

# 卡诺图Karnaugh Map化简法

卡诺图：是由表示变量的所有可能取值组合的小方格所构成的图形。

逻辑函数卡诺图的填写方法：在那些使函数值为1的变量取值组合所对应的小方格内填入1，其余的方格内填入0，便得到该函数的卡诺图。

卡诺图是真值表的另外一种画法，既保留了真值特性，又便于逻辑运算。

**卡诺图:**是与变量的最小项 (Minimum term) 对应的按一定规则排列的方格图，每一小方格填入一个最小项。

**(1) 最小项:** 对于 $n$ 输入变量有 $2^n$ 种组合，其相应的与项也有 $2^n$ 个，则每一个与项就称为一个最小项。其特点是每个输入变量均在其中以原变量和反变量形式出现一次，且仅一次。

如：三个变量，有8种组合，最小项就是8个，卡诺图也相应应有8个小方格。

在卡诺图的行和列分别标出变量及其状态。

# 卡诺图

		B	
		0	1
A	0	$\overline{A} \overline{B}$	$\overline{A} B$
	1	$A \overline{B}$	$A B$

二变量

任意两个相邻最小项之间只有一个变量改变

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	01	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$
	11	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{15}$	$m_{14}$
	10	$m_8$	$m_9$	$m_{11}$	$m_{10}$

四变量

		BC			
		00	01	11	10
A	0	$m_0$	$m_1$	$m_3$	$m_2$
	1	$m_4$	$m_5$	$m_7$	$m_6$

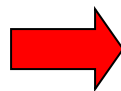
三变量

二进制数对应的十进制数编号

## (a) 根据真值表画出卡诺图

如:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>Y</i>
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1




<i>A</i> \ <i>BC</i>	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将输出变量为“1”的填入对应的小方格, 为“0”的可不填。

(b) 根据逻辑式画出卡诺图

如:  $Y = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC$



$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

将逻辑式中的最小项分别用“1”填入对应的小方格。如果逻辑式中最小项不全，可不填。

**注意：**如果逻辑式不是由最小项构成，一般应先化为最小项

[例] 试用卡诺图表示逻辑函数  $F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{D} + ACD + \overline{A}\overline{B}$

解：第一步，展开为最小项标准型

$$\begin{aligned} F &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{D}(C + \overline{C}) + ACD(B + \overline{B}) + \overline{A}\overline{B}(C + \overline{C}) \\ &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + ABCD + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C(D + \overline{D}) + \overline{A}\overline{B}\overline{C}(D + \overline{D}) \\ &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + ABCD + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} \\ &= m_0 + m_6 + m_4 + m_{15} + m_{11} + m_{10} + m_9 + m_8 \\ &= \sum m(0, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 15) \end{aligned}$$

第二步，用卡诺图表示

<b><i>CD</i></b>				
<b><i>AB</i></b>	<b>00</b>	<b>01</b>	<b>11</b>	<b>10</b>
<b>00</b>	<b>1</b>			
<b>01</b>	<b>1</b>			<b>1</b>
<b>11</b>			<b>1</b>	
<b>10</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>

# 应用卡诺图化简逻辑函数

- 步骤
1. 卡诺图
  2. 合并最小项
  3. 写出最简“与或”逻辑式

例  $Y = \bar{A}BC + ABC$

解：① 画出卡诺图

$A \backslash BC$					
		00	01	11	10
0				1	
1				1	

规则一：

- (a) 将取值为“1”的相邻小方格圈成圈。
- (b) 所圈取值为“1”的相邻小方格的个数应为  $2^n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )。
- (c) 为了使函数最简，圈要尽可能大。

(d) 一个圈代表一个与项，由圈中取值未发生变化的变量构成，如果变量取值为1则取原变量，取值为0则取反变量。

$A \backslash BC$				
	00	01	11	10
0			1	
1			1	

$$Y = \overline{A}BC + ABC = BC$$



**规则二：** 为了使函数得到最佳简化，圈过的1格可重复被圈，即合并圈可以部分重叠。

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC\overline{C} + ABC$$

A \ BC				
	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

三个圈最小项分别为：

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

$$A\overline{B}C + ABC = AC$$

$$ABC + ABC\overline{C} = AB$$

写出简化逻辑式  $Y = BC + AC + AB$

**规则三：** 若一个合并圈中所含的“1”格均被其他合并圈圈过则这个合并圈是多余的，必须消除。

[例] 应用卡诺图化简逻辑函数

$$(1) Y = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B C + A \overline{B} \overline{C}$$

解：

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1			

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function  $Y = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B C + A \overline{B} \overline{C}$ . The map shows four 1s at positions (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), and (1,0,0). A red solid circle groups the 1s at (0,0,0) and (1,0,0). A green dashed circle groups the 1s at (0,0,0) and (0,0,1). A red solid circle groups the 1s at (0,0,1) and (0,1,1). A green box labeled "多余" (Redundant) points to the 1 at (0,0,1), indicating it is covered by other groups.

写出简化逻辑式

$$Y = \overline{B} \overline{C} + \overline{A} C$$

**规则四：** 注意卡诺图四边和四角的相邻关系，看起来不相邻，实际不一定。

$$(2) Y = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + \overline{A} \overline{B} C \overline{D} + A \overline{B} \overline{C} \overline{D} + A \overline{B} C \overline{D}$$



$AB \backslash CD$		$CD$			
		00	01	11	10
00	1				1
01					
11					
10	1				1

$$Y = \overline{B} \overline{D}$$

[例]应用卡诺图化简逻辑函数

$$Y = \overline{A} + \overline{A} \overline{B} + \underline{BCD} + \underline{B \overline{D}}$$

解：

AB \ CD	CD			
	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

含 $\overline{A}$ 均填“1”

注意：

1. 圈的个数应最少
2. 每个“圈”要最大
3. 每个“圈”至少要包含一个未被圈过的最小项。

写出简化逻辑式

$$Y = \overline{A} + B \overline{D}$$

[书例20. 5. 7]P258页

应用卡诺图化简  $Y = \underline{\bar{A} \bar{B} C} + \underline{\bar{A} B C} + \underline{A \bar{B} \bar{C}} + \underline{A \bar{B} C} + \underline{A B C} + \underline{A B \bar{C}}$

解：

BC					
A \		00	01	11	10
0			1	1	
1		1	1	1	1

(1) 将取值为1的小方格圈成两个圈，得出

$$Y = A + C$$

(2) 也可以将取值为0的两个小方格圈成一个圈，得出

		BC			
		00	01	11	10
A	0	0			0
	1				

如果卡诺图中0的小方格较1的小方格少得多时，则圈0更为简便。

$$\bar{Y} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} = \bar{A}\bar{C}$$

$$Y = \overline{\bar{A}\bar{C}} = A + C$$

# [书例20. 5. 14]P292页 (4)

用卡诺图化简 $Y = \underline{A\bar{B}} + \underline{B\bar{C}}\bar{D} + \underline{ABD} + \underline{\bar{A}B\bar{C}D}$

CD \ AB		CD			
		00	01	11	10
AB	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	1	1	1	0
	10	1	1	1	1

可得 $Y = B\bar{C} + AD + A\bar{B}$

# [书例20. 5. 14]P292页 (5)

用卡诺图化简  $Y = \underline{A} + \underline{\bar{A}B} + \underline{\bar{A}\bar{B}C} + \underline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D}$

CD \ AB		00	01	11	10
AB	00	0	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

可得  $\bar{Y} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ , 故  $Y = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}} = A + B + C + D$



## [书例20. 6. 7]P289页

已知逻辑状态表如下，则输出Y的逻辑式为（ ）。

(1)  $Y = \bar{A} + BC$     (2)  $Y = A + BC$     (3)  $Y = A + \bar{B}C$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(1) 由逻辑状态表可列出对应的逻辑表达式为

$$\begin{aligned} Y &= \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\ &= (\bar{A}+A)BC + (\bar{B}+B)A\bar{C} + A\bar{B}C \\ &= BC + A\bar{C} + A\bar{B}C \\ &= (B + \bar{B}A)C + A\bar{C} \\ &= (A+B)C + A\bar{C} \\ &= AC + BC + A\bar{C} \\ &= A + BC \end{aligned}$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

故选 (2)

(2) 此题若用卡诺图法化简则更为便捷

$$Y = \underline{\overline{A}BC} + \underline{A\overline{B}\overline{C}} + \underline{\overline{A}BC} + \underline{A\overline{B}\overline{C}} + \underline{ABC}$$

A \ BC	BC			
	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

可得  $Y = A + BC$ ，故选 (2)

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1