

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Primož Godec

**Barvanje črnobelih slik z globokimi  
modeli**

MAGISTRSKO DELO  
MAGISTRSKI PROGRAM DRUGE STOPNJE  
RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKA

MENTOR: prof. dr. Blaž Zupan

Ljubljana, 2017



AVTORSKE PRAVICE. Rezultati magistrskega dela so intelektualna lastnina avtorja in Fakultete za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani. Za objavljanje ali izkoriščanje rezultatov magistrskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja<sup>1</sup>.

©2017 PRIMOŽ GODEC

---

<sup>1</sup>V dogоворju z mentorjem lahko kandidat magistrsko delo s pripadajočo izvorno kodo izda tudi pod drugo licenco, ki ponuja določen del pravic vsem: npr. Creative Commons, GNU GPL. V tem primeru na to mesto vstavite opis licence, na primer tekst [?].



## ZAHVALA

*Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo magistrske naloge. V zahvali se poleg mentorja spodobi omeniti vse, ki so s svojo pomočjo prispevali k nastanku vašega izdelka.*

*Primož Godec, 2017*



Vsem rožicam tega sveta.

*"The only reason for time is so that everything doesn't happen at once."*

— Albert Einstein



# Contents

## Povzetek

## Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Pregled Področja</b>	<b>5</b>
2.1	Obstoječe metode za barvanje črno-belih slik . . . . .	5
2.2	Globoke nevronske mreže . . . . .	7
2.3	Predstavitev slikovnih podatkov in barvni prostori . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Barvanje črno-belih slik z globokimi nevronskimi mrežami</b>	<b>13</b>
3.1	Arhitekture . . . . .	13
3.2	Pristopi z regresijo . . . . .	17
3.3	Pristopi s klasifikacijo . . . . .	19
3.4	Postopek učenja . . . . .	21
3.5	Barvanje večjih slik . . . . .	24
3.6	Podatki . . . . .	24
3.7	Računanje napake . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Rezultati in diskusija</b>	<b>29</b>
4.1	Primerjava metod na manjši učni množici . . . . .	29
4.2	Primerjava metod na večji učni množici . . . . .	35
4.3	Barvanje večjih slik . . . . .	35

*CONTENTS*

<b>5 Zaključek</b>	<b>39</b>
<b>A Spearmanova korelacija rangov med metodami</b>	<b>41</b>
<b>B Podrobnosti arhitektur</b>	<b>43</b>

# Povzetek

**Naslov:** Barvanje črnobelih slik z globokimi modeli

V vzorcu je predstavljen postopek priprave magistrskega dela z uporabo okolja L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavnega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

## Ključne besede

*Umetna inteligenco, Odkravanje znanj iz podatkov, globoko učenje, nevron-ske mreže*



# Abstract

**Title:** Deep models for image coloring

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short. A good abstract contains: (1) a short description of the tackled problem, (2) a short description of your approach to solving the problem, and (3) (the most successful) result or contribution in your thesis.

## Keywords

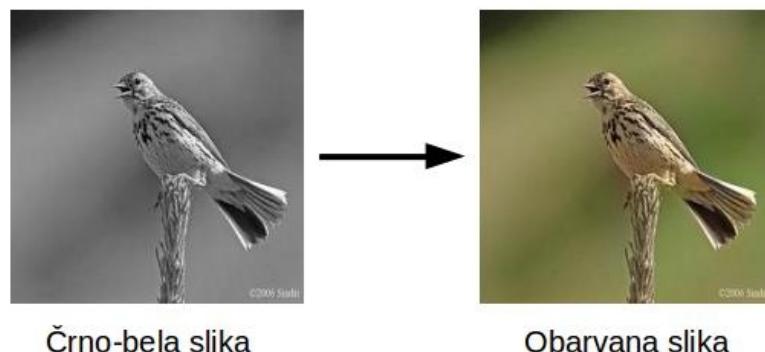
*Artificial intelligence, data mining, deep learning, neural networks*



# Poglavlje 1

## Uvod

Čeprav se so prvo barvno fotografijo naredili že leta 1886 [1], se je barvna fotografija v vsakdanji uporabi uveljavila šele mnogo kasneje. Tako imajo naši stari starši še vedno veliko črno belih fotografij. Ker te prikazujejo realnost povsem drugače, bi jih radi obarvali. Ali je to sploh mogoče?

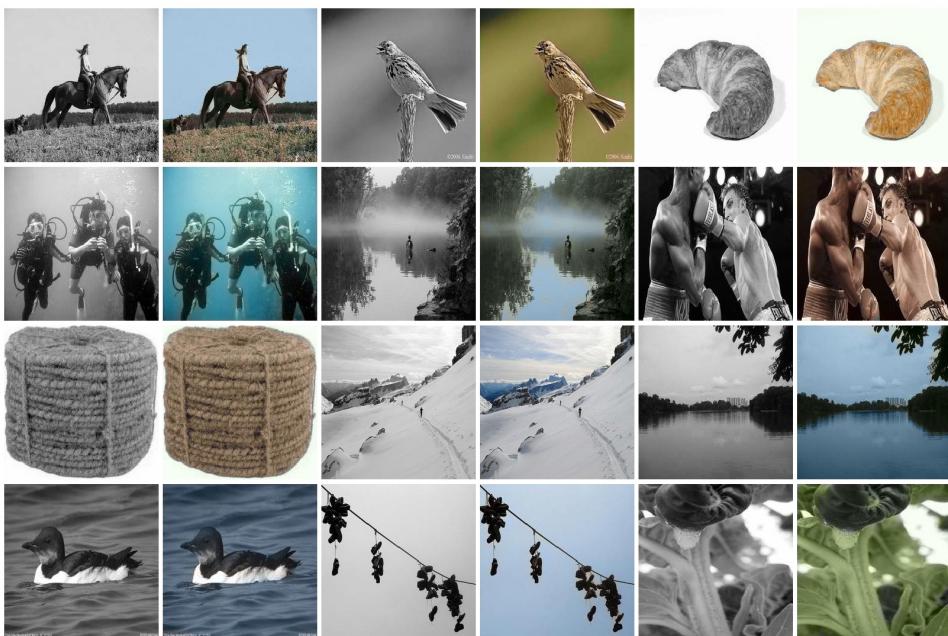


**Slika 1.1:** Pristop za vhod vzame črno-belo (sivinsko) sliko, preko nivojev nevronske mreže določi barvne komponente in na izhodu vrne obarvano sliko.

Ta problem rešujejo algoritmi za barvanje črno-belih slik. Ti dobijo kot vhod črno-belo sliko, ki ji dodajo barvo, kot je prikazano na sliki 1.1. Pristopi

za barvanje črno-belih slik se uporabljo na več področjih: barvanje starih slik, barvanje črno-belih filmov in v pomoč pri umetnosti. V preteklosti so bili pristopi za barvanje slik pol-avtomatski, danes pa jih zamenjuje pristopi, ki obarvajo sliko popolnoma samostojno. Zadnje raziskujemo tudi v tem magistrskem delu.

Za človeka je barvanje črno-belih slik, ki so prikazane na sliki 1.2, enostavna naloga. Z vsakdanjim opazovanjem sveta se je človek naučil, da je nebo modro z belimi oblaki, drevesa so zelena in cesta je siva. Za objekte, ki nimajo enolično določene barve ljudje lahko ugibamo kakšne barve naj bi predmet bil. Pri tem opravilu je potrebno veliko razumevanja, saj iz sivinskih slik ni možno direktno razbrati barv, namreč pri nastanku sivinske slike se veliko informacij izgubi (dve od treh dimenzij).



**Slika 1.2:** Primeri barvanja črno-belih slik. Barvanje je bilo izvedeno s pristopi, ki so bili razviti v okviru te magistrske naloge. Za vsako sliko je prikazana črno-bela slika, ki je bila vhod v algoritem in obarvana slika - izhod algoritma.

Problem postane bolj kompleksen, ko ga želimo rešiti na avtomatski način z računalnikom. Pri tem nam je v pomoč dejstvo, da je možno iz tekstur objektov te prepoznati in jim na ta način določiti njihovo barvo. Pri objektih, ki nimajo enolično določeno barv (na primer avtomobili, stavbe in knjige) je izziv še mnogo težji. Pri tem nam delo olajša dejstvo, da ne želimo, da slika zgleda enaka originalni ampak, da ta zgleda kar se da naravno. Nihče ne bo vedel, da je avtomobil, ki smo ga pobarvali rumeno bil v resnici rdeče barve.

Za barvanje slik smo izbrali pristope, ki uporabljajo nevronske mreže. Te delujejo podobno, kot človeški možgani. Na začetku jih naučimo tako, da jim podamo čim več primerov barvanja slik. Kasneje nevronska mreža naučeno znanje uporabi, da obarva slike. Mreži podamo sivinsko sliko ( $L$  kanal barvnega prostora *CIE Lab*), ta pa vrne  $a$  in  $b$  kanal v istem barvnem prostoru. Za učenje modela potrebujemo veliko količino črno-belih slik z referenčno barvno sliko, kar je praktično zastonj na voljo na spletu. Za treniranje lahko vzamemo katerokoli sliko, jo pretvorimo v barvni prostor *CIE Lab*, kjer  $L$  kanal predstavlja sivinsko sliko.

V tej magistrski nalogi rešujemo problem barvanja črno-belih slik in videov z večimi različnimi pristopi. Za začetek smo implementirali več algoritmov za barvanje črno-belih slik. Rezultate smo med seboj primerjali s računanjem razlike med obarvano in originalno sliko. Rezultate smo primerjali tudi z tremi implementacijami iz sorodnih del. Ker pa obstaja veliko objektov, ki nimajo enolične barve (avtomobili, zgradbe, ...) in naš namen ni doseči enakega barvanja, vendar takega, ki da naravne rezultate, smo barvanje slik ocenjevali s pomočjo uporabnikov. V spletni anketi smo uporabnike spraševali katera slika je bolj naravno obarvana (originalna ali slika obarvana z algoritmom).

Kasneje smo se odločili poskusiti tudi barvanja vida. Za barvanje smo arhitekturo nevronske mreže, ki je najbolje delovala na slikah prilagodili še za video.

Na začetku si bom v pregledu področja pogledali sorodna dela za barvanje slik, nekaj ozadja o podatkih in globokih nevronskih mrežah. V poglavju 3 so

podrobno opisan arhitekture nevronskeih mrež in različni pristopi. Opisano je učenje nevronskeih mrež, podatki in način evalvacije. V poglavju 4 smo primerjali metode razvite za namen tega magistrskega del z metodami iz sorodnih del, si pogledali kateri pristopi in slike najbolj izstopajo. Pogledali smo si tudi kateri pristop deluje najbolje na slikah večjih velikosti.

# Poglavlje 2

## Pregled Področja

V tem poglavju si bomo pogledali obstoječe pristope za barvanje črno-belih slik, si pogledali področje globokih nevronskih mrež ter nekaj o predstavitvi slikovnih podatkov in barvnih prostorih.

### 2.1 Obstojče metode za barvanje črno-belih slik

Pristope za barvanje črno-belih slik delimo v dve večji skupini. Prva zahteva interakcijo uporabnika in se je več uporabljala predhodno, pri drugi pa barvanje poteka popolnoma avtomatsko.

#### 2.1.1 Pristopi, ki zahtevajo interakcijo uporabnika

To skupino pristopov delimo na tehnike, ki temeljijo na uporabnikovem barvanju manjših delov slik (ang. *scribble based*) [?, ?] in tiste, ki temeljijo na primerih (ang. *example based*) [14, ?, ?]. Pri prvih uporabnik določi barvo nekaj točk v sliki, te pa algoritem avtomatsko razširi preko cele slike. Kvaliteta barvanja je odvisna od zahtevnosti slike in števila točk, ki jih je uporabnik označil. Pri barvanju na primerih uporabnik izbere referenčno sliko, ki je podobna tisti, ki jo želimo obarvati, algoritem nato lastnosti izbrane slike

razširi na drugo sliko ali množico slik. Kvaliteta barvanja je odvisna od tega v kolikšni meri je referenčna slika podobna tisti, ki jo barvamo. Tehnika barvanja s primeri se uporablja za barvanje videov, saj je v tem primeru potrebno ročno pobarvati na primer vsako stoto sliko, na ostale pa algoritem sam razširi lastnosti ročno barvane slike.

### 2.1.2 Popolnoma avtomatski pristopi

V magistrskem delu se osredotočamo na avtomatske pristope barvanja. To so pristopi, ki samostojno, brez uporabnikovega posredovanja, obarvajo celotno sliko. Prvi dve metodi, ki sta bili predlagani na tem področju, temeljita na značilkah (ang. *features*) pridobljenih iz slike. Tukaj gre predvsem za značilke, ki opisujejo intenziteto posamezne barve in značilke, ki opisujejo robove v sliki. Prva metoda uporablja za barvanje nevronsko mrežo [15], ki pa vsebuje zgolj polnopovezane nivoje, druga pa za barvanje uporabi metodo naključnih gozdov (ang. *random forest*) [16].

Novejši pristopi barvanja črnobelih slik tipično temeljijo na konvolucijskih nevronskih mrežah, ki imajo to lastnost, da v vsakem nivoju same odkrijejo značilke, ki so pomembne za čim boljše barvanje. Prva tovrstna rešitev [17] gradi mrežo na podlagi že zgrajene šestnajst-nivojske mreže VGG-16, ki so jo razvili na univerzi v Oxfordu [18]. Rešitev uporablja evklidsko cenilno funkcijo in barvni prostor YUV. Slabost te rešitve je, da izhodne barvne slike niso dovolj nasičene in imajo v veliki meri prisotnih več rjavih odtenkov.

V zadnjem času predlagane rešitve popravijo problem nenasichenosti z uporabo softmax funkcije v zadnjem nivoju nevronске mreže, kar pomeni, da so problem spremenili iz regresijskega v klasifikacijskega. Zang in sod. [?] uporabijo konvolucijsko nevronsko mrežo z več nivoji in aktivacijskimi funkcijami ReLU. Posebnost te mreže je cenilna funkcija. Uporablja križno entropijo, ki pa je v tem primeru izvedena na primerjavi barv posameznih delov slike glede na barvni prostor, ki je kvantiziran. Napake so pomnožene z utežjo, ki določa pogostost barve. Bolj redke barve so obtežene tako, da prispevajo večji delež k napaki, ki jo izračuna cenilna funkcija. S tem so avtorji izboljšali

rezultate, tako da se bolj pogosto pojavljajo tudi močnejši odtenki (tisti z višjimi vrednostmi v prostoru  $a^*b^*$ , ki so bili prej redkeje zastopani zaradi bolj pogostega pojavljanja nežnejših barv v slikah (barve bližje vrednostim  $(0, 0)$  v  $a^*b^*$  prostoru. Pogostost je bila izračunana z analizo vseh slik v podatkovni zbirkki Imagenet [19]. Uporabljajo barvni prostor  $L^*a^*b$ .

Larsson in sod. [?] za osnovo uporabijo mrežo VGG-16, iz katere vzamejo tenzorje vsakega nivoja, ki jim povečajo prostorsko dimenzijo, tako da se ujemajo in združijo v enotno matriko. Sledi še en polno-povezan nivo na nivoju točk v sliki. Rezultat klasifikacije je histogram za vsako točko v sliki (histogram z verjetnostmi). Uporabljajo barvni prostor HSV, ki ga prilagodijo zaradi nestabilnosti v eni od točk. Cenilna funkcija, ki jo uporabljajo je KL-divergenca, ki primerja izhodni histogram z v histogram pretvorjeno originalno sliko.

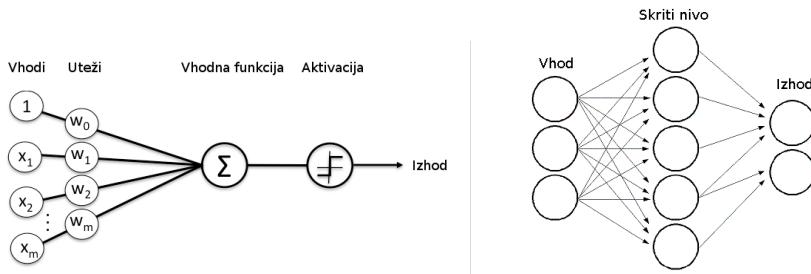
Iizuka in sod. [3] uporabijo nevronske mreže sestavljeno iz dveh delov. Prvi del poskrbi za napovedovanje vsebine slike, ki se potem združi z glavnim delom in izboljša natančnost barvanja. Uporabili so križno entropijo (ang. *cross entropy*) v kombinaciji s cenilno funkcijo *povprečna kvadratna napaka* (ang. *Mean squared error*) in barvni prostor  $L^*a^*b$ . Za razliko od prejšnjih dveh metod zadnja ne napoveduje histograma na podlagi kvantiziranega prostora ampak direktno  $a^*$  in  $b^*$  vrednost, kar pomeni, da ne uporablja klasifikacije ampak regresijo.

## 2.2 Globoke nevronske mreže

Globoke nevronske mreže so algoritmi, ki so zgrajeni na podlagi opazovanja strukture možganov. Uporabljajo se za klasifikacijo, regresijo, gručenje in napovedovalno analizo. Predvsem se uporabljajo na področju slik, kjer je zelo pomembno prepoznavanje objektov in obrazov, razvrščanje slik v skupine glede na podobnost, prepoznavanje gest in barvanje slik [20].

Nevronska mreža je v osnovi funkcija  $f(x)$ , ki preslika vhod  $x$  v izhod  $y$ . Med postopkom učenja je ta funkcija optimizirana tako, da najde najboljšo

aproksimacijo realnih podatkov [20]. Nevronske mreže so struktura, ki je sestavljena iz več nivojev. Nivoje si lahko predstavljamo kot vrsto vozlišč, ki se odzovejo v primeru da je vzburenje na njih zadovoljivo - odvisno od aktivacijske funkcije. Struktura vozlišča in nivojev je predstavljena na sliki 2.1. Vozlišče pomnoži vsak vhod s trenutnimi vrednostmi uteži doda še bias, vrednosti sešteje in moč aktivacije izračuna s pomočjo tako imenovane aktivacijske funkcije, ki tvori izhod vozlišča. Aktivacijski funkciji rečemo tudi neliearnot, saj poskrbi za to, da nevronska mreža ni le linearne funkcija [?]. Uteži se skozi postopek učenja spreminja in s tem določijo aktivacijo vozlišča.



**Slika 2.1:** Leva slika prikazuje zgradbo enega vozlišča, ki ima zasnovno podobno nevronom v možganih. Vhod je lahko izhod prejšnjega nivoja ali vhodni podatki v mrežo, ki se potem pomnožijo z utežmi in seštejejo. Aktivacija poskrbi, da se vozlišče odzove, ko je vzburenje dovolj veliko. Desna slika prikazuje zgradbo več nivojske nevronske mreže, ki ima vhodni nivo in skriti nivo in izhodni nivo. Iz: Introduction to Deep Neural Networks url`https://deeplearning4j.org/neuralnet-overview` in Neural Networks, url`http://docs.opencv.org/2.4/modules/ml/doc/neural_networks.html` (dostopano: 21. junij 2017).

Nivojem v nevronske mrežah, ki se nahajajo med vhodnim in izhodnim nivojem rečemo *skriti nivoji* (angl. *hidden layers*) [?]. Tradicionalni algoritmi na področju strojnega učenja so sestavljeni iz vhodnega, izhodnega nivoja in enega skritega nivoja, *globoka nevronska mreža* (ang. *deep neural network*) pa ima vsaj dva skrita nivoja [?], večinoma pa mnogo več. Vsak

nivo globoke nevronske mreže prepozna določen lastnosti vhodnih podatkov. Nivoji, ki se nahajajo globje lahko prepozna bolj kompleksne lastnosti podatkov, saj na vhodu, dobijo lastnosti oziroma aktivacije nivoja pred njim.

Da nevronska mreža daje zadovoljive rezultate je potrebno utežem določiti prave vrednosti. To naredimo s postopkom učenja. Vsaka nevronska mreža ima cenilno funkcijo (ang. loss function), ki pove kako dobre rezultate na testnih podatkih nevronska mreža daje trenutno. V postopku učenja zmanjšujemo vrednost cenilne funkcije z enim od algoritmov optimizacije.

### 2.2.1 Konvolucijske nevronske mreže

Ker bi bilo na primeru slik pri uporabi klasičnih nevronskih mrež hitro preveč parametrov, kar bi poleg podaljšanja časa učenja povzročilo tudi prekomerno prilagajanje (ang. overfitting) in pomanjkanje pomnilnika, uporabljamo za take primere konvolucijske nevronske mreže. Te so zelo podobne običajnim nevronskim mrežam. Sestavljeni so iz nevronov, ki imajo svoje uteži in bias, ki so učljivi. Operacije znotraj nevrona so podobne tistim pri običajnih nevronskih mrežah, le da so prilagojene pričakovanim vhodnim podatkom - slikam. Vhod v vsak nivo nevronske mreže je torej tenzor z obliko  $\text{širina} \times \text{višina} \times \text{globina}$  [21]. Konvolucijske nevronske mreže so v osnovi sestavljene iz treh vrst nivojev:

- **Konvolucijski nivo** je glavni gradnik konvolucijske nevronske mreže. Parametri tega nivoja so sestavljeni iz majhnih konvolucijskih jeder, ki pokrivajo majhno polje v širino in višino obenem pa pokrivajo celotni nivo v globino. Med prehodom po nevronski mreži izvedemo konvolucijo po celotni višini in širi vhodnega tenzorja, po globini pa se te izhode teh konvolucij sešteje enako kot pri običajni nevronski mreži. Izhod konvolucije z enim setom jeder je dvodimensionalna matrika. [?]
- **Pooling nivo** je namenjen pod-vzorčenju (ang. downsampling) na določenem nivoju. S tem zmanjšamo število parametrov, kar vpliva zmanjšanje računske zahtevnosti in prekomernega prilagajanja. Deluje

na principu, da je točna lokacija značilke manj pomembna kot približna lokacija glede na ostale značilke. [22]

- **Polno povezni nivo** je nivo enak skritim nivojem pri klasični nevronski mreži. Večinoma se uporabi se za zadnjih nekaj nivojev pri konvolucijski nevronski mreži, če je to primerno za dano nalogu.

## 2.3 Predstavitev slikovnih podatkov in barvni prostori

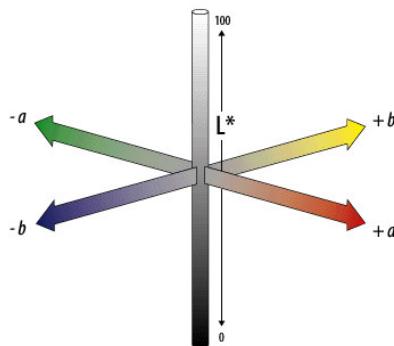
Slike, ki jih uporabljamo za učenje so shranjene v *RGB* [2] barvnem prostoru. Kot je pokazano v [3] se izkaže, da prostor RGB ni direktno primeren za učenje algoritmov za barvanje iz dveh razlogov:

- **Sistem se ne ujema dobro s človeško percepcijo barv**, saj so razdalje med enako sorodnimi barvami različne glede na odtenek [4]. Na primer, če imamo dva para barv: rdečo in svetlo rdečo, ter modro in svetlo modro, pri čemer sta barvi v vsakem paru za človekov vizualni sistem enako različni, sta razdalji v RGB barvnem prostoru različni .
- **Nima ločenega kanala za svetlost** [2]. Glede na to, da modeli za barvanje napovedujejo le barvne elemente v sliki, svetlost pa se vzame iz originalne slike, je najbolj priročno, če uporabljamo barvni prostor, ki ima ločen kanal za svetlost, saj je izhod metode kar združena komponenta za svetlost z barvnimi komponentami.

### 2.3.1 Izbira primerenega barvnega prostora

Na podlagi teh predpostavk je izbira prostorov omejena na *Lab* [5], *YUV* [6] in *HSL* [2]. Vsi ustrezajo drugi predpostavki iz 2.3. Edini, ki zares ustreza prvi predpostavki je *Lab*. Iz ugotovitev iz sorodnih del [3, 7, 8] se tudi najbolje izkaže prostor *CIE L\*a\*b*.

Obstaja več implementacij barvnega prostora *Lab*, ki vse težijo k dobri aproksimaciji človeškega zaznavnega sistema. Trenutno se najbolj uporablja *CIE L\*a\*b\**, ki naj bi bil najboljša aproksimacija človeškega vizualnega sistema [4]. Prostor ima tudi to prednost, da je neodvisen od naprave. Prostor *CIE L\*a\*b\** predstavi vse barve, ki jih je možno zaznati z tremi barvnimi kanali.  $L^*$  predstavlja svetlost,  $a^*$  se razširja od zelene proti rdeči barvi in  $b^*$  od modre proti rumeni. Prostor je grafično prikazan na sliki ??  $L^*$  ser razteza od 0, ki predstavlja črno barvo, do 100, ki predstavlja belo barvo [9].  $a^*$  in  $b^*$  komponenti nimata uradne omejitve, vendar sta v implementacijah ponavadi omejene na vrednosti v intervalu  $[-128, 127]$ , kar je možno predstaviti z 8 bitnim celim številom [10]. Ker zaradi pretvorb iz barvnega prostora *RGB* vrednosti višje od 100 ali nižje  $-100$  redko dosežemo smo opazili, da nekatere implementacije omejijo barvne komponente na interval  $[-100, 100]$ . Za pomoč pri implementaciji nevronske mreže smo sami preizkusili kakšen je dejanski interval barv pretvorjenih iz *RGB* barvnega prostora. Intervale si lahko pogledate v tabeli 2.1.



**Slika 2.2:** Slika prikazuje kanale barvnega prostora CIE  $L^*a^*b^*$ .  $L^*$  predstavlja svetlost,  $a^*$  se razteza od zelene barve v najbolj negativni točki proti rdeči barvi,  $b^*$  se razteza od modre proti rumeni. Nasprotnoče barve na kanalih  $a^*$  in  $b^*$  se nikoli ne kombinirajo v odtenek. Iz: Adobe, Technical Guid, CIELAB, [http://dba.med.sc.edu/price/irf/Adobe\\_tg/models/cielab.html](http://dba.med.sc.edu/price/irf/Adobe_tg/models/cielab.html) (dostopano: 24. junij 2017)

**Tabela 2.1:** Njavečje in njemanjše vrednosti posamezne komponente CIE  $L^*a^*b^*$  barvnega prostora, pri pretvorbi barv iz barvnega prostora RGB. Pretvorba je bila narejena z uporabo osvetlitve  $D65$ , ki določa temperaturo bele točke. Izkaže se, da je večina vrednosti komponent  $a^*b^*$  znotraj intervala  $[-100, 100]$ .

Kanal	Najmanjša vrednost	Največja vrednost
$L^*$	0	100
$a^*$	-86,185	98,254
$b^*$	-107,863	94,482

### 2.3.2 Pretvarjanje med RGB in CIE $L^*a^*b^*$ barvnim prostorom

Za pretvorbo med prostoroma ni enostavne enačbe, saj je  $RGB$  barvni prostor odvisen od naprav,  $CIE L^*a^*b^*$  pa je neodvisen. Tako se pretvorba zgodi v treh korakih [11]:

1. **Pretvorba iz RGB v sRGB ali Adobe RGB**, saj sta ta barvna prostora neodvisna od naprave. Ta pretvorba je odvisna od naprave. Slike, ki jih bomo uporabili v našem delu so že v  $sRGB$  obliki, saj so bile pretvorjene, ko so bile zajete z fotoaparatom.
2. **Pretvorba v CIE 1931 barvni prostor** ali drugače imenovan  $CIE XYZ$  barni prostor. Ta pretvorba se izvede s pomočjo linearne pretvorbe z matriko. Matrika je odvisna od izibire referenčne bele barve. Običajno se izbere referenčno temperaturo belo točke  $D65$ , ki je tudi standardizirana<sup>1</sup>[12].

---

<sup>1</sup>Zapis na uradni strani komisije International Commision on Illumination (krajše CIE), ki je postavila standard pravi, da se kot standardno uporablja referenčno temperaturo bele točke D65: [http://cie.co.at/index.php?i\\_ca\\_id=484](http://cie.co.at/index.php?i_ca_id=484)

3. Pretvorba iz CIE XYZ v L\*a\*b\* se izvede po enačbah opisanih v [13].



# Poglavlje 3

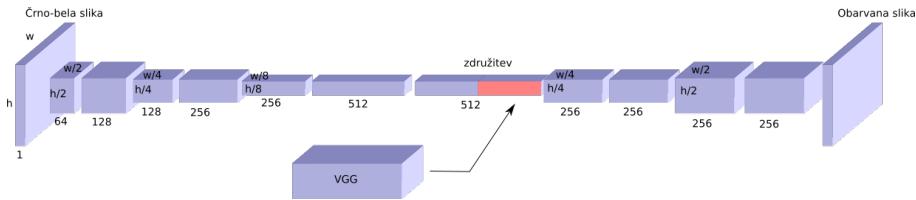
## Barvanje črno-belih slik z globokimi nevronskimi mrežami

### 3.1 Arhitekture

V grobem smo v okviru magistrske naloge implementirali 4 arhitekture nevronskih mrež, kasneje smo te arhitekture kombinirali z različnimi cenilnimi funkcijami, pristopi (regresijski ali klasifikacijski) in načini napovedovanja (napovedovanje po delih ali na celi sliki).

#### 3.1.1 Plitva arhitektura z globalno mrežo

Ta arhitektura je sestavljena iz dveh delov, ki se kasneje združita v enotno mrežo. Glavni del predstavlja zaporedje konvolucijskih nivojev, ki na vhodu vzamejo sivinsko sliko, izhod pa je obarvana slika. Po osmih kovolucijskih nivojih se mreža združi z tako imenovano globalno mrežo, ki napoveduje objekt, ki ga slika predstavlja. Za globalno mrežo smo vzeli že naučeno mrežo VGG-16 [18], ki smo ji odvzeli zadnji polno-povezani nivo in ji dodali nov polno-povezani nivo z izhodnim tenzorjem dolžine 256. Ker je ta mreža namenjena sprejemu barvnih RGB slik smo vhod prilagodili tako, da sprejme sivinsko sliko na vseh treh kanalih. Arhitektura nevronske mreže je predstavljena na sliki 3.1 in v tabeli B.1 v prilogi.



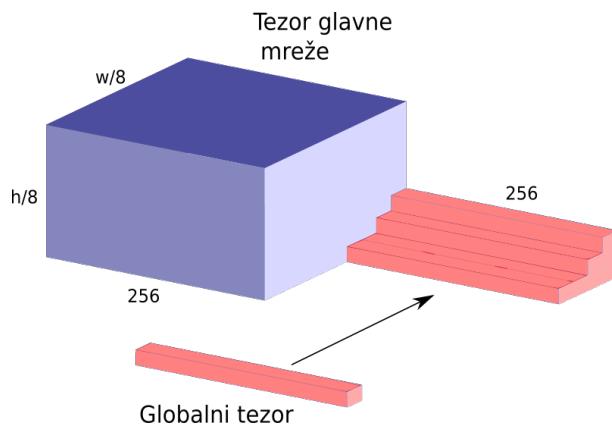
**Slika 3.1:** Slika prikazuje velikosti tenzorjev skozi plitvo arhitekturo z globalno nevronsko mrežo.  $w$  in  $h$  predstavljata širino in višino vhodne slike. Podrobnosti nivoja združitev so predstavljene na sliki 3.2, nivo izhodne slike ni natančneje označen, saj se razlikuje v različnih implementacijah, ki bodo podrobnejše opisane v poglavju ??.

Na tem mestu bi bilo smiselno opisati še kako poteka združevanje dveh mrež. Vhod v element za združevanje sta tenzorja velikosti  $w/8 \times h/8 \times 256$  iz glavne mreže in enodimensionalni tenzor velikosti 256 iz globalne mreže. Pri tem  $w$  in  $h$  predstavljata širino in višino vhodne slike v mrežo. Pri združevanju vsakemu elementu širine in višine prvega tenzorja pridružimo tenzor globalne mreže, kot prikazuje slika 3.2. Tako na izhodu dobimo tenzor velikosti  $\frac{w}{8} \times \frac{h}{8} \times 512$ .

### 3.1.2 Globja arhitektura z globalno mrežo

Ta arhitektura ima v osnovi enako zasnovo, kot v poglavju 3.1.1 opisana arhitektura. Razlika se pojavi pri globini glavne mreže. Ta ima namreč mnogo več nivojev kot lahko vidite na sliki 3.3 in tabeli B.2 v prilogi. Za razliko od arhitekture opisane v poglavju 3.1.1 ta za zmanjševanje prostorskih (ang. *spatial*) dimenzij uporablja maksimalno združevanje (ang. *max pooling*) in za povečevanje le teh v zadnjih nivojih uporablja transponirano konvolucijo (ang. *transpose convolution*) [23]. Združevanja glavne in globalne mreže se izvede na način opisan v poglavju 3.1.1.

Ta arhitektura prinaša še eno spremembo. To so tako imenovane rezidualne povezave, ki so bile prvič uporabljeni v nevronski mreži ResNet [24], ki je leta 2015 zmagala na tekmovanju ImageNet [19]. Te povezave so na sliki



**Slika 3.2:** Prikaz delovanje nivoja združevanja glavne nevronske mreže z globalno nevronske mrežo. K izhodu glavne nevronske mreže dodamo tenzor iz globalne mreže, tako da ga priključimo k vsem prostorskim lokacijam kot dodatnih 256 kanalov.

3.3 označene s puščicami nad nevronske mreže in predstavljajo povezavo, ki na mestu kamor kaže puščica, združi trenutni tenzor z tenzorjem izračunanim pred dvema nivojema. Operacija združevanja je seštevanje.

### 3.1.3 Globja arhitektura brez globalne mreže

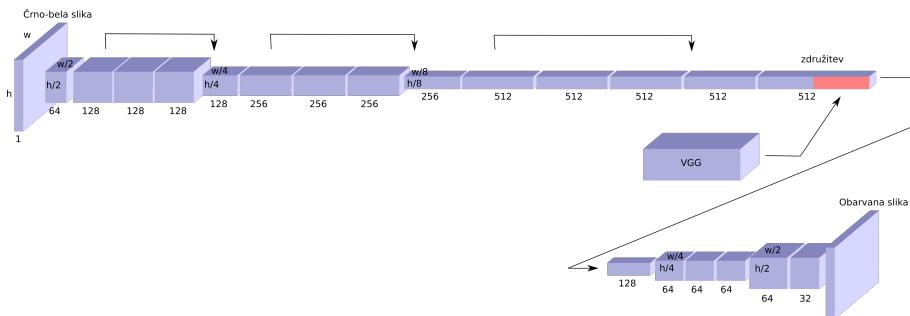
Ta arhitektura je enaka tisti opisani v poglavju in prikazani na sliki 3.3 v glavnem delu in se razlikuje po tem, da nima globalne mreže. Torej nima mreže, ki se pridruži v nivoju združitve, zaradi tega smo tudi ta nivo izpustili. Mreža za vhod vzame črno-belo sliko z enim kanalom in izračuna barvno sliko na izhodu. Ta arhitektura je bila načrtovana z namenom, da se preveri če ima globalna mreža prisotna v arhitekturah predstavljenih v poglavjih 3.1.2 in 3.1.1 kakšen vpliv na rezultate.

### 3.1.4 Dopolnjena VGG-16 arhitektura

Arhitektura je zgrajena tako, da za vrh mreže uporabimo mrežo VGG-16 [18], kateri smo odstranili vse polno povezane nivoje. Arhitektura je narejena

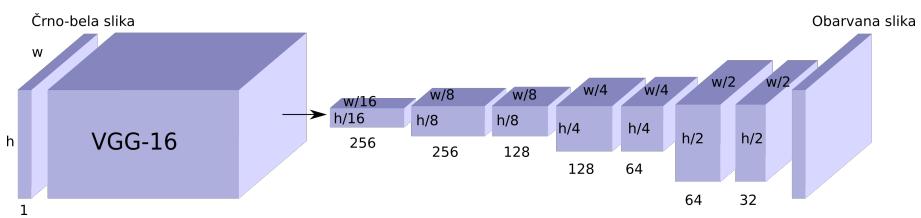
**POGLAVJE 3. BARVANJE ČRNO-BELIH SLIK Z GLOBOKIMI NEVRONSKIMI MREŽAMI**

---



**Slika 3.3:** Slika prikazuje velikosti tenzorjev skozi globjo arhitekturo z globalno nevronsko mrežo.  $w$  in  $h$  predstavljata širino in višino vhodne slike. Podrobnosti nivoja združitev so predstavljene na sliki 3.2, nivo izhodne slike ni natančneje označen, saj se razlikuje v različnih implementacijah, ki bodo podrobneje opisane v poglavju ??.

tako, da na vhodu sprejme črno-belo sliko, ki se potem prilagodi na vhod mreže VGG-16. Tenzor, ki ga vrne zadnji konvolucijski nivo omenjene mreže podam na vhod mreže, ki je prikazana na sliki 3.4 in podrobno opisana v tabeli B.3 v prilogi.

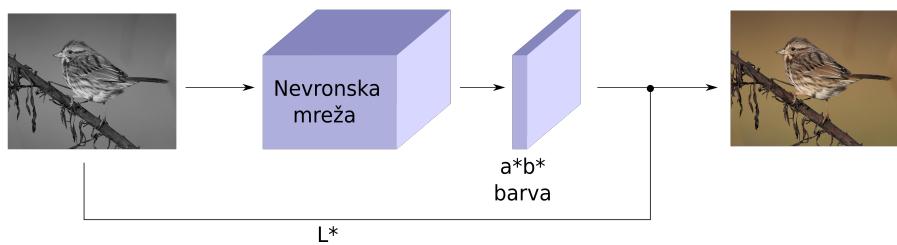


**Slika 3.4:** Slika prikazuje velikosti tenzorjev skozi dopolnjeno VGG-16 arhitekturo.  $w$  in  $h$  predstavljata širino in višino vhodne slike. Nivo izhodne slike ni natančneje označen, saj se razlikuje v različnih implementacijah, ki bodo podrobneje opisane v poglavju ??.

## 3.2 Pristopi z regresijo

V tem poglavju bomo prestavili regresijske metode, ki smo jih uporabili. Te se imenujejo tako, saj pri napovedovanju barve direktno napovejo vrednosti  $a^*$  in  $b^*$  barvne komponente v prostoru  $CIE L^*a^*b^*$ . Tu mreža predstavlja regresijsko funkcijo  $y = f(x)$  za vsako točko na slike, ki na vhod dobi točko sivinske slike  $x$ , izhod pa je kar vrednost  $y$ , ki predstavlja določeno barvo v našem primeru sta to dve vrednosti  $a^*$  in  $b^*$ .

Na sliki 3.5 je prikazan postopek delovanja, ki je skupen vsem regresijskim metodam opisanim v nadaljevanju. Da dobimo barvno sliko moramo izhod iz mreže, ki predstavlja barvne komponente združiti s sivinsko.



**Slika 3.5:** Shematski prikaz delovanja regresijske metode, ki na vhod prejme črno-belo sliko, s pomočjo nevronske mreže izračuna barvni komponenti  $a^*$  in  $b^*$  barvnega prostora  $CIE L^*a^*b^*$  ter to združi s sivinsko sliko  $L^*$ , da dobi obarvano sliko.

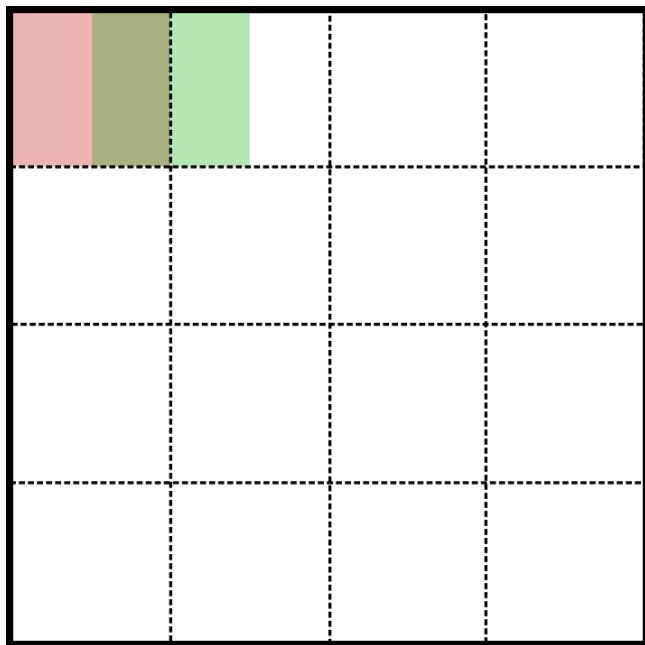
### 3.2.1 Pristopi na delih slik

V to skupino lahko uvrstimo tri metode, ki imajo skupno to, da smo barvanje izvajali na majhnih delih slik. Ta princip smo razvili z opazovanjem delovanja človeškega zaznavnega sistema, ki se bi lotil barvanja po delih, na sliki bi zaznal objekte ločeno barval. Na primer najprej vodo, nato gozd in kasneje še nebo.

Sliko smo preden smo jo podali nevronski mreži razdelili na koščke velikosti  $32 \times 32$ . Pri tem sta se sosednja koščka prekrivala za 16 slikovnih točk kot

je prikazano na sliki 3.6. V arhitekturah, kjer je bila prisotna ločena globalna mreža, je ta še vedno na vhodu prejela celotno sliko, s katero smo pridobili globalni koncept slike. Dele slik smo kasneje sestavili z metodo prekrivanja, tako da so imele vrednosti točk pri robu manjši vpliv kot tiste pri sredini. Vpliv barvne točke se je izračunal po enačbi 3.1, kjer  $x$  predstavlja vrednost slikovne točke,  $d$  predstavlja oddaljenost od središča v številu slikovnih točk. Enačba se ločeno uporablja v vertikalni in horizontalni smeri.

$$y = \frac{d}{16} * x \quad (3.1)$$



**Slika 3.6:** Shema prikazuje razdeljevanje slike velikosti  $128 \times 128$  slikovnih točk, ki jo v vsaki smeri razdelimo na 7 enakih delov velikosti 32. Rdeč in zelen kvadrat prikazujeta prva dva dela s konceptom prekrivanja. Enak sistem uporabimo v vertikalni smeri.

Z takim načinom dela pričakujemo pohitritev učenja, saj menimo, da je že del slike dovolj da se mreža nauči celotne tekture objekta. Na primer, da se naučimo barvati vodo ne potrebujemo celotnega območja vode na sliki,

ki včasih lahko prekriva tudi pol ali več slike, ampak le en del. Z učenjem mreže na manjših vhodnih tenzorjih, kar dosežemo z učenjem po delih, se čas, ki ga mreža porabi za učenje ene serije (ang. *batcha*) podatkov zmanjša.

V tabeli 3.1 so predstavljene podrobnosti vsake od metod barvanja po delih.

**Tabela 3.1:** Regresijski pristopi po delih, njihove arhitekture, ki so podrobneje opisane v poglavju 3.1 in cenilne funkcije uporabljene za učenje. *MSE* je povprečna kvadratna napaka (ang. *mean squared error*).

Ime metode	Arhitektura	Cenilna funkcija
Reg. po delih	Globja arh. z glob. mr.	MSE
- brez softmax	Globja arh. z glob. mr.	MSE
- brez globalne mreže	Globja arh. brez glob. mr.	MSE

### 3.2.2 Pristopi na celih slikah

Za primerjavo točnosti metod na delih slik s tistimi na celih slikah. Smo dve metodi opisane v poglavju 3.2.1 pretvorili v metode za barvanje na celih slikah. Tej smo dodali še eno metodo, saj zaradi večkratnega pomanjšanja prostorskih dimenzij znotraj arhitekture ne more biti realizirana na manjših delih slik.

V tabeli 3.2 so podrobno predstavljene lastnosti teh metod.

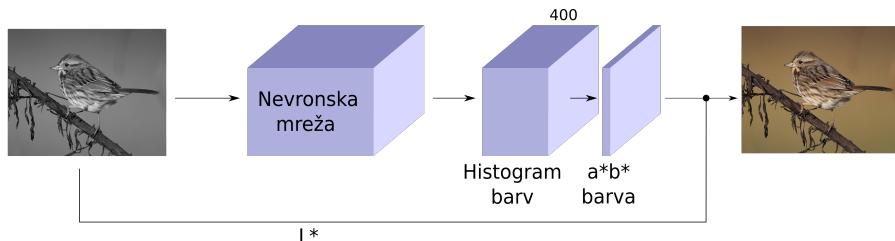
## 3.3 Pristopi s klasifikacijo

Razvili smo tudi štiri metode, ki namesto regresije uporablja klasifikacijo. To so pristopi, kjer direktno ne napovemo številčne vrednosti barve ampak to določimo s pomočjo klasifikacije v enega od razredov, ki predstavljajo nekaj sosednjih odtenkov v sliki. Klasifikacija se izvede z uporabo softmax

**Tabela 3.2:** Regresijski pristopi na celih slikah, njihove arhitekture, ki so podrobneje opisane v poglavju 3.1 in cenilne funkcije uporabljene za učenje. *MSE* je povprečna kvadratna napaka (ang. *mean squared error*).

Ime metode	Arhitektura	Cenilna funkcija
Reg. cela slika	Globja arh. z glob. mr.	MSE
- brez globalne mreže	Globja arh. brez glob. mr.	MSE
Reg. cela slika VGG	Dop. VGG-16 arh.	MSE

funkcije v zadnjem nivoju mreže. Izhodi teh mrež so verjetnosti za vsakega od razredov. Kot je prikazano na sliki 3.7 se te vrednosti pretvorijo v vrednosti  $a^*$  in  $b^*$ .



**Slika 3.7**

Razrede smo dobili tako, da barvni prostor *CIE L\*a\*b\** razdelimo v 400 razredov po komponentah  $a^*$  in  $b^*$ . Vsako od komponent smo razdelili v 20 razredov med vrednostima –100 do 100, kar pomeni da vsak razred zajema interval širine 10.

Za delovanje mreže moramo pretvoriti  $a^* b^*$  zapis v histogram in obratno. Pretvorba v iz zapisa  $a^* b^*$  v histogram je potrebna saj moramo pri učenju referenčno sliko (ang. *ground truth*) pretvoriti v histogram, da lahko izračunamo napako. To se izvedemo s enačbo 3.2, kjer  $a$  in  $b$  predstavljata

$a*$  ali  $b*$  vrednost slikovne točke,  $y$  pa indeks razreda v histogramu.

$$y = 20 \left\lfloor \frac{a + 100}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b + 100}{10} \right\rfloor \quad (3.2)$$

Pretvorba iz histograma v  $a*$  in  $b*$  se uporabi pri pretvorbi ocenjenih barvnih vrednosti s pomočjo mreže in se izvede po enačbah 3.3. Pri tem  $a$  in  $b$  predstavlja  $a*$  in  $b*$  barvne vrednosti slikovne točke,  $y$  predstavlja indeks razreda v histogramu, ki je bil napovedan z največjo verjetnostjo.

$$\begin{aligned} a &= 10 \left\lfloor \frac{y}{20} \right\rfloor - 100 + 5 \\ b &= 10(y \mod 20) - 100 + 5 \end{aligned}$$

Pristope s klasifikacijo smo preizkusili, ker so v delih [8, 7] ugotovili, da so rezultati teh metod, slike, ki so bolj nasičene in realnih barv. V tabeli 3.3.

**Tabela 3.3:** Klasifikacijski pristopi po delih, njihove arhitekture, ki so podrobneje opisane v poglavju 3.1 in cenilne funkcije uporabljene za učenje.  $KL$  – divergenca je Kullback-leibler divergenca [25],  $CCE$  predstavlja kategorično križno entropijo [26].

Ime metode	Arhitektura	Cenilna funkcija
Klas. brez uteži - plitva arh.	Plitva arh. z glob. mr.	KL-divergenca
Klas. brez uteži - globja arh.	Globja arh. z glob. mr.	CCE
Klas. z utežmi - plitva arh.	Plitva arh. z glob. mr.	CCE
Klas. z utežmi - globja arh.	Globja arh. z glob. mr.	CCE

## 3.4 Postopek učenja

V tem poglavju bomo predstavili podrobnosti učenja na manjši množici, na večji učni množici in si za konec še pogledali kakšne značilke prepozna posamezni nivo nevronske mreže.

### 3.4.1 Učenje na manjši učni množici

Za učenje na manjši množici smo izbrali vse metode opisane v poglavjih 3.2 in 3.3. Za primerjavo natančnosti smo dodatno še implementirali metode razvite s strani R. Dahl-a [17], Iizuka in sod. [3] in Zhang in sod. [?].

Za posodabljanje parametrov smo uporabili Adam optimizator [27]. Pri tem sta se za dobre izkazali naslednji parametri, ki so prikazani v tabeli 3.4. Pri vseh metodah smo uporabili velikost serije (ang. *batch size*) 32, razen pri treniranju metode Zhang in sod., kjer smo morali zaradi večjih dimenzij tenzorjev in posledično pomakanju spomina uporabiti velikost serije 8.

**Tabela 3.4:** Parametri, s katerim smo nastavili Adam optimizator.

Parameter	Vrednost parametra
stopnja učenja (ang. <i>learning rate</i> )	$10^{-4}$
beta 1	0.9
beta 2	0.99
epsilon	$10^{-8}$

Pri treniranju smo beležili vrednosti cenične funkcije tako na množici podatkov za treniranje in množici podatkov za validacijo po končanem vsakem prehod čez vse podatke (ang. *epoch*). S tem smo opazovali kdaj je določena metoda optimalno naučena. To se v našem primeru zgodi v trenutku, ko vrednost cenične funkcije na validacijski množici preneha padati ali celo začne naraščati. V tem trenutku je naša mreža optimalno naučena, zato smo te uteži uporabili za testiranje. Grafi padanja ceničnih funkcij za vse pristope so prikazani na sliki 3.8.

### 3.4.2 Učenje na večji učni množici

### 3.4.3 Pomen nivojev mreže

Konvolucijsko nevronsko mrežo si lahko predstavljamo, kot nivoje, ki poskrbijo za zajem značilk iz slike. V preteklosti so to počeli z različnimi pristopi kot so SIFT [?], HOG [?], SURF [?] in ostali. Nevronska mreža za to poskrbi, sama in izlušči tiste značilke, ki so za določeno nalogu relevantni. Uporabljene značilke lahko v grobem vidimo z vizualizacijo izhodov konvolucijskih nivojev.

V tem poglavju bomo pogledali, katere značilke nivoji zaznajo v ta namen smo izrisali izhode prvih šestih konvolucijskih nivojev nevronske mreže, ki so prikazani na sliki 3.9. Vsak nivo predstavlja več slik, ki so izhodi posameznih filtrov, število slik je odvisno od števila filtrov. Čeprav ima mreža več nivojev smo se odločili, da prikažemo le prvih šest saj so ti najbolj razumljivi. Za vizualizacijo smo si izbrali pristop *regresija celotna slika z globalno mrežo*, saj je ta najbolj primerna za to vizualizacijo.

Slike povejo na kaj se filtri v posameznem nivoju odzivajo oziroma kaj zaznajo. V prvem nivoju lahko opazimo, da se v večji meri osredotočajo na robove ali prehode med barvami v sliki. Opaziti je, da se nekateri odzovejo tudi na večji del slike in tako zgleda, kot da izhod kar osnovna slika. V drugem nivoju lahko opazimo že bolj osredotočene odzive. Nekateri še vedno zaznajo robove, drugi pa se že osredotočijo samo na določene dele slike na primer vodoravne robove. Nekateri zaznajo tudi že dele, ki se enako obarvajo na primer nebo v ozadju.

V tretjem in četrtem nivoju je te osredotočenosti na določeno del ali motiv še več. Nekatere značilke je že težko razumeti in opisati. Še vedno je veliko filtrov, ki zaznavajo robove in površine, ki bodo kasneje enako obarvani. To se še vedno nadaljuje tudi v petem in šestem nivoju, kjer je še več značilk, ki imajo pomen za nevronsko mrežo, težje pa so razložljive nam ljudem.

### **3.5 Barvanje večjih slik**

Večina pristopov v sorodnih delih je naučenih za barvanje slik velikosti  $224 \times 224$ . Večina pristopov ima to omejitev, da omogoča le barvanje slik te velikosti. Iizuak in sod. [3] omogočajo barvanje večjih slik, tako da večjo sliko podamo enaki mreži na vhod, ki nima omejitev v velikost, saj je sestavljena le iz konvolucijskih nivojev. Pri tem je komentar avtorjev, da mreža deluje bolje na slikah velikosti  $224 \times 224$ .

Z pristopih po delih, ki smo jih implementirali v okviru tega dela, ta problem rešujemo drugače. Sliko katerekoli velikosti večje od  $32 \times 32$  razdelimo na dele velikosti  $32 \times 32$  s prekrivanjem, jo obarvamo po delih in potem spet sestavimo po principu opisnem v poglavju 3.2.1.

Primerjavo kakovosti barvanja večjih slik smo izvedeli tako, da smo pristopa *Izuka in sod.* ter *regresijo po delih z globalno mrežo* preizkusili na istih slikah pomanjšanih na velikost  $224 \times 224$  slikovnih točk, kjer naj bi bilo barvanje optimalno in velikost  $896 \times 896$ . Primerjava je izvedena na mrežah naučenih na manjši učni množici s 100000 slikami.

### **3.6 Podatki**

Podatke, ki smo jih uporabili v za treniranje in validacijo pristopov smo pridobili iz podatkovne zbirke ImageNet [19], ki vsebuje približno 14 milijonov slik. Iz zbirke smo naključno izbrali množico podatkov jih za namen učenja pretvorili v *CIE L\*a\*b\** barvni prostor. Pri preizkusu na manjši množici smo za učenje naključno izbrali 100000 slik za vladacijo pa 10000 slik iz nabora. Validacijska množica je bila obenem tudi testna množica.

Za namen testiranja barvanja večjih slik opisanega v poglavju 3.5 podatki iz podatkovne zbirke *Imagenet* niso bili zadovoljivi, saj so slike večinoma velikosti manjših od  $500 \times 500$  slikovnih točk. Odločili smo se, da testiranje izvedemo na lastnih slikah, ki večje od velikosti  $896 \times 896$ , kar pomeni, da slik ni potrebno povečevati in s tem povzročati dodatnih napak v barvanju zaradi slabe kvalitete slik. Za namen testiranja smo vzeli 584 slik, katere

je aplikacija *Google Photos*<sup>1</sup> ocenila, da gre za slike pohodništva. Za te slike pohodništva smo se odločili, ker gre večinoma za slike narave, kjer je barvanje ponavadi najboljše in lahko tako razliko opazujemo na slikah, ki se po navadi barvajo dobro.

## 3.7 Računanje napake

Za primerjavo metod smo napake računali na validacijski množici. Pri tem smo uporabili dve metrike: kvadratni koren povprečne napake (ang. *Root mean squared error*) in razmerje med signalom in šumom (ang. *Peak signal-to-noise ratio*).

Kvadratni koren povprečne napake (RMSE) za vsako sliko smo izračunali s pomočjo enačbe 3.3, kjer  $w$  in  $h$  predstavlja širino in višino slike ter  $c$  predstavlja število kanalov slike.  $d$  je originalna slika (ang. *ground truth*) in  $\hat{d}$  obarvana slika. Napaka je bila izračunana za vsako sliko posebej in kasneje povprečena preko vseh slik. Napaka RMSE je bila izračunana na slikah v CIE L\*a\*b\* barvnem prostoru le za  $a^*$  in  $b^*$  barvni kanal, saj za  $L^*$  barvni kanal izračun napake ni smiseln, ker so vrednosti vzete iz originalne slike.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^w \sum_{j=1}^h \sum_{k=1}^c (d_{i,j,k} - \hat{d}_{i,j,k})^2} \quad (3.3)$$

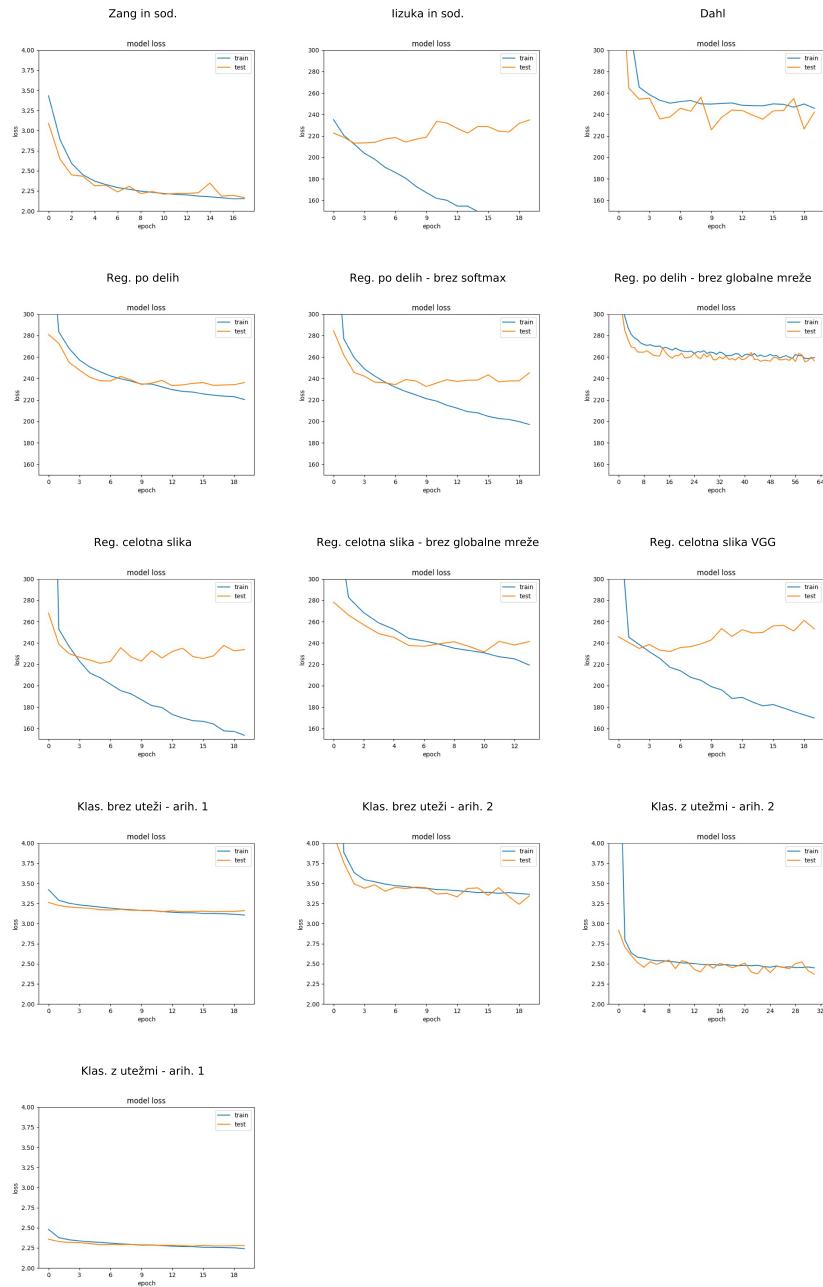
Razmerje med signalom in šumom (PSNR) je metrika, ki kaže razmerje med največjo možno močjo signala in močjo šuma, ki signal pokvari. Primerna je za primerjave rekonstruiranih podatkov, kot so v našem primeru validacijske slike, ki jih poskušamo rekonstruirati s pomočjo nevronske mreže. Vrednosti razmerja med signalom in šumom se merijo v enoti decibel (dB) [28]. Zadovoljive vrednosti rekonstrukcije slike 8 bitnih podatkov, kar naši podatki so, saj smo primerjali slike v barvnem prostoru *RGB*, je med 30 in 50 dB [29].

---

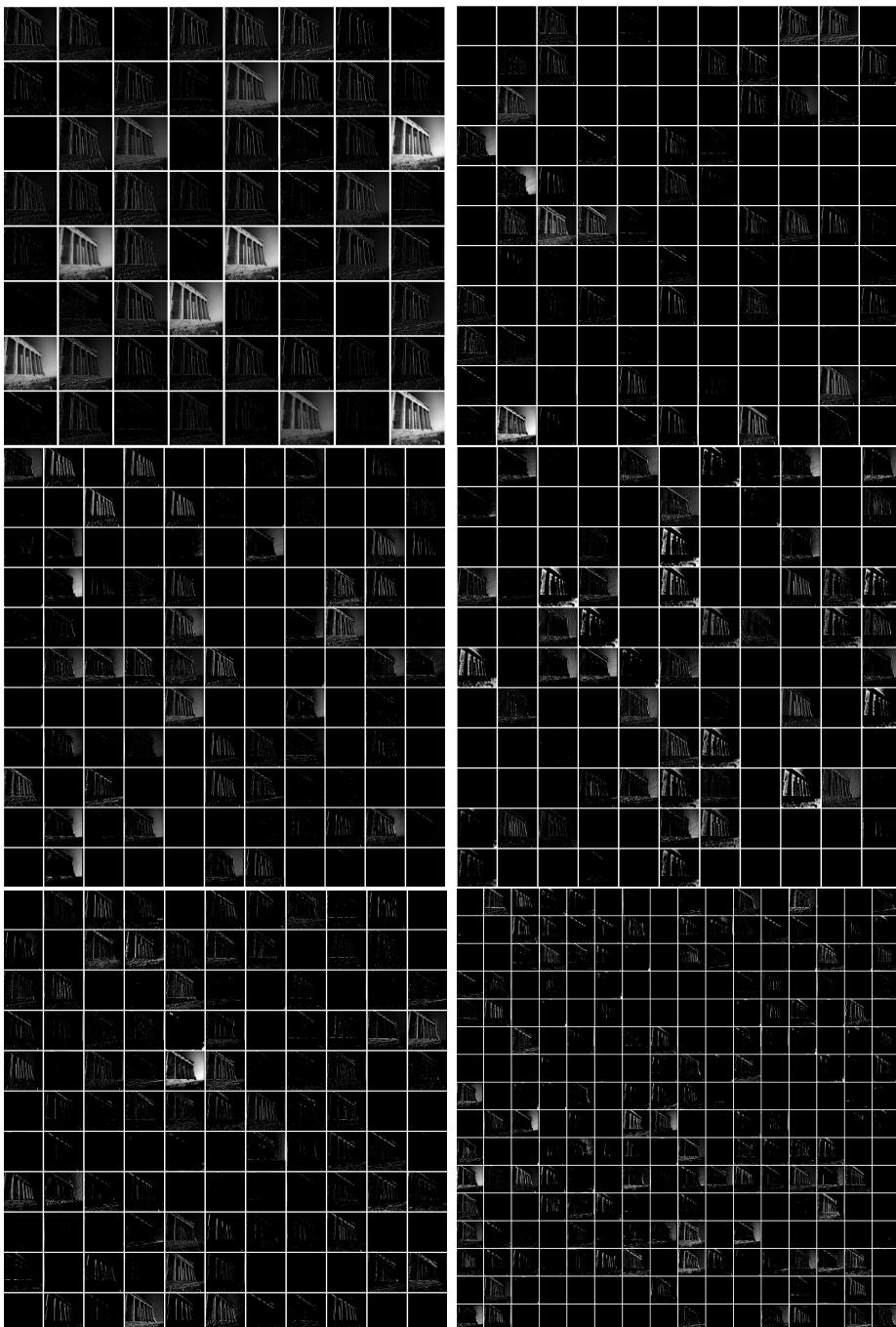
<sup>1</sup><http://photos.google.com>

Napako PSNR smo izračunali z enačbo 3.4, v kateri ima  $MAX_I$  največjo možno vrednost slikovne točke, kar je v barvnem prostoru RGB 255,  $RMSE$  pa je napaka izračuana z enačbo 3.3. Napako smo povprečili preko vseh slik v testni množici.

$$PSNR = 20 \log_{10} \left( \frac{MAX_I}{RMSE} \right) \quad (3.4)$$



**Slika 3.8:** Prikaz padanja napake modela pri učenju. Za vsak prehod preko vseh podatkov (ang. *epoch*) je prikazana vrednost celine funkcije na množici za treniranje in testni množici.



**Slika 3.9:** Vizualizacija izhodov prvih 6 konvolucijskih nivojev nevronske mreže na primeru slike Atenske akropole. Slika prikazuje kaj v sliki zaznajo posamezni nivoji in posamezni filtri.

# Poglavlje 4

## Rezultati in diskusija

ž

### 4.1 Primerjava metod na manjši učni množici

Tabela 4.1 prikazuje natančnost pristopov na testni množici slik. Izkaže se, da se na manjši množici najbolje obnese pristop Iizuka in sod., ki je glede na napako RMSE za 0.066 boljši od našega pristopa z regresijo na celih slikah. Ostali pristopi razviti s strani drugih avtorjev se na tej množici obnesejo slabše od večine naših pristopov.

Izkazalo se je tudi, da se na tej množici regresijski pristopi obnesejo bolje kot pristopi s klasifikacijo. Pristopa regresija po delih se z klasifikacijo brez uteži z globoko, ki ima enako arhitekturo, glede na RMSE razlikuje skoraj za 2. Med pristopi z regresijo je opaziti boljše rezultate pri mrežah, ki barvajo celotno sliko na enkrat. Opazimo lahko tudi, da globalna mreža prinese izboljšave glede na RMSE od nekje 0.3 do 0.4. Pri klasifikacijskih pristopih se je izkazalo, da plitva arhitektura deluje bolje pri tej učni množici.

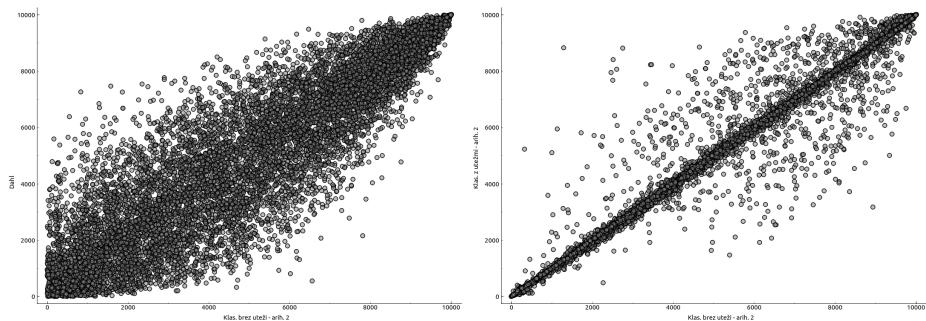
Za vsako metodo smo napake za slike iz testne zbirke spremenili v range, ki glede na natančnost na določeni sliki. Izkaže se, da rangi med metodami močno korelirajo, kar pomeni da je natančnost barvanja slike v veliki meri odvisna od motiva na sliki. Korelacijo med pristopi je možno videti na sliki 4.1.

**Tabela 4.1:** Napake izračunane na testni podatkovni zbirki.

Metoda	RMSE	PSNR
Zhang in sod.	15.004	22.252
Iizuka in sod.	12.941	23.439
Dahl	13.936	22.551
Reg. po delih	13.216	23.199
- brez softmax	13.206	23.183
- brez globalne mreže	13.767	22.840
Reg. celotna slika	13.007	23.434
- brez globalne mreže	13.334	23.068
Reg. celotna slika VGG	13.387	23.131
Klas. brez uteži - plitva arh.	14.336	22.738
Klas. brez uteži - globoka arh.	15.086	22.380
Klas. z utežmi - plitva arh.	14.573	22.610
Klas. z utežmi - globoka arh.	15.137	22.395

Na slik je prikazan graf, ki prikazuje odvisnost rangov med prvim pristopom na osi  $X$  in drugim pristopom na osi  $Y$ . Izkaže se, da je korelacijo v veliki meri prisotna pri vseh metodah, je pa različna glede na primerjane metode. Metodi na desni sliki, ki sta si bolj podobni glede na arhitekturo in način barvanja imata zelo veliko korelacijo, ki je skoraj linearna funkcija. Metodi na levi sliki, ki sta si na način napovedovanja bolj različni, ena je regresijska in druga klasifikacijska imata manjšo korelacijo, ki pa je še vedno prisotna (še vedno so točke razporejene okoli premice, ki razpolavlja kvadrant grafa vendar je odstopanj več. Podobne slike dobimo tudi pri primerjavi ostalih pristopov.

Ker smo želeli podobnost metod med seboj primerjati v prostoru, smo izračunali Spearmanovo korelacijo rangov [?] za vsak par metode. Korelacije so številčno prikazane v tabeli A.1. Za izris podobnosti smo uporabili metodo



**Slika 4.1:** Graf prikazuje rangiranje slik glede na napako  $RMSE$  pri dveh različnih metodah.  $X$  os predstavlja rang pri prvi metodi,  $Y$  pa rang pri drugi metodi. Prva slika prikazuje primerjave rangov Dahlove metode in klasifikacijske metode z arhitekturo 2. Druga metoda prikazuje range pri dveh klasifikacijskih metodah z istimi arhitekturami.

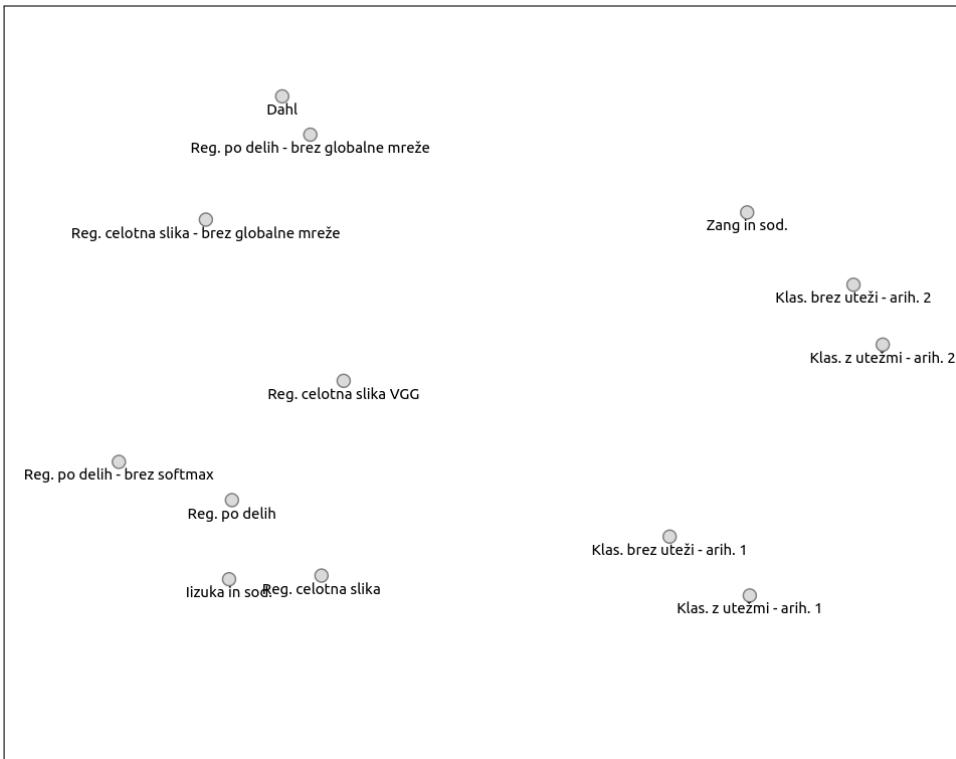
večdimensionalno skaliranje (ang. *Multidimensional scaling* - MDS) [?] na Spearmanivih korelacijah.

Pristopi so glede na arhitekturo in vrsto pristopa razporejeni v prostor, ki je prikazan na sliki 4.2. Izkaže se, da se pristopi z klasifikacijo pojavijo desno v prostoru in so bolj oddaljeni od tistih z regresijo levo. Pri pristopih z klasifikacijo opazimo, da na različnost bolj vpliva vrsta arhitekture, kot uporaba uteži glede na pogostost barve. Izkaže se, da je pristop Zhang in sod. bližje tistim z globjo arhitekturo. Glede na to, da so lastnosti teh arhitektur popolnoma drugačne, se izkaže, da na podobnost glede na napake vpliva predvsem globina arhitekture.

Pri regresijskih metodah lahko opazimo, da je največja razlika glede na uporabo globalne mreže. Pristopi, ki ne uporabljajo globalne mreže so na vrhu prikaza ostali pa spodaj. Regresija celotna slika VGG je nekje na sredini med obema gručama. To gre verjetno pripisati dejству, da ta pristop uporablja mrežo VGG-16, ki je del globalne mreže pri ostalih pristopih, vendar ta pristop to mrežo izkorišča kot glavno.

Čeprav je Dahlov pristop glede na arhitekturo dosti podoben našim pristopom se glede na napake izkaže podoben pristopom brez globalne mreže.

Pristop Iizuka in sod. je v gruči s pristopi, ki uporabljajo globalno mrežo, saj tudi sam uporablja podoben pristop. Pri pristopih z regresijo lahko opazimo še, da sta pristopa Iizuka in sod. ter pristop z regresijo na celi sliki bolj skupaj, saj oba delujeta na celotni sliki.



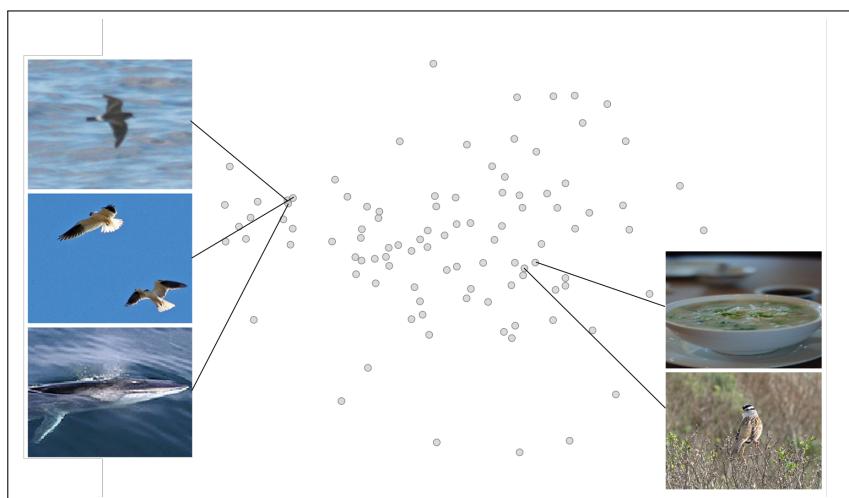
**Slika 4.2:** Primerjava metod v prostoru MDS kaže sorodnosti med metodami na način napovedovanja barve (klasifikacija proti regresiji) in glede na arhitekturo mreže. Mreže, ki uporabljajo mrežo VGG za napovedovanje objekta v sliki so bližje skupaj in modeli brez VGG mreže so bližje skupaj.

Zanimalo nas je tudi. Katere so tiste slike, kjer eden od pristopov dobro obarva sliko, ostali pa mnogo slabše in obratno. Ob pogledu na sliko 4.1 lahko opazimo, da so taki primeri točke, ki ležijo najbolj stran od linearne premice, zato smo te slike našli z metodo za iskanje osamelcev (ang. *outliers*) [?].

Slike, ki najbolj izstopajo glede na napako na različnih metodah, so pri-

kazane kot točke v prostoru, ki ga dobimo z metodo MDS glede na napako, na sliki 4.3. Ob pregledu slik se izkaže, da gre tukaj večinoma za slike, kjer je težje zaznati teksturo ob tem predvidevamo, da so se določene metode bolje naučile ravno te teksture kot druge.

Ob bolj natančnem pregledu prostor smo ugotovili, da napaka močno povezana s motivom na slikah. V prostoru so bližje skupaj slike s podobnim motivom in barvami. Na levi strani so prikazane tri slike, ki so blizu skupaj in jim je skupno to, da je na sliki morje ali voda, ki sta oba modre barve in določen objekt (v našem primeru žival). Na desni strani sta dve slike, ki se tudi ujemata glede na odtenke v sliki, čeprav je motiv drugačen.



**Slika 4.3:** Razporeditev slik v prostoru MDS, ki zajema 100 sli, ki kjer natančnosti najbolj odstopajo pri različnih metodah. V prostoru so točke podobnih slik bližje skupaj. Dve taki podobni skupini slik sta prikazani ob robu.

Ker pa se ukvarjam s slikami pa dodajamo še primerjavo barvanja na slikah. Primerjave po pristopih so prikazane na sliki 4.4 za regresijo in na sliki 4.5 za klasifikacijo. Slike smo izbrali, tako da prva dva stolpca prikazujeta dve slike iz množice 20 najboljeobarvanih s strani vseh algoritmov, 3 in 4 stolpec prikazujeta slike, ki so se bile z različno dobro obarvane s strani različnih

pristopov. Te slike sta izbrane izmed točk v prostoru na sliki 4.3. Zadnja dva stolpca prikazujeta slike, ki so bile v množici 20 najslabše obarvanih s strani vseh algoritmov.

Opazimo lahko, da sta slike v prvih dveh stolpcih v skupini najbolje obarvanih zato, ker so že originalne slike z zelo malo barve, te so namreč zelo blede. Algoritmi, posebej regresijskih, ki običajno obarvajo z bolj neničenimi barvami so se zato zelo približali originalni slikam, čeprav barvanje v več primerih ni ravno najboljše. Pri drugem in tretjem stolpcu so se nekateri pristopi dobro približali pravi barvi drugi pa opazi, da barvanje s strani vseh algoritmov ni bilo enako dobro. Slike iz zadnjih dveh stolpcev sta bila glede na napako v množici najslabše obarvanih slik zato, ker imajo originalne slike zelo močne odtenke, katerim se pristopi niso približali, čeprav so nekatera barvanja dovolj naravna, če ne primerjamo z originalno sliko.

V primerjavi metod iz sorodnih del, pričakovano opazimo, da najboljše barva pristop Iizuka in sod., ki je imel tudi najmanjšo napako. Zang in sod. se na določenih delih obnese dobro, vendar so slike zelo lisaste in nepopolno obarvane, medtem ko so pri metodi Dahl odtenki zelo rjavni, čeprav vmes lahko opazimo nekaj pravih barv.

Pri primerjavi regresijskih metod lahko opazimo, da je po pričakovanjih najboljše barvanje s strani Regresije na celotnih slikah z globalno mrežo, čeprav Regresija na delih slik ne zaostaja dosti. Opazimo lahko tudi pomen in izboljšavo z uporabo globalne mreže. Enaki pristopi brez globalne mreže so obarvali bolj nenatančno, nendaravnno, prisotnih je tudi več rjavih odtenkov.

Pri klasifikacijskih pristopih opazimo, da pristopi z plitvo arhitekturo dajo boljše rezultate, kot tisti z globoko, kjer barvanja skoraj da ni. Pri primerjavi z utežmi in brez lahko zaznamo, da pristop z utežmi barva z močnejšimi odtenki, kot tisti brez, kar je bilo za pričakovati, saj je namen uteži, zmanjšati izbor bolj šibkejših odtenkov, ki imajo  $a^*$  in  $b^*$  vrednost bližje nič. Pristopi so nagnjeni k izbiri teh, ker se bolj pogosto pojavljajo v slikah. Kljub barvanju z močnejši odtenki barv in s tem približevanju realni barvi, je na pogled barvanje brez uteži bolj naravno, saj je opaziti manj

napak v barvanju (na sliki s ptico sta les in ptica pobarvan bolj realno in letalo nima okoli sivinskega pasu).

Pri primerjavi slik pristopi z regresijo obarvajo bolje in bolj naravno, kot pristopi z klasifikacijo, čeprav je nekaj izjem pri barvanju neba in praproti. Izkaže se tudi, da barvanje z regresijo večkrat obarva z bolj rjavimi odtenki, kar pri klasifikacijskih pristopih ni zaznati. Tam je bolj pogosto, da slika ni obarvana.

## 4.2 Primerjava metod na večji učni množici

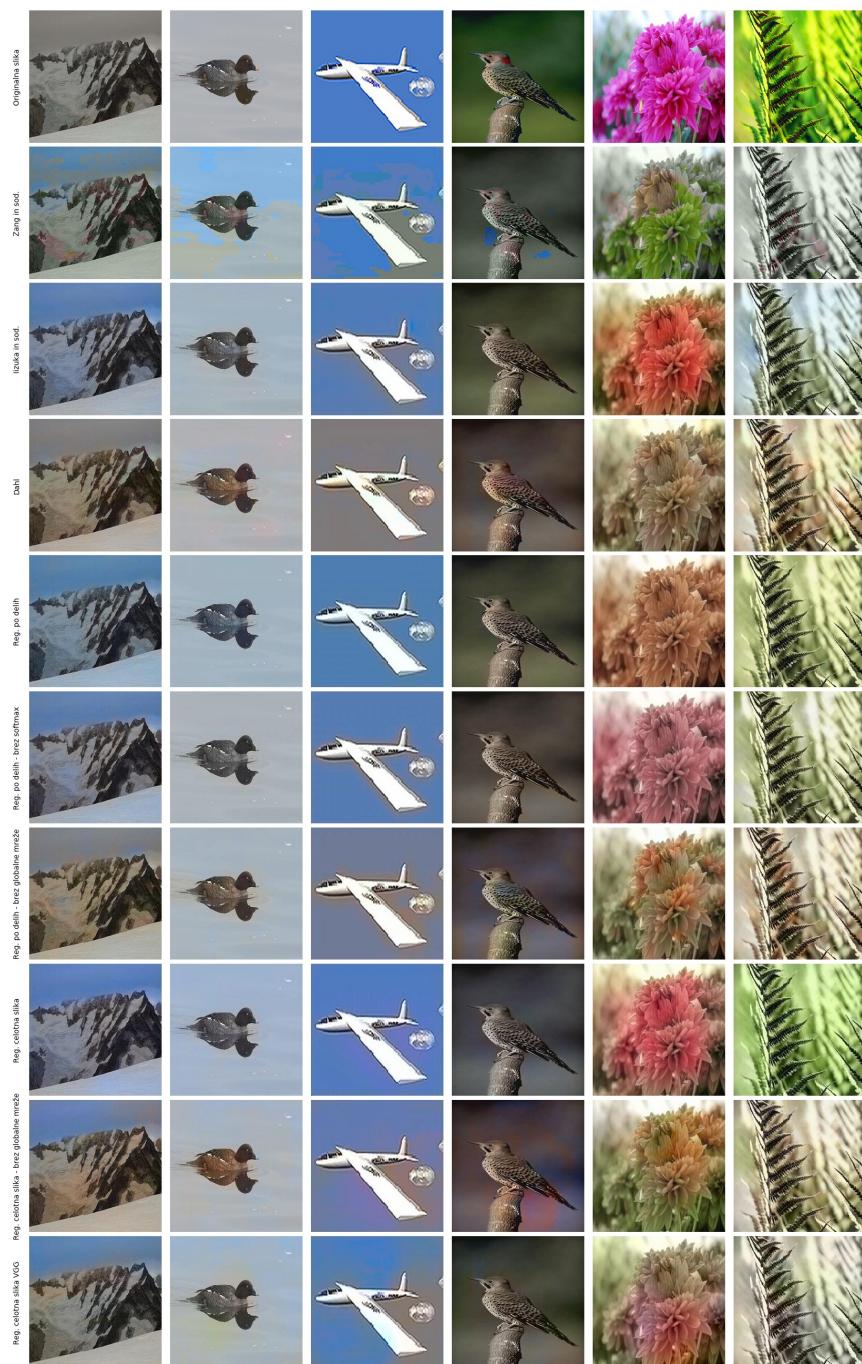
Tukaj bi primerjali metode, ki bi bile naučene na več slikah, tako bi pridobili tudi boljša barvanja za pokazat izboljševanje barvanja glede na epoche. Primerjavo bi izvedli na manj manj metodah.

## 4.3 Barvanje večjih slik

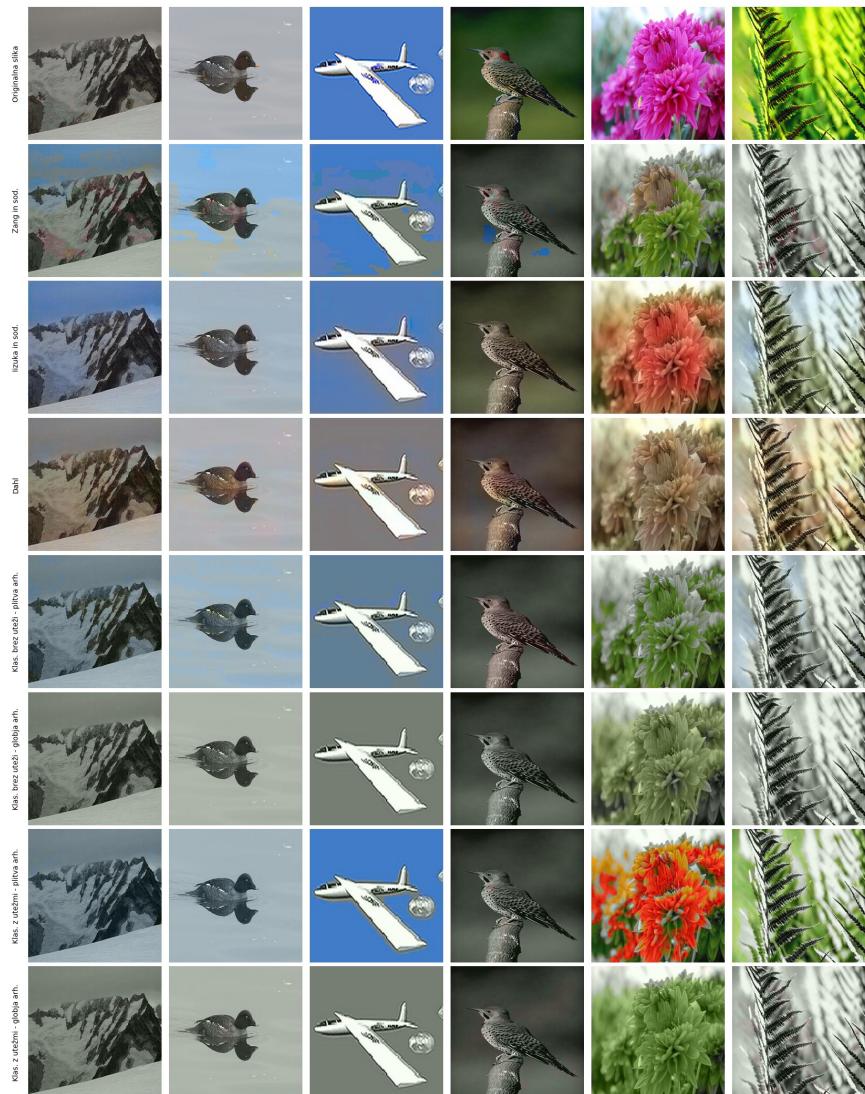
Tabela 4.2 prikazuje napake pri dveh velikostih slik na dveh metodah. Ena velikost je velikost na kateri je bila mreža naučena, druga pa je večja velikost slik. Izkaže se, da ima pristop *Regresija po delih z globalno mrežo* zelo majhno razliko v napaki, pri barvanju slik večjih velikosti glede na napako na osnovni velikosti, medtem ko je ta razlika pri pristopu Iizuka in sod. merjena v RMSE kar 6.18.

**Tabela 4.2:** Primerjava napak pristopov Iizuka in sod. ter *regresija po delih z globalno mrežo* pri barvanju večjih slik. Za računaje napake so uporabljene metrike opisane v poglavju 3.7.

Pristop	Velikost slik	RMSE	PSNR
Iizuka in sod.	224	10.018	24.750
	896	16.136	20.906
Reg. po delih	224	9.892	24.700
	896	10.096	24.523



**Slika 4.4:** Slike iz testne množice, ki so bile obarvane z regresijskimi pristopi opisanimi v tem delu in pristopi iz sorodnih del. Vsaka vrstica prikazuje drugo metodo, prva vrstica prikazuje originalno sliko.



**Slika 4.5:** Slike iz testne množice, ki so bile obarvane z k pristopi opisanimi v tem delu in pristopi iz sorodnih del. Vsaka vrstica prikazuje drugo metodo, prva vrstica prikazuje originalno sliko.

# **Poglavlje 5**

## **Zaključek**



## Dodatek A

Spearmanova korelacija rangov  
med metodami

**Tabela A.1:** Spearmanova korelacija med metodami.

	Zang	Iizuka	Dahl	Reg. po de	Reg. po de	Reg. po de	Reg. celot	Reg. celot
Zang in so	1.0000	0.8607	0.8688	0.8637	0.8407	0.8898	0.8779	0.8800
Iizuka in	0.8607	1.0000	0.8936	0.9454	0.9420	0.9015	0.9472	0.9200
Dahl	0.8688	0.8936	1.0000	0.9008	0.9058	0.9816	0.8889	0.9510
Reg. po de	0.8637	0.9454	0.9008	1.0000	0.9440	0.9096	0.9392	0.9140
Reg. po de	0.8407	0.9420	0.9058	0.9440	1.0000	0.9120	0.9313	0.9190
Reg. po de	0.8898	0.9015	0.9816	0.9096	0.9120	1.0000	0.9005	0.9640
Reg. celot	0.8779	0.9472	0.8889	0.9392	0.9313	0.9005	1.0000	0.9140
Reg. celot	0.8804	0.9206	0.9518	0.9149	0.9194	0.9642	0.9140	1.0000
Reg. celot	0.8969	0.9398	0.9196	0.9309	0.9211	0.9263	0.9334	0.9370
Klas. brez	0.9092	0.9012	0.8636	0.9004	0.8795	0.8784	0.9030	0.8750
Klas. brez	0.9409	0.8519	0.8861	0.8622	0.8434	0.8979	0.8657	0.8650
Klas. z ut	0.9242	0.8535	0.8722	0.8578	0.8390	0.8817	0.8632	0.8550
Klas. z ut	0.9023	0.8889	0.8431	0.8861	0.8640	0.8582	0.8904	0.8540

## Dodatek B

### Podrobnosti arhitektur

**Tabela B.1:** Tabela prikazuje nivoje plitve arhitekture z globalno mrežo in njihove parametre.  $K$  predstavlja število kanalov izhoda nevronske mreže,  $J$  pove velikost jedra,  $Ko$  je korak (ang. *stride*) uporabljen na nivoju in  $Akt$  predstavlja aktivacijo po vsakem nivoju. Zadnji konvolucijski nivo nima definiranega števila izhodnih kanalov, saj je to odvisno od pristopa, ki smo ga uporabili. Pri nadzorčenju smo vedno nadzorčili s faktorjem 2, kar pomeni, da ima tensor, ki predstavlja izhod po širini in višini dvakratno velikost.

Nivo	K	J	K	Akt
Vhod	1	-	-	-
2D konvolucija	64	3	2	Relu
2D konvolucija	128	3	1	Relu
2D konvolucija	128	3	2	Relu
2D konvolucija	256	3	1	Relu
2D konvolucija	256	3	2	Relu
2D konvolucija	512	3	1	Relu
2D konvolucija	512	3	1	Relu
2D konvolucija	256	3	1	Relu
Združitev z globalno mrežo	512	-	-	-
2D konvolucija	256	3	1	Relu
Nadvzorčenje	256	-	-	-

2D konvolucija	256	3	1	Relu	
2D konvolucija	256	3	1	Relu	
Nadvzorčenje	256	-	-	-	
2D konvolucija		3	1	Relu	

**Tabela B.2:** Tabela prikazuje nivoje globje arhitekture z globalno mrežo in njihove parametre.  $K$  predstavlja število kanalov izhoda nevronskne mreže,  $J$  pove velikost jedra,  $Ko$  je korak (ang. *stride*) uporabljen na nivoju,  $Akt$  predstavlja aktivacijo po vsakem nivoju in  $Reg$  določa stopnjo regularizacije. V vseh nivojih uporabljamo  $L2$  regulrizacijo [30]. Zadnji konvolucijski nivo nima definiranega števila izhodnih kanalov, saj je to odvisno od pristopa, ki smo ga uporabili.

Zap. št.	Nivo	K	J	Ko	Akt	Reg
0	Vhod	1	-	-	-	-
1	2D konvolucija	64	3	1	Relu	0.01
2	Maks. združevanje	64	2	2	-	-
3	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
4	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
5	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
6	Vsota z 3	128	-	-	-	-
7	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
8	Maks. združevanje	128	2	2	-	-
9	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
10	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
11	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
12	Vsota z 9	256	-	-	-	-
13	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
14	Maks. združevanje	265	2	2	-	-
15	2D konvolucija	512	3	1	Relu	0.01
16	2D konvolucija	512	3	1	Relu	0.01

---

17	2D konvolucija	512	3	1	Relu	0.01
18	Vsota z 15	512	-	-	-	-
19	2D konvolucija	512	3	1	Relu	0.01
20	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
21	Združitev z globalno mrežo	512	-	-	-	-
22	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
23	2D transponirana kovnolucija	64	3	2	Relu	0.01
24	2D kovnolucija	64	3	1	Relu	0.01
25	2D kovnolucija	64	3	1	Relu	0.01
26	2D transponirana kovnolucija	64	3	2	Relu	0.01
27	2D kovnolucija	32	3	1	Relu	0.01
28	2D kovnolucija		3	1	Relu	0.01

**Tabela B.3:** Tabela prikazuje nivoje dopolnjene VGG mreže in njihove parametre.  $K$  predstavlja število kanalov izhoda nevronске mreže,  $J$  pove velikost jedra,  $Ko$  je korak (ang. *stride*) uporabljen na nivoju,  $Akt$  predstavlja aktivacijo po vsakem nivoju in  $Reg$  določa stopnjo regularizacije. V vseh nivojih uporabljamo  $L2$  regulrizacijo [30]. Zadnji konvolucijski nivo nima definiranega števila izhodnih kanalov, saj je to odvisno od pristopa, ki smo ga uporabili. Vsako nadzorčenje prostorske dimenzije poveča za 2 krat.

Zap. št.	Nivo	K	J	Ko	Akt	Reg
0	Vhod	1	-	-	-	-
1	VGG-16 mreža	512	-	-	-	-
2	Nadvzorčenje	512	-	-	-	-
3	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
4	2D konvolucija	256	3	1	Relu	0.01
5	Nadvzorčenje	256	-	-	-	-
6	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
7	2D konvolucija	128	3	1	Relu	0.01
8	Nadvzorčenje	128	-	-	-	-

---

9	2D konvolucja	64	3	1	Relu	0.01
10	2D konvolucja	164	3	1	Relu	0.01
11	Nadvzorčenje	64	-	-	-	-
12	2D konvolucja	32	3	1	Relu	0.01
13	2D konvolucja		3	1	Relu	0.01

# Literatura

- [1] M. ARCHAMBAULT, A Brief History of Color Photography, From Dream to Reality.  
URL <https://petapixel.com/2015/10/11/a-brief-history-of-color-photography-from-dream-to-reality/>
- [2] N. Pm, R. M. Chezian, VARIOUS COLOUR SPACES AND COLOUR SPACE CONVERSION ALGORITHMS, Journal of Global Research in Computer Science 4 (1).  
URL <http://jgrcs.info/index.php/jgrcs/article/viewFile/587/430>
- [3] S. Iizuka, Edgar Simo-Serra, H. Ishikawa, Let there be Color!: Joint End-to-end Learning of Global and Local Image Priors for Automatic Image Colorization with Simultaneous Classification, in: SIGGRAPH '16, Vol. 35, ACM, 2016, p. 110. doi:10.1145/2897824.2925974.
- [4] L. Prangnell, Visible Light-Based Human Visual System Conceptual Model.  
URL <https://arxiv.org/pdf/1609.04830.pdf>
- [5] S. Bansal, D. Aggarwal, Color Image Segmentation Using CIELab Color Space Using Ant Colony Optimization.  
URL <http://www.ijcset.net/docs/Volumes/volume1issue7/ijcset2011010715.pdf>

- [6] K. Jack, Video demystified : a handbook for the digital engineer, Elsevier, 2005.  
URL <http://www.sciencedirect.com/science/book/9780750678223>
- [7] R. Zhang, P. Isola, A. Efros, Colorful image colorization, European Conference on Computer Vision.  
URL [http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-46487-9{\\_}40](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-46487-9{_}40)
- [8] G. Larsson, M. Maire, G. Shakhnarovich, Learning Representations for Automatic Colorization, arXiv preprintarXiv:1603.06668.  
URL <http://arxiv.org/abs/1603.06668>
- [9] I. L. Weatherall, B. D. Coombs, Skin Color Measurements in Terms of CIELAB Color Space Values, Journal of Investigative Dermatology 99 (4) (1992) 468–473. doi:10.1111/1523-1747.ep12616156.  
URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022202X92903477>
- [10] H. Everding, CIELAB boundaries – the borders of the CIELAB color space.  
URL <https://www.freiefarbe.de/en/grenzen-des-cielab-farbraums/>
- [11] C. Connolly, T. Fleiss, A study of efficiency and accuracy in the transformation from RGB to CIELAB color space, IEEE Transactions on Image Processing 6 (7) (1997) 1046–1048. doi:10.1109/83.597279.  
URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/597279/>
- [12] N. Ohta, A. R. Robertson, Colorimetry: Fundamentals and Applications, Vol. null, 2005. doi:10.1002/0470094745.  
URL <https://books.google.com/books?hl=en{&}lr={&}id=U8jeh1uhSHgC{&}oi=fnd{&}pg=PR2{&}dq=Colorimetry:>

+Fundamentals+and+Applications+{&}ots=SUbuB0kPfU{&}sig=  
FtBn43qgQvrKC0pXi7lAeVB0FGk

- [13] J. Schwiegerling, Society of Photo-optical Instrumentation Engineers., Field guide to visual and ophthalmic optics, SPIE, 2004.  
URL <https://spie.org/Publications/Book/592975>
- [14] M. Koleini, S. A. Mobadjemi, P. Moallem, Automatic Black and White Film Colorization Using Texture Features and Artificial Neural Networks, Journal of the Chinese Institute of Engineers 33 (7) (2010) 1049–1057. doi:10.1080/02533839.2010.9671693.
- [15] Z. Cheng, Deep Colorization, CVPR 1 (2015) 415–423. arXiv:1511.04587, doi:10.1109/ICCV.2015.55.
- [16] A. Deshpande, J. Rock, D. Forsyth, Learning Large-Scale Automatic Image Colorization (2015). doi:10.1109/ICCV.2015.72.
- [17] R. Dahl, Automatic Colorization.  
URL <http://tinyclouds.org/colorize/>
- [18] K. Simonyan, A. Zisserman, Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition arXiv:1409.1556.  
URL <http://arxiv.org/abs/1409.1556>
- [19] O. Russakovsky, J. Deng, H. Su, J. Krause, S. Satheesh, S. Ma, Z. Huang, A. Karpathy, A. Khosla, M. Bernstein, A. C. Berg, L. Fei-Fei, ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge, International Journal of Computer Vision (IJCV) 115 (3) (2015) 211–252. doi:10.1007/s11263-015-0816-y.
- [20] A. Gibson, C. Nicholson, J. Patterson, Introduction to Deep Neural Networks.  
URL <https://deeplearning4j.org/neuralnet-overview>

- [21] A. Karpathy, Understanding and Visualizing Convolutional Neural Networks, CS231n Convolutional Neural Networks for Visual Recognition (2016).
- [22] A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton, ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks (2012).  
URL <http://papers.nips.cc/paper/4824-imagenet-classification-with-deep-convolut>
- [23] V. Dumoulin, F. Visin, A guide to convolution arithmetic for deep learning *arXiv:1603.07285*.  
URL <http://arxiv.org/abs/1603.07285>
- [24] S. Wu, S. Zhong, Y. Liu, Deep residual learning for image steganalysis (2017). *arXiv:1512.03385*, doi:10.1007/s11042-017-4440-4.  
URL <https://arxiv.org/pdf/1512.03385.pdf>
- [25] J. M. Joyce, Kullback-leibler divergence, in: International Encyclopedia of Statistical Science, Springer, 2011, pp. 720–722.
- [26] S. Mannor, D. Peleg, R. Rubinstein, The cross entropy method for classification, in: Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning - ICML '05, ACM Press, New York, New York, USA, 2005, pp. 561–568. doi:10.1145/1102351.1102422.  
URL <http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=1102351.1102422>
- [27] D. P. Kingma, J. Ba, Adam: {A} Method for Stochastic Optimization, CoRR abs/1412.6.  
URL <http://arxiv.org/abs/1412.6980>
- [28] D. Saupe, R. Hamzaoui, H. Hartenstein, Fractal Image Compression An Introductory Overview, Univ., Inst. f{"u}r Informatik, 2006.  
URL <https://karczmarczuk.users.greyc.fr/matrs/Dess/RADI/Refs/SaHaHa96a.pdf>

- [29] S. T. Welstead, Fractal and wavelet image compression techniques, Vol. 40, Spie Press, 1999.
- [30] D. J. C. MacKay, A practical Bayesian framework for backpropagation networks, *Neural computation* 4 (3) (1992) 448–472.