

算法设计与分析作业一

作者：吴润泽 学号：181860109

Email: 181860109@smail.nju.edu.cn

2020 年 4 月 1 日

目录

PART I	3
problem 1.1	3
problem 1.2	4
problem 1.3	5
problem 1.5	6
problem 1.6	7
problem 1.7	8
 PART II	 9
problem 2.2	9
problem 2.3	9
problem 2.5	10
problem 2.6	11
problem 2.7	14
problem 2.15	14
problem 2.17	17
problem 2.18	17
problem 2.20	18
 PART III	 19
problem 3.2	19
problem 3.4	20
problem 3.5	21
problem 3.6	22
problem 3.7	23

PART I

problem 1.1

(1)

算法 1 对三个数进行排序

输入: 含有三个各不相同的整数的序列 $A = \{a, b, c\}$ **输出:** 从小到大排好序的序列 A

```

1: function THREENUMSORT( $A$ )
2:   for  $i \leftarrow 2$  to 3 do
3:      $temp \leftarrow A[i]$ 
4:      $j \leftarrow i - 1$ 
5:     while  $A[j] > temp$  and  $j > 0$  do
6:        $A[j + 1] \leftarrow A[j]$ 
7:        $j \leftarrow j - 1$ 
8:     end while
9:      $A[j + 1] \leftarrow temp$ 
10:  end for
11: end function

```

(2)

最坏情况比较次数为: 3 次, 平均情况比较次数为: $\frac{2+2+3+3+3+3}{6} = \frac{8}{3}$ 次。

(3)

在最坏情况下: 至少需要比较 3 次, 最坏情况下, 即每次进入 while 循环当前 i 指针位置都要与其前面元素进行比较。假设三个数按照大小依次为 a, b, c , 则初始未排序序列共有 6 种即 $\{abc\}, \{acb\}, \{bac\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$ 。其中 $\{acb\}, \{bca\}, \{cab\}, \{cba\}$ 四种序列, 根据算法1, 在 for 循环体中, 第一次循环需要比较 1 次, 第二次循环需要比较 2 次, 因此最坏情况下需要比较 3 次

problem 1.2

(1)

算法 2 三个数的中位数

输入: 含有三个各不相同的整数 $\{a, b, c\}$ **输出:** 返回序列的中位数

```
1: function THREENUMMIDDLE( $a, b, c$ )
2:   if  $a < b$  then
3:      $swap(a, b)$ 
4:   end if
5:   if  $b > c$  then
6:     return  $b$ 
7:   else if  $a < c$  then
8:     return  $a$ 
9:   else
10:    return  $c$ 
11:   end if
12: end function
```

(2)

在算法 2 中 最坏情况下比较次数为: 3 次

平均情况比较次数为: $\frac{2+2+3+3+3+3}{6} = \frac{8}{3}$

(3)

在最坏情况下: 首先第一个 IF 语句体中, 确定前两个数字的大小关系, 如果之后不满足第二个数大于第三个数, 则此时中位数在第一个数和第三个数之间, 仍需一次比较判断, 故最坏情况下需要比较三次。

problem 1.3

(1)

反例： 假设全集 $U = 1, 2, 3, 4$, U 的子集组成的集合族 $S = S_1, S_2, S_3, S_4$, 其中 $S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2, 4\}, S_3 = \{1, 2, 5\}, S_4 = \{4, 5\}$.

根据题中所给算法得到的覆盖为 $\{S_1, S_2, S_3\}$, 而正确的最小覆盖应为 $\{S_1, S_4\}$.

(2)

算法 3 最小集合覆盖：贪心近似解

输入： 待覆盖的集合 U , U 的子集组成的一个集合族 S

输出： 作为覆盖集的结果 C

```

1: function COVER( $U, S$ )
2:    $members \leftarrow U$ 
3:    $subsets \leftarrow S$ 
4:    $covering \leftarrow \{\}$ 
5:   while  $size(members) > 0$  and  $size(subsets) > 0$  do
6:      $intersection \leftarrow set\_intersection(members, subsets)^1$ 
7:      $members \leftarrow remove(members, intersection)$ 
8:      $subsets \leftarrow remove(subsets, intersection)^2$ 
9:      $covering \leftarrow add(covering, intersection)^3$ 
10:  end while
11:  if  $size(members) > 0$  then
12:    return  $-1^4$ 
13:  end if
14:  return  $covering$ 
15: end function

```

¹在 subsets 中找出能够覆盖到 members 的最大交集

²在 members 中将 intersection 覆盖元素去掉, 在 subsets 中将 intersection 集合去掉

³在 covering 中加入 intersection 作为覆盖集成员

⁴如果 members 中仍然存在未被覆盖的元素, 那么不可能实现完全覆盖

(3)

不能总是得到最小覆盖。

反例： 假设全集 $U = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, U 的子集组成的集合族 $S = S_1, S_2, S_3, S_4$, 其中 $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{1, 2, 5\}, S_3 = \{3, 4, 6\}, S_4 = \{7\}$.

根据上述算法 3 得到的覆盖为 $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, 而正确的最小覆盖应为 $\{S_2, S_3, S_4\}$. 因此并不能总是得到正确解。

problem 1.5

Induction on n:

- Base case

$$\begin{aligned} & - n = 0, \text{ for any} \\ & x : \text{HORNER}(A[0], x) = a_0 \end{aligned}$$

- Assumption

$$\begin{aligned} & - n = k, \text{ for any } x : \\ & \text{HORNER}(A[0 \dots k], x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

- Induction

$$\begin{aligned} & - n = k + 1, \text{ for any } x \text{ Assume } B[0 \dots k] \leftarrow A[1 \dots k + 1] : \\ & \text{HORNER}(A[0 \dots k + 1], x) \\ & = x * \text{HORNER}(B[0 \dots k], x) + a_0 \\ & = x * (a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \dots + a_2 x + a_1) + a_0 \\ & = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

problem 1.6

(1)

Induction on z :

• Base case

– $z = 0$, for any $y \geq 0$: $INT_MULT(y, 0) = 0$ – $z = 1$, for any $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 & INT_MULT(y, 1) \\
 &= INT_MULT(2y, \lfloor \frac{1}{2} \rfloor) + y \cdot (1 \bmod 2) \\
 &= INT_MULT(2y, 0) + y \\
 &= y
 \end{aligned}$$

• Assumption

– for any $z \geq k$, for any $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 & INT_MULT(y, z) \\
 &= INT_MULT(2y, \lfloor \frac{z}{2} \rfloor) + y \cdot (z \bmod 2) \\
 &= y \cdot z
 \end{aligned}$$

• Induction

– $z = k + 1$, for any y :

$$\begin{aligned}
 & INT_MULT(y, k + 1) \\
 &= INT_MULT(2y, \lfloor \frac{k + 1}{2} \rfloor) + y \cdot (k + 1 \bmod 2) \\
 &= y \cdot (2 \lfloor \frac{k + 1}{2} \rfloor + (k + 1) \bmod 2) \\
 &= y \cdot (k + 1)
 \end{aligned}$$

(2)

Induction on z : 与证明方法类似, 将其中的 $c=2$ 替换为 c 即可。

problem 1.7

平均时间复杂度:

$$A(n) = \sum_{I \in D(n)} Pr(I) f(I) = \frac{1}{n} \cdot 10 \cdot \frac{n}{4} + \frac{2}{n} \cdot 20 \cdot \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} \cdot 30 \cdot \frac{n}{4} + \frac{1}{2n} \cdot n \cdot \frac{n}{4} = \frac{65}{4} + \frac{n}{8}$$

PART II

problem 2.2

证明:

$$n \geq 1, \text{ let } 2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1,$$

$$\Rightarrow k < \log(2^k + 1) \leq \log(n + 1) \leq \log(2^{k+1}) = k + 1 \quad (1)$$

$$(1) \rightarrow \lceil \log(n + 1) \rceil = k + 1$$

$$\Rightarrow k + 1 = \log(2^k) + 1 \leq \log(n) + 1 \leq \log(2^{k+1} - 1) + 1 < k + 2 \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \lfloor \log(n) + 1 \rfloor = k + 1$$

因此, $\lceil \log(n + 1) \rceil = \lfloor \log(n) + 1 \rfloor$, 证毕。

problem 2.3

(1)

证明: 对于斐波那契数列: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, 对于 F_n 的奇偶性与 F_{n-1} F_{n-2} 的奇偶性有关。

	F_n	F_{n-1}	F_{n-2}
	奇	奇	偶
奇偶性:	奇	偶	奇
	偶	奇	奇
	偶	偶	偶

由上表: 斐波那契数列前两项为 1, 均为奇数, 因此永远不会出现偶数加偶数的情况, 所以只能是前 3 种假发循环出现, 因此偶数均出现在项数为 3 的倍数的位置。

(2)

Induction on n:

• Base case

$$- n = 2, F_2^2 - F_3F_1 = -1 = (-1)^3$$

• Assumption

$$- n = k, F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} = (-1)^{k+1}$$

• Induction

$$- n = k + 1 :$$

$$\begin{aligned} & F_{k+1}^2 - F_kF_{k+2} \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k-1}) - F_kF_{k+2} \\ &= F_{k-1}F_{k+1} + F_kF_{k+1} - F_kF_{k+2} \\ &= F_k^2 + F_kF_{k+1} - F_kF_{k+2} - (-1)^{k+1} \\ &= F_k(F_k + F_{k+1} - F_{k+2}) + (-1)^{k+2} \\ &= (-1)^{k+2} \end{aligned}$$

problem 2.5

(1)

证明： 2-tree 即结点的度为 0 或 2，即仅有 n_0, n_2 假设共有 n 个结点，则 $n_0 + n_2 = n$ ，同时 n 个结点则有 $n-1$ 条边， $n-1$ 条边由度数为 2 的结点组成，即 $2n_2 = n - 1 = n_0 + n_2 - 1 \Rightarrow n_0 = n_2 + 1$ ，证毕。

(2)

成立

证明： 同上述证明，假设 n 个结点，则 $n_0 + n_1 + n_2 = n$ ， $n-1$ 条边由度数为 1 和度数为 2 的结点组成，即 $2n_2 + n_1 = n - 1 = n_0 + n_1 + n_2 - 1 \Rightarrow n_0 = n_2 + 1$ ，证毕。

problem 2.6

(1)

• *O transitivity*

$$\begin{aligned}
& f(n) = O(g(n)), g(n) = O(h(n)), \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = d < \infty \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)} = c \cdot d < \infty \\
& \rightarrow f(n) = O(h(n)), \text{ proved.}
\end{aligned}$$

• *Ω transitivity*

$$\begin{aligned}
& f(n) = \Omega(g(n)), g(n) = \Omega(h(n)), \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = d > 0 \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)} = c \cdot d > 0 \\
& \rightarrow f(n) = \Omega(h(n)), \text{ proved.}
\end{aligned}$$

• *Θ transitivity*

$$\begin{aligned}
& f(n) = \Theta(g(n)), g(n) = \Theta(h(n)), \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = d (0 < c, d < \infty) \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)} = c \cdot d (0 < c \cdot d < \infty) \\
& \rightarrow f(n) = \Theta(h(n)), \text{ proved.}
\end{aligned}$$

• *o transitivity*

$$\begin{aligned}
& f(n) = o(g(n)), g(n) = o(h(n)), \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0 \\
& \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)} = 0 \\
& \rightarrow f(n) = o(h(n)), \text{ proved.}
\end{aligned}$$

• ω transitivity

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \omega(g(n)), g(n) = \omega(h(n)), \\
 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \\
 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \\
 &\rightarrow f(n) = \omega(h(n)), \text{ proved.}
 \end{aligned}$$

(2)

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n)} = 1$, 对于 O, Θ, Ω 三种关系的定义均符合, 因此满足自反性。

(3)

证明:

$$\begin{aligned}
 f(n) = \Theta(g(n)) &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, (0 < c, < \infty) \\
 \text{对称性: } &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{c} (0 < \frac{1}{c} < \infty) \\
 &\rightarrow g(n) = \Theta(f(n)), \text{ proved.}
 \end{aligned}$$

由 (1), (2), (3) 可知, Θ 满足传递性、自反性、对称性, 因此是等价关系。

(4)

证明:

$$\begin{aligned}
 f(n) = O(g(n)), &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty \\
 \text{充分性: } f(n) = \Omega(g(n)), &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \\
 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, (0 < c, < \infty) \\
 &\rightarrow f(n) = \Theta(g(n)), \text{ proved.}
 \end{aligned}$$

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

必要性: $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, (0 < c, < \infty)$
 $\rightarrow f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)), \text{ proved.}$

(5)

a. $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{1}{c} > 0 \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

b. $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$

(6)

$$\text{assume } A = o(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset, f(n) \in A$$

a. $f(n) = o(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0, f(n) = \omega(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

产生矛盾, 即 $o(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$

$$\text{assume } A = \Theta(g(n)) \cap o(g(n)) \neq \emptyset, f(n) \in A$$

b. $f(n) = \Theta(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, (0 < c < \infty) f(n) = o(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

产生矛盾, 即 $\Theta(g(n)) \cap o(g(n)) = \emptyset$

$$\text{assume } A = \Theta(g(n)) \cap \omega(g(n)) \neq \emptyset, f(n) \in A$$

c. $f(n) = \Theta(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c, (0 < c < \infty) f(n) = o(g(n)), \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

产生矛盾, 即 $\Theta(g(n)) \cap \omega(g(n)) = \emptyset$

problem 2.7

(1)

排序: $\log n < n < n \log n < n^2 = n^2 + \log n < n^3 < n - n^3 + 7n^5 < 2^n$

(2)

排序: $\log \log n < \log n < (\log n)^2 < \sqrt{n} < n < n \log n < n^{1+\varepsilon} < n^2 = n^2 + \log n < n^3 < n - n^3 + 7n^5 < 2^{n-1} = 2^n = e^n < n!$

problem 2.15

(1)

$$a = 1, b = 2, f(n) = 1$$

$$n^{\log_3 2} \approx n^{0.63}, f(n) = O(n^{\log_3 2 - 0.5}), \varepsilon > 0$$

$$\text{master case 1} : T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$$

(2)

$$a = 1, b = 2, f(n) = c \log n$$

$$n^{\log_2 1} = 0, \forall \varepsilon > 0, f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 1 + \varepsilon})$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c \log n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + c \log n + c(\log n - 1)$$

...

$$T(n) = T(1) + c \log n + c(\log n \log n - 1 - 2 - \dots - k)$$

$$T(n) = \Theta((\log n)^2)$$

(3)

$$a = 1, b = 2, f(n) = cn$$

$$n^{\log_2 1} = 0, f(n) = \Omega(n^{\log_2 1 + 1}), \varepsilon > 0$$

$$\text{proving : } af\left(\frac{n}{b}\right) \leq df(n), n \geq N_0, d > 0$$

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = c\frac{n}{2} \leq cdn, d \geq 0.5$$

$$\text{master case3 : } T(n) = \Theta(n)$$

(4)

$$a = 2, b = 2, f(n) = cn$$

$$n^{\log_2 2} = n, f(n) = \Theta(n^{\log_2 2})$$

$$\text{master case2 : } T(n) = \Theta(n \log n)$$

(5)

$$a = 2, b = 2, f(n) = cn \log n$$

$$n^{\log_2 2} = n, \forall \varepsilon > 0, f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon})$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn \log n$$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + c\frac{n \log n - 1}{2}\right) + cn \log n$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2cn \log n - c$$

...

$$T(n) = cn \log n + cn(\log n - 1) + cn(\log n - 2) + \cdots + cn(\log n - k + 1)$$

$$T(n) = n \log^2 n - nk(k-1)/2$$

$$T(n) = \Theta(n(\log n)^2)$$

(6)

$$a = 2, b = 2, f(n) = cn^2$$

$$n^{\log_2 2} = n, f(n) = \Omega(n^{\log_2 2 + 1}), \varepsilon > 0$$

$$\text{proving : } af\left(\frac{n}{b}\right) \leq df(n), n \geq N_0, d > 0$$

$$2f\left(\frac{n}{2}\right) = c \frac{n^2}{2} \leq cdn^2, d \geq 0.5$$

$$\text{master case3 : } T(n) = \Theta(n^2)$$

(7)

$$a = 49, b = 25, f(n) = cn^{\frac{3}{2}} \log n$$

$$n^{\log_{25} 49} \approx n^{1.21}, f(n) = \Omega(n^{\log_{25} 49 + 0.2}), \varepsilon > 0$$

$$\text{proving : } af\left(\frac{n}{b}\right) \leq df(n), n \geq N_0, d > 0$$

$$49f\left(\frac{n}{25}\right) = 49c \left(\frac{n^2}{625} (\log n - 2 \log 5)\right) \leq cdn^{1.5} \log n, d \geq 0.5$$

$$\text{master case3 : } T(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}} \log n)$$

(8)

$$T(n) = T(n-1) + 2 = T(n-2) + 4 = \cdots = T(1) + 2(n-1) = \Theta(n)$$

(9)

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n^c = T(n-2) + n^c + (n-1)^c \\ &= \cdots = T(1) + n^c + (n-1)^c + \cdots + 2^c + 1, c \geq 1 \\ &= \Theta(n^{c+1}) \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + c^n = T(n-2) + c^n + c^{n-1} \\ &= \cdots = T(1) + c^n + c^{n-1} + \cdots + c^2 + c, c \geq 1, \text{ geometric series} \\ &= \Theta(c^n) \end{aligned}$$

(11)

$T(n) = T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$ 递归树, 每一层的 $f(n) = (\frac{7}{8})^h n$,
 h 为结点所在树的高度 (根高度记为 0), 树高为 $k = \Theta(\log n)$, 则,

$$T(n) = n + \frac{7}{8}n + \cdots + (\frac{7}{8})^k n = \Theta(n)$$

problem 2.17

化简

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$$

$$\frac{T(n)}{n} = \frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + 1$$

$$A(n) = \frac{T(n)}{n}$$

A(n)

$$A(n) = A(\sqrt{n}) + 1$$

$$= A(\sqrt[4]{n}) + 2$$

$$= \cdots$$

$$= A(1) + k, n = 2^{2^k}, k = \log \log n$$

$$= \Theta(\log \log n)$$

解得

$$T(n) = \Theta(n \log \log n)$$

problem 2.18

$a = 1, b = 2, f(n) = c \log n^{\log_2 1} = 0$, three conditions not satisfied

case 1: $\forall \varepsilon > 0, f(n) \neq O(n^{\log_2 1 - \varepsilon})$

case 2: $f(n) \neq \Theta(n^{\log_2 1})$

case 3: $\forall \varepsilon > 0, f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 1 + \varepsilon})$

problem 2.20**MYSTERY**

result: $r = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^j 1 = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$

最坏时间复杂度: $T(n) = O(n^3)$

PERSKY

result: $r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^{i+j} 1 = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2n}{3}$

最坏时间复杂度: $T(n) = O(n^3)$

PRESTIFEROUS

result: $r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^{i+j} \sum_{l=1}^{i+j-k} 1 = \frac{n^4}{8} + \frac{5n^3}{12} + \frac{3n^2}{8} + \frac{n}{12}$

最坏时间复杂度: $T(n) = O(n^4)$

CONUNDRUM

result: $r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=i+j-1}^n 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

最坏时间复杂度: $T(n) = O(n^2)$

PART III

problem 3.2

(1)

对外层循环进行数学归纳：

Base Case 外层循环第一轮结束后，使得最后一个元素大于前 $n-1$ 个元素。外层循环第二轮结束后，使得倒数第二个元素大于前 $n-2$ 个元素，且满足最后两个元素有序。

Assumption 假设外层循环第 k 轮结束后，使得倒数第 k 个元素大于前 $n-k$ 个元素，且后 k 个元素有序即 $A[n-k+1] < A[n-k+2] < \dots < A[n]$ 。

Induction 当外层循环第 $k+1$ 轮结束后，由于 $A[1 \dots n-k-1] < A[n-k] < A[n-k+1]$ ，且后 k 个元素有序，则 $A[n-k] < A[n-k+1] < \dots < A[n]$ 后 $k+1$ 个元素有序。进行最后一轮循环后， n 个元素有序，证毕。

(2)

最坏时间复杂度与平均复杂度相同： 任何情况下，内层循环都要进行 $i-1$ 次比较，最坏与平均情况时间复杂度均为 $\sum_{i=n}^2 \sum_{j=1}^{i-1} 1 = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \Theta(n^2)$ 。

(3)

最坏时间复杂度： 不影响最坏情况时间复杂度，最坏情况下，原始序列是降序的，每次内层循环的最后一次交换都发生在待排序序列的末尾，因而每次交换次数仍未 $i-1$ 次，时间复杂度不变。

平均时间复杂度： 影响平均情况最坏时间复杂度，改进后内层循环的最后一次交换可能发生在待排段的中间位置，使得内层循环实际运行次数小于 $i-1$ ，交换和比较次数减少，但是不影响其量级仍为 $\Theta(n^2)$ 。

problem 3.4

算法 4 PREVIOUS-LARGER 改进算法

```

1: function :PREVIOUS-LARGER( $A[1 \cdots n]$ )
2:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3:      $j \leftarrow i - 1$ 
4:     while  $j > 0$  and  $A[j] \leq A[i]$  do
5:        $j \leftarrow p[j]$ 
6:     end while
7:      $p[i] \leftarrow j$ 
8:   end for
9:   return  $p[1 \cdots n]$ 
10: end function

```

证明 Induction on i :

- **Base case**

- $i = 1 : p[1] = 0$, 正确。

- **Assumption**

- $i = k : p[1 \cdots k]$ 均已被正确得到。

- **Induction**

- $i = k + 1$: 在 While 循环体中, 当 $A[j] \leq A[k + 1]$ 时, $j = p[j]$, 又由于 $A[p[j] + 1 \cdots (j - 1)] \leq A[j]$, 则 $p[k + 1] \leq p[j]$ 。

内层循环中重复向左移动 j 指针, 直到退出循环, 在退出前一次循环有 $A[j] \leq A[k + 1]$ and $A[p[j]] \geq A[k + 1]$ and $p[k + 1] \leq p[j]$, 则 $p[k + 1] = p[j]$ 正确, 算法正确性证毕。

时间复杂度 最外层循环遍历 n 次, 内层循环每次向前移动常数次, 因此时间复杂度为 $\Theta(n)$ 。

problem 3.5

算法 5 颠倒单词顺序

输入: 待翻转的句子 S , 句子长度 L 输出: 翻转后的句子 S

```

1: function REVERSE_STR( $S, start, end$ )
2: /**首先翻转整个句子的每个字符**/
3:    $low \leftarrow start, high \leftarrow end$ 
4:   while  $low < high$  do
5:      $swap(S[low], S[high])$  \\ 句子头尾字符进行翻转
6:      $low++ , high--$ 
7:   end while
8: end function
9: function REVERSE_WORD( $S, L$ )
10: /**然后翻转句子中的每个单词**/
11:    $start \leftarrow 0, end \leftarrow 0$ 
12:   for  $i \leftarrow 0$  to  $L$  do
13:      $end \leftarrow i$ 
14:     if  $S[end] = blank$  then \\ 单词范围为  $[start, end-1]$ 
15:        $SWAP\_STR(S, start, end - 1)$  \\ 对这个单词进行翻转
16:        $start \leftarrow end + 1$ 
17:     end if
18:   end for
19:   return  $S$ 
20: end function

```

时间复杂度 首先翻转整个句子前后指针同时移动 $\frac{n}{2}$ 次, 之后遍历整个句子的每一个单词的分割移动 n 次, 因此时间复杂度为 $\frac{n}{2} + n = \frac{3n}{2} = O(n)$ 。

空间复杂度 除了最开始的原始输入字符串外, 只使用若干常数级的变量, 因此如果不考虑输入字符串空间复杂度为 $O(1)$ 。

problem 3.6

(1) 可能有 1 个名人或者没有名人。

算法 6 寻找名人

输入: 人群集合 $S[1 \cdots n]$, 人数 n

输出: 名人 $target$

```

1: function FIND_TARGET( $S, n$ )
2: /**如果 A 关注 B 则 A 不是名人, 如果 B 关注 A 则 B 不是名人,
3: 如果 AB 互相关注则均不是名人, 如果 AB 互不关注均不是名人 **/
4:    $num \leftarrow n$ 
5:    $first \leftarrow 0, next \leftarrow 1$ 
6:   while  $n > 0$  do
7:     if  $S[first] \text{ YES } S[next]$  and  $S[next] \text{ NO } S[first]$  then
8:        $first \leftarrow next, next \leftarrow next + 1$   $\backslash\backslash$ 保证 first 指向可能的名人
9:        $n \leftarrow n - 1$ 
10:    else if  $S[first] \text{ NO } S[next]$  and  $S[next] \text{ YES } S[first]$  then
11:       $next \leftarrow next + 1$ 
12:       $n \leftarrow n - 1$ 
13:    else
14:       $first \leftarrow next + 1, next \leftarrow next + 2$ 
15:       $n \leftarrow n - 2$ 
16:    end if
17:  end while
18: /**如果 first 为名人则一定在 1-n 中, 否则退出循环体时 first 大于 n**/
19:  return  $first \leq num ? first : 0$   $\backslash\backslash 0$  表示没有名人
20: end function

```

(2) 时间复杂度遍历一遍所有人群即可, 时间复杂度为 $\Theta(n)$ 。

problem 3.7

算法 7 (1) 最大连续子序列和暴力算法 $O(n^3)$

```
1: function MAX_SUM1(S)
2:  /**枚举所有子序列, 并根据子序列上下界, 计算其子序列和, 与当前最
   大值进行比较**/
3:   res  $\leftarrow$  0, len  $\leftarrow$  S.length()
4:   for i  $\leftarrow$  1 to len do
5:     for j  $\leftarrow$  0 to i - 1 do
6:       cur_res  $\leftarrow$  0
7:       for k  $\leftarrow$  i to j do
8:         cur_res  $\leftarrow$  cur_res + S[k]
9:       end for
10:      res  $\leftarrow$  max(cur_res, res)
11:    end for
12:  end for
13:  return res
14: end function
```

算法 8 (2) 最大连续子序列和暴力算法 $O(n^2)$

```
1: function MAX_SUM2(S)
2: /**枚举所有子序列，数组 SUM[i] 记录前 i 项数据和，利用 SUM 数组
   根据子序列头尾计算当前子序列和，与当前最大值进行比较**/
3:   res  $\leftarrow$  0, len  $\leftarrow$  S.length()
4:   for i  $\leftarrow$  2 to len do
5:     sum[i] = sum[i - 1] + S[i]
6:     for j  $\leftarrow$  1 to i - 1 do
7:       res  $\leftarrow$  max(sum[i] - sum[j - 1], res)
8:     end for
9:   end for
10:  return res
11: end function
```

算法 9 (3) 最大连续子序列和分治算法 $O(n \log n)$

```
1: function MAX_SUM3( $S, start, end$ )
2: /**最大子序列和的位置存在三种情况: 1. 在左半部分, 2. 在右半部分,
   3. 跨越左右两部分, 三者中的最大者即为所求。**/
3:    $res \leftarrow 0, len \leftarrow S.length(), sum[1] = S[1]$ 
4:   if  $start = end$  then
5:      $res = S[start] > 0 ? S[start] : 0$ 
6:   else
7:      $center \leftarrow (start + end) / 2$ 
8:      $left\_res = MAX\_SUM3(S, start, center)$ 
9:      $right\_res = MAX\_SUM3(S, center + 1, end)$ 
10: /**计算包含左半部分最右元素的最大和  $s1$ **/
11:      $left \leftarrow 0, s1 \leftarrow 0$ 
12:     for  $i \leftarrow center$  to  $start$  do
13:        $left \leftarrow lefts + S[i]$ 
14:        $s1 \leftarrow max(left, s1)$ 
15:
16:     end for/**同理计算包含右半部分最左元素的最大和  $s2$ **/
17:      $res = max(left\_res, right\_res, s1 + s2)$ 
18:   end if
19:   return  $res$ 
20: end function
```

算法 10 (4) 最大连续子序列和去冗余算法

```
1: function MAX_SUM4(S)
2: /**如果当前子序列和非正，那么对后续子序列和无贡献应当舍去**/
3:    $res \leftarrow 0, len \leftarrow S.length(), sum \leftarrow 0$ 
4:   for  $i \leftarrow 0$  to  $len$  do
5:      $sum = sum > 0 ? sum + S[i] : S[i]$ 
6:      $res = \max(sum, res)$ 
7:   end for
8:   return  $res$ 
9: end function
```

算法 11 (5) 最大连续子序列和动态规划算法

```
1: function MAX_SUM4(S)
2: /**sum[i] 用来记录以 S[i] 结尾的序列最大和**/
3:    $res \leftarrow 0, len \leftarrow S.length(), sum[0] \leftarrow 0$ 
4:   for  $i \leftarrow 1$  to  $len$  do
5:      $sum[i] = \max(sum[i], sum[i - 1] + num[i])$ 
6:      $res = \max(sum[i], res)$ 
7:   end for
8:   return  $res$ 
9: end function
```
