2016-2017年

得 分

一、填空题（每题 2 分，共 20 分）

$e^{3+i}=e^3\cdot e^i$

$=e^3[\cos 1+i\sin 1]$

1、$\mathrm{Im}\left(e^{3+i}\right)=$ $e^3\sin 1$ 。

$\arctan 1$

2、求主辐角 $\arg(-1-i)=$ $-\frac{3}{4}\pi$ 。

3、$\int_0^i z\cos z\,dz=$ 0 。

$\int_0^i z\,d\sin z=z\sin z\Big|_0^i-\int_0^i \sin z\,dz=$

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(3-4i)^n z^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{5}$ 。

5、$i^{(1+i)}=$ $ie^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$ 。 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

6、$(z+3)\mathrm{Re}(z+3)$ 的可导点为 $z=$ -3 。

7、设 z_0 是 $f(z)$ 的极点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=$ ∞ 。

8、$\sqrt[6]{(1+i)^2}$ 在复平面上有 6 个相异根。

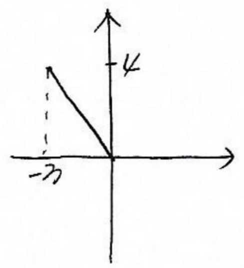
9、$\cos 3t+\sin t$ 的 Fourier 变换为 $\pi\delta(\omega-3)+\pi\delta(\omega+3)-\pi i\delta(\omega-1)+\pi i\delta(\omega+1)$ 。

10、$\oint_{|z-2|=1}\frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}}dz=$ $\frac{2\pi i}{99!}e^5$ 。

$2\pi i\frac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to 2}(z-2)^{100}\cdot\frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}}$

得 分

二、计算题（每题 5 分，共 20 分）



1、计算 $\sin(4+7i)$

解：$\sin(4+7i)=\frac{e^{i(4+7i)}-e^{-i(4+7i)}}{2i}$

$=\frac{e^{4i-7}-e^{-4i+7}}{2i}$

$=-\frac{i}{2}\left(e^{-7}(\cos 4+i\sin 4)-e^{7}(\cos 4-i\sin 4)\right]$

$=\frac{i\cos 4}{2}(e^{7}-e^{-7})+\frac{\sin 4}{2}(e^{-7}+e^{7})$

2、解方程 $e^z=-3+4i$

解：$z=\mathrm{Ln}(-3+4i)$

$=\ln|-3+4i|+i\mathrm{Arg}(-3+4i)$

$=\ln 5+i(-\arctan\frac{4}{3}+\pi+2k\pi$

$k\in\mathbb{Z}$

3、$f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 3;\\ 0, & |t|>3.\end{cases}$ 的 Fourier 变换。

解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$

$=\int_{-3}^{3} e^{-i\omega t}dt$

$=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-3}^{3}$

$=-\frac{1}{i\omega}\left(e^{-3i\omega}-e^{3i\omega}\right)$

$=\frac{2\sin 3\omega}{\omega}$

$\cos iy=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$

$\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$

4、计算 $(1+i)^{11}(1-i)^{7}$

$=\left[(1+i)(1-i)\right]^{7}(1+i)^{4}$

$=2^{7}\cdot(2i)^{2}$

$=-2^{9}$

得 分

三、计算留数与积分。（每题 8 分，共 40 分）

1、计算留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{3z}}{z^{3}},0\right]$。

解：由于 $z=0$ 是 $\frac{1-e^{3z}}{z^3}$ 的二级极点，

$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{1-e^{3z}}{z^{3}},0\right]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\cdot\frac{1-e^{3z}}{z^3}\right)$

$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2(1-e^{3z})}{dz^2}$

$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}-9e^{3z}=-\frac{9}{2}$

2、计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^{2}+1}dz$。

解：$z=\pm i$ 是被积函数的一级极点，且均在 $|z|=2$ 内。

由留数定理得：

$\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2+1}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2+1},i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2+1},-i\right]\right]$

由规则III得：$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2+1},i\right]=\frac{\sin z}{2z}\Big|_{z=i}=\frac{\sin i}{2i}$

$\mathrm{Res}\left[\frac{\sin z}{z^2+1},-i\right]=\frac{\sin z}{2z}\Big|_{z=-i}=\frac{\sin(-i)}{-2i}=\frac{\sin i}{2i}$

$\therefore \oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2+1}dz=2\pi i\cdot\frac{\sin i}{i}=2\pi\sin i=2\pi\cdot\frac{e^{i\cdot i}-e^{-i\cdot i}}{2i}=\pi(e-e^{-1})i$

3、计算积分 $\int_C \left(x+y^2+iy\right)dz$，其中 C 是从 0 到 $2+i$ 的直线段。

解：C 的参数方程为 $z(t)=(2+i)t,\ 0\le t\le 1$，$dz=(2+i)dt$

$$\int_C (x+y^2+iy)\,dz=\int_0^1 (2t+t^2+ti)(2+i)\,dt$$

$$=(2+i)\left(t^2+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\cdot i\right)\Big|_0^1$$

$$=(2+i)\left(\frac{4}{3}+\frac{i}{2}\right)$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{6}+\frac{7}{3}i$$

4、计算积分 $\oint_{|z|=4}\frac{z}{\sin z}dz$。

解：由 $\sin z=0$ 得 $z=k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$。

$z=0$，$z=\pi$，$z=-\pi$ 均在 $\boxed{|z|=4}$ 内。

且 $z=0$ 是可去奇点，$z=\pi$ 是一级极点，$z=-\pi$ 是一级极点，

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},0\right]=0$$

由规则Ⅲ $\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},\pi\right]=\frac{z}{\cos z}\Big|_{z=\pi}=\frac{\pi}{\cos\pi}=-\pi$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},-\pi\right]=\frac{z}{\cos z}\Big|_{z=-\pi}=\frac{-\pi}{\cos(-\pi)}=\pi$$

则由留数定理得：

$$\oint_{|z|=4}\frac{z}{\sin z}dz=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},\pi\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\sin z},-\pi\right]\right]=0$$

5、利用留数计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos 5x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$。

解：令 $R(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$，其上半平面的孤立奇点为 $z=i$，且为二级极点，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos 5x}{(1+x^2)^2}dx=\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2e^{i5x}}{(1+x^2)^2}dx\right]=-2\pi e^{-5}$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[R(z)e^{i5z},i\right]\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2\cdot\frac{z^2e^{i5z}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2e^{i5z}}{(z+i)^2}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\cdot\lim_{z\to i}\frac{(2ze^{i5z}+5iz^2e^{i5z})(z+i)^2-2(z+[illegible]}{(z+i)^4}\right]$$

$=\mathrm{Re}\left[2\pi i\ [illegible]\ (2i-5i)e^{-5}\ [illegible]\ -2e^{-5}\ [illegible]\right]=\mathrm{Re}\left[-3\pi e^{-5}\ [illegible]\ \pi e^{-5}\right]=-2\pi e^{-5}$

得 分

四、求已知函数的展开式。(共15分)

1、把函数 $f(z)=e^z$ 在 $z_0=1+i$ 展开成泰勒级数。(5分)

解：$f(z)=e^{z-(1+i)+1+i}=e^{1+i}\cdot e^{z-(1+i)}$

$=e(\cos 1+i\sin 1)\cdot e^{z-(1+i)}$

$=e(\cos 1+i\sin 1)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-(1+i))^n}{n!}\qquad |z-(1+i)|<+\infty$

2、将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+2)}$ 在在下列圆环域内展成洛朗级数。(10分)

1) $0<|z+2|<2$;　2) $2<|z|<+\infty$.

解：1) $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}\quad\therefore\ \dfrac{1}{z^2}=-\left(\dfrac{1}{z}\right)'$

$\therefore\ \dfrac{1}{z^2(z+2)}=\dfrac{1}{z+2}\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{z+2}\left(-\dfrac{1}{z}\right)'$

$=\dfrac{1}{z+2}\left(-\dfrac{1}{z+2-2}\right)'$

$=\dfrac{1}{z+2}\left(+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z+2}{2}}\right)'$

$=\dfrac{1}{z+2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2}{2}\right)^n\right)'$

$=\dfrac{1}{z+2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{2^{n+1}}\right)'$

$=\dfrac{1}{z+2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-(n+1)}\cdot n(z+2)^{n-1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^{-(n+1)}\cdot n(z+2)^{n-2}$

2) $\dfrac{1}{z^2(z+2)}=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{z}}=\dfrac{1}{z^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2^n}{z^n}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot z^{-n-3}$

得 分

五、证明：（5 分）

设 $f(z)$ 在复平面上解析。设 M 为 $|f(z)|$ 在曲线 C：$|z-z_0|=2$ 上的最大值，即

$$M=\max_{|z-z_0|=2}|f(z)|。$$

证明：$\dfrac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}\le\dfrac{M}{2^n}\quad(n=0,1,2,\cdots;0!=1)$ 。

证明：由 $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=2}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

则 $\dfrac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}=\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=2}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|$

由估值定理得：

$$\le\frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2\pi\cdot 2$$

$$=\frac{M}{2^n}$$

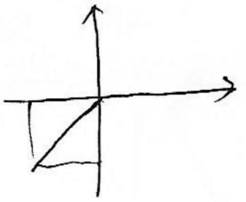
草 稿 纸

姓名：__________ 学号：__________

1. $e^{3+i} = e^3 \cdot e^i = e^3[\cos 1 + i\sin 1]$

$\mathrm{Im}[e^{3+i}] = e^3 \sin 1$

2.



3. $\int_{-1}^{1} z\cos z\, dz = \int_{-1}^{1} z\, d\sin z = z\sin z\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sin z\, dz$

$= \sin 1 - (-1)\sin(-1) + \cos z\Big|_{-1}^{1}$

$= \cos 1 - \cos(-1) = 0$

4. $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3-4i|^n} = 5 \qquad R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$

5. $i^{(1+i)} = e^{(1+i)\mathrm{Ln}\, i} = e^{(1+i)(i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \cdot e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}$

$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = i e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

6. $(x+iy+3)(x+3) = (x+3)^2 + iy(x+3)$

$u = (x+3)^2. \quad v = y(x+3)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x+3) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x+3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2(x+3) = x+3 \\ y = -0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$

9. $\mathcal{F}[\cos 3t + \sin t] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2} + \frac{e^{ti}-e^{-ti}}{2i}\right]$

$= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{3ti}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-3ti}] + \frac{1}{2i}\mathcal{F}[e^{ti}] - \frac{1}{2i}\mathcal{F}[e^{-ti}]$

$= \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-3) + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega+3) + \frac{1}{2i}\cdot 2\pi\delta(\omega-1) - \frac{1}{2i}\cdot 2\pi\delta(\omega$

$\boxed{\mathcal{F}[e^{3ti}] = 2\pi\delta(\omega-3)}$

$= \pi\delta(\omega-3) + \pi\delta(\omega+3) - \pi i\delta(\omega-1) + \pi i\delta(\omega+1)$

10. $z=2$ 为 $|z-2|=1$ 内的孤立奇点，且是100级极点.

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}}, 2\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{99!} \lim_{z\to 2} \frac{d^{99}}{dz^{99}}\left[(z-2)^{100} \cdot \frac{e^{z+3}}{(z-2)^{100}}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{99!} e^{5}$$

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_0]$$