北京工业大学 2022 ——2023 学年第二学期期末
《高等数学(管)-2》模拟复习

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人： ________ **学号：** ________ **班号：**

。。。

注：本试卷共 两大题，17 小题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸（可以撕下）。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	总成绩
得分			

得 分

一、填空题（共 10 小题，每题 3 分，总分 30 分）

1. 将和式极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$$

表示成定积分. ______$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}x\,dx$______

2. *设*$z=z(x,y)$*是由方程*$F(z-x,z-y)=0$ *所确定的隐函数。其中*$F(u,v)$*是可微函数，*

则$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ------------ 1 ------------

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_u'}{F_u'+F_v'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_v'}{F_u'+F_v'}$

附题：可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-2z,y-3z)=0$ 所确定，则 $2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}$=____1____.

3. **设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}a_n+\sqrt{|a_n|}]$ 的敛散性是____发散___.**

$\because a_n\to 0$，$\therefore (-1)^{n-1}a_n+\sqrt{|a_n|}\geq(-1)^{n-1}a_n+|a_n|\geq 0$（$n$ 充分大）

$(-1)^{n-1}a_n+\sqrt{|a_n|}=(-1)^{n-1}\mathrm{sgn}(a_n)|a_n|+\sqrt{|a_n|}=\sqrt{|a_n|}\left(1+(-1)^{n-1}\mathrm{sgn}(a_n)\sqrt{|a_n|}\right)\geq\frac{1}{2}\sqrt{|a_n|}$

4. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，则 $f_{zzx}(2,0,1)$=______0________.

附题：设$z=f(e^{xy},x-y)$, f 具有二阶连续偏导，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$

$(1+xy)e^{xy}f_1'+xye^{2xy}f_{11}''+(x-y)e^{xy}f_{12}''-f_{22}''$

5.级数$\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^{3n}(x>0)$的收敛域是 ______________ $(-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}},\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}})$

6.$y''+2y'=0$的通解是 ______________ $C_1+C_2e^{-2x}$

7. $\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x t(t^2-1)dt}{x-2}=$______________. 6

8.交换积分次序$I=\int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy=$

$\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$

附题. 计算二重积分 $\iint_D ye^{xy}dxdy$（要求先对 x 积分），其中$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{x}\le y\le 1,\ 1\le x\le 2\right\}$.

（画出积分区域的图形）

9.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$的和函数是 ______________ $\frac{-x}{1+x}, x\in(-1,1)$

10. 求函数 $z=xy$ 在 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时的全微分__1.7______________

$x^y+y\Delta x+x\Delta y$

得 分

二、综合题（共 7 小题，每题 10 分，总分 70 分）

在此处键入公式。

11. 设 $z=f(x,y)=x^2-(y-1)^2$，求函数的极值.

猜测出错了?应该改为$z=x^2+(y-1)^2$, 这时$(0,1)$为极小值点

11 解：$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2(y-1) = 0 \end{cases}$

得驻点为 $A(0,1)$

又∵ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

∴ $AC - B^2 = 2\cdot(-2) - 0 = -4 < 0$

$A > 0$

∴ 驻点 $A(0,1)$ 不是极值点

12. **求微分方程 $\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ 的通解 （不需要求特解或奇解）.**

(2) 令 $u = \frac{y}{x}$ ∴ $y' = u'x + u$ 代入原方程得

$u'x + u = e^u + u$

∴ $\frac{du}{dx} x = e^u$

∴ $\frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}$

两边积分得 $-e^{-u} = \ln|x| + C$

∴ 原方程通解为 $\ln|x| + e^{-\frac{y}{x}} = C$，C为任意常数

13. **求一阶线性微分方程的 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$通解**

附题： 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且满足$f(x) = 1 + \int_1^x \frac{f(t)}{x} dt$, 求$f(x)$.

13 解：(1) 对于一元线性微分方程，由公式

通解为 $y = e^{\int \frac{2}{x+1} dx}\left(C + \int (x+1)^{5/2} \cdot e^{-\int \frac{2}{x+1} dx} dx\right)$

$= e^{2\ln|x+1|}\left(C + \int (x+1)^{5/2} e^{-2\ln|x+1|} dx\right)$

$= (x+1)^2\left(C + \int (x+1)^{\frac{5}{2}} (x+1)^{-2} dx\right)$

$= C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{7/2}$

方法(2) 对于齐次方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0$

$\frac{dy}{2y} = 2\frac{dx}{(x+1)}$ $(y \neq 0)$

两边积分得 $\ln|y| = 2\ln|x+1| + C_1$ 即 $y = \pm e^{C_1}(x+1)^2$ 再记 $C = \pm e^{C_1}$ 且允许C取0包含

特解 $y=0$ 得通解 $y = C(x+1)^2$

用常数变易法求原方程通解 令 $y = C(x)(x+1)^2$ 代入原方程

整理得 $C'(x) = \sqrt{x+1}$ ∴ $C(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

∴ 原方程通解为 $y = C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

解：$\because f(x)=1+\int_1^x \frac{f(t)}{x}dt$

$=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,dt$

$=\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x}(f(x)-1)$

$=\frac{1}{x}$

令 $y=f(x)$ 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

积分得 $y=\ln|x|+C$

又 $\because$ 当 $x=1$ 时 $f(1)=1$ 代入得 $C=1$ 且 $x\in(0,+\infty)$

$\therefore$ ~~$f(x)=\ln|x|+C$~~

$f(x)=\ln x+1$

14. **求方程 $y''+3y'+2y=xe^{-x}$ 的通解**

解：对于齐次方程 $y''+3y'+2y=0$

特征方程为 $r^2+3r+2=0$ $\therefore$ 特征根为 $r_1=-1$, $r_2=-2$ $\therefore$ 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

对于原非齐次方程，设特解为 $y^*=ze^{-x}$，特征多项式为 $\varphi(r)=r^2+3r+2$

则代入方程整理得 $z''+\varphi'(-1)z'+\varphi(-1)z=x$

$\varphi'(-1)=2\times(-1)+3=1$ $\varphi(-1)=(-1)^2+3\times(-1)+2=0$

$\therefore z''+z'=x$

设 $z'=ax+b$ 得 $a+ax+b=x$ 比较系数得 $a=1, b=-1$

$\therefore z'=x-1$ 积分得 $z=\frac{1}{2}x^2-x$

$\therefore$ 原方程一个特解为 $y^*=(\frac{1}{2}x^2-x)e^{-x}$

通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(\frac{1}{2}x^2-x)e^{-x}$

15. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和。

解：对于 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right|=|x|$ 且 $x=\pm1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 均发散

$\therefore$ 幂级数收敛域为 $x\in(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 则 $S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$\therefore S(x)=x(\frac{x}{1-x})'$

$=x\cdot\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}$

$=\frac{x}{(1-x)^2}$

即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 和函数为 $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$ $x\in(-1,1)$

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=2$.

16. 已知 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$， 求 $f(x)$.

16解: $\because f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,dt$

令 $A=\int_0^1 f(t)\,dt$ 则 $f(x)=x+2A$

方程两边从0积到1得

$A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+2A\int_0^1 1\,dx=\frac{1}{2}+2A$

$\therefore A=-\frac{1}{2}$ $\therefore f(x)=x-1$

17. 求由曲线 $y=sinx\ (0\le x\le \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积

(17) 解: 旋转体为在以0为圆心以π为半径的圆域上的二重积分

即 $I=\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\pi^2\}$

利用极坐标计算 $D: 0\le r\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$

$\therefore I=\iint\limits_D \sin r\cdot r\,dr\,d\theta$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi} r\sin r\,dr$

$=2\pi\cdot\left(-\cos r\cdot r\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos r\,dr\right)$

$=2\pi\left(\pi-0+\sin r\Big|_0^{\pi}\right)=2\pi^2$