北京工业大学 2015——2016 学年第一学期
《高等代数-1》期末考试试卷

考试说明： 时间：2016 年 1 月 15 日 9:55-11:30，闭卷，数学各专业

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________　　**学号：**__________　　**班号：**__________

。。

注：本试卷共 4 大题，共 7 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸或草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三					四		总成绩
			1	2	3	4	5	1	2	
满分	15	15	10	15	12	8	9	8	8	
得分										

得 分

一、选择题（15 分，每小题 3 分，选择正确答案）

1. 设 A 是 n 阶方阵，且 $AA'=E,\ |A|<0,$ 则 $|A+E|=$____.

A. 0;　　B. 1;　　C. -1;　　D. $(-1)^n$.

2. 已知数域 P 上的线性方程组 $\begin{cases} b_1x+c_1y=1 \\ b_2x+c_2y=1 \\ b_3x+c_3y=1 \end{cases}$ 有解，$d=\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，则____.

A. $d=0;$　　B. $d\neq 0;$

C. 该方程组一定有唯一解;　　D. 方程组一定有无穷多个解.

3. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2 满足关系 $\begin{cases} \alpha_1 &= \beta_1+2\beta_2 \\ \alpha_2 &= -\beta_1+\beta_2 \\ \alpha_3 &= 2\beta_1-3\beta_2 \end{cases}$，且向量组 β_1,β_2

线性无关，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为____.

A.　3；　　B.　2；　　C.　1；　　D.　0.

4. 若 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$， 则 $p=$_____ .

A.　$p=1,\ 2$；　B.　$p=1,\ -2$；　C.　$p=1$　；　D.　$p=-1,\ 2$；

5. 整系数多项式 $f(x)=x^p+px+p$ （其中 p 奇素数）是_____多项式.

A.　复数域上不可约；　　B.　实数域上不可约；

C.　有理数域上不可约　；　　D.　有理数域上可约.

得 分

二、填空题（15 分，每小题 3 分，写出正确答案）

1． 设 A 为 n 阶 方 阵， A^* 为 A 的 伴 随 矩 阵， 若 $|A|=2$， 则

$\left|-A^*+A^{-1}\right|=$__________.

2．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$， 则 $A^n=$______

3．已知 n 阶方阵 A 的各行元素之和均为零，且秩 $(A)=n-1$，则齐次线性方程组

$AX=0$ 的有一个基础解系为________.

4．设 A 是实数域上的反对称矩阵，且 $A^2=0_{n\times n}$ 则 $A=$___.

5．当整数 $a=$___时，实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -2 \\ -3 & 2 & 3-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 是

正定二次型.

得 分

三、计算题（共 5 小题，54 分）

1．（10 分） 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$ 的值

2.（15 分）当参数 a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 3x_1+\ 2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$ 有解？ 此时

（1） 求其一组特解；

（2） 求其导出组的一组基础解系；

（3） 用（1）和（2）的解表示出原方程组的所有解。

3.（12 分） 给定向量组

$$\alpha_1=(1,1,0,-1,2)^T,\alpha_2=(0,-1,2,0,3)^T,$$
$$\alpha_3=(5,-1,12,-5,28)^T,\alpha_4=(1,-7,16,-1,26)^T$$

求

（1） 该向量组的秩；

（2） 求该向量组的一个极大线性无关组；

（3） 把其余向量用（2）中求出的极大线性无关组线性表出。

4.（8 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ 满足 $3X-AX=A$，求矩阵 X.

5.（9 分）考虑实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

（1） 求该二次型的矩阵；

（2） 求一非退化线性替换 $X=CY$ 把该二次型化成标准型；

（3） 求该二次型的秩、正惯性指数、负惯性指数和符号差。

得 分

四、证明题（共 2 小题，16 分）

1. （8 分） 设 $f(x)$ 是数域 P 上次数大于 1 的多项式，且满足

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

其中 $p_i(x)(i=1,\cdots,s),q_k(x)(k=1,\cdots,t)$ 是数域 P 上两组不可约多项式，证明：必有 $s=t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),i=1,2,\cdots,s,$$

其中 $c_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 是一些非零常数。

2. （8 分） 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(\alpha_s\neq 0)$ 线性相关的充分必要条件是至少有 $\alpha_i(1\leq i<s)$ 可被 $\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出。