高等代数 2 期末复习题

一、单选题（共 5 题，3*5=15 分）

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{A}$ 的特征值为（　　）

A) 0;　　　　B) 1;　　　　C) 0 或 1;　　　　D) 0 和 1.

2. 设 A 是二阶方阵，则 A 的特征多项式是（ ）

A) $\lambda^2+(\mathrm{tr}A)\lambda+|A|$;　　　　B) $\lambda^2+(\mathrm{tr}A)\lambda-|A|$;

C) $\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda+|A|$;　　　　D) $\lambda^2-(\mathrm{tr}A)\lambda-|A|$.

3. 若 A,B 是 n 阶正交矩阵，下列说法错误的是（ ）

A) $|A|=\pm1$;　　　　B) $A^{-1}=A^T$;

C) AB 也是正交矩阵;　　　　D) A+B 也是正交矩阵.

4. 关于实对称矩阵，下列说法错误的是:

A）实对称矩阵的特征值都是实数;

B）实对称矩阵一定可以对角化;

C）实对称矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交;

D）对称变换在任意一组基下的矩阵都是实对称矩阵.

5、设 φ 是 n 维欧氏空间 V 上的正交变换，以下说法错误的有（　）个.

① 若 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一组标准正交基，则 $\varphi(\xi_1),\cdots,\varphi(\xi_n)$ 仍是标准正交基

② 存在一组标准正交基，使得 φ 在这组基下的表示矩阵是正交阵

③ 若 U 是 φ 的不变子空间，则 $U^\perp$ 也是 φ 的不变子空间

A　φ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵

A) 0　　B) 1　　C) 2　　D) 3

二、填空题（每空 3 分，3*7=21 分）

1、设矩阵 A 的行列式因子为 1，$\lambda-1$，$(\lambda-1)^2(\lambda+1)$，则 A 的不变因子为

________________________；

2. 设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(1,1,1)$，$\eta_2=(0,1,1)$，$\eta_3=(0,0,1)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为

____________，向量 $\alpha=(1,2,3)$ 在第二组基下的坐标为 _________________；

3. 若线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵为 ______________；

4. 设 A 为数域 P 上秩为 r 的 n 阶矩阵，定义 n 维列向量空间 P^n 的线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$：$\boldsymbol{\sigma}(\xi)=A\xi,\ \ \xi\in P^n$，则 $\dim(\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0}))=$ _____________.

5．若矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ 相似，则 $x=$ ________________；

6．在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中取一组基 $\alpha_1=(1,0,0),\ \alpha_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(1,1,1)$，则 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 的度量矩阵为____________.

三、计算题（共 4 题，共 36 分）

1．（8 分）设 P 是一个数域，记 V_1 是由向量

$$\alpha_1=(1,2,-1,-2),\ \alpha_2=(3,1,1,1),\ \alpha_3=(-1,0,1,-1)$$

生成的 P^4 的子空间，记 V_2 是由向量

$$\beta_1=(2,5,-6,-5),\ \beta_2=(-1,2,-7,3)$$

生成的 P^4 的子空间，求 $V_1\cap V_2$ 的基与维数.

2、（8 分）已知 $P^{2\times2}$ 的线性变换 $\sigma(X)=MXM,\ \forall X\in P^{2\times2},\ M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 σ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.

3、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 为复系数矩阵.

(1)求 A 的初等因子；

(2)求 A 的若尔当标准形。

4.（10 分）已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

的矩阵的特征值之和是 3.

(1)求参数 a，并写出该实二次型的矩阵；

(2)用正交线性替换将上述二次型化为标准型。

四、证明题（共 3 小题，28 分）

1. （9 分）设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两线性子空间，证明：

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

2. （9 分）设 V 是一 n 维欧氏空间，$\alpha\neq 0$ 是 V 上一固定向量. 令

$$W=\left\{x\,\middle|\,(x,\alpha)=0,x\in V\right\}.$$

证明：1） W 是 V 的一个子空间；

2） W 的维数等于 n-1.

3. （10 分）设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换，且满足 $\boldsymbol{\sigma}^2=\boldsymbol{\sigma}$.

证明：

（1） $\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})=\left\{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha})\middle|\boldsymbol{\alpha}\in V\right\}$；

（2） $V=\boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{0})\oplus\boldsymbol{\sigma}(V)$；