Wymiar Murray'a - von Neumanna

Uwaga 1. Chcemy zdefiniować $\dim_G$ na Hilbertowskich G-modułach t, że:

- $\dim_G M \geqslant 0$
- $\dim_G M = 0 \iff M = 0$
- $\dim_G M = \dim_G N$ jeśli $M \simeq N$
- $\dim_G M \oplus N = \dim_G M + \dim_G N$
- $\dim_G M \leqslant \dim_G N$ jeśli $M \leqslant N$
- $\dim_G \ell_2(G) = 1$
- $\dim_G M = \frac{1}{|G|} \dim_{\mathbb{R}} M$ dla G – skończonej
- $\dim_G M = \frac{1}{[G:S]} \dim_G M$ jeśli $S \leqslant G$ podgrupa skończonego indeksu

Definicja 2 (algebra von Neumanna)**.** *Algebrą von Neumanna grupy G* nazywamy algebrę $\mathcal{N}(G)$ ograniczonych (lewo-) G-ekwiwariantnych operatorów $T : \ell_2(G) \to \ell_2(G)$ (takich, że $\forall_{g \in G} T\lambda_g = \lambda_g T$).

$\ell_2(G)$ jest bimodułem nad $\mathbb{R}G$ (przez prawe i lewe działanie).

Uwaga 3. $\mathbb{R}G \subseteq \mathcal{N}(G)$.

Stwierdzenie 4. $\phi \in \mathcal{N}(G) \implies \phi^* \in \mathcal{N}(G)$

Wniosek 5. $\mathcal{N}(G)$ jest $\mathbb{C}^*$-algebrą.

Uwaga 6. Na $\mathbb{R}G$, $* : \sum r(g)g \mapsto \sum r(g)g^{-1}$.

Uwaga 7. Elementy $\mathbb{R}G$ jako macierze $|G|$ na $|G|$ są stałe na przekątnych $\{(g,h) : g^{-1}h = \gamma\}$.

Definicja 8 (ślad)**.** $\varphi \in \mathcal{N}(G)$, to $\mathrm{tr}_G(\varphi) = \langle \varphi(\mathbb{1}), \mathbb{1} \rangle$

Uwaga 9. Na $\mathbb{R}G$, $\varphi = \sum r(g)g$, $\mathrm{tr}_G(\varphi) = r(e)$.

Uwaga 10. Jeśli G skończona, to $\mathbb{R}G = \ell_2(G) = \mathcal{N}(G)$, φ odpowiada macierz M_φ stała na przekątnych, $\mathrm{tr}_G(\varphi) = \frac{1}{|G|}\mathrm{tr}(M_\varphi)$.

Stwierdzenie 11. $\mathrm{tr}_G(\varphi) = \mathrm{tr}_G(\varphi^*)$

Lemat 12. *$\mathbb{R}$-liniowe przekształcenie $\theta : \mathcal{N}(G) \to \ell_2(G)$, $\theta(\varphi) = \varphi(\mathbb{1})$ jest włożeniem oraz $\theta(\varphi^*) = \overline{\varphi(\mathbb{1})}$, gdzie $\bar{f}(x) = f(x^{-1})$.*

Wniosek 13. tr_G jest śladem na $\mathcal{N}(G)$, czyli $\mathrm{tr}_G(\varphi \circ \psi) = \mathrm{tr}_G(\psi \circ \varphi)$.

Ćwiczenie 14. Znaleźć opis $\mathcal{N}(G)$ oraz tr_G dla $G = \mathbb{Z}^n$.

Definicja 15. Niech $M_n(\mathcal{N}(G))$ algebra ograniczonych (lewo-) G-ekwiwariantnych operatorów na $\ell_2(G)^n$.

Operator $F \in M_n(\mathcal{N}(G))$ jest wyznaczony przez macierz $[F_{ij}]$, gdzie $F_{ij} \in \mathcal{N}(G)$ i spełnia $F(a_1, \ldots, a_n) = (\sum F_{1k}a_k, \ldots, \sum F_{nk}a_k) \in \ell_2(G)^n$.

Uwaga 16. Mamy $(F^*)_{ij} = F^*_{ji}$.

Definicja 17 (ślad)**.** $\mathrm{tr}_G(F) = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_G(F_{ii})$

Lemat 18. *Jeśli* $F = F^* \in M_n(\mathcal{N}(G))$, $F^2 = F$, *to* $\mathrm{tr}_G(F) = \sum_{i,j} \|F_{ij}(\mathbb{1})\|^2$.

Wniosek 19. $F \in M_n(\mathcal{N}(G))$ samosprzężony idempotentny, to $\mathrm{tr}_G F \geqslant 0$ oraz $\mathrm{tr}_G F = 0 \implies F = 0$.

Uwaga 20. To samo jest prawdą dla każdego F idempotentnego, bo wtedy dla π rzutu ortogonalnego na $\mathrm{im}\, F$ mamy $\mathrm{tr}_G \pi = \mathrm{tr}_G F$.

Stwierdzenie 21. *Jeśli* $P \in \mathcal{N}(G)$ *idempotentny, to* $\mathrm{tr}_G(P) + \mathrm{tr}_G(\mathrm{Id} - P) = 1$, *czyli* $\mathrm{tr}_G P \leqslant 1$ *oraz* $\mathrm{tr}_G(P) = 1 \iff P = \mathrm{Id}$.

Uwaga 22. Jeśli $P \in \mathbb{Z}G$ idempotentny, to $\mathrm{tr}_G P = 0$ lub $\mathrm{tr}_G P = 1$.

Wniosek 23. Jedynymi idempotentami w $\mathbb{Z}G$ są 0 oraz 1.

Hipoteza 24 (Kaplonsky)**.** *G beztorsyjna, to 0 i 1 są jedynymi idempotentami w $\mathbb{R}G$.*

Fakt 25. $V \subseteq \ell_2(G)^n$ – G-niezmiennicza domknięta podprzestrzeń, π_V rzut ortogonalny z $\ell_2(G)$ na V.

Wtedy $\pi_V \in M_n(\mathcal{N}(G))$.

Definicja 26 (wymiar von Neumanna)**.** V domknięta podprzestrzeń $\ell_2(G)^n$, to $\dim_G V = \mathrm{tr}_G \pi_V$

Stwierdzenie 27. π_B *idempotent, czyli* $\dim_G V \geqslant 0$ *oraz* $\dim_G V = 0 \implies V = 0$.

Definicja 28 (wymiar von Neumanna)**.** Niech M – G-moduł Hilbertowski, ustalmy G-ekwiwariatną izometrię $\alpha : M \to V$, na $V \subseteq \ell_2(G)^n$ domkniętą podprzestrzeń.

Wtedy $\dim_G M = \dim_G V$.

Uwaga 29. Ta definicja nie zależy od wyboru α.

Wniosek 30. $\dim_G M \geqslant 0$

$\dim_G M = 0 \iff M = 0$

Wniosek 31. $\dim_G(M \oplus N) = \dim_G M + \dim_G N$

Wniosek 32. $\dim_G M = \frac{1}{[G:S]} \dim_S M$ dla $S \subseteq G$, $[G : S] < \infty$.

Definicja 33. Kompleks łańcuchowy G-modułów Hilbertowskich $V_* : \ldots \to V_{i+1} \to V_i \to V_{i-1} \to \ldots$ nazywamy $\ell_2(G)$-kompleksem łańcuchowym, jeśli dla każdego i, $d_i : V_i \to V_{i-1}$ jest ograniczonym G-ekwiwariantnym operatorem.

Wówczas zredukowane kohomologie V_* są G-modułami Hilbertowskimi $\bar{H}_i(V_*) = {}^{\ker d_i}/_{\mathrm{im}\, d_{i+1}}$, zaś V_* nazywa się słabo-dokładny, jeśli $\forall_i \bar{H}_i(V_*) = 0$.

Definicja 34. V_*, W_* – $\ell_2(G)$-kompleksy łańcuchowe.

1. *Morfizmem* $\phi_* : V_* \to W_*$ nazywamy morfizm kompleksów łańcuchowych $\{\phi_i : V_i \to W_i\}$, w którym operatory są G-ekwiwariantne i ograniczone.

2. Dwa morfizmy $\phi_*, \psi_* : V_* \to W_*$ są $\ell_2(G)$*-homotopijne*, jeśli są homotopijne łańcuchowo przez homotopię łańcuchową składającą się z operatorów ograniczonych G-ekwiwariantnych.

3. Kompleksy V_*, W_* są $\ell_2(G)$*-homotopijne*, jeśli istnieją morfizmy $\phi_* : V_* \to W_*, \psi_* : V_* \to W_*$ takie, że $\phi_*\psi_*$ i $\psi_*\phi_*$ są $\ell_2(G)$-homotopijne z identycznością.

Wniosek 35. Morfizm $\phi_* : V_* \to W_*$ indukuje ograniczone G-ekwiwariantne operatory $\bar{H}_i(V_*) \to \bar{H}_i(W_*)$, które zależą jedynie od klasy homotopii ϕ_*.

Wniosek 36. Jeśli $\ell_2(G)$-kompleksy łańcuchowe V_*, W_* są $\ell_2(G)$-homotopijne, to moduły Hilbertowskie $\bar{H}_i(V_*), \bar{H}_i(W_*)$ są izomorficzne dla wszystkich i.

Definicja 37. Ciąg $U \to V \to W$ G-modułów Hilbertowskich nazywa się krótkim ciągiem słabo-dokładnym, jeśli $0 \to U \to V \to W \to 0$ jest słabo-dokładnym $\ell_2(G)$-kompleksem łańcuchowym.

Fakt 38. Jeśli $\alpha : V \to W$ to G-ekwiwariantny operator G-modułów Hilbertowskich, to G-moduły Hilbertowskie $\overline{\alpha(V)} \subseteq W$, $(\ker \alpha)^\perp \subseteq V$ są izomorficzne oraz $(\ker\alpha)^\perp \simeq {}^{V}\!/_{\ker\alpha}$.

Wniosek 39. $\dim_G V = \dim_G \ker\alpha + \dim_G \overline{\alpha(V)} = \dim_G \ker\alpha + \dim_G \left({}^{V}\!/_{\ker\alpha}\right)$

Wniosek 40. $U \to V \to W$ słabo-dokładny krótki ciąg G-modułów Hilbertowskich, to $\dim_G V = \dim_G U + \dim_G W$.

Wniosek 41. Jeśli $V_* : 0 \to V_n \to \ldots \to V_0 \to 0$ jest $\ell_2(G)$-kompleksem łańcuchowym G-modułów Hilbertowskich, to $\sum_i (-1)^i \dim_G V_i = \sum_i (-1)^i \dim_G \bar{H}_i(V_*)$.

Y to Δ-kompleks z wolnym kozwartym symplicjalnym działaniem grupy G.

Stwierdzenie 42. *$C_*(Y) = \ell_2(G) \otimes_G K_*(Y)$ jest $\ell_2(G)$-kompleksem łańcuchowym.*

Definicja 43 (liczby Bettiego)**.** $\beta_i(Y, G) = \dim_G \bar{H}_i(Y)$.

Stwierdzenie 44.
1. *$\beta_i(Y, G)$ jest niezmiennikiem G-homotopii Y, jest też niezmiennikiem homotopii $X = {}^{Y}\!/_{G}$.*

2. *Jeśli $S \subset G$ podgrupa indeksu m, to $\beta_i(Y, S) = m\beta_i(Y, G)$.*

3. *$|G| < \infty$, to $\beta_i(Y, G) = \frac{1}{|G|} b_i(Y)$.*

   W szczególności dla Y spójnego $\beta_0(Y, G) = \frac{1}{|G|}$.

4. *Jeśli $|G| = \infty$, Y spójny, to $\beta_0(Y, G) = 0$.*

Definicja 45 (liczby Bettiego)**.** X spójny skończony Δ-kompleks, ℓ_2-liczbą Bettiego $\beta_i(X)$ nazywamy $\beta_i(\tilde{X}, G)$, gdzie $\tilde{X}$ nakrycie uniwersalne, $G = \pi_1(X)$ grupa podstawowa X.