Definicja 1 (n-sympleks)**.** Najmniejszy wypukły zbiór w $\mathbb{R}^m$ zawierający $n+1$ punktów nie leżących w hiperprzestrzeni wymiaru $n-1$.

Sympleks o wierzchołkach v_i oznaczamy $[v_0, \dots, v_n]$.

Definicja 2 (sympleks standardowy)**.** $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$
$= \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum t_i = 1, t_i \geqslant 0\}$.

Uwaga 3. Wierzchołki sympleksu są uporządkowane. Ustalenie porządku wyznacza kanoniczny liniowy homeomorfizm sympleksu standardowego Δ^n z dowolnym sympleksem $[v_0, \dots, v_n]$, tj. $\Delta^n \ni (t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum t_i v_i$.

Uwaga 4. Ściany dziedziczą porządek wierzchołków po sympleksie.

Definicja 5 (brzeg sympleksu)**.** Suma wyszystkich ścian sympleksu jest jego brzegiem $\partial\Delta^n$.

Definicja 6 (otwarty sympleks)**.** $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \backslash \partial\Delta^n$

Definicja 7 (Δ-kompleks)**.** Przestrzeń topologiczna X ma strukturę Δ-kompleksu, jeśli istnieje rodzina przekształceń $\sigma_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \to X$ takich, że

- $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^{n_\alpha}}$ jest włożeniem oraz każdy puinkt jest w obrazie dokładnie jednego z przekształceń $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^{n_\alpha}}$,
- dowolne obcięcie σ_α do ściany sympleksu jest jednym z przekształceń σ_β,
- zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty wtw, gdy $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ jest otwarty w Δ^n dla każdego α.

Przykład 8. W notatkach narysowany podział torusa na komórki.

Definicja 9 (Δ-kompleks)**.** Δ-kompleks X jest przestrzenią ilorazową przestrzeni $\bigsqcup \Delta^n_\alpha$, gdzie każdą ścianę Δ^n_α identyfikujemy z odpowiednim Δ^{n-1}_β odpowiadającym obcięciu $\sigma_\beta = \sigma_\alpha|_{sciana}$.

Uwaga 10. Możemy też konstruować X indukcyjnie: $X^{(0)}$ to dyskretny zbiór wierzchołków, $X^{(1)}$ z doklejonymi krawędziami itd.

Homologie simplicjalne X to Δ-kompleks, G to grupa abelowa (domyślnie $\mathbb{Z}$).

Definicja 11 (n-łańcuchy)**.** $\Delta_n(X,G)$ to wolna grupa abelowa, której bazą są otwarte n-sympleksy e^n_α w X: $\Delta_n(X,G) = \{\sum_{\alpha sk.} n_\alpha e^n_\alpha : n_\alpha \in G\}$.

Jej elementy nazywamy n-łańcuchami.

Uwaga 12. $[v_0,\ldots,v_i,v_{i+1},\ldots,v_n] = -[v_0,\ldots,v_{i+1},v_i,\ldots,v_n]$

Definicja 13 (brzeg)**.** $\partial[v_0,\ldots,v_n] = \sum(-1)^i[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]$
$\partial_n(\sigma_\alpha) = \sum(-1)^i\sigma_\alpha|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$

Lemat 14. $\partial^2 = 0$

Definicja 15. Mamy *kompleks łańcuchowy* $\Delta(X,G)$,
$\ldots \to \Delta_n(X,G) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X,G) \to \ldots \to \Delta_0(X,G) \to 0.$

Definicja 16 (homologie simplicjalne)**.** $H^\Delta_n(X,G) = H_n(\Delta(X,G)) = {}^{\ker\partial_n}\!/_{\operatorname{im}\partial_{n+1}}$

Elementy $\ker\partial_n$ nazywamy *cyklami*, $\operatorname{im}\partial_{n+1}$ – *brzegami*, $H_n(X,G)$ – *klasami homologii.*

Homologie singularne

Definicja 17. $C_n(X,G)$ – wolna grupa abelowa generowana przez zbiór singularnych n-sympleksów w X – kompleks łańcuchowy singularny.
$\partial_n(\sigma) = \sum(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}$
$\partial^2 = 0$
$H_n(X,G) = {}^{\ker\partial_n}\!/_{\operatorname{im}\partial_{n+1}}$

Uwaga 18. Homologie singularne są szczególnym przypadkiem simplicjalnych (wyjaśnienie w notatkach).

Stwierdzenie 19. *$H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$, gdzie X_α – składowe łukowej spójności przestrzeni X.*

Stwierdzenie 20. *$H_0(X,G) = \bigoplus_\alpha G$, α indeksują składowe łukowej spójności przestrzeni X.*

Stwierdzenie 21. $H_n(*,G) = \begin{cases} G & n = 0 \\ 0 & n \geqslant 1 \end{cases}$

Definicja 22 (przekształcenie indukowane)**.** $f : X \to Y$ ciągłe indukuje $f_\# : C_n(X,G) \to C_n(Y,G)$ takie, że $\sigma \mapsto f\circ\sigma$.

Lemat 23. $F_\#\partial = \partial f_\#$

Wniosek 24. $f_\#$ przenosi brzegi na brzegi, cykle na cykle, czyli f indukuje $f_* : H_n(X,G) \to H_n(Y,G)$ dla każdego n.

Fakt 25. $(fg)_* = f_*g_*$

Fakt 26. $(\mathrm{Id}_X)_{\#} = \mathrm{Id}_{H_n}$

Twierdzenie 27. $f \simeq_{htp} g : X \to Y \implies f_* = g_*$

Wniosek 28. $X \simeq_{htp} Y \implies H_*(X,G) = H_*(Y,G)$

Twierdzenie 29. $H_n^{sing} \simeq H_n^{\Delta}$

Definicja 30 (kompleksy)**.** $\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \to \ldots$ to kompleks łańcuchowy,
$\ldots \to C^{n+1} \xleftarrow{\delta} C^n \to \ldots$ to kompleks kołańcuchowy.
Mając kompleks łańcuchowy (C_n) możemy wziąć $C^n = \mathrm{Hom}(C_n, G) = C_n^*, \delta = \partial^*$.
Wtedy też $\delta^2 = 0$.

Definicja 31 (kompleks kołańcuchowy singularny)**.** $C^n(X,H) = \mathrm{Hom}(C_n(X,G),G)$

$$(\delta\varphi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi\left(\sigma|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}\right)$$

Definicja 32 (kohomologie singularne)**.** $H^n(X,G) = {}^{\ker\delta}/_{\mathrm{im}\,\delta}$
$\ker\delta$ to kocykle, $\mathrm{im}\,\delta$ to kobrzegi.

Uwaga 33. $\varphi \in C^n(X,G)$ kocykl, jeśli $0 = \delta\varphi = \varphi\delta$, czyli jeśli φ znika na brzegach.

Uwaga 34. Jeśli X – skończony Δ-kompleks, to utożsamiamy $\Delta_n(X,\mathbb{R})$ i $\mathrm{Hom}(\Delta_n(X,\mathbb{R}),\mathbb{R}) = \Delta_n(X,\mathbb{R})^*$.

Definicja 35. $\Delta_n(X) = \Delta_n(X,\mathbb{R})$, $\Delta^n(X) = \Delta^n(X,\mathbb{R})$ etc.

Rozkład Hodge'a - de Rhama

X skończony Δ-kompleks, $\Delta^n(X,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\beta_i}$ przestrzenie liniowe skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$ (β_i – liczba n-sympleksów) mają naturalny iloczyn skalarny

Definicja 36. $\langle f, f' \rangle = \sum f(e_\alpha^n) f'(e_\alpha^n)$

Stwierdzenie 37. $\langle \delta_{i-1}x, y \rangle = \langle x, \partial_i y \rangle$ *(de facto – z definicji)*

Wniosek 38 (równoważna definicja)**.** $\delta_{n-1} = \partial_n^*$

$$\Delta^n(X) \underset{\partial_n}{\overset{\delta_{n-1}=\partial_n^*}{\leftrightarrows}} \Delta^{n-1}(X)$$

Wniosek 39. $Z^i = \ker\delta_i = (\mathrm{im}\,\partial_{i+1})^\perp = B_i^\perp$
$Z_i = \ker\partial_i = (\mathrm{im}\,\delta_{i-1})^\perp = B^{i\perp}$
$\Delta^i(X) = B^i \oplus Z_i = B_i \oplus Z^i$

Stwierdzenie 40. $B^i \perp B_i$

Twierdzenie 41 (rozkład H-dR)**.** $\Delta_i(X) = B^i \oplus B_i \oplus (Z^i \cap Z_i)$

Definicja 42 (harmoniczne kołańcuchy)**.** $\mathcal{H}_i(X) = Z_i(X) \cap Z^i(X)$

Definicja 43 (laplasjan)**.** $\Delta_i = \partial_{i+1}\delta_i + \delta_{i-1}\partial_i : \Delta^i(X) \to \Delta^i(X)$

Lemat 44. $\mathcal{H}_i(X) = \ker\Delta_i$