

一、填空

1、 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right)^x = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 1} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5、若  $F'(x) = f(x)$ ，则  $\int \frac{f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、若  $f(x)$  的一个原函数是  $-\sin x$ ，则  $\int \frac{1}{1+f(x)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

7、若  $\int \frac{\sin(\ln x) \cdot f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \sin^2(\ln x) + C$ ，则  $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

8、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

9、设  $x^2 y + e^{2y} = \sin y$ ，则  $y' = \underline{\hspace{2cm}}.$

10、 $\int \frac{x}{(1-x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$  (or  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + \sin \frac{1}{x}}{\ln x + \cos \frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$ )

二、计算题

1、计算积分  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4+x^2}} dx.$

2、计算积分  $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx.$

3、计算积分  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + 1} dx.$

4、计算积分  $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx.$

5、设  $f(x) = \begin{cases} 1 + \ln(1-4x), & x \leq 0 \\ a + be^x, & x > 0 \end{cases}$ ，试确定  $a, b$  的值，试确定  $f(x)$  在  $x=0$  处可导.

6、计算积分  $\int \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ .

7、计算积分  $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} dx$ .

8、设  $\begin{cases} x = a(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t) \\ y = a \sin t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

三、证明题

1、设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $a, b > 0$ , 且在  $(a, b)$  内可导, 试证: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ ,

使  $\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$

2、设  $f''(x_0)$  存在, 试用泰勒公式证明  $\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0)$ .