

北京工业大学2011—2012学年第一学期末 概率论与数理统计(工)课程试题答案

注：本试卷共六大题，满分100分

一、填空题(每空2分, 共30分)

1. 已知 $P(A) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$.
若 A 与 B 互斥, 则 $P(B) = ?$ 答: 0.2
若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B) = ?$ 答: 0.4
2. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 即 $X \sim P(\lambda)$.
若 $P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-2}$, 则 $\lambda = ?$ 答: 2
 $P\{X = 1\} = ?$ 答: $2e^{-2}$
3. 已知随机变量 $X \sim N(2, 9)$, 利用试卷末附表得到
 $P\{-1 < X < 11\} = ?$ 答: 0.8185
4. 设 $X \sim B(6, 0.3)$, $Y \sim P(1.5)$, 且 X 和 Y 相互独立,
则 $E(X - 2Y) = ?$ 答: -1.2
 $Var(X - 2Y) = ?$ 答: 7.26
5. 设 X, Y 独立同分布, 记 $U = X - Y$, $V = X + Y$,
则 U 和 V 的协方差 $Cov(U, V) = ?$ 答: 0
6. 设离散型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.35, & -2 \leq x < 0 \\ 0.85, & 0 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$
 则 $P\{0 \leq X \leq 3\} = ?$ 答: 0.5
 $E(X) = ?$ 答: -0.1
7. 设离散型随机变量 (X, Y) 的联合概率分布为:

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (X, Y) | $(1, 1)$ | $(1, 2)$ | $(1, 3)$ | $(2, 1)$ | $(2, 2)$ | $(2, 3)$ |
| p_{ij} | $1/6$ | $1/9$ | $1/18$ | $1/3$ | a | b |

 且 X 与 Y 相互独立, 则 $a = ?$ 答: $2/9$
 $b = ?$ 答: $1/9$
8. 设随机变量 $X \sim N(\mu, 1)$, $Y \sim \chi_{10}^2$, 且 X 与 Y 相互独立。
令 $T = \sqrt{10} \frac{X - \mu}{\sqrt{Y}}$, 则 $T \sim ?$ 答: $T \sim t_{10}$
9. 设 x_1, x_2, \dots, x_7 是抽自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一组随机样本,
样本均值 $\bar{x} = 8.16$, 样本方差 $s^2 = 0.36$.
当已知 $\sigma^2 = 0.25$ 时, μ 的置信系数为0.90的置信区间为? 答: [7.8491, 8.4709]
当 σ^2 未知时, μ 的置信系数为0.90的置信区间为? 答: [7.7193, 8.6007]

(由此以下各题目要求写过程, 否则没有分数)

二、(14分) 根据世界卫生组织数据, 我国居民肺癌患病率为38.46人/10万人。另外根据我国《居民营养与健康状况调查》结果, 居民吸烟率为31 %。而根据医学研究发现, 吸烟者患肺癌的概率是不吸烟者的10.8倍。

(1). 求不吸烟者患肺癌的概率与吸烟者患肺癌的概率各是多少。

(2). 随机抽取一位居民做检查后发现其患有肺癌, 求该居民是吸烟者的概率。

解: (写出以下表示给2分)

随机抽取一位居民, 用 B_1 表示抽取的这位居民吸烟, 用 B_2 表示抽取的这位居民不吸烟, 用 A 表示抽取的这位居民患有肺癌。则

$$P(A) = 38.46/100000 = 3.846 \times 10^{-4},$$

$$P(B_1) = 0.31,$$

$$P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - 0.31 = 0.69.$$

设 $P(A|B_2) = x$, 则 $P(A|B_1) = 10.8P(A|B_2) = 10.8x$.

(1). (6分) 用全概率公式,

$$3.846 \times 10^{-4} = P(A) = P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2),$$

即 $0.31 \times 10.8x + 0.69x = 3.846 \times 10^{-4}$, 得到 $x = 9.5245 \times 10^{-5}$.

所以 $P(A|B_2) = x = 9.5245 \times 10^{-5}$, 即 9.5245人/10万人,

$P(A|B_1) = 10.8P(A|B_2) = 1.0286 \times 10^{-3}$, 即 102.86人/10万人。

(2). (6分) 用贝叶斯公式,

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_1) \times P(A|B_1)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2)} \\ &= \frac{0.31 \times 1.0286 \times 10^{-3}}{3.846 \times 10^{-4}} \\ &= 0.8291. \end{aligned}$$

三、(14分) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设随机变量 $Y = e^{-X}$, 求:

- (1). 常数 a ;
- (2). $E(X)$;
- (3). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$;
- (4). $E(Y)$.

解: (1). (4分) $a \int_1^2 (x-1)dx = \frac{1}{2}a = 1, a = 2$ 。

(2). (4分) $E(X) = 2 \int_1^2 x(x-1)dx = \frac{5}{3}$ 。

(3). (4分) $Y = e^{-X}, X = -\ln Y$, 当 $y \in [e^{-2}, e^{-1}]$ 时,

$$f_Y(y) = 2(-\ln y - 1) \left| \frac{d}{dy}(-\ln y) \right| = -2(\ln y + 1) \frac{1}{y}.$$

得到

$$f_Y(y) = \begin{cases} -2(\ln y + 1) \frac{1}{y}, & y \in [e^{-2}, e^{-1}] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(4). (2分)

$$E(Y) = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} y \times [-2(\ln y + 1) \frac{1}{y}] dy = \int_{e^{-2}}^{e^{-1}} -2(\ln y + 1) dy = 2e^{-1} - 4e^{-2}.$$

也可以这样计算

$$E(Y) = E(e^{-X}) = 2 \int_1^2 e^{-x}(x-1)dx = 2e^{-1} - 4e^{-2}.$$

四、(14分) 设二维随机向量 (X, Y) 联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1, x + y \leq 1, 0 \leq y \leq x + 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1). 求 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$;
- (2). 求 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$;
- (3). 回答 X 与 Y 相互独立吗? 说明理由;
- (4). 求 $E(X)$ 和 $Var(X)$.

解: (1). (4分) 当 $x \in [-1, 0]$ 时,

$$f_X(x) = \int_0^{x+1} dy = x + 1;$$

当 $x \in [0, 1]$ 时,

$$f_X(x) = \int_0^{-x+1} dt = -x + 1.$$

所以

$$f_X(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0] \\ -x + 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2). (3分) 当 $y \in [0, 1]$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{-y+1} dx = -2y + 2;$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} -2y + 2, & y \in [0, 1] \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3). (2分) 答: 不独立, 因为 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

$$(4). (5分) \quad E(X) = \int_{-1}^1 x f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x(x+1) dx + \int_0^1 x(-x+1) dx = 0,$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^1 x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(x+1) dx + \int_0^1 x^2(-x+1) dx = \frac{1}{6},$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6}.$$

五、(14分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单样本, X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 5^\theta \theta x^{-(\theta+1)}, & x \geq 5 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (\theta > 1 \text{ 是未知参数})$$

- (1). 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$;
(2). 求 θ 的极大似然估计 θ^* .

解: (1). (7分—原理4分, 计算2分, 结果1分)

$$E(X) = \int_5^\infty 5^\theta \theta x^{-\theta} dx = \frac{5\theta}{\theta-1},$$

令 $\frac{5\theta}{\theta-1} = \bar{X}$, 得 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-5}$.

(2). (7分—似然函数2分, 取对数2分, 求导数2分, 结果1分)

由 $L(\theta) = 5^{n\theta} \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}$,

得 $\ln L(\theta) = n\theta \ln 5 + n \ln \theta - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = n \ln 5 + \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0.$$

得

$$\theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \ln 5)}.$$

六、(14分) (此题借鉴了《国家标准 GB11673-2003: 含乳饮料卫生标准》的有关条款) 某饮料制品公司生产一种瓶装含乳饮料。设这种饮料每瓶脂肪含量 X (单位: 克) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 未知。现在随机抽取7瓶这种饮料化验其脂肪含量, 数据如下:

5.40, 5.41, 5.64, 6.23, 4.90, 5.06, 4.91.

如果要求这种饮料每瓶的平均脂肪含量是5.5克, 标准差不得超过0.3克。做以下假设检验:

- (1). 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 能否认为这种饮料每瓶的平均脂肪含量符合要求?
- (2). 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 能否认为这种饮料每瓶脂肪含量的标准差符合要求?

解: 根据数据, 计算得到 $\bar{x} = 5.3643$, $s = 0.4732$ (2分),

(1). $H_0: \mu = 5.5 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 5.5$ (1分)

当 H_0 成立时, $\frac{\bar{X} - 5.5}{S/\sqrt{7}} \sim t_6$. 故拒绝域是 $\left| \frac{\bar{X} - 5.5}{S/\sqrt{7}} \right| > t_6(0.025) = 2.4469$.

代入数值, 得

$$\left| \frac{\bar{x} - 5.5}{s/\sqrt{7}} \right| = \frac{0.1357}{0.4732\sqrt{7}} = 0.7587 < 2.4469. \quad (\text{公式3分, 分位点1分})$$

故接受 H_0 , 即认为这种饮料每瓶的平均脂肪含量符合要求。 (1分)

(2). $H_0: \sigma \leq 0.3 \longleftrightarrow H_1: \sigma > 0.3$ (1分)

拒绝域是 $\frac{6S^2}{0.3^2} \geq \chi_6^2(0.05) = 12.592$.

代入数值, 得

$$\frac{6s^2}{0.3^2} = 14.928 > 12.592. \quad (\text{公式3分, 分位点1分})$$

故拒绝 H_0 , 即认为这种饮料每瓶脂肪含量的标准差不符合要求。 (1分)