Rappel : Déterminants

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$, le déterminant de A est noté :

$\det_B(A)$ ou $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

P) 1) $(u_1; \ldots; u_n)$ est une famille libre ssi $\det_B(u_1; \ldots; u_n) \neq 0$

2) A inversible ssi $\det_B(A) \neq 0$

3) On ne modifie pas un déterminant qd on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes :

$$\det_B(u_1; \ldots; u_i; \ldots; u_n) = \det(u_1; \ldots; u_i + \sum_{k \neq i} \alpha_k u_k; \ldots; u_n)$$

- Si on échange 2 colonnes d'un déterminant, celui-ci est changé en son opposé

$$\det_B(u_1; \ldots; u_i; \ldots; u_j; \ldots; u_n) = -\det_B(u_1; \ldots; u_j; \ldots; u_i; \ldots u_n)$$

- Si on multiplie tous les éléments d'une colonne d'un déterminant par λ, celui-ci est multiplié par λ

$$\det_B(u_1; \ldots; \lambda u_i; \ldots; u_n) = \lambda \det_B(u_1; \ldots; u_n)$$

4) Le déterminant d'une matrice carrée est égal à celui de sa transposée : $\boxed{\det(A^t) = \det(A)}$

5) On ne modifie pas un déterminant quand on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres

- Si on échange 2 lignes d'un déterminant, celui-ci est changé en son opposé
- Si on multiplie ts les éléments d'une ligne d'un déterminant par λ, celui-ci est multiplié par λ

6) Le déterminant d'un produit de matrices carrées A et B est égal au produit des déterminants de ces matrices :

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

7) Si A est inversible : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

8) Deux matrices semblables ont mm déterminant

Calcul pratique d'un déterminant :

Cas particuliers :

$\underline{n=2}$: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$

$\underline{n=3}$: Règle de Sarrus $\rightarrow$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$

$= (a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{21} * a_{32} * a_{13} + a_{31} * a_{12} * a_{23})$
$- (a_{21} a_{12} a_{33} + a_{11} a_{32} a_{23} + a_{31} a_{22} a_{13})$
$= \dots$

$\searrow^{+}$ $\nearrow^{-}$

Développement suivant une ligne ou une colonne

D) On appelle **mineur** d'un élément a_{ij} de déterminant $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ a_{i1} \dots & a_{ij} & \dots a_{in} \\ a_{n1} \dots & a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ a_{i1} \dots & a_{ij} & \dots a_{in} \\ a_{n1} \dots & a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$

Si on note Δ le déterminant, le mineur de a_{ij} est noté Δ_{ij}

D) On appelle le **cofacteur** d'un élément a_{ij} d'un déterminant le scalaire $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$; Δ_{ij} étant le mineur de a_{ij}

P) Un déterminant d'ordre n est la somme des produits de chacun des éléments d'une même rangée (ligne ou colonne) par son cofacteur

- $\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement suivant la ligne i
- $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ développement suivant la colonne j

Exemple : $(-1)^{i+j}$

$\begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{33}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{33} - a_{22}a_{13})$

$= \dots$

Exemple 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Méthode 1 : Sarrus

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix}$

$= (\overset{8}{\overline{1 \times 2 \times 4}} + \overset{15}{\overline{(-1) \times (-3) \times 5}} + \overset{0}{\overline{0 \times 3 \times 1}}) - (\overset{-12 \quad -3 \times 0}{\dots}$

$= 38$

Méthode 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 0$

$= 8 + 3 + 12 + 15 = 38$

Ou $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} \cdots \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 18 + 20 = 38$

Méthode 3 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$= 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 18 = 38$

Exemples :

* $\det(I_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$

Si T est triangulaire supérieure (ou inférieure), son déterminant est le produit de ses termes diagonaux :

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Rq : pareil pour matrice diagonale

$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$