

一、 填空题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

得 分

一、填空题（本大题共 10 小题，每题 4 分，共 40 分）

1. 微分方程 $(x^2 + 1)dy + 2xydx = 0$ 的通解为_____.
2. 由方程 $x^3 + y^3 - yz = 1$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在 $(1, 1, 1)$ 点的全微分 $dz =$ _____.
3. 函数 $z = \ln(x^2 + y)$ 在点 $(-1, 1)$ 的梯度 $\text{grad } z =$ _____.
4. 数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{k + \ln n}{n^2}$ (k 为常数) 的敛散性是_____.
(若收敛, 需指出是绝对收敛还是条件收敛)
5. 函数 $f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$ 的麦克劳林级数为_____.
6. 曲面 $2xy - e^z + z = 3$ 的在点 $(2, 1, 0)$ 处的切平面方程为_____.
7. 设 曲 面 $\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$), 则 曲 面 积 分 $\iint_{\Sigma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS =$ _____.
8. 设曲线 L 是平面上任意一条闭曲线, 若 $\oint_L y dx - ax dy \equiv 0$, 则常数 $a =$ _____.
9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0; \\ 2x - 1, & 0 < x \leq \pi; \end{cases}$ $S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数, 则 $S(5\pi) =$ _____.
10. 设 $L: x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 1$, 则 $\int_L (2x + y) ds =$ _____.

二、 计算题（本大题共 5 小题，每题 10 分，共 50 分）



11. 求函数 $f(x, y) = 2xy + x^2 + 2y^2 - 1$ 的极值.
12. 计算曲线积分 $I = \int_L (y - 2x \cos y) dx + (x^2 + e^y) \sin y dy$, 其中 L 为

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

沿着 $x^2 + y^2 = 4$ 上从点 $A(2,0)$ 到点 $B(-2,0)$ 的上半圆弧.

13. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (y^2 + \cos z) dydz - (x^2 + e^z) dzdx + z^3 dxdy,$$

其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于平面 $z = 0$ 与 $z = 2$ 之间部分的下侧.

14. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

15. 求: (1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域及和函数;

(2) 常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 2^n}$ 的和.

三、证明题 (本大题共 2 小题, 每题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $u(x, y) = f(x + 2y) + \int_0^{x-2y} g(t) dt$, 其中 f 和 g 二阶可导,

试证明: $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

17. 已知函数 $y = y(x)$ 满足等式 $y' = x + y$, 且 $y(0) = 1$,

试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} \right]$ 的收敛性.