2015-2016年

得分

一、填空题（每题2分，共20分）

1、设复数 $z=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(3-i)}$，则 $|z|=$ $\underline{1}$。

2、$Ln(-5+7i)=$ $\underline{\frac{1}{2}\ln 74+i\left(-\arctan\frac{7}{5}+\pi+2k\pi\right)}$ $k\in\mathbb{Z}$

3、计算积分 $\int_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^{100}}dz=$ $\underline{\frac{2\pi i}{99!}}$。

4、解析函数 $f(z)=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3$，则 $f'(z)=$ $\underline{3x^2-3y^2+i(6xy-3y^2)}$ 或 $3z^2$ 两者写出一即可

5、函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期为 $\underline{10k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}}$。

6、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径为 $R=$ $\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$。

7、设 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=$ $\underline{\infty}$。

8、计算留数 $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z}{\cos z},\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $\underline{-\frac{\pi}{2}}$。

9、$\mathscr{F}^{-1}\left[\delta(w+5)+\delta(w+3)\right]=$ $\underline{\frac{1}{2\pi}\left(e^{-5it}+e^{-3it}\right)}$。

10、$\mathscr{F}\left[e^{2jt}\sin t\right]=$ $\underline{j\left(\pi\delta(\omega-1)-\pi\delta(\omega-3)\right)}$。

得分

二、计算题（每题5分，共20分）

1、计算 $(-27)^{\frac{1}{3}}$

解：$(-27)^{\frac{1}{3}}=|-27|^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right]$

$=3\left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right]$

$k=0,1,2.$

~~$k\in\mathbb{Z}$~~

2、计算 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{40}$

解：$=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{40}=\dfrac{\left((1-i)^2\right)^{40}}{2^{40}}$

$=\dfrac{(-2i)^{40}}{2^{40}}$

$=i^{40}$

$=(i^4)^{10}$

$=1$

3、计算$(-3)^{\sqrt{5}}$

解：$(-3)^{\sqrt{5}}=e^{\sqrt{5}\,\mathrm{Ln}(-3)}$

$=e^{\sqrt{5}(\ln 3+i(\pi+2k\pi))}$

$=e^{\sqrt{5}\ln 3}[\cos\sqrt{5}(\pi+2k\pi)$

$+i\sin\sqrt{5}(\pi+2k\pi)]$

$k\in\mathbb{Z}$

4、讨论函数$f(z)=xy^2+ix^2y$的解析性。

（若存在，求出解析点或可导点）

解：令$u=xy^2$，$v=x^2y$

$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2$　$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$

$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$　$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2$

由C-R方程：$\begin{cases}x^2=y^2\\-2xy=2xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

$\therefore f(z)$在$z=0$可导，整个复平面处处不解析。

得 分

三、计算留数与积分。（共 40 分）

1、计算留数$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{(z^2+1)},i\right]$。（5 分）

解：$z=i$是一级极点，由规则Ⅱ得

$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^2+1},i\right]=\frac{e^z}{2z}\Big|_{z=i}=\frac{e^i}{2i}=-\frac{i}{2}(\cos 1+i\sin 1)$

$=\frac{1}{2}\sin 1-\frac{i}{2}\cos 1$

2、计算积分$\int_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)^2}dz$。（5 分）

解：$z=-\frac{1}{2}$是二级极点，且在$|z|=1$内，则由留数定理得：

$$\oint_{|z|=1}\frac{z}{(2z+1)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(2z+1)^2},-\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left((z+\frac{1}{2})^2\cdot\frac{z}{(2z+1)^2}\right)$$

$$=\frac{2\pi i}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}i$$

3、计算积分$\int_C \left(x-y+ix^2\right)dz$，其中$C$是从0到$1+i$的直线段。（10分）

解：C的参数方程为 $z(t)=(1+i)t,\ 0\le t\le 1$　$dz=(1+i)dt$

$$\int_C (x-y+ix^2)dz = \int_0^1 (t-t+it^2)(1+i)dt$$

$$= i(1+i)\cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(-1+i) = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}i$$

4、计算积分$\int_{|z|=3} \frac{z^{15}}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^4+2\right)^3}dz$。（10分） 用无穷远点处的留数

没学不用做！

5、利用留数计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 7x}{x^2+16}dx$。（10分）

解：令$R(z)=\frac{z}{z^2+16}$，其在上半平面的孤立奇点为$z=4i$，且为一级极点。∴有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 7x}{x^2+16}dx = Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i7x}}{x^2+16}dx\right]$$

$$= Im\left[2\pi i\cdot Res\left[R(z)e^{7iz}, 4i\right]\right]$$

$$= Im\left[2\pi i\cdot \frac{z\cdot e^{7iz}}{2z}\Big|_{z=4i}\right] = Im\left[\pi i\cdot e^{7i\cdot 4i}\right]$$

$$= \frac{\pi}{e^{28}}$$

得分

四、求已知函数的展开式。（共 15 分）

1、把函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ 在 $z_0=1+i$ 展开成泰勒级数。（7 分）

解：$f(z)=\dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\left(\dfrac{1}{z-(1+i)+1+i}\right)'$

$$=-\left(\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+i}}\right)'$$

$$=-\left(\frac{1}{1+i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-(1+i))^n}{(1+i)^n}\right)' \qquad \left|\frac{z-(1+i)}{1+i}\right|<1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+i)^{-(n+1)}\cdot n\left(z-(1+i)\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+i)^{-(n+1)}\cdot n\cdot\left(z-(1+i)\right)^{n-1} \qquad |z-(1+i)|<\sqrt{2}$$

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2(z+2)}$ 在 $0<|z+i|<\sqrt{5}$ 内展成洛朗级数。（8 分）

解：$f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2}\cdot\dfrac{1}{z+i+2-i}$

$$=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{2-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+i}{2-i}}$$

$$=\frac{1}{(z+i)^2}\cdot\frac{1}{2-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(2-i)^{-n}(z+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(2-i)^{-(n+1)}(z+i)^{n-2}$$

得 分

五、证明:（5分）

若$F(w)=\mathscr{F}\left[f(t)\right]$，$a>0$为常数。证明$\mathscr{F}\left[f(at)\right]=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{w}{a}\right)$。

证明：已知 $F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt$$

令 $u=at \quad du=adt$

$\therefore$ 有

$$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}}\cdot\frac{1}{a}du$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{a}u}du$$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

证毕.

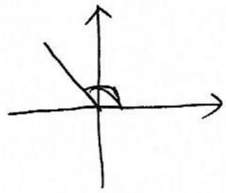
2015－2016年填空

1 $Z=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(3-i)}=\frac{(3+i)^2(1+i)^2}{(1-i)(1+i)(3-i)(3+i)}$

$=\frac{(8+6i)(2i)}{20}=\frac{4i-3}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

$|Z|=\sqrt{(-\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=1$

2. $\mathrm{Ln}(-5+7i)=\ln|-5+7i|+i\,\mathrm{Arg}(-5+7i)$



$\arg(-5+7i)=-\arctan\frac{7}{5}+\pi$

$|-5+7i|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$

$\therefore \mathrm{Ln}(-5+7i)=\ln\sqrt{74}+i(-\arctan\frac{7}{5}+\pi+2k\pi)\quad k\in\mathbb{Z}$

3. $z=0$是100级极点，且在$|z|=1$内. 由留数定理有：

$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{100}}dz=2\pi i\cdot \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^{100}},0\right]$

$=2\pi i\cdot\frac{1}{(100-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{99}}{dz^{99}}\left(z^{100}\cdot\frac{e^z}{z^{100}}\right)$

$=\frac{2\pi i}{99!}$

4. 解法1： $u=x^3-3xy^2\qquad v=3x^2y-y^3$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=6xy-3y^2$

$\therefore f'(z)=3x^2-3y^2+i(6xy-3y^2)$

解法2： $f(z)=(x+iy)^3=z^3$

$\therefore f'(z)=3z^2$

5. $e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z+T}{5}}=e^{\frac{z}{5}}\cdot e^{\frac{T}{5}}\quad\therefore \frac{T}{5}=2k\pi i\quad k\in\mathbb{Z}\quad\therefore T=10k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

6. $\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+i|^n}=\sqrt{2}\quad\therefore R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 由极点的定义得.

8. $\frac{\pi}{2}$是$\cos z$的一级零点，∴是$\frac{z}{\cos z}$的一级极点，

则由规则Ⅲ得：

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\cos z},\frac{\pi}{2}\right]=\left.\frac{z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}$$

9. $\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega+5)+\delta(\omega+3)]$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+5)e^{i\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+3)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[e^{-5it}+e^{-3it}\right]$$

10. $$\mathscr{F}[e^{2jt}\sin t]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2jt}\sin t\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2jt}(e^{jt}-e^{-jt})e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-3)t}dt-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-1)t}dt\right]$$

$$=-\frac{j}{2}\left(2\pi\delta(\omega-3)-2\pi\delta(\omega-1)\right)$$

$$=j\left(\pi\delta(\omega-1)-\pi\delta(\omega-3)\right)$$