例 1 已知速度场

$$u_x = -\frac{ky}{x^2+y^2}，\ u_y = \frac{kx}{x^2+y^2}，\ u_z = 0$$

其中，k 为常数（$k>0$），试求流线方程与迹线方程。

解：流线方程为

$$\frac{dx}{-\dfrac{ky}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\dfrac{kx}{x^2+y^2}}$$

即

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

积分得

$$x^2+y^2=C^2 \text{（} C \text{ 为积分常数）}$$

表示流线是同心圆。当 y=0，$x>0$ 时，u_x=0，$u_y>0$，表示流向为逆时针（如图 3.2.5）。

迹线方程为

$$\frac{dx}{-\dfrac{ky}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\dfrac{kx}{x^2+y^2}} = dt$$

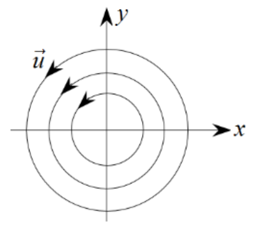

图3.2.5 速度场示意图

这是一阶一次联立微分方程，不难积分得

$$x^2+y^2=C^2 \text{（} C \text{ 为积分常数）}$$

与流线方程相同。因本例速度场与时间 t 无关，属恒定流，表明恒定流的流线与迹线重合。

例 2 已知速度场 $u_x=1-y$，$u_y=t$，$u_z=0$，试求 $t=1$ 时，过坐标原点的流线以及 $t=0$ 时，位于坐标原点流体质点的迹线。

解：根据流线方程，有

$$\frac{dx}{1-y} = \frac{dy}{t}$$

积分得

$$xt+C_1 = y-\frac{1}{2}y^2 \text{（} C_1 \text{ 为积分常数）}$$

当 t=1，$x=y=0$ 代入该式，得 $C_1=0$，于是得到所求流线为

$$y^2-2y+2x=0$$

根据迹线方程，有

$$\frac{dx}{1-y} = \frac{dy}{t} = dt$$

$$\begin{cases} dx=(1-y)dt \\ dy=tdt \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2}t^2+C_2 \text{（} C_2 \text{ 为积分常数）}$$

于是

$$x = t - \frac{1}{6}t^3 - C_2 t + C_3 \text{（}C_3\text{为积分常数）}$$

当t=0，$x = y = 0$代入该式，得$C_2 = C_3$=0，于是得到所求迹线方程为

$$\begin{cases} x = t - t^3/6 \\ y = t^2/2 \end{cases}$$

或者消去t后可以得到

$$x^2 = 2y\left(1 - y/3\right)^2$$