Линейность предела

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Н-ть $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

① Находим x в старшей степени ч-ля и зн-ля и делим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + 3} = \frac{2}{3}$$

Н-ть $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{1+x}$$

① Разложить ч-ль и зн-ль на множители

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-5)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (2x-5) = -7$$

Метод умножения ч-ля и зн-ля на сопряж.

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21})(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{(5x-15)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} = \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)(\sqrt{3+6} + \sqrt{30-21})} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = -\frac{3}{10}$$

1-й замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin \alpha(x)} = 1$$

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}\to 1 = \frac{7}{3}$$

Метод замены переменной

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,3x}{7x} = \frac{0}{0}$ $\quad \exists\ \mathrm{arctg}\,3x = t$, $t\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,3x}{7x} = \frac{t}{7\cdot\frac{\mathrm{tg}\,t}{3}} = \frac{t}{7\cdot\frac{\sin t}{3\cos t}} = \frac{t}{\frac{7\sin t}{3}} = \frac{3t}{7\sin t}\to 1 = \frac{3}{7}$$

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,3x) = \mathrm{tg}\,t$

$3x = \mathrm{tg}\,t \Rightarrow x = \frac{\mathrm{tg}\,t}{3}$

2-й замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

При $\alpha(x)\to\infty$ обнаруж. неоп-ть вида 1^∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x} = e^{\frac{4}{3}}$$

Ф-ла для устран. 1^∞

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[(u(x)-1)v(x)]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}-1\right)4x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$$

Порядок роста ф-и

1. ...
2. x^3
3. x^2
4. лин. ф-я (x)
5. сумма кв. и лин. ф-ции

Сравнение б/б ф-й

$f(x)$ и $g(x)$ определены на ∞

1) Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, где K - ненулевая константа, то ф-и имеют одинаковый порядок роста. Если $K=1$, то ф-ии называв. эквивалентными

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, то ф-я $f(x)$ более высокого порядка роста, чем $g(x)$

3) Если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $g(x)$ более высокого порядка, чем $f(x)$

$$x \longrightarrow -\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^4+x^3+1)$; $(-\infty)^4 = +\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(2x^4+x^3+1) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+x}{3-x+5x^2-2x^3} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-2x^3} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

НО явл. неопр.: 1) $\frac{0}{-3}=0$, $\frac{0}{\infty}=0$

2) $\frac{5}{0}=\infty$, $\frac{\infty}{0}=\infty$

3) $3^{+\infty}=+\infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$, $0^{\infty}=0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x)=0-0=0$

$$\infty-\infty$$

1) приводим выр-я под знаком предела к общему зн-лю

2) умножение/деление на сопряженное

3) преобр. логарифмов

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-x}-\frac{3}{x^3-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x(x-1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3x}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x^2+x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x^2+x+1)}=0$

Числовая п-ть и ее предел

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, где x_1 - первый член п-ти, x_n - общий

$x_n=2n$ $\{2,4,6,8\dots\}$ $=\infty$

$y_n=2n-1$ $\{1,3,5,7,\dots\}$ $=\infty$

$u_n=\frac{1}{n}$ $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$ $=0$

П-ть дискретна (прерывна)

$\lim\limits_{n\to\infty} n!$ $\{1,2,6,24\dots\}=\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}$ $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24}\dots\}=0$