

RUDOLF L. SCHÖRGER

The image features a large, solid white circle centered in the frame. Inside the circle, a black spiral starts at the bottom and curves upwards towards the top right. The background is a dark green color with a subtle radial gradient. Around the perimeter of the white circle, the text "TANZ DER ITERATIONEN" is repeated in a curved, staggered pattern, creating a sense of motion and depth.

ODER
DIE FANTASTISCHE LOGIK DER MANDELBROT MENGE

Inhalt

<u>Teil 1 :</u>	<u>Einführung</u>
3 Vorwort	
5 Eine kleine Kostprobe	
6 Vorbereitung	
12 Aufbau der Dokumentation	
<u>Teil 2 :</u>	<u>Grundwissen</u>
15 Etwas Mathematik	
18 Die Iterationsresultate	
21 Eine kleine Bildschirmkunde	
22 Die Orbitanalyse	
25 Der Iterationsverlauf und seine Messung	
<u>Teil 3 :</u>	<u>Die perfekte Iteration</u>
29 Randbedingungen zur korrekten Berechnung	
30 Zahlenformate mit denen der Computer arbeiten kann	
32 Die Pseudo-Konvergenz	
35 Die Rechengenauigkeit	
36 Der Abtasteffekt	
39 Der Shiftoperator	
40 Das Beschattungslemma	
43 Analyse des Pythagoras-Effektes	
47 Das allgemeine Abtasttheorem	
48 Die Programmierung	
50 Von der richtigen Belichtung einer Messung	
54 Der Messbereich	
<u>Teil 4 :</u>	<u>Die Messungen</u>
56 Mögliche Auswertungen	
58 Iterationsanzahl des Apfelmännchens	
60 Eine klassische Reise ins Mandelbrot-Land	
61 Die Anfangsbedingungen	
62 Die Bedeutung des Imaginärpunktes	
63 Betrag von Z des Apfelmännchens	
<u>Teil 5 :</u>	<u>Auswertung Bubblebrot</u>
65 Die Bubbelbrotmethode	
66 Iterationsnummer der Bubbelbrotmethode	
72 Argument für Minimum-Z	
73 Test des Blasenwertes mit dem Phasenraum	
77 Abstand zum Nullpunkt von Bubbelbrot	
78 Ergebnisorte der Bubbelbrotmethode	
79 Abstand zum Ergebnisort bei Bubbelbrot	
81 Ergebnisort-Ursprung bei Bubbelbrot	
82 Begründung der Funktion Bubblebrot	
83 Bubbelbrot als Überleitung zum SternSeek	
84 SternSeek	

Teil 6 :Orbitanalyse

- 86 Aufsummierung der Orbits
- 87 Aufsummierung der Orbits Revers Methode
- 90 Orbitanalyse und Periodizität

Teil 7 :Auswertungsart Lotusbrot

- 92 Lotusbrot Algorithmus

Teil 8 :Auswertung binäre Zelegung

- 94 Binäre Zelegung

Teil 9 :Auswertung Center of Orbit

- 95 Definition

Teil 10 :Auswertung Steigung

- 97 Steigung des Iterationsverlaufes

Teil 11 :Anhang

- 99 Ausblick
- 100 Bilddaten
- 102 Literaturverzeichnis
- 103 Symbole und Formelzeichen
- 104 Glossar
- 105 ImAnhang auf der CD
- 106 Die Namen von Darstellungen
- 107 Stichwörter

Vorwort

Unbestritten ist die Schönheit fraktaler Strukturen. Aber sie sind nicht nur schön, sondern auch eine Quelle des Unerwarteten.

So können wir, etwa dreißig Jahre nach der ersten Visualisierung der sogenannten Mandelbrotmenge M noch immer Überraschendes an ihr entdecken. Davon soll diese Dokumentation handeln. Mr. Mandelbrot hat die Ergebnisse dieser mathematischen Formel als erster auf dem Computer dargestellt. Später hat man diese Computerabbildungen untersucht und kommentiert, dann aber mehr oder weniger zu den Akten gelegt. Die anschließende Begeisterung, die damals das Computervolk erfasste, war meistens vom Ehrgeiz besetzt, möglichst exotische, schöne, bunte Bilder zu berechnen. Die M wurde so populär, dass sich bald der volkstümliche Begriff „Apfelmännchen“ dafür bildete. Um neues zu zeigen, wandten sich viele Fans schnell anderen Formeln aus dem fraktalem Bereich zu. Zur Zeit scheint ein Großteil der Literatur immer noch den Erkenntnisstand von 1995 zu haben. Jeder Schüler meint, eine tolle Internetseite über die Mandelbrotmenge zu erstellen, wenn er altbekannte Fakten und selbst erstellte Bilder zeigt. Viele Autoren gehen in ihren populärwissenschaftlichen Büchern ohne jeglichen Erkenntnisgewinn nicht über das Grundwissen zum Thema hinaus. Im Gegenteil, es werden falsche Interpretationen solange weitergegeben, bis sie auf Grund der häufigen Wiederholungen für die Wahrheit gehalten werden. Im mathematisch-wissenschaftlichen Bereich gibt es durchaus neueste Publikationen, jedoch auf solch hohem Niveau, dass sie von den Fraktal-Freaks nicht mehr verstanden werden können.

Diese Dokumentation soll in das Unbekannte geleiten, um zu verdeutlichen, wie die Mandelbrotmenge M funktioniert. Sie soll nicht ausschließlich mathematisch erklärt werden. Begriffe wie Hausdorff-Dimension, Cantor-Staub, Fraktale-Dimension, Feigenbaum und Riemannsche-Blätter finden hier keine Erklärung. An diesen Themen Interessierte können auf eine große Auswahl von Büchern renomierter Mathematiker zurückgreifen. Besonders empfehlenswert, da ausführlich und klar formuliert fand ich jedoch "Chaos, Bausteine der Ordnung" [CBdO]. Das Unbekannte der M liegt jedoch in ihrem Inneren verborgen. Auch Zeitler [FuC] schreibt schon 1993 in der Einleitung: "Auch ein Innenleben des Apfelmännchens wurde inzwischen freigelegt." und "Der Computer hat die Situation total verändert....Er liefert Bilder, die wir nicht - oder noch nicht - beweisen können." Meine Dokumentation wird sehr viele dieser Bilder liefern. Und was nicht mit einem Bild erklärt werden kann, wird mit Filmanimationen verdeutlicht, die dem Buch beiliegen.. Auch mit dem angefügten Programm DeepChaos kann selbst geforscht werden. Es ist nicht wie die meisten Fraktalgeneratoren zum Erzeugen schöner Bilder konzipiert, sondern soll eine logische Interpretation und Vermessung der Iterationabläufe ermöglichen. Diese Dokumentation soll zeigen, dass die Unendlichkeit sehr nahe ist. Da kein

Computer dieser Welt in der Lage ist, die realen Größenverhältnisse darzustellen, kann man sich die Schönheit dieser Abläufe nur mit Fantasie im Kopf aufbauen. Der Computer liefert aber all die fantastischen Teilansichten, die bisher noch niemand sah.

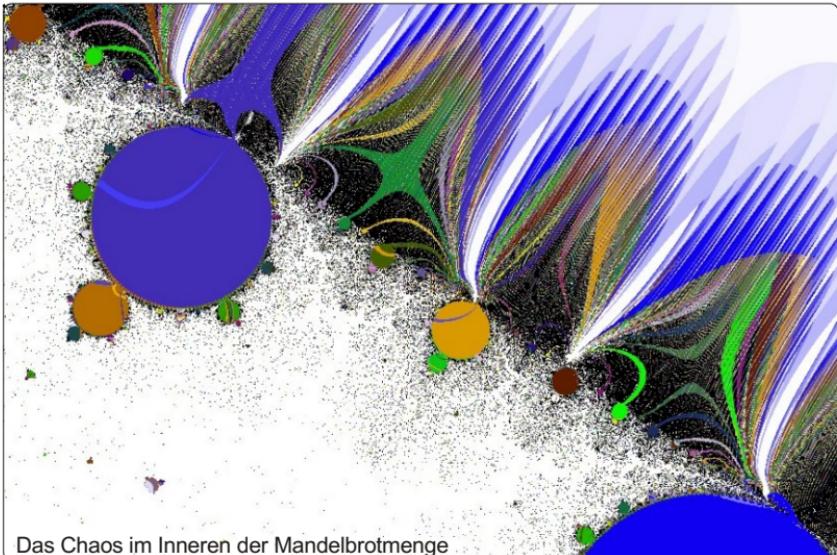
Mr. Mandelbrot hat in seinem Buch "Fraktale Geometrie der Natur" [FGdN] auf die Schönheiten fraktaler Strukturen hingewiesen. Es gibt sehr viele Varianten von Formeln in der Mathematik und in der Natur vermutlich noch mehr. Im Computer können aber durch Programmierfehler, Rechenfehler und Logikfehler ebenfalls überraschende Fraktale entstehen. Ich will aber bei der Formel der Mandelbrotmenge M bleiben, und zeigen, dass noch nicht alle Aspekte diskutiert wurden. So wird argumentiert, dass der Randbereich von M der Ort ist, an dem das Chaos stattfindet, während der Innen- und Außenbereich stabil und berechenbar sei. Zumindest für den Innenbereich gilt das meiner Meinung nach jedoch nicht, was hier auch gezeigt werden soll. Nun ist der Innenbereich nicht nur schwarz wie bisher, sondern auch interessant, der Randbereich stabiler als vermutet, und das Chaos weicht einer kontrollierten Ordnung.

Ich bin kein Mathematiker, eher ein Geometer. So wie wir mit unseren Satelliten die Erde immer genauer vermessen, so benutze ich den Computer bei den Details der M weiterzufragen, wo andere aufgehört haben. Weil es, wie bei allen Zusammenhängen in unserer Welt, nur ein Weiterfragen für uns Menschen geben kann und keine Endgültigkeit. Auch wenn zukünftig Wissenschaftler ein paar Antworten geben, wozu ich mit meinen Aufzeichnungen den Anstoß gern gäbe, werden diese zu neuen Fragen führen. Und diese regen an, weiterzuschauen tiefer und tiefer hinein - ohne im menschlichen Sinne je irgendwo anzukommen.

Die Titelseite der "Bible Moralisee" aus dem Jahr 1250 zeigt Gott als Geometer. Auch Mandelbrot hat dieses Bild in [FGdN] gezeigt. Er hat es aus Begeisterung über den fraktalen Inhalt gezeigt. Ich versteh es in dem schon immer bestehenden Wunsch der Menschheit, zu messen und zu forschen.



Eine kleine Kostprobe



Das Chaos im Inneren der Mandelbrotmenge

Abgebildet ist ein kleiner Ausschnitt von dem, was im nahen Randbereich passiert. Es wird nicht, wie üblich die Anzahl der erreichten Iterationen angezeigt, sondern die Steigung des Iterationsverlaufes eines Punktes. Aber das will ich später noch näher zeigen.

Die M wurde von vielen Wissenschaftlern analysiert und dokumentiert. Interessant erscheinen mir die Eigenschaften der M, die noch nicht visualisiert wurden. Ich möchte einen kleinen Vergleich aus der Entwicklung der Elektrizität anführen: Zunächst waren nach der Entdeckung der Elektrizität nur Messgrößen wie Spannung, Strom und Widerstand bekannt. Heute haben wir unter anderem Messgeräte für Leistung, Frequenz, Phasenlage, Blindleistung, Polarität, Amplitude, Flankensteilheit, Oberwellen und Spikes. Da sind Messgeräte für Elektronik und Informationstechnik noch nicht dabei.

Noch interessanter erscheint die Entwicklung in der Astronomie. Zuerst waren da die Fernrohre, dann die Teleskope, zunächst waren alle Instrumente auf das sichtbare Licht ausgerichtet. Heute betrachten wir das Weltall im gesamten Spektrum, von der Wärmestrahlung (Infrarot) bis zu den harten Strahlen (Gamma), die Radio-Teleskopie nicht zu vergessen.

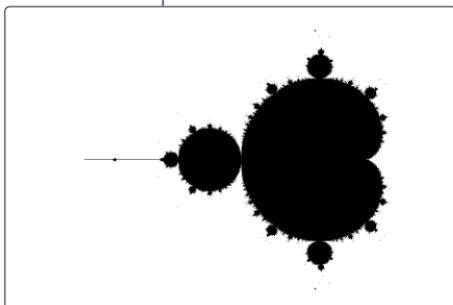
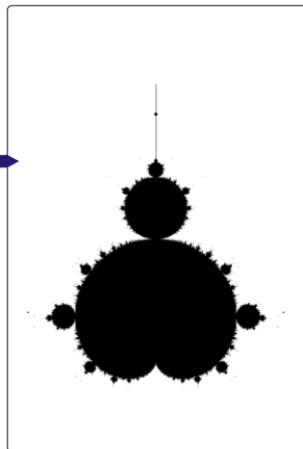
Mit diesem Vorhaben, mehr an der M als die erreichbare Iterationsanzahl messen zu können, wurde dieses Projekt von mir begonnen. Außerdem versuchte ich, das zu finden, was vermuteter Weise vorhanden sein müßte. So steht in "Fraktale Geometrie", 1993 [FG]: "Zusätzlich wachsen feine verzweigte Haare

Vorbereitung

Die Mandelbrotmenge M besteht aus einem Iterationsverlauf für jeden einzelnen Bildpunkt (Pixel) im abgebildeten Rechteck. Wenn der Iterationsverlauf für einen Bildpunkt unendlich fortgeführt werden kann, und wenn das Ergebnis dabei immer kleiner statt größer wird, dann wird dieser Bildpunkt schwarz markiert. Soweit zu der Fragestellung, die Mr.Mandelbrot vorgegeben hat und die ihn besonders interessiert hat. Überraschenderweise ergibt die Menge der schwarzen Punkte diese Figur, die volkstümlich auch "Apfelmännchen" genannt wird.

Apfelmännchen wahrscheinlich deshalb, weil die ersten populären Programme auf einem der ersten PCs, die es ca.1980 von der Firma Appel gab, liefen. Dieser McIntosh hatte ein Programm, mit dem sich die M besser um 90° nach rechts gedreht darstellen ließ (entgegen dem wissenschaftlichen Koordinatensystem) und dann eben wie ein Männchen aussah.

Manchmal macht es das Layout für diese Dokumentation leichter, und so erlaube ich es mir, ab und zu, bei dieser Drehung, in einigen der folgenden Darstellungen zu bleiben. Erzeugt wurden alle Bilder in der mathematisch richtigen Ausrichtung. Da die M spiegelsymmetrisch ist, erlaube ich mir auch mal, eine Hälfte der M wegzulassen oder zu kürzen



Alle Bilder und Diagramme in dieser Dokumentation wurden mit dem Programm DeepChaos erzeugt.

aus den Knospen heraus....Es kann keicht vorkommen, dass man diese Haare in Computerbildern vergeblich sucht. Jedoch lassen genaue Bilder vermuten, dass M eine zusammenhängende Menge ist, ein Umstand, der mathematisch bestätigt wurde." Wenn aber heute, 15 Jahre später, mit der Möglichkeit einer Lupe mit der Vergrößerungsstärke von $10 E+80$ immer noch keine Haare gesehen wurden - sollten dann die Mathematiker nicht noch einmal darüber nachdenken? Leider ist logischerweise die Nichtexistenz von Irgendetwas durch Bilder nicht nachzuweisen.

Vielleicht gebe ich dem Leser den Anstoß alle Messungen am eigenen Computer mit dem beiliegenden DeepChaos-Programm oder einem eigenem Programm nachzuvollziehen, um sich davon zu überzeugen.

Das Chaos

Es wird gesagt, M sei eine repräsentative Darstellung der Chaostheorie. Dies wird mit der Unvorhersagbarkeit eines Rechenergebnisses begründet, besonders wenn es im Randbereich von M liegt. Meist wird dann auch noch erklärt und vorgerechnet, was passiert wenn man nur eine Ziffer ganz hinten nach dem Komma verändert. Diese ganz kleine Änderung kann nicht nur eine kleine Änderung des Endergebnisses verursachen, sondern in ganz andere Dimensionen führen. Dies nennt man oft auch den Schmetterlingeffekt - "Wenn in China ein Schmetterling mit dem Flügel schlägt, dann kann dies in Amerika einen Hurrikan verursachen". All das beschreibt das wirkliche Chaos sehr gut. Aber weil diese Fabel so einleuchtend ist, gibt es mittlerweile viele Variationen davon. Durchaus interessant ist der Beitrag [wpsm]. Was die amerikanischen Hurrikans wirklich verursacht, könnten die Millionen Tonnen Sahara-Staub sein, die in die Hurricane-Alley geweht werden [dWs]. Oder, wie das Schluss-Statement dieser Dokumentation sagt, könnte dieser Staub auch so machen verhindern. Auf jeden Fall ist Chaos im Spiel, aber es ist unwahrscheinlich, dass ein Flügelschlag ausreicht, da meistens viel größere Einflüsse dominieren, die wir (noch) nicht kennen, und wahrscheinlich auch nie in ihrer Gesamtwirkung kennenlernen werden.

Meiner persönlichen Ansicht nach gibt es in der physikalischen und mathematischen Welt überhaupt kein Chaos. Für uns Menschen ist es nur ein psychologisches Chaos, wenn wir einen Vorgang nicht mehr durchschauen, oder nicht mehr kontrollieren können. Dazu gehören eben alle nichtlinearen Vorgänge, besonders wenn sich ein Ereignis von einem Vorgängereignis ableitet, was nichts anderes ist als eine Iteration. Wenn wir einen Bach beobachten, können wir zwar mit Sicherheit sagen, das Wasser fließt in ihm nach unten ab, aber welchen Weg ein einzelner Tropfen durch all die Wirbel nimmt, kann nicht berechnet werden - dies ist also für uns ein chaotisches System. Aus Sicht dieses Tropfens jedoch ist sein Weg zwar nicht vorbestimmt, aber doch Stück für Stück logisch. Er schwimmt einfach dorthin, wo Platz für ihn zwischen all den anderen Tropfen ist. Falls er genügend kinetische Bewegungsenergie hat, spritzt er schon auch mal in die Luft oder schubst andere Tropfen weg. Genauso wie wir Menschen, wenn wir eine Menschenmenge durchqueren müssen. Selbst Gott könnte unseren Weg durch die Menge nicht berechnen, da wir außer der kinetischen Energie auch noch den freien Willen haben... sind dann wir das Chaos? So wie der Tropfen im Bach seinem großen Ziel, dem Meer entgegenrollt, verhalten sich auch große Vogelschärme. Wobei wir uns wundern, wie die Vögel es schaffen, so geordnet zu fliegen. Wir denken hier wäre alles geordnet, aber es sind ähnliche Gesetze wie beim Wassertropfen, jeder Vogel richtet sich nur an seinen Nachbarn aus, und wenn der einen kleinen Schlenker macht, folgt bald der ganze Schwarm - oder auch nicht. Obwohl die Bewegungen des Schwar-

mes sehr geordnet und graziös erscheint, er ist regiert von dem, was wir Chaos nennen.

Die M selbst ist jedoch äußerst stabil. Die Berechnung einer bestimmten Iterationsfolge wird immer das selbe Ergebnis hervorbringen. Wenn wir M nicht nur oberflächlich betrachten, sondern versuchen seine Logik zu erkennen, werden wir sehen, dass alles sehr gesittet zugeht. Würde man versuchen, eine Ziffer weit hinter dem Komma zu verfälschen, dann ist das eine ganz andere Iterationsfolge mit einem anderem dazugehörigen Endergebnis. Wäre das nicht so, wäre die M ja gar nicht reproduzierbar. Die M ist eine fixe Landschaft, mal eben und glatt, mal gebirgig und schroff. Während man auf der Ebene ein gutes Stück laufen kann, muß man sich im Gebirge schon jeden noch so kleinen Schritt überlegen. So kann im Gebirge der M eine Zahl um die Schrittweite von der 100. Nachkommastelle weiter schon den Abgrund oder den Gipfel bedeuten. Die M ist somit nichts anderes als eine Landkarte der zu erwartenden Rechenergebnisse. Ein Bergsteiger könnte damit schon ermitteln wohin er seinen nächsten Schritt machen möchte.

Wenn es dann aber doch zu Unterschieden von M-Ausschnitten, die von verschiedenen Computern oder Programmen stammen kommt, ist nicht das Chaos oder die Mathematik schuld. Der Grund hierfür sind unterschiedliche Zahlensysteme der Computer und deren Software. Manche rechnen nur mit 18 Nachkommastellen, andere mit 100 oder mehr. Es gibt Fixpoint und Floatingpoint, und jeder rundet anders auf und ab. Dies wirkt sich um so mehr aus, je länger die Iterationsfolge wird und um so tiefer in die M hingezoomt wird. Aber auch nicht bei jeder Iterationsfolge wirken sich Rundungsfehler so stark aus, wie in der Literatur oft betont wird. Es wird immer wieder nur ein extremes Beispiel vorgerechnet, und man ist gewillt zu glauben, alle Folgen verhalten sich so. Diese extremen Rechenbeispiele werden gezeigt, um das Chaos in all seiner Macht darzustellen und zu manifestieren. Das hat dazu geführt, dass viele Leute sich nicht wagen auch einmal eine längere Iterationsfolge durchzurechnen, aus Angst, ins Chaos zu geraten. Aber nicht in allen Bildpunkten der M herrscht das Chaos, meiner Meinung nach sogar in den wenigsten. Alle Bildpunkte innerhalb der M, die ein konvektierendes Verhalten zeigen, haben wenig Tendenz zu chaotischem Verhalten. Die Erklärung ist einfach. Mit jeder Iteration wird das Vorgängerergebnis quadriert. Da eine Quadrierung von Zahlen kleiner Eins (die allermeisten Orbits innerhalb der M konvergieren auf einen Wert von 0,5 hin.) immer noch kleiner sind ($0,1^2 = 0,01$), werden die Nachkommastellen nach rechts verschoben, was dazu führt, dass die letzten Kommastellen nach hinten runterfallen. Sie können das Ergebnis also kaum beeinflussen. Das Chaos (oder besser: die Rechenfehler) kann sich nur dort aufbauen, wo ein- oder gar mehrmals einem sehr kleinen Ergebnis ein sehr großes im nächsten Iterationsschritt folgt, denn dadurch werden von rechts wieder Kom-

mastellen hereingeholt, die es eigentlich nicht gibt. Ab solch einen Punkt, müssten wir eigentlich von einem neuen Iterationsverlauf sprechen, da die Koordinaten verändert wurden. Diese Aussagen beziehen sich natürlich nur auf die Computer-Simulationen, in der Natur und in der reinen Mathematik sind alle Vorgänge analog und von digitalen Kommastellen unabhängig.

Bleiben wir bei der Vorstellung einer Chaos-Landkarte. Wenn wir die übliche Darstellung des sogenannten Apfelmännchens betrachten, so sehen wir als Ergebnis wie viele Iterationen für einen bestimmten Ort möglich sind. Gerade am Rand der M sehen wir viele nahe beieinanderliegende Orte mit großen Unterschieden in den Iterationsanzahlen. Wenn nun ein reales System in der Natur von der Anzahl möglicher Iterationen abhängt, können wir in etwa vorhersagen, wann sich dieses System chaotisch verhalten wird. Es könnte aber auch sein, dass ein System vom Minimum eines Iterationsergebnisses abhängt. Dann nützt uns die Apfelmännchendarstellung nichts. Zu diesem Zweck brauchen wir die Bubblebrot-Darstellung. Sie zeigt die Nummer der Iteration an, die das Minimum aller Zwischenergebnisse hat. Und schon haben wir eine ganz andere Landkarte des Chaos vor uns. Wir sehen kreisförmige Strukturen, die in ihren Größen und Werten streng wie Terrassen angeordnet sind. Vom Chaos ist hier erst mal nichts mehr zu erkennen.

Wenn man dann immer andere Eigenschaften der M erkundet, wird man feststellen, dass jede einen sehr unterschiedlichen Grad des Chaos darstellt. Dabei kann man entdecken, dass es einige Regeln gibt, die trotz der sehr unterschiedlichen Rechenergebnisse immer wieder gültig sind.

Ich muss sagen, jedesmal wenn ich 1980 meinen Freunden erzählt habe, dass ich gerade angefangen habe, mit J.H.Hubbard die Polynome vom Grad 2 in einer komplexen Variablen zu untersuchen (und genauer gesagt die Polynome der Form $z = z^2 + c$), haben sie mich verständnislos angestarrt und gefragt: Glaubst du denn, du hast Aussicht, irgend etwas Neues zu entdecken? Aber gerade diese simple Familie von Polynomen ist es, die dafür verantwortlich ist, jene Objekte zu erzeugen, die so kompliziert sind - nicht chaotisch, sondern im Gegenteil: streng organisiert nach hochentwickelten kombinatorischen Gesetzen.

Adrien Douady

Aber nicht nur das ist interessant und spannend. Vielen Betrachtern scheint die M eine statische und fixierte Fläche zu sein. Zwar verändert sie sich nicht über die Zeit, aber doch mit jeder Iteration, die man mehr rechnen lässt. Es ist wie mit Mandelbrots Beispiel über die englische Küstenline, je näher man hinschaut, umso detaillierter wird auch die Mandelbrotmenge. Es ist überraschend interessant, wenn man in einer Animation ansehen kann, wie sich die verschiedenen Teile der M Schritt für Schritt entwickeln. Fast könnte man glauben: Das Ding lebt. Andererseits, wenn in einer Animation von der größten Knospe bis zur kleinsten berechenbaren Knospe hingezoomt werden soll, also jeweils von einer Knospe zur nächstkleineren hin, wird man irgendwann die Verhältnismäßigkeit nicht mehr erkennen. Denn jede noch so kleine Knospe sieht so aus, wie eine Große. Zwei dieser Bilder kann man nur dadurch auseinanderhalten indem man sich den Vergrößerungsfaktor bewusst macht. In diesem Buch gibt es durchaus Bilder, bei den man den Vergrößerungsfaktor berücksichtigen sollte.

Aufbau der Dokumentation

Um die logische Betrachtung der M zu erreichen, ist auch etwas Mathematik nötig. Aber keine Angst, wenn auch Imaginärberechnungen furchteinflößend sein können - es ist leicht zu verstehen, was wir davon brauchen. Im ersten Teil wird das Nötige erklärt.

Im zweiten Teil wird kurz darauf eingegangen, wie ein Computer mit Zahlen umgeht. Bei der graphischen Analyse der M mit dem Computer muss man allerdings einige Untiefen der Technik umschiffen. Im Gegensatz zur reinen Mathematik kann man beim Computer damit rechnen, dass er einige Fallstricke bereithält, die ein Messergebnis verfälschen können. Ich habe versucht die meisten Fehlerquellen zu entlarven, damit neue Messung möglichst und weitgehendst fehlerfrei möglich werden.

Dann wird die Formel vorgestellt, die die M erzeugt. Für Leute, die auch mal selbst programmieren wollen, sind Programmervorschläge zur dieser Formel aufgezeigt.

Die Ergebnisse dieser Formel können auf viele verschiedene Arten ausgewertet werden. Jetzt soll beschrieben werden, was und wie. Auch deutet der Buchtitel darauf hin, dass hier besonderen Wert auf die Darstellung der Orbits gelegt wird. Das ist auch so. Aber die Eigenschaften aller Orbits über die gesamte M ist nur schwer darstellbar. Es gibt deswegen viele Auswertungsarten die nur einzelne Eigenschaften zeigen. Auch sind die Eigenschaften eines einzelnen Orbits nicht der Weisheit letzter Schluss. Oft erkennt man die Eigenschaften erst im Vergleich mit seinen Nachbaren.

Ein wichtiger Schlüssel zu Erkenntnissen über die M ist die Analyse der Orbits. In diesem Buch können nicht viele Bilder von Orbits gezeigt werden. (Noch nicht einmal im Verhältnis zu den real existierenden.) Auch im Prgramm Deep-Chaos ist es noch sehr mühsam, hinter die Logik zu kommen. Deshalb liegen einige Animationen zu diesem Thema auf der CD bei. Wenn man sieht, wie sich manche Orbits verhalten, wird dem Betrachter manches viel schneller klar. Leider ist es so, dass die Buchform einen sequenziellen Aufbau des Wissens erfordert. Aber welche Eigenschaft eines Orbits soll man zuerst erklären? Natürlich die am leichtesten verständliche, wird man denken, aber alle Eigenschaften hängen so eng zusammen, dass eine vollständige Erkenntnis, erst nach Durcharbeitung aller Kapitel erreicht werden kann.

Ingesamt ist diese Dokumentation wohl auch guter Ratgeber, wenn man einen eigenen Mandelbrotmengen-Explorer bauen möchte. Sie gibt wertvolle Hinweise auf diverse Stolperfallen und Probleme in der Programmierung.

Es werden hin und wieder auch Bilder gezeigt und beschrieben, die nicht unbedingt wissenschaftlicher Natur sind. Es sind von Versuche die eine oder die andre Eigenschaft sichtbar zu machen. Oft ist das nicht zur Zufriedenheit gelun-

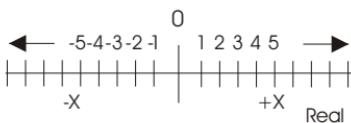
gen, aber die Bilder hatten einfach einen optischen Reiz, der sie sehenswert macht. Im Allgemeinen wird sich diese Dokumentation nicht mit fraktaler Kunst beschäftigen. Bilder ohne Wert sollen nur meinen Weg zum Chaos beschreiben, der manchmal lustig verschlungen oder frustierend lang war.

Obwohl das Programm DeepChaos auch Darstellungen und Analysen der Julian Mengen zulässt, wird in dieser Dokumentation das Thema nur ganz am Rande erwähnt. Die Mathematik sagt jedoch, die M werde über die Julian Mengen definiert. Da ich jedoch die rein mathematischen Erklärungen und Definitionen hier nicht behandle, kann ich ohne Neid auf die hochkomplexen Formeln der Mathematiker verweisen. Es gibt hier durchaus bemerkenswerte Arbeiten auch aus der jüngeren Vergangenheit. Es freut mich, weil nicht nur ich als Geometer die M neu vermisse, sondern es auch noch Mathematiker gibt, die sich an diesem Thema vergnügen.

Etwas Mathematik

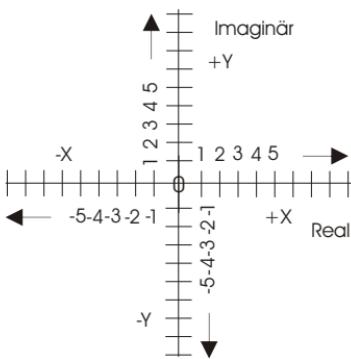
Die M findet im imaginären Zahlobereich statt. Es gibt hier nur einige wenige Bezeichnungen, die man wissen sollte.

Da gibt es das Zeichen Z. Z ist ein mathematisches Symbol für eine imaginäre Zahl. Im Gegensatz zu einer reellen Zahl, die nur eine Dimension hat (kleiner oder größer als Null), hat die imaginäre Zahl eine zweite Dimension, die den imaginären Anteil anzeigt. Man kann sich das Ganze auch als ganz normales X-Y Koordinatensystem vorstellen. Weshalb sich die M dann ja auch so gut auf dem Computerbildschirm darstellen lässt. Was wir von den imaginären Rechenvorschriften benötigen, ist nur das Quadrieren und Addieren. Weil es so gut passt, sollen diese Rechenarten anhand von grafischen Lösungsmethoden erklärt werden. Diese Lösungsmethoden stammen aus der Zeit, bevor es Computer, ja sogar bevor es Taschenrechner gab. Aber sie sind hervorragend geeignet, gerade die M damit zu erklären. Siehe auch [MF].

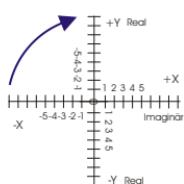


Zahlenstrahl für reelle Zahlen:

Für seine eindimensionale Darstellung benötigt er nur die X-Achse.



Koordinatensystem für imaginäre Zahlen:
Für den Realanteil wird wieder die X-Achse verwendet. Der Imaginär-Teil wird in der Y-Achse aufgetragen, womit die Darstellung zweidimensional wird.



Zur Erinnerung:

Manche Bilder in diesem Buch sind um 90° nach rechts gedreht. Also damit auch dieses Koordinaten-system. Leider ergibt sich ein kleiner Konflikt mit den Bildschirm-Koordinaten, die auch mit X-Y angegeben werden. So kommt es, dass die Realachse dann mit der Y-Bildschirmachse verbunden ist und die Imaginärachse mit X.

Für die Mandelbrotformel brauchen wir nur die Quadrierung und die Addition.

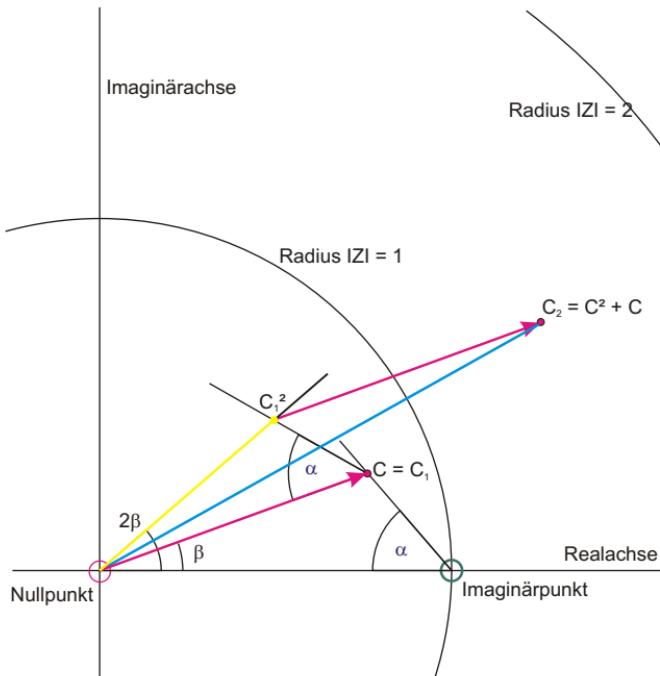
Beim Quadrieren wird zunächst der Winkel Beta verdoppelt. Der Winkel Alpha wird vom Imaginärpunkt aus auf den Punkt C kopiert. Am Schnittpunkt beider Winkel ist das Ergebnis C^2 zu finden.

Die Addition wird wie eine Vektoraddition durchgeführt. Zum Beispiel wird die Strecke vom Nullpunkt bis zum Punkt C solange parallel verschoben, bis ihr Anfangspunkt auf C^2 zu liegen kommt. Das Ergebnis C^2 ist somit die Summe aus C^2 und C.

Damit haben wir bereits das Ergebnis einer möglichen Iteration.

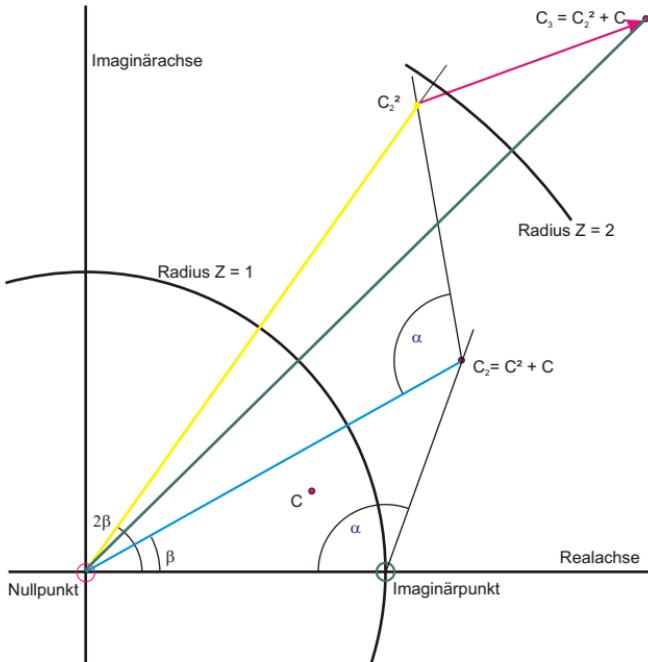
Die Mandelbrotformel :

$$f_C(z) = z^2 + C$$



Beim ersten Ergebnis ist C_1 gleich C, denn die Anfangsbedingung bei M ist immer Null. Und Null² ist auch Null, bleibt also nur Null + C. Es findet also keine Winkelverdopplung und auch keine Vectoraddition statt.

Jetzt könnten wir mit den Koordinaten von C_1 einen Punkt auf den Computerbildschirm zeichnen lassen.



Für die zweite Iteration müssen die beiden Rechenschritte wiederholt werden. Allerdings wird diesmal nicht C quadriert sondern C_1 , also das Ergebnis der letzten Rechnung. An das Ergebnis C_1^2 wird nun wieder der Vektor C angehängt, was zum Ergebnis C_2 unserer zweiten Iteration führt. Auch diesen Punkt können wir auf unserem Bildschirm hinzufügen.

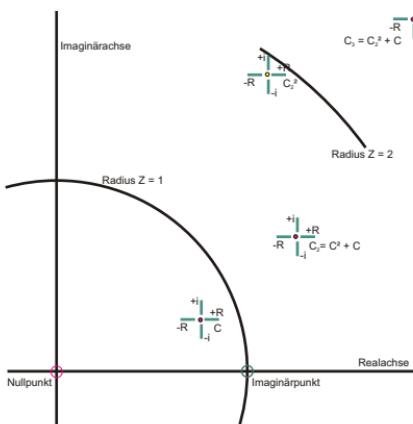
Für die dritte Iteration wird diesmal C_2 quadriert. An das Ergebnis C_2^2 wird nun wieder der Vektor C angehängt, was zum Ergebnis C_3 unserer dritten Iteration führt. Auch diesen Punkt können wir wieder auf unserem Bildschirm hinzufügen.

Für die Erzeugung einer vollständigen Iterationsfolge kann es nötig werden diesen Vorgang mehrere Tausend male zu wiederholen - Ja, es ist u.U. sogar unendlich viele Male möglich - sofern das Chaos nichts dagegen hat, und uns dann falsche Ergebnisse unterschiebt.

Da ja immer wieder quadriert werden muß, drehen sich die Ergebnisse nach links immer weiter um den Nullpunkt herum. Mal langsam - mal schnell - mal nah - mal fern. Und machmal scheint es, als sei der Mittelpunkt ganz woanders.

Die Iterationsresultate

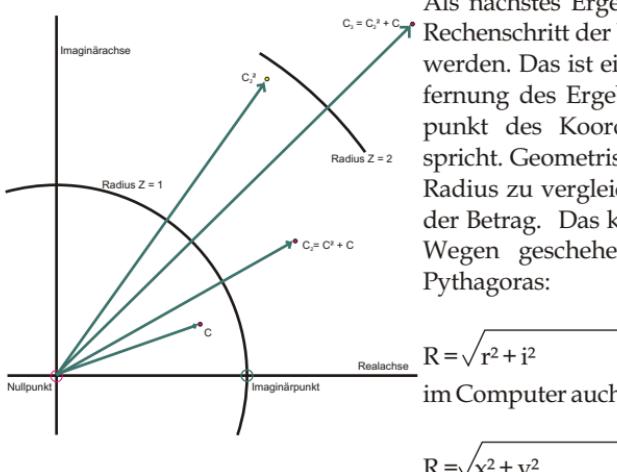
Man kann jedes Zwischenergebnis einer Iteration mit seiner Position in der zweidimensionalen imaginären Menge C beschreiben. Im allgemeinen hier auch als Ergebnisort Z bezeichnet.



Dazu braucht man den real-Anteil und den imaginär-Anteil.

Auf dem Bildschirm des Computers entspricht das den X- und Y-Koordinaten.

Diese Daten finden hauptsächlich bei der Orbitanalyse Verwendung. Diese Werte sind die primären Ergebnisse aus der Mandelbrotmengen-Formel. Sie sind die Grundlage für die nachfolgenden Auswertungsmöglichkeiten.



Als nächstes Ergebnis kann für jeden Rechenschritt der Wert R ausgerechnet werden. Das ist ein Wert, der der Entfernung des Ergebnisortes vom Nullpunkt des Koordinatensystems entspricht. Geometrisch gesehen mit dem Radius zu vergleichen, imaginär ist es der Betrag. Das kann auf verschiedenen Wegen geschehen. Meist aber mit Pythagoras:

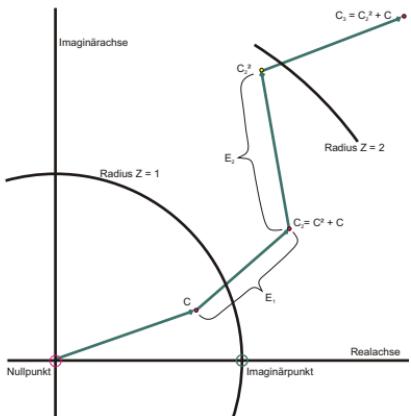
$$R = \sqrt{r^2 + i^2}$$

im Computer auch mit:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Diese Werte werden benutzt, um Zeitreihen darzustellen (sequenzieller Iterationsverlauf). Diese Ergebnisse haben durch ihre mögliche Doppeldeutigkeit einen Nachteil, da man nicht erkennen kann, wo in der Ebene C mit ihren 4 Quadranten der Punkt tatsächlich liegt.

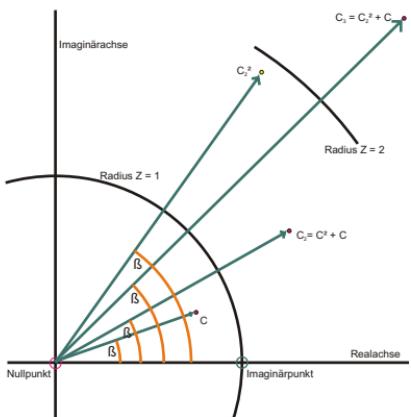
Alle Orte auf dem Kreis mit $|Z| = R$.



Als weiteres Ergebnis kann für jeden Rechenschritt der Wert E ausgerechnet werden. Das ist die Entfernung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationsergebnissen. Das kann wieder mit Pythagoras erledigt werden:

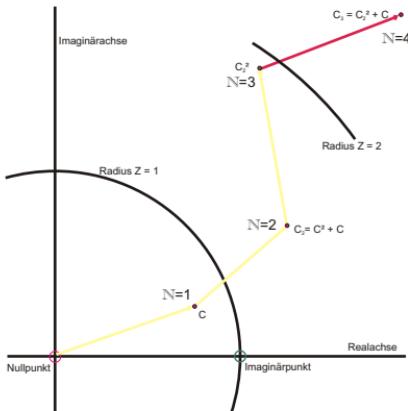
$$E = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Diese Werte werden benutzt, um Zeitreihen darzustellen. Diese Ergebnisse haben auch eine Doppeldeutigkeit. Sie haben jedoch eine andere Charakteristik, die manchmal für verschiedene Analysearten besser geeignet sind, als die Verwendung von R .



Eine weitere Eigenschaft eines Iterationsergebnisses ist der Winkel β . Er ist das Argument einer imaginären Zahl. Er beschreibt zusammen mit dem Wert R einen Punkt C eindeutig in allen 4 Quadranten. Dieser Winkel kann mit Hilfe der Funktion $\tan()$ aus X und Y berechnet werden.

Allein sagt er nur aus, in welcher Richtung ein Ergebnis zu finden ist.



Das wichtigste Ergebnis bei der Analyse von \mathbb{M} ist die Zählung der Anzahl von Iterationsschritten. Die Zahl N wird beginnend mit 0 bei jedem erfolgten Schritt um 1 erhöht. Wenn der Iterationsverlauf soweit fortgeschritten ist, dass die Schwelle von $R = 2,0$ überschritten wurde, gilt das letzte N als Ergebnis. Hier bei $N=4$.

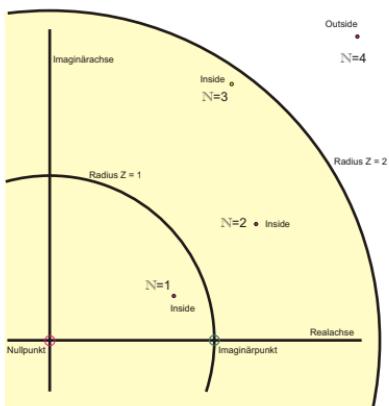
Bei machen speziellen Analysen kann die Zählung auch bei anderen Kriterien angehalten werden, um diese dann entsprechend auf dem Bildschirm darzustellen.

Bei konvergenten Iterationsverläufen

innerhalb von \mathbb{M} wird $R = 2,0$ nie überschritten. Man muß daher die "Notbremse" ziehen und N wird als unendlich angenommen. Manche Iterationsverläufe überschreiten diese Grenze jedoch sehr spät, da sollte man schon darauf achten, die "Notbremse" nicht zu früh zu setzen, denn N ist dann ja wesentlich kleiner als unendlich, und dieser Punkt gehört dann eben doch nicht zur Mandelbrotmenge.

Ein konvergiertes Verhalten können nur die Iterationsfolgen haben, die innerhalb von $R = 2,0$ liegen. Aber auch nicht alle.

Iterationsergebnisse haben also einen Status von "Inside" oder von "Outside". Wenn der Status von Outside erreicht wird, kann die Iterationsfolge beendet werden, da eine Rückkehr nicht möglich ist.



Bei manchen Analysenarten kann gewählt werden, ob die Anzeige den einen oder anderen Status betrifft, oder auch beide. Das hilft oft eine Fragestellung klarer darzustellen.

Punkte, die für immer Inside bleiben, bilden die reine, innere \mathbb{M} ohne Randbereich.

Eine kleine Bildschirmkunde

Bisher haben wir das mathematische Koordinatensystem kennengelernt. Die Frage ist nun, wie können wir dieses auf dem Bildschirm darstellen. Heute, im Jahr 2010, haben die meisten Bildschirme eine erfreuliche Größe von 1900 x 1200 Pixel. Das reicht, um daraus ein Foto in der Größe 18x13cm drucken zu lassen. Es ist aber zuviel um Studien durchzuführen, da die Rechenzeiten mit der Bildgröße exponentiell ansteigen.

Da sich die M innerhalb eines Radius von 2,0 befindet, brauchen wir am besten ein quadratisches Bild. Zum Beispiel wählen wir es mit 600x600 Pixel.

Der Nullpunkt liegt dann bei 300 Pixel auf der X-Achse, und bei 300 auf der Y-Achse. Für den 2,0er Radius sind dann 300 Pixel nötig. Jedes Pixel hat dann eine Breite und Höhe von je $2,0 / 300 = 0,0066666\ldots$.

Für jedes einzelne Pixel wird nun eine ganze Iterationsfolge durchgerechnet. Und die Farbe des Pixels entsprechend des Iterationsergebnisses gesetzt. Für die Berechnung des nächsten Pixels wird dessen Nummer um 1 erhöht, oder um 600 wenn eine neue Zeile begonnen wird. Dieses Pixel hat dann auf dem Bildschirmfenster eine Position zwischen -300x und +300x, sowie zwischen -300y und +300y. Die x und y Position wird in diesem Beispiel mit 0,006666.. multipliziert, womit die Transformation ins mathematische Koordinatensystem vollzogen ist, und damit die Iterationsfolge berechnet werden kann.

Das Ganze wird in der Literatur auch als „Pixelspiel“ bezeichnet.

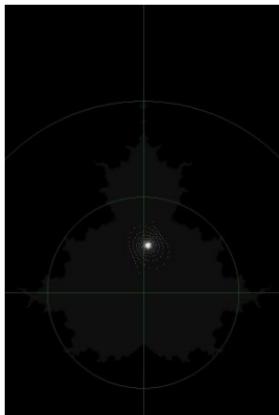
Die Orbitanalyse

Die Iterationsresultate eines beliebigen Verlaufes können nun alle von der ersten bis zur letzten Iteration am Bildschirm durch einen Punkt markiert werden, genauso wie wir sie vorher im Diagramm konstruiert haben.

Wir sehen in den Beispielen auf der nächsten Seite, die Ergebnisse können sich auch in Gruppen anordnen. Sie drehen sich nicht um den Mittelpunkt herum und werden auch nicht sequenziell im Kreis herum aufgebaut, sondern meist liegt ein Ergebnis dem Vorgänger in etwa diagonal gegenüber. In einem statischen Bild kann das leider nicht gezeigt werden. Am Computer jedoch, wo man sich den Ort eines Iterationsergebnisses mit der Nummer N markieren lassen kann, wohin das nächste Ergebnis mit N+1 springt usw. Mit diesem Vorgehen wurden mir viele Erkenntnisse klar, die dann in die komplexeren Auswertungsmethoden eingebbracht werden konnten. Umgekehrt konnten so mache ungewöhnlich erscheinenden Messergebnisse mit dieser Methode verifiziert werden.

Weil sich die Ergebnisorte meist um ein Zentrum herumbewegen, nennt man diesen Verlauf auch den Orbit einer Iteration. Wenn wir uns das linke Bild mit der Spirale näher ansehen und in den Mittelpunkt hineinzoomen, werden wir erkennen, dass sie sich sehr lange dreht. Die Spirale wird sich auch nach 100 mal hineinzoomen immer noch zusammendrehen. (Im Buch ist zoomen natürlich nicht möglich, im .pdf-File nur begrenzt, aber im Programm DeepChaos nicht unendlich, aber doch sehr weit.)

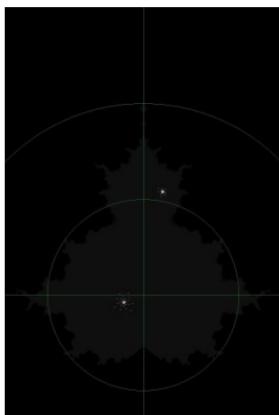
Jetzt kommt die Vorstellungskraft zum Tragen. Angenommen, die Spirale wäre in ihren Außenmaßen so groß wie das ganze Universum, sie würde sich Umdrehung für Umdrehung solange zusammenziehen, bis sie den Umfang eines einzelnen Atoms erreicht hätte. Vermutlich auch noch weiter, bis es selbst unserer Vorstellungskraft zuviel wird. Berechnen können wir das, nur nicht darstellen. Da gerade im Zentrum die Ergebnispunkte einen so kleinen Abstand voneinander haben passiert es oft, dass sie auf das selbe Pixel am Bildschirm fallen. Damit bei fehlender Auflösung diese Information nicht ganz verloren geht, werden die Treffer auf jedes Pixel gezählt. Die Trefferanzahl kann dann farbcodiert angezeigt werden. Ein Beispiel dafür sehen Sie auf der folgenden Seite.



Hier drei Beispiele der eher normalen Art.

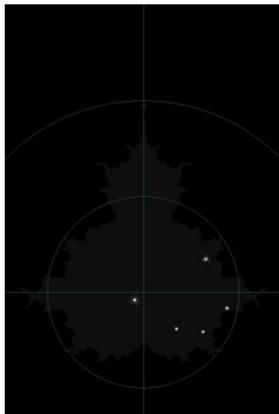
Zusätzlich zu den Iterationsergebnissen ist das Koordinatensystem eingeblendet. Für die M interessiert eigentlich nur der Bereich bis $R = 2,0$, das ist der große Kreis. Der kleine hat den Wert 1,0. Mit DeepChaos können Sie sich alle möglichen Spiralen näher ansehen - und damit den "Tanz der Iterationen".

Wenn man dann dereinst viele Orbitformen gesehen hat, kann man auf Grund ihres Aussehens abschätzen an welchen Ort der M sie ihren Ursprung hatten.



Oben sieht man nur einen „Sternenhaufen“, deshalb muß der Ursprung dieses Iterationsverlaufes im Haupkardiodit liegen.

Nun erhöhen wir auf zwei Sternenhaufen. Das heist, der Ursprungsort liegt im „Kopf“ des Apfelmäckens. Das ist die größte Knospe von M und hat eben eine zweier Periode.

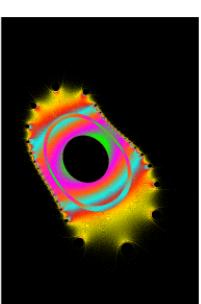
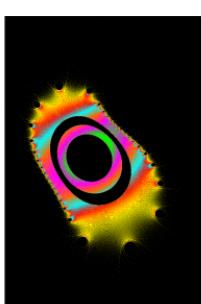
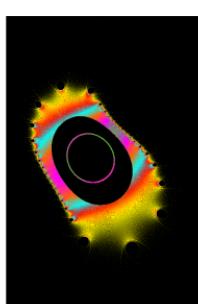
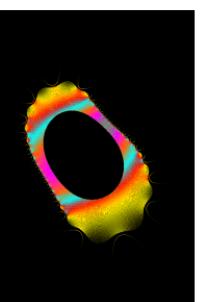
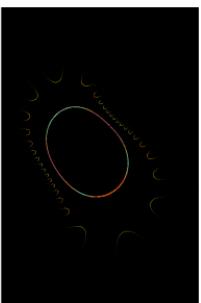
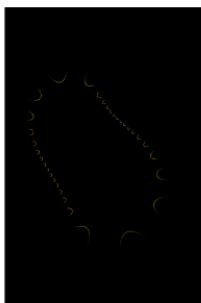


Die dreier und vierer Knospe lassen wir nun einfach mal aus und gehen gleich auf die fünf Knospe los. Natürlich bekommen wir dann auch fünf Sternenhaufen.

Mit dieser Logik kommen wir durch alle Knospen, ob groß oder klein, sofern sie direkt am Haupkardodit anliegen. Für Sub-Knospen (das sind Knospen, die aus Knospen hervorgehen) gelten erweiterte Regeln.

Hier zu sehen ist eine kleine Serie mit einer etwas längeren Iterationsfolge. In dieser Darstellung wird wieder jedes Iterationsergebnis mit einem Punkt im Bild markiert. Sollte ein weiteres Ergebnis auf den selben Ort treffen, wird die Farbe des Punktes geändert. Im allgemeinen ist die Farbe um so heller, je öfter der Punkt getroffen wurde.

In diesem schönen Beispiel sind mehrere 100000 Iterationen berechnet worden. Nach jeweils 100 Iterationen wurde eine Aufnahme gemacht. Eine Auswahl davon ist hier gezeigt. Man sieht zunächst einen zarten Außenring, der dann von innen heraus langsam gefüllt wird. In Bild 7 beginnt dann eine weitere Füllphase von innen heraus, die dann die erste Füllung teilweise über-



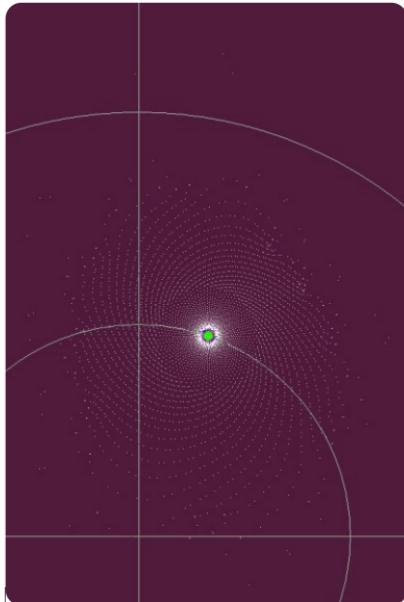
schreibt. Solche Gebilde findet man im Randbereich, sie sehen zwar chaotisch aus, wenn man aber beobachtet wie sie sich aufbauen, erkennt man die Ordnung.

Da sich dieser Orbit von innen nach außen aufbaut, haben wir hier auf jeden Fall einen differgerten Verlauf.

Siehe {Pantoffel-tierchen.avi}

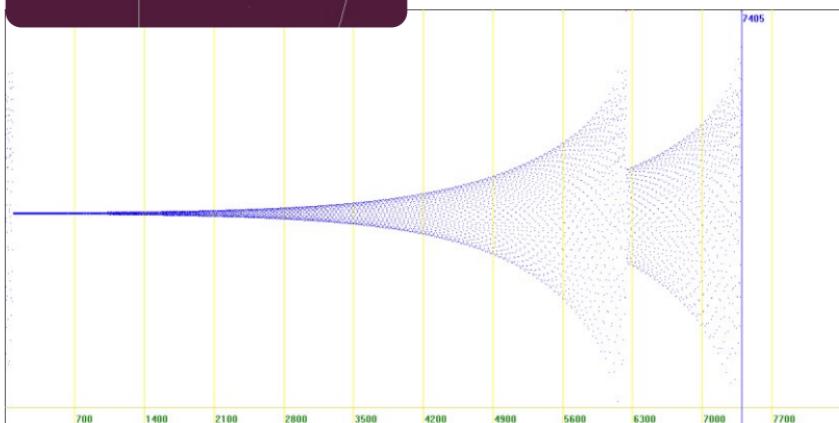
Der Iterationsverlauf und seine Messung

Wir haben gezeigt, wie durch Zeichnen der Ergebnisorte der Iterationsverlauf grafisch dargestellt wird. Machmal oder sogar meistens, ist es interessant, in welcher Reihenfolge das geschieht. Das zeigt uns das untere Diagramm (Zeitreihe) zur Orbitanalyse. Außer den x-y Koordinaten der Iterationsergebnisse haben wir noch den Betrag von Z dazu zur Verfügung. $|Z|$ ist der Abstand R des Ergebnisortes vom Nullpunkt des Koordinatensystems für komplexe Zahlen. R ist immer positiv.



Wenn man nun für jede Iteration den Wert von R von links nach rechts in das Diagramm der Zeitreihenanalyse zeichnet, kann man den groben Verlauf erkennen. Zunächst wird hier ein großer Ring gezeichnet. Danach fängt es im Zentrum an, erst kleine, dann immer größere Spiralen zu zeichnen. Diesen Verlauf nennt man divergent. Anschließend folgt nochmal ein kurzer divergenter Verlauf, wonach die Iterierung beendet ist.

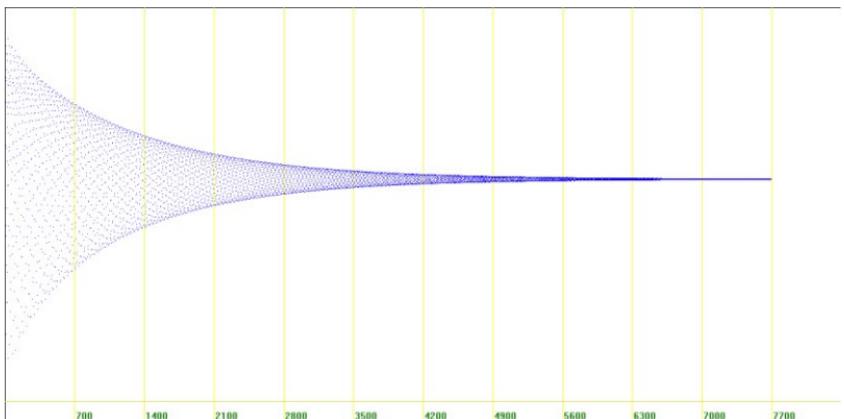
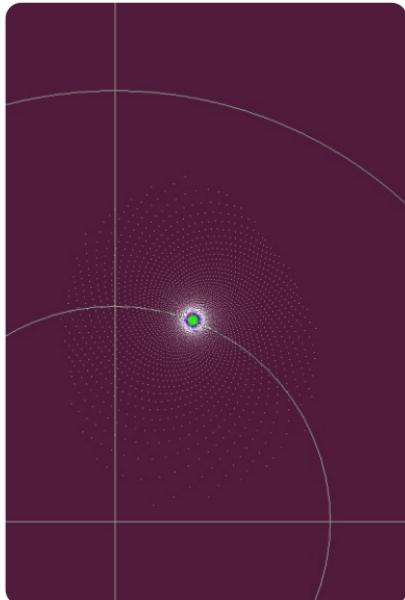
Diese Art ist ein Beispiel aus dem nahen Randbereich außerhalb der M.



Hier ein Beispiel von einem Ort innerhalb der M also dort, wo Mr. Mandelbrot einen schwarzen Punkt gemacht hätte.

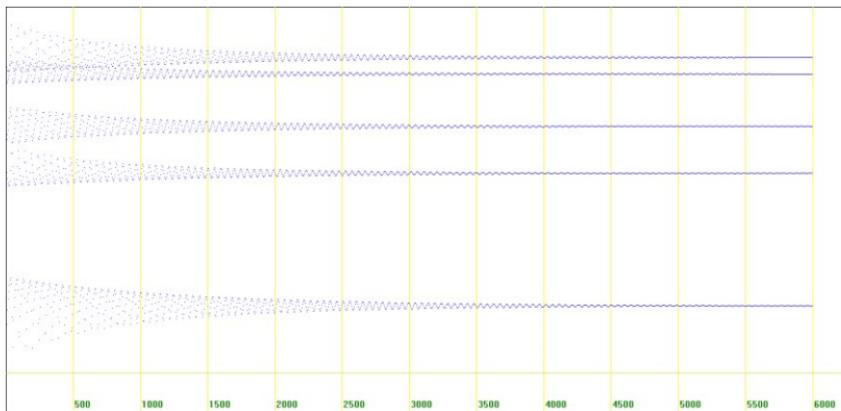
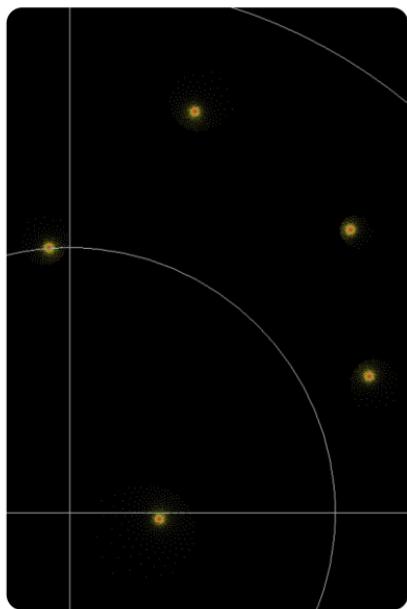
Das Bild der Orbitanalyse hat Ähnlichkeit mit dem Bild auf der vorherigen Seite. Wie aber das Iterationsverlaufs-Diagramm (Zeitreihe) zeigt, wird der Orbit von außen nach innen erstellt. Diesen Verlauf nennt man konvergent. Alle konvergenten Verläufe zusammen bilden die M. Dabei spielt es keine Rolle, ob der Iterationsverlauf schnell oder langsam konvergiert.

An Orten, wo sich der Orbit in mehrere Punkte aufteilt, wird sich jeder einzelne Punkt konvergent verhalten. (siehe nächste Seite)



Dies ist ein Beispiel aus einem fünfer Orbit.

Jeder einzelne Teilorbit konvergiert auf ein Zentrum hin. Wie ein fünfer-Orbit entsteht, wird dann im Kapitel „Periodizität“ erklärt.



Randbedingungen zur korrekten Berechnung

Auf den folgenden Seiten sollen einige Schwierigkeiten beschrieben werden, die eine korrekte Vermessung der M ver- oder behindern könnten, oder die verschiedene Fehlinterpretationen ermöglichen.

Dabei gibt es verschiedene Fehlerquellen. Es werden die Fehlermöglichkeiten beschrieben, die systembedingt nicht umgangen werden können, und wenn doch, nur mit viel Aufwand. Andere Fehlerquellen hängen meist mit Programmfehlern zusammen. Schon Mr. Mandelbrot hat mit wachsender Begeisterung davon gesprochen, wie er die Visualisierung durch seine Programmierer vorangetrieben hat. Da er keine Ahnung von der Programmierung eines Computers hatte, schaute er sich die Ergebnisse immer genau an. Wenn er etwas als nicht begründet empfand, ließ er das Programm ändern solange, bis er zum Erfolg kam. Es ist tatsächlich die plausibelste Methode - ich wende sie ebenso an, obwohl ich programmieren kann. Wenn an einer Auswertung etwas ungewöhnlich erscheint - sollte man es erst mal anzweifeln und die Programmierung überprüfen. Der Freude, etwas Ungewöhnliches entdeckt zu haben, wird dann meist doch noch ein Bein gestellt. Ein Ergebnis zu verifizieren ist meist mehr Arbeit, als die Programmierung selbst. Sollten sich die Auswertungen dann als korrekt und auch als relevant erweisen, ist es immernoch ein sehr langer Weg, die Ursache der Ergebnisse dafür zu ergründen. Meist entsteht dabei auch schon wieder die nächste Idee, für die nächste neue Messung.

Zahlenformate mit denen der Computer arbeiten kann

Ein Computer arbeitet prinzipiell binär. Was uns aber interessiert ist, welche Eigenschaften die verschiedenen Zahlenformate haben.

Das Floating-Point-Format ist das gebräuchlichste, nicht nur, weil es einfach zu programmieren ist. Es wird vom Computer per Hardware berechnet und ist deshalb sehr schnell. Weil bei der MBM viel gerechnet werden muß, ist das für viele Leute ein unverzichtbarer Vorteil. Ein weiterer großer Vorteil ist der große Rechenbereich. Mit Floatingpoint kann man mit sehr großen sowie sehr kleinen Zahlen (ca. $10E+100....10E-100$) rechnen. Die Genauigkeit beträgt dabei bis zu 18 Dezimalstellen. Leider kann diese Leistungsfähigkeit bei der MBM nicht genutzt werden. Die allermeisten Zahlen, die gerechnet werden müssen, sind im Bereich von 0,1 bis 1,5. Das bedeutet, dass die Rechengenauigkeit bei 18 Stellen nach dem Komma begrenzt bleibt. Will man in die MBM hineinzoomen und kommt mit der Adressierung eines Ortes bis zur 12. Komma-stelle, ist eine ordentliche Iterierung nicht mehr möglich und das Bild zerfällt.

Es gibt Floatingpoint-Formate, die bis zu 4000 Nachkommastellen bieten. Das übertrifft die Ansprüche, ist aber sehr zeitaufwändig für soviele Berechnungen, wie sie bei der MBM notwendig sind. Außerdem ist dann der Speicherbedarf so groß, dass normale PCs an ihre Grenzen stoßen können. Mit solchen großen Zahlen zu rechnen ist dann auch noch langsam, weil es nicht mehr per Hardware berechnet werden kann.

Das beiliegende Programm "DeepChaos" verwendet ein binäres Fixpoint Format. Es hat 64 Bits vor dem Komma und 256 Bits danach. Das entspricht in etwa über 80 Nachkomma-Dezimalstellen. Das ist reichlich und arbeitet ausreichend schnell, zumal die "Iterationsmaschine" zum größten Teil in Maschinen-sprache (Assembler) programmiert ist. Für Messungen die weniger Genauigkeit benötigen, sind kleinere Formate wählbar, dann geht es auch etwas schneller. Mit $1,0 E+80$ kann man vermutlich jedem einzelnen Atom im Universum eine eigene Hausnummer geben. So ist das Größenverhältnis zwischen dem bekannten Universum und einem Proton nur $10E+40$. Man könnte das Programm auch mit noch größerer Stellenanzahl compilieren lassen, wenn eine spezielle Messung dies erfordern würde. Die Stellenanzahl war bisher immer reichlich, und die meisten Effekte verschieben sich durch größere Zahlen nur in kleinere Dimensionen. Dennoch erkennt man in den Tiefen der M doch eine deutliche Veränderung der Strukturen, was die Suche dann doch interessant bleiben lässt. Da es erst mit der heutigen Computergeneration möglich ist, tiefer einzutauchen, erkennt man diese Veränderungen. Wir wissen aber noch nicht, was uns die Computer der Zukunft offenbaren werden können.

Bei der Multiplikation wird mit der doppelten Stellenanzahl gerechnet, was eine Minimierung der Rundungsfehler ermöglicht. Auch andere Seiteneffekte

können erkannt, und teilweise ausgeschlossen werden. Dazu mehr auf den folgenden Seiten.

Binäre Zahlenformate, die mit Nachkommastellen arbeiten, haben zudem den Nachteil, dass sie sich nicht präzise in das Dezimal-Format umrechnen lassen. Das stört aber nicht, solange man im binären Format weiterrechnet. Erst wenn Binär nach Dezimal, und dann wieder nach Binär umgerechnet wird entstehen Genauigkeitsverluste. Da jede weitere Kommastelle im Binärformat den halben Wert der vorherigen hat, wird die Dezimaldarstellung mit jedem weiteren Bit komplizierter:

1. Nachkommabit = 0,5

2. Nachkommabit = 0,25

3. Nachkommabit = 0,125

Trotz dieser verwirrenden Ziffernfolge kann eine 256 bitige Binärzahl in eine Dezimalzahl umgerechnet werden, wobei nur die letzten 6 bis 8 Dezimalstellen unzuverlässig sind und nicht mehr mit der exakten Binärzahl übereinstimmen. Diese Fehlergröße kann man ermitteln, wenn man eine Dezimalzahl in eine Binärzahl und wieder zurück umwandelt. Die Differenz von Vorher und Nachher ist der Fehler.

Was nicht mehr so bekannt ist, es gab früher auch Analogrechner (als Weiterentwicklung der mechanischen Rechenmaschinen). Mittels elektronischer Operationsverstärkern, konnte man viele Rechenarten ausführen lassen. Das Verfahren ist sehr schnell, weil sich die Elektronen ja mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Auch gibt es keine Quantisierungseffekte, weil durch das analoge Rechnen keine Ziffern verloren gehen. Dafür gibt es aber eine ganze Reihe von anderen Schwierigkeiten, wie das elektronische Rauschen oder die Abhängigkeit von der Temperatur, die das Verfahren bei höheren Anforderungen unbrauchbar machen. Die übertrifft diese Anforderungen um Dimensionen.

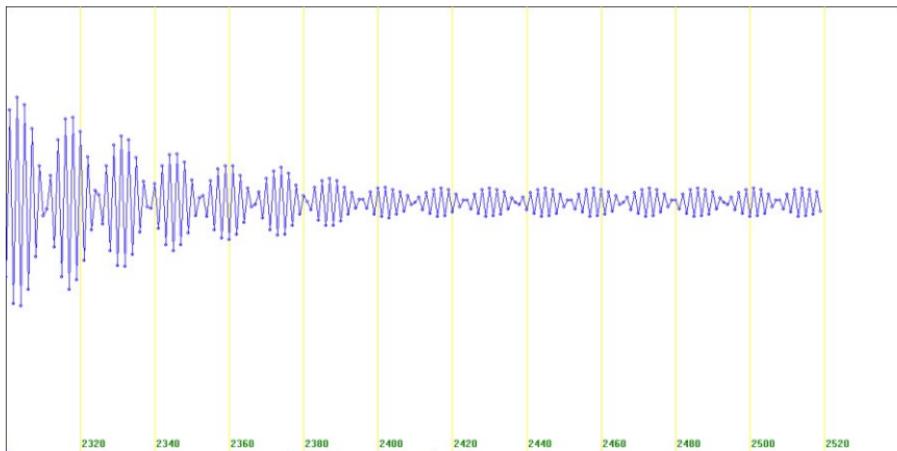
Die Pseudo-Konvergenz

Wenn man längere Iterationsvorgänge rechnen lässt, die konvergieren, kommt es zu einem zumindest interessanten Fehler. Durch den konvergenten Verlauf der Kurve werden die Unterschiede der Zahlen immer kleiner, sie nähern sich mehr oder weniger schnell einander an. Wenn die relevanten Rechenstellen dann hinten angekommen sind, kann eine Iteration nicht mehr korrekt ausgegerechnet werden. Man müßte vermuten, dass hier der Iterationsverlauf ob der unsinnigen Ergebnisse abstürzt. Aber das System tritt in ein stabile Phase ein, die Kurve konvergiert nicht weiter, so wie sie sollte, aber divergiert auch nicht. Man möchte meinen, das System springt mit jeder Umdrehung wieder zurück, wie bei einer Schallplatte mit Kratzer. Man könnte ohne weitere Überprüfung zum Schluss kommen, dass eine sehr hohe Iterationsanzahl erreicht wurde, ebenso wie eine "hängende" Schallplatte ewig dudelt, wenn man nicht genau zuhört. Das Fatale ist, dass Rechenfehler im Grenzbereich nicht leicht erkannt werden können und so zu falschen Schlüssen beim Benutzer führen können. Zur Sicherheit müßte man sich im Pixelspiel jeden einzelnen Iterationspunkt mit der Zeitreihenanalyse ansehen, was aber Tage dauern könnte.

Es ist deswegen wünschenswert einen Algorithmus zu finden, der die Pseudo-Konvergenz bei ihrem Auftreten dedektieren kann. Der Iterationsverlauf könnte an diesem Punkt für unendlich deklariert werden. Im Zentrum der M wäre das schon nach wenigen dutzend Iterationen der Fall und würde bei längeren Messungen viel Zeit sparen.

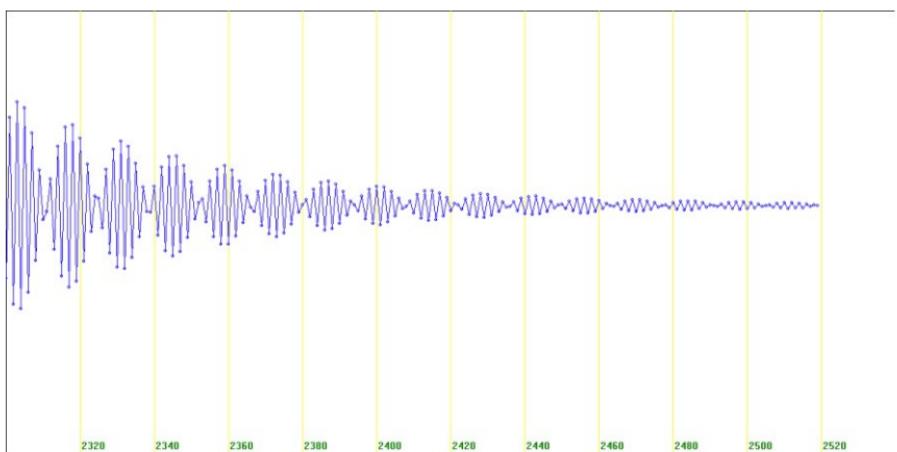
Hier ein Beispiel, ein Iterationsverlauf gerechnet mit Floatingpoint
(Genauigkeit 18 Stellen):

Bei Iterationsnummer 2400 etwa beginnt die Genauigkeitsgrenze wo der Iterationsverlauf hängen bleibt, und dem Programm eine Konvergenz vorgaukelt.

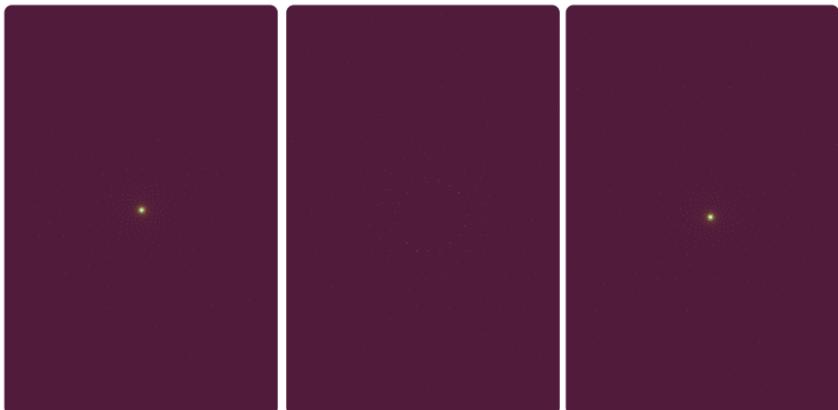


Dieser Verlauf wurde mit 80 Nachkommastellen gerechnet.

Man sieht hier deutlich, wie die Folge nach 2400 weiterhin konvergiert. Es kann in diesem Fall noch bis ca. 10000 iteriert werden, bis auch hier die Genauigkeitsgrenze erreicht wird.



Hier die Orbitanalyse zu dem Iterationsverlauf mit dem pseudo-konvergenten Verlauf.



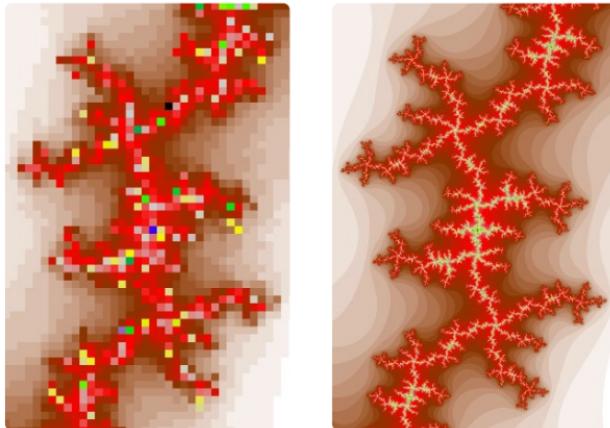
Im linken Bild wird der gesamte Orbit gezeigt. Wie aus der vorherigen sequentiellen Analyse bekannt, dreht sich der Orbit von aussen nach innen hinein. Die weißen Punkte im Zentrum weisen darauf hin, dass dort viele Iterationsergebnisse stattfinden.

Im mittleren Bild wurde soweit in das Zentrum hineingezoomt, dass die Rechen-Genauigkeitsgrenze erreicht wurde. Jetzt finden alle weiteren Iterationen auf dem inneren Ring statt, und mit hoher Präzision wird in jedem Zyklus jedesmal genau der selbe Ergebnisort getroffen. Bevor sich das System auf diesem Ring stabilisiert, sieht man ca. 5 bis 7 Umdrehungen vorher (weiter außen), dass sich in kürze eine Instabilität einstellen wird, die sich dann aber im pseudokonvergenten Cyclus stabilisiert.

Im rechten Bild wurde mit einer viel größeren Stellenanzahl gerechnet. Dadurch kann sich die Spirale weiterhin zusammendrehen. Dieses Bild hat den selben Zoomfaktor wie das mittlere Bild. In der idealen Mathematik dreht sich die Spirale bis zur Unendlichkeit weiter zusammen bis zur Größe Null.

Von Mr. Mandelbrot sind mir keine derartigen Analysen bekannt. Er hat 1980 mit den damals vielleicht besten Computern gearbeitet, diese waren aber lahme Maschinen im Vergleich zu den heutigen PCs. Ich glaube nicht, dass er den Effekt der Pseudokonvergenz erkannt hat. Dabei ist das Verhalten der Konvergenz der wichtigste Bestandteil seiner Fragestellung an diese Formel. Er hat als Mathematiker das Ideal des Iterationsverhaltens angenommen, was ja auch richtig ist.

Die Rechengenauigkeit



Im linken Bild sieht man deutlich, wie ein Bild unscharf wird, wenn die Rechengenauigkeit ausgeschöpft ist. Man könnte vermuten, dass nur die Auflösung zu gering gewählt wurde, so wie wir es von Digitalotos kennen, aber das linke Bild hat genauso viele Pixel wie das Rechte. Das rechte Bild wurde mit fünf mal mehr Nachkommastellen gerechnet, was noch einen viel größeren Zoom in noch größere Tiefen erlaubt.

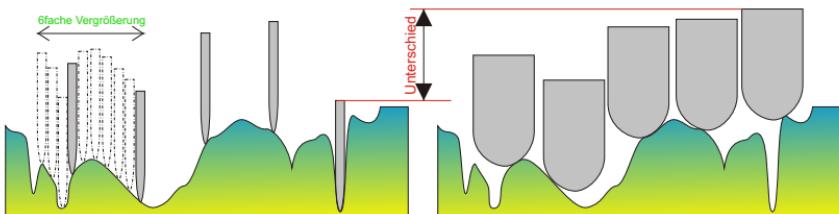
Als bildliche Erklärung dazu kann man sich als Abtasteffekt vorstellen, der nachfolgend erklärt wird. In diesem Fall werden die "Abtaststifte" durch die fehlende Rechengenauigkeit so groß, dass sie sich überlappen. Wenn das geschieht, kommen immer mehrere nebeneinander liegende Rechenergebnisse zum selben Ergebnis. Daher entstehen die Blockartefakte.

Die Rechengenauigkeit, die von den verfügbaren Nachkoma-Dezimalstellen abhängt, hat noch einen weiteren Einfluss. Die Bilder bekommen einen grobkörnigen Anschein, der um so deutlicher wird, je weiter die Abtaststifte voneinander entfernt sind. Dies ist bei vielen Fraktal-Fans überhaupt nicht erwünscht. Sie glätten ihre Bilder sogar noch künstlich. Das erzeugt zwar schöne Bilder, hat aber mit der Erforschung der M nichts gemein. Die Rechengenauigkeit hat auch wie beim Effekt der PseudoKonvergenz einen Einfluss bei differierenden Iterationsverläufen. Je genauer man rechnet, desto länger kann man Iterieren bis die Zahlenfolge ins Unendliche ansteigt (sie also den „Rouen“ -Punkt erreicht). Eine längere Iterationsfolge bedeutet natürlich auch die Erhöhung der sichtbaren Details.

Der Abtasteffekt

Wenn man sich die Rechengenauigkeit als Abtaststift vorstellt (nur ein Denkmodell - mathematisch muss es wohl anders definiert werden), mit dem die geometrischen Höhen und Tiefen des M-Universums gemessen werden sollen, dann wird dieser Stift umso dünner, je genauer wir rechnen können. Je dünner der Stift, desto näher können wir die Abtastpunkte aneinander setzen und es sind weitere Vergrößerungen möglich (linkes Bild, linke Hälfte). Mit jeder Vergrößerungsstufe rücken die Stifte näher zusammen, bis sie schließlich aneinandergrenzen. Weitere Vergrößerungen führen zu einem Überlappen der Antastungen, wobei dann immer mehrere Stifte zum selben Ergebnis kommen und so Blockartefakte im Bild entstehen.

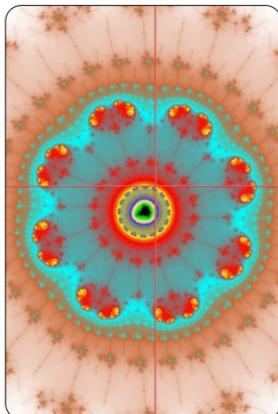
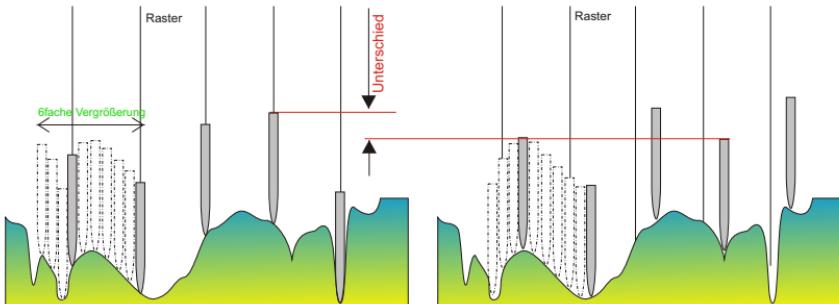
Bei den gröberen Darstellungen, wo die Abtastpunkte immer weiter voneinander entfernt liegen, kommt es jedoch dann zu dem Effekt, dass der Abtaststift zB. in ein "Loch" fällt, das bei grober Abtastung nicht auffallen würde (vergleiche jeweils rechten Stift.)



Die Rasterverschiebung

Ein weiterer Grund für Unterschiede im selben Messgebiet ist die Rasterverschiebung. Da die Darstellung meist am Bildschirm erfolgt ist der Raster im allgemeinen bei 96 Dpi oder zB. 600 Pixel bei der Bildbreite. Dies entspricht dem Raster (Zoombreite durch 600 = Abstand der Abtaststifte). Wird nun bei zwei Messungen der linke Rand um einen Bruchteil des Rasters verschoben, kann sich ein unterschiedliches Bild ergeben (siehe Beispiel unten).

Zum Glück ist die Landschaft der M in den größten Teilen doch nicht so sehr zerklüftet, dass Bildunterschiede kaum auftreten. Diese können aber sehr unscheinbar sein, man wird sie deshalb des öfteren nicht entdecken können.



Zur Verdeutlichung der Rasterverschiebung noch dieses Beispiel:

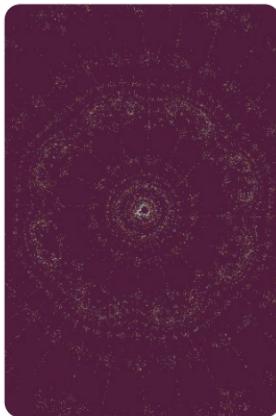
Das linke Bild wurde 2 mal berechnet. Da das 2. Bild genauso aussieht wie das erste (jedenfalls fürs bloße Auge) wurde es hier nicht noch einmal gezeigt. Der einzige Unterschied der beiden Bilder ist eine Verschiebung der X-Achse um ca. $1/1000$ der Pixelbreite.

Um die Unterschiede in der Iterationsanzahl beurteilen zu können: Weiß entspricht ca. 500 Iterationen über Rot bis Grün ab 1200 Iterationen.

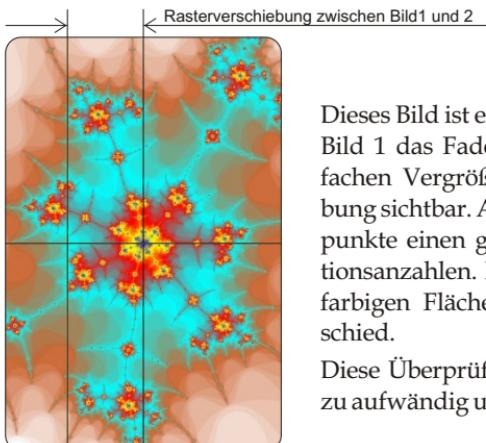
Formel: $(\text{Bild } 1 X) - (\text{Bild } 2 X) = \text{Rasterverschiebung}$

Pixelbreite: 0,000000000000000029497664602211894287229961999023694360738209708082469473914217

Aus den beiden obigen Bildern wurde nun Pixel für Pixel die Differenz ausgerechnet. Das Bild unten links ist das Ergebnis. Es sind alle Pixel als helle Punkte zu sehen, die eine Differenz in der Iterationsanzahl von größer 0 haben. Besonders viele Unterschiede sehen wir um den Satelliten herum. Dort ist ja auch der Formenreichtum am größten. Im Bild unten rechts ist das gleiche Differenzbild, aber mit einem Messbereich bis 1000 Iterationen, gezeigt. Man könnte



sagen, wenn wir bei unserer Analogie mit den Abtaststiften bleiben, dort wo helle Punkte zu sehen sind, da sind die Abtaststifte in ein tiefes „Loch“ gefallen.



Dieses Bild ist ein Zoom von der Stelle, an der im Bild 1 das Fadenkreuz ist. In dieser ca. 150000 fachen Vergrößerung wird die Rasterverschiebung sichtbar. An dieser Stelle haben beide Messpunkte einen großen Unterschied in den Iterationsanzahlen. Messpunkte, die beide in gleichfarbigen Flächen liegen, haben keinen Unterschied.

Diese Überprüfung für alle Pixel zu machen ist zu aufwändig und auch nicht notwendig.

Der Shiftoperator

In [CBdO] in Kapitel 1.8 wird die Shiftoperation als ein grundlegender Mechanismus zur Erzeugung von Chaos erklärt. Das Shiften nach links wird in der Programmierung von Computern sehr oft als schnelle Lösung für eine Multiplikation mit 2,0 verwendet. Daran ist das wirklich Gefährliche, dass in allen Standardanwendungen von rechts Nachkommstellen mit den Wert Null hereingezogen werden. Aber auch Floatingpoint Formate ziehen Nullen nach. Bei Verwendung der Betriebssystemeigenen Zahlenformate hat man keine Möglichkeit, diesen Nachteil auszugleichen. Das beiliegende Programm DeepChaos rechnet jedoch mit einem speziellen Zahlenformat, das entsprechende Korrekturen zulässt.

Also wurde hier auch ein Rundungsalgorithmus implementiert, der nicht einfach Nullen reinschiebt, sondern prüft, ob eine periodische Ziffernfolge in den letzten Stellen einer Zahl vorliegt, und stellt dann diese Ziffernfolge als Vortrag für die erste Rechenposition statt Null zur Verfügung. Einen Nachteil hat dieser Algorythmus jedoch auch. Liegt keine periodische Ziffernfolge vor, dann ist unbestimmt, ob das Ergebnis auf- oder abgerundet wird.

Diese Korrektur wird nur benötigt, wenn man mit einer Ganzzahl (Integer) multipliziert. Das Festkommaformat "BigInt", das in DeepChaos Verwendung findet, hat diesen Nachteil nicht, da die Multiplikation erst mal mit doppelter Genauigkeit ausgeführt wird. Erst danach wird nur die signifikante Stellenanzahl zurückgegeben.

Damit ist in dem Rechenbeispiel von [CBdO..K1.8] genüge getan. Der Autor gibt eine maximal erreichbare Iterationsanzahl von 22 an - DeepChaos erreicht unendlich!

```
Zahl = 0,6
do
    Zahl = Zahl * 2
    if ( Zahl >= 1 ) Zahl = Zahl - 1,0
    Iteranzahl + 1
    while ( Zahl > 0,0 )
        anzeigen ( Iteranzahl )
```

Test für Shiftoperator:Ideale Ergebnisfolge für diese Iteration:

0,2 - 0,4 - 0,8 - 0,6 - 0,2 - 0,4 - 0,8 - 0,6 -usw.

Wenn dieses Programm nicht unendlich lange läuft, dann rechnet Ihr Computer nicht richtig.

Das Beschattungslemma

Ebenfalls in [CBdO] in Kapitel 1.8, und auch in [F] Kapitel 4.7 beschrieben. Allgemein ausgedrückt wird beschrieben, dass eine rechnerische Iteration gar nicht so weit von einer realen Iteration entfernt sein wird.

Mit DeepChaos können Versuche mit verschiedenen Zahlenformaten und -größen durchgeführt werden. Je zwei Ergebnisbilder können grafisch voneinander subtrahiert werden, um Rechenunterschiede zu ermitteln. Alle Messungen bisher haben keine tragischen Fehler gezeigt, wenn man 32 Bit Rechengenauigkeit mit 292 Bits vergleicht. Die 292 Bits werden also nur dann benötigt, wenn man sehr kleine Ausschnitte heranzoomen möchte. Die Differenz der Koordinaten vom linken und rechten Rand eines Bildes sollte also größer als eine Zahl mit 32 Bits sein, um auf der sicheren Seite zu sein.

Beispiele aus der Natur, die in der Chaos-Literatur oft aufgezeigt werden, die schon nach wenigen dutzend Iterationen vom Rechner abweichen, gibt es. Aber längst nicht alle Iterationsverläufe sind so sensitiv. Die Mandelbrotformel hat auch nicht diese Empfindlichkeit, um gleich in Chaos zu verfallen. Bei einem konvergenten Iterationsverlauf kann man auch schon mal, wenn man die Zeit hat, bis 2 Giga-Iterationen rechnen. Im Zeitspektrum wird man messen können, dass die Kurve immer noch die selbe Steigung wie bei Iteration Nr.0 bis 100 hat. Es wäre also interessant, eine Analysenart zu entwickeln, die wirklich chaotische Verläufe finden und anzeigen kann.

Der Pythagoras Effekt

Mit dem Satz von Pythagoras kann man im imaginären Koordinatensystem den Betrag von Z berechnen. Man muß also nur den Imaginärteil quadrieren, den Realteil quadrieren, beides addieren und dann die Wurzel ziehen. Da wir es in der MBM zu über 90% mit Zahlenwerten von kleiner als 1,0 zu tun haben bekommen wir ein Problem. Während Zahlen >1,0 sich beim Quadrieren vergrößern, verkleinern sich die Zahlen <1,0 dabei. Das kann zu einem großen Fehler werden. Wenn unser Computer mit zu wenigen Nachkommastellen arbeitet, können wir eine kleine Zahl nicht mehr quadrieren, da das Ergebnis nicht mehr in den Zahlenraum passt und verloren geht.

Dies betrifft aber nur Fixkommaformate, Floatingpointformate arbeiten nach einem anderem Prinzip, das diesem Nachteil nicht hat. Deren Nachteil besteht darin, dass von vornherein zu wenige Dezimalstellen in den gängigen Formaten zu Verfügung stehen.

Die Verluste sind schwerwiegend. Bei einer Rechenkapazität von 80 Nachkommastellen (10E-80) kann man nur Zahlen quadrieren, die größer als 10E-40 sind ! Wenn wir es also genau nehmen, ist nicht Pythagoras der Schuldige, sondern das dafür nötige Quadrieren!

Aber selbst wenn die Zahl größer ist, kann es bei der Berechnung auf die Genauigkeit ankommen, die dann verloren geht. Wenn man dann wie bei Pythagoras noch die Wurzel berechnet, sieht man, dass der Fehler nicht trivial ist.

Das alles wäre nicht so tragisch, wenn Pythagoras nur zur Berechnung des Betrages von Z Verwendung finden würde. Wenn Sie auf den folgenden Seiten sich die Formel zur mathematischen Berechnung der M ansehen, werden Sie sehen, dass das Quadrat von Realanteil und Imaginäranteil auch zur Berechnung der nächsten Iterationsstufe benötigt wird. Damit kann der Rechenfehler mit jeder weiteren Iteration verstärkt werden.

Wenn wir aber im Randbereich von M dennoch bis zu 90% der Nachkommastellen verwenden können, liegt es daran, dass die meisten Zwischenergebnisse um den Wert 0,5 liegen. Der Wert 0,5 lässt sich noch genau genug quadrieren. Sollte sich ein Zwischenergebnis dann aber doch 0,0 nähern, dann ist nach der Addition mit einem so großen C von 0,5 bis 2,0 dieser Fehler verschwindend klein, und wirkt sich erst nach sehr vielen Iterationen aus.

In kritischen Fällen kann man diesem Trick anwenden:

$$c = \sqrt{((a + \text{Faktor})^2 + (b + \text{Faktor})^2) / \text{Faktor}}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$100 * 100 = 10000$$
$$0,01 * 0,01 = 0,0001$$

$$0,00010 * 0,00010 = 0,00000\textcolor{red}{001}$$

$$\sqrt{0,00010^2} = 0,00000 \text{ !!!}$$

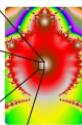
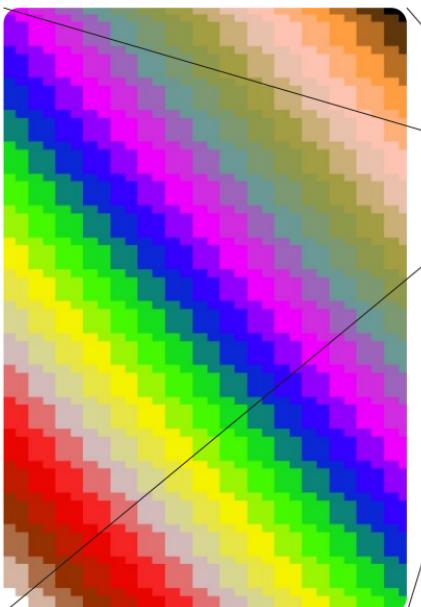
$$0,10010 * 0,10010 = 0,01002\textcolor{red}{001}$$

$$\sqrt{0,10010^2} = 0,10009 !$$

Richtig wäre:

$$\sqrt{0,10010^2} = 0,10010$$

In diesen Beispielen wurde die Addition von b^2 weggelassen, der Effekt bleibt davon unbeeinflusst. Nur wenn a^2 und b^2 sehr klein sind, verdoppelt sich der Fehler, ist ein Summand jedoch sehr groß gegenüber dem anderen mag der Fehler gering sein.



Beispiel:

Der Zoom mit Größe 10E-50 aus dem Zentrum der 2er Knospe zeigt eindrucksvoll diesen Rechenfehler. Das Bild der Vergrößerung müßte ebenfalls einen völlig kontinuierlichen Verlauf haben. Also ganz ohne Treppenmuster und mit viel mehr Farbübergängen.

Analyse des Pythagoras-Effektes

Diese Analyse soll bei den Attraktoren mit Hilfe der Bubblebrotmethode stattfinden.

Obwohl die Bubbelbrotmethode bisher noch nicht erklärt wurde, brauchen wir sie hier, um die Auswirkungen des Pythagoraseffektes zu zeigen.

Alle Orbits, die ein periodisches Iterationszwischenergebnis bei exakt 0,0 haben, gehören zu den attraktiven Zyklen, die im Mittelpunkt jeder Knospe zu finden sind. In den Bildern unten wurde die 2er Knospe genau untersucht. Der Attraktor ist besonders einfach zu erklären. Seine Koordinaten liegen bei -1,0 real und 0,0 imaginär. Die Startbedingung C0 für eine Iteration ist 0,0r und 0,0i.

Die Iterationsfolge ist dann:

$$C_1 = -1,0r \ 0,0i$$

$$C_2 = 0,0r \ 0,0i$$

$$C_3 = -1,0r \ 0,0i$$

$$C_4 = 0,0r \ 0,0i$$

$$C_5 = -1,0r \ 0,0i$$

$$C_6 = 0,0r \ 0,0i$$

usw.

Weitere Attraktoren:

Bei einer 3er Knospe ist jedes 3. C = 0,0r 0,0i

Bei einer 4er Knospe ist jedes 4. C = 0,0r 0,0i

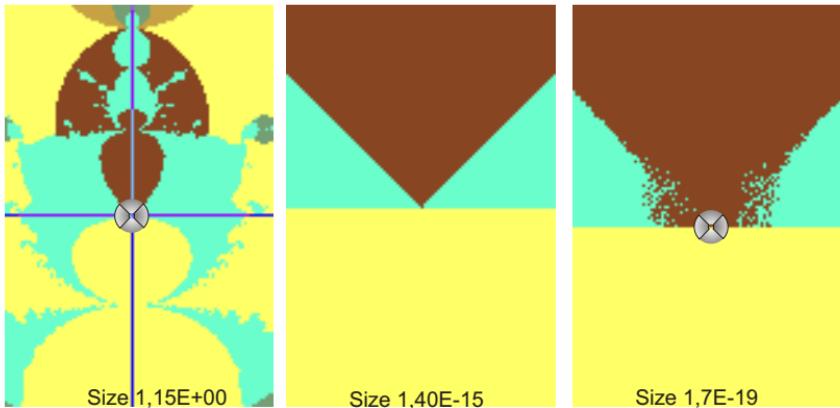
Bei einer 5er Knospe ist jedes 5. C = 0,0r 0,0i

usw.

Alle Attraktoren haben ihr MinZ bei 0,0 !

Dieser 2er Zyklus geht endlos so weiter, nicht nur theoretisch, sondern auch mit dem Computer. Da dieser Attraktor (beim blauen Fadenkreuz) genau an der unteren Spitze der 4er Blase (braun) liegt, ist eine genauere Analyse leicht möglich. Durch die geringe Anzahl von Iterationen kann schnell in große Tiefen gezoomt werden. Bis 1,40E-15 sieht man diesen Ort so, wie man ihn auch erwarten würde. Ab E-19 tritt jedoch eine Unschärfe auf, die jedoch nur die beiden 6er Blasen (türkis) in diesem Bild betrifft. Weitere Vergrößerungen im chaotischen Bereich zeigen verschiedene Muster, die zunächst auf Interferenzen der Iterationsergebnisse beruhen (Bild E-21). Bei 3,5 E-38 nun scheint sich auch die bisher scharfe Grenze der 2er Blase (gelb) aufzulösen. Nur ein wenig weiter vom Attraktor weg, braucht es schon einen Zoom von 7,0 E-70 bis die gelbe Grenze unscharf wird.

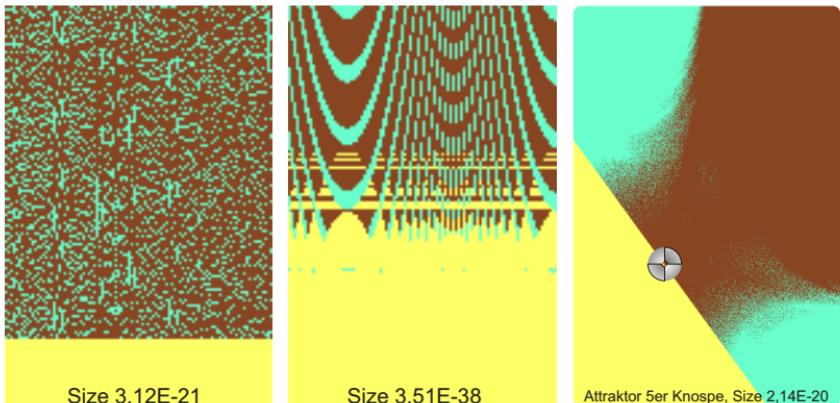
Dieses Verhalten kann bei den Attraktoren aller Knospen (Bild: Knospe 5er Zyclus) beobachtet werden, auch in den Knospen aller Satelliten.



Ein Zoomfolge in den 2er Attraktor hinein. Bis zum 2.Bild ist alles in Ordnung. Das 3.Bild jedoch müsste wie das 2. aussehen, zeigt aber deutlich Auflösungsscheinungen. Die selben Auflösungerscheinungen zeigt eine Messung am 5er Attraktor, sowie bei allen anderen.

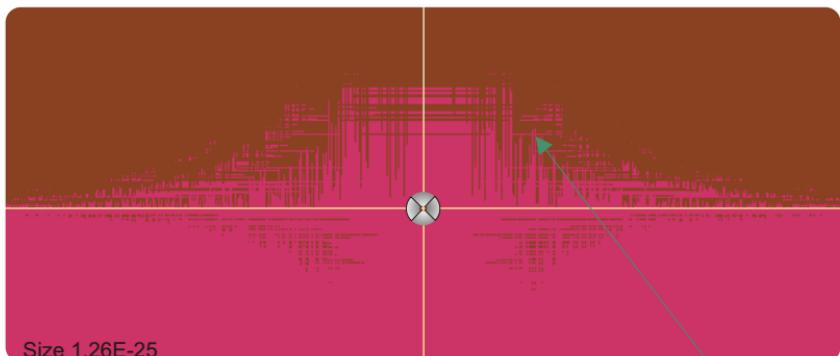
= Markierung für Attraktorort

Zoomt man trotzdem immer weiter dorthin, wo sich der Attraktor befinden sollte, kommt man zu der Darstellung auf der nächsten Seite. Auf dem Weg dorthin begegnet man aber zunächst vielen Interferenzerscheinungen. Diese sind zum Teil wirr, zum Teil strukturiert, aber alle irgendwie interessant anzusehen.



Dieses Bild hat die Größe 1,26E-25 exakt am Ort des Attraktors bei -1,0r 0,0i (gelbes Fadenkreuz) also in der 2er Knospe. Rot ist die 2er Blase. Braun ist die 4er Blase. Weiter links und rechts wären die blauen 6er Blasen, die sich hier schon weit vorher aufgelöst haben. Dieses Bild sollte idealerweise immernoch so aussehen wie das Bild der Größe 1,40E-15.

Bei weiterer Vergrößerung sieht man auch hier den Beginn chaotischen Verhaltens (verursacht durch Rechenfehler), wie schon vorher bei den 6er Blasen. Und bei noch weiterer Vergrößerung bis in den E-50er Bereich hinein wird ein Muster erkennbar, dass in Variationen im gesamten Raum um den Attraktor sichtbar ist.



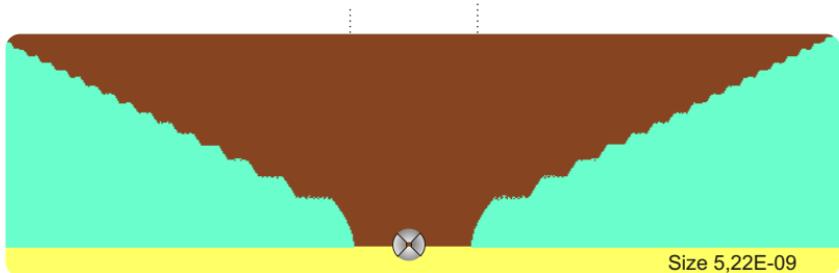
Dieses Muster findet man in Variationen, von Kästchenbreite und -höhe, von vertikalen und horizontalen Abständen, im gesamten untersetzenförmigen Bereich um den Attraktor herum.

Dieses feine Kästchenmuster ist der Auslöser für die vielen, zum Teil auch sehr schönen Interferenzmuster bei den verschiedenen Ausschnittsgrößen zwischen 10E-15 bis 10E-50. Dies alles sind die Auswirkungen des Pythagoras-Effektes. Das obere Bild des Attraktors hätte bei richtiger Berechnung genau den selben Aufbau und das Aussehen wie das Bild mit der Vergrößerung 1,40E-15. Und bei einer Rechnenkapazität, die bis 10E-80 korrekt rechnet, sollte das auch bei extremer Vergrößerung so bleiben.

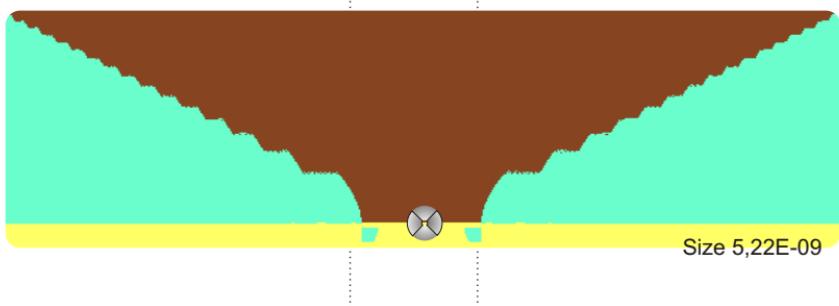


Der Umkehrschluß daraus ist: Wenn Sie an einen Attraktor solange heranzoomen, bis er die beschriebenen Auflösungserscheinungen zeigt, können Sie die Rechenqualität der Software beurteilen.

Zum Schluss nochmal die gleiche Messung, aber mit Floatingpoint gerechnet. Man erkennt, das System rettet sich durch das Floaten der Kommastelle eine ganze Weile, bis es schon bei E-09 endgültig versagt.



Die grafische Rechenmethode mit Floatingpoint erzeugt dieses Fehlerbild. Es ist nahezu identisch, bis auf die beiden „Ausreißer“ im gelben Bereich. Die gelb-blaue Grenze scheint auch etwas unschärfer zu sein. Diesen Fehlern werde ich zunächst nicht weiter nachforschen.



Das allgemeine Abtasttheorem

Es gibt verschiedene Auswertungsarten, die seltsame Linien in den Bildern zeigen. Diese rasterförmigen Linien sind seltenst Bestandteil einer Messung in der Mandelbrotmenge.

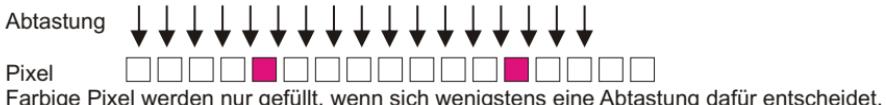
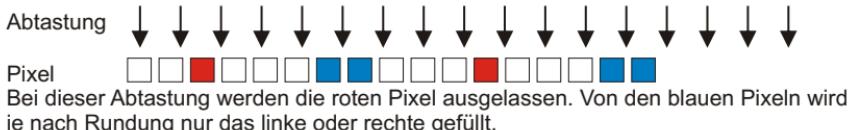
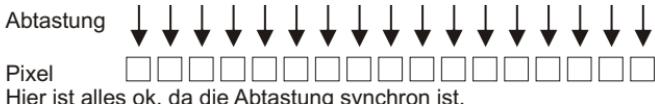
Hier der Versuch dies möglichst kurz zu erklären:

Berechnungen mit dem Computer in der M erfolgen fast immer Pixel für Pixel. Manchmal aber wird die M in einem Raster abgetastet, dessen Schrittweite nicht mit der Pixelbreite übereinstimmt. Es kommt manchmal dazu, dass zwei Ergebnisse auf ein Pixel fallen würden. Durch Auf- oder Abrundungen verteilen sich jedoch die zwei Ergebnisse auf ein linkes und rechtes Pixel (oberes oder unteres). Das Pixel dazwischen bleibt leer, so entstehen die Linienzüge. Genausogut kann die Abtastschrittweite so groß sein, dass ein oder mehrere Pixel übersprungen werden.

Die Lösung:

Damit diese Effekte nicht auftreten, muss die Abtastschrittweite mindestens halb so groß sein, wie die Pixelgröße. Besser sie ist noch viel kleiner.

Leider erhöht dies die Rechendauer für ein Bild erheblich. Zum ausprobieren einer Messung kann man diese Linien zunächst getrost ignorieren.



Die Programmierung

Hier ein Programmausschnitt zur Berechnung eines einzelnen Iterationsverlaufes. Dies ist die mathematische Art im kartesischen Koordinaten-System eine Iteration zu berechnen. Nach Verlassen der Schleife gibt es folgende Ergebnisse: Der Wert von (ax,ay) entspricht dem imaginären Wert von Cn und gibt die Imaginärkoordinaten Ergebnisses an. Der Wert Z ist der Absolutwert des Rechenergebnisses. Die „iternummer“ gibt die Anzahl der erreichten Durchläufe an. Die Schleife wird verlassen wenn Z größer 2,0 wurde, oder wenn eine maximale Wiederholungszahl „MaxIter“ erreicht wurde. Im Falle einer konvergierten Iteration würde die Schleife sonst unendlich lange laufen.

```
iternummer = 0;
ax = 0;                                // Bei der MBM ist die Anfangsbedingung Null
ay = 0;
ax2 = 0;
ay2 = 0;
do
{
    ay = ( ay * ax * 2 ) + cy; // cy = y-Anteil des Iterationspunktes
    ax = ( ax2 - ay2 ) + cx;   // cx = x-Anteil des Iterationspunktes
    ax2 = ax * ax;
    ay2 = ay * ay;

    Z = sqrt( ax2 + ay2 );    // Pythagoras für Berechnung des Absolutwertes
    iternummer += 1;
}
while ( ( Z < 2,0 ) UND ( iternummer<MaxIter ) );
```

Nach dieser Schleife wird an dem Ort, der mit cx - cy adressiert ist, ein Punkt auf den Bildschirm gemalt. Dieser Punkt bekommt eine Farbe, die dem Wert der erreichten Iternummer entspricht. Meist wird die Farbe aus einer Farbtabelle entnommen. Jetzt wissen wir, wie ein einzelner Bildpunkt erstellt wird. Wenn unser Bild zB. 600 x 900 Pixel groß werden soll, muss dieser Vorgang Zeile für Zeile, Spalte für Spalte wiederholt werden. Also 540 000 mal. Wenn jeder Punkt durchschnittlich 1000 Iterationen braucht, muss die Mandelbrotformel also insgesamt 54 Millionen mal gerechnet werden. Das ist auch für einen Computer ein gutes Stück harter Arbeit.

Da die Bildfläche x-y das zweidimensionale imaginäre Koordinatensystem mit Imaginär- und Realachse darstellt, müssen die Rechenergebnisse in der dritten Dimension, also in der Z-Achse aufgetragen werden. Es gibt Programme, die solches durchaus 3-Dimensional darstellen können. Die M sieht dann wirklich so aus, als wäre sie ein Gebirge. Im den meisten Fällen wird die 3. Dimension jedoch nur mit einem Farbcode dargestellt, was durchaus reicht.

Dies waren die Beispiele für die Basis-Programmierung die jeder Iterator beinhaltet. Um die folgende Auswertungen zu erhalten, müssen die Resultate aus diesem Programmabschnitt noch gefiltert und analysiert werden. Es ist unter

Umständen aufwändig solche Filter zu programmieren. Gar machmal wäre eine Fouriertransformation nötig. Bei sovielen Rechenoperationen, die alleine schon den Computer extrem auslasten, ist dies aber nicht besonderlich praktikabel, denn die Ergebnisse wollen wir ja noch bei Lebzeiten auswerten. Also bleiben nur Algorithmen, die auch schnell genug sind. Leider haben manche Nachteile, die auch eine Fehlinterpretation der Ergebnisse zulassen. Spezielle Fragen sollten deshalb immer mit anderen Algorithmen verifiziert werden. So kam es, dass ich numehr über zehn Jahre an diesem Projekt arbeite. Es war immer wieder nötig die Auswertungen zu verfeinern, oder zu akzeptieren, dass sie nur bei konvergierenden Iterationen funktionieren oder umgekehrt.

Hier ein weiterer Programmausschnitt zur Berechnung eines einzelnen Iterationsverlaufes. Hier wird die grafische Methode angewandt. Zeichnerisch wurde sie bereits erklärt. Sie wird mit Sinus- und Kosinus-Funktionen nachempfunden. Sie stimmt nicht in allen Teilen mit der Rechenart im Polar-Koordinaten-System überein.

Die Endergebnisse sind die gleichen, es braucht nur etwas mehr Rechenzeit. Dieses Programmbeispiel wurde bisher nur mit Floating-Point realisiert. Das DeepChaos eigene Fixpointformat mit 80 Nachkommastellen hat bisher keine Divisionsroutine, da sie ja nur zur Ermittlung von ry gebraucht würde. Es ist jedoch leicht vorstellbar, wie tief mit Fixpoint auch hier iteriert werden könnte.

```

internummer = 0;
x0 = 0;
y0 = 0;
xy = 0;
yy = 0;
Z = 0;
s = 0;
c = 0;
r0 = sqrt( ( cx * cx ) + ( cy * cy ) ); // r0 = Z des Iterationspunktes
do
{
    ry = ( Z * Z ) / r0; // einzige Division

    siny = ( s * cy ) - ( c * cx ); // cy = y-Anteil des Iterationspunktes
    cosy = ( c * cy ) + ( s * cx ); // cx = x-Anteil des Iterationspunktes

    xy = ( s * cosy ) + ( c * siny );
    xy = xy * ry;
    xy = xy + xo;
    yy = ( c * cosy ) - ( s * siny );
    yy = yy * ry;
    yy = yy + yo;
    Z = sqrt(( xy * xy ) + ( yy * yy ) );
    internummer += 1;
}
while ( ( Z < 2,0 ) UND ( internummer<MaxIter ) );

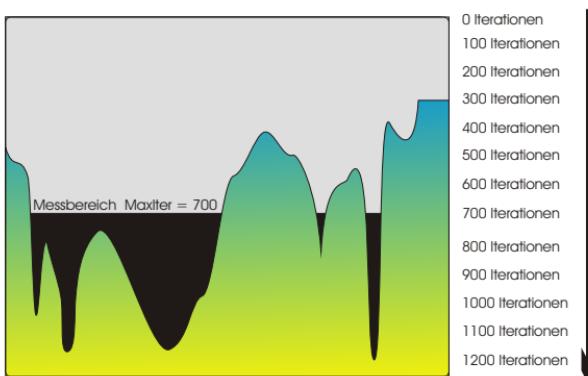
```

Von der richtigen Belichtung einer Messung

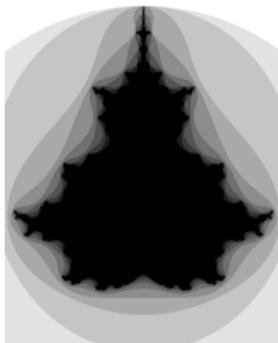
Ja, Sie haben richtig gelesen. Das Erzeugen einer Mandelbrotmenge, oder der Zoom hinein, ist im Vorgang sowas ähnliches wie fotografieren. Sie wissen bestimmt, ein unterbelichtetes Bild kann man nur schwer korrigieren. Beide Vorgänge gibt es bei der Erstellung eines M-Bildes. Man muß die optimalen Parameter zur Berechnung (Aufnahme) wählen und zum Betrachten die interessanten Bereiche filtern. Aber wie bei der Bearbeitung von JPEG-Fotos gilt auch hier die Regel: Was nicht auf dem Foto ist, kann nicht gefiltert oder retouchiert werden. Wenn etwas nicht auf dem Foto ist, dann ist eine richtige Interpretation der Rechenergebnisse nicht möglich.

Nehmen wir uns die Blende vor. Bei der M ist das die Iterationstiefe. Es würde nichts schaden, diesen Wert von vornherein immer bei Unendlich einzustellen. Es gäbe immer perfekte Bilder (So wie bei der Fotoblende, wenn sie fast Null wäre.) Bei den Iterationen im Randgebiet wird bei Überschreiten der Grenze von Z=2,0 in jedem Fall abgebrochen. Innerhalb der M jedoch wird für jeden Bildpunkt die maximale Rechenzeit benötigt. (So braucht auch eine 0,0 Blende eine unendliche Belichtungsdauer.) Beim derzeitigen Stand der Computer-technik kann niemand auf solch eine Aufnahme warten, auch nicht auf die Herstellung der entsprechenden Computertechnik. Man muß also die Iterations-tiefe mit MaxIter begrenzen. Dazu muß man herausfinden, bei welchem Wert man das zu sehen bekommt, was interessiert und es dennoch möglichst schnell geht. Zum Glück gibt es wenigstens kein Verwackeln.

Im Diagramm haben wir eine M mit einer Iterationstiefe von 300 bis 1200 Itera-tion. Wenn das Bild unterbelichtet wird, indem die Grenze für MaxIter bei 700 liegt, werden die Bildbereiche, die nicht erreicht werden mit schwarz markiert. Wird MaxIter weit über 1200 gelegt, schadet das nicht, kann aber dauern, falls



im Bildbereich ein konvergenter Bild-bereich vorhanden wäre. (Hier nicht der Fall.)



Eine Aufnahme mit maximal 10 Iterationen bringt nicht alle Details zum Vorschein.

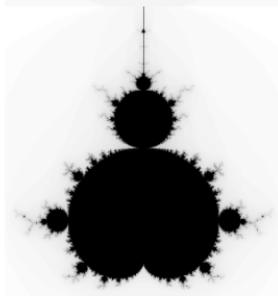
Wir könnten versuchen ein Bild durch Veränderung der unteren und oberen Grenzen des Betrachtungsbereiches zu verbessern. Mit dieser Methode ist das aber nicht möglich, wir können nur interessante Teile hervorheben, andere ausblenden.

Anzeige hier von 1 bis 10.



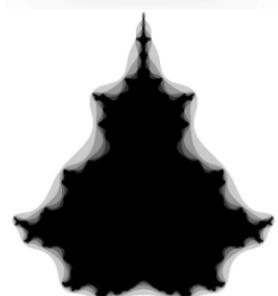
Die Aufnahme mit 10 Iterationen kann auch mit Erhöhung des Betrachtungsbereiches nicht detaillierter werden, sondern nur heller.

Anzeige 1 bis 100.



Mit 100 Iterationen gerechnet sieht die MBM schon filigraner aus. Würden wir dieses Bild jedoch jedoch mit einem Betrachtungsbereich von 5 bis 10 ansehen, dann hätten wir die Darstellung vom nächsten Bild.

Anzeige 1 bis 100.

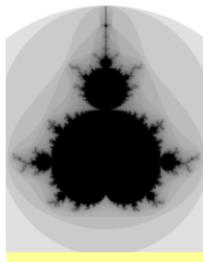


Durch Begrenzung des unteren und oberen Betrachtungsbereiches kann aus einem guten Bild (Bild 3) zum Beispiel dieses herausgefiltert werden.

Anzeige 5 bis 10.

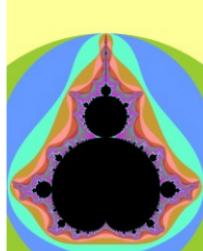
Die 3.Dimension

Das Apfelmännchen wird in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem berechnet. Die Ergebnisse müssen deshalb in der 3.Dimension dargestellt werden. Im allgemeinen wird hier eine Farbcodierung zur Anzeige der Ergebnisse benutzt. Als Ideal wäre für jede Zahl eine andere Farbe zu wählen. Wenn wir zum Beispiel ein Apfelmännchen mit einer Belichtung von 1 bis 1000 betrachten wollen, wären auch 1000 Farben nötig. Es gibt dabei zwei Schwierigkeiten: zum einen ist es schwer 1000 eindeutig unterschiedliche Farben zu finden, andererseits wäre es verwirrend, etwas aus diesem Farbenbrei herauszulesen. Deshalb ist es eine Aufgabe für sich, die relevanten Sachverhalte einer Messung durch geeignete Farben optimal darzustellen



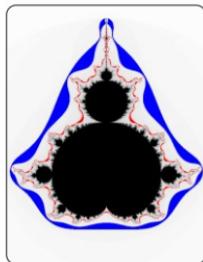
1. Beispiel:

Graustufen-Skala. Die dunklen Farbstufen sind nicht gut zu unterscheiden. Deshalb sind die Details nicht so gut sichtbar wie im nächsten Bild.



2. Beispiel:

Die Ergebnisse 0 bis 10 haben je eine Farbe. 11 bis 100 sind in nur 10 Farben zusammengefasst. Sie wären ob der Winzigkeit eh nicht zu sehen.



3. Beispiel:

In einem schwarz-weiss Bild werden nur einzelne Iso-Linien farblich hervorgehoben (5=blau, 10=rot). Hervorragend geeignet einzelne Ergebnisbereiche anzuzeigen.

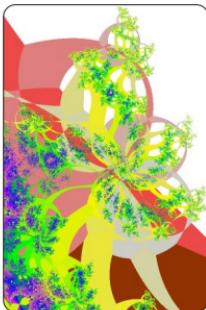


Zur perfekten Darstellung eines Bildes gibt außer Belichtung und Farbwahl noch die Möglichkeit eines logarithmischen Farbbereiches.

Im 1.Bild wird der volle Belichtungsbereich von 0..5000 Iterationen linear angezeigt. Im linken unteren Rand sieht man Knospen, an den dieser messbereich ausgenutzt wird. Auch zwei Satelliten sieht man noch gut. Ansonsten ist das Bild doch sehr unscheinbar.



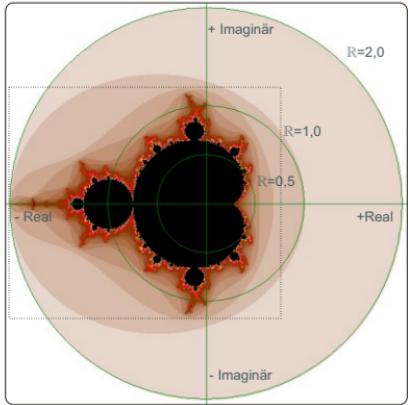
Im 2.Bild wurde die Belichtungsgrenze von 5000 auf 50 heruntergesetzt. Jetzt sieht man besser was vorher verborgen war. Aber wie bei einem überbelichteten Bild sind die Knospen und Satelliten nicht mehr erkennbar.



Im 3.Bild wurde der Belichtungsbereich wieder auf volle 5000 gesetzt. Aber durch einen wohl ausgewählten logarithmischen Faktor kann man alles sichtbar machen.

In Bild 1 brauchen wir um alles darzustellen 5000 Iter. In Bild 2 erkannten wir, dass nur 50 Iter zur Darstellung nötig sind. Jetzt stehen auf der Farbskala in diesem Beispiel aber nur 12 verschiedene Farben zur Verfügung. Das bedeutet, für je 500 Iter gibt es eine Farbe. Von 0 bis 50 fällt deshalb fast alles in die erste- und weiße-Farbe und ist deshalb kaum zu sehen. Durch den logarithmischen Faktor können wir den 50er Punkt zu den höheren Farbeinträgen verschieben. In Bild 3 bekommt der Bereich von 0 bis 50 insgesamt 8 Farben. Der Bereich von 50 bis 5000 hat dann immer noch 4 Farben zur Darstellung. Da das nur sehr wenige Bildpunkte betrifft, ist das völlig Ausreichend.

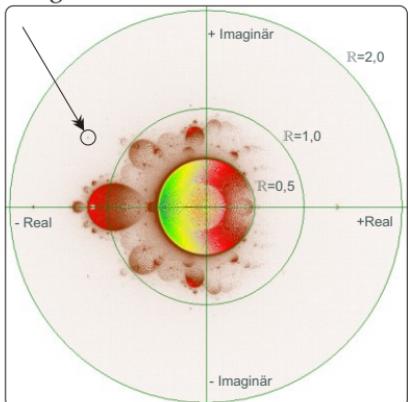
Der Messbereich



Der Apfelmännchenbereich liegt innerhalb der Grenze von $R=2,0$. Die Ziffern geben die Anzahl der Iterationen im äußeren Bereich an. Im roten Bereich, von außen nach innen gesehen, wächst die Iterationsanzahl schnell an. Der schwarze Bereich ist die eigentliche und reine M. Viele Dokumentationen zeigen nur den Bereich, der hier mit einer gepunkteten Linie umrissen ist. Das ist legitim, solange man sich sicher ist, dass keine relevanten Teile abgeschnitten werden. Dies wäre im Bild unten nicht der Fall. Bisher haben wir

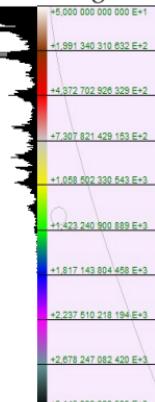
die M genauso betrachtet, wie sie Mr.Mandelbrot definiert hat. Aber das ist nur eine spezielle Auswertung einer einzelnen Frage, die Mandelbrot damals besonders interessierte. Dass es mehr zu fragen gibt, zeigt das Bild unten. Es entsteht, wenn man alle Zwischen-Ergebnisse der einzelnen Iterationen in der Ebene aufsummiert. Das ist nichts anderes, als wenn man alle Orbit-Ansichten mit all ihren Punkten, die es gibt, übereinanderlegt. Dort wo mehrere Punkte auf das selbe Pixel fallen werden diese Treffer gezählt. In diesem Bild sind prinzipiell alle Orte zu sehen, die uns interessieren könnten. Zwar ist der ganze Bereich bis zum Kreis mit $R=2,0$ interessant, aber alle Punkte, die eine andere Farbe als Hellrot oder Weiss haben, sollten unsere besondere Aufmerksamkeit wecken. Mr.Mandelbrot war zwar ein Gegner von Visualisierungen, aber ein Farbtupfer in diesem Bild kann etwas bedeuten. Es ist klar, eine Visualisierung bringt noch keinen mathematischen Beweis, kann aber den Anstoß dazu geben

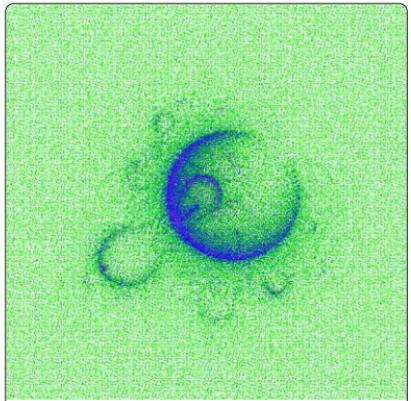
(siehe [FuC]).



Auf der nächsten Seite wird der hier markierte Bereich näher gezeigt.

Rechts ist die Farbtabelle zu sehen, die den Farben im Bild die Zahlenwerte zuordnet (mit Histogramm).





Real-Center:	- 1,201254
Img-Center:	+ 0,707341
Bildgröße(x) :	0,05453
MaxIm1(Iter):	300
Gesamtgröße:	1,16E+1 Meter
Rechendauer:	18 h 33 m 47,396 s
gerechnete Orbits:	400.000.000 Pixel

Dieses Bild ist der Zoom des interessanten Punktes aus dem letzten Bild. Solch eine Struktur wird hier wohl zum ersten mal in der Literatur gezeigt. Wir haben gesehen, dass es in der normalen M-Darstellung sogenannte Satelliten gibt. Dass es aber auch in der Orbit-Aufsummierung Satelliten gibt, war bisher unbekannt und auch nicht zu erwarten. Die Satelliten hier ähneln aber nicht dem Apfelmännchen, sondern der Gesamtstruktur im letzten Bild. Sie sind wahrscheinlich bisher nur nicht aufgefallen, weil der Rechenaufwand nicht unerheblich ist. So brauchte ein Computer mit 4 Prozessoren über 18 Stunden um dieses Bild zu berechnen. Da es, wie man unschwer erkennen kann,

nicht perfekt ist, wird wohl ein Supercomputer nötig sein, bessere Bilder zu errechnen. Es wird auch nicht einfach sein, diejenigen Orbits zu finden, die zur Bildung dieses Satelliten beigetragen haben. Mehr dazu im Kapitel „Aufsummierung der Orbits“.

Mögliche Auswertungen

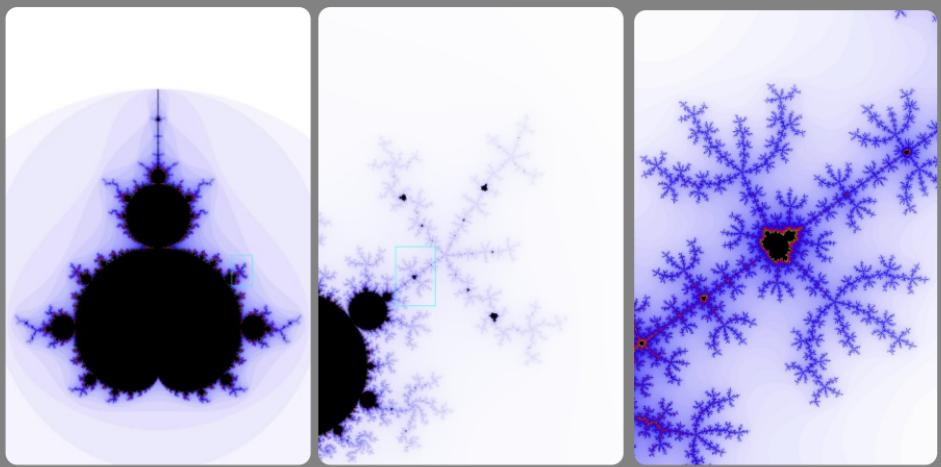
- Mandelbrotmenge: Alle Punkte, deren Iterationsergebnisse konvergieren oder nicht ins Unendliche anwachsen.
- Apfelmännchen: Wie die M, nur dass der Übergangsbereich auch dargestellt wird, in dem wenige bis viele Iterationen nötig sind, bis es sich entscheidet, ob die Iterationsergebnisse ins Unendliche übergehen.
- Bubblebrot: Es wird die Anzahl der Iterationen angezeigt, die es braucht, bis der Betrag von Z eines Iterationsergebnisses das erste oder das einzige absolute Minimum erreicht.
- Einhalbbrot: Es wird die Anzahl der Iterationen angezeigt, die es braucht bis das Ergebnis von Betrag von Z einer Iteration dem Vorgabewert 0,5 möglichst nahe kommt.
- Lotusbrot: Wenn man alle $|Z|$ - Ergebnisse eines Iterationsverlaufes quantifiziert, so ergibt sich eine um so größere Zahl, je mehr Radien während einer Iteration berührt werden. Diese Darstellung ist hervorragend geeignet, die "Einschwingvorgänge" sichtbar zum machen, die die M braucht, bis sie stabil wird.
- Runout: Es wird diejenige Iteration ermittelt, ab der der Verlauf konvergiert und die M verlässt.
- SizeOfTrack: Es wird die Anzahl der Iterationen angezeigt, bis die Fläche der Iterations-Spur die maximale Größe erreicht hat, aber auch die Größe selbst.
- Orbitanalyse: Ein einzelner Punkt wird iteriert und die Zwischenergebnisse als eine Spur aus Punkten in der Ebene angezeigt.
- Aufsummierung der Orbits: Alle Punkte werden iteriert und die Zwischenergebnisse in der Ebene aufsummiert.
- Orbits-Ursprung: Für alle Orbit-Punkte, die in einen markierten Bereich fallen, werden Ursprungs- oder Startpositionen der Orbits angezeigt.
- Ergebnisort: Zunächst wie Orbitanalyse, nur dass dies für alle Punkte einer Referenzmenge durchgerechnet wird. Somit wird für alle Koordinaten außerhalb

	der M angezeigt, welche Punkte durch die einzelnen Iterationsergebnisse wie oft berührt werden.
Perioden:	Immer wenn ein Minimum von \mathbb{R} im Iterationsverlauf auftritt wird dieses gezählt.
NextAngle:	Für jeden Punkt des Ausschnittes wird der Winkel im errechnet, den ein Punkt bei der jeweiligen End-Iteration bezüglich des letzten Punktes der vorherigen Iteration einnimmt. Für Punkte, die die M vorher verlassen, ist das ihr letzter Wert.
Zeitreihenanalyse:	In einem eigenen Fenster kann der Iterationsverlauf eines einzelnen Punktes analysiert werden - ähnlich wie bei einem Ozillografen.
Periodenabw:	Es werden im Iterationsverlauf 3 Minima ermittelt. Die Iterationsanzahl zwischen A und B werden von der zwischen B und C abgezogen. So kann festgestellt werden, ob die Periodizität konstant ist.
CenterOfOrbit:	Bei einem Orbit wird der Mittelpunkt errechnet.
u.v.m	

Iterationsanzahl des Apfelmännchens

Der kleine Rahmen in diesen Bildern markiert den Zoombereich für das nächste Bild. Mehr soll hier zunächst nicht gezeigt werden, da die Freude, im Dickicht des Randbereiches mit DeepChaos oder einem anderen Fraktalexplorer selbst schöne Bilder zu finden, nicht vorweggenommen werden soll. Andererseits, wer sich schon mit der M beschäftigt hat, kennt solche Bilder zur Genüge.

In den Ausläufern der \mathbb{M} sind überall wieder kleine Apfelmännchen zu finden. Sie werden immer kleiner und kleiner und es gibt soviele, wie Sterne am Himmel. Dass es große und kleine Apfelmännchen gibt, nennt man



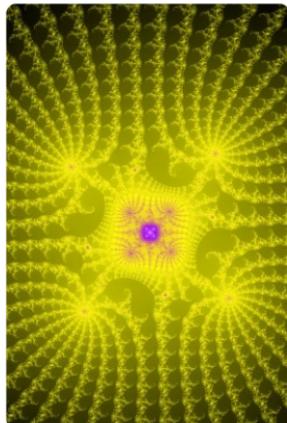
Diese Darstellung wird erzeugt, wenn man die maximal erreichte Iterationsanzahl für jeden einzelnen Bildpunkt farbcodiert anzeigt.

Der hier schwarz markierte Bereich ist die eigentliche \mathbb{M} . Alle Iterationen können hier eine unendlich hohe Iterationsanzahl erreichen. Im dunkelblauen Randbereich sind die sogenannten Satelliten, also die kleinen, selbstähnlichen Apfelmännchen, angesiedelt. Auch sie gehören zu \mathbb{M} und können bis zur Unendlichkeit iteriert werden. Dazwischen aber gibt es weite Bereiche, die wenige bis zu sehr hohe Iterationszahlen erreichen können. Diese Bildpunkte haben aber auf jeden Fall endliche Iterationsverläufe.

Die Verbindungslinien, die von der Hauptmenge zu den Satelliten führt, und weiter von Satellit zu Satellit, bezeichnet man als "Haare". Die Mathematik meint, sie gehören zu \mathbb{M} . Wenn sie aber zu \mathbb{M} gehören, sollten sie meiner Meinung nach auch bis unendlich iteriert werden können. Das wäre für mich

logisch. Ich habe noch keine derartige Visualisierung gesehen oder gefunden. Auch DeepChaos mit einer Auflösung vom "10e-80" kann das nicht finden. Im Gegenteil, die Linien, die die Haare beinhalten müssten, haben oft sogar einen sehr flachen Iterationsverlauf mit nur wenigen 100 Iterationen, was überhaupt nicht auf das Vorhandensein eines tiefen Canyons schließen lässt. Es ist in der einschlägigen Literatur aber auch nicht explizit und nicht deutlich ausgedrückt, dass Haare einen konvergenten Verlauf haben müssen. Ich vermute, dass das Thema "Haare" doch noch nicht so entgültig fixiert ist, wenn ich auch gelesen habe, es sei mathematisch nachgewiesen. Den Nachweis selbst sah ich noch nicht.

Diese Auswertungsart ist, obwohl sie die ursprünglichste ist, aber immer noch die geheimnisvollste. Im folgenden wird immer wieder auf eine Korrelation der verschiedensten Messergebnisse mit dem Aussehen dieser Formen hingewiesen werden, wobei ein mathematisch-logischer Zusammenhang noch nicht gefunden wurde. Im Vorgriff auf noch folgende Kapitel noch diese Betrachtung: In den diversen Randbereichen der M gibt es sehr viele verschiedenen Arten den Iterationsverlaufes (Orbit-Form). Der Formenreichtum des Randbereiches von M ist deshalb irgendwie noch nachvollzierbar, oder zumindest vorstellbar. Wenn man in die M weit bis sehr weit hineinzoomt, wird man weiterhin diesen Formenreichtum finden. Wenn man sich dann aber die Orbitanalysen von vielen Punkten in diesem Zoom ansieht, wird man kaum noch Unterschiede im Verlauf erkennen können. Wenn aber schon die ersten zigTausend Iterationen kaum Unterschiede aufweisen, wieso ist dann oft das Ende erreicht, während andere Punkte diesen Rythmus bis zur vielfachen Länge beibehalten? Sie werden sagen, das ist eben das Chaos. Aber es ist schon verwunderlich, dass dieses Chaos so streng strukturierter Formen erzeugen kann. Diese Logik wird uns wohl noch eine Weile verborgen bleiben.



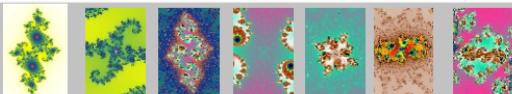
Dieses Bild hat ein Größe von: 4,70E-33
Damit ist das gesamte Apfelmännchen 100.000
mal größer als unser bekanntes Universum.

Eine klassische Reise ins Mandelbrot-Land

Diese Reise wurde von einigen Autoren schon gezeigt und auch beschrieben, so auch in [wpmbm]. Da allgemein verfügbar verweise ich auf diesen Beitrag. Von links nach rechts wird immer weiter in die M hinein gezoomt, bis man beim rechten Bild ankommt. Das letzte Bild ist ein sehr spezielles. Hier wird dann deutlich, wie sehr die MBM mit der Julia-Menge verwandt ist.



Hier endet die Reise vorläufig. Ich will hier jedoch etwas weiter reisen. Wenn man die Menge von Mandelbrot auf Julia unschaltet und den Juliapunkt im Zentrum des letzten Bildes setzt, erhält man das erste Bild der folgenden Weiterreise. Das ist zunächst die gesamte Juliamenge zu diesen Juliapunkt. Zoomt man nun in das Zentrum hinein, wird eine Struktur sichtbar, die dem letzten Bild des ersten Reiseteils sehr ähnlich sieht. Zoomt man weiterhin ins Zentrum, entdecken wir Periodenverdoppelungen dieser Struktur, solange bis wir wieder bei einem Apfelmännchen-Satelliten angekommen sind.



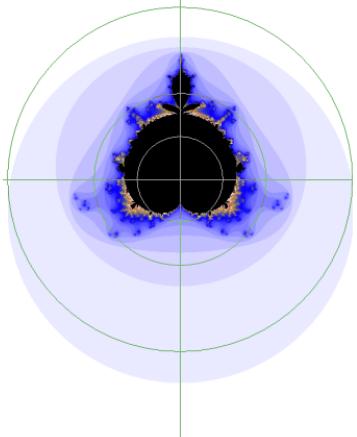
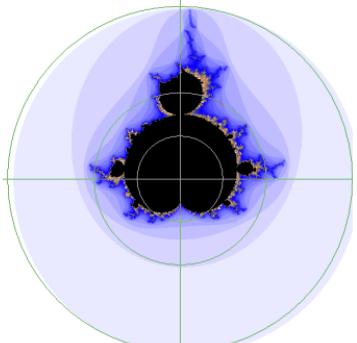
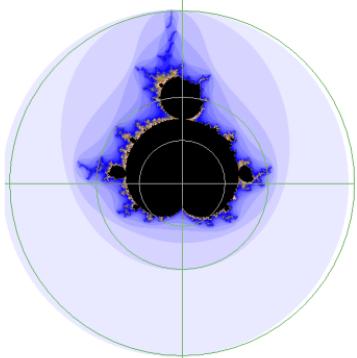
Nun zum Vergleich:

Links die Vergrößerung aus dem Zentrum der Juliamenge links oben.

Rechts nochmal eine Vergrößerung des rechten oberen Bildes.

Die Formen sind gleich. Nur der Darstellungswinkel und die Farben, die von der Iterationsanzahl abhängen, und die Drehrichtung der Spiralen sind unterschiedlich.

Die Anfangsbedingungen

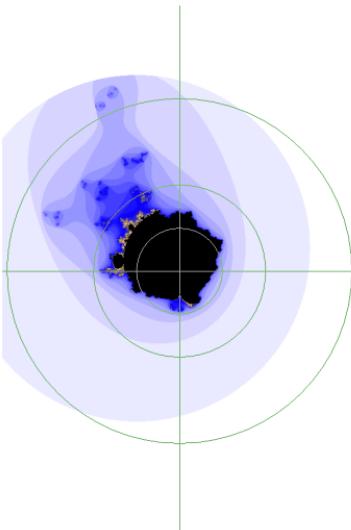


Wie wir bereits wissen, muß jede Iteration der M mit einem $Z= 0,0i/0,0r$ starten. Wenn wir nun aus purem Übermut einen anderen Wert zulassen, entstehen diese Bilder auf dieser Seite.

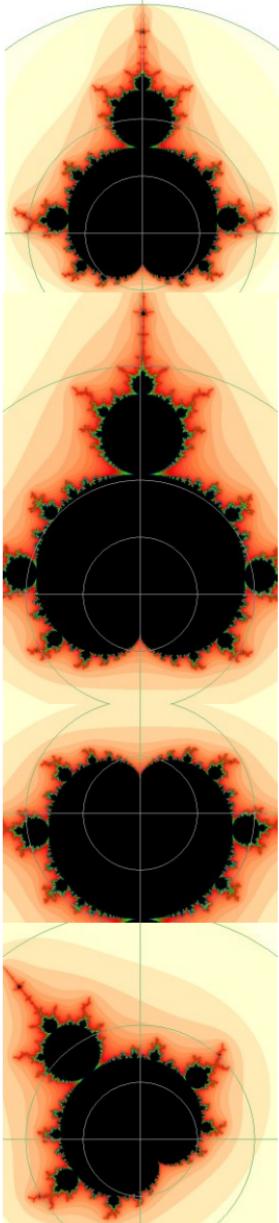
Je weiter sich der Startpunkt vom Nullpunkt des Koordinatensystems entfernt, umso mehr Deformationen muß das arme Apfelmännchen hinnehmen. Ist dann der Startpunkt über $R=2,0$ liegen alle Reste komplett ausserhalb dieses Kreises - bis sie sich schließlich komplett aulösen.

Je nachdem wo sich der Startpunkt befindet, zeigen sich jeweils andere Deformationen.

ps.: Einen Einfluss auf die Landkarte der Juliamengen hat das aber nicht.



Die Bedeutung des Imaginärpunktes

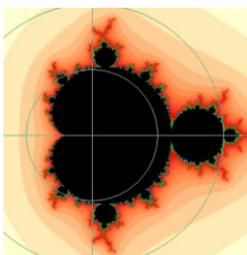


Der Imaginärpunkt liegt bei der mathematischen Rechenmethode implizit fest. Wir können ihn nicht ändern, ohne die Formel zu verändern.

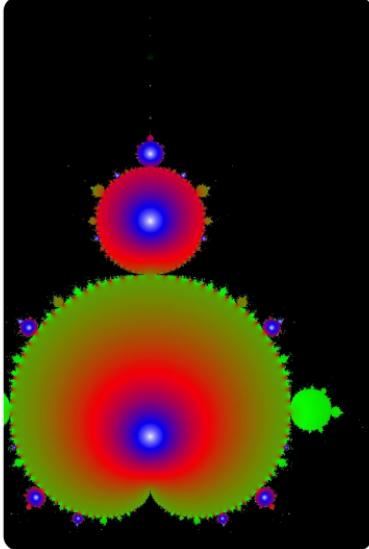
Die grafische Rechenmethode jedoch geht vom Nullpunkt des Koordinatensystems und der Lage des Imaginärpunktes aus. Nur aus Spass könnten wir beide Punkte woanders hinlegen (natürlich nicht den Nullpunkt, sondern den Mittelpunkt von M). Aber es genügt, wenn wir das mit dem Imaginärpunkt tun. Er ist von den Vorfahren unserer Mathematiker auf den Ort 0,0-imaginär und 1,0-real festgelegt worden. Damit ist auch bei der M alles in Ordnung. Wenn wir nun aber den Realanteil größer machen, dann wird das Apfelmännchen auch größer. Verschiebe ich den Punkt nach minus-real, dann steht das Apfelmännchen Kopf. Somit, Sie ahnen es schon, ich kann das Apfelmännchen auch drehen, wenn ich den Imaginärpunkt nach plus- oder minus-imaginär verlege.

Einen mathematischen Sinn hat das ganze aber nicht. Es sei denn, man kann daraus schlussfolgern, dass in der M doch nicht soviel Chaos herrscht, wie oftmals betont wird. Sagt denn nicht jeder, die kleinste Änderung kann das Chaos hervorrufen? Sie können ruhig mal testen - das Chaos ist nicht in der Lage irgendetwas zu verändern, obwohl hier in ganz grober Weise mit ganz anderen Zahlenfolgen gerechnet wurde. Nicht nur das, es wird mit einer ganz anderen Formel gerechnet. Da dieser Rechengang auch viel länger ist, sollten sich die nun häufigeren Rundungsfehler auch noch gegenseitig potenzieren.

Das ist ein wichtiger Hinweis auf die Stabilität der M .



Betrag von \mathbb{Z} des Apfelmännchens



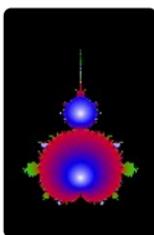
Das Ergebnis $|Z|$ ist der Abstand des Iterationsortes vom Nullpunkt des Koordinatensystems.

Diese Auswertung ist ansehnenswert, aber von der Logik her eher uninteressant. In der \mathbb{M} konvergieren alle Iterationsverläufe auf einen oder mehrere Orte hin. Im Hauptkörper ist es nur ein Ort, deshalb ändert sich die Anzeige kaum, wenn man die Iterationstiefe erhöht. Nur im inneren Randbereich dauert es um so länger, je weiter aussen sich der Bildpunkt befindet, bis die Anzeige stabil wird.

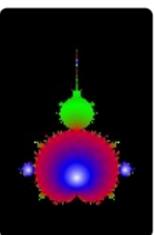
Der Kopf konvergiert auf zwei Orte hin. Deshalb hat der Kopf bei jeder 2. Iteration einen anderen Wert. Der rechte Arm hat eine 3er Periode, hat also nach jeder dritten Iteration wieder den gleichen Wert.

Kopf und Arme werden als Knospen bezeichnet. Alle weiteren Knospen haben jeweils verschiedene Periodenzahlen. Diese Periodenzahlen kann man sich in der Orbitanalyse ansehen.

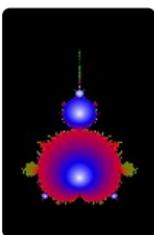
Nun haben wir also eine weitere Möglichkeit die Periodizität einer Knospe zu ermitteln. Wir brauchen also nur eine Reihe von Bildern zu machen, die sich nur um je eine Iteration mehr unterscheiden. In dem Augenblick, an dem sich das Aussehen der Knospe zu wiederholen beginnt, gibt die Differenz der Iterationenanzahlen die Periodizität an. Für 2er bis 10er Knospen ist das Verfahren gut anwendbar, irgendwann weit vor einer 12843er Knospe wird es allerdings etwas mühsam.



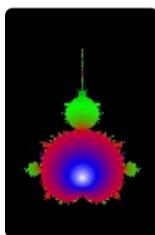
50 Iterationen



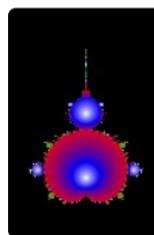
51 Iterationen



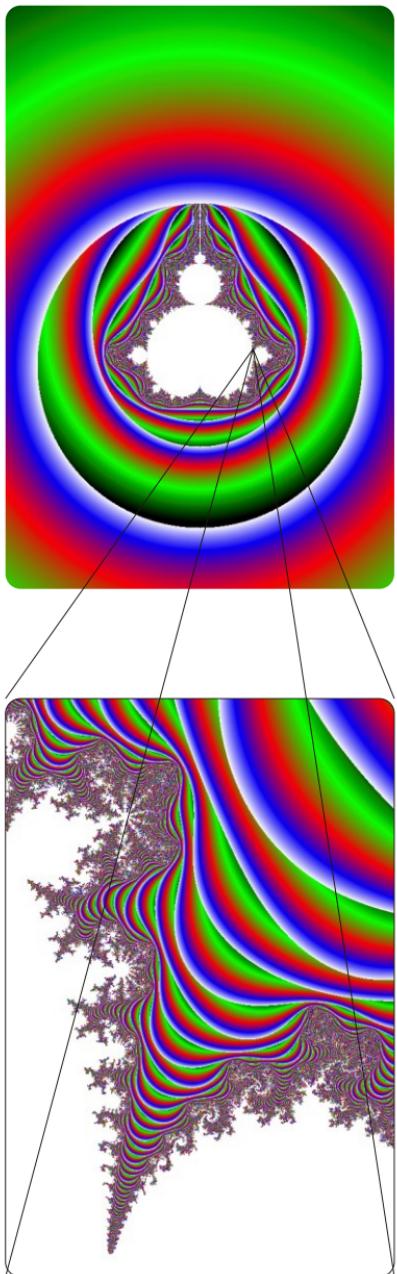
52 Iterationen



53 Iterationen



54 Iterationen



Man kann natürlich auch den Außenbereicht mit dieser Methode anzeigen. In diesem Fall stammt das Ergebnis nicht von einer bestimmten Iterationsnummer, sondern von der Iteration, die als erste den Grenzwert von $|Z|=2.0$ überschritten hat und somit den Iterationsvorgang beendet, also das letzte Ergebnis im gesamten Iterationsverlauf. In den äusseren großen Kreisen ist das schon die erste Iteration, deshalb ist der innere Radius des großen weißen Kreises 2,0.

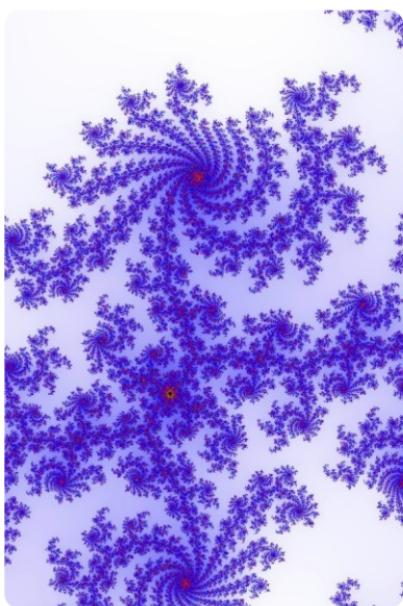
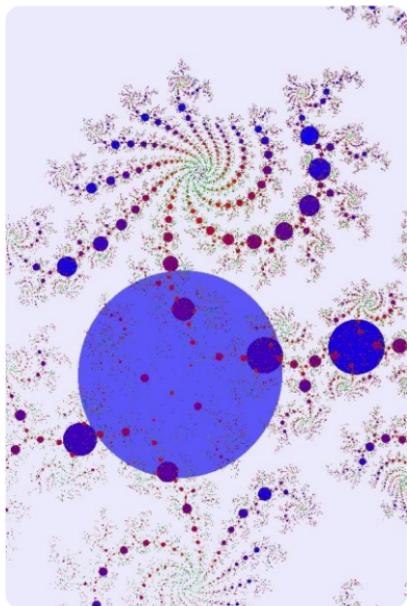
Die M ist nicht im angezeigten Messbereich erfasst und deshalb weiß. Man könnte mit anderen Betrachtungsparametern auch die Darstellung innerhalb aktivieren.

Dieses Bild ist ein Zoom aus dem Randbereich, wobei die eigentliche M wiederum weiß ist.

Die Bubblebrotmethode

Die bisher besprochenen Messungen waren in der Lage zu jeder gewünschten Iteration ein Ergebnis zu liefern, das ist hier nicht möglich. Diese Messung sucht nach nur einem einzigen Ergebnis im gesamten Iterationsverlauf, der natürlich lange genug sein muß, um das richtige Ergebnis zu beinhalten. Die Folge wäre eine Fehlinterpretation der Messergebnisse. In der Orbitanalyse haben wir gesehen, wie sich die Orte eines einzelnen Iterationsverlaufes in der komplexen Ebene anordnen können. Die Bubblebrot-Methode sucht nun nach dem Punkt, der dem Nullpunkt des Koordinatensystems am nächsten liegt. Sie sucht also nach derjenigen Iteration, die das Minimum- $|Z|$ liefert. Die Nummer dieser Iteration wird dann wieder farbcodiert zur Anzeige gebracht. Das rechte Bild ist die klassische Darstellung der Iterationsanzahlen eines Ausschnittes von M in der Apfelmännchen-Darstellung. Im Vergleich mit dem linken Bild erkennt man den selben Bildausschnitt, nur die Strukturen darüber haben sich geändert. In diesem Bild erschließt sich die Bezeichnung Bubblebrot, da die Bilder immer aus Blasen aufgebaut sind..

In jeder der Kreisflächen befindet sich ein Satellit in einer der Kreisfläche entsprechenden Größe. Aber das ist nur eine Zusatzinformation, die Bedeutung dieser Methode ist viel weitreichender.....

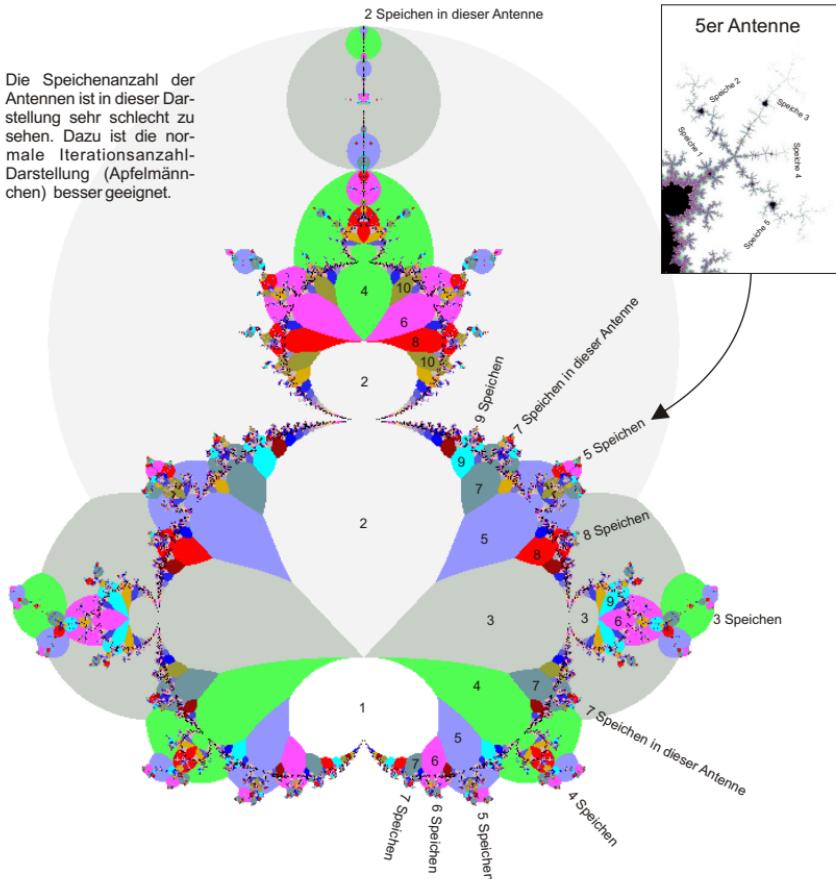


Iterationsnummer der Bubbelbrotmethode

Hier die gesamte \mathbb{M} in der Bubblebrot Darstellung. Diese Darstellung wurde bereits in [TBoF] gezeigt, aber leider nur mit einer dürftigen drei Zeilen kurzen Erklärung und dem Hinweis auf zukünftigen Forschungsbedarf.

Zu beobachten ist eine Korrelation zwischen den Iterationsnummern des Minimums von $|Z|$ im inneren Hauptzykloid mit der Anzahl der Speichen der Antennen der zugehörigen Knospen. Wobei die Anzahl immer $\text{MinIterNummer}(\mathbb{Z})$ ist. Wieso dieser Zusammenhang besteht wird noch zu ergründen sein. Allerdings trifft diese Regel nur auf Knospen zu, die direkt aus den Hauptzycloid hervorgehen. Sub-Knospen tragen immer die selbe Speichenanzahl wie ihre Hauptknospe.

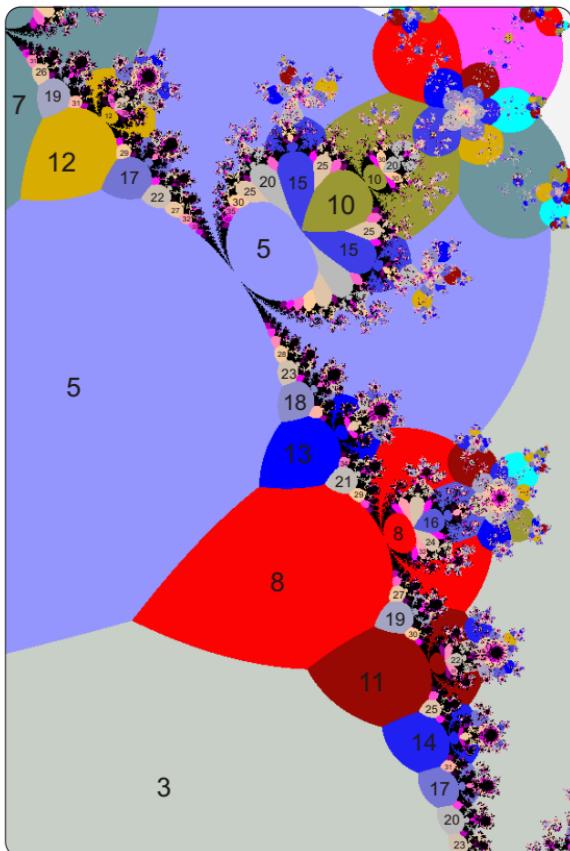
Der Wert in einer Blase korreliert ebenso mit der Periodenanzahl in der benachbarten Knospe.



Hier ein Ausschnitt des rechten, über der Mitte des Hauptzykloides liegenden Bereiches.

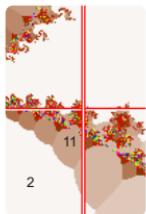
Hier, wie überall, reihen sich die "Bubbles" wie Seifenblasen aneinander. Interessant sind die Werte jeder Blase bei denen die Iterationsnummer das Minimum von \mathbb{Z} hat: Diese Iterationsnummern sind hier zusätzlich zur exakten Farbskala manuell eingetragen.

Zu beobachten ist, dass sich der Wert einer Blase aus den beiden inneren anliegenden Werten addiert. Deshalb erhöhen sich alle Nachbarblasen der 3er Blase mit diesem Intervall. Also 8, 11, 14, 17, 20 usw. Die Nachbarn der 5er Blase sind 8, 13, 18, usw. In der nächsten Ebene bildet zB. die 11er und 14er Blase die 25er aus. Da am Rand zwischen 2 benachbarten Knospen immer noch eine kleinere zu finden ist, geht diese Zählweise immer weiter - vermutlich bis unendlich. Diese Zählweise ist die gleiche wie in einer Fibonacci-Folge [wpff].

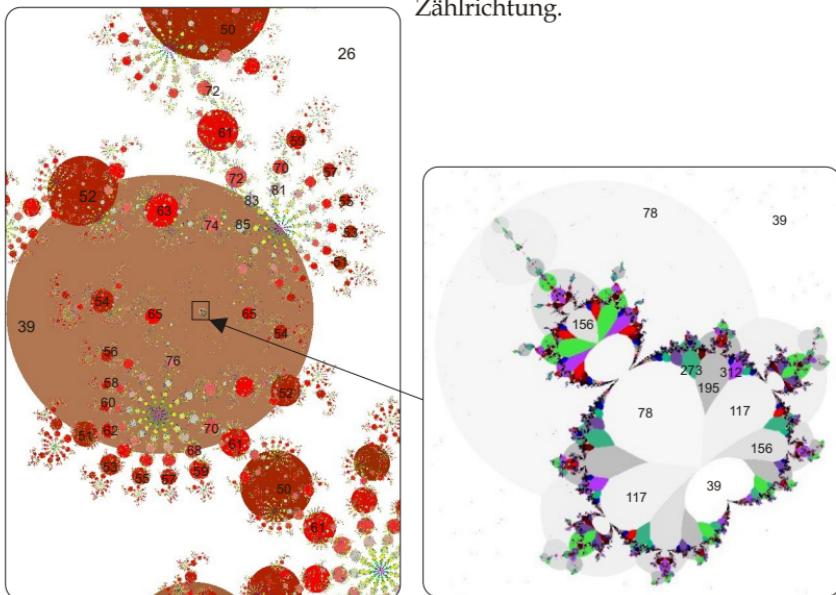


Dieses Verhalten ist auch bei den vollständigen Blasen aus dem vorherigem Bild zu sehen.

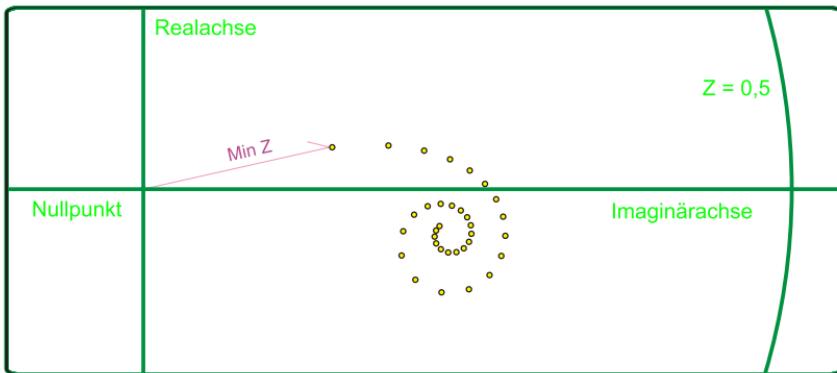
Eine Ausnahme bilden Blasen, die senkrecht aufeinander stehen. Hier verdoppelt sich ihr Wert jeweils. In dem weiteren Verlauf des Buches wird immer wieder auf die Bedeutung dieser Werte hingewiesen werden. Diese Auswertungsart nimmt deswegen eine Schlüsselrolle in der Interpretation des Tanzes der Iterationen ein.



Jetzt noch eine Betrachtung des Außenbereiches. Das zweite Bild zeigt einen Ausschnitt der Antenne einer 11er Knospe, die aus der 2er hervorgeht. Was sofort auffällt, ist die durchgehende Abstufung der Blasenwerte um 2 oder 11. Wobei sich Blasen, die dem Zentrum einer Spirale näher sind, sich jeweils um die 11 erhöhen. Blasen, die sich um das Zentrum herum anordnen erhöhen oder verringern sich jeweils um 2, je nach Dreh- oder Zählrichtung.



In der braunen, größten Blase befindet sich ein Satellit. Im rechten Bild wird er gezoomt gezeigt. Die braune Blase hat den Wert 39. Die Umgebung des Satelliten natürlich auch, nur zur besseren Darstellung wurden andere Farben gewählt. Wenn wir mit den Hauptkardiodit vergleichen, erkennen wir exakt die selbe Aufteilung der Blasengrenzen. Nur ihre Werte haben sich verändert. Die Basis bei der Gesamt-M ist die 1, hier ist sie die 39. Wenn wir hier alle Blasenwerte durch 39 dividieren, bekommen wir exakt die selben Werte, wie in der Gesamt-M. Würden wir hier nochmals einen Zoom auf die 429er Antenne machen, es wäre das gleiche wie oben-links. Nur dass sich die Blasenwerte jeweils um 429 oder 78 unterscheiden würden. Wir könnten auch einen Satelliten aus der 76er Blase zoomen. Die Basis für diesen wäre dann eben die 76. Wenn sich in jeder Blase ein Satellit befindet, dann sind sie schon in diesem Bild nicht mehrzählbar.



Beispiel für die Messung von Min- Z :

Bei diesem einfachen Orbit liegt die erste Iteration dem Nullpunkt des imaginären Koordinatensystems am nächsten. Iterationsnummer 1 hat also das Minimum Z .

Natürlich sind die Verhältnisse nicht immer so klar und eindeutig. Besonders zu den höheren Iterationsanzahlen hin kann es schon sein, dass sich das Minimum von Z nur durch einen Betrag von 10E-50 oder weniger von anderen Ergebnissen unterscheidet.

Zur richtigen Belichtung:

Auch wenn auf den letzten Seiten nur von Ergebnissen von 1 bis ca.100 gesprochen wurde, in den äußersten Randbereichen sind Ergebnisse von weit über 100 000 zu erwarten. Das Iterationslimit muß dann also deutlich größer gewählt werden, ansonsten erhält man einen Wert, der sich aus der nächst kürzeren Grundperiode herleitet.

Wenn man versucht, die Bubblebrotbilder genauer zu betrachten, wird man zunächst vermuten, dass die Orbits innerhalb der Blase die gleiche Periodizität haben. Also jede Blase eine andere. Dem ist aber nicht so. Wenn man eine Grenzlinie zwischen 2 Blasen heranzoomt, wird man selbst beim größten Zoomverhältnis immernoch eine gestochen scharfe Grenzlinie sehen. Von dem Sprung von einer zur nächsten Periodizität ist bei der Orbitanalyse von der einen zur anderen Seite nichts zu erkennen. Auch wenn man in einem sehr großen Zoom die Orbits der einen und anderen Seite vergleicht, wird man keine in's Auge springenden Unterschiede erkennen. Aber wieso ändert sich dann das Messergebnis? Wo liegt der Unterschied?

Durch statische Messungen wird man nicht auf die Lösung kommen. Die Erkenntnis kommt aber leicht durch ein kleines Filmchen. Wenn man entlang einer Linie quer zur Blasengrenze in kleinen Abständen je ein Bild des jeweiligen Orbits macht, kann man daraus bei genügend Bildern ein kleines Filmchen machen. Spielt man dieses ab, wird man eine Drehbewegung bemerken. Diese Drehbewegung ist am besten mit einer Uhrfeder der vordigitalen Zeitepoche oder mit den Federn, mit denen wir vor 40 Jahren noch unserere Aufziehautos fahren ließen, zu vergleichen. Bewegen wir unser Filmchen von der niederwertigen Blase zur höherwertigen hinüber, wird sich der Orbit aufdrehen, wie die sich entspannende Feder. Alle Orbitpunkte wandern langsam in einer drehenden Bewegung aus dem Mittelpunkt heraus. Eine Uhrfeder hat immer nur eine Spriallage. In der M fängt es auch mit einer an, dann jedoch hängt die Anzahl der Spirallagen vom Wert der niederwertigsten der Nachbar-Blasen ab. Alle Orbits, deren Blasenwerte an die 2er Blase grenzen, also 3,5,7,9 usw. haben auch eine 2-lagige Spirale. Die ersten zwei Iterationsergebnisse sind fast ortsstabil, während sich alle folgenden herausdrehen. Wie bei der Uhrfeder, wo das äußere Ende am Gehäuse fixiert ist und das innere Ende sich um die Achse dreht. In diesem Fall jedoch mit 2 äußerem und 2 inneren Enden. Diesen Sachverhalt kann man ebenfalls nicht mit statischen Analysen erkennen. Hier ist ein Filmchen nützlich das quer von Blase 3,5,7,9 bis mindestens 31 abläuft, mit wenigstens 20 Einzelbildern pro Blase. Beim Überschreiten einer Blasengrenze wird man nichts anderes sehen, als die kontinuierliche Drehbewegung wie überall auf dieser Reise. Am interessantesten für unsere Blasenanalyse ist die Drehbewegung der zweiten Spriallage. Sie dreht sich unter den beiden äußeren Fixpunkten kontinuierlich heraus. Das führt dazu, dass immer mehr Iterationsergebnisse sich auf dem äußersten Spiralring ansammeln. Selbst wenn sich in einer Blasenmitte eine Sternformation ergibt, bedeutet das nicht, dass dieser Orbit eine Periodizität mit der Anzahl der Arme hat. Die Anzahl der Arme stimmt aber mit dem Wert der jeweiligen Blase überein. Das kann leicht zu einer Fehlinterpretation der Periodizität führen. Die Periodizität ist immer gleich der Anzahl der äußeren

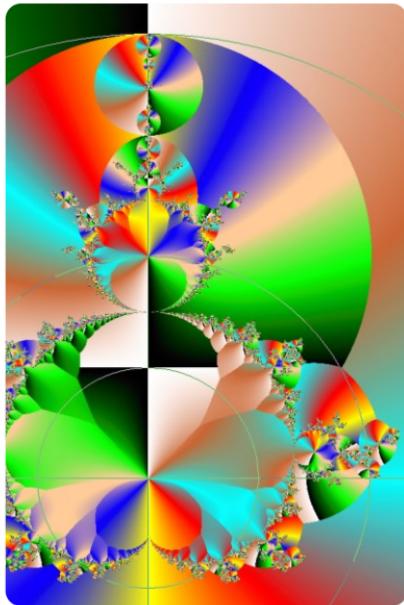
Fixpunkte, in unserem Beispiel also immer noch nur 2. Wenn die Anzahl der Iterationsergebnisse auf dem äußersten Spiralring immer größer wird, kann man sehen wie sich aus einem runden Orbit in Blase 3 oder 5 langsam zwei Seiten abflachen, wenn die Blasennummer immer höher wird. Der runde Orbit wird immer mehr zum Oval, mit 2 fast geraden Seiten. Dies ist ebenfalls eine Auswirkung der 2er Periodizität. Orbitfilmchen durch eine 3er Reihe werden sich zu Dreiecken entwickeln und so fort.

Nun aber wieder zu unserer ursprünglichen Frage der scharfen Blasengrenzen zurück. Wir haben nirgends in der Veränderung der benachbarten Orbits ein sprunghaftes Verhalten erkennen können. Woher kommen also diese Grenzlinien? Die Uhrfeder war schon ein gutes Beispiel. Jetzt brauchen wir noch ein weiteres. Jeder, der als Kind mit dem Fahrrad fuhr, wird es wohl mal ausprobiert haben. Wenn man einen Pappteller am Fahrgestell festmachte, so dass der Teller die Speichen berührte, ergab sich beim Fahren ein wunderbar ratschendes Geräusch. Beim Drehen des Rades bog eine Speiche den Teller auf, der, wenn sich die Speiche entfernte zurückfederte und mit Krachen auf die nachfolgende Speiche traf, die ihn wiederum aufzog usw. Nicht anders als der Pappteller verhält sich die Messung auf Minimum-Z eines Orbits. Ein Iterationsergebnis des Orbits wird immer den kleinsten Abstand zum Nullpunkt des Koordinatensystems haben. Wenn sich nun dieses Ergebnis weiter aus der Spirale herausdreht, wird der Abstand langsam wieder größer, so dass das Minimum-Z auf das folgende Iterationsergebnis überspringt, das sich ja nun langsam nähert. Das folgende Iterationsergebnis ist aber nicht zwingend $N+1$. Wenn wir bei der 2er Periodizität bleiben, hat sich auch gegenüber beim 2. äußeren Fixpunkt im zweiten Spiralarm ein weiteres Iterationsergebnis herausgedreht. Das Minimum-Z springt also auf $N+2$.

Dieses Prinzip bleibt in allen Blasenfolgen das selbe. Die Blase mit der kleinsten Periodizität X wird von Nachbarblasen umgeben mit den Werten N^X . Der Wert einer Blase kann exakt berechnet werden aus der Summe der beiden flächenmäßig größten Nachbarblasen, aus denen sie hervorgeht.

Jede einzelne der Blasen (außer der Blase $X=1$) erstreckt sich bis zum Rand des Hauptkardiodit wo sie in eine ihrer Größe entsprechende Knospe übergeht. Hier löst sich der Achsmittelpunkt der Orbits auf und die äußeren ursprünglichen Fixpunkte werden zu Subspiralen, die sich einzeln genauso verhalten wie oben beschrieben.

Argument für Minimum-Z



Gerade haben Sie gelesen, wie das Min-Z an der Blasengrenze von Ergebnis zu Ergebnis springt. Wenn wir nun das Argument von Min-Z (Winkel b) ermitteln, ergibt sich das linke Bild. Zunächst ist die Verwandtschaft mit der Bubblebrotmethode leicht zu erkennen. Aus den Farben kann man den Winkel ablesen:

0° = Weiß

360° = Schwarz

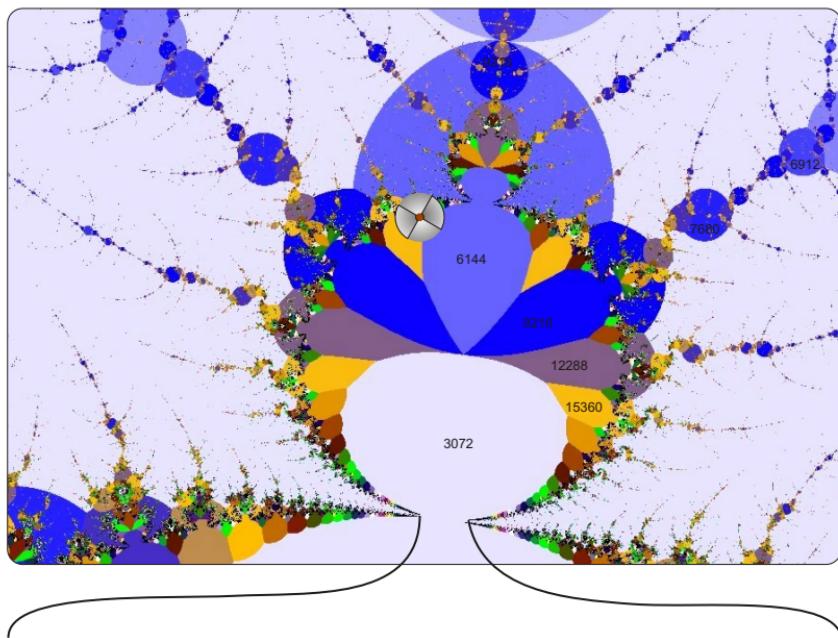
180° = Gelb

Auch wenn sich ..???????

Test des Blasenwertes mit dem Phasenraum

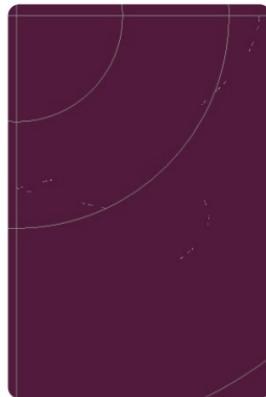
Nun, mit dem Computer ist es leicht, die Iterationsnummer von Minimum-Z zu ermitteln. Aber stimmt das wirklich mit der Periodizität des gesamten Iterationsverlaufes überein? Dazu kann uns ein Test im Phasenraum Gewissheit verschaffen. Wenn wir vermuten, einen Iterationsverlauf der 3er Periode zu haben, können wir im Phasenraum einen Punkt zeichnen mit einem X-Wert bei $i=n$, und einen Y-Wert bei $i=n+3$. Liegen wir richtig, dann liegen alle Iterationsergebnisse auf einer 45 Grad-Linie. Wenn nicht, sind die Ergebnisse mehr oder weniger verstreuht.

Folgendes Beispiel beziehen sich auf eine Blase mit Min-Z von 21504 (siehe Markierung), das ist eine Blase in der Knospe 6144. also $3 \cdot 2^{11}$. Das ist schon im extremen Randbereich, also eine Knospe auf der Knospe auf.....der 3er Knospe, wo 150000 Iterationen noch nicht ausreichen, die Grafik komplett darzustellen. Auch gilt noch immer die Fabonacci-Folge.



Ein perfekt ausgerechnetes Bild hätte diese Lücke geschlossen dargestellt. Dazu wären aber geschätzter Weise 10mal mehr Iterationen nötig gewesen. So ist es wohl ein guter Kompromiss. Dieses Bild beweist aber auch die Tatsache, dass bei zu geringer Belichtung nur die Grundperiode (Blau) gefunden wird.

Die ersten drei Bilder sind mit Phase 1,2 und 3 gerechnet. Man kann schon eine kleine Tendenz zum 45° Winkel erkennen. Unbestritten muss es in Bild 3 jedoch noch Oberwellen geben.



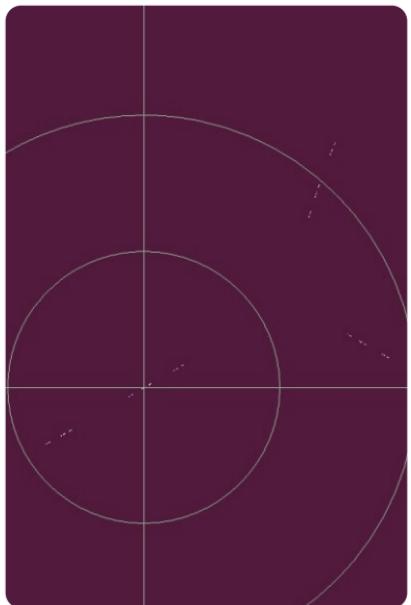
Die nächsten drei Bilder sind mit Phase 4,5 und 6 gerechnet. Deutlich ist die Verbesserung der 6er gegenüber der 3er. Weitere drei Bilder unten sind mit 12, 24 und 96 gerechnet. Es unbestritten, dass unser Ergebnis auf der Linie 3×2 hoch N liegen muss. Man kann das Ergebnis noch bis auf 21504 verfeinern, bis alle Punkte exakt auf einer Linie liegen. Damit ist die Bubblebrot-Messung bewiesen.





Als Kontrolle noch ein Bild mit Phase 103.

Im letzten Beispiel wurde die 11. Knospe auf der 3er Kospe berechnet. Dieses Bild wurde mit 150000 Iterationen gerechnet. Viele Zeitgenossen würden behaupten, dass das kein Computer schafft und dass das Chaos in diesem Bereich keine zuverlässigen Ergebnisse mehr zulässt. Die Ergebnisse entsprechen jedoch exakt den vorausberechneten und auch erwarteten Werten. Sie decken sich auch mit weiteren Messmethoden. Auch die visuelle Auswertung weist auf keine Rechenfehler hin. Es kann also in diesen Iterationsverläufen keinerlei chaotisches Verhalten festgestellt werden.



Allerdings ergibt sich in diesem Beispiel ein Problem mit unserer Erklärung zur Funktion der Bubbelbrot Methode.

Die visuelle Erklärung der sich herausdrehenden Spiralen scheint mir zunächst nur logisch, wenn der Koordinatenmittelpunkt ausserhalb des Orbit liegt. Nun ist in diesem Beispiel aber der Orbit weit über den Mittelpunkt in den gegenüberliegenden Quadranten hinausgewachsen.

Es muss eine Erklärung geben, wieso die Messergebnisse immernoch richtig sind. Dass sie richtig sind, könnte die Phasenraumanalyse auf der letzten Seite zeigen. Würde es der Abbildungsmaßstab es zulassen, würde die Iteration mit Min-Z tatsächlich die

erste neben den Koordinatennullpunkt sein. Aber das ist kein Beweis. Jedes Iterationsergebnis könnte Min-Z haben. Es ist aber das mit dem richtigen und auch dem logisch erwartetem Zahlenwert.

Es wird uns nichts anderes übrig bleiben, wiederum eine animierte Reise durch alle 11 Knospen zu machen, um die Entwicklung zu beobachten und zu erkennen.

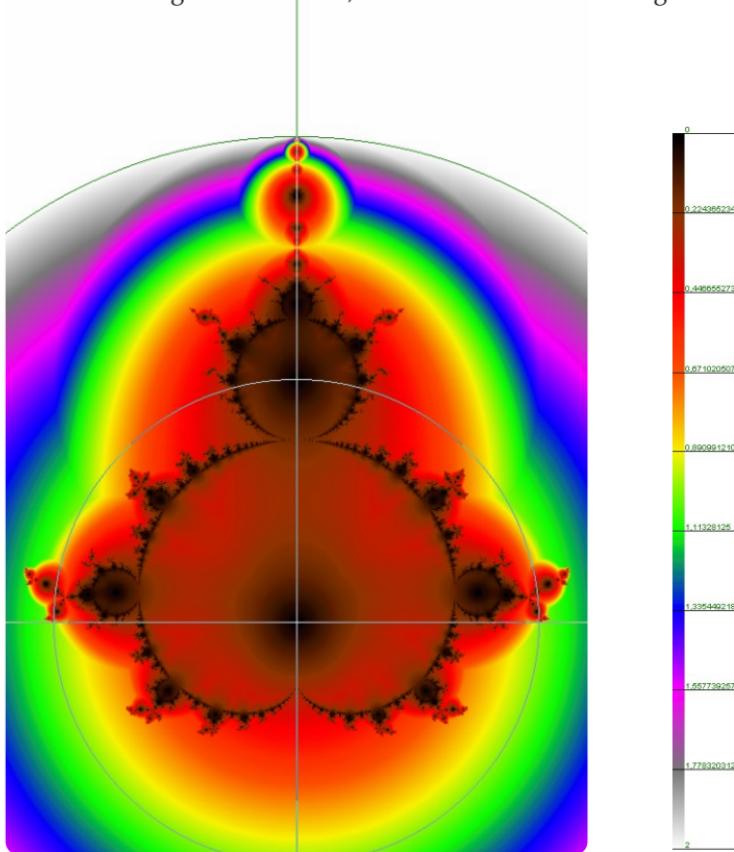
An diesem Orbit kann noch etwas anderes gezeigt werden. Im Film "Eine Reise durch die M" wurde gezeigt, wie sich die Orbita von Blase zu Blase verändern. Hier erkennen wir jedoch nur einen dreistrahligen Stern, deren Iterationsergebnisse scheinbar auf den 3 Linien liegen. Es ist wieder der unermessliche Zahlenraum, der nur den groben Überblick zulässt. Wenn wir auf verschiedene Punkt-Anhäufungen heranzoomen verlieren wir leicht den globalen Überblick. Wenn wir aber an die kleinsten Punkthaufen herangezoomt sind, erkennen wir wieder die gleichen Orbitformen, wie sie im Hauptkaridodit auftreten. Also eine klare Art der Selbstähnlichkeit.

Abstand zum Nullpunkt von Bubbelbrot

Diese Darstellung zeigt die Werte für Betrag Min-Z für alle Orte in der M. Die schwarzen Werte haben einen Z-Betrag von <0,1 und sollten in der vorherigen Darstellung ganz nah am Nullpunkt auftreten.

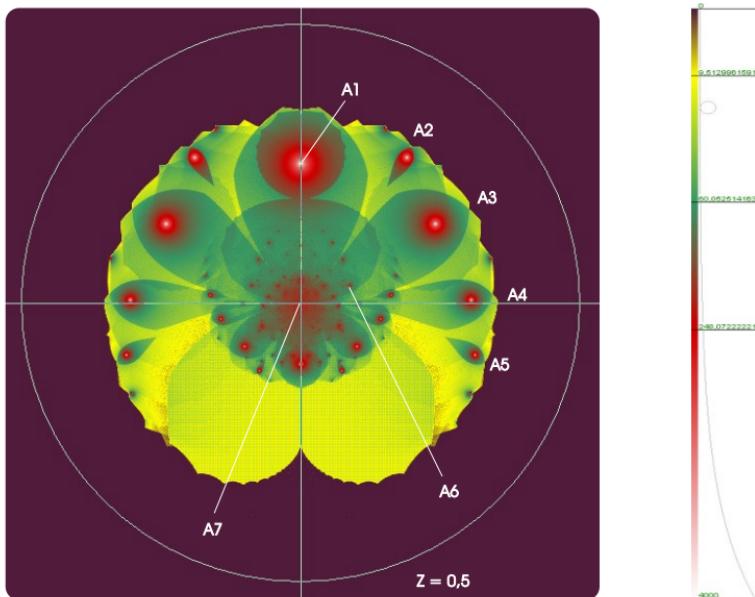
In dieser Darstellung sind die Werte für Minimum-Z an dem Ort angezeigt, an dem der Orbit beginnt und nicht an dem Ort, wo das Minimum erreicht ist. Mit diesem Bild wird ersichtlich welcher Punkt der M mit seinem Orbit dem Nullpunkt des Koordinatensystems am nächsten kommt. Wenn Minimum-Z zum Rand hin deutlich gegen Null geht ist, es nur logisch, wenn dort auch die Rate der Konvergierung gegen Null geht.

Zum Beweis: Die grünen Bereiche liegen bei $R=1,0$, womit sich die untere Hälfte des Bildes mit dem Koodinatensystem deckt. Minimum-Z fällt hier mit dem Entstehungsort zusammen, da diese Punkte sofort divergiert.



Ergebnisorte der Bubelbrotmethode

Wir wissen, die Bubelbrotmethode liefert für jede Iterationsfolge die Nummer der Iteration, die das kleinste R hat, sowie R selbst und die Koordinaten dieses Iterationsergebnisses. Wenn wir nun, wie bei der Orbitanalyse, diesen Ort auf dem Bildschirm markieren und das aber für alle Ergebnisorte, für alle Iterationsverläufe in der M tun, entsteht das folgende Bild.

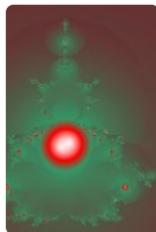


Alle Ergebnisorte für Minimum- R befinden sich innerhalb von 0,35. Wie man sieht, gibt es einige Attraktoren, die von besonders vielen Ergebnissen getroffen werden. Die Zentren werden mehr als 10000 mal getroffen, was trotz des logarythmischen Messbereiches nicht mehr sichtbar gemacht werden kann. Die dunkelroten Bereiche haben immerhin noch etwa 250 Treffer pro Pixel. Das Zentrum dieser Auswertung (A7) erscheint zunächst harmlos. Leider tritt das eine Pixel im Nullpunkt nicht in Erscheinung. Denn, wie wir schon bei der Z -Auswertung der Apfelmännchenmethode gesehen haben, besitzt jede Knospe im Zentrum einen Attraktor mit dem Wert 0,0.

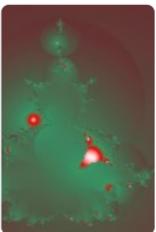
Jetzt wäre natürlich eine interessante Frage: Welche Iterationsfolgen treffen auf welchen Attraktor? Diese Antwort kann mit der nächsten Auswertung gefunden werden.

Abstand zum Ergebnisort bei Bubbelbrot

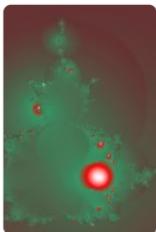
In diesem Messprogramm kann ein Testpunkt mit der Maus auf dem Bildschirm mit dem Ergebnis der letzten Seite ausgewählt werden. Wird die Menge anschließend berechnet und neu gezeichnet, kann man folgendes herauslesen: Für jeden einzelnen Bildpunkt wird wieder die Iteration mit Minimum-Z gesucht. Jetzt berechnet der Algorythmus die Distanz vom gewählten Testpunkt bis zum Ergebnisort für Min-Z. Dieser Abstand wird farbcodiert angezeigt. In den Beispielen unten sind kleine Abstände weiss. Größere Abstände (0,035) sind schon rot, ab 0,8 wird es grün.



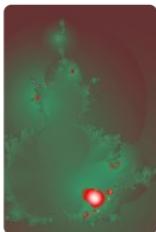
Testpunkt A1



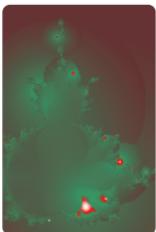
Testpunkt A2



Testpunkt A3

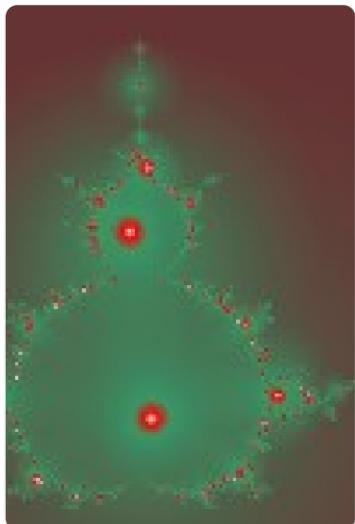


Testpunkt A4



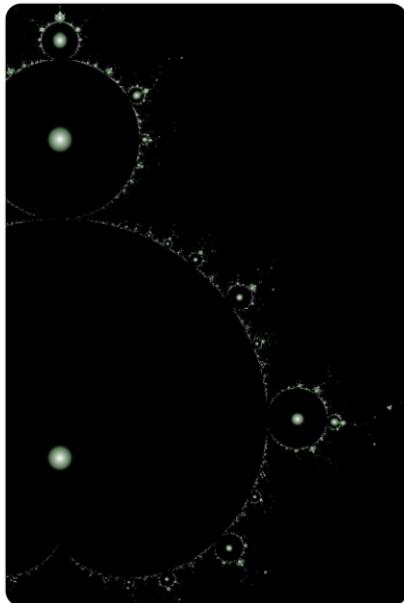
Testpunkt A5

Testpunkt A6



Das Ergebnis ist leider nicht eindeutig, zumindest sind die Schwerpunkte oft erkennbar. Vielleicht liegt auch noch ein tieferer Sinn darin verborgen.

Testpunkt A6 liegt schon etwas näher am Zentrum, deshalb werden immer mehr Knospen einen Anteil an diesem Attraktor haben. Das gipfelt im Testpunkt A7, dem exakten Zentrum, wo alle Knospen, auch die der Satelliten, ihr Min-Z bei 0,0 haben.



Testpunkt A7:

Hier die Auswertung zum Attraktor A7 mit den Koordinaten 0,0. Jede Knospe vom Hauptkardiod bis hin zu den Knospen der Satelliten hat im Zentrum ein Iterationszwischenergebnis mit $Z=0$. Im Gegensatz zu den Bildern A1 bis A6 sieht man nun die Gesetzmäßigkeit viel besser. Leider führen fünf Effekte dazu, dass dieses Bild nicht perfekt aussieht.

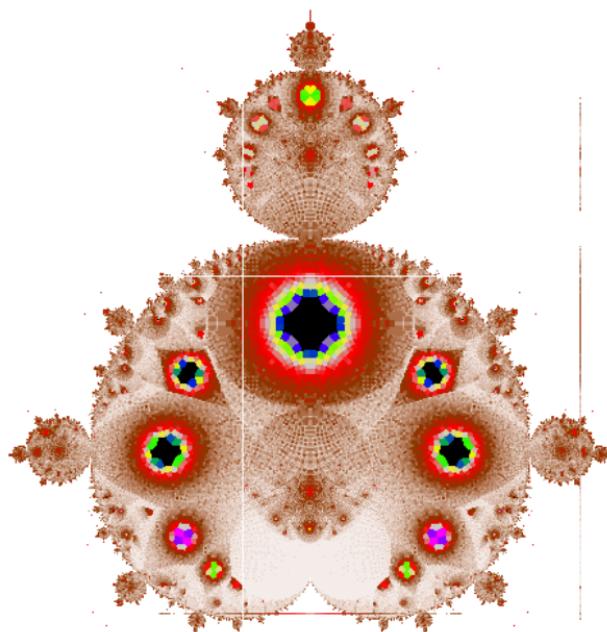
Aber bei aller Unvollkommenheit man erkennt die Existenz der Attraktoren in den Knospen.

- Das Bild ist mit 3000 Iter zu wenig belichtet.
- Die kleineren Knospen werden nicht mit genügend Auflösung gezeigt.
- Die Attraktoren sind kleiner als das Pixelraster und werden deshalb nicht getroffen und nicht angezeigt.
- Abstände zum 0-Punkt werden bereits mit einer Toleranz von $\pm 10E-5$ angezeigt, um überhaupt etwas sichtbar zu machen.
- Nur durch extreme Vergrößerungen einzelner Knospen kann die Auswertung exakt ausgemessen werden. Der Punkt liegt jeweils dort, wo die 2x und die beiden 3x Blasen sich mit der 1x Blase treffen.

Ergebnisort-Ursprung bei Bubbelbrot

Die bisherige Messart der Abstandsmessung zum Testpunkt ist nicht sonderlich effektiv, denn sie bietet keinen Gesamtüberblick. Deshalb wird hier die Messart der Ermittlung des Ursprungsortes C des Ergebnisortes vorgestellt. Dies ist zunächst etwas unverständlich und muß in zwei Schritten erklärt werden. Die Messung selbst erfolgt auch in zwei Schritten, einer sogenannten 2-Pass Berechnung. Der erste Schritt ist die bereits beschriebene Auswertung des Ergebnisortes der Bubblebrotmethode. Im 2. Pass wird das gesamte Bild nochmals durchgerechnet. Wenn der Ergebnisort jetzt wieder erreicht ist, dann ist dort das Gesamtergebnis aus dem 1. Pass zu finden. Dieser Wert für jeden Iterationsverlauf wird dann in dieser Auswertung am Iterationsstartpunkt C eingetragen.

Diese Auswertung zeigt also für jeden Punkt C an, mit vieviel anderen Iterationsverläufen er zusammen auf einen Min-Z-Ergebnisort trifft. Obwohl die Ergebnisort-Auswertung jedoch das Vorhandensein verschiedener Attraktoren zeigt, können diese hier leider nicht mehr auseinandergehalten werden.



Begründung der Funktion Bubblebrot

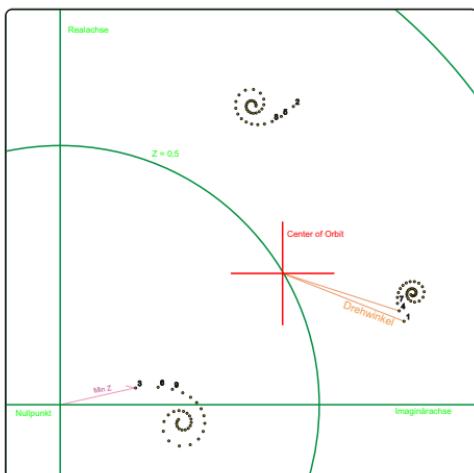
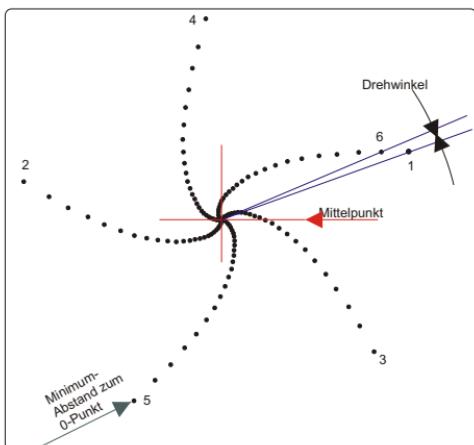
Wir haben gesehen und nachgewiesen, dass im Zentrum jeder Knospe ein attraktiver Zyklus vorhanden ist, der je nach Periode jedes \mathbb{N} -te Mal ein Ergebnis von $0,0i$ und $0,0r$ hat. Dieses Zentrum ist sehr klein und wird als Attraktor bezeichnet.

Allgemein gesagt, gibt es eine unendliche Anzahl von Koordinatenwerten, die, wenn sie iteriert werden, irgendwann wieder ein Zwischenergebnis von $0,0i$ und $0,0r$ haben. Da aber schon die Anfangsbedingung $0,0i/0,0r$ war wiederholt sich die gesamte Iterationsfolge bis sie wieder bei $0,0i/0,0r$ ankommt. Es wird klar, so kann sie unendlich oft wiederholt werden. Dies sind allesamt Attraktoren. Sicherlich sind sie nicht zufällig übers Koordinatensystem verteilt, den sonst könnte die \mathbb{M} ja nicht ihre Form annehmen.

Bubbelbrot als Überleitung zum SternSeek

Wir haben gesehen, wie der minimale Abstand eines Iterationsergebnisses zum Nullpunkt die Periodenanzahl einer Iteration ablesen lässt. In diesem Beispiel hat das Iterationsergebnis Nr.5 den kleinsten Abstand zum Nullpunkt. Wie man unschwer erkennen kann, hat dieser Iterationsverlauf 5 Arme. Es gibt eine weitere Möglichkeit, die Armanzahl einer Spirale zu ermitteln. Man muß nur diejenige Iteration ermitteln, die den kleinsten Abstand zur Startiteration hat. Die Differenz gibt wieder die Armanzahl an.

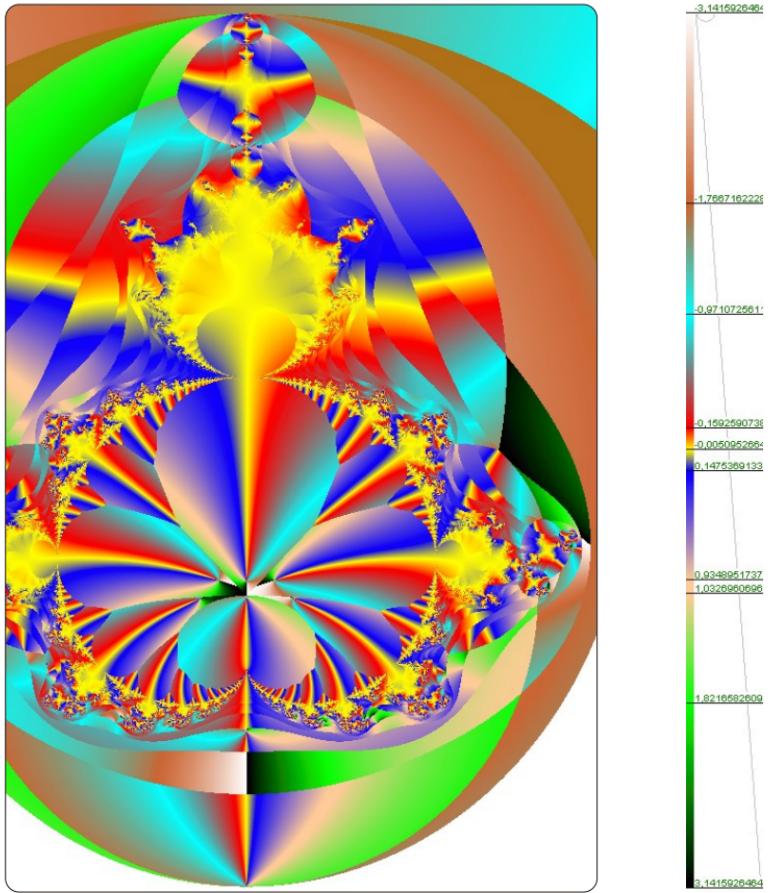
Hätte man die Koordinaten eines Mittelpunktes, könnte man den Drehwinkel zwischen zwei Iterationen bei Umdrehungsbeginn ausrechnen und anzeigen. Je kleiner dieser Winkel ist, desto mehr nähert sich der Iterationsverlauf der Sternform. Wird der Winkel negativ, so beginnt sich die Spirale in die andere Richtung einzudrehen.



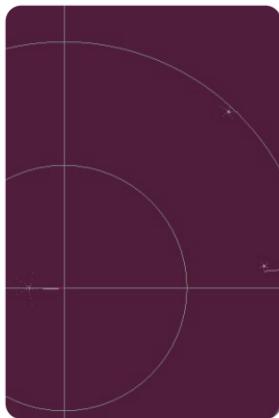
Mit obigem Algorythmus können die Orbits innerhalb der Knospen nicht mit den innerhalb des Hauptkartoids verglichen werden. Obwohl sich der Drehwinkel entgegen gesetzt dem Uhrzeigersinn bewegt, ist die Knospenspirale rechtsdrehend.

Hier müsste ein Drehpunkt innerhalb jeder einzelnen Spirale ermittelt werden, statt dem "Center of Orbit".

SternSeek



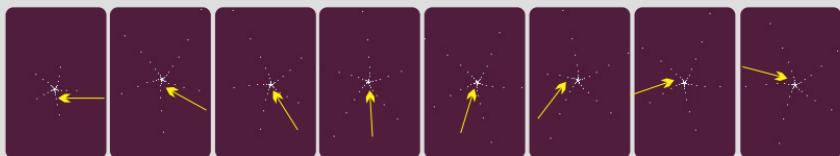
Die gelbe Farbe hat eine sehr kleine Winkelabweichung nach einer vollständigen Periode. Daher sind alle gelben Iterationsverläufe innerhalb der M sternförmig. Blaue sind linksdrehend, Rote sind rechtsdrehend - um so mehr, je näher sie an PI herankommen. Obwohl diese Auswertung nichts mit der Bubblebrot-Methode gemein hat, kann man die selben Grundstrukturen wiedererkennen. Nur in der Mitte jeder Blase sind die Orbits sternförmig. Iterationsverläufe ausserhalb der M sind in dieser Auswertung bisher undefiniert - aber dennoch schön.



Die Sternensuche kann sich aber auch schwierig gestalten. Denn nicht alles, was bei oberflächlicher Betrachtung nach sternförmig aussieht ist es auch. Hier ist ein Beispiel aus der 3er Knospe und der Nähe ihrer 5er Subknospe. Der Orbit hat also 3 Zentren, jedes als 5er Stern, oder? Im Bild ohne Vergrößerung sieht das so aus. Wenn wir den ersten Stern jedoch zunehmend vergrößert darstellen, können wir erkennen, wie sich doch keine Spirale entwickelt. Der Eintrittswinkel des 1.Armes, und natürlich aller anderen, vergrößert sich im Uhrzeigersinn immer mehr.

Size 2,0E-1 bis...

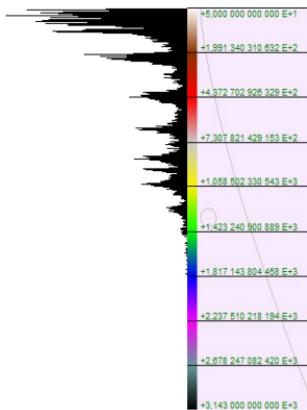
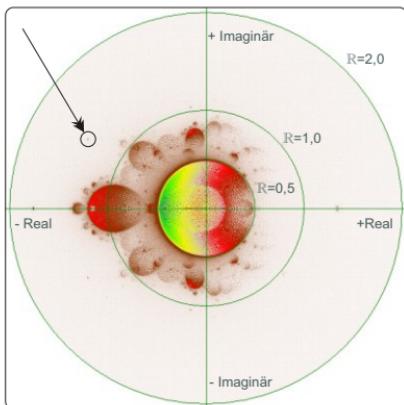
...Size 5,25E-14



Das letzte Bild hat das Zentrum bei ca. 1200 Iterationen.

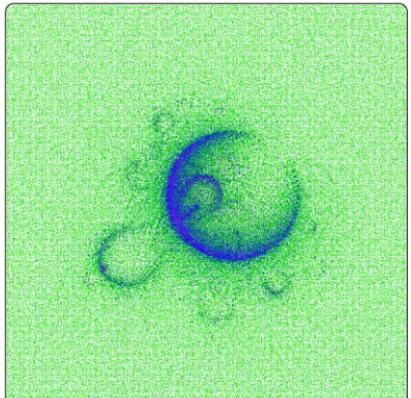
Einmal mehr offenbart sich hiermit der fantastische Tanz in seiner weitschweifenden Ausdehnung. Es gibt kein Medium, mir dem diese Spirale als Gesamtheit gezeigt werden könnte. Allein mit unserem Verstand können wir dieses Zoom-Puzzel zusammensetzen.

Aufsummierung der Orbits



In den letzten Kapiteln haben wir gezeigt wie einzelne Orbits dargestellt werden können. Im linken Bild oben werden jedoch alle Orbits der M gezeichnet. Da die einzelnen Zwischenergebnisse vieler Orbits zusammenfallen, müssen diese „Treffer“ gezählt werden. In der rechten Tabelle kann abgelesen werden, welche Pixelfarbe welcher Trefferanzahl entspricht. Man kann damit in etwa die Aktivitäten innerhalb der M abschätzen. Das Histogramm zeigt wieviele Werte wie oft vorhanden sind. (Histogramme sind auch in der digitalen Fotografie bekannt). Leider ist diese Messung hier in diesem Buch nicht exakt darstellbar. Um alle Bereiche zu erforschen sind viele Messungen nötig, da der Messbereich zu groß ist, um ihn in einem einzeln Bild darzustellen. Es gib Pixel die einen Wert von 0 oder 1 haben. Je genauer man diese Messung haben will, desto schwieriger wird es mit den höchsten Werten einiger Pixel. Obiges Bild hat als Maximum >3100 Treffer. Leider wurde wegen der Kleinheit der kleinsten Ort im Zentrum nicht dargestellt, er dürfte bei dieser Messung einen Wert von weit über 100.000 haben. Theoretisch könnte mit genauen Messungen hier ein unendlicher Wert erreicht werden. Man muß sich einfach entscheiden was man zeigen will, hohe oder niedrige Werte, die dann in die Farbscala mit 16000 Farben passen müssen.

Mr. Mandelbrot hat ursprünglich nur interessiert, ob und welche Orbits unendlich lange iteriert werden können. Daher ergab sich die Form des Apfelmännchens. Bisher haben sich die meisten Forscher auf diesen Bereich konzentriert. In dieser Auswertung sieht man jedoch, dass auch weit ausserhalb noch Aktivitäten stattfinden (siehe Pfeil). Man könnte diesen Punkt als die Aktivität einer Fliege halten, und damit versäumen dem nachzuforschen. Dabei ist das noch die größte Form dieser Art, von der es unendlich viele gibt.



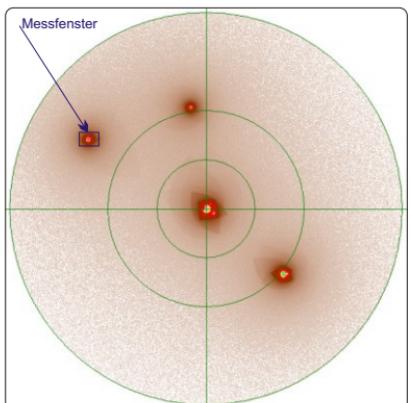
Real-Center:	- 1,201254
Img-Center:	+ 0,707341
Bildgröße(x):	0,05453
MaxIm1(Iter):	300
Gesamtgröße:	1,16E+1 Meter
Rechendauer:	18 h 33 m 47,396 s
gerechnete Orbita:	400.000.000 Pixel

Nur mit den noch vertretbaren Aufwand von 18 Stunden Rechnzeit konnte dieser kleine Punkt gezoomt werden. Es ist dennoch klar erkennbar, dass dies wie ein Satellit dieser Darstellung aussieht, genaus wie es im Apfelmännchen-Satelliten gibt. Das einzige was wir nun von dieser Struktur wissen ist, dass eine unbekannte Anzahl von verschiedenen Orbits zur Bildung beigetragen haben. Auch wissen wir nicht welche Orbits es waren.

Die Methode der „Aufsummierung der Orbita“ wird uns bei der Beantwortung dieser Frage nicht weiterbringen.

Aufsummierung der Orbita Revers Methode

Nachdem nun die Frage im Raum steht, woher diese Orbita kommen, musste ich eine neue Messmethode programmieren. Dazu wird zunächst der Bereich im obigen Bild markiert. Dann muß leider die 18 stündige Suche nochmals durchgeführt werden. Zusätzlich zu allen Daten merkt sich das System immer wenn ein neuer Orbit zur Durchgerechnung gestartet wird, dessen Ursprungskoordinaten. Fällt nun ein Treffer in den markierten Bereich wird nur der gemerkte Orbit in einem neuen Bild markiert. Dieses Bild zeigt dann alle beteiligten Orbita (zumindest soweit es die Auflösung zuläßt).



Dies ist das Ergebnis:

Wir sehen, dass die beteiligten Orbita vier Bereiche treffen. Die hellbraunen bis dunkelroten Pixel sind Messungenauigkeiten, sie können ignoriert werden.

Nun können wir uns alle einzeln ansehen. Weil ein Ort um den Nullpunkt herum liegt, ist anzunehmen, dass ein Attraktor beteiligt ist. (siehe Anfangsbedingung $0,0i/0,0r$).

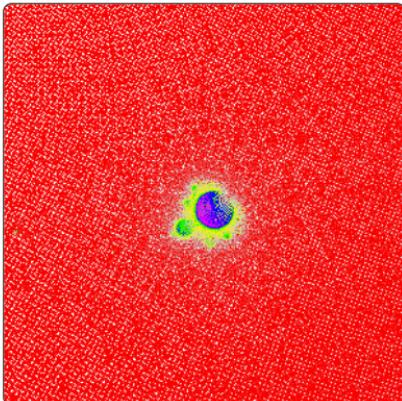


Bild 1

Zunächst die gezoomte Darstellung des Gebites das uns ursprünglich interessierte.

Es könnte etwas besser dargestellt werden, ist dem Hauptbild jedoch schon ähnlicher.

Die unteren beiden Bilder sind die die äußereren Gebiete.

(das helle Viereck ist wieder ein nicht zu vermeidender Messfehler)

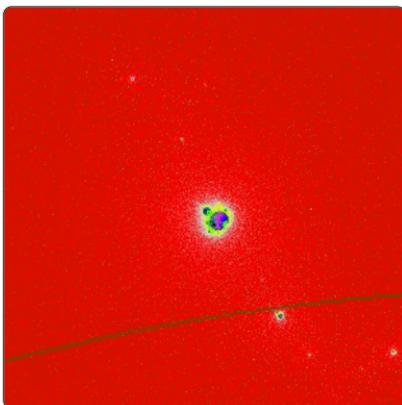


Bild 2

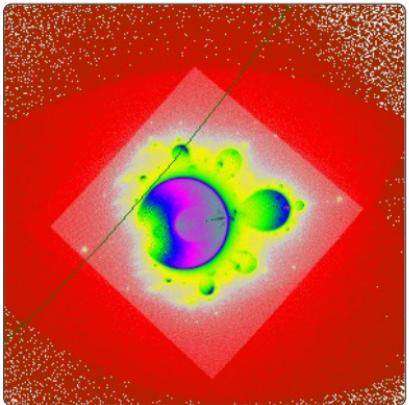


Bild 3

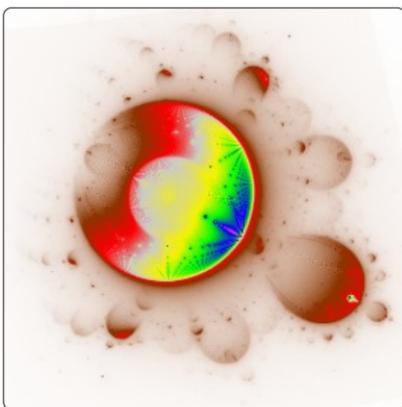
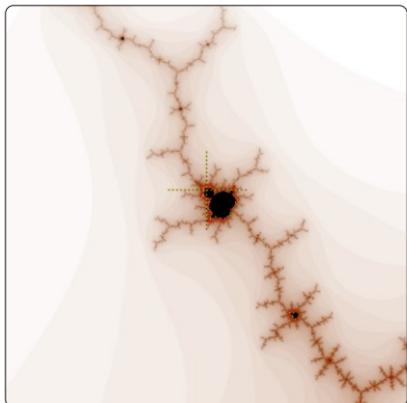


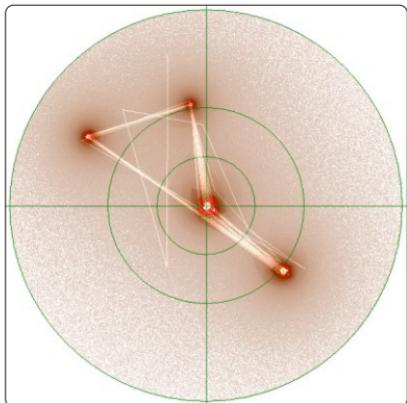
Bild 4

Nun der Zoom vom Nullpunkt. Er ist relativ größer und auch detaillierter.



Nach kurzer Suche wird in der normalen Apfelmännchen-Darstellung eine Übereinstimmung der Position von Bild 2 mit diesem Satelliten gefunden. Auch der Lagewinkel und die Größe stimmen überein.

Satelliten gehören zu \mathbb{M} und haben deshalb, wegen ihrer Attraktoren, auch immer Zwischenergebnisse im Nullpunkt. Damit wäre Bild 4 erklärt.



Dass genau dieser Satellit die Ursache ist, lässt sich noch mit dem folgenden beweisen. Wenn wir von diesem Satelliten eine normale Orbitanalyse machen und über das Bild legen, sehen wir wie die Orbits genau alle beteiligten Orte berühren. Sogar die Größenunterschiede stimmen überein.

Mit dieser Messreihe habe ich gezeigt, dass die Satelliten auch in der Aufsummierung der Orbits beteiligt sind. Zugleich ist es auch ein Beweis für die korrekte Funktionsweise meiner anderen Messmethoden.

Diese Messreihe wurde exemplarisch an einem der größten Satelliten in der \mathbb{M} durchgeführt. Dieser Satellit hat auch eine kleine Periodizität was die Analyse einfacher machte. Da es unendlich viele Satelliten gibt, dann auch mit sehr großen Periodizitäten, dürften solche Messungen keinen Spass mehr machen, denn wer will schon u.U. ein paar tausend Farbtupfer im Bild nachforschen. Dass damit das Thema abgehakt ist, glaube ich dennoch nicht mehr. Ich und meine Kollegen waren schon mal mit der Aufsummierung der Objekte zufrieden, wenn ich nicht versucht hätte, die Auflösung zu verbessern, womit wieder Neues sichtbar wurde. Es ist einfach so, dass der Erkenntnishorizont um so weiter wird, je näher man hinsieht. Dabei ist das Meiste im nachhinein einfach und logisch.

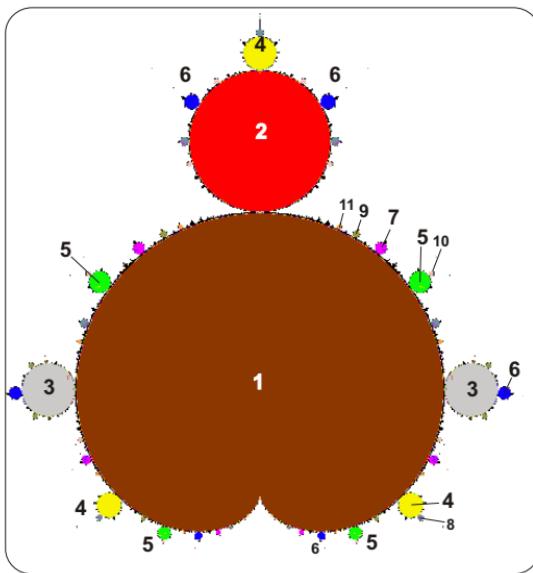
Orbitanalyse und Periodizität

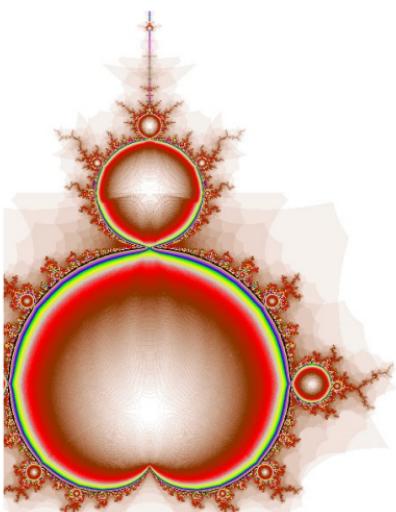
Unter Periodizität versteht man bei der Diskussion der \mathbb{M} , ob ein Orbit auf einen oder mehrere Punkte hin konvergiert. Im linken Bild wurde dargestellt, wieviele Konvergenz-Punkte im Orbit auftreten. Allgemein kann man feststellen, je kleiner eine Knospe ist, desto höher ihre Periodizität. Für einige Knospen wurden die Werte im Bild eingetragen.

Ich finde, der Begriff „Periode“ wird hier sehr einseitig auf die Anzahl der Konvergenz-Punkte angewandt. Laut Duden ist „Periode“ ein regelmäßig wiederkehrendes Ereignis. Wenn man dann den Übergang von Periode 1 nach Periode 3 genau ansieht, erkennt man schon weit vor dieser Knospen-Grenze eine Spirale mit 3 Armen - also eine Spirale mit der Periode 3. Aber selbst nach der Aufteilung in 3 Konvergenzpunkte, entpuppt sich jeder dieser Punkte als eine weitere Subspirale mit einer eigenen Periode, die vom Bereich der Sub-Knospen abhängt. Diese beiden Perioden multiplizieren sich schließlich. Dieser Vorgang wiederholt sich mit jeder weiteren Sub-Knospe.

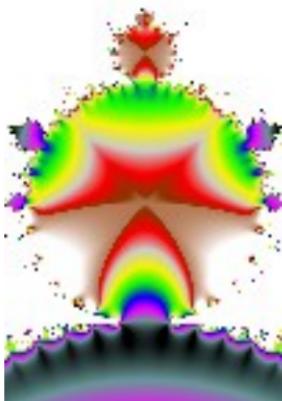
Welche weiteren Eigenschaften in den Orbits verschiedener Bereiche der \mathbb{M} gibt es?

Das erste Iterationsergebnis fällt immer auf den Startpunkt des Orbits. Da die Startbedingung für die \mathbb{M} immer $\mathbb{Z}=0$ sein muß kann man ausrechnen: $z_1 = 0 + c$. Das Ergebnis z_1 ist also gleich c .





Relative Orbitgrößen



Die einfachste Eigenschaft eines Orbits ist seine Größe. Innerhalb des Hauptkörpers, und auch innerhalb jeder Knospe wächst die Größe logarithmisch vom Mittelpunkt bis zum Rand hin, wo sie das Maximum erreicht. Während die Größe wächst, reduziert sich die Steigung des Iterationverlaufes im selben Maße. Nahe am Rand wird die Steigung so klein, dass man vermutlich unendlich lang iterieren müsste, bis die Amplitude (die Schwingungsweite) Null wird, also vollständig konvergiert ist. Ein Sonderfall, bzw. der Grenzfall, ist der Orbitort im Mittelpunkt mit den Koordinaten $r=0$ und $i=0$. Da 0^2 wieder 0 ist und plus 0 auch wieder 0 ergibt, findet hier überhaupt keine Iteration statt, da alle Ergebnisse 0 sind. Das obere Bild zeigt die relativen Orbitgrößen. Weiß ist sehr klein, Blau bis Schwarz schon sehr groß. Eine Erklärung für die feinen Muster gibt es noch nicht, dies zeigt jedoch, dass die Entwicklung nicht kontinuierlich erfolgt.

Der Sprung in der Knospe 2 (Kopf) muss auch noch geklärt werden, er liegt genau auf der Grenze von $Z = 1,0!$ Er ist sicherlich von Relevanz, da er auch in anderen Auswertungsergebnissen vorkommt, die die M nach ganz anderen Algorithmen filtern.

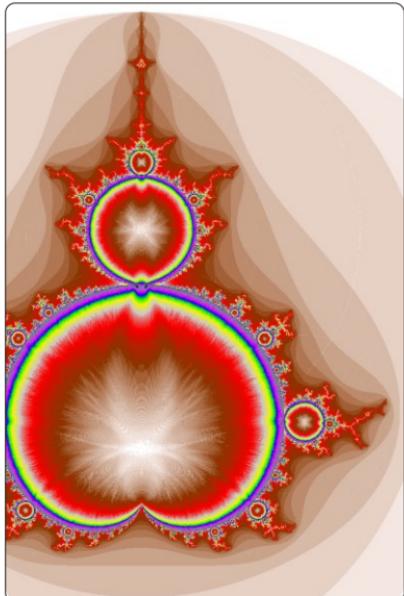
Lotusbrot Algorithmus

Diese Messung zeigt einen Aspekt des Einschwingvorgangs eines Iterationsverlaufes an. Nach der Farbcodierung von Weiß, Braun, Rot, Grau, Gelb, Blau bis Lila kann man interpretieren, wie er abläuft. Im Mittelpunkt jeder Knospe ist er sehr kurz und auch vom Ausschlag her sehr klein. Zum Rand hin wird der Iterationsverlauf länger und auch in der maximalen Amplitude größer. Das wird wohl auch die Theorie schon gewußt haben. Sie wird aber wohl eher zu einen kontinuellen Verlauf inspirieren. Die feine faserige Struktur wird in der Sprache der Mathematik nicht zu beschreiben sein. Ganz zum Rand von M hin wird dieses faserige Aussehen noch spannender, und wird dann doch noch etwas zum Chaos beitragen.

Der Algorithmus: Es wird jeder $|Z|$ -Wert eines Iterationsschrittes in eine Tabelle eingetragen, die nur für einen Bildpunkt und dessen Iterationsverlauf da ist. Diese Tabelle ist so aufgebaut, dass alle $|Z|$ -Ergebnisse zwischen 0,0 und 2,0 (MaxZ) in eine der Tabellenzeilen zugeordnet wird. Die Größe der Tabelle ist frei wählbar. Hat die Tabelle zwei Zeilen, werden alle Werte 0,00...0,99 in Zeile 1 eingetragen, die Werte 1,00 bis 1,99 in Zeile 2. Dies ist natürlich die größte Rasterung. Die Tabelle ist bis zu 16000 Zeilen zu vergrößern, mehr ist nicht sinnvoll, da die Farbskala von DeepChaos nicht noch mehr Farben zur Verfügung hat, um die Wertecodierung darzustellen. Die Ergebnisse der Iterationsschritte werden jedoch nicht mit ihrem Z-Wert in die Tabelle ein-

getragen, sondern mit jedem Treffer wird der Inhalt der Tabellenzeile um eins erhöht. Die Darstellung im Iter-Modus: Für jeden Bildpunkt wird die Anzahl der Einträge >1 in der Tabelle gezählt und farbcodiert angezeigt. Die Darstellung im Z-Modus: Die Tabellenzeile mit den meisten Einträgen wird gesucht und der zugehörige $|Z|$ -Wert angezeigt.

Von der Belichtung: Werden die ersten Iterationen gemessen, sind die Einschwingvorgänge bildprägend. Man kann jedoch auch einen Vorlauf wählen, der dann nicht zum Messergebnis beiträgt. Einschwingvorgänge sind dann nicht zu erkennen, sondern die Periodizität des Iterationsverlaufes. (Bild 3 Seiten vorher.)

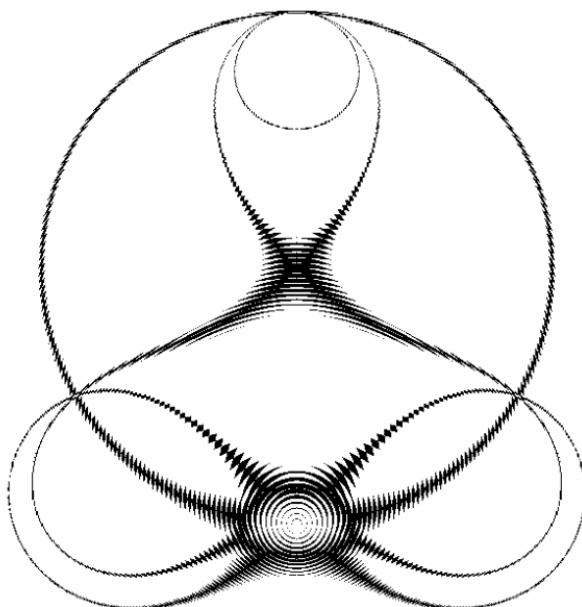


Der Name: „Lotusbrot“:

Wenn man mit den Belichtungsparametern etwas spielt und auch ungewöhnliche Kombinationen versucht, kann es passieren, dass man Unerwartetes sieht, das hier den Namen begründet. Wenn man im Lotusbrot-Modus nur 3 Iterationen rechnen lässt, entsteht solch ein Bild. Die Breite der Linien steuert man mit der Anzahl der Tabelleneinträge. Die Umgebung mit den Wert von Max- \mathbb{R} .

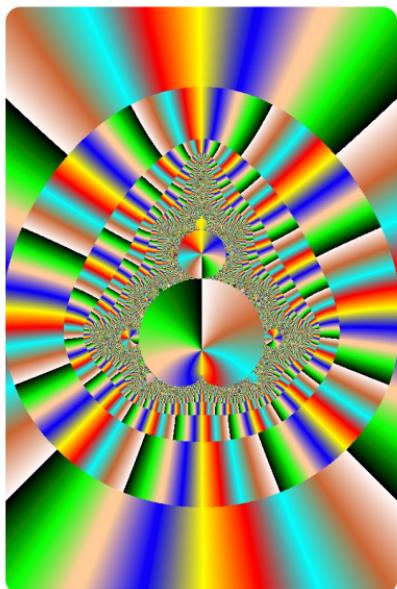
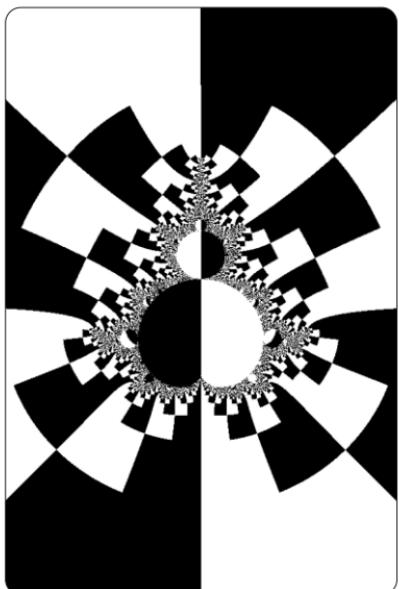
Lotusbrot deshalb, weil diese Zeichnung an einen meditierenden Mönch mit gesenktem Kopf im Lotussitz erinnern kann. Sogar das von Esoterikern so geschätzte Sonnengeflecht ist zu sehen.

Der Wortteilbrot kommt wohl vom Entdecker Mr.Mandel...brot, weswegen dessen Menge auch so heißt. Ihm zu Ehren hat es sich wahrscheinlich eingebürgert, dass Untermengen-Darstellungen wie diese auch auf ...brot enden. Also auch Bubblebrot und Buddhabrot. Buddhabrot, oder Nebulabrot soll hier nicht erklärt werden, da diese Darstellung zwar sehr „romantisch“ sind aber durch einen Zufallsfaktor zu sehr verfremdet ist, um noch an die Mandelbrotmenge zu erinnern. Wegen des Zufalls stellt Buddhabrot auch keine weiteren Erkenntnisse zur Verfügung. Wir können nur zusehen wie unser Mönch über Buddha meditiert.

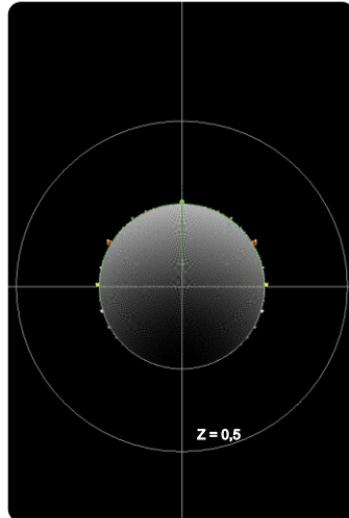
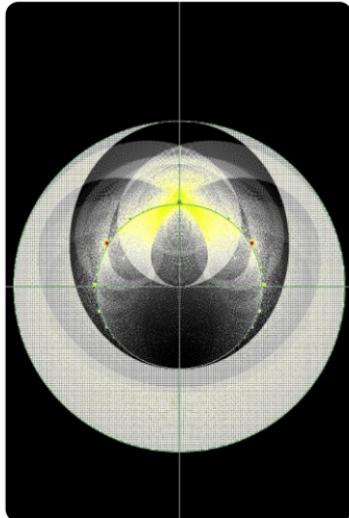


Binäre Zelegung

In [CBdO] wird in Kapitel 5 die binäre Zerlegung der M erklärt. Dies alles auf hohem mathematischen Niveau. Was immer diese Zelegung beweisen soll, es ist schlichtweg der Winkel Beta, der für die Enditeration angezeigt wird, und das mit sehr grober Auflösung. Man kann das auch im Pixelspiel errechnen lassen. Mit der normalen M -Formel wird für jedes Pixel der Ort für das Iterationsergebnis N errechnet. Aus den Koordinaten X und Y kann mit den Winkel-funktionen der Winkel β (das Argument von Z) ausgerechnet werden. Setzt man für die Winkel 0 bis 180 die Farbe Weiß, und bis 360 Grad Schwarz ein, erhält man die binäre Zerlegung. Wird für je 45 Grad eine andere Farbe benutzt, erhält man das lineare Äquivalent dazu. Es ist insofern besser geeignet, weil die Feldlinien durchgehend zu sehen sind.

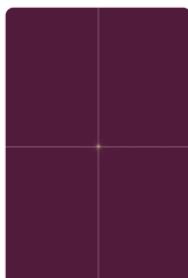


Definition



Das linke Bild zeigt alle Orbits an, also die konvergenten wie auch die divergenten. Das rechte Bild zeigt nur die konvergenten Orbits (Status = inside) an, das entspricht dann der reinen \mathbb{M} .

Aber was ist das Center eines Orbits? Innerhalb des Hauptkariodits ist die Antwort leicht. Da hier alle Orbits auf einen Punkt hin konvergieren, ist das dann auch das Zentrum dieses Orbits. Bei den höherperiodischen Verläufen wird das Zentrum zwischen den einzelnen Konvergenzpunkten ermittelt. Bei stark divergenten Orbits ergibt sich kein sinnvolles Center mehr, weshalb es im oberen linken Bild über dem Radius von 1,0 keine Ergebnisse mehr gibt.



Wie wird das Center of Orbit (CoO) ermittelt?

Im Iterationsverlauf eines Orbits sind als Ergebnis für jeden einzelnen Iterations-Schritt die Koordinaten in der komplexen Ebene enthalten. Wenn man nun nach jedem Iterationsschritt die Werte für real und imaginär (y und x im Computer) getrennt aufsummiert und dann diese Summen durch die Anzahl der Iterationsschritte dividiert, bekommt man das CoO. Zu beachten ist, dass dieses CoO nicht den geometrischen Mittelpunkt des Orbits darstellt, sondern eher den Schwerpunkt. Außerdem hat diese Methode einen kleinen Schönhheitsfehler. Bei höherperiodischen Verläufen können die Ergebnisse von x oder y durchaus zwischen -0,5 und 2,0 liegen. Selbst bei 10000 Iterationen kann dann immer noch der Messfehler bei $2,5/10000 = 0,00025$ liegen. Das führt dazu, dass das CoO mit jeder weiteren Iteration um den Idealwert herum taumelt. Da alle Beispiele in dieser Dokumentation aber mit 80 Nachkommastellen berechnet werden, erscheint dies doch als grobe Ungenauigkeit. Einen Ausweg aus dieser Situation bietet nur eine Synchronisation mit der Periodizität des jeweiligen Orbits. In einem 3er Orbit darf dann zB. nur nach 3,6 oder 9, usw. Iterationen eine Auswertung vorgenommen werden. Da bei der Erstellung eines Bildes jedes Pixel eine eigene Periodizität aufweisen kann, muss diese auch jedesmal neu ermittelt werden. Das geht zuverlässig mit der schon besprochenen Bubblebrotmethode.

Steigung des Iterationsverlaufes

Bisher haben wir gesehen, dass der Iterationsverlauf um so schneller konvergiert je näher sein Ursprungsort am Nullpunkt oder am Zentrum einer Knospe liegt. Die Steigung, oder die Konvergenzgeschwindigkeit im extremen Randbereich zu messen, ist kein leichtes Unterfangen. Allein schon durch die schiere Menge von nötigen Iterationen, bis in den Giga-Bereich hinein. Verlässliche Messparameter zu finden ist schwierig. Aber bei allen Versuchen wird klar, die Steigung benachbarter Iterationsverläufe ist nicht gleichartig, zwar nicht chaotisch aber dennoch rätselhaft.

Ausblick

Nun erscheint mir die M doch relativ einfach zu sein. Durch die Zahlenverhältnisse um den Bereich von 1,0 herum wird es möglich, dass quadratische Ergebnisse im Bereich von 1,0 bleiben. Die Hauptbedingung für die M ist der Anfangsstartwert jeder Iterationsfolge mit 0,0 für real und 0,0 für imaginär (NULL). Und wie es die Mathematik so will, gibt es im Bereich bis 2,0 für sehr viele Koordinatenwerte Iterationsfolgen, die irgendwann, nach X Iterations-schritten ein Zwischenergebnis wieder, von 0,0 real und 0,0 imaginär haben. Und das ist dann der Umstand, der dazu führt, dass die Iterationsfolge wie von vorne abläuft, denn die Startbedingung war ja auch schon am Anfang NULL. Wenn sie jedoch wieder von vorne anfängt, bedeutet das, dass sie sich auch wirklich endlos wiederholen kann. Dies sind dann die Attraktoren der M. Wie in dieser Dokumentation gezeigt werden konnte sind die Attraktoren durch Computerbilder sehr schwer zu visualisieren, da ihre Größe ja ebenfalls NULL ist, was ihre Bedeutung in der grafischen Darstellung bisher etwas verschleiern konnte.

Alles Andere hängt davon ab, wieweit eine beliebige Iterationsfolge von solch einem Attraktor entfernt ist. Sie wird also langsam und stetig die Eigenschaften des sich entfernenden Attraktors verlieren und die, des sich annähernden annehmen. Alle Iterationsfolgen, die sich einem Attraktor entziehen können, werden sich mit stetiger quadratischer Funktion sehr schnell von der M entfernen.

Die Eigenschaften eines näherliegenden Attraktors anzunehmen gilt auch für Orte, die nahe an der M liegen, den sogenannten Satelliten. All deren Knospen haben auch solche Attraktoren. Wenn nun aber Iterationsfolgen eines Satelliten in die eines übergeordneten Satelliten, oder gar in die des Haupkörpers übergehen müssen, dann kann es nicht sein, dass sich Haare bilden, denn dann könnten sich die Eigenschaften ja nicht grundlegend ändern.

Würde ich mich trauen, gegenüber allen renommierten Mathematikern, eine andere Meinung zu vertreten: Ich würde behaupten, die gesamte M ist NICHT zusammenhängend. Jeder der vorhandenen Attraktoren hat seinen eigenen Einflussbereich, der dort endet, wo der nächste sich manifestiert. Messergebnisse der verschiedensten Arten an den Grenzen der Berührungspunkte enden entweder mit Null oder mit Unendlich, beides deutet doch auf eine Abgrenzung im unendlichen Raum hin - denn was sich berührt, ist lange noch nicht verbunden.

Bilddaten

Von einigen Bildern in dieser Dokumentation sind hier die Erstellungsdaten aufgelistet. Benutzer von DeepChaos können diese Daten direkt aus den beiliegenden Bildfiles entnehmen. Für Benutzer anderer Programme können diese Daten zu Erstellung manuell übernommen werden.

Zur leichteren Erfassung sind bei den Bildgrenzen führende Stellen, die gleich sind, mit einem Punkt gekennzeichnet. Je mehr Punkte, desto kleiner ist der Zoomausschnitt. Um den gleichen Bildausschnitt zu reproduzieren ist es sicherlich nicht nötig mehr als 5 Stellen nach den Punkten auszuwerten. Anders bei den Juliapunkt- oder Testpunktkoordinaten, hier können Stellenverluste schon zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

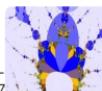
Die Angabe der Gesamtgröße ist bezogen auf die übliche Bildschirmanzeige des Zoomausschnitts, und gibt nun die vorstellbare Größe der gesamten Mandelbrotmenge an.

Bitte beachten Sie in dieser Dokumentation und in DeepChaos die Rechtsdrehung aller Darstellungen. Deshalb ist hier die Realachse mit der X-Bildschirm-Achse, und die Imaginärachse mit der Y-Bildschirm-Achse verbunden.

Die Bilddaten mussten leider sehr klein geschrieben werden, damit sie überhaupt darstellbar sind. Zur Erleichterung sind diese Daten nochmal auf der beiliegenden CD als Textformat zu finden (Für Cut&Paste geeignet).

Bild:

Erstellungsart: Mandelbrot
Iterationsnummer:
Apfelmännchen



Bildgrenzen: Real: CxLeft: 0,8949447640886912214601432708428593202255753696082914189910074683737

CxRight:8423856204944368236549306508154244779799183051364121329690593517133441

Img: CyTop: -0,10933171640212379352418838591678097850937357110195616369455875628715134889569916

CyBottom:59982669576467001981405273586343545191281816798220088401158360006098231199

TestPunkt: Real: Tpx: 0,8949448121436732199586949821348236210604751985639045538451116869040965975901720
Img: Toy: -0,10933165876205104582296059205066978272282341783942149740046402140595098887419774

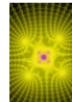
Gesamtgröße: 8,18E+03 Kilometer (ca.2/3 Erddurchmesser)

Rechendauer: 20 h 17 m 47 s

Ergebnisbereich: von: 1536 bis: 149952

Bild:

Erstellungsart: Mandelbrot
Iterationsnummer
Apfelmännchen



Bildgrenzen: Real: CxLeft: 0,02126529327582249559675148478207688486690742058224578575889703743961021370618356
CxRight:8001546178178597053991958534782950849964509147828
Imag: CyTop: 0,30478200291557441760807668915447915928976454492886687822605194066110387833166875
CyBottom:838551820760930113080789572812876443802540961082

TestPunkt: Real: Tpx: 0,02126529327582249559675148478207933194856754952742903369990607324012545257195056
Img: Toy: ...30478200291557441760807668915448240989077576099037895384918334642596740458619506

Gesamtgröße: 1,43E+6 Universen
Ergebnisbereich: von: 2592 bis: 3370

Rechendauer: 0 h 38 m 36 s

Bild: Rasterverschiebung

Erstellungsart: Mandelbrot
Iterationsnummer
Apfelmännchen



Bildgrenzen: Real: CxLeft: 0,00902038822802335081523193608886695579484864961048137888239668311632518357456865
CxRight:527801219549360232679174620643752647541331165493166114202706083921
Imag: CyTop: -1,76911037546376751868518778533528183382781763176825629823151797996419043563078176
CyBottom:25320620636542823234875815964055357638317926460722196517040137592

Gesamtgröße: 3,59E+12 Kilometer
Ergebnisbereich: von: 517 bis: 2300

Rechendauer: 0 h 8 m 52 s

Bild: Rasterverschiebung Zoom

Erstellungsart: Mandelbrot
Iterationsnummer
Apfelmännchen



Bildgrenzen: Real: CxLeft: 0,009020388228023446978815463818485652194668534857260594299189130628238465185692467
CxRight:96345510776756326290802177864509298966268657569281483184638
Imag: CyTop: -1,7691103754637674026285864818005282380177476099680176267437833414995175981066786
CyBottom:73578509117432673661301366030162592782217315881152034828530

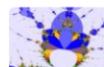
TestPunkt: Real: Tpx: 0,0090203882280234469790256962150110805061675334757278043586481601851864838715458
Img: Toy: ...-1,76911037546376740262797626179243170259411095721455496265428722151975210754435119

Gesamtgröße: 8,21E+04 Lichtjahre
Ergebnisbereich: von: 836 bis: 1243

Rechendauer: 0 h 13 m 59 s

Bild:

Erstellungsart: Mandelbrot
Iterationsnummer
Apfelmännchen



Bildgrenzen: Real: CxLeft: 0,89494760488691221146014327084285932022557536960829141899100746837572351774333849
CxRight:84298562049443682365493065081542447797591830513641213229690595945738655824
Imag: CyTop: -0,10933171640212379332418838591678097850937357110196616369455875628715134889569916
CyBottom:5998266957646700198140527358634354519128181679622008840115836006098231199

TestPunkt: Real: Tpx: 0,894948121436732199386949821348236210604751985639045538451116869040965975901720
Img: Toy: ...-0,10933165876205104582296059205066978272282341783942149740046402140595098897419774

Gesamtgröße: 8,18E+03 Kilometer (ca.2/3 Erddurchmesser)
Ergebnisbereich: von: 1536 bis: 149952

Rechendauer: 20 h 17 m 47 s

Literaturverzeichnis

In diesem Verzeichnis habe ich nur die Bücher und Quellen aufgelistet, die im Buch zitiert wurden. Die Literatur zur Chaostheorie und zu Fraktalen ist nicht mehr zu überblicken. In jedem der genannten Bücher werden sie sehr viele weitere Verweise finden.

- [CBdO] Heinz-Otto Peitgen, Chaos - Bausteine der Ordnung, ISBN 3-608-95435-X, 1994
 - [F] M.F.Barnsley, Fraktale, ISBN 3-86025-010-8, 1995
 - [FG] Kenneth J. Falconer, Fraktale Geometrie, ISBN 3-86025-075-2, 1993
 - [FGdN] B.Mandelbrot, Fraktale Geometrie der Natur, ISBN 3-7643-1771-X, 1977
 - [FuC] Zeitzer&Neidhardt, Fraktale und Chaos, ISBN 3-534-11538-4, 1993
 - [MF] H.-J. Bartsch, Mathematische Formeln, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1972
 - [TBoF] Peitgen&Richter, The Beauty of Fractals, ISBN 3-540-15851-0, 1986
-
- [wpmbm] wikipedia: Mandelbrotmenge
 - [wpff] wikipedia: Fibonacci-Folge
 - [wpse] wikipedia: Schmetterlingseffekt
-
- [dWs] Aus der Fernsehserie -hitec-: "Die Wüste schwebt", 2007 mit Dr.A.Petzold & Dr.L.Schütz & uvam.

Symbole und Formelzeichen

- M Mandelbrotmenge
J Julianmenge
C Menge aller imaginären Zahlen
 C_n Eine imaginärer Ort aus der \mathbb{N} -ten Iteration
 Z Imaginäre Zahl, besteht aus Argument und Betrag
oder aus Imaginär- und Realanteil $Z=(r;i)$
 Z_n Imaginäre Zahl aus der \mathbb{N} -ten Iteration
 $|Z|$ absoluter Betrag einer imaginären Zahl
 $\text{Max}Z$ $|Z|$ -Wert, bei dessen Überschreitung wird die Iteration abgebrochen.
 $\text{Min}Z$ $|Z|$ -Wert der Bubblebrot Auswertung.
 β Argument einer imaginären Zahl (Winkel Beta)
 R Abstand eines imaginären Betrages vom Nullpunkt im X-Y Koordinatensystem und ist gleich $|Z|$
 N Nummer eines Iterationsschrittes
 E Entfernung zwischen C_n und C_{n+1}
 X X-Koordinate am Bildschirm (horizontale Achse, entspricht Imaginärachse *nur* in diesem Buch, allgemein vertikal)
 Y Y-Koordinate am Bildschirm (vertikale Achse, entspricht Realachse *nur* in diesem Buch, allgemein horizontal)
 r Realanteil $r = \text{Re}(Z)$
 i Imaginäranteil $i = \text{Im}(Z)$

Glossar

Hauptzykloid	Der „Bauch“ des Apfelmännchens, er hat die Form eines Zykloides. Da es aber nur ein Zykloid gibt, finde ich den Wortteil „Haupt-“ als redundant.
Pixel	Ein Punkt auf dem Bild.
Pixelspiel	Bezeichnung für die graphische Darstellung der M, indem für jedes Pixel des Bildes eine einzelne Iteration durchgerechnet wird.
Runout-Punkt	Die letzte Iterationsnummer, von der an alle weiteren Iterationsergebnisse beschleunigt anwachsen.
Runout	Die Anzahl der Iterationen, die es braucht bis vom Runout-Punkt aus die Grenze von $R=2,0$ überschritten wurde. (oder den in z-Max angegebenen Wert)

Im Anhang auf der CD

Tanz der Iterationen Tanz.pdf

DeepChaos Bedienungsanleitung
 Programm DeepChaosV2

Weiterführende dedekind.pdf
Informationen wikipedia:Mandelbrotmenge.html
über die M wikipedia:Juliamenge.html
 Komplexe Zahlen.pdf
 Mein Weg zum Chaos

Filme Pantoffeltierchen
 DaumenKino
 Phase 2 bis 120
 Ein Orbit reist durch die Mandelbrotmenge

Die Namen von Darstellungen

Juliamenge	Namensgebung von Mathematikern ca.1930
Mandelbrotmenge	Die klassische und erste Darstellung. Namensgebung von Mathematikern ca. 1980
Apfelmännchen	Erweiterte Darstellung mit Isolinien für verschiedene Iterationstiefen. Namensgebung von Programmierern ca. 1984
Bubblebrot	Darstellung der Iterationsnummer mit Minimum von Z. Namensgebung von R.Schörger, 2004
Lotusbrot	Quandisierte Darstellung von Z. Namensgebung von R.Schörger, 2003
Buddhabrot	Zufällige Auswahl und Aufsummierung dieser Iterationsorte. Namensgebung von Melinda Green, 1993
Nebulabrot	Derivat von Buddhabrot
Randelbrot	Iterationsformel mit zusätzlichen Zufallsfaktor.

Stichwörter

3.Dimension	48, 52
Abtastung	36, 37, 47
Anfangsbedingung	87
Animation	24
Antennen	66
Attraktor	43, 44, 45, 82, 87
Aufsummierung	87
Auswertungsarten	56
Belichtung	69, 73, 92
Betrag von Z	63
Bilddrehung	6, 15, 100
Bildschirmkoordinate	21
Blasenwerte	67
Bubbles	67
Einschwingvorgang	92
Farbcodierung	48, 52
Fibonacci-Folge	67
Formelzeichen	103
Hauptzykloid	66
Isolinie	52
Iterferenz	44, 45
Juliamenge	60
Konvergenzgeschwindigkeit	97
Koordinatensystem	15, 21
Korrelation	66
Mandelbrotformel	16
Min-Z	67
Orbit	24, 25, 87
Orbit-Aufsummierung	54, 55, 87
Orbitanalyse	63, 87
Orte besonderer Bedeutung	54
Pantoffeltierchen.avi	24
Periodenanzahl	66
Periodenverdopplung	60
Periodizität	63, 70
Pixelspiel	21
Pseudokonvergenz	35
Raster	38
Rechengenauigkeit	35
Reise	60

Runout	35
Satellit	55, 68, 87
Speichen	66
Spiegelsymmetrisc	6
Symbole	103
Zahlenformate	30, 39
Zeitreihe	25