北京工业大学 2016—2017 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 A 卷参考答案

一、填空题（本大题共 10 道小题，每题 3 分，共 30 分）

1. 微分方程 $y\mathrm{d}x+(y+x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 $\underline{\boldsymbol{y^2+2xy=C}}$.

2. 设 $u=x+y^2+z^3$，则梯度 $\mathbf{grad}\,u=$ $\underline{(1,\ 2y,\ 3z^2)}$.

3. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$ 是条件收敛、绝对收敛、还是发散？ 条件收敛 .

4. 设 $L: x^2+y^2=4$， 则 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=$ $\underline{\boldsymbol{4\pi e^2}}$.

5. $\mathbf{D}: x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0$, 将二重积分 $I=\iint_D f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 转化为极坐标系下的累次积分，$I=$ $\underline{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r^2)r\mathrm{d}r}$.

6. 函数 $f(x)=x^2\sin\frac{x}{2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2017} 的系数为 $\underline{-\frac{1}{2^{2015}\cdot 2015!}}$.

7. 曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $\underline{\boldsymbol{x+2y-4=0}}$.

8. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 是收敛还是发散? 收敛 .

9. 定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开为以 2π 为周期的傅立叶级数，其和函数记为 $S(x)$，则 $\boldsymbol{S(7\pi)=}$ $\underline{\boldsymbol{\pi}}$.

10. 设 $\sum$ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，则 $\boldsymbol{I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=}$ $\underline{2\pi}$.

二、计算题（本大题共 6 道小题，每题 10 分，共 60 分）

11. 求平面 $\boldsymbol{3x+y+z=2}$ 上最靠近坐标原点的点.

【解】 作拉格朗日函数 $\boldsymbol{L=x^2+y^2+z^2-\lambda(3x+y+z-2)}$

令 $\boldsymbol{L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0}$

得 $\begin{cases} L_x = 2x+3\lambda = 0 \\ L_y = 2y+\lambda = 0 \\ L_z = 2z+\lambda = 0 \\ L_\lambda = 3x+y+z-2=0 \end{cases}$ ， 解得 $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11})$

由于该平面到原点的最近距离确实存在，又因为 $\boldsymbol{L}$ 的驻点唯一，所以点 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ 为平面 $\mathbf{3x+y+z-2=0}$ 上最靠近坐标原点的点。

12.计算二重积分 $\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}\frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $xy=1$ 与直线 $y=x$ 和 $y=2$ 围成的有界闭区域.

【解】 $I=\iint\limits_{D}\frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad =\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{1}{x^2y^2}\mathrm{d}x$

$$=-\int_1^2\left.\frac{1}{xy^2}\right|_{\frac{1}{y}}^{y}\mathrm{d}y=\int_1^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^3}\right)\mathrm{d}y=\left.\left(\ln y+\frac{1}{2y^2}\right)\right|_1^2 \quad =\ln 2-\frac{3}{8}$$

13. 求微分方程 $y''+3y'+2y=\left(x^2+3x\right)e^{-x}$ 的通解.

【解】特征方程：$r^2+3r+2=0,$

特征根为 $r_1=-2, \quad r_2=-1,$

对应的齐次方程通解为：$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$

设非齐次方程特解为：$y^*=Q(x)e^{-x}$，代入原方程得

$Q''(x)+Q'(x)=x^2+3x,$ 可设 $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

解得 $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2},\ \mathrm{c}=-1,\ \mathrm{d}=0$

所以特解为：$y^*=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-x}$

故原方程通解为：$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)e^{-x}$

14. 计算曲线积分 $I=\int\limits_{L} x^2 y\mathrm{d}x+(-xy^2+\sin y^3)\mathrm{d}y$, 其中 L 为沿着 $x^2+y^2=1$ 上从点 $A(1,0)$ 到点 $B(-1,0)$ 的上半圆弧.

【解】 设 $P=xy^2$, $Q=-xy^2+\sin y^3$,

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-y^2-x^2$

补直线段 BA: $y=0$, $-1\le x\le 1$,

故 $I=\oint_{L+BA}-\int_{BA}=-\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0$

$$=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{4}$$

15. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$.

【解】令 $t=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}$

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}$ 的和函数为 $f(t)$，容易求出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}$ 的收敛半径为 1, 逐项积分得

$$\int_0^t f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(2n-1)t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n-1}$$

$$=\frac{t}{1-t^2},\quad t\in(-1,1)$$

$$f(t)=\left(\frac{t}{1-t^2}\right)'=\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2},\quad t\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}=\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\frac{1+\frac{x^2}{3}}{\left(1-\frac{x^2}{3}\right)^2}=\frac{3+x^2}{\left(3-x^2\right)^2},\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}=f(1)=\frac{3+1^2}{(3-1^2)^2}=1$$

16. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 Σ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\le z\le h)$ 部分的下侧.

【解】 设 $P=x^3$， $Q=y^3$， $R=z^3$，

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$$

补平面 $\Sigma_1: z=h$，取上侧。

故 $$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V-\iint\limits_{D}h^3\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^h\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi h^5\quad =3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}\rho^4\sin\varphi\mathrm{d}r-\pi h^5$$

$$=\frac{9}{10}\pi h^5-\pi h^5=-\frac{1}{10}\pi h^5$$

三、证明题（本大题共 2 道小题，每题 5 分，共 10 分）

17. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，若 $u(x,y)=f(x)g(y)$，证明：

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

18. 证明:交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n\ge 0)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 都收敛.