

ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

3ο Σύνολο Αναλυτικών Ασκήσεων

8ο Εξάμηνο - Εαρινό εξάμηνο 2018-19 - Ροή Σ

Αντωνιάδης Παναγιώτης (03115009 - e115009@central.ntua.gr)

Άσκηση 3.1: (Υφή)

Στην ανάλυση υφής συχνά χρησιμοποιούνται τοπικά μοντέλα διαμόρφωσης που παριστάνουν μια συνιστώσα υφής ως $g(x, y) = a(x, y)\exp(j\phi(x, y))$, όπου $a(x, y)$ είναι το στιγμιαίο πλάτος, $\phi(x, y)$ η στιγμιαία φάση και $\nabla\phi(x, y)$ το διάνυσμα στιγμιαίων χωρικών συχνοτήτων. Για εξαγωγή αυτής της πληροφορίας από μια γκριζα εικόνα $f(x, y)$, συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από quadrature ζεύγη φίλτρων με χροστικές αποκρίσεις

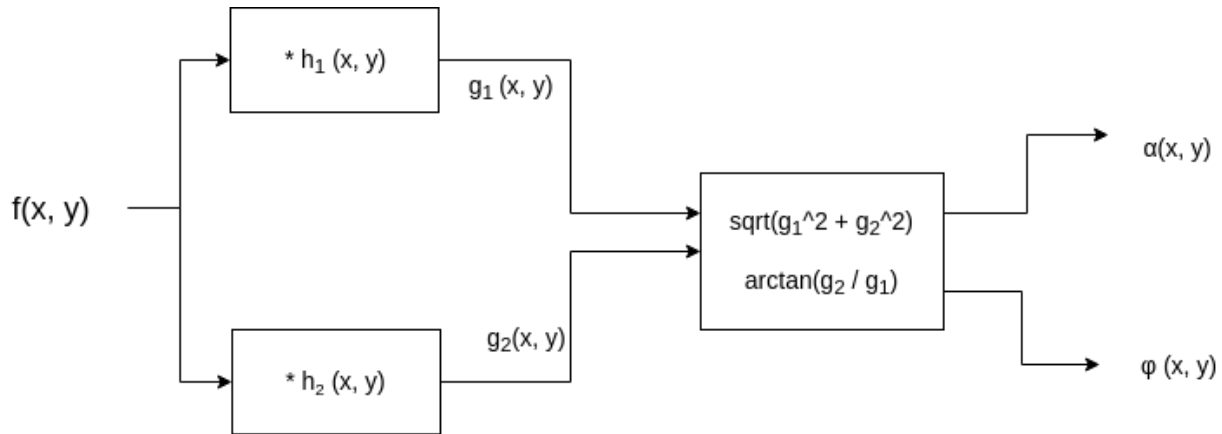
$$h_1(x, y) = G_\sigma(x, y)\cos(ux + vy), \quad h_2(x, y) = G_\sigma(x, y)\sin(ux + vy)$$

όπου G_σ είναι μια Gaussian συνάρτηση (πιθανώς ανισοτροπική) και (u, v) είναι η κεντρική συχνότητα της συνιστώσας υφής. Εάν γνωρίζετε τα σήματα εξόδου $g_1 = f * h_1$ και $g_2 = f * h_2$ από τα δύο φίλτρα του quadrature ζεύγους και θεωρήσετε ότι αυτά τα σήματα προσεγγίζουν καλά το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα της συνιστώσας υφής g , περιγράψτε ένα υπολογιστικό σύστημα που θα εξάγει το πλάτος και στιγμιαίες συχνότητες της g από αυτά τα δεδομένα.

Λύση: Έχουμε από εκφώνηση ότι $g_1 = f * h_1 \approx \Re\{g\}$ και $g_2 = f * h_2 \approx \Im\{g\}$. Αφού, λοιπόν, γνωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, έχουμε ότι:

$$\alpha(x, y) = \sqrt{\Re\{g(x, y)\}^2 + \Im\{g(x, y)\}^2} = \sqrt{g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)}$$
$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\Im\{g(x, y)\}}{\Re\{g(x, y)\}} = \arctan \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)}$$

και η στιγμιαία συχνότητα είναι το $\nabla\phi(x, y)$ (οριζόντια, κάθετη). Η μορφή του ζητούμενου υπολογιστικού συστήματος είναι η παρακάτω:



Εικόνα 1: Εξαγωγή μέτρου και γωνίας του g

Άσκηση 3.2: (Κίνηση)

Στην επεξεργασία και ανάλυση βίντεο για την εκτίμηση της κίνησης ή την εξαγωγή σημείων ενδιαφέροντος συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από 3Δ Gabor φίλτρα. Ωστόσο, η απευθείας συνέλιξη με 3Δ αποκρίσεις έχει μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα και συχνά αναζητούνται τρόποι για την επιτάχυνση του φιλτραρίσματος στις 3Δ διαστάσεις. Προς αυτή την κατεύθυνση συμβάλει η ιδιότητα του να έχουμε separable φίλτρα. Θεωρήστε μια ακολουθία εικόνων βίντεο $I(x, y, t)$ και το συνημιτονικό 3Δ Gabor φίλτρο:

$$g_c(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_t} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2} \right) \right] \cos(\omega_{x0}t + \omega_{y0}t + \omega_{t0}t)$$

1. Να αποδείξετε ότι το 3Δ Gabor φίλτρο είναι separable.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ισχύει η παρακάτω τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_{x0}t + \omega_{y0}t + \omega_{t0}t) &= \cos(\omega_{x0}t)\cos(\omega_{y0}t)\cos(\omega_{t0}t) \\ &\quad - \cos(\omega_{x0}t)\sin(\omega_{y0}t)\sin(\omega_{t0}t) \\ &\quad - \sin(\omega_{x0}t)\sin(\omega_{y0}t)\cos(\omega_{t0}t) \\ &\quad - \sin(\omega_{x0}t)\cos(\omega_{y0}t)\sin(\omega_{t0}t) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η αρχική σχέση με εφαρμογή του τύπου αυτού μπορεί να χωριστεί στο άθροισμα των παρακάτω τεσσάρων όρων:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g_{c1}(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_t} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2} \right) \right] \cos(\omega_{x0}t)\cos(\omega_{y0}t)\cos(\omega_{t0}t) \\ \text{(b)} \quad g_{c2}(x, y, t) &= - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sigma_x \sigma_y \sigma_t} \exp \left[- \left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2} \right) \right] \cos(\omega_{x0}t)\sin(\omega_{y0}t)\sin(\omega_{t0}t) \end{aligned}$$

$$(c) \ g_{c3}(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_t} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right)\right] \sin(\omega_{x0}t)\sin(\omega_{y0}t)\cos(\omega_{t0}t)$$

$$(d) \ g_{c4}(x, y, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_t} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right)\right] \sin(\omega_{x0}t)\cos(\omega_{y0}t)\sin(\omega_{t0}t)$$

Αν θεωρήσουμε ως $G_s(t, \sigma_t, \omega_{t0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_t^2}\right) \sin(2\pi\omega_{t0}t)$ το μονοδιάστατο ημιτονικό Gabor φίλτρο και $G_c(t, \sigma_t, \omega_{t0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma_t^2}\right) \cos(2\pi\omega_{t0}t)$ το μονοδιάστατο συνημιτονικό Gabor φίλτρο, κάθε ένας από τους παραπάνω τέσσερις όροι ανάγεται στο γινόμενο τριών μονοδιάστατων Gabor φίλτρων, ως εξής:

$$(a) \ g_{c1}(x, y, t) = G_c(x, \sigma_x, \omega_{x0}) * G_c(y, \sigma_y, \omega_{y0}) * G_c(t, \sigma_t, \omega_{t0})$$

$$(b) \ g_{c2}(x, y, t) = -G_c(x, \sigma_x, \omega_{x0}) * G_s(y, \sigma_y, \omega_{y0}) * G_s(t, \sigma_t, \omega_{t0})$$

$$(c) \ g_{c3}(x, y, t) = -G_s(x, \sigma_x, \omega_{x0}) * G_s(y, \sigma_y, \omega_{y0}) * G_c(t, \sigma_t, \omega_{t0})$$

$$(d) \ g_{c4}(x, y, t) = -G_s(x, \sigma_x, \omega_{x0}) * G_c(y, \sigma_y, \omega_{y0}) * G_s(t, \sigma_t, \omega_{t0})$$

Συνεπώς, το 3Δ Gabor φίλτρο είναι separable.

2. Να δείξετε πως το 3Δ φιλτράρισμα μπορεί να υλοποιηθεί με τη χρήση separable 1Δ φίλτρων. Ποια η διαφορά στην πολυπλοκότητα σε σχέση με την απευθείας 3Δ συνέλιξη;

Λύση: Αφού το φίλτρο είναι separable και χωρίζεται στους τέσσερις παραπάνω όρους, το 3Δ φιλτράρισμα μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

- 1) Συνέλιξη της εικόνας στο χρόνο με το $G_c(t, \sigma_t, \omega_{t0})$, μετά κάθε γραμμή με το $G_c(x, \sigma_x, \omega_{x0})$ και τέλος κάθε στήλη με το $G_c(y, \sigma_y, \omega_{y0})$ (όρος g_{c1}).
- 2) Συνέλιξη της εικόνας στο χρόνο με το $G_s(t, \sigma_t, \omega_{t0})$, μετά κάθε γραμμή με το $G_c(x, \sigma_x, \omega_{x0})$ και τέλος κάθε στήλη με το $G_s(y, \sigma_y, \omega_{y0})$ (όρος g_{c2}).
- 3) Συνέλιξη της εικόνας στο χρόνο με το $G_c(t, \sigma_t, \omega_{t0})$, μετά κάθε γραμμή με το $G_s(x, \sigma_x, \omega_{x0})$ και τέλος κάθε στήλη με το $G_s(y, \sigma_y, \omega_{y0})$ (όρος g_{c3}).
- 4) Συνέλιξη της εικόνας στο χρόνο με το $G_s(t, \sigma_t, \omega_{t0})$, μετά κάθε γραμμή με το $G_s(x, \sigma_x, \omega_{x0})$ και τέλος κάθε στήλη με το $G_c(y, \sigma_y, \omega_{y0})$ (όρος g_{c4}).
- 5) Αφαίρεση από το (1) των (2), (3) και (4).

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μία ακολουθία από frame στο χρόνο όπου η κάθε εικόνα είναι n pixel, το φίλτρο μας έχει μέγεθος k και οι εικόνες είναι m , τότε η αρχική 3Δ συνέλιξη έχει πολυπλοκότητα $O(k^3n^2m)$. Εκμεταλλεύοντας, όμως, ότι το 3Δ Gabor φίλτρο είναι separable έχουμε πολυπλοκότητα $O(kn^2m)$.

3. Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας του 3Δ φίλτρου.

Λύση: Η απόκριση συχνότητας είναι ως εξής:

$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y, \omega_t) &= \frac{1}{4} \exp\{-4\pi^2[\sigma_x^2(\omega_x - \omega_{x0})^2 \\ &\quad + \sigma_y^2(\omega_y - \omega_{y0})^2 + \sigma_t^2(\omega_t - \omega_{t0})^2]\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \exp\{-4\pi^2[\sigma_x^2(\omega_x - \omega_{x0})^2 \\ &\quad + \sigma_y^2(\omega_y - \omega_{y0})^2 + \sigma_t^2(\omega_t - \omega_{t0})^2]\} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.3: (Ενεργές Καμπύλες)

Θεωρείστε ένα μοντέλο εξέλιξης καμπυλών που χρησιμοποιεί μια γενικευμένη αρχή του Huygens για την δημιουργία του νέου ορίου κύματος $\Gamma(t + \Delta t)$ διαστέλλοντας το προηγούμενο όριο κύματος $\Gamma(t)$ με σχήματα $\Delta t B$, όπου B είναι μια έλλειψη με άξονες παράλληλους ως προς τους άξονες και με μήκη αξόνων $a > b$. Να βρείτε την αντίστοιχη συνάρτηση εξωτερικής κάθετης ταχύτητας V της καμπύλης χρησιμοποιώντας την μέθοδο επιπεδοσυνόλων όπου η καμπύλη εμβυθίζεται ως η ισοϋψής (σε ύψος 0) μιας συνάρτησης που είναι αρνητική ($u < 0$) στο εσωτερικό της καμπύλης.

Λύση: Αντίστοιχα με την διαδικασία στην ενότητα 17.3.4 στο [1], έχουμε για την καμπύλη $\vec{C}(p, t)$ ότι:

$$\frac{\partial \vec{C}}{\partial t} = V \vec{N}_0, \quad V = \sigma_B \vec{N}_0$$

, όπου σ_B είναι η support function του συνόλου B :

$$\sigma_B(x, y) = \bigvee_{(u, h) \in B} hx + uy$$

Στη περίπτωση μας το σύνολο B είναι μία έλλειψη με άξονες παράλληλους ως προς τους άξονες και με μήκη αξόνων $a > b$. Άρα, ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$$

και η μεγιστοποίηση γίνεται:

$$\max_{0 \leq h \leq \frac{a}{2}} \{hx + uy\} = \max_{0 \leq h \leq \frac{a}{2}} \{xh + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 h^2}{b^2}} y\}$$

Άσκηση 3.4: (Προβολική Γεωμετρία - Στερέωση)

1. Στο P^2 , η ευθεία που ενώνει δύο σημεία \tilde{m}_1 και \tilde{m}_2 είναι η $\tilde{l} = \tilde{m}_1 \times \tilde{m}_2$. Να δείξετε ότι τα σημεία αυτής της ευθείας μπορούν να αναπαρασταθούν με τα ομογενή διανύσματα $\tilde{x} = a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2$ όπου a, b είναι αυθαίρετοι βαθμωτοί. [Κεφ.2, HS2003].

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία της μορφής $\tilde{x} = a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2$ ανήκουν στην ευθεία \tilde{l} , ή

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T \tilde{l} = 0 &\implies (a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2)^T \tilde{l} = 0 \\ &\implies (a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2)^T (\tilde{m}_1 \times \tilde{m}_2) = 0 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητες $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ και $a(b \times c) = b(c \times a) = c(a \times b)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2)^T (\tilde{m}_1 \times \tilde{m}_2) &= \tilde{m}_1^T (\tilde{m}_2 \times (a\tilde{m}_1 + b\tilde{m}_2)^T) \\ &= \tilde{m}_1^T (\tilde{m}_2 \times (a\tilde{m}_1^T + b\tilde{m}_2^T)) \\ &= \tilde{m}_1^T ((\tilde{m}_2 \times a\tilde{m}_1^T) + (\tilde{m}_2 \times b\tilde{m}_2^T)) \\ &= \tilde{m}_1^T (\tilde{m}_2 \times a\tilde{m}_1^T) \\ &= \tilde{m}_2^T (a\tilde{m}_1^T \times \tilde{m}_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Στο P^2 , Να δείξετε ότι το ο λόγος Cross-ratio 4 ευθειών που συντρέχουν σε ένα σημείο, που ορίζεται ως το Cross-ratio των 4 σημείων τομής αυτών των ευθειών με μια άλλη ευθεία, είναι ανεξάρτητος από την τέμνουσα ευθεία. [Κεφ.2, HS2003].

Λύση: Αρχεί να δείξουμε ότι είναι αμετάβλητος ως προς οποιαδήποτε προβολικό μετασχηματισμό της ευθείας. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός εκφράζεται ως $x' = Hx \implies \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Αρχικά, πρέπει να αποδείξουμε ότι $|Ha Hb| = |H||a b|$. Έχουμε:

$$Ha = \begin{bmatrix} h_{11}a_1 + h_{12}a_2 \\ h_{21}a_1 + h_{22}a_2 \end{bmatrix} \quad Hb = \begin{bmatrix} h_{11}b_1 + h_{12}b_2 \\ h_{21}b_1 + h_{22}b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |Ha Hb| &= (h_{11}a_1 + h_{12}a_2)(h_{21}b_1 + h_{22}b_2) - (h_{21}a_1 + h_{22}a_2)(h_{11}b_1 + h_{12}b_2) \\ &= h_{11}a_1h_{21}b_1 + h_{11}a_1h_{22}b_2 + h_{12}a_2h_{21}b_1 + h_{12}a_2h_{22}b_2 \\ &\quad - h_{21}a_1h_{11}b_1 - h_{21}a_1h_{12}b_2 - h_{22}a_2h_{11}b_1 - h_{22}a_2h_{12}b_2 \\ &= h_{11}a_1h_{22}b_2 + h_{12}a_2h_{21}b_1 - h_{21}a_1h_{12}b_2 - h_{22}a_2h_{11}b_1 \\ &= (a_1b_2)(h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}) - (a_2b_1)(h_{22}h_{11} - h_{12}h_{21}) \\ &= (h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12})(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= |H||a b| \end{aligned}$$

Έστω, λοιπόν, ότι παίρνοντας μία άλλη τέμνουσα ευθεία έχουμε τα σημεία a', b', c', d' . Για τον λόγο Cross-ratio ισχύει:

$$\begin{aligned} Cross(a', b', c', d') &= \frac{|a' b'| |c' d'|}{|a' c'| |b' d'|} \\ &= \frac{|Ha Hb| |Hc Hd|}{|Ha Hc| |Hb Hd|} \\ &= \frac{|H||a b| |H||c d|}{|H||a c| |H||b d|} \\ &= \frac{|a b| |c d|}{|a c| |b d|} \\ &= Cross(a, b, c, d) \end{aligned}$$

3. Να δείξετε ότι αν μια προβολική κάμερα είναι αφινική, δηλ. η 3η σειρά του πίνακα προβολής ισούται με $(0, 0, 0, 1)$, τότε προβάλλει δύο παράλληλες ευθείες του κόσμου σε δύο παράλληλες ευθείες στο επίπεδο εικόνας. [Κεφ.3 & Κεφ.6, HS2003].

Λύση: Αρχικά, θα δείξουμε ότι το επίπεδο στο άπειρο του κόσμου αντιστοιχεί σε σημείο του απείρου στο επίπεδο της εικόνας. Η γενική μορφή μιας αφινικής κάμερας είναι:

$$P_A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & t_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, ένα τυχαίο επίπεδο στο άπειρο του κόσμου $(X, Y, Z, 0)$, αντιστοιχίζεται στο:

$$P_A(X, Y, Z, 0)^T = \begin{bmatrix} m_{11}X + Ym_{12} + Zm_{13} \\ m_{21}X + Ym_{22} + Zm_{23} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

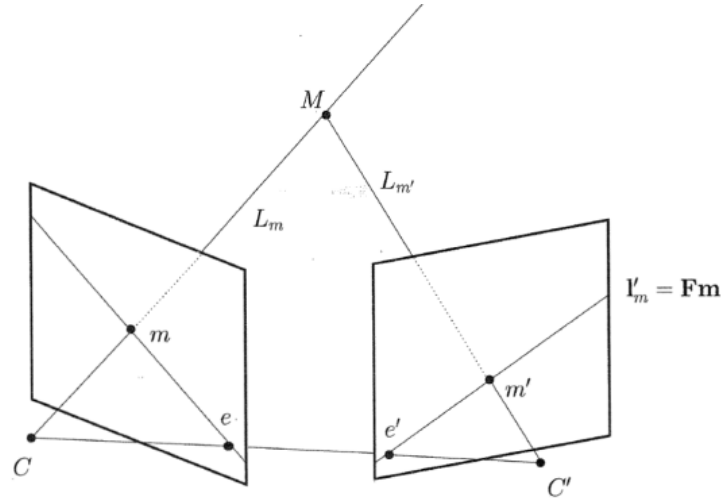
το οποίο αφού έχει την 3η συντεταγμένη 0 αποτελεί σημείο του απείρου στο επίπεδο της εικόνας.

Έχουμε, λοιπόν, ότι δύο παράλληλες ευθείες του κόσμου τέμνονται στο επίπεδο του απείρου στον κόσμο. Αυτό το επίπεδο, όπως δείξαμε, αντιστοιχεί σε ένα σημείο του απείρου στο επίπεδο της εικόνας. Συνεπώς, και οι ευθείες στο επίπεδο της εικόνας είναι παράλληλες (αφού τέμνονται στο άπειρο).

4. Για την επιπολική γεωμετρία στερέωσης του Σχ. 1, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση (epipolar constraint)

$$\tilde{m}'^T F \tilde{m} = 0$$

όπου F είναι ο fundamental matrix και \tilde{m}' , \tilde{m} παριστάνουν διανύσματα σημείων σε ομογενείς συντεταγμένες.



Εικόνα 2: Επιπολική Γεωμετρία

Λύση: Η σχέση μεταξύ m και m' είναι μία 2Δ ομογραφία $H_\pi : \tilde{m}' = H_\pi \tilde{m}$. Ακόμη, για την ευθεία l'_m ισχύει ότι:

$$\tilde{l}' = \tilde{e}' \times \tilde{m}' \implies \tilde{l}' = [\tilde{e}']_x \tilde{m}' \implies \tilde{l}' = [\tilde{e}']_x H_\pi \tilde{m} \implies \tilde{l}' = F \tilde{m},$$

όπου $F = [\tilde{e}']_x H_\pi$. Το σημείο \tilde{m}' ανήκει στην ευθεία l'_m . Συνεπώς, $\tilde{m}'^T \tilde{l}'_m = 0 \implies \tilde{m}'^T F \tilde{m} = 0$.

Υπόδειξη : Εισαγωγή (Κεφ. 1) του βιβλίου Faugeras & Luong 2001 [4] και Κεφάλαιο 9 από Hartley & Zisserman 2003 [3].

Άσκηση 3.5: (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)

1. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε μη-κενή ψηφιακή δυαδική εικόνα X (η οποία παριστάνει κάποιο σχήμα) και ένα δομικό στοιχείο B (που προσεγγίζει τον δίσκο με βάση τον οποίο γίνεται η σκελετικοποίηση του σχήματος), όπου $X, B \subseteq Z^2$. Εάν $(0, 0) \in B$ και $\text{card}(B) \geq 2$, να αποδειχθεί ότι τα σκελετικά υποσύνολα της εικόνας έχουν μεταξύ τους κενή τομή, δηλ.

$$S_n = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus n) \circ B] \implies S_n \cap S_{n+1} = \emptyset, \quad \forall n.$$

$nB = B \oplus B \oplus \dots \oplus B$ είναι το δομικό στοιχείο σε κλίμακα $n = 0, 1, 2, \dots, N = \max\{k : X \ominus kB \neq \emptyset\}$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} (0, 0) \in B &\implies X \ominus B \subseteq X \circ B, \\ X \circ B &\subseteq X \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν συνδυάσουμε διαδοχικά αυτές τις σχέσεις, έχουμε:

$$X \supseteq X \circ B \supseteq X \ominus B \supseteq (X \ominus B) \circ B \supseteq (X \ominus B) \ominus B = X \ominus (B \oplus B) = X \ominus 2B$$

και αν εφαρμόσουμε το παραπάνω N φορές, θα καταλήξουμε ότι:

$$X \supseteq X \circ B \supseteq X \ominus B \supseteq (X \ominus B) \circ B \supseteq X \ominus 2B \supseteq \dots \supseteq X \ominus nB$$

Ορίσουμε, τώρα, ως R_n την διαφορά δύο διαδοχικών erosion, δηλαδή $R_n = (X \ominus nB) \setminus (X \ominus (n+1)B)$ και έχουμε με απλές πράξεις συνόλων ότι:

$$\begin{aligned} [(X \ominus nB) - (X \ominus (n+1)B)] \cap (X \ominus (n+1)B) &= \emptyset \implies \\ [(X \ominus nB) - (X \ominus (n+1)B)] \cap [(X \ominus (n+1)B) - (X \ominus (n+2)B)] &= \emptyset \implies \\ R_n \cap R_{n+1} &= \emptyset, \quad \forall n. \end{aligned}$$

Ακόμη, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} (X \ominus nB) \circ B &\supseteq X \ominus (n+1)B \implies \\ (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B] &\subseteq (X \ominus nB) \setminus (X \ominus (n+1)B) \implies \\ S_n &\subseteq R_n \end{aligned}$$

Άρα, αφού $R_n \cap R_{n+1} = \emptyset$ και $S_n \subseteq R_n$, τότε σίγουρα $S_n \cap S_{n+1} = \emptyset, \quad \forall n$

2. Θεωρούμε μια δυαδική εικόνα (σύνολο) X που εγγράφεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 6×9 pixels. (Βλ. Σχήμα).

$$X = \begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}, \quad B = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \bullet \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = B^s.$$

Chamfer Distance $(a, b) = (1, +\infty)$

Εικόνα 3: Η δυαδική εικόνα X και ο 5-pixel ρόμβος B

- (a) Να υπολογισθεί ο εσωτερικός μετασχηματισμός απόστασης $DT(X)$ του συνόλου X με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας την απόσταση cityblock. Να βρεθούν οι τιμές των εικόνων $u_0(0/\text{inf indicator function του } X)$, u_1 (ενδιάμεσο στάδιο απόστασης), και $u_2 = DT(X)$ (τελική απόσταση).

Λύση: Για το u_0 :

$$u_0 = I_{\wedge}(S^c) = -\log(\mathbb{1}_{S^c}) = \begin{cases} +\infty, & \text{if } (x, y) \in S \\ 0, & \text{if } (x, y) \in S^c \end{cases}$$

Έτσι, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας για το u_0 , όπου $+=+\infty$.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
0	+	+	+	+	0	+	+	+	+	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Για το u_1 , έχουμε την εξής σχέση:

$$u_1[i, j] = \min(u_1[i, j-1] + 1, u_1[i-1, j] + 1, u_0[i, j])$$

Εφαρμόζοντάς την σχέση αυτήν από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0
0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Για το u_2 , έχουμε την εξής σχέση:

$$u_2[i, j] = \min(u_2[i, j+1] + 1, u_2[i+1, j] + 1, u_1[i, j])$$

Εφαρμόζοντάς την σχέση αυτήν από κάτω δεξιά προς τα πάνω αριστερά, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	2	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	1	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- (b) Να υπολογισθεί ο μορφολογικός σκελετός $SK(X) = \bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$, ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων $S_n(X)$, όπου B είναι ο 5-pixel ρόμβος. Επίσης, να βρεθούν τα σημεία των : erosions $X \ominus nB$, skeleton subsets $S_n(X)$, partial unions of skeleton subsets $\bigcup_{k \geq n} S_k(X)$, openings $X \circ nB$, για $n = 0, 1, 2, \dots$
(Σημεία ενός συνόλου συμβολίζονται με '•', ενώ σημεία του συμπληρώματος του συμβολίζονται με '•')

Λύση: Ο υπολογισμός των παραπάνω έγινε ως εξής:

- $X \ominus nB = \begin{cases} X, & n = 0 \\ X \ominus B, & n = 1 \\ X \ominus (B \oplus B) = (X \ominus B) \ominus B, & n = 2 \end{cases}$
- $S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B], \quad n = 0, 1, 2$
- Για το $\bigcup_{k \geq n} S_k(X)$ παίρνουμε απλά την ένωση των παραπάνω.
- $X \circ nB = \begin{cases} X, & n = 0 \\ X \circ B, & n = 1 \\ X \circ (B \oplus B), & n = 2 \end{cases}$

Ακολουθεί η σελίδα που μας δώθηκε συμπληρωμένη:

Skeleton

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$X \ominus nB$			
$S_n(X)$			
$\bigcup_{k \geq n} S_k$			
$X \circ nB$			

- (c) Να επαληθεύσετε υπολογιστικά για το ανωτέρω παράδειγμα ότι τα σημεία του σκελετού στο μέρος (b2) είναι ακριβώς τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (b1), όπου τα τοπικά μέγιστα υπολογίζονται με βάση την γειτονιά B .

Λύση: Παρακάτω, φαίνονται τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (b1):

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	(1)	1	1	1	1	1	1	1	(1)	0
0	1	(2)	2	2	(2)	2	2	(2)	1	0
0	1	2	(3)	(3)	2	(3)	(3)	2	1	0
0	1	(2)	2	2	1	2	2	(2)	1	0
0	(1)	1	1	1	0	1	1	1	(1)	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι $S(X) = \bigcup_{k \geq 0} S_k(X)$, το οποίο υπολογίστηκε παραπάνω. Παρατηρούμε ότι τα δύο αυτά σύνολα πράγματι συμπίπτουν.

Το μέρος (b) να επιστραφεί στην επισυναπτόμενη σελίδα με τον πίνακα σχημάτων.

Βιβλιογραφία

- [1] P. Maragos, *Σημειώσεις Όρασης Υπολογιστών*. 2015.
- [2] D. J. Heeger, “Model for the extraction of image flow,”
- [3] Hartley and Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Faugeras and Luong, *The Geometry of Multiple Images*. The MIT Press, 2001.