北京工业大学 2022——2023 学年第一学期

《 数学物理方法》期末考试试卷 A 卷

考试说明： 2022 年 12 月 15 日，考试 95 分钟，开卷 （无需计算器）

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ________ **学号：** ________ **班号：** ________

注： 本试卷共 九 大题，共 2 页，满分 100 分。使用线上考试答题纸格式作答，并将答卷制成一个 PDF 文档在日新学堂考试平台提交。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总成绩
满分	14	10	12	12	10	10	10	12	10	
得分										

得 分

一、（1）证明复变函数 $f(z)=e^{-iz}$ 在复平面内解析，其中 $z=x+\mathrm{i}y$；

（2）设解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 $z=x+\mathrm{i}y$，已知实部 $u(x,y)=x^2-y^2+x$，试求此解析函数 $f(z)$ 及其导数 $f'(z)$。（14 分）

得 分

二、利用柯西方法，计算积分 $\oint_l \frac{\cos z}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$，其围线 l 分别为：

（1）$|z|=1$;（2）$|z|=3$ 。（10 分）

得 分

三、（1）写出泰勒定理和罗朗定理；

（2）将函数 $f(z)=\frac{2}{z(1+z)}$ 在下列区域：(i) $|z|>1$；(ii) $1<|z-1|<2$ 分别进行级数展开，并说明是泰勒级数还是洛朗级数。（12 分）

得 分

四、（1）求函数 $f(x)=\dfrac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$，∞ 点处的留数；

（2）利用留数定理求积分：$\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{1}{(z-1)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$ 。（12 分）

得 分

五、采用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & (-\infty<x<\infty,\ t>0) \\ u(x,0)=3\cos x & (-\infty<x<\infty) \\ u_t(x,0)=x & (-\infty<x<\infty) \end{cases}$$

（10 分）

得 分

六、求解定解问题：

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & (0<x<l,\ t>0) \\ u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0 & (t\geq 0) \\ u(x,0)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)+3\sin\left(\dfrac{5\pi x}{l}\right) & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

（10 分）

得 分

七、求解定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+3(1+\cos\dfrac{5\pi x}{l}) & (0<x<l,\ t>0) \\ u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0 & (t\geq 0) \\ u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0 & (0\leq x\leq l) \end{cases}$$

（10 分）

得 分

八、（1）试证明傅里叶变换的性质：设 ω_0 为任意常数，函数 $f(x)$ 的傅里叶变换为 $F[f(x)]=G(\omega)$，则有 $F[e^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)]=G(\omega-\omega_0)$ 。

（2）计算狄拉克函数的傅里叶变换 $F[\delta(x\text{-}6\pi)]$。（12 分）

得 分

九、（1）偏微分方程 $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ 被称作什么方程？试写出此方程的解。

（2）若 $P_l(x)$ 是勒让德多项式，试计算 $I=\int_{-1}^{1}xP_l(x)\mathrm{d}x$ 。（10 分）

《数学物理方法》课程公式参考

1. 导数公式 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

2. 科西积分公式 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$

3. 科西积分公式 $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$

4. 泰勒级数 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-b)^k$，**其中**$a_k=\dfrac{f^{(k)}(b)}{k!}$

5. 罗朗级数 $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-b)^k$ **其中**$C_k=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{k+1}}d\zeta$

6. 留数的积分定义：$\operatorname{res}f(b_k)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{l_k}f(\mathrm{z})\mathrm{d}z,\ k=1,2,\cdots,n$，

$$\operatorname{res}f(\infty)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l f(z)dz=-C_{-1}$$

7. 留数公式：$\operatorname{res}f(b)=\lim\limits_{z\to b}\left[\dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-b)^n f(z)]\right]$

8. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha$

9. 二阶常微分方程 $y''(x)+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}y(x)=0$ 的特征解为：

$$y_n(x)=A_n\cos\frac{n\pi ax}{l}+B_n\sin\frac{n\pi ax}{l}$$

10. 一阶常微分方程 $y'(x)+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}y(x)=0$ 的特征解为： $y_n(x)=A_ne^{-(\frac{n\pi a}{l})^2x}$

11. 若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l})$，则

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,1,2.......\\ b_n=\dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2.......\end{cases}$$

12. 方程 $\begin{cases}T_n''(t)+(\dfrac{n\pi a}{l})^2T_n(t)=f_n(t)\\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0\end{cases}$ 解为：$T_n(t)=\dfrac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\dfrac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$

13. 勒让德多项式递推关系：（1）$(2l+1)xP_l(x)=(l+1)P_{l+1}(x)+lP_{l-1}(x)$

（2）$(2l+1)P_l(x)=P_{l+1}'(x)-P_{l-1}'(x)$