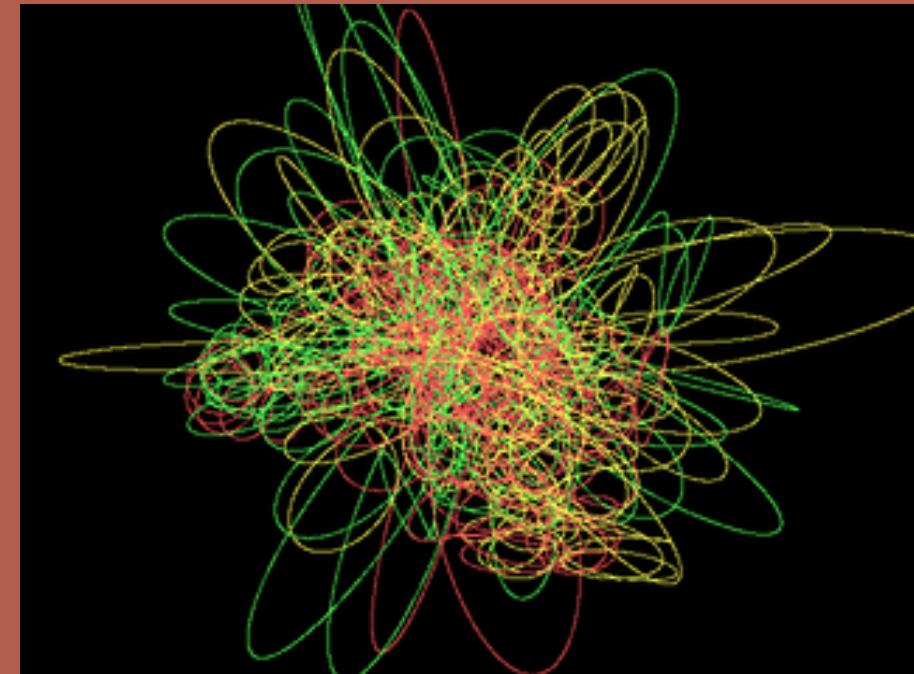


**Улучшение точности
численного
интегрирования
гравитационной системы
 N тел с помощью
сдвоенных чисел двойной
точности**

Субботин Максим 9382

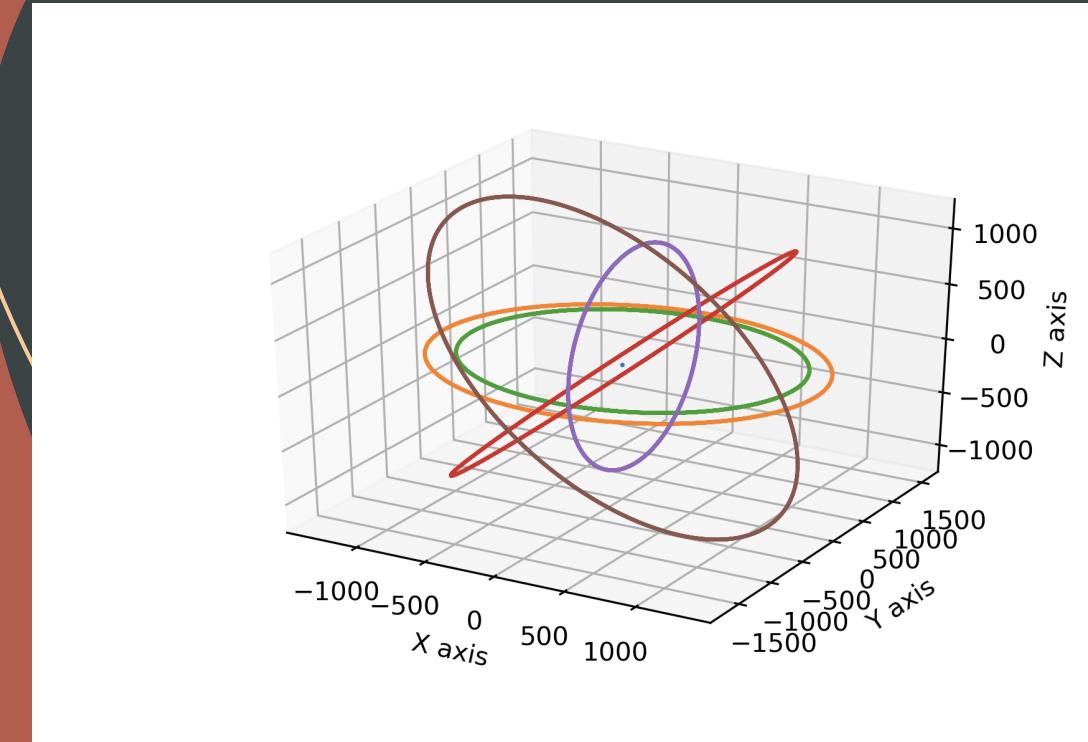
Кодуков Александр 9382



Задача N тел

Описать эволюцию системы из N тел
(материальных точек) в
гравитационном поле.

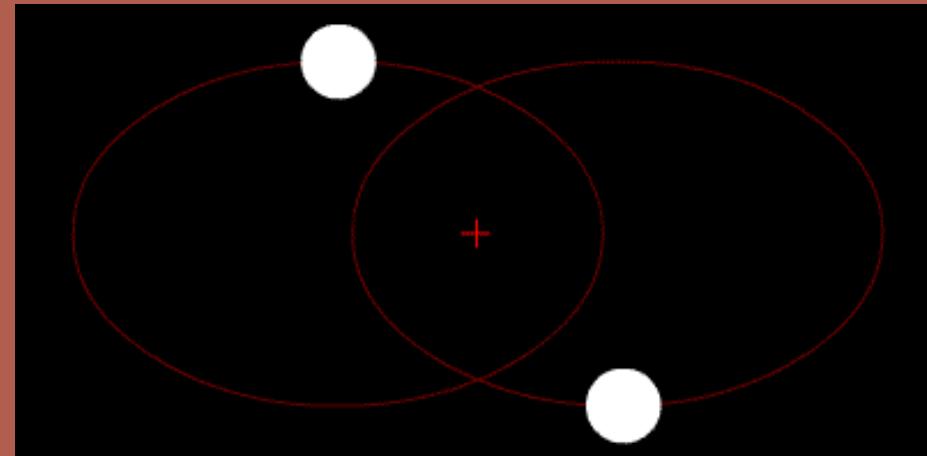
Тело задается массой, положением и
скоростью.



Задача N тел

- 1 тело: описывается первым законом Ньютона
- 2 тела: существует общее решение для нахождения орбиты
- 3+ тел: невозможно выразить через уравнения от координат и скоростей в общем случае.

Задача может быть решена только численными методами



Физика явлений

- Сила гравитационного взаимодействия, действующая на тело n :

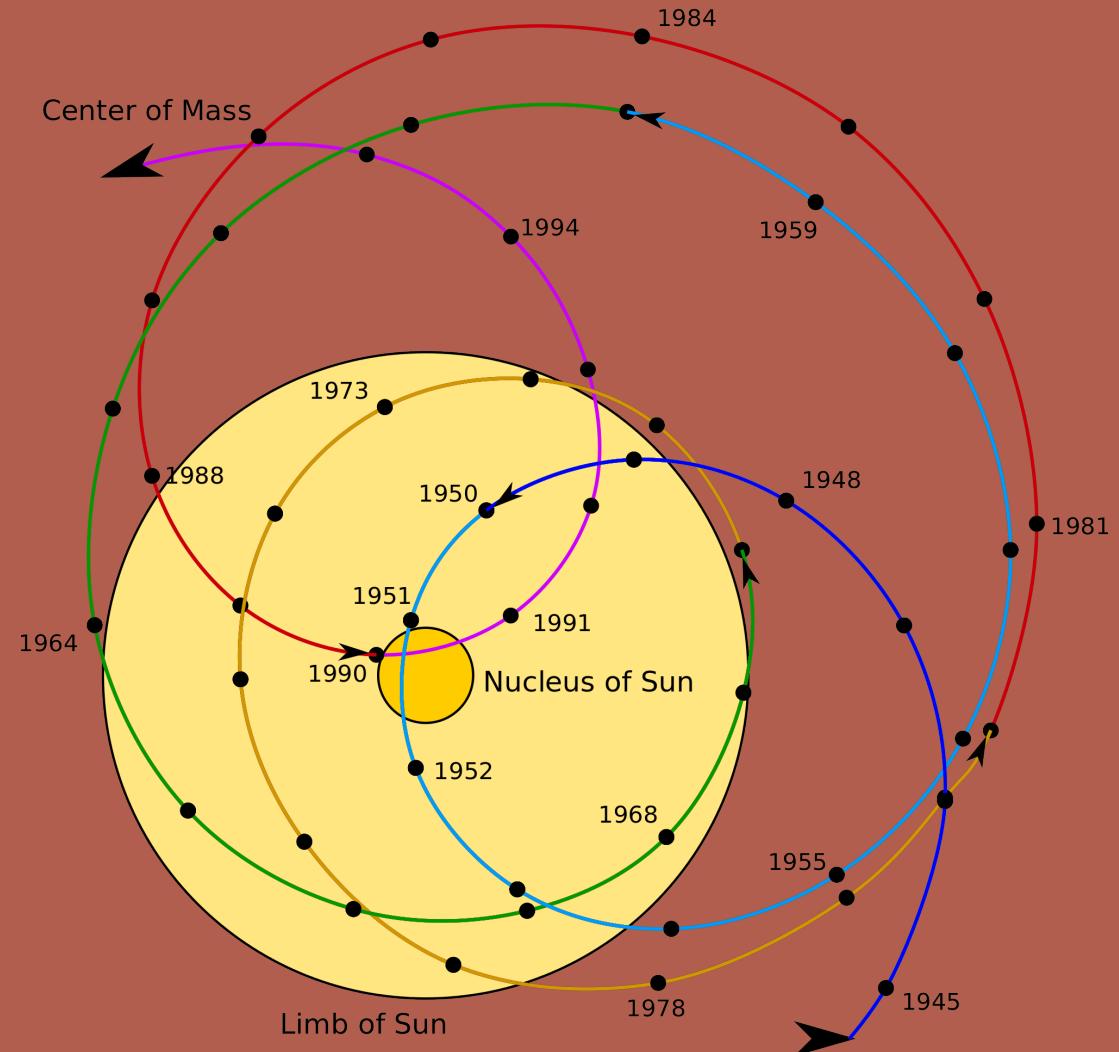
$$\vec{F}_n = -G \sum_{k \neq n} m_n m_k \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_k}{|\vec{r}_n - \vec{r}_k|^3}$$

- Ускорение тела n :

$$\vec{a}_n = \vec{F}_n / m_n = -G \sum_{k \neq n} m_k \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_k}{|\vec{r}_n - \vec{r}_k|^3}$$

Инварианты

- Полная энергия системы
- Сумма моментов импульса
- Положение барицентра системы



Задача Коши

Начальные данные:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Необходимо найти:

$$y(t) - ?$$

Переход к задаче первого порядка:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}_n}{\partial t^2} = a_n = -G \sum_{k \neq n} m_k \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_k}{|\vec{r}_n - \vec{r}_k|^3}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} = a_n \\ \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial t} = \vec{v}_n \end{cases}$$

Семейство методов Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h(a_{21} k_1)),$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)),$$

⋮

$$k_i = f\left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right).$$

Порядок:

$$\bar{\mathbf{y}}(h + x_0) - \mathbf{y}(h + x_0) = O(h^{p+1}),$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i$$

Таблица Бутчера:

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n).$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Равноускоренное движение:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Метод Рунге-Кутты 4 порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right),$$

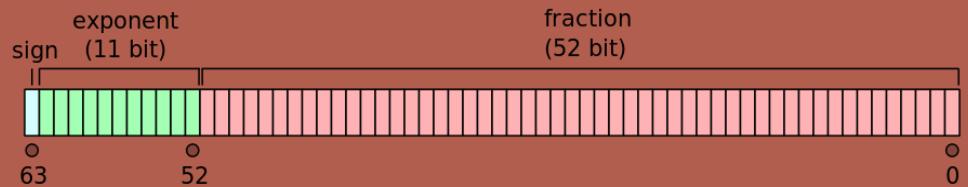
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3).$$

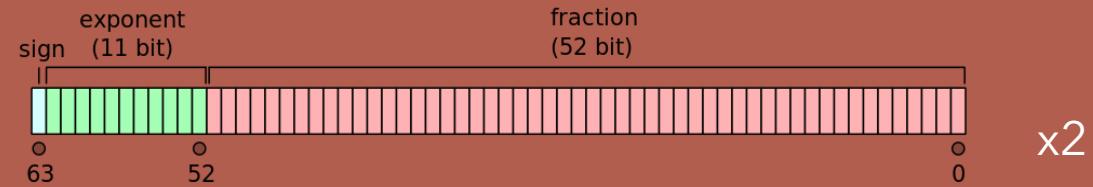
0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

Используемые типы данных

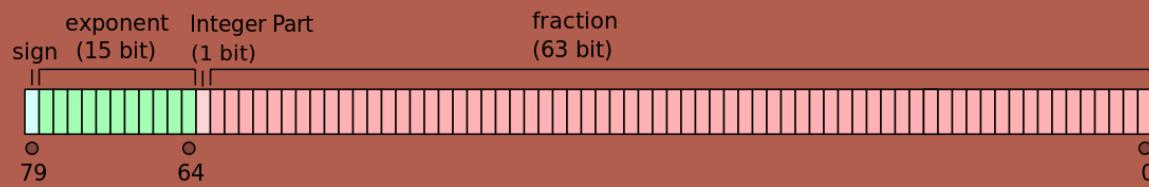
Double - число двойной точности



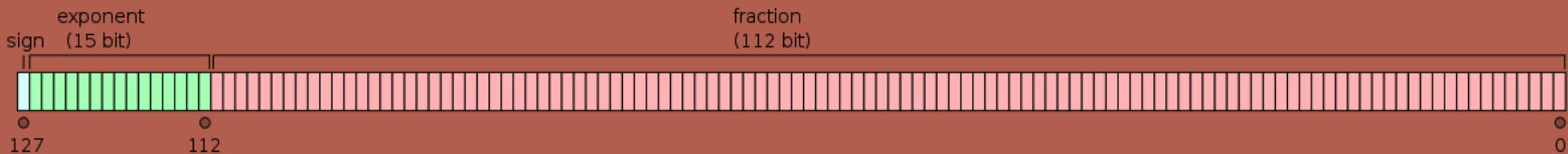
Double-double - сдвоенное число двойной точности



Extended/Long double (80) - число расширенной точности



Quadruple/Long double (128) - число четверной точности



Арифметика double-double

Число в double-double:

$$x = x_l + x_h \text{ , где } |x_l| \leq \frac{1}{2} \text{ulp}(x_h)$$

Алгоритм суммирования с учетом ошибки:

Algorithm 4.3 The Fast2Sum algorithm [108].

```
s ← RN(a + b)
z ← RN(s - a)
t ← RN(b - z)
```

Сложение чисел в double-double:

Algorithm 14.1 Dekker's algorithm for adding two double-word numbers (x_h, x_ℓ) and (y_h, y_ℓ) [108]. We assume radix 2.

```
if  $|x_h| \geq |y_h|$  then
     $(r_h, r_\ell) \leftarrow$  Fast2Sum( $x_h, y_h$ )
     $s \leftarrow$  RN(RN( $r_\ell + y_\ell$ ) +  $x_\ell$ )
else
     $(r_h, r_\ell) \leftarrow$  Fast2Sum( $y_h, x_h$ )
     $s \leftarrow$  RN(RN( $r_\ell + x_\ell$ ) +  $y_\ell$ )
end if
 $(t_h, t_\ell) \leftarrow$  Fast2Sum( $r_h, s$ )
return  $(t_h, t_\ell)$ 
```

Fused Multiply-Add/Subtract

$$\circ(ab + c)$$

Инструкция процессора, позволяющая посчитать $a * b \pm c$, с округлением только финального результата.

Пример использования:

Algorithm 4.7 Dekker product.

Require:

$$s = \lceil p/2 \rceil$$

$$(x_h, x_\ell) \leftarrow \text{Split}(x, s)$$

$$(y_h, y_\ell) \leftarrow \text{Split}(y, s)$$

$$r_1 \leftarrow \text{RN}(x \cdot y)$$

$$t_1 \leftarrow \text{RN}(-r_1 + \text{RN}(x_h \cdot y_h))$$

$$t_2 \leftarrow \text{RN}(t_1 + \text{RN}(x_h \cdot y_\ell))$$

$$t_3 \leftarrow \text{RN}(t_2 + \text{RN}(x_\ell \cdot y_h))$$

$$r_2 \leftarrow \text{RN}(t_3 + \text{RN}(x_\ell \cdot y_\ell))$$



Algorithm 5.1 2MultFMA(x_1, x_2)

$$r_1 \leftarrow \text{RN}(x_1 \cdot x_2)$$

$$r_2 \leftarrow \text{RN}(x_1 \cdot x_2 - r_1)$$

Алгоритмы суммирования

Алгоритм Кэхена:

```
function KahanSum(input)
    var sum = 0.0
    var c = 0.0

    for i = 1 to input.length do
        var y = input[i] - c
        var t = sum + y
        c = (t - sum) - y
        sum = t

    next i

return sum
```

Алгоритм Неймаера:

```
function NeumaierSum(input)
    var sum = 0.0
    var c = 0.0

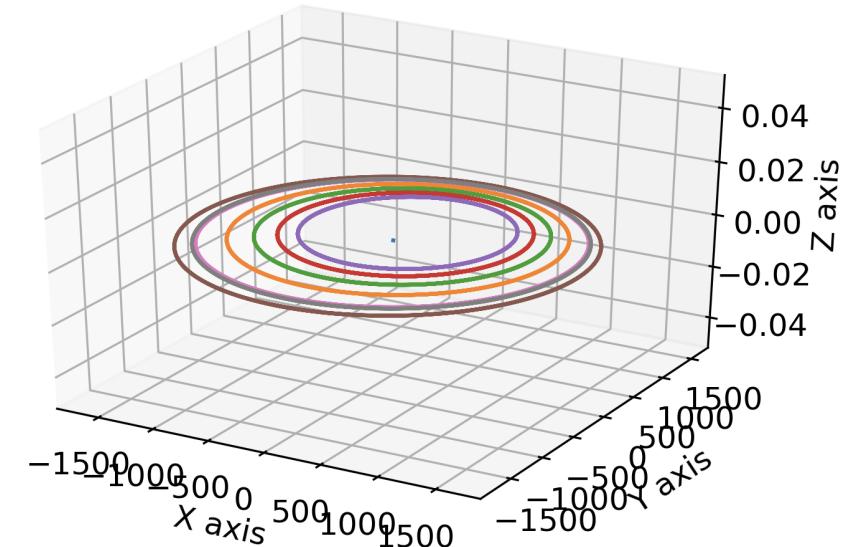
    for i = 1 to input.length do
        var t = sum + input[i]
        if |sum| >= |input[i]| then
            c += (sum - t) + input[i]
        else
            c += (input[i] - t) + sum
        endif
        sum = t

    next i

return sum + c
```

Сравнение численного интегрирования на различных типах данных

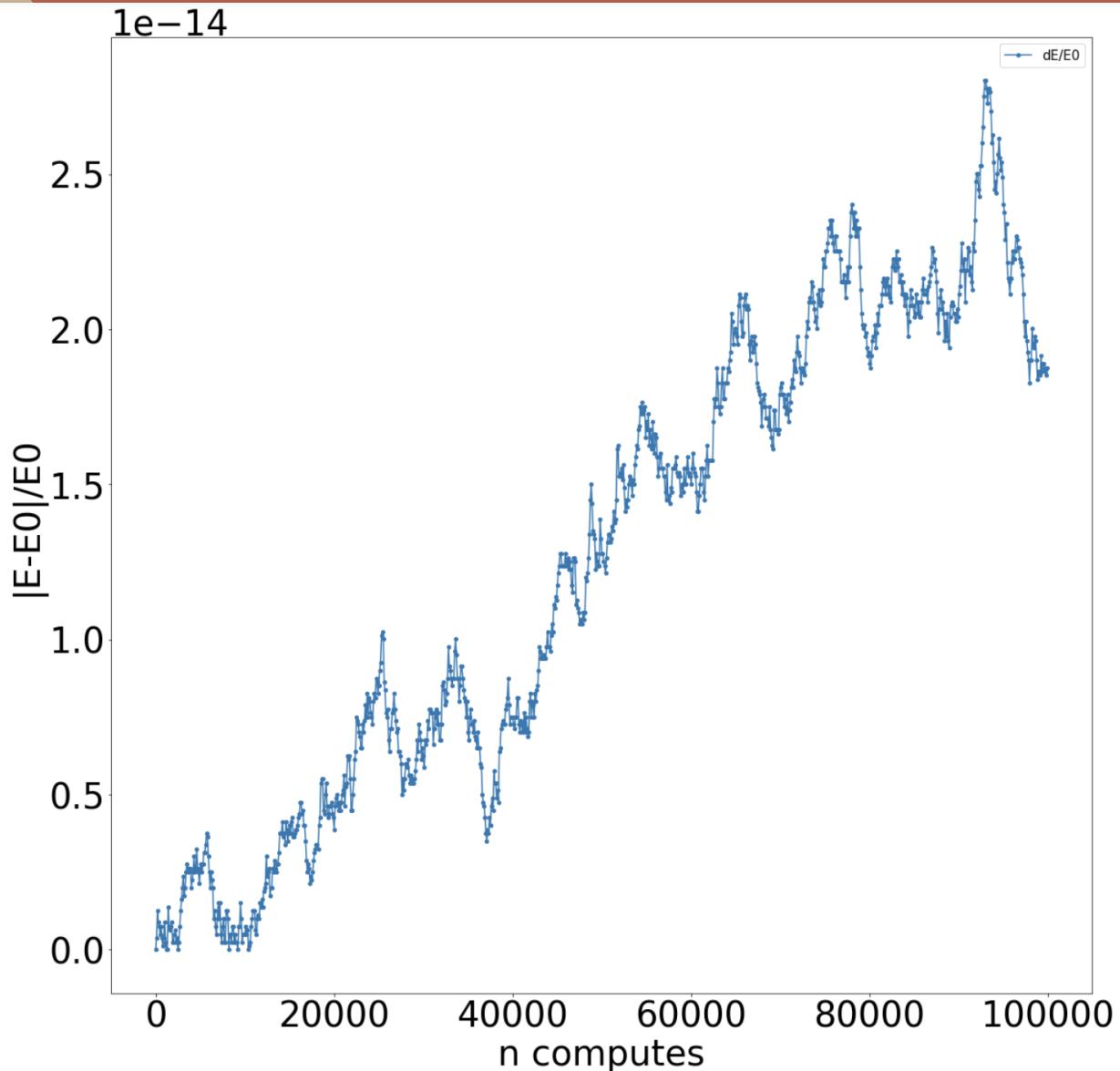
- Сравнение происходит на системе из 8 тел (планета и 7 спутников)
- 10^5 итераций метода интегрирования
- С шагом 0.1
- Записываются каждые 100 значений



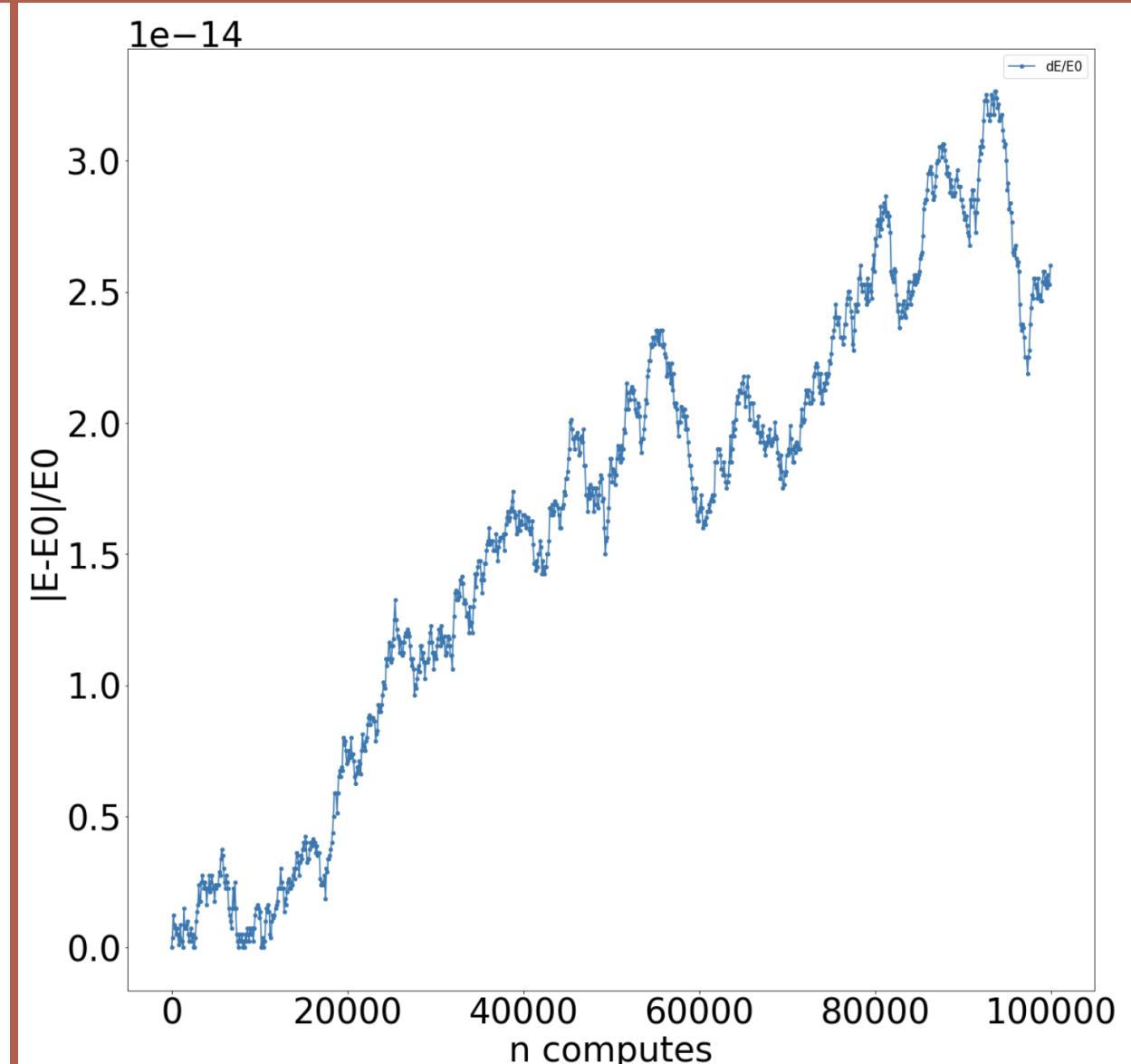
double(64 bits)

Энергия

RK4



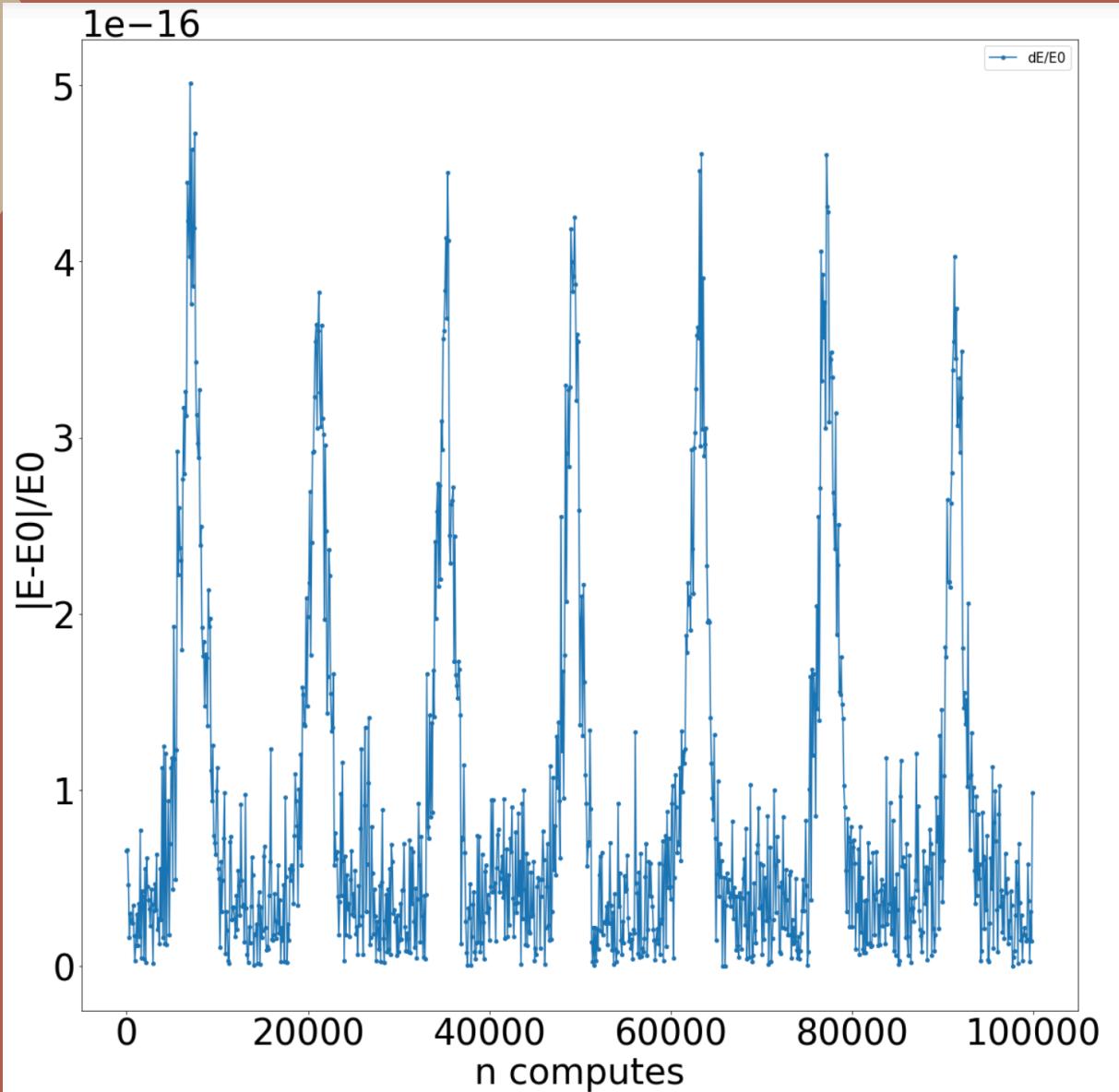
dopri8



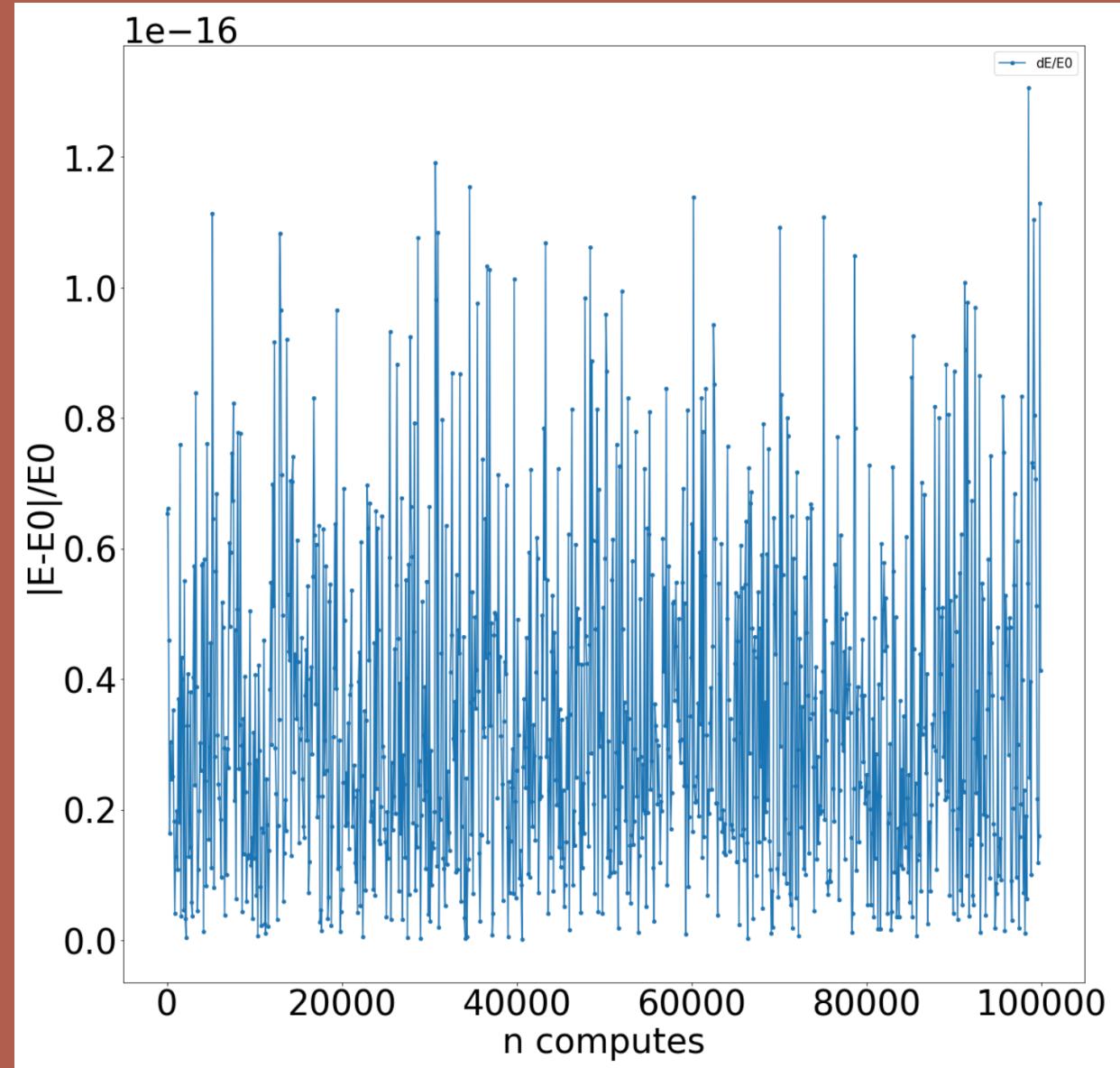
Long double(80 bits)

Энергия

RK4



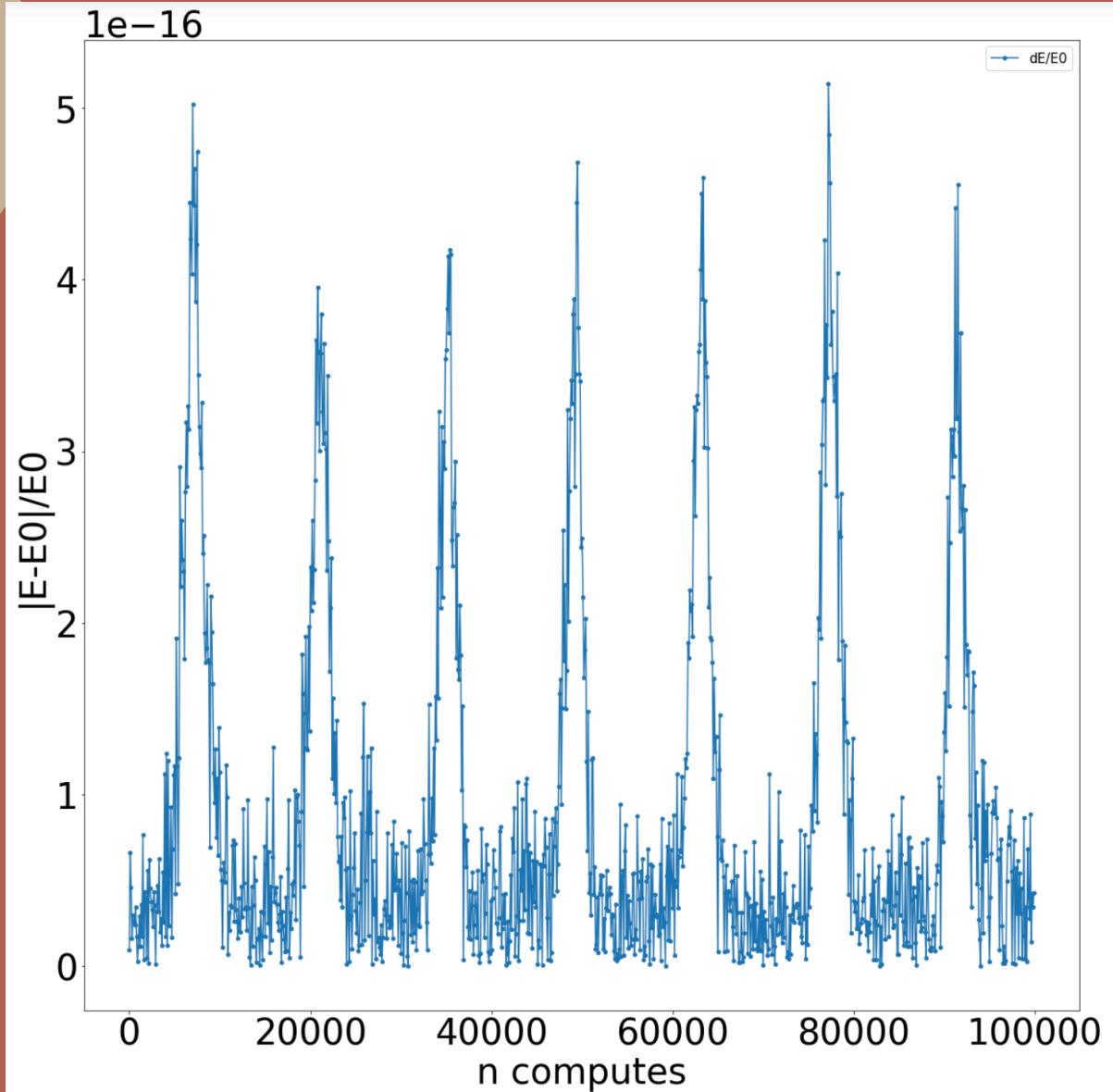
dopri8



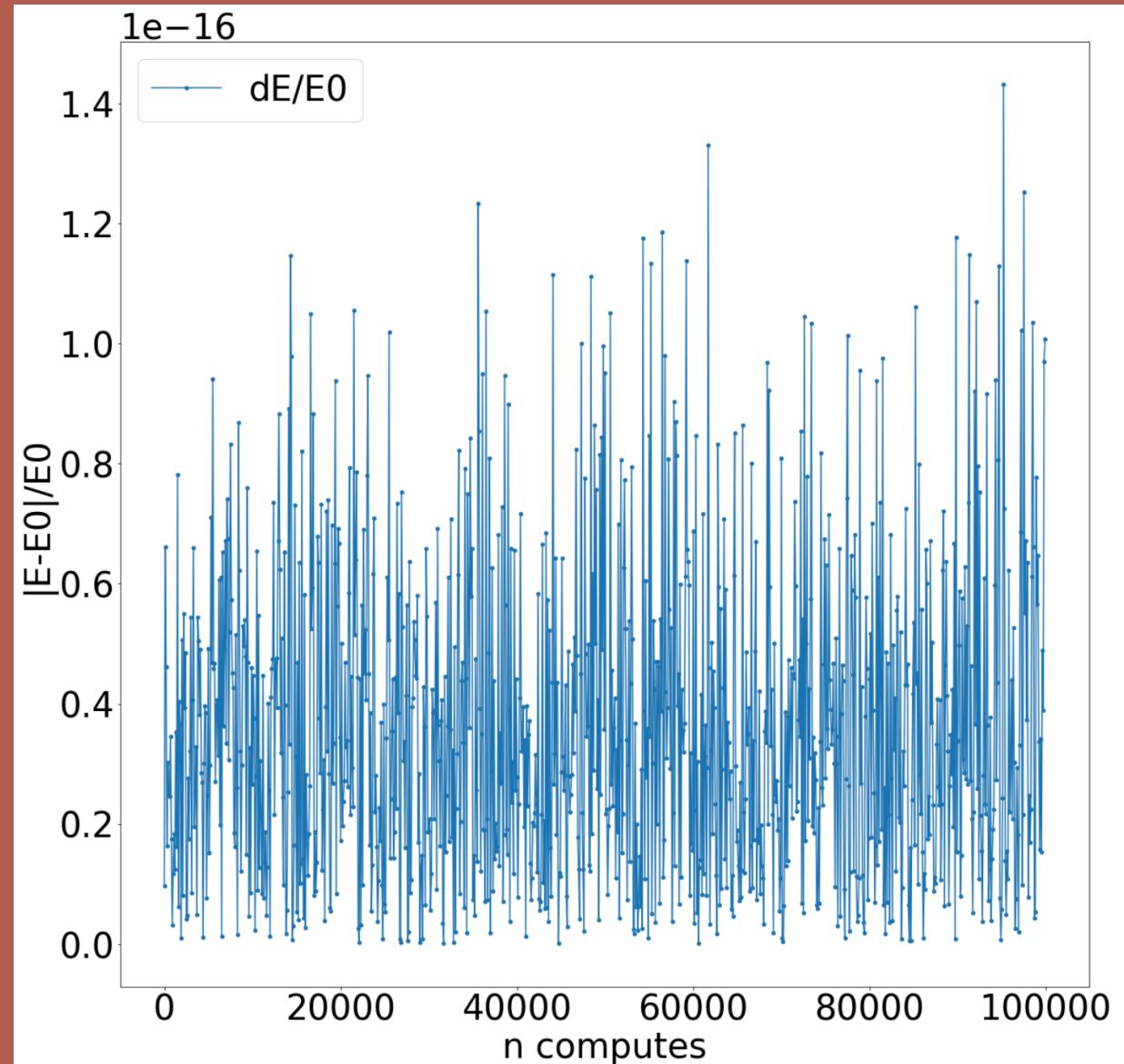
Quadruple(128 bits)

Энергия

RK4



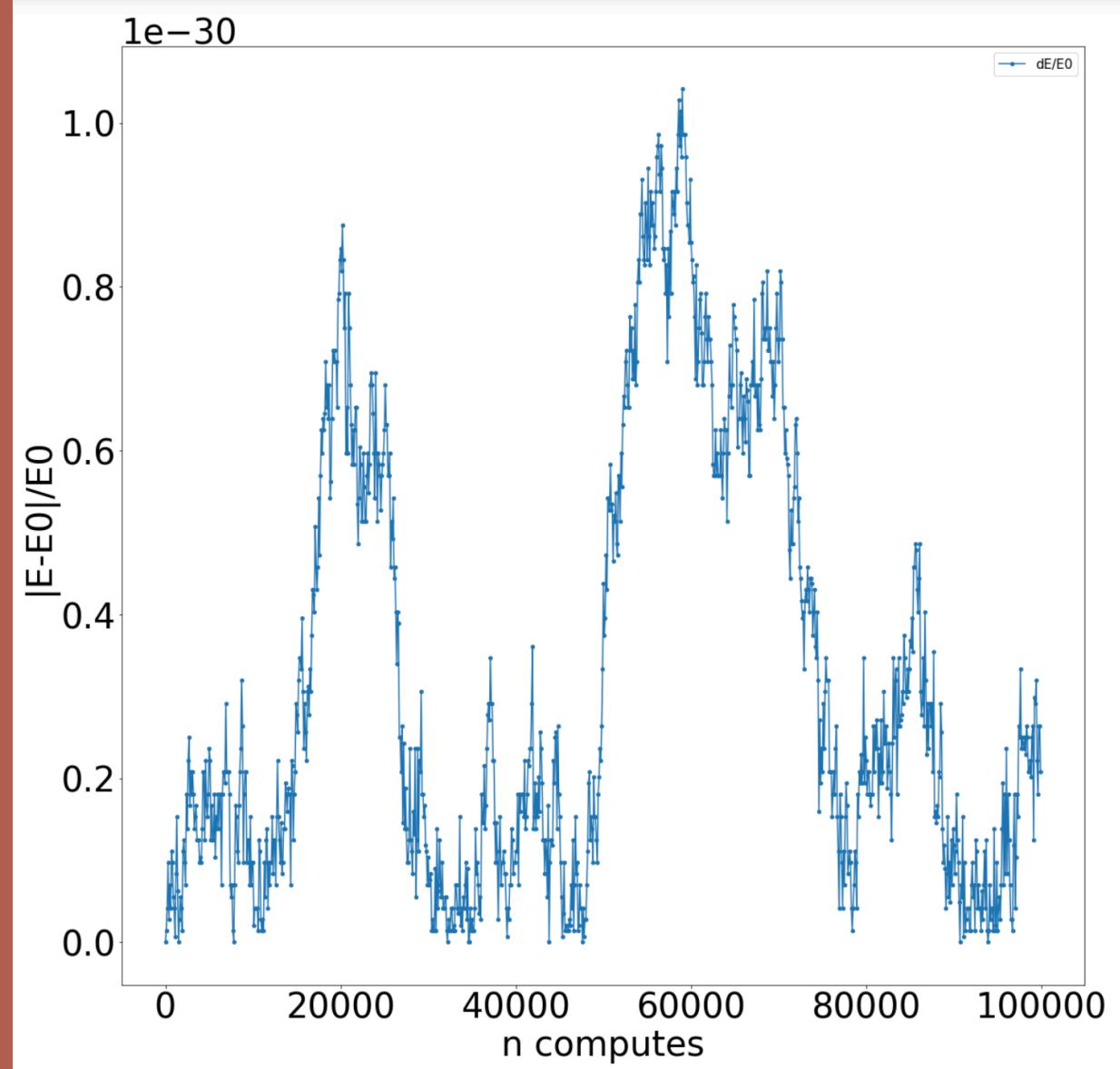
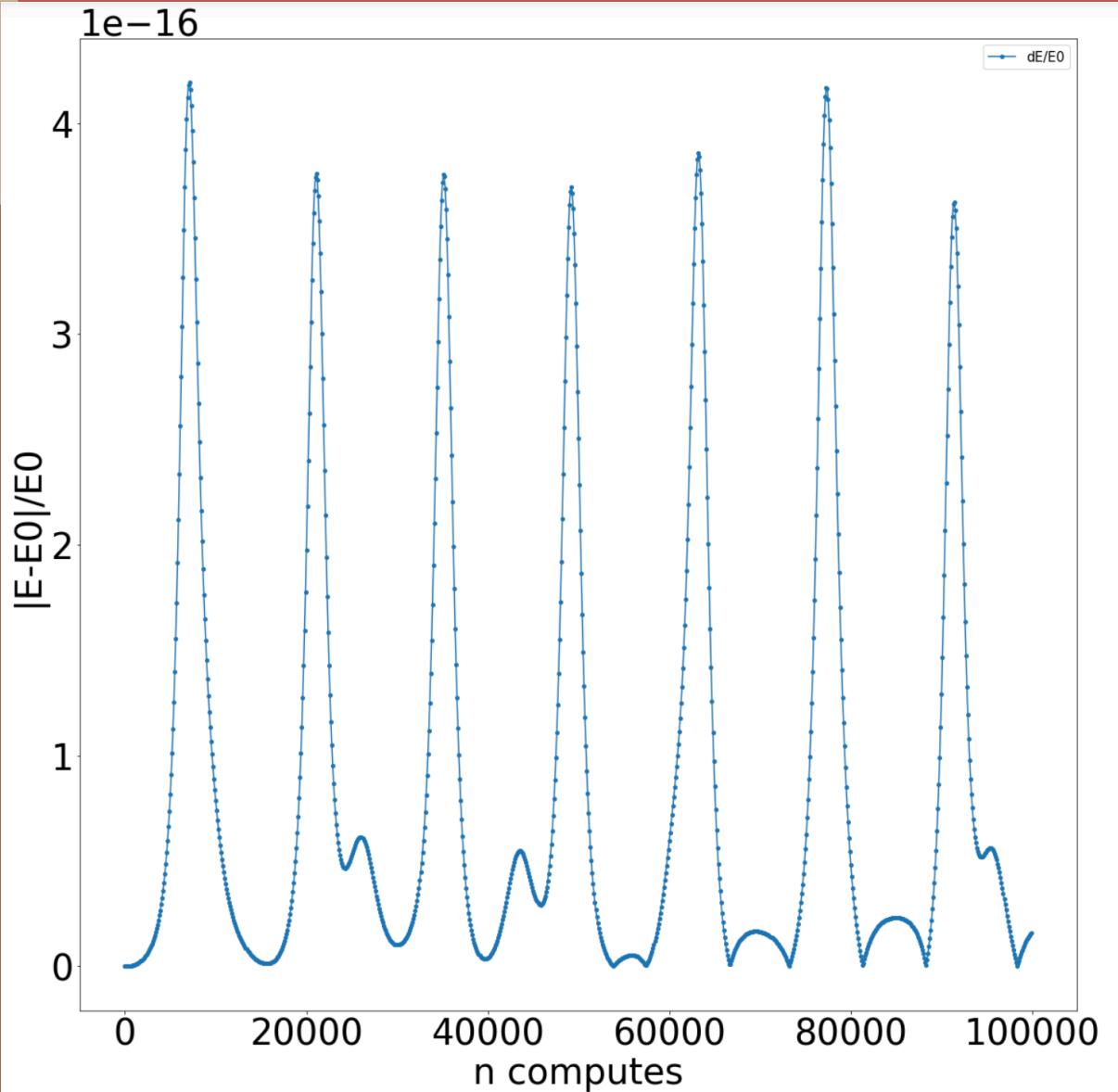
dopri8



Double-double
Энергия

RK4

dopri8

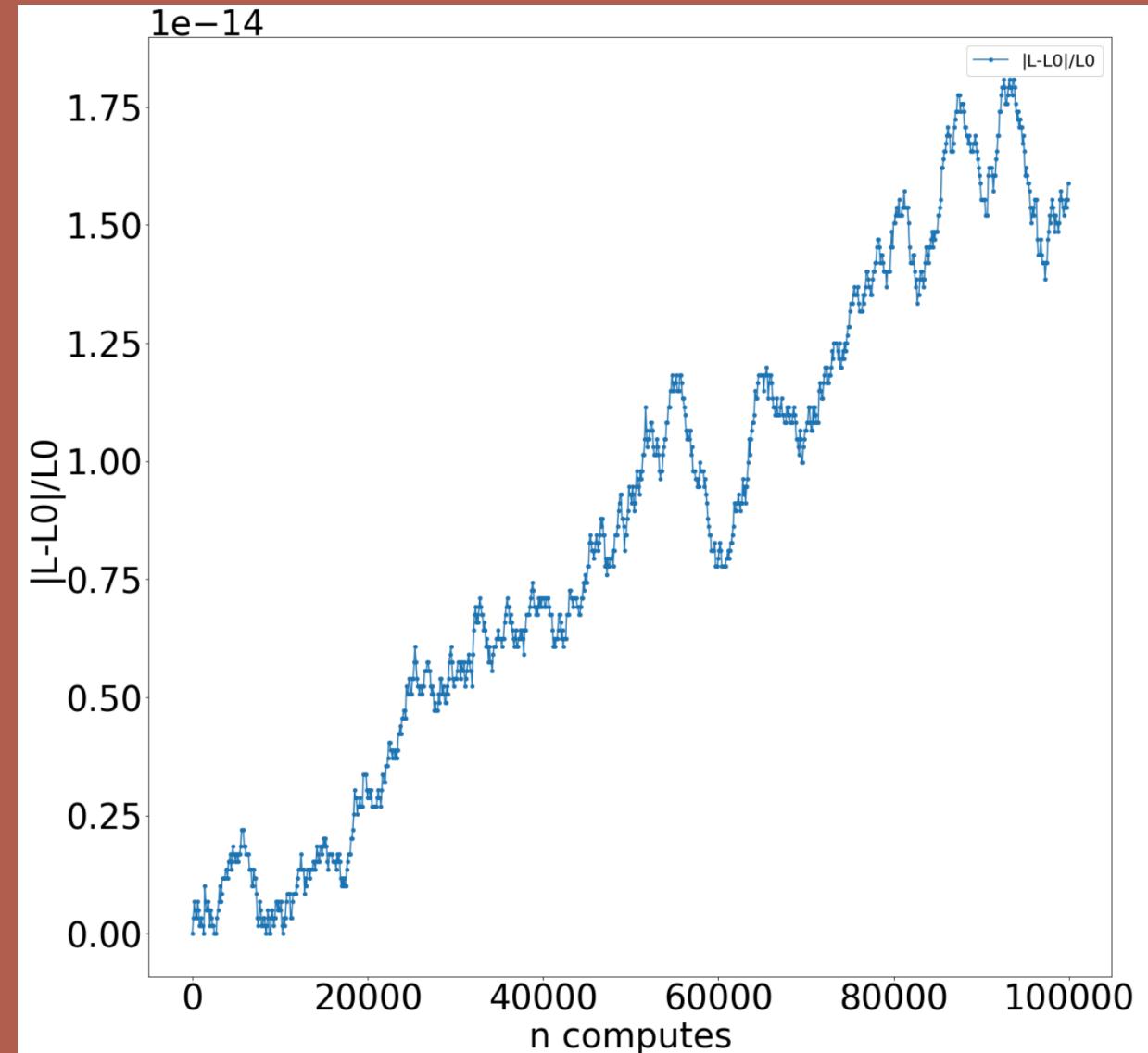
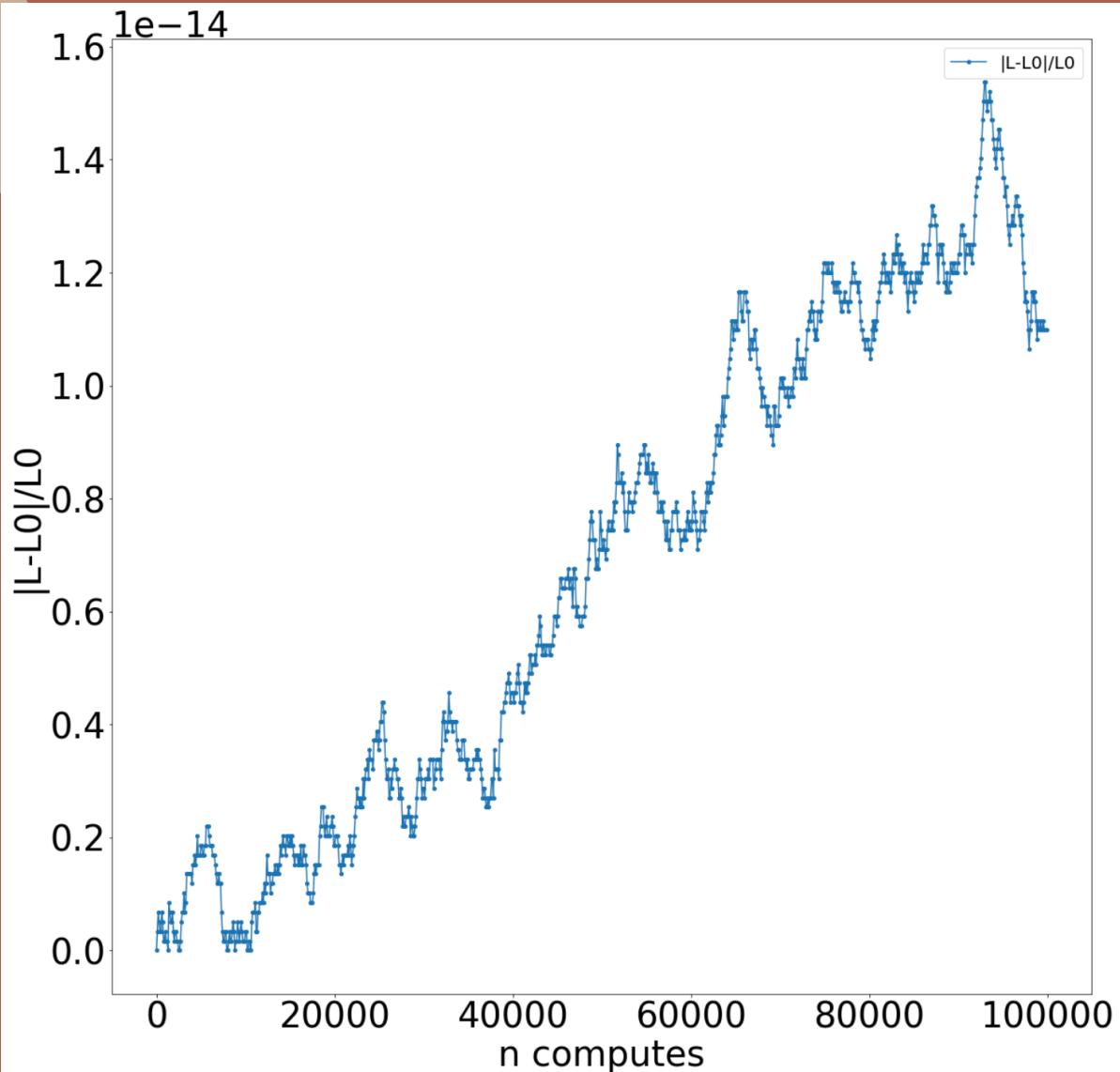


Double(64 bits)

Момент импульса

RK4

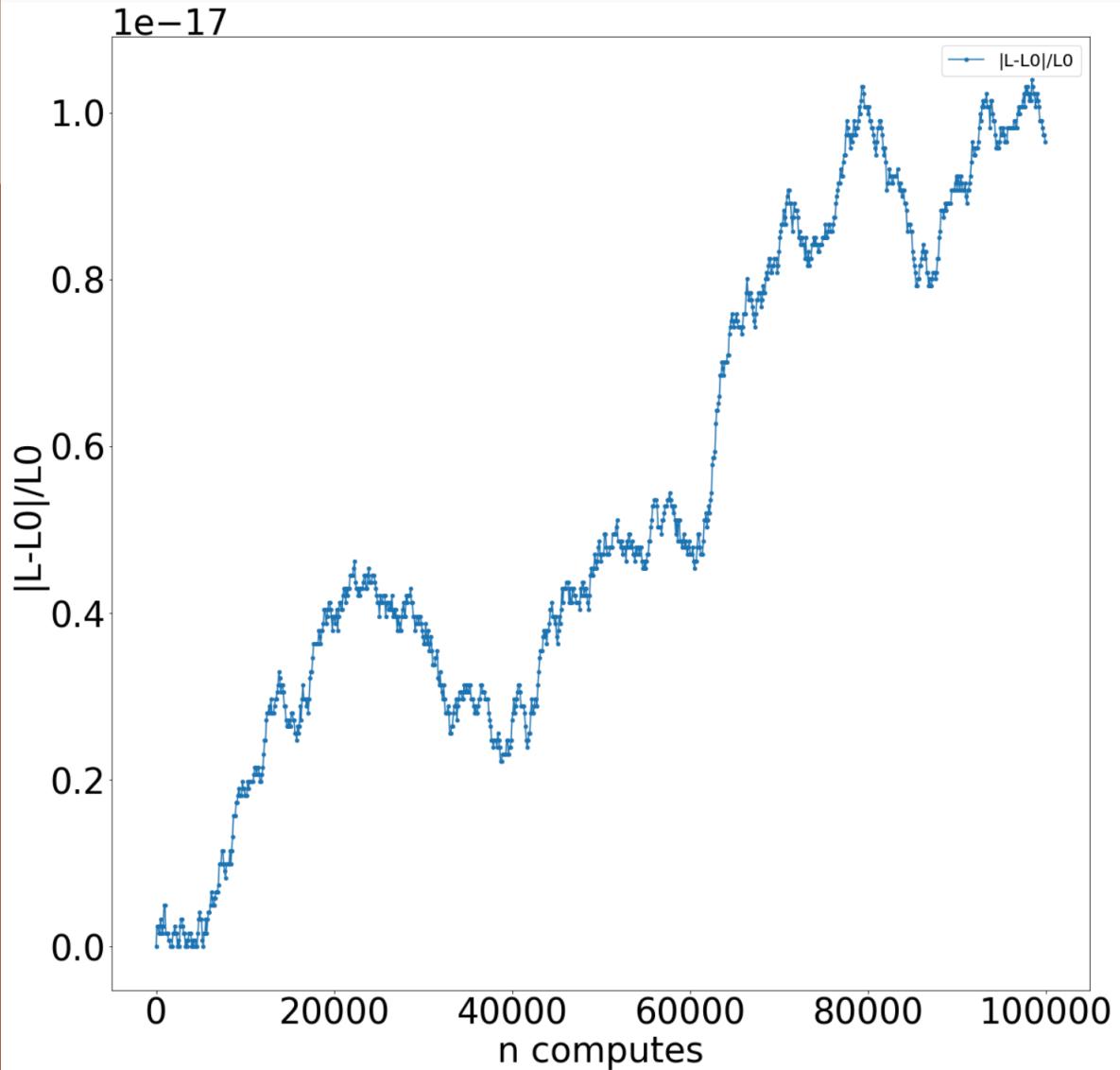
dopri8



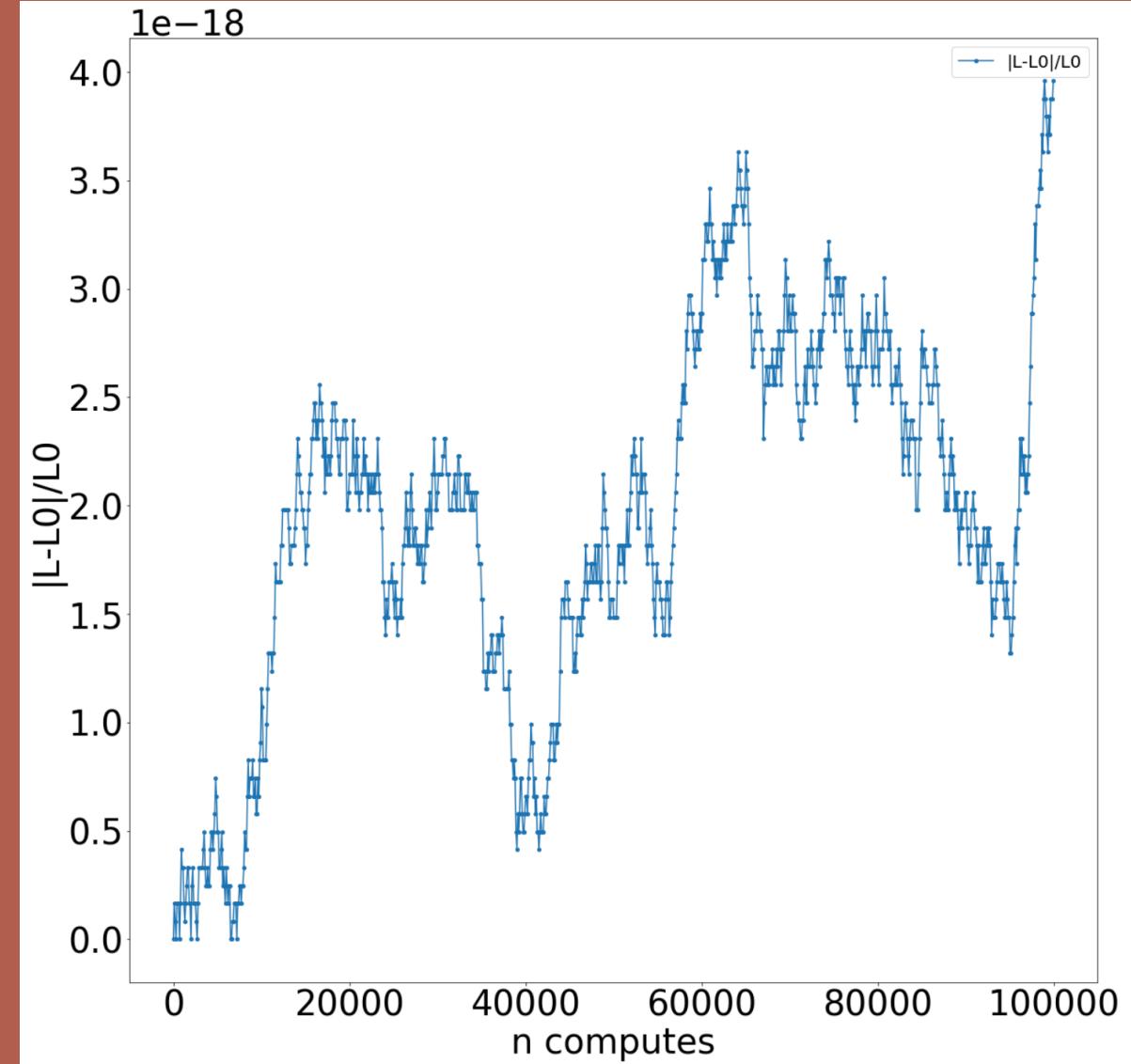
Long double(80 bits)

Момент импульса

RK4



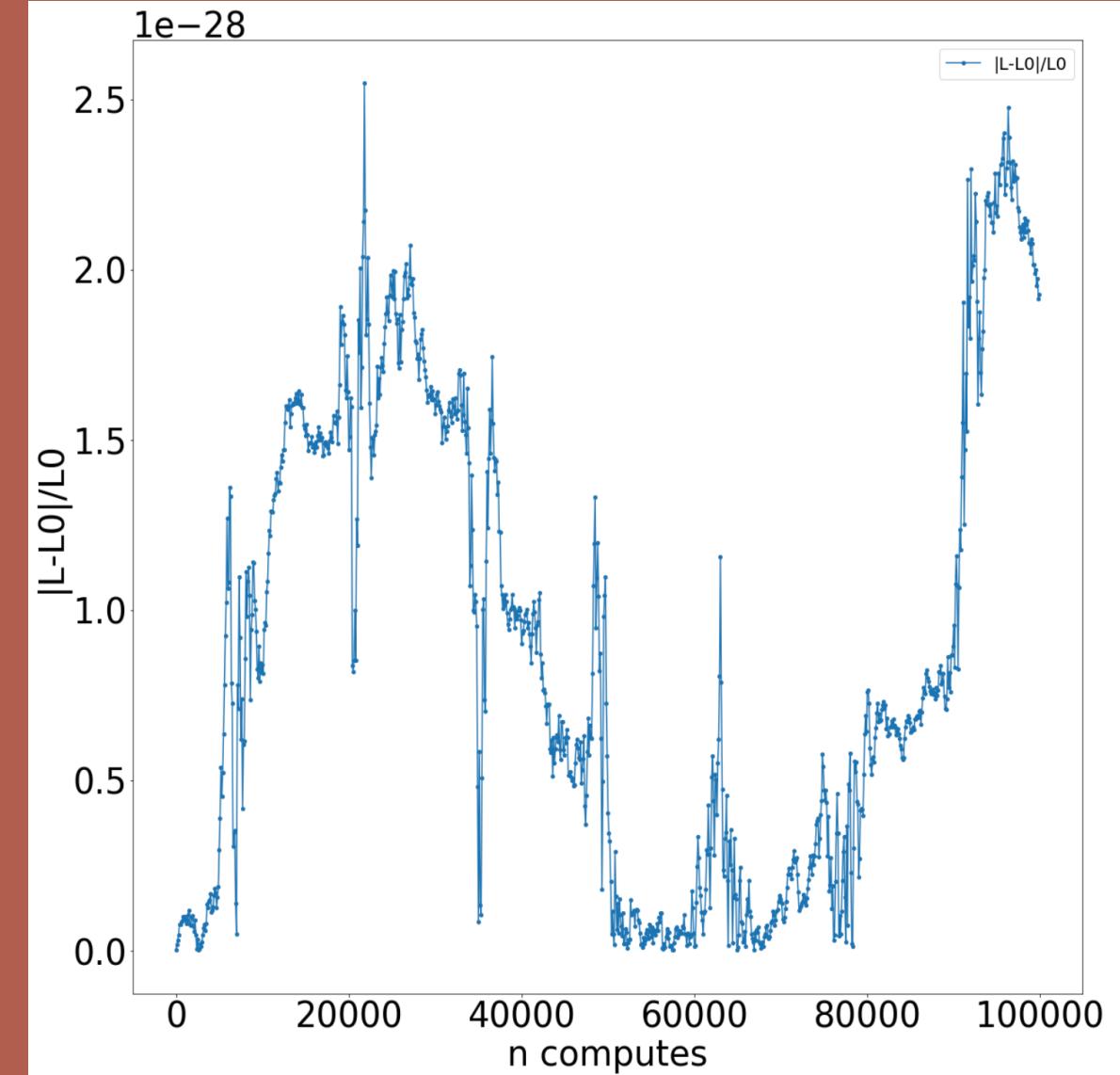
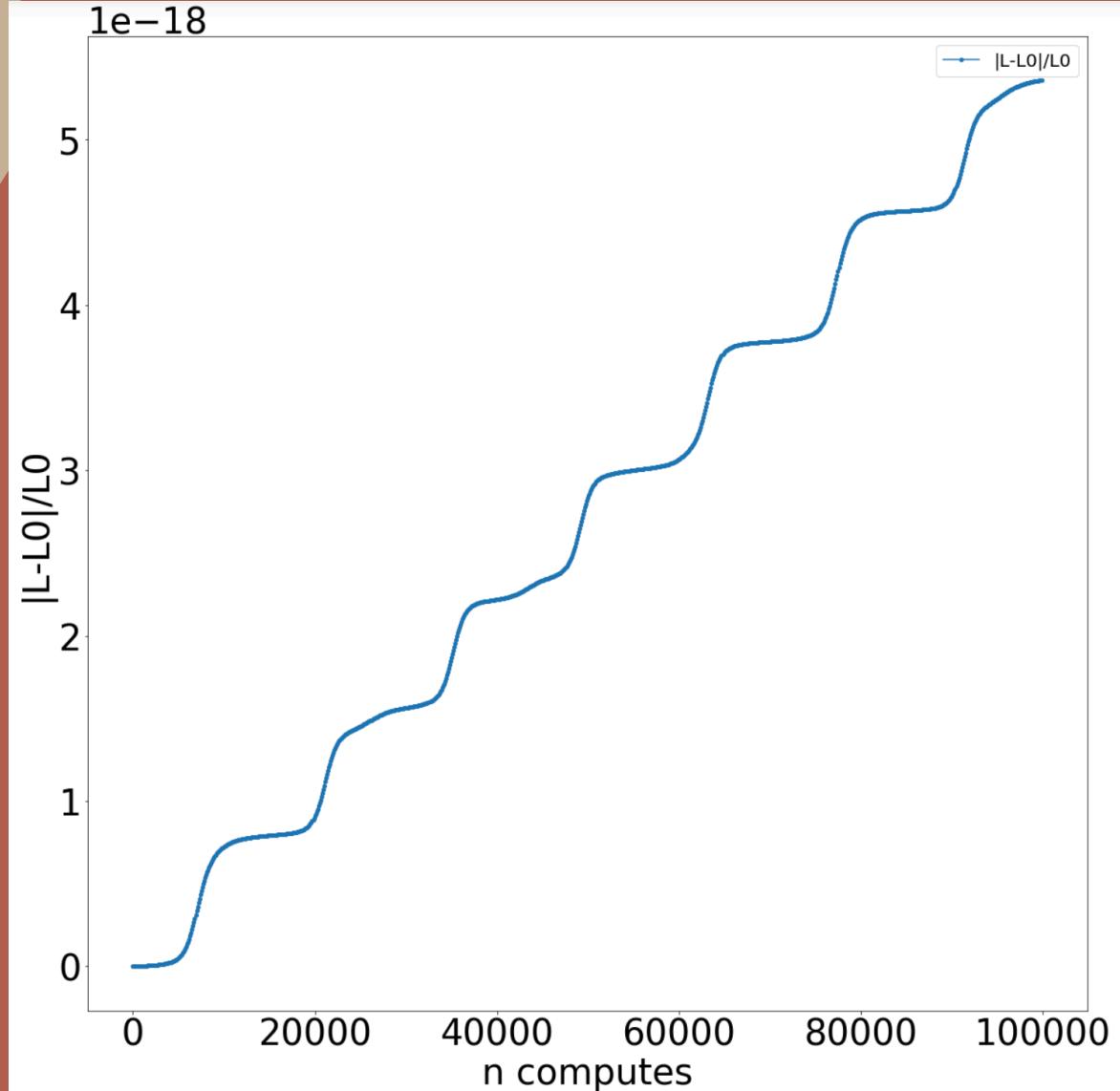
dopri8



Quadruple(128 bits)

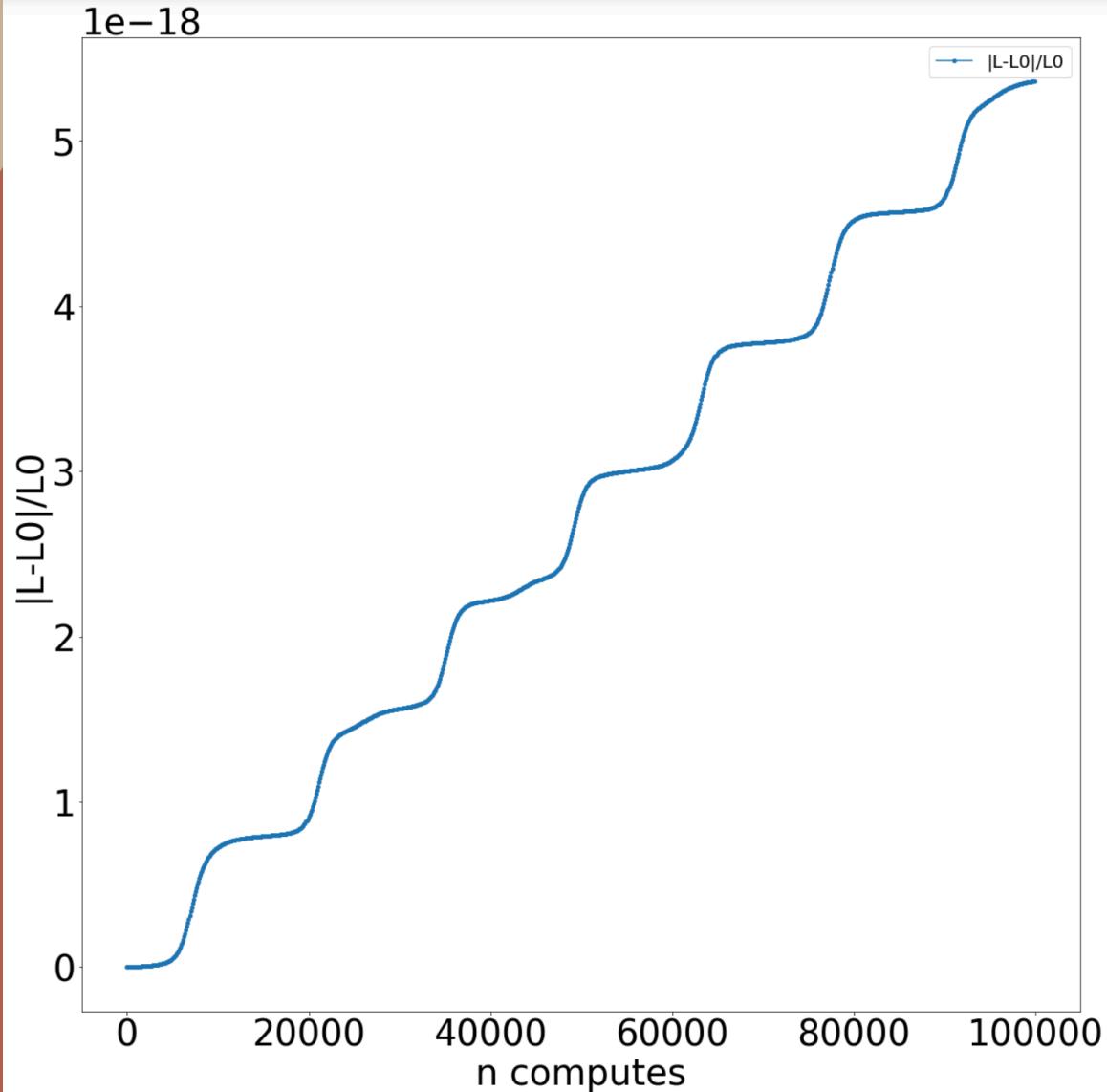
Момент импульса

RK4

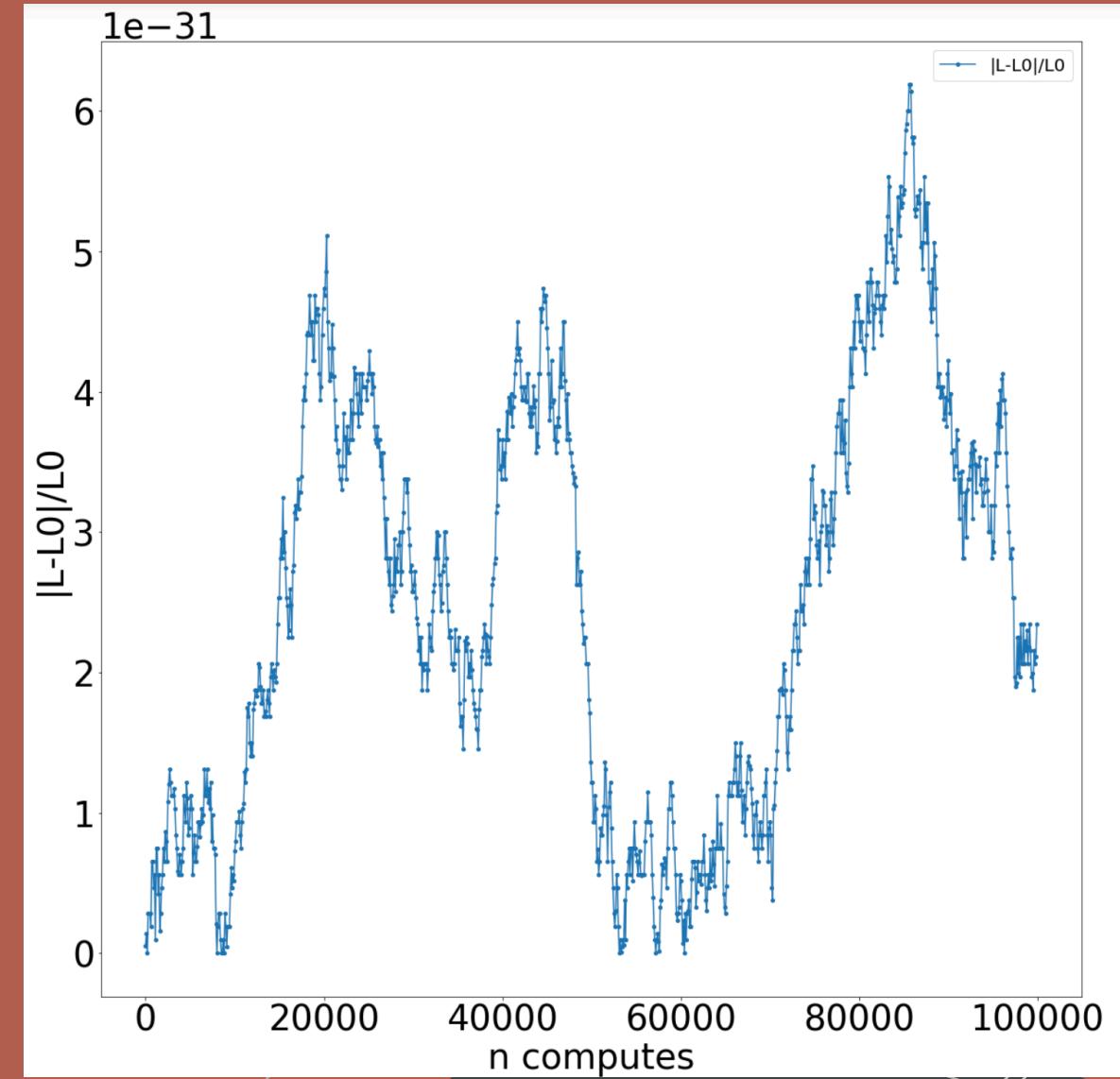


Double-double
Момент импульса

RK4



dopri8

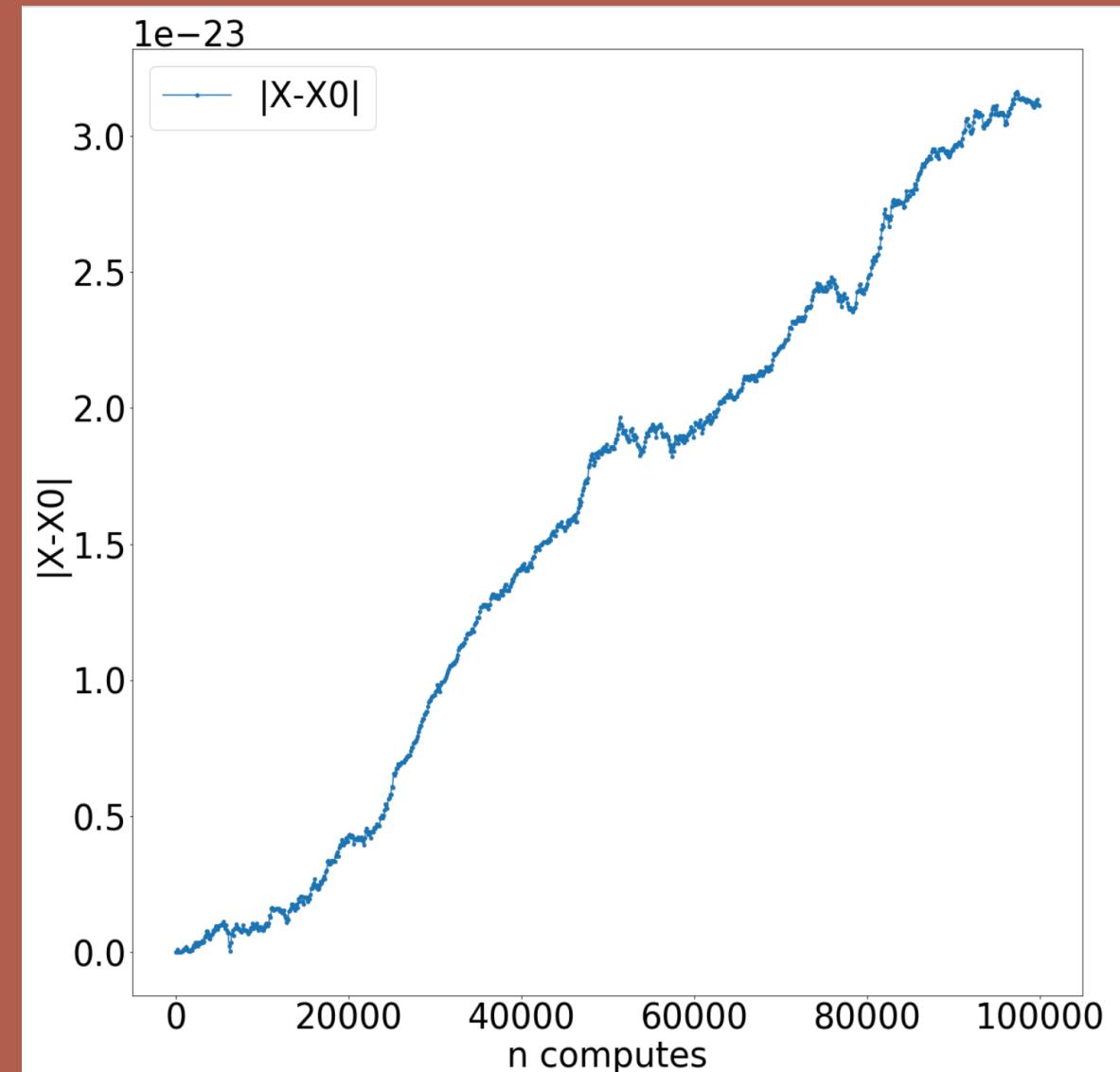
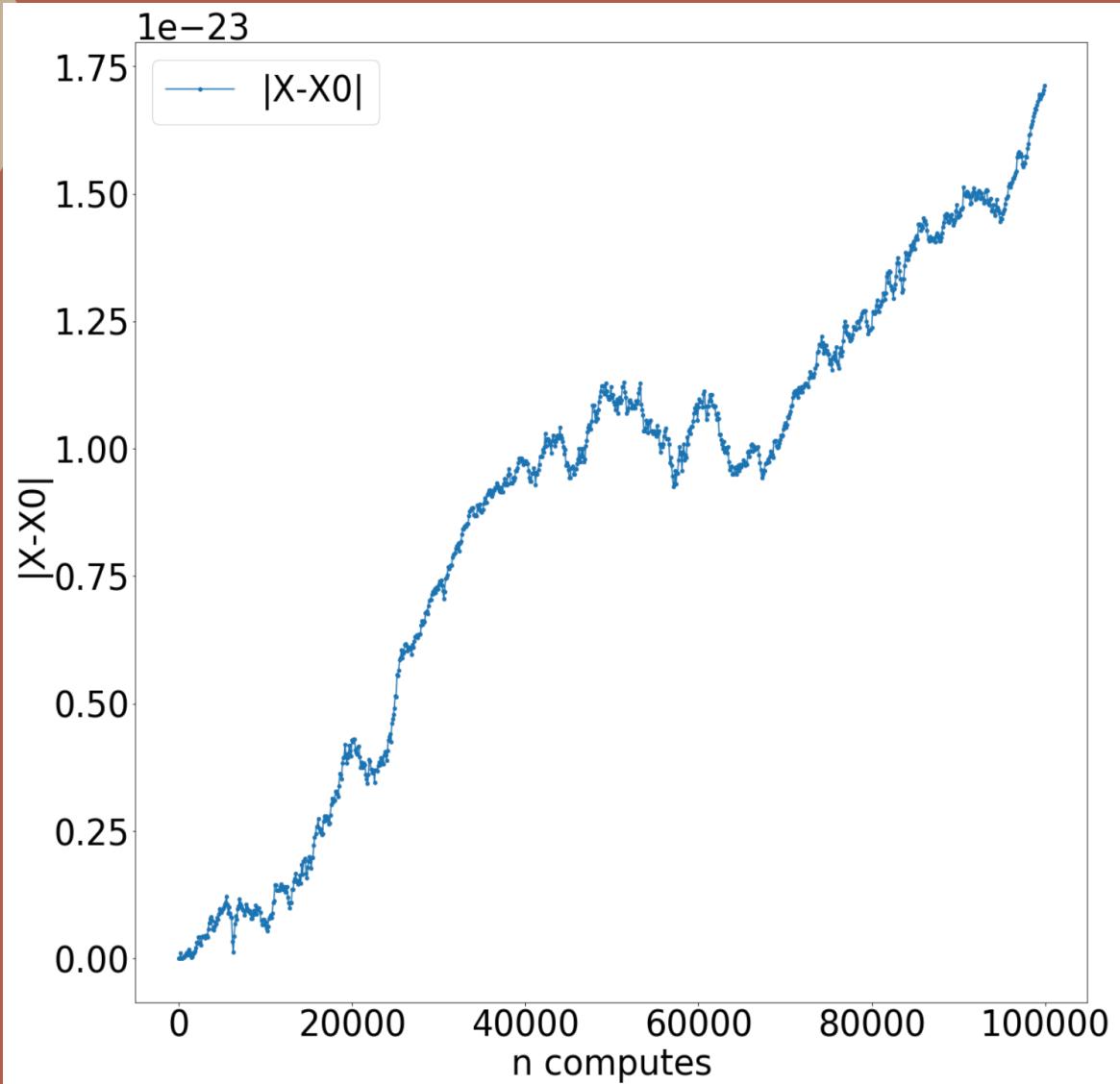


Double(64 bits)

Барицентр

RK4

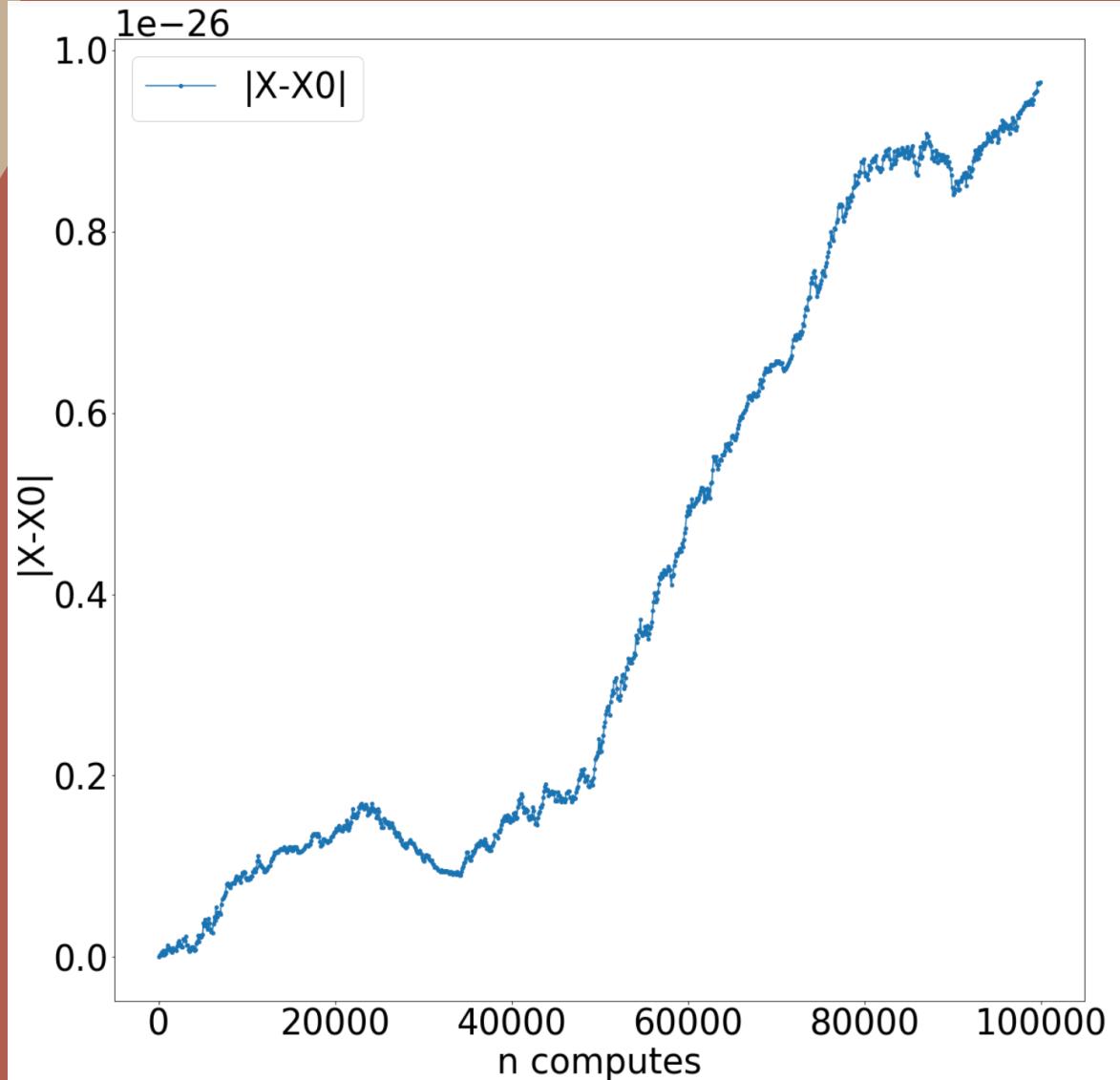
dopri8



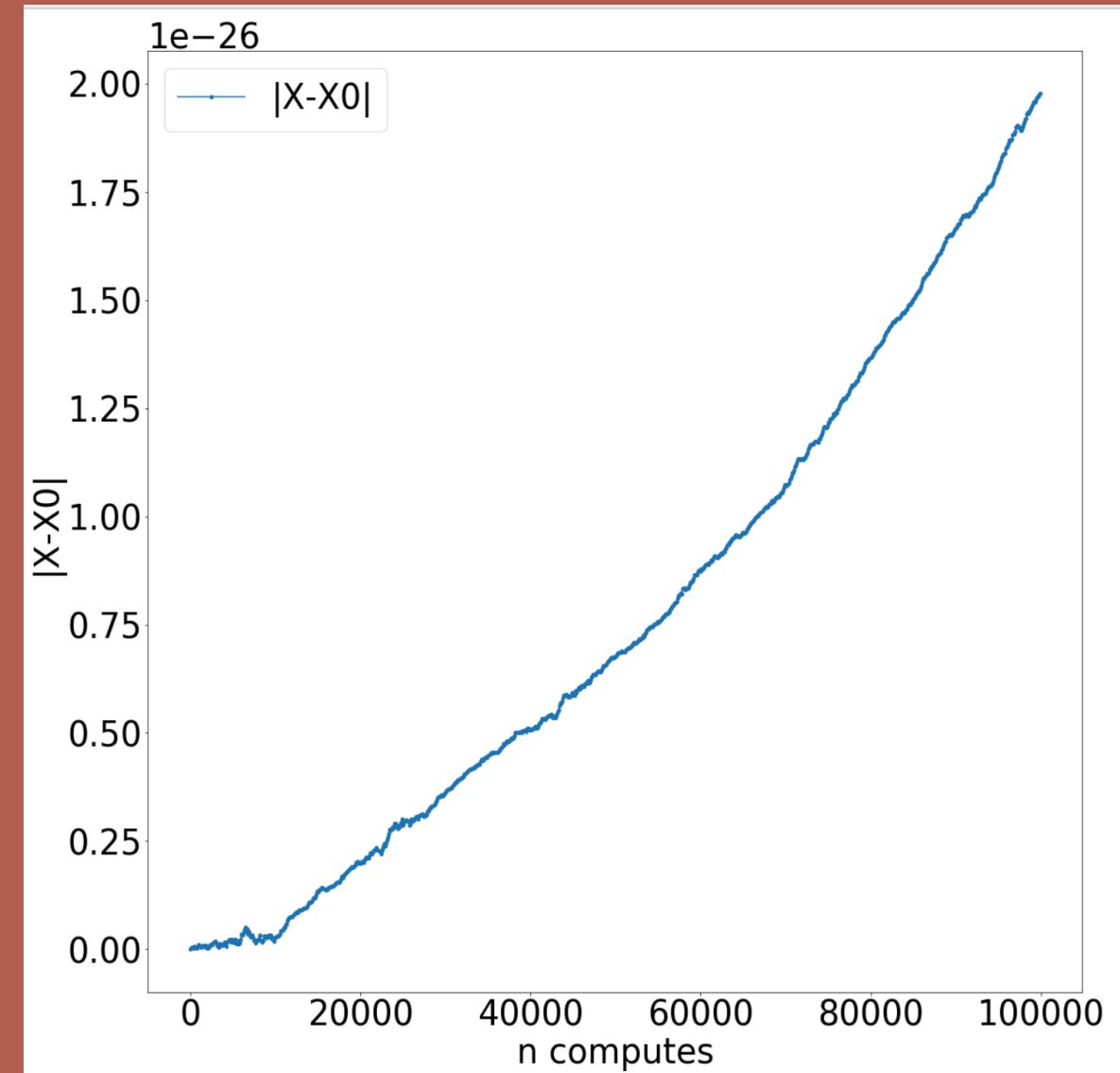
Long double (80 bits)

Барицентр

RK4



dopri8

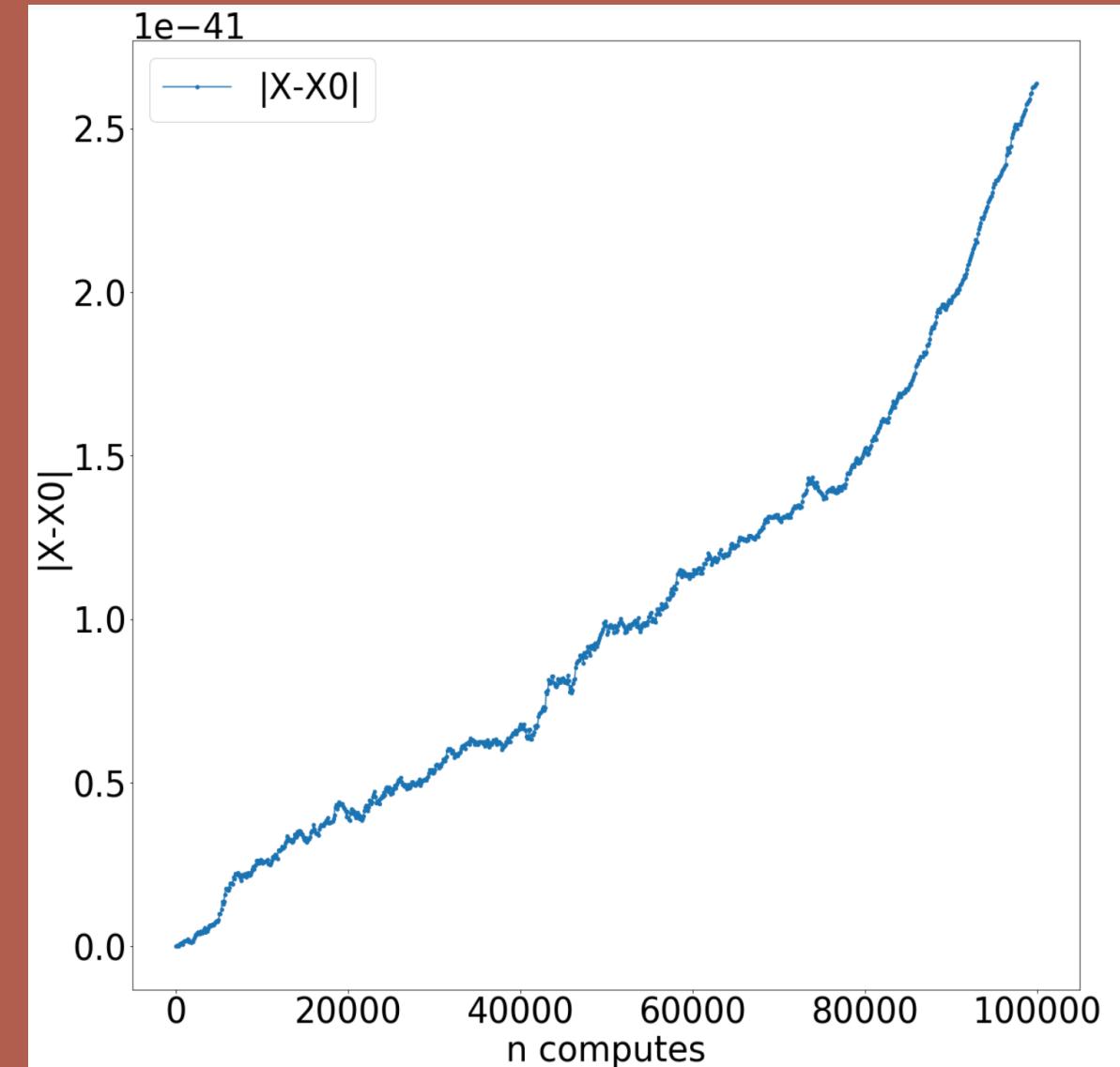
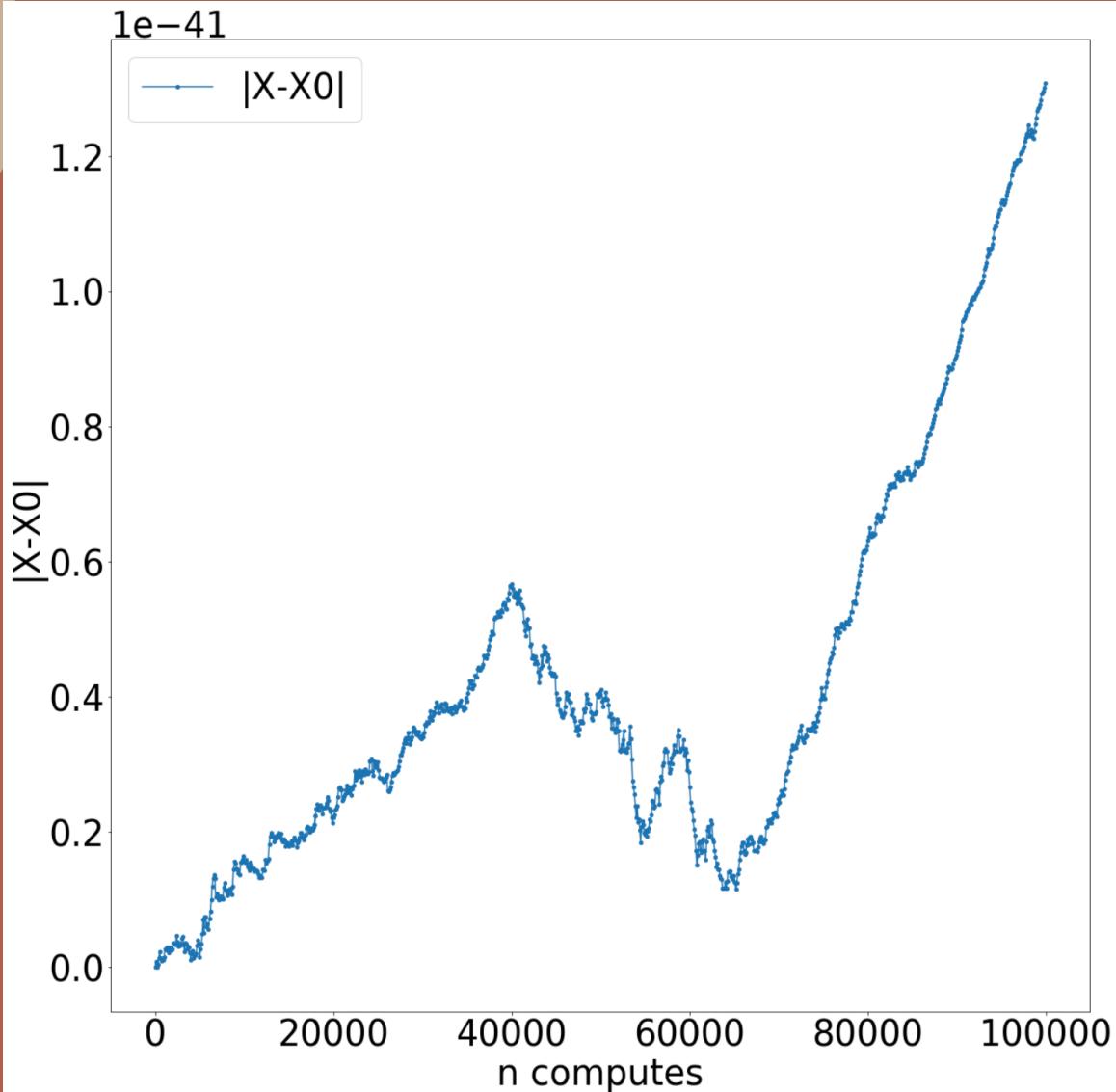


Quadruple (128 bits)

Барицентр

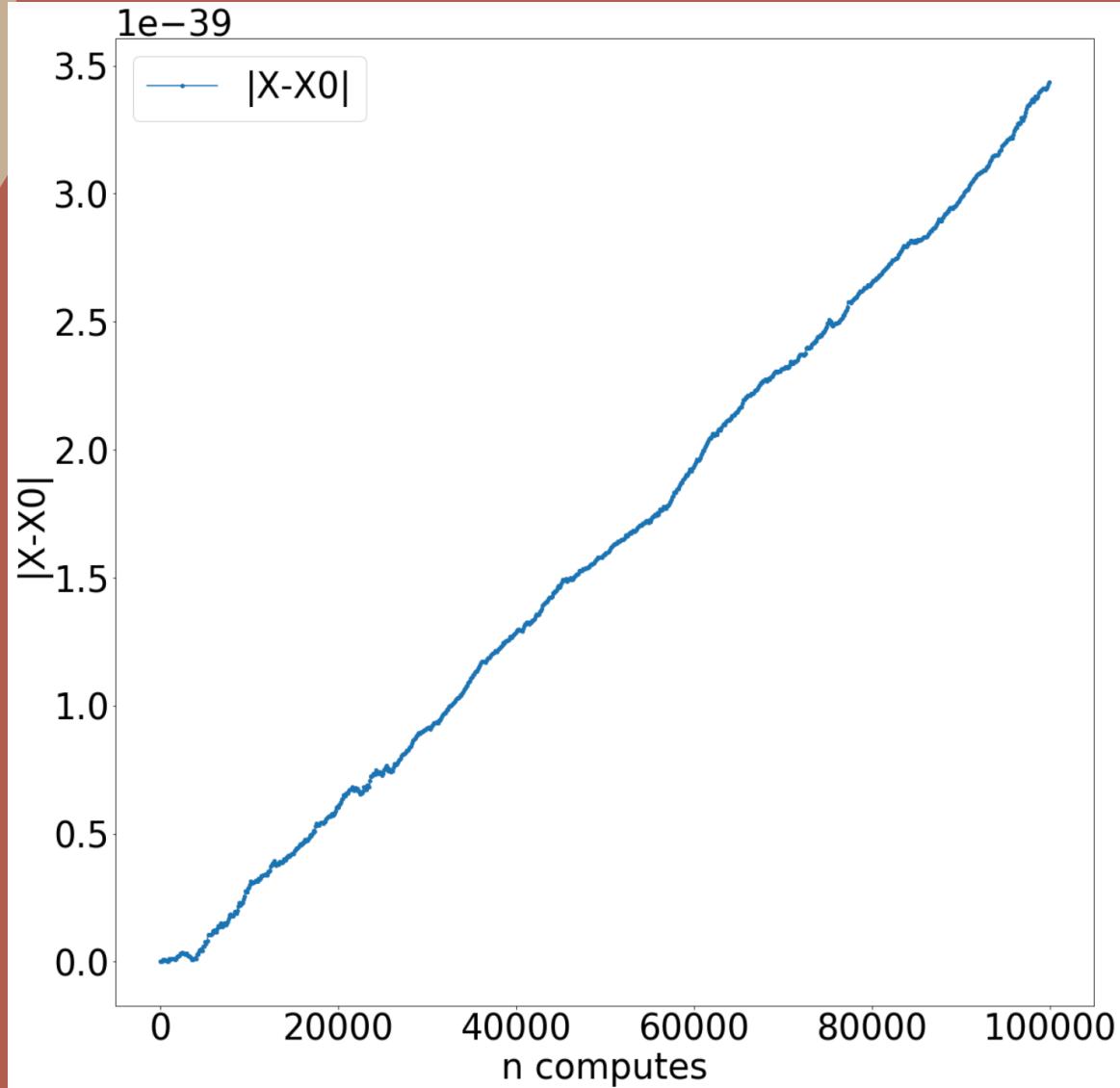
RK4

dopri8



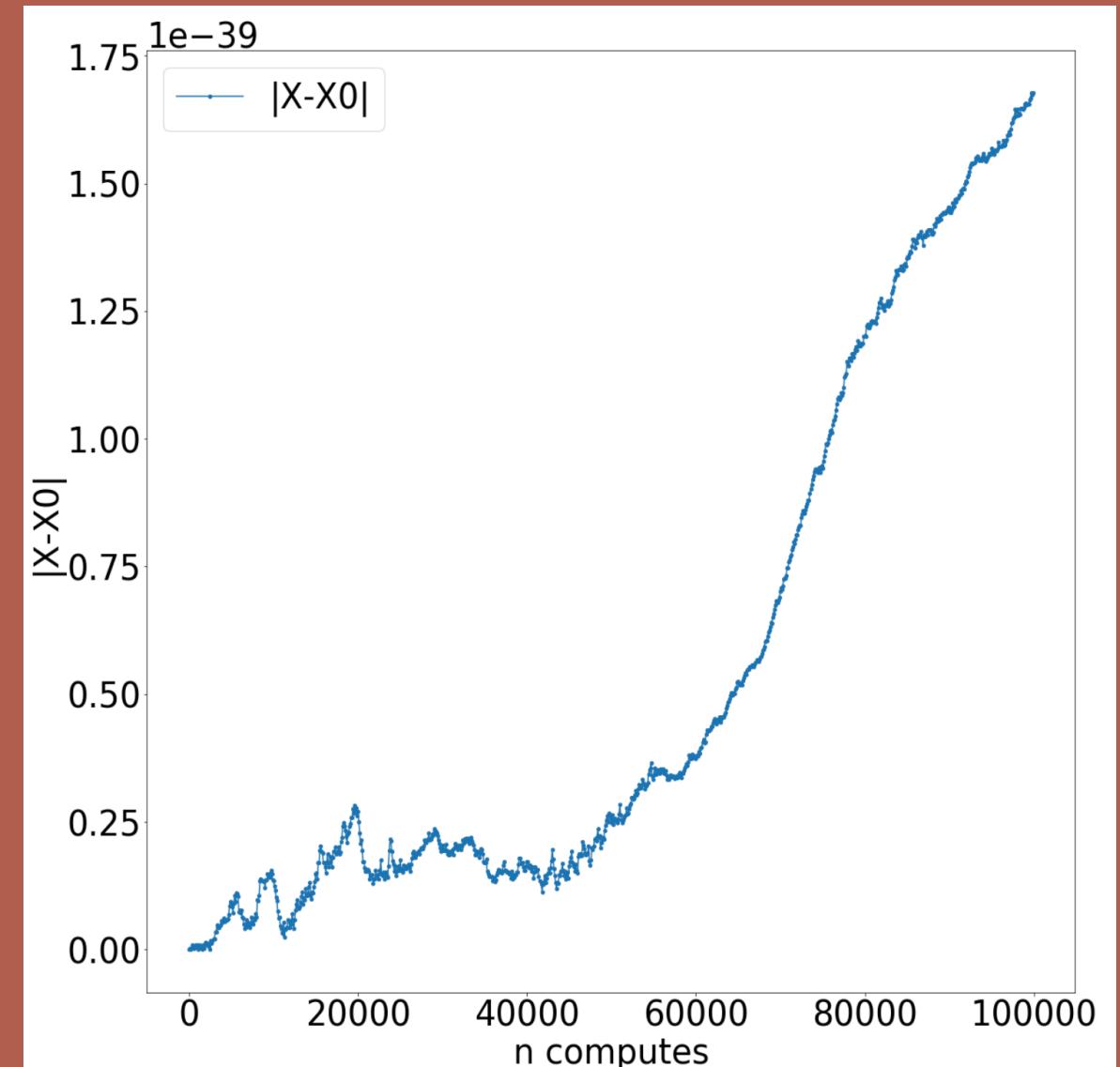
Double-double
Барицентр

RK4



26

dopri8



Сравнение результатов

Время работы

	RK4 (с)	Dopri8 (с)
Double(64 bits)	0.7542	3.275
Long double(80 bits)	1.266	5.925
Quadruple(128 bits)	14.14	51.33
Double-double	4.653	21.32

Порядок ошибки

	RK4			Dopri8			
	Энергия	Момент импульса	Барицентр	Энергия	Момент импульса	Барицентр	
Double(64 bits)	1e-14	1e-14	1e-23	1e-14	1e-14	1e-23	
Long double (80 bits)	1e-16	1e-17	1e-26	1e-16	1e-18	1e-26	
Quadruple (128 bits)	1e-16	1e-18	1e-41	1e-16	1e-28	1e-41	
Double-double	1e-16	1e-18	1e-39	1e-30	1e-31	1e-39	

ИТОГИ

Double-double арифметика сопоставима по точности с ближайшим конкурентом - Quadruple, а по времени в 2-3 раза быстрее. Таким образом данный тип оказался применим для увеличения точности решения задачи N тел.