得 分

一．填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & 9 \\ 1 & -1 & 27 & -27 \end{vmatrix} =$ ______

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$的伴随矩阵$A^*$的迹 $trA^* =$ ______

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

4. 若$1,\ -1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 6$是 6 阶实方阵A的特征值，而且A不能相似对角化，

   则$A-6E$的秩$R(A-6E)=$ ______

5. A是2阶实方阵．若齐次线性方程组$(2A+E)X=0$和$(3E-A)X=0$均有

   非零解，则行列式$|2A^*+A^{-1}+E|=$ ______

6. A是3阶实方阵，A^T是A的转置．若行列式$|E-A|=|3E-A|=|E+A|=0$，

   则 A^T+2E的所有特征值是 ______

7. 若3阶实矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，则 $a=$ ______

8. 若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2 是3维向量空间R^3的两个向量组，β_1,β_2 线性无关，

而且 $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \\ \alpha_3 = 2\beta_1 + 3\beta_2 \end{cases}$，则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩 $R\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} =$ ______

9. $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -3 \\ 2 & 6-2\lambda & -10 \\ 3 & 10 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0$ 的 3 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 =$ ______

10. 若实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c \end{pmatrix}$ 满足条件：$a > 0,\ |A| > 0,\ \begin{vmatrix} a & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$，

则行列式 $\begin{vmatrix} a+2 & b_1 & c_1 \\ b_1 & b_2+2 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c+2 \end{vmatrix}$ ______ 8（填 >, =, < 之一）.

得 分

二（10 分） 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 9 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$（要求出具体数值）.

得 分

三（10 分） 用初等变换的方法，解方程 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

得 分

四（10 分） a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 3x_4 = a \end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

得 分

五（12 分） 已知 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

得 分

六（12 分） 给定列向量组

$$\alpha_1=(1,-1,3,0)^T,\ \alpha_2=(2,1,0,-1)^T,$$
$$\alpha_3=(1,1,9,8)^T,\ \alpha_4=(0,-3,6,1)^T,\ \alpha_5=(0,2,6,8)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

得 分

七（8 分）证明：若 $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 是正交矩阵，则 $B=\begin{pmatrix}-a_1&b_1&-c_1\\a_2&-b_2&c_2\\-a_3&b_3&-c_3\end{pmatrix}$ 也是正交矩阵.

得 分

八（8 分）. 已知，A 是可逆的 n 阶实矩阵（$n\ge 2$），A^* 是其伴随矩阵.

证明：$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$.