2014-2015 年第一学期《普通物理 I -1》期末试卷 A 卷

北京工业大学 2014——2015 学年第 1 学期

《普通物理 I-1 》期末考试试卷 A 卷答案

一、（10 分）质点作半径 R= 1 m 的圆周运动，其角位置 $\theta = 1 + t^3$ (SI)，求 t=2s 时的角速度 ω，角加速度 α，法向加速度 a_n 及切向加速度 a_t

解：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 \to \omega = 12\text{rad/s},$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6t \to \alpha = 12\text{rad/s}^2,$$

$$a_n = R\omega^2 \to a_n = 144\text{m/s}^2,$$

$$a_t = R\alpha \to a_t = 12\text{m/s}^2$$

二、（10 分）质量为 M 的船静止. 现以水平速度 v_0 将一质量为 m 的砂袋抛到船上，此后两者一起运动。设阻力大小与速率成正比，且 $f = -kv$ ($k>0$)，以船开始运动时 t=0，试求：(1) 船开始运动时的速度 v'；(2) t 时刻船的运动速度 v(t).

解：(1)根据动量守恒， $m\vec{v}_0 = (m+M)\vec{v}' \to \vec{v}' = \dfrac{m\vec{v}_0}{(m+M)}$

(2) 以 $\vec{v}_0$ 方向为 X 方向，根据牛顿第二定律：$\vec{F} = m\vec{a}$

$$\to -kv = (m+M)a = (m+M)\frac{dv}{dt}$$

$$\to \frac{-k}{m+M}dt = \frac{dv}{v} \to \int_0^t \frac{-k}{m+M}dt = \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{dv} \to \frac{-kt}{m+M} = \ln\frac{v}{v_0}$$

$$\to \frac{v}{v_0} = e^{\frac{-kt}{m+M}} \to v = v_0 e^{\frac{-kt}{m+M}} \to \vec{v} = \vec{v}_0 e^{\frac{-kt}{m+M}} = \frac{m\vec{v}_0}{m+M}e^{\frac{-kt}{m+M}}$$

三、（10 分）质量为 1 kg 的静止物体，从坐标原点出发沿 X 轴运动，合力 $\vec{F} = (7+3x^2)\vec{i}$ (SI)。求: (1) 从开始运动到 x=1m 处力 $\vec{F}$ 所做的功 A；(2) 物体在 x=1m 处的速度 $\vec{v}_1$；(3) 从开始运动到 x=1m 处力 $\vec{F}$ 产生的冲量 $\vec{I}$.

解：(1) $A=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1(7+3x^2)dx=8\ \mathrm{J}$

(2) 物体初速度为0，根据动能定理有$\frac{1}{2}mv_1^2=A=8\Rightarrow v_1=4\ \mathrm{m/s}$

(3) 物体初速度为0，根据动量定理，$I=mv_1=4\ \mathrm{kg.m/s}$

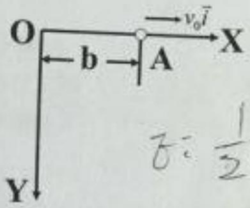
四、(10分) 如图，在 t = 0 时刻将质量为 m 的质点由 A 处以初速度$v_0\vec{i}$抛出，求：

(1).写出质点的运动函数$\vec{r}(t)$.

(2). t 时刻，质点所受的对原点 O 的力矩$\vec{M}$.

(3). t 时刻，质点对原点 O 的角动量$\vec{L}$.

(注意：重力加速度以 g 表示，不需具体数值)



$E=\frac{1}{2}J\omega^2$

第四题图

解：(1)$\vec{r}(t)=(b+v_0t)\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$；

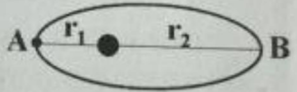
(2) $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\left[(b+v_0t)\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}\right]\times mg\vec{j}=mg(b+v_0t)\vec{k}$；

i j h

i j h

(3) $\vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}=m\left[(b_0+v_0t)\vec{i}+\frac{1}{2}gt^2\vec{j}\right]\times\left[v_0\vec{i}+gt\vec{j}\right]=mg(bt+\frac{1}{2}v_0t^2)\vec{k}$

五、(10分) 如图，质量为m的卫星绕地球作椭圆运动，A、B 两点距地心分别为r_1、r_2．设地球质量为M，若地球的半径忽略不计，则求：



第五题图

(1) 卫星在 A、B 两点的动能之差$E_{kA}-E_{kB}$．

(2) 卫星在 A、B 点的运动速率v_A、v_B．

(3) 若椭圆轨道的面积为$S=\frac{\pi}{2}(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2}$，求卫星的运动周期 T.

解：(1) 根据机械能守恒，

$$E_{k,A}-E_{k,B}=\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{1}{2}mv_B^2=E_{p,B}-E_{p,A}=\frac{GMm}{r_1}-\frac{GMm}{r_2}$$

(2) 根据角动量守恒，有$r_1v_A=r_2v_B$，与上式联立，可求出

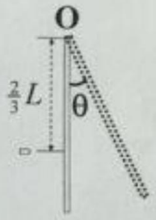
$$v_A=\sqrt{\frac{2GMr_2}{(r_1+r_2)r_1}}\qquad v_B=\sqrt{\frac{2GMr_1}{(r_1+r_2)r_2}}$$

(3) 椭圆轨道的面积 $S=\frac{\pi}{2}(r_1+r_2)\sqrt{r_1r_2}$

掠面速度 $\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}=\frac{mv_Ar_1}{2m}=\sqrt{\frac{GMr_1r_2}{2(r_1+r_2)}}$

$\rightarrow T=\frac{S}{dS/dt}=\frac{\pi(r_1+r_2)^{3/2}}{\sqrt{2GM}}$

六、(10 分) 质量为 M，长为 L 的均匀细杆沿光滑轴 O 转动，质量为 M/4 的子弹距 O 轴 2L/3 处以速度 v_0 沿水平方向射入细杆，求：(1) 均匀细杆相对于 O 轴的转动惯量 J；(2) 子弹嵌入后，细杆转动的角速度 ω；(3) 细杆的最大摆角 θ；



第六题图

mR^2

圆盘 $\frac{1}{2}m$

解：(1) $J=mL^2/3$

(2) 嵌入过程中,子弹一杆系统 L=const.

$\frac{ml^2}{12}$

$$mv_0\cdot\tfrac{2}{3}L=[m(\tfrac{2}{3}L)^2+\tfrac{1}{3}ML^2]\omega\rightarrow\omega=\frac{3v_0}{8L}$$

(3) 上摆过程中,子弹一杆一地球系统， Ep+Ek=const. 令 O 轴处 Ep=0，则有

$$(-mg\cdot\tfrac{2}{3}L-Mg\cdot\tfrac{1}{2}L)+\tfrac{1}{2}[m(\tfrac{2}{3}L)^2+\tfrac{1}{3}ML^2]\omega^2=-mg\cdot\tfrac{2}{3}L\cos\theta-Mg\cdot\tfrac{1}{2}L\cos\theta$$

$$\rightarrow\theta=\arccos(1-\frac{3v_0^2}{64gL})$$

七、(10 分) 细棒静止质量为 m_0，长度为 L_0，当它沿棒长方向做高速运动时，测得其长度为 L，求：(1) 细棒的运动速度 v；(2) 该棒的相对论总能量 E；(3) 该棒的相对论动能 E_k；(4) 棒的线密度λ.

解：(1) 根据长度收缩，$L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \rightarrow v=\frac{c}{L_0}\sqrt{L_0^{\ 2}-L^2}$

(2) $E=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0c^2L_0}{L}$

(3) $E_k=mc^2-m_0c^2=\frac{m_0c^2(L_0-L)}{L}$

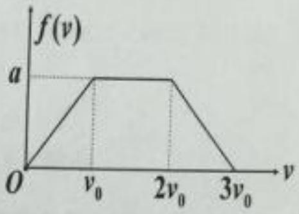
(4) $\lambda = \frac{m}{L} = \frac{m_0}{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 L_0}{L^2}$

八、(10 分) 粒子的速率分布函数如图，求：

(1) 根据速率分布函数归一化条件求常量 a；

(2) 求速率在 $[v_0, 2v_0]$ 区间的分子占总分子数的比例；

(3) 求所有粒子的平均速率 $\bar{v}$；



第八题图

解：(1) 归一化要求对应曲线下面积为 1，

可得：$\frac{1}{2}av_0 + av_0 + \frac{1}{2}av_0 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2v_0}$

(2) $P = \int_{v_0}^{2v_0} f(v)dv = \frac{1}{2}$

(3) $\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v = \int_0^{v_0} \frac{av^2}{v_0}\mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} av\mathrm{d}v + \int_{2v_0}^{3v_0} av\left(3 - \frac{v}{v_0}\right)\mathrm{d}v == \frac{3}{2}v_0$

九、(10 分) 刚性多原子分子理想气体的状态变化遵从 PV^2=B 的规律(B 为常量)，则当体积由 V_1 膨胀至 $2V_1$ 时，求：(1) 该气体的自由度 i；(2) 气体对外做功 A；(3) 气体内能的增量 ΔE；(4) 气体从外界吸收的热量 Q.

解：(1) i=6;

(2) $A = \int_{V_1}^{2V_1} P\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{2V_1} \frac{B}{V^2}\mathrm{d}V = \frac{B}{2V_1}$

$E = \frac{i}{2}\nu RT$

$PV = \nu RT = \frac{B}{V}$

(3) $\Delta E = -\frac{3B}{2V_1}$

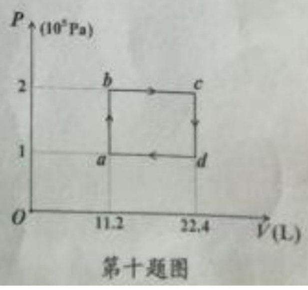
$E_2 - E_1 = \frac{3B}{2V} - \frac{3B}{V}$

(4) $Q = -\frac{B}{V_1}$

十、(10 分) 一定量的氧气(视为刚性双原子分子理想气体)作如图所示的正循环。已知理想气体的定体摩尔热容为 $C_V = iR/2$，定压摩尔热容为 $C_P = (i+2)R/2$，其中 R=8.31J.mol/K。求：

(1) 氧气分子的自由度 i；

(2) 分析 ab，bc，cd，da 四个过程哪两个过程



第十题图

为吸热过程；并求其吸热量 Q；

(3) 该循环对外界所作的总功 A；

(4) 该循环的效率 η.

解：(1)i=5

(2) ab 和 bc 过程为吸热过程，ab 为等体过程，摩尔热容 $C_v = 5R/2$，bc 为等压过程，摩尔热容为 $C_p = 7R/2$，

则 $Q_{ab} = \nu C_v(T_b - T_a) = \nu \frac{5}{2} R(T_b - T_a) = \frac{5}{2}(P_b V_b - P_a V_a) = 2800J$

$Q_{bc} = \nu C_p(T_c - T_b) = \nu \frac{7}{2} R(T_c - T_b) = \frac{7}{2}(P_c V_c - P_b V_b) = 7840J$

(2) 对外界总功即为循环曲线包围面积：$A = (P_b - P_a)(V_c - V_b) = 1120J$

(3) $\eta = A/Q_1 = 1120/(2800 + 7840) \cong 10.5\%$