

Item Response Theory for beginners

Introduzione ai modelli IRT

Dr. Ottavia M. Epifania

Corso IRT @ Università Libera di Bolzano, 16-18 Gennaio 2023

Bressanone

① Introduzione

② 1PL

③ 2PL

④ 3PL

⑤ 4PL

⑥ Relazione tra i modelli considerati

Introduzione

1PL

2PL

3PL

4PL

Relazione tra i modelli considerati

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Introduzione

Le variabili latenti

Osserviamo Giorgio e vediamo che Giorgio:

- ha tanti amici
- è contento quando ha tante persone intorno
- cerca sempre di rimanere in contatto con le persone
- partecipa a tanti eventi sociali
- ...

I comportamenti di Giorgio (**variabili manifeste**) possono essere spiegati sulla base del costrutto latente *estroversione*

Osserviamo Alessandra e vediamo che Alessandra:

- è interessata a nuove culture
- prova volentieri cibi nuovi
- è aperta alla possibilità di provare nuove esperienze
- è creativa
- ...

I comportamenti di Alessandra (**variabili manifeste**) possono essere spiegati sulla base del costrutto latente *apertura all'esperienza*

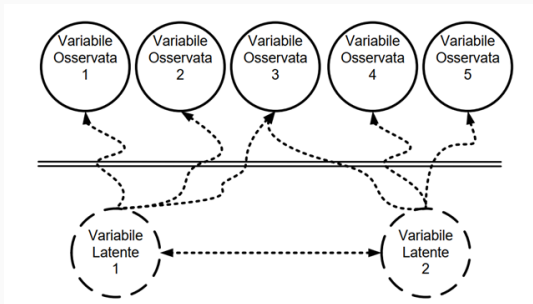
Introduzione

Modelli per variabili latenti

Modelli matematici che permettono di collegare le **variabili latenti** con le **variabili manifeste**

Assunzioni:

- Le **variabili latenti** sono la causa delle **variabili manifeste**
- *Indipendenza locale*: Una volta presa in considerazione l'effetto della **variabile latente**, la correlazione tra le **variabili manifeste** svanisce



IRT vs. CTT

Introduzione

IRT vs. CTT

Sia i modelli dell'IRT sia la Classical Test Theory (CTT) hanno come obiettivo la misurazione delle persone → stabilire la posizione delle persone sul tratto latente di interesse

IRT

Focus → Gli item

CTT

Focus → Il test

L'idea di base dell'IRT

Introduzione

L'idea di base dell'IRT

La probabilità di una risposta osservata (**variabile manifesta**) dipende sia dalle caratteristiche della **persona** sia dalle caratteristiche dell'**item**

Le caratteristiche della **persona** sono descritte da un parametro relativo alla persona → **costrutto latente** (e.g., intelligenza, autostima, estroversione, apertura all'esperienza ecc.)

Le caratteristiche dell'**item** possono essere descritte da uno o più parametri, quali la **difficoltà**, la **discriminatività**, lo **pseudo guessing** e il **careless error**

L'item e la persona (le loro caratteristiche) sono sullo stesso tratto latente

L'idea di base dell'IRT



A_{Lisa}

Q1

$$3 + 2 = ?$$

d_{Q1}

Q1

$$3x - 2y + 4 = ?$$

d_{Q2}



A_{Bart}

L'idea di base dell'IRT

Diversi modelli IRT a seconda:

① Tratto latente:

- modelli unidimensionali
- modello multidimensionali

② Categorie di risposta:

- item dicotomici (due categorie di risposta, e.g., vero/falso, accordo/disaccordo)
- item politomici (almeno 3 categorie di risposta, e.g., item con scala di risposta tipo Likert)

Si distinguono in base al numero di parametri che descrivono le caratteristiche degli item:

- Modello logistico a un parametro (one-parameter logistic model; 1PL)
- Modello logistico a due parametri (two-parameter logistic model; 2PL)
- Modello logistico a tre parametri (three-parameter logistic model; 3PL)
- Modello logistico a quattro parametri (four-parameter logistic model; 4PL; usato raramente)

- Parametro del soggetto e parametri degli item si trovano sullo stesso tratto latente
- Ad aumentare della distanza sul tratto latente tra i parametri degli item e il parametro del soggetto cambia la probabilità di rispondere correttamente
- Quando il parametro del soggetto e il parametro di difficoltà dell'item coincidono, la probabilità di risposta corretta è del 50% (questo è vero solo per 1PL e 2PL)

1PL

1PL

Item Response function

La probabilità di rispondere correttamente (affermativamente) all'item i da parte della persona p è formalizzata come:

$$P(x_{pi} = 1 | \theta_p, b_i) = \frac{\exp(\theta_p - b_i)}{\exp(\theta_p - b_i) + 1}$$

Dove:

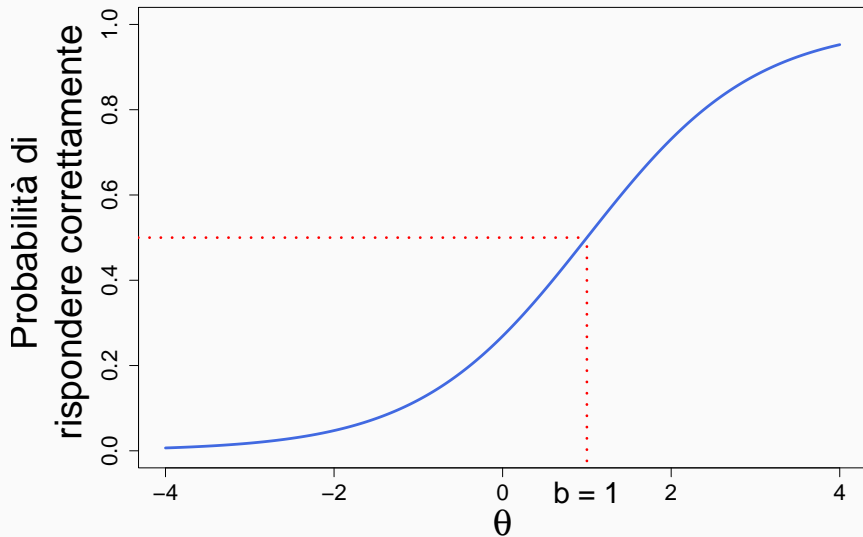
θ_p : abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) \rightarrow maggiore θ_p , maggiore il livello di tratto di p

b_i : difficoltà dell'item i o location dell'item sul tratto latente \rightarrow maggiore b_i , più è difficile rispondere correttamente a i (*endorse i*)

1PL

Item Characteristic Curve

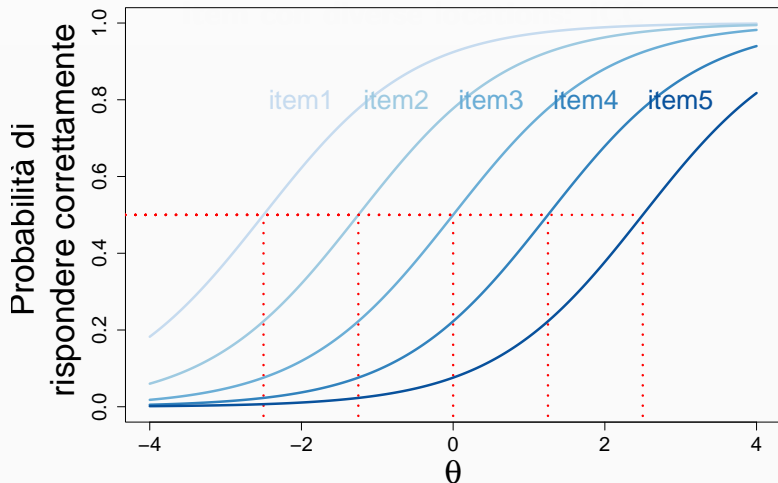
Item Characteristic Curve (ICC)



ooooooooooooooooooooo ooo●ooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Item Characteristic Curve

ICC – Item con diverse locations



| | item1 | item2 | item3 | item4 | item5 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| b | -2.50 | -1.25 | 0.00 | 1.25 | 2.50 |

1PL

Item Information Function

Si può ottenere una misura della precisione con cui ogni item misura determinate parti del tratto latente \rightarrow *Item Information Function*:

$$I_i = P_i(\theta, b_i)Q_i(\theta, b_i)$$

dove $Q = 1 - P_i(\theta_p, b_i)$ è la probabilità che di risposta errata all'item i

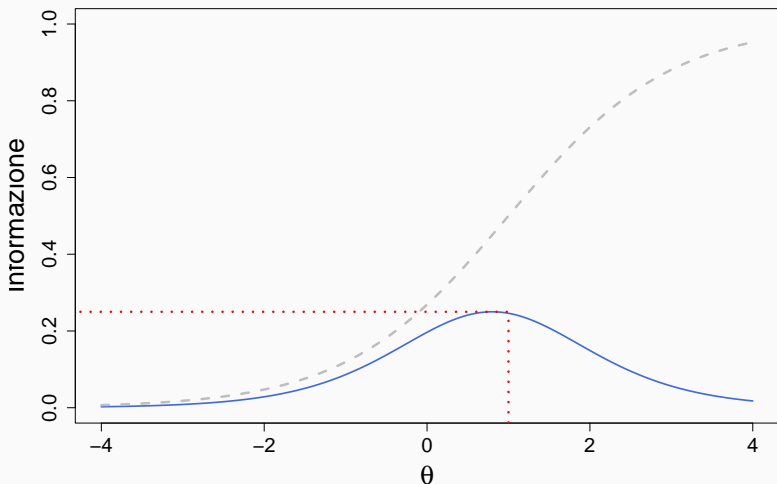
oooooooooooooooooooo oooooooooo●oooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Item Information Function

Valore massimo quando $\theta_p = b_i \rightarrow$ in questo caso

$$P(x_{pi} = 1) = P(x_{pi} = 0) = 0.50 \rightarrow I_i = .25$$

Item Information Function – IIF



Qualsiasi item è più informativo per i soggetti con abilità uguale alla location dell'item → al crescere della distanza tra soggetto e item, cala l'informatività

Tanti soggetti con livelli diversi di abilità → item con livelli di difficoltà distribuiti lungo tutto il continuum latente

IRT

Meglio item con difficoltà diverse, sparpagliate lungo tutto il tratto latente

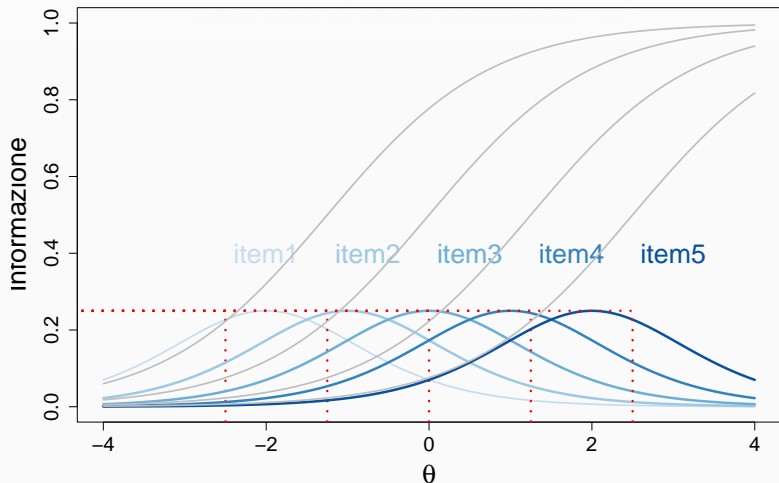
CTT

Meglio item con difficoltà omogenee

oooooooooooooooooooo ooooooooooooo●oooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Item Information Function

IIF- Item con diverse locations



| | item1 | item2 | item3 | item4 | item5 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| b | -2.50 | -1.25 | 0.00 | 1.25 | 2.50 |

1PL

Test Information Function

Restituisce una misura dell'accuratezza con cui il test misura complessivamente il tratto latente:

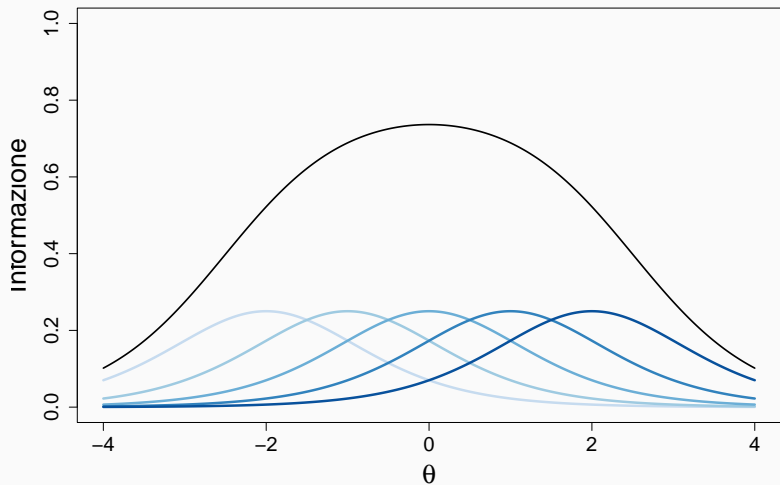
$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i) =$$

La TIF permette di prevedere l'accuratezza con cui è possibile misurare ogni livello di tratto latente

Simile al concetto di attendibilità in CTT

oooooooooooooooooooo oooooooooooooooooo●ooo oooooooooooooooooo oooooooooooooooooo oooo oooooooooo

Test Information Function



| | item1 | item2 | item3 | item4 | item5 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| b | -2.50 | -1.25 | 0.00 | 1.25 | 2.50 |

Descrive la precisione della misurazione:

$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{P_i(\theta, b_i)Q_i(\theta, b_i)}}$$

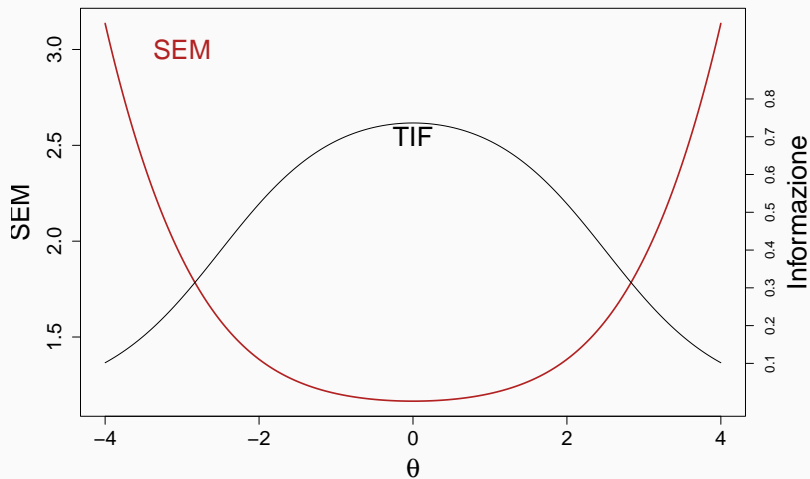
Maggiore è l'informazione, minore è il SEM

Minore è l'informazione, maggiore è il SEM

A differenza della CTT, non si assume che l'errore di misura sia uguale per tutti i soggetti

oooooooooooooooooooo oooooooooooooooooo●oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Test Information Function



| | item1 | item2 | item3 | item4 | item5 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| b | -2.50 | -1.25 | 0.00 | 1.25 | 2.50 |

2PL

2PL

Item Response Function

Viene inserito il parametro di discriminatività dell'item (a_i):

$$P(x_{pi} = 1 | \theta_p, b_i, a_i) = \frac{\exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + \exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

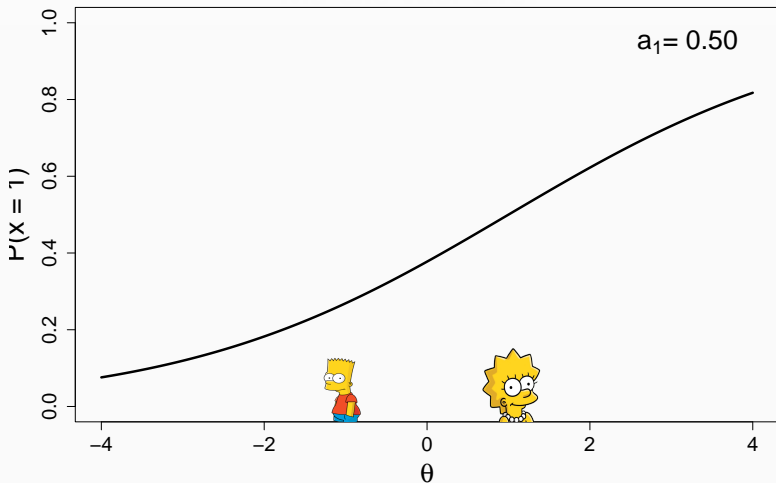
θ_p : abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) \rightarrow maggiore θ_p , maggiore il livello di tratto di p

b_i ; difficoltà dell'item i

a_i : capacità discriminativa o discriminatività dell'item \rightarrow capacità dell'item i di discriminare tra soggetti con livelli diversi di tratto (piccole differenze nel livello di tratto portano a grandi differenze nella probabilità di rispondere correttamente all'item)

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo●oooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Item Response Function

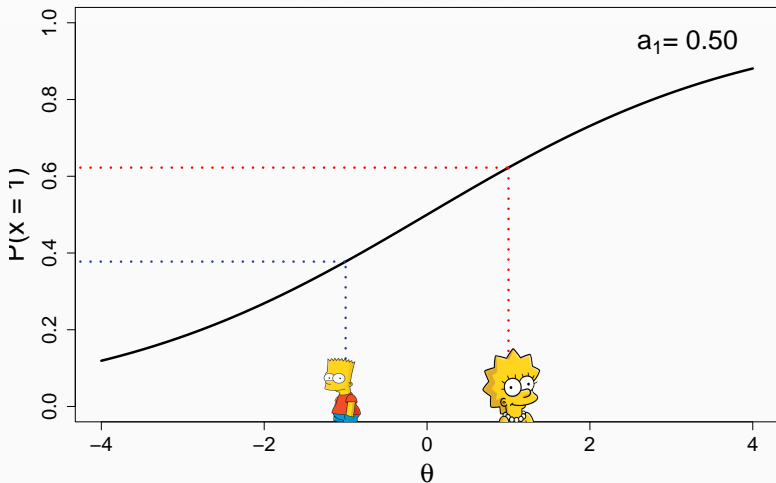


Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 = ?$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo●oooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Item Response Function

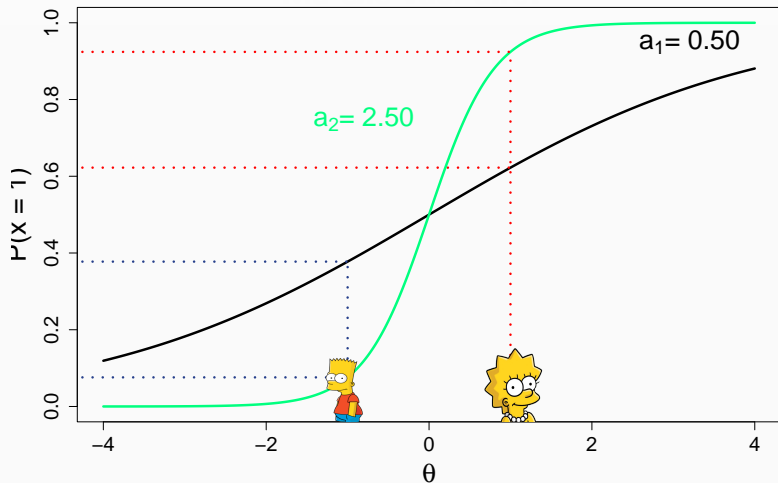


Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 = ?$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo●oooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Item Response Function



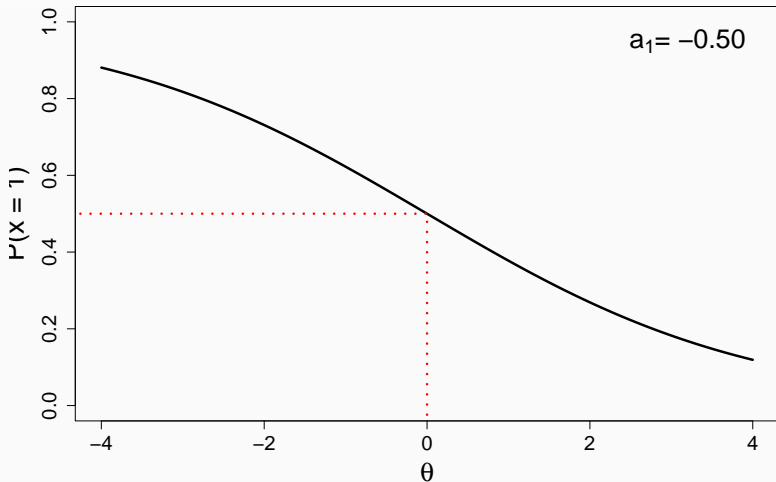
Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 = ?$

Item 2 ($a_2 = 2.50$):

$5 + 14 = ?$

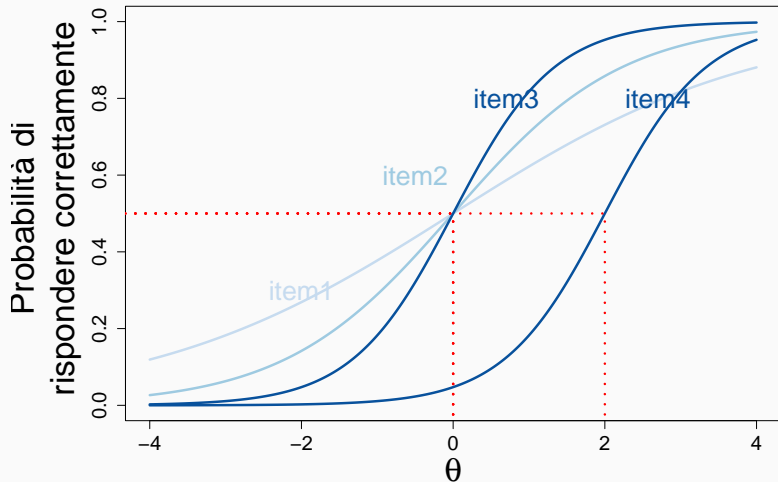
Discriminatività negativa



Al crescere del tratto latente... la probabilità di rispondere correttamente diminuisce!

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooo●oooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Item Response Function



| | item1 | item2 | item3 | item4 |
|---|-------|-------|-------|-------|
| b | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| a | 0.50 | 0.90 | 1.50 | 1.50 |

2PL

Item Information Function

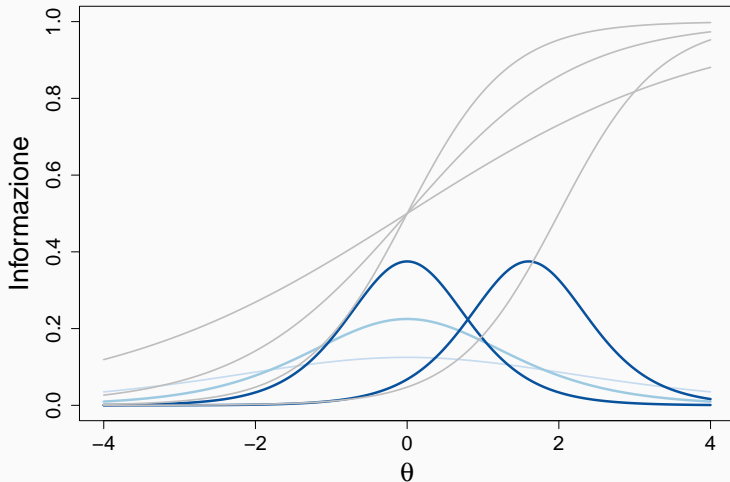
Item Information Function

$$I_i(\theta, b_i, a_i) = a_i^2 P_i(\theta, b_i, a_i) Q_i(\theta, b_i, a_i)$$

Dove $Q_i = 1 - P_i(\theta, b_i, a_i)$ è la probabilità di osservare una risposta errata

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooo●oooooooo ooooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Item Information Function



| | item1 | item2 | item3 | item4 |
|---|-------|-------|-------|-------|
| b | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| a | 0.50 | 0.90 | 1.50 | 1.50 |

2PL

Test Information Function

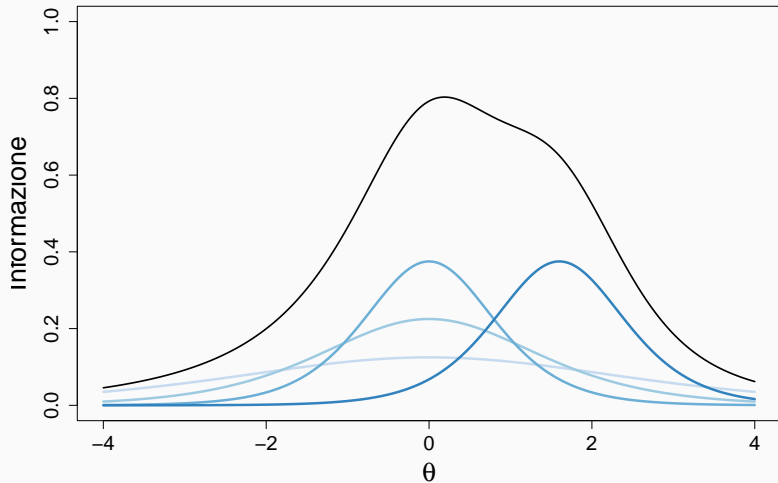
Test Information Function

La TIF è la somma delle informatività dei singoli item

$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i, a_i)$$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooo●ooo ooooooooooooooooooooo ooooo ooooooooooooo

Test Information Function



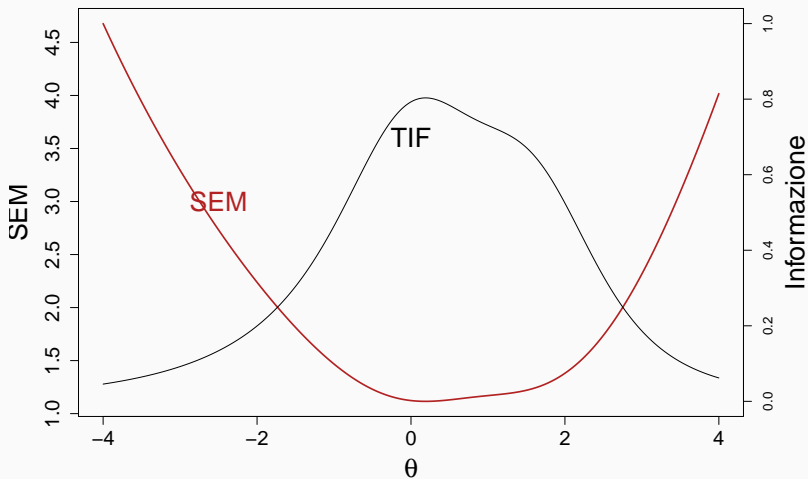
| | item1 | item2 | item3 | item4 |
|---|-------|-------|-------|-------|
| b | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| a | 0.50 | 0.90 | 1.50 | 1.50 |

Reciproco della TIF:

$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 P_i(\theta, b_i) Q_i(\theta, b_i)}}$$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooooooooooooo●oooooooooooooooooooo oooo ooooooooooooo

Test Information Function



| | item1 | item2 | item3 | item4 |
|---|-------|-------|-------|-------|
| b | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 2.00 |
| a | 0.50 | 0.90 | 1.50 | 1.50 |

3PL

3PL

Item Response Function

Viene aggiunto un parametro (“pseudo-guessing”, c) che sposta verso l'alto l'asintoto sinistro:

$$P(x_{pi} = 1 | \theta_p, b_i, a_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{\exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + \exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

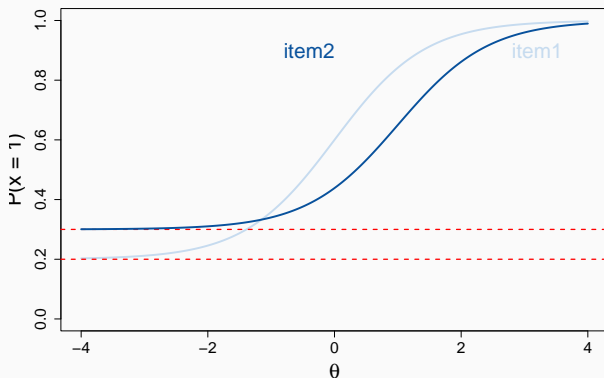
θ_p : abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) \rightarrow maggiore θ_p , maggiore il livello di tratto di p

b_i : difficoltà dell'item i

a_i : discriminatività dell'item i

c_i : pseudo-guessing (o asintoto inferiore) dell'item $i \rightarrow$ probabilità di una risposta corretta quando il livello di tratto latente si avvicina a $-\infty$

Item Response Function



La probabilità di una risposta corretta è > 0.50 quando il livello di tratto è uguale alla difficoltà dell'item (in particolare, essa è $c + (1 - c)/2$)

In item a risposta multipla, una soltanto delle quali è corretta, ci si aspetta che soggetti con livello di tratto molto basso possano provare ad indovinare la risposta corretta scegliendo a caso

Nel caso in cui ci siano k alternative di risposta e che queste siano tutte ugualmente plausibili, il valore del parametro c dovrebbe avvicinarsi a $\frac{1}{k}$

ASSUNZIONE: Tutte le k alternative sono equiprobabili

3PL

Item Information Function

Nel 3PL, l'item response function prende in considerazione anche il parametro di guessing

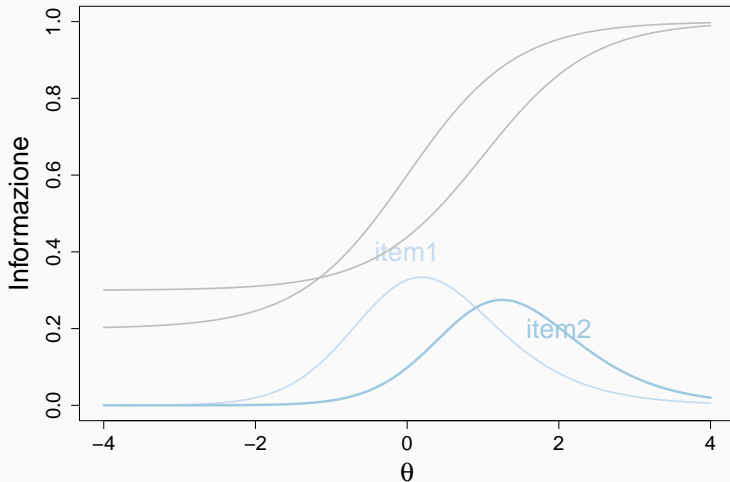
$$I_i(\theta, b_i, a_i, c_i) = a_i^2 \frac{P_i(\theta, b_i, a_i, c_i)}{Q_i(\theta, b_i, a_i, c_i)} \left[\frac{P_i(\theta, b_i, a_i, c_i) - c_i}{1 - c_i} \right]$$

Più è alto il guessing, minore sarà l'informatività dell'item

$Q_i = 1 - P_i(\theta, b_i, a_i, c_i)$ è la probabilità di osservare una risposta errata

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooo●oooooooo oooo ooooooooooooo

Item Information Function



| | item1 | item2 |
|---|-------|-------|
| b | 0.00 | 1.00 |
| a | 1.40 | 1.40 |
| c | 0.20 | 0.30 |

3PL

Test Information Function

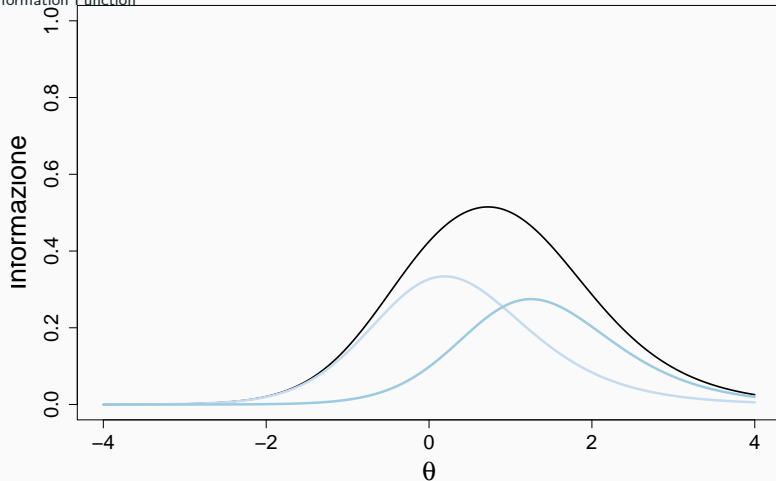
Test Information Function

La TIF è la somma delle informatività dei singoli item

$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i, a_i, c_i)$$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooo●oooo ooooo ooooooooooooo

Test Information Function



| | item1 | item2 |
|---|-------|-------|
| b | 0.00 | 1.00 |
| a | 1.40 | 1.40 |
| c | 0.20 | 0.30 |

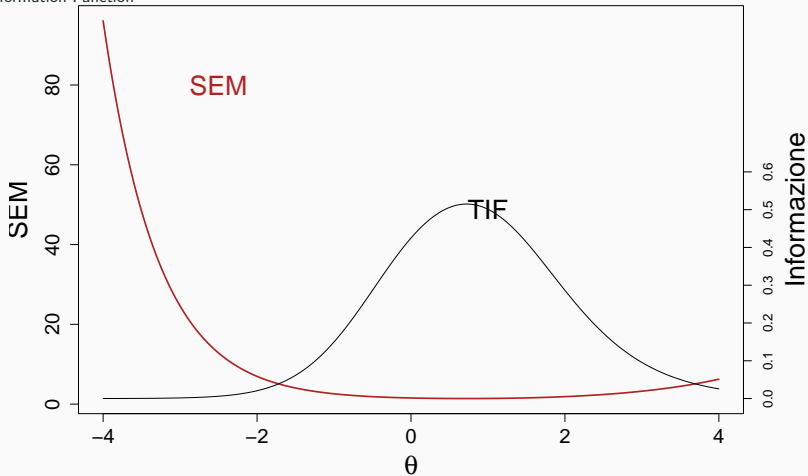
Test Information Function

Reciproco della TIF:

$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 P_i(\theta, b_i, a_i, c_i) Q_i(\theta, b_i, a_i, c_i)}}$$

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooooooooooooo●oooo● ooooo ooooooooooooo

Test Information Function



| | item1 | item2 |
|---|-------|-------|
| b | 0.00 | 1.00 |
| a | 1.40 | 1.40 |
| c | 0.20 | 0.30 |

4PL

4PL

Item Response Function

Veramente poco usato

Prende in considerazione l'errore di distrazione (**careless error**) compiuto da persone con un livello molto alto di tratto:

$$P(x_{pi} = 1 | \theta_p, b_i, a_i) = c_i + (d_i - c_i) \frac{\exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + \exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

θ_p : livello di tratto latente della persona

b_i, a_i, c_i ; difficoltà, discriminatività e pseduo-guessing dell'item i

d_i : careless-error, probabilità di una risposta corretta (o affermativa) quando il livello di tratto latente si avvicina a $+\infty$

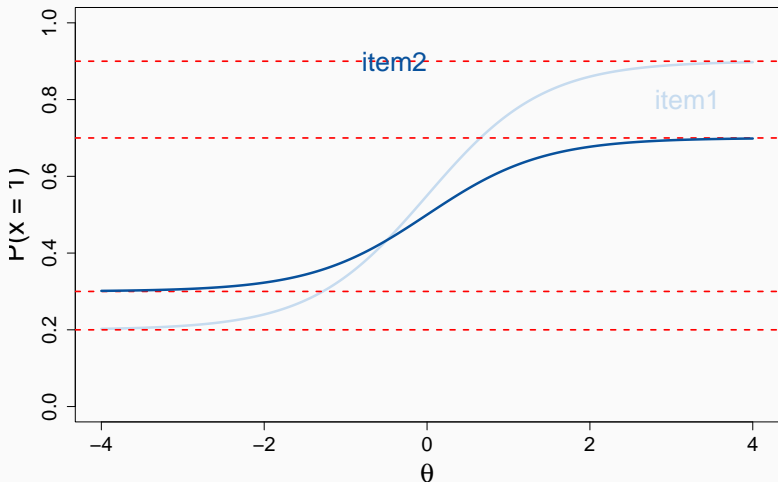
Minore è il valore di d_i , minore è la probabilità che un soggetto con un alto livello di tratto risponda correttamente (o affermativamente) all'item i 61

oooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo ooooooooooooooooooooo oooo● ooooooooooooo

Item Response Function

Item 1: $b = 0$, $a = 1.4$, $c = 0.20$,
 $d = .9$

Item 2: $b = 0$, $a = 1.4$, $c = 0.30$,
 $d = .7$



Relazione tra i modelli considerati

- Vincolando i parametri d_i di tutti gli item i ad essere uguali a 1, si passa dal modello 4PL al modello 3PL
- Vincolando i parametri c_i di tutti gli item i ad essere uguali a 0, si passa dal modello 3PL al modello 2PL
- Vincolando i parametri a_i di tutti gli item i ad essere uguali a 1, si passa dal modello 2PL al modello 1PL

Formalmente, il modello di Rasch è equivalente all'1PL, ma cambia la filosofia che c'è dietro.

IRT

adattamento del **modello** ai dati

Si seleziona il modello migliore per i dati

Rasch

adattamento dei **dati** al modello

Si cambiano i dati (e.g., si eliminano gli item che non fittano) per farli stare nel modello



Ma... quale modello?

Relazione tra i modelli considerati

Ma... quale modello?

Ma... quale modello?

Il modello può essere scelto:

- A priori:
 - considerazioni di natura teorica
 - caratteristiche degli item stessi
- A posteriori:
 - Si stimano tutti i modelli IRT sui dati
 - Si confrontano e il modello che fitta meglio è il modello scelto

Ma... quale modello?

Per la verifica a posteriori, vanno considerati gli indici di fit comparativi:

- $-2\loglikelihood$: da usare solo per modelli nested
- Akaike's Information Criterion (AIC)
- Bayesian Information Criterion (BIC)

La scelta migliore è considerarli sempre tutti insieme (quando si hanno modelli nested)

Ma... quale modello?

Per interpretare la $-2\loglikelihood$, va calcolata la differenza tra la *likelihood* di due modelli nested moltiplicata per -2 ($-2\log Likelihood$) e la differenza tra i gradi di libertà dei due modelli nested

Si calcola la probabilità associata alla differenza tra la $-2\loglikelihood$ dei due modelli secondo una distribuzione χ^2 con gradi di libertà uguali alla differenza tra i gradi di libertà dei due modelli:

- differenza significativa: Si sceglie il modello più complesso
- differenza non significativa: Si sceglie il modello più parsimonioso

Ma... quale modello?

AIC e BIC sono indici di entropia \rightarrow va scelto il modello che presenta il valore di AIC/BIC **più basso**

L'AIC penalizza i modelli più complessi indipendentemente dall'ampiezza campionaria

$$AIC = -2\log Lik + 2p$$

Il BIC penalizza i modelli più complessi tenendo conto dell'ampiezza campionaria \rightarrow particolarmente conservativo su campioni piccoli

$$BIC = -2\log Lik + p \cdot \log(N)$$