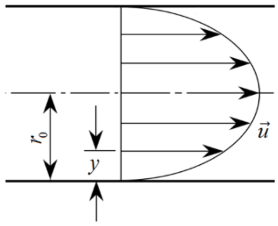
例 1：粘性流体在半径为 r_0 的直圆管内作定常流动，如图所示。设圆管过流断面上的速度分布为 $u(y)=U_0\left(\frac{y}{r_0}\right)^n$，$y$ 为圆管截面上的点到管壁的垂直距离，U_0 为在管轴上的最大速度。



试证明：

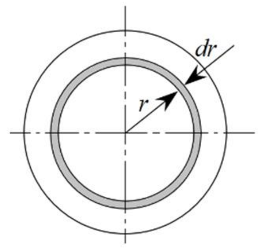
（1）流量 $Q=\dfrac{2\pi r_0^2 U_0}{(n+1)(n+2)}$

（2）管内平均速度 $V=\dfrac{2U_0}{(n+1)(n+2)}$

解：（1）根据流量计算公式，注意到 $r+y=r_0$，两端取微分，$dr=-dy$

圆环形面积微分 $ds=2\pi r dr=-2\pi\left(r_0-y\right)dy$

按抛物线分布的流量为



$$
\begin{aligned}
Q&=\int_{r_0}^{0}uds=\int_{r_0}^{0}U_0\left(\frac{y}{r_0}\right)^n 2\pi(y-r_0)dy\\
&=\frac{2\pi U_0}{r_0^n}\int_{r_0}^{0}y^n(y-r_0)dy\\
&=\frac{2\pi U_0}{r_0^n}\int_{r_0}^{0}y^{n+1}dy-r_0\int_{r_0}^{0}y^n)dy\\
&=\frac{2\pi U_0}{r_0^n}\left(\frac{1}{n+2}y^{n+2}\Big|_{r_0}^{0}-r_0\cdot\frac{1}{n+1}y^{n+1}\Big|_{r_0}^{0}\right)\\
&=\frac{2\pi U_0}{r_0^n}\left(-\frac{1}{n+2}r_0^{n+2}\Big|_{r_0}^{0}+r_0\cdot\frac{1}{n+1}r_0^{n+1}\right)\\
&=\frac{2\pi U_0}{r_0^n}\cdot\frac{r_0^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\\
&=\frac{2\pi r_0^2 U_0}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

（2）断面平均流速分别为

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{\pi r_0^2}=\frac{2\pi r_0^2 U_0}{(n+1)(n+2)}\Big/\pi r_0^2=\frac{2U_0}{(n+1)(n+2)}$$

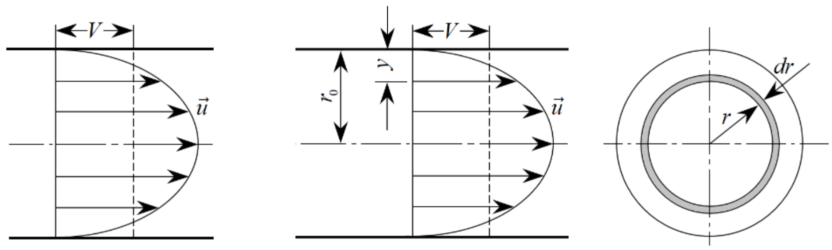
例 2： 粘性流体在半径为 r_0 的直圆管内作定常流动，如图 3.2.9 所示。设圆管截面（指垂直管轴的平面截面）上有两种速度分布，一种是抛物线分布 $u_1(r)$ ，即

$$u_1(r)=U_1\left[1-\left(r/r_0\right)^2\right]$$

另一种是 $1/7$ 指数分布 $u_2(y)$ ，即

$$u_2(y)=U_2\left(y/r_0\right)^{1/7}$$

r 为圆管截面上的径向坐标，y 为圆管截面上的点到管壁的垂直距离，式中 U_1 ，U_2 分别为两种速度分布在管轴上的最大速度。



试求两种速度分布下

（1）流量 Q 的表达式；

（2）断面上的平均速度 V 。

解：（1）根据流量计算公式，注意到圆环形面积微分 $ds=2\pi rdr$ 。速度呈抛物线分布的流量为

$$Q_1=\int_0^{r_0}u_1(r)ds=\int_0^{r_0}U_1\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]\cdot 2\pi rdr=2\pi U_1\int_0^{r_0}\left(r-\frac{r^3}{r_0^2}\right)dr=\frac{1}{2}\pi r_0^2U_1$$

对于 $\frac{1}{7}$ 指数分布的流量，注意到 $r_0{=}r+y$, $y=r_0-r$, 取微分，有 $dy=-dr$, 于是

$$Q_1=\int_{r_0}^{0}u_2(r)ds=\int_{r_0}^{0}-U_2\left(\frac{y}{r_0}\right)^{\frac{1}{7}}\cdot 2\pi(r_0-y)dy=\frac{2\pi U_2}{r_0^{\frac{1}{7}}}\int_0^{r_0}\left(r_0y^{\frac{1}{7}}-y^{\frac{8}{7}}\right)dy=\frac{49}{60}\pi r_0^2U_2$$

（2）根据平均速度计算公式，抛物线分布和 $\frac{1}{7}$ 指数分布的断面平均流速分别为

$$V_1=\frac{Q_1}{S}=\frac{\frac{1}{2}\pi r_0^2U_1}{\pi r_0^2}=\frac{1}{2}U_1$$

$$V_2=\frac{Q_2}{S}=\frac{\frac{49}{60}\pi r_0^2U_2}{\pi r_0^2}=\frac{49}{60}U_2$$