# 2023 高等数学（管）-1 期中试卷

12

一、单选题（每题 3 分，共 5 题，15 分）

1、$f(x)=\sqrt{\ln\frac{7x-x^2}{6}}$ 的定义域是（ A ）

A、$1\le x\le 6$　　B、$0<x<7$

C、$1\le x<7$　　D、$0<x\le 6$

2、当 $x\to 1, y=x^2\to 1$, 问 $\delta$ 等于多少时，使当 $|x-1|<\delta$ 时，$|y-1|<0.1$，下述取值止确的是（B）

A、$\delta=\frac{1}{15}$　　B、$\delta=\frac{1}{25}$

C、$\delta=\frac{1}{20}$　　D、$\delta=\frac{1}{10}$

3、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{1}{n^3+\pi}+\frac{1}{n^3+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^3+(n-1)\pi}\right)=$（ B ）

A、0　　B、1

C、$\pi-1$　　D、$\pi$

4、已知 $y=x^2+x$, 当 $x=2$, $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y, dy$ 分别是多少（ A ）

A、$\Delta y=0.51,\ dy=0.5$

B、$\Delta y=0.41,\ dy=0.4$

C、$\Delta y=0.51,\ dy=5dx$

D、$\Delta y=0.41,\ dy=0.4dx$

5、已知 $f(0)=0$，下列极限存在，可以推导出 $f(x)$ 在 0 处可微是 （B）

A、$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x}$　　B、$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$

C、$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\arcsin x)}{xtanx}$　　D、$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)$，$n\in N^+$

6　二、填空题（每题 3 分，共 5 题，15 分）

6、当 $x\to0$ 时，$\frac{x^6}{1-\cos x^2}$ 的等价无穷小是 $\cancel{x^4}$

7、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{2n}\left(1-\cos\frac{2x}{3^n}\right)=$ $\cancel{\frac{1}{\ln 3}}$

8、当 $a=$ $\cancel{\frac{\pi}{2}}$，$f(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x-3}, & x<3\\ a+\sqrt{x-3} & x\geq3\end{cases}$，在 $x=3$ 处连续

9、若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+kx^2-x-2}{x^2-1}=3$，则 $k=$ 2

10、函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点导数 $f'(x_0)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+4h)-f(x_0-h)}{h}=$ $5f'(x_0)$

三、简答题（每题 10 分，共 7 题，70 分）

10　11、求函数 $\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断其类型。

$x^2-1$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 上连续

$x^2-3x+2$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 上连续

设 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$　$x=1$ 或 2 时，$f(x)$ 不存在

$\therefore x=1$，$x=2$ 为间断点.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=-2$　$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-2$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$　$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{(x+1)}{(x-2)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$，$f(1)$ 不存在 $\therefore x=1$ 为第一类可去间断点.

2

$\underset{-\infty}{\underset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to2^-}f(x)}}\neq\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$　$\therefore x=2$ 为第二类无穷间断点.

10 12、求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}$ 。

$\cancel{原式=\lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}}}$

$\cancel{=\lim_{x\to\infty} e^{2\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}}$

$\cancel{=e^{\lim_{x\to\infty}\left[2\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\right]}}$

原式 $=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right]^6$

据第二个重要极限，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{x}}{3}}=e$

原式 $=e^6$

7 13、证明并且求出数列 $\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}},\cdots$ 的极限。

10 14、若 $y$ 是由方程 $y=1+xe^y$ 所确定的隐函数，求 $\frac{d^2y}{dx^2}(0)$ 。

两边同求导，有 $y'=e^y+xe^y\cdot y'$

$y'=\frac{-e^y}{xe^y-1}$

两边同求导，有 $y''=\frac{-e^y\cdot y'(xe^y-1)+e^y(e^y+xe^y\cdot y')}{(xe^y-1)^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$

$y(0)=1$ $y'(0)=e$

代入得 $\frac{d^2y}{dx^2}(0)=2e^2$

7 15、已知 $\lim_{x\to0}\frac{ln(1+x)-(ax+bx^2)}{sin\,x^2}=1$, 求常数 $a,b$ 。

7

**16、** 设函数 $f(x) = x^3 \sin x$，求 $f^{(6)}(0)$。

$f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x$

$f''(x) = 6x \cdot \sin x + 3x^2 \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \cos x - x^3 \cdot \sin x$

$= (6x - x^3)\sin x + 6x^2 \cdot \cos x$

$f'''(x) = (6 - 3x^2) \cdot \sin x + (6x - x^3)\cos x + 12x \cdot \cos x - 6x^2 \cdot \sin x$

$= (6 - 9x^2)\sin x + (-x^3 + 18x)\cos x$

$f^{(4)}(x) = -18x \cdot \sin x + (6 - 9x^2) \cdot \cos x + (-3x^2 + 18) \cdot \cos x + (x^3 - 18x)\sin x$

$= (x^3 - 36x)\sin x + (-12x^2 + 24) \cdot \cos x$

$f^{(5)}(x) = (3x^2$ …

$= (18$ …

$f^{(6)}(x) = (36$ …

$= (-$ …

$\therefore f^{(6)}(0) =$ …

10

**17、** 设 $b > a > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $ab(e^b - e^a) = (b-a)\xi^2 e^\xi$。

令 $\dfrac{ab(e^b - e^a)}{b-a} = k$

则 $\dfrac{e^b - e^a}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = k$

$$e^a + \frac{k}{a} = e^b + \frac{k}{b}$$

令 $f(x) = e^x + \dfrac{k}{x}$　　$f'(x) = e^x - \dfrac{k}{x^2}$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$(a,b)$ 上可导，$f(a) = f(b)$

据罗尔定理，~~存在 $\xi$ 使 $f'(\xi)$~~

存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = 0$　即 $e^\xi - \dfrac{k}{\xi^2} = 0$

代入 $k = \dfrac{e^b - e^a}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$，整理得 $ab(e^b - e^a) = (b-a)\xi^2 e^\xi$

证毕

5