北京工业大学 2020 —2021 学年 第 I 学期末
“概率论与数理统计”课程 考试（经类，B 卷）参考答案

一、单项选择题（6 个题，每题 3 分，共 18 分）

1. 掷一枚匀质的骰子，则在出现奇数点的条件下出现 3 点的概率为（ A ）.

A. 1/3；　B. 2/3；　C. 1/6；　D. 3/6.

2. 设随机变量的概率密度 $f(x)=\begin{cases} qx^{-2} & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases}$，则 $q=$ (B).

A. 1/2；　B. 1；　C. −1；　D. 3/2.

3. 设随机变量 X 与 Y 不相关，且 E(X)=2, E(Y)=1, Var(X)=3，则 E[X (X+Y−2)]= (D)

A. −5；　B. −3；　C. 3；　D. 5.

4. 设随机向量 (X,Y) 服从单位圆域上的均匀分布，则 X 与 Y 为(C)的随机变量.

A.独立同分布；B.独立不同分布；C.不独立但同分布；D.不独立也不同分布.

5. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，Y 服从正态分布 $N(1,4)$，且 X 与 Y 的相关系数是-1，则下列(C)是正确的:

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$；　B. $P\{Y=2X-1\}=1$；
C. $P\{Y=-2X+1\}=1$；　D. $P\{Y=2X+1\}=1$.

6. 在正态总体均值的假设检验中，当总体方差未知时，采用的检验方法是(C).

A. t 检验法；　B. U 检验法；
C. t 或 U 检验法；　D. 其他检验法.

二、多选题（4 个小题，每小题 3 分，共 12 分）

1. 随机变量 X 与 Y 线性无关等价于（A、C）.

A. $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；　B. X 与 Y 独立；
C. $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$；　D. $\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)$.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为样本方差，$S=\sqrt{S^2}$，则结论正确的为（A、B）.

A. $\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)/\sigma\sim \mathrm{N}(0,1)$；　B. $(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$；
C. $\sqrt{n}\,(\overline{X}-\mu)/S\sim t_n$；　D. $\overline{X}$ 与 S 线性相关.

3. 对总体参数θ，其矩估计和极大似然估计（A、D）.

A. 可以相同，也可以不同； B. 总是相同；

C. 都是θ 的无偏估计； D. 不一定是θ 的无偏估计.

4. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的随机样本，记$\overline{X}$和S^2分别为本均值和样本方差，再记$S=\sqrt{S^2}$为样本标准差，当μ和σ^2未知时，对给定的显著性水平$\alpha\,(0<\alpha<1)$，下列假设检验中(H_0的)拒绝域正确的是（B、C）.

A. $H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$， 拒绝域 $\left\{\ |\overline{X}-\mu_0| \geq \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{\alpha/2}\right\}$；

B. $H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$， 拒绝域 $\left\{\ |\overline{X}-\mu_0| \geq \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right\}$；

C. $H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$， 拒绝域 $\left\{\ \overline{X}-\mu_0 \leq -\dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2)\right\}$；

D. $H_0: \sigma=\sigma_0 \leftrightarrow H_1: \sigma \neq \sigma_0$， 拒绝域 $\left\{(n-1)S^2 \geq \sigma_0^2\ \chi^2_{n-1}(\alpha/2)\right\}$.

三、填空题（10 个空，每空 3 分，共 30 分）

1．设A和B为事件，且$P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.6$. 当$A$与$B$互不相容时，$P(B)=$ __0.2__；A与B相互独立时,$P(B)=$__1/3__.

2．设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中a与b为常数，则$a=$__1__，$b=$__－1__ .

3．设随机变量X服从参数为λ 的泊松分布，且$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则$E(X^2)=$__6__.

4. 设随机变量X可能取三个值-2, 0 和 1，且$P(X=-2)=0.25$，$P(X=1)=0.35$，则$E(X)=$__−0.15__，$\mathrm{Var}(X)=$__1.3275__.

5．设随机变量X_1, X_2相互独立，且$X_1 \sim N(3,\ 3^2)$，$X_2 \sim N(1,\ 2^2)$．令$X=X_1-2X_2$，则$X\sim$__$N(1,\ 5^2)$__. 进一步，若记$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，且已知 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{-4<X<11\}$ ＝__0.8185__.

6. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的随机样本，样本均值$\bar{x}=9.5$，μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间为__［ 8.2 ， 10.8 ］__.

四、（4 个小题，每小题 10 分，共 40 分）

注： 每题下列各题时必须有解题过程，无解题过程的不能得分.

1. 某一地区肺癌发病率为 0.005. 已知肺癌患者做肿瘤标记物试验，结果呈阳性概率为 0.95，非癌症患者做试验呈阳性概率为 0.03. 求：

(1) 任选一人做肿瘤标记物试验，结果呈阳性的概率；

(2) 一人做肿瘤标记物试验结果呈阳性，其是癌症患者的概率.

解 设 A ={试验呈阳性}，B_1={肺癌患者}，B_2={非肺癌患者}，则

$$P(B_1)=0.005,\quad P(B_2)=0.995,\quad P(A\mid B_1)=0.95,\quad P(A\mid B_2)=0.03.$$

——写对假设 1 分、2 个概率与 2 个条件概率 1 分

(1) 由全概率公式，得

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)=0.005\times 0.95+0.995\times 0.03=0.0346;$$

——全概率公式 2 分，计算 1 分，结果 1 分

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\frac{0.005\times 0.95}{0.0346}=0.13728.$$

——叶斯公式 2 分，计算 1 分，结果 1 分

2. 设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cy^2, & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 Y 的常数 c； (2) 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$；(3). $E(XY)$.

解 (1) 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x cy^2\mathrm{d}y=\frac{c}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{c}{12}$，得 $c=12$

—— 累次积分正确 1 分，积分结果正确 1 分，c 正确 1 分

(2). $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 12\mathrm{y}^2\mathrm{d}y, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4x^3 & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

——积分表达式写对 1 分，积分结果正确 1 分

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 12\mathrm{y}^2\mathrm{d}x, & 0<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0<y<1 \\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$

—— 积分表达式写对 1 分，结果正确 1 分

(3) $$\mathrm{E}(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=3\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=0.5.$$

—— 积分表达式正确 1 分，化累次积分正确 1 分，结果正确 1 分

3. 设总体 x 有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\, e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从总体 X 中抽出的随机样本.

（1）求 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}$； 求 λ 的极大似然估计 $\tilde{\lambda}$.

解 （1）记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，由 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\cdots=\frac{2}{\lambda}$.

------写出 E(X)式 1 分，算出结果 1 分

利用 $\overline{X}=E(X)$，得 $\overline{X}=\frac{2}{\hat{\lambda}}$. 解该式，得 $\hat{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$；

-------建立估计方程及求解各 1 分，矩估计结果 1 分

(2) 记 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\lambda^{2n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)\ e^{-n\lambda\bar{x}}$ 为参数 λ 的似然函数，

-------似然函数 1 分

则 $$\ln L(\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\lambda\bar{x},$$ -------对数似然函数 1 分

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-n\bar{x}=0$，解得 $\tilde{\lambda}=\frac{2}{\bar{x}}$. 故 $\tilde{\lambda}=\frac{2}{\overline{X}}$.

-------建立估计方程及求解各 1 分，极大似然估计 1 分

4. 设学生某次考试成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 75.5，标准差为 3.95. 问在显著性水平 0.05 下，从样本看，(1) 是否接受“$\mu=75$”的假设？ (2) 是否接受“$\sigma=4$”的假设？

附 t 分布与 χ^2 分布表

$t_{24}(0.025)=2.0639$	$t_{24}(0.05)=1.7109$	$t_{25}(0.025)=2.0595$	$t_{25}(0.05)=1.7081$
$\chi^2_{24}(0.025)=39.364$	$\chi^2_{24}(0.05)=36.415$	$\chi^2_{25}(0.025)=40.646$	$\chi^2_{25}(0.05)=37.652$
$\chi^2_{24}(0.975)=12.401$	$\chi^2_{24}(0.95)=13.848$	$\chi^2_{25}(0.975)=13.120$	$\chi^2_{25}(0.95)=14.611$

解 n=25，$\mu_0=75,\ \sigma_0=4,\ \alpha=0.05,\ \bar{x}=75.5,\ s=3.95$. — 已知写正确 2 分

(1) 由 $|\bar{x}-\mu_0|=|75.5-75|=0.5<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha/2)=\frac{3.95}{5}\times 2.0639=1.6305$，

知接受原假设，即接受“$\mu=75$”的假设；

（2）由

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{24\times 3.95^2}{4^2}=23.40375\in(12.401,39.364)=(\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2),\chi^2_{n-1}(\alpha/2)),$$

知接受原假设，即接受“$\sigma=4$”的假设。

——每问 4 分：公式与计算正确 2 分，论据正确 1 分，结论正确 1 分