2014-2015 年第 2 学期《高等代数》期末考试

北京工业大学 2014——2015 学年第二学期

《高等代数》期末考试试卷

考试说明：解答本卷中证明题与计算题时必须给出必要的步骤，否则无分

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注：本试卷共 四 大题，共 ___ 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	24	24	25	27	
得分					

得分

一、 填空题（每空 4 分，共 24 分）

1）设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(1,0,0)$ $\eta_2=(1,1,0)$

练习P269 T9(2)

作业P269 T9(3)

$\eta_3=(1,1,1)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为__________，向量 $\alpha=(1,2,3)$ 在第二组基下的坐标为________________

练习P322 T9.

作业 同.

2）若线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1 ε_2 ε_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$，则它在基 ε_3 ε_1 ε_2 下的矩阵为

____

3）欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中，$W=\{(x\quad y\quad -x\quad -y):x,y\in\mathbb{R}\}$，则 $\dim W=$ ________

$\dim W^{\perp}=$______

4）欧氏空间$\mathbb{R}^2$中，基$\varepsilon_1=(1,0)$ $\varepsilon_2=(1,1)$的度量矩阵为______

得分

二、 判断题（每题3分，对的在括号里画√，错的画×）

（√）1、$\mathbb{P}$ 上两线性空间同构的充要条件是它们的维数相等 P371

（√）2、线性空间V 的两线性子空间V_1 V_2的和是直和的充要条件是

$\dim V_1+\dim V_2=\dim V_1+V_2$ P262~263

（√）3、有限维线性空间中的线性变换是单射的充要条件是它是满射 P305推.

（√）4、实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交 P379

（×）5、设矩阵A 满足$A^2=E$ 则1 与 -1 一定是A 的特征值 可

（×）6、正交变换在任意基下的矩阵都是正交矩阵 P372 标准正交

实

（×）7、任意对称矩阵的特征值都是实数 P377

（×）8、n 维线性空间上的线性变换可对角化的充要条件是它有n个

线性无关的特征向量 P299.

得分

三、 计算题（25分）

预习P322 T7①

作业②.

1、已知$\mathbb{R}^{2\times 2}$上的线性变换$\sigma(X)=MX+XM$ ，其中$M=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$求

σ 在基$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵

课书P381.
练习P395 T13
作业 T17 (2)

2、已知 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ 求正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 为对角矩阵，并求出 $T'AT$

得分

四、 证明题（27 分）

1、设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两线性子空间，证明：

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$ 书 P260.

2、设σ 是线性空间V上的线性变换，$\xi\in V$，如果$\sigma^{n-1}\xi\neq\theta$，但$\sigma^{n}\xi=\theta$，

求证：~~$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$~~ 线性无关　(课本 书 P322 T10.

$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$

假设存在一组数 $a_1,a_2,\cdots a_n$，使

$$a_1\xi+a_2\sigma\xi+\cdots+a_n\sigma^{n-1}\xi=0.$$

用 σ^{n-1} 作用于等式两边，得.

$$a_1\sigma^{n-1}\xi+a_2\sigma^{n}\xi+\cdots+a_n\sigma^{2n-2}\xi=0$$

当 $k\geqslant n$时. $\sigma^k\xi=0$. $\therefore a_1\sigma^{n-1}\xi=0$. 又 $\sigma^{n-1}\xi\neq0$

$\therefore a_1=0$.

于是有 $a_2\sigma\xi+\cdots+a_n\sigma^{n-1}\xi=0$.

再用 σ^{n-2} 作用于两边. 得 $a_2\sigma^{n-1}\xi=0 \Rightarrow a_2=0$.

以此类推 得 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. ，故 $\xi,\sigma\xi,\cdots\sigma^{n-1}\xi$ 线性无关.

☆ √3、证明：正交的向量组必线性无关

证明：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是n维正交向量组

设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots k_s$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

用$\alpha_i\,(i=1,2,\cdots s)$ 与上式两边作内积得

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s,\ \alpha_i)=(0,\alpha_i)$$

即 $k_1(\alpha_1,\alpha_i)+k_2(\alpha_2,\alpha_i)+\cdots+k_s(\alpha_s,\alpha_i)=0$

已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 是正交向量组.

$$\therefore(\alpha_j,\alpha_i)\begin{cases}=0, & j\neq i\\ \neq0, & j=i\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots s;\ j=1,2,\cdots s)$$

$\therefore k_i=0\ (i=1,2,\cdots s)$

$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关.