Definicja 1 (torus przekształcenia)**.** X skończony Δ-kompleks, $f : X \to X$ homeomorfizm symplicjalny, wtedy $T_f = {X \times I}\Big/{(x,0) \sim (f(x),1)}$.

Uwaga 2. X skończony Δ-kompleks, to T_f także.

Co więcej, liczba i-sympleksów T_f zależy od liczby i-sympleksów oraz $(i-1)$-sympleksów w X.

Stwierdzenie 3. *Ta liczba nie zależy od f.*

Fakt 4. $0 \to G \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{q} H \to 0$, to istnieje $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ takie, że $\Gamma \simeq G \rtimes_\varphi H$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $s : H \to \Gamma$ takie, że $q \circ s = \mathrm{Id}_H$.

Przykład 5. $\Gamma_A = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$, gdzie $A \in SL_2(\mathbb{Z})$, $|\mathrm{tr}A| > 2$, $\Gamma_A \simeq \pi_1(M_A)$, gdzie M_A to 3-wymiarowa Sol-rozmaitość.

Fakt 6. $\pi_1(T_f) = \pi_1(X) \rtimes_{f*} \mathbb{Z}$ (z van Kampena).

Uwaga 7. T_f lokalnie trywialne rozwłóknienie nad okręgiem z włóknem X.

Twierdzenie 8 (Luck)**.** *X skończony kompleks, wówczas $\forall_i \beta_i(T_f) = 0$.*

Lemat 9. $T_f^n \simeq_{htp} T_{f^n}$

Twierdzenie Lucka o aproksymacji

Definicja 10. G jest rezydualnie skończona, jeśli istnieje rodzina podgrup $H_i \leqslant G$, gdzie każda H_i jest skończonego indeksu w G, taka, że $\bigcap H_i = \{e\}$.

Przykład 11. $H_n = n\mathbb{Z} \leqslant \mathbb{Z}$

Uwaga 12. Jeśli G skończenie generowana, to możemy założyć, że H_i są normalne.

Wniosek 13. Grupa G jest rezydualnie skończona, jesli $\forall_{g\in G}$ istnieje homomorfizm $\varphi : G \to F$, gdzie F jest grupą skończoną taką, że $\varphi(g) \neq e$.

Przykład 14. $GL_n(\mathbb{Z})$, podgrupy $\ker \varphi_p$, gdzie $\varphi_p : GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}_p)$.

Przykład 15. $\mathbb{F}_n$ rezydualnie skończone: $\mathbb{F}_n \hookrightarrow \mathbb{F}_n \hookrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$

Twierdzenie 16 (Malcer)**.** *Skończenie generowana podgrupa $GL_n(R)$ dla R pierścienia przemiennego z 1 jest rezydualnie skończona.*

Przykład 17. $BS(m,n) = \langle a, b : ab^m a^{-1} = b^n \rangle$ dla $m, n \in \mathbb{Z}$.

Hipoteza 18. *Czy każda grupa hiperboliczna jest rezydualnie skończona?*

Twierdzenie 19 (Lucka o aproksymacji)**.** *Niech X-skończony kompleks o grupie podstawowej $\pi_1(X)$ rezydualnie skończonej. Niech $\ldots \subset \Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m \subset \ldots \subset \pi_1(X) = \pi$ będzie zstępującym ciągiem normalnych podgrup skończonego indeksu, $\bigcap \Gamma_m = \{e\}$. Niech $p_m : X_m \to X$ będzie skończonym nakryciem stowarzyszonym z Γ_m. Wówczas*

$$\beta_i(X) = \lim_{m\to\infty} \frac{b_i(X_m)}{[\pi : \Gamma_m]}.$$

Dalej jest dowód.