Definicja 1 (charakterystyka Eulera)**.** $\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} C_i(X)$

Definicja 2 (liczby Bettiego)**.** $b_i(X) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_i(X)$

Wniosek 3. $\chi(X) = \sum_i (-1)^i b_i(X)$

Wniosek 4 (nierówność Morse'a)**.** X skończony Δ-kompleks mający α_i i-wymiarowych sympleksów. Wtedy $\forall_{k\geqslant 0}\ \alpha_k - \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} + \ldots + (-1)^k\alpha_0 \geqslant b_k - b_{k-1} + b_{k-2} + \ldots + (-1)^k b_0$

Zmiana notacji: $C_i(X) = \Delta_i(X)$

Stwierdzenie 5. *Rzut ortogonalny* $Z_i(X) \to \mathcal{H}_i(X)$ *indukuje izomorfizm przestrzeni liniowych* $H_i(X,\mathbb{R}) = {Z_i(X)}\big/{B_i(X)} \to \mathcal{H}_i(X)$.

Wniosek 6. $b_i(X) = \dim_{\mathbb{R}} H_i(X,\mathbb{R})$

Definicja 7 (funktor kowariantny $\mathcal{H}_i$)**.** $f : X \to Y$ ciągłe, definiujemy $f_! : \mathcal{H}_i(X) \to \mathcal{H}_i(Y)$ jako $f_* : H_i(X,\mathbb{R}) \to H_i(Y,\mathbb{R})$ złożone z odpowiednimi izomorfizmami $\mathcal{H}_i(X) \simeq H_i(X,\mathbb{R})$.

Stwierdzenie 8. *Rzut ortogonalny* $Z^i(X) \to \mathcal{H}_i(X)$ *indukuje izomorfizm przestrzeni liniowych* $H^i(X,\mathbb{R}) = {Z^i(X)}\big/{B^i(X)} \to \mathcal{H}_i(X)$.

Definicja 9 (funktor kontrawariantny H^i)**.** Definiujemy $f^! : \mathcal{H}_i(Y) \to \mathcal{H}_i(X)$ jako złożenie $f^* : H^i(Y,\mathbb{R}) \to H^i(X,\mathbb{R})$ z odpowiednimi izomorfizmami $\mathcal{H}_i(X) \simeq H^i(X,\mathbb{R})$.

Wniosek 10. $(f_!)^* = f^!$

Transfer

$\bar{X} \xrightarrow{\pi} X$ nakrycie regularne, $X = \bar{X}/G$, $\bar{X}, X$ skończone Δ-kompleksy (G działa w sposób wolny przez permutację sympleksów).

Uwaga 11. π indukuje $\pi_i : C_i(\bar{X}) \to C_i(X)$: dla σ, τ komórek X, $\bar{\sigma}, \bar{\tau}$ komórek $\bar{X}$ takich, że $\pi(\bar{\sigma}) = \sigma, \pi(\bar{\tau}) = \tau$ mamy $\langle \pi_i\bar{\sigma}, \tau\rangle = \langle \bar{\sigma}, \sum_{g\in G} g\bar{\tau}\rangle$.

Wobec tego $\pi_i^* : C_i(X) \to C_i(\bar{X})$ spełnia $\pi_i^*\tau = \sum_{g\in G} g\bar{\tau}$.

Definicja 12 (notacja)**.** $N\bar{c} = \sum_{g\in G} g\bar{c}$

Wniosek 13. $\pi_i^* \circ \pi_i = N_i$

$\pi_i \circ \pi_i^* = |G|$

Wniosek 14. $\pi_i^* : C_i(X) \to C_i(\bar{X})$ jest włożeniem.

Uwaga 15. Mamy też $\pi_!$ indukowane przez π_i oraz $\pi^!$ indukowane przez π_i^* i zachodzi $\pi^! = (\pi_!)^*$ oraz $\pi_! \circ \pi^! = |G|$.

Stwierdzenie 16. $\pi_! : \mathcal{H}_i(\bar{X})^G \to \mathcal{H}_i(X)$, $\pi^! : \mathcal{H}_i(X) \to \mathcal{H}_i(\bar{X})^G$ *są izomorfizmami.*

Pierścienie grupowe

Definicja 17 (pierścień grupowy)**.** R to pierścień z 1 (nas interesują: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), pierścień grupowy $RG, R[G]$ to zbiór $\{f : G \to R : f(g) \neq 0$ dla sk. wielu g$\}$
z działaniami $(f + f')(g) = f(g) + f'(g)$, $(f * f')(g) = \sum_{h\in G} f(h)f'(h^{-1}g)$.

Uwaga 18 (konwencja)*.* $f = \sum_g f(g)1_g = \sum_g f(g)g$

Fakt 19. $\mathbb{1} = 1_e$ to jedynka w RG.

Fakt 20. Jeśli R, G przemienne, to RG przemienny.

Definicja 21. $\ell_2(G) = \left\{ f : G \to \mathbb{R} \middle| \sum_{x\in G} |f(x)|^2 < \infty \right\}$

Jest to przestrzeń Hilberta z normą $\|f\| = \sqrt{\sum_{g\in G} |f(x)|^2}$ pochodzącej od iloczynu skalarnego $\langle f, f'\rangle = \sum_{g\in G} f(x)f'(x)$.

Fakt 22. Istnieje włożenie przestrzeni liniowych $\mathbb{R}G \hookrightarrow \ell_2(G)$.
Co więcej, $\mathbb{R}G$ jest gęstym podzbiorem $\ell_2(G)$.

Reprezentacja (lewa) regularna

Definicja 23 (działanie G na $\ell_2(G)$)**.** $(gf)(x) = (\lambda_g f)(x) = f(g^{-1}x)$

Fakt 24.
- $\lambda_{gh} = \lambda_g \lambda_h$
- $\lambda_e = \mathrm{Id}$
- $\lambda_{g^{-1}} = \lambda_g^{-1}$

Lemat 25. *λ_g są unitarne na $\ell_2(G)$.*

Fakt 26. Reprezentacja λ rozszerza się liniowo do lewego działania $\mathbb{R}G$ na $\ell_2(G)$.

Uwaga 27*.* $\alpha = \sum r(g)g$, $f \in \ell_2(G)$, wtedy $\|\alpha f\| \leqslant \|f\| \sum_g |r(g)|$.

Uwaga 28*.* Podobnie możemy zdefiniować prawą reprezentację regularną ρ: $(fg)(x) = (\rho_g f)(x) = f(xg)$ i rozszerzyć do prawego działania $\mathbb{R}G$ na $\ell_2(G)$.

Niech Y – nieskończony Δ-kompleks, na którym G działa wolno przez permutację sympleksów.

Niech działanie G na Y będzie kozwarte, tj. $X = {}^{Y}\!/_{G}$ jest skończonym Δ-kompleksem.

Przykład 29*.* $Y = \mathbb{R}, G = \mathbb{Z}, X = {}^{Y}\!/_{G} = S^1$

Przykład 30*.* $Y = \mathbb{R}^2, G = \mathbb{Z}^2, X = {}^{Y}\!/_{G} = T^2$

Przykład 31*.* $Y = \text{drzewo}, G = \mathbb{F}_2, X = {}^{Y}\!/_{G} = \text{ósemka}$

Definicja 32 ($C_i(Y,G)$)**.** $K_i(Y,\mathbb{R})$ grupa symplicjalnych i-łańcuchów Y,
Σ_i zbiór i-wymiarowych sympleksów w Y,
$K_i(Y,\mathbb{R}) = \{f : \Sigma_i \to \mathbb{R}\}$.
Niech $C_i(Y) = C_i(Y,G) = \ell_2(G) \otimes_G K_i(Y,\mathbb{R}) = \{f : \Sigma_i \to \ell_2(G) | f(g\sigma) = \lambda_g f(\sigma)\}$.

Definicja 33 (C_i jako przestrzeń Hilberta)**.** Niech $\bar{\tau}_i^\mu$ ($\mu \in \{1,\ldots,\alpha_i\}$, α_i to liczba i-sympleksów w X) będą reprezentantami orbit i-sympleksów przy działaniu G na Y. Bazą ortonormalną $C_i(Y)$ jest

$$\{x \otimes \bar{\tau}_i^\mu | x \in G, \mu \in \{1,\ldots,\alpha_i\}\}.$$

Równoważnie, dla $f, f' \in C_i(Y)$

$$\langle f, f' \rangle = \sum_{\mu \in \{1,\ldots,\alpha_i\}} \langle f(\bar{\tau}_i^\mu), f'(\bar{\tau}_i^\mu) \rangle_{\ell_2(G)}$$

Uwaga 34. $f \in \ell_2(G)$, to elementy $f \otimes \bar{\tau}_i^\mu \in C_i(Y)$ spełniają $\|f \otimes \bar{\tau}_i^\mu\| = \|f\|$.

Wniosek 35. Przekształcenie $(f_1,\ldots,f_{\alpha_i}) \mapsto \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} f_\mu \otimes \bar{\tau}_i^\mu$ zadaje izometryczny G-ekwiwariantny izomorfizm

$$\left(\bigoplus_1^{\alpha_i} \ell_2(G)\right) \to C_i(Y).$$

Różniczki

Definicja 36. d_i dane tymi wzorami, co zawsze (wcześniej: ∂_i).

Lemat 37. *Neich $\varphi : (\mathbb{R}G)^n \to (\mathbb{R}G)^m$ morfizm $\mathbb{R}G$-modułów, wtedy operator indukowany $\tilde{\varphi} = \mathrm{Id}_{\ell_2(G)} \otimes_{\mathbb{R}G} \varphi : (\ell_2(G))^n \to (\ell_2(G))^m$ jest ograniczony.*

Wniosek 38. $d_i : C_i(Y) \to C_{i-1}(Y)$ operator ograniczony w sensie przestrzeni Hilberta.

Definicja 39. $\delta_{i-1} = d_i^*$
$Z_i(Y) = \ker d_i$, $\quad Z^i(Y) = \ker \delta_i$ domknięte podprzestrzenie liniowe w $C_i(Y)$.

Definicja 40. $\mathcal{H}_i(Y,H) = Z_i(Y) \cap Z^i(Y)$ – harmoniczne ℓ_2-kołańcuchy na Y
$B_i(Y) = \operatorname{im} d_{i+1}$, $\quad B^i(Y) = \operatorname{im} \delta_{i-1}$ (brzegi i kobrzegi)
$\bar{B}_i(Y), \bar{B}^i(Y)$ domknięcia podprzestrzeni $B_i(Y), B^i(Y)$ w normie

Stwierdzenie 41 (ℓ_2-rozkład H-dR)**.** $C_i(Y) = \bar{B}^i \ominus Z_i = \bar{B}_i \ominus Z^i = \bar{B}_i \ominus \bar{B}^i \ominus \mathcal{H}_i$

Definicja 42 (laplasjan)**.** $\Delta_i = d_{i+1}\delta_i + \delta_{i-1}d_i : C_i(Y) \to C_i(Y)$

Stwierdzenie 43. $\mathcal{H}_i(Y,G) = \ker \Delta_i$

Twierdzenie 44. $H_i^G(Y,\ell_2(G)) = {Z_i(Y)}\Big/{B_i(Y)}$

Definicja 45 (ℓ_2-homologie zredukowane)**.** $\bar{H}_i(Y) = {Z_i(Y)}\Big/{\bar{B}_i(Y)}$

Stwierdzenie 46. *Rzut ortogonalny $Z_i \to \bar{H}_i(Y)$ indukuje izomorfizm $\bar{H}_i(Y) \simeq \mathcal{H}_i(Y)$.*