北京工业大学 2022—2023 学年第二学期
《高等数学(工)—2》期中考试试卷

参考答案

考试说明：考试日期: 2023 年 4 月 日, 考试时间：95 分钟, 考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________　学号：__________　班号：__________

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.微分方程 $\frac{dy}{dx}=2^{x-y}$ 满足 $y(0)=1$ 特解为 $y=\log_2(2^x+1)$

2.微分方程 $\frac{dy}{dx}+2xy=x$ 的通解为 $y=\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}$

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{2^n n!}{n^n}+(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)]$ 是收敛还是发散？ 收敛

4. 函数 $y=x^2\sin x$ 的麦克劳林级数 x^{2023} 中的系数为 $\frac{1}{2021!}$

5.设 2π 周期函数 f 在 $[-\pi,\pi)$ 上满足 $f(x)=\begin{cases} e^x, -\pi\le x\le 0 \\ x+2, 0<x<\pi \end{cases}$，其傅里叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(10\pi)=$ $\frac{3}{2}$

6.二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\frac{\sin(x^2-y^2)}{x+y}=$ 2

7. xoz 坐标面上的曲线 $z^2=x$ 绕 x 轴旋转一周所生成的曲面方程为 $y^2+z^2=x$

8. 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^n$ 的收敛半径为 $\frac{3}{2}$

9. 设函数 $z=x^2y+\sin(xy)$，则全微分 $dz\big|_{(1,1)}=$ $(2+\cos 1)dx+(1+\cos 1)dy$

10. 若方程 $xz=\ln\frac{z}{y}$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $\frac{z^2}{1-xz}$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 将函数 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$ 展为 x 的幂级数并求展开式成立的区间.

解：

$$f(x)=\left(\int\frac{1}{(x-2)^3}dx\right)'$$

$$=\left(-\frac{1}{2(x-2)^2}\right)'$$

$$=\left(\int\frac{-1}{2(x-2)^2}dx\right)''$$

$$=\left(\frac{1}{2(x-2)}\right)''$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'' \quad \cdots 2$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'' \quad \cdots 4$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+2}}\right)\cdot x^n\right)''$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{2^{n+2}}x^{n-1}\right)'$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-n(n-1)}{2^{n+2}}x^{n-2} \quad \cdots 8$$

成立的区间为 $(-2,2)$. $\cdots 10$

得 分

12．求微分方程 $y''+4y'+4y=xe^{x}$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征方程为

$r^2+4r+4=0$，则 $r_1=r_2=-2$

齐次方程的通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$ …④

令 $y=ze^{x}$，则 $y'=(z'+z)e^{x}$，

$y''=(z''+2z'+z)e^{x}$. 把 y, y', y'' 代入

原方程化简可得 $z''+6z'+9z=x$

令 $z=ax+b$ 代入上式得 $6a+9ax+9b=x$

则 $\begin{cases}9a=1\\6a+9b=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\frac{1}{9}\\b=-\frac{2}{27}\end{cases}$，$y^*=(\frac{1}{9}x-\frac{2}{27})e^{x}$ …⑧

原方程通解 $y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+(\frac{1}{9}x-\frac{2}{27})e^{x}$ …⑩

得 分

13. 设 $z=f(2x+y, y\cos x)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1'-f_2'\cdot y\sin x$ …④

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$

$=2(f_{11}''+f_{12}''\cos x)-(f_2'+f_{21}''y+f_{22}''y\cos x)\sin x$

$=2f_{11}''+2f_{12}''\cos x-f_{21}''y\sin x-f_{22}''y\cos x\sin x-f_2'\sin x$

$=2f_{11}''+(2\cos x-y\sin x)f_{12}''-f_{22}''y\cos x\sin x-f_2'\sin x$

…⑩

得 分

14. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

解：令 $u_n(x)=\frac{4^n}{2n+1}x^{2n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=4x^2$

可得收敛域为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ …… ②

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{2n+1}x^{2n}$，$S(0)=1$，当 $x\neq0$ 时

则 $xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{2n+1}x^{2n+1}$ …… ④

$(xS(x))'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^{2n}=\frac{1}{1-4x^2}$ …… ⑥

$\int_0^x (xS(x))'dx=\int_0^x\frac{1}{1-4x^2}dx=\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}$

$S(x)=\frac{1}{4x}\ln\frac{1+2x}{1-2x}$ 故 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{4x}\ln\frac{1+2x}{1-2x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ …… ⑩

得 分

15.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\geq a_{n+1}>0, n=1,2,3,\cdots$ 且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

解：因为数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界

故 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，令 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$

则 $a\geq0$.

另一方面 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散

故由莱布尼兹定理 可知 $a>0$

则 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n}=\frac{1}{1+a}<1$

则由根值审敛法可知原级数收敛.

得 分

16. 设有方程组 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\sin v \end{cases}$ 确定隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

解：原方程组两端对x求偏导.

$$\begin{cases} 1 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\sin v + u(\cos v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = e^u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\sin v - u(\cos v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}e^{-u}, \quad \cdots 5$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e^u - \sin v}{2e^u u\cos v} \quad \cdots 10$$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设函数 $F(x,y)$ 具有连续偏导数，且方程 $F(x-2z,y-3z)=0$ 可确定隐函数 $z=z(x,y)$，证明 $2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

证明：令 $u=x-2z$，$v=y-3z$

方程 $F(u,v)$ 两端对 x 求偏导

$F'_u\frac{\partial u}{\partial x}+F'_v\frac{\partial v}{\partial x}=0$，即 $F'_u(1-2\frac{\partial z}{\partial x})+F'_v(-3\frac{\partial z}{\partial x})=0$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F'_u}{2F'_u+3F'_v}$ …② 同理可解得

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F'_v}{2F'_u+3F'_v}$ …④，故 $2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=1$ …⑤

得 分

18. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}, a_n>0, b_n>0$，$n=1,2,3,\dots$，证明若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证明：注意到

$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}$，$\frac{a_3}{a_2}\le\frac{b_3}{b_2}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_n}{b_{n-1}}$ …②

故 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}$

即 $\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}$

则 $a_n\le\frac{a_1}{b_1}b_n \ (n\ge2)$ …④

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，由比较审敛法

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. …⑤