北京工业大学 2018—2019 学年第二学期

《高等数学(工)—2》期中考试试卷

考试说明：考试日期：2019 年 4 月 22 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

…………………………………………………………………………………………

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	40	50	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解为__________ $\ln y=Cx$ _________

2. 微分方程 $xy'+y=\sin x$ 满足初始条件 $y(\pi)=1$ 的特解为___ $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$ __

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 是条件收敛、绝对收敛还是发散？_____条件收敛___

4. 函数 $y=x^2\sin\dfrac{x}{2}$ 的麦克劳林级数中 x^{2019} 的系数为______ $\dfrac{1}{2^{2017}\cdot 2017!}$ ______

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为________ $[1,3)$ _______________

6. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=6-2x^2-y^2 \end{cases}$ 在坐标面 xoy 的投影的曲线方程为

___ $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z=0 \end{cases}$ ________

7. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=-3$ 处收敛，在 $x=1$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 ____$[-2,2)$________

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi \le x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & 0<x<\pi \end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，且其傅里叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(30\pi)=$___$\dfrac{\pi+1}{2}$__________________

9. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}=$______2____________

10. 函数 $z=e^{x^2y}$ 在点 $(0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(0,-1)}=$________0________________

二、计算题：（本大题共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分）

得 分

11．讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x+y}, & (x,y)\ne 0 \\ 0, & (x,y)=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

解：因为 $(x,y)\ne 0$ 时，$0<\left|(x+y)\sin\dfrac{1}{x+y}\right| \le |x+y| \le |x|+|y|$，

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x|+|y|=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\dfrac{1}{x+y}=0=f(0,0)$，

所以二元函数在点 $(0,0)$ 处连续。

得 分

12. 设 $z = xf(x, \frac{y}{x})$ 其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

解：$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, \frac{y}{x}) + x\left[f_1'(x, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} f_2'(x, \frac{y}{x})\right]$

$$= f(x, \frac{y}{x}) + xf_1'(x, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f_2'(x, \frac{y}{x})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{x} f_2'(x, \frac{y}{x}) + f_{12}''(x, \frac{y}{x}) - \frac{1}{x} f_2'(x, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} f_{22}''(x, \frac{y}{x})$$

$$= f_{12}''(x, \frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} f_{22}''(x, \frac{y}{x})$$

得 分

13. 将函数 $f(x) = \ln\frac{x}{1+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

解：$f(x) = \ln\frac{x}{1+x} = \ln x - \ln(1+x),\ x > 0$，

$$\ln x = \ln[1+(x-1)] = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0 < x \le 2,$$

$$\ln(1+x) = \ln[2+(x-1)] = \ln 2 + \ln(1+\frac{x-1}{2})$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,\ -1 < x \le 3$$

所以 $f(x) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n, 0 < x \le 2$

得 分

14．求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 （1）先求对应的齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解。

特征方程 $r^2-3r+2=0$， 特征根 $r_1=1,r_2=2$，

对应齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$。

（2）设非齐次方程的特解为 $y^*=ze^{2x}$，代入方程得 $z''+z'=x$，

设 $z=ax^2+bx$，代入上式得 $a=\dfrac{1}{2},b=-1$，

非齐次方程的特解为 $y^*=\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}$，

原方程通解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}$.

得 分

15．将函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上满足收敛定理条件，将其以 2π 为周期延拓成 $\mathbf{R}$ 上的周期函数 $F(x)$. $F(x)$ 在 $x=k\pi$ 处不连续，此时其Fourier级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$.

当 $x\neq k\pi$ 时，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-1\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\mathrm{d}x\right)=1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\cos nx\mathrm{d}x\right)=0，\ (n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}2\sin nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{3}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}\dfrac{6}{n\pi}, & n=1,3,5,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

所求函数的傅立叶展开式为

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}，\ (-\pi<x<0,\ \ 0<x<\pi)$$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

16. 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, (n=1,2,\cdots), a_n > 0, b_n > 0$，证明:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明： 因为 $\dfrac{a_2}{a_1} \le \dfrac{b_2}{b_1}$, 有 $a_2 \le \dfrac{a_1}{b_1} b_2$,

$\dfrac{a_3}{a_2} \le \dfrac{b_3}{b_2}$, 有 $a_3 \le \dfrac{a_2}{b_2} b_3 \le \dfrac{a_1}{b_1} b_3$,

……

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, 有 $a_{n+1} \le \dfrac{a_n}{b_n} b_{n+1} \le \cdots \le \dfrac{a_1}{b_1} b_{n+1}$,

由正项级数的比较审敛法知若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

得 分

17. 证明级数 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$ 发散.

证明：讨论加括号的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) + \cdots,$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} = \frac{2}{n-1},$$

因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{n-1}$ 发散，所以原级数发散.