

一、 (10 分) 1. 叙述 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 的定义;

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{3n^2+1} = -\frac{2}{3}$ 。

二、 (20 分) 计算下列极限

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n}) =$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{2x-1} =$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x \sin^3 2x} =$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}} =$

三、 (10 分) 证明: 若存在常数 c , $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c,$$

则数列 $\{x_n\}$ 收敛。

四、 (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续函数, 且 $f(0) = f(1) = 0$,

则对任意一个实数 $(0 < l < 1)$ 必有实数 $x_0 (0 \leq x_0 \leq 1)$, 使 $f(x_0) = f(x_0 + l)$ 。

五、 (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 2, \text{ 证明: 当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } |f'(x)| \leq 3.。$$

六、 (10 分) (1) 用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续和非一致连续的概念;

(2) 证明: $f(x) = \sin \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续。

七、 (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$ 。

证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ ，使 $f'(\xi) = 2f(\xi)$ 。

八、(10 分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \cos(x^{-\frac{1}{3}}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数 $f'(x)$ ，并讨

论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性(若是间断点，须指出其类别)。

九、(10 分) 1. 叙述确界定理；

2. 证明：若 A 与 B 是两个非空数集， $A+B = \{x+y \mid x \in A, y \in B\}$ ，则

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B。$$