一、填空题：

1. 微分方程 $xy' - y\ln y = 0$ 的通解为__________ $\ln y = Cx$ ________

2. 微分方程 $xy' + y = \sin x$ 满足初始条件 $y(\pi) = 1$ 的特解为___ $y = \dfrac{\pi - 1 - \cos x}{x}$ __

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 是条件收敛、绝对收敛还是发散？____条件收敛___

4. 函数 $y = x^2 \sin\dfrac{x}{2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2019} 的系数为______ $\dfrac{1}{2^{2017} \cdot 2017!}$ ______

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为________ $[1,3)$ ______________

6. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$ 在坐标面 xoy 的投影的曲线方程为

___ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ _______

7. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n} (\boldsymbol{x} + 1)^{\boldsymbol{n}}$ 在 $\boldsymbol{x} = -3$ 处收敛，在 $\boldsymbol{x} = 1$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

的收敛域为____ $[-2,2)$ ________

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，且其傅里叶级数

的和函数记为 $S(x)$，则 $S(30\pi) =$___ $\dfrac{\pi + 1}{2}$ __________________

9. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x} =$______ 2 ____________

10. 函数 $z = e^{x^2 y}$ 在点 $(0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(0,-1)} =$_______ 0 ______________

二、计算题：

11．讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x+y}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解：因为 $(x,y)\neq 0$ 时，$0<\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq|x+y|$，

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}|x+y|=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x+y}=0=f(0,0)$，

所以二元函数在点 $(0,0)$ 处连续。

12. 设 $z=xf(x,\dfrac{y}{x})$ 其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(x,\dfrac{y}{x})+x\left[f_1'(x,\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x^2}f_2'(x,\dfrac{y}{x})\right]$

$$=f(x,\frac{y}{x})+xf_1'(x,\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f_2'(x,\frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{x}f_2'(x,\frac{y}{x})+f_{12}''(x,\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f_2'(x,\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f_{22}''(x,\frac{y}{x})$$

$$=f_{12}''(x,\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f_{22}''(x,\frac{y}{x})$$

13. 将函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解：$f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x),\ x>0$，

$$\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\leq 2,$$

$$\ln(1+x)=\ln[2+(x-1)]=\ln 2+\ln(1+\frac{x-1}{2})$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,\ -1<x\leq 3$$

所以 $f(x)=-\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)(x-1)^n, 0<x\leq 2$

14. 求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 （1）先求齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解。

特征方程 $r^2-3r+2=0$，

特征根 $r_1=1,r_2=2$，

齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$。

（2）设非齐次方程的特解为 $y^*=ze^{2x}$，代入方程得 $z''+z'=x$，

设 $z=ax^2+bx$，代入上式得 $a=\dfrac{1}{2},b=-1$，

非齐次方程的特解为 $y^*=(\dfrac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$，

原方程特解 $y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+(\dfrac{1}{2}x^2-x)e^{2x}$.

15. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-1\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\mathrm{d}x)=1$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\cos nx\mathrm{d}x)=0\text{，}(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\sin nx\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{3}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{6}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

所求函数的傅立叶展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\text{，}\quad(-\pi<x<0,0<x<\pi)$$

三、证明题：

16. 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n},(n=1,2,\cdots),a_n>0,b_n>0$，证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证明： 因为 $\dfrac{a_2}{a_1}\le\dfrac{b_2}{b_1}$, 有 $a_2\le\dfrac{a_1}{b_1}b_2$,

$$\frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \text{有 } a_3 \le \frac{a_2}{b_2} b_3 \le \frac{a_1}{b_1} b_3,$$

……

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}, \text{有 } a_{n+1} \le \frac{a_n}{b_n} b_{n+1} \le \cdots \le \frac{a_1}{b_1} b_{n+1},$$

由正项级数的比较审敛法知若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

17. 证明级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$ 发散.

证明：讨论加括号的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) + \cdots,$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1},$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1}$ 发散，所以原级数发