

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \arcsin x} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 设参数方程 $\begin{cases} x = \ln \tan \frac{t}{2} \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定了函数 $y = f(x)$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \underline{\hspace{2cm}}$
3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} = xy + 1$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 曲线 $y = e^{-2x} \cos x$ 过 $(0,1)$ 点的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$
5. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线条数为 $\underline{\hspace{2cm}}$
6. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 的拐点为 $\underline{\hspace{2cm}}$
7. $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} t^2 e^{-t} dt = \underline{\hspace{2cm}}$
8. 广义积分 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$
9. 已知 $\lim_{h \rightarrow \infty} h \left[f\left(1 + \frac{2}{h}\right) - f(1) \right] = 1$ ，则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
10. $\int_{-3}^3 \frac{\sin^3 x + |x|}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

- | |
|-----|
| 得 分 |
| |
11. 设 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ ，写出函数 $f(x)$ 的带皮亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式，并求 $f^{(2019)}(0)$.

12. 计算不定积分 $\int \left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} + xe^x \right) dx$.

--

得 分

13. 计算广义积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$.

--

得 分

14. 求函数 $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ 的极值和单调区间.

得 分

15. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{px}, & x > 0 \end{cases} \quad (p \neq 0)$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式;

(2) 求 p , 使得 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

得 分

16. 设两曲线 $y = a\sqrt{x}$ ($a > 0$) 与 $y = \ln \sqrt{x}$ 在 (x_0, y_0) 处有公切线, 求这两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积; 并求该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设 $x \leq 0$, 证明: $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(1)=0$, $\lambda > 0$ 是常数,
证明: 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $\lambda f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.