Stochastische Signale

Sonstiges

Begriffe

- Bitfolge: Entweder 0 oder 1
- Codewörter: 2^n Möglichkeiten
- Diskretes Experiment: Abzählbar viele Ergebnisse
- Deterministische Signale:?
- geordnete Paare/Tupel: (a, b)
  $(i, j) \neq (j, i), i \neq j$
  Gleichheit komponentenweise!
- ungeordnete Paare/Tupel: $\{a, b\}$
  $\{i, j\} = \{j, i\} \forall i, j$
- abzählbar unendlich:
- nicht abzählbar?

Beispiele:

- $\Omega = \{(h1, h2, \dots, h_6) \in \mathbb{N}_0^6 \,|h_1 + \dots + h_6 = 2\}$: TODO
- $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 + \omega_2 > 9\}$: TODO
- $A' = \{\omega' \in \Omega' | \omega' > 9\}$
- Kiosk: Hoher Eisabsatz, ist keine Ursache für sonniges Wetter, sondern eine Folge davon. ($P(S|E) \neq P(E|S)$)
- Ereignisse A, B, C:
  - mindestens eins der Ereignisse: $A \cup B \cup C$
  - höchstens eins der Ereignisse: $((A\,capB) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))^c$
  - keins: $(A^c \cap B^c \cap C^c) = (A \cup B \cup C)^c$
- Beim Finden von disjunkten Teilmengen von sich schneidenden Mengen muss die Schnittmenge selbst auch als Menge aufgeführt werden.
- Gründe für detailliertere Modellierung: später doch auf Informationen zurückgreifen, Modellbildung anhand von Nachfrage, was überhaupt erwartet werden kann ohne selbst zu Messen was ankommt
- Don't Care: $(0, *)$
- Falls Wahrscheinlichkeitsmass zu prüfen, gilt es Widersprüche z. B. bei Teilmengen zu finden!
- Aus Mentorgruppe: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Prüfung

Eiheiten abgeben, falls nicht normiert!
Achtung bei Abbildungen in anderen Wahrscheinlichkeitsraum! (Nicht immer 1 zu 1,Ω und Ω' äquivalent aber nicht gleich)
Empfehlenswert, verwendete Kürzel definieren: $A, B \;\rightarrow$ Urne, $S \;\rightarrow$ S,. . .

1. Einführung

1.1. Zufall:

Etwas lässt sich nicht beschreiben oder man will es nicht beschreiben.
Zufälligkeit $\neg$ Willkührlichkeit!

1.2. Wahrscheinlichkeit:

Anwendbarkeit historischer Wahrscheinlichkeitsbegriffe:
Verhältnisbegriff nur anwendbar, falls alle Ereignisse gleich wahrscheinlich.
Anzahl nur anwendbar falls Experiment wiederholbar
z. B. $P(''1'') = \frac{\#1}{\#gesamt}$

2. Wahrscheinlichkeitsräume

$$(\Omega, \mathbb{F}, P)$$

2.1. Ergebnisraum Ω

Abhängig von Anwendung, vom Beobachtung bestimmt.
Menge von Beobachtungen, die wir bezüglich des Experiments machen können. Jedes Ergebnis muss Teil des Ergebnisraumes sein.
Beispiele für Bitfolge $b_1 b_2 b_3, b\; in0, 1$
$\Omega = (0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)$ aber auch $\Omega = 0, 1, 2, 3$
Mächtigkeit: $|\Omega| = \#$ Elemente
Ergebnismenge kann unendlich sein (Kopf/Zahl)

2.2. σ-Algebra / Ereignisalgebra

Minimaler Satz an in sich konsistenten Beobachtungen
Elementarereignis: Ereignis, besteht nur aus einem einzigen Ergebnis
Ereignisse $A, B \subset \Omega$
Gegenereignisse A^c, B^c
mit Komplement $A^c = \Omega \setminus A$
Differenzmenge $A \setminus B =$?
Schnittmenge $A \cap B, (A \cap B)^c$
Unögliches Ereignis $\emptyset$
Sicheres Ereignis Ω
Ergebnis $\neq$ Ereignis, da Ereignis Menge von Ergebnissen ist.
$\mathbb{F} \subset \mathrm{P}(\Omega)$ wobei Potenzmenge $\mathrm{P}(\Omega)$ Menge aller Teilmengen von Ω^2 mit $|\,\mathrm{P}\,| = 2^{|\Omega|}$
Kleinste ($\mathbb{F} = \{\emptyset, \Omega\}$) und größte $\mathrm{P}(\Omega)$ σ-Algebra
Wenn sich A und B bestimmen lassen, kann man auch die Schnittmenge bestimmen.
$\#$ Möglichkeiten Ereignisse zu definieren: $2^{|\Omega|}$
Äquivalente Beschreibungen eines Ereignisses sind NICHT gleich weil sie auf anderen Ereignismengen basieren. **Venn-Diagramm:** TODO mit Identitäten aus Skript
A, B partitionieren Ω, sodass $G_1 \cup G_2 \cup \dots = \Omega$ und $G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$
Möglichkeiten:

- A, B schneiden sich: GRAFIK
  $G_1 = A \setminus B$
  $G_2 = B \setminus A$
  $G_3 = A \cap B$
  $G_4 = \Omega \setminus (A \cup B)$
  $|\,\mathbb{F}\,| = 2^4$
  $\mathbb{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c, B, B^c, A \cup B, (A\,cupB)^c, A \cap B, (A \cap B)^c\, A \setminus B, (A\; setminusB)^c, B \setminus A, (B \setminus A)^c, (A \setminus B) \cup (B \setminus A), ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^c\}$
- A, B disjunkt: GRAFIK
  $G_1 = A$
  $G_2 = B$
  $G_3 = \Omega \setminus (A \cup B)$
  $|\,\mathbb{F}\,| = 2^3$
  $\mathbb{F} = \{\emptyset, \Omega, A, B, A^c, B^c, A \cup B, (A \cup B)^c\}$ Aus disjunkten Teilmengen (Partitionierungen) kann man einfach eine größere Menge bauen
- A alleine: GRAFIK
  $G_1 = A$
  $G_2 = \Omega \setminus A$
  $\mathbb{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$

Bedingungen für Mengensystem $\mathbb{F}$ als $\sigma-$Algebra:

1. $\Omega \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ nicht leer)
2. $A \in \mathbb{F} \Rightarrow A^c \in \mathbb{F}$ ($\emptyset \in \mathbb{F}$)
3. $A_1, A_2, \dots \in F \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{F}$
   mit De Morgan:
   $$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$$
   sowie: $A_i \setminus A_j = (A_i^c \cup A_j)^c$
   gilt: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{F}$ und $A_i \setminus A_j \in F$

Folgerung: Eine σ-Algebra ist ein Mengensystem, welches gegenüber Komplementbildung, endlichen und abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten sowie gegenüber Mengendifferenz abgeschlossen ist.
Anzahl der Elemente muss immer gerade sein, da zu jedem Ereignis ein Gegenereignis existieren muss!

2.2.1. Messraum

oder auch **messbarer Raum**

$$(\Omega, \mathbb{F})$$

2.3. WahrscheinlichkeitsmaßP

Man kann Wahrscheinlichkeiten nur Mengen, zuordnen, nicht den Elementen selbst.

2.3.1. Axiome

A: Ereignis

1. Nichtnegativität: $P(A) \geq 0$
2. Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
3. Additivitätssatz: $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Wahrscheinlichkeitsmaßauf dem Messraum $(\Omega, \mathbb{F})$:
$P : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$

2.3.2. Elementare Eigenschaften

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
6. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
7. Union Bound:

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

2.3.3. Interbretationen

1. TODO

2.4. Messbarkeit

Probleme:

- Ω nicht abzählbar: Beschränkung auf Teilmengen nötig

2.4.1. Borelsche σ-Algebra

$$\mathbb{B}^n \triangleq \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$$

$\sigma(G)$ =kleinste σ-Algebra, die G enthält
Borelmengen $\mathbb{B}^n$
Erzeugendensystem:

$$G = \{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \in \mathbb{R}^n \,|\forall a_i \leq b_i, a_i, b_i \in Q\}$$

(Alle n-dimensionalen kompakten Quader mit rationalen Eckpunkten)

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

Gegenseitige Beeinflussung unter zufälligen Ereignissen

3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Statt $P = P(\cdot)$ betrachte $P(\cdot|B) : \mathbb{F} \rightarrow [0, 1]$ (bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter der Bedingung B)
$P(B|B) = 1, P(A|B = c_b * P(A), c_b \geq 1, A \subset B \in \mathbb{F})$
Aus der Schule: $P_B(A)$
Ereignisse müssen nNICHT zeitlich nacheinander erfolgen!
Visualisierung am Baumdiagramm: TODO
Definition: für $P(B) > 0$ definiert

$$\mathrm{P}(A|B) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, P(\cdot|B))$ erfüllt alle Axiome.
Interpretationen:

1. subjektiv: persönliche EInschätzung des Beobachters bezüglich des Eintretens von A nachdem er über das Eintreten von B informiert wurde
2. frequentistisch: Bruchteil der Fälle, in denen das Ereignis A eintrift, bezogen auf die Fälle, in denen das Ereignis B auftritt
   $P(A|B) = \frac{n(A \cap B/n)}{n_B/n}$

Unabhängigkeit zweier Ereignisse A_1, A_2 gegeb Ereignis A_3: $P(A_1|A_3) * P(A_2|A_3) = P(A_1 \cap A_2|A_3)$

3.1.1. Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

mit disjunkten Mengen B_i und $\cup_{i+1}^{k} B_i = \Omega$ (disjunkte Zerlegung von Ω)
Satz von Bayes

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) * P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j) * P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Multiplikationsatz: $P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$
$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A|B \cap C \cap D)P(B|C \cap D)P(C|D)P(D)$
(usw.) Unter Verwendung von Permutationen $\pi(n)$:

$$P(A_{1\,\pi(1)})P(A_{\pi(2)|A_{\pi(1)}})P(A_{\pi(3)}|A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}) \cdot\cdot P(A_{\pi(k)}|A_{\pi(k}$$

Wichtige Beispiele:
Wenn $A \subset B$ gilt $P(A \cap B) = P(A)$ sowie $P(B|A) = 1$ aber nicht andersrum!

3.1.2. Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Es reicht eine der obigen 3 Gelichungen nachzuweisen!
Dann gilt für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subset I$: $(\cap_{i \in I} A_i) = \pi_{i \in I} P(A_i)$ Eintreten von B verändert A nicht. Disjunkte Ereignisse sind wenn $P(A), P(B) \neq 0$ IMMER stochastisch abhängig

3.1.3. Totale Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

Zum Prüfen der Unabhängigkeit von k Ereignissen müssen $2^k - k - 1$ Gleichungen erfüllt sein, wobei zur Prüfung paarweiser Unabhängigkeit $\binom{k}{2} = \frac{k()k-1}{2}$ Gleichungen ausreichen (schwächere Bedingung)
Paarweise unabhängige Ereignisse sind nicht zwangsläufig unabhänhig! Falls gilt

$$P(\cap_{i=1}^{k} A_i) = \Pi_{i=1}^{k} P(A_i)$$

bedeutet das nicht, dass die k Ereignisse auch paarweise unabhängig sind.

4. Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

4.1. Zufallsvariablen

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, Messraum $(\Omega', \mathbb{F}')$
Zufallsvariable Abbildung: $\mathrm{X} : \Omega \rightarrow \Omega'$, sodass für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}$ im Bildraum ein Ereignis $A = \{\omega \in \Omega | \mathrm{X}(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$ im Urbildraum existiert. Charakterisiert durch $(X, (\Omega, \mathbb{F}, P), (\Omega', \mathbb{F}'))$
Oft nennt man das Resultat der Abbildung auch $\mathcal{X}$. Verwendet werden Großbuchstaben für die Abbildung und Kleinbuchstaben für gewöhnliche Variablen.
Kurzschreibweise: $A = \{X \in A'\} = A = X^{-1}(A')$ obwohl X nicht bijektiv!
Mit Hilfe von Zufallsvariablen können Experimente auf die zu untersuchende Fragestellung reduziert werden.
Man kann annehmen, das zu jedem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega, \mathbb{F}, P$ ein Ur-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_0, \mathbb{F}_0, P_0)$ existiert, welcher aber unbrauchbar für jegliche Modellierung wäre.

4.1.1. Charakterisierung:

1. Reelle Zufallsvariablen: Bildraum $\mathbb{R}$ mit Borelscher σ-Algebra $\mathbb{B}$
   WR $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, MR $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$
   $\mathrm{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt reele Zufallsvariable, falls $\{\omega \in \Omega | \mathrm{X}(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \forall x \in \mathbb{R}$ gilt.
   Ergebnisse $\omega_i \in \Omega$, Realisierungen $x_i = \mathrm{X}(\omega_i)$
   Dise Anforderung wird für jede stetige Funktion $\mathrm{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ erfüllt.
2. Mehrdimensionale (reelle) Zufallsvariablen
   X : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ mit Borelscher σ-Algebra $\mathbb{B}^n$
   Zufallsvektor: **X** $= \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n \end{bmatrix}^\top$ mit
   $\mathrm{X}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
3. Komplexe Zufallsvariablen: Bildraum $\mathbb{C}$ $\mathrm{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ wenn $\mathrm{Re}\{X\}$,$\mathrm{Im}\{X\}$ reelle Zufallsvariablen sind.
   Zufallsvektor: **X** $= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\{X\} & \mathrm{Im}\{X\} \end{bmatrix}$

4.2. Verteilung deiner Zufallsvariablen

Bildmaß $P_X(A') = P(\{X \in'\}) \forall A' \in \mathbb{F}'$ heißt Verteilung der Zufallsvariablen und wird als das Bild von P unter X bezeichnet.

CDF
Kumulative Verteilungsfunktion (KVF) von X, cumularive distribution funktion, cdf

$$F_{\mathrm{X}}(x) = P(\{X \leq x\})$$

Eigenschaften:

- $F_X(x)$ monoton wachsend
- $F_x(x)$ rechtsseitig stetig
  Notation mit gefüllten Kringeln bei Stetigkeit und ungefüllten Kringeln bei Unstetigkeit!
- $x \to -\infty F_X(x) = 0$
- $x \to +\infty F_X(x) = 1$

Identitätsbildung: $F_{X_{Id}}(x) = P(\{\omega \leq x\})$ (Verteilungsfunktion von P) **Arten von reellen Zufallsvariablen:** diskret: Abbildung auf endlichem oder Abzählbarem Bildraum
stetig: TDODO

PMF
Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion (WMF) von X, probability mass function, pmf

$$p_{\mathrm{X}}(x) = P(\{X = x\})$$

Zusammenhang: $F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega' : \xi \leq x} p_{\mathrm{X}}(\xi)$
Zufallsvariable X ist stetig, falls ihre kumulative Verteilungsfunktion dargestellt werden kann als:

$$F_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{X}}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

PDF
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF) von X, probability density function, pdf
Absolut integrierbare Funktion $f_{\mathrm{X}} : \mathbb{R} \to [0, \infty[$
Wenn F_{X} stetig und bis auf endlich viele Stellen differenzierbar, dann ist X stetig und es gilt für differenzierbare x:

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{X}}(x)}{\mathrm{d}x}$$

Wahrscheinlichkeit für reelle Zufallsvariablen bei Ereignis $\{X = x\}$:

$$P(\{X = x\}) = \begin{cases} p_{\mathrm{X}}(x) \, \mathrm{Xreellunddiskret} \\ 0 \, \mathrm{Xstetig} \end{cases}$$

Des weiteren existieren Zufallsvariablen mit sowohl diskretem, als auch stetigem Anteil. Dann existiert, werder eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, noch eine Wahrscheinlichkeitsmassefunktion im Sinn der Definition.
Wenn D das Ereignis, dass eine Realisierung von X dem diskreten Teil zuzurechnen ist und $S = D^c$ das Ereignis, dass sie dem stetigen Teil zuzurechnen ist, dann kann man schreiben:

$$\mathrm{X} = \begin{cases} X_D, \mathrm{FallsDeintritt} \\ X_S, \mathrm{FallsSeintritt} \end{cases}$$

Erweiterte kommulative Verteilungsfunktion von X:

$$F_X(x) = P(D) \sum_{\xi \leq x : p_{X_D}(\xi) \neq 0} p_{x_D}(\xi) + P(D^c) \int_{-\infty}^{x} f_{X_S}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Normiertheitsbedingung auch hier erfüllt!
Methodik zur einfachen Darstellung des Wahrscheinlichkeitsmaßes von Zufallsvariablen mit diskretem und stetigem Anteil:
Darstellung einer stückweise konstaten Funktion $g(x)$ als summe gewichteter und verschobener Einheitssprungfunktionen $u(x) = \begin{cases} 1, x \leq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ möglich.
Sprungfunktion im klassischen Sinne nicht differenzierbar! Aber da

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Dirac-Funktion als Ableitung der Einheitssprungfunktion: $\delta(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$
Beispiel: kommulative Verteilungsfunktion sowie Wahrscheinlichkeitsdichte einer diskreten Zufallsvariable X:

$$p_{\mathrm{X}} = \left\{ \tfrac{1}{4}, \, x \in \{ \tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{7}{8} \} \right.$$

$$F_{\mathrm{X}} = \frac{1}{4}(u(x - \frac{1}{8}) + u(x - \frac{3}{8}) + u(x - \frac{5}{8}) + u(x - \frac{7}{8}))$$

$$f_{\mathrm{X}} = \frac{1}{4}(\delta(x - \frac{1}{8}) + \delta(x - \frac{3}{8}) + \delta(x - \frac{5}{8}) + \delta\, x - \frac{7}{8})]]$$