Item Response Theory for beginners

Introduzione ai modelli IRT

Dr. Ottavia M. Epifania

Corso IRT @ Università Libera di Bolzano, 16-18 Gennaio 2023

Bressanone

Introduzione

Introduzione

Le variabili latenti

Cosa sono

- Variabili non direttamente osservabili $\rightarrow$ **variabili latenti**
- Inferite a partire da indicatori direttamente osservabili $\rightarrow$ **variabili manifeste**
- Importanza dell'*operazionalizzazione del costrutto*

Esempio 1

Osserviamo Giorgio e vediamo che Giorgio:

- ha tanti amici
- è contento quando ha tante persone intorno
- cerca sempre di rimanere in contatto con le persone
- partecipa a tanti eventi sociali
- . . .

I comportamenti di Giorgio (**variabili manifeste**) possono essere spiegati sulla base del costrutto latente ***estroversione***

Esempio 2

Osserviamo Alessandra e vediamo che Alessandra:

- è interessata a nuove culture
- prova volentieri cibi nuovi
- è aperta alla possibilità di provare nuove esperienze
- è creativa
- ...

I comportamenti di Alessandra (**variabili manifeste**) possono essere spiegati sulla base del costrutto latente ***apertura all'esperienza***

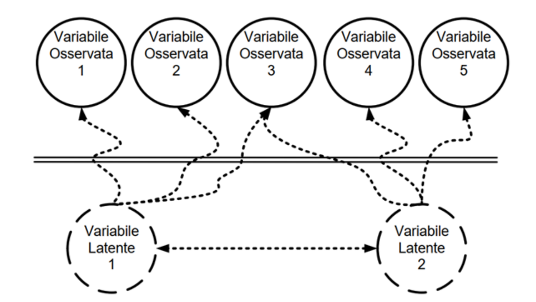
Introduzione

Modelli per variabili latenti

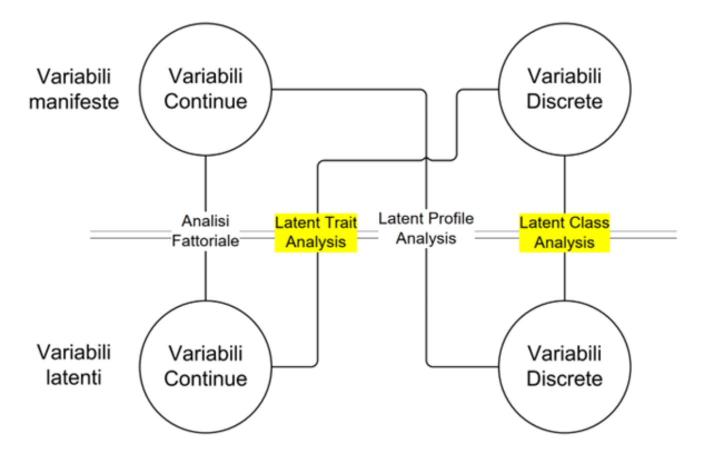
Modelli matematici che permettono di collegare le variabili latenticon le variabili manifeste

Assunzioni:

- Le variabili latenti sono la causa delle variabili manifeste
- *Indipendenza locale*: Una volta presa in considerazione l'effetto della variabile latente, la correlazione tra le variabili manifeste svanisce



Diversi modelli per diverse variabili



Modelli IRT e modello di Rasch → **Modelli di analisi per tratti latenti**

Introduzione

IRT vs. CTT

Sia i modelli dell'IRT sia la Classical Test Theory (CTT) hanno come obiettivo la misurazione delle persone → stabilire la posizione delle persone sul tratto latente di interesse

IRT	**CTT**
Focus → Gli item	Focus → Il test

Introduzione

L'idea di base dell'IRT

La probabilità di una risposta osservata (variabile manifesta) dipende sia dalle caratteristiche della persona sia dalle caratteristiche dell'item

Le caratteristiche della persona sono descritte da un parametro relativo alla persona $\rightarrow$ costrutto latente (e.g., intelligenza, autostima, estroversione, apertura all'esperienza ecc.)

Le caratteristiche dell'item possono essere descritte da uno o più parametri, quali la **difficoltà**, la **discriminatività**, lo **pseudo guessing** e il **careless error**

L'item e la persona (le loro caratteristiche) sono sullo stesso tratto latente

A_{Lisa}

Q1

$3 + 2 = ?$

d_{Q1}

Q2

$3x - 2y + 4 = ?$

d_{Q2}

A_{Bart}

Diversi modelli IRT

Diversi modelli IRT a seconda:

1. Tratto latente:

- modelli unidimensionali
- modello multidimensionali

2. Categorie di risposta:

- item dicotomici (due categorie di risposta, e.g., vero/falso, accordo/disaccordo)
- item politomici (almeno 3 categorie di risposta, e.g., item con scala di risposta tipo Likert)

Modelli per item dicotomici

Si distinguono in base al numero di parametri che descrivono le caratteristiche degli item:

- Modello logistico a un parametro (one-parameter logistic model; 1PL)
- Modello logistico a due parametri (two-parameter logistic model; 2PL)
- Modello logistico a tre parametri (three-parameter logistic model; 3PL)
- Modello logistico a quattro parametri (four-parameter logistic model; 4PL; usato raramente)

Caratteristiche generali

- Parametro del soggetto e parametri degli item si trovano sullo stesso tratto latente
- Ad aumentare della distanza sul tratto latente tra i parametri degli item e il parametro del soggetto cambia la probabilità di rispondere correttamente
- Quando il parametro del soggetto e il parametro di difficoltà dell'item coincidono, la probabilità di risposta corretta è del 50% (questo è vero solo per 1PL e 2PL)

1PL

1PL

Item Response function

La probabilità di rispondere correttamente (affermativamente) all'item i da parte della persona p è formalizzata come:

$$P(x_{pi} = 1|\theta_p, b_i) = \frac{exp(\theta_p - b_i)}{exp(\theta_p - b_i)}$$

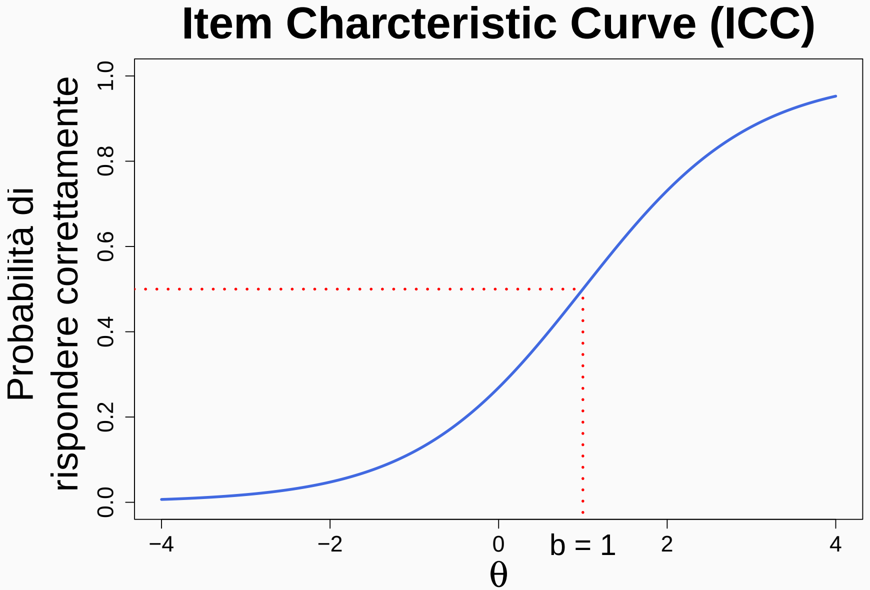
Dove:

θ_p: abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) $\rightarrow$ maggiore θ_p, maggiore il livello di tratto di p

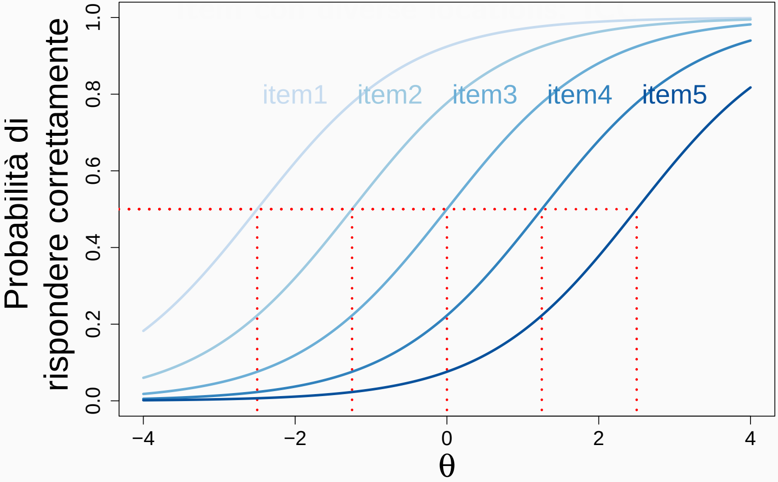
b_i; difficoltà dell'item i o location dell'item sul tratto latente $\rightarrow$ maggiore b_i, più è difficile rispondere correttamente a i (*endorse* i)

1PL

Item Charcteristic Curve


Item Charcteristic Curve (ICC)
Probabilità di rispondere correttamente
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
b = 1
2
4
θ

ICC – Item con diverse locations



	item1	item2	item3	item4	item5
b	-2.50	-1.25	0.00	1.25	2.50

1PL

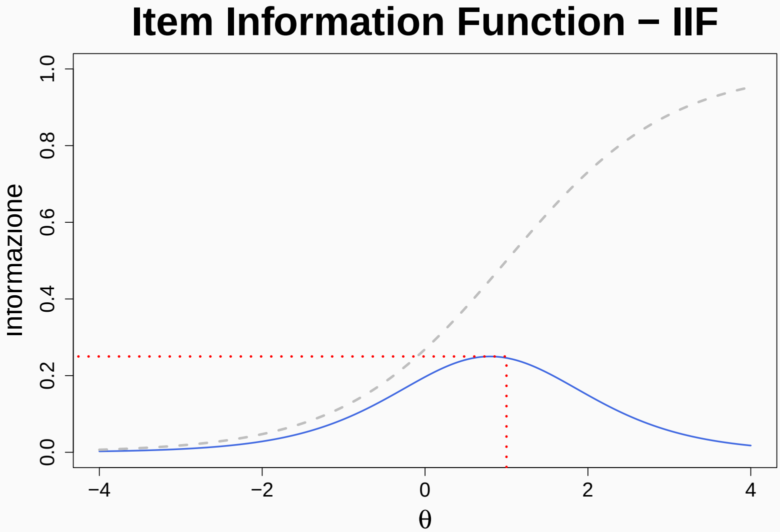
Item Information Function

SI può ottenere una misura della precisione con cui ogni item misura determinate parti del tratto latente → *Item Information Function*:

$$I_I = P_i(\theta, b_i)Q_i(\theta, b_i)$$

dove $Q = 1 - P_i(\theta_p, b_i)$ è la probabilità che di risposta errata all'item i

Valore massimo quando $\theta_p = b_i \rightarrow$ in questo caso
$P(x_{pi} = 1) = P(x_{pi} = 0) = 0.50 \rightarrow I_i = .25$

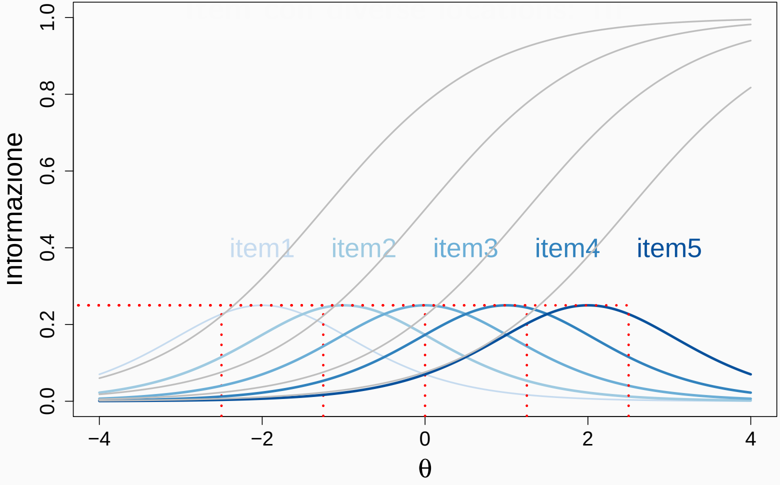


Qualsiasi item è più informativo per i soggetti con abilità uguale alla location dell'item → al crescere della distanza tra soggetto e item, cala l'informatività

Tanti soggetti con livelli diversi di abilità → item con livelli di difficoltà distribuiti lungo tutto il continuum latente

IRT	**CTT**
Meglio item con difficoltà diverse, sparpagliate lungo tutto il tratto latente	Meglio item con difficoltà omogenee

IIF– Item con diverse locations



	item1	item2	item3	item4	item5
b	-2.50	-1.25	0.00	1.25	2.50

1PL

Test Information Function

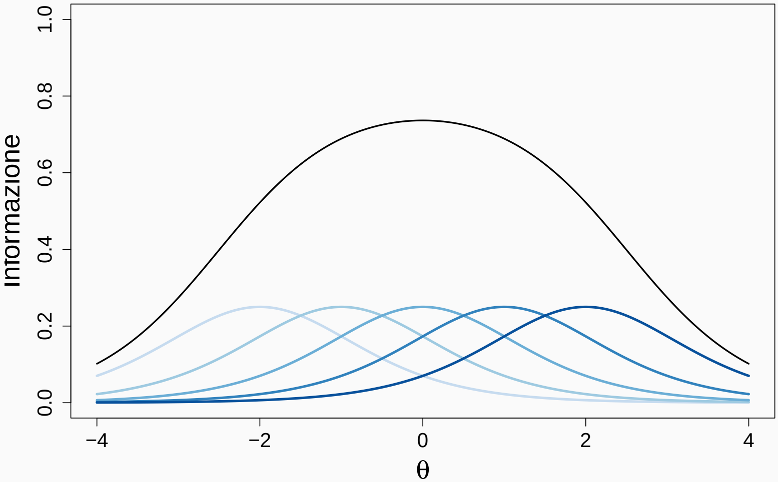
Restituisce una misura dell'accuratezza con cui il test misura complessivamente il tratto latente:

$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i) =$$

La TIF permette di prevedere l'accuratezza con cui è possibile misurare ogni livello di tratto latente

Simile al concetto di attendibilità in CTT

Test Information Function



	item1	item2	item3	item4	item5
b	-2.50	-1.25	0.00	1.25	2.50

Standard Error of Measurement (SEM)

Descrive la precisione della misurazione:

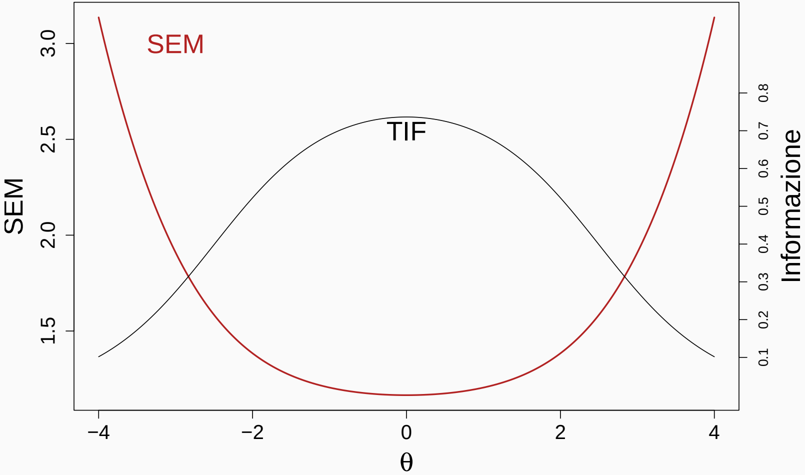
$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{P_i(\theta, b_i)Q_i(\theta, b_i)}}$$

Maggiore è l'informazione, minore è il SEM

Minore è l'informazione, maggiore è il SEM

A differenza della CTT, non si assume che l'errore di misura sia uguale per tutti i soggetti

Test Information Function



	item1	item2	item3	item4	item5
b	-2.50	-1.25	0.00	1.25	2.50

2PL

2PL

Item Response Function

Viene inserito il parametro di discriminatività dell'item (a_i):

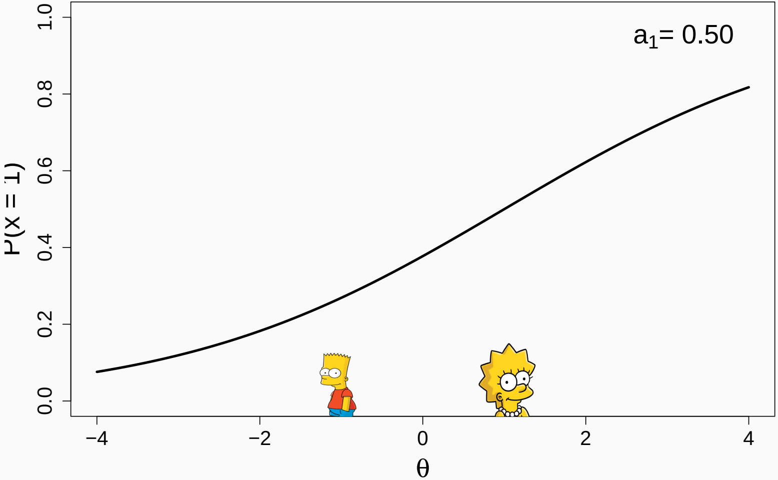
$$P(x_{pi} = 1|\theta_p, b_i.a_i) = \frac{exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

θ_p: abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) $\rightarrow$ maggiore θ_p, maggiore il livello di tratto di p

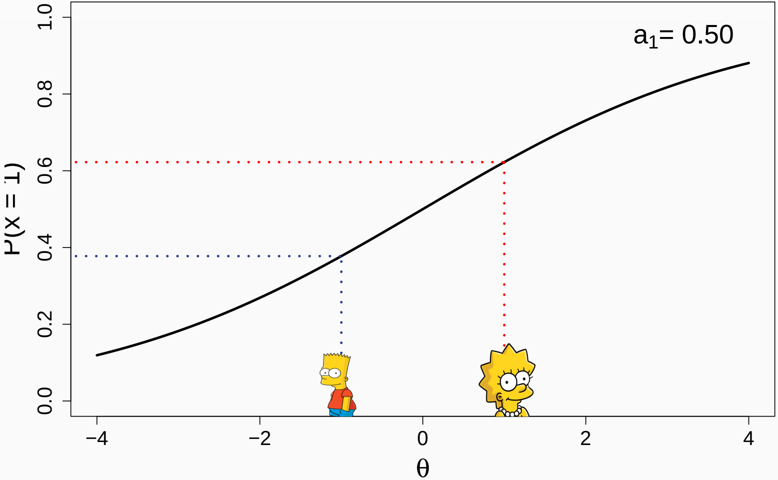
b_i; difficoltà dell'item i

a_i: capacità discriminativa o discriminatività dell'item $\rightarrow$ capacità dell'item i di discriminare tra soggetti con livelli diversi di tratto (piccole differenze nel livello di tratto portano a grandi differenze nella probabilità di rispondere correttamente all'item)



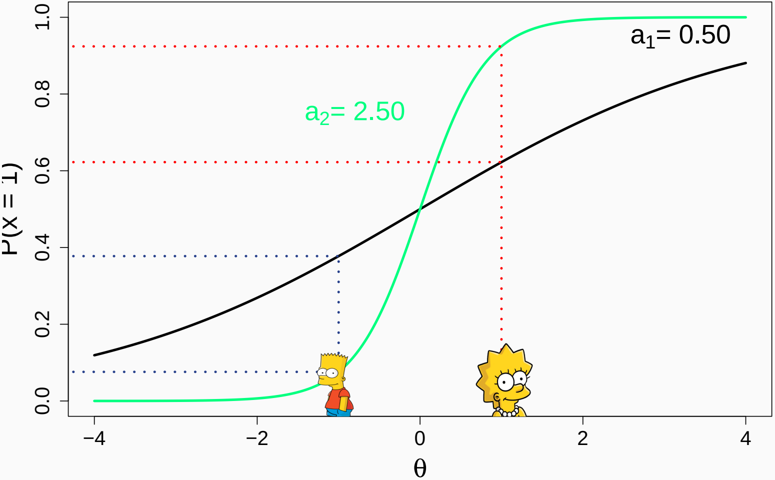
Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 = ?$



Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 =?$

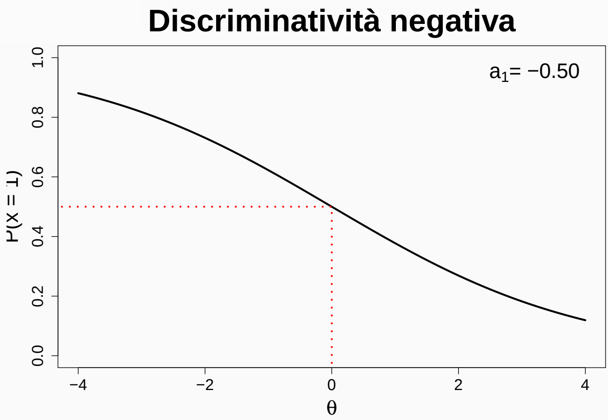


Item 1 ($a_1 = 0.50$):

$2 + 2 = ?$

Item 2 ($a_2 = 2.50$):

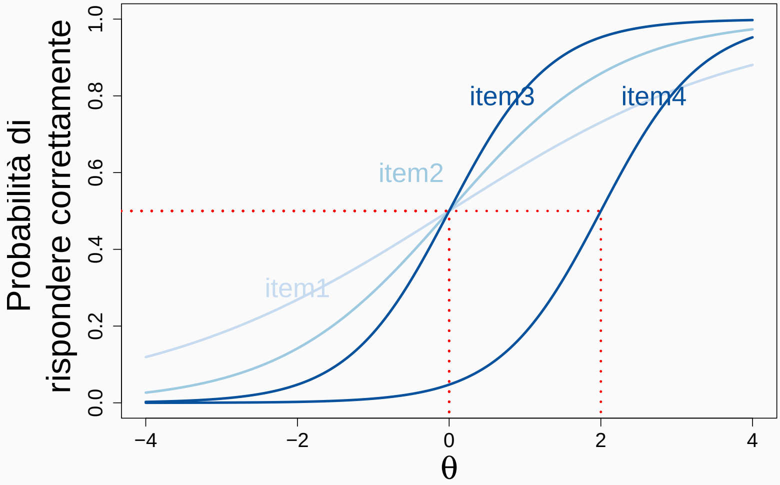
$5 + 14 = ?$



Al crescere del tratto latente. . . la probabilità di rispondere correttamente diminuisce!

Questi item vengono scartati

Item Response Function



	item1	item2	item3	item4
b	0.00	0.00	0.00	2.00
a	0.50	0.90	1.50	1.50

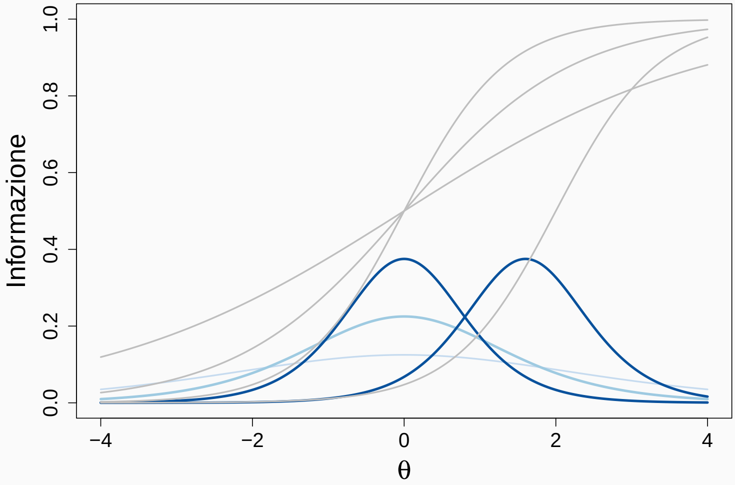
2PL

Item Information Function

$$I_i(\theta, b_i, a_i) = a_i^2 P_i(\theta, b_i, a_i) Q_i(\theta, b_i, a_i)$$

Dove $Q_i = 1 - P_i(\theta, b_i, a_i)$ è la probabilità di osservare una risposta errata

Item Information Function



	item1	item2	item3	item4
b	0.00	0.00	0.00	2.00
a	0.50	0.90	1.50	1.50

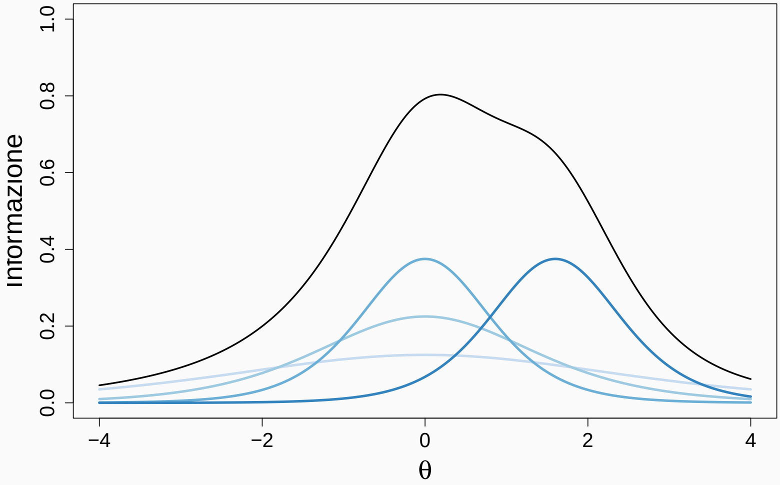
2PL

Test Information Function

La TIF è la somma delle informatività dei singoli item

$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i, a_i)$$

Test Information Function



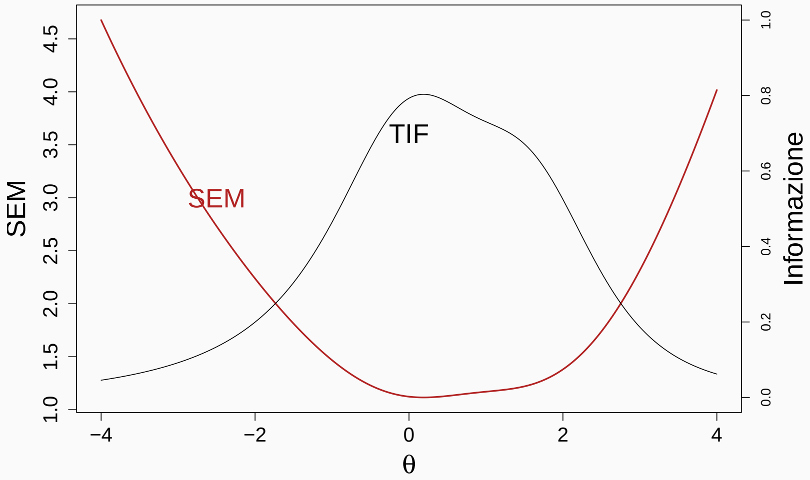
	item1	item2	item3	item4
b	0.00	0.00	0.00	2.00
a	0.50	0.90	1.50	1.50

Standard Error of Measurement (SEM)

Reciproco della TIF:

$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 P_i(\theta, b_i) Q_i(\theta, b_i)}}$$

Test Information Function



	item1	item2	item3	item4
b	0.00	0.00	0.00	2.00
a	0.50	0.90	1.50	1.50

3PL

3PL

Item Response Function

Viene aggiunto un parametro ("pseudo-guessing", c) che sposta verso l'alto l'asintoto sinistro:

$$P(x_{pi} = 1|\theta_p, b_i.a_i) = c_i + (1 - c_i)\frac{exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

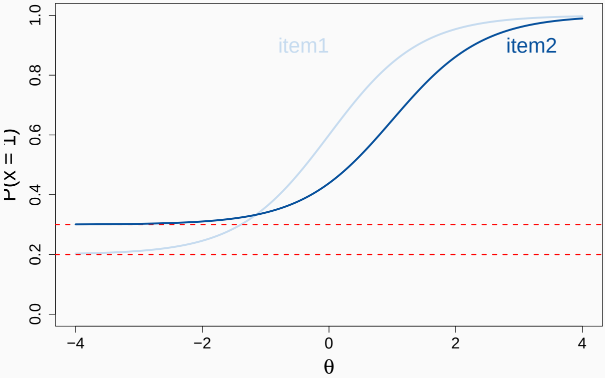
θ_p: abilità della persona (i.e., livello di tratto posseduto dalla persona) $\rightarrow$ maggiore θ_p, maggiore il livello di tratto di p

b_i; difficoltà dell'item i

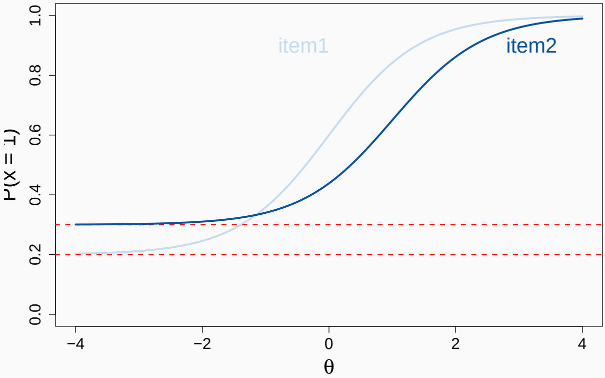
a_i: discriminatività dell'item i

c_i: pseudo-guessing (o asintoto inferiore) dell'item i $\rightarrow$ probabilità di una risposta corretta quando il livello di tratto latente si avvicina a $-\infty$

Item characteristic curve di due item, uno con $b = 0$, $a = 1.4$ e $c = 0.2$ (item 1), l'altro con $b = 0$, $a = 1.4$ e $c = 0.3$ (item 2)



La probabilità di una risposta corretta si approssima a c (0.20 e 0.30) quando il livello di tratto latente è basso



La probabilità di una risposta corretta è > 0.50 quando il livello di tratto è uguale alla difficoltà dell'item (in particolare, essa è $c + (1 - c)/2$)

In item a risposta multipla, una soltanto delle quali è corretta, ci si aspetta che soggetti con livello di tratto molto basso possano provare ad indovinare la risposta corretta scegliendo a caso

Nel caso in cui ci siano k alternative di risposta e che queste siano tutte ugualmente plausibili, il valore del parametro c dovrebbe avvicinarsi a $\frac{1}{k}$

ASSUNZIONE: Tutte le k alternative sono equiprobabili

3PL

Item Information Function

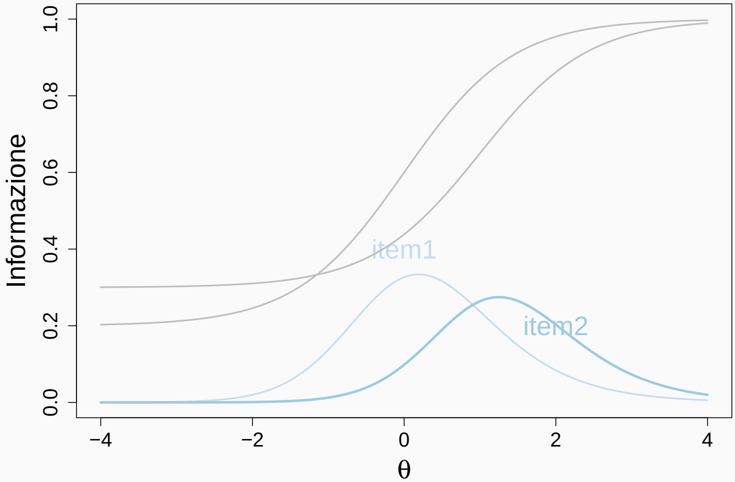
Nel 3PL, l'item response function prende in considerazione anche il parametro di guessing

$$I_i(\theta, b_i, a_i, c_i) = a^2 \frac{P_i(\theta, b_i, a_i, c_i)}{Q_i(\theta, b_i, a_i, c_i)} \left[\frac{P_i(\theta, b_i, a_i, c_i) - c_i}{1 - c_i} \right]$$

Più è alto il guessing, minore sarà l'informatività dell'item

$Q_i = 1 - P_i(\theta, b_i, a_i, c_i)$ è la probabilità di osservare una risposta errata

Item Information Function



	item1	item2
b	0.00	1.00
a	1.40	1.40
c	0.20	0.30

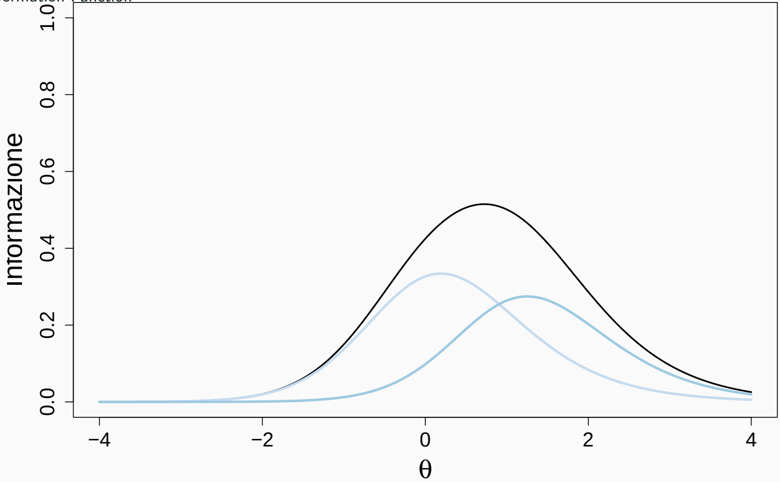
3PL

Test Information Function

La TIF è la somma delle informatività dei singoli item

$$I(\theta) = \sum I_i(\theta, b_i, a_i, c_i)$$

Test Information Function



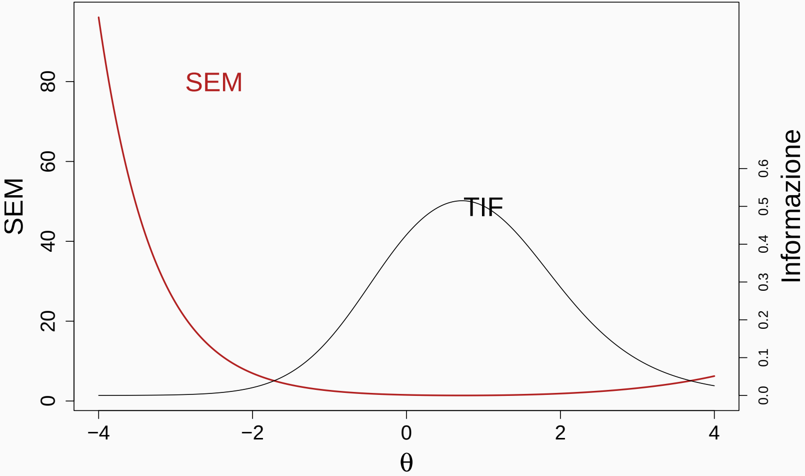
	item1	item2
b	0.00	1.00
a	1.40	1.40
c	0.20	0.30

Standard Error of Measurement (SEM)

Reciproco della TIF:

$$SEM(\theta) = \sqrt{\frac{1}{I(\theta)}} = \sqrt{\frac{1}{a^2 P_i(\theta, b_i, a_i, c_i) Q_i(\theta, b_i, a_i, c_i)}}$$

Test Information Function



	item1	item2
b	0.00	1.00
a	1.40	1.40
c	0.20	0.30

4PL

4PL

Item Response Function

Veramente poco usato

Prende in considerazione l'errore di distrazione (**careless error**) compiuto da persone con un livello molto alto di tratto:

$$P(x_{pi} = 1|\theta_p, b_i.a_i) = c_i + (d_i - c_i)\frac{exp(a_i(\theta_p - b_i))}{1 + exp(a_i(\theta_p - b_i))}$$

Dove:

θ_p: livello di tratto latente della persona

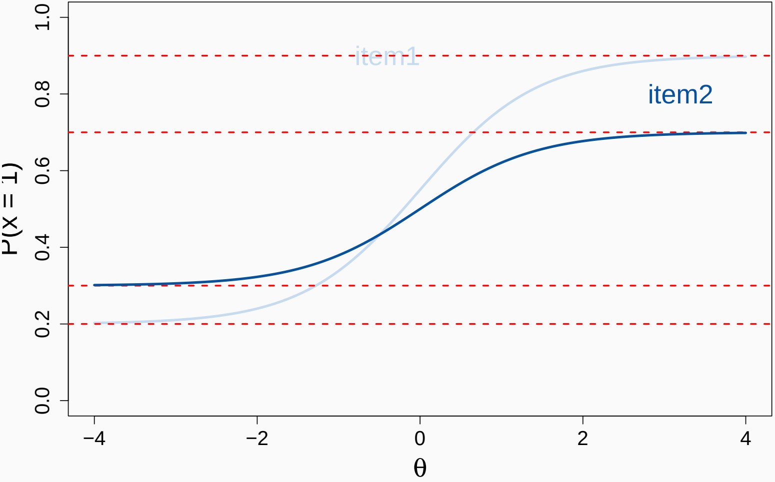
b_i, a_i, c_i; difficoltà, discriminatività e pseduo-guessing dell'item i

d_i: careless-error, probabilità di una risposta corretta (o affermativa) quando il livello di tratto latente si avvicina a $+\infty$

Minore è il valore di d_i, minore è la probabilità che un soggetto con un alto livello di tratto risponda correttamente (o affermativamente) all'item $i

Item 1: $b = 0$, $a = 1.4$, $c = 0.20$, $d = .9$

Item 2: $b = 0$, $a = 1.4$, $c = 0.30$, $d = .7$



Relazione tra i modelli

- Vincolando i parametri d_i di tutti gli item i ad essere uguali a 1, si passa dal modello 4PL al modello 3PL
- Vincolando i parametri c_i di tutti gli item i ad essere uguali a 0, si passa dal modello 3PL al modello 2PL
- Vincolando i parametri a_i di tutti gli item i ad essere uguali a 1, si passa dal modello 2PL al modello 1PL

e il modello di Rasch?

Formalmente, il modello di Rasch è equivalente all'1PL, ma cambia la filosofia che c'è dietro.

IRT	Rasch
adattamento del **modello** ai dati	adattamento dei **dati** al modello
Si seleziona il modello migliore per i dati	Si cambiano i dati (e.g., si eliminano gli item che non fittano) per farli stare nel modello

Relazione tra i modelli

Ma... quale modello?

Ma. . . quale modello?

Il modello può essere scelto:

- A priori:
    - considerazioni di natura teorica
    - caratteristiche degli item stessi
- A posteriori:
    - Si stimano tutti i modelli IRT sui dati
    - Si confrontano e il modello che fitta meglio è il modello scelto

A posteriori

Per la verifica a posteriori, vanno considerati gli indici di fit comparativi:

- $-$*2loglikelihood*: da usare solo per modelli nested
- Akaike's Information Criterion (AIC)
- Bayesian Information Criterion (BIC)

La scelta migliore è considerarli sempre tutti insieme (quando si hanno modelli nested)

-2*loglikelihood*

Per intepretare la $-$*2loglikelihood*, va calcolata la differenza tra la *LogLikelihood* di due modelli nested moltiplicata per -2 (-2*LogLikelihood*) e la differenza tra i gradi di libertà dei due modelli nested

Si calcola la probabilità associata alla differenza tra la $-$*2loglikelihood* dei due modelli secondo una distribuzione χ^2 con gradi di libertà uguali alla differenza tra i gradi di libertà dei due modelli:

- differenza significativa: Si sceglie il modello più complesso
- differenza non significativa: Si sceglie il modello più parsimonioso

Indici di entropia

AIC e BIC sono indici di entropia $\rightarrow$ va scelto il modello che presenta il valore di AIC/BIC **più basso**

L'AIC penalizza i modelli più complessi indipendentemente dall'ampiezza campionaria

$$AIC = -2logLik + 2p$$

Il BIC penalizza i modelli più complessi tenendo conto dell'ampiezza campionaria $\rightarrow$ particolarmente conservativo su campioni piccoli

$$BIC = -2logLik + p \cdot log(N)$$