一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．已知函数 $z=\dfrac{x}{1+y^2}$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$______ $\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$____.

2. 微分方程 $(y+1)^2\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}x=0$ 满足 $y(0)=1$ 的特解为___ $(y+1)^3=-\dfrac{3}{4}x^4+8$ ______.

3．函数 $u=xyz-2yz-3$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $(2,2,1)$ 的方向导数等于____ $-\dfrac{1}{3}$____.

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\dfrac{a}{n})$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散？___绝对收敛____.

5． $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数为__ $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{3}\right)^n$，$x\in(0,6)$ ______.

6. 设 L 是 xOy 面的圆周 $x^2+y^2=2$ 的顺时针方向，则 $\oint_L x^5\mathrm{d}s=$________ 0 _______.

7．螺旋线 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, z=2\theta$ 在点 $(1,0,0)$ 的切线方程为_ $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$.

8. 曲面 $e^z+z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的一个法向量为______ $(1,2,2)$ _______.

9. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S=$________ 4π _____.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(99\pi)=$_____ $\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$ _______________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)2^n}$.

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|=x^2<1$，级数的收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，原级数发散，当 $x=1$ 时，原级数发散，所以原级数的收敛域为$\left(-1,1\right)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x x^{2n-2}\mathrm{d}x\right)=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\quad x\in(-1,1).$$

当 $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}$，

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1)$.

12. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\ge 0)$ 的上侧.

解：补充平面$\Sigma_1: z=0,(x^2+y^2\le 1)$ 方向向下，它在平面 xoy 上的投影为

$D_{xy}=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$,

记 Σ 和 Σ_1 所围成区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$$

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\mathrm{d}z$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]\mathrm{d}r$$

$$=2\pi,$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi$,

所以 $I=2\pi-3\pi=-\pi$.

13. 求由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积.

解：立体在 xOy 面的投影区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$，

$$
\begin{aligned}
\text{所求体积} V &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\left.-\cos\varphi\right|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}
$$

也可用截面法

14. 求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征方程：$r^2-5r+6=0,$

解得特征根 $r_1=2,r_2=3,$

故对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$,

设非齐次方程特解为 $y^*=ze^{2x}$,

代入原方程得 $z''-z'=x,$ 令 $z'=ax+b,$

代入上式得 $a=-1,b=-1,$ 故 $z=-\dfrac{x^2}{2}-x.$

非齐次方程特解为 $y^*=-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)e^{2x}$,

故原方程通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)e^{2x}.$

15. 求函数 $f(x,y)=2x^2-3xy+2y^2+4x-3y+1$ 的极值点及极值.

解：$f'_x=4x-3y+4=0,$

$f'_y=-3x+4y-3=0,$

解得驻点为 $(-1,0),$

$f''_{xx}=4,\ f''_{xy}=-3,\ f''_{yy}=4,$

此时 $AC-B^2=7>0,$ 且 $A=4>0,$

故 $(-1,0)$ 为函数的极小值点，极小值 $f(-1,0)=-1.$

16. 计算 $I=\int_L(12xy+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y$，其中 L 是由点 $A(-1,1)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $O(0,0)$，再沿 x 轴到点 $B(2,0)$ 的曲线.

解：设点 $C(2,1)$， 补线 $L_{\overline{BC}}:x=2,0\le y\le 1,\ L_{\overline{CA}}:y=1,-1\le x\le 2,$

记由闭曲线 $AOBCA$ 围成的区域为 D，

由格林公式 $\oint_{L+\overline{BC}+\overline{CA}}(12xy+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_D 12x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-12\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-12\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\sqrt{y}}^2\right)\mathrm{d}y$$

$$=-12\left(2y\Big|_0^1-\frac{y^2}{4}\bigg|_0^1\right)$$

$$=-21.$$

$$\int_{\overline{BC}}(12x+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y=-\int_0^1(\cos y-2e^y)\mathrm{d}y=-\sin y\Big|_0^1+2e^y\Big|_0^1=-\sin 1+2e-2$$

$$\int_{\overline{CA}}(12x+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y=\int_2^{-1}(12x+e)\mathrm{d}x=6x^2\Big|_2^{-1}+ex\Big|_2^{-1}=-18-3e.$$

所以 $I=-21-\int_{\overline{BC}}(12x+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y+\int_{\overline{CA}}(12x+e^y)\mathrm{d}x-(\cos y-xe^y)\mathrm{d}y$

$$=-21+\sin 1-2e+2+18+3e$$

$= e + \sin 1 - 1.$

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，又

$g(x,y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$，证明：$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 + y^2.$

证明：

因为 $\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u} + x\frac{\partial f}{\partial v}$, $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}$,

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}v + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}v + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial v},$$

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = x^2 + y^2.$

18.若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，且 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，试证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

证明： 因为 $a_n \le b_n \le c_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，所以 $0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$ 收敛.

由比较审敛法有 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ 收敛.

而 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.