

Vektorgrafik: Einführung, Transformationen

Vorlesung “Computergrafik und Bildverarbeitung” | SS 2023



Universität Regensburg

Lehrstuhl für Medieninformatik
Institut für Information und Medien, Sprache und Kultur
Fakultät für Informatik und Data Science

Themen heute

- **Vektoren**

- Koordinatensysteme, Vektoren
- Addition, Multiplikation
- Skalarprodukt, Kreuzprodukt
- Lineare Abhängigkeit

- **Matrizen**

- Rechenregeln
- Einheitsmatrix und inverse Matrix

- **Transformation von Vektoren mittels Matrizen**

- Grundprinzipien
- Homogene Koordinaten

Feedback: Vorkenntnisse Lineare Algebra

- Was ist ein Vektor?
- Wie invertiert man eine Matrix?
- Regeln für die Matrixmultiplikation
- Rotation von Punkten im 2D-Koordinatensystem
- Homogene Koordinaten
- Transformation von Punkten im 2D-Raum



<https://pingo.coactum.de/781526>

Vektoren

#01

Koordinatensysteme

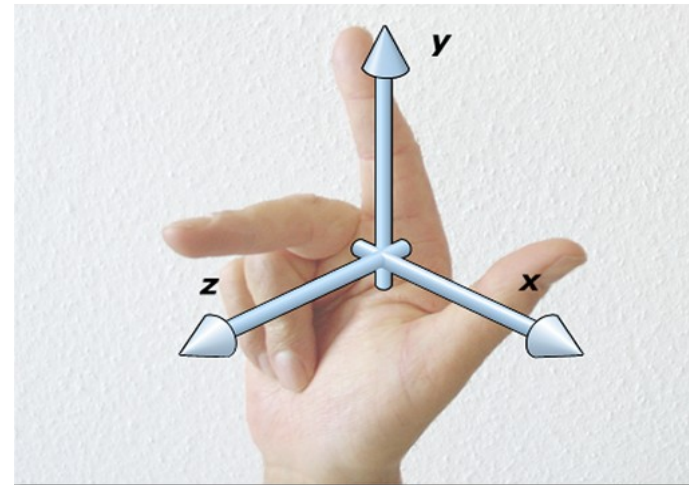
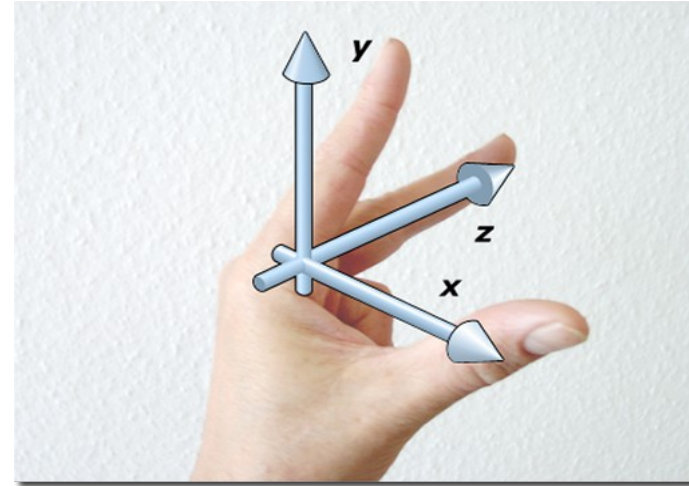
X – Richtung des Daumens

Y – Zeigefinger

Z – Mittelfinger

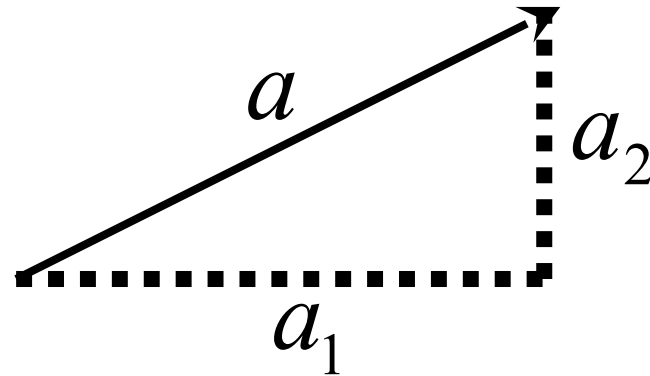
Die beiden Koordinatensysteme sind
spiegelbildlich

und nicht durch Drehung ineinander zu
überführen.



Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1
im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU

Vektoren - Grundbegriffe

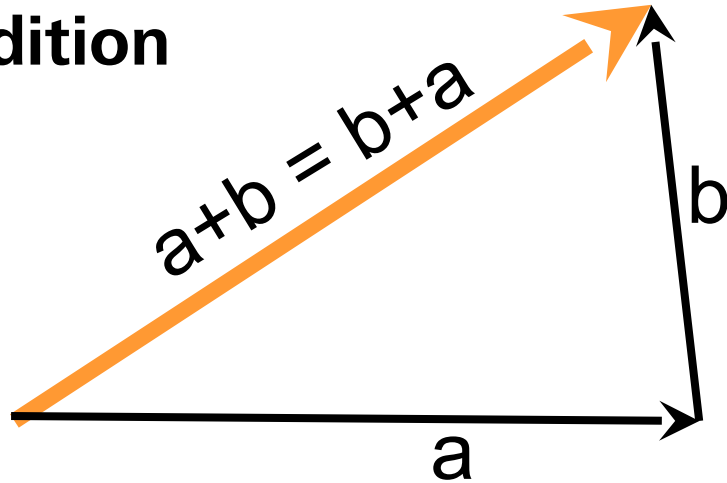


- Elemente eines Vektorraums
- Länge und Richtung = Verschiebung
- keine Aussage über absolute Position

- Schreibweise: $\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

- Betrag/ Norm/ Länge eines Vektors: $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Vektoren - Addition



- geometrisch: Anfang des zweiten Pfeils an Spitze des ersten Pfeils
- Addition ist kommutativ
- im kartesischen Koordinatensystem:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Vektoren – Multiplikation 1: Skalarmultiplikation

Multiplikation mit einem Skalar/ Skalarmultiplikation:

$$\vec{a} * \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \alpha = \begin{pmatrix} x * \alpha \\ y * \alpha \\ z * \alpha \end{pmatrix}$$

- **Veränderung der Vektorlänge um Faktor des Skalars**
- **das Ergebnis ist wieder ein Vektor**
- **bei Multiplikation mit negativem Skalar dreht sich die Richtung des Vektors**

Vektoren – Multiplikation 2: Skalarprodukt

Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor:

$$\langle a, b \rangle \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- das Ergebnis ist ein Skalar
- wenn Skalarprodukt = 0, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander bzw sind orthogonal
- Verwendung: Winkel zwischen Vektoren ausrechnen

$$\cos \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$$

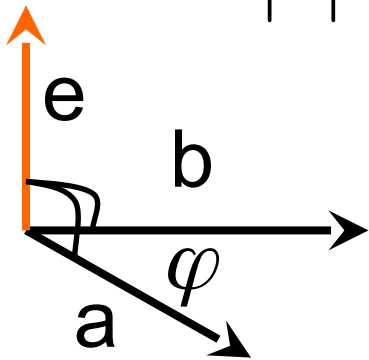
Vektoren – Multiplikation 3: Kreuz-/Vektorprodukt

Ziel: Zwei Vektoren zu einem Normalenvektor der Ebene verbinden.

Welcher Vektor steht auf beiden Vektoren senkrecht?

Die Länge dieses Vektors ist die Flächengröße des Parallelogramms mit den Seiten a und b .

$$a \times b = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\varphi) \cdot e$$



Phi = Winkel, eingeschlossen von a und b

e = Einheitsvektor, zu beiden Vektoren orthogonal

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Vektoren – Lineare Abhängigkeit

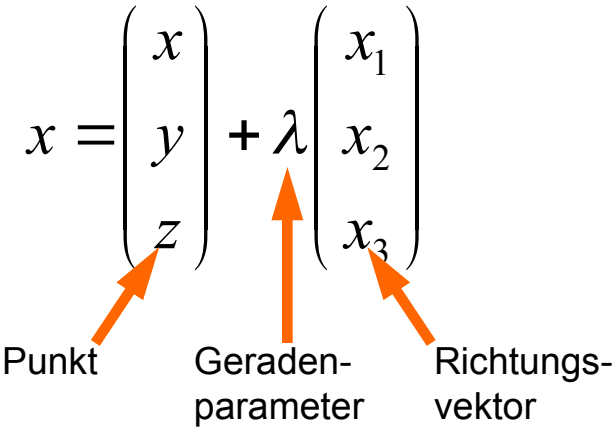
Mehrere Vektoren sind linear abhängig, wenn

- sie parallel (2D) oder koplanar (3D) zueinander sind ODER
- man einen aus den anderen erstellen kann ODER
- man mit ihnen den Nullvektor ausdrücken kann, d.h.
- es $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt, nicht alle Null, so daß gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Geraden im \mathbb{R}^3

Geraden im \mathbb{R}^3 haben folgende Form:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$


Punkt Geradenparameter Richtungsvektor

Zur Berechnung eines Geradenschnittpunkts:

- Beide Geradengleichungen gleichsetzen
- eine Gleichung für jede Koordinate
- Geradenparameter berechnen
- Einsetzen

Matrix Cookbook:

http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3274

Matrizen

#02

Matrizen - Grundbegriffe

- **Anordnung von Elementen ($m \times n = m$ Zeilen, n Spalten)**
- **Verwendung zur Transformation von Punkten und Vektoren**
 - Translation, Rotation, Scheren, Skalieren
- **Addition und Multiplikation mit einem Skalar: Element für Element**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Multiplikation mit einer Matrix

- Spalten in Matrix 1 = Zeilen in Matrix 2
- Element (i,j) im Produkt ist Produkt der Zeile i der Matrix 1 und Spalte j der Matrix 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 33 & 13 \\ 19 & 44 & 61 & 26 \\ 8 & 28 & 32 & 12 \end{pmatrix}$$

- **nicht** kommutativ: $AB \neq BA$
- assoziativ: $A*(B*C) = (A*B)*C$
- distributiv: $A*(B+C) = AB + AC$

Matrizen – Multiplikation mit einer Matrix

(Falkesches Schema)

- Spalten in Matrix 1 = Zeilen in Matrix 2
- Element (i,j) im Produkt ist Produkt der Zeile i der Matrix 1 und Spalte j der Matrix 2

			Spalte j			
			1	2	3	4
Zeile i			3	6	9	4
			2	7	8	3
	1	1 3	9	27	33	13
	2	5 2	19	44	61	26
3	0 4	8	28	32	12	

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Multiplikation mit einem Vektor

- Vektor als einspaltige Matrix (m x 1)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrizen – Transponieren einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrizen – Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zwei Matrizen, deren Produkt bei der Matrizenmultiplikation die Einheitsmatrix ist, sind zueinander invers.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$


$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Matrizen – Inverse Matrix

Zwei Matrizen, deren Produkt bei der Matrizenmultiplikation die Einheitsmatrix ist, sind zueinander invers.

Manuelles Ermitteln der inversen Matrix: Anwenden von elementaren Zeilenumformungen auf Matrix und Einheitsmatrix:

- Vertauschung zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer konstanten Zahl $\neq 0$
- Addition des beliebigen Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


1. Matrix zur Einheitsmatrix umformen
2. gleiche Schritte auf Einheitsmatrix anwenden
3. umgeformte Einheitsmatrix ist Inverse der Quellmatrix

Transformation von Vektoren mittels Matrizen

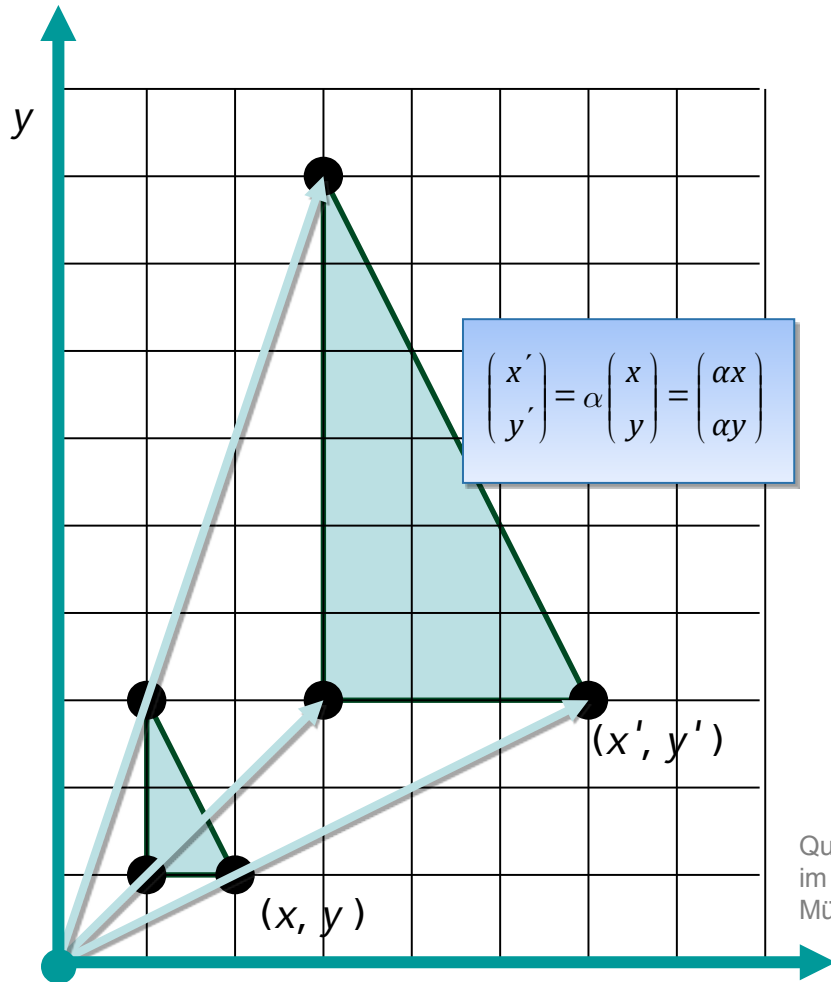
#03

Transformationen in 2D - Grundbegriffe

Bewegungen = Transformationen

- Veränderung der Position von Punkten
- Verschiebung = Translation
- Größenveränderungen = Skalierung
- Drehung = Rotation
- Weitere affine (linienerhaltende) Transformationen:
 - Spiegelung
 - Scherung

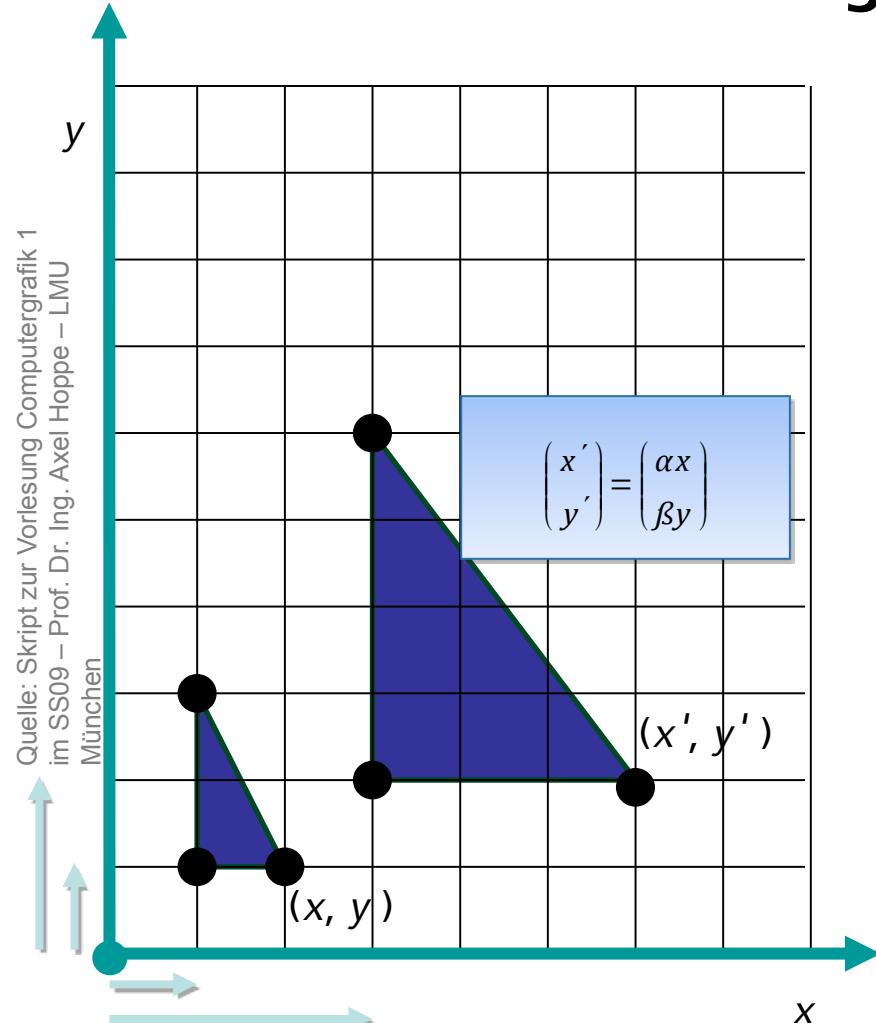
Uniforme Skalierung



- Zentrum der Skalierung ist 0, Skalierung erfolgt in alle Richtungen uniform mit dem skalaren Faktor α
- Multiplikation mit dem Skalierungsfaktor
- Ortsvektor zu (x, y) wird auf das α -fache verlängert, um (x', y') zu erhalten

Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1
im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU
München

Nicht-uniforme Skalierungen

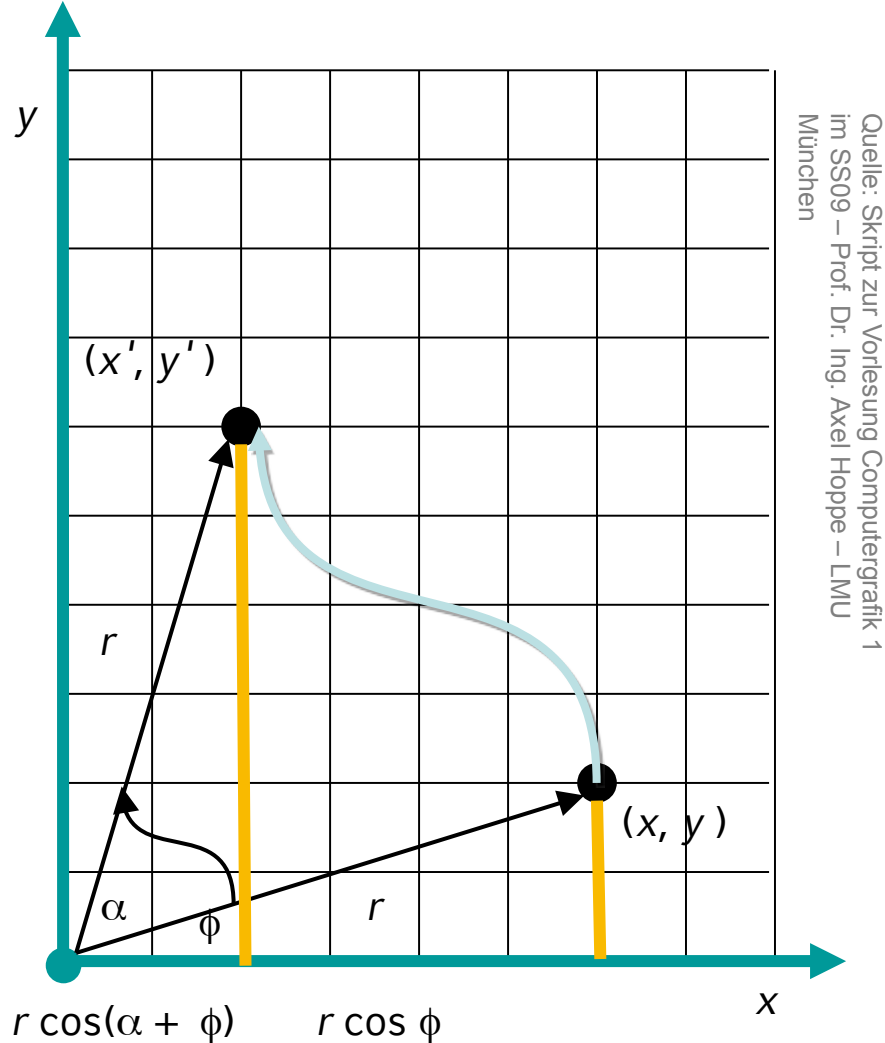


Zentrum der Skalierung ist o, Skalierung erfolgt in x-Richtung mit dem Faktor α , in y-Richtung mit β (Skalierungsvektor $(\alpha, \beta)^T$)

- Multiplikation mit entsprechenden Skalierungsfaktoren
- Ortsvektor zu (x, y) wird auf das α -fache in x-Richtung und das β -fache in y-Richtung verlängert.
- eine Darstellung als Matrizenmultiplikation ist möglich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

Rotation



- Rotationszentrum ist der Nullpunkt.
- Positive Werte von α ergeben eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn.
- Punkt (x, y) wird um den Winkel α um den Nullpunkt gedreht, so dass sich der Punkt (x', y') ergibt.

Rotation: Berechnungs-Vorschrift

Rotationen um negative Winkel erfolgen
mit dem Uhrzeigersinn;

ausnutzen:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \text{ und}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

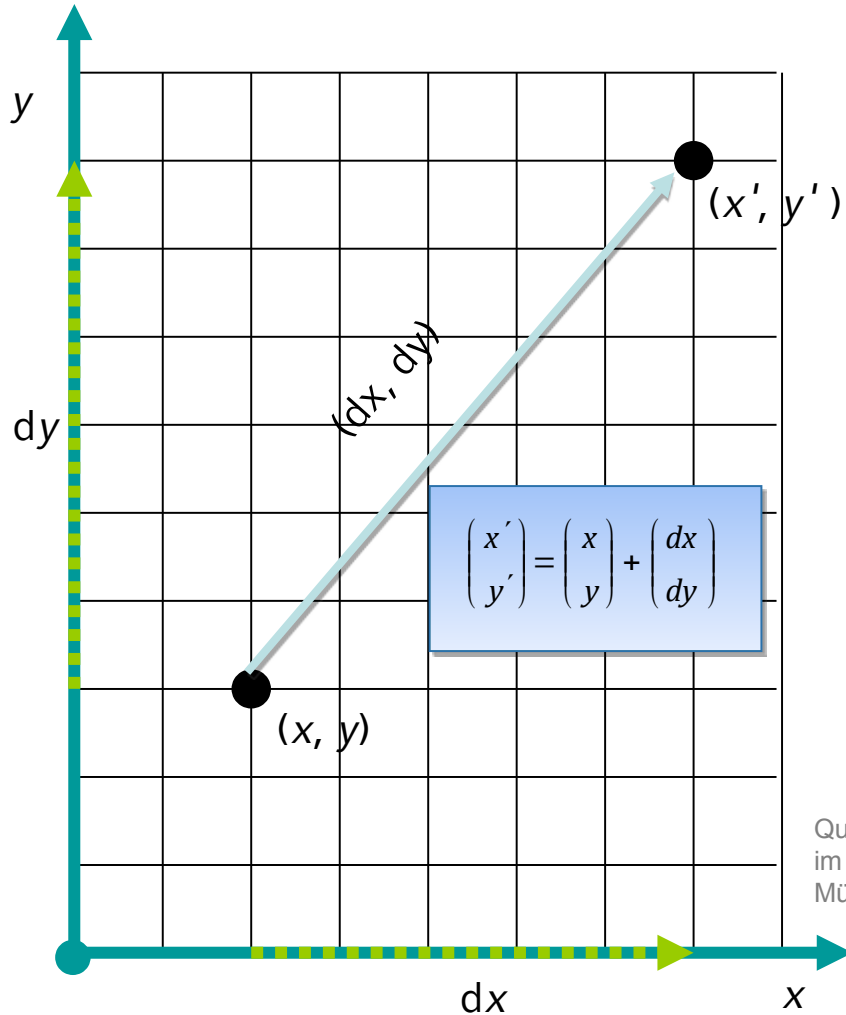
die Berechnungs-Vorschrift

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

kann als Matrix-Vektormultiplikation
ausgedrückt werden:

Translation



- Punkt (x, y) wird auf gerade Linie nach (x', y') verschoben.
- Addition des Verschiebungsvektors
- Beschreibung der Translation durch einen Vektor (dx, dy) , der die Verschiebungsweite in x - und y -Richtung angibt

Quelle: Skript zur Vorlesung Computergrafik 1
im SS09 – Prof. Dr. Ing. Axel Hoppe – LMU
München

Zusammenfassung

Skalierung = **Multiplikation** mit Vektor/ Skalierungsmatrix

Rotation = **Multiplikation** mit orthonormaler Rotationsmatrix

Translation = **Addition** eines Translationsvektors

Matrizenmultiplikation ist assoziativ*, lange Ketten von Transformationsmatrizen könnten also zusammengefasst werden. Wie lässt sich die Translation als Matrizenmultiplikation ausdrücken?

→ Homogene Koordinaten

→ Translation als Matrixmultiplikation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + x \\ \beta + y \\ 1 \end{pmatrix}$$

VORTEIL:

Repräsentation aller Punkte in homogenen Koordinaten ermöglicht einheitliche Behandlung der Transformationen, Geschwindigkeitsgewinn

* Matrizen A, B und Vektor x : $A^*(B*x) = (A*B)*x$

Transformationen in 2D

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation

Transformationen in 3D

- Vorgehensweise analog zu 2D
- Arbeit mit homogenen Koordinaten
- homogene Koordinaten sind jetzt vierdimensional
- Transformationsmatrizen demzufolge 4×4 -Matrizen
- Anwendung wie in 2D

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translation

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation