解：体系的哈密顿符为

$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 - e\varepsilon x = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}'$

$\hat{H}^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2$, $\hat{H}' = -e\varepsilon x$

$\hat{H}^{(0)}$的本征值$E_m^{(0)} =$

本征函数$\psi_n^{(0)} =$

$\hat{H}'$的本征值$E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}$

本征函数$\psi_n \approx \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)}$

$H'_{mn} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^{(0)*} e\varepsilon \psi_n^{(0)} dx$

由递推公式得 $x\psi_n^{(0)} = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}^{(0)} + \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}^{(0)}\right]$

$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left[\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}^{(0)} + \sqrt{n}\,\psi_{n-1}^{(0)}\right]$

则得 $H'_{mn} = -e\varepsilon\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left[\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n-1}\right]$

能量的一级修正$E_m^{(1)} = 0$，注意到$E_m^{(0)} = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

则能量的二级修正为$E_m^{(2)} = \sum_m{}' \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = -\frac{e^2\varepsilon^2}{2\mu\omega^2}$

波函数一级修项为$\psi_n^{(1)} = \sum_m{}' \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} = \sqrt{\frac{e^2\varepsilon^2}{2\mu\hbar\omega^3}}\left[\sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}^{(0)} - \sqrt{n}\,\psi_{n-1}^{(0)}\right]$

$\psi_m^{(0)}$

$$\left|\frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\right| \ll 1, \quad m \neq n \tag{4.1-27}$$

可将上式作为定态微扰论方法的适用条件。由上式可知，定态微扰论方法能否适用不仅取决于矩阵元 H'_{mn} 的大小，而且与能级间的距离 $\left|E_n^{(0)}-E_m^{(0)}\right|$ 有关。如果上式不能满足，则通常认为定态微扰论方法不适用。

例 1 设电荷为 e 沿 x 轴的线性谐振子受恒定弱电场 ε 作用，电场沿 x 轴正方向，用微扰法求体系的能量至二级近似和波函数至一级近似。

解：体系的哈密顿算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2-e\varepsilon x=\hat{H}^{(0)}+\hat{H}'$$

$$\hat{H}^{(0)}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2, \qquad \hat{H}'=-e\varepsilon x$$

$\hat{H}^{(0)}$ 的本征值 $E_n^{(0)}$ 和对应的本征函数 $\psi_n^{(0)}$ 分别由(2.12-14)式和(2.12-15)式给出，$\hat{H}$ 的本征值和对应的本征函数分别记为 E_n 和 ψ_n，

解：$E_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

∵ $\bar{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha^2x^2}dx = 0$

$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$，$\bar{p}_x = 0$.

∴ $\Delta x = x - \bar{x} = x$，$\Delta p_x = p_x - \bar{p}_x = p_x$

测不准关系 $\Delta x \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$ 得 $p_x = \hbar/2x$

∴ $E_x = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\hbar^2}{8m}\left(-\frac{2}{x^3}\right) + m\omega^2x = 0$，得 $x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$

∴ $E_{0x} = \frac{\hbar^2}{8m}\times\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\times\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{2}\hbar\omega$

$\frac{1}{2m}\cdot\frac{2\hbar}{m\omega}$ $\frac{2\hbar}{m\omega}$

$\hbar\times\frac{m\omega}{2\hbar}$

$\frac{1}{2m}\cdot\hbar^2\times\frac{m\omega}{2\hbar}$ $\frac{2\hbar}{m\omega}$

$\frac{\hbar^2}{4x^2}$

一、 设F、G都是厄米算符，$FG \neq GF$，问

1. $[F, G] = FG - GF$ 是否是厄米算符？

2. $i[F, G] = i(FG - GF)$ 是否是厄米算符？

3. $\{F, G\} = FG + GF$ 是否是厄米算符？

二、 设 算 符 函 数 $F(x, p)$ 可 以 展 开 为 算 符 x, p 的 泰 勒

$\psi^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ $F(x, p) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m,n} x^m p^n$,，求证 $[p, F] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} F$， $[x, F] = i$

三、 利用测不准关系估算一维谐振子的基态能量。

四、 设体系处于状态 $\psi = c_1 Y_{11} + c_2 Y_{20}$， $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$，求

$$\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad \beta=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}\quad \sigma_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\sigma_x\alpha=\beta\\ \sigma_x\beta=\alpha\\ \sigma_y\alpha=i\beta\\ \sigma_y\beta=-i\alpha\\ \sigma_z\alpha=\alpha\\ \sigma_z\beta=-\beta\end{cases}$$

$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\cdot\alpha(1)\alpha(2)$

$=(\sigma_{1x},\sigma_{1y},\sigma_{1z})\cdot\alpha(1)\ (\sigma_{2x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{2z})\cdot\alpha(2)$

$=[\beta_{(1)},i\beta_{(1)},\alpha(1)]\cdot[\beta_{(2)}\ i\beta_{(2)},\alpha(2)]$

$=\beta_{(1)}\beta_{(2)}-\beta_{(1)}\beta_{(2)}+\alpha(1)\alpha(2)$

$\rightarrow\lambda=1$

$\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\beta_{(1)}\alpha(2)+\alpha(1)\beta(2)]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{\sigma}_1\beta_{(1)}\vec{\sigma}_2\alpha(2)+\vec{\sigma}_1\alpha(1)\vec{\sigma}_2\beta(2)]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha(1),-i\alpha(1),-\beta(1))(\beta(2),i\beta(2),\alpha(2))+(\beta(1),i\beta(1),\alpha(1))(\alpha(2),-i\alpha(2),-\beta(2))]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\cancel{\alpha(1)\beta(2)}+\alpha(1)\beta(2)-\cancel{\alpha(2)\beta(1)}+\cancel{\alpha(2)\beta(1)}+\alpha(2)\beta(1)-\cancel{\alpha(1)\beta(2)}]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)]$

$\lambda=1$

$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\cdot\beta_1\beta_2$

$=\vec{\sigma}_1\beta_1\ \vec{\sigma}_2\beta_2$

$=(\alpha_1,-i\alpha_1,-\beta_1)(\alpha_2,-i\alpha_2,-\beta_2)$

$=\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$

$=\beta_1\beta_2$

$\lambda=1$

$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\vec{\sigma}_1\cdot\alpha_1\vec{\sigma}_2\cdot\beta_2-\vec{\sigma}_1\cdot\beta_1\cdot\vec{\sigma}_2\cdot\alpha_2]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\beta_1,i\beta_1,\alpha_1)(\alpha_2,-i\alpha_2,-\beta_2)-(\alpha_1,-i\alpha_1,-\beta_1)(\beta_2,i\beta_2,\alpha_2)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_1\beta_2-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[-3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)]$

$\therefore\lambda=-3$

$\sigma_{1x}\sigma_{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1]\quad\lambda=-1$

$\sigma_{1y}\sigma_{2y}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1]=\frac{1}{\sqrt{2}}[i\beta_1(-i\alpha_2)-i\beta_2(-i\alpha_1)]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2]\quad\lambda=-1$

$\sigma_{1z}\sigma_{2z}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_1(-\beta_2)-(\alpha_2)(-\beta_1)]=\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2]\ \therefore\ \lambda=-1$

6. 求σ_y表象中，σ_x、σ_y、σ_z的矩阵表示。

△ 7. 求$\hat{s}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$及$\hat{s}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$的本征值和所属的本征函数。

8. 求 自 旋 角 动 量 在 任 意 方 向 $\vec{n}$ [方向余旋是$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$] 的 投 影 $\hat{s}_n=\hat{s}_x\cos\alpha+\hat{s}_y\cos\beta+\hat{s}_z\cos\gamma$的本征值和本征矢。

9. 对于二电子体系的自旋三重态和单态(χ_{00})，证明它们都是$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$的本征态,本征值分别为 1 和-3。

10. 同上题，验证χ_{00}是$\sigma_{1x}\sigma_{2x},\sigma_{1y}\sigma_{2y},\sigma_{1z}\sigma_{2z}$的共同本征态，本征值均为-1。

11. 对于自旋单态χ_{00}，求$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}_1)(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}_2)$的平均值，其中$\vec{a},\vec{b}$为常矢量。

$[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=i\hbar\hat{S}_z$

1、简述波粒二象性。

答：波粒二象性是粒子的基本属性，指微观粒子既有粒子性也具有波动性。

$$\begin{cases} E=\hbar\omega=h\nu \\ \vec{p}=\hbar\vec{k}=\frac{h}{\lambda}\vec{n} \end{cases}$$

2、微观粒子状态用波函数描述，体系空间r点处小体积元内出现粒子的概率与波函数模平方($|\psi|^2$)成正比。

$$dW(\vec{r},t)=|D|^2|\psi(\vec{r},t)|^2d\tau.$$

$$|\psi(\vec{r},t)|^2=\psi(\vec{r},t)\psi^*(\vec{r},t)$$

3、中心力量 $\psi(\vec{r})=R(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$

主量子数 $n=1,2\cdots$

角量子数 $l=0,1,\cdots,n-1$

磁量子数 $m=0,\pm1,\pm2\cdots\pm l$.

4、测不准原理

$$[x,p]=i\hbar$$

$$(\Delta x)^2\cdot(\Delta p)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}$$

$$\left[(\Delta x)(\Delta p)\geq\frac{\hbar}{2}\right]$$

5、全同粒子与全同性原理

全同粒子：是指静止质量 μ，电荷Q，自旋S等固有性质（内禀性质）完全相同的微观粒子

全同性原理 在全同粒子组成的体系中，交换两个粒子的状态，体系的微观状态不变。