

复变期末试题及答案

一、填空题。

1. $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 则 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$

2. $(\sqrt{3} + i)^{10} = 1024 \angle 300^\circ$ 。

3. 设 $x^2 - 2x + by^2 + 1 + a(x-1)yi$ 为解析函数, 则 $a=2$, $b=-1$ 。

4. $\text{Ln}(1+i)(-3+4i) = 2\ln 5 + \ln 2 + 2\pi(k + \arctan(-\frac{1}{7}))$

5. 设 C 为从原点到 $3+4i$ 的直线段, 则 $\oint_C \bar{z} dz = 12.5$ 。

6. $\int_1^{1+i} ze^z dz = ie^{1+i}$

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} z^n$ 的收敛半径为 $R = 1/e$ 。

8. $z=0$ 是 $\frac{1}{(1 - \cos z)^2}$ 的 4 级极点。

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$ 。

二、计算题。

1. 求 $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ 的所有孤立奇点。 $z=2k\pi$

2. 计算 $27^{\frac{1}{3}}$ 。 $3 \angle 2\pi(\frac{k}{3})$, $k=0,1,2$ 。

3. 若 $(1+i)^n = (1-i)^n$, 求 n 。 $n=4k$ (k 为自然数)

4. 计算 $i^{\sqrt{3}}$ 。 $e^{2\sqrt{3}k\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi i}$ 。

三、综合题。

1. 把函数 $f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-2)}$ 在 $4 < |z-2| < +\infty$ 内展开为洛朗级数。

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z}{(z+2)(z-2)} = \frac{1}{z-2} \times \frac{z-2+2}{z-2+4} = \frac{1}{z-2+4} + \frac{2}{z-2} \times \frac{1}{z-2+4} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 + \frac{z-2}{4}} \right) \times \left(1 + \frac{2}{z-2} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{z-2} \right) \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{4} \right)^n \\
 &= \frac{1}{4} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z-2}{4} \right)^n + \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{4} \right)^n (z-2)^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$4 < |z-2| < +\infty$$

2. 把函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}$ 在 $0 < |z-3| < 3$ 内展开为洛朗级数。

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{-1}{(z-3)^2} \times \left(\frac{1}{z} \right)' = \frac{-1}{(z-3)^2} \times \left(\frac{1}{3+z-3} \right)' = \frac{-1}{(z-3)^2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{1 + \frac{z-3}{3}} \right)' \\
 &= \frac{-1}{3(z-3)^2} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{3} \right)^n \right)' = \frac{-1}{9(z-3)^2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times n \times \left(\frac{z-3}{3} \right)^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times n \times \frac{(z-3)^{n-3}}{3^{n+1}}
 \end{aligned}$$

$$0 < |z-3| < 3$$

四、用留数计算。

1. 计算 $\operatorname{Re} s \left[z^2 \sin \frac{1}{z}, 0 \right]$ ，原式=0

2. 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{2i}{z^2 + 4z + 1} dz$ ，一级极点 $\sqrt{3} - 2$ 和 $-\sqrt{3} - 2$ （略去）

$$\text{原式} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

3. 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3} \cos x)^2}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3} \cos x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dz}{iz(2 + \sqrt{3} \frac{z^2 + 1}{2z})}$$

资料由公众号【王太喵】收集整理并免费分享

4. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 1} dx$

复变函数与积分变换

例3 计算积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0).$

解 记 $R(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$, 则 $z_0 = ai$ 是 $f(z)$ 在上半平面内惟一的孤立奇点, 且是1级极点. 显然 $R(z)$ 满足定理2的条件, 所以

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx \right)$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} (2\pi i \operatorname{Res}[f(z)e^{iz}, ai]) = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

参考上图便可得出答案

五、设 $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$, 求以 v 为虚部的解析函数。

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y + C$$

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + C + (x^3 - 3xy^2)i$$