2016-2017 年第 1 学期《高等代数-2》补考试卷

做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注：本试卷共 四 大题，共 六 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	总成绩
满分	24	24	25	27	
得分					

得 分

一、 填空题（每空 4 分，共 24 分）

1）设 $\varepsilon_1=(1,0,0)$ $\varepsilon_2=(0,1,0)$ $\varepsilon_3=(0,0,1)$ 及 $\eta_1=(0,0,1)$ $\eta_2=(0,1,1)$ $\eta_1=(1,1,0)$ 是线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中两组基，则从第一组基到第二组基的过渡矩阵为__________，向量 $\alpha=(1,0,1)$ 在第二组基下的坐标为__________

2）若把全体复数的集合 $\mathbb{C}$ 看成复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，则它的维数是 1

3）若线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 ε_1 ε_2 ε_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则它在基

$\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_3$ 下的矩阵为 ________

乘积：行列式值.
和：对角线元素和.

4）设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$，则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 =$ __4__

5）欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 中，基 $\varepsilon_1 = (1,0)$ $\varepsilon_2 = (0,1)$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

得 分

二、 判断题（每题 3 分，对的在括号里画√，错的画×）

（√）1、线性空间 V 的两个子空间 V_1 与 V_2 的和是直和的充要条件是 $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ P262. 推论.

（√）2、数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们的维数相同 P371

（√）3、V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个真子空间，则 $V_1 \cup V_2 \neq V$

（√）4、有限维线性空间中的线性变换是单射是充要条件是它是满射 P305 推论.

（√）5、线性变换在不同基下的矩阵是相似的 P288. 定5.

（√）6、n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是它有 n 个线性无关的特征向量 P379. 定7

（√）7、正交向量组必线性无关

（√）8、一个 n 阶实矩阵 A 满足 $AA' = E$，则 A 是正交矩阵 P370 定7.

得 分

三、 计算题（25 分）

1、 已知 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\sigma(X) = MX + XN$，其中 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，

求 σ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

下的矩阵

练习书P395 T18(1)

作业 P395 T18(2)

2、 求正交线性替换化下列实二次型为标准型： (书P384)

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

得 分

四、 证明题（27 分）

1、设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，

证明：1）$\forall\alpha\in\mathscr{A}V$，$\mathscr{A}\alpha=\alpha$

$\mathscr{A}\varepsilon_i=0$.

2）$V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(\theta)$，即 V 是 $\mathscr{A}$ 的值域和核的直和

3）$\mathscr{A}$ 在 V 中某组基下的矩阵为对角阵 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

证明：(1) $\forall\alpha\in\mathscr{A}V$，则 $\exists\beta\in V$，使得 $\alpha=\mathscr{A}\beta$

则 $\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}(\mathscr{A}\beta)=\mathscr{A}^2\beta=\mathscr{A}\beta=\alpha$.

$\therefore \mathscr{A}\alpha=\alpha$

(2) $\forall\alpha\in\mathscr{A}V$. 由(1)知 $\mathscr{A}\alpha=\alpha$

若 $\alpha\in\mathscr{A}^{-1}(0)$，则 $\mathscr{A}\alpha=0$ $\therefore \alpha=0$

即 $\mathscr{A}V\cap\mathscr{A}^{-1}(0)=\{0\}$

$\therefore$ $\mathscr{A}V+\mathscr{A}^{-1}(0)$ 是直和.

$\therefore \dim(\mathscr{A}V+\mathscr{A}^{-1}(0))=\dim(\mathscr{A}V)+\dim(\mathscr{A}^{-1}(0))=n$

$V=\mathscr{A}V\oplus\mathscr{A}^{-1}(0)$

(3) 取 $\mathscr{A}V$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_r$. 由(1)知 $\mathscr{A}\varepsilon_i=\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots r$.

取 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基 $\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$. 则 $\mathscr{A}\varepsilon_i=0$，$i=r+1,\cdots n$

由(2)知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1}\cdots\varepsilon_n$ 是 V 的一组基.

在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

2、证明：正交的向量组必线性无关

3、设V是n维欧氏空间，W是V的线性子空间，试证：

$$W^{\perp}=\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0,\underline{\forall\beta\in W}\}\ ①\ +\ ②\ \gamma\in W^{\perp}$$

① 先证 $W^{\perp}\subset\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in W\}$

已知 $W^{\perp}$ 是 W 的正交补

$\therefore W^{\perp}\perp W$，且 $W^{\perp}+W=V$

$\therefore$ 有 $\forall\alpha\in W^{\perp}$，$\forall\beta\in W$，恒有 $(\alpha,\beta)=0$

$\therefore W^{\perp}\subset\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in W\}$

② 再证 $\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0.\ \forall\beta\in W\}\subset W^{\perp}$

令 $W_1=\{\alpha\in V:(\alpha,\beta)=0.\ \forall\beta\in W\}$

$\forall\alpha\in W_1\subset V=W+W^{\perp}$

$\alpha=\beta+\gamma$ $\therefore\beta\in W$，$\gamma\in W^{\perp}$

由 W_1 知 $(\alpha,\beta)=0$

P260. 定7 $(\alpha,\beta)=(\beta+\gamma,\beta)=(\beta,\beta)+(\gamma,\beta)=0$

书P300. 默 已知 $(\gamma,\beta)=0$ $\therefore(\beta,\beta)=0$. $\beta=0$

P304. 定理11 即 $\alpha=\gamma\in W^{\perp}$ $\therefore W_1\subset W^{\perp}$