Uwaga 1 (gwoli uzupełnienia). $H^i_G(Y, \ell_2(G)) = {Z^i(Y)}\big/{B^i(Y)}$

$\bar{H}^n(Y) = {Z^i(Y)}\big/{\bar{B}^i(Y)} \simeq \mathcal{H}_n(Y) = \ker \Delta_n$

Moduły Hilbertowskie

Definicja 2 (*G*-moduł Hilbertowski)**.** M przestrzeń Hilberta nazywa się *G-modułem Hilbertowskim*, jeśli M jest wyposażona w reprezentację unitarną grupy G, $\pi : G \to U(M)$, taką, że M jest izometrycznie G-izomorficzna z domkniętą G-niezmienniczą podprzestrzenią $(\ell_2(G))^n$ (istnieje $V \subseteq (\ell_2(G))^n$ domknięta, $T : M \to V$ liniowa izometria, $T\pi_g = \lambda_g T$.

Lemat 3. $\delta_i \lambda_g = \lambda_g \delta_i$

Fakt 4. $C_i(Y) \simeq (\ell_2(G))^{\alpha_i}$ jest G-modułem Hilbertowskim.
$Z^i(Y), Z_i(Y)$ są G-modułami Hilbertowskimi.
$\bar{B}_i(Y), \bar{B}^i(Y)$ są G-modułami Hilbertowskimi.

Wniosek 5. $\mathcal{H}_i(Y)$ jest G-modułem Hilbertowskim.

Lemat 6. *M – G-moduł Hilbertowski, $V \subseteq M$ to G-niezmiennicza podprzestrzeń M, wówczas ${M}/{\bar{V}}$ z normą $\|w\| = \inf\{\|\tilde{w}\| : \pi(\tilde{w}) = w\}$ ma naturalną strukturę G-modułu Hilbertowskiego.*

Lemat 7. *Jeśli $\bar{V} \subseteq M$ jest G-niezmiennicza, to $\bar{V}^\perp$ jest G-niezmiennicze.*

Definicja 8 (izomorfizmy)**.** $f : M_1 \to M_2$ przekształcenie G-modułów Hilbertowskich jest

- *słabym izomorfizmem*, jeśli jest injekcją, ograniczone, G-ekwiwariantne, oraz $\operatorname{im} f$ jest gęste w M_2;
- *silnym izomorfizmem*, jeśli jest G-ekwiwariantną izometrią M_1 i M_2.

Lemat 9. *Załóżmy, że istnieje słaby izomorfizm G-modułów Hilbertowskich $M_1 \to M_2$. Wtedy istnieje silny izomorfizm M_1 i M_2.*

Uwaga 10. $T : H_1 \to H_2$, $\operatorname{im} T$ gęsty w H_2 wtw, gdy T^* jest injekcją, bo $(\operatorname{im} T)^\perp = \ker T^*$.

Twierdzenie 11 (spektralne)**.** *$T \in \mathcal{B}(H)$ dodatni samosprzężony, to istnieje $S \in \mathcal{B}(H)$ dodatni samosprzężony taki, że $S^2 = T$, co więcej S jest przemienny z każdym operatorem, z którym przemienny jest T.*

Definicja 12 (izomorficzne *G*-moduły)**.** M_1, M_2 – G-moduły Hilbertowskie są *izomorficzne*, jeśli istnieje słaby (lub równoważnie – silny) izomorfizm $f : M_1 \to M_2$.

Wniosek 13. $\varphi : M_1 \to M_2$ ograniczone G-ekwiwariantne przekształcenie G-modułów Hilbertowskich, wówczas $(\ker \varphi)^\perp \simeq {M_1}/{\ker \varphi} \simeq \overline{\operatorname{im} \varphi}$ jako G-moduły Hilbertowskie.

Twierdzenie 14. *$\mathcal{H}_i$ jest funktorem z kategorii Δ-kompleksów z wolnym kozwartym działaniem G i klas G-homotopii przekształceń do kategorii G-modułów Hilbertowskich i ograniczonych G-ekwiwariantnych operatorów.*

Twierdzenie 15 (o aproksymacji symplicjalnej)**.** *Niech K – skończony Δ-kompleks, L – dowolny Δ-kompleks. Wówczas przekształcenie $f : K \to L$ jest homotopijne z przekształceniem symplicjalnym $f' : K' \to L$, gdzie K' jest pewnym podpodziałem barycentrycznym K.*

Definicja 16. Przekształcenie symplicjalne przekształca sympleksy na sympleksy i jest liniowe w obcięciu do wnętrza każdego sympleksu.

Lemat 17. *W $(\ell_2(G))^n$ nie ma G-niezmienniczych niezerowych wektorów, jeśli $|G| = \infty$.*

Przykład 18. Y – spójny G-Δ-kompleks z kozwartym 1-szkieletem, G nieskończona, wtedy $\mathcal{H}_0(Y) = 0$.

Przykład 19. Dla $Y = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}, X = S^1$ mamy $\mathcal{H}_0(Y) = 0 \neq H_0^G(Y, \ell_2(G))$.