北京工业大学 2021——2022 学年第一学期

《常微分方程》期末考试试卷（A 卷）

考试说明： **考试时间为 95 分钟。必须用黑色钢笔或黑色签字笔答题。**

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ____________ **学号：** ____________ **班号：** ____________

注：本试卷共 六 大题，共 八 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	四	五	六					**总成绩**
满分	20	30	10	15	15	10					
得分											

得 分

一、 判断下列命题对错（每小题前标记√或×）（总 20 分）

（）1、n阶线性微分方程的解空间是 n 维线性空间。

（）2、对于微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$，通过变量变换：$u=\frac{y}{x}$ 此方程可化为一阶线性微分方程，

（）3、微分方程$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$的通解是$y=A\sin(x+B)$。

（）4、形如$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$的微分方程，这里$g=g(u)$是连续函数，通过变量替换一定可以化为一个变量分离方程。

（）5、 下面两个微分方程：$xdy + ydx = 0$，$xdy - ydx = 0$都是恰当微分方程。

（）6、如果微分方程$Mdx + Ndy = 0$有积分因子，则方程的积分因子一定是唯一的。

（）7、设A 是$n \times n$阶常数矩阵，常系数线性微分方程组 $\vec{x}' = A\vec{x}$ 的任意解都可写为（$\exp At$）$\vec{c}$，其中$\vec{c}$是 n 维常列向量。

（）8、对于常系数线性微分方程组 $\vec{x}' = A\vec{x}$ ，若J是矩阵A的若当标准型，T是可逆矩阵：$J = T^{-1}AT$，则$T\exp Jt$是此线性微分方程组的基解矩阵，这里t是线性微分方程组的自变量。

（）9、下面三个向量函数是线性无关的：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t^2\\t\\0\end{pmatrix},$$

（）10、微分方程 $\frac{dy}{dx} = \sin(xy + x^2)$的任意解的存在区间是整个实数轴。

得 分

二、 填空题题目（每空 3 分，总 30 分）

1、对于常数 n，微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{ny}{x+1}$的通解是________.

2、设$X_1(s)=\mathcal{L}[x_1(t)],X_2(s)=\mathcal{L}[x_2(t)]$, 对一阶线性微分方程组：

$$\begin{cases} x_1^{'}=3x_1+5x_2+e^{-t}, \\ x_2^{'}=-5x_1+3x_2 \end{cases}$$

$$x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,$$

进行拉普拉斯变换，得到的代数方程组是________.

3、三阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases} x'''+tx''+2x'+3x=4t \\ x(0)=0,x'(0)=1，x''(0)=2, \end{cases}$$

可以化为下列线性微分方程组的初值问题：$\vec{x}'=A\vec{x}+\vec{F}(t)$, $\vec{x}(0)=\vec{\eta}$ 则 $A(t)=$ ________,$\vec{F}(t)=$ ________,$\vec{\eta}=$____________.

4、微分方程$\mathrm{y}=\mathrm{x}\frac{dy}{dx}+(\frac{dy}{dx})^2$的通解是________.

5、一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$解关于初值的连续依赖性定理是________.

6、微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=3t+1$的通解是________.

7、设A（t）是$\mathrm{n}\times\mathrm{n}$阶矩阵，齐次线性微分方程组 $\vec{\mathrm{x}}'$（t） $=\mathrm{A(t)}\vec{\mathrm{x}}\mathrm{(t)}$ 的基解矩阵是Φ（t），通过常数变易法可知线性微分方程组 $\vec{\mathrm{x}}'$（t） $=\mathrm{A(t)}\vec{\mathrm{x}}\mathrm{(t)}+\vec{\mathrm{f}}\mathrm{(t)}$ 一定有形如Φ（t）$\vec{\mathrm{c}}$（t）的解，

则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\vec{\mathrm{c}}$（t） = ________。

8、设矩阵$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，则$\mathrm{expAt}=$________.

得 分

三、（10 分）用 Picard 逐步逼近法求微分方程 $\frac{dy}{dx}=x-y^2$ 过点(1,0)的近似解 $\varphi_0(\mathrm{x}), \varphi_1(\mathrm{x}), \varphi_2(\mathrm{x})$。

得 分

四、（15 分） 已知$x_1(t)$是二阶微分方程：$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$的一个非零解，作变换$x=x_1y$,

（1）给出y满足的微分方程并求解。

（2）求出微分方程$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\frac{dx}{dt}+q(t)x=0$的另一个与$x_1(t)$线性无关的解。

得 分

五、（15 分）求解线性微分方程组：

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{cases}$$

得 分

六、（10 分）设 $\Phi(t)$ 是齐次线性微分方程组 $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ 的基解矩阵，满足：$\Phi(t_0) = E$，这里 E 是单位矩阵，证明基解矩阵的行列式 $\det\Phi(t) > 0$。