# Analysis 3 Zusammenfassung

## Sonstiges

### 0.1. Notationen

Vergleich zweier Funktionen: $f(x) \equiv \underset{\sim}{f}(x)$

### Itentitäten

- Frequenz $f = \frac{1}{T}$ in Hz, $f = \frac{\omega}{2\pi}$
- $\overline{e^{ik}} = e^{-ik}$
- komplexe Exponentialfunktion ist $2\pi$-periodisch
- Stammfunktion der komplexen Exponentialfunktion wie in $\mathbb{R}$ allerdings gilt:
  $\forall m \in Z : e^{2\pi i m} = 1 \Rightarrow \int_0^1 e^{2\pi i m \tau} d\tau = 0 \forall m \in Z \setminus \{0\}$
  WICHTIG
- Eulersche Formel:
  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
  $\Rightarrow e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
  mit $\cos -x = \cos x$ (gerade)
  und $\sin -x = -\sin x$ (ungerade)
  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
- $i^2 = -1$, $\frac{1}{i} = -i$
- $\cos 2\pi k = (1)^k$
  $\cos \pi k = (-1)^k$
  $\sin \frac{\pi k}{2} + sin \frac{3\pi k}{2} = 0$
- Hyperbolische Funktionen
  Definitionsbereich:?
  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

### 0.2. Grundlagen

- Fortsetzbarkeit in einer Unstetigkeitsstelle ist gegeben, falls der Funktionswert an Stelle $a$ nicht existiert, allerdings der rechtsseitige- und der linksseitige Limes gegen den selben Wert konvergieren! Hierbei hilft:
  $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t\ to 0^-} f(-t)$

### Beispiele

- Sägezahn
  Skizze: TODO
  $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), 2\pi-$periodisch auf $0 < t < 2\pi, f(0) = 0$
  $S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sin n$
  Koeffizienten ebenfalls in jeder Formelsammlung
  Sägezahn ist stückweise $C^1$ (sogar $C^\infty$)
  allgemein: $f(t) = \frac{T}{2} - t$ auf $(0 < t < T)$
- Stammfunktion einer positiven Funktion, kann nicht periodisch sein!
- Nebenergebnis $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$
- Treppenfunktionen lassen sich vereinfacht integrieren, wenn man das Integral an den Sprungstellen in eine Summe von Integralen splittet und ausnutzt, dass $f'(t) = 0$ da $f(t) = \text{const}$. Letzter Sprung muss wieder zum 1. Wert gelangen.
- Auswertung periodischer Funktionen: $f(6\pi) = f(6\pi - 3 \cdot 2\pi) \neq f(2\pi)$ da fr̈ $2\pi$ nicht definiert.
- Optimaler Tiefpass-Filter (GRAFIK) würde alle Samples benötigen. Wähle $d_k = 1$ für zum Beispiel $k < 5$ wenn $d_k$ Fourier-Koeffizient von $g$ und dem gefiltertem Signal $f * g$

# 1. Orthogonalreihen, Integraltransformationen

## 1.1. Fourier-Reihen

**Ziel:** Beschreibung eines periodischen Signals durch Überlagerung harmonischer Schwingungen

### 1.1.1. Grundlagen

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

- $f$ ist $T$-**periodisch** $\Leftrightarrow f(t+T) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}$
- $f$ ist **stückweise stetig**, falls in jedem $t \in \mathbb{R}$ der **rechtsseitige Grenzwert** $f(t_+) = \lim_{\tau downt} f(\tau) \in \mathbb{C}$ und der **linksseitige Grenzwert** $f(t_-) = \lim_{\tau upt}$ existieren und in jedem beschränktem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{C}$ $f$ **stetig** ist, **bis auf endlich viele Punkte (Sprungstellen)**

Periode $T$, Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$

**Darstellungen:**

- komplex:
  $$S_f(t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$$
  Mit Schwingungen $e^{in\omega t}$ und Frequenzen $0, (0Hz), \omega(\frac{1}{T}), 2\omega(frac2T), \dots$
  Andere Schreibweise der Summe: $\sum_{k \in Z}$
- sin-cos:
  $$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum n = 1^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

**Tipps:**

- Integral splitten bei Betrag!
- Integralgrenzen an Intervall, nicht an $T$ anpassen!
- Wählt man eine doppelt so große periode, wird das $w$ dementsprechend kleiner, sodass die Koeffizienten sich ändern. Allerdings sind die Fourierreihen äquivalent durch die verlangsamung der Schwinungen.
- Betrachte Symmetrieeingenschaften:
  - gerade: $b_k = 0 \forall k$
  - ungerade $a_k = 0 \forall k$
  - weder noch $\exists a_k, b_k \neq 0$
  - $f$ ungerade $\Rightarrow f \cdot \cos$ ungerade, $f \cdot \sin$ gerade
  - $F$ gerade $\Rightarrow f \cdot \cos$ gerade, $f \cdot \sin$ ungerade

**Formeln für Fourier-Koeffizienten:**

Fourier-Koeffizienten enthalten Amplituden und Phaseninformationen
komplex ($k \in Z$):

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt = \int_0^1 f(\tau T) e^{-2\pi i k t} d\tau \in \mathbb{C}$$

Liegt der Mittelwert der zu untersuchenden Funktion über eine Periodein der $x/t$-Achse, so ist $c_0$ stets gleich $0$
trigonometrisch ($k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$): $a_0 = \frac{2}{T} \int f(t) dt$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = 2 \int_0^1 f(t\tau) \cos(2\pi k \tau) d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = 2 \int_0^1 f(t\tau) \sin(2\pi k \tau) d\tau$$

Achtung: Teils ist Integrationsbereich $(-\pi, \pi)$ sinnvoller um Fallunterscheidung zu ersparen.
Ist $f$ reelwertig, dann folgt $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ aber nicht $c_k \in \mathbb{R}$

| Art | **Fourieranalyse** | **Fouriersynthese** |
|---|---|---|
| geg. | $f$ | $(c_k)_{k \in Z}$ |
| ges. | $(c_k)_{k \in Z}$ | $S_f$ |
| Notation | $\circ\!-\!\bullet$ | $\bullet\!-\!\circ$ |

Wobei $(c_k)_{k=0,\pm 1,\dots}$ Spektralwerte heißen
$S_f$ und $f$ stimmen bis auf Unstetigkeiten überein! In Unstetigkeiten wird der Mittelwert des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwertes verwendet. (Mittelwerteigenschaft)
Eine Linearkombination von stetigen Funktionen ist stetig.

**Cauchy Hauptwert:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \dots$$

TODO Fehler (symm. Grenzwert)

**Fundamentalbeziehungen:**

- Orthogonalistẗsrelation (OR)
  $k, n \in Z$:
  $\frac{1}{T} \int_0^T e^{in\omega t} e^{-ik\omega t} dt = \int_0^1 e^{2\pi i (n-k)\tau} d\tau = \begin{cases} 0, (n \neq k) \\ 1, (n = k) \end{cases} = \delta_{nk}$
  mit Kronecker-Symbol $\delta_{ij}$
- Umrechnungsformeln (UR)
  - $c_k \to a_k, b_k$:
    $a_0 = 2c_0$
    $a_k = c_k + c_{-k}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$
    $b_k = \imath(c_k - c) - k$ $(k \in \mathbb{N})$
  - $a_k, b_k \to c_k$:
    $c_0 = \frac{a_0}{2}$
    $c_k = \frac{a_k - \imath b_k}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$
    $c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}$ $(k \in \mathbb{N})$
  - falls $f$ $\mathbb{R}$-wertig:
    $a_k = 2 \operatorname{Re}\{c_k\}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$
    $b_k = 2 \operatorname{Im}\{c_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$
    $c_{-k} = \overline{c_k} = \operatorname{Re}\{c_k\} - i \operatorname{Im}\{c_k\}$ $(k \in Z)$

  Bei den Formeln für $c_k, a_k, b_k$ kann man $\int_0^T \dots dt$ ersetzen durch $\int_a^{a+T} \dots dt$

Ist $f$ ein $T$-**periodisches trigonometrisches Polynom**, also:
$f(t) = \sum_{n=-M}^{N} d_n e^{in\omega t}$, so gilt:

$$c_k = \begin{cases} d_k, (-M \leq k \leq N) \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Für trigonometrische Polynome $f$ gilt $S_f = f$ (Fourierreihe=Funktion)

**Vorgehensweise:**

Falls $f(t)$ Summe von Einzeltermen:

1. Bestimme kleinste Periode für Summanden $\Rightarrow$ bestimme kleinste geimeinsame Periode
   (konstante Funktion $f(t) = c$ periodisch für jede Periode $T$)
2. Kreisfrequenz $\omega$ bestimmen
3. Bestimmung der Koeffizienten:
   - Mit Formeln: TODO
   - Ablesen aus Euler-Formel:
     $\cos t + \alpha = \frac{1}{2} e^{i(t+\alpha)} + \frac{1}{2} e^{-i(t+\alpha)}$
     $\sin bt = -\frac{i}{2} e^{ibt} + \frac{i}{2} e^{-ibt}$
     $\Rightarrow \frac{e^{i\alpha}}{2} e^{it}, \dots$ durch Auftrennen
     $c_0 =$Konstanter Term
     $c_k =$ Term vor $e^{ik\omega t}$ (positiv und negativ)
     Weitere $c_k = 0$?
4. Umrechnung:
   - Mit Additionstheoremen $\cos t + \alpha$ auf Form $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ bringen
     Umformung in eine $T$-periodische cos-sin-Reihe. Koeffizienten ablesen.
   - Umrechnungsformeln (besser wenn $c_k$ bekannt) Andere $a_k, b_k = 0$?

Achtung beim Einsetzen von Werten außerhalb des Definitionsbreiches, wie z. B. $f(-t)$! Hier muss die Periode so oft addiert bzw subtrahiert werden, bis man nur noch im Definitionsbereich von $f$ liegt. Außerdem drehen sich beim Einsetzen von negativem $t$ die Intervallgrenzen, sodass aus $[0, 2\pi)$ dann $(0, 2\pi]$ werden würde.

**Zusammenhänge zwischen Funktion und Fourierkoeffizienten $c_k$:**

1. Aufspalten: Berechnet man die Koeffizienten für jeden Sumanden einer Summe von Funktionen ist das Koeffizient der Summe, die Summe der Teilkoeffizienten
2. Skalieren: Multiplikation der Funktion mit einem Faktor, bedeutet Änderung der Koeffizienten um den selben Faktor
3. Spiegeln: Falls $c_k$ Koeffizient zu $f(t)$, so ist $c_{-k}$ Koeffizient zu $f(-t)$

Falls $f(t)$ stückweise stetig diff'bar so gilt $S_f(0) = f(0)$
Unterscheiden sich 2 Funktionen nur in endlich vielen Punkten, so ist ihre Fourier-Reihe dieselbe, da endlich viele Punkte für das Integral irrelevant!
**Fragen bezüglich deer Konvergenz: Definition:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn $f$ auf jedem beschränktem Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig differenzierbar ist und zudem in jedem $t \in Rf$ und $f'$ links- und rechts-seitige Grenzwerte $f(f-), f'(t-), f(t+), f'(t+)$ in $\mathbb{C}$ existieren!
Darum exklusiv, weil Sägezahn da periodisch unendlich oft sprint. Häufung von Unstetigkeitsstellen NICHT erlaubt.

1. Wo konvergiert $S_f(t)$ und wo gilt $S_f(t) = f(t)$?
   **Satz:** TODO für die Fourierreihe einer $T$-periodischen stückweise stetig differenzierbaren Funktion ist:
   Punktweise Konvergenz $\forall t \in \mathbb{R} : S_f^N(t) = \lim_{N \to \infty} S_f^N \in \mathbb{C}\, TODO \forall t$ wobei $S_f^N(t) = \sum_{n+-N}^{N} c_n e^{in\omega t}$ ($N$-te Partialsumme)
2. Wo konvergiert $S_f$ gleichmäßig gegen $f$?
   Gleichmäßige Konvergenz von $S_f^N(t)$ gegen $f(t)$ auf jedem abgeschlossenem Intervall ohne Sprungstellen. Um so näher man sich an den Sprungstellen befinden, um so höher muss das $N$ werden, um eine Abweichung kleiner $\epsilon$ zu gewährleisten.
3. Was passiert an den Sprungstellen?
   An jeder Sprungstelle $t$ gilt:
   - Mittelwerteigenschaft: $S_f(t) = \frac{f(t-) + f(t+)}{2}$
   - Gibbs-Phänomen: GRAFIK, an erster Überschwingung (Extrema) vor/nach Sprungstelle gilt
     $\lim_{N \to \infty} | \frac{S_f^N(t_N) - S_f^N(t)}{f(t+) - f(t)} | =\propto 1.18$ (18 Prozent)

**RECHENREGELN**

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, stückweise stetig, $T$-periodisch
$f \circ\!-\!\bullet (c_k), g \circ\!-\!\bullet (d_k)$

- Linearität: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha f + \beta g \circ\!-\!\bullet (\alpha c_k + \beta d_k)$
- Konjugation/Zeitumkehrung: $\overline{f} \circ\!-\!\bullet (\overline{c_{-k}})_{k \imath Z}$
  $f(-t) \circ\!-\!\bullet (c_{-k}) k \in Z$
- Streckung der Zeitskala: $\gamma > 0$, $f(\gamma t) \circ\!-\!\bullet (c_k)$ (keine Änderung)
  $f(\gamma t)$ besitzt die Periode $\underset{\sim}{T} = \frac{T}{\gamma}$
- Verschiebung im Zeitbereich: $a \in \mathbb{R}, f(t + a) \circ\!-\!\bullet (e^{ik\omega a c_k})_{k \in Z}$
- Verschiebung im Spektralbereich, Amplitudenmodulation: $e^{in\omega t} f(t) \circ\!-\!\bullet (c_{k-n})_{k \in Z}$, $n \in Z$
- Symmetrien
  - $f$ gerade: $f(\frac{T}{2} + t) = f(\frac{T}{2} - t) \Leftrightarrow f(t) = f(-t) \forall t$
    Graph spiegelsymmetrisch zur gerade $t = \frac{T}{2}$
    Prototyp: $\cos k\omega t$
    $\Rightarrow c_k = c_{-k} \forall k \in Z$, $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt$ (Halbierung des Integrationsberechs und Verdopplung des Integralwerts)
    $b_k = 0 (k \geq 1)$
  - $f$ ungerade: $f(\frac{T}{2} + t) = -f(\frac{T}{2} - t) \Leftrightarrow f(t) = f(-t) \forall t$
    Graph punktsymmetrisch zu $(\frac{T}{2})$
    Prototyp: $\sin k\omega t$
    $\Rightarrow c_k = c_{-k}$, $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$
    $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t$ $(k \in \mathbb{N})$
  - $f$ $\frac{T}{2}-$periodisch: $f$ ist invariant gegenüber einer Zeitverschiebung um $\frac{T}{2}$. Für Periode $T$ hat dann $f$ die Fourierkoeffizienten:
    $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-2ki\omega t} dt$, $a_{k+1} = 0$, $b_{k+1} = 0$
    $a_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2k\omega t dt$
    $b_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin 2k\omega t dt$
    Prototypen: $e^{-(2k)\omega t, WOISTJ}, \cos 2k\omega t, \sin 2k\omega t$
  - $f$ ohne $\frac{T}{2}-$periodischen Anteil: $f(\frac{T}{2} + t) = -f(t) \forall t$?
    $\Rightarrow c_{2k} = 0, a_{2k} = 0, b_{2k} = 0$
    $c_{2k+1} = TODO, a_{2k+1} = TODO, b_{2k+1} = TODO$
- Fourierreihe der Ableitung: $f$ stetig auf $\mathbb{R}$ und $f'$ stückweise stetig
  $f' \circ\!-\!\bullet (ik\omega c_k)_{k \in Z}$ aber $c_0 =$?TODO
- Fourierreihe der Stammfunktion: $f$ stückweise stetig
  $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$
  $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \circ\!-\!\bullet \begin{cases} \frac{1}{ik\omega} c_k, k \neq 0 \\ \frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt, (k = 0) \end{cases}$
  Bemerkung: $F$ $T$-periodisch erfordert $F(T) = F(0)$ und Freiheit vom Mittelwert.
- Ableitung bei Sprungstellen: $f$ stückweise stetig mit $N$ Sprüngen

bei $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_N <= \mathrm{Periode} T$ zwischen den Sprungstellen ist $F \in \mathcal{C}^2$ ($N$ Sprungstellen pro Periode) Sprunghöhe bei $t_j$: $\Delta_j = f(t_j+) - f(t_j-)$

$f'$ ist die Ableitung in Differenzierbarkeitspunkten. In den Sp"ungen ist $f'$ nicht definiert beziehungsweise auf einen beliebigen Wert gesetzt.

Fourier-Koeffizienten: $f' \circ\!\!-\!\!\bullet\ (ik\omega c_k - \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N})\Delta_j e^{-ik\omega t_j}{}_{k\in Z}$

Verallgemeinterte Ableitung mit **Dirac-Impuls** $\delta(t)$ =Umpuls der Stärke 1 bei $t = 0$ mit den Eigenschaften $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0)$.

Verschobener Dirac $\delta(t-a)$ analog mit $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$

Wenn $Df$ = Ableitung von $f$ inklusive Differenzieren der Sprungstellen:

$$Df(t) = f'(t) + \sum_{j=1}^{N} \Delta_j \delta(t - t_j)$$

mit Fourierkoeffizienten $Df \circ\!\!-\!\!\bullet\ (ik\omega c_k)_{k\in Z}$
(Wahl der Berechnung selbst entscheiden)

**Größenordnung der Fourierkoeffizienten:**
$f$ stückweise setig und stetig differenzierbar bis auf endlich viele Sprungstellen pro Periode. Die Fourierkoeffizienten ($\hat{c_k}$) seien beschränkt ($|\hat{c_k} \leq C|\forall k$)
Dann gibt es $M > 0$ mit $|\hat{c_k}| \leq \frac{M}{|k|}\forall k \neq 0$

**1.1.2. Periodische Faltung von $f, g$**

$$(f * g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Beispiele:
$(1 * f)(t) = c_0(f \circ\!\!-\!\!\bullet\ (c_k))$
$(e^{ik\omega t} * f) = c_k e^{ik\omega t}$ (k-ter Summand der Fourierreihe von $f$)

**Rechenregeln:**

1. Kommutativität: $f * g = g * f$ (Beweis mit Substitution)
2. Linearität pro Faktor: $h * (\alpha f + \beta g) = \alpha(h * f) + \beta(h * g)$
3. $f * g \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_k d_k$ (Beweis mit Fubini)
4. $f, g$ stückweise stetig $\Rightarrow f * g$ stetig. Integral wirkt gláttend, auch wenn $f, g$ sprungbehaftet

**Größenordnungen (Teil 2)** $f, f', \ldots, f^{(n-2)}$ stückweise stetig, $f^{(n-1)}$ stückweise stetig differenzierbar
$\Rightarrow |c_k| \leq \frac{M}{|k|^m}$ für ($k \neq 0$)
Also: falls $f$ unstetig fallen die FK mit $\frac{M}{k}$, falls $f'$ unstetig mit $\frac{M}{k^2}$, wenn $f''$ unstetig mit $\frac{M}{k^3}, \ldots$

**Anwendungen der Faltung:**

1. Interpretation: Faltung mit Sägezahn
   $f(t) = (\frac{T}{\pi}s(\omega\dot{}) * f')(t) + c_0$
   mit Gleichspannungsoffset $c_0$ und Notation $f(\dot{})$ für $f$
   Gleichheit gezeigt, da $f$ und der Ausdruck beide stetig sind und die Fourierkoeffizienten gleich.
2. Frequenzgang von LTI-Systemen **LTI:** linear time invariant
   SYMBOL!
   Superposition: $\alpha x_1 + \beta x_2 \to \alpha y_1 + \beta y_2$ mit $x_i \to y_i$
   Zeitinvarianz: TODO
   Wenn Eingangssignal $T$-periodisch, ist auch $T$-periodisch.
   Ausgang $y(t)$ erfüllt lineare DGL mit $a_n \neq 0$:
   $$L[y](t) := a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y(t) = x(t)$$
   **Charakteristisches Polynom:**
   $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$
   **Spezieller Input:** $x(t) = e^{ik\omega t}$
   Lösungsansatz $y(t) = d_k e^{ik\omega t}$
   Mit Forderung $P(ik\omega) \neq 0 \forall k$ (keine Resonanz) gilt: $d_k = \frac{1}{P(i\omega k)}\forall k \in Z$

**Frequenzgang des LTI-Systems** $(d_k)_{k\in Z}$ mit $d_k = \frac{1}{P(i\omega k)}$
$T$**-periodische Impulsantwort des LTI-Systems** ist $H_T(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t}$
Übertragungsgesetz: $y(t) = (h_T * x)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h_T(t-\tau)x(\tau)d\tau$