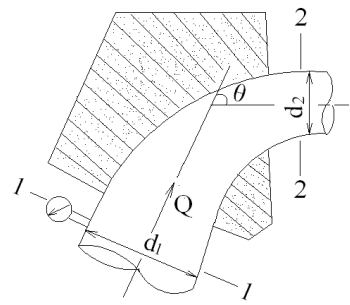


3. 有一根水平放置于混凝土支座上的变直径弯管，如图所示，弯管两端分别与断面等直径直管相连，转角 $\theta = 60^\circ$ ，左侧相接处 1—1 断面直径为 $d_1 = 300\text{mm}$ ，右侧相接处 2—2 断面直径为 $d_2 = 200\text{mm}$ ，1—1 断面上压力表读数 $p_1 = 17.6\text{N/cm}^2$ 管中流量 $Q = 100\text{L/s}$ ，求水流对弯管作用力的大小。



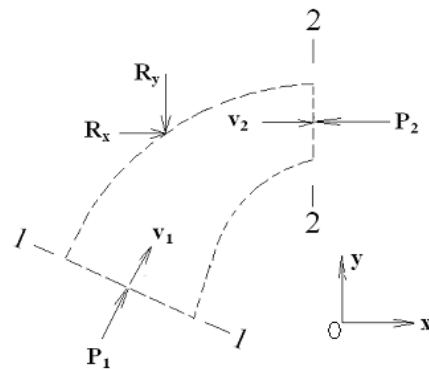
[参考答案]

解：水流对弯管的作用力 \mathbf{F} ，可通过弯管对水流的反力 \mathbf{R} 来求： $\mathbf{F} = -\mathbf{R}$ (作出下列受力分析图)

根据连续性方程，可得

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{100 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times (0.3)^2} = 1.42\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{100 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4} \times (0.2)^2} = 3.18\text{m/s}$$



取弯管内水流为研究对象（断面 1-1 与 2-2 之间）列动量方程：

$$p_1 A_1 \cos \theta - p_2 A_2 + R_x = \rho Q (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1 \cos \theta)$$

$$p_1 A_1 \sin \theta + 0 - R_y = \rho Q (0 - \alpha_{01} v_1 \sin \theta)$$

其中， $P_1 = p_1 A_1 = 17.6 \times 10 \times \frac{\pi}{4} \times (0.3)^2 = 12.43\text{kN}$

p_2 通过对断面 1-1 与 2-2 列能量方程：

$$p_2 = p_1 + \gamma \left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right)$$

$$= 17.6 \times 10 + 9.8 \times \left(\frac{(1.42)^2 - (3.18)^2}{2 \times 9.8} \right) = 172\text{kN/m}^2$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 172 \times \frac{\pi}{4} \times (0.2)^2 = 5.4 kN \quad)$$

$$\text{取 } \alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$$

$$R_x = 1.0 \times \frac{9.8}{9.8} \times 100 \times 10^{-3} \times (3.18 - 1.42 \cos 60^\circ) - 12.43 \cos 60^\circ + 5.4$$

$$= -0.586 kN$$

$$R_y = 12.43 \sin 60^\circ + 1.0 \times \frac{9.8}{9.8} \times 100 \times 10^{-3} \times 1.42 \sin 60^\circ = 10.88 kN$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 10.89 kN$$

水流对弯管的作用力 F 与 R 大小相等，方向相反。