北京工业大学 2014—2015 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 A 卷参考答案

一、 填空题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

得 分

一、填空题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 微分方程 $(x^2+1)dy+2xydx=0$ 的通解为__________________ .

2. 由方程 $x^3+y^3-yz=1$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在 $(1,1,1)$ 点的全微分 $dz=$______________.

3. 函数 $z=\ln(x^2+y)$ 在点 $(-1,1)$ 的梯度 $\mathrm{grad}\, z=$__________________.

4. 数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{k+\ln n}{n^2}$ （k 为常数)的敛散性是____________________.
（若收敛，需指出是绝对收敛还是条件收敛）

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ 的麦克劳林级数为____________________________.

6. 曲面 $2xy-e^z+z=3$ 的在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为_______________.

7. 设曲面 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{dS}=$______________.

8.设曲线 L 是平面上任意一条闭曲线，若 $\oint_L y\,\mathrm{dx}-ax\,\mathrm{dy}\equiv 0$，则常数 $a=$_____.

9.设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0;\\ 2x-1, & 0<x\le\pi;\end{cases}$ $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则 $S(5\pi)=$ ____________________________.

10. 设 $L: x-y+1=0, 0\le x\le 1$，则 $\int_L(2x+y)\,\mathrm{ds}=$_______________.

1、$x^2y+y=C$　　2、$3dx+2dy$　　3、$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$　　4、绝对收敛

5、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^n}{2^{n+1}}x^n$，$|x|<\dfrac{2}{3}$　　6、$x+2y-4=0$　　7、$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

8、-1　　9、$\pi-1$　　10、$\dfrac{4}{3}\pi$

二、 计算题（本大题共 5 小题，每题 10 分，共 50 分）

11. 求函数 $f(x,y)=2xy+x^2+2y^2-1$ 的极值.

【解】 令 $\begin{cases} f_x'=2y+2x=0 \\ f_y'=2x+4y=0 \end{cases}$， 得驻点 $(0,0)$ …………4 分

又 $f_{xx}''=2$，$f_{xy}''=2$，$f_{yy}''=4$ …………7 分

在点 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=4>0$，

且 $A=2>0$， 所以极小值 $f(0,0)=-1$ ………10 分

12. 计算曲线积分 $I=\int_L (y-2x\cos y)\,\mathrm{d}x+(x^2+e^y)\sin y\,\mathrm{d}y$，其中 L 为

沿着 $x^2+y^2=4$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的上半圆弧.

【解】 设 $P=y-2x\cos y$，$Q=(x^2+e^y)\sin y$，

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\sin y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=1+2x\sin y$，　$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$ ……3 分

补直线段 BA：$y=0$，$-2\le x\le 2.$， …………5 分

故 $I=\oint_{L+BA}-\int_{BA}=\iint\limits_D -1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-2}^{2}(0-2x\cos 0)\,\mathrm{d}x$ …………8 分

$=-2\pi+0=-2\pi$ …………10 分

13. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+\cos z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(x^2+e^z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$介于平面$z=0$与$z=2$之间部分的下侧.

【解】 设$P=y^2+\cos z$，$Q=-(x^2+e^z)$，$R=z^3$，

则 $\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2,$

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

补平面$\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\le 4)$，取上侧。 …………5 分

故 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}3z^2\mathrm{d}V-\iint\limits_{D}8\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ …………8 分

$$=\int_0^2 3z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy-32\pi=\frac{3}{5}*32\pi-32\pi=-\frac{64}{5}\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{分}$$

14. 求微分方程$y''-5y'+6y=xe^{2x}$的通解.

【解】特征方程：$r^2-5r+6=0,$

特征根为$r_1=2,\quad r_2=3,$

对应的齐次方程通解为：$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$ …………4 分

设非齐次方程特解为：$y^*=Q(x)e^{2x}$，代入原方程得

$Q''(x)-Q'(x)=x,$ 可设 $Q(x)=x(ax+b)$

解得 $a=-\frac{1}{2},\quad b=-1,$ …………8 分

所以特解为：$y^*=-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^{2x}$

故原方程通解为：$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)e^{2x}$ …………10 分

15. 求：（1）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数;

（2）常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}$的和.

【解】(1)、 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

因此令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\quad S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$,

由 $S_1(x),S_2(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$，则 $S(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

$$xS_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ \left(xS_2(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1),\quad S_2(0)=0.$$

从而 $xS_2(x)=\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-\ln(1-x)-x,\quad x\in(-1,1)$,

$$S_2(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x)-1,\quad x\in(-1,1),x\neq 0.\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

所以 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{1-x},x\in(-1,1),x\neq 0$,

$$S(x)\begin{cases}=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 0 & x=0,\end{cases}\qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

（2）、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln 2.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$10 分

三、 证明题（本大题共 2 小题，每题 5 分，共 10 分）

16. 设 $u(x,y)=f(x+2y)+\int_0^{x-2y}g(t)\,\mathrm{d}t$，其中 f 和 g 二阶可导,

试证明： $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+2y)+g(x-2y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2f'(x+2y)-2g(x-2y),$ $\cdots$2 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+2y)+g'(x-2y),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4f''(x+2y)+4g'(x-2y),\ \cdots 4\text{ 分}$$

$$\Rightarrow\ 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\text{。}\cdots 5\text{ 分}$$

17. 已知函数 $y=y(x)$ 满足等式 $y'=x+y$，且 $y(0)=1$，

试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$ 的收敛性.

解： 求解定解问题 $\begin{cases} y'-y=x \\ y(0)=1 \end{cases}$，得 $y(x)=2e^{x}-x-1$ ……2 分

$$\boldsymbol{u_n = y(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}-1 = 2\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-1\right)} \quad \text{……3 分}$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}2n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}-1\right) = 2\lim_{n\to\infty}n^2\frac{1}{2n^2} = 1}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right]$ 收敛。……5 分