

S-MSCKF 论文公式推导与代码解析

高洪臣

2019 年 9 月 1 日

目录

1 概述	2
1.1 MSCKF	2
1.2 MSCKF vs EKF-SLAM	2
1.3 S-MSCKF	2
2 Image Processor	3
2.1 代码流程	3
2.1.1 Initialize	3
2.1.2 ImuCallback	3
2.1.3 StereoCallback	3
3 MsckfVio Estimator/Filter	4
3.1 Overview	4
3.1.1 Kalman Filter	4
3.1.2 Multi-State Constraint Filter	4
3.2 代码流程	5
3.2.1 Initialize	5
3.2.2 ImuCallback	5
3.2.3 FeatureCallback	5
3.3 EKF 状态向量	7
3.4 Propagation/Prediction	7
3.4.1 IMU 误差状态方程	7
3.4.2 IMU 状态向量预测	8
3.4.3 系统状态协方差预测	9
3.5 State Augmentation	10
3.5.1 相机状态向量扩增	10
3.5.2 状态协方差扩增	10
3.6 Measurement Update	11
3.6.1 Measurement Model	11
3.6.2 能观性约束	12
3.6.3 EKF Update	12

1 概述

1.1 MSCKF

MSCKF 全称 Multi-State Constraint Kalman Filter (多状态约束下的 Kalman 滤波器)，是一种基于滤波的 VIO 算法，2007 年由明尼苏达州大学 Mourikis 在 [1] 中首次提出。MSCKF 在 EKF 框架下融合 IMU 和视觉信息，相较于单纯的 VO 算法，MSCKF 能够适应更剧烈的运动、一定时间的纹理缺失等，具有更高的鲁棒性；相较于基于优化的 VIO 算法 (VINS, OKVIS)，MSCKF 精度相当，速度更快，适合在计算资源有限的嵌入式平台运行。在机器人、无人机、AR/VR 领域，MSCKF 都有较为广泛的运用，如 Google Project Tango 就用了 MSCKF 进行位姿估计。

1.2 MSCKF vs EKF-SLAM

在传统的 EKF-SLAM 框架中，特征点的信息会加入到特征向量和协方差矩阵里，这种方法的缺点是特征点的信息会给一个初始深度和初始协方差，如果不正确的话，极易导致后面不收敛，出现 inconsistent 的情况。MSCKF 维护一个 pose 的 FIFO，按照时间顺序排列，可以称为滑动窗口，一个特征点在滑动窗口的几个位姿都被观察到的话，就会在这几个位姿间建立约束，从而进行 KF 的更新。 [2]

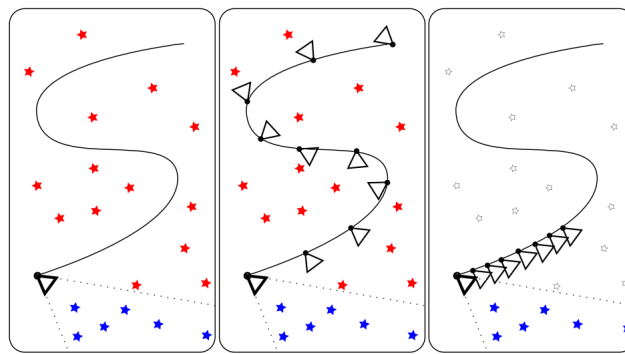
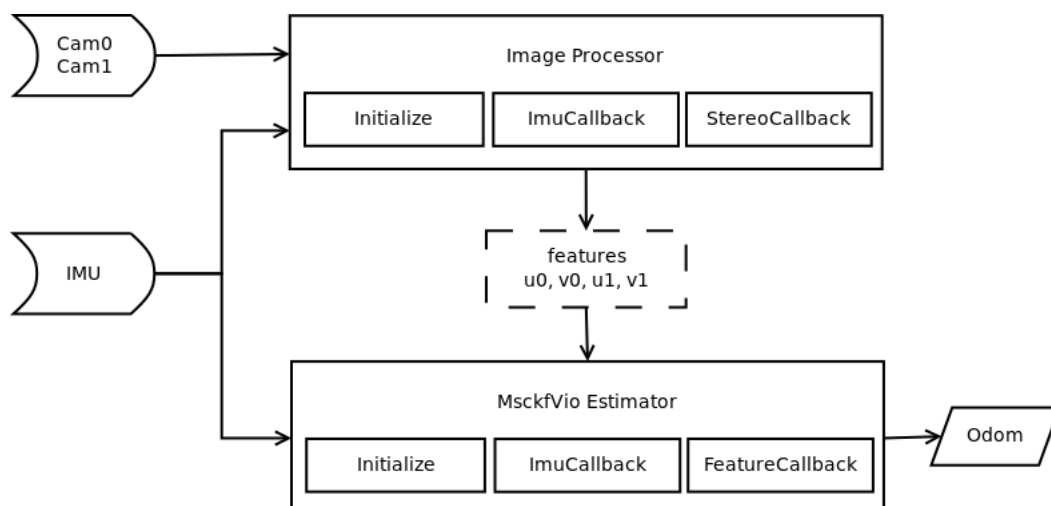


图 1 EKF-SLAM, keyframe-based SLAM, MSCKF

1.3 S-MSCKF

S-MSCKF [3] 是宾夕法尼亚大学 Vijay Kumar 实验室开源的双目版本 MSCKF 算法。



2 Image Processor

2.1 代码流程

2.1.1 Initialize

- load parameters
- create FastFeatureDetector

2.1.2 ImuCallback

第一帧图像后，不断添加 IMU message 到 imu_msg_buffer。

2.1.3 StereoCallback

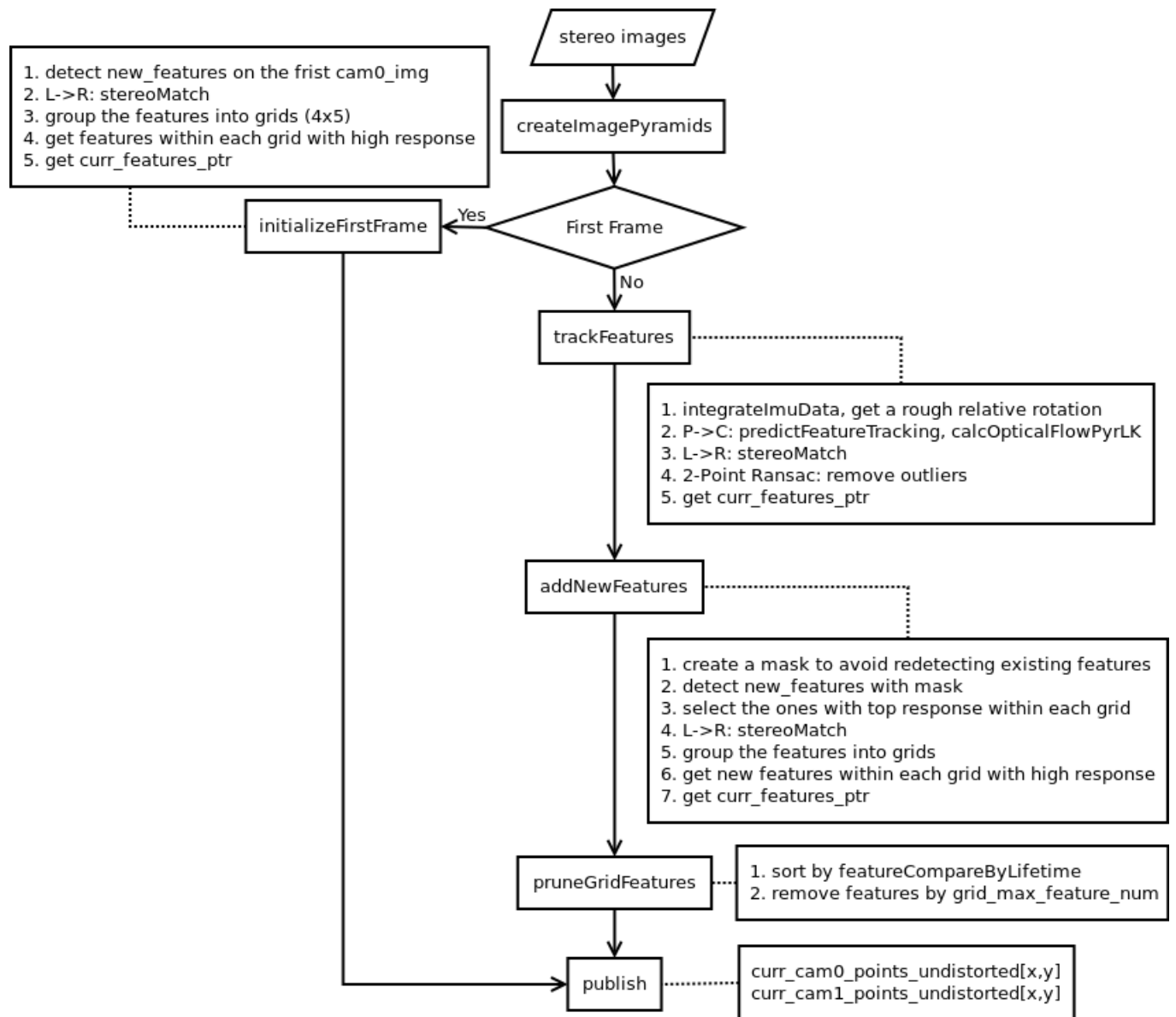


图 2 StereoCallback 流程图

3 MsckfVio Estimator/Filter

3.1 Overview

3.1.1 Kalman Filter

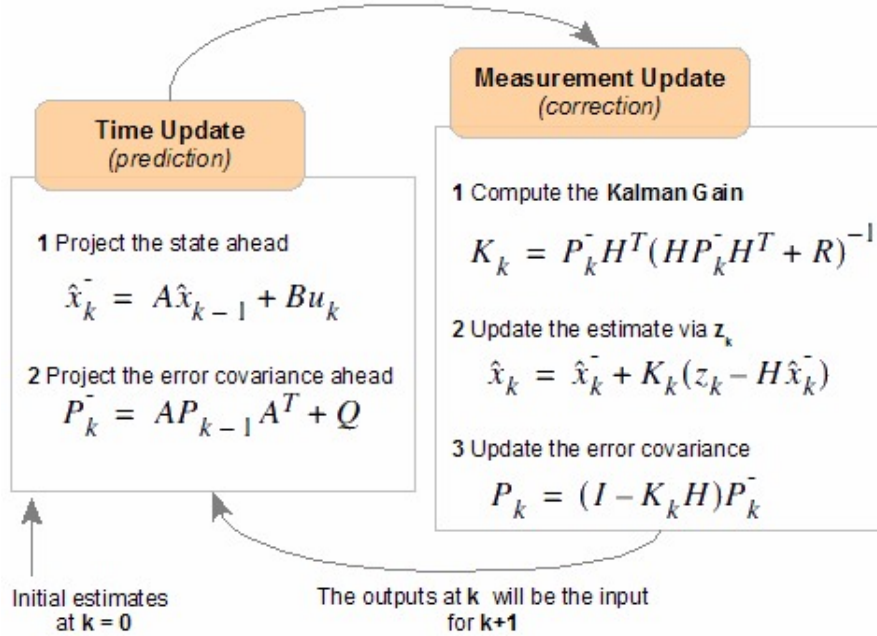


图 3 Kalman Filter 流程图

3.1.2 Multi-State Constraint Filter

Algorithm 1 Multi-State Constraint Filter

Propagation: For each IMU measurement received, propagate the filter state and covariance (cf. Section III-B).

Image registration: Every time a new image is recorded,

- augment the state and covariance matrix with a copy of the current camera pose estimate (cf. Section III-C).
- image processing module begins operation.

Update: When the feature measurements of a given image become available, perform an EKF update (cf. Sections III-D and III-E).

图 4 Multi-State Constraint Filter 流程图

3.2 代码流程

3.2.1 Initialize

- Load Parameters
- Initialize state server: `state_server.continuous_noise_cov`
- Initialize the **chi squared test table** with confidence level **P=0.95** for `MsckfVio::gatingTest()`

```
for (int i = 1; i < 100; ++i) {
    boost::math::chi_squared chi_squared_dist(i);
    chi_squared_test_table[i] = boost::math::quantile(chi_squared_dist, 0.05);
}
```

Degrees of freedom (df)	χ^2 value ^[19]										
1	0.004	0.02	0.06	0.15	0.46	1.07	1.64	2.71	3.84	6.63	10.83
2	0.10	0.21	0.45	0.71	1.39	2.41	3.22	4.61	5.99	9.21	13.82
3	0.35	0.58	1.01	1.42	2.37	3.66	4.64	6.25	7.81	11.34	16.27
4	0.71	1.06	1.65	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	13.28	18.47
5	1.14	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	15.09	20.52
6	1.63	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	16.81	22.46
7	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	18.48	24.32
8	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	20.09	26.12
9	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	21.67	27.88
10	3.94	4.87	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	23.21	29.59
P value (Probability)	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.001

图 5 chi-square table

3.2.2 ImuCallback

- 添加 IMU message 到 `imu_msg_buffer`
- `initializeGravityAndBias`, 要求前 200 帧 IMU 静止不动
 - 将前 200 帧加速度和角速度求平均
 - 平均角速度作为陀螺仪的 bias: `state_server.imu_state.gyro_bias`
 - 平均加速度作为 IMU 系下的重力加速度: `gravity_imu`
 - 平均加速度的模值作为重力加速度模长 `g: IMUState::gravity`
 - 计算初始时刻 World 系（水平天向）重力向量 (0,0,-g) 和 IMU 系重力向量 `gravity_imu` 之间的姿态（旋转四元数）: `state_server.imu_state.orientation`

3.2.3 FeatureCallback

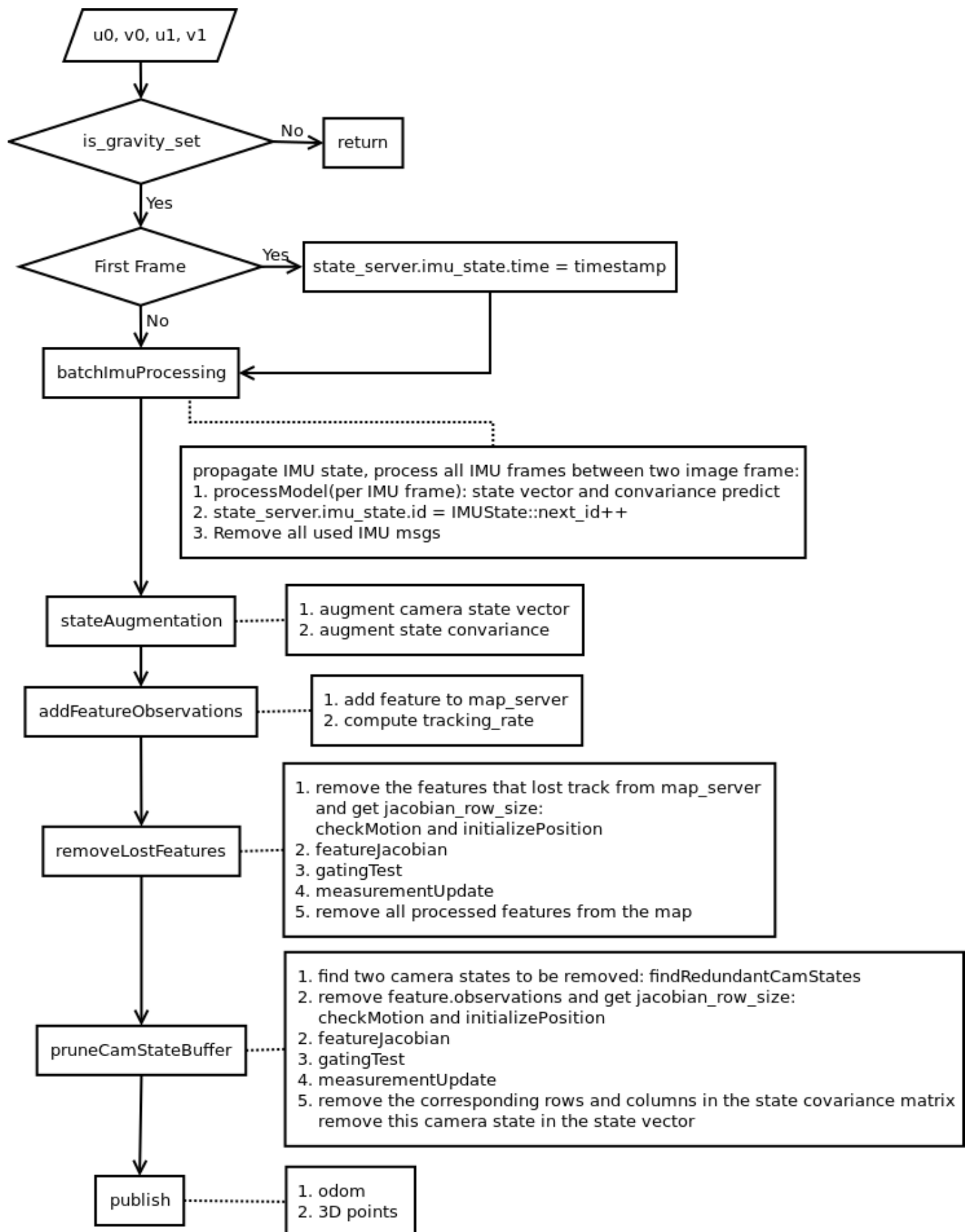


图 6 FeatureCallback 流程图

3.3 EKF 状态向量

IMU 状态向量 (true-state)

$$\mathbf{x}_I = \begin{pmatrix} {}^I_G \mathbf{q}^\top & \mathbf{b}_g^\top & {}^G \mathbf{v}_I^\top & \mathbf{b}_a^\top & {}^G \mathbf{p}_I^\top & {}^I_C \mathbf{q}^\top & {}^I_C \mathbf{p}_C^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{22 \times 1}$$

IMU 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}}_I = \begin{pmatrix} {}^I_G \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & \tilde{\mathbf{b}}_g^\top & {}^G \tilde{\mathbf{v}}_I^\top & \tilde{\mathbf{b}}_a^\top & {}^G \tilde{\mathbf{p}}_I^\top & {}^I_C \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & {}^I_C \tilde{\mathbf{p}}_C^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{21 \times 1}$$

IMU 噪声向量

$$\mathbf{n}_I^\top = (\mathbf{n}_g^\top \mathbf{n}_{wg}^\top \mathbf{n}_a^\top \mathbf{n}_{wa}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$$

其对应的噪声协方差矩阵

$$\mathbf{Q}_I = \mathbb{E} [\mathbf{n}_I \mathbf{n}_I^\top] = \text{diag} (\sigma_g^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \sigma_{bg}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \sigma_a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \sigma_{ba}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$$

Camera 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}}_{C_i} = \begin{pmatrix} {}^{C_i}_G \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & {}^G \tilde{\mathbf{p}}_{C_i}^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$$

系统 (Imu+Camera) 误差状态向量

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{x}}_I^\top \quad \tilde{\mathbf{x}}_{C_1}^\top \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{x}}_{C_N}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{(21+6N) \times 1}$$

3.4 Propagation/Prediction

3.4.1 IMU 误差状态方程

IMU 运动微分方程 (nominal-state 状态方程)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{cases} {}^I_G \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2} \Omega(\hat{\boldsymbol{\omega}}) {}^I_G \hat{\mathbf{q}} \\ \dot{\hat{\mathbf{b}}}_g = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ {}^G \dot{\hat{\mathbf{v}}} = C ({}^I_G \hat{\mathbf{q}})^\top \hat{\mathbf{a}} + {}^G \mathbf{g} \\ \dot{\hat{b}}_a = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ {}^G \dot{\hat{\mathbf{p}}}_I = {}^G \hat{\mathbf{v}} \\ {}^I_C \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ {}^I_C \dot{\hat{\mathbf{p}}}_C = \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{cases} \quad (1)$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}}_g, \quad \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_m - \hat{\mathbf{b}}_a$$

并且 (使用 JPL 四元数)

$$\Omega(\hat{\boldsymbol{\omega}}) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{pmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_\times] & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^\top & 0 \end{pmatrix}$$

根据 [4] ESKF 中 **5.3.3 The error-state kinematics** 小节公式, IMU error-state 状态方程

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_I = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{p}} = \delta \mathbf{v} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{R}[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \mathbf{R} \delta \mathbf{a}_b + \delta \mathbf{g} - \mathbf{R} \mathbf{a}_n \\ \delta \dot{\boldsymbol{\theta}} = -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta} - \delta \boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n \\ \delta \dot{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w \\ \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w \end{cases} \quad (2)$$

对式 (2) 线性化, 得到 IMU 连续形式误差状态方程

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_I = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{x}}_I + \mathbf{G} \mathbf{n}_I \quad (3)$$

其中,

$\tilde{\mathbf{x}}_I$ 和 \mathbf{n}_I 为

$$\tilde{\mathbf{x}}_I = \begin{pmatrix} {}^I_G \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & \tilde{\mathbf{b}}_g^\top & {}^G \tilde{\mathbf{v}}_I^\top & \tilde{\mathbf{b}}_a^\top & {}^G \tilde{\mathbf{p}}_I^\top & {}^I_C \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & {}^I_C \tilde{\mathbf{p}}_C^\top \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^{21 \times 1}$$

$$\mathbf{n}_I^\top = (\mathbf{n}_g^\top \ \mathbf{n}_{wg}^\top \ \mathbf{n}_a^\top \ \mathbf{n}_{wa}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$$

\mathbf{F} 和 \mathbf{G} 为 (代码在 `MsckfVio::processModel`, 文献 [3] 附录中 \mathbf{G} 计算有误, 代码正确)

$$\mathbf{F}_{21 \times 21} = \begin{pmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\times}] & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -C \left({}^I_G \hat{\mathbf{q}} \right)^\top [\hat{\mathbf{a}}_{\times}] & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -C \left({}^I_G \hat{\mathbf{q}} \right)^\top & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21 \times 12} = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -C \left({}^I_G \hat{\mathbf{q}} \right)^\top & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

3.4.2 IMU 状态向量预测

代码在 `MsckfVio::predictNewState`.

- 姿态预测 ([5] 中 122 式 0 阶四元数积分, 代码据 $|\omega|$ 是否接近 0 分两种情况, 接近 0 ??)

$${}^I_G \mathbf{q}(t_{k+1}) = \left(\cos \left(\frac{|\omega|}{2} \Delta t \right) \cdot \mathbf{I}_{4 \times 4} + \frac{1}{|\omega|} \sin \left(\frac{|\omega|}{2} \Delta t \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\omega) \right) {}^I_G \mathbf{q}(t_k) \quad (4)$$

- 位置和速度预测 (4 阶 Runge-Kutta 积分)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5)$$

3.4.3 系统状态协方差预测

代码在 `MsckfVio::processModel`, 处理两帧图像间的每一帧 IMU 数据。

离散时间状态转移矩阵

$$\begin{aligned}
 \Phi_k &= \Phi(t_{k+1}, t_k) \\
 &= \exp\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{F}(\tau) d\tau\right) \\
 &= \exp(\mathbf{F}\Delta t) \\
 &\approx \mathbf{I} + \mathbf{F}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{F}\Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\mathbf{F}\Delta t)^3 \quad (\Delta t \text{ 比较小时, 一般 } < 0.01\text{s})
 \end{aligned} \tag{6}$$

why: Modify the transition matrix to make the observability matrix have proper null space

离散时间噪声协方差矩阵

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G} \mathbf{Q}_I \mathbf{G}^T \Phi(t_{k+1}, \tau)^T d\tau \\
 &\approx \Phi_k \mathbf{G} \mathbf{Q}_I \mathbf{G}^T \Phi_k^T \Delta t
 \end{aligned} \tag{7}$$

IMU 状态传播协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{II_{k+1}|k} = \Phi_k \mathbf{P}_{II_k|k} \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \tag{8}$$

系统状态传播协方差矩阵拆解表示为

$$\mathbf{P}_{k|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{II_{k|k}} & \mathbf{P}_{IC_{k|k}} \\ \mathbf{P}_{IC_{k|k}}^T & \mathbf{P}_{CC_{k|k}} \end{pmatrix} \tag{9}$$

其传播形式表示为

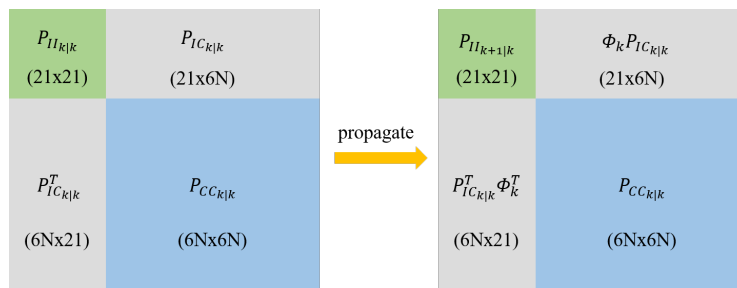
$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{II_{k+1|k}} & \Phi_k \mathbf{P}_{IC_{k|k}} \\ \mathbf{P}_{IC_{k+1|k}}^T & \mathbf{P}_{CC_{k+1|k}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(21+6N) \times (21+6N)} \tag{10}$$

why: Fix the covariance to be symmetric

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \frac{\mathbf{P}_{k+1|k} + \mathbf{P}_{k+1|k}^T}{2} \tag{11}$$

其中 Camera 的 covariance 暂时还没有变化是因为这个时间段图像还没有到来, 只有 IMU 的影响, 但是会影响到 IMU 与 Camera 协方差。

整个状态 (IMU+Camera) 的 covariance 传播过程如图所示 [2]:



3.5 State Augmentation

代码在 `MsckfVio::stateAugmentation`。

3.5.1 相机状态向量扩增

根据 IMU 位姿求取 Camera 位姿

$${}^C_G\hat{\mathbf{q}} = {}^C_I\hat{\mathbf{q}} \otimes {}^I_G\hat{\mathbf{q}}, \quad {}^G\hat{\mathbf{p}}_C = {}^G\hat{\mathbf{p}}_I + C \left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top {}^I\hat{\mathbf{p}}_C \quad (12)$$

3.5.2 状态协方差扩增

增广的状态协方差矩阵为 (why)

$$\mathbf{P}'_{k|k} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{21+6N} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{k|k} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{21+6N} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & (\mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k})^\top \\ \mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{J}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{J}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(21+6N+6) \times (21+6N+6)} \quad (13)$$

其中 (下式参考 [3], 而代码参考 [1], 哪一个正确),

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{C_i}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \begin{pmatrix} {}^{C_i}_G\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top & {}^G\tilde{\mathbf{p}}_{C_i}^\top \end{pmatrix}^\top}{\partial \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_I^\top & \tilde{\mathbf{x}}_{C_1}^\top & \dots & \tilde{\mathbf{x}}_{C_N}^\top \end{pmatrix}^\top} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_I & \mathbf{0}_{6 \times 6N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times (21+6N)}$$

$$\mathbf{J}_I = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{C_i}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_I} = \begin{pmatrix} C \left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right) & \mathbf{0}_{3 \times 9} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -C \left({}^I_G\hat{\mathbf{q}}\right)^\top [{}^I\hat{\mathbf{p}}_{C \times}] & \mathbf{0}_{3 \times 9} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 21}$$

为表示方便, 拆解 $\mathbf{P}_{k|k}$ 为

$$\mathbf{P}_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

则

$$\mathbf{P}'_{k|k} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k} & \mathbf{J}_P^\top \\ \mathbf{J}_P & \mathbf{J}_I\mathbf{P}_{11}\mathbf{J}_I^\top \end{bmatrix} \quad \text{where} \quad \mathbf{J}_P = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_I\mathbf{P}_{11} & \mathbf{J}_I\mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} \quad (15)$$

why: Fix the covariance to be symmetric

$$\mathbf{P}'_{k|k} = \frac{\mathbf{P}'_{k|k} + \mathbf{P}'_{k|k}^\top}{2} \quad (16)$$

3.6 Measurement Update

3.6.1 Measurement Model

1. 计算获取世界坐标系下的 3D 特征点，代码在 `Feature::initializePosition`

- 据对极几何原理，三角化计算初始深度，得到初始三维点坐标
- 通过 L-M 算法迭代优化得到更加精确的世界系三维点

2. 投影世界系三维点到相机系

$$\begin{aligned} {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j &= \begin{pmatrix} {}^{C_{i,1}}X_j \\ {}^{C_{i,1}}Y_j \\ {}^{C_{i,1}}Z_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} {}^{C_{i,1}}\mathbf{q} \\ G \end{pmatrix} ({}^G\mathbf{p}_j - {}^G\mathbf{p}_{C_{i,1}}) \\ {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j &= \begin{pmatrix} {}^{C_{i,2}}X_j \\ {}^{C_{i,2}}Y_j \\ {}^{C_{i,2}}Z_j \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} {}^{C_{i,2}}\mathbf{q} \\ G \end{pmatrix} ({}^G\mathbf{p}_j - {}^G\mathbf{p}_{C_{i,2}}) \\ &= C \begin{pmatrix} {}^{C_{i,2}}\mathbf{q} \\ {}^{C_{i,1}} \end{pmatrix} ({}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j - {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_{C_{i,2}}) \end{aligned}$$

3. 线性化测量模型，视觉测量残差可近似表示为

$$\mathbf{r}_i^j = \mathbf{z}_i^j - \hat{\mathbf{z}}_i^j = \mathbf{H}_{C_i}^j \tilde{\mathbf{x}}_{C_i} + \mathbf{H}_{f_i}^j {}^G\tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{n}_i^j \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \quad (17)$$

其中，测量雅克比矩阵（代码在 `MsckfVio::measurementJacobian`）

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{C_i}^j &= \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j}{\partial \mathbf{x}_{C_{i,1}}} + \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j}{\partial \mathbf{x}_{C_{i,1}}} \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \\ \mathbf{H}_{f_i}^j &= \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,1}}\mathbf{p}_j}{\partial {}^G\mathbf{p}_j} + \frac{\partial \mathbf{z}_i^j}{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j} \cdot \frac{\partial {}^{C_{i,2}}\mathbf{p}_j}{\partial {}^G\mathbf{p}_j} \in \mathbb{R}^{4 \times 3} \end{aligned} \quad (18)$$

why: Modify the measurement Jacobian to ensure observability constrain, Ref: OC-VINS

4. 叠加对同一特征点的多个观测（代码在 `MsckfVio::featureJacobian`）

$$\mathbf{r}^j = \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_f^j {}^G\tilde{\mathbf{p}}_j + \mathbf{n}^j \quad \text{with} \quad \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \in \mathbb{R}^{4M \times 6}, \mathbf{H}_f^j \in \mathbb{R}^{4M \times 3}$$

为避免 ${}^G\mathbf{p}_j$ 的不确定性对测量残差的影响，将残差投影到 $\mathbf{H}_{f_i}^j$ 的左零空间 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{4M \times (4M-3)}$

$$\mathbf{r}_o^j = \mathbf{V}^\top \mathbf{r}^j = \mathbf{V}^\top \mathbf{H}_{\mathbf{x}}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^\top \mathbf{n}^j = \mathbf{H}_{\mathbf{x},o}^j \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{n}_o^j \in \mathbb{R}^{(4M-3) \times 1} \quad (19)$$

零空间 \mathbf{V} 通过 SVD 分解得到（代码在 `MsckfVio::featureJacobian`）

```
// Project the residual and Jacobians onto the nullspace of H_fj.
JacobiSVD<MatrixXd> svd_helper(H_fj, ComputeFullU | ComputeThinV);
MatrixXd A = svd_helper.matrixU().rightCols(jacobian_row_size - 3);
H_x = A.transpose() * H_xj;
r_o = A.transpose() * r_j;
```

5. 叠加所有特征点的多个观测，得到

$$\mathbf{r}_o = \mathbf{H}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_o \in \mathbb{R}^{N(4M-3) \times 1} \quad (20)$$

```

if (gatingTest(H_xj, r_j, cam_state_ids.size()-1)) {
    H_x.block(stack_cntr, 0, H_xj.rows(), H_xj.cols()) = H_xj;
    r.segment(stack_cntr, r_j.rows()) = r_j;
    stack_cntr += H_xj.rows();
}

```

3.6.2 能观性约束

OC-EKF

3.6.3 EKF Update

代码在 `MsckfVio::measurementUpdate`。

根据 [1], 为降低 EKF 更新的计算复杂度, 对 $\mathbf{H}_\mathbf{x}$ 进行 QR 分解

$$\mathbf{H}_\mathbf{x} = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

带入式 (20), 得

$$\mathbf{r}_o = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_o \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_H \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \mathbf{n}_o \\ \mathbf{Q}_2^T \mathbf{n}_o \end{bmatrix} \quad (23)$$

上式 $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{r}_o$ 仅含有噪声, 对其忽略, 取 $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o$ 用于 EKF 更新

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{r}_o = \mathbf{T}_H \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{n}_n \quad (24)$$

噪声向量 \mathbf{n}_n 的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{R}_o \mathbf{Q}_1 = \sigma_{\text{im}}^2 \mathbf{I}_r \quad (25)$$

计算 Kalman 增益

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{T}_H^T (\mathbf{T}_H \mathbf{P} \mathbf{T}_H^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \quad (26)$$

更新系统误差状态

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{K} \mathbf{r}_n \quad (27)$$

更新系统状态

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k \oplus \Delta \mathbf{X} \quad (28)$$

更新系统状态协方差矩阵

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I}_\xi - \mathbf{K} \mathbf{T}_H) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I}_\xi - \mathbf{K} \mathbf{T}_H)^T + \mathbf{K} \mathbf{R}_n \mathbf{K}^T \quad (29)$$

参考文献

- [1] Anastasios I Mourikis and Stergios I Roumeliotis. A multi-state constraint kalman filter for vision-aided inertial navigation. In *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3565–3572. IEEE, 2007.
- [2] 钟心亮. 一步步深入了解 s-msckf. http://www.xinliang-zhong.vip/msckf_notes/, 2019.
- [3] Ke Sun, Kartik Mohta, Bernd Pfrommer, Michael Watterson, Sikang Liu, Yash Mulgaonkar, Camillo J Taylor, and Vijay Kumar. Robust stereo visual inertial odometry for fast autonomous flight. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 3(2):965–972, 2018.
- [4] Joan Solà. Quaternion kinematics for the error-state kalman filter. *CoRR*, abs/1711.02508, 2017.
- [5] Nikolas Trawny and Stergios I Roumeliotis. Indirect kalman filter for 3d attitude estimation. *University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep*, 2:2005, 2005.