得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.微分方程 $\frac{dy}{dx}=2^{x-y}$ 满足 $y(0)=1$ 特解为________

2.微分方程 $\frac{dy}{dx}+2xy=x$ 的通解为________

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2^n n!}{n^n}+(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)]$ 是收敛还是发散？________

4. 函数 $y=x^2\sin x$ 的麦克劳林级数 x^{2023} 中的系数为________

5.设2π周期函数f在$[-\pi,\pi)$上满足 $f(x)=\begin{cases} e^x,-\pi\le x\le 0 \\ x+2,0<x<\pi \end{cases}$ ，其傅里叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(10\pi)=$ ________

6.二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ y\to -1}}\frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}=$ ________

7. xoz 坐标面上的曲线 $z^2 = x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程为__________

8. 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 3^n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^n$ 的收敛半径为__________

9. 设函数 $z = x^2 y + \sin(xy)$，则全微分 $dz =$__________

10. 若方程 $xz = \ln\dfrac{z}{y}$ 可确定隐函数 $z = z(x,y)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} =$__________

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^3}$ 展为 x 的幂级数并求展开式成立的区间.

得 分

12．求微分方程 $y''+4y'+4y=xe^{x}$ 的通解.

得 分

13．设 $z=f(2x+y,y\cos x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

得 分

14. 求幂级数 $\sum_{n=}^{\infty}\frac{\quad}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

得 分

15.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \geq a_{n+1} > 0, n = 1,2,3,\cdots$ 且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

得 分

16. 设有方程组$\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\sin v \end{cases}$确定隐函数$u = u(x, y), v = v(x, y)$

求$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设函数 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，且方程 $F(x-2z,y-3z)=0$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$，证明 $2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

得 分

18. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n},a_n>0,b_n>0$，$n=1,2,3,\ldots$，证明若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.