Asignatura: MÉTODOS NUMÉRICOS II – Curso: 2016–2017
Relación de problemas 2: Derivación e integración numérica

---

1. Sea $f : [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable.

   a) Demuestra que existe $c \in [x_0, x_1]$ para el que la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio construida sobre los puntos x_0, x_1 proporciona el valor exacto de $f'(c)$.

   b) Deduce que para cualquier $k \geq 0$, existe un $c \in [x_0, x_1]$ de forma que la fórmula anterior proporciona el valor exacto de la derivada de x^k en c.

   c) ¿Contradice la afirmación anterior el que la fórmula tenga grado de exactitud 1?

2. Sea $f : [x_0, x_4] \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente derivable, y $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ puntos ordenados en $[x_0, x_4]$.

   a) Deduce la expresión de la fórmula de tipo interpolatorio con soporte en dichos puntos que permite aproximar $f'(c)$ con $c \in [x_0, x_4]$.

   b) Demuestra que en el caso de que los puntos sean

   $$x_0 = c - 2h, \quad x_1 = c - h, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c + h, \quad x_4 = c + 2h$$

   la fórmula correspondiente es de la forma

   $$f'(c) \simeq \frac{1}{12h} \left(f(c - 2h) - 8f(c - h) + 8f(c + h) - f(c + 2h) \right),$$

   y el error de derivación es un $O(h^4)$.

3. Utiliza la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio con soporte de tres puntos más precisa para completar los valores de la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	-4.827866	
3.0	-4.240058	
3.1	-3.496909	
3.2	-2.596792	

4. Los datos del ejercicio anterior se han obtenido con la función

   $$f(x) = x \cos x - x^2 \sin x.$$

   Calcula una cota del error cometido en la aproximación en cada fórmula y compara dicho valor con el error real cometido con cada aproximación.

5. Calcula el orden de precisión con respecto a h de las siguientes fórmulas para la aproximación numérica de $f'(c)$:

a)
$$f'(c) \simeq \frac{1}{6h}\left(-11f(c) + 18f(c+h) - 9f(c+2h) + 2f(c+3h)\right).$$

b)
$$f'(c) \simeq \frac{1}{6h}\left(f(c-2h) - 6f(c-h) + 3f(c) + 2f(c+h)\right).$$

c)
$$f'(c) \simeq \frac{1}{12h}\left(-f(c-2h) - 12f(c-h) + 16f(c+2h) - 3f(c+2h)\right).$$

6. Considera la función $f(x) = e^x$ y trabaja en los cálculos numéricos con 8 decimales significativos.

   a) Halla una aproximación de $f'(0)$ mediante la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que se construye sobre los puntos $x_0 = -h$ y $x_1 = h$ para los valores de $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ y escribe en cada caso el error cometido.

   b) Analiza la evolución del error cometido.

7. *a*) Deduce la fórmula de derivación numérica que aproxime el valor de $f''(c)$ utilizando los valores de f en los puntos

   $$x_0 = c-2h, \quad x_1 = c-h, \quad x_2 = c, \quad x_3 = c+h, \quad x_4 = c+2h,$$

   maximizando el grado de exactitud de la fórmula.

   b) Aplica la fórmula anterior para estimar $f''(0)$ siendo $f(x) = \cos x$, utilizando en los cálculos 7 cifras decimales para los valores h = 0.1,0.01,0.001 y escribe el error obtenido en cada caso.

8. Considera la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio para la aproximación de las derivadas de orden p, con $p \leq n$, obtenida con los puntos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$:

   $$f^{(p)}(c) \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i^{(p)} f(x_i).$$

   Demuestra que para cualquier m, $1 \leq m \leq n$ se verifica:

   $$\sum_{i=0}^{n} x_i^m a_i^{(p)} = \begin{cases} m(m-1)(m-2)(m-p+1)x^{m-p} & si \quad p < m \\ m! & si \quad p = m \\ 0 & si \quad p > m. \end{cases}$$

9. Dados los puntos $\{x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 3h\}$ y una función $f(x)$ sucientemente derivable en $[0, 3h]$ se pide:

   a) Obtén la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio obtenida con esos puntos que permite aproximar $f'(2h)$.

   b) Obtén la expresión del error cometido con la fórmula anterior.

10. La fórmula de derivación numérica

$$f'(c) \simeq \frac{1}{h}(f(c+h) - f(c))$$

tiene una precisión $O(h)$. Utliza el método de extrapolación de Richardson para obtener una fórmula con precisión $O(h^3)$.

11. Considera la función $f(x) = 2^x \sin x$. Aplica el método obtenido en el ejercicio anterior para aproximar $f'(1.05)$ con $h = 0.4$.

12. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Notamos por $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, y

$$\Pi_n(x) = (x - x_0)(x - x - 1) \cdots (x - x_n).$$

a) Llamando $x_{n/2} = \frac{a+b}{2}$, prueba que

$$\Pi_n(x_{n/2} + t) = (-1)^{n+1}\Pi_n(x_{n/2} - t), \quad 0 \leq t \leq \frac{b-a}{2}.$$

b) Llamando $\tau_n(y) = \Pi_n(x_0 + yh)$ prueba que

1) $|\tau_n(y+1)| < |\tau_n(y)| \qquad \forall y \notin \mathbb{N}, \quad 0 < y + 1 < n/2.$

2) $|\tau_n(y)| > |\tau_n(y+1)| \qquad \forall y \notin \mathbb{N}, \quad n/2 < y < n.$

c) Llamando

$$w(x) = \int_a^b \Pi_n(t)\, dt,$$

prueba que:

1) Si n es par $w(a) = w(b) = 0$ y $w(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$.

2) Si n es impar $w(a) = 0, w(b) = 2w(x_{n/2})$ y $w(x) < 0$, $\forall x \in (a, b]$.

13. *a*) Deduce las expresiones de las fórmulas de Newton-Cotes abiertas con $n = 1$ y $n = 2$ y obtén la expresión del error de dichas fórmulas.

b) Calcula utilizando las fórmulas obtenidas en el apartado anterior las aproximaciones de

$$\int_0^2 x^3 - 2x^2 + 1\, dx.$$

c) Compara los errores reales con los errores teóricos cometidos.

14. Sea

$$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

una fórmula de Newton-Cotes. Demuestra que:

- Si n es par $\alpha_{n/2i} = \alpha_{n/2+i}$ con $i = 0, \cdots, \frac{n}{2}$.
- Si n es impar $\alpha_i = \alpha_{ni}$, con $i = 0, \cdots, \frac{n-1}{2}$.

(Ayuda: Describe los nodos o puntos de soporte de la fórmula referidos al punto medio del intervalo).

15. Considera las integrales siguientes:

$$(a) \quad \int_1^{1.5} x^2 \log x \, dx \qquad\qquad (b) \quad \int_0^1 x^3 e^{-x} \, dx$$

$$(c) \quad \int_1^{1.8} \frac{3x}{x^2-4} \, dx \qquad\qquad (d) \quad \int_0^{\pi/4} \cos x e^{3x} \, dx$$

   a) Calcula las aproximaciones de las mismas obtenidas por las fórmulas del punto medio, del trapecio y de Simpson, respectivamente.

   b) Utilizando las expresiones del error de dichas fórmulas calcula en cada caso una cota del error cometido con cada aproximación.

16. *a*) Obtén la fórmula de Newton-Cotes cerrada con $n = 6$ e indica la expresión del error cometido con dicha fórmula.

   b) Aproxima la integral siguiente

$$\int_0^2 x^4 e^{-2x^2} \, dx$$

   con la fórmula obtenida en el apartado anterior.

   c) Indica una cota del error cometido con dicha aproximación.

   d) Determina los valores de n y h necesarios para aproximar

$$\int_0^2 \frac{e^{3x} \sin 3x}{x^4+1} \, dx$$

   mediante las fórmulas del trapecio y de Simpson compuestas, respectivamente, con un error menor que 10^{-4}. Indica las aproximaciones obtenidas.

17. **Estudio del error de redondeo en la fórmula del trapecio compuesta.** Dada $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se quiere aproximar la integral de f en $[a, b]$ mediante la fórmula del trapecio compuesta con n subintervalos. Supongamos que en cada evaluación de f, $f(x_i)$ se produce un error de redondeo, es decir obtenemos $\hat{f}(x_i)$, y:

$$f(x_i) = \hat{f}(x_i) + e_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

   Supongamos además que los errores de redondeo están acotados por un valor ε, es decir

$$\max_i |e_i| \leq \varepsilon.$$

   Calcula una cota del error de redondeo acumulado $e(h)$ con $h = \frac{b-a}{n}$, obtenido al utilizar la fórmula del trapecio compuesta.

18. **Obtención de errores a través de los desarrollos en serie de Taylor.** Sea $h > 0$ y $f(x) \in C^4([0, 3h])$. Sea $p_2(x)$ el polinomio de grado menor o igual que 2 que

interpola a f en $x = 0, h, 2h$. Calcula la fórmula de integración numérica $FC(f)$ que aproxima a

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx$$

obtenida como $FC(f) = \int_0^{3h} p_2(x)\,dx$ y comprueba que el error de cuadratura cometido es

$$EC(f) = \int_0^{3h} f(x)\,dx - FC(f) = \frac{3}{8}h^4 f'''(0) + O(h^5).$$

(Ayuda: Llama

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

y utiliza el desarrollo en serie de Taylor de F y de f en torno a 0 para obtener la expresión del error.)

19. Encuentra una fórmula de integración numérica de la forma

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(1),$$

que sea exacta para todas las funciones de la forma $f(x) = ae^x + b\cos(\frac{\pi x}{2})$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

20. Utiliza la integración de Romberg para aproximar las integrales del ejercicio 4 de forma que $|R_{n1,n1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$. Compara los resultados con los valores exactos de las integrales y con los obtenidos en el ejercicio 15.

21. Calcula las integrales del ejercicio 15 utilizando la fórmula gaussiana (de Gauss-Legendre) con $n = 2$. Calcula los errores cometidos en cada caso y compara los resultados con los obtenidos en el ejercicio 15.

22. Utiliza las fórmulas de cuadratura gaussianas con $n = 2, 4, 6, 8$ para aproximar

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Compara los resultados con los obtenidos para las fórmulas de Newton-Cotes.