(100\pi t + 5\pi/6)$, 求:

(1) 利用旋转矢量法求合振动的角频率 ω , 振幅 A , 初相 φ_0 及振动表达式;

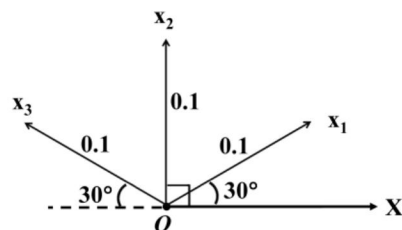
资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

(2) 求合振动由初始位置运动到 $x = \sqrt{2}A/2$ 所需最短时间(A 为振幅)。

解: (1) 旋矢图如右所示, 利用矢量合成法则计

算, $\omega = 100\pi$, $A = 0.2m$, $\varphi_0 = \pi/2$,

$$\rightarrow x = 0.2 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{2})$$



(2) 从初始位置到 $x = \sqrt{2}A/2$ 位置, 旋矢

$$\text{通过的角度为 } 5\pi/4, \text{ 则所需时间为 } t = \frac{5\pi/4}{\omega} = \frac{5\pi/4}{100\pi} = \frac{1}{80} = 0.0125 \text{ s}$$

七、(10 分) 设入射波的方程式为 $y_1 = A \cos 2\pi(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T})$, 在 $x=0$ 处发生反射, 反

射点为一固定端, 设反射时无能量损失, 求:

(1) 入射波沿 X 轴正方向传输还是反方向传输, 为什么?

(2) 反射点有无半波损失? 求反射波的方程式;

(3) 合成的驻波的方程式;

(4) 波腹和波节的位置。

解: (1) 入射波沿 X 轴反方向传输, 因为随着坐标 x 越小, 波相越滞后 (或回答相位中坐标 x 前面符号为负亦可)

(2) 因反射点为固定端, 故反射波有半波损失。在 $x=0$ 处, 入射波引起的振动为 $y_{10} = A \cos \frac{2\pi t}{T}$, 相应的振动方程为 $y_{20} = A \cos(2\pi \frac{t}{T} + \pi)$, 反射波沿 $+x$ 方向传

播, 波动方程为 $y_2 = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \pi]$

(3) 驻波方程式为: $y = y_1 + y_2 = 2A \sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) \cos(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2})$

(4) 波腹: 令 $|\sin \frac{2\pi x}{\lambda}| = 1$, $\rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\rightarrow x = \frac{(2k+1)\lambda}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

波节: 令 $|\sin \frac{2\pi x}{\lambda}| = 0$, $\rightarrow \frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$, $\rightarrow x = \frac{k\lambda}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

八、(10 分) 静止质量为 m_0 的粒子，其固有寿命为实验室测得寿命的 $1/n$ ，求：

(1) 实验室中测量该粒子的运动速度 v ；(2) 实验室中测量该粒子的质量 m ；(3) 该粒子的总能量 E ；(4) 该粒子的相对论动能 E_{kr} 。

解：(1) 由 $\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\tau}{\tau_0} = n \rightarrow v = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}c$

(2) $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = nm_0$

(3) $E = mc^2 = nm_0c^2$

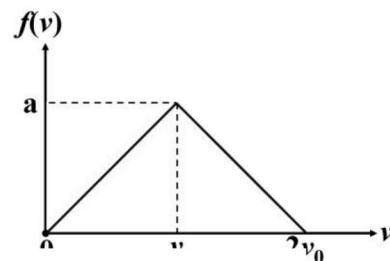
(4) $E_k = mc^2 - m_0c^2 = (n-1)m_0c^2$

九、(10 分) 分子的速率分布函数如图，求：

(1) 写出分子的速率分布函数，并根据速率分布函数归一化条件求常量 a ；

(2) 速率在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间的分子占总分子数的比例；

(3) 分子的最概然速率 v_p 、平均速率 \bar{v} 及方均根速率 $\sqrt{v^2}$ ；



第九题图

解：(1) 速率分布函数：
$$f(v) = \begin{cases} \frac{av}{v_0} & (0 \leq v \leq v_0) \\ \frac{a}{v_0}(2v_0 - v) & (v_0 \leq v \leq 2v_0) \\ 0 & (2v_0 \leq v < \infty) \end{cases}$$

根据归一化条件，曲线下包围面积应为 1， $\frac{1}{2} \cdot 2v_0 \cdot a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{v_0}$

(2) 速率在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间的分子数比例应为速率分布函数在 $[\frac{3}{2}v_0, 2v_0]$ 区间

所包围的面积， $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}v_0 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}$

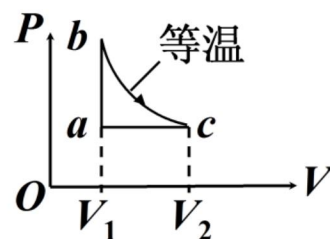
(3) 由速率分布函数曲线观察可知，最概然速率： $v_p = v_0$

平均速率： $\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv = v_0$ （由曲线对称性观察也可得到此结果）

方均根速率： $\sqrt{v^2} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v)dv} = \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot v_0$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

十、(10 分) 常温下 1 摩尔刚性双原子理想气体作如图的正循环，其中 ab 为等体过程，bc 为等温过程，ca 为等压过程，并且 $\frac{V_2}{V_1} = 3$ 。已知理想气体的定体摩尔热容 C_V 满



第十题图

足 $C_V = \frac{iR}{2}$ ，定压摩尔热容 $C_P = \frac{(i+2)R}{2}$ ， i 为自由度， R 为普适气体常量，试问：

(1) 该分子的自由度 i 是多少？若平衡态下热力学温度为 T ，则一个分子的平均动能 $\bar{\epsilon}$ 是多少？一摩尔分子的内能 E 是多少？

(2) 判断过程 ab、bc、ca 是吸热还是放热，并求出各过程所吸收或放出的热量。

(3) 求该循环的效率 η

解：(1) $i=5$ ； $\bar{\epsilon} = \frac{5}{2}kT$ (k 为玻尔兹曼常量)； $E = \frac{5}{2}RT$

(2) ab 过程： $T \uparrow$ ， $E \uparrow$ ， $A=0$ ， $\rightarrow Q>0$ (吸热) $Q_1 = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{5R}{2}(T_b - T_a)$

bc 过程： T 不变， E 不变， $A>0$ ， $\rightarrow Q>0$ (吸热) $Q_2 = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = RT_b \ln 3$

ca 过程： $T \downarrow$ ， $E \downarrow$ ， $A<0$ ， $\rightarrow Q<0$ (放热) $Q_3 = \nu C_P (T_2 - T_1) = \frac{7R}{2}(T_a - T_c)$

$$(3) \eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2} = \frac{\frac{5R}{2}(T_b - T_a) + RT_b \ln 3 + \frac{7R}{2}(T_a - T_c)}{\frac{5R}{2}(T_b - T_a) + RT_b \ln 3}$$

$$= \frac{T_c \ln 3 + (T_a - T_c)}{\frac{5}{2}(T_c - T_a) + T_c \ln 3} = \frac{\ln 3 + (\frac{T_a}{T_c} - 1)}{\frac{5}{2}(1 - \frac{T_a}{T_c}) + \ln 3}$$

根据过程 ca 可得： $\frac{T_a}{T_c} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3} \rightarrow \eta \approx 15.5\%$