北京工业大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期：2019 年 1 月 8 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

。。。

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\arcsin x}=$ ________ $\dfrac{1}{2}$ ________

2. 设参数方程 $\begin{cases} x=\ln\tan\dfrac{t}{2} \\ y=\sin t \end{cases}$ 确定了函数 $y=f(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ______ $\sin t\cos 2t$ ____

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}=xy+1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ _____ -1 __________

4. 曲线 $y=e^{-2x}\cos x$ 过 $(0,1)$ 点的切线方程为_____ $2x+y-1=0$ __________

5. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为_____ 2 条______________

6. 曲线 $y=x^3-3x^2+1$ 的拐点为______ $(1,-1)$ ______________

7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2} t^2e^{-t}\mathrm{d}t=$ ________ $2x^5e^{-x^2}-x^2e^{-x}$ ________________

8. 广义积分$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=$ _____ 1 ____________________

9. 已知$\lim\limits_{h\to\infty}h\left[f\left(1+\dfrac{2}{h}\right)-f\left(1\right)\right]=1$，则$f'(1)=$ __________ $\dfrac{1}{2}$ ________

10. $\int_{-3}^{3}\dfrac{\sin^3x+|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ___________ $\ln 10$ ______________________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$，写出函数$f(x)$的带皮亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式，并求$f^{(2019)}(0)$，

解：$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}$，

$f'(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot(-1)(x-2)^{-2}-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)(x+1)^{-2}$，

$f''(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot(-1)(-2)(x-2)^{-3}-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)(-2)(x+1)^{-3}$，

$f^{(3)}(x)=-\dfrac{2}{3}\cdot(-1)(-2)(-3)(x-2)^{-4}-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)(-2)(-3)(x+1)^{-4}$，

……

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{2}{3}\cdot n!(x-2)^{-n-1}+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3}\cdot n!(x+1)^{-n-1}$，

$f^{(2019)}(0)=\dfrac{2019!}{3\cdot2^{2019}}+\dfrac{2019!}{3}=\dfrac{2019!}{3}\left(\dfrac{1}{2^{2019}}+1\right)$。

$f(0)=0,\ f'(0)=\dfrac{1}{2},\ f''(0)=-\dfrac{1}{2},\ f'''(0)=\dfrac{9}{4}$，

$f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{8}x^3+o(x^3)$。

得 分

12. 计算不定积分$\int\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}+xe^x\right)\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int xe^x dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x+\int xde^x$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+xe^x-\int e^x dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+xe^x-e^x+C$$

得 分

13. 计算广义积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：设$\sqrt[6]{x}=t$，则$x=0, t=0;\ x=1, t=1;\ dx=6t^5dt$，

原式$=6\int_0^1\frac{t^5}{t^2+t^3}\mathrm{dt}$

$$=6\int_0^1\frac{t^3}{1+t}\mathrm{dt}$$

$$=6\int_0^1\frac{t^3+1}{1+t}\mathrm{dt}-6\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{dt}$$

$$=6\int_0^1(t^2-t+1)\mathrm{dt}-6\ln(1+t)\Big|_0^1$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^1-6\ln 2$$

$$=5-6\ln 2$$

得 分

14．求函数 $y=x^3+3x^2-9x+1$ 的极值和单调区间.

解：定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$， $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$，

求得驻点为 $x_1=-3,x_2=1$。

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单增	极大值 28	单减	极小值-4	单增

函数的极大值为 28，极小值为-4.

单调递增区间为 $(-\infty,-3]$，$[1,+\infty)$；单调递减区间为 $(-3,1)$。

得 分

15．设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ e^{px}, & x>0\end{cases}$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 求 p，使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$.

解：(1) $x\le 0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$ ，

$x>0$ 时，$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} e^{pt}dt=\frac{1}{p}\int_{0}^{x} e^{pt}dpt=\frac{1}{p}e^{pt}\Big|_0^x=\frac{e^{px}-1}{p}$ ，

(2) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{px}-1}{p}=-\frac{1}{p}$,

所以 $p=-1$。

得 分

16. 设两曲线 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 与 $y=\ln\sqrt{x}$ 在 (x_0,y_0) 处有公切线，求这两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积；并求该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：由 $y=a\sqrt{x}\ (a>0)$ 得 $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$ ，由 $y=\ln\sqrt{x}$ 得 $y'=\dfrac{1}{2x}$ ，

所以 $\dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0}$，解得 $x_0=\dfrac{1}{a^2}$，

又 $a\sqrt{x_0}=\ln\sqrt{x_0}$，解得 $a=\dfrac{1}{e}, x_0=e^2, y_0=1$。

求面积：选 y 为积分变量，$S=\int_0^1\left(e^{2y}-e^2y^2\right)dy=\dfrac{1}{2}e^{2y}\Big|_0^1-\dfrac{e^2}{3}y^3\Big|_0^1=\dfrac{e^2}{6}-\dfrac{1}{2}$。

求体积：$V=\pi\int_0^{e^2}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{e}\right)^2dx-\pi\int_1^{e^2}\left(\dfrac{\ln x}{2}\right)^2dx$

$$=\frac{\pi}{e^2}\int_0^{e^2}xdx-\frac{\pi}{4}\int_1^{e^2}\left(\ln x\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{e^2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{e^2}-\frac{\pi}{4}\left[x\ln^2x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\ln x\,dx\right]$$

$$=-\frac{\pi e^2}{2}+\frac{\pi}{2}\left[2e^2-e^2+1\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设 $x\le 0$，证明：$e^{x}\le 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}$.

证明：$x=0$ 时，有 $e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2}$。

$x<0$ 时，$e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{e^{\xi}}{3!}x^{3}$，其中 $\xi\in(x,0)$，

而 $\dfrac{e^{\xi}}{3!}x^{3}<0$，所以 $e^{x}<1+x+\dfrac{x^{2}}{2}$。命题得证。

得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(1)=0$，$\lambda>0$ 是常数,

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\lambda f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证明：设 $F(x)=x^{\lambda}f(x)$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $F(0)=0=F(1)$，

而 $F'(x)=\lambda x^{\lambda-1}f(x)+x^{\lambda}f'(x)$，

由罗尔中值定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=\lambda\xi^{\lambda-1}f(\xi)+\xi^{\lambda}f'(\xi)=0$，

即 $\lambda f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，命题得证。

草 稿 纸

姓名：_____________ 学号：_________________