

Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

1. Avgör vilken typ av yta ekvationen $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 4xz = 36$ beskriver. Bestäm sedan avståndet mellan ytan och origo givet att (x, y, z) betecknar en punkts koordinater i ett ON-system. Bestäm även, i händelse av att en rotationsyta och/eller en cylinderyta föreligger, en ekvation för motsvarande axel (uttryckt i det givna ON-systemets koordinater).
2. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$F((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_3).$$

Visa att F är diagonaliseringbar och bestäm en bas av egenvektorer till F . Ange även F :s matris i den valda basen av egenvektorer.

3. I det linjära rummet \mathcal{P}_2 av polynomfunktioner av grad högst 2 är p_0, p_1, p_2 , där $p_n(x) = x^n$, en bas (visas enkelt). Visa att även polynomfunktionerna p, q, r definierade genom

$$p(x) = 3x - 1, \quad q(x) = -2 - x^2, \quad r(x) = x + x^2,$$

är en bas i \mathcal{P}_2 , och bestäm i denna bas koordinaterna för den polynomfunktionen som har polynomet $2 + 3x + 2x^2$.

4. Konstruera en avbildningsmatris som definierar en linjär avbildning $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vars nollrum är lika med $[(1, -1, 0, 2), (1, 2, 3, 1)]$ och vars värderum är lika med $[(2, 1, 5), (1, 1, 1)]$.
5. Underrummet \mathbb{U} till \mathbb{R}^4 spänns upp av vektorerna $(a, 1, 1, 1), (1, a, 1, 1), (1, 1, a, 1)$ och $(1, 1, 1, a)$. Bestäm för varje värde på a dimensionen av \mathbb{U} och en bas i \mathbb{U} .
6. Antag att $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ betecknar två godtyckliga vektorer i \mathbb{R}^3 . För vilka värden på a definierar den bilinjära funktionen g , definierad enligt

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 4x_1y_1 + 10x_2y_2 + (20 - 2a)x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &\quad + 6(x_1y_3 + x_3y_1) - 6(x_2y_3 + x_3y_2) \end{aligned}$$

en skalärprodukt i \mathbb{R}^3 ? Vilket är specifikt värdet på a för det euklidiska rum i vilket längden av vektorn $(1, 1, 1)$ är lika med 5?

7. En linjär operator F är given av att varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3$ projiceras ortogonalt på $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Bestäm avbildningsmatrisen för F i standardbasen.
8. Bestäm en ON-bas i underrummet $[(1, 2, 0, -1), (-1, 3, 2, -1), (-1, 8, 4, -3), (5, 0, -4, -1)]$ till \mathbb{E}^4 .

MMA129 / Lösningar till tentamen 2014-06-13

① $36 = 2x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 4xz = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^T G X$

där (x, y, z) är koordinater i ett ON-system, och där G är matrisen till en symmetrisk avbildning Γ (ty G är symmetrisk i en ON-bas). Speciellt är avbildningen diagonalisierbar.

Eigenvärden: $0 = \det(G - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 9-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ utv. efter rad 2
 $= -(\lambda-9)(\lambda-2+2)(\lambda-2-2) = -\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$

$\underline{\lambda_1=0}$: $G - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dvs $k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t_1 \neq 0$

$\underline{\lambda_2=4}$: $G - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dvs $k_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_2 \neq 0$

$\underline{\lambda_3=9}$: $G - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Def. $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ dvs $k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_3 \neq 0$. som är en ortogonal matris och som därför är en basbytesmatris överställer från en ON-bas till en annan.

Sätt $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (e_1, e_2, e_3) S$ där e_1, e_2, e_3 är den ursprungliga ON-basen.

Vi har att $36 = X^T G X = (\tilde{X})^T S \tilde{G} S^{-1} (\tilde{X}) = \tilde{X}^T S^T \tilde{G} \tilde{X}$
 $\cancel{S \text{ ortogonal}} \equiv \tilde{X}^T S^{-1} S \tilde{G} \tilde{X} = \tilde{X}^T \tilde{G} \tilde{X} = 0\tilde{x}^2 + 4\tilde{y}^2 + 9\tilde{z}^2$

dus $1 = \left(\frac{\tilde{x}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{z}}{2}\right)^2$ dvs en elliptisk cylinder med halvaxlarna 2 och 3 i de ellipser som är vinkelräta mot cylinderaxeln (\tilde{x} -axeln).

Cylinderaxeln ges av ekv:en $(x, y, z) = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$ ty den innehåller origo och är parallell med $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$.

Avtänd (ytan, origo) = min(2, 3) = 2

(2) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ där $F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_3)$

F :s matris A i standardbasen är lika med $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm F :s egenvektorer för att utvärda om F är diagonaliseringbar.

Eigenvärdet: $\lambda = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 - 1$
 $= -(\lambda-1)(\lambda-2+1)(\lambda-2-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda-3)$

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda_{1,2}=1}: A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_{1,2} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mmst en av } t_1, t_2 \neq 0 \\ \underline{\lambda_3=3}: A - \lambda_3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_3 \neq 0 \end{array} \right.$

Vi ser att F är diagonaliseringbar, detta i och med att ett tvådimensionellt egenrum svarar mot dubbelEigenvärdet 1.

En bas av egenvektorer är t.ex. $(-2, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 1, 0)$.

F :s matris denna bas av egenvektorer är $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) $\left\{ \begin{array}{l} p(x) = 3x - 1 = -p_0(x) + 3p_1(x) \\ q(x) = -2 - x^2 = -2p_0(x) - p_2(x) \\ r(x) = x + x^2 = p_1(x) + p_2(x) \end{array} \right. \text{ därför } p_n(x) = x^n$

Vi har således att $(p, q, r) = \underbrace{(p_0, p_1, p_2)}_{\text{bas av polynomfunktioner i } P_2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{S}$

där $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[6]{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[6]{4} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dvs S har full rang och kan därför användas som en basbytessmatris

dvs polynomfunktionerna p, q, r utgör en bas i P_2 v.s.v.

Vidare fås att

$$\begin{aligned} 2 + 3x + 2x^2 &= (p_0(x) \ p_1(x) \ p_2(x)) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (p(x) \ q(x) \ r(x)) S^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (p(x) \ q(x) \ r(x)) \frac{1}{(0+0+0)-(0+1-6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (p(x) \ q(x) \ r(x)) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{dvs koord}_{p,q,r}(2p_0 + 3p_1 + 2p_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

④ $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har nollrummet $[(1, -1, 0, 2), (1, 2, 3, 1)]$
och värderummet $[(2, 1, 5), (1, 1, 1)]$

Let A beteckna F :s matris m.a.p. standardbaserna i \mathbb{R}^4 och \mathbb{R}^3 . Välj $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 5 & 1 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ och omsett

Innebörden av nollrummet. Vi får att

$$\left\{ \begin{array}{l} A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2-1+0+2a_{14}=0 \\ 1-1+0+2a_{24}=0 \\ 5-1+0+2a_{34}=0 \\ 2+2+3a_{13}+a_{14}=0 \\ 1+2+3a_{23}+a_{24}=0 \\ 5+2+3a_{33}+a_{34}=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{14} = -1/2 \\ a_{24} = 0 \\ a_{34} = -2 \\ a_{13} = \frac{1}{3}(-4-a_{14}) = -\frac{7}{6} \\ a_{23} = \frac{1}{3}(-3-a_{24}) = -1 \\ a_{33} = \frac{1}{3}(-7-a_{34}) = -5/3 \end{array} \right.$$

dvs $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -\frac{5}{3} & -2 \end{pmatrix}$ är en avbildningsmatris till en avbildning F med de givna noll- och värderummene.

⑤ $U = [(a, 1, 1, 1), (1, a, 1, 1), (1, 1, a, 1), (1, 1, 1, a)] \subset \mathbb{R}^4$

Koordinatmatrisen $A(a)$ för vektorerna i spannet för U

är lika med $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (1-a)(3+a) \end{pmatrix}$$

platssbyt: rad₁ och rad₄

dvs $\dim U(a) = \text{rang } A(a) = \begin{cases} 1 & \text{om } a=1 \\ 3 & \text{om } a=-3 \\ 4 & \text{om } a \neq -3, 1 \end{cases}$

{ En bas i U om $a=1$: $(1, 1, 1, 1)$

————— || — om $a=-3$: $(-3, 1, 1, 1), (1, -3, 1, 1), (1, 1, -3, 1)$

————— || — om $a \neq -3, 1$: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$

(6) $g(u, v) = 4x_1y_1 + 10x_2y_2 + (20-2a)x_3y_3 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 6(x_1y_3 + x_3y_1) - 6(x_2y_3 + x_3y_2)$

Vi ser direkt att g är symmetrisk och bilinjär.
Vidare fås att

$$\begin{aligned} g(u, u) &= 4x_1^2 + 10x_2^2 + (20-2a)x_3^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3 - 12x_2x_3 \\ &\stackrel{\substack{\text{motsvarande i en} \\ \text{"kvadrat" sätts i}}}{} = (4x_1^2 - 4x_1x_2 + 12x_1x_3) + 10x_2^2 + (20-2a)x_3^2 - 12x_2x_3 \\ &= (2x_1 - x_2 + 3x_3)^2 + 9x_2^2 + (11-2a)x_3^2 - 6x_2x_3 \\ &= (2x_1 - x_2 + 3x_3)^2 + (3x_2 - x_3)^2 + (10-2a)x_3^2 \end{aligned}$$

som är positivt definit om $10-2a > 0$ dvs $a < 5$
om och endast om
dvs g definierar en skalarprodukt, om \uparrow $a < 5$

Tillsist $5 = \sqrt{g((1,1,1), (1,1,1))} = \sqrt{(2-1+3)^2 + (3-1)^2 + (10-2a)/1^2}$
 längden av $(1,1,1) = \sqrt{16+4+10-2a} = \sqrt{30-2a}$
dvs $a = \frac{1}{2}\sqrt{30-5^2} = 5/2$

(7) $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$



Vi har speciellt att $(1, -2, 1) \perp M$
ty standardbasen är ON (i och med
att det euklidiska rummet är av typ E^3).

Vi har att $u_M = (x_1, x_2, x_3)_M = (x_1, x_2, -x_1 + 2x_2)$
 $= x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, 2)$

varav foljer att

$$\begin{cases} F(e_1 - e_3) = e_1 - e_3 \\ F(e_2 + 2e_3) = e_2 + 2e_3 \\ F(e_1 - 2e_2 + e_3) = 0 \end{cases} \quad \text{där} \quad \begin{cases} e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

dvs $(F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

dvs $(F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3)) = (e_1 \ e_2 \ e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
F = s matris i basen e_1, e_2, e_3

dvs $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(1+0+0)-(1-4+0)} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(8) Sätt $U = \{(1, 2, 0, -1), (-1, 3, 2, -1), (-1, 8, 4, -3), (5, 9, -4, -1)\}$

Givet U är ett underrum till E^4 , dvs standard-basen är ON.

Koordinatmatrisen A för vektorerna u_1, u_2, u_3, u_4 i spannet för U är lika med

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & -10 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs $\dim U = \text{rang } A = 2$

Välj basen u_1, u_2 i U och tillämpa Gram-Schmidt's ortogonaliseringssmetod för att finna en ON-bas i U .

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+4+0+1}} u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, 0, -1)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1 = u_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} (-1+6+0+1) (1, 2, 0, -1) \\ &= (-1, 3, 2, -1) - \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, 0, -1) = (-2, 1, 2, 0) \end{aligned}$$

$$e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+1+4+0}} f_2 = \frac{1}{3} (-2, 1, 2, 0)$$

dvs en ON-bas i U är t.ex. $\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1), \frac{1}{3}(-2, 1, 2, 0)}$



Tentamen 2014-06-13

POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter

1. Ekvationen kan genom diagonalisering omformas till $36 = 4\tilde{x}^2 + 9\tilde{z}^2$ som, utifrån att $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ betecknar en punkts koordinater i ett ON-system, beskriver en elliptisk cylinder med cylinderaxeln längs linjen $(x, y, z) = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, och med ett avstånd till origo lika med 2

2. Det att dubbelegenvärdet svarar mot ett tvådimensionellt egenrum gör att det finns en bas av egenvektorer, exempelvis $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, 0)$
- F :s matris i denna bas är lika med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Polynomfunktionerna p, q, r utgör en bas i \mathcal{P}_2 ty matrisen \mathbf{S} i matrisrelationen $(p \ q \ r) = (p_0 \ p_1 \ p_2) \mathbf{S}$ är inverterbar.

Polynomfunktionen $2p_0 + 3p_1 + 2p_2$ har i basen p, q, r koordinaterna $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{3}{5})$

4. Exempelvis (två varianter är visade)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7/6 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -5/3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -11/6 & 1/2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -13/3 & 2 \end{pmatrix}$$

1p: Korrekt bestämt egenvärden och egenvektorer till den symmetriska avbildning som i den givna ON-basen har den kvadratiska formen $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 + 4xz$

1p: Korrekt bestämt en ortogonal basbytesmatris som diagonaliseras den kvadratiska formen

1p: Korrekt funnit att ekvationen geometriskt betyder en elliptisk cylinder

1p: Korrekt funnit en ekvation för cylinderaxeln

1p: Korrekt bestämt avståndet mellan ytan och origo

1p: Korrekt identifierat F :s matris i standardbasen

1p: Korrekt funnit en (tvådimensionell) bas i egenrummet svarande mot dubbelegenvärdet

1p: Korrekt funnit en bas i egenrummet svarande mot singelegenvärdet, samt sammanfattat hela basen av egenvektorer

1p: Korrekt, på ett eller annat sätt, påvisat att F är diagonalisierbar

1p: Korrekt angivit F :s matris i en vald bas av egenvektorer

1p: Korrekt funnit den matris (eller motsvarande) som beskriver sambanden mellan polynomfunktionerna p_0, p_1, p_2 och polynomfunktionerna p, q, r

1p: Korrekt visat att matrisen ifråga är inverterbar (eller ekvivalent att den har full rang eller ekvivalent att determinanten för den är skild från noll), och utifrån detta korrekt dragit slutsatsen att även polynomfunktionerna p, q, r utgör en bas i \mathcal{P}_2

1p: Korrekt uttryckt polynomet $2 + 3x + 2x^2$ som matrisprodukten $(p(x) \ q(x) \ r(x)) \mathbf{S}^{-1} (2 \ 3 \ 2)^T$

1p: Korrekt bestämt inversen till matrisen \mathbf{S}

1p: Korrekt i basen p, q, r funnit koordinaterna för polynomfunktionen $2p_0 + 3p_1 + 2p_2$

2p: Korrekt funnit att två av avbildningsmatrisens fyra kolonnvektorer ska vara två linjärt oberoende linjärkominationer av de vektorer som spänner upp värderummet

1p: Korrekt tolkat nollrummet som rymmande de kolonnvektorer vilka avbildas på nollvektorn, dvs att matris-sambanden $\mathbf{A} (1 \ -1 \ 0 \ 2)^T = (0 \ 0 \ 0)^T$ och $\mathbf{A} (1 \ 2 \ 3 \ 1)^T = (0 \ 0 \ 0)^T$ gäller

(1+1)p: Korrekt bestämt den tredje respektive den fjärde kolonnen så att nollrummet korrekt gestaltas

5. $\dim U(a) = \begin{cases} 1 & \text{om } a = 1 \\ 3 & \text{om } a = -3 \\ 4 & \text{om } a \neq -3, 1 \end{cases}$

En bas i $U(1)$ är $(1,1,1,1)$

En bas i $U(-3)$ är

$$(-3,1,1,1), (1,-3,1,1), (1,1,-3,1)$$

En bas i $U(a)$ för $a \neq -3, 1$ är

$$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$$

1p: Korrekt iscensatt en undersökning av vektorerna i spannet för underummet U , och korrekt funnit den till vektorernas koefficientmatris radekvivalenta trappstegsmatrisen

1p: Korrekt från trappstegsmatrisen identifierat dimensionen på U för olika värden på talet a

1p: Korrekt med hjälp av trappstegsmatrisen identifierat en en bas i underrummet $U(1)$

1p: Korrekt med hjälp av trappstegsmatrisen identifierat en en bas i underrummet $U(-3)$

1p: Korrekt med hjälp av trappstegsmatrisen identifierat en en bas i underrummet $U(a)$ för $a \neq -3, 1$

6. g är en skalärprodukt i R^3 om och endast om $a < 5$

$$\text{längd}((1,1,1)) = 5 \text{ om och endast om } a = 5/2$$

1p: Korrekt påvisat att $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, dvs att g är symmetrisk, och att g är linjär i respektive av sina argument, dvs exempelvis att

$$g(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$$

2p: Korrekt kvadratkompletterat $g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ och funnit att g är positivt definit om $a < 5$

1p: Korrekt formulerat villkoret att vektorn $(1,1,1)$ har längden 5 i ett euklidiskt rum med g som skalärprodukt

1p: Korrekt funnit det värde på talet a för vilket längden av vektorn $(1,1,1)$ är lika med 5 i det euklidiska rummet

7. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1p: Korrekt från villkoret för M identifierat två vektorer som spänner upp M , samt korrekt från villkoret (inkl. det att M är ett underrum till E^3) identifierat en vektor som är ortogonal mot alla vektorer i M

(1+1)p: Korrekt noterat att den ortogonala projektion som den linjära operatorn F utför innebär att varje vektor som tillhör M avbildas på sig själv medan vektorer vinkelräta mot M på avbildas på nollvektorn

1p: Korrekt på formen $\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$ och i standardbasen funnit matrisen \mathbf{A} för den linjära avbildningen F

1p: Korrekt explicit funnit matrisen \mathbf{A}

8. En ON-bas i underrummet är t.ex.

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 0, -1), \frac{1}{3}(-2, 1, 2, 0)$$

1p: Korrekt iscensatt en undersökning av vilka vektorer som behövs för att spänna upp det aktuella underummet, och korrekt funnit den till vektorernas koefficientmatris radekvivalenta trappstegsmatrisen, och korrekt konstaterat att dimensionen av underrummet är lika med 2

1p: Korrekt identifierat två linjärt oberoende vektorer \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 vilka utgör en bas i underrummet, korrekt iscensatt en orthogonaliseringssmetod för att finna en ON-bas i underrummet, och korrekt normerat vektorn \mathbf{u}_1 till \mathbf{e}_1

2p: Korrekt bestämt en vektor \mathbf{f}_2 som tillhör underrummet, som är skild från nollvektorn, och som är ortogonal mot den först valda vektorn, dvs korrekt bestämt t.ex.

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$

1p: Korrekt normerat \mathbf{f}_2 till \mathbf{e}_2 och korrekt sammanfattat den framtagna ON-basen