

得分

一、填空题（每空 2 分 共计 30 分）

1、已知向量 $\alpha = \{0, -2, 4\}$, $\beta = \{1, 2, 1\}$, 则 $\frac{1}{2}\alpha - \beta =$ _____,

$\alpha \cdot \beta =$ _____, α 与 β 的夹角为 _____, $\alpha \times \beta =$ _____; 若

还有 $\gamma = \{1, 0, x\}$, 且 α, β, γ 线性相关, 则 $x =$ _____, 此时 $(\alpha, \beta, \gamma) =$ _____;

2、平面 $x - y + 4z + 3 = 0$ 的法向量为 _____, 以 $(0, 0, 0)$ 为心且与此平面相切的球面的直径为 _____;

3、直线 $\begin{cases} x + 2y - z = 15 \\ x - 2z = 2021 \end{cases}$ 的方向向量为 _____, 过点 $(1, 2, 0)$ 且与此线平行的直线的标准方程为 _____;

4、曲线 $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转得到的旋转曲面方程为 _____, 这是一个 _____ (填曲面类型);

5、曲线 $\begin{cases} z = xy \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 在 xoy 坐标面上的投影曲线方程为 _____;

6、二次曲线 $x^2 + 2xy + y^2 + 2020x - 2021y = 0$ 有 _____ 个渐近方向, 有 _____ 个中心。

得分

二、平面上以 O 为心、 R 为半径的圆内有一定点 P , A, B 为圆上两动点, 且 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 。利用向量的运算证明: 满足 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ 的动点 Q

的轨迹是以 O 为心的圆周。 (10 分)

得 分

三、 已知直线 $l: \begin{cases} 2x + y - 2z + 3 = 0 \\ x - y - 4z + 12 = 0 \end{cases}$ (20 分)

- 1、求过点 $P(3, -1, 4)$ 且与 l 垂直的平面方程；
- 2、求过 P 且与 l 垂直相交的直线方程；
- 3、求点 P 关于直线 l 对称的点的坐标。

得 分

四、 已知柱面准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, 母线方向为 $\{1, 1, 1\}$ 。
求此柱面的方程。(10 分)

得 分

五、求顶点为原点，准线为 $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$ 的锥面方程。 (10 分)

得 分

六、给定两异面直线 $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{0}$ 与 $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$,

1、求这两条直线的公垂线方程； 2、求这两线直线间的距离。(15 分)

得 分

七、证明：椭圆抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 上没有直母线。（5 分）

