北京工业大学 2018—2019 学年第一学期期末

《高等数学》(经、管)-1 模拟试卷

承诺： 本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ＿＿＿＿＿＿ **学号：** ＿＿＿＿＿＿ **班号：** ＿＿＿＿＿＿

注： 本试卷共 三 大题，19 小题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸（可以撕下）。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
得分				

得 分

一、填空（10 小题，每小题 2 分，总计 20 分）

1、$\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}} =$ $e^{\frac{1}{3}}$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} =$ $e^{-\frac{1}{2}}$

3、$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} =$ e

4、设 $x=\cos x-\ln(x+y)+e^y$ 则 $\frac{dy}{dx} =$ $\frac{1+\sin x+\frac{1}{x+y}}{e^y-\frac{1}{x+y}}$

5、$\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)} =$ $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right|+C$

6、$\int\frac{\cos x}{4\sin^2 x-1}dx =$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|+C$

7、$\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=$ $\sin x+\cos x+C$

8、若$f(x)$的一个原函数是$1+\sin x$,则$\int \frac{dx}{f(x)}=$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

9、$\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{2}\sqrt{1+\cos x}}=$ $\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}+C$ 当 $\cos\frac{x}{2}>0$

10、$\int \frac{dx}{x^2+x+1}=$ $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

得 分

二、计算题（共 7 小题，每小题 10 分，总计 70 分）

11、计算积分$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$

解 $I=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

12、求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x^2}{x^2}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x^2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+\sin x^2\cdot 2x}{2x}$

$=-\dfrac{1}{2}$

13、计算积分$\int\dfrac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}dx$

解 $I=\int\dfrac{1}{2\tan^2 x+1}\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$

$=\int\dfrac{1}{2\tan^2 x+1}d\tan x$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\int\dfrac{1}{(\sqrt{2}\tan x)^2+1}d\sqrt{2}\tan x$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

14、设函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$ 问a为何值时，$f(x)$在$x=0$处可导？

解 f(x)连续，则 $\lim\limits_{x\to 0} x^a\sin\frac{1}{x}=0$

$\therefore\ a>0$

f(x)可导 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^a\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0} x^{a-1}\sin\frac{1}{x}$ 存在

$\therefore\ a-1>0\ ,\ a>1$

$\therefore$ $a>1$ 时 f(x) 在 $x=0$ 可导。

15、计算积分 $\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$

解 $I=\int\ln x\, d\frac{1}{1-x}$

$=\frac{1}{1-x}\ln x-\int\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$=\frac{\ln x}{1-x}-\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{\ln x}{1-x}-\left(\ln|x|-\ln|1-x|\right)+C$

$=\frac{\ln x}{1-x}-\ln x+\ln|1-x|+C$

$=\frac{x}{1-x}\ln x+\ln|1-x|+C$

16、计算积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，则 $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

$$dx=\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$$

代入得 $I=\int\frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot t\cdot\frac{4t}{(t^2+1)^2}dt$

$$=\int\frac{4t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\arctan t+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+1}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$$

17、计算积分 $\int\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1}{x}dx$

解 $I=-\int\arctan\frac{1}{x}\,d\arctan\frac{1}{x}$

$$=-\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2+C$$

得 分

三、证明题（二选一，10 分）

18、试证：在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内存在$\xi$，使$\cos\xi=\xi\sin\xi$

证一，令 $F(x)=x\cos x$，则 $F(x)$ 满足罗尔中值定理在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

故存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得

$F'(\xi)=0$，即 $\cos\xi=\xi\sin$

证二，令 $f(x)=\cos x-x\sin x$，在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 连续，

$f(0)=1>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$，

由零点定理存在 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，满足 $f(\xi)=0$

即 $\cos\xi=\xi\sin\xi$.

19、设$x>0$，证明$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$

证，即证 $(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$

令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$

则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，可导

$F'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0$，当 $x>0$ 时，

$\therefore F(x)$ 单增在 $[0,+\infty)$

故 $F(x)>F(0)=0$ 当 $x>0$ 时.

即 $(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$.

证毕.