

得分

一、单项选择题：（在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确选项的字母写在括号内. 本大题共 30 小题，每小题 3 分，共 90 分.）

1. 设 $z = f(x, y)$ ，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} =$ ()

A. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

B. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

2. 微分方程 $(x^2 - y)dx - xdy = 0$ 的通解为 ()

A. $xy + \frac{1}{3}x^3 = C$ B. $xy - \frac{1}{3}x^3 = C$ C. $x^2y - \frac{1}{3}x^3 = C$ D. $x^2y + \frac{1}{3}x^3 = C$

3. 向量场 $\mathbf{A} = (x^2 + yz)\mathbf{i} + (y^2 + xz)\mathbf{j} + (z^2 + xy)\mathbf{k}$ 的散度为 ()

A. $2(x^2 + y^2 + z^2)$ B. $x^2 + y^2 + z^2$ C. $2(x + y + z)$ D. $2(xz + yz + xy)$

4. 函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微的充分条件是 ()

A. 函数 $f(x, y)$ 在该点两个偏导数存在 B. 函数 $f(x, y)$ 在该点连续
C. 函数 $f(x, y)$ 在该点两个偏导数存在且连续 D. 函数 $f(x, y)$ 在该点极限存在

5. 函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 4x + 2y - 4z$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的梯度 $\text{grad}u(0, 0, 0) =$ ()

A. $(4, 2, -4)$ B. $(-4, 2, 4)$ C. $(-4, 2, -4)$ D. $(4, 2, 4)$

6. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3}$ 的敛散性是 ()

A. 条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 不能确定

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$ 展开成麦克劳林级数为 ()

A. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^{2n+2}}, x \in (-3, 3)$

B. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n+2}}, x \in (-3, 3)$

C. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{2n+2}}, x \in [-3, 3]$

D. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^{2n+2}}, x \in (-3, 3)$

8. 曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为 ()

A. $x + 2y - 4 = 0$

B. $x + 2y + 4 = 0$

C. $x - 2y + z + 4 = 0$

D. $x - 2y + z - 4 = 0$

9. 已知曲线 $L: y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ ()

A. 2π

B. $-\pi$

C. -2π

D. π

10. 设 $\omega = f(u, v) + x^2 + y^2 \sin z$, 其中 $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$, 则 $\frac{\partial \omega}{\partial z} =$ ()

A. $f'_u - \frac{y}{z^2} f'_v + y^2 \cos z$

B. $-\frac{y}{z^2} f'_v + y^2 \cos z$

C. $\frac{y}{z^2} f'_v - y^2 \cos z$

D. $f'_u + \frac{y}{z^2} f'_v + y^2 \cos z$

11. $\int_{(1,1)}^{(-1,2)} \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy =$ ()

A. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

12. L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 取逆时针方向, 则 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{3x^2 + 4y^2} =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6} \pi$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{6} \pi$

13. 幂级数 $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ 的收敛域为 ()

A. $[-1, 1)$

B. $(-1, 1)$

C. $[-1, 1]$

D. $(-1, 1]$

14. 已知 $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy$, 交换积分次序后 $I =$ ()

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

- A. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx$ B. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx$
 C. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

15. 已知积分区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$ ()

- A. $\frac{2}{3}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{8}{3}\pi$ D. $\frac{16}{3}\pi$

16. 积分区域 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成, 下面化三重积分

$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次定积分正确的是 ()

- A. $I = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} f(x, y, z) dz$ B. $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-2x} dy \int_0^{1-x-2y} f(x, y, z) dz$
 C. $I = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{x+2y-1} f(x, y, z) dz$ D. $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-2x} dy \int_0^{x+2y-1} f(x, y, z) dz$

17. 已知 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ 是微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解, 则 ()

- A. $p = 4, q = 0$ B. $p = 0, q = 4$ C. $p = 4, q = -4$ D. $p = 4, q = 4$

18. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, |x| < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 的和函数为 ()

- A. $\arctan x$ B. $\tan x$ C. $\ln(1+x^2)$ D. $\frac{2x}{(1+x)^2}$

19. 在点 $(2, 1, 4)$ 处, 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 指向上侧的法向量为 ()

- A. $(4, 2, -1)$ B. $(-4, -2, 1)$ C. $(4, -2, 1)$ D. $(4, 2, 1)$

20. 函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 0)$ 处沿从点 $(1, 0)$ 到点 $(2, \sqrt{3})$ 的方向的方向导数等于 ()

- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

21. 函数 $f(x, y) = xy$ 在满足 $x + y = 1$ 的条件下, 下列说法正确的是 ()

- A. 在点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处取得极大值 B. 在点 $(1, 0)$ 处取得极小值
 C. 在点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 处取得极小值 D. 在点 $(1, 0)$ 处取得极大值

22. 已知函数 $f(x, y) = x^2 + xy$ ，下列说法正确的是 ()

- A. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点但非极值点 B. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的驻点
C. 无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点 D. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点

23. Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧，则

$$\oiint_{\Sigma} (x + 3yz)dydz + (y + 2zx)dzdx + (4xy - 2z)dx dy = \quad ()$$

- A. 3 B. 1 C. 0 D. $\frac{3}{4}$

24. 空间曲线 $x = \ln \frac{1+t}{2}$, $y = \frac{1+t}{t}$, $z = t^2$ 在 $t=1$ 处的切线方程为 ()

- A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$ B. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$

25. 设 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xoy 面上方的部分，则 $\iint_{\Sigma} dS =$ ()

- A. $\frac{9}{2}\pi$ B. $\frac{26}{3}\pi$ C. $\frac{13}{3}\pi$ D. 13π

26. 由曲面 $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体的体积为 ()

- A. $\frac{16}{3}\pi$ B. 4π C. $\frac{32}{3}\pi$ D. $\frac{44}{3}\pi$

27. Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所围成，则 $\iiint_{\Omega} x \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1) dV =$

()

- A. 0 B. 2π C. 4π D. 6π

28. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ e^x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数，其傅立叶级数的和函数记

为 $S(x)$ ，则 $S(-15\pi) =$ ()

- A. $\frac{e^{-\pi}}{2}$ B. $\frac{e^{\pi}}{2}$ C. 0 D. $e^{-15\pi}$

29. 微分方程 $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$ 的通解为 ()

- A. $(\frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2)e^{3x}$ B. $(\frac{1}{4}x^4 + C_1x + C_2)e^{3x}$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

C. $(\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2)e^{3x}$

D. $(x^2 + C_1x + C_2)e^{3x}$

30. 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$, 当 ρ 为何值时, 不能判断这两个正项级数有相同的敛散性 ()

A. $\rho = 0$

B. $\rho = \frac{1}{2}$

C. $\rho = 1$

D. $\rho = 2$

二、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

得分

31. 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$, 其中 $f(u)$ 可导, 证明: $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.



得分

32. 设 $u_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明当 $\alpha > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{u_n}{n^\alpha}}$ 也收敛.