"十三五"国家重点出版物出版规划项目

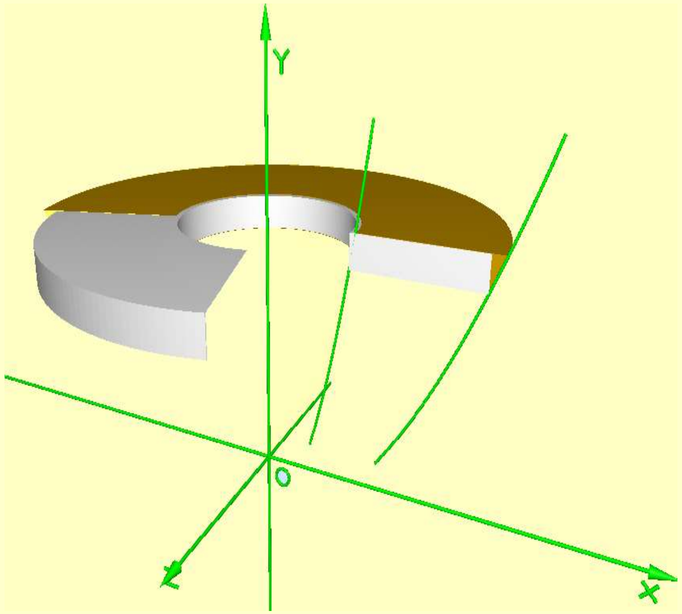
世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

高等数学教程 第3版

上册

范周田　张汉林　编著



北京工业大学理学部

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{\sin t}-\cos t)\mathrm{d}t}{x\ln(1+3x)}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{6}\quad}$.

2. 设参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ $\underline{\quad\dfrac{1+t^2}{t}\quad}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\quad\dfrac{y-x^2}{y^2-x}\quad}$.

4. 曲线 $y=(x^2-5)e^x$ 的拐点的个数为 $\underline{\quad 2\quad}$.

5. 设 $y=a$ 和 $x=b$ 分别是曲线 $y=\dfrac{\sin 3x}{x(x+1)}$ 的水平渐近线和垂直渐近线，

则 $a^2+b^2=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

6. 设 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}=$ **-1**

7. 设 $f(x)=\begin{cases}|x|+a, & x\le 0\\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$ **e^2**

8. 若 $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1$，则 $\lambda=$ **1**.

9. 设 $y=x^3$，则 $\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=$ **0.3**.

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^5+\sin^2 x)\cos x\mathrm{d}x=$ **$\dfrac{2}{3}$**

$$y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$$ 极小值： $f(\frac{3}{2}) = -\frac{11}{16}$

11. 求函数 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ 的极值.

$\sqrt{x} = t$ 原式 $= 2\int\left(\frac{1}{t+1} + e^t\right)tdt = 2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt + 2\int te^t dt$

12. 计算不定积分 $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

13. 计算 $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$

$x = \sec t$ 原式 $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$

$$f'(x)=e^x(2x+x^2) \qquad f''(x)=e^x(2+4x+x^2)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad f(x)=x^2+x^3+o(x^3)$$

14．设 $f(x)=x^2e^x$，求（1）$f'(x),f''(x)$；（2）$f(x)$ 带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式；（3）$f^{(2020)}(0)$.

$$f^{(2020)}(0)=\frac{1}{2018!}2020!=2019\cdot 2020$$

15．设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{A}{x^2+2x+5}, & x>1\end{cases}$

$$0<x\le 1,\ \int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}x\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$$

$$x\le 0,\quad \int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$$

$$x>1,\quad \int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_{0}^{e}x\mathrm{d}t+\int_{1}^{x}\frac{A}{t^2+2t+5}dt=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}(\arctan\frac{x+1}{2}-\frac{\pi}{4})$$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

$$A=\frac{\pi}{4}$$

(2) 设 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$，试确定 A 的值.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{A}{2}(\arctan\frac{x+1}{2}-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$$

$$y = 2x - 1 \qquad S = \int_0^1 \left(\frac{y+1}{2} - \sqrt{y} \right) dy = \frac{1}{12}$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{y+1}{2} \right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y} \right)^2 dy = \frac{\pi}{12}$$

16.过抛物线 $y = x^2$ 上点 $(1,1)$ 做切线，求该切线与 $y = x^2$ 及 x 轴围成的平面图形的面积；并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

17. 设 $x > 0$，证明： $\ln(1+x) < \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sqrt{x+1} - 1)^2}{(1+x) \cdot 2\sqrt{1+x}} < 0,$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)\sin\xi + f'(\xi)\cos\xi = 0$.

$$F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$$

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\arcsin x}=$ $\dfrac{1}{2}$

2. 设参数方程$\begin{cases}x=\ln\tan\dfrac{t}{2}\\ y=\sin t\end{cases}$确定了函数$y=f(x)$，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ $\sin t\cos 2t$

3. 设$y=y(x)$由方程$e^{x+y}=xy+1$确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ -1

4. 曲线$y=e^{-2x}\cos x$过$(0,1)$点的切线方程为 $2x+y-1=0$

5. 曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线条数为 2 条

6. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 的拐点为 $\underline{\quad (1,-1) \quad}$

7. $\dfrac{d}{dx}\int_{x}^{x^2} t^2 e^{-t} dt = \underline{\quad 2x^5 e^{-x^2} - x^2 e^{-x} \quad}$

8. 广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2} \sin\dfrac{1}{x} dx = \underline{\quad 1 \quad}$

9. 已知 $\lim\limits_{h\to\infty} h\left[f\left(1+\dfrac{2}{h}\right) - f(1)\right] = 1$，则 $f'(1) = \underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$

10. $\int_{-3}^{3} \dfrac{\sin^3 x + |x|}{1+x^2} dx = \underline{\quad \ln 10 \quad}$.

$$f(x)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\qquad f^{(2019)}(0)=\frac{2019!}{3}\left(\frac{1}{2^{2019}}+1\right)$$

11. 设 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$，写出函数 $f(x)$ 的带皮亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式，并求 $f^{(2019)}(0)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x^3+o(x^3)$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{2}{3}\cdot n!(x-2)^{-n-1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{3}\cdot n!(x+1)^{-n-1}$$

12. 计算不定积分 $\int\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}+xe^x\right)\mathrm{d}x$.

$$=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+xe^x-e^x+C$$

13. 计算广义积分 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. $\quad=5-6\ln 2$

$$\sqrt[6]{x}=t\qquad =6\int_0^1\frac{t^5}{t^2+t^3}\mathrm{d}t$$

14. 求函数 $y=x^3+3x^2-9x+1$ 的极值和单调区间.

$$y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$$x \le 0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$$

15. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ e^{px}, & x>0\end{cases}$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{px}-1}{p}=-\frac{1}{p},\ p=-1$$

（1）求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

（2）求 p，使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$。

$$x>0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\frac{1}{p}\int_{0}^{x} e^{pt}dpt=\frac{e^{px}-1}{p}$$

16. 设两曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 (x_0,y_0) 处有公切线，求这两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积；并求该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

$$a=\frac{1}{e},\ x_0=e^2,\ y_0=1$$

$$S=\int_0^1\left(e^{2y}-e^2y^2\right)dy=\frac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\frac{e^2}{3}y^3\Big|_0^1=\frac{e^2}{6}-\frac{1}{2}$$

$$V=\pi\int_0^{e^2}\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)^2dx-\pi\int_1^{e^2}\left(\frac{\ln x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$$

17. 设$x\le 0$，证明：$e^x\le 1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

$$F(x)=e^x-(1+x+\frac{x^2}{2})$$

18. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$上可导，且$f(1)=0$，$\lambda>0$是常数.

证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$\lambda f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

$$F(x)=x^{\lambda}f(x)$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x^2}=$ ______**2**______

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数

$a=$ ______**3**______

3. 设函数 $y=\sin^2 x+3$，则 $\mathrm{d}y=$ ______$\sin 2x\,\mathrm{d}x$______

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $xy+\ln y=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=1\\ y=1}}=$ ______$-\dfrac{1}{2}$______

5. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t)\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$ ___**1**___

$(-1, \ln 2 + 3)$

6. 曲线 $y = \ln(1 + x^2) - 3x$ 的拐点为 $\underline{\quad (1, \ln 2 - 3) \quad}$

7. 设函数 $y = \int_0^x \cos(2t+1)\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \underline{\quad \cos(2x+1) \quad}$

8. 曲线 $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - 2$ 的水平渐近线为 $\underline{\quad y = -2 \quad}$

9. 广义积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3} = \underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$

10. $\int_{-1}^{1} \left(\dfrac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \underline{\quad \dfrac{\pi}{2} \quad}$

11. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，求 $y',y'',y^{(2018)}(0)$.

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1} \qquad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

12. 求函数 $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的极值。

$f'(x)=2\cos x(1-2\sin x)$ 令 $f'(x)=0$ 则 $x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}$

$f''(\frac{\pi}{6})=-3<0;\ f''(\frac{\pi}{2})=2>0;$ 极大值为$f(\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$ 极小值为$f(\frac{\pi}{2})=1$

13. 计算不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$。

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$$

14. 计算定积分 $\int_0^{\ln 5}\dfrac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x$.

$$\sqrt{e^x-1}=t \qquad \int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{t(t^2+1)}{t^2+4}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t$$

$$=(2t-4\arctan\frac{t}{2})\Big|_0^2=4-\pi$$

$x \ge 0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2t\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{1}{A+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{A}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{A}}) - 1$

15．设 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2} \\ \sin 2x, & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ \frac{1}{A+x^2}, & x\ge 0 \end{cases}$，其中 $A>0$，

$x<-\frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0$

$-\frac{\pi}{2}\le x<0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin 2t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 求常数 A，使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$．

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2}(\cos 2x+1), & -\frac{\pi}{2}\le x<0 \\ \frac{1}{\sqrt{A}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{A}})-1, & x\ge 0 \end{cases}$$

$A=\frac{\pi^2}{16}$

16．设抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 过点 $(1,0)$ 的切线与该抛物线及 x 轴所围成的平面图形为 D。 切点：$(3,1)$；切线：$y=\frac{1}{2}(x-1)$；

（1）求 D 的面积．

（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

$A=\int_{0}^{1}[y^2+2-(2y+1)]\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$

$V=\int_{1}^{3}\frac{1}{4}\pi(x-1)^2\mathrm{d}x - \int_{2}^{3}\pi(\sqrt{x-2})^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{6}$

令$F(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x)$

当$0<x<1$时，$F'(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$;

17. 设$0<x<1$，证明：$e^{2x}<\dfrac{1+x}{1-x}$.

$F''(x)=-4xe^{2x}<0$;

18. 设函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$。

又在(a,b)内$g(x)$恒不为0，证明至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)g(\xi)=2g'(\xi)f(\xi)。$$

令$F(x)=\dfrac{f(x)}{g^2(x)}$

$F(a)=F(b)=0,\quad F'(x)=\dfrac{f'(x)g^2(x)-2g(x)g'(x)f(x)}{g^4(x)},$

即$f'(\xi)g(\xi)=2g'(\xi)f(\xi)$。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x - x}-1}{x^3}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{3}\qquad\qquad}$

2. 设参数方程 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ $\underline{\;\dfrac{1}{2}\quad}$

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-xy+y^2=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ $\underline{\quad -1\qquad}$

4. 设函数 $y=\ln(1-x^2)$，则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{-\dfrac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x\qquad\qquad}$

5. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的水平渐近线为 $\underline{\quad y=1\qquad\qquad}$

6. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的拐点为 $\underline{\quad\textbf{(2,5)}\quad}$

7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^3} \sin t\,\mathrm{d}x = \underline{\quad 3x^2 \sin x^3 \quad}$

8. 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = \underline{\quad \arctan e^x + C \quad}$

10. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{\arcsin^3 x}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \underline{\quad \frac{\pi}{2} \quad}$

$$f(x)=\frac{3}{(x+1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\qquad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

11. 设 $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}$，求 $f^{(n)}(0)$，并写出函数 $f(x)$ 的带皮亚诺型余项的 2017 阶麦克劳林公式.

$$f^{(n)}(0)=-n!\left(\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right)\qquad f(x)=-\sum_{k=0}^{2017}\left(\frac{1}{2^{k+1}}+(-1)^k\right)x^k+o(x^{2017})$$

12. 计算不定积分 $\displaystyle\int\left(\frac{1+x}{1+x^2}+x\cos x\right)\mathrm{d}x$.

$$=\int\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int x\cos x\,\mathrm{d}x=\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x\sin x+\cos x+C$$

13. 计算定积分 $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$.

$$\sqrt{e^x-1}=t\qquad \int_{\ln 2}^{\ln 4}\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

$$Y-\frac{2\sqrt{2}}{x^2}=\frac{-4\sqrt{2}}{x^3}(X-x)\qquad S=L^2=a^2+b^2=\frac{9}{4}x^2+\frac{72}{x^4}\quad (x>0)$$

14．设已知曲线 $y=\dfrac{2\sqrt{2}}{x^2}$，试在曲线的第一象限部分上求一点 $M(x_0,y_0)$，使过点 M 所作切线夹于两坐标轴间线段最短．

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{9}{2}x-\frac{288}{x^5}\qquad \left(2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

15．设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ c, & -1\le x<0\\ e^{px}, & x\ge 0\end{cases}$

$$x<-1,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$$

$$-1\le x<0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}c\mathrm{d}t=c(1+x)$$

（1）求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

$$x\ge 0,\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}c\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}e^{pt}\mathrm{d}t=c+\frac{1}{p}(e^{px}-1)$$

（2）若 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$，求常数 c；

（3）若 $c=0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$，求常数 p．

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<-1\\ c(1+x), & -1\le x<0\\ c+\dfrac{1}{p}(e^{px}-1), & x\ge 0\end{cases}$$

$$c=\frac{1}{2}\qquad p=-1$$

$$A=\int_{-2}^{3}(x^2+2)\mathrm{d}x=21\frac{2}{3} \qquad V=\pi\int_{-2}^{3}(x^2+2)^2\mathrm{d}x=\frac{365}{3}\pi$$

16. 求由曲线 $y=x^2+2$, x 轴及直线 $x=-2$ 与 $x=3$ 所围成的图形的面积；并求该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

17. 设 $x\in(0,1)$，证明：$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$.

$$F(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$ 且有 c $(a<c<b)$ 使 $f(c)>0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\quad \xi_1\in(a,c) \qquad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c},\quad \xi_2\in(c,b)$$

$$f'(\xi_1)>0,\quad f'(\xi_2)<0 \qquad f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^4-2n+1}{8n^2+n^4}=$ （ $\boxed{3}$ ）

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}5^x, & x<0,\\ 2, & 0\le x<1,\\ -x+3, & x\ge 1.\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ （ $\boxed{2}$ ）

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{kx^2}=e^2$，则常数 $k=$ （ $\boxed{1}$ ）

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=\boxed{\dfrac{y-x^2}{y^2-x}}$

5. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{2t}dt$，则 $F'(x)=$ （ $\boxed{2xe^{2x^2}}$

6. 设函数 $y = x\ln(2+x^2)$，则 $dy|_{x=0} =$ （$\boxed{\ln 2dx}$）

7. 曲线 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ 在对应于 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 的点处的切线方程为（$\boxed{2\sqrt{2}x + y - 2 = 0}$

8. 函数 $\boldsymbol{y = (x^2 - 3)e^x}$ 的驻点是（$\boxed{x_1 = -3，\ x_2 = 1}$）

9. $\int x\cos x dx =$ （$\boxed{x\sin x + \cos x + C}$

10. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin^3 x)dx =$ （ $\boxed{\pi}$ ）

二．计算题

1. 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = \cos t \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 及 $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\sin t}{2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)'}{2t} = \frac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t\cos t}{4t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sin t}{12t^2} = \frac{1}{12}$$

2. 设 $y = e^{2x} + (1+x)\ln(1+x)$，求 y'， y''， $y^{(2015)}(0)$

$y' = 2e^{2x} + \ln(1+x) + 1$， $y'' = 2^2 \cdot e^{2x} + (1+x)^{-1}$， $y''' = 2^3 \cdot e^{2x} - (1+x)^{-2}$

$y^{(4)} = 2^4 \cdot e^{2x} + 2(1+x)^{-3}$　　$y^{(n)} = 2^n \cdot e^{2x} + (-1)^n (n-2)!(1+x)^{-n+1}, n \geq 3$，

$y^{(2015)}(0) = 2^{2015} - (2013)!$

3．求函数 $y = x + \sqrt{1-x}$ 在闭区间 $[-5, 1]$ 上的最值.

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x} - 1}{2\sqrt{1-x}}$$

令 $y' = 0$，得驻点 $x = \frac{3}{4}$， 且函数在 $x = 1$ 处不可导

$y(1) = 1$， $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$， $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$

最大值为 $y(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$，最小值为 $y(-5) = -5 + \sqrt{6}$

4．计算定积分 $\int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx$ ．

令 $\sqrt[3]{x} = t$， $x = t^3, dx = 3t^2 dt$， 当 $x = 1, t = 1, x = 8, t = 2$

$$\int_1^8 \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx = \int_1^2 \frac{3t^2}{t^3 + t} dt = 3\int_1^2 \frac{t}{t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{t^2 + 1} d(t^2 + 1) = \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}\ln\frac{5}{2}$$

5. 设曲线 $y=\dfrac{2}{x}$ 与两条直线 $y=x+1$ 及 $x=3$ 所围图形为 D. 求

（1）求 D 的面积 S；（2）求 D 绕 x 轴旋转一周所得的体积 V .

（1）$S=\int_1^3 (x+1-\dfrac{2}{x})dx \quad =(\dfrac{1}{2}x^2+x-2\ln x)\Big|_1^3$

$$=\frac{9}{2}+3-2\ln 3-\frac{1}{2}-1$$

$$=6-2\ln 3$$

(2) $V=\pi\int_1^3 (x+1)^2 dx-\pi\int_1^3 (\dfrac{2}{x})^2 dx$

$$=\frac{\pi}{3}(x+1)^3\Big|_1^3+\frac{4\pi}{x}\Big|_1^3 \quad =16\pi$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0,\\ \dfrac{A}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ 求

（1）求 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$，（2）求 A 使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1$.

（1）当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$,

当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\,dt=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} -\dfrac{1}{2}\text{sint}\,dt=\dfrac{1}{2}\cos x$

当 $x>0$，$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$$=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{1}{2}\sin t\,dt+\int_{0}^{x}\frac{A}{1+x^2}=\frac{1}{2}+A\arctan x.$$

（2）由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\dfrac{1}{2}+A\cdot\dfrac{\pi}{2}=1$　　得 $A=\dfrac{1}{\pi}$

三．证明题

1．证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$。

设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$，则

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0, x>0$$

故，$x>0$ 时，$f(x)$ 单调增加，$f(x)>f(0)=0$。

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上可微，证明：存在 $\xi\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，

使得 $f'(\xi)+2f(\xi)\cot 2\xi=0$．

【证】 设 $F(x)=f(x)\sin 2x \quad x\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，

对 $F(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上应用罗尔定理。

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{kx^3}=1$，则常数 $k=$ $-\dfrac{1}{6}$.

2. 设 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$，则 $f'(0)=$ -1.

3. 设参数方程 $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t \\ y=e^{t}\cos t \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ e^{2t}

4. 设函数 $y=x\ln(2+x^2)$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ $\ln 2\mathrm{d}x$.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{-y}+xy=e^{-1}$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为 e.

6. 曲线 $y=\dfrac{(x+1)\sin x}{x(x-1)}$ 的铅直渐近线为 $x=1$.

7. 函数 $f(x)=x+\frac{2}{x}+5\pi$ 的单调递减区间为 $[-\sqrt{2},0),(0,\sqrt{2}]$

8. 曲线 $y=2x\ln x-x^2$ 的拐点为 $(1,-1)$.

9. $\int\sqrt{1-e^x}\mathrm{d}x=2\sqrt{1-e^x}+2\ln(1-\sqrt{1-e^x})-x+C$.

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\ln(1+2t)\mathrm{d}t=2x\ln(1+2x^2)$.

11. $\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

12. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

13. 设 $y=(2x-1)e^x$，求 y'，y'' 及 $y^{(2014)}(0)$.

$$y^{(n)}=(2x+2n-1)e^x$$

$$f'(x)=\frac{1+x-x^2}{2(1+x)}$$

14. 求函数 $f(x)=x-\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2$ 的极值。

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1-3\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

极大值：$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+3\sqrt{5}}{8}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

15. 设 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}x, & 0\le x<1 \\ Ae^{-2x}, & x\ge 1 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<1 \\ -\frac{A}{2}e^{-2x}+\frac{A}{2e^2}+\frac{1}{4}, & x\ge 1 \end{cases}$$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 求常数 A，使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$.

16. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2$ 围成的图形的面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

$A=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2}$ $\quad V=\pi\int_{-2}^{1}(2-x)^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-2}^{1}x^4\mathrm{d}x=\dfrac{72}{5}\pi$

17. 证明：当 $0\le x\le 1$ 时， $1+\dfrac{1}{2}x^2\ge e^{-x}+\sin x$.

$$F(x)=1+\frac{1}{2}x^2-e^{-x}-\sin x$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ ，使得

$$af(b)-bf(a)=ab\ln\frac{b}{a}\left[\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi}\right]$$

$$F(x)=\frac{f(x)}{x}-k\ln x$$

1. $\lim_{x\to 0}(1+\frac{3x}{1-x})^{\frac{1}{x}}=$ $\underline{\qquad e^3 \qquad}$.

2. 设 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)$，则 $f'(0)=$ $\underline{\qquad -1 \qquad}$.

3. 设参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=te^t \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\frac{dy}{dx}=$ $\underline{\qquad \frac{1}{2}e^t \qquad}$.

4. 已知当 $x\to 0$ 时函数 $\tan x-\sin x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$ $\underline{\qquad 3 \qquad}$.

5. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{x+y}-xy=e$ 确定，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为.

$e^{-1}-1$

6. 设函数 $y=2^{\sin x}$，则 $dy=$ $\underline{\qquad\qquad}$.

$\ln 2\cdot\cos x\cdot 2^{\sin x}dx$

7. 曲线 $y=e^{\frac{1}{|x|}}+\frac{\sin x}{x}$ 的水平渐近线是 $\underline{\quad y=1 \quad}$.

8. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$，则 $F'(x)=\underline{\quad 2x\sqrt{1+x^2} \quad}$.

9. 函数 $f(x)=x-\cos x$ 的单调增区间为 $\underline{\quad (-\infty,+\infty) \quad}$.

10. $\int\frac{x}{1+x^2}dx=\underline{\quad \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C \quad}$.

11. $\int_{-2}^{2}(2+x^{2013})\sqrt{4-x^2}\,dx=\underline{\quad 4\pi \quad}$.

12. 广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=\underline{\quad 1 \quad}$.

13. 设 $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}$，求 y',y'', 及 $y^{(2013)}\big|_{x=0}$ 。

$$y=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-1}=-(1-x)^{-1}+2(1-2x)^{-1}$$

$$y^{(n)}=n![\frac{-1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}}] \qquad y^{(2013)}\Big|_{x=0}=(2^{2014}-1)2013!$$

14. 设 $f(x)$ 是首项系数为 1 的三次多项式，在 $x=1$ 取得极大值， $(2,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，试确定 $f(x)$ 。

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c,$$

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-2.$$

15. 设 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0, \\ \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}, & x>0 \end{cases}$

(1)求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式， (2)求 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ 。

$x<-\dfrac{\pi}{2}$， $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$，

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$， $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)\,dt=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{1}{2}\cos t\,dt \quad =\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}$

$x>\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad =\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=1.$$

16. 计算定积分$\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx$。

令$\sqrt{x+1}=t, x=t^2-1, dx=2tdt,$

原式$=\int_1^2 e^t 2tdt = 2[te^t\Big|_1^2-\int_1^2 e^t dt]=2e^2.$

17. 求不定积分$\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$。

原式$=-\frac{1}{2}\int \frac{2-2x-2}{\sqrt{2x-x^2}}dx = -\sqrt{2x-x^2}+\int \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$

$=-\sqrt{2x-x^2}-\arcsin(1-x)+C$

18. 求曲线 $y=\sin x, y=x$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的封闭图形的面积及该 图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

$$x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-\sin x)dx=\frac{\pi^2}{8}-1.$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(x^2-\sin^2 x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}.$$

19.证明：对任意实数 x，$(1-x)e^x\le 1$。

$$f(x)=(1-x)e^x-1,\quad f'(x)=-xe^x,$$

20. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]\ (a>0)$ 上连续， $f(x)=\int_a^x g(t)dt$ ，

证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}g(\xi)$ 。

$$f(\xi)+\frac{\xi-b}{a}g(\xi)=0 \qquad f'(x)=g(x),$$

$$af(x)+(x-b)f'(x)=0 \qquad F(x)=(x-b)^a f(x)$$

例 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{5h}=\underline{\quad f'(x_0)\quad}.$$

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ 【A 】

（A） $2f'(x_0)$ （B） $f'(x_0-h)$ （C） $f'(x_0)$ （D） $2f'(x_0-h)$

例 已知 $f'(3)=2$,

求 $$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\underline{\quad -1\quad}.$$

例 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+4}{x-2}$ 有极限 A，则 $a=\underline{-1}$，$A=\underline{-4}$.

例 若 $f(x)=\begin{cases} e^{-ax}+a, & x\le 0 \\ x^2+x+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，则

$a=\underline{-1}$，$b=\underline{0}$.

设 $f(x)=\begin{cases} a, & x<-1 \\ -x, & x\ge -1 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ b, & x\ge 1 \end{cases}$，

若 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求 a,b.

$$F(x)=\begin{cases} a+x, & x<-1, \\ 0, & -1\le x<1, \\ b-x, & x\ge 1. \end{cases}$$

$a=1, b=1.$

例 设 $t>-1$ 时，有 $\begin{cases} x=2t \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\frac{1}{2(1+t)}},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{-\frac{1}{4(1+t)^2}}.$$

(8) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{1+t} \\ y=\dfrac{t}{1+t} \end{cases}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\quad -1 \quad}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

例 设 $y=y(x)$ 是由 $x^2-xy+e^y=1$ 确定，

$$y'(0)=\underline{\ 0\ },\ y''(0)=\underline{\ -2\ }.$$

(10) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1+xe^{y}$ 确定， $y'(0)=$ __e__， $y''(0)=$ __$2e^{2}$__.

例 设 $y=y(x)$ 是由 $e^{y}-xy=e$ 确定的隐函数，则 $y'(0)=$ __$\frac{1}{e}$__，$y''(0)=$ __$\frac{1}{e^{2}}$__.

(9) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^{2}}}$， $y'(0)=$ __$-\frac{1}{2}$__， $y''(0)=$ __$-\frac{3}{2}$__.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=te^{t}, \\ y=2t-t^{2}, \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为 __$y=2x$__ 且 $\left.\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{t=0}=$ __-6__

设 $f(x)=a^x-ax$，$(a>1)$.

1) 求 $f(x)$ 的驻点 $x(a)$；2）求 $x(a)$ 的极值。

解 $f'(x)=a^x\ln a-a=0.$ $a^x\ln a=a,$

$x\ln a+\ln\ln a=\ln a$ $\quad x(a)=1-\dfrac{\ln\ln a}{\ln a}.$

$$x'(a)=-\frac{1-\ln\ln a}{a\ln^2 a}=0 \quad\Rightarrow\quad \ln a=e$$

$x(a)$的驻点是 $a=e^e.$

$a<e^e\Rightarrow x'(a)<0 \quad a>e^e\Rightarrow x'(a)>0$

$x(a)$在点 $a=e^e$ 取极小值 $\quad x(e^e)=1-\dfrac{1}{e}$

例　求 $\int_{-1}^{1}(x\cos\frac{x}{3}+x^2+1)dx=$ $\underline{\quad \frac{8}{3} \quad}$.

例　$f(x)=\int_0^x x^2\cos(t-x)dt$, 则 $\frac{df(x)}{dx}=$

$\underline{-2x\int_0^{-x}\cos u\,du+x^2\cos x}$.

(6) 设 $f(x)$ 连续，$\int_0^x f(x)dx=x^2(1+x)$，那么 $f(2)=\underline{\quad 16 \quad}$

(5) $\int d\int df(x)=$ 【 C 】

(A) $f(x)$　　(B) $f'(x)$　　(C) $f(x)+C$　　(D) $f'(x)+C$

例　求极限 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}=$ $\underline{\quad\dfrac{2}{3}\quad}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}\sin t^2\,dt}{x^3}=$ $\underline{\quad\dfrac{8}{3}\quad}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\left(e^{t^2}-1\right)dt}{x^6}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{3}\quad}$

例　广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是指

$\underline{\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx,\ \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx\text{ 都存在}}$.

(4) 下列结论中正确的是 [*B*]

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x}$ 都收敛　　(B) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x}$ 都发散

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 发散，$\int_0^1\frac{dx}{x}$ 收敛　　(D) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x}$ 发散

(4) 已知广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{ax^2}dx$ 收敛，则必有 【 D 】

（A） $a \ge 0$　（B） $a \le 0$　（C） $a > 0$　（D） $a < 0$

例 $$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \frac{1}{2}$$

$$= \int_e^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^3}d\ln x = -\frac{1}{2}(\ln x)^{-2}\Big|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

例 求不定积分 $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

解

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int \ln(x+1)d\sqrt{x+1}$$

$$= 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - 2\int \sqrt{x+1}d\ln(x+1)$$

$$= 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - 2\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x+1}\ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C.$$

例 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解

$$\sqrt{1+e^x}=t \quad dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx=\int \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int \frac{1}{t^2-1}dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C.$$

例 求定积分 $\int_{-1}^{1}(x+|x|)e^{-|x|}dx$

解 原式 $=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}dx$

$$=2\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=-2\int_{0}^{1}xde^{-x}$$

$$=-2xe^{-x}\Big|_{0}^{1}+2\int_{0}^{1}e^{-x}dx$$

$$=-2e^{-1}-2e^{-x}\Big|_{0}^{1}=2-4e^{-1}$$

例 已知函数$f(x)=xe^x+2b$，其中b是常数，

1) 求 $\int_0^1 f(x)dx$

2) 若 $b=\int_0^1 f(x)dx$，求b及$f(x)$的极值点和极值.

解 1) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (xe^x+2b)dx=1+2b$

2) $b=1+2b,\ b=-1.$

$f'(x)=(x+1)e^x$，可能的极值点 $x=-1$

$f''(x)=(x+2)e^x$，$f''(-1)>0,$

$\therefore\ x=-1$ 是极小值点

极小值为 $f(-1)=-e^{-1}-2.$

例　证明不等式 $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}, \quad x > 1.$

$$\because \quad \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} = \ln x + \frac{4}{x+1} - 2,$$

$$f(x) = \ln x + \frac{4}{x+1} - 2, \quad f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0, (x>1)$$

例 设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f(a)=f(b)$,

证明在(a,b)内至少存在一点 ξ, 使得

$$f''(\xi) = \frac{2010 f'(\xi)}{b-\xi}. \quad \Rightarrow \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} + \frac{2010}{\xi - b} = 0.$$

$$F(x) = f'(x)(x-b)^{2010} \quad \because F(b) = F(\eta) = 0$$

证明不等式 $2x\arctan x \ge \ln(1+x^2)$.

$$f(x) = 2x\arctan x - \ln(x+1)^2$$

$$f'(x) = 2\arctan x, \qquad f''(x) > 0.$$

$$\therefore\ x = 0 \text{ 是最小值点}, \qquad f(0) = 0.$$

设 $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$, $n = 1,2,3,\cdots$. 求证：$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

$$I_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x)^{n+1}\mathrm{d}\frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}(n+1)(\ln x)^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

(14) 设 $0<a<2$，又设由曲线 $y=x^2\ (0\le x\le a)$ 与直线 $y=2x$ 及直线 $x=a$ 所围成的平面图形为 D.

1）求 a 的适当值，使平面图形 D 的面积等于 $\frac{2}{3}a^2$；

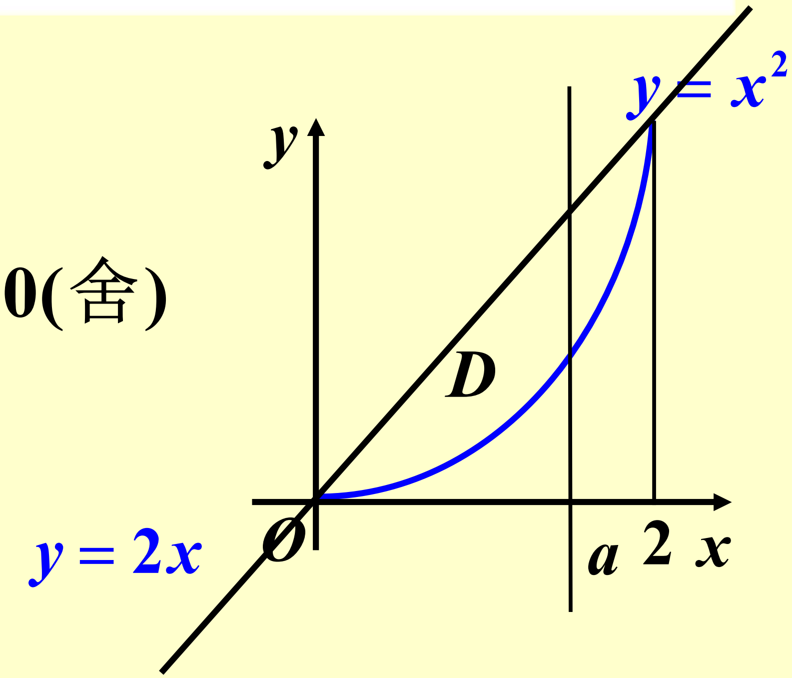
2）对于上述 a 的值，求 D 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积.

$$A=\int_0^a(2x-x^2)\mathrm{d}x=a^2-\frac{a^3}{3}$$

$$\frac{2a^2}{3}=a^2-\frac{a^3}{3}\quad\Rightarrow a=1,\quad a=0(\text{舍})$$

$$V=\int_0^1\pi(2x)^2\mathrm{d}x-\int_0^1\pi(x^2)^2\mathrm{d}x$$

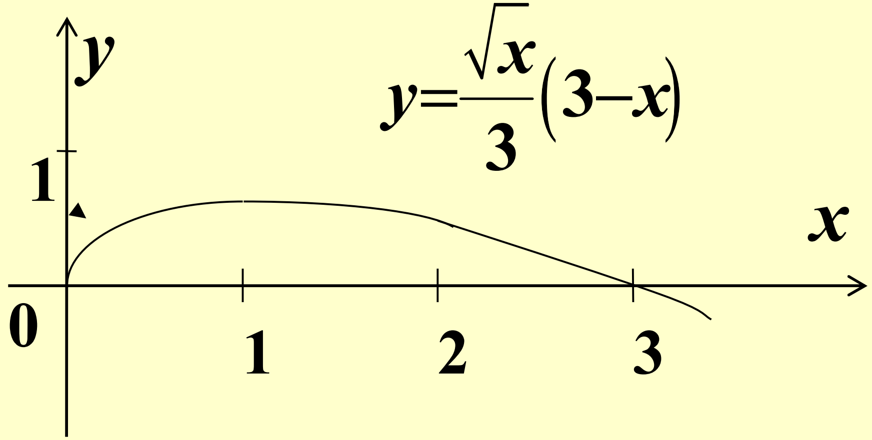
$$=\frac{17}{15}\pi.$$



例 设有曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$，如下图所示：

1) 求曲线上 $(1,\dfrac{2}{3})$ 点处的切线；

2) 求由曲线与 x 轴所围成的平面图形的面积；



3) 求曲线上相应于 $1\le x\le 3$ 的一段弧长.

解 1) 切线方程 $y=\dfrac{2}{3}$

2) 面积 $S=\int_0^3 (x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}})dx=\dfrac{4}{5}\sqrt{3}$

3) 弧长 $s=\int_1^3 \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

$$=\int_1^3 \sqrt{1+[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}]^2}\,dx=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}$$

（17）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$，

试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x=\eta f(\eta)2\left(\frac{1}{2}-0\right)=\eta f(\eta),\quad \eta\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

$$=f(1)=1\cdot f(1)$$

$$F(x)=xf(x) \qquad F(1)=F(\eta)$$

例 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}+|x-1|,$

求 $f(x)$的间断点并判断类型.

解 间断点为 $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1+1=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1+1=0$

$\therefore$ $x=0$ 为第一类跳跃间断点.

例 求 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}+\sin(x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}$

解 可能的间断点为 $x=0,\ \ x=1.$

$x=0$为第一类跳跃间断点;

$x=1$为第一类可去间断点.

例 3. $x\to1$时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限($D$).

A. 等于2 　　 B. 等于0

C. ∞ 　　 D. 不存在但不为∞

分析： $\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2,\quad(x\to1)$

$$x\to1^+,\quad e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty,\ x\to1^-,\quad e^{\frac{1}{x-1}}\to0.$$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ 的间断点为 　　 [A]

(A) 第一类跳跃间断点 　　 (B) 第一类可去间断点

(C) 第二类无穷间断点 　　 (D) 第二类震荡间断点