北京工业大学 2021——2022 学年第二学期

《高等代数-2》期末考试试卷 A 卷

考试说明：解答本卷中证明题与计算题时必须给出必要的步骤，否则无分

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ____________ **学号：** ____________ **班号：** ____________

注：本试卷共 四 大题，共 八 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	15	21	48	16	
得分					

得 分

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下面说法中，正确的个数是（　）

1）两个子空间正交，则它们的和一定是直和；

2）复数域作为实数域上的线性空间是 2 维的；

3）两个子空间和的维数等于它们各自维数的和；

4）n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 W 都存在唯一的正交补.

A) 4;　　B) 3;　　C) 2;　　D) 1.

2、下列关于有限维线性空间 V 中线性变换 T 的说法错误的是（　）

A. T 的值域与核都是 T 的不变子空间；　B. T 是单射当且仅当 T 是满射；

C. T 在两组不同基下的矩阵相似；　D. T 的值域与核的和等于 V.

3. 下列哪个条件不是 n 阶复矩阵 A 可对角化的充要条件（　）

A) A 有 n 个线性无关的特征向量；　B) A 的初等因子都是一次的；

C) A 有 n 个不同的特征值;　　　　D) A 的不变因子没有重根.

4．下面这些λ-矩阵中，可逆的是(　　)

A) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;　B) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$;　C) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;　D) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

5．设A是n维欧式空间中某组基的度量矩阵，则以下不可能是 A 的迹(trA, 即 A 的主对角线元素之和)的是（　　）

A)1;　　B)2;　　C) 3;　　D)-1.

得 分

二、填空题（每空 3 分，共 21 分）

1. 已知 3 阶λ-矩阵，$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}$, 则$A(\lambda)$的不变因子是__________

2. 设$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(1,2,3)$，$\eta_2=(0,1,2)$，$\eta_3=(0,0,1)$是线性空间$\mathbb{R}^3$中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为

____________，向量$\alpha=(1,3,6)$ 在第二组基下的坐标为______________

3. 设$V=\left\{A\in P^{n\times n}\ |A\text{是对称矩阵}\right\}$, 则$V$是线性空间且$\dim V=$________________

4．若矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$与矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$相似，则$x=$______________

5. 若线性变换$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$\mathcal{A}$在基$\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$下的矩阵为 ______________

6. 设欧氏空间$\mathbb{R}^{2\times 1}$中的内积为$(\alpha,\beta)=\alpha^T A\beta$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$在此内积之下的度量矩阵为 ____________

得 分

三、计算题（共 48 分）

1. （12 分）设 P 是一个数域，记 V_1 是由向量

$$\alpha_1=(1,0,0,0),\ \alpha_2=(0,1,0,0),$$

生成的 P^4 的子空间，即 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$. 记 V_2 是由向量

$$\beta_1=(0,0,1,1),\ \beta_2=(1,1,1,1).$$

生成的 P^4 的子空间，即 $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$.

（1） 求 $V_1\cap V_2$ 的维数和一组基.

（2） 求 V_1+V_2 的维数和一组基.

2.（12 分）已知 $P^{2\times 2}$ 的线性变换 $\sigma(X)=MX$，$\forall X\in P^{2\times 2}$，$M=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，

（1）求 σ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

（2）求 σ 的值域的维数和一组基，以及 σ 的核的维数和一组基.

3、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$为复系数矩阵，

（1）求$\lambda E-A$的各阶行列式因子；

（2）求 A 的初等因子；

（3）求 A 的若尔当标准形.

4.（14 分）已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

的矩阵的特征值之和是 3.

（1）求参数 a，并写出该实二次型的矩阵；

（2）用正交线性替换将上述二次型化为标准型.

得 分

四．证明题（16 分）

1. （8 分） 设σ是 4 维线性空间 V 上的线性变换， 且σ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明: V 的包含α_1的σ不变子空间只有 V 本身.

2.（8 分）设σ是n维欧氏空间V的对称变换，即σ是V的线性变换，且对任意$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$都有$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\beta}))$.

证明：σ的像子空间$Im\sigma$是σ的核子空间$\ker\sigma$的正交补子空间.

草　稿　纸

姓名：_____________　　　学号：_____________