

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 已知函数 $f(x, y, z) = z\sqrt{\frac{x}{y}}$, 则 $df(1, 1, 1) =$ _____.
2. 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ _____.
3. 设 $f(x, y, z) = \sqrt{3 + x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\text{grad} f(1, -1, 2) =$ _____.
4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(an)}{n^2} + (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n}} \right]$ 是条件收敛、绝对收敛, 还是发散? _____.
5. $f(x) = \frac{x}{3(1-x)}$ 展开成 x 的幂级数为_____.
6. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 则 $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{2 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$ _____.
7. 微分方程 $xy' + y = e^{2x}$ 满足 $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$ 的特解为_____.
8. 曲线 $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = 5 \sin 2t \\ z = 3 \cos^2 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的一个单位切向量为_____.
9. 交换积分次序 $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} f(x, y) dx =$ _____.
10. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1 + x^2, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$, 则 $S(2023\pi) =$ _____.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 求函数 $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ 的极值, 并指出是极大值还是极小值.
12. 求由曲面 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 与曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 所围立体的体积.

13. 求微分方程 $y'' - 6y' + 5y = xe^x$ 的通解.

14. 计算 $I = \int_L (3xy + x \sin x)dx + (x^2 - ye^y)dy$, 其中 L 是曲线 $y = x^2 - 1$ 上由点

$A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 沿顺时针方向的一段弧.

15. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 - y^2 z)dydz + (y^2 - xz + 1)dzdx + (3z + 1)dxdy$, 其中 Σ 为曲

面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 2$) 的上侧.

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n5^n}$ 的收敛域及和函数.

三、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

17. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$ 收敛, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ 收敛.

18. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\frac{x}{z} = \varphi\left(\frac{y}{z}\right)$ 所确定, 其中 $z = z(x, y)$, $\varphi(u)$ 都具有连

续导数. 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.