

得分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y' = e^{2x-y}$ 的满足初始条件 $y(0) = 0$ 特解为_____.

2. 已知函数 $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, 则 $du|_{(2,1,1)} =$ _____.

3. 设函数 $u(x,y,z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,2,3)} =$ _____.

4. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ 是条件收敛、绝对收敛, 还是发散? _____.

5. 函数 $f(x) = \ln x$ 在 $x = 1$ 处的泰勒级数展开式为_____.

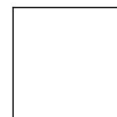
6. 在曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x - 2y + 3z = 1$ 垂直的切线方程为_____.

7. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 则曲线积分 $\int_L x^2 ds =$ _____.

8. 已知积分区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$ _____.

9. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(-3\pi) =$ _____.

10. 设 Σ 为 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限部分, 则 $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS =$ _____.



二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得分

--

11. 求函数 $f(x, y) = (x^2 + 2x + y)e^{2y}$ 的极值.

--

得 分

12. 计算 $I = \int_L (2xe^y + \cos x^2)dx + (x^2e^y + 2x)dy$, 其中 L 是上半圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 上沿顺时针方向.

--

得 分

13. 计算二重积分 $\int_0^e dy \int_1^2 \frac{\ln x}{e^x} dx + \int_e^{e^2} dy \int_{\ln y}^2 \frac{\ln x}{e^x} dx$.

得 分

14. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} z^2 \, dx dy$, 其中 Σ 为曲面

$z = \sqrt{x^2 + y^2}, (0 \leq z \leq 1)$ 的下侧.

得 分

15. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

得 分

16. 求微分方程 $y'' - y = (x+1)e^x$ 的通解.



三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）



得 分

17. 设方程 $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定了隐函数 $z = z(x, y)$, 其中 F 具

有连续的一阶偏导数, 求证: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

得 分

18. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 收敛.