

北京工业大学 2022—2023 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 C 卷

考试说明:考试时间:95 分钟、考试方式:闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》,在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律,服从监考教师管理,诚信考试,做到不违纪、不作弊、不替考,若有违反,愿接受相应处分。

承诺人: _____ 学号: _____ 班号: _____

注:本试卷共 三 大题,共 6 页,满分 100 分,考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表(阅卷教师填写)

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

- | |
|----|
| 得分 |
| |
- 一、填空题:(本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)
1. 已知函数 $z = x^y$, 则 $dz|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}} dx$.
 2. 设 L 是 xOy 平面的下半圆周 $y = -\sqrt{4-x^2}$, 则 $\int_L (x^2 + y^2) ds = \underline{2\pi}$.
 3. 函数 $z = x^2 - 2xy$ 在点 $(1, 0)$ 处沿该点到点 $(4, 4)$ 的方向导数等于 $\underline{-\frac{2}{5}}$.
 4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散? 条件收敛 .
 5. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数为 $\underline{\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n, x \in (-2, 4)}$.

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

6. 微分方程 $xy' + 2y = 0$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解为 $y = \frac{1}{x^2}$.

7. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, 则 $\oiint_{\Sigma} x dS = 0$.

8. 曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为 $2x + y - 4 = 0$.

9. 改变二次积分的积分次序 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记

为 $S(x)$, 则 $S(-21\pi) = \frac{\pi^2}{2}$.



二、计算题: (本大题共 6 小题, 每小题 10 分, 共 60 分)

得 分

11. 求由曲面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积.

解: 设立体为 Ω ,

则体积 $V = \iiint_{\Omega} dV$ -----4'

$$= \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta \int_{r^2}^{2-r} dz$$
 -----6'

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (2-r-r^2) r dr$$
 -----8'

$$= \frac{5}{6} \pi$$
 -----10'

也可用截面法计算



得 分

12. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$ 的收敛域及和函数.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2) \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2}$, 收敛半径 $R=2$. ----2'

而 $x=2$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$, 发散. ----3'

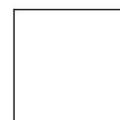
$x=-2$ 时, 幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)$, 发散. ----4'

故幂级数的收敛域为 $x \in (-2, 2)$. 所以 $x \in (-2, 2)$ 时,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{2^n} \right)' \quad \text{----6'}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n} \right)' = \left(\frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \right)' \quad \text{----8'}$$

$$= \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}, \quad \text{----10'}$$



得 分

13. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 3xdydz + y^2dzdx + zdx dy$, 其中 Σ 为锥面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在平面 $z=6$ 下方的部分, 取下侧.

解: 作平面 $\Sigma_1: z=6$ ($x^2 + y^2 \leq 36$), 取上侧, ----2'

则 $I = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} 3xdydz + y^2dzdx + zdx dy - \iint_{\Sigma} 3xdydz + y^2dzdx + zdx dy$ ----3'

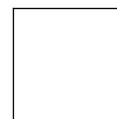
$$\oiint_{\Sigma + \Sigma_1} 3xdydz + y^2dzdx + zdx dy = \iiint_{\Omega} (4+2y)dx dy dz = 4 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 288\pi. \quad \text{----6'}$$

$$\iint_{\Sigma_1} 3xdydz + y^2dzdx + zdx dy = 6 \iint_D dx dy = 216\pi. \quad \text{----9'}$$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

所以 $I = 288\pi - 216\pi = 72\pi$.

---10'



得 分

14. 求微分方程 $y'' + y = 4xe^{3x}$ 的通解.

解: 先求对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解.

特征方程 $r^2 + 1 = 0$,

-----1'

特征根 $r_1 = i, r_2 = -i$,

-----3'

故齐次方程通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

-----4'

设非齐次方程特解为 $y^* = ze^{3x}$,

-----5'

得 $z'' + 6z' + 10z = 4x$,

-----6'

设 $z = ax + b$, 解得 $a = \frac{2}{5}, b = -\frac{6}{25}$

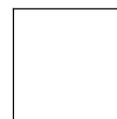
-----8'

所以非齐次方程的特解为 $y^* = \left(\frac{2}{5}x - \frac{6}{25}\right)e^{3x}$,

-----9'

原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\frac{2}{5}x - \frac{6}{25}\right)e^{3x}$.

-----10'



得 分

15. 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值并指出是极大值还是极小值.

解: 令 $f'_x(x, y) = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0$,

-----1'

$f'_y = e^{2x}(2y + 2) = 0$,

-----2'

解得驻点为 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

-----3'

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

而 $f''_{xx}(x, y) = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1)$, $f''_{xy}(x, y) = 4e^{2x}(y + 1)$, $f''_{yy}(x, y) = 2e^{2x}$

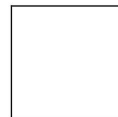
-----6'

所以 $A = 2e, B = 0, C = 2e, AC - B^2 = 4e^2 > 0$, .

-----9'

故函数在 $(\frac{1}{2}, -1)$ 取得极小值, 极小值为 $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$.

-----10'



得 分

16. 计算 $I = \int_L (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是在半圆

周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2, 0)$ 的一段弧.

解: 补充直线 $\overline{AO}: y = 0 \quad (0 \leq x \leq 2)$.

-----2'

则

$$I = \oint_{L+\overline{AO}} (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy - \int_{\overline{AO}} (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy,$$

-----3'

$$\oint_{L+\overline{AO}} (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy = -\iint_D dx dy$$

-----5'

$$= -\frac{\pi}{2}.$$

-----6'

$$\int_{\overline{AO}} (x^2 - 2y)dx - (x + \sin^2 y)dy = \int_2^0 x^2 dx$$

-----8'

$$= -\frac{8}{3}.$$

-----9'

$$\text{所以 } I = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2}.$$

-----10'



三、证明题：(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

得 分

17. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$ ($n = 2, 3, \dots$),
 $0 < k < 1$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.

证明：由已知有 $|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|$,
-----2'

当 $0 < k < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}$ 收敛, -----4'

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛. -----5'



得 分

18. 设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 证明:

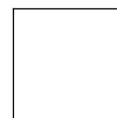
$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

证明: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} g'(\frac{y}{x})$, -----2'

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f''(\frac{x}{y}) + g'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2}) + \frac{y}{x^2} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3} g''(\frac{y}{x}) = \frac{1}{y} f''(\frac{x}{y}) + \frac{y^2}{x^3} g''(\frac{y}{x})$,
-----3'

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (-\frac{x}{y^2}) f''(\frac{x}{y}) + \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x}) + \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} g''(\frac{y}{x}) = (-\frac{x}{y^2}) f''(\frac{x}{y}) - \frac{y}{x^2} g''(\frac{y}{x})$,
-----4'

所以 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ -----5'



资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享