## 3) Changement de variable

Cas général

$D$ et $\Delta$ étant deux compacts simples,
soit $\phi : \Delta \to D$
$(u;v) \to (x(u;v) ; y(u;v))$

Si on note $|J_\phi(u;v)|$ la valeur absolue du Jacobien, on a :

$$|J_\phi(u;v)| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right|$$

Prop Chgmt de variable ds les intégrales doubles

avec toutes les hypothèses précédentes, on a :

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(x(u;v) ; y(u;v))\,|J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

Cas particulier

Passage en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_P f(r\cos\theta ; r\sin\theta)\,\underbrace{r}_{|J|}\,dr\,d\theta$$

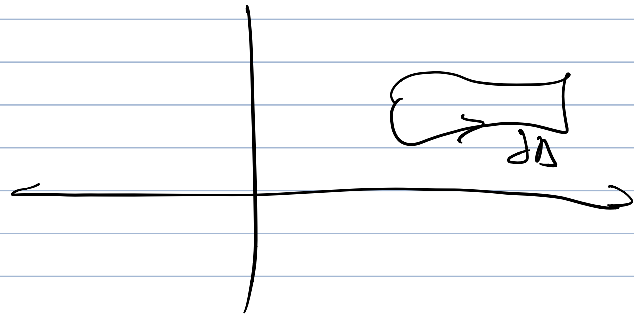
Cas : $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$
$= r$

$dx\,dy = \underbrace{r}_{|J|}\,dr\,d\theta$

## 4) Formule de Green-Riemann

Convention : Si $D$ est un compact simple, on note $\partial D$

Sa frontière orientée ds le sens direct




## P) Formule de Green-Riemann

Si $\omega = P\,dx + Q\,dy$ est formes diff de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ contenant le compact simple $D$ on a : $\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

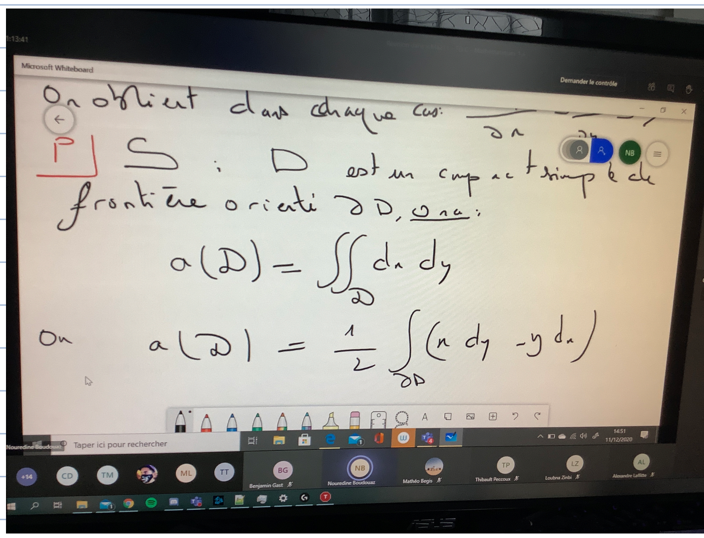
En prenant $\omega = \frac{1}{2}[-y\,dx + x\,dy]$

ou $\omega(x;y) = -y\,dx$

ou $\omega(x;y) = -x\,dy$

On obtient $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$

ds chaque cas




ou $a(D) = -\displaystyle\int_{\partial D} y\,dx$

ou $a(D) = \int_{\partial D} x\,dy$