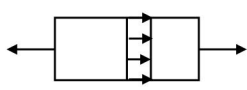
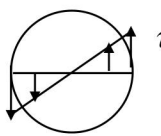
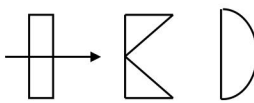


# 材料力学总结

## 一、基本变形

		轴向拉压	扭 转	弯 曲	
外力		外力合力作用线沿杆轴线	力偶作用在垂直于轴的平面内. 外力偶矩: $m = 9550 \frac{N}{n} (N \bullet m)$ $N$ —千瓦; $n$ —转/分	外力作用线垂直杆轴, 或外力偶作用在杆轴平面	
内力		轴力: $F_N$ 规定: 拉为“+” 压为“-”	扭转: $M_T$ 规定: 矩矢离开截面为“+” 反之为“-”	剪力: $F_Q$ 规定: 左上右下为“+” 弯矩: $M$ 规定: 下拉上压为“+” 微分关系: $\frac{dF_Q}{dx} = q \quad ; \quad \frac{dM}{dx} = F_Q$	
应   力	几何方面	变形现象: 平面假设: 应变规律: $\varepsilon = \frac{d\Delta l}{dx} = \text{常数}$	变形现象: 平面假设: 应变规律: $\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}$	弯曲正应力	弯曲剪应力
	应力公式	$\sigma = \frac{F_N}{A}$	$\tau = \frac{M_T \rho}{I_P}$ $\tau_{\max} = \frac{M_T}{W_p}$	$\sigma = \frac{M y}{I_z}$ $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$	
	应力分布				
	应用条件	等直杆 外力合力作用线沿杆轴线	圆轴 应力在比例极限内	平面弯曲 应力在比例极限内	
应力-应变关系		$\sigma = E\varepsilon$ (单向应力状态)	$\tau = G\gamma$ (纯剪应力状态)		
强度条件		$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$ $[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$  塑材: $\sigma_u = \sigma_s$ 脆材: $\sigma_u = \sigma_b$	$\tau_{\max} = \left( \frac{M_T}{W_P} \right)_{\max} \leq [\tau]$	弯曲正应力 1. $[\sigma_t] = [\sigma_c]$ $ \sigma_{\max}  \leq [\sigma]$ 2. $[\sigma_t] \neq [\sigma_c]$ $\sigma_{t\max} \leq [\sigma_t]$ $\sigma_{c\max} \leq [\sigma_c]$	弯曲剪应力 $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{I_z b} \leq [\tau]$

		轴向拉压	扭转	弯曲
刚度条件			$\theta_{\max} = \left(\frac{M_T}{GI_P}\right)_{\max} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta]$ <p>注意：单位统一</p>	$y_{\max} \leq [y]$ $\theta_{\max} \leq [\theta]$
变   形		$\frac{d\Delta l}{dx} = \frac{F_N}{EA}; \Delta L = \frac{F_N L}{EA}$ <p>EA—抗拉压刚度</p>	$\theta = \frac{M_T}{GI_P}; \varphi = \frac{M_T l}{GI_P}$ <p>GI<sub>P</sub>—抗扭刚度</p>	$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$ $y'' = \frac{M(x)}{EI}$ <p>EI—抗弯刚度</p>
	应用条件	应力在比例极限	圆截面杆， 应力在比例极限	小变形， 应力在比例极限
	矩形	$A=bh$		$I_Z = \frac{bh^3}{12}; W_Z = \frac{bh^2}{6}$
	实心圆	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$I_P = \frac{\pi d^4}{32}; W_P = \frac{\pi d^3}{16}$	$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}; W_Z = \frac{\pi d^3}{32}$
	空心圆	$A = \frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)$	$I_P = \frac{\pi d^4}{32}(1-\alpha^4)$ $W_P = \frac{\pi d^3}{16}(1-\alpha^4)$	$I_Z = \frac{\pi d^4}{64}(1-\alpha^4)$ $W_Z = \frac{\pi d^3}{32}(1-\alpha^4)$
其它公式		<p>(1) <math>\varepsilon' = -\nu\varepsilon</math></p> <p>(2) <math>G = \frac{E}{2(1+\nu)}</math></p>	<p>剪 切</p> <p>(1) 强度条件：  <math display="block">\tau = \frac{F_Q}{A} \leq [\tau] \quad A\text{—剪切面积}</math> </p> <p>(2) 挤压条件：  <math display="block">\sigma_{bs} = \frac{F_C}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]</math> <p style="text-align: center;"><math>A_{bs}</math>—挤压面积</p> </p>	<p>矩形： <math>\tau_{\max} = \frac{3F_Q}{2A}</math></p> <p>圆形： <math>\tau_{\max} = \frac{4F_Q}{3A}</math></p> <p>环形： <math>\tau_{\max} = 2\frac{F_Q}{A}</math></p> <p><math>\tau_{\max}</math> 均发生在中性轴上</p>

## 二、截面几何性质

(1) 平行移轴公式：  $I_Z = I_{ZC} + a^2 A$ ;  $I_{YZ} = I_{Z_C Y_C} + abA$

(2) 组合截面：

1. 形 心：  $y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$ ;  $z_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}$

资料由公众号【工程大喵】收集整理并免费分享

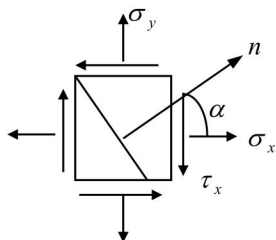
2. 静矩:  $S_z = \sum A_i y_{ci}$  ;  $S_y = \sum A_i z_{ci}$

3. 惯性矩:  $I_z = \sum (I_z)_i$  ;  $I_y = \sum (I_y)_i$

### 三、应力分析:

(1) 二向应力状态 (解析法、图解法)

a. 解析法:



$\sigma$ : 拉为“+”, 压为“-”

$\tau$ : 使单元体顺时针转动为“+”

$\alpha$ : 从 x 轴逆时针转到截面的法线为“+”

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

c: 适用条件: 平衡状态

(2) 三向应力:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1; \quad \sigma_{\min} = \sigma_3; \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

(3) 广义虎克定律:

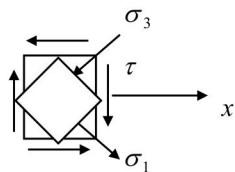
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

\*适用条件: 各向同性材料; 材料服从虎克定律

#### (4) 常用的二向应力状态

##### 1. 纯剪切应力状态:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

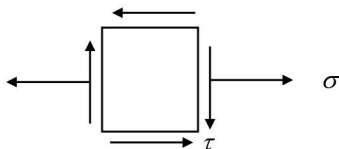


##### 2. 一种常见的二向应力状态:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$



#### 四、强度理论

破坏形式	脆性断裂		塑性断裂	
强度理论	第一强度理论 (最大拉应力理论)	莫尔强度理论	第三强度理论 (最大剪应力理论)	第四强度理论(形状改变比能理论)
破坏主要因素	单元体内的最大拉应力		单元体内的最大剪应力	单元体内的改变比能
破坏条件	$\sigma_1 = \sigma_b$		$\tau_{\max} = \tau_s$	$u_f = u_{fs}$
强度条件	$\sigma_1 \leq [\sigma]$		$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$	
适用条件	脆性材料	脆性材料	塑性材料	塑性材料

\*相当应力:  $\sigma_r$

$$\sigma_{r1} = \sigma_1, \quad \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

#### 五、材料的力学性质

脆性材料  $\delta < 5\%$

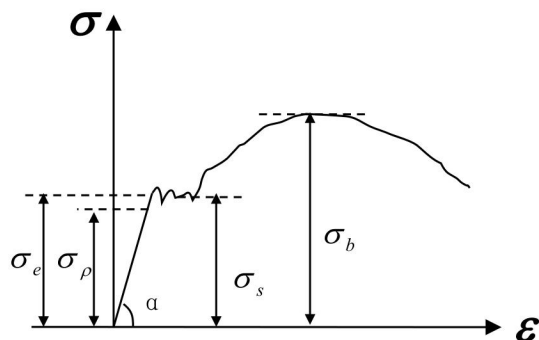
塑性材料  $\delta \geq 5\%$

低碳钢四阶段:

- (1) 弹性阶段
- (2) 屈服阶段
- (3) 强化阶段
- (4) 局部收缩阶段

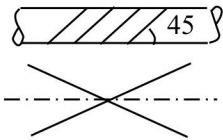
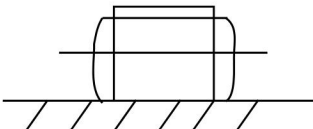
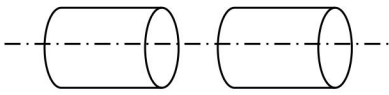
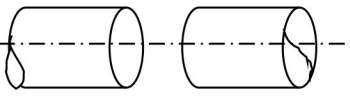
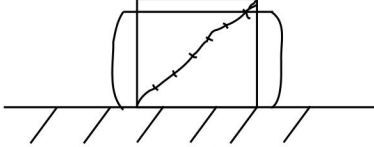
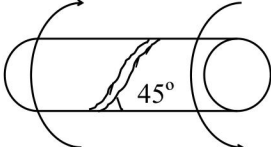
强度指标  $\sigma_s, \sigma_b$

塑性指标  $\psi, \delta$

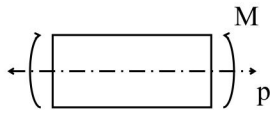
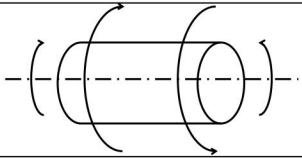
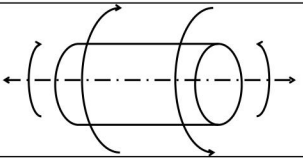


$$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

	拉	压	扭
低碳钢	 滑移线与轴线 45°, 剪断	 只有 $\sigma_s$ , 无 $\sigma_b$	 断口垂直轴线 剪断 $\tau_s$ $\tau_b$
铸铁	 拉断 断口垂直轴线	 $\sigma_b$ 剪断	 断口与轴夹角 45° $\tau_b$

## 六. 组合变形

类型	拉(压)弯	弯扭	弯扭拉(压)
简图			
公式	$\sigma = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M}{W}$	$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$ $\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$	$\sigma_{r3} = \sqrt{(\sigma_M + \sigma_N)^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$ $\sigma_{r4} = \sqrt{(\sigma_M + \sigma_N)^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$
强度条件	$\sigma_{\max} = \pm \frac{P_{\max}}{A} \pm \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$	圆截面 $\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$ $\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$	$\sigma_{r3} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_Z} + \frac{F_N}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{W_P}\right)^2} \leq [\sigma]$ $\sigma_{r4} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_Z} + \frac{F_N}{A}\right)^2 + 3\left(\frac{M_T}{W_P}\right)^2} \leq [\sigma]$
中性轴	$y^* = -\frac{I_Z}{Ae_y} = -\frac{i_Z^2}{e_y}$		

## 七、压杆稳定

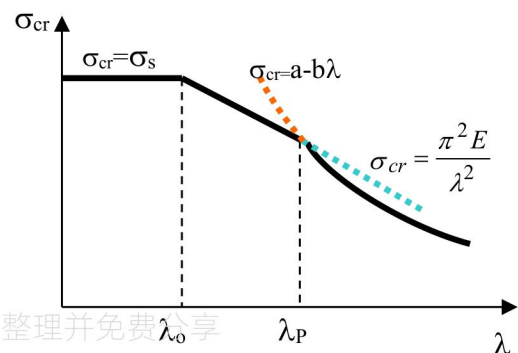
欧拉公式:  $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$ ,  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ , 应用范围: 线弹性范围,  $\sigma_{cr} < \sigma_p$ ,  $\lambda > \lambda_p$

柔度:  $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ ;  $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$ ;  $\lambda_0 = \frac{a - \sigma_s}{b}$ ,

柔度是一个与杆件长度、约束、截面尺寸、形状有关的数据,  $\lambda \uparrow P_{cr} \downarrow \sigma_{cr} \downarrow$

临界应力

- $\lambda > \lambda_p$  —— 大柔度杆:  $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
- $\lambda_0 < \lambda < \lambda_p$  —— 中柔度杆:  $\sigma_{cr} = a - b\lambda$
- $\lambda < \lambda_0$  —— 小柔度杆:  $\sigma_{cr} = \sigma_s$



稳定校核：安全系数法： $n = \frac{P_{cr}}{P_I} \geq n_w$

提高杆件稳定性的措施有：

- 1、减少长度
- 2、选择合理截面
- 3、加强约束
- 4、合理选择材料

## 八、交变应力

金属疲劳破坏特点：

应力特征：破坏应力小于静荷强度；

断裂特征：断裂前无显著塑性变形；

断口特征：断口成光滑区和粗糙区。

循环特征  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$  ；

平均应力  $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$  ；

应力幅度  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$

材料疲劳极限：材料经无限次应力循环而不发生疲劳破坏的应力极限值—— $N=10^7$ ： $\sigma_{-1}$

条件疲劳极限：（有色金属）无水平渐近线： $N=(5-7) \times 10^7$  对应的  $\sigma_{-1}$

构件疲劳极限：考虑各种因素 ；

影响构件疲劳极限因素：应力集中；尺寸；表面质量。

影响材料疲劳极限因素：循环特性；变形形式；材料。

提高构件疲劳强度的主要措施：减缓应力集中；提高表面光洁度；增强表面强度。