一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x^2}=$______ 0 ____________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0 \\ a+x^2, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$__ 1 ______.

3. 曲线 $y=\dfrac{1}{x+1}e^{-x^2}$ 的铅直渐近线为 ____ $x=-1$ __________.

4. 设 $f'(1)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=$_______ 2 ________________.

5. 设 $y=\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}y=$_____ $\dfrac{2\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$ _________.

6. 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 过对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 的点 P 的法线方程为______ $y=\sqrt{3}x-1$ ______.

7. 设 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______ $\dfrac{1}{6}$ _________.

8. 曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 在区间_______ $[-1,1]$ ___________上是凹的.

9. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=$____ $\dfrac{\pi}{2}$ ________________.

10. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$______ 1 _______.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $f(x)=\dfrac{3x+1}{e^x}$，求（1）$f'(x),f''(x)$；（2）$f(x)$ 带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式;（3）$f^{(2021)}(0)$.

解：（1）$f'(x)=3e^{-x}-(3x+1)e^{-x}$,

$$f''(x)=-6e^{-x}+(3x+1)e^{-x}.$$

（2）$f'''(x)=9e^{-x}-(3x+1)e^{-x}$，$f(0)=1,f'(0)=2,f''(0)=-5,f'''(0)=8,$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$
$$=1+2x-\frac{5}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\text{，}$$

（3） $f^{(4)}(x)=-12e^{-x}+(3x+1)e^{-x}$，$\cdots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}3ne^{-x}+(-1)^n(3x+1)e^{-x}$，

故 $f^{(2021)}(0)=6062$.

12. 计算不定积分 $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

则 $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int t^3\arctan t\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int\arctan t\mathrm{d}t^4$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}+C$$

13. 计算 $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$， $x=0,t=1;x=2,t=\sqrt{3}$，

则 $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t}{t+t^3}dt=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$

$$=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

14．求函数$f(x)=x^2\ln x$的极值.

解：定义域$x\in(0,+\infty)$，

$$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1),$$

令$f'(x)=0$，得$x=0$（舍）或$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$，

当$x\in(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$时，$f'(x)<0$；当$x\in(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$时，$f'(x)>0$；

所以在$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$取得极小值，极小值$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

15.记曲线段$x^2+y^2=4\left(y\geq 0,0\leq x\leq 1\right)$与直线$x=0,x=1$及$x$轴所围的图形为$D$,

（1）求平面图形D的面积；

（2）求图形D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1）$S=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$，令$x=2\sin t$,则$\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$，

故平面图形D的面积$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）圆柱体积$V_1=\sqrt{3}\pi$,

剩余旋转体体积$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}\right)^2\mathrm{d}y=4\pi y\Big|_{\sqrt{3}}^{2}-\frac{\pi}{3}y^3\Big|_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{16}{3}\pi-3\sqrt{3}\pi$,

图形D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积$V=\frac{16}{3}\pi-2\sqrt{3}\pi$.

16．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le e\\ \dfrac{A}{x(2\ln x+\ln^2 x)}, & x>e\end{cases}$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式；

(2) 设 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = A$，试确定 A 的值.

解：(1) $x\le 0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{2}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^t}{2}\right|_{-\infty}^{x}=\frac{e^x}{2}$，

$0<x\le e$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}0\mathrm{d}t=\left.\frac{e^t}{2}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{2}$，

$x>e$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^t}{2}\mathrm{d}t+\int_{0}^{e}0\mathrm{d}t+\int_{e}^{x}\frac{A}{t(2\ln t+\ln^2 t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln t}{2+\ln t}\right)\Bigg|_{e}^{x}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}.$$

(2) $A=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3},$$

故 $A=\dfrac{1}{2-\ln 3}$.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 当 $x>4$ 时，证明：$2^x>x^2$.

证明一：设 $f(x)=2^x-x^2$，

则 $f'(x)=2^x\ln 2-2x$，$f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$，$f'''(x)=2^x(\ln 2)^3>0$，

故当 $x>4$ 时 $f''(x)$ 单调增加，即 $f''(x)>f''(4)=2^4(\ln 2)^2-2>0$,

当 $x>4$ 时 $f'(x)$ 单调增加，即 $f'(x)>f'(4)=2^4\ln 2-8>0$,

当 $x>4$ 时 $f(x)$ 单调增加，即 $f(x)>f(4)=2^4-4^2=0$,

即有 $2^x>x^2$.

证明二：设 $f(x)=x^2\cdot 2^{-x}$，

则 $f'(x)=2x\cdot 2^{-x}-\ln 2\cdot x^2\cdot 2^{-x}=2^{-x}\cdot x(2-x\ln 2)$，

当 $x>4$ 时 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调减少，有 $f(x)<f(4)=1$，即有 $2^x>x^2$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=x^3f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导,

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，

由零点定理，$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=0$，

所以 $F(0)=F(\eta)=0$，

由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.