一. 填空题

1. 已知 $P(A)=0.4$, $P(A\cup B)=0.7$. 若 A,B 互不相容，则 $P(B)=\underline{0.3}$; 若 A,B 相互独立，则 $P(\overline{A}B)=\underline{0.3}, P(\overline{AB})=\underline{0.8}$.
2. 已知 $P(A)=0.5, P(A-B)=0.4$, 则 $P(\overline{AB})=\underline{0.9}$.
3. 随机投掷一枚均匀骰子三次，则三次掷出的点数之和恰为 5 点的概率 $\underline{\frac{1}{36}}$; 所得的点数之和的期望为 $\underline{10.5}$.
4. 甲乙两人独立的投篮，命中率分别为 0.7 和 0.4. 现甲乙各投两次，则两人投中次数相同的概率为 $\underline{0.3124}$. 甲比乙投中次数多的概率为 $\underline{0.5628}$.
5. 进行四次独立投篮，至少投中一次的概率为 0.5904, 求三次独立投篮运动中投中一次的概率为 $\underline{0.384}$.
6. 用随机变量 X 表示 n 次伯努利试验中事件 A 发生的次数. 现已知 $E(X)=0.6, Var(X)=0.48$. 则试验次数 $n=\underline{3}$；在这 n 次伯努利试验中事件 A 恰好发生两次的概率等于 $\underline{0.096}$.
7. 设随机变量 X 可能取值为 -2, 0, 1. 且有 $P(X=0)=0.2, E(X)=0.5$. 则 $P(X=1)=\underline{0.7}$, $Var(X)=\underline{0.85}$.
8. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=ae^{-k}, k=1,2,\cdots$, 则常数 $a=\underline{e-1}, P(X>1)=\underline{\frac{1}{e}}$.
9. 设离散型随机变量 X 分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}$$
则 $E(X)=\underline{0.6}, Var(X)=\underline{1.24}$.
10. 设连续型随机变量 X 分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}a+be^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$
则 $a=\underline{1}, b=\underline{-1}, P(X\ge\sqrt{\ln 9})=\underline{\frac{1}{3}}$.
11. 设 $X\sim N(1,3^2)$, $Y\sim N(2,2^2)$. (1) 若 X,Y 相互独立，则 $Var(X-2Y)=\underline{25}, X-2Y+1\sim\underline{N(-2,25)}, P(-3<2X-Y<3)=\underline{2\Phi(\frac{3}{2\sqrt{10}})-1=0.3616}$. (2) 若 X,Y 的相关系数 $\rho=0.2$, 则 $Var(X-2Y+1)=\underline{20.2}$.

12. (1) 设随机变量 X, Y 独立且均服从二项分布 $B(5, 0.1)$, 则 $P(\min\{X, Y\} > 0) = \underline{(1-0.9^5)^2}$.

(2) 设随机变量 X, Y 独立且均服从参数为 1 的指数分布，求 $P(\max\{X, Y\} \geq \frac{1}{2}) = \underline{1-(1-e^{-\frac{1}{2}})^2}, P(\min\{X, Y\} < \frac{1}{2}) = \underline{1-e^{-1}}$.

二. 乘全贝三大公式

例 1. 设甲盒子中有 8 个球，其中 3 个白球 5 个黑球；乙盒子中有 7 个球，其中 5 个白球 2 个黑球．现从甲盒子中随机拿 2 个球放入乙盒子中，再从乙盒子中随机取 1 个球．求

(1). 从乙盒子中取到的这个球为白球的概率；（答案：$\frac{23}{36}$）

(2). 现已知乙盒中取到的球为白球，求从甲盒子中放入乙盒子的 2 个球都是白球的概率．（答案：$\frac{3}{23}$）

例 2. 有三只盒子，甲盒装有 2 支红芯圆珠笔， 4 只蓝芯圆珠笔；乙盒装有 4 支红芯的， 2 只蓝芯的；丙盒装有 3 支红芯的， 3 只蓝芯的．今从中任取一盒，再从取到的盒中任取一支圆珠笔．问

(1). 取到的圆珠笔是红芯的概率是多少？（答案：$\frac{1}{2}$）

(2). 若已知取到的是红芯的，它是从甲盒取出的概率是多少？（答案：$\frac{2}{9}$）

三. 一维随机变量

例 3. 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

A 为常数．令随机变量 $Y = X^2$.

(1). 求常数 A;（答案：$\frac{1}{2}$）

(2). 计算 $P(1 \leq X < 2)$;（答案：$e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}$）

(3). 求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$;）答案：$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} e^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}, & y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(4). $E(Y)$;（答案：8）

(5). 求随机变量 X, Y 的相关系数 ρ.（答案：$\frac{2}{\sqrt{5}}$）

例 4. 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 1, \\ A(2-x), & 1<x\le 2, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

A 为常数. 令随机变量 $Y=2X+1$.

(1). 求常数 A;(答案： 1)

(2). 计算 $P(|X|<1.5)$;(答案： 0.875)

(3). 求随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$; 答案： $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{y-1}{4}, & 1\le y\le 3, \\ \frac{5-y}{4}, & 3<y\le 5, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(4). $E(Y)$;(答案： 3)

(5). $E(XY)$.(答案： $3\frac{1}{3}$)

四. 二维随机向量

例 5. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1). 求常数 A;(答案： 1)

(2). 求 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 与 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$, 并判定 X 与 Y 是否相互独立，且说明理由;

答案： $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 相互独立.

(3). 求 $E(X), Var(X)$;(答案： $E(X)=1, Var(X)=1$)

(4). 求 $P(2X+Y>3), P(X+Y<1)$;(答案: $P(2X+Y>3)=2e^{-\frac{3}{2}}-e^{-3}, P(X+Y<1)=1-2e^{-1}$)

(5). 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数; 答案： $f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-z}, & z>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(6). 求随机变量 X,Y 的相关系数 ρ. (答案： $\rho=0$)

例 6. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax, & 0\le y\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1). 求常数 A;(答案： 3)

(2). 求 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 与 Y 的边缘概率密度函数 $f_Y(y)$, 并判定 X 与 Y 是否相互独立，且说明理由；

答案： $f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3(1-y^2)}{2}, & 0\le y\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 不相互独立.

(3). 求 $P(0<X<1,0<Y<\frac{1}{2})$;(答案： $\frac{11}{16}$)

(4). 求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数；答案： $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{9z^2}{8}, & 0<z\le 1, \\ \frac{3}{2}-\frac{3z^2}{8}, & 1<z\le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(5). 求 $Z=X-Y$ 的概率密度函数. 答案： $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{3-3z^2}{2}, & 0\le z\le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$