POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH

WSTĘP DO MULTIMEDIÓW (WMM)

ĆWICZENIE LABORATORYJNE #1

Analiza częstotliwościowa sygnałów czasu dyskretnego

OPRACOWAŁ: DR INŻ. PAWEŁ MAZUREK

WARSZAWA, MARZEC 2021

CELE ĆWICZENIA

- Ilustracja związków między opisem w dziedzinie czasu i opisem w dziedzinie częstotliwości dla wybranych sygnałów czasu dyskretnego.
- Wyznaczanie dyskretnej transformaty Fouriera i szybkiej transformaty Fouriera sygnałów czasu dyskretnego.
- Badanie widma amplitudowego i widma fazowego sygnałów czasu dyskretnego.
- Wizualizacja splotu sygnałów czasu dyskretnego.
- Wyznaczanie szybkiej transformaty Fouriera splotu dwóch sygnałów czasu dyskretnego.

WYMAGANE WIADOMOŚCI TEORETYCZNE

1. Dyskretna transformata Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transform*, DFT)

Dany jest sygnał czasu dyskretnego $x[n]$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, w postaci ciągu liczb rzeczywistych lub zespolonych. Dyskretną transformatą Fouriera (DFT) sygnału $x[n]$ nazywa się ciąg liczb $X[k]$ zdefiniowany następująco:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \text{, dla } k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1}$$

Odwrotna DFT ma postać:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \text{, dla } n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2}$$

Para dyskretnych transformat Fouriera opisana relacjami (1) i (2) będzie oznaczana $x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$. Na podstawie (1) i (2) można stwierdzić, że zarówno sygnał $x[n]$ jak i jego transformata $X[k]$ są funkcjami *N*-okresowymi. Stąd też granice sumowania we wzorach (1) i (2) mogą być zmienione następująco:

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \text{, dla } k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} X[k] e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \text{, dla } n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4}$$

1.1. Związek z szeregiem Fouriera

Jak wiadomo, każda ciągła funkcja okresowa $x(t)$ o okresie podstawowym *T* może być rozwinięta w zespolony szereg Fouriera postaci:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \text{, gdzie } c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt \tag{5}$$

Sygnał $x(t)$ w wyniku operacji próbkowania przekształca się w ciąg N próbek $x(n\Delta t)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, gdzie $\Delta t = \frac{T}{N}$. Zakłada się ponadto, że spełniony jest warunek Nyquista $\Delta t \le \frac{1}{2} f_m$, gdzie f_m jest maksymalną częstotliwością występującą w widmie sygnału $x(t)$. Ciąg $x(n\Delta t)$ oznaczany będzie $x[n]$. W wyniku opisanej dyskretyzacji współczynnik c_k z równania (5) przyjmuje postać (przyjęto chwilę czasową $t_0 = 0$):

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt \approx \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \cdot x(n\Delta t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}n\Delta t} = \frac{\Delta t}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} X[k] \tag{6}$$

Jak wynika z przeprowadzonego rozumowania, DFT jest rezultatem przejścia od przekształcenia Fouriera dla sygnałów ciągłych do przekształcenia Fouriera dla sygnałów dyskretnych.

1.2. Związek z transformatą Fouriera

Jak wiadomo, dla każdego sygnału ciągłego absolutnie całkowalnego istnieje przekształcenie Fouriera zdefiniowane wzorem:

$$X(\omega) = \int x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{7}$$

Przeprowadzając opisaną w sekcji 1.1 dyskretyzację: $t \to n\Delta t$, $\omega \to k\Delta\omega = k\frac{2\pi}{T}$, $T = N\Delta t$ otrzymuje się:

$$X(k\Delta\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}n\Delta t} = \frac{T}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = T \cdot X[k], \text{ dla } k = 0, \pm 1, \ldots \pm \frac{N}{2} \tag{8}$$

gdzie $X[k]$ oznacza DFT zdefiniowaną wzorem (1). Na podstawie relacji (8) stwierdza się, że DFT jest zdyskretyzowanym przekształceniem Fouriera. Gdy przedział T jest znormalizowany i równy 1, to $X(k\Delta\omega) = X[k]$.

1.3. Własności dyskretnej transformaty Fouriera

- Jeżeli $x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$, to $x[-n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[-k]$.
- Jeżeli $x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$, to $x^*[-n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X^*[k]$.
- *Liniowość*

  Jeżeli $x_1[n]$ i $x_2[n]$ są sygnałami dyskretnymi N-okresowymi oraz $x_1[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X_1[k]$ i $x_2[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X_2[k]$, a ponadto oraz $\alpha, \beta = \text{const}$, to $\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} \alpha X_1[k] + \beta X_2[k]$.
- *Przesunięcie w dziedzinie czasu*:

  Jeżeli $x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$, to $x[n - n_0] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$.
- *Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości*:

  Jeżeli $x[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k]$, to $x[n] e^{jk_0\frac{2\pi}{N}n} \overset{DFT}{\leftrightarrow} X[k - k_0]$.
- *Twierdzenie o splocie kołowym*:

  Jeżeli $x_1[n]$ i $x_2[n]$ są sygnałami dyskretnymi N-okresowymi oraz $x_1[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X_1[k]$ i $x_2[n] \overset{DFT}{\leftrightarrow} X_2[k]$, to transformata $Y[k]$ splotu cyklicznego zdefiniowanego w postaci $y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m] x_2[n-m]$ jest iloczynem transformat sygnałów $x_1[n]$ i $x_2[n]$, tzn. $Y[k] = X_1[k] X_2[k]$.

1.4. Złożoność obliczeniowa algorytmu DFT

Wyznaczając $X[k]$ ze wzoru (1) dla ustalonego argumentu k należy wykonać N mnożeń oraz $N-1$ dodawań. Ponieważ k zmienia się w zakresie od 0 do $N-1$, to wyznaczenie DFT ciągu $x[n]$ wymaga wykonania N^2 mnożeń oraz $N(N-1)$ dodawań, co daje w konsekwencji złożoność obliczeniową DFT rzędu N^2.

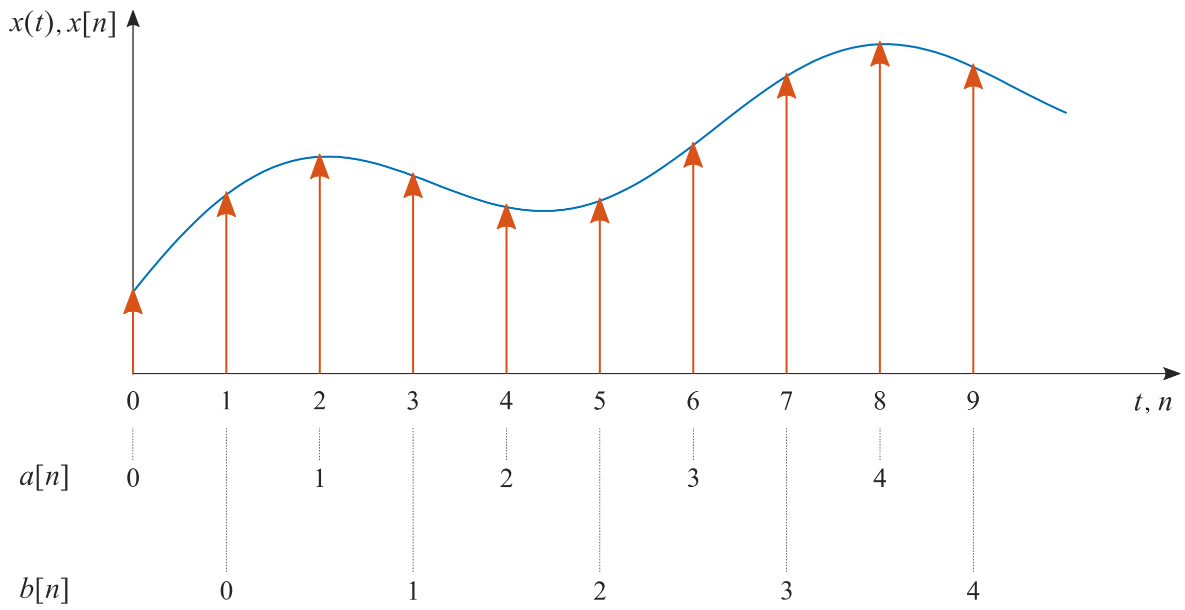
2. Szybka transformata Fouriera (ang. *Fast Fourier Transform*, FFT)

Realizacja obliczeń DFT, jak wynika z przeprowadzonej analizy, wymaga liczby operacji proporcjonalnej do N^2. Przy dostatecznie dużych N pojawiają się trudności obliczeniowe zwłaszcza przy obróbce sygnałów w czasie rzeczywistym. Szybka transformacja Fouriera jest algorytmem numerycznego wyznaczania DFT polegającym na zmniejszeniu liczby operacji obliczeniowych i liczby danych pośrednich. Zakłada się, że N powinno by potęgą 2. Istnieją dwie wersje tego algorytmu znane jako:

- FFT z przemieszaniem próbek w czasie lub z podziałem czasowym (ang. *decimation in time*)
- FFT z przemieszaniem próbek w częstotliwości lub z podziałem częstotliwościowym (ang. *decimation in frequency*)

W niniejszej instrukcji zostanie omówiony dokładniej algorytm FFT z podziałem czasowym.

Ogólna idea rozpatrywanego algorytmu polega na sformułowaniu w pierwszym etapie $N/2$ przekształceń 2-punktowych, ich połączeniu, a następnie sformułowaniu $N/4$ przekształceń 4-punktowych itd. I tak w pierwszej kolejności próbki sygnału $x[n]$ dzielone są na dwie podgrupy, jedną o indeksach parzystych i drugą o indeksach nieparzystych. Otrzymuje się dwa ciągi próbek: $a[n]=x[2n]$ i $b[n]=x[2n+1]$, $n=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$, co uwidoczniono na rysunku 1.



Rys. 1. Podział próbek sygnału $x(t)$ na dwa podciągi o indeksach parzystych i nieparzystych.

Wzór (1) sprowadza się do następującej postaci

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1}\left(a[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}2n}+b[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2n+1)}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1}a[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}2n}+e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\sum_{n=0}^{N/2-1}b[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}2n} \\ &= A[k]+e^{-jk\frac{2\pi}{N}}B[k] \end{aligned} \tag{9}$$

co oznacza, że w praktyce liczone są oddzielnie dwa $N/2$ -punktowe dyskretne przekształcenia Fouriera dla $a[n]$ i $b[n]$, $n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$. Oba przekształcenia $A[k]$ i $B[k]$ są funkcjami $N/2$ -okresowymi. Wyznaczmy $X\left[k + \frac{N}{2}\right]$ korzystając z (9):

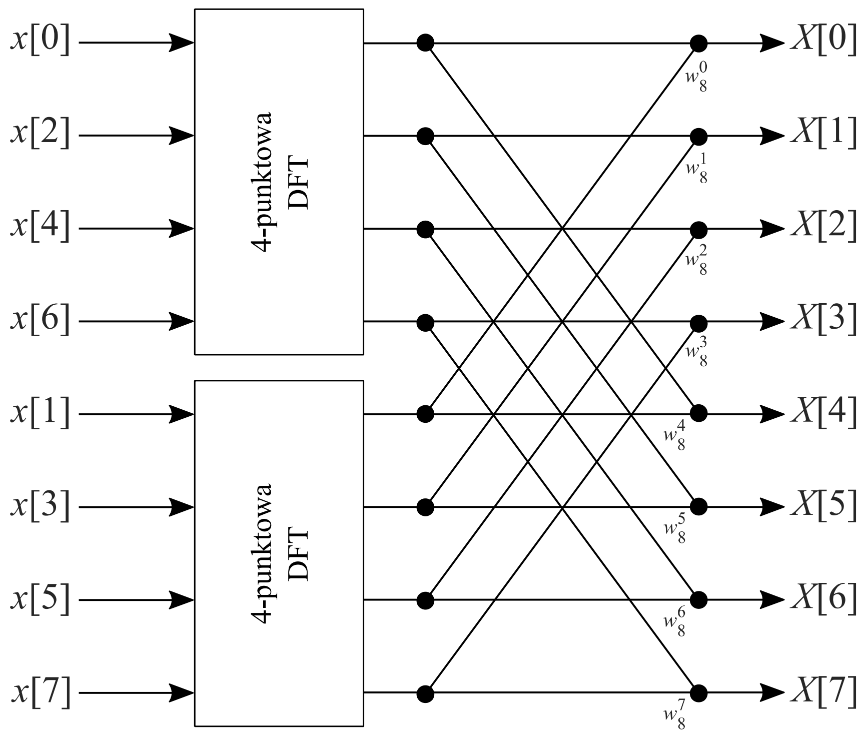
$$
\begin{aligned}
X[k + N/2] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(a[n] e^{-j\left(k+\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}2n} + b[n] e^{-j\left(k+\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}(2n+1)} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} a[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}2n} \underbrace{e^{-j\left(\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}2n}}_{1} + \sum_{n=0}^{N/2-1} b[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}2n} \underbrace{e^{-j\left(\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}2n}}_{1} e^{-j\left(k+\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}} \\
&= A[k] + e^{-j\left(k+\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{N}} B[k] \\
&= A[k] + e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{-j\pi}}_{-1} B[k] \\
&= A[k] - e^{-jk\frac{2\pi}{N}} B[k]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Podstawiając $w_N \equiv e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, otrzymujemy:

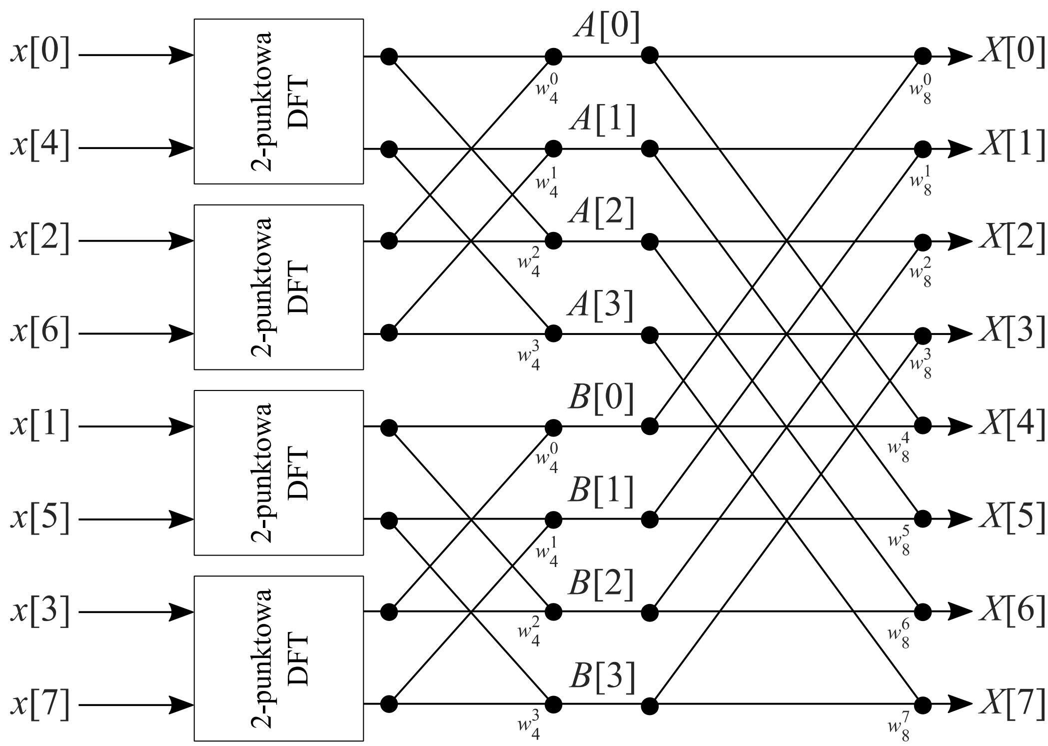
$$X[k] = A[k] + w_N^k B[k] \tag{11}$$

$$X[k + N/2] = A[k] - w_N^k B[k] \tag{12}$$

Powyższe operacje powtarzamy dla każdego $k = 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1$, czyli do wyznaczenia *N*-punktowej FFT należy wykonać $\frac{N}{2}$ operacji mnożenia oraz *N* operacji dodawania (wliczając odejmowanie). Podział *N*-punktowego przekształcenia na dwa $\frac{N}{2}$ -punktowe, następnie na $\frac{N}{4}$ -punktowe itd. dokonuje się *l* razy ($N = 2^l$), aż do otrzymania przekształcenia 2-punktowego. Tak więc całkowita liczba operacji elementarnych wynosi $\frac{N}{2} l = \frac{N}{2} \log_2 N$ operacji mnożenia oraz $Nl = N \log_2 N$ operacji sumowania. Na Rys. 2 i Rys. 3 przedstawiono schematy obliczeń 8-punktowej FFT.



Rys. 2. Graf motylkowy 8-punktowej FFT z podziałem na dwie 4-punktowe FFT.



Rys. 3. Graf motylkowy 8-punktowej FFT z podziałem na cztery 2-punktowe FFT.

3. Splot cykliczny

Splot cykliczny (oznaczony symbolem $\otimes$) dwóch ciągów $x[n]$ i $y[n]$ zdefiniowany jest następująco:

$$x[n] \otimes y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\, y\left[(n-m)_N\right] \tag{13}$$

gdzie

$$y\left[(-n)_N\right] = \begin{cases} y[0] & \text{dla} \quad n = 0 \\ y[N-n] & \text{dla} \quad n = 1, \ldots, N-1 \end{cases} \tag{14}$$

Można pokazać, że DFT ma następującą własność:

$$x[n] \otimes y[n] \overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow} X[k] \cdot Y[k] \tag{15}$$

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

Wojciechowski, J.M., *Sygnały i Systemy*, Warszawa: WKiŁ, 2008.

Lyons, R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Warszawa: WKiŁ 1999.

Marven, C., Ewers G., *Zarys cyfrowego przetwarzania sygnałów*, Warszawa: WKiŁ 1999.

Ozimek, E., *Podstawy teoretyczne analizy widmowej sygnałów*, Warszawa: PWN 1985.

Papoulis, A., *Obwody i układy*, Warszawa: WKiŁ 1988.