北京工业大学 2023—2024 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期中考试试卷

考试说明：考试日期：2024 年 4 月 29 日，考试时间：95 分钟，考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、 填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $(x+2y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$ 满足初值$y(1)=2$的特解为 $y=3x^2-x$

2. 设 $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x - 2x$ 是某个常系数线性微分方程的通解(C_1, C_2, C_3, C_4为任意常数)，则该微分方程为 $y^{(4)} - y'' - 2y = 4x$

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) + \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}\right]$绝对收敛、条件收敛还是发散？条件收敛

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}x^n$ 的收敛域为 $\left(-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right)$

5. 设函数 $f(x) = x^3 \arctan x$，利用幂级数展开计算 $f^{(2024)}(0) =$ $\frac{2024!}{2021}$

6. 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$上满足 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1+x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$，其

Fourier 级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(2024\pi)=$ 0

7．由xOz坐标面上的抛物线 $z=x^2$ 绕z轴旋转一周得到的旋转曲面与曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体在xOy坐标面的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2\leq 1 \\ z=0 \end{cases}$

8．计算二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin xy}{3x}=$ $\dfrac{1}{3}$

9. 设 $z=e^{x-y}+2t$, 而 $x=\sin t$, $y=t^3$, 则全导数 $\dfrac{dz}{dt}=$ $e^{\sin t-t^3}(\cos t-3t^2)+2$

10．由方程 $x^2+y^2-z^2-xy=0$ 所确定的隐函数$z=z(x,y)$在点$(-1,0,1)$处的全微分为 $dz|_{(-1,0,1)}=$ $-dx+\frac{1}{2}dy$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求微分方程 $y''+y=x+\cos 2x$ 的通解.

解: ① 先求 $y''+y=0$ 的通解.

特征方程: $\varphi(r)=r^2+1=0$,

特征根: $r=\pm i$.

故 $y''+y=0$ 的通解为: $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. ------ 3'

② 求 $y''+y=x$ 的特解.

易知 $y_1^*=x$ 为它的一个特解. ------ 4'

③ 求 $y''+y=\cos 2x$ 的特解.

令 $\lambda=2i$, 先解方程 $y''+y=e^{\lambda x}$.

设 $y=z e^{\lambda x}$, 则有 $z''+\varphi'(\lambda)z'+\varphi(\lambda)z=1$,

其中, $\varphi(\lambda)=(2i)^2+1=-3$, $\varphi'(\lambda)=4i$.

$\Rightarrow z''+4iz'-3z=1$, 易知 $z^*=-\frac{1}{3}$ 是它的一个解.

故 $y^*=-\frac{1}{3}e^{2ix}=-\frac{1}{3}(\cos 2x+i\sin 2x)$ 是 $y''+y=e^{\lambda x}$ 的特解.

由定理知, $y_2^*=-\frac{1}{3}\cos 2x$ 是 $y''+y=\cos 2x$ 的特解. ------ 8'

④ 根据叠加定理可知, 原方程的通解为:

$y=C_1\sin x+C_2\cos x+x-\frac{1}{3}\cos 2x$. ------ 10'

得 分

12．将函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ 展开为x的幂级数，并给出收敛域.

解：因 $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$， ---- 3'

故 $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad ---6'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+1+\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \quad ----8'$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$$

$$=\sum_{n=0}(2n+1)x^n,\ (-1,1). \quad ----10'$$

得 分

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解：①因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{2n+2}}{2n+1}}{\frac{x^{2n}}{2n-1}}\right|=x^2.$ ---- 2'

当 $x\in(-1,1)$ 时，级数绝对收敛，

当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，级数发散，

当 $x=\pm1$ 时，由莱布尼茨判别法，级数条件收敛

故收敛域为 $[-1,1]$. ---------- 4'

② 记和函数为 $S(x)$，则 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$.

因 $\left(\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum\limits_{n=1}(-x^2)^{n-1}$

$$=\sum_{n=0}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2} \quad ----8'$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x.$

故和函数 $S(x)=x\arctan x$，$[-1,1]$. ---- 10'

得 分

14. 将函数 $f(x)=1-x^2\ (0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

解：将 $f(x)$ 偶延拓为 2π 周期函数. 此时，

$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots$ ------ 2'

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$, ------ 4'

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx=(-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{n^2}$, ------ 6'

故 $1-x^2=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi]$. ------ 8'

取 $x=0$，得 $1=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. ------ 10'

得 分

15. 设二元函数 $f=f(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, 函数f的 Laplace 定义为 $\Delta f:=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, 计算在极坐标系$(r,\theta)$下$\Delta f$的表达式.

解：由 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta,\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}$ ---3'

f 看作 r,θ 的函数，利用复合函数求导有：

$\frac{\partial f}{\partial x}=f_r\cos\theta-f_\theta\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_r\sin\theta+f_\theta\frac{\cos\theta}{r}$. ------ 5'

$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(f_r\cos\theta-f_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(f_r\cos\theta-f_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

$=\left[f_{rr}\cos\theta-\left(f_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r}-f_\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\right)\right]\cos\theta+\left[f_{r\theta}\cos\theta-f_r\sin\theta-\left(f_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r}+f_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\right]\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)$

$=\cos^2\theta f_{rr}-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta f_{\theta r}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}f_r+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$ ...... 7'

类似有 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin^2\theta f_{rr}+\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta f_{\theta r}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}f_r-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$ ...... 9'

因此，$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{rr}+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}f_r$. ------ 10'

得 分

16. 设方程组$\begin{cases} x+y=u+v \\ xu+yv=1 \end{cases}$确定了函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$和$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解：方程组两边分别对 x 求导，得：

$$\begin{cases} 1 = u_x + v_x \\ u + x u_x + y v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = \dfrac{u+y}{y-x} \\ v_x = \dfrac{u+x}{x-y} \end{cases}$$ ……5'

方程组两边分别对 y 求导，得：

$$\begin{cases} 1 = u_y + v_y \\ x u_y + v + y v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_y = \dfrac{v+y}{y-x} \\ v_y = \dfrac{v+x}{x-y} \end{cases}$$ ……10'

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 证明函数 $z = xf(x+y) + yg(x+y)$ 满足下面的方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证明：$\frac{\partial z}{\partial x} = f + x\cdot f' + y\cdot g'$，$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot f' + g + y\cdot g'$. ---- 2'

$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f' + xf'' + y\cdot g''$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\cdot f'' + 2g' + y\cdot g''$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' + x\cdot f'' + g' + y\cdot g''$. ------ 4'

$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ------ 5'

得 分

18. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛.

证明：因为 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \le \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$， ---- 2'

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1} a_{n+1}$ 也收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛. ---- 4'

由正项级数的比较判别法知，

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 收敛. ---- 5'