1、学术型和专业型学位的同学共用一张考卷，请在姓名之后注明自己的学位类型；
2、在题号后标明有“学术型”或“专业型”的题目，只要求指定类型的同学做，没有标明的题目，所有同学都要求做；
3、学术型的题目总分值为 80 分（另外 20 分是提交两轮自平衡系统实验报告的分值）；专业型的题目总分值为 100 分。

一、（10 分）将下列系统的状态方程化为对角标准型或约当标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}u$$

解：① 计算特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -3 & \lambda & -2\\ 12 & 7 & \lambda+6\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

② 特征向量：

$\lambda_1=-1$ 有 $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -3 & -1 & -2\\ 12 & 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{12}\\ V_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{12}\\ V_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-2$ 有 $\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ -3 & -2 & -2\\ 12 & 7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{21}\\ V_{22}\\ V_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}V_{21}\\ V_{22}\\ V_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_3=-3$ 有 $\begin{bmatrix}-3 & -1 & 0\\ -3 & -3 & -2\\ 12 & 7 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{31}\\ V_{32}\\ V_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}V_{31}\\ V_{32}\\ V_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 3\end{bmatrix}$

构造 P 求 P^{-1}　$P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -4 & -3\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$　$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 1\\ -3 & -2 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$

$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$　$\bar{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 1\\ -3 & -2 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{37}{2} & \\ -15 & \\ \frac{27}{2} & \end{bmatrix}$

得对角标准型

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}\frac{37}{2} & -27\\ -15 & -20\\ \frac{27}{2} & 16\end{bmatrix}u$$

二、(15 分）教科书上说：“积分型解耦系统由于其性能在工程上是不能被接受的，因而本身并没有实际的应用价值。”请回答：

（1）为什么积分型解耦系统的性能在工程上是不能接受的？

（2）积分型解耦系统本身并没有实际的应用价值，那我们学习它有什么用？怎么用？

(1) 由于积分型解耦系统的传递函数 $\phi(s)$ 的元素全部具有积分环节或数个积分环节串联的形式，因此系统的极点全都为零。因此，此系统在实际上是不稳定的，故不能接受。

(2) 虽无实际的应用价值，但我们还是可以通过判断一个包括输入变换的状态反馈系统能否通过取 $L=E^{-1}$，$K=E^{-1}F$ 转化为积分型解耦系统判定原系统是否能解耦。

通常的解决办法是：对积分型解耦系统进一步通过附加状态反馈，按照性能指标要求将其极点配置到希望的位置上

三、（10分）已知系统的状态方程和初始条件如下，求系统的状态解。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}x,\quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

解：$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{bmatrix}$

$A_1=1$　$A_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$　则有 $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}$

而 $e^{A_1t}=e^{t}$　$e^{A_2t}=L^{-1}[(sI-A_2)^{-1}]$.

$(sI-A_2)^{-1}=\begin{bmatrix}s-1&0\\-1&s-2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}\begin{bmatrix}s-2&0\\1&s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1}&0\\\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}&\frac{1}{s-2}\end{bmatrix}$

$e^{A_2t}=L^{-1}[(sI-A_2)^{-1}]=\begin{bmatrix}e^{t}&0\\e^{2t}-e^{t}&e^{2t}\end{bmatrix}$

所以状态转移矩阵为 $e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}e^{t}&0&0\\0&e^{t}&0\\0&e^{2t}-e^{t}&e^{2t}\end{bmatrix}$

则系统的状态解为

$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)=e^{At}x(0)$

$=\begin{bmatrix}e^{t}&0&0\\0&e^{t}&0\\0&e^{2t}-e^{t}&e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{t}\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$

四.（15分）判断下列系统的能控性和能观测性，并求其能控和能观测子系统。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&2&-1\\0&-2&0\\1&-4&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}x$$

解：因为 $U_c=[B.\ AB.\ A^2B]=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ rank $U_c=2$ 不能

因为 $U_o=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&0&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$ rank $U_o=2$ 不能观测

将系统作能控分解！取 $T_c=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

则 $\hat{A}=T_c^{-1}AT_c=\begin{bmatrix}0&-1&-4\\1&-2&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ $\hat{B}=T_c^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\hat{C}=[1$

其能控子系统为 $\dot{\bar{x}}_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&-2\end{bmatrix}\bar{x}_1+\begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}\bar{x}_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

$y_1=[1,-1]\bar{x}_1$

将系统作能观分解！取 $T_o=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ 则

$\hat{A}=T_o^{-1}AT_o=\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&-3&0\\-2&-1&1\end{bmatrix}$ $\hat{B}=T_o^{-1}B=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$\hat{C}=CT_o=[1\ 0\ 0]$

则能观能控系统为 $\dot{\hat{x}}_1=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\hat{x}_1+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}u$

$\hat{y}_1=[1\ 0]\hat{x}_1$.

五.（10分，学术型）求下列离散时间线性系统在平衡状态渐近稳定的 m 取值范围。

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{m}{2} & 0\end{bmatrix}x(k),\quad m>0$$

解. 用李雅普诺夫判据法. 取 $Q=I$ 对给定系统组成离散型李雅普诺夫方程，有：

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \frac{m}{2}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{m}{2} & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{12} & P_{22} & P_{23}\\ P_{13} & P_{23} & P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

由此导出

$$\begin{cases}-P_{11}=-1\\ -P_{12}=0,\quad -P_{13}=0\quad -P_{23}=0\\ P_{11}-P_{22}+mP_{13}+\frac{m^2}{4}P_{33}=-1\\ P_{12}+(\frac{m}{2}-1)P_{23}=0\\ P_{22}-P_{33}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_{11}=1\\ P_{12}=P_{13}=P_{23}=0\\ P_{22}=\frac{4-m^2}{m^2+4}\\ P_{33}=\frac{-8}{m^2-4}\end{cases}$$

确定出李雅普诺夫方程的解 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{4-m^2}{m^2+4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-8}{m^2-4}\end{bmatrix}$$

由 $\begin{cases}\Delta_1=1>0\\ \Delta_2=\frac{4-m^2}{m^2+4}>0\\ \Delta_3=8>0\end{cases}$

由P正定得 $0<m<2$

此时离散系统为渐近稳定.

六．（10 分）试叙述李雅普洛夫稳定性和有界输入有界输出稳定性之间在定义上的区别和联系。

解：李雅普诺夫意义下的稳定：称自治系统的孤立平衡状态 $x_e=0$ 在 t_0 时刻为李雅普诺夫意义下稳定，如果对任一实数 $\varepsilon>0$，都对应存在依赖于 ε 和 t_0 的实数 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使满足 $\|x_0-x_e\|\le\delta(\varepsilon,t_0)$ 的任一初始状态 x_0 出发的受扰运动 $\phi(t;x_0,t_0)$ 都满足

$\|\phi(t;x_0,t_0)\|\le\varepsilon \quad \forall t\ge t_0$.

李雅普诺夫稳定性可用在线性及非线性的系统中，对线性系统的稳定性可由其它方式求得，因此李雅普诺夫稳定性多半用于分析非线性系统的稳定性。

有界输入有界输出稳定性简称BIBO稳定性是一种针对有输入信号线性系统的稳定性。若称有BIBO稳定性，则针对每一个有界的输入，系统的输出都会有界，不会发散到无限大。只适用于判断线性时不变系统的BIBO稳定性。

七．（20 分，专业型）求下列系统的能控规范型和能观测规范型，以及将其化为能控规范型和能观测规范型的变换矩阵。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$