一、 单项选择题:（在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确选项的字母写在括号内. 本大题共 30 小题，每小题 3 分，共 90 分. ）

1．设 $z = f(x,y)$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} =$ （ ）

A．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$ B. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$

2. 微分方程 $(x^2-y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$ 的通解为 （ ）

A. $xy+\dfrac{1}{3}x^3=C$ B. $xy-\dfrac{1}{3}x^3=C$ C. $x^2y-\dfrac{1}{3}x^3=C$ D. $x^2y+\dfrac{1}{3}x^3=C$

3. 向量场 $\mathbf{A}=(x^2+yz)\mathbf{i}+(y^2+xz)\mathbf{j}+(z^2+xy)\mathbf{k}$ 的散度为 （ ）

A．$2(x^2+y^2+z^2)$ B. $x^2+y^2+z^2$ C. $2(x+y+z)$ D. $2(xz+yz+xy)$

4．函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微的充分条件是 （ ）

A．函数 $f(x,y)$ 在该点两个偏导数存在 B. 函数 $f(x,y)$ 在该点连续

C. 函数 $f(x,y)$ 在该点两个偏导数存在且连续 D. 函数 $f(x,y)$ 在该点极限存在

5．函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy-4x+2y-4z$ 在点 $(0,0,0)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u(0,0,0)=$

（ ）

A．$(4,2,-4)$ B. $(-4,2,4)$ C. $(-4,2,-4)$ D. $(4,2,4)$

6．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^{n-1}}$ 的敛散性是 （ ）

A．条件收敛 B. 绝对收敛 C. 发散 D. 不能确定

7．函数 $f(x)=\dfrac{1}{9+x^2}$ 展开成麦克劳林级数为　　　　（　　）

A．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{3^{2n+2}}$，　$x\in(-3,3)$　　　　B．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{3^{2n+2}}$，　$x\in(-3,3)$

C．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{3^{2n+2}}$，　$x\in[-3,3]$　　　　D．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{3^{2n+2}}$，　$x\in(-3,3)$

8．曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为　　　　（　　）

A．$x+2y-4=0$　　　　B．$x+2y+4=0$

C．$x-2y+z+4=0$　　　　D．$x-2y+z-4=0$

9. 已知曲线 $L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$　　　　（　　）

A．2π　　　　B. $-\pi$　　　　C. -2π　　　　D. π

10. 设 $\omega=f(u,v)+x^2+y^2\sin z$，其中 $u=\dfrac{x}{y}$，$v=\dfrac{y}{z}$，则 $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=$　　　　（　　）

A．$f_u'-\dfrac{y}{z^2}f_v'+y^2\cos z$　　　　B. $-\dfrac{y}{z^2}f_v'+y^2\cos z$

C. $\dfrac{y}{z^2}f_v'-y^2\cos z$　　　　D. $f_u'+\dfrac{y}{z^2}f_v'+y^2\cos z$

11．$\int_{(1,1)}^{(-1,2)}\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y=$　　　　（　　）

A．$-\dfrac{2}{3}$　　　　B. $\dfrac{2}{3}$　　　　C. $\dfrac{3}{2}$　　　　D. $-\dfrac{3}{2}$

12. L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，取逆时针方向，则 $\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2+4y^2}=$　　　　（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$　　　　D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

13. 幂级数 $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+\cdots$ 的收敛域为　　　　（　A　）

A．$[-1,1)$　　　　B. $(-1,1)$　　　　C. $[-1,1]$　　　　D. $(-1,1]$

14. 已知 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$，交换积分次序后 $I=$ （　　）

A. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$

15. 已知积分区域 D 为 $x^2+y^2\le 4$，则 $\iint\limits_D (2-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ （　　）

A. $\frac{2}{3}\pi$　　B. $\frac{4}{3}\pi$　　C. $\frac{8}{3}\pi$　　D. $\frac{16}{3}\pi$

16. 积分区域 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成，下面化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次定积分正确的是 （　　）

A. $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} dy\int_0^{1-x-2y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　B. $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-2x} \mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

C. $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}} \mathrm{d}y\int_0^{x+2y-1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$　　D. $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-2x} \mathrm{d}y\int_0^{x+2y-1} f(x,y,z)\mathrm{d}z$

17. 已知 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$ 是微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，则 （　　）

A. $p=4,q=0$　　B. $p=0,q=4$　　C. $p=4,q=-4$　　D. $p=4,q=4$

18. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},|x|<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数为 （　　）

A. $\arctan x$　　B. $\tan x$　　C. $\ln(1+x^2)$　　D. $\frac{2x}{(1+x)^2}$

19. 在点 $(2,1,4)$ 处，旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 指向上侧的法向量为 （　　）

A. $(4,2,-1)$　　B. $(-4,-2,1)$　　C. $(4,-2,1)$　　D. $(4,2,1)$

20. 函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,0)$ 处沿从点 $(1,0)$ 到点 $(2,\sqrt{3})$ 的方向的方向导数等于

（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

21. 函数 $f(x,y)=xy$ 在满足 $x+y=1$ 的条件下，下列说法正确的是 （　　）

A. 在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处取得极大值　　B. 在点 $(1,0)$ 处取得极小值

C. 在点$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$处取得极小值　　D. 在点$(1,0)$处取得极大值

22. 已知函数$f(x,y)=x^2+xy$，下列说法正确的是　　(　　)

A. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点但非极值点　　B. 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的驻点

C. 无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点　　D. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极值点

23. Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则

$\oiint\limits_{\Sigma}(x+3yz)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+2zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(4xy-2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$　　(　　)

A．3　　B. 1　　C. 0　　D. $\frac{3}{4}$

24. 空间曲线$x=\ln\frac{1+t}{2}$，$y=\frac{1+t}{t}$，$z=t^2$在$t=1$处的切线方程为　　(　　)

A．$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{4}$　　B. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{4}$　　D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{4}$

25. 设Σ为抛物面$z=2-(x^2+y^2)$在xoy面上方的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{dS}=$　　(　　)

A．$\frac{9}{2}\pi$　　B. $\frac{26}{3}\pi$　　C. $\frac{13}{3}\pi$　　D. 13π

26. 由曲面$z=6-x^2-y^2$及$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围立体的体积为　　(　　)

A．$\frac{16}{3}\pi$　　B. 4π　　C. $\frac{32}{3}\pi$　　D. $\frac{44}{3}\pi$

27. Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=a^2$所围成，则$\iiint\limits_{\Omega}x\ln(x^2+y^2+z^2+1)\mathrm{d}V=$

(　　)

A．0　　B. 2π　　C. 4π　　D. 6π

28. 设$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ e^x, & 0\le x<\pi\end{cases}$是以$2\pi$为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记

为$S(x)$，则$S(-15\pi)=$　　(　　)

A．$\frac{e^{-\pi}}{2}$　　B. $\frac{e^{\pi}}{2}$　　C. 0　　D. $e^{-15\pi}$

29. 微分方程$y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$的通解为　　(　　)

A. $(\frac{1}{12}x^4+C_1x+C_2)e^{3x}$　　B. $(\frac{1}{4}x^4+C_1x+C_2)e^{3x}$

C. $(\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2)e^{3x}$　　D. $(x^2+C_1x+C_2)e^{3x}$

30. 给定两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，已知$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\rho$，当$\rho$为何值时，不能判断这两个正项级数有相同的敛散性　　(　　)

A. $\rho=0$　　B. $\rho=\frac{1}{2}$　　C. $\rho=1$　　D. $\rho=2$

二、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

31. 设$z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$, 其中$f(u)$可导, 证明：$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

32. 设$u_n\geq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，证明当$\alpha>1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{u_n}{n^{\alpha}}}$也收敛.