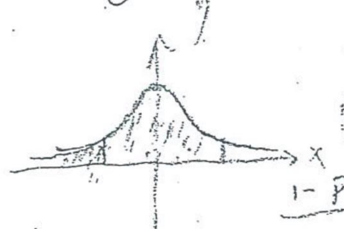


$1-P\{Z>z\}=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$

北京工业大学 2004--2005 学年第一学期末

概率论与数理统计（工类）考试试题（C卷）及参考答案

① $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$

一. 填空题（每空 2 分，共 30 分） 独立 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ ∴ $0.4+P(B)-0.4P(B)=0.7$ $P(B)=0.5$.

1. 设 A, B 是随机事件，且 $P(A)=0.4$, $P(\overline{A\cup B})=0.3$. 若 A, B 相互独立，则 $P(B)=$ 0.5 ；若 A, B 互斥，则 $P(B)=$ 0.3 . ② 互斥时 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ $P(B)=0.3$.

2. 在次品率为 0.05 的一批产品中，随机、有放回地抽取产品 40 次，每次抽一件. 记 X 为 40 次抽取中抽到次品的次数，则 $E(X)=$ 2.0 . $Var(X)=$ 1.9 . 二项分布 np. $np(1-p)$

3. 若随机变量 $X\sim N(2,4)$, $Y\sim N(1,9)$ 且相互独立，则 $2X-Y\sim N(3,13)$. 进一步，若 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，且 $\Phi(1)=0.8413$. $\Phi(2)=0.9772$

$P\{-7<2X-Y<8\}=$ 0.8185 . ??

$4+9=13$

$E(X^2)=Var(X)+[E(X)]^2$

4. 若每次试验时事件 A 发生的概率相同，且四次独立试验中 A 至少发生一次的概率为 0.5904. 则每次试验时 A 发生的概率 $p=$ 0.2 ，两次试验时 A 只发生一次的概率 $p'=$ 0.32 . $1-P(\bar{A})^2-P(A)^2=0.32$

$P(X=1)=0.4$

5. 若随机变量 X 只可能取 $-2, 0, 1$ 三个值，且 $P(X=-2)=0.25$, $P(X=0)=0.35$. 则 X 的期望 $E(X)=$ -0.1 ，方差 $Var(X)=$ 1.39 .

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ $F(X_1)=X$, $F(X_2)=X$

6. 设随机变量 X_1, X_2 独立同分布，且 $X_1\sim U(0,1)$. 令 $X=\max\{X_1,X_2\}$, $Y=\min\{X_1,X_2\}$. 则 X 的概率密度函数 $f_X(x)=$ $2x$, $x\in(0,1)$; Y 的概率密度函数 $f_Y(y)=$ $2(1-y)$, $y\in(0,1)$.

$F_{max}(X)=F(X_1)\cdot F(X_2)$

$F_{min}(y)=1-(1-F(y))^2$

7. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单样本，记 $\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差. $H_0: \mu=\mu_0$. $H_1: \mu\neq\mu_0$. 其中 μ_0 为已知常数. 对给定的显著性水平 $\alpha=0.05$. 在 σ^2 已知情形下，当 $|\overline{X}-\mu_0|\geq\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025}$ 时，拒绝接受 H_0 为真；在 σ^2 未知情形下，当 $|\overline{X}-\mu_0|\geq\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(0.025)$ 时，拒绝接受 H_0 为真. 进一步，$H_0': \sigma^2\leq\sigma_0^2$, $H_1': \sigma^2>\sigma_0^2$. 其中 σ_0^2 为已知常数. 当 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{n-1}(0.05)$ 时，拒绝接受 H_0' 为真.

$\frac{1}{b-a}$ $\frac{b-a}{2}$ $\frac{(b-a)^2}{12}$

$f_X(x)=1$

$\int_0^x 1\,dx$

$F_X(x)=x$

① $|\bar{x}-u_0|\geq\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{0.025}$ ✓（拒绝）

② $|\bar{x}-u_0|\geq\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(0.025)$

③ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{n-1}(0.05)$?? $\sigma^2\leq\sigma_0^2$

$f(x)=\frac{1}{1}$

$X=F_X^2(x)=x^2$

∴ $f_X(x)=2x$ $x\in(0,1)$

$F_Y(y)=1-[1-F_X(y)]^2$

$=1-[1-y]^2=1-(1-2y+y^2)=2y-y^2$

$2-2y$

P79.

$$\frac{8\times 6}{8\times 7}=\frac{31}{}$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}$$

$P(A_0B)+P($

$\boxed{P(A_0)\ P(A_0|B)}$ $\frac{4+}{64}$

二. 计算题 (解下列各题须有解题步骤, 否则不能得分!)

1. (本题 14 分) 将型号相同的 10 个黑球, 2 个白球分装在两个盒子中, 第一个盒子装 8 个球, 第二个盒子装 4 个球, 每个盒子中有 1 个白球, 多个黑球. 装好后先从第一个盒子中任取 2 球放入第二个盒子中, 再从第二个盒子中任取 1 球. 求:

(1). 从第二个盒子中取到白球的概率; 全 $4+2=6$

(2). 在从第二个盒子中取到白球的条件下, 从第一盒子中未取到白球的概率. 条件贝

解: 记 $A_i=\{$ 在第一盒子中取到了 i 个白球$\}$, $i=0,1$; $B=\{$在第二盒子中取到白球$\}$, 则

(1). $P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)=\frac{C_7^2}{C_8^2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{C_7^1}{C_8^2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{24}$;

(2). $P(A_0|B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)}=\frac{3}{5}$.

ortant.

2. (本题 13 分) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单样本, 其中 μ_0 为已知常数, σ^2 为未知常数. 求

$E(X)=\bar{X}$

(1). σ^2 的矩估计 $\hat\sigma^2$; (2). σ^2 的极大似然估计 $\hat\sigma^2$.

$E(X)=\bar{x}$

解: (1). 由 $EX^2=\sigma^2+\mu_0^2$ 与 $EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$, 得 $\hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_0^2$;

(2). 建立似然函数

$$\sigma^2+\mu_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x_i-\mu_0)^2/(2\sigma^2)}=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2/(2\sigma^2)}$$

$e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$ $e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$

取对数, 得 $\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

再对 σ^2 求导, 并令其导数为零, 有

$$\frac{\partial\ln L(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0,$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\sum_{i=1}^{n}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

取对数.

即 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

$$\ln(L(\sigma^2))=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

故 $\hat\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

对 σ^2 求导.

$$\frac{\partial\ln L(\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0.$$

$E(X^2)$ $E(X^2)[E(X)]^2$ $=\sigma^2+\mu^2-\mu^2$ $-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot 4\pi\sigma$

$-\frac{n}{2}\ln 2\pi$ $-\frac{n}{2}\ln\sigma^2$ $\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\cdot 2\sigma$

$\sigma^2=$ $\frac{b}{p}$

σ^2

$E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

$=Var(X)+[E(X)]^2$

$=\sigma^2+\mu^2$

$\hat\sigma^2$

$\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$ $\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\times 9$ $\frac{5}{9}\frac{4}{8}$

条件 $\sigma^2=$

$\boxed{00}$

$\ln(\sigma b)=\ln a+\ln b$

3. (本题 12 分) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，记 $Y = e^{-X}$. 求

(1). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$； (2). Y 的期望 EY.

解: (1). 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则对 $\forall y \in (0,\infty)$，有

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{-X} \le y) = P(X \ge -\ln y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ln y}^{\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

故 $$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-(\ln y)^2/2}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(2). $E(Y) = E(e^{-X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}e^{-x^2/2}dx = e^{0.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+1)^2/2}dx$

$1 - P(X < -\ln y)$

$x+Y=Z$ $Y = Z - x$

4. (本题 16 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ax(x-y), & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(1). 确定常数 A； (2). 求 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$;

(3). 求 $X+Y$ 的分布函数； (4). 求 $E(X+Y)$.

解: (1). 由 $\int_0^2 dx\int_0^x Ax(x-y)dy = \frac{A}{2}\int_0^2 x^3dx = 2A = 1$. 得 $A = 0.5$;

(2). $$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 0.5x(x-y)dy = 0.25x^3, & 0 \le x \le 2. \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

(3). 记 $X+Y=Z$ 的分布函数为 $F_Z(z)$. 对 $\forall z \in (0,2)$，有

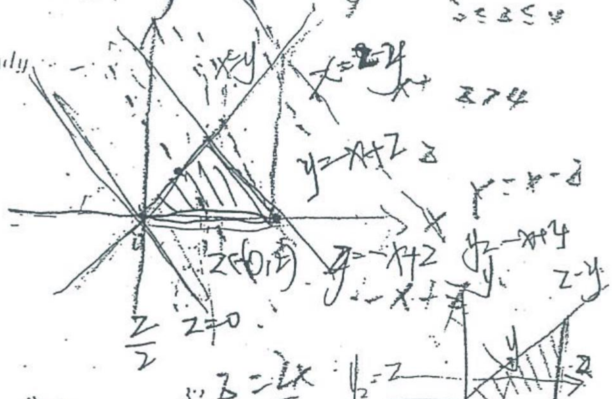
$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \int_0^{z/2} dy\int_y^{z-y} 0.5x(x-y)dx = \cdots = \frac{5z^4}{192}.$$

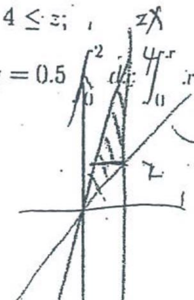
对 $\forall z \in (2,4)$，有

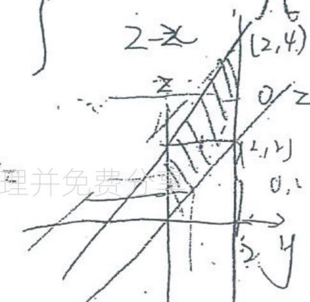
$$F_Z(z) = P(Z \le z) = 1 - P(Z > z) = 1 - \int_{z/2}^2 dx\int_{z-x}^x 0.5x(x-y)dy$$
$$= \frac{z^4}{192} - \frac{z^2}{2} + \frac{8z}{3} - 3.$$

故 $$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{5z^4}{192}, & 0 \le z < 2, \\ \frac{z^4}{192} - \frac{z^2}{2} + \frac{8z}{3} - 3, & 2 \le z < 4, \\ 1, & 4 \le z; \end{cases}$$

(4). $E(X+Y) = \int_0^2 dx\int_0^x (x+y)\cdot Ax(x-y)dy = 0.5\int_0^2 dx\int_0^x x(x^2-y^2)dy = \frac{32}{15}$







$0 < Z - X < X$

$X < Z < 2X$

$f_X = 0.25x^3$

$y < z < 2+y$

$y = z - 2$

5. (本题 15 分) 设某种零件长度 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从该产品中随机地取 10 件，长度分别为 (单位：cm)

10.1, 10.0, 9.8, 10.5, 9.7, 10.1, 9.9, 10.2, 10.3, 9.9.

$n=10$, 求 $\overline{X}=$

$S^2=$

(1). 已知 $\sigma^2=0.025$ 时，求 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间；

(2). 当 σ^2 未知时，求 μ 和 σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间.

$1-\alpha=0.95$

t分布表

$t_9(0.025)$	$t_9(0.05)$
2.2622	1.8331
$t_{10}(0.025)$	$t_{10}(0.05)$
2.2281	1.8125

χ^2分布表

$\chi_9^2(0.975)$	$\chi_9^2(0.95)$	$\chi_9^2(0.05)$	$\chi_9^2(0.025)$
2.700	3.325	16.919	19.023
$\chi_{10}^2(0.975)$	$\chi_{10}^2(0.95)$	$\chi_{10}^2(0.05)$	$\chi_{10}^2(0.025)$
3.247	3.940	18.307	20.483

9.952

10.148 $\alpha=0.05$

$\frac{\alpha}{2}=0.025$

$1-\alpha$

标准正分布表： $Z_{0.025}=1.96$, $Z_{0.05}=1.645$.

解： $n=10$, $\alpha=0.05$, $\overline{X}=10.05$, $S^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=0.0583$, $S=0.2415$.

(1). 当 $\sigma^2=0.025$ 时，μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\alpha/2}\right]=[9.952,\ 10.148];$$

$$\left[\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

(2). 当 σ^2 未知时，μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)\right]=[9.877,\ 10.223].$$

$t_9(0.025)$

$[\overline{X}$ n $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间为

$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}$

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]=[0.028,\ 0.194].$$

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$$

解：(1) σ^2 已知的情况下 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为 $\left[\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z(\frac{\alpha}{2}),\ \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z(\frac{\alpha}{2})\right]$

(2) σ^2 未知时，μ 的 ---- 的区间 $\left[\overline{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\ \overline{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right]$

σ^2 的 .... 的区间 $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$