北京工业大学 2005~2006 年度第 1 学期

040700~040706,040721,040722【 离散数学】考试题(A)

考试形式： 闭卷

考试时间：2005 年 12 月 27 日 9:55~11:30

学号 ________________ 姓名 _____________

一、（每小题 5 分，本题共 10 分）设 A、B、C 是集合，试证明：

1、 $(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B\cap C)=A$

$(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B\cap C)$

$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)$

$=(A\cap(\sim B\cup\sim C)\cup(A\cap B\cap C)$

$=(A\cap\sim(B\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

$=(A\cap(\sim(B\cap C)\cup(\cap B\cap C))$

$=A$

2、 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$A\cap(B\oplus C)$

$=A\cap((B-C)\cup(C-B))$

$=A\cap((B\cap\sim C)\cup(C\cap\sim B))$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap\sim B\cap C)$

$(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))$

$=((A\cap B)\cap\sim(A\cap C))\cup((A\cap C)\cap\sim(A\cap B))$

$=((A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C))\cup((A\cap C)\cap(\sim A\cup\sim B))$

$=(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap C\cap\sim A)\cup(A\cap C\cap\sim B)$

$=(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap C\cap\sim B)$

$\therefore A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

二、（本题 10 分）设 A 是含有 3 个元素的有限集合，请回答下列问题。

1、 在 A 上可定义多少种既不是自反又不是反自反的二元关系？

A 上可定义 2^6 种自反的二元关系

A 上可定义 2^6 种反自反的二元关系

A 上可定义 2^9 种不同的二元关系

A 上的自反关系必不是反自反的，反自反关系必不是自反的

因此 A 上可定义 $2^9 - 2 * 2^6$ 种 $= 384$ 种既不是自反又不是反自反的二元关系

2、 在 A 上可定义多少种既不是对称又不是反对称的二元关系？

A 上可定义 2^6 种对称的二元关系

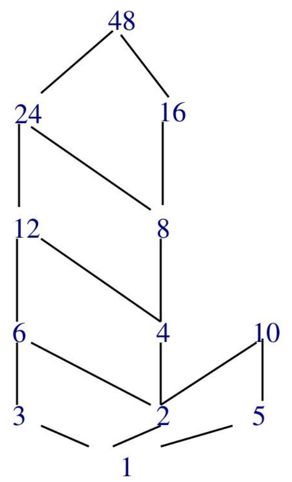
A 上可定义 $2^3 * 3^3$ 种反对称的二元关系

A 上可定义 2^9 种不同的二元关系

A 上可定义 2^3 种既是对称又是反对称的二元关系

因此 A 上可定义 $2^9 - 2^6 - 2^3 * 3^3 + 2^3$ 种 $= 240$ 种既不是对称又不是反对称的二元关系

三、（本题 10 分）设集合 A＝{1，2，3，4，5，6，8，10，12，16，24，48}，R 是 A 上的整除关系，请画出 R 的哈斯图表示，并给出 A 的子集 B={2，3，6}的上界和上确界。



B={2，3，6}的上界: 6,12,24,48

上确界: 6

四、（本题 10 分）设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的对称关系，且 $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$，试证明 $R_1 \circ R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明：

对任意的 x，y∈A

如果 $\langle x, y\rangle \in R_1 \circ R_2$，

则存在 z∈A 使得 $\langle x, z\rangle \in R_1$，$\langle z, y\rangle \in R_2$

因为 R_1 和 R_2 是对称关系，

所以 $\langle z, x\rangle \in R_1$，$\langle y, z\rangle \in R_2$

因此，$\langle y, x\rangle \in R_2 \circ R_1$，

又 $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$，

所以 $\langle y, x\rangle \in R_1 \circ R_2$

故 $R_1 \circ R_2$ 也是 A 上的对称关系。

六、（本题 10 分）设 A、B 是集合，且|A|=4，|B|=2，问:可定义多少种不同的 A 到 B 的满射函数？（ 要求写出解题步骤）

解：设 A = {a1, a2, a3, a4}

B = {b1, b2}

A 到 B 的函数共有 2^4=16 种，其中不是满射的只有两种

f1:f1(a1)= f1(a2)= f1(a3)= f1(a4)=b1

f2:f2(a1)= f2(a2)= f2(a3)= f2(a4)=b2

所以，可定义 14 种不同的 A 到 B 的满射函数

七、（本题 10 分）设图 G 是具有 n 个顶点、m 条边的无向简单图，且又是欧拉图。若图 G 中各个顶点的度数都为 k，n，m 满足 n + 8 = m。求 n 和 m，并画出符合题设条件的一种图。

解：由握手定理 kn=2m

又∵ n+8=m

∴ kn=2n+16

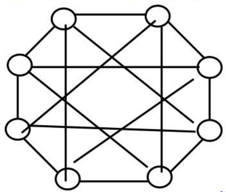
即： （k-2）n=16

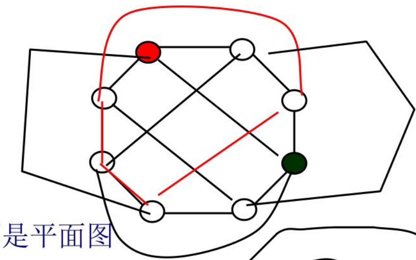
又∵ G 是无向简单图

∴ k≤n-1

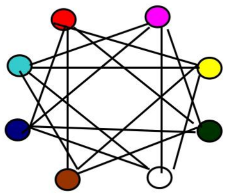
∴ k-2=2 n=8

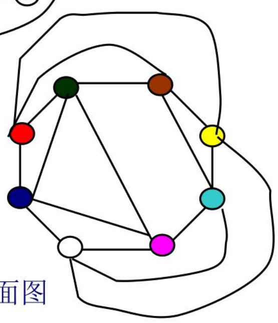
k=4 m=16





同构不是平面图





同构平面图

此种图是哈密尔顿图

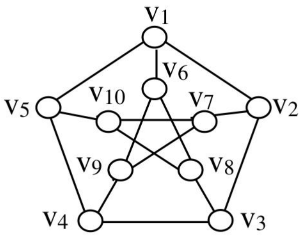
七. （本题 10 分）设图 G 是含有 6 个顶点，13 条边的无向简单图，证明图 G 是哈密顿图但不是欧拉图。

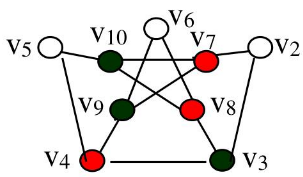
证明：

1 先证明每个顶点的度数≥ 3，否则假设有一顶点的度数≤ 2，则其余 5 个顶点的度数和应≥ 2*13-2=24，因为 G 是无向简单图，在由这 5 个顶点构成的子图中其度数和≤ 20，再加上与此顶点关联的度数，其度数和≤ 22，矛盾，所以每个顶点的度数≥ 3， 因此 G 是哈密顿图。

2 证明 G 不是欧拉图，如果 G 是欧拉图，则每个顶点的度数均为偶数，又顶点个数为 6，则边数应为偶数。

八、（本题 10 分）证明彼德逊图（见下图）去掉一个顶点 v_1 后所得子图与 $K_{3,3}$ 二度同构。





去掉一个顶点 v_1 后所得子图

九、（本题 10 分）设有向图 D 的底图是彼德逊图，证明有向图 D 中各顶点的出度平方之和等于各顶点的入度平方之和。即

$$\sum_{i=1}^{10}(\deg^{+}(v_i))^2=\sum_{i=1}^{10}(\deg^{-}(v_i))^2$$

十、（每小题 5 分, 本题共 10 分）请回答下列问题

1. T 是无向树，T 中有 29 个二度点，3 个 3 度点，5 个 4 度点，4 个 5 度点，T 中没有大于 5 度的顶点, 那么 T 中有几片树叶.

解： 设 T 有 x 片树叶， n 个顶点， m 条边,

则有 $m = n - 1$

$n = x+29+3+5+4$

由度数定理则有 $x+2*29+3*3+5*4+4*5=2*(x+29+3+5+4-1)$

$x=3+5*2+4*3+2=27$

所以 T 有 27 片树叶

2. 求叶片权为 2, 4, 6, 8, 10, 20 的最优树, 并写出最优树的权.

２　４　６　８　１０　２０

６　６　８　１０　２０

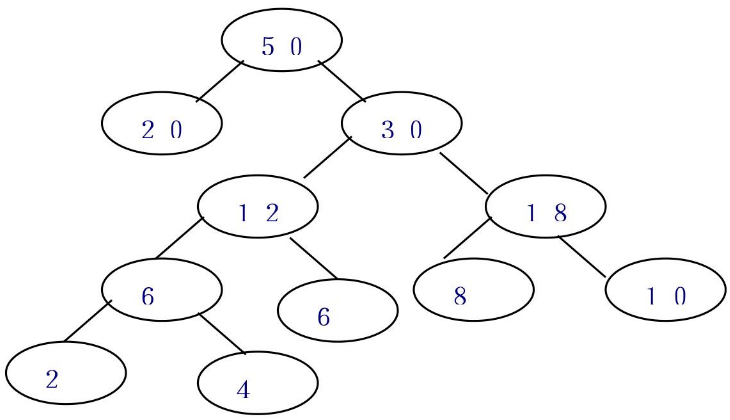
１２　８　１０　２０

１２　１８　２０

３０　２０

５０

叶片权为 2, 4, 6, 8, 10, 20 的最优树：



最优树的权：

２０＋２＊４＋４＊４＋６＊３＋８＊３＋１０＊３＝１１６