Chap 4 — Réduction ①

Théorème des Noyaux :

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $N \in \mathbb{N}^*$, et $(P_1, \dots, P_N) \in (\mathbb{K}[X])^N$ premiers entre eux deux à deux. Alors les sous-espaces vectoriels $(\ker(P_i(f)))_{i \in [\![1,N]\!]}$ sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=1}^{N} \ker(P_i(f)) = \ker\left(\left(\prod_{i=1}^{N} P_i\right)(f)\right)$$

Lien polynôme annulateur et valeur propre :

① Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $x \in E_\lambda(u)$ alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$. En particulier, si λ est une valeur propre de u, le scalaire $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$

② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur de u.

Théorème de Cayley-Hamilton :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de u est annulateur de u.
Autrement dit :

$$\chi_u(u) = 0$$

Caractérisation de diagonalisation :

① Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les pptés suivantes sont équivalentes :

i) f est diagonalisable
ii) $\exists$ une base de E formée de vecteurs propres de f.
iii) La somme des sous-espaces propres de f est égale à E
iv) La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E

② Un endomorphisme est diagonalisable ssi il annule un polynôme scindé à racines simples.

Condition suffisante de diagonalisation :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes (où $n = \dim E$), alors f est diagonalisable.

idem Matrice.

CNS de diagonalisabilité :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable $\Leftrightarrow$

- χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
- Pour chaque valeur propre λ de f, $\dim(E_\lambda(f))$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

idem Matrice.

polynome minimal :

① Soient E un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont les racines de $\mathbb{K}$ du polynôme minimal de u.

② Le polynome minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ divise le polynome caractéristique de u.

③ Le polynôme minimal de u est $M_u(X) = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$

④ Un endomorphisme est diagonalisable $\Leftrightarrow$ son polynôme minimal est scindé à racines simples

Caractérisation de trigonalisation :

① Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est trigonalisable
ii) χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

idem endomorphisme.

②

② 1) Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. Tout endomorphisme de E est trigonalisable

2) Toute matrice carrée complexe est trigonalisable dans $\mathbb{C}$

Endomorphismes induits :

① les sous-espaces propres d'un endomorphisme u sont stables par tout endomorphisme v commutant avec u

② Si F est un sev de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, les vp de l'endomorphisme u_F induit par u sur F sont les vp de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. On a alors :

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$$

③ Si u est scindé, alors l'endomorphisme induit par u sur tout sous-espace vectoriel stable de E est scindé

④ L'endomorphisme induit par u sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable