

# ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

## 1ο Σύνολο Αναλυτικών Ασκήσεων

8ο Εξάμηνο - Εαρινό εξάμηνο 2018-19 - Ροή Σ

Αντωνιάδης Παναγιώτης (03115009 - e115009@central.ntua.gr)

### Άσκηση 1.1: (Σχηματισμός Εικόνων)

(a) Λύσετε την άσκηση 2.3 από το Κεφ.2 (έκδοση 9/2014):

Να εξηγηθεί αναλυτικά το φαινόμενο προσμίκρυνσης (foreshortening) στην προοπτική προβολή. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα 3Δ ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία  $P_1 = (X_0, Y_0, Z_0) - \frac{L}{2}(a, b, c)$  και  $P_2 = (X_0, Y_0, Z_0) + \frac{L}{2}(a, b, c)$ , όπου  $L$  είναι το μήκος του,  $(X_0, Y_0, Z_0)$  είναι το κέντρο του και  $(a, b, c)$  είναι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει με τους άξονες  $X, Y, Z$ . Αν  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ , δηλ. αν το 3Δ τμήμα είναι κεντραρισμένο ως προς το επίπεδο εικόνας, να αποδειχθεί ότι το μήκος  $l$  της 2Δ προβολής του μεγιστοποιείται όταν το 3Δ τμήμα είναι παράλληλο προς το επίπεδο εικόνας.

**Λύση:**

Αφού  $(X_0, Y_0) = (0, 0)$ , τα άκρα του 3Δ ευθύγραμμου τμήματος είναι τα εξής:

$$P_1 = (0, 0, Z_0) - \frac{L}{2}(a, b, c) \implies P_1 = \begin{bmatrix} -\frac{aL}{2} \\ -\frac{bL}{2} \\ Z_0 - \frac{cL}{2} \end{bmatrix}$$

και

$$P_2 = (0, 0, Z_0) + \frac{L}{2}(a, b, c) \implies P_2 = \begin{bmatrix} \frac{aL}{2} \\ \frac{bL}{2} \\ Z_0 + \frac{cL}{2} \end{bmatrix}$$

Στην προοπτική προβολή γνωρίζουμε ότι  $x = f \frac{X}{Z}$  και  $y = f \frac{Y}{Z}$ . Έτσι, προκύπτουν τα σημεία  $P'_1$  και  $P'_2$ , που είναι τα άκρα της 2Δ προβολής του αρχικού 3Δ ευθύγραμμου τμήματος.

$$P'_1 = \begin{bmatrix} f \frac{-\frac{aL}{2}}{Z_0 - \frac{cL}{2}} \\ f \frac{-\frac{bL}{2}}{Z_0 - \frac{cL}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P'_2 = \begin{bmatrix} f \frac{\frac{aL}{2}}{Z_0 + \frac{cL}{2}} \\ f \frac{\frac{bL}{2}}{Z_0 + \frac{cL}{2}} \end{bmatrix}$$

Το μήκος  $l$  της  $2\Delta$  προβολής θα είναι η απόσταση των δύο παραπάνω άκρων ως εξής:

$$\begin{aligned}
 l &= \sqrt{(P'_{2x} - P'_{1x})^2 + (P'_{2y} - P'_{1y})^2} \Rightarrow l = \sqrt{\left(f \frac{\frac{aL}{2}}{Z_0 + \frac{cL}{2}} + f \frac{\frac{aL}{2}}{Z_0 - \frac{cL}{2}}\right)^2 + \left(f \frac{\frac{bL}{2}}{Z_0 + \frac{cL}{2}} + f \frac{\frac{bL}{2}}{Z_0 - \frac{cL}{2}}\right)^2} \\
 &\Rightarrow l = \sqrt{f^2 \frac{a^2 L^2}{4} \left(\frac{1}{Z_0 + \frac{cL}{2}} + \frac{1}{Z_0 - \frac{cL}{2}}\right)^2 + f^2 \frac{b^2 L^2}{4} \left(\frac{1}{Z_0 + \frac{cL}{2}} + \frac{1}{Z_0 - \frac{cL}{2}}\right)^2} \\
 &\Rightarrow l = \sqrt{f^2 \frac{L^2}{4} \left(\frac{2Z_0}{Z_0^2 - \frac{c^2 L^2}{4}}\right)^2 (a^2 + b^2)}
 \end{aligned}$$

Για να μεγιστοποιήσουμε το παραπάνω αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα κάτω από την ρίζα και πιο συγκεκριμένα το γινόμενο:

$$\max \left[ \left( \frac{2Z_0}{Z_0^2 - \frac{c^2 L^2}{4}} \right)^2 (a^2 + b^2) \right] \quad (1)$$

Αφού τα  $a, b, c$  αποτελούν τα συνημίτονα γωνιών που σχηματίζονται με τους άξονες  $X, Y, Z$ , θα ισχύει ότι  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 - c^2$ . Άρα, η σχέση γίνεται:

$$\max \left[ \left( \frac{2Z_0}{Z_0^2 - \frac{c^2 L^2}{4}} \right)^2 (1 - c^2) \right] \quad (2)$$

η οποία προφανώς μεγιστοποιείται όταν  $c = 0$  ή  $a^2 + b^2 = 1$ . Στην περίπτωση αυτή, το  $3\Delta$  τμήμα είναι παράλληλο στο επίπεδο  $XY$ , το οποίο αποτελεί και το επίπεδο της εικόνας.

- (b) Η γενική αλγεβρική εξίσωση δευτεροβάθμιων καμπυλών στο επίπεδο εικόνας που προκύπτουν από προοπτικές προβολές ενός κύκλου είναι:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (*)$$

- (1) Να αποδειχθεί ότι η ανωτέρω καμπύλη μπορεί να παρασταθεί και ως η τομή δύο  $3\Delta$  επιφανειών. Να βρεθούν οι εξισώσεις τους και να αναγνωρισθούν τα είδη τους.

**Λύση:**

Η ανωτέρω καμπύλη αποτελεί τομή ενός ελλειπτικού κώνου με ένα επίπεδο. Η εξίσωση ενός ελλειπτικού κώνου είναι:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = z^2 \quad (3)$$

και η εξίσωση ενός τυχαίου  $3\Delta$  επιπέδου είναι:

$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0 \implies z = -\frac{b_1}{b_3}x - \frac{b_2}{b_3}y - \frac{b_4}{b_3} \quad (4)$$

Αν πάρουμε την τομή των δύο παραπάνω  $3\Delta$  επιφανειών, έχουμε:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = \left(-\frac{b_1}{b_3}x - \frac{b_2}{b_3}y - \frac{b_4}{b_3}\right)^2$$

και αν κάνουμε το ανάπτυγμα τετραγώνου και ομαδοποιήσουμε τις μεταβλητές καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

- (2) Παριστάνοντας τα σημεία  $x = (x, y)^T$  του επιπέδου της εικόνας με ομογενείς συντεταγμένες  $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία των ανωτέρω καμπυλών (\*) ικανοποιούν την εξίσωση  $\tilde{x}^T C \tilde{x} = 0$  και να βρεθεί αναλυτικά ο πίνακας C. Τι ιδιότητες έχουν τα στοιχεία του πίνακα C αν η καμπύλη είναι έλλειψη, ή παραβολή, ή υπερβολή; Τι σημαίνει όταν  $\det(C) = 0$ ;

**Λύση:**

Χρησιμοποιώντας ότι  $x = \frac{x_1}{x_3}$  και  $y = \frac{x_2}{x_3}$ , η αρχική εξίσωση (\*) γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a\frac{x_1^2}{x_3^2} + b\frac{x_1x_2}{x_3^2} + c\frac{x_2^2}{x_3^2} + d\frac{x_1}{x_3} + e\frac{x_2}{x_3} + f &= 0 \implies \\ ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 &= 0 \implies \\ x_1(ax_1 + \frac{b}{2}x_2 + \frac{d}{2}x_3) + x_2(\frac{b}{2}x_1 + cx_2 + \frac{e}{2}x_3) + x_3(\frac{d}{2}x_1 + \frac{e}{2}x_2 + fx_3) &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο αν θέλουμε να το γράψουμε σε μορφή  $\tilde{x}^T C \tilde{x} = 0$  γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies C = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

Όταν  $\det(C) \neq 0$ , το είδος της καμπύλης C εξαρτάται από την παράσταση  $b^2 - 4ac$ . Συγκεκριμένα:

- Αν  $b^2 - 4ac < 0$ , η καμπύλη είναι έλλειψη.
- Αν  $b^2 - 4ac = 0$ , η καμπύλη είναι παραβολή.
- Αν  $b^2 - 4ac > 0$ , η καμπύλη είναι υπερβολή.

Όταν  $\det(C) = 0$ , η καμπύλη C εκφυλίζεται και έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν  $b^2 - 4ac < 0$ , η καμπύλη είναι ένα σημείο.
- Αν  $b^2 - 4ac = 0$ , η καμπύλη είναι δύο παράλληλες ευθείες.
- Αν  $b^2 - 4ac > 0$ , η καμπύλη είναι δύο ευθείες που τέμνονται.

## Άσκηση 1.2: (Χρώμα)

Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.5 (έκδοση 6/2013):

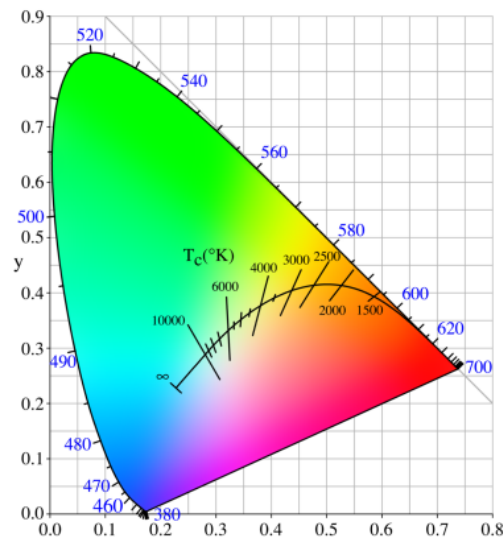
(a) **5.10(b).** Θεωρείστε τις Εξ. (5.14) του μετ/σμού  $(R, G, B) \rightarrow (X, Y, Z)$ , οι οποίες ήταν οι παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.412453 & 0.357580 & 0.180423 \\ 0.212671 & 0.715160 & 0.072169 \\ 0.019334 & 0.119193 & 0.950227 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (5)$$

Να βρείτε τις κατηγορίες τιμών  $(X, Y, Z)$  για τις οποίες μια ή περισσότερες συνιστώσες  $(R, G, B)$  είναι αρνητική ή μεγαλύτερη της μονάδας.

**Λύση:**

Αν ήταν όλες οι συνιστώσες μεγαλύτερες του μηδενός και μικρότερες της μονάδας, τότε, σύμφωνα με το σχήμα 5.10 στο βιβλίο, θα άνηκαν και τα τρία σημεία στο CIE-xy χρωματικό διάγραμμα. Αφού οι τιμές  $X, Y, Z$  προκύπτουν ως κυρτός συνδυασμός των  $R, G, B$  και το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τελευταίες είναι κυρτό, τότε τα τελικό χρώμα θα άνηκε στο CIE-xy χρωματικό διάγραμμα και θα ήταν ορατό. Έτσι, αν δεν ισχύουν όλα αυτά το χρώμα που θα προκύψει θα είναι μη ορατό αφού θα είναι εκτός του CIE-xy διαγράμματος. Παρακάτω φαίνεται και το εν λόγω διάγραμμα.



(b) **5.11(a).** Στα χρωματικά επίπεδα των χώρων HSV και HSL να βρεθούν τα εξής: Σε ποιές γωνίες (ή σημεία του εξαγώνου των πρωταρχικών και δευτερευόντων χρωμάτων) διαφέρουν οι δύο ορισμοί  $H$  και  $H_2$  για το hue, και ποιο είναι το % της μέγιστης διαφοράς ;

### Άσκηση 1.3: (Γραμμικά Φίλτρα και Ανίχνευση Ακμών)

Λύσετε την άσκηση 10.3 από το Κεφ.10 (έκδοση 6/2018).

(Haralick & Shapiro) Assume a locally parabolic image function:

$$I[x, y] = k_1 + k_2x + k_3y + k_4x^2 + k_5xy + k_6y^2 + w[x, y] \quad (6)$$

possibly corrupted by a zero-mean noise field with i.i.d. values  $w[x, y]$  with variance  $\sigma^2$ . Consider the mask  $L_3$  of Fig. 10.9 for discrete convolution with the image whose output provides an estimate of the Laplacian of  $I$ :

- (a) Assume first there is no noise. Write the image values over the  $3 \times 3$  *pixel* neighborhood  $\{-1, 0, 1\}^2$ . Find the required conditions for the parameters  $a, b, c$  of  $L_3$  such that the value of  $I * L_3$  at  $[0, 0]$  equals the true value of the Laplacian of  $I$  at pixel  $[0, 0]$ .

Η μάσκα  $L_3$  είναι η εξής:

a	b	a
b	c	b
a	b	a

. Αρχικά, υπολογίζουμε τις τιμές της  $I[x, y]$  στη γειτονιά  $\{-1, 0, 1\}^2$

και έχουμε:

$$I[-1, -1] = k_1 - k_2 - k_3 + k_4 + k_5 + K_6$$

$$I[-1, 0] = k_1 - k_2 + k_4$$

$$I[-1, 1] = k_1 - k_2 + k_3 + k_4 - k_5 + K_6$$

$$I[0, -1] = k_1 - k_3 + K_6$$

$$I[0, 0] = k_1$$

$$I[0, 1] = k_1 + k_3 + K_6$$

$$I[1, -1] = k_1 + k_2 - k_3 + k_4 - k_5 + K_6$$

$$I[1, 0] = k_1 + k_2 + k_4$$

$$I[1, 1] = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + K_6$$

Έτσι, η τιμή  $I * L_3$  στο  $[0, 0]$  είναι ως εξής:

$$aI[-1, -1] + bI[-1, 0] + aI[-1, 1] + bI[0, -1] + cI[0, 0] + bI[0, 1] + aI[1, -1] + bI[1, 0] + aI[1, 1] =$$

$$k_1(4a + 4b + c) + k_4(4a + 2b) + k_6(4a + 2b)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την πραγματική τιμή της Laplacian της  $I$  στο  $[0, 0]$ .

$I_x = k_2 + 2k_4x \implies I_{xx} = 2k_4$  και  $I_y = k_3 + 2k_6y \implies I_{yy} = 2k_6$ . Άρα,  $I_{xx} + I_{yy} = 2k_4 + 2k_6$ . Αν εξισώσουμε τις δύο σχέσεις, καταλήγουμε στα εξής:

$$\begin{cases} 4a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases} \quad (7)$$

- (b) (No noise) Select two sets of numeric values for  $a, b, c$  satisfying the conditions found in part (a) such that in each case  $L_3$  becomes one the two discrete Laplacian masks  $L_1$  and  $L_2$  in Fig. 10.9.

Έχουμε ότι  $L_1 =$

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

και ότι  $L_2 = \frac{1}{3}$

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

. Συγκρίνοντάς τα με το φίλτρο  $L_3$  παρατηρούμε ότι:

- Το  $L_1$  έχει  $a = 0, b = 1$  και  $c = -4$ , τα οποία ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις.
- Το  $L_2$  έχει  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$  και  $c = -\frac{8}{3}$ , τα οποία επίσης ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις.

(c) Now assume that the noise  $w$  is present and the parameters of  $L_3$  satisfy the conditions found in part (a). Find the expected value and variance of  $I * L_3[0, 0]$  in terms of the image and the mask parameters. Further, find the values of  $a, b, c$  that minimize this variance subject to the above conditions.

Τώρα, λοιπόν, έχουμε τον θόρυβο  $w[x, y]$  μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης  $\sigma^2$  και ισχύουν οι σχέσεις που είχαμε στο (a), δηλαδή:

$$\begin{cases} 4a + 4b + c = 0 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$$

Η συνέλιξη τώρα του  $I * L_3[0, 0]$  θα ισούται με:

$$k_1(4a+4b+c)+k_4(4a+2b)+k_6(4a+2b)+a(w[-1, -1]+w[-1, 1]+w[1, -1]+w[1, 1])+b(w[0, 1]+w[0, -1]+w[1, 0]+w[-1, 0])$$

$$+2k_4+2k_6+a(w[-1, -1]+w[-1, 1]+w[1, -1]+w[1, 1])+b(w[0, 1]+w[0, -1]+w[1, 0]+w[-1, 0])+cw[0, 0]$$

αφού ισχύουν οι σχέσεις από το (a).

Επειδή ο θόρυβος είναι μηδενικής μέσης τιμής, η αναμενόμενη τιμή είναι  $E[I * L_3[0, 0]] = 2k_4 + 2k_6$  καθώς τα υπόλοιπα είναι συμμετρικά. Ισούται δηλαδή με την πραγματική τιμή της Laplacian στο  $[0, 0]$ .

Επειδή ο θόρυβος έχει διακύμανση  $\sigma^2$ , έχουμε  $Var[I * L_3[0, 0]] = 4a^2\sigma^2 + 4b^2\sigma^2 + c^2\sigma^2 = \sigma^2(4a^2 + 4b^2 + c^2)$ .

Αν χρησιμοποιήσουμε και τις παραπάνω σχέσεις για να απαλείψουμε δύο από τις τρεις μεταβλητές έχουμε:

$$\begin{aligned} Var[I * L_3[0, 0]] &= \sigma^2(4a^2 + 4b^2 + (-4a - 4b)^2) = \\ &= \sigma^2(20a^2 + 20b^2 + 32ab) = \\ &= \sigma^2(20a^2 + 20(1 - 2a)^2 + 32a(1 - 2a)) = \\ &= \sigma^2(20a^2 + 20 - 80a + 80a^2 + 32a - 64a^2) = \\ &= \sigma^2(32a^2 - 48a + 20) \end{aligned}$$

Αν θέλουμε, τώρα, να ελαχιστοποιήσουμε την διακύμανση έχουμε:  $64a - 48 = 0 \implies a = \frac{3}{4}$  και αν αντικαταστήσουμε έχουμε  $b = -\frac{1}{2}$  και  $c = -1$ . Με αυτές τις τιμές το φίλτρο που προκύπτει είναι το παρακάτω:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

## Άσκηση 1.4: (Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες)

(a) Για σύνολα-σχήματα  $X$  να αποδειχθούν τα εξής:

$$(1) X \circ B = X \circ (B_{+z}) \forall X, B \subseteq R^m, z \in R^m.$$

Έχουμε ότι:

$$X \circ (B_{+z}) = (X \ominus B_{+z}) \oplus B_{+z} = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} (X \ominus B_{+z})_{+y_1} = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} \left( \bigcap_{y_2 \in B_{+z}} (X_{-y_2}) \right)_{+y_1}$$

Γνωρίζουμε ότι το  $B_{+z} = \{x + z : x \in B\}$  συνεπώς το  $y \in B_{+z}$  μπορεί να γραφτεί και ως  $y - z \in B$ . Συνεπώς, το παραπάνω γίνεται:

$$X \circ (B_{+z}) = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} \left( \bigcap_{y_2 \in B_{+z}} (X_{-y_2}) \right)_{+y_1} = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} \left( \bigcap_{y_2 \in B} (X_{-y_2+z}) \right)_{+y_1} = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} \left( \bigcap_{y_2 \in B} (X_{-y_2+z-z}) \right)_{+y_1} = \bigcup_{y_1 \in B_{+z}} \left( \bigcap_{y_2 \in B} (X_{-y_2}) \right)_{+y_1} = X \circ B$$

$$(2) (X \ominus A) \ominus B = X \ominus (A \oplus B).$$

Έχουμε ότι:

$$(X \ominus A) \ominus B = ((X \ominus A)^c \oplus B^s)^c = ((X^c \oplus A^s) \oplus B^s)^c$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι για το dilation ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα ή  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ . Άρα, το παραπάνω γίνεται:

$$(X^c \oplus (A^s \oplus B^s))^c = (X \ominus (A^s \oplus B^s)^s) = (X \ominus (A \oplus B))$$

(b) Για γκριζες εικόνες  $f$  να αποδειχθούν τα εξής:

$$(1) 0 \in B \implies f \ominus B \leq f \circ B \leq f \bullet B \leq f \oplus B.$$

Θα δείξουμε ότι  $f \ominus B \leq f \circ B$ . Έχουμε:

$$f \circ B(x) = (f \ominus B) \oplus B = \bigvee_{z \in B} \bigwedge_{y \in B} f(x + y - z) \stackrel{z=0}{\geq} \bigwedge_{y \in B} f(x + y) = f \ominus B \quad (8)$$

Επίσης, θα δείξουμε ότι  $f \bullet B \leq f \oplus B$ . Έχουμε:

$$f \bullet B = \bigwedge_{z \in B} \bigvee_{y \in B} f(x - y + z) \stackrel{z=0}{\leq} \bigvee_{y \in B} f(x - y) = f \oplus B \quad (9)$$

και αφού είναι γνωστό ότι  $f \circ B \leq f \bullet B$ , προκύπτει το ζητούμενο.

$$(2) f = f \bullet g \text{ εάν και μόνον εάν υπάρχει κάποια συνάρτηση } h \text{ ώστε } f = h \ominus g.$$

Ευθύ: Αν  $f = f \bullet g$  τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση  $h$  ώστε  $f = h \ominus g$ .

Έχουμε ότι:

$$f = f \bullet g \implies f = (f \oplus g) \ominus g = h \ominus g \text{ με } h = f \oplus g.$$

Αντίστροφο: Αν υπάρχει κάποια συνάρτηση  $h$  ώστε  $f = h \ominus g$ , τότε  $f = f \bullet g$ .

Αφού  $f = h \ominus g$ , τότε  $f \bullet g = (h \ominus g) \bullet g = ((h \ominus g) \oplus g) \ominus g = (h \circ g) \ominus g \leq h \ominus g = f$ . Επίσης, ισχύει πάντα ότι  $f \bullet g \geq f$ . Άρα, τελικά,  $f \bullet g = f$ .

- (c) Δημιουργούμε ένα γκρίζο επίπεδο φίλτρο  $\phi$  με την υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια έναν αυξανόντα τελεστή συνόλων  $\Phi$ :

$$\phi(f)(x) = \sup\{u \in R : x \in \Phi[X_u(f)]\} \quad (10)$$

όπου  $X_u(f) = \{x \in R^2 : f(x) \geq u\}$  είναι τα επιπεδοσύνολα της εικόνας  $f$ . Να αποδείξετε ότι, αν  $\Phi(X) = X \circ B$ , τότε  $\phi(f) = f \circ B$ .

Έχουμε ότι:  $\Phi(X) = X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \Phi_2(\Phi_1(X))$  αν θεωρήσουμε ότι  $\Phi_1(X) = X \ominus B$  και  $\Phi_2(X) = X \oplus B$ . Αν χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές συνόλων  $\Phi_1(X)$  και  $\Phi_2(X)$  ως δυαδικές γεννήτριες, μπορούμε να δημιουργήσουμε τα εξής δύο επίπεδα φίλτρα:

$$\begin{aligned} \phi_1(f)(x) &= \sup\{u \in R : x \in \Phi_1[X_u(f)]\} \\ \phi_2(f)(x) &= \sup\{u \in R : x \in \Phi_2[X_u(f)]\} \end{aligned}$$

Για τα παραπάνω δύο φίλτρα, γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} \phi_1(f)(x) &= f \ominus B \\ \phi_2(f)(x) &= f \oplus B \end{aligned}$$

Άρα, για το ζητούμενο φίλτρο  $\phi(f)(x)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \phi(f)(x) &= \sup\{u \in R : x \in \Phi[X_u(f)]\} \\ &= \sup\{u \in R : x \in \Phi_2[\Phi_1[X_u(f)]]\} \\ &= \phi_2(\phi_1(f))(x) \\ &= (f \ominus B) \oplus B \\ &= f \circ B \end{aligned}$$

- (d) Έστω  $\phi$  ένα  $2\Delta$  γκρίζο επίπεδο φίλτρο για ψηφιακές εικόνες  $f(x, y)$  που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια τον τελεστή συνόλων (closing)  $\Phi(X) = X \bullet B$ , όπου  $B = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  ένα 4-pixel τετράγωνο. Να εκφραστεί ο  $\Phi$  ως μια Boolean συνάρτηση  $(v_1, \dots, v_n)$  και να βρεθεί η αλγεβρική έκφραση (με max/min πράξεις) για το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο  $\phi(f)(x, y)$ .

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= X \bullet B \\ &= (X \oplus B) \ominus B \\ &= \bigcap_{y_1 \in B} \left( \bigcup_{y_2 \in B} (X_{+y_2}) \right)_{-y_1} \\ &= \bigcap_{y_1 \in B} \left( \bigcup_{y_2 \in B} (X_{y_2 - y_1}) \right) \end{aligned}$$



Αν αντικαταστήσουμε το B έχουμε:

$$\Phi(X) = \bigcap_{y_1 \in B} (X_{(0,0)-y_1} \cup X_{(0,1)-y_1} \cup X_{(1,0)-y_1} \cup X_{(1,1)-y_1}) \implies$$

$$\begin{aligned} \Phi(X) = & (X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)} \cup X_{(1,0)} \cup X_{(1,1)}) \cap (X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(1,-1)} \cup X_{(1,0)}) \cap \\ & (X_{(-1,0)} \cup X_{(-1,1)} \cup X_{(0,0)} \cup X_{(0,1)}) \cap (X_{(-1,-1)} \cup X_{(-1,0)} \cup X_{(0,-1)} \cup X_{(0,0)}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η έκφραση της  $\Phi$  ως μια Boolean συνάρτηση  $\beta(v_1, \dots, v_n)$  είναι η παρακάτω:

$$\begin{aligned} \beta(v_1, \dots, v_n) = & (v_{0,0} + v_{0,1} + v_{1,0} + v_{1,1}) (v_{0,-1} + v_{0,0} + v_{1,-1} + v_{1,0}) \\ & (v_{-1,0} + v_{-1,1} + v_{0,0} + v_{0,1}) (v_{-1,-1} + v_{-1,0} + v_{0,-1} + v_{0,0}) \end{aligned}$$

Τέλος, η αλγεβρική έκφραση για το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο  $\phi(f)(x, y)$  είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \phi(f)(x, y) = & \min\{ \max\{f(x, y) + f(x, y-1) + f(x-1, y) + f(x-1, y-1)\}, \\ & \max\{f(x, y+1) + f(x, y) + f(x-1, y+1) + f(x-1, y)\}, \\ & \max\{f(x+1, y) + f(x+1, y-1) + f(x, y) + f(x, y-1)\}, \\ & \max\{f(x+1, y+1) + f(x+1, y) + f(x, y+1) + f(x, y)\} \} \end{aligned}$$

## Άσκηση 1.5: (με χρήση Matlab ή παρομοίου πακέτου λογισμικού)

Δείξτε γραφικά το σχήμα μιας ψηφιακής μονόχρωμης εικόνας  $f$  από πραγματικά αντικείμενα ή σκηνή του κόσμου, δικής σας επιλογής, με 8 bits/pixel και πεδίο τιμών  $[0, 255]$ .



- (a) Υπολογίστε με χρήση Matlab και δείξτε ως σχήμα δυαδικής εικόνας το σύνολο  $m = 8$  ισοϋψών καμπυλών της  $f$  των οποίων οι στάθμες φωτεινότητας  $v_1, \dots, v_m$  να κατανέμονται ομοιόμορφα στο  $[0, 255]$ .

Προέκυψε η παρακάτω εικόνα, στην οποία βλέπουμε 8 επιπεδοσύνολα. Προφανώς, δεν φαίνεται κάτι ουσιαστικό γιατί πολύ λίγα pixel είχαν την ίδια τιμή με μία από τις 8 ομοιόμορφα κατανεμημένες στάθμες φωτεινότητας που επιλέχθηκαν.



- (b) Ανακατασκευάστε την εικόνα αθροίζοντας τις δείκτριες συναρτήσεις  $\theta_{v_i}(f)$  των  $m$  επιπεδοσυνόλων, των οποίων συναρτήσεων οι τιμές σε pixels  $x$  ισούνται με 1 αν  $f(x) \geq v_i$  και 0 αλλιώς, αφού τις σταθμίσετε με τα αντίστοιχα ύψη φωτεινότητας. Δηλ. η προσεγγιστική ανακατασκευή θα δώσει την εικόνα:

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^m v_i \theta_{v_i}(x) \quad (11)$$

Δείξτε γραφικά το σχήμα της προσεγγιστικής εικόνας  $\hat{f}(x)$ .

Η προσεγγιστική εικόνα  $\hat{f}(x)$  που προέκυψε είναι η παρακάτω:

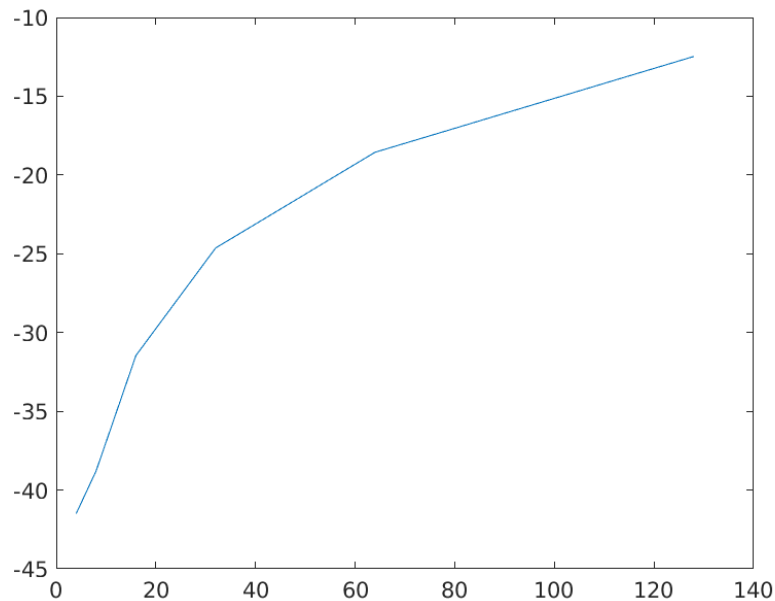


- (c) Επαναλάβετε τις ανακατασκευές για  $m = 4, 8, 16, 32, 64, 128$  επιπεδοσύνολα, χωρίς να δείχνετε τα σχήματα των εικόνων, και υπολογίστε την ποιότητα ανακατασκευής με τον Peak SNR.

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{255}{\|f - \hat{f}\|} \right) \quad (12)$$

Σχεδιάστε τον Peak SNR ως συνάρτηση του  $m$ .

Η γραφική παράσταση του Peak SNR ως συνάρτηση του  $m$  είναι η παρακάτω:



Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε τα επιπεδοσύνολα  $m$ , αυξάνεται και το Peak SNR, γεγονός που ήταν αναμενόμενο αφού δίνουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στην φωτεινότητα των pixel. Όσο έχουμε περισσότερα επιπεδοσύνολα τα pixel παίρνουν φωτεινότητα όλο και πιο κοντά στην πραγματική τους στην αρχική εικόνα. Η σχέση, βέβαια, δεν είναι γραμμική αλλά είναι μία καμπύλη, όπου σε μικρές τιμές έχει μεγάλη κλίση και όσο μεγαλώνουν τα επίπεδα η αύξηση του Peak SNR μειώνεται. Αυτό δικαιολογείται, καθώς στην αρχή που είναι λίγα τα επίπεδα δίνοντας περισσότερα επίπεδα βελτιώνουμε πολύ την ακρίβεια, γιατί οι τιμές είναι πολύ κακές και μακριά από τις πραγματικές.

Παρακάτω ακολουθεί και ο αντίστοιχος κώδικας σε Matlab για την εξαγωγή των παραπάνω:

• **ex5.m**

```

1 % clear all.
2 clear all; close all; clc;
3
4 % Read input image and convert it to grayscale.
5 I = imread('photo.png');
6 I = rgb2gray(I);
7
8 % _____ %
9 %           Question (a)           %
10 % _____ %
11
12 % Set number of isoheight contours.
13 m = 8;
14 % Get uniform distributed levels.
15 v = randi(255 ,m , 1);

```

```

16 % Get m isoheight contours.
17 A = (I == v(1) | I == v(2) | I == v(3) | I == v(4) | I == v(5) | I == v(6) |
      I == v(7) | I == v(8));
18 % Plotting
19 f = figure;
20 imshow(A);
21 saveas(f, '5a.png');
22
23
24 % ----- %
25 %           Question (b)           %
26 % ----- %
27
28 % Set number of uniform distributed level sets.
29 m = 8;
30 % Compute reconstructed image
31 [f_hat, ~] = levelReconstruction(m, I);
32 % Plot reconstructed image
33 f = figure;
34 imshow(f_hat);
35 saveas(f, '5b.png');
36
37 % ----- %
38 %           Question (c)           %
39 % ----- %
40
41 % Set different number of levels.
42 number_of_levels = [4,8,16,32,64,128];
43 % Initialize peak SNRs
44 SNRs = zeros(length(number_of_levels), 1);
45 % For each number of levels compute peak SNR.
46 for m = 1:length(number_of_levels)
47     [~, SNRs(m)] = levelReconstruction(number_of_levels(m), I);
48 end
49 % Plot peak SNRs.
50 f = figure;
51 plot(number_of_levels, SNRs);
52 saveas(f, '5c.png');

```

- **levelReconstruction.m**

```

1 function [f_hat, snr] = levelReconstruction(m, f)
2 % Reconstruction of an image based on the level sets.
3 %
4 % Usage:
5 %     [f_hat, snr] = levelReconstruction(m, I)
6 %
7 % Description:
8 % Returns the reconstructed image and the

```

```

9  % Peak SNR of the reconstruction.
10 %
11 % In:
12 %   f : input image
13 %   m : number of level sets.
14 %
15 % Out:
16 %   f_hat : reconstructed image
17 %   snr : peak SNR of the reconstruction
18
19
20 % Get m uniform distributed level sets in range [0, 255].
21 v = randi(255 ,m , 1);
22
23 % For each level set compute the indicator function.
24 f_hat = zeros(size(f, 1), size(f, 2));
25
26 for level = 1:m
27     level_set = (f >= v(level));
28     f_hat = max(f_hat, v(level)*level_set);
29 end
30
31 snr = 20 * log10(255 ./ norm(double(f) - f_hat));
32
33 end

```

## Βιβλιογραφία

- [1] P. Maragos, *Σημειώσεις Όρασης Υπολογιστών*. 2015.
- [2] “Matrix representation of conic sections.” [https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix\\_representation\\_of\\_conic\\_sections](https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_representation_of_conic_sections), 2018.
- [3] “Conic section.” [https://en.wikipedia.org/wiki/Conic\\_section](https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section), 2018.