# 概率统计练习题一

## 一、填空题

1．设 $A,B$ 为事件， $P(A)=\alpha$, $P(B)=0.3$， $P(\overline{A}\quad B)=0.7$, 当 $A$ 与 $B$ 互不相容时, 则 $\alpha=$ 0.3；当 $A$ 与 $B$ 相互独立时， $\alpha=$ 3/7 或 0.4286。

2．设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中 $a$ 与 $b$ 为常数，则

$a=$ 1， $b=$ -1。

3．设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $\lambda=$ 2， $E(X)=$ 2。

4. 随机变量 $X$， $Y$ 满足 $P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=3/4$, $P\{X\ge 0)=P\{Y\ge 0\}=4/7$, 则 $P(\max(X,Y)\ge 0)=$ 11/28 或 0.3929.

5．设 $X_1,X_2,X_3$ 相互独立，且 $X_1\sim N(0,2), X_2\sim N(1,3) X_3\sim N(3,1)$，令 $X=2X_1+3X_2-X_3$，则 $E(X)=$ 0， $Var(X)=$ 36。进一步，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，且 $\Phi(1)=0.8413$， $\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{0<X<6\}=$ 0.3413。

答案： $\Phi(1)-0.5=0.8413-0.5=0.3413$

6. 某产品由甲、乙两车间生产，甲车间占 60%，乙车间占 40%，且甲车间的正品率为 90%，乙车间的正品率为 95%，则任取一件是次品，它是乙车间生产的概率为 0.25 或 1/4。

7. 设二维随机向量 $(X, Y)$ 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则

$E(X)=$ 7/6， $Var(X)=$ 11/36， $Cov(X, Y)=$ -1/36， $\rho_{XY}=$ -1/11。

8. 设 $X_1,X_2,\quad,X_n (n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 .$$

则 $\overline{X}\sim$ <u>N(μ, σ²/n)</u>，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ <u>$t_{n-1}$</u>，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ <u>$\chi^2_{n-1}$</u>。

## 二、解答题

9. 设随机变量 $X$ 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} ax, & 0<x<2, \\ bx+c, & 2\le x\le 4, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 又 $E(X)=2$，$P\{1<X<3\}=3/4$，求

(1). 常数 $a,b,c$.

(2). $Var(X)$.

10. 设二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot e^{-y}, & 0\le x\le y<\infty, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1). 求常数 $c$；　　(2). 求 $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$；

(3). 问 $X$ 和 $Y$ 是否独立？为什么？　　(4). 求 $E(Y)$。

**解** (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^{y}c\cdot e^{-y}dx=c\int_0^{\infty}ye^{-y}dx=c$，得 $c=1$；

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy, & x>0, \\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0, \\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx, & y>0, \\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}y\cdot e^{-y} & y>0, \\ 0, & y\le 0;\end{cases}$

(3). 因以概率为 1 的有 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 $X$ 和 $Y$ 不独立；

(4). $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{\infty}y^2e^{-y}dy=2$。

11. 设随机变量 $X$ 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in(-1,\ 1) \\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，求：

(1). $Y$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$；(2). $P\{0.25<Y<1.96\}$；(3). $E(Y)$ 和 $Var(Y)$。

**解** (1). 记 $F_Y(y)$ 为随机变量 $Y$ 的分布函数，则 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$；$y\in(0,1]$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=2\sqrt{y}-y;$$

$y>1$ 时，$F_Y(y)=1$。于是，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{y^{-1}}-1, & y\in(0,1]\\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$$

(2). $P\{0.25<Y<1.96\}=F_Y(1.96)-F_Y(0.25)=1-[2\sqrt{0.25}-0.25]=0.25$；

(3). $E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_0^1x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$；

由 $E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_0^1x^4(1-x)dx=\frac{1}{15}$ 及

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(X^4)-[E(X^2)]^2,$$

得 $Var(Y)=\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=\frac{7}{180}$.

12. 若 $X_1,X_2,\ \ ,X_n(n>2)$ 为抽自总体 $X$ 的随机样本，总体 $X$ 有概率密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0 & \text{其他.}\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 为待估参数，求 $\theta$ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 与极大似然估计 $\theta^*$。

**解** 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。由 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$。利用

$\overline{X}=E(X)$，得 $\overline{X}=\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}$。解该式，得 $\hat{\theta}=\frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

记 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=(\theta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta+1}$ 为参数 $\theta$ 的似然函数。则

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$, 解得 $\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$。故

$$\theta^*=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

13．从工厂产品库中随机抽取 16 只零件，测得他们的长度（单位为厘米）为

2.14，2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，

2.15，2.12，2.14，2.10，2.13，2.11，2.14，2.11.

假设零件长度分布为$N(\mu,\sigma^2)$，求如下三种参数的情况求置信系数为 0.95 的置信区间：

(1). $\sigma^2 = 0.01^2$，求 $\mu$ 的置信系数为 0.95 的置信区间，

(2). $\sigma^2$ 未知，求 $\mu$ 的置信系数为 0.95 的置信区间，

(3). 求 $\sigma^2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间.

附： 标准正太分布、$t$ 分布和 $\chi^2$ 分布表：

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| $t_9(0.025)=2.2622$ | $t_9(0.05)=1.8331$ | $t_{10}(0.025)=2.2281$ | $t_{10}(0.05)=1.8125$ |
| $\chi_9^2(0.025)=19.023$ | $\chi_9^2(0.05)=16.919$ | $\chi_9^2(0.975)=2.700$ | $\chi_9^2(0.95)=3.325$ |
| $\chi_{10}^2(0.025)=20.483$ | $\chi_{10}^2(0.05)=18.307$ | $\chi_{10}^2(0.975)=3.247$ | $\chi_{10}^2(0.95)=3.940$ |

答案：x<-c(2.14,2.10,2.13,2.15,2.13,2.12,2.13,2.10,2.15,2.12,2.14,2.10,2.13,2.11,2.14,2.11)

```
> mean(x)
[1] 2.125
n=16,Z(0.025)=1.69,sigma=0.01
> 2.125-0.01*1.96/4
[1] 2.1201
> 2.125+0.01*1.96/4
[1] 2.1299
```

（1）[2.121, 2.129]

```
> var(x)
[1] 0.0002933333
> sd(x)
[1] 0.01712698
```

(2)[2.117,2.133]