Kohomologie de Rhama zostały przypomniane. I struktura różniczkowa na rozmaitości. I metryka Riemanna. I

Definicja 1 (gwiazdka Hodge'a)**.** $*: \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, $** = (-1)^{k(n-k)}$, $\alpha \wedge (*\alpha) = |\alpha^2|\mathrm{Vol}$

Definicja 2 (iloczyn skalarny na $\Omega^p(M)$)**.** $(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge (*\beta)$

Definicja 3. $\tilde{X}$ niezwarta rozmaitość Riemanna, Γ grupa działająca kozwarcie na $\tilde{X}$ przez izometrie zachowujące orientację.

Niech $A^{0,p} = A^{0,p}(\tilde{X})$ przestrzeń L^2-p-form na $\tilde{X}$, $A^{0,p} = \overline{A_0^p}^{\|\cdot\|_0}$, gdzie A_0^p przestrzeń C^∞ p-form na $\tilde{X}$ o zwartym nośniku, $\|\omega\|_0^2 = (\omega, \omega)_0 = \int_{\tilde{X}} \omega \wedge (*\omega)$

Stwierdzenie 4. *$A^{0,p}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)_0$ i ma rozkład Hodge'a:*

$$A^{0,p} = \overline{dA_0^{p-1}} \oplus \mathcal{H}^p \oplus \overline{d^* A_0^{p+1}},$$

gdzie $\mathcal{H}^p = \{\omega : d\omega = d^*\omega = 0\}$ to przestrzeń form harmonicznych.

Definicja 5 (L^2-kohomologie de Rhama)**.** $H^p_{dR(2)}(\tilde{X}) = {}^{\ker d}\big/_{\overline{\mathrm{im}\, d}}$

Twierdzenie 6 (Dodziuk 1977)**.** *Całkowanie form różniczkowych po sympleksach indukuje Γ-izomorfizm $\int : \mathcal{H}^p(\tilde{X} \to \bar{H}^p_{(2)}(\tilde{X})$.*

Definicja 7. $A^{k,p} = \{\omega \in A^{0,p} : (\mathrm{Id} + \Delta)^k \omega \in A^{0,p}\}$, gdzie $\Delta = dd^* + d^*d$ – odpowiednik przestrzeni Soboleva.

Stwierdzenie 8 (Atiyah)**.** *Dla każdego $k \geqslant 0$, $0 \leqslant p \leqslant \dim X$, przestrzeń $A^{k,p}$ jest uzupełnieniem A_0^p względem normy $\|\omega\|_k^2 = \|(\mathrm{Id} + \Delta)^k \omega\|_0^2$, $\omega \in A_0^p$, oraz $(\mathrm{Id}+\Delta)^k$ jest samosprzężonym operatorem na $A^{0,p}$ z dziedziną $A^{k,p}$.*

Lemat 9. *Operator $(\mathrm{Id} + \Delta)^k$ jest izomorfizmem przestrzeni Hilberta $A^{k,p}$ i $A^{0,p}$.*

Lemat 10. *L^2-formy harmoniczne na $\tilde{X}$ są zamknięte i kozamknięte,*
$\mathcal{H}^p(\tilde{X}) = \{\omega \in A^{0,p} : \Delta\omega = 0\} = \{\omega \in A^{0,p} : d\omega = d^*\omega = 0\}$.
Ponadto $Z^p(\tilde{X}) = \ker d$ może być zapisane jako
$Z^p(\tilde{X}) = \mathcal{H}^p(\tilde{X}) \oplus \overline{B^p(\tilde{X})}$,
dlatego $\mathcal{H}^p(\tilde{X})$ jest Γ-izomorficzne z $\bar{H}^p(\tilde{X}) = {}^{Z^p}\big/_{\overline{B^p}}$.