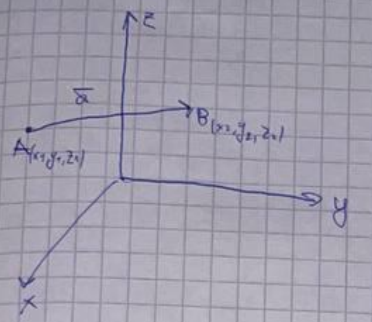
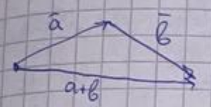


$\bar{AB} = \bar{a} = a = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$a \pm b = (x_1 \pm x_2,\ y_1 \pm y_2,\ z_1 \pm z_2)$



$\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

$\lambda > 0$ $\xrightarrow{\bar{a}}$

$|\lambda a|$ $\xrightarrow{\lambda\bar{a}}$

$\lambda < 0$ $\xleftarrow{\lambda\bar{a}}$

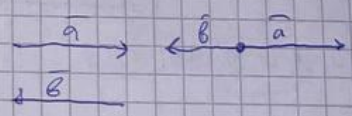
$\bar{o}$ – нул. вектор (начало совп. с концом)

$\bar{o} = (0,0,0)$

$|a| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ – длина вектора

$a \parallel b$ – коллинеарность

$a \parallel b$, если лежат на одной или парал. прямых.



$a \parallel b \iff \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

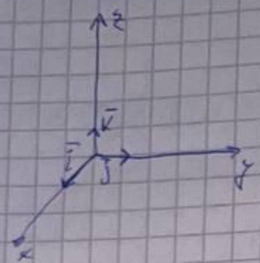
a, b, c – компл., если лежат на одной или пар. плоскостях

<u>Линейная комбинация</u>

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i$ – лин. комб.

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i = \bar{o} \iff \lambda_i = 0 \Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_n$ – лин. независимы

R^3: e_1, e_2, e_3 – базис (любой вектор данного прост.-ва можно выразить через лин. комб. этих вект)



$\bar{i} = (1,0,0)$

$\bar{j} = (0,1,0)$

$\bar{k} = (0,0,1)$

Пример: $e_1 = (2,2,-1)$ $\quad \bar{a} = (1,1,2)$

$e_2 = (0,4,8)$

$e_3 = (-1,-1,3)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{(1)+(3)\cdot 2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Rightarrow$$ вект. лин. незав. $\Rightarrow$

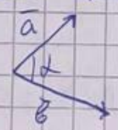
$\Rightarrow e_1, e_2, e_3$ - базис

$a = \underline{\lambda_1} e_1 + \underline{\lambda_2} e_2 + \underline{\lambda_3} e_3$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 0\lambda_2 - \lambda_3 \\ 1 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2 = -\lambda_1 + 8\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \qquad (1,0,1)$$

Скалярное произведение

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$



Св-ва: 1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

2. $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda \cdot \bar{a} \cdot \bar{b}$

3. $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$

4. $a^2 = |a|^2$

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ $\qquad \bar{a}\bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

зав. = ?
рис

Пример 1: $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $|a| = 3$, $|b| = 4$ $ab,\ a^2,\ b^2,\ (2a-b)^2 - ?$

$ab = |a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha = 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

$a^2 = a\cdot a = |a|\cdot|a|\cdot\underbrace{\cos\alpha}_{\cos 0^\circ = 1} = |a|^2 = 9$

$b^2 = b\cdot b = |b|\cdot|b|\cdot\underbrace{\cos\alpha}_{1} = |b|^2 = 16$

$(2a-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2 = 36 + 24 + 16 = 76$

Пример 2: $a = (4, -2, -4)$
$b = (6, -3, 2)$ $ab,\ a^2,\ b^2,\ (2a-3b)\cdot(a+2b) - ?$

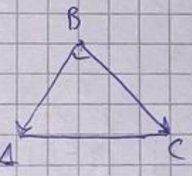
$ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 24 + 6 - 8 = 22$

$a^2 = |a|^2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}^{\,2} = 16 + 4 + 16 = 36$

$b^2 = 36 + 9 + 4 = 49$

$(2a-3b)(a+2b) = (-10, 5, -14)(16, -8, 0) = -160 - 40 - 0 = -200$

Пример 3: $A(-1, -2, 4)$
$B(-4, -2, 0)$
$C(3, -2, 1)$ $\angle B - ?$



$\overline{BA} = (3, 0, 4)$, $|\overline{BA}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

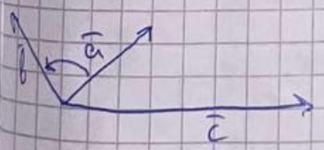
$\overline{BC} = (7, 0, 1)$ $|\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = |\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|\cdot\cos\alpha = ?$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

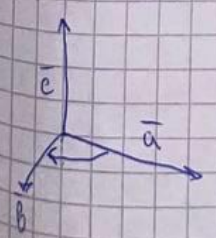
Векторное произведение

a, b, c − правая



с конца $\bar{c}$ этот поворот ($b \to a$) набл. ПРОТИВ час. стр.

a, b, c − левая



с конца $\bar{c}$ поворот набл. ПО час. стр.

$a \times b = c$: 1) $|c| = |a| \cdot |b| \sin\alpha = S_{\square}$

2) $c \perp a$, $c \perp b$

3) a, b, c – правая

Св-ва:

1. $a \times b = -b \times a$
2. $\lambda a \times b = \lambda (a \times b)$
3. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
4. $a \times b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$

$a = (x_1, y_1, z_1)$
$b = (x_2, y_2, z_2)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \times b = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Пример: $a \times b = ?$ $(2a + b) \times b - ?$

$a = (3, -1, -2)$
$b = (1, 2, -1)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (5, 1, 7)$$

$$(2a + b) \times b = -b \times (2a + b) = -b \times 2a - \underbrace{b \times b}_{0,\ \text{т.к. коллин. сам себе}} = 2a \times b = (10, 2, 14)$$

Смешанное произведение

$abc = (a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c)$

$abc = V$, если abc – правая

$abc = -V$, если abc – левая

$a = (x_1, y_1, z_1)$
$b = (x_2, y_2, z_2)$
$c = (x_3, y_3, z_3)$

$$abc = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример: $a = (2, 3, 1)$ $\quad$ a, b, c - компл. - ?

$b = (1, -1, 3)$

$c = (-3, 3, -9)$

$$\boxed{abc = 0 \Longleftrightarrow a, b, c \text{ - компл.}}$$

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -9 \end{vmatrix} \overset{(3)+(2)\cdot 3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$