概率统计期末练习题二

一．单选题

1、事件 A 发生而事件 B 不发生的事件为（ C ）

A、 A⊂B； **B、 A⊃B；** **C、 A－B；** **D、** $A-\overline{B}$。

2、若 X 的概率分布是

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

，则下列结果中，成立的是（ B ）。

A、 P{x≤0}=0； **B、 P{0<x<1}=0；**

C、 P{1≤x≤2}=0； **D、** $P\{X<0\}=\frac{1}{2}$。

3、若事件 A⊃B，则有（ A ）。

A、 P（A － B） =P（A）- P（B）； **B、 P（B － A） =P（B）- P（A）；**

C、 P（AB） =P（A）P（B）； **D、 P（AB）= 0。**

4、若 X 服从参数为 λ=1 的指数分布，则 Y = 2X 的密度函数是（ A ）。

A、 $f_Y(y)=\begin{cases}0.5e^{-0.5y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ **B、** $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

C、 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y^2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ **D、** $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$。

5、假设检验中，显著性水平 α 表示（ B ）。

A、 H_0 为假，但接受 H_0 的概率； **B、** H_0 为真，但拒绝 H_0 的概率；

C、 小于等于 **10%**的一个数，无具体意义； **D、** 可信度为 $1-\alpha$。

二．多选题（共 5 题，共 15 分）。

1、设总体 X 为标准正态分布，其分布函数为 Φ(x)，则下列结果中成立的有（ ABCD ）。

A、$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$；　　**B**、$\Phi(-\infty)=0$；

C、$\Phi(0)=0.5$；　　**D**、$\Phi(+\infty)=1$。

2、设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是总体 X 的样本，且知 X~$N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2未知，则（ **CD** ）成立。

A、$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$是统计量；　　**B**、$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}$是统计量；

C、$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是统计量；　　**D**、$D^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$是统计量。

3、对 α ∈（0，1），参数 θ 的置信水平$1-\alpha$的置信区间(θ_1,θ_2)的意义（ ABC ）。

A、$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$；　　**B**、$(\theta_1,\theta_2)$可能含$\theta$，也可能不含$\theta$，并且含$\theta$的概率为$1-\alpha$；

C、$P\{\theta\notin(\theta_1,\theta_2)\}=\alpha$；　　**D**、恒有$\theta\in(\theta_1,\theta_2)$。

4、 若$X_1,X_2,\cdots,X_n$为总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，令$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则下列结果中成立的有（ **ABCD** ）。

A、$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi_n^2$；　　**B**、$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2$；

C、$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s}\sim t_{n-1}$；　　**D**、$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。

5、 关于单个正态总体 t 检验，若记

$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，下列正确的是（ AC ）。

A、 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为{$|\bar{x}-\mu_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}$}。

B、 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu>\mu_0$，则拒绝域为{$\bar{x}\geq\mu_0+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$}。

C、 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为{$|\bar{x}-\mu_0|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$}。

D、 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu<\mu_0$，则拒绝域为{$\bar{x}\leq\mu_0-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}$}。

三．填空题

1．设A,B是两个随机事件，已知$P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，则$P(A|B)=$ ___5/7___，$P(A-B)=$ ___1/10___。

2． 10 只乒乓球中有 4 只是白色，6 只是黄色，现从 10 只乒乓球中随机地取出两只，则取到两只黄球的概率是___1/3___，取到一只白球一只黄球的概率是___8/15___。

3．设随机变量 X 可能取的三个值为 -2，0 和 1，且 $P(X=-2)=0.2$，$P(X=0)=0.3$，则 $E(X)=$ ___0.1___， $Var(X)=$ ___1.29___.

4．设随机变量 X_1,X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(-1,4)$，$X_2\sim N(2,9)$。令 $X=2X_1-X_2$，则 $X\sim$ ___N(-4,25)___。进一步，记$\phi(x)$为标准正态分布的分布函数，且 $\phi(1)=0.8413$，$\phi(2)=0.9772$， 则 $P\{-9<X<1\}=$ ___0.6826___。

5. 若 X 服从[0,1]区间上均匀分布，记 $A=\{0.2\leq X\leq 0.5\}$，Y 表示对 X 进行 15 次独立观测后事件 A 发生的次数。则 $E(Y)=$ ___4.5___，$Var(Y)=$ ___3.15___。

四. 计算题

1.三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球、1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球、3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球、5 个白球。现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球。问：

（1）这个球是白球的概率；

（2）已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率。

解：A_i：表示第 i个箱子，i=1，2，3；　B：表示白球。

由题意：$P(A_i)=\frac{1}{3}$，$i=1，2，3$.

$$P(B|A_1)=\frac{1}{5};\quad P(B|A_2)=\frac{1}{2};\ P(B|A_3)=\frac{5}{8}$$

（1）$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$

$$=\frac{1}{5}*\frac{1}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+\frac{5}{8}*\frac{1}{3}=\frac{53}{120};$$

(2) $P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}{\frac{53}{120}}=\frac{20}{53}$

2．设二维随机变量(X,Y) 有联合密度函数

$$f(x)=\begin{cases} Cxe^{-y} & 0<x<y<+\infty, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

（1）求参数 C 的值；（2）求 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_y(y)$；（3）求 $E(X)$

解：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y cxe^{-y}\,dy=1$ **c=1**

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_x^{+\infty} xe^{-y}dy=xe^{-x}$, **x>0**

$f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ 同理， $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}y^2e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^y xe^{-y}dx=\frac{1}{2}y^2e^{-y}$, **y>0**

（3）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx=2$

3．设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$,为来自概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

的总体的样本，θ 未知，求（1）θ 的矩估计；

（2）θ 的极大似然估计

解（1）**EX=**$\bar{X}$,而$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\theta)\,dx=\int_0^1 \theta x^{\theta}\,dx=\frac{\theta}{\theta+1}$

$\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{X}$ 解得$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)=\prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1}=\theta^n\prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}$

$\operatorname{Ln} L(\theta)=n\ln(\theta)+(\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$\frac{d\operatorname{Ln} L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^n \ln x_i=0$

解得：$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} lnx_i}$

4．设学生某次考试成绩服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 76.5，标准差为 9.5 分。若平均分大于等于 75 分时认为考题难度合适，否则考题则偏难了。问在显著性水平 0.05 下，从样本看，

(1).是否认为本次考试题偏难了？

(2).是否接受“$\sigma \le 10$”的假设？

附　t 分布与 χ^2 分布表

$t_{24}(0.025)=2.0639$	$t_{24}(0.05)=1.7109$	$t_{25}(0.025)=2.0595$	$t_{25}(0.05)=1.7081$
$\chi^2_{24}(0.025)=39.364$	$\chi^2_{24}(0.05)=36.415$	$\chi^2_{25}(0.025)=40.646$	$\chi^2_{25}(0.05)=37.652$
$\chi^2_{24}(0.975)=12.401$	$\chi^2_{24}(0.95)=13.848$	$\chi^2_{25}(0.975)=13.120$	$\chi^2_{25}(0.95)=14.611$

解 n=25，$\alpha=0.05,\ \bar{x}=76.5$，$s$=9.5。

(1). 假设：$H_0: \mu \le \mu_0 = 75 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0 = 75$

由 $\bar{x}-\mu_0 = 76.5-75 = 1.5 < \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha) = \frac{9.5}{5} \times 1.7109 = 3.25071$ 可知，没有落在原假设的拒绝域里，因此接受原假设，认为本次考题难度偏难了。

(2).

本题的假设检验问题：
$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 = 10^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 10^2.$
由 $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{24\times 9.5^2}{10^2} = 21.661 \le \kappa_{24}^2(0.05) = 36.415$ 可知，没有落入拒绝域中，因此接受原假设，认为 $\sigma \le 10$.