

● 北京工业大学 2020—2021 学年第二学期

《概率论与数理统计》周末重修试卷(工、经)

考试说明：考试时间：2021 年 5 月 16 日；考试方式：闭卷。

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ **学号：**_____ **班号：**_____

注：本试卷共 二 大题，共 3 页，满分 100 分。

卷面成绩汇总表(阅卷教师填写)

题号	一	二	三	四	五	六	总成绩
满分	35	13	13	13	13	13	
得分							

一、填空题(本大题共 6 个小题，共 14 个空，每空 2 分，共 28 分)

- 1、设 A, B 是两个随机事件，已知 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.6, P(A \cup B) = 0.8$ ，则 $P(A\bar{B}) =$ 0.2， $P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$ 0.2， $P(B - A) =$ 0.3。
- 2、甲、乙、丙三人独立地向同一目标各射击一次，他们击中目标的概率分别为 0.7，0.6 和 0.8，则目标被击中的概率为 0.976。
- 3、设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} a + be^{-0.5x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ，其中 a 与 b 为常数，则 $a =$ 1， $b =$ -1。
- 4、若随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1 \sim N(3, 2^2)$ ， $X_2 \sim N(1, 1)$ ，令 $X = 2X_1 - 3X_2$ ，则 $X \sim$ $N(3, 25)$ ， $P\{-2 < X < 8\} =$ 0.6826。注： $\Phi(x)$ 为正态分布 $N(0, 1)$ 的分布函数， $\Phi(1) = 0.8413$ ， $\Phi(2) = 0.9772$ 。
- 5、设总体为 $[0, \theta]$ 上的均匀分布，则 θ 的矩估计为 $2\bar{X}$ 极大似然估计为 $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$
- 6、若 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机样本，记 \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，则 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim$ $N(0, 1)$ ， $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sqrt{S^2} \sim$ t_{n-1} ， $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim$ χ_{n-1}^2 。资料由公考365收集整理并免费分享

二、计算题（本大题共 6 个小题，每题 12 分，共 72 分，做题时须写出解题过程，否则不能得分）

1、一批产品共 20 件，其中有 5 件是次品，其余为正品。现从这 20 件产品中不放回地任意抽取 3 次，每次只取 1 件，求下列事件的概率：

- (1) 在第一、第二次取到正品的条件下，第三次取到次品；
- (2) 第三次才取到次品；
- (3) 第三次取到次品。

解：用 A_i 表示事件“第 i 次取到的是正品”（ $i=1,2,3$ ），则 \bar{A}_i 表示事件“第 i 次取到的是次品”（ $i=1,2,3$ ）。 $P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{4} \times \frac{14}{19} = \frac{21}{38}$

$$P(A_1) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}, P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{4} \times \frac{14}{19} = \frac{21}{38}$$

(1) 事件“在第一、第二次取到正品的条件下，第三次取到次品”的概率为：

$$P(\bar{A}_3|A_1 A_2) = \frac{5}{18}.$$

(2) 事件“第三次才取到次品”的概率为：

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1 A_2) = \frac{15}{20} \times \frac{14}{19} \times \frac{5}{18} = \frac{35}{228}$$

(3) 事件“第三次取到次品”的概率为： $\frac{1}{4}$

此题要注意区分事件（1）、（2）的区别，一个是求条件概率，一个是一般的概率。再例如，设有两个产品，一个为正品，一个为次品。用 A_i 表示事件“第 i 次取到的是正品”（ $i=1,2$ ），

则事件“在第一次取到正品的条件下，第二次取到次品”的概率为： $P(\bar{A}_2|A_1) = 1$ ；而事件

“第二次才取到次品”的概率为： $P(A_1 \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) = \frac{1}{2}$ 。区别是显然的。

2、设某地区每天的用电量 X （单位：百万千瓦·时）是一个连续型随机变量，概率密度函数为

$$f(x) = 12x(1-x)^2, 0 < x < 1$$

假设该地区每天的供电量仅有 80 万千瓦·时，求该地区每天供电量不足的概率。若每天的供电量上升到 90 万千瓦·时，每天供电量不足的概率是多少？

答案：

解：（1）若供电量为 80 万千瓦小时，则供电量不足的概率为：

$$P(X > 0.8) = \int_{0.8}^{\infty} f(x) dx = \int_{0.8}^1 12x(1-x)^2 dx = \int_{0.8}^1 12(x - 2x^2 + x^3) dx = 0.0272$$

若供电量为 90 万千瓦小时，则供电量不足的概率为：

$$P(X > 0.9) = \int_{0.9}^{\infty} f(x) dx = \int_{0.9}^1 12x(1-x)^2 dx = \int_{0.9}^1 12(x - 2x^2 + x^3) dx = 0.0237$$

3、设随机变量 $X \sim N(0,1)$ ，求下列随机变量 Y 的概率密度函数：

(1) $Y = 2X$; (2) $Y = e^{-X}$; (3) $Y = X^2$;

解： X 的密度函数和分布函数分别为：

$$f_X(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad F_X(x) = \Phi(x) = P(X \leq x),$$

(1) $F_Y(y) = F_X(y/2)$, 于是有

$$f_Y(y) = f_X(y/2)/2$$

(2) $Y = e^{-X}$ 的密度函数和分布函数分别为 $f_Y(y), F_Y(y) = P(Y \leq y)$, 其中

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ P(X \geq -\ln y), & y > 0 \end{cases},$$

当 $y > 0$ 时

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X \geq -\ln y) = 1 - P(X < -\ln y) = 1 - P(X \leq -\ln y) = 1 - \Phi(-\ln y) \\ &= \Phi(\ln y) \end{aligned}$$

于是 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \phi(\ln y)(\ln y)', & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{y} \phi(\ln y), & y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln y)^2}{2}\right\}, & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $Y = X^2$ 的密度函数和分布函数分别为 $f_Y(y), F_Y(y) = P(Y \leq y)$, 其中

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ P(\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}), & y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 2\Phi(\sqrt{y}) - 1, & y > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

于是 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 2\phi(\sqrt{y})(\sqrt{y})', & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{y}}\phi(\sqrt{y}), & y > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left\{-\frac{y}{2}\right\}, & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

4、已知二维随机向量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

求：(1) 常数 A ；

(2) 边缘密度函数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ；

(3) X 与 Y 是否独立？

解：(1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x c dy$

$$= c \int_0^1 (x - x^2) dx = c \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{c}{6} = 1$$

所以 $c = 6$.

(2) 因为，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2)$

所以， X 的边缘分布密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

又因为，当 $0 \leq y \leq 1$ 时， $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{y^2}^y 6 dx = 6(\sqrt{y} - y)$

所以， Y 的边缘分布密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 不独立。

资料由公众号【工大喵】收集整理并免费分享

5、正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty$$

其中 μ, σ^2 为待估参数。

求：(1) μ, σ^2 的矩估计；

(2) μ, σ^2 的极大似然估计。

解：(1), σ^2 的矩估计： $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$

(2) μ, σ^2 的极大似然估计 $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$

6、设甲、乙两煤矿所产的煤中含煤粉率分别为 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ ，其中 σ^2 未知。为检验这两个煤矿的煤含煤粉率有无明显差异，从两矿中取样若干份，测试结果如下：

甲矿(%)：24.3, 22.8, 23.7, 22.3, 19.4, 20.5; $\bar{x} = 22.17, \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = 17.75$

乙矿(%)：15.7, 16.9, 20.2, 16.7, 19.8; $\bar{y} = 17.86, \sum_{j=1}^5 (y_j - \bar{y})^2 = 16.17$

试在显著性水平为 0.05 下，检验“含煤粉率无差异”这个假设。

附： t 分布与 χ^2 分布表

$t_9(0.025) = 2.2622$	$t_9(0.05) = 1.8331$	$t_{10}(0.025) = 2.2281$	$t_{10}(0.05) = 1.8125$
$\chi_9^2(0.025) = 19.023$	$\chi_9^2(0.05) = 16.919$	$\chi_9^2(0.975) = 2.700$	$\chi_9^2(0.95) = 3.325$
$\chi_{10}^2(0.025) = 20.483$	$\chi_{10}^2(0.05) = 18.307$	$\chi_{10}^2(0.975) = 3.247$	$\chi_{10}^2(0.95) = 3.940$

解： $S^2 = 3.77; t_{m+n-2}(0.025) = 2.2622$

因为 $|\bar{X} - \bar{Y}| \geq 2.66$

拒绝原假设，甲乙含煤粉率有显著差异。