北京工业大学 2016—2017 学年第 一 学期

《概率论与数理统计》(工)课程考试 • 151151 模拟试卷答案

考试说明： **考试闭卷；可使用文曲星除外的计算器。** **命题人：** **赵天朗**

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________ **学号：**__________ **班号：**__________

………………………………………………………………………………………………

注：本试卷共 6 大题，共 7 页，满分 100 分。考试时必须使用卷后附的草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三(1)	三(2)	三(3)	三(4)	三(5)	总成绩
满分	14	15	13	13	13	13	13	
得分								

一、选择题（每题 2.5 分, 共 20 分）

1. 设 A, B 是两事件，则下列等式中（ C ）是不正确的。

A. P(AB)＝P(A)P(B)，A, B 相互独立　　B. P(AB)＝P（B)P（A|B），P（B)$\neq 0$

C. P(AB)＝P(A)P(B)，A, B 互不相容　　D. P(AB)＝P(A)P(B|A)，P(A)$\neq 0$

2. 当 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容时，则 P（$\overline{A \cup B}$）＝（ ）。 C

A. 1－P（A）　　B. 1－P（A）－P（B）

C. 0　　D. P（$\overline{A}$）P（$\overline{B}$）

3. 设 ξ 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $E(\xi)=2$, 则 $P\{\xi=1\}=$（ C ）

A. $e^{-\lambda}$　　B. $e^{-2\lambda}$　　C. $2e^{-2}$　　D. e^{-2}

4. 设随机变量 X 与 Y 服从正态分布，$X \sim N(\mu,4^2), Y \sim N(\mu,5^2)$, 记

$P_1=P\{X \le \mu-4\}$　$P_2=P\{Y \ge \mu+5\}$，则（ A ）

A. 对任意 μ 都有 $P_1=P_2$　　B. 对任意实数 μ，都有 $P_1<P_2$

C. 只有 μ 的个别值，才有 $P_1=P_2$　　D. 对任意实数 μ，都有 $P_1>P_2$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立随机变量序列，且 X_i 服从参数为 λ 的泊松分布，$i = 1, 2, \cdots$，则（　）.

（A）$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{n\lambda} \le x \right\} = \Phi(x)$；

（B）当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从标准正态分布；

（C）当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\lambda,\ n\lambda)$；

（D）当 n 充分大时，$P(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \le x) \approx \Phi(x)$.

解：由独立同分布中心极限定理 $\Rightarrow \sum\limits_{\substack{i=1 \\ n\to\infty}}^{n} X_i$ 近似服从 $N(n\lambda,\ n\lambda)$

∴ 选 C

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，则（　）可以作为 σ^2 的无偏估计量.

（A）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$；　　（B）$\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$；

（C）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$；　　（D）$\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

解：$EX_i = 0, \quad DX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = EX_i^2 = \sigma^2$

$E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{1}^{n} X_i^2) = \dfrac{1}{n} \cdot n\sigma^2 = \sigma^2$　　通正态分布的“矩估计”

∴ 选 A.

7. 设总体 X 服从均匀分布 $U(0,b)$，其中 b 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自 X 的一组样本，$\overline{X}$ 表示样本均值，S^2 表示样本方差，则下列样本函数是统计量的是（　　）.

A. $\overline{X} + \dfrac{b}{2}$　　B. $\overline{X} - E(X_1)$　　C. $S^2 - D(X)$　　D. $\dfrac{X_2 + X_3}{2}$

答案 D

8. 设随机变量 X 与 Y 服从正态分布，$X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$，记

$P_1 = P\{X \le \mu - 4\} P_2 = P\{Y \ge \mu + 5\}$，则（　）　C

A. 对任意 μ 都有 $P_1 = P_2$　　B. 对任意实数 μ，都有 $P_1 < P_2$

C. 只有 μ 的个别值，才有 $P_1 = P_2$　　D. 对任意实数 μ，都有 $P_1 > P_2$

二、填空题（每题 1.5 分, 共 15 分）

1. 设 A, B 为事件，且 $P(A) = 0.2, P(A \cup B) = 0.4$。当 A 与 B 相互独立时，$P(B) =$ ______；

互斥时，$P(B)=$________；　　0.25　　0.2

2. 已知 $P(A)$=0.7，$P(B)$=0.4，$P(A\overline{B})$=0.5，则 $P(A|B)$= ______。 0.5

3. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-x^2/2}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$

则常数 $a=$______，$b=$______。 1　　−1

4. 若随机变量 X 只取 ± 2, 1 之三个可能值, 且 $P(X=-2)=0.15$, $P(X=1)=0.5$。

则 $E(X)=$______，$Var(X)=$______。　0.9　　1.69

5. 若随机变量 X_1,X_2 相互独立，X_1 服从正态分布 $N(4,3^2)$，X_2 服从区间[−1, 2]上均匀分布 $U(-1,\ 2)$。令 $X=X_1-2X_2$，则 $E(X)=$ 3 ，$Var(X)=$ 12 。　3　12

6. 若随机变量 X_1,X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(3,\ 3^2)$，$X_2\sim N(1,\ 2^2)$，令 $X=X_1-2X_2$，则 $X\sim$________，$P\{-4<X<6\}=$________。

注 1：$\Phi(x)$ 为正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，$\Phi(1)=0.8413$。

$N(1,\ 5^2)$　　0.6826

7. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=7$，方差 $Var(X)=5$，用切比雪夫不等式估计得 $P\{2<X<12\}\ge$________。　0.8

根据切比雪夫不等式有：

$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\dfrac{VarX}{\varepsilon^2}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=7$，方差 $D(X)=5$，

故有：

$P\{2<X<12\}=P\{|X-7|<5\}$

而对于

$P\{|X-7|\ge5\}\le\dfrac{DX}{5^2}=\dfrac{1}{5}$

$P\{2<X<12\}=P\{|X-7|<5\}=1-P\{|X-7|\ge5\}\ge\dfrac{4}{5}$

补充：设某城市供电网有 10000 盏电灯,夜晚每盏电灯开灯的概率均为 0.7,并且彼此开闭与否相互独立,试用切比雪夫不等式估算夜晚同时开灯数在 6800 到 7200 之间的概率.

$X(1),..,X(10000)$代表每盏灯开关事件,$X(i)=1$代表开灯,$X(i)=0$代表关灯,$P\{X(i)=1\}=0.7$

$X=\Sigma X(i)$,为$n(n=10000)$次独立重复事件,$p=0.7$,则$E(X)=np=7000$,$D(x)=np(1-p)=2100$

由切比雪夫不等式：

$P\{|X-E(x)|>=\varepsilon\}=1-D(X)/(\varepsilon*\varepsilon)=379/400=0.9475$

8. 设随机变量 X～B（n，p），已知 E（X）=3，Var（X）=2.4，则 n=___，p=___ 。 15　0.2

9. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。则 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma\sim$ ________，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ ________，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ ________。 $\underline{N(0,1)}$，$\underline{t_{n-1}}$，$\underline{\chi^2_{n-1}}$

补充：……..，μ 与 σ^2 为未知常数，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。则 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim$ ______，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim$ ______，$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim$ ______

10.

一批零件的长度 X(单位： cm) 服从正态分布 $N(\mu,4)$, 随机抽取零件 16 件, 得其长度的均值为 40, 则 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为 [______ , ______].

注：标准正态分布的分布函数值 $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.645)=0.95$.

答案：$\underline{[\ 39.02\ ,\ 40.98\ ]}$.

三、解答题（每小题 13 分，共 65 分）

注： 每题要有解题过程，无解题过程不能得分

1. (15 分) 设随机变量 X 服从标准正态分布 N(0, 1)，记 $Y=e^X$，求：

(1). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

(2). Y 的期望 E(Y)。

解：(1). 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

当 $y>0$ 时，有

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln y}e^{-x^2/2}dx,$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln y)^2/2};$$

$y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0.$

故，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln y)^2/2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

(2). $EY=\int_{-\infty}^{\infty}e^{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2}dx=e^{1/2}$.

2.（本题 13 分）有型号相同的产品两箱，第一箱装 12 件产品，其中两件为次品；第二箱装 8 件产品，其中一件为次品。先从第一箱中随机抽取两件产品放入第二箱，再从第二箱中随机抽取一件产品。

(1)．求从第二箱中取出次品的概率；

(2)．若从第二箱中取出了次品，求从第一箱中未取到次品的概率。

解 以 A_i 表示从第一箱中取到 i 件次品，$i=0,1,2$；B 表示从第二箱中取到次品。

则 (1)．$P(B)=P(A_0B)+P(A_1B)+P(A_2B)$

$$=P(A_0)P(B\mid A_0)+P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$

$$=\frac{C_{10}^2C_2^0}{C_{12}^2}\frac{1}{10}+\frac{C_{10}^1C_2^1}{C_{12}^2}\frac{2}{10}+\frac{C_{10}^0C_2^2}{C_{12}^2}\frac{3}{10}$$

$$=\frac{10\times 9}{12\times 11\times 10}+\frac{10\times 8}{12\times 11\times 10}+\frac{2\times 3}{12\times 11\times 10}\qquad =\frac{2}{15};$$

(2)．$P(A_0\mid B)=\dfrac{P(A_0B)}{P(B)}=\dfrac{10\times 9}{12\times 11\times 10}\cdot\dfrac{15}{2}=\dfrac{45}{88}$.

3*1. (本题 13 分) 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\in(-1,0],\\ 1-x, & x\in(0,1],\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 令 $Y=X^2$。

(1)．求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

(2)．求 $P(0.25<Y<1.96)$；

(3)．求 Y 的期望 $E(Y)$ 与方差 $Var(Y)$。

解 (1)．记 $F_Y(y)$ 为随机变量 Y 的分布函数，则 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$； $y\in(0,1]$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=2\sqrt{y}-y;$$

$y>1$ 时，$F_Y(y)=1$。于是，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{y^{-1}}-1, & y\in(0,1],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

(2)．$P(0.25<Y<1.96)=\int_{0.25}^{1.96}f_Y(y)dy=\int_{0.25}^{1}f_Y(y)dy=F_Y(1)-F_Y(0.25)=0.25$；

(3). $E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\dfrac{1}{6}$；

由 $E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4 f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^4(1-x)dx=\dfrac{1}{15}$ 及

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(X^4)-[E(X^2)]^2,$$

得 $Var(Y)=\dfrac{1}{15}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{7}{180}$.

3*2. (本题 13 分)设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-y}, & 0\le x\le y<\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 求常数c；

(2). 求X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$；

(3). 求$P(X+Y<1)$。

解 (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}c\cdot e^{-y}dx=c\int_0^{\infty}ye^{-y}dx=c$，

得$c=1$；

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy, & x>0, \\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0, \\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx, & y>0, \\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}y\cdot e^{-y} & y>0, \\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

(3). $P(X+Y<1)=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=\int_0^{0.5}(e^{-x}-e^{x-1})dx=(1-e^{-1/2})^2$

4. (本题 13 分) 若$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$为抽自总体X的随机样本，总体X有概率密度函

数 $f_X(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1; \\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

其中$\theta>-1$为待估参数，求θ的矩估计$\hat{\theta}$与极大似然估计θ^*。

解 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。由$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$。利用

$\overline{X}=E(X)$，得$\overline{X}=\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}$。解该式，得 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

记 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta+1}$为参数$\theta$的似然函数。

则 $\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ 与 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

解似然方程 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$。故 $\theta^*=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

5.（本题 13 分）对一批锰的熔点做 5 次测定，测定结果为 1269, 1267, 1271, 1263 和 1265 ^{o}C，

已知锰的熔点服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，给定检验的显著性水平 $\alpha=0.05$，问

(1). 在 σ^2 未知的情况下，可否通过样本推断出"总体均值等于 1270.6"？

(2). 可否通过样本推断出"总体方差不超过 4.25"？

附 t 分布与 χ^2 分布表

$t_4(0.025)=2.7764$	$t_4(0.05)=2.1318$	$t_5(0.025)=2.5706$	$t_5(0.05)=2.0150$
$\chi_4^2(0.025)=11.143$	$\chi_4^2(0.05)=9.488$	$\chi_4^2(0.95)=0.711$	$\chi_4^2(0.975)=0.484$
$\chi_5^2(0.025)=12.833$	$\chi_5^2(0.05)=11.071$	$\chi_5^2(0.95)=1.145$	$\chi_5^2(0.975)=0.831$

解 易见：$n=5$，$\alpha=0.05$。由 $x_1=1269$，$x_2=1267,\cdots$，$x_5=1265$，得

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=1267,\quad s^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10,\quad s=\sqrt{10}.$$

(1). 记 H_0: $\mu=1270.6(\mu_0) \leftrightarrow H_1$: $\mu\neq 1270.6(\mu_0)$.

由 $|\bar{x}-1270.6|=3.6<3.9263=(s/\sqrt{n})\cdot t_{n-1}(\alpha/2)$，

知：可通过样本推断 H_0 为真，即接受"总体均值等于 1270.6"；

(2). 记 H_0': $\sigma^2\leq 4.25(\sigma_0^2) \leftrightarrow H_1'$: $\sigma^2>4.25(\sigma_0^2)$.

由 $(n-1)s^2/\sigma_0^2=2.2145<9.488=\chi_{n-1}^2(\alpha)$，

知：可通过样本推断 H_0' 为真，即接受"总体方差不超过 4.25"。

草　稿　纸

姓名：________________　　　学号：____________________