1) Définition + Exemples

Soit (U_n) une suite de nombres réels ou complexes.
On appelle série de terme général U_n, le couple $((U_n);(S_n))$ avec : $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$

La suite (S_n) ainsi définie est appelée suite des sommes partielles de la série

Notation : $\{U_n\}$ ou $\{\sum U_n\}$ ou $\sum U_n$

Une série $(\sum U_n)$ converge vers le nombre S si la suite (S_n) a pour limite S.

Notation : $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$

D) Si une série converge vers S, on appelle suite des restes la suite (R_n) définie par
$\forall n \in \mathbb{N}$; $R_n = S$ càd $\forall n \in \mathbb{N}$; $R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} U_n$

3) Propriétés des séries numériques :

D) Soit $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ deux séries et α un scalaire, alors :
1) $\sum(U_n+V_n) = (\sum U_n) + (\sum V_n)$
2) $\sum(\alpha U_n) = \alpha \sum U_n$

P) 1) Si $(\sum U_n)$ converge alors $U_n \to 0$; la réciproque est fausse.
2) Si $U_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \neq 0$ alors $\sum U_n$ diverge

3) Si $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ convergent vers S et T alors $\sum(U_n+V_n)$ converge vers $S+T$

3) Séries à termes positifs

D) Une série $(\sum U_n)$ est à termes positifs ssi $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in \mathbb{R}_+$

1) Théorème de comparaison :

Soient $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ deux séries. Si à partir d'un certain rang $0 \leq U_n \leq V_n$
- la convergence de $\sum V_n$ entraîne celle de $\sum U_n$
- la divergence de $\sum U_n$ entraîne celle de $\sum V_n$

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k$ alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ st de mm nature

2) Equivalences
Soient $(\sum U_n)$ et $(\sum U_n)$ 2 séries à termes positifs
Si $U_n \sim V_n$ alors les 2 st de mm nature

IV Critères de convergence

1) Critère de Cauchy.

Si à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{U_n} \leq K \leq 1$, la série converge

$\sqrt[n]{U_n} \geq 1$, la série diverge

<u>Règle de Cauchy</u> : si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$ alors $\begin{cases} \ell < 1 & \text{convergence} \\ \ell > 1 & \text{divergence} \\ \ell = 1 & \text{peut pas conclure} \end{cases}$

2) Critère de d'Alembert

Si à partir d'un certain rang, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq K < 1$, la série converge

$\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, la série diverge.

<u>Règle de d'Alembert</u>: si $\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$ alors $\begin{cases} \ell < 1 & \text{convergence} \\ \ell > 1 & \text{divergence} \\ \ell = 1 & \text{peut pas conclure} \end{cases}$

Relation entre la règle de Cauchy et celle de d'Alembert:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$$

Série de Riemann : ce sont des séries de la forme $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Une série de Riemann CV si $\alpha > 1$

Pour $\alpha = 1$, on obtient la série (divergente) $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ appelée <u>série harmonique</u>