

# Jednadžbe plitke vode

PETRA BRČIĆ\*

petrabrcic94@gmail.com

26. lipnja 2020.

**Sažetak:** Ovaj rad opisuje za što koristiti jednadžbe plitke vode i kako do njih dolazimo. Prikazujemo numeričko rješavanje spomenutih jednadžbi uz korištenje metode konačnih elemenata, te dajemo dva primjera koji ilustriraju ovisnost o rubnim uvjetima i domeni.

**Ključni pojmovi:** Jednadžbe plitke vode, Navier-Stokes jednadžbe, Saint-Venant jednadžbe, Numerička metoda.

## SADRŽAJ

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Izvod jednadžbi plitke vode</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Numerička shema za metodu konačnih elemenata</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Primjeri</b>	<b>7</b>
4.1	Kvadratna mreža . . . . .	8
4.2	Sferna mreža . . . . .	9

---

\*diplomski studij Primijenjene Matematike, PMF Zagreb

## 1. UVOD

Jednadžbe plitke vode (JPV) su parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju tok fluida ispod površine pod tlakom ili slobodne površine. Jednosmjerne jednadžbe plitke vode se još nazivaju i Saint-Venant jednadžbe.

JPV se generalno koriste za modeliranje valova (u vodi) gdje je horizontalna skala značajno veća od dubine fluida. U ovom radu ćemo na kraju vidjeti da su dobre za modeliranje tsunamija, iako je prosječna dubina Tihog oceana 4km, JPV su i dalje dobre za modeliranje jer horizontalna domena tsunamija je uvelike veća od vertikalne. Također mnogi procesi u atmosferi se mogu opisati koristeći ove jednadžbe, više o tome se može vidjeti u [2] gdje se mogu naći i interensante nove mreže za modeliranje na sferi.

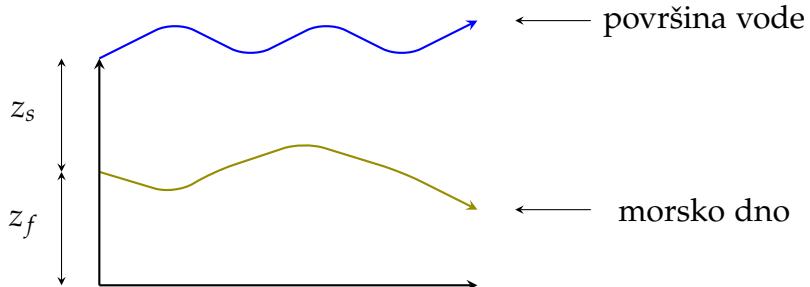
Kao što i samo ime jednadžbi kaže, radi se o nekakvom modelu plitke vode. No, što uopće smatramo plitkom vodom? Ideja je da je vertikalna skala bitno manja u odnosu na horizontalnu i da je visinska komponenta brzine zanemariva. Međutim, nailazimo na potencijalan problem, morsko dno uzrokuje vertikalno ubrzanje (dodatano uz ubrzanje sile teže). Ali, vertikalna komponenta brzine je i dalje zanemariva (npr. tsunami može putovati i 700 km/h). Primjetimo i da je vertikalna komponenta tsunami najrelevantnija kada se približava obali. Strm uspon kontinenta je razlog zašto tsunami imaju takvu visinu.

## 2. IZVOD JEDNADŽBI PLITKE VODE

Izvod samih jednadžbi plitke vode započinjemo od inkompresibilnih Navier-Stokes jednadžbi koje smo vidjeli na predavanjima.

$$(NS) \quad \begin{cases} u_t + (u\nabla)u + \nabla p - \nu\Delta u = ge_3, & g = -9.81 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Ovdje ćemo imati istu tehniku izvoda kao i na teoriji elastičnosti [4]. Počinjemo od poznatih jednadžbi i dodajemo neke pretpostavke koje imaju fizikalnu osnovu kako bi dobili nešto što je lakše riješiti.



Pretpostavimo da je domena ispunjena fluidom male visine (to je zaista tako za jezera i mora). Neka je  $z_s(x_1, x_2, t)$  visina površine i  $z_f(x_1, x_2, t)$  visina dna.

To možemo vidjeti i za slici gore. Integrirajmo drugu jednadžbu po  $x_3 = z$  i dobivamo

$$\int_{z_f}^{z_s} \operatorname{div} u dz = u_3(z_s) - u_3(z_f) + \nabla_{12} \cdot \left( \int_{z_f}^{z_s} u dz \right) = 0,$$

ali po definiciji od  $u_3$  imamo  $\frac{dz_s}{dt} = u_3(z_s)$ , pa uzimajući u obzir no-slip uvjet na dnu i definirajući  $v$  i  $z$  na sljedeći način

$$\int_{z_f}^{z_s} u dz = (z_s - z_f)v(x_1, x_2, t),$$

$$z = z_s - z_f,$$

imamo

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div}(zv) = 0.$$

U N-S ignoriramo sve članove s  $u_3$ , pa treća jednadžba daje

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g.$$

Uvrstimo izračunati  $p$  u prve dvije jednadžbe integrirane po  $x_3$  i dobijemo

$$\frac{\partial(zv)}{\partial t} + (zv\nabla)v + gz\nabla z - \nu\Delta(zv) = 0.$$

Dakle, Saint-Venant jednadžbe plitke vode glase

$$\frac{\partial(zv)}{\partial t} + (zv\nabla)v + gz\nabla z - \nu\Delta(zv) = 0 \quad (\text{SVJPV1})$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div}(zv) = 0. \quad (\text{SVJPV2})$$

Za veće poveršine vode (mora, oceani) moramo dodati Coriolisove sile, proporcionalne  $\omega \times v$ , gdje je  $\omega$  rotacijski vektor planeta. Više o tome može se čuti na predavanjima [2]. Desna strana može doći od

- modeliranje vjetra (f konstanta),
- modeliranje trenja na dnu  $z_f$  ( $f = \frac{c|v|v}{z}$ ).

Ako reskaliramo u Saint-Venant jednadžbama plitke vode uz

- $U$  karakteristična brzina toka (npr. neki nehomogen rubni uvjet)  $u' = \frac{u}{U}$
- $L$  karakteristična duljina (diametar od domene  $\Omega$ )  $x' = \frac{x}{L}$
- $T$  karakteristično vrijeme  $T = \frac{L}{U}$ ,  $t' = \frac{t}{T}$

dobivamo

$$\frac{\partial z'}{\partial t'} + \operatorname{div} (z' v') = 0$$

$$\frac{\partial (z' v')}{\partial t'} + (z' v' \nabla) v' + \frac{1}{F^2} z' \nabla z' - \frac{1}{R} \Delta (z' v') = 0$$

gdje je  $R = \frac{|v|L}{\nu}$  i Froudov broj  $F = \frac{|v|}{\sqrt{gz}}$ .

Ako proširimo (SVJPV1) i podijelimo sa  $z$ , dobivamo

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v + g \nabla z - \nu \frac{1}{z} \Delta (zv) = 0. \quad (\star)$$

Ako je  $F \ll 1$  i  $R \ll 1$ , tada  $g \nabla z$  dominira nad konvektivnim članom  $v \nabla v$  i difuzijskim članom  $\nu z^{-1} \Delta zv$ ; možemo aproksimirati  $(\star)$  i (SVJPV2) sa

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div} (zv) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \nabla z = 0$$

što je nelinearan hiperbolički sustav s brzinom propagiranja  $\sqrt{gz}$ .

Ako je  $R \gg 1$  možemo zanemariti viskozni član pa su SVJPV slične Eulerovim jednadžbama. Ako u  $(\star)$  stavimo  $u = zv$  tada postaju slične inkompresibilnim Navier-Stokes jednadžbama i tada imamo dobro postavljen problem sa zadanim početnim podacima za  $u$  i  $z$  i Dirichletovom granicom samo za  $u$ . Ako uvedemo sljedeću aproksimaciju

$$z^{-1} \Delta (zv) \cong \Delta v,$$

tada SVJPV postaju slične kompresibilnim Navier-Stokes jednadžbama

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v + g \nabla z - \nu \Delta v = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div} (zv) = 0.$$

Za ovaj problem postoji teorem o egzistenciji. To znači da je naš problem SVJPV dobro postavljen uz sljedeće rubne uvjete:

- (1)  $z, v$  su dani u  $t = 0$
- (2)  $v|_{\Gamma}$  i  $z$  zadani na svim točkama  $\Gamma$  gdje je  $v \cdot n < 0$

uz uvjet da  $z$  ostane strogo pozitivan. Ova činjenica se može potvrditi analizom sljedećeg problema

$$g \nabla z - \nu \Delta v = 0$$

$$\operatorname{div} (zv) = 0$$

uz uvjet (2). Sada vidimo da i male aproksimacije imaju drastičan utjecaj na matematička svojstva sustava.

Rubni uvjeti za jednadžbe plitke vode su problematični. Neki od težih primjera u praktičnim problemima su:

- na obalama kada  $z \rightarrow 0$ ,
- u dubokom moru gdje trebamo nereflektirajuću granicu ako domena nije cijela površina Zemlje,
- ako se spusti razina vode i pojavi se otok ( $z \equiv 0$ ).

### 3. NUMERIČKA SHEMA ZA METODU KONAČNIH ELEMENATA

Ovdje opisujemo numeričku shemu za visinu i brzinu uz korištenje metode konačnih elemenata. Možemo računati i visinu i fluks numerički pomoću metode konačnih elemenata, no o tome se može nešto više vidjeti u [1]. Računanje visine i brzine je nešto bolje za tretiranje konvektivnog člana u jednadžbi gibanja i rubnim uvjetima. Također, prva metoda bolje funkcioniра za tok veće brzine. Neki faktori koje treba uzeti u obzir kod odabira metoda su: rubni uvjeti, izbor varijable koju želimo sačuvati, postojanje šokova.

Kada je Froudeov broj malen koristimo metode koje su primjenjive na inkompresibilne Navier-Stokes jednadžbe radije nego modele vezane za Eulerove jednadžbe. Zanemarit ćemo produktni član  $\nabla z \nabla v$  (malen u usporedbi s  $v \nabla v$ ) u razvoju člana  $\Delta(zv)$  u formulaciji (SVJPV2) i  $(\star)$ , tj. gledamo sustav

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + v \nabla z + z \operatorname{div} v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v + g \nabla z - \nu \Delta v &= 0 \\ z(0) = z_0; \quad v(0) = v_0 &\quad \text{u } \Omega \\ v|_{\Gamma} = v_{\Gamma}; \quad z|_{\Sigma} = z_{\Gamma}. & \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je  $v_{\Gamma} = 0$ . Također,  $\Sigma \subset \Gamma$  je ulazna granica ( $v \cdot n < 0$ ). Diskretiziramo sustav koristeći Eulerovu shemu

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(z^{m+1} - z^m \circ X^m) + z^m \operatorname{div} v^{m+1} &= 0 \\ \frac{1}{k}(v^{m+1} - v^m \circ X^m) + g \nabla z^{m+1} - \nu \Delta v^{m+1} &= 0. \end{aligned}$$

Za prostornu diskretizaciju biramo  $Q_h \cong L^2(\Omega)$  i  $V_{oh} \cong H_0^1(\Omega)^n$  te nađemo rješenje  $[z_h^{m+1}, v_h^{m+1}]$  od

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(z_h^{m+1}, \frac{q_h}{z_h^m}) + (\operatorname{div} v_h^{m+1}, q_h) &= \frac{1}{k}(z_h^m \circ X_h^m, \frac{q_h}{z_h^m}) \quad \forall q_h \in Q_h, \\ \frac{1}{k}(v_h^{m+1}, w_h) + \nu(\nabla v_h^{m+1}, \nabla w_h) + g(\nabla z_h^{m+1}, w_h) &= \frac{1}{k}(v_h^m \circ X_h^m, w_h) \quad \forall w_h \in V_{oh}, \end{aligned} \quad (*)$$

gdje je  $X_h^m(x)$  aproksimacija od  $X(mk, x)$  što je rješenje od

$$\frac{dX}{d\tau} = v_h^m(X(\tau), \tau), \\ X((m+1)k) = x,$$

stoga se rubni uvjet na  $z_h|_{\Sigma}$  pojavljuje u računu od  $z_h^m \circ X_h^m(x)$ ,  $x \in \Sigma$ .

U svakoj iteraciji po vremenu se rješava linearan sustav koji je oblika

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{1}{kg}(w^i, w^j) + \frac{\nu}{g}(\nabla w^i, \nabla w^j), \\ B_{ij} &= (\nabla q^i, w^j), \\ D_{ij} &= \frac{1}{k} \int_{\Omega} \frac{q^i q^j}{z_h^m}, \\ F_j &= \frac{1}{g}(v_h^m \circ X_h^m, w^j), \\ G_j &= -\frac{1}{k}(z_h^m \circ X_h^m, \frac{q^j}{z_h^m}). \end{aligned}$$

Kao i u Stokesovom problemu, matrica sustava je simetrična, ali ovdje nije singularna za bilo koji izabrani element  $\{V_h, Q_h\}$ . Ustvari, koristeći (\*) kako bi eliminirali  $v_h^{m+1}$ , dobivamo jednadžbu za  $z_h^{m+1}$ :

$$(B^T A^{-1} B + D)Z = B^T A^{-1} F - G$$

čija matrica je uvijek pozitivno definitna. Sustav se može riješiti koristeći metodu konjugiranih gradijenata (kao i Stokesov problem). Stabilnost i konvergencija ove metode su i dalje otvoreni problemi, ali numerički performans metode je dobar.

#### 4. PRIMJERI

Oba primjera su pisana u *Octave*-u i izvedeni su samo za potrebe vizualizacije jednadžbi plitke vode. Korištena metoda je Lax-Wendorff koja se inače koristi za numeričko rješavanje hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i opisana je u [5].

Jednadžbe plitke vode koje rješavamo su oblika kao u [6]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial(uz)}{\partial x} + \frac{\partial(vz)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(uz)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2z + \frac{1}{2}gz^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uvz)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(vz)}{\partial t} + \frac{\partial(uvz)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2z + \frac{1}{2}gz^2)}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

gdje su  $u$  i  $v$  dvodimenzionalne brzine, a  $z$  pomak. Ako grupiramo parcijalne derivacije, zadaću možemo zapisati kao jednu hiperboličku jednadžbu

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

gdje su

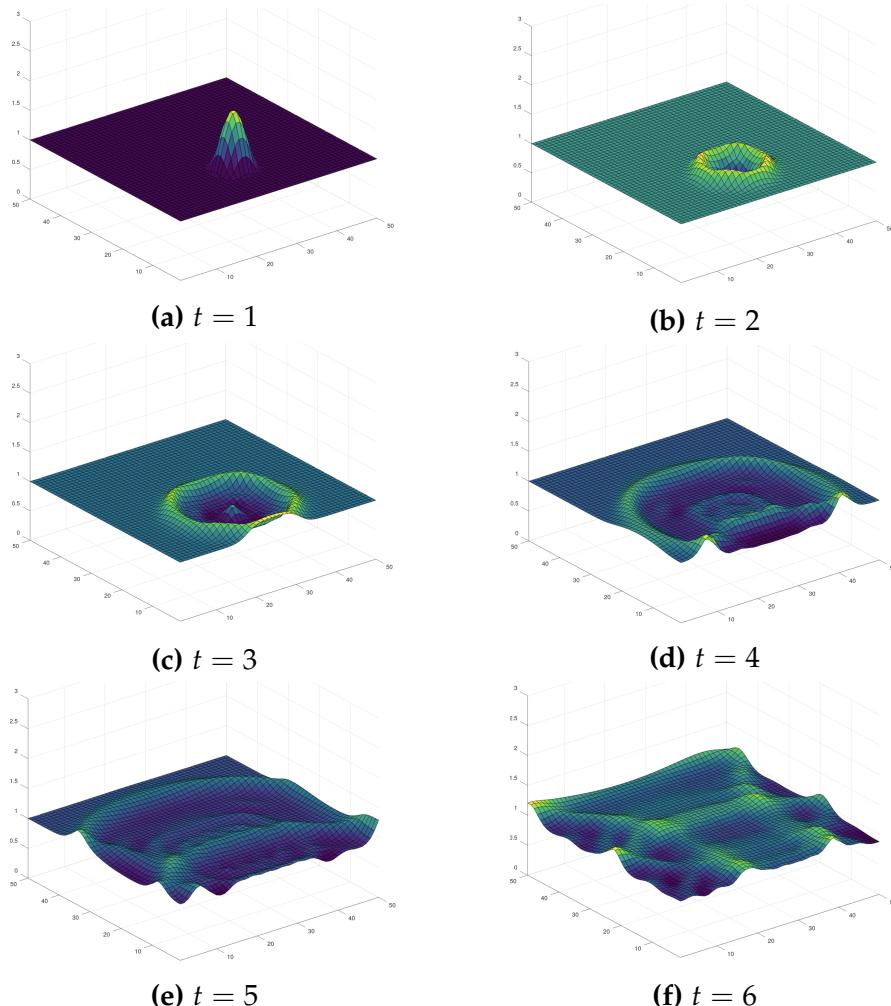
$$Z = \begin{pmatrix} z \\ uz \\ vz \end{pmatrix}, \quad U(Z) = \begin{pmatrix} uz \\ u^2z + \frac{1}{2}gz^2 \\ uvz \end{pmatrix}, \quad V(Z) = \begin{pmatrix} vz \\ uvz \\ v^2z + \frac{1}{2}gz^2 \end{pmatrix},$$

gdje je  $Z$  dvodimenzionalna matrica pomaka koja se koristi za crtanje mreže u animacijama.  $U$  je 2D matrica koja pohranjuje vrijednosti brzine u svakoj točki u  $x$  smjeru, a  $V$  u  $y$  smjeru.

#### 4.1. Kvadratna mreža

Prvi primjer je prikaz jednadžbi plitke vode u "kadi" na kvadratnoj mreži. To je najjednostavnija simulacija kojom možemo vidjeti kako se valovi reflektiraju o rubove na ograničenoj domeni. Prvi rubni uvjet kaže da su brzine na pozitivnom i negativnom dijelu  $x$  dimenzije jednake po magnitudi i suprotne po smjeru brzini koja je jedan red dalje. Taj prvi rubni uvjet ustvari kaže da se val reflektira od granice, tj. odbija. Drugi rubni uvjet je isti samo se odnosi na brzinu u  $y$  smjeru. Treći rubni uvjet zamjenjuje visinu ruba s visinom retka pored njega; ovo sprječava nestabilnost.

Matrica pomaka je inicijalno postavljena na 1. Nakon toga je u matricu dodan jedan "brijeg". Kod je pisan u *Octave-u* te je finalna simulacija izvedena pomoću funkcije `surf()` gdje kod uđe u beskonačnu petlju u kojoj se pomoću jednadžbi plitke vode računaju matrice za visinu i brzinu u  $x$  i  $y$  smjeru.

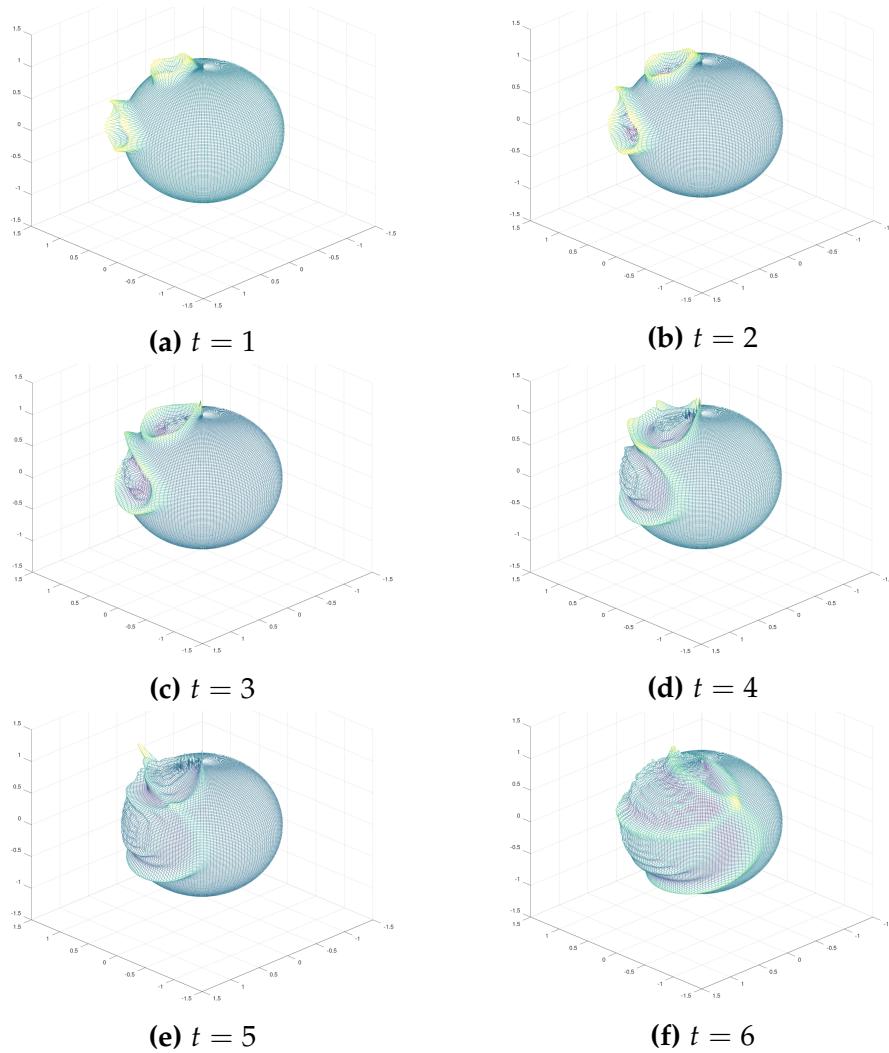


**Slika 1:** Isječci iz simulacije JPV na pravokutnoj domeni

## 4.2. Sferna mreža

Drugi primjer je simulacija udara dva asteroida u poprilično ogoljenu Zemlju (mreža oceana je numerički dosta zahtjevna, ali za one koji žele računati više je priložen odličan projekt s kodom u [3] - preporučam uz korištenje metode konačnih elemenata).

Zbog prirode matrice pomaka lako ju je primijeniti na druge površine. Kako bi simulirali sferu, najprije se generira sfera u pravokutnim koordinatama korištenjem *Octave*-ovih funkcija koje se zatim prevode u sferne koordinate . Radikalna matrica je zamijenjena matricom pomaka koja se onda vraća u pravokutne koordinate za potrebe crtanja. Zbog manjka objekata (kontinenta) na sferi dodani su neki proizvoljni rubovi radi nešto interesantnijeg prikaza.



**Slika 2:** Isječci iz simulacije JPV na sfernoj domeni

## LITERATURA

- [1] O. Pironneau. *Finite element methods for fluids*
- [2] Introduction to the Shallow Water Equations,  
<https://www.youtube.com/watch?v=gQ7KGhuE1e8t=1s>
- [3] Ocean Mesh 2D,  
<https://github.com/CHLNDEV/OceanMesh2D>
- [4] Teorija Elastičnosti (predavanja),  
<https://web.math.pmf.unizg.hr/tambaca/elasticnost/te.html>
- [5] Lax-Wendorff metoda,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Wendroff\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Wendroff_method)
- [6] Jednadžbe plitke vode,  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow\\_water\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Shallow_water_equations)