北京工业大学 2017—2018 学年第 II 学期

“概率论与数理统计”课程(经)考试 试题参考答案

一、填空题(共 6 小题，15 个空，每空 2 分，共 30 分)

1. 若 A, B 为随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B-A)=0.2$. 当 A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ **0.5**；当 A 与 B 互不相容时，$P(B)=$ **0.2**.

2. 设连续型随机变量 X 有分布函数 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中 a 和 b 为常数，则 $a=$ **1**，$b=$ **−1**.

3. 若随机变量 X 是服从二项分布 $\mathrm{B}(n,p)$，且 $\mathrm{E}(X)=1.6$， $\mathrm{Var}(X)=1.28$， 则 $n=$ **8**， $p=$ **0.2**.

4. 若随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，则 $P(X=2)=$ $\mathbf{2e^{-2}}$，$\mathrm{E}(X^2)=$ **6**.

5．设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1 \sim N(3,\ 3^2)$，$X_2 \sim N(1,\ 2^2)$. 令 $X=X_1-2X_2$，则 $\mathrm{E}(X)=$ **1**，$\mathrm{Var}(X)=$ **25**. 进一步，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，$\Phi(1)=0.8413$，则 $P(-4<X<6)=$ **0.6826**.

6．若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本样本，μ 和 σ^2 为未知常数，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $\overline{X} \sim$ $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2/n)}$，

$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim$ $\boldsymbol{\chi^2_{n-1}}$；

μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间 $\boldsymbol{[\overline{X}-(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2),\ \ \overline{X}+(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2)]}$；

σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间为 $\boldsymbol{[(n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(\alpha/2),\ \ (n-1)S^2/\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)]}$.

二、解答题（共 5 小题，每题 14 分，共 70 分）

1. 一批同型号的螺钉由编号为 I、II、III的三台机器共同生产，各台机器生产的螺钉占这批螺钉的比例分别为 30%、45%和 25%，各台机器生产的螺钉的次品率分别为 2%，2.5%和 1.6%.

（1）. 求该批螺钉的次品率；

（2）. 现从该批螺钉中抽到一颗次品，求该次品是由 I 号机器生产的概率.

解： 设 A ={零件是次品}，B_1 ={零件由 I 号机器生产}，B_2 ={零件由 II 号机器生产}，B_l ={零件由III号机器生产}, 则

$$P(B_1)=0.3,\quad P(B_2)=0.45,\quad P(B_3)=0.25;$$
$$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.025,\quad P(A|B_3)=0.016.$$

——(假设正确 1 分，写出 3 个概率 1 分，写出 3 个条件概率 1 分)

(1). 由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\ &= 0.3\times0.02+0.45\times0.025+0.25\times0.016\\ &= 0.02125;\end{aligned}$$

——(知道用全概率公式 2 分，全概率公式正确 2 分，结果正确 2 分)

(2) . 由贝叶斯公式，得

$$\begin{aligned}P(B_1|A) &= P(B_1)P(A|B_1)/\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\ &=0.3\times0.02/0.02125\\ &=0.02824.\end{aligned}$$

——(知道用贝叶斯公式 2 分，公式正确 2 分，结果正确 1 分)

如未做假设，直接用全概率和贝叶斯公式求解，公式及结果正确的，分数全给。

2. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ a-x, & 1<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1). 求常数 a； (2). 求 X 的分布函数 $F_X(x)$；

(3). 令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$； (4). 求 Y 期望 $\mathrm{E}(Y)$.

解 (1). 由 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^2(a\text{-}x)\,\mathrm{d}x=0.5+a-1.5=1,$，得 $a=2$；

——(积分公式正确 1 分，积分结果正确 1 分，a 正确 1 分)

(2).

$$F_X(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}t, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_0^x t\,\mathrm{d}t, & 0\le x<1,\\ \int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\,\mathrm{d}t, & 1\le x<2,\\ \int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\int_1^2(2-t)\,\mathrm{d}t+\int_2^x 0\,\mathrm{d}t, & x\ge 2.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.5x^2, & 0\le x<1,\\ 2x-0.5x^2-1, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

——(积分公式正确 2 分，积分结果正确 2 分)

(3). 记 $F_Y(y)$ 为 Y 的分布函数，则 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$. 于是，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(\Phi)=0$； 当 $y>0$ 时， $F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(X\le\sqrt{y})=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x$，故

——(公式正确 2 分)

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\begin{cases}0.5, & 0<y<1,\\ \sqrt{y^{-1}}-0.5, & 1\le y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$ **——(公式、结果正确 1 分)**

（4）.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\mathrm{E}(X^2)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2(2\text{-}x)\,\mathrm{d}x\\&=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{x=1}+\left.\frac{2x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2}-\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x=1}^{x=2}\\&=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

3. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}cy^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）. 求常数 c；（2）. 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$；（3）. 计算 $\mathrm{E}(X)$.

解 （1）. 由$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x cy^2\mathrm{d}y=\frac{c}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{c}{12}$，得 $c=12$；

——(累次积分正确 2 分，积分结果正确 1 分，求出 c 1 分)

（2）. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

——(积分表达式写对 2 分，积分结果正确 1 分)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\ \mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 12y^2\mathrm{d}x, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

——(积分表达式写对 2 分，积分结果正确 1 分)

边缘密度未写成分段形式或未讨论 *x,y* 的条件时扣 1 分！

（3）. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\mathrm{d}y=4\int_0^1 x^4dx=0.8.$

——(累次积分表达式正确 2 分，积分表达式正确 1 分，结果正确 1 分)

4. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为抽自总体 X 的随机样本，总体 X 有概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

其中$\theta>-1$为待估参数，求θ的矩估计$\hat{\theta}$与极大似然估计θ^*.

解 记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，由

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

——(给出 E(X)积分表达式正确 2 分，积分结果正确 1 分)

利用 $\bar{X}=E(X)$，得 $\bar{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，解该式，得 $\hat{\theta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$；

——(建立正确的估计方程 2 分，矩估计正确 2 分)

(2). 记 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta}$ 为参数 θ 的似然函数

——(似然函数正确 2 分)

则 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$， **——(对数似然函数正确 1 分)**

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，故

$\theta^*=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$. **——(建立估计方程正确 2 分，求得极大估计正确 2 分)**

5. 假设某品牌日光灯的使用寿命(单位：小时)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从 该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验，测得寿命的平均值为 100.4，样本方差为 0.49. 问在显著性水平 α=0.05 下，从样本看：

(1). 可否认为 $\mu=100$？ (2). 可否认为 σ^2=0.5？

解 n=9，$\alpha=0.05$，$\bar{x}=100.4$，s^2=0.49，$\mu_0=100$，$\sigma_0^2=0.5$.

——(上述已知写正确 2 分)

(1). 因 $|\bar{x}-\mu_0|=|100.4-100|=0.4<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=\frac{0.7}{3}\times 2.306=0.538$，故接受原假设，即可认为“$\mu=100$”;

(2). 因 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times 0.49}{0.5}=7.84\in(2.180,\ 17.535)=(\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2),\chi_{n-1}^2(\alpha/2))$，故接受原假设，即可认为 σ^2=0.5.

——(每问 6 分：公式与计算正确 2 分，论据正确 2 分，结论正确 2 分)