Introdução à Teoria dos Grafos

Professora: Mariá C. V. Nascimento
Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP
Instituto de Ciência e Tecnologia

November 20, 2020

História

A ideia básica de grafos surgiu no século XVIII (1735) com o matemático suíço Leonhard Euler. Ele usou grafos para resolver o famoso problema das 7 pontes de *Königsberg* (cidade alemã).

Königsberg era situada em ambos os lados do rio *Pregel* com duas ilhas grandes, conectadas por 7 pontes.

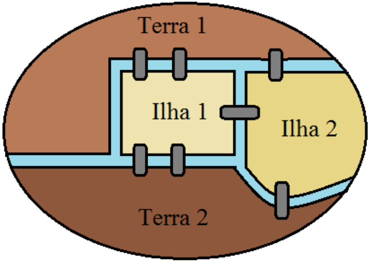
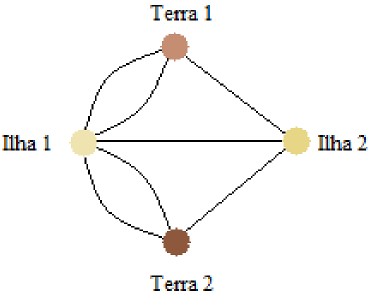


Figure: Representação da cidade de *Königsberg*.

Problema

Encontrar um caminho que passe por todas as pontes apenas uma vez (sem gracinhas, nadar um trecho, andar meia ponte, etc,...).
CAMINHO EULERIANO
Euler provou que não há solução para esse problema.

Obs.:Não importava a rota dentro da Terra.



Introdução

1. Estudaremos objetos combinatórios - grafos.
2. Grafos - bom modelo para muitos problemas em vários ramos da ciência.
3. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres devido ao desafio intelectual e por terem importantes aplicações práticas.
4. No nosso curso veremos 5 temas:
    - Conjuntos estáveis.
    - Coloração de vértices.
    - Emparelhamento e coloração de arestas.
    - Fluxo em redes

Exemplo

- Suponha que um ponto de um diagrama representa uma pessoa, e que linhas entre esses pontos representam relações juntando pares de amigos.
- Interesse: um par de pontos está ou não conectado?

- Abstração matemática que dá origem ao conceito de grafo.
- Muitos grafos interessantes - estrutura especial
- Alguns exemplos:
  - Grafos na Ciência da Computação : seus vértices e arestas modelam conjuntos de dados.

Grafos e grafos simples

Definição

Um grafo G é definido como uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ consistindo de um conjunto não vazio $V(G)$ de vértices, um conjunto $E(G)$, de subconjuntos de $V(G)$ de cardinalidade 2, de arestas e uma função de incidência ψ_G que associa uma aresta de G a um par não ordenado de vértices de G. Se e for uma aresta e u e v são seus vértices tais que $\psi_G(e) = uv$, então e tem como pontas os vértices u e v.

Exemplo:

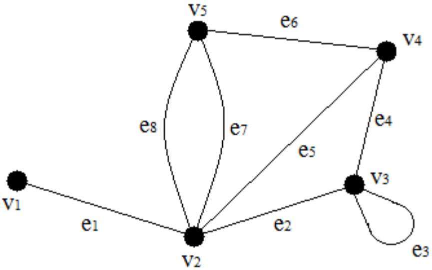
$$G = (V(G), E(G), \psi_G)$$

em que

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

e ψ_G é definido por

$$\psi_G(e_1) = v_1 v_2,\ \psi_G(e_2) = v_2 v_3,\ \psi_G(e_3) = v_3 v_3$$
$$\psi_G(e_4) = v_3 v_4,\ \psi_G(e_5) = v_2 v_4,\ \psi_G(e_6) = v_4 v_5$$
$$\psi_G(e_7) = v_2 v_5,\ \psi_G(e_8) = v_2 v_5$$



Quanto à representação gráfica

- Representação gráfica que originou a palavra “graphs”.
- Ela nos ajudará a entender muitas de suas propriedades.
- Não há uma maneira única de desenhar.
- Para melhor visualização existem algoritmos específicos
    - *Kamada Kawai* (1988).
    - Pacote “*igraph*” que roda em C, C++ e R tem a função “plot.graph” que fornece algumas opções de algoritmos.
    - Evitam muitas intersecções de arestas.

Definição

Um grafo é dito PLANAR quando houver uma representação gráfica na qual suas arestas se interceptem apenas em suas pontas.

- Vantagens em teoria dos grafos: maioria de suas definições e conceitos são sugeridas por representação gráfica.

Outras definições

- **Incidência**: Vértices são ditos incidentes a uma aresta quando eles forem suas pontas.
- **Adjacência**: Dois vértices que são incidentes a uma mesma aresta são ADJACENTES.
- **Laço**: uma aresta com pontas idênticas é chamado LAÇO.

Grafo simples

Definição

Um grafo é dito SIMPLES se ele não tiver laços e não tiver duas arestas diferentes com o mesmo par de pontas (arestas "paralelas").

- Nesse curso trabalharemos basicamente com grafos simples.
- Defina $n(G)$ e $m(G)$, respectivamente, o número de vértices e o número de arestas do grafo G (cardinalidade). Consideremos daqui para frente G como um grafo. Podemos omitir algumas vezes a letra G dos símbolos, como por exemplo, V, E, n, ao invés de $V(G)$, $E(G)$ e $n(G)$.

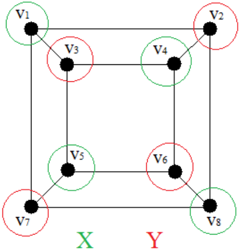
- Um grafo com $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas é chamado GRAFO COMPLETO. A expressão "G é um K_n" é uma abreviatura de "G é um grafo completo com n vértices".
- Segundo Gries et al (1993), a letra K é por conta da palavra *komplett* em alemão.
- *Vollständiger Graph* não contém a letra K, outras fontes dizem que é em honra de Kazimierz Kuratowski.
- Denotemos $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de V. Portanto,

$$|V^{(2)}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafo bipartido

Um grafo é dito bipartido quando o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y tais que $\forall$ aresta de G tenha uma ponta em X e outra em Y. A partição (X, Y) é dita BIPARTIÇÃO do grafo.

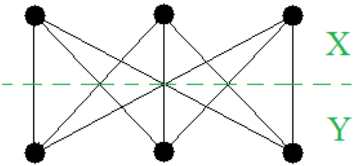
Exemplo: O grafo abaixo é bipartido;



Grafo bipartido completo

É um grafo bipartido simples com bipartição (X, Y) na qual todo vértice de X é unido a todo vértice de Y. Se $|X| = m$ e $|Y| = t$ esse grafo será denotado por $K_{m,t}$

Exemplo: O grafo abaixo é bipartido completo;



$K_{3,3}$, pois $|X| = 3$ e $|Y| = 3$

Definição

A vizinhança de um conjunto X de vértices de um grafo G é o conjunto de todos os vértices que tem algum adjacente a X. Esse conjunto será denotado por

$$\Gamma_G(X) \text{ ou } \Gamma(X)$$

A vizinhança de um vértice v é o conjunto $\Gamma(\{v\})$, que pode ser denotada simplesmente por $\Gamma(v)$.

Observação: Nessa definição, a vizinhança de X pode não ser disjunta de X, $\Gamma(X) \cap X \neq \emptyset$.
Alguns autores preferem adotar uma definição ligeiramente diferente e dizer que a vizinhança de X é o conjunto dos vértices $V(G) \backslash X$ que têm algum vizinho em X, definimos esta vizinhança por $\Gamma'(X)$.

Exercício 1

Que tipo de grafo é aquele no qual para um dado X

$$\Gamma(X) = \Gamma'(X),\ \Gamma(X) \cap X = \emptyset \text{ e } \Gamma(X) \cup X = V(G)\ ?$$

Definição

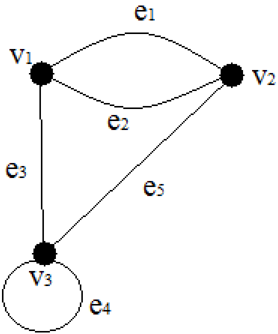
O grau $d_G(v)$ de um vértice é o número de arestas de G incidentes a v. Um laço é contado como duas arestas. Nós representaremos o menor e o maior grau de G, respectivamente, pelos símbolos $\delta(G)$ e $\Delta(G)$.

- Antes de proceder, definamos matriz de adjacências em matriz de incidências.
- Para qualquer grafo G, considere uma matriz $n \times m$, chamada MATRIZ DE INCIDÊNCIAS de G definida da seguinte forma:

Definição

Seja $v_1, v_2, ..., v_n$ os vértices e $e_1, e_2, ..., e_m$ as arestas de G. Sua matriz de incidências é $M(G) = [m_{ij}]$ em que m_{ij} é o número de vezes que v_i e e_j são incidentes.

Exemplo



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	1	1	0	0	1
v_3	0	0	1	2	1

- Outra matriz comumente usada em Teoria dos Grafos é a de ADJACÊNCIAS. Nesse caso, ela é definida da seguinte maneira:

Definição

A matriz de adjacências de G, $A(G) = [a_{ij}]$, é uma matriz de dimensão $n \times n$ tal que a_{ij} é o número de arestas adjacentes dos vértices v_i e v_j. A matriz de adjacências do grafo anterior é definida da seguinte maneira:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Em grafos não direcionados, a matriz de adjacências é simétrica.

Teorema 1.1

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Prova: Considere a matriz de incidências M. A soma dos elementos na linha correspondente ao vértices v é precisamente $d(v)$, e, portanto, $\sum_{v \in V} d(v)$ é a soma de todos os elementos de M. Mas a soma é $2m$, pois para cada coluna de M sua soma é 2, ou seja, uma mesma aresta é contada duas vezes na soma. $\square$

Corolário

Para qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Prova: Seja v_1 e v_2 o conjunto de vértices de grau par e ímpar, respectivamente. Então,

$$\sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v) = \sum_{v \in V} d(v)$$

é par, pelo Teorema 1.1
Como $\sum_{v \in V_2} d(v)$ é também par, $\sum_{v \in V_1} d(v)$ só pode ser par.
Logo, $|V_2|$ é par. $\square$

Grafos Regulares

Um grafo G é k-REGULAR se $d(v) = k$ para todo $v \in V$. Um grafo REGULAR é um que seja k-REGULAR para algum k.

Definição

O *complemento* de um grafo (V, E) é o grafo $(V, V^{(2)} \setminus E)$. O complemento de um grafo será denotado por $\overline{G}$.

- Um grafo G é vazio se $E(G) = \emptyset$ e "G é um $\overline{K}_n$" é uma abreviatura de "G é um grafo vazio com n vértices".

Observações

- Existe um tipo de grafo, H, conhecido como HIPERGRAFO, no qual $E(H)$ é definido como subconjuntos de $V(H)$ de cardinalidade maior do que 2, em que $H=(V(H), E(H), \psi_H)$.
- Um grafo é dito FINITO se ambos seus conjuntos de vértices e arestas forem finitos. Neste curso, veremos apenas grafos finitos, logo o termo "grafo" indicará um grafo finito.

Referências

- J.A. Bondy and U.S.R. Murty -Graph theory.(2008)
- T. Kamada and S. Kawai (1988). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters* 31, 7-15.