

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知函数 $z = \frac{x}{1+y^2}$ ，则 $dz|_{(1,1)} =$ _____
2. 微分方程 $(y+1)^2 dy + x^3 dx = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解为_____
3. 函数 $u = xyz - 2yz - 3$ 在点 $(1,1,1)$ 沿 $(2,2,1)$ 的方向导数等于_____
4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{a}{n})$ 是条件收敛、绝对收敛,还是发散? _____
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数为_____
6. 设 L 是 xOy 面的圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 的顺时针方向, 则 $\oint_L x^5 ds =$ _____
7. 螺旋线 $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 2\theta$ 在点 $(1,0,0)$ 的切线方程为_____
8. 曲面 $e^z + z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的一个法向量为_____
9. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), 则 $\oiint_{\Sigma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dS =$ _____
10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(99\pi) =$ _____

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域及和函数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^n}$.

12. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

13. 求由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 与曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围立体的体积.

14. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

15. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 3y + 1$ 的极值点及极值.

16. 计算 $I = \int_L (12xy + e^y)dx - (\cos y - xe^y)dy$, 其中 L 是由点 $A(-1, 1)$ 沿

曲线 $y = x^2$ 到点 $O(0, 0)$, 再沿 x 轴到点 $B(2, 0)$ 的曲线.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$ ，又

$g(x, y) = f\left[xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right]$ ，证明： $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 + y^2$.

18. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛，且 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)，试证

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.