1) Formes différentielles

Notation :

- $p=2$: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$
- $p=3$: $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz$

Pour $p=n$; $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

__Remarque :__ df est une applicat° de U vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$.

__Définition :__ On appelle forme différentielle de degrée 1, the applicat° :

$\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$

$(x_1; \dots; x_p) \to \omega(x_1; \dots; x_p) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1; \dots; x_p)\, dx_i$

où les $P_1; \dots; P_p$ sont p fonctions définies sur U à valeurs réelles, appelées fonctions coordonnées de la forme différentielle

__Déf :__ Une forme diff est de classe C^1 sur U (ou C^k) si tles les fct coordonnées le sont

Dans les cas usuels où $p=2$ (ou $p=3$) une forme différentielle est donc

$p=2$: $\omega(x,y) = P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy$

$p=3$: $\omega(x,y,z) = P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz$

Exemple : The différentielle est une forme différentielle de degrée 1

2) Formes exactes ; Formes fermées

D) Une forme diff déf sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ est une forme exacte, ou est une forme diff totale, si $\exists$ une fct° $f : U \to \mathbb{R}$ différentielle sur U, tq $\omega = df$

On dit que f est une primitive de ω sur U

D) Une forme diff déf sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^p$ est dite fermée si :

$i \neq j \to \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$

pour $p=2$: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

pour $p=3$: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

$\Leftrightarrow \vec{rot} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

car $\vec{\text{rot}} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$

Prop 1) Si U est un ouvert connexe et ω est exacte sur U, deux primitives de U diffèrent d'une constante

2) Si ω est une exacte sur l'ouvert U, alors elle est fermée sur U

3) Si ω fermée sur l'ouvert simplement connexe U, alors ω est exacte