题目	(10)	(15)	(10)	(15)	(20)	(10)	(20)	总分
得分								

一、(10 分) 求下列系统的传递函数矩阵。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

解: $sI-A=\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 3 & 1 & s+2\end{bmatrix}$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\begin{bmatrix}s^2+2s+1 & s+2 & 1\\ -3 & s^2+2s & s\\ -3s & -s-3 & s^2\end{bmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 3 & 1 & s+2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+2s^2+s+3}\begin{bmatrix}s^2+2s+1 & s+2 & 1\\ -3 & s^2+2s & s\\ -3s & -s-3 & 1\end{bmatrix}$$

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\frac{1}{s^3+2s^2+s+3}\left[\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+2s+1 & s+2 & 1\\ -3 & s^2+2s & s\\ -3s & -s-3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\frac{1}{s^3+2s^2+s+3}\begin{bmatrix}s^2 & s^2+2s-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s^2}{s^3+2s^2+s+3} & \dfrac{s^2+2s-1}{s^3+2s^2+s+3}\end{bmatrix}.$$

二.(15分)求系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u$，$x(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$u(t)=e^{-t}, t\geq 0$ 的状态响应x(t)。

解：① 零输入响应

$|\lambda I-A| = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2)$ $\quad \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$

$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$\hat{A} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$

$$e^{At} = Pe^{\hat{A}t}P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-2t}\\ -e^{-t} & -2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x_{zi}(t) = e^{At}x(0) = e^{At}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

② 零状态响应

$$\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\cdot e^{-\tau}d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}4e^{-(t-\tau)}-2e^{-2(t-\tau)}\\ -4e^{-(t-\tau)}+4e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t+\tau}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t+\tau}\end{bmatrix}d\tau = \begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-t}\\ -4e^{-t}+4e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t}\cdot\frac{1}{5-t}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t}\cdot\frac{1}{5-t}\end{bmatrix}}$$

$$x(t) = e^{At}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\cancel{\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t}\frac{1}{5-t}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t}\frac{1}{5-t}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2e^{-t}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

三、（10分）给定线性定常系统$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$，考察系统的能控性，并确定系统能控性与系数a, b, c之间的依赖关系。

解: $U_c=[B\ \ AB\ \ A^2B]$

$=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&c\\1&c&b+c^2\end{bmatrix}$

$\mathrm{rank}\,U_c=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&c\\1&c&b+c^2\end{bmatrix}=3$

系统完全能控. 与 a, b, c 无关.

四．（15分）求下列线性时不变系统的能控能观测子系统。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

解:

$[0\ 1\ 1\ 0\ 1]$

各状态变量能控能观性如下:

$x_1: \bar{c}\ \bar{o}$

$x_2: c\ o$

$x_3: \bar{c}\ o$

$x_4: c\ \bar{o}$

$x_5: c\ o$

∴能控能观子系统由 x_2, x_5 组成.

$$\begin{cases}\dot{x}_2=\lambda_1 x_2+x_3+u\\ \dot{x}_5=\lambda_2 x_5+u\end{cases}$$

$y=x_2+x_3+x_5$.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}X$$

五.（20 分，学术型）判断下列系统是否可以通过状态反馈和输入变换实现动态解耦。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&2&1\end{bmatrix}x$$

解：

$$\bar{E}_1=C_1(A-BK)^{\bar{d}_1}BL=[2\ -1\ 1]\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=[3\ 0]$$

$$\bar{E}_2=C_2(A-BK)^{\bar{d}_2}BL=[0\ 2\ 1]\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=[1\ -3]$$

$$E=\begin{bmatrix}E_1\\E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\1&-3\end{bmatrix}$$

E为非奇异，受控系统可动态解耦.

六、（10 分）给定系统$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x$，Q=I，试判断该系统是否为大范围渐近稳定。

解：设实对称矩阵 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$，$p_{12}=p_{21}$

代入 $A^TP+PA=-Q$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-p_{11}+2p_{21} & -p_{12}+2p_{22}\\ p_{11}-3p_{21} & p_{12}-3p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-p_{11}+2p_{12} & p_{11}-3p_{12}\\ -p_{21}+2p_{22} & p_{21}-3p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-2p_{11}+2p_{21}+2p_{12} & p_{11}-4p_{12}+2p_{22}\\ p_{11}-4p_{21}+2p_{22} & p_{12}+p_{21}-6p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}p_{11}=\frac{7}{4}\\ p_{12}=p_{21}=\frac{5}{8}\\ p_{22}=\frac{3}{8}\end{cases} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}\frac{7}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$$

$\Delta_1=p_{11}=\frac{7}{4}>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{7}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8}\end{vmatrix}=\frac{17}{64}>0$

∴ P 正定，系统在平衡状态大范围渐近稳定。

七.（20 分，学术型）

二阶谐波振荡器 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u$，其中 x_1 为位置，x_2 为速度，ω 为常数，请用速度 $y = x_2$ 作为观测量设计一个带有状态观测器（10 分）的状态反馈控制（10 分）使得系统闭环极点为 $-\omega \pm i\omega$，而观测器的两个极点为 $-\omega$。

解：(1). $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w^2 x_1 + u \end{cases}$ $\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$

设 $K_f = [K_{f1} \ \ K_{f2}]$

$$|\lambda I - (A - BK_f)| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{f1} & K_{f2} \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ w^2 + K_{f1} & \lambda + K_{f2} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \lambda K_{f2} + w^2 + K_{f1}. \quad ①$$

∵ 闭环极点为 $-w \pm iw$,

$(\lambda + w - iw)(\lambda + w + iw)$

$= \lambda^2 + 2w\lambda + 2w^2 \quad ②$

① ~ ② $\begin{cases} K_{f1} = w^2 \\ K_{f2} = 2w. \end{cases}$

$K_f = [K_{f1} \ \ K_{f2}] = [w^2 \ \ 2w]$

(2). 设 $K_c = \begin{bmatrix} K_{c1} \\ K_{c2} \end{bmatrix}$ $\quad A - K_c C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{c1} \\ K_{c2} \end{bmatrix} [0 \ \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - K_{c1} \\ -w^2 & -K_{c2} \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - (A - K_c C)| = \begin{vmatrix} \lambda & K_{c1} - 1 \\ w^2 & \lambda + K_{c2} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda K_{c2} + w^2 - w^2 K_{c1} \quad ③$$

∵ 观测器极点为 $-w$

$(\lambda + w)(\lambda + w) = \lambda^2 + w^2 + 2\lambda w. \quad ④$

③ ~ ④. $\begin{cases} K_{c1} = 0 \\ K_{c2} = 2w. \end{cases}$ $\quad K_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 2w \end{bmatrix}$

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_c C)\hat{x} + Bu + K_c y.$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -2w \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2w \end{bmatrix} y.$$