Elektromagnetische Feldtheorie

Sonstiges

Begriffe

- quasi-statisch: ausschließlich als eine Abfolge von Gleichgewichtszuständen bestehend
- homogen: gleichmäßig aufgebaut
- homegene DGL bedeutet keine Quellenterme (nach 0 auflösbar)
- isotrop: Unabhängigkeit einer Eigenschaft von der Richtung
- Funktional: Eine Funktion aus einem Vektorraum V in den Körper, der dem Vektorraum zugrunde liegt

Formelzeichen und Einheiten

Name	Formelzeichen	Einheit	SI
El. Stromsärke	I	A	A
El. Spannung	U,V	V	$\frac{kgm^2}{As^3}$
El. Raumladungsdichte	ρ	$\frac{C}{m^3}$	$\frac{As}{m^3}$
El. Feld	$\vec{E}$	$\frac{V}{m}$	$\frac{kgm}{As^3}$
El. Flussdichte	$\vec{D}$		$\frac{As}{Vm^2}$
El. Stromdichte	$\tilde{\jmath}$		$\frac{A}{m^2}$
Mag. Flussdichte	$\vec{B}$	$\frac{Vs}{m^2}$	TODO
Mag. Feld	$\vec{H}$		$\frac{A}{m}$

Konstanten

Mathematik

- $\operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \operatorname{rot} \vec{E}\vec{H} - \operatorname{rot} \vec{H}\vec{E}$

Beispiele

- Koaxialkabel: Energie wird nicht von Leitern, sondern von Feld zwischen beiden Leiterpotentialen übertragen. Vorteil ist, dass durch diese Schirmung keine Strahlung nach Außen auftritt. Fallunterscheidungen für Innenleiter, Zwischenraum, Außenleiter und Außenraum.
- Plattenkondensator analog: Energie im Feld/Dielektrikum
- Ladungsanordnung im Würfel: 12 Kanten mit Länge a und 12 Seitendiagonalen mit Abstand $\sqrt{2}a$ sowie 4 Diagonalen durch den Mittelpunkt mit Abstand $\sqrt{3}a$ (Raumdiagonale)
- Spule mit N Wicklungen: $\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{a} = IN$

1. Klassische Kontinuitätstheorie

1.1. Gleichungen

1.1.1. Maxwellsche Gleichungen

Differentielle Form:

- Gauss'sches Gesetz: $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$
- Faradays Inkduktionsgesetz: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Quellenfreiheit: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- Ampere'sches Durchflutungsgesetz: $\operatorname{rot} \vec{H} = \tilde{\jmath} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Bedeutung:

- Elektrische Felder werden erzeugt
  - von elektrischer Ladungsverteilung
  - durch schnell zeitlich veränderliches Magnetfeld
- Magnetische Felder werden erzeugt
  - durch elektrische Stromverteilung
  - durch schnell zeitlich veränderliches elektrisches Feld

Elektromagnetisches Feld: $\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}$ (starker dynamischer Zusammenhang)

1.1.2. Matrialgleichungen

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (Polarisation)
- $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (Magnetisierung)
- $\tilde{\jmath} = \sigma \vec{E}$ (Drift)

Gültigkeitsbereich eingeschränkt!
Randwerte zur eindeutigen Lösung des Systems notwendig

1.2. Energie von elektromagnetischen Feldern

1.2.1. Elektrische Energiedichte

Energie zum Aufbau einer diskreten Ladungsverteilung
GRAFIK
k-te Ladung:

$$\Delta W_{el}^k = q_k \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

gesamt:

$$\Delta W_{el} = \sum_{k=2}^{n} \Delta W_{el} = \sum_{i<k}^{N} \sum_{i,k=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i \neq k}^{N} \sum_{i,k=1}^{N} \frac{q_k q_i}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

Kombinationsmöglichkeiten: $K = N(N-1)$
Achtung bei Formeln (teilweise nur in eine Richtung beachten!) **Übergang zu kontinuierlicher Ladungsverteilung**
$(q_i, \vec{r}_i)_{i=1,\dots,N} \to \rho(\vec{r})$
$q_i = dQ_i(\vec{r}_i) = \rho(\vec{r}_i) d^3 r$
Prinzip der virtuellen Verschiebung: Änderung der Position $\vec{r}_l$ durch $\delta \vec{r}_l$ für zu Änderung der elektrischen Arbeit $\delta W_{el} = \frac{\partial W_{el}}{\delta r_l}$. Elektrostatische Kraft $\vec{F}_l$ wirkt auf Ladung q_l während $\delta \vec{r}_l \Rightarrow \delta W_{mech} = \vec{F} \delta \vec{r}_l$.
Energiererhaltung $\delta W_m + \delta W_{el} = 0 \Rightarrow \vec{F}_l = -\frac{\partial W_{el}}{\partial \vec{r}_l}$
Substitutionsregel:

$$\sum_{i=1}^{N} \dots, \vec{r}_i, \dots q_i \to \int_V \dots, \vec{r}, \dots \rho(\vec{r}) d^3 r$$

Doppelintegral:

$$W_{el} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \int_V \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r d^3 r'$$

Elektrische Energie als Funktional der Feldquellen:
$W_{el} = W_{el}[\rho]$
1. Variation von W_{el} bezüglich kleiner Änderung $\delta\rho$:

$$\delta W_{el}[\rho, \delta\rho] := \frac{d}{d\alpha} W_{el}[\rho + \alpha\delta\rho]|_{\alpha=0}$$

Differentielle Änderung mit von Ladungsverteilung erzeugtem Coulomb-Potential:
$\delta W_{el} = \int_V \Phi(\vec{r}) \delta\rho(\vec{r}) d^3 r$
Mit Verwendung von $\operatorname{div} \delta \vec{D} = \delta\rho$ und Kugelradius $R \to \infty$:
$\delta W_{el} = \int_{\mathrm{R}^3} \vec{E} \delta \vec{D} d^3 r$
Aus $W_{el} = \int_{\mathrm{R}^3} w_{el}(\vec{r}) d^3 r$ folgt:
$\delta W_{el} = \int_{\mathrm{R}^3} \delta w_{el} \vec{r} d^3 r$
Lokale differentielle Änderung der Energiedichte im elektrischen Feld:
$\delta w_{el} = \vec{E} \delta \vec{D}$
Wegintegral zur Berechnung der lokalen Energiedichte des el. Feldes:

$$w_{el} = \int_{\vec{0}}^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}') d\vec{D}'$$

Gesamte elektrische Energie: $W_{el} = \int_V w_{el} dV$
Sonderfall: streng lineares Dielektrikum
$w_{el} = \frac{1}{2\epsilon} \vec{D}^2 = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E}\vec{D}$
Für matrixwertiges Epsilon:
$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E}^\top \underline{\epsilon} \vec{E}$

1.2.2. Magnetische Energiedichte

Externe zu erbringende Leistung (mechanische Arbeit), um in dem elektromagnetischen System eine Stromverteilung aufzubauen und aufrechtzuerhalten:
$P_{elmag} = -$ mechanische Leistung
diskret:

$$P_{elmag} = -\sum_{k=1}^{N} q_k \vec{v}_k \vec{E}(\vec{r}_k)$$

kontinuierlich: $N \to \infty$

$$P_{elmag} = -\int_V \tilde{\jmath}(\vec{r}) \vec{E} d^3 r$$

In Abhängingkeit der Feldgrößen:
$P_{elmag} = -\int_V \operatorname{rot} \vec{H} \vec{E} d^3 r + \int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d^3 r$
Wobei $\int_V \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d^3 r = \int_V \frac{\partial w_{el}}{\partial t} d^3 r = \frac{dW_{el}}{dt}$
Kugelgebiet $V = K(\vec{0}, R)$ mit $R \to \infty$

$$\Rightarrow P_{elmag} = \frac{dW_{el}}{dt} + \frac{dW_{mag}}{dt} + \lim_{R\to\infty} \int_{|\vec{r}|=R} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{a}$$

mit Poynting-Vektor: $(\vec{E} \times \vec{H})$ (zeigt in Ausbreitungsrichtung der Welle, elektromagnetische Energiestromdichte,Leistungsflussdichte)
Abschẗzung des Limes:

$$\text{s.o.} = \begin{cases} 0, \text{fallsquasistatisch} \\ \text{totalabgestrahlteLeistung}, \text{fallsdynamisch} \end{cases}$$

Begründung quasistatisch: $|\vec{E}| \approx \frac{1}{R^2}, |\tilde{\jmath}| \approx \frac{1}{R^2}, |\vec{H}| \approx \frac{1}{R^3}, |d\vec{a}| \approx \frac{1}{R^2}$
Differentielle Änderung der gesamten mag. Feldenergie:

$$\delta W_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{H} \delta \vec{B} d^3 r$$

Differentielle Änderung der Energiedichte des mag. Feldes:

$$\delta w_{mag} = \vec{H} \delta \vec{B}$$

Energiedichte es magnetischen Feldes: (Wegintegral)

$$w_{mag} = \int_{\vec{0}}^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B}') d\vec{B}'$$

gesamte magnetische Energie: $W_{mag} = \int_V w_{mag} dV$
Spezialfall: streng linear ($\vec{B} = \mu \vec{H}, \mu = \text{const}$)

$$w_{mag} = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 = \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2$$

1.2.3. Allgemeine Bilanzgleichung

Extensive physikalische Größe X besitzt Volumendichte $x(\vec{r}, t)$ sodass in Gebiet V für den enthaltenen Mengeninhalt gilt: $X(V) = \int_V x(\vec{r}, t) d^3 r$
Beispiele:
Ladung (Q, ρ_{el}), Masse (M, ρ_M), Energie (W_{el}, w_{el}),..
Stromdichte einer extensiven Größe:
$\vec{J}_X(\vec{r}, t)$ mit:

1. Skalarprodukt $\vec{J}_X d\vec{a}$ = Menge von X, welche pro Zeiteinheitdie Kontrollfäche in Normalenrichtung durchfließt
2. Durch Oberfäche ∂V von Kontrollvolumen C nach außen strömende Menge der Größe X gegeben durch Flussintegral: $\int_{\partial V} \vec{J}_X \mathrm{d}\vec{a}$

Produktionsrate:
$\prod_X(\vec{r}, t)$ gibt an welche Menge von X pro Volumeneinheit und Zeiteinheit erzeugt (> 0) oder vernichtet (< 0) wird.
Bilanzgleichung in integraler Form:
$\frac{\mathrm{d}X(V)}{\mathrm{d}t} = -\int_{\partial V} \vec{J}_X \mathrm{d}\vec{a} + \int_V \prod_X \mathrm{d}^3 r$
Bilanzgleichung in differentieller Form:
$\frac{\partial x}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{J}_X + \prod_X$
Beispiel: Ladungserhaltung $(0 = \operatorname{div} \vec{\jmath} + \frac{\partial\rho}{\partial t})$ ohne Ladungsgenerationsrate $\prod_Q$ weil Ladung weder verrichtet, noch erzeugt werden kann.

1.2.4. Energiebilanz des elektromagnetischen Feldes, Poynting-Vektor

Es gelten: $\frac{\partial w_{el}}{\partial t} = \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\frac{\partial w_{mag}}{\partial t} = \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$w_{elmag} = w_{el} + w_{mag}$
$\pi_{elmag} = -\vec{\jmath}\vec{E}$
Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$$\vec{J}_{elmag} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S}_0, \operatorname{div} \vec{S}_0 = 0$$

da sich $\operatorname{div} \vec{J}_{elmag} = \operatorname{div} \vec{S}$ nicht unterscheiden. **Beispiel:** Wenn $\vec{E}, \vec{H}$ die dynamisch gekoppelten Komponenten EINES elektromagnetischen Feldes sind (. B. Sendeantenne), dann gilt $\vec{S} = \vec{J}_{elmag}$

1.3. Potentialdarstellung des elektromagnetischen Feldes

1.3.1. Elektromagnetisches Vektor- und Skalarpotential

Allgemeine Definition und Eigenschaften des Vektorpotentials
Auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definiertes Vektorfeld $\vec{U}(\vec{r})$ besitzt Vektorpotential $\vec{V}\vec{r}$, falls ein auf Ω differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\vec{r}$ existiert, sodass $\vec{U}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r})$. Dann gilt $\vec{U} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r})$
Satz von Poincare:
$\vec{U}(\vec{r})$ ist stetig differenzierbar in kompaktem/sternförmigem Gebiet Ω mit $\operatorname{div} \vec{U} = 0 \Rightarrow \exists$ Vektorpotential $\vec{V}(\vec{r}) \in \Omega$ mit $\vec{U} = \operatorname{rot} \vec{V} \in \Omega$ **Eindeutigkeit** ist bis auf additives Gradientenfeld gegeben. Es exitiert also ein Skalarfeld $\mathcal{X}(\vec{r})$ auf Ω. Alle Vektorpotentiale haben also die Form:
$\vec{V}' = \vec{V} - \operatorname{grad} \mathcal{X}(\vec{r})$
Elektromagnetisches Vektorpotential:
Global definiertes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}, t)$ mit $\vec{B}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$
Da $\vec{A}$ und $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\mathcal{X}$ dasselbe $\vec{B}$-Feld liefern ist $\vec{A}$ nicht ganz eindeutig. Man nennt $\mathcal{X}$ Eichpotential und kann die Eichfreiheit dazu nutzen, zusätzlich Eichbedingungen zu erfüllen.
Skalares elektromagnetisches Potential
Da $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ein Gradientienfeld ist, existiert elektromagnetisches skalares Potential (Skalarfeld) $\Phi\vec{r}, t$ und das elektrische Feld hat damit die Darstellung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \operatorname{grad} \Phi\vec{r}, t - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Eichtransformation Den Prozess $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\mathcal{X}$ nennt man 'Umeichen'. Hierbei muss aber auch das skalare Potential transformiert werden sodass die umgeeichten elektromagnetischen Potentiale lauten:
$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla}(\vec{r}, t)$
$\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi\vec{r}, t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t}(\vec{r}, t)$

1.3.2. Maxwellsche Gleichungen in Potentialdarstellung

4-komponentiges partielles Differentialgleichungssystem für Unbekannte $(\Phi, \vec{A})$ bei gegebenen Quellen $\rho, \jmath$:

$$\operatorname{div} \epsilon \nabla \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \epsilon \vec{A} = -\rho$$

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} + \epsilon \frac{^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla (\frac{\partial \Phi}{\partial t}) = \jmath$$