

2023-2024-1 复变函数与积分变换复习

一. 复数与复变函数

1. 复数

- 基本计算: 四则. $Re, Im, |z|, \bar{z}$ $Arg z$ $z^n, z^{\frac{1}{n}}, e^z, \ln z, z^M, \sin z, \cos z$
- 几何意义: $z \leftrightarrow \vec{z} \leftrightarrow \text{向量}$ $\begin{cases} |z| \\ Arg z \end{cases} \rightarrow \text{形式} \begin{cases} \text{一般} & a+bi \\ \text{三角} & r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \text{指数} & re^{i\theta} \end{cases}$
- 例: e^z 周期 $\ln z$ 多值? $\sin z$ 无界

2. 区域 --- 复平面上的补

3. 复变函数

- 定义: $w = f(z)$
- 实质: $f(z) = u+iv, z = x+iy$
- 极限: $w \rightarrow u_0+iv_0 \iff u \rightarrow u_0 \& v \rightarrow v_0$
- 连续: $f(z)$ 连续 $\iff u, v$ 连续

二. 解析函数: 解析 = "切片" 可导

求导数 { 定义, 运算法则 同高数
C-R 方程

\Rightarrow 解析函数的导数仍解析.
区域内解析 \iff 区域内可导.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

三. 积分

1. 定义与实质: 直线段 圆周 路径方程 一代二换 三定限

2. Cauchy Goursat

- 单连通 $\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0 \rightarrow$ 路径无关 \rightarrow 原函数 $\rightarrow N-L$ 微分
- 解析函数 $\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0 \rightarrow$ 闭路变形 \rightarrow 复合闭路定理

Cauchy 积分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

四. 级数

1. 复数级

$$\alpha_n = a_n + ib_n \rightarrow a+ib \iff \begin{cases} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{cases}$$

$$|\alpha_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 0$$

2. 数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \text{ 收敛} \iff \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \end{cases} \text{ (条件)}$$

3. 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \xrightarrow{\text{Abel}} \text{收敛圆盘} \begin{cases} \text{圆心: } z=z_0 \\ \text{半径: } |z-z_0| \text{ 根值} \end{cases}$$

4. 函数展开 15'

Taylor 级数 (注明收敛域)
Laurent 级数 (不同收敛圆环内的展开)

Taylor 级数 $z_0=0$, $\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a(1+\frac{z}{a})} \dots$, $\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a(1-\frac{z}{a})} \dots$

$$\frac{1}{(a-z)(b-z)} = \begin{cases} a \neq b, & \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z} \right), & |z| < \min\{|a|, |b|\} \\ a=b, & \frac{1}{(a-z)^2} = \left(\frac{1}{a-z} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{a^{n+1}}, & |z| < |a| \end{cases}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty, \quad \sin z, \cos z \dots$$

$$z=z_0 \text{ 处展开}, \quad \frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-z_0)(z-z_0)} = \frac{1}{a-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} = \dots$$

$$|z-z_0| < |a-z_0|$$

$$e^z = e^{+z_0} e^{z-z_0} = \dots$$

Laurent 级数 $R_1 < |z-z_0| < R_2 \Rightarrow$ 在 z_0 处展开!

五. 留数

1. 孤立奇点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{定义} \\ \text{分类} \\ \text{性质} \end{array} \right.$ 可去, 极点, 本性奇点.

零点的阶 $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$ m 级零点

极点的阶 $\frac{p(z)}{q(z)}$ $\begin{matrix} m \text{ 级极点} \\ n \text{ 级零点} \end{matrix} \Rightarrow n-m \text{ 级极点}$ (n>m)

2. 留数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{定义: } \text{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \\ \text{计算: } \begin{array}{l} \text{一级极点: I, II} \\ \text{m 级极点: II, II'} \end{array} \\ \text{应用: } \begin{array}{l} \text{计算复积分: } \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \\ \text{计算实积分: } \left\{ \begin{array}{l} ① \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ ② \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx \\ ③ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx \text{ or } \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx \end{array} \right\} = \text{选一} \end{array} \end{array} \right.$

\downarrow 半平面 \leftarrow 奇点 必考

六. Fourier 变换 10'

1. 定义: $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$, $\mathcal{F}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

2. 计算: ① 有限区间 ② 指数衰减.

3. 性质: 线性, 平移, 伸缩. 会证. 会证明