1/ Définitions. Rayon de convergence

D/ Étant donné une suite réelle ou complexe (a_n). On appelle série entière de la variable réelle ou complexe z une série de la forme :
$\boxed{(\sum a_n z^n)}$

La suite est appelée suite des coefficients de la série entière.

D/ Une série entière $(\sum a_n z^n)$ converge simplement (ou converge uniformément) sur une partie Δ de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement ou bien converge uniformément sur Δ.

Rq/ $\forall n ; S_n(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^n$. (S_n) est donc une suite des polynômes

. Une série entière converge au moins en $z=0$

P/ 1) Si une série entière $(\sum a_n z^n)$ converge pour $z = z_0$, elle converge absolument pour tout z tq $|z| < |z_0|$ (lemme d'Abel)

2) L'ensemble des réels positifs ρ tq la suite numérique à termes positifs $(\sum |a_n| \rho^n)$ converge est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'origine 0.

D/ On appelle le rayon de convergence d'une série entière $(\sum a_n z^n)$ la borne supérieure R de l'intervalle $I = \{ \rho \geq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < +\infty \}$

Dans le cas réel, l'intervalle $]-R ; R[$ est l'intervalle de convergence

Dans le cas complexe, le disque ouvert $\Delta(0 ; R)$ est le disque de convergence

Calcul pratique de rayon de convergence

P/ Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence R :

1) Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ alors $\boxed{R = \frac{1}{\lambda}}$

2) Si $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$ alors $\boxed{R = \frac{1}{\lambda}}$

3) Si $\begin{cases} \lambda = 0 & \text{alors } \boxed{R = +\infty} \\ \lambda = +\infty & \text{alors } \boxed{R = 0} \end{cases}$