北京工业大学 2022——2023 学年第 1 学期

《现代控制理论》 考试试卷 B 卷

一、将系统化为对角标准型或约旦标准型。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}5 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ -6\\ 8\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}6 & -9 & -11\end{bmatrix}x$$

20029220 刘宇晨

一、

解：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-5 & 4 & 4\\ 0 & \lambda-1 & 1\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

$\therefore \lambda_1=1 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_3=3$

当$\lambda=1$时，$\begin{bmatrix}5 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}$，解得：$v_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

当$\lambda=2$时，$\begin{bmatrix}5 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}$，解得：$v_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

当$\lambda=3$时，$\begin{bmatrix}5 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}$，解得：$v_3=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$

$\therefore P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore \bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，$\bar{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$，$\bar{C}=CP=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 对角标准型为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$\bar{y}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -1\end{bmatrix}x$$

二、当$x(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$时，求系统的零输入响应。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\0 & 3 & 0\\-2 & 4 & 2\end{bmatrix}x$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\end{bmatrix}x$$

二、

解：$(sI-A)^{-1}=\dfrac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)}\begin{bmatrix}(s-3)(s-2) & -(s-2) & 0\\0 & (s-2)(s-4) & 0\\-2(s-3) & 4s-14 & (s-3)(s-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-4} & \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-4} & 0\\0 & \frac{1}{s-3} & 0\\\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-4} & \frac{1}{s-4}+\frac{2}{s-3}-\frac{3}{s-2} & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$

$\therefore e^{At}=\begin{bmatrix}e^{4t} & e^{3t}-e^{4t} & 0\\0 & e^{3t} & 0\\e^{2t}-e^{4t} & e^{4t}+2e^{3t}-3e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$

$\therefore x(t)=e^{At}x(0)=\begin{bmatrix}-e^{3t}+2e^{4t}\\-e^{3t}\\5e^{2t}-2e^{3t}-2e^{4t}\end{bmatrix}$

$\therefore y(t)=Cx(t)=-5e^{2t}+3e^{3t}+2e^{4t}$

三、将系统化为能控标准型。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}6 & 11 & 26\\ 1 & 0 & 2\\ -3 & -5 & -12\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-89 & -112 & 111\end{bmatrix}x$$

三、

解：$AB=\begin{bmatrix}6 & 11 & 26\\ 1 & 0 & 2\\ -3 & -5 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-14\\ 0\\ 6\end{bmatrix}$

$A^2B=\begin{bmatrix}6 & 11 & 26\\ 1 & 0 & 2\\ -3 & -5 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-14\\ 0\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72\\ -2\\ -30\end{bmatrix}$

$\therefore U_c=\begin{bmatrix}2 & -14 & 72\\ 0 & 0 & -2\\ -1 & 6 & -30\end{bmatrix}$

$\because \mathrm{rank}U_c=3$

$\therefore$ 完全可控

$U_c^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}12 & 12 & 28\\ 2 & 12 & 4\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -3 & -7\\ -\frac{1}{2} & -3 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

$p_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -3 & -7\\ -\frac{1}{2} & -3 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$

$p_1A=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 11 & 26\\ 1 & 0 & 2\\ -3 & -5 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}$

$p_1A^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 11 & 26\\ 1 & 0 & 2\\ -3 & -5 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore A_c=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -5 & -6\end{bmatrix}$，$b_c=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$，$C_c=CP=\begin{bmatrix}56 & -11 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore \dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -5 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$

$\tilde{y}=\begin{bmatrix}56 & -11 & 1\end{bmatrix}x$

四、利用李雅普诺夫第二方法检测系统稳定性。若稳定，写出系统的李雅普诺夫函数及其导函数式；若不稳定，说明理由。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x$$

四、

解：设 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

$$A^T P + PA = -I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4p_{11} - 4p_{12} = -1 \\ 3p_{12} - 2p_{22} = 0 \\ 3p_{21} - 2p_{22} = 0 \\ 2p_{22} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = -\frac{7}{12} \\ p_{12} = -\frac{1}{3} \\ p_{21} = -\frac{1}{3} \\ p_{22} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\because$ 顺序主子式小于 0

$\therefore$ 不稳定

五、给定系统的状态空间表达式为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

求状态反馈增益阵 K，使反馈后闭环系统特征值为$\lambda_1^*=-1$，$\lambda_{2,3}^*=-5.5\pm j0.87$。并画出系统结构图。

五、

解：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=3 \Rightarrow \text{完全可控}$$

$$a(s)=\det(sI-A+bK)=\det\left[\begin{bmatrix}s+2 & -3 & -1\\ -2 & s+3 & 0\\ 1 & -2 & s-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}\right]=\det\begin{bmatrix}s+2 & -3 & -1\\ -2 & s+3 & 0\\ k_1+1 & k_2-2 & s-1+k_3\end{bmatrix}$$

$$=(s^2+5s+6)(s-1+k_3)+2(k_2-2)+(s+3)(k_1+1)-6(s-1+k_3)$$

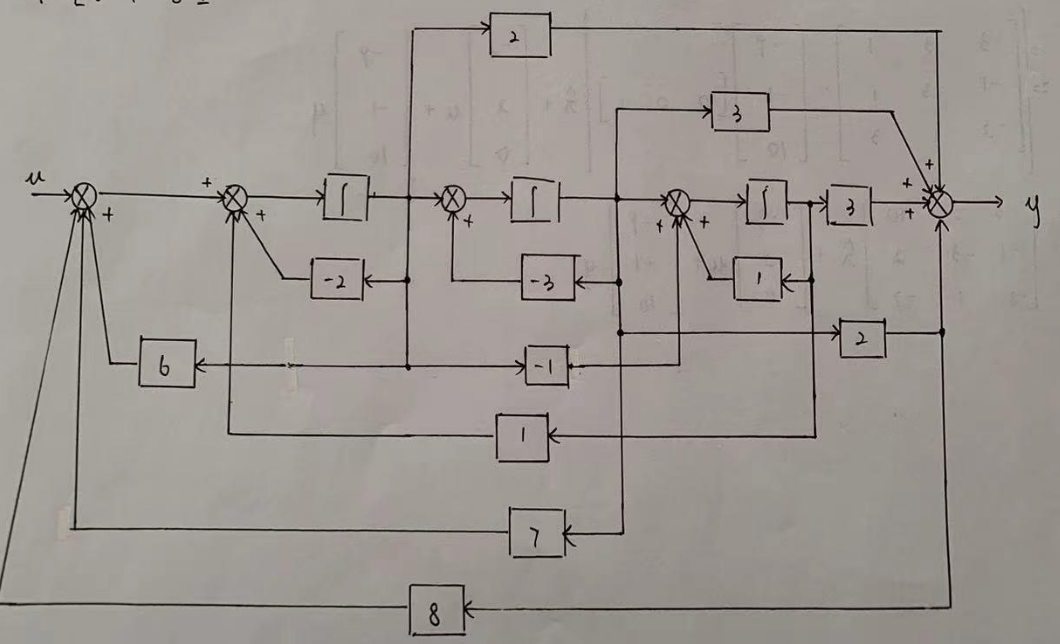
$$=s^3+5s^2+6s-s^2-5s-6+k_3s^2+5k_3s+6k_3+2k_2-4+k_1s+3k_1+s+3-6s+6-6k_3$$

$$=s^3+(k_3+4)s^2+(k_1+5k_3-4)s+(3k_1+2k_2-1)$$

期望多项式：$(s+1)(s^2+11s+31)=s^3+12s^2+42s+31$

$$\therefore\begin{cases}12=k_3+4\\ k_1+5k_3-4=42\\ 3k_1+2k_2-1=31\end{cases}，\text{解得：}\begin{cases}k_1=6\\ k_2=7\\ k_3=8\end{cases}$$

$\therefore K=\begin{bmatrix}6 & 7 & 8\end{bmatrix}$



六、为系统设计一全维状态观测器，并使观测器的极点为$\lambda_1^* = -0.2451$，$\lambda_{2,3}^* = -6.3744 \pm j2.0498$。并画出全维状态观测器结构图。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

六、

解: $\det(sI - A^T) = \det\begin{bmatrix} s+3 & 1 & 2 \\ -3 & s+3 & -1 \\ -1 & -1 & s-3 \end{bmatrix} = (s+3)^2(s-3) + 1 + 6 + 2(s+3) - (s+3) + 3(s-3)$

$= s^3 + 3s^2 - 5s - 26$

期望多项式 $(s+0.2451)(s+6.3774-2.0498j)(s+6.3774+2.0498j) = s^3 + 13s^2 + 72s + 160$

$\tilde{E}^T = \begin{bmatrix} a_3^* - a_3 & a_2^* - a_2 & a_1^* - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 186 & 77 & 10 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & 0 \\ -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} & 0 \\ \frac{30}{13} & -\frac{18}{13} & 1 \end{bmatrix}$

$E^T = \tilde{E}^T P = \begin{bmatrix} 186 & 77 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & 0 \\ -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} & 0 \\ \frac{30}{13} & -\frac{18}{13} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 10 \end{bmatrix}$

$\dot{\hat{x}} = (A - EC)\hat{x} + Bu + Ey$

$= \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \hat{x} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix} y$

$= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 10 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix} y$