得 分

一 填空题（每小题 3 分，共 30 分．注意：所有题目需给出计算结果；“$a=a$”型答案失分；“或者 a，或者 b”型答案失分）

1. 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 9 & 1 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有非零解，且 $a<0$，则 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ a & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}=$ ______

2. $\begin{vmatrix} 6-2x & 5 & -1 \\ 3 & 1-x & 3 \\ -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix}=0$ 三个根 x_1,x_2,x_3 的和 $x_1+x_2+x_3=$ ______

3. 若 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有非零解，则 $a=$ ______

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\left(\qquad\qquad\right)$

5. 若 A 是 3 阶实方阵；$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维实列向量，满足 $A\alpha_1=8\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+8\alpha_3$，则 A 的重根特征值（即代数重数>1的特征值）是 ______

6. 若 3 维实列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2 满足 $\begin{cases} \alpha_1=\beta_1+\beta_2 \\ \alpha_2=-\beta_1+2\beta_2 \\ \alpha_3=2\beta_1+5\beta_2 \end{cases}$，且 β_1,β_2 线性无关；矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则 $AX=0$ 的解空间的维数是 ______

7. 若 A 是2阶实矩阵；$(A+E)X=0$，$(2A+3E)X=0$ 均有非零解，则行列式

$\left|2A^{*}-A^{-1}+8A\right|=$ ______

8. 若 $A=\begin{pmatrix} a & a & a & -a \\ a & -a & a & a \\ a & a & -a & a \\ -a & a & a & a \end{pmatrix}$，实数 $a\neq 0$，则 $A^{-1}=$

____

9. 二次型 $f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 的正惯性指数与负惯性指数之

和 $=$ ______

10. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ 满足 $2A^{21}-A^{20}+3A^{19}-8A^{2}+6A-2E=0$，

则行列式 $\begin{vmatrix} b & a \\ d & b \end{vmatrix}$ ______ 0（填 >，=，< 三个符号之一）。

得 分

二（12分） 计算行列式 $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值。

得分

三（12分） 用初等变换的方法，解方程 $X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

得 分

四（12）a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -7 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = a \end{cases}$ 有解？

有解时，写出通解。

得 分

五（12 分）给定列向量组

$$\alpha_1 = (0,1,-1,1)^T,\ \alpha_2 = (-1,0,1,2)^T,$$
$$\alpha_3 = (2,-2,3,0)^T,\ \alpha_4 = (8,-9,16,5)^T.$$

1 求该向量组的秩；

2 求该向量组的一个极大线性无关组；

3 把其余向量用问题 2 中求出的极大线性无关组线性表出。

得 分

六（12 分） 对自然数 n，用相似对角化的方法，计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

得 分

七（5 分）已知 b_1, b_2, b_3 是不等于零的实数，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

是正定矩阵。证明 $B = \begin{pmatrix} b_1a_{11}b_1 & b_1a_{12}b_2 & b_1a_{13}b_3 \\ b_2a_{21}b_1 & b_2a_{22}b_2 & b_2a_{23}b_3 \\ b_3a_{31}b_1 & b_3a_{32}b_2 & b_3a_{33}b_3 \end{pmatrix}$ 也是正定矩阵。

得 分

八（5 分）．已知 A 和 B 分别是 $m \times n$ 型和 $n \times m$ 型实矩阵，AB 和 BA 都是单位矩阵。证明 $m = n$.