1) Algèbre des matrices

D) On appelle matrice $m \times n$ à coeffs dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$

Si $m = n$, on dit qu'on a une matrice carrée, on convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la ligne n°i et la colonne n°j

L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{K})$

Si $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$

Une matrice A est representée entre 2 parenthèses ou 2 crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} - & - & \\ - & - & - \\ & & \end{bmatrix}$$

OU encore : $A = (a_{ij})$ $\begin{smallmatrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{smallmatrix}$

ou $A = [a_{ij}]$

Addition des matrices

D) Si $A = (a_{ij})$ et $B(b_{ij})$ sont 2 matrices $m \times n$, on définit l'addition des matrices par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

. L'élément neutre est la matrice dont tous les éléments sont nuls
On l'appelle matrice nulle ; on la note : $O_{m,m}$

. La matrice opposée d'une matrice A est notée $-A$

Si $A = (a_{ij})$; $-A = (-a_{ij})$

. Produit par un scalaire

D) Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $m \times m$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par :

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Produit des matrices

D) Si $A(a_{ij})$ est ———— $n \times m$ et $B = (b_{ij})$ est ——— $m \times p$

On définit le produit des matrices par :

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Rq : c'est une matrice $n \times p$

P) Si $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$; $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$; $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, alors :

1) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2) $A \times B \neq BA$ en général
3) Si on note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$ alors $A \times I_n = A$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$

Transposée d'une matrice

D) Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n \times m$, on définit la matrice transposée de A notée par :

$$A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$$

Rq) C'est donc une matrice $m \times n$ obtenue par échange lignes / colonnes de la matrice de base.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 10 & -1 & 3 \\ 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

P) 1) $(A+B)^t = A^t + B^t$
2) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
3) $(A \times B)^t = B^t \times A^t$