

得分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{\sin t} - \cos t) dt}{x \ln(1+3x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设参数方程 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 确定了函数 $y = f(x)$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 确定，则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 曲线 $y = (x^2 - 5)e^x$ 的拐点的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $y = a$ 和 $x = b$ 分别是曲线 $y = \frac{\sin 3x}{x(x+1)}$ 的水平渐近线和垂直渐近线，则

$a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $f'(x_0) = 1$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} |x| + a, & x \leq 0 \\ \frac{1}{(1+2x)^x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 若 $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 1$ ，则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 设 $y = x^3$ ，则 $dy \Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^5 + \sin^2 x) \cos x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$



二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得分

11. 求函数 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ 的极值.



得分

12. 计算不定积分 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + e^{\sqrt{x}} \right) dx$.

--

得分

13. 计算 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$.

--

得分

14. 设 $f(x) = x^2 e^x$, 求 (1) $f'(x), f''(x)$; (2) $f(x)$ 带皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式; (3) $f^{(2020)}(0)$.



得分

15. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{A}{x^2 + 2x + 5}, & x > 1 \end{cases}$

- (1) 求函数 $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式;
- (2) 设 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, 试确定 A 的值.



得分

16.过抛物线 $y = x^2$ 上点 (1,1) 做切线, 求该切线与 $y = x^2$ 及 x 轴围成的平面图形的面积; 并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.



三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设 $x > 0$, 证明: $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.



得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$,
证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) \sin \xi + f'(\xi) \cos \xi = 0$.