北京工业大学2021——2022学年第二学期

《高等代数》期末考试试卷

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注：本试卷共 四 大题，共 六 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	24	24	25	27	
得分					

得 分

一、 填空题（每空 4 分，共 24 分）

1）设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(0,0,1)$ $\eta_2=(0,1,1)$ $\eta_1=(1,1,0)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为________，向量 $\alpha=(1,0,1)$ 在第二组基下的坐标为____________________

2）若把全体复数的集合 $\mathbb{C}$ 看成复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，则它的维数是________

3）若线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1 ε_2 ε_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则它在基

$\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_3$下的矩阵为

____

4）设矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=$___ ）

5）欧氏空间$\mathbb{R}^2$中，基$\varepsilon_1=(1,0)$ $\varepsilon_2=(0,1)$的度量矩阵为____________

得 分

二、 判断题（每题3分，对的在括号里画√，错的画×）

（ ）1、线性空间V的两个子空间V_1与V_2的和是直和的充要条件是$V_1 \cap V_2=\{\theta\}$

（ ）2、数域P上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相同

（ ）3、V_1与V_2是线性空间V的两个真子空间，则$V_1 \cup V_2 \neq V$

（ ）4、有限维线性空间中的线性变换是单射是充要条件是它是满射

（ ）5、线性变换在不同基下的矩阵是相似的

（ ）6、n阶矩阵A可对角化的充要条件是它有n个线性无关的特征向量

（ ）7、正交向量组必线性无关

（ ）8、一个n阶实矩阵A满足$AA'=E$，则A是正交矩阵

得 分

三、 计算题（25分）

1、 已知$\mathbb{R}^{2\times2}$上的线性变换$\sigma(X)=MX+XN$ ，其中

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，

求σ 在基$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ $E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ $E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

下的矩阵

2、 求正交线性替换化下列实二次型为标准型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

得 分

四、 证明题（27 分）

1、设$\mathscr{A}$是n维线性空间V上的线性变换，满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$

证明：1）$\forall\alpha\in\mathscr{A}V$，$\mathscr{A}\alpha=\alpha$

2）$V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(\theta)$，即$V$是$\mathscr{A}$的值域和核的直和

3）$\mathscr{A}$ 在V中某组基下的矩阵为对角阵$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2、证明：正交的向量组必线性无关

3、设V是n维欧氏空间，W是V的线性子空间，试证：

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in W$$