Виды матриц

Матрицей размера $m \times n$ называется совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы, содерж. m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составл. матрицу называются элементами матрицы

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов назыв. квадратной а число ее строк назыв. порядком матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образ. главную диагональ

Элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ образ. побочную диагональ

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – диагональная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица

Квадр. матрица, все элем. которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, назыв. треугольной матрицей

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ – нулевая матрица

$(b_{11}\ b_{12} \dots b_{1n})$ – матрица-строка

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной матрицей A^T

Св-ва операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

Квадр. матрица A назыв. симметрической, если $A = A^T$, и кососим., если $A = -A^T$

Линейные операции над матрицами и их св-ва

Лин. операции: $+$, $-$, $\cdot\lambda$

$+$ и $-$ возможно только для матриц одинаковых размеров

$A = (a_{ij})_m^n \quad B = (b_{ij})_m^n \quad C = (c_{ij})_m^n$

$A + B = C,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$A - B = D,\ d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

$A \cdot \lambda = B,\ b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Св-ва:

1) $A + B = B + A$

2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

3) $A + O = A$

4) $A + (-A) = 0$

5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

6) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

7) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta B$

Линейная комбинация матриц: $\alpha A + \beta B + \gamma C$

Произведение матриц

$(\cdot)$ определено только для согласованных матриц, т.е. число столбцов матр. A равно числу строк матрицы B (A имеет размер $m \times n$, B имеет размер $n \times s$)

$A \cdot B = C,\ c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$

$\boxed{AB \neq BA}$

Св-ва:
1) $(AB)C = A(BC)$ – ассоц.
2) $A(B+C) = AB+AC$ – дистр. умн. относ. сложения
3) $(A+B)C = AC+BC$
4) $\lambda(BA) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
5) $A(\lambda B+\beta C) = \lambda AB+\beta AC$
6) $AE = EA$
7) $AO = OA = O$

k-й положит. степенью матрицы A ($K>1$, $K \in N$) назыв. произв. K матриц, каждая из которых равна A: $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{K\text{ раз}}$

$A^0 = E$, при $A \neq 0$
$A^1 = A$

Многочленом (полиномом) степени K ($K>1$, $K \in N$) от квадр. матрицы A называется выражение вида: $\lambda_K A^K + \lambda_{K-1} A^{K-1} + \ldots + \lambda_1 A^1 + \lambda_0 A^0$

Определители второго и третьего порядков

$\exists A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, тогда всякое расположение элементов этого мн-ва в определенном порядке назыв. перестановкой из n чисел

Число всевозможных перестановок из n чисел равно: $n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$

Пара чисел a_i, a_j в перестановке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ образует инверсию, если большее из чисел a_i и a_j расположено левее меньшего, т.е $a_i > a_j$ и a_i расположено до a_j в A

Если кол-во инверсий в перестановке A четное, то перестановка называется четной; в противном случае – нечетной

Операция перехода от одной перестановки к другой, при которой два числа меняются местами, а остальные остаются на своих местах назыв. транспозицией

Лемма (о перестановках)

Всякая транспозиция меняет четность перестановки

Определитель матрицы второго порядка есть число, равное разности произведений элементов главной диагонали и элементов побочной диагонали

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 - 8\cdot 3 = -17$$

Определитель матрицы третьего порядка. Сумма $\det A$ построена по правилу «треугольников». 1-е слагаемое – произведение эл-в главн. диаг., 2-е и 3-е слагаемые – произв. эл-в расположенных в вершинах треугольников с основанием паралл. главной диагонали. 4-е слаг. – произв. эл. побочной диаг., 5-е и 6-е слагаемые произв. эл. располож. в вершинах треугольников, основания которых $\parallel$ поб. диаг.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Св-ва определителей

1) Если матрица имеет нулевую строку/столбец, то $\det A = 0$
2) Если какую-либо строку/столбец умножить на число C, то $\det A$ тоже умнож. на C
3) Если в матрице A какая-либо строка/столбец является суммой двух слагаемых, то $\det A$ равен сумме определителей двух матриц, у которых соответствующими строками/столбцами явл. соотв. первые слаг. и вторые, а все остальные эл-ты остаются без изменений
4) Если переставить две строки/столбца, то $\det A$ умножится на -1
5) Если матрица имеет две одинаковые строки/столбца, то $\det A = 0$
6) Если какую-либо строку/столбец умножить на любое число и прибавить к другой строке/столбцу, то $\det A$ не изменится
7) $\det A = 0$, если содержит две пропорц. строки
8) $\det A = \det A^T$

Понятие минора и алгебраического дополнения элемента определителя

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$ $(A_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})$ – алг. доп. a_{23}

~~A_{23} – алг. дополнение~~

произведе.
и
авилу
-е
основания
слагаемые
диаг.
a_{32} -
a_{33}
жна на С
аемых,
позиции
эл-ты
ть к
л. доп. a_{23}

Минором элемента a_{ij} матрицы A назыв. определитель порядка $n-1$, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием ее строки с номером i и столбца j

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}$$

$$A_{23}=-M_{23}$$

1) $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

2) Определитель матрицы порядка n ($n\in\mathbb{N}$) равен сумме произведений эл-в какой-либо строки/столбца матрицы на их алг. дополн., т.е. $\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ $(i=1,2,\dots,n)$

Вычисление определителей высших порядков

Пользуясь св-ми определителей, преобразовать его так, чтобы как можно больше элементов какой-либо строки/столбца были равны нулю. Затем разложить определитель по этой строке/столбцу

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} \text{2 строка} + \\ \text{3 строка} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} \text{1 строка} \cdot (-4) \\ + \text{3 строка} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -8 \end{vmatrix}=(\text{разл. по 1 столбцу})=$$

$$=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}=1\cdot(-32+18)=-14 \Rightarrow \det A=-14$$

Понятие обратной матрицы

$A^{-1}A=E=AA^{-1}$, если для A существует A^{-1}, то A - обратима

Кв. матрица <u>вырожденa</u>, если ее определитель равен нулю и <u>невырожденa</u>, если ее определ. не равен нулю

Для того, чтобы матрица A была обратима, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденой

Нахождение обр. матрицы с помощью элементарных преобразований

Элементарн. преобраз:

1) Перестановка строк
2) Умножение строки на число $\lambda\neq 0$
3) Умножение любой строки на $\lambda\neq 0$ и прибавление ее к другой строке
4) Вычеркивание нулевой строки

Лемма 1: если кв. матр. A невырождена, то ее с помощью эл. преобр. можно привести к единичной

Лемма 2: каждое эл. пр. матрицы равносильно умножению ее слева на некоторую матрицу

Правило нахождения обратной матрицы с помощью эл. пр.:

Записывают матрицу A, к ней справа приписывают единичную матрицу. Над полученной расширенной матрицей проводят элементарные преобр. так, чтобы на месте A получилась единичная матрица E, тогда на месте E получим обр. матр. A^{-1}, т.е. $(A|E) \sim (E|A^{-1})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-4) \cdot(-3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-6) \\ :2 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot(-2) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Определение ранга матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначим строки: $A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

$A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$

$A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$

Строки $A_1, A_2, \dots, A_m$ назыв. л/з, если сущ. числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что: $\underbrace{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m}_{\text{лин. комб. строк}} = 0$ ~~нулевая~~

Строки $A_1, A_2, \dots, A_m$ назыв. л/нз, если р-во выполняется только тогда, когда все числа $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$

Если для строки A_k $(1 \leq k \leq m)$ существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что: $A_k = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_m A_m$, то говорят, что A_k явл. лин. комб. других строк

Критерий лин. з-ти: для того, чтобы строки $A_1, A_2, \dots, A_m$ матрицы A были л/з необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из них была лин. комб. других

Рангом системы векторов назыв. кол-во векторов в базисе этой системы, т.е. кол-во л/нз векторов этой системы

! аналогично со столбцами !

Вычисление ранга с помощью эл. пр.

С помощью эл. пр. приводим матрицу к диагональному виду и затем подсчитываем кол-во ненулевых строк

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 0{,}4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

Система лин. ур-й

Лин. ур-м от n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ назыв. выражение вида:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$

Рассм. систему m лин. ур-й

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Матр. форма записи: $AX=B$, где A – матрица коэф. при неизвестных

X – матрица-столбец неизвестных

B – матрица-столбец свободных членов

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Решением системы назыв. упорядоченная совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, при подстановке которых вместо неизвестных x_j $(j=1,2,\dots,n)$, каждое ур-е системы обращается в верное числовое р-во.

СЛУ назыв. совместной или непротиворечивой, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система назыв. несовместной или противоречивой.

Система назыв. определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если имеет бесконечное мн-во решений

Основные задачи теории СЛУ:

1. Установить совместна система или нет
2. Если совместна, то ~~определить~~ выяснить определенная или неопределенная
3. Если определ., то найти единственное решение, если неопр., то описать совокупность всех ее решений

Две СЛУ наз. эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них явл. решением другой и наоборот

Эл. пр. СЛУ:

1. Перестановка ур-й системы
2. Перенумерация неизвестных
3. Умножение любого ур-я системы на число и прибавление получ. ур-я к другому ур-ю системы
4. Вычеркивание ур-й вида: $0x_1+0x_2+\ldots+0x_n=0$

Теорема Кронекера-Капелли:

Для того, чтобы СЛУ была совместна необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$

Метод Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 180 \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60 \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3 \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1 \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1$$

Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

С помощью эл. пр.:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r-1}x_{r-1} + \ldots + c_{1n}x_n = b_1' \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r-1}x_{r-1} + \ldots + c_{2n}x_n = b_2' \\ \ldots \\ c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = b_r' \end{cases}$$

① $\operatorname{rang} A = r = n$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r-1}x_{r-1} + \ldots + c_{1r}x_r = b_1' \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r-1}x_{r-1} + \ldots + c_{2r}x_r = b_2' \\ c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = b_r' \end{cases}$$ единств. решение

② $\operatorname{rang} A = r < n \Rightarrow$ бесчисленное мн-во решений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$ $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ система совм.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 2;\ x_2 = 5;\ x_1 = 1$$

Понятие вектора

Вектор – направл. отрезок

$\bar{AB}$, где A – начало, B – конец

Длина вектора $|\bar{AB}|$, $|\bar{a}|$

Единичный вектор – $|\bar{a}| = 1$

Нулевой вектор – $|\bar{a}| = 0$

Два вектора назыв. коллин., если они лежат на одной или парал. прямых

$\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ – коллин. и сонапр.

$\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ – кол. и противоп. напр.

Три ненул. вект. назыв. компл., если они лежат в одной или парал. пл-х

$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$, где $\bar{c}$ соединяет начало $\bar{a}$ с концом $\bar{b}$ — правило треугольника

При сложении векторов также используют правило ▱

Св-ва сложения:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$
2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$
3. $\bar{a}+\bar{o}=\bar{a}$
4. $\bar{a}+\bar{a}'=\bar{o}$

Произведением ненулевого $\bar{a}$ на действ. число $\alpha \neq 0$, назыв. $\bar{b}$ такой, что:

1. $|\bar{b}|=|\alpha|\cdot|\bar{a}|$
2. $\bar{b}\uparrow\uparrow\bar{a}$, если $\alpha>0$ и $\bar{b}\uparrow\downarrow\bar{a}$, если $\alpha<0$

Св-ва произведения:

1. $1\cdot\bar{a}=\bar{a}$, $-1\cdot\bar{a}=-\bar{a}$
2. $\alpha(\beta\bar{a})=(\alpha\beta)\bar{a}$
3. $(\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}$
4. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$

Лин. з-ть. Базис. Координаты вектора

Лин. комб. векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ назыв. вектор вида: $\bar{p}=\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2+\ldots+\alpha_k\bar{a}_k$

Если все коэф. лин. комб равны нулю, то она — тривиальная, иначе — нетривиальная

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ — л/з, если существуют $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, среди которых хотя бы одно $\neq 0$, что: $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k=0$

Если р-во справедливо только при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k=0 \Rightarrow$ л/нз

1. $\bar{a}$ и $\bar{b}$ л/з, если $\bar{a} \parallel \bar{b}$
2. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ л/з, если векторы компланар.
3. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ л/з
4. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ — л/з, если хотя бы один явл. лин. комб.

Базис

Базис на прямой — любой ненулевой вектор

Базис на пл-ти — упорядоч. пара некол. векторов

Базис в пр-ве — упорядоченная тройка некомпл. векторов

Базис n-мерного пр-ва – система любых n л/нз векторов

$\exists\ \bar{l}_1, \bar{l}_2$ - образ. базис $\Rightarrow \bar{a} = \lambda_1\bar{l}_1 + \lambda_2\bar{l}_2$, где λ_1, λ_2 - коорд. $\bar{a}$ в базисе $\bar{l}_1 \bar{l}_2$

Если базисные векторы попарно ортог. и единичны, то базис - ортонорм.

$\bar{a} + \bar{b} = (x_{\bar{a}} + x_{\bar{b}}; y_{\bar{a}} + y_{\bar{b}}; z_{\bar{a}} + z_{\bar{b}})$

$\bar{a} - \bar{b} = (x_{\bar{a}} - x_{\bar{b}}; y_{\bar{a}} - y_{\bar{b}}; z_{\bar{a}} - z_{\bar{b}})$

$\lambda\bar{a} = (\lambda x_{\bar{a}}; \lambda y_{\bar{a}}; \lambda z_{\bar{a}})$

Проекция

Проекцией вектора $\bar{AB}$ на ось $\{l, \bar{e}\}$ назыв. число, равное длине вектора $\bar{A'B'}$, взятое со знаком „+", если $\bar{A'B'} \uparrow\uparrow \bar{e}$, и со знаком „-", если указанные векторы противоположно направлены

$Пр_l \bar{b}$ – проекция $\bar{b}$ на ось $\{l, \bar{e}\}$

Ось - прямая, на которой указано некоторое направление в качестве положит.

Если $\bar{AB} = \bar{0}$ или $\bar{AB} \perp l$, то $Пр_l \bar{AB} = 0$

$Пр_l \bar{b}$ положит, если вектор образует с осью острый угол φ, и отриц., если этот угол тупой, и равна нулю, если угол прямой

Св-ва проекций:

1. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны
2. $Пр_l(\bar{a} + \bar{b}) = Пр_l \bar{a} + Пр_l \bar{b}$
3. $Пр_l(\lambda\bar{a}) = \lambda Пр_l \bar{a}$

Скалярное произведение векторов

$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$

Св-ва скал. произв.:

1. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$
2. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$
3. $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$
4. Скал. квадрат $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a}$, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$
5. $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{a}\bar{b} = 0$

Если $\bar{a} = (x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}}, z_{\bar{a}})$, $\bar{b} = (x_{\bar{b}}, y_{\bar{b}}, z_{\bar{b}})$ в некотором базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, то скал. произв. этих векторов равно сумме произведений одноим. коорд. $\bar{a}\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$

1. $\exists$ $\bar{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\bar{a} \cdot \bar{a} = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$ и $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

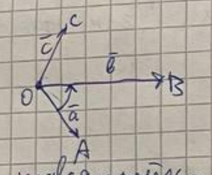
2. $\exists$ $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3. $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

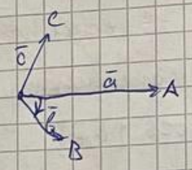
4. $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$

Векторное произведение векторов

Три некомпл. вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образ. правую тройку, если с конца $\bar{c}$ кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой.



правая тройка



левая тройка

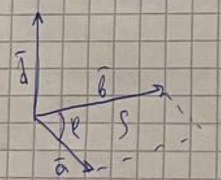
$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$, $\bar{c}$ удовлетв. условиям:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$

2) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, $0 < (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) < \pi$

3) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая тройка

$\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}]$



$|[\bar{a}, \bar{b}]| = S$

$\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{a} \parallel \bar{b} \Rightarrow [\bar{a}, \bar{b}] = 0$

$[\bar{a}, \bar{a}] = 0$

Св-ва векторного произв:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$
2. $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{d}] = [\bar{a}, \bar{d}] + [\bar{b}, \bar{d}]$
3. $[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}]$

$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

$\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{|[\bar{a}, \bar{b}]|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

Смеш. произв. векторов

$\bar a\bar b\bar c = [\bar a,\bar b]\bar c$

Св-ва смеш. произведения:

1. $V = |\bar a\bar b\bar c|$, если $\bar a,\bar b,\bar c$ - правая тройка

$-V = |\bar a\bar b\bar c|$, если $\bar a,\bar b,\bar c$ - левая тройка

$V_{пир.} = \frac{1}{6}|\bar a\bar b\bar c|$

2. $\bar a\bar b\bar c = 0$, если векторы комплан.

3. $\bar a\bar b\bar c = \bar b\bar c\bar a = \bar c\bar a\bar b$ - цикл. перестановка

4. $\left.\begin{aligned}&\bar a\bar b\bar c = -\bar b\bar a\bar c\\ &\bar a\bar b\bar c = -\bar a\bar c\bar b\end{aligned}\right\}$ перестановка соседних векторов

5. $\bar a(\bar b+\bar d)\bar c = \bar a\bar b\bar c + \bar a\bar d\bar c$

$\bar a\bar b(\bar c+\bar d) = \bar a\bar b\bar c + \bar a\bar b\bar d$

$\bar a(\lambda\bar b)\bar c = \bar a\bar b(\lambda\bar c) = \lambda(\bar a\bar b\bar c)$

$\bar a = (x_1, y_1, z_1),\ \bar b = (x_2, y_2, z_2),\ \bar c = (x_3, y_3, z_3) \Rightarrow \bar a\bar b\bar c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \bar a,\bar b,\bar c$ - комплан.

Комплексные числа

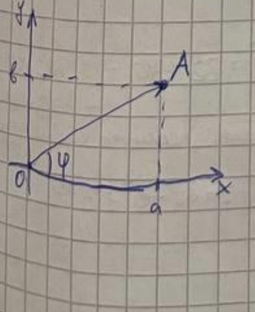
Число i назыв. мнимой единицей, если $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$

Компл. число $z = a + ib$, где a, b - действ. числа, a - действ. часть, b - мнимая

$a = \mathrm{Re}\,z$, $b = \mathrm{Im}\,z$

$\left.\begin{aligned}&z_1 = a+ib\\ &z_2 = a-ib\end{aligned}\right\}$ сопряженные

$z = a + ib$ - алгебраическая форма



Ox - действ. ось

Oy - мнимая ось

$\bar{OA}$ - радиус-вектор

Тригоном. и показ. формы записи компл. числа

$z = a + ib$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Аргумент компл. числа — φ $\quad \arg z = \varphi$

$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$

Тригонометр. форма компл. числа: $z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Правило перехода от алг. формы к тригоном.

1. Найдем $|z|$
2. Определяем в какой четверти находится точка z
3. Находим угол φ

Ф-ла Эйлера: $\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi = e^{i\varphi}$

Показ. форма: $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$

Действия над компл. числами в алг. форме

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$

$\frac{z_1}{z_2}$ — используем сопряж.

<u>Пример</u>: $\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} = \frac{-11+29i}{25+49} = \frac{-11+29i}{74} = -\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i$

Возведение в степень

$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ раз}$

Ф-ла бинома Ньютона: $(a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(bi)^k$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Пример: $(2+i)^5 = 2^5 + 5\cdot 2^4\cdot i + \frac{5\cdot 4}{2!}2^3 i^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}2^2 i^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}2i^4 + i^5 = 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i = -38 + 41i$

Извлечение корня: $u^n = z$, для выч. корня $\sqrt[n]{z}$ следует составить и решить систему ур-й

Пример: $\sqrt{3-4i}$ — ? $\quad \sqrt{3-4i} = a + bi \Rightarrow (a+bi)^2 = 3 - 4i \Rightarrow a^2 + 2abi - b^2 = 3 - 4i$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3-4i} = 2 - i$ или $\sqrt{3-4i} = -2 + i$

Действия над компл. числами в тригон. форме

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ — ф-ла Муавра

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

Алгоритм решения ур-й вида $z^n - a = 0$

1. Найти модуль и аргумент числа a: $r = |a|$, $\varphi = \arg a$
2. Записать ф-лу при заданном значении n

   $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$
3. Выписать значения z_k корней ур-я при $k = 0, 1, \dots, n-1$

Действия над компл. числами в показ. форме

$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$

$z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

$z = |z| e^{i\varphi} \longrightarrow z^n = |z|^n e^{i\varphi n}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i}$, где k принимает n значений: $0, 1, 2, \dots, n-1$