X przestrzeń topologiczna, $A \subseteq X$ podprzestrzeń, to $C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$.

Definicja 1 (homologie relatywne)**.** $C_n(X, A) = {C_n(X)}\big/{C_n(A)}$

Definicja 2 (operator brzegu)**.** $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ przeprowadza $C_n(A)$ w $C_{n-1}(A)$, czyli indukuje $\partial : C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$.

Definicja 3 (relatywne homologie)**.** $H_n(X, A) = H_n(C_n(X, A), \partial)$

Wniosek 4. Elementy $H_n(X, A)$ są reprezentowane przez n-łańcuchy $\alpha \in C_n(X)$, dla których $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.

Wniosek 5. Relatywny cykl α jest trywialny, jeśli jest relatywnym brzegiem: $\alpha = \partial\beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in C_{n+1}(X), \gamma \in C_n(A)$.

Twierdzenie 6. *Ciąg* $\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\tau} H_{n-1}(A) \to \ldots$ *jest dokładny.*

Weźmy $[c] \in C_n(X, A)$ *dla* $c \in C_n(X)$*, takie, że* $\partial[c] = 0$*, wtedy* $\tau([c]) = \partial c \subset C_{n-1}(A)$*.*

Twierdzenie 7. $f : (X, A) \to (Y, B)$ *indukuje* $f_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ *i* f_* *są przemienne z* τ*, czyli* τ *jest naturalną transformacją z* $H_n(X, A)$ *do* $H_{n-1}(A)$*.*

Twierdzenie 8. *Kanoniczny homeomorfizm* $H_n^\Delta(X) \to H_n(X)$ *jest izomorfizmem dla każdego* n *i dla każdego* Δ*-kompleksu* X*.*

Ćwiczenie 9. Udowodnić równość ℓ_2-homologii zredukowanych dla różnych struktur Δ-kompleksu.
Ogólniej: homotopijną niezmienniczośc ℓ_2-homologii zredukowanych.

Ćwiczenie 10. $Y = \mathbb{R}^n, G = \mathbb{Z}^n, X = T^n = (S^1)^n$
Udowodnij, że $\mathcal{N}(\mathbb{Z}^n) \simeq L_\infty(T^n)$ i znajdź wzór na $\mathrm{tr}_G : L_\infty(T^n) \to \mathbb{R}$.
Podpowiedź w notatkach.