Основные понятия

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числ. посл-ть $\{x_n\}$

Числа $x_1, x_2, \ldots$ – элементы или члены посл-ти

x_n – общий член

$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$

Рекуррентный способ: задается x_1 и правило определения n-го члена по $(n-1)$-му:

$x_n = f(x_{n-1})$

$x_1 = 1, x_n = n x_{n-1}$

$x_1 = 1, x_2 = 2 \cdot x_1, x_3 = 3 \cdot x_2 \ldots$

Если все эл. п-ти $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу C, то ее называют постоянной

П-ть $\{x_n\}$ назыв. ограниченной, если существ. число $M > 0$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполн н-во $|x_n| \leq M$

П-ть $\{x_n\}$ назыв. неогр., если для любого полож. числа M существует эл-т x_n этой п-ти, удовл. н-ву $|x_n| > M$

Бесконечно малые и беск. большие п-ти

$\{\alpha_n\}$ – беск. малая, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется нер-во $|\alpha_n| < \varepsilon$

$\{x_n\}$ – б/б, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что при $n > N$ выполн. нер-во $|x_n| > A$

T1: Если $\{x_n\}$ – б/б п-ть и $x_n \neq 0 \; \forall n$, то п-ть $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – б/м, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ – б/м п-ть, и $\alpha_n \neq 0 \; \forall n$, то п-ть $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – б/б

Св-ва б/м п-й:

1. Сумма и разность двух б/м п-й есть бесконечно малая п-ть
2. Произвед. двух б/м п-й есть б/м п-ть
3. Произведение огран. п-ти на б/м п-ть есть б/м п-ть

Предел числовой п-ти

Число a - предел числ. п-ти $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: n > N \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Геом. смысл предела п-ти: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что для любой ε-окр-ти точки a найдется нат. число N, что все значения x_n, для которых $n>N$, попадут в ε-окр-ть точки a.

П-ть, имеющая предел, назыв. сходящейся

П-ть, не явл. сход., назыв. расходящейся

T_1: Числ. п-ть $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a тогда и только тогда, когда любой эл-т п-ти можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - б/м п-ть

Св-ва сход. п-ти:

1. сход. п-ть имеет только один предел
2. Сход п-ть ограничена
3. Постоянная п-ть $x_n = C$ имеет предел, равный числу C, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
4. Сумма/р-ть двух сход п-й $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сход. п-ть, предел которой равен сумме/р-ти пределов п-й $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

Понятие ф-и. Способы задания ф-и

$y=f(x)$ - ф-я, где x - независ. переменная (~~значение~~ аргумент ф-и), а y - зав. перем. (знач. ф-и)

f - з-н соответствия

~~Все значения, которые принимает независ. перем., образуют мн-во знач. ф-и D(f)~~

~~Все знач., которые принимает зав. перем., образуют~~

Все значения, которые принимает незав. перем., образуют область опр. ф-и $D(f)$

Все значения, которые принимает зав. пер., образ. мн-во знач. ф-и $E(f)$

Особенности отыскания $D(f)$:

1. При отыскании $D(f)$ дробной ф-и нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращ. в нуль
2. Если аналит. выраж. ф-и содержит корень чет степени, то при отыскании $D(f)$ нужно искл. значения арг., при кот. подкор. выр-е принимает отриц. значения

(n-1)-му:

называ-

что

x_n этой

мер N

кой, что

ли $\{\alpha_n\}$ -

3. Если аналит. выр-е ф-и содержит логарифм, но при отыскании $D(f)$ нужно исключить значения арг., при которых выр-е под знаком логарифма принимает отриц. значения и обращ. в нуль

4. Если аналит. выр-е ф-и сод. обратные тригон. ф-и arcsin и arccos, то при нахождении $D(f)$ включать только те значения арг, при которых выр-я, стоящие под знаком этих ф-й, по модулю не превосходят единицы

Способы задать ф-ю:

1. Аналит. сп-б – ф-я задается одной или несколькими ф-ми

$y = \frac{x^2-3}{x^4}$, $y = \begin{cases} x^2+1, \text{ если } x \le 0 \\ x-2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$

2. Табличный сп-б – ф-я задается таблицей ряда значений аргумента и соотв. значений ф-ии.

3. Графический сп-б – ф-я задается графиком

4. Словесный сп-б – ф-я описывается правилом ее составления

Основные хар-ки ф-й

1. Чет/нечет

$y=f(x)$ – чет, если $D(f)$ симм. относительно 0 и для любого $x \in D(f) \to f(-x)=f(x)$

Ф-я не явл чет или нечет назыв. ф-й общего вида

2. Монотонность

$y=f(x)$ – возраст., если $\forall x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, выполн. нер-во $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)

т.е. большему знач. аргумента из этого промежутка соответствует большее знач. ф-и

Ф-и, возр. и убыв на промежутке, назыв. строго монотонными

Если $\forall x_1, x_2 \in X$, удовл. усл-ю $x_1 < x_2$, выполн. нестрогое нер-во $f(x_1) \le f(x_2)$ или $f(x_1) \ge f(x_2)$, то ф-я назыв. неубывающей или невозрастающей

3. Ограниченность

Ф-я – ограниченная, если $\exists M>0: \forall x \in X \to |f(x)| \le M$

4. Периодичность

ф-я периодическая, если $\exists T>0: \forall x \in D(f) \to (x-T), (x+T) \in D(f)$ и $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$

T – период ф-и

Основной период – наим. из ее положительных периодов

Понятия обратной и сложной ф-и

] $\forall x_1, x_2 \in D(f) \to f(x_1) \neq f(x_2)$, тогда $\forall y \in E(f)\ \exists!\ x = g(y) \in D(f): y = f(x)$

Ф-я $x = g(y)$, определенная на $E(f)$ назыв. обратной для $f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

Ф-ю, имеющую обратную, назыв. обратимой

$y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ – взаимно обратные

T_1: если $y = f(x)$ ↑(↓) на мн-ве X, то для нее существует f^{-1}, и она ↑(↓) на мн-ве значений данной ф-и

Способ нахождения обратной ф-и: найти ф-ю, обратную строго монотонной ф-и $y = f(x)$, нужно поменять местами буквы x и y, т.е. написать $x = f(y)$, и из полученного р-ва, как из ур-я, найти y

T_2: Графики ф-й $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симм. относительно прямой $y = x$

Предел ф-и в точке и на бесконечности

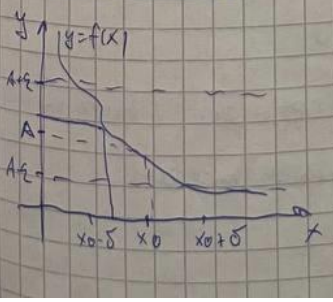
] $y = f(x)$ определена в некоторой окр-ти точки x_0

Число A – предел ф-и $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 п-ти $\{x_n\}$ допустимых знач. аргумента, отличных от x_0, п-ть $\{f(x_n)\}$ соотв. зн-й ф-и сходится к числу A. Обозначают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$

Геом. смысл предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означает, что $\forall x$ соотв. значения ф-и как угодно мало отличаются от числа A

Определение по Коши: Число A назыв. пределом ф-и $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0: \forall x \neq x_0 \to |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

Геом. смысл предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ означ., что $\forall\ \varepsilon$-окр-ти точки A найдется такая δ-окр-ть точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окр-ти соотв. знач. ф-и $f(x)$ лежат в ε-окр-ти точки A



Односторонние пределы

Число A_1 (A_2) назыв. правым (левым) пределом ф-и $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой сходящейся к x_0 посл-ти $\{x_n\}$, эл-ты x_n которой больше (меньше) x_0, соотв. п-ть $\{f\{x_n\}\}$ знач. ф-и сходится к числу A_1 (A_2). $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_1$

Левый и правый пределы ф-и назыв. односторонними пределами

T_1: $y=f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел ф-и равен одност. пределам

Предел ф-и при $x\to\infty$

Число A назыв. пределом ф-и $y=f(x)$ при $x\to\infty$, если для любой бесконечно большой п-ти $\{x_n\}$ значений аргумента п-ть $\{f\{x_n\}\}$ соотв. значений ф-и сходится к числу A. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$

Геом. смысл предела: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ означ., что $\forall$ ε-окр-ти точки A $\exists\, \delta>0$: $x<-\delta$ или $x>\delta$ соотв. значения ф-и $f(x)$ попадают в ε-окр-ть точки A

Б/б и б/м ф-и

Ф-я $y=f(x)$ назыв. б/б при $x\to x_0$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta=\delta(\varepsilon)$: $\forall x$ удовл. нер-ву $0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)|>\varepsilon$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Если $f(x)$ стрем. к ∞ при $x\to x_0$ и принимает только $\oplus$ значения, то пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, если только $\ominus$ знач., то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

$y=\underset{x\to\infty}{f(x)}$ – б/б, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \forall x: |x|>\delta \to |f(x)|>\varepsilon$

$y=\underset{x\to x_0}{f(x)}$ – б/м, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

~~Св-ва б/м ф-й:~~

1) ~~Алг. сумма конечн. числа б/м ф-й есть б/м ф-я~~

T_2: Для выполнения р-ва $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ необходимо и достаточно, чтобы ф-я $\alpha(x)=f(x)-A$ была б/м при $x\to x_0$

T_3: если $\alpha(x)$ – б/м ф-я при $x\to x_0$ и $\alpha(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$, то ф-я $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б/б при $x\to x_0$ и наоб.

T_4: предел суммы (разности) двух ф-й равен сумме (разности) их пределов

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm g(x))$

T_5: предел произведения двух ф-й равен произведению их пределов

если для любой
соотв. n-ть

в точке существ-
предел ф-и

конечно боль-
ф-и сво-

$0: x \, 2 - \delta$ ...

$0 < |x - x_0| < \delta \to$

...щут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

я

и $x \to x_0$ и необ.

Т6: предел частного равен частному пределов при условии, что предел делителя $\neq 0$

Т7: $\exists\ f(x), g(x), h(x)$ опред. в некоторой окр-ти точки x_0

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$

Замечательные пределы

Исп. для обозначения тождеств

Т1: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда $x \to 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ — первый замечательный предел

Следствия: 1. $\lim\limits_{\alpha(x) \to 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Т2: предел ф-и $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ равен числу e

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ — второй замеч. предел

Следствия:

1. $\lim\limits_{\alpha(x) \to 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Раскрытие неопр. различных типов

Случаи, в которых подстановка предельного значения в ф-ю не дает значение предела, называют неопределенностями

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Чтобы раскрыть неопр. вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочл., надо числ.-ль и зн-ль разделить на самую высокую вход. в них степень x, а затем перейти к пределу

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x - 3x^4}{4x^4 + 3x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{7}{x^3} - 3}{4 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{0 - 3}{4 + 0 + 0} = -\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

Если имеем неопр. вида $\frac{\infty}{\infty}$ в случае показ. ф-ий, то нужно ч-ль и знам-ль разделить на наиболее быстро возраст. слагаемое среди всех

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+2^x}{1+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2^x}{3^x}}{\frac{1}{3^x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+1}=\frac{1+0}{0+1}=1$$

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Чтобы раскрыть неопр. вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочл., надо в ч-ле и в зн-ле выделить критический мн-ль (мн-ль $=0$ при предзнач. x) и сократить на него

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-4)}=\lim_{x\to4}\frac{x-2}{x}=\frac{4-2}{4}=\frac{1}{2}$$

Чтобы раскрыть неопр. вида $\frac{0}{0}$, в которой ч-ль или зн-ль содержит ирр-ть, следует соответствующим образом избавиться от ирр-ти

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{10\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{10}$$

Чтобы раскрыть неопр. вида $\frac{0}{0}$, в которой ч-ль или зн-ль содержат тригон. ф-и, следует использовать первый замеч. предел или следствия из него

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{3x^2}=\frac{2\cdot4}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2=\frac{8}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\right)^2=\frac{8}{3}\cdot1=\frac{8}{3}$$

Неопределенность вида $\infty-\infty$

Если ф-я, стоящая под знаком предела, представляет собой алг. сумму дробей, то неоп-ть устраняется или приводится к виду $\frac{0}{0}$. Если же неоп-ть $\infty-\infty$ связана с суммой ирр. выражений, то н-ть устраняется или приводится к виду $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x+5}-x)(\sqrt{x^2+6x+5}+x)}{(\sqrt{x^2+6x+5}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+5}{\sqrt{x^2+6x+5}+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{6}{1+1}=3$$

Неопределенность вида 1^∞

Под н-тью вида 1^∞ понимается степенно-показ. ф-я, основание степени которой стремится к 1 (но не равно тожд. 1), а показатель степени стремится к ∞. Н-ть устраняется при помощи второго замеч. предела.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=[1^\infty]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^6=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right]^6=e^6$$

Непрерывность ф-и в точке

$y=f(x)$ - непр. в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Три условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и в ее окрестности
2) $f(x)$ имеет предел при $x\to x_0$
3) предел ф-и в точке равен значению ф-и в этой точке

$\Delta x = x-x_0$, $\Delta y = f(x)-f(x_0)$. При этом Δx называв. приращением аргумента, а Δy - приращением ф-и

$y=f(x)$ - непрерывная в точке x_0, если она определена в этой точке и б/м приращению аргумента соотв. б/м приращение ф-и: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

$y=f(x)$ - непрерывная на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала

$y=f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b - слева, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$

Основные теоремы о непрерывных ф-х

Т1: сумма, разность, произведение и частное двух непрерывных ф-й есть ф-я непрерывная (для частного, за искл. зн. обр. в 0)

Т2: если ф-я $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а ф-я $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная ф-я $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0

Т3: если ф-я $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна на промежутке X, то обр. ф-я $x=\varphi(y)$ также непрерывна и строго монотонна на соотв. промежутке Y

Замечание: Из приведенных теорем следует, что всякая элементарная ф-я непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Т4: если $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то $\exists$ такая окрестность этой точки, в которой $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$

Св-ва ф-й непрерывных на отрезке

T_1 (1-я теорема Вейерштрасса): если $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

T_2 (2-я теорема Вейерштрасса): если $y=f(x)$ непр на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений

T_3 (1-я теорема Больцано-Коши): если $y=f(x)$ непр. на отрезке $[a;b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c, в которой данная ф-я обращается в 0

$f(c)=0$

T_4 (2-я теорема Больцано-Коши): если $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах отрезка принимает неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A \neq B$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения, т.е. для любой точки $C \in [A;B]$ найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, такая что $f(c)=C$

Классификация точек разрыва ф-и

Точка x_0 называется точкой разрыва ф-и $y=f(x)$, если ф-я в точке x_0 не явл. непрерыв.

Точка разрыва x_0 назыв. точкой разрыва первого рода ф-и $y=f(x)$, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы ф-и: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$

При этом точка x_0 назыв. точкой устранимого разрыва, если $A_1=A_2$; точка x_0 называется точкой конечного разрыва, если $A_1 \neq A_2$

Величину $|A_1-A_2|$ называют скачком ф-и в точке разрыва первого рода

Точка разрыва x_0 назыв. точкой разрыва второго рода ф-и $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности