# 北京工业大学 2020—2021 学年第一学期

# 《线性代数（工）》期末考试试卷（A）

**考试说明：考试时间: 2021 年 01 月 07 日.考试时长: 95 分钟.考试方式: 闭卷**

**承诺：**

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

**承诺人：**__________ **学号：**__________ **班号：**__________

**注：**本试卷共 8 大题，共 8 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总成绩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 30 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 5 | 5 | |
| 得分 | | | | | | | | | |

| 得 分 |
|---|
| |

一. **填空题**（每小题 3 分，共 30 分. 注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者 $a$，或者 $b$”型答案失分）

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 6\\ -2 & -6 & 0\end{pmatrix}$. $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$X^T$ 是 $X$ 的转置。

则 $X^TA^*X=$__________

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $A^{-1}$ 的迹 $trA^{-1}=$__________

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}$

4. 若$1,2,2,3$是4阶实方阵$A$的特征值，而且$A$不能相似对角化，则$3A-6E$的秩 $R(3A-6E)=$__________

5. $A$是3阶实方阵。若三个齐次线性方程组$(A+E)X=0$、$(2E-A)X=0$和$(E-A)X=0$ 均有非零解，则行列式$\left|A^*+3A^{-1}+A\right|=$__________

6. 若$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则由$A^*X=0$的解向量形成的极大线性无关组中包含向量的个数 =__________

7. 若$A$是3阶实方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的3维实列向量，满足

$A\alpha_1=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$，$A\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，

则$A$的正特征值的代数重数是__________

8. 二次型 $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

的正、负惯性指数之和 =__________

9. 若实矩阵 $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 相似，且 $a>0$，则 $a=$________

10. 实矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d \end{pmatrix}$ 满足 $A^{12}+2A^7+A^2+A+E=0$，则行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ d_1 & d_2 & d \end{vmatrix}$ __________ 0（填 >,=,< 之一）.

| 得 分 |
| --- |
| |

二（12 分） 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

| 得 分 |
| --- |
| |

三（12分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

| 得 分 |
| --- |
| |

四（12） $a$取何值时，线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

| 得 分 |
| --- |
| |

五（12 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

| 得分 |
| --- |
| |

六（12分） 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,1,0,2,0)^T,\alpha_2=(-1,1,0,1,-1)^T,$$

$$\alpha_3=(1,-1,1,0,3)^T,\alpha_4=(0,0,1,0,-1)^T,\alpha_5=(0,2,8,5,-5)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

| 得 分 |
| --- |
| |

七（5分）已知：实三元线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_3z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ 有唯一解。

证明：$x=\dfrac{D_1}{D}$，其中，$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

| 得 分 |
| --- |
| |

八（5分）. 已知：实 $n$ 阶方阵 $A$ 既是正交矩阵，又是正定矩阵。

证明：$A=E$（单位矩阵）。