Stwierdzenie 1. $\|d\omega\|_{k-1}^2 \leqslant \|\omega\_k^2$

Wniosek 2. $d : A^{k,p} \to A^{k-1,p+1}$ jest ograniczonym operatorem dla każdego $k \geqslant 1, p \geqslant 0$.

Definicja 3. Rozważmy kompleks $0 \to A^{t,0} \xrightarrow{d} A^{t-1,1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^{t-N,N} \to 0$ ($N = \dim X = \dim \tilde{X}$) i kohomologie:

$Z^{k,p} = \{\omega \in A^{k,p} | d\omega = 0\}$
$B^{k,p} = \operatorname{im} d : A^{k+1,p-1} \to A^{k,p}$
$H^{k,p} = Z^{k,p} \Big/ \overline{B^{k,p}}^{A^{k,p}}$

Stwierdzenie 4. *Przestrzenie $H^{k,p}$ są niezależne od wyboru k: $\forall_{k\geqslant 0, p\geqslant 0} H^{k,p}$ jest Γ-izomorficzne z $\mathcal{H}^p(\tilde{X})$.*

Definicja 5. $\|\omega\|_m^U = \left(\int_U |(\mathrm{Id} + \Delta)^m \omega(x)|^2 \, dV\right)^{\frac{1}{2}}$ dla każdego zbioru otwartego $U \subset \tilde{X}$, $\omega \in A^{k,p}$, $1 \leqslant m \leqslant k$.

Lemat 6. *Niech $(V, x^1, \ldots, x^N)$ będzie układem współrzędnych w $\tilde{X}$, U otwarty, relatywnie zwarty zbiór, $\bar{U} \subseteq V$. Dla $k \geqslant \frac{N}{4} + \frac{1}{2}$ oraz każdego $\omega \in A^{k,p}$ forma ω jest klasy C^1. Ponadto istnieje $C > 0$ niezależne od ω takie, że*

$$\sup_{x\in U} |\omega(x)| \leqslant C(\|\omega\|_k^V + \|\omega\|_0^V),$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N} \sup_{x\in U} \left|\frac{\partial\omega}{\partial x^i}(x)\right| \leqslant C(\|\omega\|_k^V + \|\omega\|_0^V),$$

gdzie $\frac{\partial\omega}{\partial x_i}$ to ω ze zróżniczkowanymi współczynnikami.

Niech $\tilde{K}$ – kompleks taki, że $|\tilde{K}| = \tilde{X}$ (gładka triangulacja).

Definicja 7. $\omega \in \Omega^p(\tilde{X})$, definiujemy $\int\omega \in C^p(\tilde{K})$, $\int\omega = \sum(\int_\sigma \omega)\sigma$ – suma po p-sympleksach w $\tilde{K}$.

Lemat 8. *Niech $\omega \in A^{k,p}$, $k > \frac{N}{4} + \frac{1}{2}$.*
Wówczas $\int\omega$ jest L_2.
Co więcej, $\int : A^{k,p} \to C^p_{(2)}(\tilde{K})$ jest ograniczony oraz $\int B^{k,p} \subseteq d_C C^{p-1}_{(2)}(\tilde{K})$.

Wniosek 9. $\int$ indukuje przekształcenie $H^p(\tilde{X}) \to H^p_{(2)}(\tilde{K})$.

Konstrukcja Whitneya

$\{U_v\}_{v\in K^0}$ otwarte pokrycie X otwartymi gwiazdami wierzchołków: $U_v = \operatorname{star} v$.

Weźmy gładki rozkład jedności stowarzyszony z tym pokryciem. Zarówno pokrycie, jak i rozkład jedynki możemy podnieść do $\tilde{X}$: $\{\varphi_v\}_{v\in\tilde{K}^0}$, $\operatorname{supp}\varphi_v \subset \operatorname{star} v$, $\varphi_v\gamma = \varphi_{\gamma^{-1}v}$.

Niech $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$ sympleks w $\tilde{K}$, oznaczamy $\varphi_i = \varphi_{v_i}$.

Definicja 10. $W_\sigma = \begin{cases} \varphi_0 & \text{dla } p = 0 \\ p!\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\varphi_i d\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\varphi_i} \wedge \ldots \wedge d\varphi_p\right) & \text{dla } p \geqslant 1 \end{cases}$

Uwaga 11. $\gamma^* W_\sigma = W_{\gamma^{-1}\sigma}$

Uwaga 12. $\operatorname{supp} W_\sigma \subseteq \operatorname{star}\sigma$

Definicja 13. Dla $f = \sum_{\sigma\in\tilde{K}} f_\sigma\sigma$ bierzemy

$$W_f = \sum_{\sigma\in\tilde{K}} f_\sigma W_\sigma.$$

Stwierdzenie 14.

- $dW = W d_C$
- $\int \circ W = \mathrm{Id}$
- $\forall_{f\in C^*(\tilde{K}),\gamma\in\Gamma}\gamma^* W f = W(f\gamma)$

Lemat 15. *$\forall_{f\in C^p_{(2)}(\tilde{K}),k\geqslant 0}$ gładka forma $Wf \in A^{k,p}$.*

Co więcej, $\forall_{k\geqslant 0} W : C^p_{(2)}(\tilde{K}) \to A^{k,p}$ jest ograniczony i Γ-ekwiwariantny.

Wniosek 16. W indukuje przekształcenie $W : H^p_{(2)}(\tilde{K}) \to H^p(\tilde{X})$.

Na koniec było trochę o hipotezach itp.