Санкт-Петербургский государственный университет

Романова Елизавета Юрьевна

Выпускная квалификационная работа

Одноранговая аппроксимация неотрицательных матриц с использованием методов тропической математики

Уровень образования: магистратура

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Основная образовательная программа ВМ.5688.2018 «Прикладная математика и информатика»

Профессиональная траектория «Статистическое моделирование»

Научный руководитель:
профессор, кафедра статистического
моделирования,
д-р физ.-мат. наук, доц. Н. К. Кривулин

Рецензент:
старший научный сотрудник,
Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,
Н. Н. Васильев

Санкт-Петербург

2020

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Statistical Modelling

Romanova Elizaveta Yuryevna

Graduation Project

Rank-one approximation of nonnegative matrices using methods of tropical mathematics

Scientific Supervisor:
Professor, Department of Statistical Modelling, N. K. Krivulin

Reviewer:
Senior Researcher, St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, N. N. Vasiliev

Saint Petersburg
2020

Оглавление

Введение

Задача приближенной матричной факторизации (мультипликативного разложения) состоит в аппроксимации заданной матрицы при помощи произведения нескольких матриц, обладающих определенными свойствами. Приближение матрицы при помощи произведения двух матриц меньшего размера приводит к малоранговой аппроксимации и используется в задачах статистики [1, 2], анализа данных [3, 4], обработки изображений [5], теории графов [6], принятия решений [7–10]. Обзор приложений матричной факторизации и аппроксимации представлен в работах [11–14]. Во многих прикладных задачах [1, 2, 5–10, 15] возникает необходимость в использовании одноранговой факторизации, при которой исходная матрица приближается произведением вектора-столбца и вектора-строки.

В практических задачах могут возникать ограничения, которым должны удовлетворять матрицы, полученные в результате факторизации. Например, распространенным является условие неотрицательности их элементов [3, 6, 11, 16, 17]. В некоторых приложениях требуется, чтобы элементы матриц факторизации не выходили за пределы определенного диапазона значений [4] или были связаны между собой определенными соотношениями [9, 10]. В случае, если некоторые значения исходной матрицы не определены (пропущены), решение задачи факторизации включает заполнение пропусков [18, 19].

В основе методов решения задачи аппроксимации матриц обычно лежит использование расстояния Евклида в качестве функции ошибки аппроксимации [7, 20–22]. Другим распространенным подходом к решению задачи является минимизация манхэттенского расстояния [23, 24], на величину которого меньше влияют отдельные большие разности (выбросы), так как они не возводятся в степень. Для минимизации максимальной ошибки по всем элементам матрицы используют расстояние Чебышева [24, 25].

При аппроксимации положительных матриц можно вычислять функцию ошибки в логарифмической шкале, то есть сравнивать логарифмы элементов исходной и приближающей матрицы. Для манхэттенского расстояния такой подход использован в [26], где задача одноранговой аппроксимации сводится к задаче линейного программирования. Задача минимизации расстояния Чебышева в логарифмической шкале (log-чебышевского расстояния) может быть сведена к задаче конического программирования второго порядка, как в работе [27], и решена, например, барьерным методом [28]. Подходы на основе методов математического программирования, как правило, обеспечивают алгоритмическое решение, которое ограничивается нахождением одной аппроксимирующей матрицы и требует применения специальных программных средств. Такой подход не позволяет получить все решения аналитически в виде явных формул, удобных для дальнейшего анализа и непосредственных расчетов. Разработка аналитических решений задачи позволяет расширить и дополнить возможности существующих численных процедур и представляет особый интерес, когда применение алгоритмических решений по тем или иным причинам оказывается невозможным или нецелесообразным.

При использовании расстояния Чебышева в логарифмической шкале в качестве функции ошибки аппроксимации оказывается возможным получение аналитического решения задачи. Подход к решению задачи log-чебышевской аппроксимации на основе применения методов тропической математики позволяет получить полное решение в явном виде и допускает введение дополнительных ограничений на допустимые решения.

Тропическая (идемпотентная) математика занимается изучением теории алгебраических структур с идемпотентным сложением. В настоящее время тропическая математика является одним из активно развивающихся разделов прикладной математики, что обусловлено постоянным расширением области ее приложений. Многие задачи экономики, техники, управления и других сфер человеческой деятельности могут быть решены при помощи идемпотентной математики. Ряд задач после перехода к терминам идемпотентных полуколец или полуполей сводится к решению систем линейных уравнений и неравенств, нахождению собственных чисел и векторов линейного оператора и тому подобным процедурам. Кроме того, некоторые вычислительные алгоритмы линейной алгебры, такие как метод Гаусса-Зейделя и алгоритм Якоби, имеют свои идемпотентные аналоги, что в некоторых случаях позволяет облегчить представление и интерпретацию результатов.

Тропическая математика часто используется в приложении к задачам оптимизации, включая задачи размещения, принятия решений, сетевого планирования и другие. Значительная часть этих задач может быть решена с использованием вычислительных алгоритмов за конечное число шагов, например методов линейного и смешанного целочисленного линейного программирования. Итерационные процедуры, которые применяются в этих методах, позволяют получить частное решение или определить, что решений не существует. В отличие от решений с помощью таких процедур, решения на основе методов тропической оптимизации во многих случаях позволяют найти все множество решений в явном виде в матричной форме. Прямые явные решения позволяют проводить дальнейшее исследование множества решений, в частности, изучать влияние дополнительных ограничений.

К предпосылкам появления тропической математики можно отнести работы [29, 30]. Становлению тропической математики способствовали работы представителей Ленинградской научной школы: Н. Н. Воробьева [31–33] и А. А. Корбута [34, 35], в которых была построена теория идемпотентных векторных полумодулей («экстремальных векторных пространств»), а также работы И. В. Романовского [36–38] по изучению асимптотических свойств решений задач динамического программирования.

Значительное влияние на развитие тропической математики оказали монографии Р. А. Кунингхайм-Грина [39] и У. Циммерманна [40], в которых описывается целый ряд подходов к решению различных задач в терминах идемпотентной алгебры.

Дальнейшее развитие эта область поучила при активном участии научного коллектива, возглавляемого академиком В. П. Масловым, в рамках построения теории идемпотентного функционального анализа. Исследования В. П. Маслова, В. Н. Колокольцева, Г. Л. Литвинова, А. Н. Соболевского и их коллег, представленные в работах [41–43] и других, обеспечили теоретическую и методологическую основу для развития современной тропической математики, которая включает в себя такие направления как идемпотентная алгебра, идемпотентный анализ и идемпотентный функциональный анализ.

За последние десятилетия идемпотентная математика приобрела статус одной из наиболее интенсивно развивающихся областей. Успехи этой отрасли отражены в монографиях [44–49], а также в других многочисленных работах российских и зарубежных авторов. Подробный обзор моделей, методов и приложений тропической математики представлен в работах [41, 45, 46, 48, 50].

Экстремальные задачи, которые могут быть записаны и решены в терминах идемпотентных структур (задачи тропической оптимизации), образуют важное направление исследований в тропической математике [51, 52]. Такие задачи возникают во многих областях, включая сетевое планирование [39, 53, 54], принятие решений [10, 55–58], задачи размещения [59–61], анализ потоков в транспортных сетях [40, 62] и других. Задачи тропической оптимизации обычно формулируются как задачи минимизации (максимизации) функционалов, определенных на векторах над идемпотентным полуполем, и могут включать ограничения на допустимые решения в виде векторных равенств и неравенств. Целевые функции этих задач могут быть как линейными [40], так и нелинейными [39,63]. Нелинейные целевые функции чаще всего могут быть представлены с помощью оператора мультипликативно сопряженного транспонирования. Решению задач тропической оптимизации посвящен ряд работ, включая [39,40,48,49,51,52]. Для многих задач тропической оптимизации может быть получено полное решение в явном виде [10,40,51,52,59,63].

Применение методов тропической оптимизации к задаче одноранговой log-чебышевской аппроксимации квадратных положительных матриц рассматривалось в работах [9,10,48]. В статьях [9,10] представлено полное решение задачи для случая аппроксимации обратно симметрическими матрицами, причем в [9] задача решается с учетом ограничений, которым должна удовлетворять аппроксимирующая матрица. Частное решение задачи аппроксимации произвольными матрицами единичного ранга, которое строится при помощи тропических собственных векторов некоторых матриц, получаемых из исходной матрицы, было дано в [48]. Интерес представляет построение аналитических формул, описывающих все положительные матрицы единичного ранга, на которых достигается минимум погрешности log-чебышевской аппроксимации. Также актуальным развитием этой задачи является аппроксимация (факторизация) прямоугольных положительных матриц при наличии ограничений на значения элементов векторов в полученном разложении.

В настоящей работе предлагается полное решение задачи одноранговой факторизации (аппроксимации) квадратных положительных матриц на основе минимизации log-чебышёвского расстояния. Задача аппроксимации приводится к задаче оптимизации, записанной в компактной форме в терминах идемпотентного полуполя с операцией вычисления максимума в роли сложения, которое часто называют max-алгеброй. С помощью методов тропической оптимизации [51,52,64,65] построены прямые аналитические решения задачи при различных предположениях о пропущенных (неопределенных) элементах матрицы, для которой строится разложение. Затем рассматривается задача одноранговой факторизации для произвольной прямоугольной матрицы при наличии двусторонних ограничений на векторы в приближенном разложении. Полное прямое решение этой задачи также представлено в двух формах: для произвольной положительной матрицы с пропусками и для матрицы без полностью неопределенных столбцов (строк). Полученные результаты позволяют находить векторы мультипликативного разложения с помощью выражений в параметрической форме, удобной для дальнейшего анализа и непосредственных вычислений.

Результаты настоящей работы были представлены на 7-й и 8-й всероссийских научных конференциях по проблемам информатики СПИСОК-2017 и СПИСОК-2019 (Санкт-Петербург, Россия – 2017, 2019), на международной конференции Mathematical Modeling (Borovets, Bulgaria – 2017), Международной конференции Polynomial Computer Algebra PCA'2019 (Санкт-Петербург, Россия – 2019).

Исследования по теме работы были поддержаны грантом Российского гуманитарного научного фонда РГНФ № 16-02-00059 – «Развитие моделей и методов тропической математики в прикладных задачах экономики и управления», а также грантами Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ № 18-010-00723 – «Разработка моделей и методов тропической математики для прикладных задач экономики и управления» и № 20-010-00145 «Модели и методы тропической оптимизации в прикладных задачах экономики и управления».

По теме диссертационной работы опубликованы статьи [66, 67] в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, переводы которых [68, 69] индексируются в международных библиографических базах Web of Science и Scopus. Всего по результатам диссертации опубликовано 7 работ [66–72].

Работа устроена следующим образом.

В главе 1 приводятся предварительные результаты, необходимые для последующего решения задачи одноранговой факторизации. В разделе 1.1 задача одноранговой факторизации положительных матриц формулируется как задача минимизации расстояния Чебышева в логарифмической шкале. С целевой функцией задачи проводится ряд преобразований, позволяющих перейти к эквивалентной задаче оптимизации, которую после введения соответствующих определений раздела 1.2 можно записать в терминах тропической математики. Также приводится формулировка задачи одноранговой факторизации с двусторонними ограничениями на векторы приближенного разложения. Раздел 1.2 содержит определения, обозначения и предварительные результаты тропической математики, которые требуются для постановки и решения задач тропической оптимизации. В следующем разделе описан переход от экстремальных задач, полученных в разделе 1.1, к задачам тропической оптимизации в терминах max-алгебры — идемпотентного полуполя, которое использует операцию максимума в качестве сложения.

В главе 2 в терминах общего идемпотентного полуполя рассматривается задача тропической оптимизации, целевая функция которой определяется некоторой квадратной матрицей, и предлагаются полные решения этой задачи в виде явных параметрических формул: в разделе 2.1 строится решение для произвольной ненулевой матрицы, а в разделе 2.2 решение записывается в другой форме в предположении, что исходная матрица не содержит нулевых столбцов. В последнем разделе настоящей главы осуществляется приложение этих результатов к решению задачи аппроксимации матриц и приводятся аналитический и численный примеры.

Глава 3 посвящена решению задачи тропической оптимизации с прямоугольной матрицей и ограничениями на область допустимых решений. Разделы 3.1 и 3.2 описывают построение полного решения задачи для произвольной прямоугольной матрицы и для матрицы без нулевых столбцов (строк). В разделе 3.3 обсуждается применение полученных теорем к решению задачи факторизации матриц с пропусками с учетом ограничений на элементы матриц в разложении. Сначала для иллюстрации применения методов приводится численный пример факторизации с ограничениями для квадратной матрицы с пропусками, который является расширением примера из предыдущей главы. Затем в разделе 3.3.2 приводится пример факторизации прямоугольной матрицы с пропусками. В разделе 3.3.3 показывается, что задачу приближения множества точек при помощи прямой можно решать построенными методами, и приводится графический пример аппроксимации точек на плоскости. Раздел 3.3.4 описывает приложение полученных результатов к решению задачи обработки экспертных оценок и ранжирования объектов.

В заключении перечислены основные результаты настоящего исследования.

Глава 1

Предварительные результаты

1.1. Приближенная одноранговая факторизация

В этом разделе обсуждается задача приближенной одноранговой факторизации матриц при помощи log-чебышевской аппроксимации. Аппроксимация матриц на основе минимизации расстояния Чебышева в логарифмической шкале также рассматривалась в работах [9, 10, 57, 58], где были получены результаты для аппроксимации обратно симметрическими матрицами единичного ранга.

Задача одноранговой факторизации матрицы формулируется в виде задачи аппроксимации этой матрицы с помощью произведения вектора-столбца и вектора-строки в следующей форме:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}), \tag{1.1}$$

где d — функция, измеряющая ошибку аппроксимации, $\boldsymbol{A}$ — заданная матрица, $\boldsymbol{x}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{y}^{-}$ — вектор-строка, полученная из вектора-столбца $\boldsymbol{y}$ путем транспонирования и замены каждого ненулевого элемента на обратный.

Рассмотрим задачу одноранговой факторизации положительной матрицы при помощи минимизации log-чебышевского расстояния. Пропущенные элементы матрицы доопределим нулями. С использованием логарифма по основанию больше единицы задача одноранговой факторизации с помощью аппроксимации положительной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матрицей $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где $\boldsymbol{x} = (x_i)$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{y}^{-} = (y_j^{-1})$ — вектор-строка, записывается в виде задачи минимизации расстояния

$$\max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} |\log a_{ij} - \log x_i y_j^{-1}|. \tag{1.2}$$

В случае матрицы без пропусков минимальное возможное значение функции (1.2) равно нулю и достигается тогда и только тогда, когда исходная матрица имеет единичный ранг, а потому задача одноранговой факторизации решается точно.

Для log-чебышевского расстояния в силу свойства монотонности логарифма по основанию больше единицы выполняется равенство

$$\max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} |\log a_{ij} - \log x_i y_j^{-1}| = \log \max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} \max(x_i^{-1} a_{ij} y_j, x_i a_{ij}^{-1} y_j^{-1}).$$

Так как минимумы логарифма и его аргумента в правой части последнего равенства достигаются одновременно, минимизация log-чебышевского расстояния эквивалентна минимизации аргумента логарифма. Тогда задача одноранговой факторизации сводится к задаче

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} \max(x_i^{-1}a_{ij}y_j, x_i a_{ij}^{-1}y_j^{-1}). \tag{1.3}$$

При этом ошибка факторизации в log-чебышевском смысле будет равна логарифму от значения минимальной ошибки в задаче (1.3).

Интерес также представляет рассмотрение задачи одноранговой факторизации при наличии ограничений на векторы разложения:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}), \\ &\qquad \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ — заданные векторы.

Задача одноранговой факторизации с ограничениями с использованием log-чебышевской функции ошибки аналогичным образом приводится к задаче

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \max_{(i,j):a_{ij}\neq 0} \max(x_i^{-1}a_{ij}y_j, x_i a_{ij}^{-1}y_j^{-1}), \\ &\qquad \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2. Элементы тропической математики

В этом разделе представлены основные понятия и предварительные результаты тропической (идемпотентной) математики [48,51,52], которые будут применяться в дальнейшем. Дополнительные сведения по теории и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [41, 47, 49].

1.2.1. Идемпотентное полуполе

Рассмотрим непустое множество $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и содержит их нейтральные элементы нуль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение обладает свойством идемпотентности, согласно которому $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Умножение дистрибутивно относительно сложения и для любого ненулевого x существует обратный по умножению элемент x^{-1} такой, что

$x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$. Описанная алгебраическая структура называется идемпотентным полуполем. Далее при записи алгебраических выражений знак умножения $\otimes$ для краткости опускается.

Операция возведения элемента в целую степень определяется стандартным образом. Для любого ненулевого $x \in \mathbb{X}$ и натурального числа p имеем

$$x^0 = \mathbb{1}, \qquad x^p = x^{p-1}x, \qquad x^{-p} = (x^{-1})^p, \qquad \mathbb{0}^p = \mathbb{0}.$$

Дополнительно будем предполагать, что для любого $a \in \mathbb{X}$ уравнение $x^p = a$ имеет единственное решение при всех натуральных p, что обеспечивает существование рациональных степеней.

Для любых $x, y \in \mathbb{X}$ и рационального числа $\alpha \geq 0$ выполняется тропический аналог биномиального тождества:

$$(x \oplus y)^\alpha = x^\alpha \oplus y^\alpha.$$

Идемпотентность сложения индуцирует на $\mathbb{X}$ частичный порядок так, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Из этого определения, в частности, следует справедливость неравенств $x \leq x \oplus y$ и $y \leq x \oplus y$, а также то, что неравенство $x \oplus y \leq z$ равносильно паре неравенств $x \leq z$, $y \leq z$.

Операции сложения и умножения монотонны относительно введенного порядка, что означает для любых $x \leq y$ и любого z выполнение неравенств $x \oplus z \leq y \oplus z$ и $xz \leq yz$. Кроме того, нетрудно проверить, что для ненулевых x, y и рационального числа $p > 0$ из неравенства $x \leq y$ следуют неравенства $x^p \leq y^p$ и $x^{-p} \geq y^{-p}$.

Далее дополнительно предполагается, что порядок является линейным.

1.2.2. Примеры идемпотентных полуполей

В качестве примера рассмотрим идемпотентное полуполе, которое определено на множестве неотрицательных вещественных чисел и в роли сложения $\oplus$ использует операцию взятия максимума, а в роли умножения $\otimes$ — обычное арифметическое умножение. Нейтральные элементы $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ совпадают с арифметическими 0 и 1. Понятия обратного элемента и степени имеют обычный смысл. Отношение порядка, индуцированное идемпотентным сложением, совпадает с естественным линейным порядком на неотрицательной вещественной полуоси. Такое полуполе обычно называют max-алгеброй.

Другим примером является полуполе, которое часто называют $(\max, +)$-алгеброй. Это полуполе определено на вещественной полуоси, расширенной элементом $-\infty$, и имеет в качестве сложения операцию максимума, а в качестве умножения — операцию арифметического сложения. Нулем в этом полуполе является $-\infty$, а единицей — арифметический 0. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует обратный элемент x^{-1}, который в обычной арифметике соответствует $-x$. Для любого вещественного x и рационального p определена степень x^p, значение которой соответствует арифметическому произведению px. Отношение $\leq$ определяет обычный линейный порядок.

1.2.3. Матрицы и векторы

Обозначим через $\mathbb{X}^{m\times n}$ множество матриц с элементами из $\mathbb{X}$, которые имеют m строк и n столбцов. Матрица, состоящая только из нулевых элементов, называется нулевой и обозначается $\mathbf{0}$. Квадратная матрица, диагональные элементы которой равны единице $\mathbb{1}$, а недиагональные — нулю $\mathbb{0}$, называется единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$. В случае max-алгебры нулевая и единичная матрицы имеют обычный вид. Матрица, у которой все элементы ниже или выше диагонали являются нулевыми, — треугольная. Матрицу будем называть разложимой, если ее можно привести к блочно-треугольному виду перестановкой строк вместе с такой же перестановкой столбцов. В противном случае будем называть матрицу неразложимой. Матрица называется регулярной по столбцам (строкам), если в каждом столбце (строке) имеется по крайней мере один ненулевой элемент.

Для любых матриц

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}, \qquad \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}, \qquad \boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times l}$$

и скаляра $\alpha \in \mathbb{X}$ матричное сложение и умножение, а также умножение матрицы на число определяются стандартным путем по формулам

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad \{\boldsymbol{BC}\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}, \qquad \{\alpha\boldsymbol{A}\}_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ из $\mathbb{X}^{m\times n}$ называется преобразование в матрицу $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$ с элементами

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для любой ненулевой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и целого $p > 0$ определены степени матрицы

$$\mathbf{0}^p = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A}.$$

Матричные неравенства рассматриваются как покомпонентные в смысле введенного на $\mathbb{X}$ отношения порядка. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ одинакового размера верны неравенства $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$, а неравенство $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{C}$ эквивалентно системе неравенств $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \leq \boldsymbol{C}$. Операции матричного сложения и умножения обладают свойством монотонности, а операция мультипликативно-сопряженного транспонирования — свойством антитонности, согласно которым для любых матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ подходящего размера из неравенства $\boldsymbol{A} \leq \boldsymbol{B}$ следуют неравенства $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{C} \leq \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} \leq \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}$, а также для матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ без нулевых элементов неравенство $\boldsymbol{A}^- \geq \boldsymbol{B}^-$.

След квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Для любого числа $\alpha \in \mathbb{X}$ и матриц $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{X}^{n\times m}$ верны равенства

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{B}, \qquad \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}), \qquad \operatorname{tr}(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha \operatorname{tr} \boldsymbol{A}.$$

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ введем функцию

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^k.$$

Рассмотрим бесконечную сумму степеней матрицы $\boldsymbol{A}$ (матрицу Клини [29])

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^2 \oplus \cdots = \bigoplus_{k\geq 0} \boldsymbol{A}^k.$$

Если матрица $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то для матрицы Клини справедливо следующее равенство [43, 73]:

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k.$$

Из последней формулы следует, что для всех целых неотрицательных чисел k выполняется неравенство

$$\boldsymbol{A}^k \leq \boldsymbol{A}^*. \tag{1.6}$$

Обозначим множество векторов-столбцов размера n через $\mathbb{X}^n$. Если вектор состоит только из нулевых элементов, он называется нулевым. Вектор, который не имеет нулевых компонент, называется регулярным. В max-алгебре регулярность вектора означает, что все его элементы положительны.

Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ называется преобразование в вектор-строку $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ — в противном случае.

$$x_i^- = \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{если } x_i \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$.

1.2.4. Собственное число и вектор матрицы

Число $\lambda \in \mathbb{X}$ и ненулевой собственный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ являются собственными числом и вектором матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если они удовлетворяют равенству

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы и вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k) = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{1\leq i_1,\dots,i_k\leq n} (a_{i_1i_2}\cdots a_{i_ki_1})^{1/k}. \tag{1.7}$$

Из последнего соотношения вытекает, что для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$ и любого натурального $k \leq n$ выполняется неравенство $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^k) \leq \lambda^k$, из которого, в частности, следует, что $\operatorname{Tr}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$.

Все собственные векторы матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующие ненулевому собственному числу λ, имеют вид $\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{\times}\boldsymbol{u}$, где матрица $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{\times}$ составляется из тех столбцов матрицы $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^*$, у которых на диагонали стоит $\mathbb{1}$, а $\boldsymbol{u}$ — произвольный регулярный вектор.

1.2.5. Решение векторных неравенств

Предположим, что для матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^m$ требуется решить относительно вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}. \tag{1.8}$$

Справедлив следующий результат (см., например, [48]).

Лемма 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— регулярная по столбцам матрица,* $\boldsymbol{b}$ *— регулярный вектор. Тогда все решения неравенства* (1.8) *имеют вид*

$$\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Предположим, что заданы квадратная матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и вектор $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^{n}$ и требуется решить относительно регулярного вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$ неравенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{x}. \tag{1.9}$$

Полное решение этого неравенства было получено в работе [65] и имеет следующую форму.

Лемма 2. *Пусть вектор* $\boldsymbol{x}$ *— общее регулярное решение неравенства* (1.9). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$*, то* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{u}$*, где* $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{b}$.

2) Если $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) > \mathbb{1}$*, то регулярных решений не существует.*

1.3. Тропическое представление задачи факторизации

Покажем, что задача одноранговой факторизации может быть сведена к задаче тропической оптимизации. Записывая целевую функцию задачи (1.3) в терминах max-алгебры, получим равенство

$$\bigoplus_{(i,j):a_{ij}\neq 0} (x_i^{-1}a_{ij}y_j \oplus x_i a_{ij}^{-1} y_j^{-1}) = \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x},$$

которое выполняется в силу того, что при сопряженном транспонировании нулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ переходят в нулевые элементы матрицы $\boldsymbol{A}^{-}$, что обеспечивает равенство обеих частей.

Тогда задача одноранговой факторизации (1.3) сводится к нахождению всех положительных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые решают следующую задачу оптимизации:

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}.$$

Задаче одноранговой факторизации с ограничениями в свою очередь эквивалентна задача тропической оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}.$$

Эти задачи будут рассмотрены в терминах общего идемпотентного полуполя в последующих главах. В главе 2 для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ приводится решение задачи без ограничений, а в главе 3 предлагается решение задачи с ограничениями для прямоугольной матрицы.

Глава 2

Задачи тропической оптимизации

В этой главе рассматриваются задачи тропической оптимизации в терминах общего идемпотентного полуполя, состоящие в минимизации нелинейных функционалов, записанных с использованием операции мультипликативно сопряженного транспонирования, и приводятся их аналитические решения в явном виде.

Пусть дана матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается минимум

$$\min_{\boldsymbol{x}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.1}$$

Приведем результат статьи [52], который описывает полное решение этой задачи.

Лемма 3. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче* (2.1) *равен λ, а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}.$$

Рассмотрим для квадратной матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ задачу нахождения всех регулярных векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^{n}$, которые дают минимум

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

Для случая неразложимой матрицы $\boldsymbol{A}$ известно частное решение этой задачи, представленное в работе [48].

Лемма 4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Тогда минимум в задаче* (2.2) *равен $\mu^{1/2}$ и достигается, когда $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ — собственные векторы матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$, $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$, соответствующие μ.*

В разделах 2.1 и 2.2 приводится полное решение задачи (2.2), описывающее все множество решений для случая произвольной ненулевой матрицы и матрицы без нулевых столбцов (строк) соответственно.

2.1. Решение задачи для произвольной ненулевой матрицы

Полное решение задачи (2.2) описывается следующей теоремой и опубликовано в статье [68]. Далее приводится сокращенное доказательство этого результата.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— ненулевая матрица,* μ *— спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$*. Тогда минимум в задаче* (2.2) *равен* $\mu^{1/2}$*, а все регулярные решения имеют вид*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{y} &= \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Доказательство. Чтобы решить поставленную задачу, представим ее в форме (2.1). Введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{-} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}.$$

С использованием этих обозначений задача (2.2) сводится к задаче нахождения регулярных векторов $\boldsymbol{z}$, которые минимизируют функцию $\boldsymbol{z}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$. По лемме 3 будем иметь, что $\min_{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{z}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z} = \eta$, где η — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$, а все регулярные решения этой задачи имеют вид

$$\boldsymbol{z} = (\eta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{2n}.$$

Далее, вычисляя следы степеней матрицы $\boldsymbol{B}$ и применяя тропическое биномиальное тождество, устанавливаем, что $\eta = \mu^{1/2}$. Наконец, при помощи полученных выражений для степеней матрицы $\boldsymbol{B}$ находим матрицу $(\eta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}$. После подстановки в равенство $\boldsymbol{z} = (\eta^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}$ будем иметь

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \\ \mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & (\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, все регулярные решения задачи (2.2) имеют форму (2.3). □

2.2. Решение задачи для регулярной по столбцам матрицы

Приведем теперь результат, который определяет все векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, обеспечивающие минимум в задаче (2.2), для случая регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$. Более подробное и развернутое доказательство следующей теоремы опубликовано в статье [69].

Теорема 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ — *регулярная по столбцам матрица,* μ — *спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. *Тогда минимум в задаче* (2.2) *равен* $\mu^{1/2}$, *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n},$$
$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \leq (\mu^{-1/2}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Доказательство. В соответствии с утверждением теоремы 1, минимум в задаче (2.2) равен $\mu^{1/2}$. Тогда все решения задачи должны удовлетворять неравенству

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \mu^{1/2},$$

которое в силу свойств идемпотентного сложения и леммы 1 равносильно двойному неравенству

$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \leq \mu^{1/2}(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Для того, чтобы множество значений вектора $\boldsymbol{y}$ не было пустым, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \mu(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}$. По лемме 1 это неравенство является решением относительно $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ неравенства

$$\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}.$$

После проверки выполнения условия $\operatorname{Tr}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathbb{1}$ и применения леммы 2 приходим к тому, что все векторы $\boldsymbol{x}$, отвечающие рассматриваемому неравенству, записываются в виде

$$\boldsymbol{x} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}.$$

После объединения последнего результата с двойным неравенством для $\boldsymbol{y}$, заключаем, что минимум в задаче (2.2) достигается на векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые удовлетворяют условиям, приведенным в формулировке настоящей теоремы. □

Для матрицы, регулярной по строкам, результат получается аналогичным образом.

Теорема 3. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ — *регулярная по строкам матрица,* μ — *спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$. *Тогда минимум в задаче* (2.2) *равен* $\mu^{1/2}$, *а все регулярные решения имеют вид*

$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x} \leq \mu^{1/2}(\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-},$$
$$\boldsymbol{y} = (\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^{n}.$$

2.3. Приложение к задаче одноранговой аппроксимации

Как было показано в разделе 1.3, задача одноранговой факторизации эквивалентна задаче тропической оптимизации (2.2) при использовании терминологии max-алгебры, поэтому к ее решению могут быть применены теоремы, полученные в настоящей главе. В силу того, что нулевые элементы матрицы, определяющей целевую функцию задачи тропической оптимизации (2.2), соответствуют пропущенным элементам положительной матрицы в исходной постановке, условия регулярности по столбцам или строкам, которые требуются в теоремах 2, 3, при переходе к задаче аппроксимации положительной матрицы с пропусками означают отсутствие у этой матрицы полностью неопределенных столбцов или строк. Проиллюстрируем применение теорем 1 и 2 на нескольких примерах.

2.3.1. Решение для матрицы второго порядка

Приведем в сокращенной форме пример аппроксимации положительной матрицы второго порядка в общем виде, опубликованный также в работе [69]. Пусть исходная матрица с положительными элементами записывается в форме

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Согласно утверждению теоремы 1, значение минимума в задаче (2.2) равно корню из спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Используя арифметику max-алгебры, найдем эту матрицу:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{11}a_{21}^{-1} \oplus a_{12}a_{22}^{-1} \\ a_{11}^{-1}a_{21} \oplus a_{12}^{-1}a_{22} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Вычисление спектрального радиуса дает следующий результат:

$$\mu = (a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}a_{22} \oplus a_{11}^{-1}a_{12}a_{21}a_{22}^{-1})^{1/2} \geq \mathbb{1}.$$

Предположим, что выполняется условие $a_{11}^{-1}a_{12}a_{21}a_{22}^{-1} \geq a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}a_{22}$. Тогда $\mu = (a_{11}^{-1}a_{12}a_{21}a_{22}^{-1})^{1/2}$ и матрица $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ принимает вид

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a_{12}a_{22}^{-1} \\ a_{11}^{-1}a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Далее для применения теоремы 1 требуется найти матрицы $(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}$, $(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}$, $\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}$ и $\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}$. После вычисления необходимых матриц получим, что решением задачи аппроксимации являются матрицы вида $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}a_{12}a_{22}^{-1} \\ \mu^{-1}a_{11}^{-1}a_{21} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} & \mu^{-1/2}a_{12} \\ \mu^{-1/2}a_{21} & \mu^{1/2}a_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mu^{-1/2}a_{11}^{-1} & \mu^{1/2}a_{21}^{-1} \\ \mu^{1/2}a_{12}^{-1} & \mu^{-1/2}a_{22}^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mu^{-1}a_{11}^{-1}a_{12} \\ \mu^{-1}a_{21}a_{22}^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — двумерные векторы параметров.

Заметим, что в каждой из матриц, используемых для построения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, столбцы коллинеарны друг другу. Учитывая, что решение представляется в форме линейной оболочки столбцов этих матриц, все коллинеарные столбцы, кроме одного, могут быть отброшены. Тогда для записи выражений для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ достаточно выбрать по одному одноименному столбцу от каждой матрицы. Возьмем, например, первый столбец и для произвольных неотрицательных чисел V и W запишем

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}a_{11}^{-1}a_{21} \end{pmatrix} V \oplus \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} \\ \mu^{-1/2}a_{21} \end{pmatrix} W, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \mu^{-1/2}a_{11}^{-1} \\ \mu^{1/2}a_{12}^{-1} \end{pmatrix} V \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}a_{21}a_{22}^{-1} \end{pmatrix} W.$$

Определим новый параметр $U = V \oplus \mu^{1/2}a_{11}W$. Тогда векторы разложения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}^{-}$ принимают следующий вид:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}a_{11}^{-1}a_{21} \end{pmatrix} U, \qquad \boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} \\ \mu^{-1/2}a_{12} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

После умножения векторов разложения приходим к единственному решению задачи аппроксимации в форме

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} & \mu^{-1/2}a_{12} \\ \mu^{-1/2}a_{21} & \mu^{1/2}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}^{3}a_{12}a_{21}a_{22}^{-1})^{1/4} & (a_{11}a_{12}^{3}a_{21}^{-1}a_{22})^{1/4} \\ (a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{3}a_{22})^{1/4} & (a_{11}^{-1}a_{12}a_{21}a_{22}^{3})^{1/4} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что при $\mu = (a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}a_{22})^{1/2}$ получается такая же матрица.

Убедимся в том, что применение теоремы 2 дает такое же решение. Предположим, что $\mu = (a_{11}^{-1}a_{12}a_{21}a_{22}^{-1})^{1/2}$, а U — произвольное ненулевое число. Нетрудно проверить, что тогда минимальная погрешность аппроксимации достигается на матрицах $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mu^{-1}a_{11}^{-1}a_{21} \end{pmatrix} U, \qquad \boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} \\ \mu^{-1/2}a_{12} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Тогда аппроксимирующая матрица имеет вид

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} \mu^{1/2}a_{11} & \mu^{-1/2}a_{12} \\ \mu^{-1/2}a_{21} & \mu^{1/2}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}^3 a_{12} a_{21} a_{22}^{-1})^{1/4} & (a_{11} a_{12}^3 a_{21}^{-1} a_{22})^{1/4} \\ (a_{11} a_{12}^{-1} a_{21}^3 a_{22})^{1/4} & (a_{11}^{-1} a_{12} a_{21} a_{22}^3)^{1/4} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что эта матрица совпадает с матрицей, найденной в результате применения теоремы 1. В случае, когда $\mu = (a_{11}a_{12}^{-1}a_{21}^{-1}a_{22})^{1/2}$, имеем такой же результат.

2.3.2. Численный пример

В этом разделе представим численный пример аппроксимации положительной матрицы при помощи произведения положительных векторов. Сначала будет получено частное решение задачи, которое описывается при помощи собственных векторов матрицы, образованной из исходной. Затем будет продемонстрировано применение теорем 1, 2, которые дают полное решение задачи. Настоящий пример также опубликован в работе [68].

Предположим, что требуется аппроксимировать положительную матрицу

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & 96 & 240 & 48 \\ 128 & 81 & 160 & 32 \\ 256 & 128 & 405 & 64 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}.$$

В силу того, что матрица $\boldsymbol{A}$ положительна, она является неразложимой, поэтому частное решение задачи может быть получено с использованием леммы 4. Сначала построим матрицу

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 243/128 & 243/256 & 27/16 \\ 27/32 & 1 & 81/128 & 9/8 \\ 27/16 & 81/32 & 1 & 9/4 \\ 3/4 & 9/8 & 9/16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ по формуле (1.7) дает

$$\mu = 81/64.$$

После нахождения матрицы $\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и ее степеней можем записать матрицу

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицу

$$\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 64/81 \end{pmatrix}.$$

Выбирая столбцы последней матрицы с единицами на диагонали, получаем матрицу

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{\times} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что второй и третий столбцы матрицы $(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{\times}$ коллинеарны первому и потому могут быть отброшены без потери собственных векторов. Тогда все собственные векторы, соответствующие собственному числу $\mu = 81/64$, имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4/3 & 16/27 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} U,$$

где U — произвольное положительное число.

Положим $U = 12$ и вычислим соответствующий вектор $\boldsymbol{y} = \mu^{-1/2}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{s})$. В результате получим решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 64/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^{-} = (9/8)\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 54 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \\ 288 & 144 & 360 & 72 \\ 128 & 64 & 160 & 32 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем все матрицы, на которых достигается минимум погрешности аппроксимации. Для применения теоремы 1 сначала найдем матрицу

$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = (8/9)\begin{pmatrix} 1/192 & 1/128 & 1/256 & 1/144 \\ 1/96 & 1/64 & 1/128 & 1/72 \\ 1/240 & 1/160 & 1/320 & 1/180 \\ 1/48 & 1/32 & 1/64 & 1/36 \end{pmatrix}.$$

После вычисления матрицы $\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ и ее степеней построим матрицу Клини

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 2 & 1 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицу

$$\mu^{-1/2}\boldsymbol{A}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = (8/9)\begin{pmatrix} 243 & 243/2 & 1215/4 & 48 \\ 162 & 81 & 405/2 & 32 \\ 324 & 162 & 405 & 64 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}.$$

Возьмем векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ и составим векторы

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} \oplus (8/9)\begin{pmatrix} 243 & 243/2 & 1215/4 & 48 \\ 162 & 81 & 405/2 & 32 \\ 324 & 162 & 405 & 64 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}\boldsymbol{w},$$

$$y = (8/9)\begin{pmatrix} 1/192 & 1/128 & 1/256 & 1/144 \\ 1/96 & 1/64 & 1/128 & 1/72 \\ 1/240 & 1/160 & 1/320 & 1/180 \\ 1/48 & 1/32 & 1/64 & 1/36 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 2 & 1 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 64/81 \end{pmatrix}\boldsymbol{w}.$$

Чтобы упростить полученные выражения, введем новые векторы $\boldsymbol{V} = (V_1\ V_2)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{W} = (W_1\ W_2)^{\mathrm{T}}$ с элементами

$$V_1 = v_1/12 \oplus v_2/8 \oplus v_3/16, \qquad V_2 = v_4/9,$$

$$W_1 = 16w_1 \oplus 8w_2 \oplus 20w_3, \qquad W_2 = 4w_4.$$

Нетрудно проверить, что при переходе к новым переменным выражения для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ принимают вид

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 8 \\ 16 & 16 \\ 64/9 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{V} \oplus (8/9) \begin{pmatrix} 243/16 & 12 \\ 81/8 & 8 \\ 81/4 & 16 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{W},$$

$$\boldsymbol{y} = (8/9) \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 \\ 1/8 & 1/8 \\ 1/20 & 1/20 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \boldsymbol{V} \oplus \begin{pmatrix} 1/16 & 4/81 \\ 1/8 & 8/81 \\ 1/20 & 16/405 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \boldsymbol{W}.$$

В частности, при $V_1 = 1$, $V_2 = W_1 = W_2 = 0$ имеем решение, полученное ранее с помощью собственных векторов матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ и $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$. Если положить $V_1 = W_1 = 0$, $V_2 = W_2 = 1$, то получим решение, которое сохраняет последний столбец исходной матрицы

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^- = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 45/2 \\ 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \\ 162 & 81 & 405/2 & 36 \end{pmatrix}.$$

При $V_1 = W_2 = 0$, $V_2 = W_1 = 1$ имеем решение, которое сохраняет последнюю строку матрицы

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^- = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 54 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \\ 288 & 144 & 360 & 72 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}.$$

Глава 3

Задачи тропической оптимизации с ограничениями

В настоящей главе рассматриваются задачи тропической оптимизации, которые состоят в минимизации нелинейных функционалов и имеют ограничения в виде линейных векторных неравенств. Для этих задач приводятся полные аналитические решения.

Пусть для матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и векторов $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{X}^{n}$ необходимо найти все регулярные решения $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$ задачи

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{q}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Полное решение последней задачи было получено в работе [64].

Теорема 4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$, $\boldsymbol{p}$ — вектор, $\boldsymbol{q}$ — регулярный вектор такие, что выполняется условие $\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.1) *равен*

$$\theta = \lambda \oplus \bigoplus_{k=1}^{n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{p})^{1/k},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u},$$

где вектор параметров $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A})^{*})^{-}.$$

Рассмотрим теперь задачу тропической оптимизации с ограничениями для прямоугольной матрицы. Пусть дана матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{X}^{m}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbb{X}^{n}$ и требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{m}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается минимум

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В разделах 3.1, 3.2 предлагается полное решение задачи (3.2) для случая произвольной ненулевой матрицы $\boldsymbol{A}$ и для матрицы $\boldsymbol{A}$, регулярной по столбцам (строкам) соответственно.

3.1. Решение задачи для произвольной ненулевой матрицы

Следующий результат дает полное решение задачи (3.2) в компактном векторном виде для произвольной ненулевой матрицы. Доказательство теоремы основано на приведении рассматриваемой задачи к форме (3.1) и последующем применении теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ — векторы, а $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ — регулярные векторы такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$ и $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$. Положим $r = (m+n)/2$ и введем обозначение*

$$\theta = \mu^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil} \left(\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k-1)} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}\right)^{1/(2k)}. \quad (3.3)$$

Тогда минимум в задаче (3.2) равен θ, а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}),$$
$$\boldsymbol{y} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}),$$

где векторы параметров $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{v} &\leq ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}, \\ \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{w} &\leq ((\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Сначала покажем, что задачу (3.2) можно свести к задаче (3.1), решение которой известно. Пусть $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — векторы размера m и n соответственно. Определим квадратную матрицу $\boldsymbol{B}$ порядка $m+n$ и векторы $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{u}$ размера $m+n$ следующим образом:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{-} & \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix}.$$

Записывая задачу (3.2) в новых обозначениях, перейдем к задаче оптимизации в форме

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{z}} \quad & \boldsymbol{z}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}, \\ & \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{q}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим через η спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$. В силу того, что ненулевые элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ расположены симметрично относительно главной диагонали, матрица $\boldsymbol{B}^{2}$ имеет ненулевой элемент на диагонали и выполняется неравенство $\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2} > \mathbb{0}$, откуда следует, что $\eta \geq \mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{B}^2) > \mathbb{0}$. Далее заметим, что из условия регулярности векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$ следует, что вектор $\boldsymbol{q}$ также является регулярным, а из неравенств $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$, $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$ вытекает неравенство $\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p} \leq \mathbb{1}$. Таким образом, к решению задачи (3.5) можно применить теорему 4, согласно которой минимум равен

$$\theta = \eta \oplus \bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{p})^{1/k}. \tag{3.6}$$

Учитывая, что $\theta \geq \eta$, имеем неравенства

$$\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{B}) \leq \mathrm{Tr}(\eta^{-1}\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}.$$

Из этого следует, что матрица $(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^*$ вычисляется как сумма конечного числа слагаемых. По теореме 4 минимум θ в задаче (3.5) достигается тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{z} = (\theta^{-1}\boldsymbol{B})^*\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^*)^{-}. \tag{3.7}$$

Представим полученный результат в терминах исходной задачи. Для этого сначала вычислим для целых $k \geq 1$ степени

$$\boldsymbol{B}^{2k-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1} \\ \boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{2k} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где квадратные матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ имеют порядки m и n соответственно.

Заметим, что для нечетных степеней выполняется равенство $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2k-1} = \mathbb{0}$, а для четных степеней в силу свойств следа справедливо

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2k} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^k \oplus \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^k = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k.$$

В силу того, что матрица $\boldsymbol{A}$ ненулевая, она имеет хотя бы один ненулевой элемент, например элемент $a_{ij} \neq \mathbb{0}$. Тогда у матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ будет ненулевой элемент на диагонали в строке i, а у матрицы $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ — на диагонали в строке j. Из этого следует, что следы, а значит и спектральные радиусы этих матриц, отличны от нуля. Нетрудно убедиться в том, что все собственные числа матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ совпадают, а потому будут совпадать и их спектральные радиусы. Пусть μ обозначает спектральный радиус этих матриц. Тогда величину μ можно вычислить по формулам

$$\mu = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^k) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k).$$

Без ограничения общности далее считаем, что $m \le n$. Тогда $2m \le m+n \le 2n$.

Учитывая, что $\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}^{2k-1}) = \mathbb{0}$, для спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{B}$ получим

$$\eta = \bigoplus_{k=1}^{m+n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k) \le \bigoplus_{k=1}^{2n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(2k)}(\boldsymbol{B}^{2k}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(2k)}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k).$$

Далее, применяя свойства следа и тропический аналог биномиального тождества, будем иметь

$$\eta \le \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/(2k)}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k) = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^k) \right)^{1/2} = \mu^{1/2}.$$

С другой стороны, выполняется

$$\eta = \bigoplus_{k=1}^{m+n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k) \ge \bigoplus_{k=1}^{2m} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^k) = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/(2k)}(\boldsymbol{B}^{2k}) = \left(\bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/k}((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^k) \right)^{1/2} = \mu^{1/2}.$$

Величина спектрального радиуса матрицы $\boldsymbol{B}$ ограничена с двух сторон одним и тем же числом, откуда следует равенство

$$\eta = \mu^{1/2}.$$

Рассмотрим выражение для минимума (3.6). Проверим, что с использованием обозначения $r = (m+n)/2$ второе слагаемое в этом выражении можно записать в следующем виде:

$$\bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{p})^{1/k} = \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p})^{1/(2k-1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p})^{1/(2k)}. \tag{3.9}$$

Действительно, для случая, когда число $m+n$ — нечетное, последнее слагаемое в левой части выражения (3.9) включает нечетную степень матрицы $\boldsymbol{B}$ и может быть представлено как

$$(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n}\boldsymbol{p})^{1/(m+n)} = (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p})^{1/(2k-1)}, \quad k = (m+n+1)/2.$$

Предпоследнее слагаемое в свою очередь имеет вид

$$(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n-1}\boldsymbol{p})^{1/(m+n-1)} = (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p})^{1/(2k)}, \quad k = (m+n-1)/2.$$

Тогда для рассматриваемой суммы имеем

$$\bigoplus_{k=1}^{m+n} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{p})^{1/k} = \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p} \oplus \cdots \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n-1}\boldsymbol{p})^{1/(m+n-1)} \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n}\boldsymbol{p})^{1/(m+n)} =$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{(m+n+1)/2} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p})^{1/(2k-1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{(m+n-1)/2} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p})^{1/(2k)}.$$

Осталось заметить, что $(m+n+1)/2 = \lceil r \rceil$, $(m+n-1)/2 = \lfloor r \rfloor$ и последнее выражение можно записать в форме (3.9).

Пусть теперь $m+n$ — четное число. Тогда последнее слагаемое в левой части (3.9) содержит четную степень матрицы $\boldsymbol{B}$ и может быть представлено в виде

$$(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n}\boldsymbol{p})^{1/(m+n)} = (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p})^{1/(2k)}, \quad k = (m+n)/2.$$

В то же время предпоследнее слагаемое можно записать в форме

$$(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{m+n-1}\boldsymbol{p})^{1/(m+n-1)} = (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p})^{1/(2k-1)}, \quad k = (m+n)/2.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\bigoplus_{k=1}^{m+n}(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{k}\boldsymbol{p})^{1/k} = \bigoplus_{k=1}^{(m+n)/2}(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p})^{1/(2k-1)} \oplus \bigoplus_{k=1}^{(m+n)/2}(\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p})^{1/(2k)}.$$

Учитывая, что для таких m и n, что $m+n$ — четное, верно $(m+n)/2 = \lfloor r \rfloor = \lceil r \rceil$, последняя формула принимает вид (3.9).

Теперь для четных и нечетных степеней матрицы $\boldsymbol{B}$ представим в терминах исходной задачи числа

$$\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k-1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a},$$
$$\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{B}^{2k}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}.$$

После подстановки полученных выражений для обоих слагаемых в (3.6) минимум в задаче (3.2) принимает вид

$$\theta = \mu^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil}\left(\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k-1)} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor}\left(\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}\right)^{1/(2k)}.$$

Рассмотрим матрицу $\theta^{-1}\boldsymbol{B}$, для которой справедливо отношение $\mathrm{Tr}(\theta^{-1}\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. В соответствии с неравенством (1.6) для всех целых $k \geq 0$ имеем $(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} \geq (\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{k}$.

В силу свойства монотонности идемпотентного сложения и условия $m+n-1 \leq 2n-1$, для матрицы Клини выполняется

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \bigoplus_{k=0}^{m+n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{k} = \bigoplus_{k=0}^{2n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{k}.$$

Представим эту матрицу в виде суммы четных и нечетных степеней:

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \bigoplus_{k=0}^{2n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{k} = \boldsymbol{I} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{2k-1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{2k}.$$

Используя выражения (3.8), вычислим для всех $k \geq 1$ степени

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{2k-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1} \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{2k} = \begin{pmatrix} (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} \end{pmatrix}.$$

В силу полученных формул матрицу Клини можно записать в виде

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \bigoplus_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} \end{pmatrix} \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1} \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} =$$

$$= \bigoplus_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} & \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} & (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} \end{pmatrix}.$$

Так как $\theta^{2} \geq \mu$, то верно следующее:

$$\mathrm{Tr}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathrm{Tr}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathbb{1}, \qquad \mathrm{Tr}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) \leq \mathrm{Tr}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}.$$

Тогда с учетом неравенства $(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} \leq (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}$ можем записать

$$\bigoplus_{k=0}^{n-1}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} = \bigoplus_{k=0}^{m-1}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}, \qquad \bigoplus_{k=0}^{n-1}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}.$$

После подстановки полученных выражений имеем матрицу Клини в форме

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \begin{pmatrix} (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \end{pmatrix},$$

которая определяет все решения задачи (3.5) с помощью соотношений (3.7).

Учитывая, что $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}$, получим решение задачи (3.2) в форме

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}),$$

$$\boldsymbol{y} = \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}),$$

где векторы параметров $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, в соответствии с (3.7), должны удовлетворять определенным ограничениям. Чтобы найти правые части ограничений, вычислим

$$\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{B})^{*} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}^{-} & \boldsymbol{d}^{-}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & \theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} & (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\\ \theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \oplus \boldsymbol{d}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}(\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\\ (\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Принимая во внимание последнее равенство, получим ограничения в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \leq &\boldsymbol{v} \leq (\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}\\ \boldsymbol{c} \leq &\boldsymbol{w} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} \oplus \boldsymbol{d}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-}.\end{aligned}$$

□

Нетрудно видеть, что полученное решение задачи при отбрасывании ограничений согласуется с результатом теоремы 1 для задачи без ограничений (2.2).

Рассмотрим частный случай задачи (3.2) с ограничениями на вектор $\boldsymbol{x}$ в виде

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x},\\ & \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Решение записывается в следующей форме.

Следствие 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — ненулевая матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$. Положим $r = (m+n)/2$ и введем обозначение*

$$\theta = \mu^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k)}. \tag{3.11}$$

Тогда минимум в задаче (3.10) *равен θ, а все регулярные решения имеют вид*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}),\\ \boldsymbol{y} &= (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

где векторы параметров $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \leq &\boldsymbol{v} \leq (\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-},\\ \boldsymbol{0} \leq &\boldsymbol{w} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим задачу тропической оптимизации в случае, когда только вектор $\boldsymbol{y}$ должен удовлетворять заданным ограничениям.

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решение имеет следующий вид.

Следствие 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— ненулевая матрица,* μ *— спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$*. Пусть* $\boldsymbol{c}$ *— вектор,* $\boldsymbol{d}$ *— регулярный вектор такие, что* $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$*. Положим* $r = (m+n)/2$ *и введем обозначение*

$$\theta = \mu^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(\boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}\right)^{1/(2k)}. \tag{3.13}$$

Тогда минимум в задаче (3.12) *равен* θ*, а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\boldsymbol{v} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}),$$
$$\boldsymbol{y} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}),$$

где векторы параметров $\boldsymbol{v}$*,* $\boldsymbol{w}$ *удовлетворяют условиям*

$$\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{v} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-},$$
$$\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{w} \leq (\boldsymbol{d}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-}.$$

3.2. Решение задачи для регулярной по столбцам матрицы

В этом разделе предлагается решение задачи (3.2) для матрицы без нулевых столбцов. Для матрицы без нулевых строк решение может быть получено аналогично. При доказательстве основного результата этого раздела задача тропической оптимизации сводится к решению системы векторных неравенств, в которых минимум целевой функции, значение которого получено в теореме 5, выступает в роли параметра. С использованием леммы 1 и леммы 2 находятся все решения этой системы неравенств.

Теорема 6. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— регулярная по столбцам матрица,* μ *— спектральный радиус матрицы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$*. Пусть* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{c}$ *— векторы,* $\boldsymbol{b}$*,* $\boldsymbol{d}$ *— регулярные векторы такие, что* $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$*,* $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$*. Тогда минимум в задаче* (3.2) *равен* (3.3)*, а все регулярные решения имеют вид*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{a} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}, \\ \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Доказательство. Пусть параметр θ обозначает минимум целевой функции задачи (3.2). Из теоремы 5 известно, что значение θ определяется формулой (3.3). Все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, которые обеспечивают минимум, должны удовлетворять системе

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \theta, \qquad \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}.$$

Первое неравенство системы равносильно паре неравенств

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \theta, \qquad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \theta.$$

Так как матрица $\boldsymbol{A}$ регулярна по столбцам, то вектор $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}$ регулярен и для решения первого неравенства относительно вектора $\boldsymbol{y}$ может быть применена лемма 1, которая дает неравенство $\boldsymbol{y} \leq \theta(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}$. После решения второго неравенства относительно $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ и умножения на θ^{-1} будем иметь $\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$.

Объединим полученные неравенства с неравенством $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}$. Сначала найдем нижнюю границу для $\boldsymbol{y}$ в виде $\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y}$.

Чтобы получить верхнюю границу, рассмотрим неравенства

$$\boldsymbol{y} \leq \theta(\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}, \qquad \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d},$$

которые после мультипликативно сопряженного транспонирования принимают вид

$$\boldsymbol{y}^{-} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{y}^{-} \geq \boldsymbol{d}^{-}.$$

Объединение этих неравенств дает неравенство $\boldsymbol{y}^{-} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-}$, которое равносильно неравенству $\boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}$. Тогда система неравенств для векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ записывается в эквивалентной форме

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}, \qquad \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}.$$

Множество значений вектора $\boldsymbol{y}$ не пусто тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}.$$

По лемме 1 это неравенство является решением неравенства

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c}) \leq \mathbb{1}.$$

Раскрывая скобки, будем иметь неравенство в форме

$$\theta^{-2}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}.$$

Неравенство $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$ выполнено по условию настоящей теоремы, поэтому предыдущее неравенство сводится к системе неравенств

$$\theta^{-2}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \mathbb{1}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}.$$

После решения относительно вектора $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x}$ первого неравенства и относительно $\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$ третьего, получим неравенства

$$\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \leq \theta(\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{x}.$$

Объединяя полученные неравенства с неравенством $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, приходим к двойному неравенству для вектора $\boldsymbol{x}$ в виде

$$\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим левое неравенство полученного двойного неравенства. Согласно лемме 2 это неравенство имеет регулярные решения тогда и только тогда, когда справедливо условие $\mathrm{Tr}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathbb{1}$. Так как для параметра θ, определенного формулой (3.3), верно $\mathrm{Tr}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathrm{Tr}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}) \leq \mathbb{1}$, это требование выполняется. Тогда все регулярные решения неравенства можно представить в форме

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a}.$$

После подстановки решения в правую часть двойного неравенства, получим систему неравенств относительно вектора $\boldsymbol{u}$ в виде

$$(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}, \qquad \boldsymbol{u} \geq \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a}.$$

Рассмотрим первое неравенство и заметим, что матрица $(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}$ является регулярной по строкам, а вектор $(\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}$ — регулярным. Тогда по лемме 1, это неравенство имеет решение

$$\boldsymbol{u} \leq ((\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}.$$

Объединяя последнее неравенство для вектора $\boldsymbol{u}$ со вторым неравенством системы, получим двусторонние ограничения для вектора $\boldsymbol{u}$ в форме

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \oplus \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}.$$

Проверим, что это неравенство задает непустое множество векторов $\boldsymbol{u}$, то есть справедливо неравенство

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\oplus\boldsymbol{a}\leq((\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\oplus\boldsymbol{b}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}.$$

Это неравенство является решением по лемме 1 относительно вектора $\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\oplus\boldsymbol{a}$ неравенства

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\oplus\boldsymbol{b}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\oplus\boldsymbol{a})\leq\mathbb{1}.$$

Раскрывая скобки, получим неравенство

$$\theta^{-2}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\oplus\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}\oplus\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\oplus$$
$$\oplus\,\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}\leq\mathbb{1},\quad(3.16)$$

которое равносильно следующей системе неравенств:

$$\theta^{-2}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\leq\mathbb{1},\qquad\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}\leq\mathbb{1},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\leq\mathbb{1},\qquad\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}\leq\mathbb{1}.$$

Покажем, что эти неравенства справедливы. Предположим, что $m\leq n$ и заметим, что из формулы (3.3) следуют следующие неравенства:

$$\theta^{2k}\geq\boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c},\qquad\theta^{2k-1}\geq\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a},\quad k=1,\ldots,m,$$
$$\theta^{2k-1}\geq\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c},\qquad\theta^{2k}\geq\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a},\quad k=1,\ldots,m.$$

Тогда для каждого слагаемого в левой части (3.16) имеем

$$\theta^{-2}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=\bigoplus_{k=0}^{m-1}\theta^{-2}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=\bigoplus_{k=1}^{m}\theta^{-2k}\boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}\leq\mathbb{1},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}=\bigoplus_{k=1}^{m}\theta^{-(2k-1)}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a}\leq\mathbb{1},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}=\bigoplus_{k=1}^{m}\theta^{-(2k-1)}\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\leq\mathbb{1},$$
$$\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a}\oplus\bigoplus_{k=1}^{m-1}\theta^{-2k}\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a}\leq\mathbb{1}.$$

Случай $m>n$ рассматривается аналогично.

Таким образом, условие (3.16) выполняется и у двойного неравенства (3.15) существуют регулярные решения. Все регулярные решения неравенства (3.15) имеют вид

$$\boldsymbol{x}=(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u},\quad\boldsymbol{a}\oplus\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}\leq\boldsymbol{u}\leq((\boldsymbol{b}^{-}\oplus\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-}.$$

Объединяя последние формулы с двойным неравенством для вектора $\boldsymbol{y}$, получим, что все регулярные векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, которые решают задачу (3.2), определяются выражениями

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{a} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}.$$

□

Нетрудно видеть, что построенное решение задачи (3.2) при отбрасывании ограничений согласуется с утверждением теоремы 2 для задачи без ограничений (2.2).

Для частного случая задачи с ограничениями только для вектора $\boldsymbol{x}$ решение записывается в следующем виде.

Следствие 3. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.10) *равен* (3.11), *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{b}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

В случае ограничений только на значения вектора $\boldsymbol{y}$ будем иметь следующее решение.

Следствие 4. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{c}$ — вектор, $\boldsymbol{d}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.12) *равен* (3.13), *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{u} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-}.$$

Рассуждая так же, как в теореме 6, получим решение задачи тропической оптимизации с ограничениями (3.2) для матрицы, регулярной по строкам.

Теорема 7. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по строкам матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ — векторы, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ — регулярные векторы такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$, $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.2) *равен* (3.3), *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{y} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{c} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\boldsymbol{d}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-},$$
$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}.$$

Последнее решение в случае задачи с ограничениями только на вектор $\boldsymbol{x}$ примет следующую форму.

Следствие 5. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.10) *равен* (3.11), *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{y} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{u} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-},$$

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}.$$

Следующая теорема описывает множество решений задачи (3.12).

Следствие 6. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — регулярная по столбцам матрица, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Пусть $\boldsymbol{c}$ — вектор, $\boldsymbol{d}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{c} \leq \mathbb{1}$. Тогда минимум в задаче* (3.12) *равен* (3.13), *а все регулярные решения имеют вид*

$$\boldsymbol{y} = (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{d}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-},$$

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{x} \leq (\theta^{-1}\boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}^{-})^{-}.$$

3.3. Приложение к задаче одноранговой факторизации с ограничениями

Как было показано в разделе 1.3, задача одноранговой факторизации с ограничениями сводится к задаче тропической оптимизации (3.2), решение которой получено выше в настоящей главе в двух формах: для произвольной матрицы и для матрицы, регулярной по столбцам (строкам). Условия регулярности по столбцам или строкам, которые требуются в теоремах 2, 3, при переходе к задаче приближенной факторизации положительной матрицы с пропусками означают отсутствие у этой матрицы полностью неопределенных столбцов или строк. Продемонстрируем применение теорем 5, 6 на примерах.

3.3.1. Численный пример для квадратной матрицы

Рассмотрим задачу аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ с пропусками при помощи матрицы $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы, которые удовлетворяют условиям $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}$.

Будем обозначать недостающие элементы матрицы символом «$\cdot$» и предположим, что

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & . & 240 & 48 \\ 128 & 81 & 160 & 32 \\ 256 & 128 & 405 & 64 \\ . & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 8/25 \\ 8/25 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Доопределим пропущенные элементы матрицы нулями и будем искать все решения задачи факторизации при помощи теорем, полученных в главе 3. Сначала построим матрицы

$$\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1/243 & 1/128 & 1/256 & 0 \\ 0 & 1/81 & 1/128 & 1/72 \\ 1/240 & 1/160 & 1/405 & 1/180 \\ 1/48 & 1/32 & 1/64 & 1/36 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 243/128 & 243/256 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 81/128 & 9/8 \\ 27/16 & 81/32 & 1 & 9/4 \\ 3/4 & 9/8 & 9/16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы найти значение спектрального радиуса μ матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$, найдем матрицу

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^2 = (81/64)^2 \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 32/81 & 8/9 \\ 256/243 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 64/81 \end{pmatrix}.$$

Далее, вычислим степени

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^3 = (81/64)^3 \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 128/243 & 1 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 64/81 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^4 = (81/64)^4 \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 & 4/3 \\ 2/3 & 1 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 1 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 64/81 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.7) получим, что спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ равен

$$\mu = 81/64.$$

Теперь построим матрицу

$$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 81/128 & 405/256 & 1/4 \\ 2 & 1 & 405/128 & 1/2 \\ 81/80 & 81/160 & 1 & 1/5 \\ 81/16 & 81/32 & 405/64 & 1 \end{pmatrix} = (81/64) \begin{pmatrix} 64/81 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 128/81 & 64/81 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 16/81 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 64/81 \end{pmatrix}.$$

Степени этой матрицы записываются так:

$$(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^2 = (81/64)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 2 & 1 & 160/81 & 32/81 \\ 256/405 & 2/5 & 1 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 64/81 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^3 = (81/64)^3 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 128/81 & 1 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 64/81 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^4 = (81/64)^4 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 2 & 1 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 64/81 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы вычислить θ, сначала запишем вектор

$$\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} = (16/15) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 405/64 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя полученные ранее выражения для степеней матрицы $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$, найдем числа

$$\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = 16/15 = 27\mu^{-1}/20, \qquad \boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = 27/20,$$
$$\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{c} = 27\mu/20, \qquad \boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^3\boldsymbol{c} = 27\mu^2/20.$$

Тогда для соответствующей суммы в формуле (3.3) верно

$$\bigoplus_{k=1}^{4} \left(\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\boldsymbol{c}\right)^{1/(2k-1)} = (27\mu^2/20)^{1/7}.$$

Рассмотрим следующую группу слагаемых. Вычислим вектор

$$\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} = (25/48) \begin{pmatrix} 1/25 & 2/27 & 3/64 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Далее, запишем числа

$$\boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{a} = 125\mu^{-1/2}/256, \qquad \boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{a} = 125\mu/256,$$
$$\boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^2 = 125\mu^2/256, \qquad \boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^3\boldsymbol{a} = 125\mu^3/256.$$

Таким образом, для суммы, включающей полученные слагаемые, справедливо

$$\bigoplus_{k=1}^{4}\left(\boldsymbol{d}^-\boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^{k-1}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k-1)} = (125\mu^3/256)^{1/7} < 1.$$

Перейдем ко второй сумме в формуле (3.3) и найдем числа

$$\boldsymbol{b}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{a} = 27/64, \qquad \boldsymbol{b}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^2\boldsymbol{a} = 27\mu/64,$$
$$\boldsymbol{b}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^3\boldsymbol{a} = 27\mu^2/64, \qquad \boldsymbol{b}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^4\boldsymbol{a} = 27\mu^3/64.$$

Для соответствующей суммы запишем

$$\bigoplus_{k=1}^{4}\left(\boldsymbol{b}^-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^{k}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k)} = (27\mu^3/64)^{1/8} < 1.$$

Для того, чтобы вычислить значение θ, осталось найти числа

$$\boldsymbol{d}^-(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = 25/16, \qquad \boldsymbol{d}^-(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^2\boldsymbol{c} = 25\mu/16,$$
$$\boldsymbol{d}^-(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^3\boldsymbol{c} = 25\mu^2/16, \qquad \boldsymbol{d}^-(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^4\boldsymbol{c} = 25\mu^3/16.$$

Тогда

$$\bigoplus_{k=1}^{4}\left(\boldsymbol{d}^-(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^{k}\boldsymbol{c}\right)^{1/(2k)} = 5/4.$$

Наконец, подставляя полученные результаты в формулу (3.3), получим

$$\theta = 5/4.$$

Вычисляя матрицу $\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ и ее степени при помощи выражений для степеней матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$, найдем матрицу Клини

$$(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^* = (81/100)\begin{pmatrix} 100/81 & 3/2 & 3/4 & 27/25 \\ 27/50 & 100/81 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 100/81 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 100/81 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом построим матрицу

$$(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = (81/100)\begin{pmatrix} 100/81 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 81/50 & 100/81 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 100/81 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 100/81 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные матрицы в формулы, представленные в теореме 5, получим, что все решения задачи одноранговой факторизации матрицы $\boldsymbol{A}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \frac{81}{100}\begin{pmatrix} 100/81 & 3/2 & 3/4 & 27/25 \\ 27/50 & 100/81 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 100/81 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 100/81 \end{pmatrix}\left(\boldsymbol{v} \oplus \frac{8}{9}\begin{pmatrix} 243 & 0 & 240 & 48 \\ 128 & 81 & 160 & 32 \\ 256 & 128 & 405 & 64 \\ 0 & 72 & 180 & 36 \end{pmatrix}\boldsymbol{w}\right),$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{81}{100}\begin{pmatrix} 100/81 & 1/2 & 5/4 & 16/81 \\ 81/50 & 100/81 & 5/2 & 32/81 \\ 4/5 & 2/5 & 100/81 & 64/405 \\ 4 & 2 & 5 & 100/81 \end{pmatrix}\left(\frac{8}{9}\begin{pmatrix} 1/243 & 1/128 & 1/256 & 0 \\ 0 & 1/81 & 1/128 & 1/72 \\ 1/240 & 1/160 & 1/405 & 1/180 \\ 1/48 & 1/32 & 1/64 & 1/36 \end{pmatrix}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}\right),$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — векторы размеров m и n.

Чтобы получить ограничения для вектора параметров $\boldsymbol{v}$, найдем

$$\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1/60 \\ 1/60 \\ 1/60 \\ 1/60 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \oplus \begin{pmatrix} 1/60 \\ 5/162 \\ 5/256 \\ 5/144 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$((\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*})^{-} = 16\begin{pmatrix} 80/27 \\ 160/81 \\ 16/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}.$$

Для описания ограничений, которым должен удовлетворять вектор параметров $\boldsymbol{w}$, вычислим

$$\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-} = \begin{pmatrix} 256/75 \\ 128/75 \\ 27/5 \\ 64/75 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \oplus \begin{pmatrix} 25/8 \\ 25/8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 256/75 \\ 25/8 \\ 27/5 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а также

$$((\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*})^{-}=\begin{pmatrix}1600/6561\\8/25\\64/405\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляя последние выражения в формулы для ограничений в теореме 5, получим, что для векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{pmatrix}10\\10\\10\\10\end{pmatrix}\leq\boldsymbol{v}\leq16\begin{pmatrix}80/27\\160/81\\16/5\\9/5\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\leq\boldsymbol{w}\leq(8/9)\begin{pmatrix}200/729\\9/25\\8/45\\9/8\end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы вычислить матрицу аппроксимации, необходимо подобрать векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, удовлетворяющие ограничениям. Пусть эти векторы соответствуют своим нижним границам:

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}10\\10\\10\\10\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Тогда векторы разложения имеют вид

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}192/5\\128/5\\256/5\\144/5\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{y}^{-}=\begin{pmatrix}4/25\\8/25\\16/125\\1\end{pmatrix}^{-}.$$

Перемножая векторы разложения, получим следующую матрицу аппроксимации:

$$\begin{pmatrix}240&120&300&192/5\\160&80&200&128/5\\320&160&400&256/5\\180&90&225&144/5\end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы применить теорему 6, дополнительно вычислим вектор

$$\boldsymbol{a} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 192/5 \\ 128/5 \\ 256/5 \\ 144/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 192/5 \\ 128/5 \\ 256/5 \\ 144/5 \end{pmatrix}.$$

Множество положительных векторов $\boldsymbol{x}$, решающих задачу приближенной одноранговой факторизации, описывается так:

$$\boldsymbol{x} = (81/100) \begin{pmatrix} 100/81 & 3/2 & 3/4 & 27/25 \\ 27/50 & 100/81 & 1/2 & 8/9 \\ 4/3 & 2 & 100/81 & 16/9 \\ 16/27 & 8/9 & 4/9 & 100/81 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}, \qquad \begin{pmatrix} 192/5 \\ 128/5 \\ 256/5 \\ 144/5 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{u} \leq 16 \begin{pmatrix} 80/27 \\ 160/81 \\ 16/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда вектор параметров соответствует своей нижней границе. Тогда для вектора $\boldsymbol{x}$ получим следующие значения:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 192/5 \\ 128/5 \\ 256/5 \\ 144/5 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить описание всех возможных значений вектора $\boldsymbol{y}$, найдем векторы

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{c} = (4/25) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (8/25) \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \\ 2/25 \\ 5/8 \end{pmatrix},$$

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})^{-} = \left(\begin{pmatrix} 81/16 \\ 81/32 \\ 405/64 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \oplus \begin{pmatrix} 25/8 \\ 25/8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right)^{-} = (8/5) \begin{pmatrix} 10/81 \\ 1/5 \\ 8/81 \\ 5/8 \end{pmatrix}.$$

Множество всех векторов $\boldsymbol{y}$ при выбранном ранее векторе $\boldsymbol{x}$ описывается так:

$$(8/5) \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \\ 2/25 \\ 5/8 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{y} \leq (8/5) \begin{pmatrix} 10/81 \\ 1/5 \\ 8/81 \\ 5/8 \end{pmatrix}.$$

Выбирая для вектора $\boldsymbol{y}$ его нижние граничные значения, получим решение

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 192/5 \\ 128/5 \\ 256/5 \\ 144/5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}^{-} = (5/8) \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \\ 2/25 \\ 5/8 \end{pmatrix}^{-}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} 240 & 120 & 300 & 192/5 \\ 160 & 80 & 200 & 128/5 \\ 320 & 160 & 400 & 256/5 \\ 180 & 90 & 225 & 144/5 \end{pmatrix},$$

совпадающее с решением, полученным с помощью теоремы 5.

Выбирая вектор $\boldsymbol{y}$ равным своей верхней границе, получим матрицу аппроксимации

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-} = \begin{pmatrix} 972/5 & 120 & 243 & 192/5 \\ 648/5 & 80 & 162 & 128/5 \\ 1296/5 & 160 & 324 & 256/5 \\ 729/5 & 90 & 729/4 & 144/5 \end{pmatrix}.$$

3.3.2. Численный пример для прямоугольной матрицы

Рассмотрим задачу факторизации прямоугольной матрицы $\boldsymbol{A}$ при помощи матрицы $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — векторы, которые удовлетворяют условиям $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{d}$. Предположим, что

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & 96 & \cdot & 54 \\ 144 & 81 & 160 & \cdot \\ 256 & 128 & 405 & 72 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \\ 1/20 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить результат теоремы 5, дополним недостающие элементы исходной матрицы нулями и составим матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 243 & 96 & 0 & 54 \\ 144 & 81 & 160 & 0 \\ 256 & 128 & 405 & 72 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1/243 & 1/144 & 1/256 \\ 1/96 & 1/81 & 1/128 \\ 0 & 1/160 & 1/405 \\ 1/54 & 0 & 1/72 \end{pmatrix}.$$

Затем найдем матрицы

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 27/16 & 243/256 \\ 27/32 & 1 & 81/128 \\ 4/3 & 81/32 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9/16 & 405/256 & 9/32 \\ 81/32 & 1 & 405/128 & 9/16 \\ 9/10 & 81/160 & 1 & 8/45 \\ 9/2 & 16/9 & 45/8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя степени матриц $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ и $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$, а также их следы, найдем спектральный радиус этих матриц в виде $\mu = 81/64$.

После подстановки полученных значения μ и степеней матриц в правую часть выражения (3.3), определим минимум

$$\theta = 9/8.$$

Теперь найдем матрицы Клини

$$(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 2/9 \\ 2 & 1 & 5/2 & 4/9 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 8/45 \\ 32/9 & 16/9 & 40/9 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 1/216 & 1/144 & 1/288 \\ 1/108 & 1/72 & 1/144 \\ 1/270 & 1/180 & 1/360 \\ 4/243 & 2/81 & 1/81 \end{pmatrix},$$

$$\theta^{-1}\boldsymbol{A}(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \end{pmatrix}.$$

Запишем векторы $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{y} = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)^{\mathrm{T}}$ в параметрической форме

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 3/4 \\ 2/3 & 1 & 1/2 \\ 4/3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 48 \\ 144 & 72 & 180 & 32 \\ 288 & 144 & 360 & 64 \end{pmatrix} \boldsymbol{w},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1/216 & 1/144 & 1/288 \\ 1/108 & 1/72 & 1/144 \\ 1/270 & 1/180 & 1/360 \\ 4/243 & 2/81 & 1/81 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/4 & 2/9 \\ 2 & 1 & 5/2 & 4/9 \\ 4/5 & 2/5 & 1 & 8/45 \\ 32/9 & 16/9 & 40/9 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{w}.$$

Найдем границы для векторов параметров $\boldsymbol{v} = (v_1\ v_2\ v_3)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{w} = (w_1\ w_2\ w_3\ w_4)^{\mathrm{T}}$. После вычисления векторов

$$(\boldsymbol{b}^{-} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*} = \begin{pmatrix} 2/27 & 1/9 & 1/18 \end{pmatrix},$$

$$(\theta^{-1}\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{d}^{-})(\theta^{-2}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

и подстановки в формулы (3.4) определим границы в виде

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \le \boldsymbol{v} \le \begin{pmatrix}27/2\\9\\18\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1/20\\1/20\\1/20\\1/20\end{pmatrix} \le \boldsymbol{w} \le \begin{pmatrix}1/16\\1/8\\1/20\\1/4\end{pmatrix}.$$

Чтобы упростить найденное решение, заметим, что полученные выше матрицы имеют коллинеарные столбцы, а потому могут быть представлены так:

$$\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 3/4\\2/3 & 1 & 1/2\\4/3 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2/3\\4/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 3/4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}216 & 108 & 270 & 48\\144 & 72 & 180 & 32\\288 & 144 & 360 & 64\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}216 & 216\\144 & 144\\288 & 288\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 5/4 & 0\\0 & 0 & 0 & 2/9\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1/216 & 1/144 & 1/288\\1/108 & 1/72 & 1/144\\1/270 & 1/180 & 1/360\\4/243 & 2/81 & 1/81\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/216\\1/108\\1/270\\4/243\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3/2 & 3/4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 5/4 & 2/9\\2 & 1 & 5/2 & 4/9\\4/5 & 2/5 & 1 & 8/45\\32/9 & 16/9 & 40/9 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\\4/5 & 4/5\\32/9 & 9/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 5/4 & 0\\0 & 0 & 0 & 2/9\end{pmatrix}.$$

Введем новые параметры V_1, W_1 и W_2 по формулам

$$V_1 = v_1 \oplus 3v_2/2 \oplus 3v_3/4, \qquad W_1 = w_1 \oplus w_2/2 \oplus 5w_3/4, \qquad W_2 = 2w_4/9.$$

В новых обозначениях векторы разложения определяются соотношениями

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}1\\2/3\\4/3\end{pmatrix} V_1 \oplus \begin{pmatrix}216\\144\\288\end{pmatrix} W_1 \oplus \begin{pmatrix}216\\144\\288\end{pmatrix} W_2,$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix}1/216\\1/108\\1/270\\4/243\end{pmatrix} V_1 \oplus \begin{pmatrix}1\\2\\4/5\\32/9\end{pmatrix} W_1 \oplus \begin{pmatrix}1\\2\\4/5\\9/2\end{pmatrix} W_2,$$

а границы для параметров приобретают вид

$$3/2 \leq V_1 \leq 27/2, \qquad W_1 = 1/16, \qquad 1/90 \leq W_2 \leq 1/18.$$

Рассмотрим сумму векторов в выражении для вектора $\boldsymbol{x}$. Нетрудно проверить, что второе слагаемое доминирует (не меньше, чем каждое из остальных). Действительно, учитывая фиксированное значение $W_1 = 1/16$, при всех $V_1 \leq 27/2$ и $W_2 \leq 1/18$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} V_1 \leq \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_1, \qquad \begin{pmatrix} 216 \\ 144 \\ 288 \end{pmatrix} W_2 \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Для первого и третьего векторов суммы в выражении для $\boldsymbol{y}$ запишем

$$\begin{pmatrix} 1/216 \\ 1/108 \\ 1/270 \\ 4/243 \end{pmatrix} V_1 \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 32/9 \end{pmatrix} W_1 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4/5 \\ 9/2 \end{pmatrix} W_2 \leq \begin{pmatrix} 1/18 \\ 1/9 \\ 2/45 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что второй вектор доминирует над первым, а также, что первые три элемента второго вектора доминируют над соответствующими элементами третьего.

Объединяя полученные результаты, приходим к окончательному решению

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 27/2 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 9W_2/2 \oplus 2/9 \end{pmatrix}, \qquad 4/81 \leq W_2 \leq 1/18.$$

Нетрудно проверить, что применение теоремы 6 дает такой же результат.

Выбирая значение W_2 равным $4/81$ и $1/18$, получим два вектора

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 2/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1/16 \\ 1/8 \\ 1/20 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют приближенная факторизация исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ в виде

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}_1^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 243/4 \\ 144 & 72 & 180 & 81/2 \\ 288 & 144 & 360 & 81 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}_2^- = \begin{pmatrix} 216 & 108 & 270 & 54 \\ 144 & 72 & 180 & 36 \\ 288 & 144 & 360 & 72 \end{pmatrix}.$$

3.3.3. Приложение к задаче приближения множества точек

В этом разделе показано, что результаты, полученные выше в настоящей главе, могут быть использованы для решения задачи приближения множества точек.

Постановка задачи приближения множества точек

Пусть заданы n точек $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, где $\boldsymbol{a}_j$ — вектор размера m с положительными координатами для всех j. Предположим, что требуется найти m-вектор $\boldsymbol{x}$ и набор чисел $y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1}$ такие, что для каждого j вектор $y_j^{-1}\boldsymbol{x}$ аппроксимирует (приближает) вектор $\boldsymbol{a}_j$. Ограничение на вектор $\boldsymbol{x}$ в виде двойного векторного неравенства $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ определяет гиперпараллелепипед, через который должна проходить приближающая прямая. Иллюстрация для двумерного случая приведена на рисунке 3.1. Задавая дополнительные условия на числа $y_1^{-1}, \ldots, y_n^{-1}$, можно также рассматривать отрезки наилучшего приближения ограниченной длины. Иными словами, необходимо решить задачу построения проходящей через начало координат прямой (отрезка) наилучшего приближения множества точек с положительными координатами m-мерного вещественного пространства с учетом возможных ограничений на допустимые длину и угол наклона.

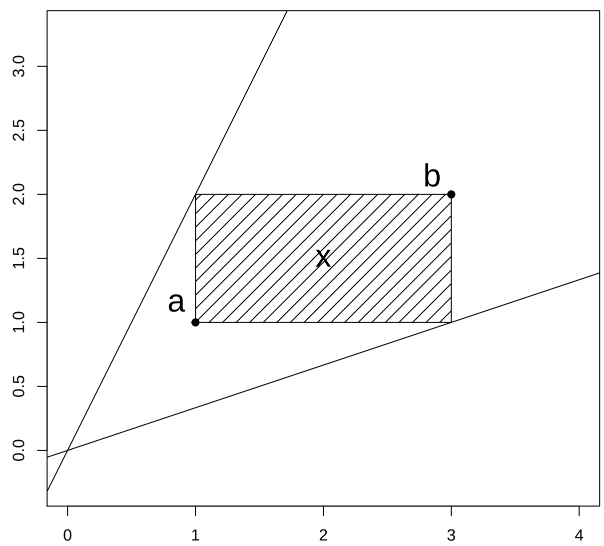

Рис. 3.1. При ограничениях вида $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ и отсутствии ограничений на вектор $\boldsymbol{y}$ прямая аппроксимации должна пересекать закрашенный прямоугольник.

Чтобы сформулировать эту задачу в терминах приближенной факторизации (аппроксимации) матриц, сформируем матрицу $\boldsymbol{A}$ с векторами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в роли столбцов. Пусть $\boldsymbol{y}^- = (y_j^{-1})$ — вектор-строка с положительными элементами. Тогда в общем случае задача приближения столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ при помощи векторов вида $y_j^{-1}\boldsymbol{x}$ есть задача одноранговой аппроксимации в форме (1.4).

Пример приближения множества точек на плоскости

Рассмотрим двумерную задачу приближения множества точек при помощи прямой на моделированном примере. Сгенерируем сто двумерных векторов, имеющих нормальное распределение. На рисунке 3.2 изображена прямая наилучшего приближения в log-чебышевском смысле, полученная при помощи применения теорем из разделов 3.1, 3.2 настоящей главы, а также прямые наилучшего приближения для евклидовой (L_2) и манхэттенской (L_1) метрик.

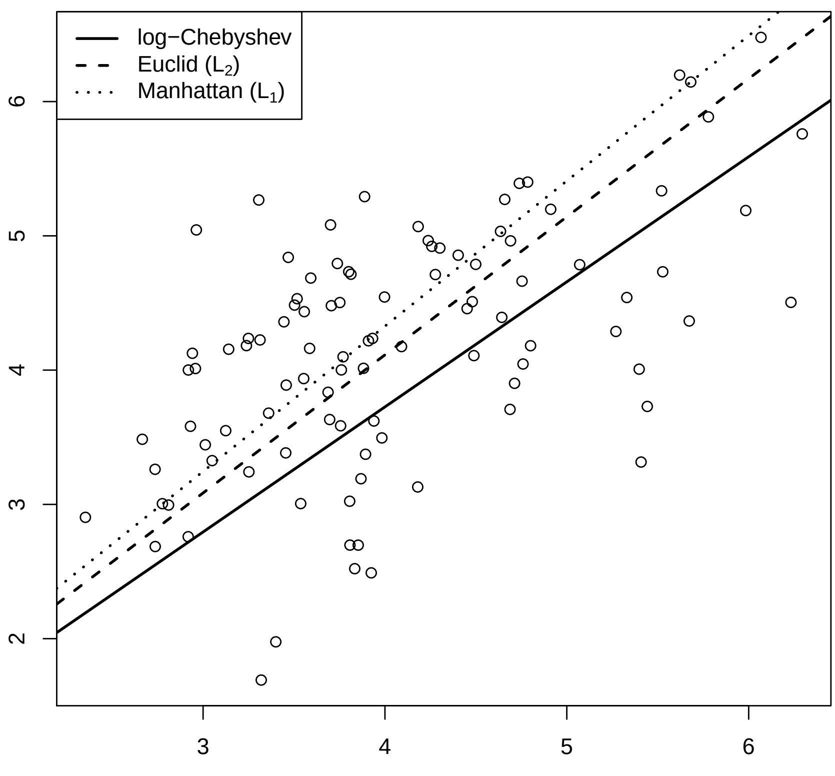

Рис. 3.2. Прямые наилучшего приближения для 100 нормально распределенных точек.

3.3.4. Приложение к задаче обработки экспертных оценок

Практически во всех сферах, связанных с деятельностью человека, возникает необходимость применения экспертных оценок в процессе принятия решений. Сущность метода экспертных оценок заключается в организации проведения экспертами оценки объектов (альтернатив) и последующей обработке полученных результатов. Задача обработки экспертных оценок состоит в том, чтобы по совокупности оценок нескольких экспертов получить обобщенную оценку для каждого объекта или ранжировать объекты в порядке предпочтения.

Подходы к обработке экспертных оценок во многом определяются природой исходных данных. Выделяют методы [74,75], основанные на ранговом представлении оценок, и методы для оценок, описанных количественно. В первом случае эксперты ранжируют альтернативы и задача принятия группового решения состоит в определении результирующих рангов объектов. В случае количественных экспертных оценок задача заключается в построении обобщенной оценки объектов на основе индивидуальных оценок экспертов. От количественного подхода можно перейти к ранговому при помощи упорядочения объектов в соответствии с величинами показателей обобщенных оценок альтернатив.

В статье [8] задача ранжирования с оценками экспертов в виде рангов решается при помощи аппроксимации матрицы оценок одноранговой матрицей рангов, все столбцы которой одинаковы (матрица непротиворечивого ранжирования). В настоящем разделе применяется распространение этого подхода на случай количественных оценок. Матрица, наилучшим образом согласованная со всеми векторами оценок, в таком случае ищется среди всех одноранговых матриц с одинаковыми столбцами над полем положительных вещественных чисел. Такая матрица полностью определяется вектором обобщенных (или согласованных) оценок. Если оценки экспертов представлены в определенном диапазоне значений, то осмысленно потребовать того же и от значений результирующего вектора.

Решение задачи

Пусть n экспертов оценивают m объектов. Обозначим через a_{ij} результат оценки i-го объекта j-м экспертом. Совокупность всех оценок обычно представляется в виде матрицы оценок $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Задача поиска обобщенного вектора оценок эквивалентна задаче одноранговой аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ при помощи матрицы с одинаковыми столбцами.

В терминах задачи факторизации с ограничениями (1.4) условие равенства столбцов соответствует требованию выполнения равенства $y_j = 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$, то есть равенства вектора $\boldsymbol{y}$ вектору из единиц. Чтобы значения матрицы аппроксимации принадлежали тому же диапазону, что и исходные признаки, на вектор $\boldsymbol{x}$ накладываются ограничения в виде неравенства $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ для заданных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Так как ограничения в настоящей задаче определяют вектор $\boldsymbol{y}$ однозначно, для решения задачи одноранговой факторизации с ограничениями предпочтительнее применять теорему 7, в которой вектор $\boldsymbol{x}$ определяется двойным неравенством, зависящим от вектора $\boldsymbol{y}$. Сформулируем результат для этого частного случая.

Следствие 7. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — положительная матрица оценок, μ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$, $\mathbf{1}$ — вектор размера n, состоящий из единиц. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, $\boldsymbol{b}$ — регулярный вектор такие, что $\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{a} \leq 1$. Положим $r = (m+n)/2$ и введем обозначение*

$$\theta = \mu^{1/2} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\lceil r \rceil} \left(\boldsymbol{b}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k-1}\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}^{-}\boldsymbol{A}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k-1}\boldsymbol{a}\right)^{1/(2k-1)} \oplus$$
$$\oplus \bigoplus_{k=1}^{\lfloor r \rfloor} \left(\boldsymbol{b}^{-}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{k}\boldsymbol{a} \oplus \mathbf{1}^{-}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{k}\mathbf{1}\right)^{1/(2k)}.$$

Тогда все векторы обобщенных оценок $\boldsymbol{x}$ в смысле минимизации $\log$-чебышевского расстояния определяются неравенством

$$\boldsymbol{a} \oplus \theta^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{1} \leq \boldsymbol{x} \leq (\theta^{-1}\mathbf{1}^{-}\boldsymbol{A}^{-} \oplus \boldsymbol{b}^{-})^{-}.$$

Пример

Рассмотрим задачу оценки качества четырех объектов на основе оценок восьми экспертов. Пусть каждый эксперт ставит каждому объекту в соответствие оценку от 1 (самая низкая оценка) до 10 (самая высокая оценка). Предположим, что матрица оценок имеет вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 & 7 & 8 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 4 & 8 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 5 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

В соответствии с обозначенными ограничениями на допустимые значения положим

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Применим следствие 7 к решению задачи нахождения обобщенного вектора оценок. Минимум в задаче тропической оптимизации с ограничениями равен $\theta = 3/2$. Все решения задачи можно представить в форме

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \leq \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Обозначим объекты, которым соответствуют строки матрицы оценок, через q_1, q_2, q_3, q_4. В соответствии с полученным множеством обобщенных значений можно ранжировать объекты следующим образом: $q_1 \succ q_3 \succ q_2 \sim q_4$.

Заключение

В настоящей работе были получены следующие результаты:

- Описан переход от задачи одноранговой аппроксимации (приближенной факторизации) положительных матриц с пропущенными значениями к задаче тропической оптимизации в терминах max-алгебры, где целевая функция определяется матрицей, нулевые значения которой соответствуют пропускам в исходной матрице.

- Для произвольного идемпотентного полуполя построено полное аналитическое решение задачи тропической оптимизации с квадратной матрицей. Решение представлено в двух различных формах: для произвольной ненулевой матрицы и для матрицы, которая не содержит нулевых столбцов (строк).

- Полученные результаты тропической оптимизации применены к решению задачи одноранговой факторизации квадратных положительных матриц. Найден явный вид единственной аппроксимирующей матрицы для произвольной положительной матрицы второго порядка. Приведен численный пример решения задачи приближенной факторизации матрицы четвертого порядка, в котором минимальная погрешность аппроксимации достигается на некотором множестве матриц.

- В терминах общего идемпотентного полуполя построено полное аналитическое решение задачи тропической оптимизации с ограничениями в виде линейных векторных неравенств. Решение приведено в двух формах: для произвольной прямоугольной матрицы и для прямоугольной матрицы без нулевых столбцов (строк).

- Полученные результаты применены к решению задачи одноранговой факторизации прямоугольных положительных матриц при наличии двусторонних ограничений на векторы в приближенном разложении. Построены численные примеры факторизации матриц с пропусками при наложении ограничений на множество допустимых решений. Описаны приложения полученных результатов к решению задачи приближения множества точек и задачи обработки экспертных оценок.

Список литературы

1. Aissa-El-Bey A., Seghouane K. Sparse canonical correlation analysis based on rank-1 matrix approximation and its application for FMRI signals // Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP). Shanghai: IEEE, 2016. P. 4678–4682.
2. Golub G. H., Van Loan C. F. An analysis of the total least squares problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17, N 6. P. 883–893.
3. Abdollahi B., Nasraoui O. Using explainability for constrained matrix factorization // Proceedings of the Eleventh ACM Conference on Recommender Systems. Como, Italy: ACM, 2017. P. 79–83.
4. Kannan R., Ishteva M., Park H. Bounded matrix factorization for recommender system // Knowledge and Information Systems. 2014. Vol. 39, N 3. P. 491–511.
5. Xiu X., Kong L. Rank-one and sparse matrix decomposition for dynamic MRI // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2015. Vol. 5, N 2. P. 127–134.
6. Belachew M. T., Gillis N. Solving the maximum clique problem with symmetric rank-one non-negative matrix approximation // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. N 173. P. 279–296.
7. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. с. 278.
8. Артамонов Ю. Н. Групповой выбор с использованием матричных норм // Известия Иркутск. гос. ун-та. 2016. Т. 18. С. 3–20.
9. Krivulin N. Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems // 12th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD 2015) / Ed. by Z. Tang, J. Du, S. Yin et al. IEEE, 2015. P. 162–167.
10. Krivulin N. Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // 2016 Proceedings of the 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing / Ed. by A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia, PA: SIAM, 2016. P. 62–72.
11. Gillis N. Introduction to nonnegative matrix factorization // SIAG/OPT Views and News. 2017. Vol. 25, N 1. P. 7–16.
12. Kumar N. K., Schneider J. Literature survey on low rank approximation of matrices //

Linear Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65, N 11. P. 2212–2244.

13. Eldén L. Matrix methods in data mining and pattern recognition / Ed. by N. J. Higham; University of Manchester. SIAM, 2007. Vol. 4 of *Fundamentals of algorithms.* p. 184.
14. Markovsky I. Low rank approximation. Communications and Control Engineering. London: Springer, 2012. p. 256.
15. Ma Y., Olshevsky A., Szepesvari C. et al. Gradient descent for sparse rank-one matrix completion for crowd-sourced aggregation of sparsely interacting workers // Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning. Vol. 80. Stockholm, Sweden: PMLR, 2018. P. 3335–3344.
16. Hofmann T. Probabilistic latent semantic analysis // Proceedings of the Fifteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence / Ed. by K. B. Laskey, H. Prade. Stockholm, Sweden: UAI, 1999. P. 289–296.
17. Berry M. W., Gillis N., Glineur F. Document classification using nonnegative matrix-factorization and underapproximation // Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Taipei, Taiwan: 2009. May. P. 2782–2785.
18. Shi Q., Lu H., Cheung Y. M. Rank-one matrix completion with automatic rank estimation via $L1$-norm regularization // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2017. Vol. 29, N 10. P. 4744–4757.
19. Markovsky I., Usevich K. Structured low-rank approximation with missing data // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2013. Vol. 34, N 2. P. 814–830.
20. Srebro N., Jaakkola T. Weighted low-rank approximations // Proceedings of the 12th International Conference on Machine Learning (ICML-2003). Vol. 3. Washington DC: 2003. P. 720–727.
21. Shen H., Huang J. Sparse principal component analysis via regularized low rank matrix approximation // Journal of Multivariate Analysis. 2008. Vol. 99, N 6. P. 1015–1034.
22. Feldman D., Tassa T. More constraints, smaller coresets: constrained matrix approximation of sparse big data // KDD '15: Proceedings of the 21st ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Sydney, NSW, Australia: ACM, 2015. August. P. 249–258.
23. Chandrasekaran V., Sanghavi S., Parrilo P. et al. Rank-sparsity incoherence for matrix decomposition // SIAM Journal on Optimization. 2011. Vol. 21, N 2. P. 572–596.
24. Kyrillidis A. Simple and practical algorithms for l_p-norm low-rank approximation //

34th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI). Monterey, CA.: 2018. August. P. 414–424.

25. Gillis N., Shitov Y. Low-rank matrix approximation in the infinity norm // Linear Algebra Appl. 2019. Vol. 581, N 15. P. 367–382.
26. Panyukov A., Chaloob K., Mezal Y. Approximation of a matrix with positive elements by a matrix of a unit rank // 2018 IEEE Symposium on Computer Applications & Industrial Electronics (ISCAIE). Penang, Malaysia: IEEE, 2018. April. P. 234–237.
27. Lobo M., Vandenberghe L., Boyd S. et al. Applications of second-order cone programming // Linear Algebra and its Applications. 1998. Vol. 284. P. 193–228.
28. Boyd S., Vandenberghe L. Convex optimization. Cambridge University Press, 2004. p. 716.
29. Kleene S. C. Representation of events in nerve sets and finite automata // Automata Studies / Ed. by J. McCarthy, C. Shannon. Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. P. 3–40.
30. Bellman R. On a quasi-linear equation // Canadian Journal of Mathematics. 1956. Vol. 8. P. 198–202.
31. Воробьев Н. Н. Экстремальная алгебра неотрицательных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1963. Т. 152, № 1. С. 24–27.
32. Воробьев Н. Н. Экстремальная алгебра положительных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1967. Т. 3, № 1. С. 39–72.
33. Воробьев Н. Н. Экстремальная алгебра неотрицательных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1970. Т. 6, № 4/5. С. 303–312.
34. Корбут А. А. Экстремальные пространства // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164, № 6. С. 1229–1231.
35. Корбут А. А. Экстремальные векторные пространства и их свойства // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1972. Т. 8, № 8/9. С. 525–536.
36. Романовский И. В. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом // Кибернетика. 1967. № 2. С. 66–78.
37. Романовский И. В. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний // Оптимальное планирование / Сборник трудов Института математики СО АН СССР. 1967. № 8. С. 171–193.
38. Романовский И. В. Детерминированные процессы динамического программирова-

ния с дополнительными ограничениями // Кибернетика. 1971. № 5. С. 69–71.

39. Cuninghame-Green R. A. Minimax algebra. Berlin: Springer, 1979. Vol. 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. p. 258.
40. Zimmermann U. Linear and combinatorial optimization in ordered algebraic structures. Amsterdam: Elsevier, 1981. Vol. 10 of *Annals of Discrete Mathematics*. p. 390.
41. Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. Москва: Физматлит, 1994. с. 144.
42. Kolokoltsov V. N., Maslov V. P. Idempotent analysis and its applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. Vol. 401 of *Mathematics and Its Applications*. p. 324.
43. Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Соболевский А. Н. Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 47–70.
44. Pin J. Tropical semirings // Idempotency / Ed. by J. Gunawardena. Cambridge University Press, 1998. Vol. 11. P. 50–69.
45. Golan J. S. Semirings and affine equations over them: theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. Vol. 556 of *Mathematics and Its Applications*. p. 256.
46. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J. Max plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on max-plus algebra and its applications. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton, Oxford: Princeton University Press, 2006. p. 224.
47. McEneaney W. M. Max-plus methods for nonlinear control and estimation. Systems and Control: Foundations and Applications. Boston: Birkhäuser, 2006. p. 241.
48. Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2009. с. 256.
49. Butkovič P. Max-linear systems: theory and algorithms. London: Springer, 2010. p. 272.
50. Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J. et al. Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1992. p. 514.
51. Krivulin N. Tropical optimization problems // Advances in Economics and Optimization / Ed. by L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W. K. Yeung. New York: Nova Sci. Publ., 2014. P. 195–214. (Economic Issues, Problems and Perspectives).
52. Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra and its Applications. 2015. Vol. 468. P. 211–232.

53. Cuninghame-Green R. A. Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour // Operations Research Quarterly. 1962. Vol. 13, N 1. P. 95–100.

54. Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling // Optimization. 2017. Vol. 66, N 2. P. 205–224.

55. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices // Linear Algebra and its Applications. 2004. Vol. 385, N 1. P. 47–62.

56. Elsner L., van den Driessche P. Max-algebra and pairwise comparison matrices, II // Linear Algebra and its Applications. 2010. Vol. 432, N 4. P. 927–935.

57. Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В. Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13, № 1. С. 27–41.

58. Krivulin N., Sergeev S. Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51.

59. Krivulin N. K. An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2011. Vol. 44, N 4. P. 272–281.

60. Krivulin N. K. An algebraic approach to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics. 2011. Vol. 10, N 6. P. 191–200.

61. Krivulin N. K. A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance // WSEAS Transactions on Mathematics. 2012. Vol. 11, N 7. P. 605–614.

62. Zimmermann K. Interval linear systems and optimization problems over max-algebras // Linear Optimization Problems with Inexact Data. New York: Springer, 2006. P. 165–193.

63. Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra // Mathematical Programming. 1976. Vol. 10. P. 111–123.

64. Krivulin N. A constrained tropical optimization problem: Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications / Ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. AMS, Providence, RI, 2014. Vol. 616 of Contemporary Mathematics. P. 163–177.

65. Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129.

66. Кривулин Н. К., Романова Е. Ю. Одноранговая аппроксимация положительных матриц на основе методов тропической математики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), № 2. С. 225–239.

67. Кривулин Н. К., Романова Е. Ю. Об одноранговой аппроксимации положительных матриц с помощью методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64), № 2. С. 208–220.

68. Krivulin N. K., Romanova E. Y. Rank-one approximation of positive matrices based on methods of tropical mathematics // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2018. Vol. 51, N 2. P. 133–143.

69. Krivulin N. K., Romanova E. Y. On the rank-one approximation of positive matrices using tropical optimization methods // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. 2019. Vol. 52, N 2. P. 145–153.

70. Кривулин Н. К., Романова Е. Ю. Одноранговая аппроксимация положительных матриц с использованием методов тропической математики // Материалы 7-й всероссийской научной конференции по проблемам информатики СПИСОК-2017. СПб.: ВВМ, 2017. С. 529–535.

71. Кривулин Н. К., Романова Е. Ю. Одноранговая аппроксимация положительных матриц с использованием методов тропической математики // Proceedings of the International Scientific Conference Mathematical Modeling Vol. 1/1. Sofia: Scientific Technucal Union of Mechanical Engineering "INDUSTRY-4.0 2017. С. 33–35.

72. Krivulin N., Romanova E. Using tropical optimization in rank-one approximation of non-negative matrices // International Conference Polynomial Computer Algebra ‘2019 / Ed. by N. N. Vassiliev. VVM Pubishing, 2019. April. P. 85–88.

73. Carré B. A. An algebra for network routing problems // IMA Journal of Applied Mathematics. 1971. Vol. 7, N 3. P. 273–294.

74. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений: алгоритмический аспект. Киев: Наукова думка, 2002. с. 382.

75. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решений. Москва: Патент, 1996. с. 271.