北京工业大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷

考试说明：考试日期:2023 年 11 月 15 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：________ 学号：________ 班号：________

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用黑色或者蓝色中性笔或者钢笔。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$ $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f\left(x^3\right)}{x^3}=$ 4

3. 函数 $y=x-\sqrt{x}$ 的单调减少区间是 $[0, \frac{1}{4}]$（开闭区间都对）

4. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则 $a=$ -2

5. 曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程为 $y=2x$

6. 设函数 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$ $-\pi\,dx$

7.设函数 $g(x)$ 可微, $h(x)=e^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$，则 $g(1)=$ $\underline{\ln\frac{1}{2}-1}$

8.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=x+1$ 确定，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ $\underline{-3}$

9.曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 的垂直渐近线为 $\underline{x=1}$

10.设 $y=f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且 $f(2)=1, f'(2)=e, f(1)=2-e, f'(1)=1$, 则

$\left[f^{-1}(x)\right]'\big|_{x=1}=$ $\underline{\frac{1}{e}}$

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11.设 $y=\ln\left(1-\frac{4x}{1+2x+x^2}\right)$，求 y'，y'' 及 $y^{(n)}$.

解: $y=\ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}=2\ln(x-1)-2\ln(x+1)$ …2'

$y'=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}$, …4'

$y''=-2(x-1)^{-2}+2(x+1)^{-2}$, …6'

$y'''=2\cdot 2(x-1)^{-3}-2\cdot 2(x+1)^{-3}$,

$y^{(4)}=-2\cdot 3!(x-1)^{-4}+2\cdot 3!(x+1)^{-4}$,

⋯⋯

$y^{(n)}=(-1)^{n+1}\cdot 2(n-1)!(x-1)^{-n}-(-1)^{n+1}\cdot 2(n-1)!(x+1)^{-n}$.

…10'

得 分

12.计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{x^2}$.

解：令 $y=\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{x^2}$.

则 $\ln y = x^2 \ln\dfrac{1}{1-\cos x}$. ……2'

$\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1}{1-\cos x}}{\frac{1}{x^2}}$ ……4'

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cdot\frac{\sin x}{-(1-\cos x)^2}}{-\frac{2}{x^3}}$ ……6'

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{1-\cos x}$ ……8'

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{\frac{1}{2}x^2}$ ……9'

$=0$ ……10'

得 分

13.求曲线 $y=xe^x$ 的极值，凹凸区间和拐点.

解：定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$ ……2'

$y'=e^x(x+1)$，$y''=e^x(x+2)$. ……4'

令 $y'=0$，得 $x=-1$. ……5'

令 $y''=0$，得 $x=-2$. ……6'

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	单增，上凸	拐点	单减，下凸		单增．下凸

故极小值为 $y(-1)=-\dfrac{1}{e}$ ……7'

上凸区间 $(-\infty,-2]$ ……8'

下凸区间 $[-2,+\infty)$ ……9'

拐点 $(-2,-2e^{-2})$ ……10'

得 分

14.设$\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$确定了函数 $y=y(x)$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\frac{dx}{dt}=t^2+1$， ⋯ 2'

$\frac{dy}{dt}=t^2-1$. ⋯ 4'

故 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ ⋯ 6'

又 $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$ ⋯ 8'

故 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}$ ⋯ 10'

得 分

15.求函数 $f(x)=\frac{(x-1)^2-1}{\sqrt{x^2}\cdot(x^2-1)}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

解：$f(x)=\frac{x(x-2)}{|x|(x+1)(x-1)}$ ⋯ 1'

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x(x-2)}{-x(x+1)(x-1)}=-2$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(x-2)}{x(x+1)(x-1)}=2$.

故 $x=0$ 是第一类跳跃间断点. ⋯ 4'

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x(x-2)}{x(x+1)(x-1)}=\infty$.

故 $x=1$ 是第二类无穷间断点. ⋯ 7'

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x(x-2)}{-x(x+1)(x-1)}=\infty$

故 $x=-1$ 是第二类无穷间断点. ⋯ 10'

得分

16.设函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$，如果 $f''(0)$ 存在，求常数 a,b.

解：$f''(0)$ 存在，故 $f'(x)$ 存在.

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2+bx}{x}=b$ …2'

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ …4'

$\because f'(0)$ 存在，故 $b=1=f'(0)$. …5'

$f'(x)=\begin{cases} 2ax+1, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0 \end{cases}$.

$f_-''(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2ax+1-1}{x}=2a$. …7'

$f_+''(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x(1+x)}=-1$. …9'

$\because f''(0)$ 存在，故 $2a=-1$，$a=-\frac{1}{2}$. …10'

所以 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得分

17.证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$，$(-1<x<1)$.

证明：令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{1}{2}x^2$ ……1'

$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$. ……2'

$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{4}{(1-x^2)^2}-(\cos x+1)$ ……3'

……4'

$\geq 4-2=2>0$

故 $f'(x)$ 单增. 当 $-1<x<0$ 时 $f'(x)<f'(0)=0$

当 $0<x<1$ 时 $f'(x)>f'(0)=0$.

故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的极小值. 即对 $\forall x\in(-1,1)$ 有

$f(x)\geq f(0)=0$. 原命题得证. ……5'

得分

18.已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

证明：(1) 令 $g(x)=f(x)-1+x$. ……1'

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=f(0)-1=-1<0$，

……2'

$g(1)=f(1)-1+1=1>0$.

由零点定理得，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $g(\xi)=0$.

即 $f(\xi)=1-\xi$. ……3'

(2) 对 $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上用拉格朗日定理，得

$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$，$\eta\in(0,\xi)$ ……4'

对 $f(x)$ 在 $[\xi,1]$ 上用拉格朗日定理，得

$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$，$\zeta\in(\xi,1)$. ……5'

故 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=1$.