北京工业大学 2019-2020 学年第二学期期末

线性代数(工) 课程试卷（A）

考试方式：闭卷　　　　　　考试时间：2020 年 7 月 2 日

学号_____________ 姓名_____________ 成绩____________

注：本试卷共 8 大题，满分 100 分.

得分登记（由阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八
得 分								

得 分

一．填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；$a=a$ 型答案无效）

1. 5阶行列式 $\left|(a_{ij})_{5\times5}\right|$ 的完全展开式中，$a_{21}a_{32}a_{55}a_{43}a_{14}$ 前的正负号是 负号

2. 记 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & a^2 & 3 \\ 1 & 6 & a^4 & 9 \\ -1 & 7 & a^6 & 27 \end{vmatrix}$ 第二列四个位置的代数余子式分别是 $A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}$. 若

   $A_{12}-2A_{22}+4A_{32}-8A_{42}=0$，则 $a^2=$ 3

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中含有解向量

   的个数是 2

5. 若3阶方阵 A 和 B 的乘积 $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -5 & 1 & -2\\ -1 & 9 & 10\end{pmatrix}$，且 A 不可逆，则 A 的伴随矩阵 A^* 的秩 $R(A^*)=$ ___1___

6. A 是2阶实方阵．若齐次线性方程组 $(2A-E)X=0$ 和 $(3A+2E)X=0$ 均有非零解，则行列式 $|3A^*+2A^{-1}-E|=$ ___$-\frac{5}{2}$___

7. 若 A 是2阶实方阵，α_1,α_2 是线性无关的2维实列向量，满足 $A\alpha_1=\alpha_1+4\alpha_2$，$A\alpha_2=3\alpha_1+2\alpha_2$，则 A 的正特征值是 ___5___

8. 若3阶实方阵 $A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 的列向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 与线性无关向量组 $\{\beta_1,\beta_2\}$ 满足 $\begin{cases}\alpha_1=\beta_1+2\beta_2\\ \alpha_2=-\beta_1+\beta_2\\ \alpha_3=\beta_1-5\beta_2\end{cases}$，则 A^* 的阶梯化矩阵中零行的行数是 ___2___

9. 若 n 阶实方阵 A 满足 $A^5=0$，则 $2A+3E$ 的行列式 $|2A+3E|=$ ___3^n___

10. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2\\ a_4 & b_3 & c_2 & d\end{pmatrix}$ 满足 $A^7-3A^6+5A^5-A^2=2E$，则 A 的正特征值的个数是 ___4___

得 分

二. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 7 & 8 & 21 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 3 & 2\end{vmatrix}$（要求出具体数值）．

得 分

三. 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

得 分

四. a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3+x_4=-1\\ 2x_1+x_2-3x_3+5x_4=3\\ x_1+18x_2-14x_3+10x_4=a\end{cases}$ 有解？

有解时，写出其通解.

得 分

五. 已知 $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 5\\ 5 & -1 & 5\\ 5 & 5 & -1\end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；并求出这一对角矩阵.

得 分

六. 给定列向量组

$$\alpha_1=(0,-1,1,1)^T,\alpha_2=(-1,1,-1,0)^T,\alpha_3=(1,-1,1,2)^T,$$
$$\alpha_4=(2,-3,3,11)^T,\alpha_5=(2,-3,3,3)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出.

得 分

七. 证明：如果 A 既是正交矩阵，又是正定矩阵，则 $|A|=1$.

证明：记方阵 A 的阶数为 n，其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

由于 A 是正交矩阵，所以，$|A|=\pm1$；（1）

由于 A 是正定矩阵，所以，

$\lambda_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)\Rightarrow|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n>0.$（2）

结合（1）、（2）可知，$|A|=1$.

得分

八．用行列式定义证明，$\begin{vmatrix} -11 & 220 & -60 & 80 \\ 160 & 33 & 100 & -28 \\ 301 & 119 & -55 & -116 \\ 55 & 68 & 93 & 77 \end{vmatrix} \neq 0$.

证明：　在行列式$\begin{vmatrix} -11 & 220 & -60 & 80 \\ 160 & 33 & 100 & -28 \\ 301 & 119 & -55 & -116 \\ 55 & 68 & 93 & 77 \end{vmatrix}$的完全展开式中，除了主对角线上元素的乘积是奇数外，其余乘积项皆为偶数，这些偶数乘积项的代数和自然还是偶数。因此，原行列式是一个奇数与一个偶数的代数和，当然它不等于 0.