北京工业大学 2018 ——2019 学年第二学期期末

《高等数学(管)-2》考试试卷 （模拟）

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：________ **学号：**______ **班号：**__标答________

注：本试卷共 三 大题，21 小题，共 4 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸（可以撕下）。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
得分				

得 分

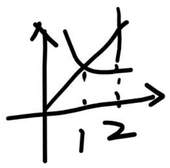
一．填空题（共 15 小题，每题 3 分，总分 45 分）

1.设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,其中f 可微，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ $2xf_1'+ye^{xy}f_2'$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=$ $\frac{\pi}{4}$

3.$D: y=x, y=\frac{1}{x}, x=2$,则$\iint\limits_D x\,d\sigma=$ $\frac{4}{3}$

$\int_1^2\int_x^{\frac{1}{x}}x\,dy\,dx=\int_1^2 x(x-\frac{1}{x})dx$

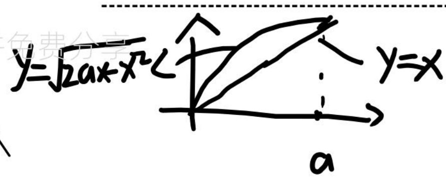


4.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n x^n}{n2^n}$的收敛半径是 $\frac{2}{e}$

$\frac{e^{n+1}/(n+1)2^{n+1}}{e^n/n2^n}=\frac{e}{2}\frac{n}{n+1}\to\frac{e}{2},\ \rho=\frac{2}{e}$

5.交换二次积分的积分次序$I=\int_0^a\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ $\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y}f(x,y)dx$

6.级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$是 条件 收敛的。



$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 发散

7.将函数$\ln x$展开为$(x-1)$的幂级数是$(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\Lambda$

$x\in(0,2]$

$$\ln x=\ln(1+x-1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$(\ln(1+t))'=\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n \qquad \ln(1+t)=\int_0^t(\ln(1+t))'dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

8.方程$y'+2xy-x=0$的通解是 $\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}$

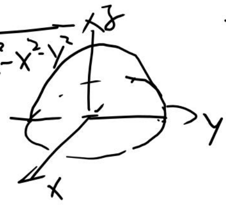
$P(x)=2x \quad Q(x)=x$

$$y(x)=e^{-\int 2x\,dx}\left(C+\int xe^{\int 2x\,dx}dx\right)=e^{-x^2}\Big(C+\underbrace{\int xe^{x^2}dx}_{=\frac{1}{2}e^{x^2}}\Big)$$

9.$D:x^2+y^2\le R^2,\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=$ $\frac{2}{3}\pi R^3$

几何意义 上半球体积

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$



10.$\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^x e^{t^2}dt}{\ln x}=$ e

洛必达

11.$F(x)=\int_0^x t(t-2)dt$ 在$x=$ 0 处取得的极大值是 0

$F'(x)=x(x-2)$

驻点 0，2

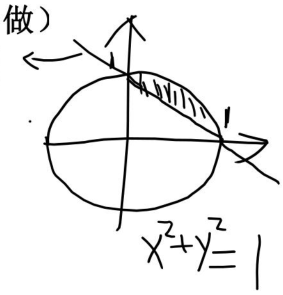
$F''(x)=2x-2$

12.$\int_0^2\max\{x,x^3\}dx=$ $\frac{17}{4}$ $=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^3dx$

13.由$x^2+y^2=1$与$x+y=1\ (x+y>1)$所围图形的面积是$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$（不要用积分做）

(四分之一圆的面积减去三角形面积。此题在于提醒大家避免思维惯性)

$x+y=1$



$x^2+y^2=1$

14.$z=\ln(x^2+y^2+1)$在点(1,2)处的全微分= $\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+1} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

15.设$x^3+y^2z-\sin z=0$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{3x^2}{\cos z-y^2}$

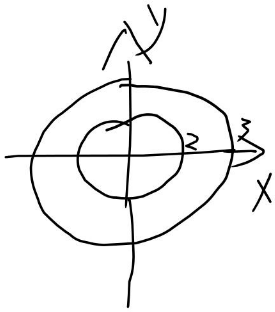
$$3x^2+y^2\frac{\partial z}{\partial x}-\cos z\frac{\partial z}{\partial x}$$

得 分

二．计算题（共 5 题，每题 10 分，总分 50 分）

16.计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}d\sigma$ 其中D由$x^2+y^2=4$及$x^2+y^2=9$围成

解：设$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3\sqrt{9-r^2}rdr=\frac{10}{3}\pi\sqrt{5}$



（画图）

17.求微分方程$y''-3y'+2y=e^{2x}$的全部解

$P=-3\ \ q=2\ \ \lambda=2\ \ P_m(x)=1$

解：特征方程为$r^2-3r+2=0$解得特征值为$r_1=1, r_2=2$故对应的齐次方程得通解为：

令 $y^*=Q(x)e^{2x}$

代入方程得

$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}$.又因为$\lambda=2=r_2$，故设非齐次得特解为$y^*=(ax+b)e^{2x}$

$1=Q''(x)+(P+2\lambda)Q'(x)+(\lambda^2+P\lambda+q)Q$

则$(y^*)'=ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x}=ae^{2x}+2axe^{2x}+2be^{2x}$，

$Q''(x)+Q'(x)=1$ $\quad Q(x)=ax+b$

$(y^*)''=2ae^{2x}+2ae^{2x}+4axe^{2x}+4be^{2x}$，代入原方程，得$a=1, b=0$（$b$可任意，故取0）

$\therefore a=1, b$取0

$\therefore y^*=xe^{2x}$

通

故原方程的全部解为：$y=\bar{y}+y^*=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^{2x}$

18.求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}$的和函数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$的和

令 $k=n+1$

级数$\rightarrow\sum\limits_{k=1} kx^k$ 形式一样

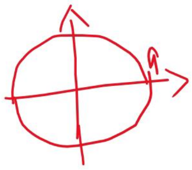
解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$ ，$\therefore R=1/1=1$当$x=\pm1$时，级数发散，故收敛域为（-1，1）

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$两边积分，得

$\int_0^x s(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}\Rightarrow s(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\cdot s(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{\left(1-1/2\right)^2} = 2$$



19.计算$\iint\limits_D x^2 dxdy$，其中$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$

$\iint\limits_D y^2 dxdy$

解：（画图）$\iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$

$= \frac{\pi}{4} a^4 + \frac{1}{16} a^4 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d 2\theta = \frac{\pi}{4} a^4$

练法Ⅱ $\iint\limits_D x^2 dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 \, r dr d\theta$

$= \pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{4} a^4$

此题会改为二元复合函数的二阶偏导，参考在第 1 小题基础上，求二阶导。

20. 设$\varphi(x)$可微，$\varphi(x)\cos x + 2\int_0^x \varphi(t)\sin t dt = x+1$，求$\varphi(x)$

两边对x求导，得$\varphi'(x)\cos x - \varphi(x)\sin x + 2\varphi(x)\sin x = 1$

$\Rightarrow \varphi'(x)\cos x + \varphi(x)\sin x = 1 \Rightarrow \varphi'(x) + \tan x \varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$

这是关于$\varphi(x)$的一阶线性方程，由公式

$\varphi(x) = \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{\int \tan x dx} dx + C\right) e^{-\int \tan x dx} = (\tan x + C)\cos x$

$= \sin x + c\cos x$

注意这种题是定解问题（常数C可以确定）　$\varphi(0)=1$

$\therefore C = 1$

$\therefore \varphi(x) = \sin x + \cos x$

得 分

三．证明题（5 分）

21.证明$\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} n = 0$

证：由积分中值定理$\int_n^{n+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \frac{\pi}{4}$

当$n \to \infty$时，$\xi \to +\infty$，而$\sin\xi$是有界变量，所以

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4} \lim\limits_{\xi\to+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} = 0$

此题会改为数项级数部分的证明题，例如

已知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$收敛$or \Lambda \Lambda$

证$:\Theta \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1, \therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$收敛　　作业题

这是P212第3题. P214第4题也看一下!