复变函数与数学物理方程

任课教师：陈小青
联系方式：chenxiaoqing@bjut.edu.cn

1. (20分) (1) 写出Fourier变换及逆变换的指数形式公式；（2）求函数$f(t)$的Fourier积分表达式，其中$f(t)=\begin{cases}0, & t<-1\\ 1, & -1\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$

$$\mathscr{F}[f](\omega):=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F](t):=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

例 求函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

间断点 $t=\pm 1$

解 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}1\times(\cos\omega u-i\sin\omega u)\mathrm{d}u\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-1}^{1}\cos\omega u\,\mathrm{d}u\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+i\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$

22

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega.$$

所以,

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1, & |t|<1; \\ \frac{1}{2}, & t=\pm 1; \\ 0, & |t|>1. \end{cases}$$

特别地, 当 $t=0$ 时,

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}.}$$ (Dirichlet 积分)

23

2. (20分) 证明对于单位脉冲函数δ(t)，存在(1) δ(t) ↔ 1 和 (2) 1 ↔ 2πδ(t)关系成立

2. (1). $F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-iwt}dt = e^{iwt}\Big|_{t=t_0=0}=1$. 因此 $\delta(t)\leftrightarrow 1$.

证明:

(2). 若 $F(w)=2\pi\delta(w)$.

则 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(w)e^{iwt}dw$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w)e^{iwt}dw=e^{iwt}\Big|_{w=w_0=0}=1$. 因此 $1\leftrightarrow 2\pi\delta(w)$

3. (20分) (1) 写出Fourier变换卷积定义，(2) 证明卷积定理，即

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2)(\omega) = \mathcal{F}(f_1)(\omega) \cdot \mathcal{F}(f_2)(\omega)$$

3.(1). 设函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的绝对可积函数，则积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,dx$ 称为函数 f_1 和 f_2 的卷积，记为 $f_1 * f_2$。

即 $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, f_2(t-x)\,dx$.

(2) 证明：设 $F_1(w) = F[f_1](w)$, $F_2(w) = F[f_2](w)$.

由Fourier变换和卷积的定义，

$$F[f_1 * f_2](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1 * f_2](t)\, e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,dx\right] e^{-iwt}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, e^{-iwx} f_2(t-x)\, e^{-iw(t-x)}\,dx\right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, e^{-iwx}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-x)\, e^{-iw(t-x)}\,dt\right] dx = F_1(w)\,F_2(w)$$

$$= F_1[f_1](w)\, F_2[f_2](w)$$

4. (20分) (1) 写出Laplace变换的公式，并指出Laplace变换与Fourier变换在积分域及变换核方面的区别，(2) 求函数$\cos(kt)$的Laplace变换，其中k为实数，并指出该变换成立时变量s的取值范围

设函数$f(t)$当$t \geq 0$有定义，并且积分

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s\text{是一个复参量})$$

在复平面s的某一区域内收敛，则称

$F(s)$为$f(t)$的Laplace变换(或称象函数)，

Fourier变换在$(-\infty,+\infty)$上积分，变换核 $e^{-i\omega t} = K(t,\omega)$，$\omega$为实变量

Laplace变换在$(0,+\infty)$上积分，变换核 $e^{-st} = K(t,s)$，s为复变量

4. (20分) (1) 写出Laplace变换的公式，并指出Laplace变换与Fourier变换在积分域及变换核方面的区别，(2) 求函数$\cos(kt)$的Laplace变换，其中k为实数，并指出该变换成立时变量s的取值范围

例 求$\mathcal{L}[\cos k\,t](s)$ 　　　　**指数形式求积分**

$$= \int_0^{+\infty} \cos k\,t \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left.\frac{e^{(-s+ik)t}}{-s+ik}\right|_0^{+\infty} + \left.\frac{e^{(-s-ik)t}}{-s-ik}\right|_0^{+\infty} \right]$$

$$= \frac{s}{s^2+k^2} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

- **积分之前，务必确定s的取值范围，保证积分的存在。**

5. (20分) (1) 写出用留数法求Laplace逆变换时所用的公式，(2) 用留数法求函数$F(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$的Laplace逆变换

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{s=s_k}{\mathrm{Res}}[F(s)e^{st}],\quad t>0$$

Laplace逆变换

例： 已知$F(s)=\frac{1}{s(s-1)^2}$，求$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

解： 留数法：

$s_1=0$和$s_2=1$是$F(s)$的一阶、二阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st}]\,|_{s=0}=\frac{e^{st}}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}=1,$$

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{st}]\,|_{s=1}=\left(\frac{e^{st}}{s}\right)'\Big|_{s=1}=-e^t+te^t,$$

所以$f(t)=1-e^t+te^t$

本次小测验成绩：

分数段	人数	占比
小于60	7	12.50%
60~69	6	10.71%
70~79	10	17.86%
80~89	15	26.79%
90~100	14	25.00%
未交卷	4	7.14%
合计	56	100.00%

参考：去年第三次小测验平均分**90.26**

1（12分）. 本次授课介绍的典型数理方程分为那三类?

泊松方程、波动方程、扩散方程

2（15分）. (1)求函数$f(z)=\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$的所有有限奇点，及其留数；(2)简述留数定理；(3)计算$\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z$

(1) z=1是二级极点， $Res(f(z),1)=\lim_{z\to 1}(e^{2z})'|_{z=1}=2e^2$

(2) 积分等于留数和乘以$2\pi i$

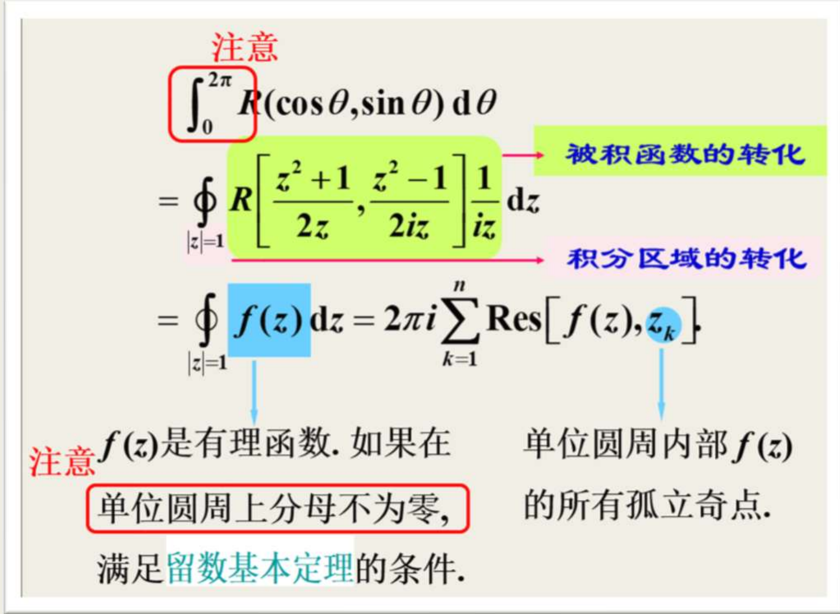
(3) $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\mathrm{d}z=2\pi i*2e^2=4\pi e^2 i$

3（18分）. $R(\cos\theta,\sin\theta)$是关于三角函数的有理式。(1)简述如何通过复数的欧拉形式（指数形式）、三角函数定义式和换元法将形如$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$的关于$\cos\theta$、$\sin\theta$、$\mathrm{d}\theta$的积分，转化为关于$z$和$\mathrm{d}z$的积分。(2)简述如何基于上述换元法和留数定理求解$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta$。(3)计算$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\sin\theta}\mathrm{d}\theta$。

被积函数分母在积分范围内不为零

(1)换元：$z=e^{i\theta}$，即：$\mathrm{d}\theta=\frac{dz}{iz}$，$\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$，$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

(2)包含右图中的基本要素即可



(3)$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\,\mathrm{si}}\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{iz\left(5+3\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)\right)}\mathrm{d}z$

$=\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(5iz+\frac{3}{2}(z^2-1)\right)}\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z+\frac{5}{3}i)^2-\frac{16}{9}}\mathrm{d}z$

因此奇点包括$z+\frac{5}{3}i=\pm\frac{4}{3}$,

其中$|z|=1$内的奇点是$z+\frac{5}{3}i=-\frac{i}{3}$

$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\left(5iz+\frac{3}{2}(z^2-1)\right)},-\frac{i}{3}\right)=\frac{1}{\left((z+\frac{5}{3}i)^2-\frac{16}{9}\right)'}$

$=\frac{1}{2(z+\frac{5}{3}i)}\Big|_{z=-\frac{i}{3}}=-\frac{3}{8}i$，原式$=\frac{2}{3}*2\pi i*-\frac{3}{8}i=\frac{\pi}{2}$

4（13分）. (1)写出Fourier变换的指数形式公式；(2)根据上述公式，

计算$\mathcal{F}[f(t)]$，其中$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1\\ -1, & -1<t<0\\ 1, & 0<t<1\\ 0 & 1<t<+\infty\end{cases}$

(1) $\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega}\ \mathrm{d}t$

(2) $\mathcal{F}[f(t)]=-\int_{-1}^{0}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}e^{-i}\quad \mathrm{d}t=\frac{i}{\omega}(e^{i\omega}+e^{-i\omega}-2)$

没有求和

不是求积分

画蛇添足的分析间断点

不是级数求和

5（12分）.写出Fourier变换的三种性质的名字和公式。

线性性质： $\mathcal{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{F}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}[f_2(t)]$

$\mathcal{F}^{-1}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{F}^{-1}[f_1(t)]+\beta\mathcal{F}^{-1}[f_2(t)]$

位移性质：$\mathcal{F}[e^{\pm\omega_0 t}f(t)]=F(\omega\mp\omega_0)$ $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{\pm i\omega\tau}F(\omega)\right]=f(t\pm\tau)$

微分性质：$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(i\omega)^n F(\omega)$ $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^n f(t)$

积分性质：$i\omega\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t]=F(\omega)$

…

6（12分）. 计算$f(t)=e^{-kt}$（k为实数）的Laplace变换

$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-kt}e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{-k-s}\int_0^{+\infty}e^{(-k-s)t}\mathrm{d}[(-k-s)t]=$

$\frac{1}{-k-s}[e^{(-k-s)t}|_{t=+\infty}-e^{(-k-s)t}|_{t=0}]=\frac{1}{s+k}$，$\mathrm{Re}(s)>-k$

没写Re(s)>-k

7（18分）. (1)写出Laplace变换卷积的定义式；(2) 写出Laplace变换卷积定理；(3)已知$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t$，$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\sin t$，利用卷积定理求$F(s)=\frac{1}{s^2(1+s^2)}$的Laplace像原函数。

Laplace卷积上下限

(1)$f_1 * f_2=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

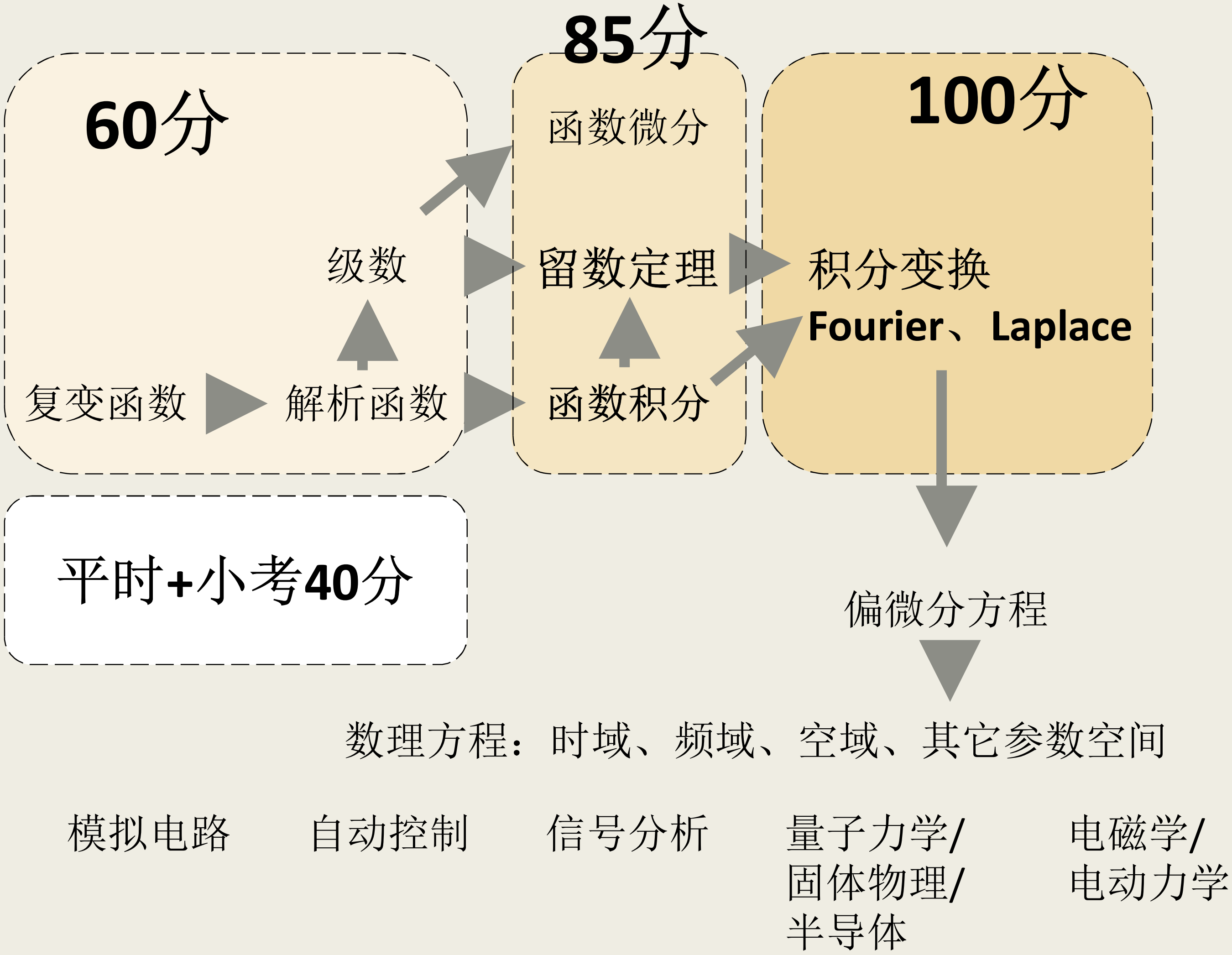
(2)$\mathcal{L}(f_1 * f_2)=\mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2)$

(3) $\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2}$，$\mathcal{L}(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}$，因此$\mathcal{L}(t * \sin t)=\frac{1}{s^2(1+s^2)}$，因此

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(1+s^2)}\right)=t * \sin t=\int_0^t \tau * \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

令$\lambda=t-\tau$则$\tau=t-\lambda$，原式$=-\int_t^0 (t-\lambda)\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda=-\int_t^0 t\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda+$

$\int_t^0 \lambda\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda=t(1-\cos t)+(t\cos t-\sin t)=t-\sin t$



60分：历次小考题

包括隔壁班的，应该在习题课上都有讲过

80分：历次作业

100分：每章小结

别忘了第八章数理方程

第一章 复变函数P29

- ***复数概念、表示方法、运算
  - *普通形式*$z = x + iy$，$x = \mathrm{Re}(z)$，$y = \mathrm{Im}(z)$
  - *三角形式*$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
  - *指数（欧拉）形式*$z = re^{i\theta}$，$r = |z|$，$\theta = \mathrm{Arg}\, z$
  - *辐角的多值性*：$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$，$k$*是整数*，$\arg z$*主值*
  - *复数的加减乘除、幂、方根*

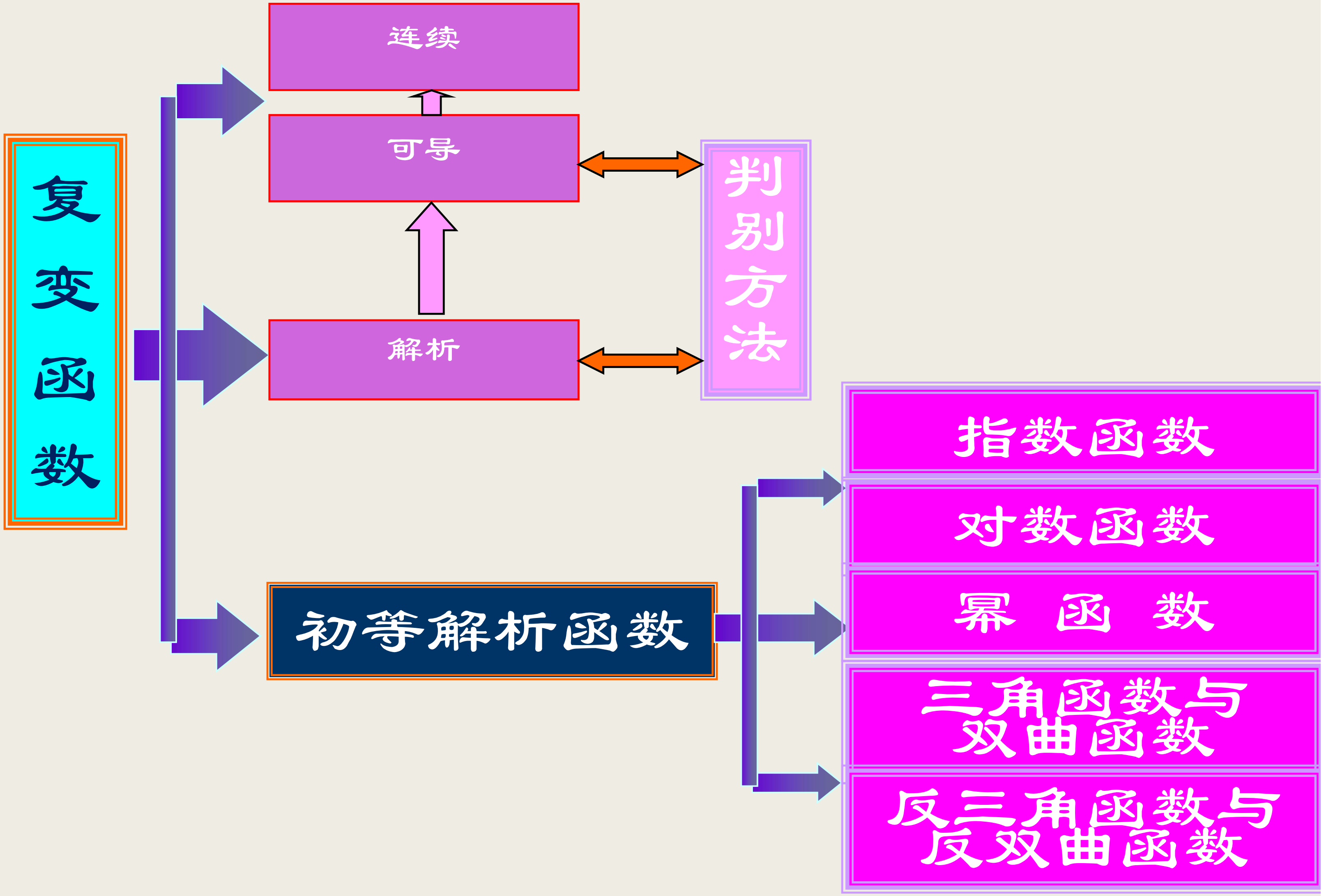
第一章 复变函数P29

- 复平面
  - *复平面*
    - 开区域、闭区域、单连通域、多连通域
    - 邻域、去心邻域
  - *复平面上的曲线：*
    - 简单闭曲线：没有重(chong)点、起点=终点的连续曲线
    - 光滑曲线：x'、y'连续，$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$，按段光滑曲线
- 复变函数$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$，$\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{z}$均为复数
  - *极限：P25*
  - **极限的存在条件和求法：实部虚部同时存在极限*

第一章 复变函数P29

- 参考作业题：复变函数第一章习题P31
- **1（1、3）、4（1）、8（1、3）、9、14（1、2）、17、21（1、5）、22（2、3）、26（1、4）、27**

第二章 解析函数P62



复变函数
连续
可导
解析
判别方法
初等解析函数
指数函数
对数函数
幂 函 数
三角函数与双曲函数
反三角函数与反双曲函数

第二章 解析函数P62

- *连续、可导、解析
  - *复变函数的导数，与高数区别：以任意方式趋近*
  - *可导必定连续*
  - *可导与解析的要求的区别：邻域*
  - *解析的判定方法*
    - 定义
    - ***柯西黎曼方程：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，且$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

第二章 解析函数P62

- ***典型初等函数
  - *指数函数：* $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$，*处处解析*
  - *对数函数：* $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\ \mathrm{Arg}\, z$，
    - 除去原点和负实轴外处处解析
    - 多值函数
  - *幂函数：* $a^b = e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$， （$a \neq 0$）
    - 除去原点和负实轴外处处解析
    - 多值函数
  - *三角函数*
    - $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$， $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，
    - 处处解析

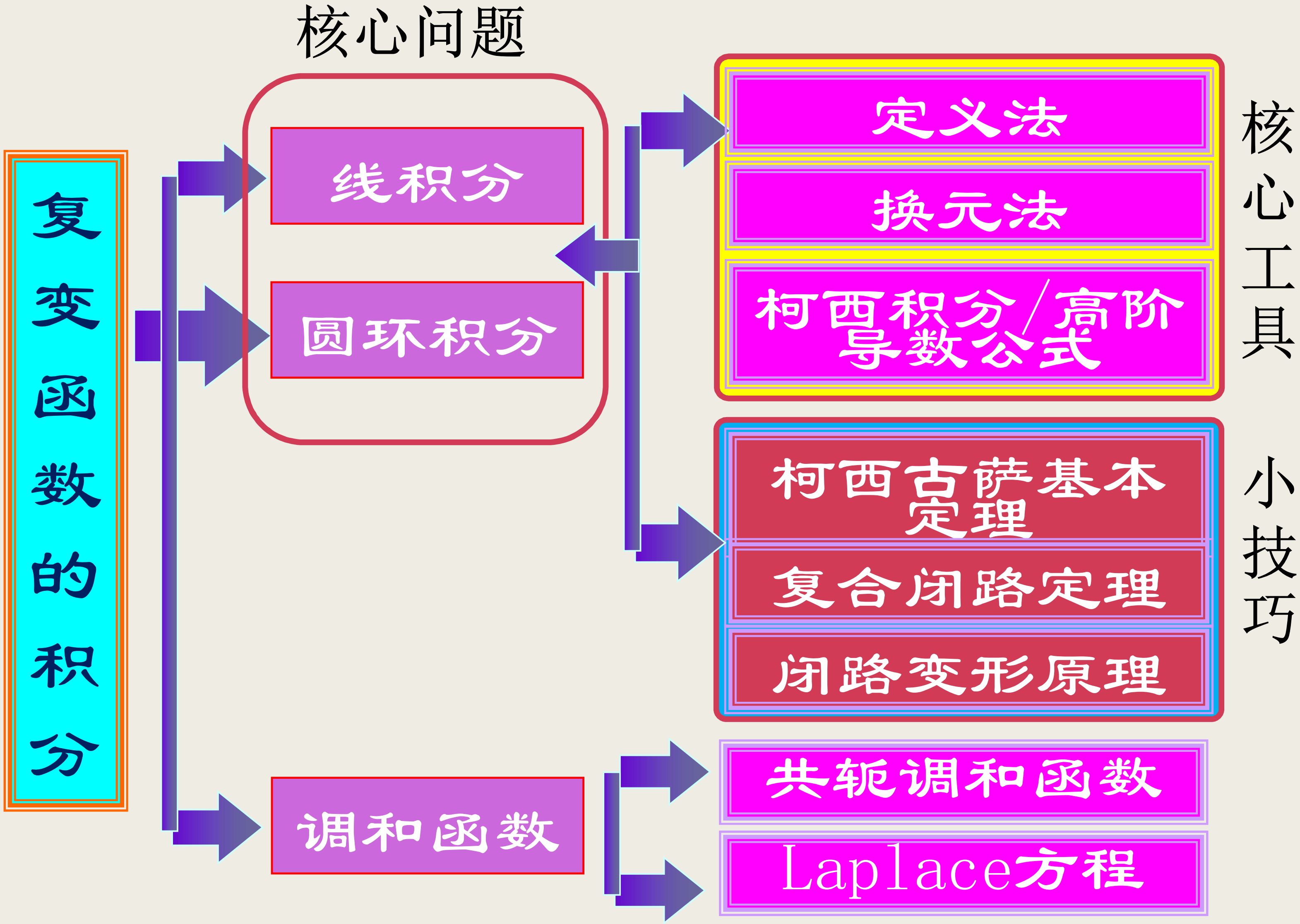
记住$\boldsymbol{e^{iy} = \cos y + i\sin y}$

即可推出这里的四个公式

第二章 解析函数P62

- 参考作业题：复变函数第二章习题P66
- 1（1）、2（3）、3（3）、9、11、15、18

第三章 复变函数的积分P95



第三章 复变函数的积分P95

- *线积分：
  - *定义*：$I=\int_{C_A}^{C_B} f(z)\mathrm{d}z=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$
  - *定义法*：$I=\int_{C_A}^{C_B}(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_{C_A}^{C_B}(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y)$
  - ***换元法：令$\boldsymbol{z(t)=x(t)+iy(t)}$，则，$\boldsymbol{I=\int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)\mathrm{d}t}$**
- ***最常用圆环积分：
  - $\oint_{|z-z_0|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}=\begin{cases}2\pi i, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$

第三章 复变函数的积分P95

- *柯西古萨基本定理：如果函数 $f(z)$ 在单连通区域B内处处解析，那么函数$f(z)$沿B内任意一条封闭曲线C的积分值为零

- *复合闭路定理：设C为多连通区域D内的一条简单曲线， C1、C2、C3等为C内的简单闭曲线，他们互不包含又互不相交；又设C与C1、C2、C3等围成的区域全含于D，如果 $f(z)$在 D内解析，

  那么：1) $\oint_{c} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$； 1) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$，其中Γ是C与C1、C2、C3等围成的复合闭路

- *闭路变形原理：不经过奇点的变形，不影响积分值。

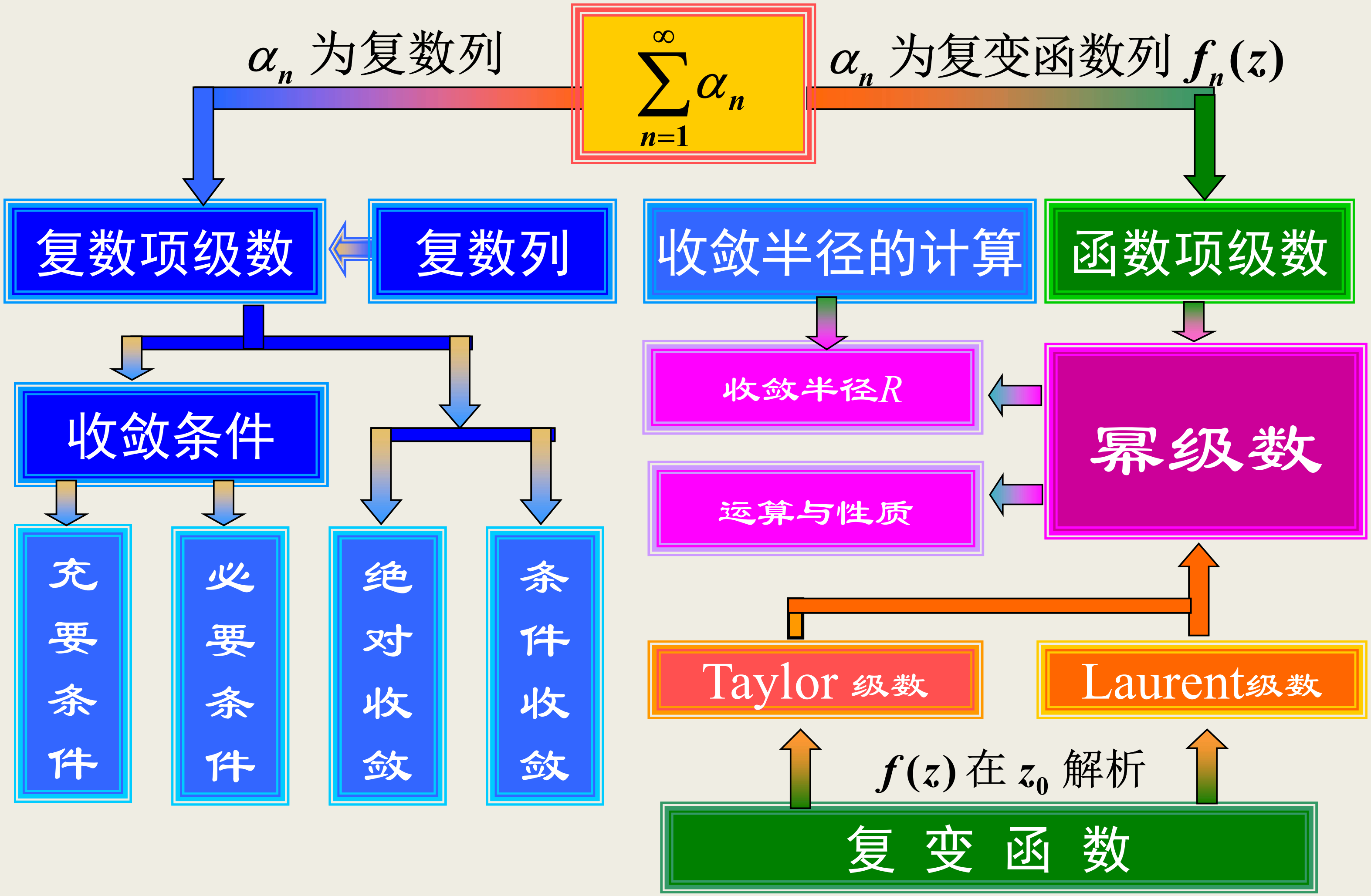
第三章 复变函数的积分P95

- ***柯西积分公式与高阶导数公式
  - $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$，
  - $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$
- **Laplace**方程：$\boldsymbol{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0}$
- *调和函数：满足**Laplace**方程的函数
  - *解析函数的实部和虚部都是调和函数*
  - *虚部称为实部的共轭调和函数*

第三章 复变函数的积分P95

- 参考作业题：复变函数第三章习题P99
- 1、4、5、 8(1-5)、9、26

第四章 级数P137

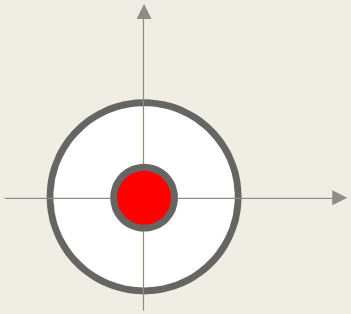

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$
α_n 为复数列
α_n 为复变函数列 $f_n(z)$
复数项级数
复数列
收敛半径的计算
函数项级数
收敛条件
收敛半径R
幂级数
运算与性质
充要条件
必要条件
绝对收敛
条件收敛
Taylor 级数
Laurent级数
$f(z)$ 在 z_0 解析
复 变 函 数

第四章 级数P137

- *数列、级数的定义、收敛性质。
  - *复数列* $\boldsymbol{\alpha_n = a_n + ib_n}$ *收敛的充要条件是* $\boldsymbol{a_n}$、$\boldsymbol{b_n}$ *同时收敛*
  - *级数* $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n}$ *收敛的充要条件是* $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ 和 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$ *同时收敛*
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha_n = 0}$ *是级数* $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n}$ *收敛的必要条件*
- 幂级数定义：$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)}$ 中各项都是幂函数 $\boldsymbol{f_n(z) = c_{n-1}(z - z_0)^{n-1}}$
  - ****收敛圆、收敛半径及其求法（比值法、根值法）*
  - *在收敛的情况下，微分、积分次序可以调换*
  - *收敛圆内全解析、无奇点*

第四章 级数P137

- Taylor展开定义、唯一性、系数求法
  - ***$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right](z-z_0)^n=$
    $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
  - *通过高阶求导公式链接*
  - *注意展开的圆心*



- *Laurent展开定义、唯一性、系数求法
  - ***$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right](z-z_0)^n$
  - ****注意展开的圆心，以及收敛范围！！！*

第四章 级数P137

- 参考作业题：复变函数第四章习题P141
- 1、2、3、6、11（4-7）、12、16、17、18（略难了）

第五章 留数P178

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

函数的零点与极点的关系

留 数

- 留数定理
- 计算规则

计算 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x$

第五章 留数P178

- 孤立奇点的定义，分类：
  - 可去奇点：洛朗展开不含负幂项，极限值为有限值
  - ***M阶极点：洛朗展开最小非零幂次项为-M (M>1)，极限值为无穷大 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$
  - 本性奇点：洛朗展开含无穷多负幂项，极限值不存在且不为无穷大
- 零点
  - *与极点的关系：如果 z_0 是 $f(z)$ 的M阶零点，则 z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的M阶极点
  - *M阶零点：洛朗展开最小非零幂次项为M (M>1)，$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$

第五章 留数P178

- ***极点阶数的判断方法
  - *定义法*
  - *零点法*
  - *求导法*
- **留数
  - $\mathbf{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$，$C$*为去心邻域*$0 < |z - z_0| < R$*内的任意一条正向简单闭曲线*

第五章 留数P178

- ***留数定理：若$f(z)$在区域D内除有限个奇点（z_k，k=1 ~ n）之外处处解析，C为D内包含诸奇点的正向简单曲线，则$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

- ***留数的计算：
  - *规则II：若z_0是$f(z)$的m阶极点，则*$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$（阶乘极限求导JJQ）
  - *规则III：若z_0是$\frac{P(z)}{Q(z)}$的的一级极点，则*$\mathrm{Res}[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0] = \frac{P(z)}{Q'(z)}$
  - *PQ'*

第五章 留数P178

- 留数的应用
  - *1. 三角函数在圆环上的积分*
    - $**\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{dz}{iz} = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k]$，其中$z_k$是$f(z)$在$|z|=1$内的孤立奇点
  - *2. 有理函数在全实轴上的积分*
    - $*\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z), z_k]$，其中$R(x)$的分母幂次比分子幂次至少高二次，$z_k$是$R(z)$在上半复平面内的孤立奇点
  - *3.有理函数指数幂在全实轴上的积分（对比拉普拉斯逆变换留数法）*
    - $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aix}, z_k]$，其中$R(x)$的分母幂次比分子幂次至少高一次，$z_k$是$R(z)$在上半复平面内的孤立奇点

本 章 内 容 总 结

孤立奇点

可去奇点

极点

本性奇点

函数的零点与极点的关系

留 数

留数定理

计算规则

计算 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$

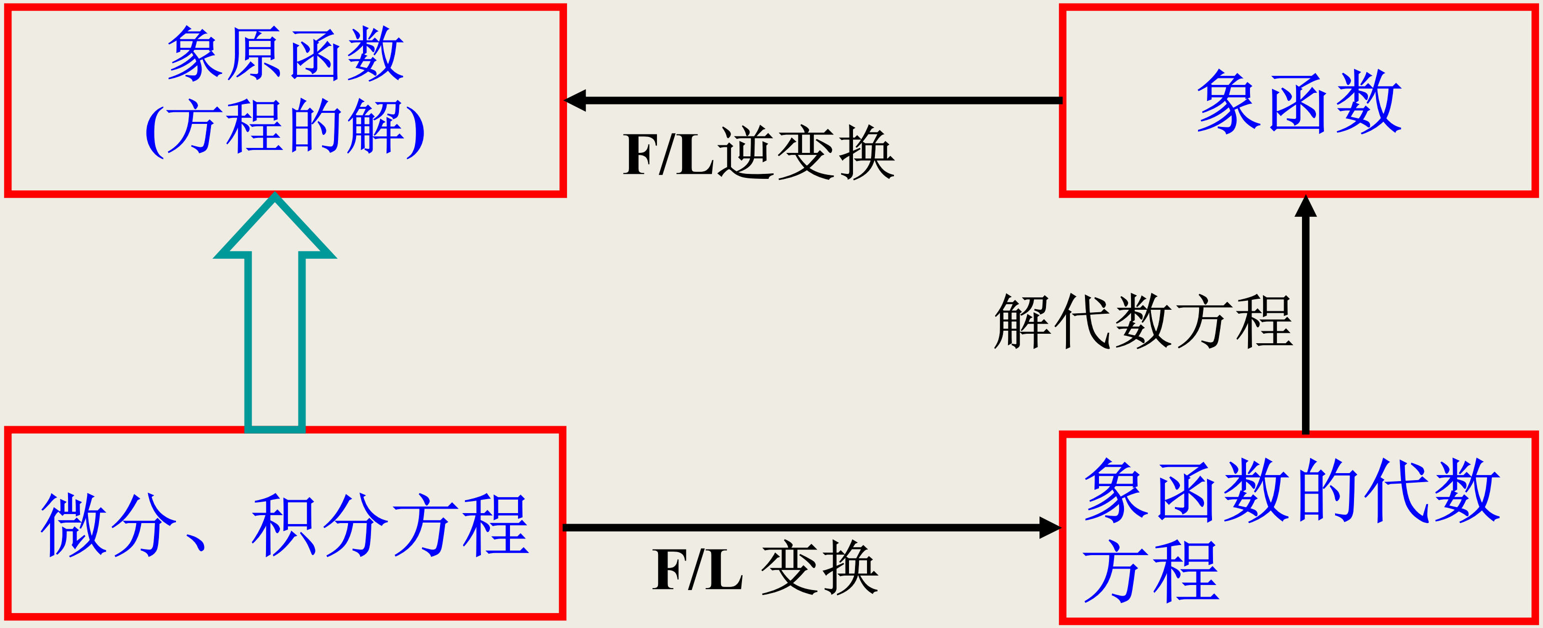
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x$

第五章 留数P178

- 参考作业题：复变函数第四章习题P183
- 1、2、4、 8、9、13(1-4)
- 思考3、5、6 、7、12、14

第六、七章 Fourier、 Laplace变换

- 为什么要变换？简化运算，借助**Fourier**、**Laplace**变换的神奇性质



第六、七章 Fourier、Laplace变换

- 存在条件
  - ***Fourier***
    - **Dirichlet**条件：有限个第一类断点（不太多，不太坏），有限个极值点（震荡不太厉害）
    - 在$(-\infty, +\infty)$上绝对可积
  - ***Laplace***
    - $\boldsymbol{t \geq 0}$的任意有限区间上连续或分段连续
    - 当$\boldsymbol{t} \to +\infty$时，$\boldsymbol{f(t)}$增长速度不超过某一指数函数

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \ \ (\omega\in\mathbb{R})$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F(s)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \ \ (s\in\mathbb{C})$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s\ (t>0)$$

$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{s=s_k}[F(s)e^{st}]$，适当选择$\beta$使得

Re(所有奇点) $<\beta$；当$s\to\infty$时，$F(s)\to 0$

$f(t)=$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]\mathrm{d}\omega$$

$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\omega u\,\mathrm{d}u$$

$$b(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\omega u\,\mathrm{d}u$$

***没什么好说的，必须记住

$$\mathcal{F}[e^{\pm\omega_0 t}f(t)]=F(\omega\mp\omega_0)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[e^{\pm i\omega\tau}F(\omega)\right]=f(t\pm\tau)$$

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right]=(i\omega)^n F(\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-it)^n f(t)$$

$$i\omega\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]=F(\omega)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a) \qquad (\mathrm{Re}(s-a)>c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-st}F(s)]=f(t-\tau)$$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-1-k}f^{(k)}(0)\ (\mathrm{Re}(s)>c)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F^{(n)}(s)]=(-t)^n f(t) \qquad (\mathrm{Re}(s)>c)$$

$$s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=F(s),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s,$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\mathrm{d}t\int_0^t\mathrm{d}t\ldots\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}s\ldots\int_s^{\infty}F(s)\mathrm{d}s$$

怎么记住这些区别：

虚数单位i：$s=\beta+i\omega$

没有±号：Laplace变换积分下限

零点特别重要：决定论者

第六、七章 Fourier、Laplace变换

- 其它内容
  - ***Fourier*积分：连续点处$f(t)=\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t)))$，不连续点处，左侧应该用$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$代替*
  - ***δ函数：与单位阶跃函数的关系，筛选性质*
  - *频谱的概念*
  - ****Fourier*、*Laplace*变换中卷积定义式及卷积定理*
    - **Fourier**：$f_1*f_2=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，$\mathcal{F}(f_1*f_2)=\mathcal{F}(f_1)\mathcal{F}(f_2)$
    - **Laplace**：$f_1*f_2=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，$\mathcal{L}(f_1*f_2)=\mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2)$

本 章 内 容 总 结

孤立奇点

- 可去奇点
- 极点
- 本性奇点

极点 ↔ 函数的零点与极点的关系

留 数

- 留数定理
- 计算规则

→ 计算 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$

留数在定积分计算中的应用

1. $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\mathrm{d}x$

第六、七章 Fourier、 Laplace

- 参考作业题：积分变换（视情况分配精力）
- Fourier：
  - *习题一2(3)、3*
  - *习题二1、3*
  - *习题三3、4、5、6*
  - *习题四1(1-4)、2、3、5*
- Laplace：
  - *习题一1(1-4)、2(1)*
  - *习题二1、5(1-6)、6(1-4)*
  - *习题四2、3*

第八章 典型数理方程（书上没有）

- 三类典型数理方程：其中$\boldsymbol{f}$是与驱动力、源有关的量
  - *描述振动及其传播过程的波动方程*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}^2\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z};\boldsymbol{t})$$ 双曲型方程

  - *描述输运过程的扩散（或热传导）方程*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\boldsymbol{D}\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z};\boldsymbol{t})$$ 抛物型方程

  - *描述稳定过程（或状态）的泊松（Poisson）方程*

$$\boldsymbol{0}=\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$ 椭圆型方程