北京工业大学 2022—2023 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期末考试试卷 C 卷

考试说明:考试时间:95 分钟、考试方式:闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得分

一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1．已知函数 $z=x^y$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$____$\mathrm{d}x$________________.

2．设 L 是 xOy 平面的下半圆周 $y=-\sqrt{4-x^2}$，则 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$___$2\pi$________.

3．函数 $z=x^2-2xy$ 在点 $(1,0)$ 处沿该点到点 $(4,4)$ 的方向导数等于__$-\dfrac{2}{5}$_.

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\dfrac{1}{n}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散？ 条件收敛________.

5．$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数为___$\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n, x\in(-2,4)$_.

6. 微分方程 $xy'+2y=0$ 满足 $y(1)=1$ 的特解为______ $y=\dfrac{1}{x^2}$ __________.

7. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$，则 $\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=$_____ 0 ______________________.

8.曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为_____ $2x+y-4=0$ __.

9. 改变二次积分的积分次序 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x=$____ $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ ____.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的函数, 其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(-21\pi)=$_______ $\dfrac{\pi^2}{2}$ __________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 求由曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解：设立体为 Ω，

则体积 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$ ----4’

$=\iint\limits_{D_{r\theta}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{r^2}^{2-r}\mathrm{d}z$ ----6’

$=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (2-r-r^2)\,rdr$ ----8’

$=\dfrac{5}{6}\pi$ ----10’

也可用截面法计算

得 分

12. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n}$ 的收敛域及和函数.

解：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$，收敛半径 $R=2$. ----2'

而 $x=2$ 时，幂级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$，发散. ----3'

$x=-2$ 时，幂级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$，发散. ----4'

故幂级数的收敛域为 $x\in(-2,2)$. 所以 $x\in(-2,2)$ 时，

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{2^n}\right)'$$ ---6'

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2^n}\right)'=\left(\frac{x}{1-\frac{x}{2}}\right)'$$ ---8'

$$=\frac{x(4-x)}{(2-x)^2},$$ ---10'

得 分

13. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=6$ 下方的部分，取下侧.

解：作平面 $\Sigma_1: z=6\ (x^2+y^2\le 36)$，取上侧， ----2'

则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ----3'

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(4+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=288\pi$. ----6'

$\iint\limits_{\Sigma_1}3x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=216\pi$. ----9'

所以 $I=288\pi-216\pi=72\pi$. ---10'

得 分

14. 求微分方程 $y''+y=4x\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

解：先求对应齐次方程 $y''+y=0$ 的通解.

特征方程 $r^2+1=0$， -----1'

特征根 $r_1=i$， $r_2=-i$, -----3'

故齐次方程通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$ ----4'

设非齐次方程特解为 $y^*=ze^{3x}$, ----5'

得 $z''+6z'+10z=4x,$ -----6'

设 $z=ax+b,$ 解得 $a=\dfrac{2}{5},b=-\dfrac{6}{25}$ -----8'

所以非齐次方程的特解为 $y^*=\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{6}{25}\right)e^{3x}$, ----9'

原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(\dfrac{2}{5}x-\dfrac{6}{25}\right)e^{3x}$. -----10'

得 分

15. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值并指出是极大值还是极小值.

解：令 $f_x'(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0$， ----1'

$f_y'=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=0,$ ----2'

解得驻点为 $(\dfrac{1}{2},-1)$. ----3'

而 $f''_{xx}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1)$，$f''_{xy}(x,y)=4\mathrm{e}^{2x}(y+1)$，$f''_{yy}(x,y)=2\mathrm{e}^{2x}$

----6’

所以 $A=2\mathrm{e},B=0,C=2\mathrm{e},\ AC-B^2=4\mathrm{e}^2>0,$. ----9’

故函数在 $(\frac{1}{2},-1)$ 取得极小值，极小值为 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{\mathrm{e}}{2}$. ----10’

得 分

16. 计算 $I=\int_L(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 L 是在半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的一段弧.

解：补充直线 $\overline{AO}: y=0\quad(0\le x\le 2)$. ----2’

则

$$I=\oint_{L+\overline{AO}}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AO}}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y,$$

----3’

$$\oint_{L+\overline{AO}}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=-\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ----5’

$$=-\frac{\pi}{2}.$$ ----6’

$$\int_{\overline{AO}}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_2^0 x^2\mathrm{d}x$$ ----8’

$$=-\frac{8}{3}.$$ ----9’

所以 $I=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}$. ----10’

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|\quad(n=2,3,\cdots)$，$0<k<1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

证明：由已知有 $|x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|\le k^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\le\cdots\le k^{n-1}|x_2-x_1|$，

----2'

当 $0<k<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|x_2-x_1|=|x_2-x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}k^{n-1}$ 收敛， ----4'

由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛. ---5'

得 分

18. 设 $u=yf(\frac{x}{y})+xg(\frac{y}{x})$，其中 f,g 具有二阶连续导数，证明:

$$x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=0.$$

证明：$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(\frac{x}{y})+g(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}g'(\frac{y}{x})$， ----2'

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})+g'(\frac{y}{x})(-\frac{y}{x^2})+\frac{y}{x^2}g'(\frac{y}{x})+\frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x})=\frac{1}{y}f''(\frac{x}{y})+\frac{y^2}{x^3}g''(\frac{y}{x}),$$

----3'

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(-\frac{x}{y^2})f''(\frac{x}{y})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}g'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x})=(-\frac{x}{y^2})f''(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}g''(\frac{y}{x}),$$

----4'

所以 $x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=0$ ----5'