北京工业大学 2021—2022 学年第一学期

《线性代数（工）》期末考试试卷（A）

考试说明：考试时间: 2022 年 01 月 04 日.考试时长: 95 分钟.考试方式: 闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ **学号：**__________ **班号：**__________

注：本试卷共 8 大题，共 8 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总成绩
满分	30	12	12	12	12	12	5	5	
得分									

得 分

一．填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者 a，或者 b”型答案失分）

1．记 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ 第三列和第二列各三个位置（从上到下）的代数余子式分别为

$A_{13}, A_{23}, A_{33}; A_{12}, A_{22}, A_{32}$，则 $A_{13}+A_{23}+A_{33}-A_{12}+A_{22}-3A_{32}=$__________

2．若 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，则 $f(A)=A^2-3A+E$ 的迹 $trf(A)=$__________

3. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&2&1\\5&6&5&8\\2&2&1&4\end{pmatrix}=$ $\underline{\begin{pmatrix}\quad&\quad&\quad&\quad\\ \\ \\ \end{pmatrix}}$

4. 若 n 阶实方阵 A 满足 $A^2-2A+5E=0$，则 $(A-3E)^{-1}=$ ________

5. A 是 3 阶实方阵。若齐次线性方程组 $(A+E)X=0$、$(3A-E)X=0$、$(A-2E)X=0$ 均有非零解，则行列式 $\left|3A^{*}-A^{-1}+6E\right|=$ ________

6. 2,1,3,3,5 是 5 阶实方阵 A 的特征值，且 A 不能相似对角化，则 $3E-A$ 的伴随矩阵 $(3E-A)^{*}$ 的秩 $R\left\{(3E-A)^{*}\right\}=$ ________

7. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&1\\1&-1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}$. 由正交矩阵可知，$A^{*}$ 的特征值之和 $=$ ________

8. 若 A 是 3 阶实方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基底，满足

$A\alpha_1=\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3$，$A\alpha_2=6\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3$，$A\alpha_3=6\alpha_1+6\alpha_2+\alpha_3$，

则 $A+2E$ 的行列式 $|A+2E|=$ ________

9. 若 $3,-9$ 是实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&e&f&g\\c&f&h&j\\d&g&j&k\end{pmatrix}$ 的两个特征值，$\alpha=(3,1-t,\ 1,\ 6)^T$，

$\beta=(t,2,\ -3,-1)^T$ 是分别属于 3, -9 的特征向量，则 $t=$ ________

10. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&e&f&g\\c&f&h&j\\d&g&j&k\end{pmatrix}$ 满足 $A^{21}+5A^{12}+6A^{11}+A^{10}+E=0$，

则行列式 $\begin{vmatrix}a-2&b&c\\b&e-2&f\\c&f&h-2\end{vmatrix}$ ________ -8（填 >,=,< 之一）.

得 分

二（12分） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

得分

三（12 分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

得分

四（12） a取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 = a \end{cases}$ 有解？有解时，写出其通解.

得分

五（12 分） 实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{pmatrix}$，$a\neq 0$．求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵．

得 分

六（12分） 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,2,-1,0,-3)^T,\alpha_2=(1,0,2,0,-1)^T,\alpha_3=(-2,1,-1,0,1)^T,$$
$$\alpha_4=(0,5,1,0,-7)^T,\alpha_5=(-2,4,1,0,-3)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题2中求出的极大线性无关组线性表出.

得分

七（5分）已知：A为n阶非零实矩阵（$n>2$），且满足$A^T=A^*$.

证明：A是可逆矩阵。

得分

八（5分） 已知：B为$m\times n$型实矩阵，$R(B)=n$，$A=B^TB$.

证明：A是正定矩阵。