Rappel : Applicat° linéaires

D) Soit E et F deux e.v sur un même corps $\mathbb{K}$.
On dit que $f : E \longrightarrow F$ est une app linéaire ou homomorphisme de E vers F si :

$$\begin{cases} \forall x \in E \,;\, \forall y \in E \,,\, f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \,;\, \forall x \in E \,;\, f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

L'ensemble des apps linéaires de E vers F est noté : $\mathcal{L}(E;F)$ ou $Hom(E;F)$

D) Si $E=F$; une app linéaire de E vers F est appelée endomorphisme de E

L'ensemble des endomorphismes de E est noté :

$$\mathcal{L}(E) \text{ ou } End(E)$$

On l'appelle isomorphisme de E vers F tte app linéaire bijective de E vers F,

Si $E=F$, on parle d'automorphisme

$Isom(E;F)$ et $Autom(E;F)$

Noyau et image

D) On appelle noyau d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tq : $f(u) = 0_F$

Le noyau est noté : $N(f)$ ou souvent $Ker(f)$

On a donc : $u \in Ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0_F$

D) On appelle image d'une application linéaire f de E vers F l'ensemble des vecteurs $v \in F$ tq il existe $u \in E$ vérifiant $u = f(v)$

L'image est notée $Im(f)$

On a donc : $v \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists u \in E / v \in f(u)$

P) 1) $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v de E
2) $\mathrm{Im}(f)$ ———————— F
3) f est une app injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
4) f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$