# Linearni sustav - Laplaceova jednadžba na polukrugu

**Petra Brčić**

# Uvod

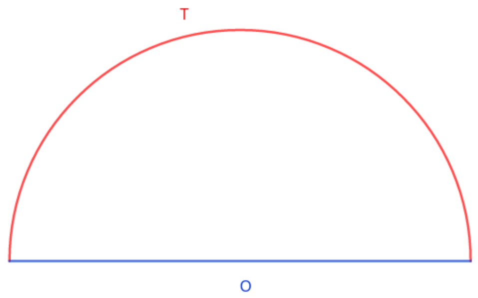
Ovaj rad je završni projekt za kolegij Znanstveno računanje 1. Cilj je implementirati neku od naučenih metoda i primijeniti ju za računanje Laplaceove jednadžbe na polukrugu.

# Problem

Zadana je polukružna ploča radijusa R. Ravni dio ruba (dijametar kroz centar kruga) ima temperaturu 0°C, dok se zakrivljeni (polukružni) dio ruba drži na konstantnoj temperaturi od T°C.
Stacionarna raspodjela temperature $u$ te ploče određena je Laplaceovom jednadžbom

$$\triangle u = 0,$$

unutar ploče, uz zadane rubne uvjete.




Slika 1: Vizualizacija problema

## Rješenje problema

Kao što možemo vidjeti, geometrija problema sugerira da funkciju temperature $u$ treba pisati u polarnim koordinatama $(r, \varphi)$ obzirom na centar polukruga, tj. $u = u(r, \varphi)$.

Imamo Laplaceovu jednadžbu u dvije prostorne varijable

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Koristimo klasičnu supstituciju

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi.$$

Odredimo parcijalne derivacije od $x$ i $y$ po $r$ i $\varphi$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi.$$

Odredimo parcijalne derivacije od $u$ po $r$ i $\varphi$, detaljan izvod ostavljamo čitatelju

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -r\left(\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r^2\left(\sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Pomnožimo li zadnju jednakost s $\frac{1}{r^2}$ i zbrojimo druge parcijalne derivacije od $u$, uz identitet $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ imamo Lplaceovu jednadžbu u polarnim koordinatama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Postavimo rubni problem za Laplaceovu jednadžbu na polukrugu

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, & \\ u(0,0) = u(r,0) = u(r,\pi) = 0, & 0 \leqslant r \leqslant R, \\ u(R,\varphi) = T, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Laplaceovu jednadžbu u polarnim koordinatama diskretiziramo "ekvidistantnom" mrežom u svakoj od koordinata s koracima

$$\triangle r = \frac{R}{M+1} \quad i \quad \triangle\, \varphi = \frac{\pi}{N+1}, \quad M, N \in \mathbb{N} \text{ zadani.}$$

Simetrična aproksimacija za prvu derivaciju ima oblik

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

a za drugu derivaciju ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \approx \frac{1}{h^2}(u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)).$$

Uvrstimo aproksimacije u Laplaceovu jednadžbu na polukrugu, pomnožimo cijelu jednakost s $\triangle r^2$ i dobivamo

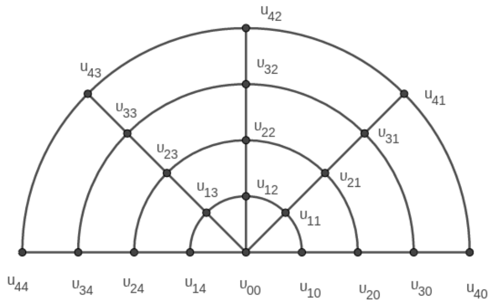
$$-2\left(1 + \left(\frac{\triangle r}{r_i \triangle\, \varphi}\right)^2\right) u_{i,j} + \left(1 - \frac{\triangle r}{2r_i}\right) u_{i-1,j} + \left(1 + \frac{\triangle r}{2r_i}\right) u_{i+1,j} +$$

$$+ \frac{\triangle r^2}{r_i^2 \triangle\, \varphi^2} u_{i,j-1} + \frac{\triangle r^2}{r_i^2 \triangle\, \varphi^2} u_{i,j+1} = 0$$

Dakle, dobili smo diskretiziranu jednadžbu za čvorove oblika

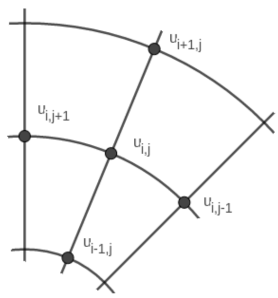
$$(r_i, \varphi_j) = (i \cdot \triangle r, j \cdot \triangle \varphi), \quad i = 0, ..., M+1, \quad j = 0, ..., N+1$$

uz kraći zapis korišten za dobivanje diskretizirane jednadžbe $u_{i,j} = u(r_i, \varphi_j)$.




Slika 2: Čvorovi "ekvidistantne" mreže

Kako bi dobili sustav koristit ćemo diskretizaciju Laplaceove jednadžbe unutrarnjoj točki mreže $(r_i, \varphi_j)$ na standardni način - simetričnim razlikama korištenjem 5 točaka kao na slici.




Slika 3: 5 točaka potrebnih za simetrične razlike

Opći matrični zapis sustava koji dobivamo za $M = m$, $N = n$, $T$

$$\begin{bmatrix} D_1 & U_1 & 0 & \dots & 0 \\ L_2 & D_2 & U_2 & \dots & 0 \\ 0 & L_3 & D_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ T \end{bmatrix}$$

gdje je

$$D_i = \begin{bmatrix} 2\left(1+\left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2\right) & \left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2 & 2\left(1+\left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2\right) & \left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2 & 2\left(1+\left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\left(1+\left(\frac{\triangle r}{r_i\triangle\varphi}\right)^2\right) \end{bmatrix},$$

za $i = 1, ..., m$, $D_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a

$$U_i = \begin{bmatrix} 1+\frac{\triangle r}{2r_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1+\frac{\triangle r}{2r_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, ..., m-1, \quad U_i \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1-\frac{\triangle r}{2r_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1-\frac{\triangle r}{2r_i} \end{bmatrix}, \quad i = 2, ..., m, \quad L_i \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Vidimo da ovaj sustav jednostavno možemo riješiti primjenom Gaussovih eliminacija na dobivenu matricu sustava. Pri implementaciji ove metode je korištena Lapack biblioteka, tj. rutine dgetrf() i dgetri().

```
Your matrix is:
|  7.0661 -2.5330  0.0000  0.0000 -1.5000  0.0000  0.0000  0.0000 |
| -2.5330  7.0661 -2.5330  0.0000  0.0000 -1.5000  0.0000  0.0000 |
|  0.0000 -2.5330  7.0661 -2.5330  0.0000  0.0000 -1.5000  0.0000 |
|  0.0000  0.0000 -2.5330  7.0661  0.0000  0.0000  0.0000 -1.5000 |
| -0.7500  0.0000  0.0000  0.0000  3.2665 -0.6333  0.0000  0.0000 |
|  0.0000 -0.7500  0.0000  0.0000 -0.6333  3.2665 -0.6333  0.0000 |
|  0.0000  0.0000 -0.7500  0.0000  0.0000 -0.6333  3.2665 -0.6333 |
|  0.0000  0.0000  0.0000 -0.7500  0.0000  0.0000 -0.6333  3.2665 |
```

Slika 4: Primjer matrice sustava za $m = 2$, $n = 4$, $T = 100$ i $R = 1$

Na slici je bojama jasno naznačeno da se radi o blok tridijagonalnoj matrici, gdje su blokovi dimenzije $5 \times 5$. Rješenje koje dobivamo Gaussovim eliminacijama je dano na sljedećoj slici. Horizontalno je promjena $\triangle\varphi$ dok je vertikalno promjena $\triangle r$. Radi bolje preglednosti stavljenje su veće dimenzije.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 72.6276 | 84.0330 | 87.4247 | 88.8079 | 89.3487 | 89.3487 | 88.8079 | 87.4247 | 84.0330 | 72.6276 |
| 55.5377 | 72.6826 | 79.0481 | 81.8096 | 82.9093 | 82.9093 | 81.8096 | 79.0481 | 72.6826 | 55.5377 |
| 42.5902 | 61.7244 | 70.2635 | 74.2542 | 75.8884 | 75.8884 | 74.2542 | 70.2635 | 61.7244 | 42.5902 |
| 32.7091 | 51.4700 | 61.2371 | 66.1730 | 68.2654 | 68.2654 | 66.1730 | 61.2371 | 51.4700 | 32.7091 |
| 25.0661 | 42.0615 | 52.1236 | 57.6147 | 60.0334 | 60.0334 | 57.6147 | 52.1236 | 42.0615 | 25.0661 |
| 19.0318 | 33.5180 | 43.0515 | 48.6417 | 51.2032 | 51.2032 | 48.6417 | 43.0515 | 33.5180 | 19.0318 |
| 14.1335 | 25.7746 | 34.1118 | 39.3249 | 41.8066 | 41.8066 | 39.3249 | 34.1118 | 25.7746 | 14.1335 |
| 10.0182 | 18.7121 | 25.3539 | 29.7381 | 31.8984 | 31.8984 | 29.7381 | 25.3539 | 18.7121 | 10.0182 |
| 6.4215 | 12.1791 | 16.7830 | 19.9520 | 21.5584 | 21.5584 | 19.9520 | 16.7830 | 12.1791 | 6.4215 |
| 3.1397 | 6.0058 | 8.3616 | 10.0281 | 10.8893 | 10.8893 | 10.0281 | 8.3616 | 6.0058 | 3.1397 |

Slika 5: Primjer rješenja za $m = n = 10$, $T = 100$ i $R = 1$

Možemo uočiti da se ovdje radi o simetričnom rješenju, pa nije potrebno računati sustav za sve nepoznanice. Pod pretpostavkom da je zadani $N$ neparan, možemo odrediti rješenje na osi simetrije, u $\frac{\pi}{2}$ na način da riješimo sustav na polukrugu za $N = 1$. Vidimo da nema promjene po $\varphi$ i da ćemo imati samo tridijagonalnu matricu dimenzije $M \times M$, uz rubni uvjet $u(0) = 0$ i $u(R) = T$. Na idućoj slici možemo vidjet kako izgleda jedna takva matrica.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.202642 | -1.250000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| -0.750000 | 2.050661 | -1.166667 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.000000 | -0.833333 | 2.022516 | -1.125000 | 0.000000 |
| 0.000000 | 0.000000 | -0.875000 | 2.012665 | -1.100000 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | -0.900000 | 2.008106 |

Slika 6: Primjer matrice za $m = 5, n = 1$, $T = 100$ i $R = 1$

Nakon što dobijemo rješenje opisanog sustava i odredimo stanje na okomitoj osi, možemo postaviti sustav za četvrtinu kruga, pri čemu je sa rješenjem prethodnog sustava dan rubni uvjet. Matricu sustava dobivamo ponovno simetričnim razlikama, ali dolazi do promjene zadane dimenzije.
Stavimo $n = n/2$ i rješavamo sustav s promijenjenim vektorom b koji uzima u obzir rubne uvjete dane prethodnim sustavom. Primjer jedne matrice takvog sustava je dan na sljedećoj slici.

Your matrix is:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.2951 | -3.6476 | -1.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -3.6476 | 9.2951 | 0.0000 | -1.5000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -0.7500 | 0.0000 | 3.8238 | -0.9119 | -1.2500 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | -0.7500 | -0.9119 | 3.8238 | 0.0000 | -1.2500 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | -0.8333 | 0.0000 | 2.8106 | -0.4053 | -1.1667 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.8333 | -0.4053 | 2.8106 | 0.0000 | -1.1667 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.8750 | 0.0000 | 2.4559 | -0.2280 | -1.1250 | 0.0000 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.8750 | -0.2280 | 2.4559 | 0.0000 | -1.1250 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.9000 | 0.0000 | 2.2918 | -0.1459 |
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.9000 | -0.1459 | 2.2918 |

Slika 7: Primjer matrice sustava istog sustava kao na prethodnoj slici

Ovaj sustav također rješavamo Gaussovim eliminacijama i dobivamo $m \times \lfloor n/2 \rfloor$ rješenje za $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kao na slici.

```
78.0678 67.8275
63.8120 48.9523
48.7542 33.5667
33.3714 20.9654
17.8046 10.3701
```

Slika 8: Rješenje simetriziranog problema

Sada bi valjalo prodiskutirati o tome je li rješenje uopće valjano. Da bi mogli odgovoriti na to pitanje, potrebno je riješiti rubni problem u polarnim koordinatama i odrediti analitičko rješenje. Separacijom varijabli dobivamo da je rješenje u točki $(r, \varphi)$ dano redom

$$u(r,\varphi) = \frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi.$$

Vidimo da ovaj red ide od 1 prema $\infty$, pa trebamo odrediti $n$ kako bi postigli željenju točnost. Uvedemo varijablu koja ima vrijednost željene točnosti (u mojim primjerima je to $1 \times 10^{-4}$) i s while petljom utvrdimo za koji $n$ je jedan sumand tog reda manji od tolerancije. Nakon što to utvrdimo, sve što je potrebno, je izračunati sumu reda od $n$ prema 1, kako bi se postigla maksimalna točnost računa. Na iduće dvije slike je primjer rješenja diskretiziranog sustava i analitičko rješenje istog tog sustava. Primijetimo kako postoje odstupanja u temperaturi, ali i kako je forma rješenja zaista korektna.

```
Unesite m: 5
Unesite n: 8
Unesite temperaturu na zakrivljenom dijelu polukruga: 100
Unesite radijus polukruga: 1

60.0518 74.0286 78.5405 80.0946 80.0946 78.5405 74.0286 60.0518
39.1434 56.8492 64.5021 67.4437 67.4437 64.5021 56.8492 39.1434
24.8283 40.6545 49.2146 52.9028 52.9028 49.2146 40.6545 24.8283
14.6377 25.9332 33.1432 36.5813 36.5813 33.1432 25.9332 14.6377
 6.7966 12.5742 16.6762 18.7845 18.7845 16.6762 12.5742  6.7966

Analitičko rješenje:

70.9011 80.9730 87.4216 88.0629 88.0629 87.4216 80.9730 70.9011
43.9088 63.2566 71.5283 74.4940 74.4940 71.5283 63.2566 43.9088
27.2431 45.1034 54.5668 58.5633 58.5633 54.5668 45.1034 27.2431
15.9856 28.5980 36.6717 40.4997 40.4997 36.6717 28.5980 15.9856
 7.4313 13.8094 18.3749 20.7302 20.7302 18.3749 13.8094  7.4313
```

Slika 9: Usporedba točnosti egzaktnog rješenja s približnim dobivenim iz diskretizacije

Jedino što nam je još preostalo je pozabaviti se točkama diskontinuiteta. To su točne na krajevima dijametra na kojima ustvari imamo zadane dvije temperature i 0 i $T$. Kako bi izbjegli taj problem, vrlo je jasno da trebamo radijalno adaptirati temperaturu na zakrivljenom dijelu. Jedan način koji izvrsno funkcionira je postaviti $u(R,\varphi) = T\sin\varphi$. Vidimo da ćemo na $\varphi = \frac{\pi}{2}$ imati $u(R, \frac{\pi}{2}) = T$ dok će vrijednost rubnog uvjeta padati s lijeva prema $u(R,\pi) = 0$ i s desna prema $u(R,0) = 0$. Na slici je dano takvo rješenje istog sustava kao i na Slici 9.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25.9345 | 48.7409 | 65.6685 | 74.6754 | 74.6754 | 65.6685 | 48.7409 | 25.9345 |
| 20.7710 | 39.0367 | 52.5940 | 59.8077 | 59.8077 | 52.5940 | 39.0367 | 20.7710 |
| 15.6008 | 29.3199 | 39.5026 | 44.9208 | 44.9208 | 39.5026 | 29.3199 | 15.6008 |
| 10.4216 | 19.5863 | 26.3885 | 30.0079 | 30.0079 | 26.3885 | 19.5863 | 10.4216 |
| 5.2284 | 9.8263 | 13.2389 | 15.0547 | 15.0547 | 13.2389 | 9.8263 | 5.2284 |

Slika 10: Rješenje sustava bez diskontinuitetnih točaka