

VÍDEO-ANÁLISE DO PERÍODO DE UM PÊNDULO FÍSICO EM FORMATO DE “L” DE MASSA VARIÁVEL UTILIZANDO RASTREADOR *TRACKER* E SIMULAÇÃO TEÓRICA COM PYTHON3 EM BIBLIOTECA *VPYTHON*

VIDEO-ANALYSIS OF THE PERIOD OF A VARIABLE MASS PHYSICAL PENDULUM IN “L” SHAPE USING TRACKER AND THEORETICAL SIMULATION WITH PYTHON3 IN LIBRARY *VPYTHON*

Lara Campos Ibiapina¹, Lucas Maciel L. Cavalcanti², Nicholas Scharan Cysne³ e Pedro de Magalhães Macedo⁴

RESUMO

Análise e determinação da variação instantânea do período de um pêndulo físico de massa variável em formato de “L” em função do tempo. O experimento consistiu em colocar em movimento pendular, um conjunto cilíndrico oco de $(60,314 \pm 0,1)$ cm de comprimento e raios interno de $(28,28 \pm 0,05)$ mm e externo de $(31,91 \pm 0,05)$ mm, possuindo uma extensão inferior de $(31,415 \pm 0,05)$ cm, preenchido inicialmente até o topo com água que, por haver um pequeno furo na extremidade inferior, deixa a mesma vazar, variando: a massa, o momento de inércia e a posição do centro de massa do pêndulo. Utilizou-se para a vídeo-análise o *software* livre *Tracker*, que possibilita análise do movimento do cilindro pela geração de gráficos de posição e velocidade com o tempo. A observação foi feita desde o início da oscilação e vazamento da água, até o momento em que esse cessa. A fim de se comparar os resultados obtidos, foi realizada uma simulação computacional utilizando-se Python3 associada a biblioteca *vPython*, que forneceu os gráficos do período em função do tempo de oscilação do pêndulo.

Palavras Chaves: Pêndulo físico, período variável, massa variável, *Tracker*, *Python3*

ABSTRACT

Analysis and determination of the instantaneous variation of the period of a variable mass physical pendulum in “L” shape as a function of time. The experiment consisted in placing in pendular movement a hollow cylindrical set (60.314 ± 0.1) cm in length and internal (28.28 ± 0.05) mm and outside (31.91 ± 0.05) mm, having a lower extent of (31.415 ± 0.05) cm, initially filled to the top with water which, as there is a small hole in the lower end, allows the same to leak, varying: mass, moment of inertia and position of the center of mass of the pendulum. The free software *Tracker* was used for video analysis, which allows analysis of the cylinder movement by the generation of position and velocity graphs over time. The observation was made from the beginning of the oscillation and leakage of the water, until the moment in which it ceases. In order to compare the obtained results, a computational simulation was performed using Python3 associated to the *vPython* library, which provided the graphs of the period as a function of the pendulum oscillation time.

Keywords: Physical pendulum, period variable, mass variable, *Tracker*, *Python3*

¹ Aluna do Instituto Tecnológico de Aeronáutica: laraibicpinialci@gmail.com

² Aluno do Instituto Tecnológico de Aeronáutica: lucas.maciel.cavalcanti@gmail.com

³ Aluno do Instituto Tecnológico de Aeronáutica: nicholas.s.cysne@gmail.com

⁴ Aluno do Instituto Tecnológico de Aeronáutica: pedritomacedo@gmail.com

INTRODUÇÃO

Um pêndulo físico é feito de materiais com massa não desprezível e estrutura rígida (corpos rígidos não pontuais). Este trabalho considera um pêndulo físico, cilíndrico e oco, preenchido com água, em formato de “L”. Porém, sua massa e, consequentemente, momento de inércia variam com o tempo, pois existe uma vazão variável dessa água pela extremidade inferior do corpo.

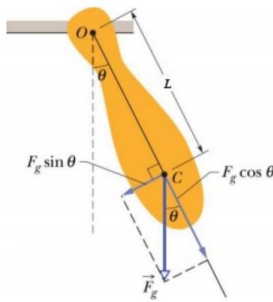


Figura 1. Figura representa o esquema de um pêndulo físico comum sendo F_g o peso do corpo, L (OC) a distância entre o ponto de oscilação e o centro de massa e Θ o ângulo entre a linha de oscilação e a vertical - Fonte: <https://www.ebah.com.br/content/ABAAAgQ60AB/pendulo-fisico>.

Analisando o modelo teórico de um pêndulo físico comum, tem-se que, sendo ζ o torque gerado pelo peso, I o momento de inércia do corpo que está oscilando em relação ao eixo de oscilação e Θ o ângulo que o vetor posição do centro de massa e o eixo z (vertical) fazem, tem-se a seguinte equação (R.C HIBBELER; R.C HIBBELER, 2000):

$$\zeta = I \frac{d^2\Theta}{dt^2} \quad (1)$$

Além disso, como aponta a Figura 1, o torque pode ser escrito como:

$$\zeta = -M g \sin(\Theta) x \quad (2)$$

Em que M representa a massa total do corpo, g a aceleração gravidade local e x a distância entre o centro de massa do sistema que oscila e o eixo de rotação.

Considerando Θ muito pequeno, pode-se escrever $\sin(\Theta) \approx \Theta$, com isso, igualando as equações (1) e (2), obteve-se (3):

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -M g x \Theta \quad (3)$$

Pela solução do movimento harmônico, que relaciona a variável com sua segunda derivada temporal, tem-se, para o período (T) do movimento de oscilação de um pêndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgx}} \quad (4)$$

Porém, no problema estudado, os parâmetros x , M e I variam com o tempo.

A variável M depende da vazão de água (z), mostrada na equação (6) (TIPLER; TIPLER, 2006), do raio do furo na extremidade inferior (Rf) da densidade do líquido (p), do volume inicial de água (v), da massa do cilindro (Mc) e do tempo, da maneira descrita em (5), sendo o produto $p v$ a massa inicial de água e $p z t$, o quanto essa massa decresce com o passar do tempo :

$$M(t) = Mc + p v - p z(t) t \quad (5)$$

$$z(t) = \pi Rf^2 \left(\frac{Rf^2}{Rin^2} \right) g t \quad (7)$$

Sendo $L(t)$ a distância da superfície livre da água até o ponto de rotação, essa é dada por:

$$L(t) = \left(\frac{R_f^4}{2 R_m^4} \right) g t^2 \quad (8)$$

Para determinar a distância do centro de massa total (Z_{cm} e Y_{cm}) até o ponto de rotação, devemos fazer a média ponderada entre os centros de massa da água (Z_a e Y_a) e do cano (Z_c e Y_c) nos eixos coordenados z e y , fixados no vértice do 'L' do cano, como mostra a figura 2. Sendo o comprimento do cano vertical ($2L$) e do horizontal (L).

$$Z_a = \frac{(2L - L(t))^2}{2(3L - L(t))} \quad (9)$$

$$Y_a = \frac{L^2}{2(3L - L(t))} \quad (10)$$

$$Z_{cm} = \frac{(M(t) - Mc) Z_a + Mc L}{M(t)} \quad (11)$$

$$Y_{cm} = \frac{(M(t) - Mc) Y_a + Mc (L/2)}{M(t)} \quad (12)$$

Além disso, o parâmetro x depende, além das variáveis expostas acima, do raio interno (R_i), resultando na relação (13):

$$x(t) = \sqrt{(2L - Z_{cm})^2 + Y_{cm}^2} \quad (13)$$

Finalmente, para determinar o momento de inércia I , em relação ao tempo, foram realizados algumas etapas:

1. calcular o momento de inércia do corpo com relação ao eixo z (mostrado na

Figura 2), resultando em (sendo R_e o raio externo do cano):

$$I_z = \frac{[Mc(R_i^2 + R_e^2) + (p_v - p_z t) R_i^2]}{2} \quad (14)$$

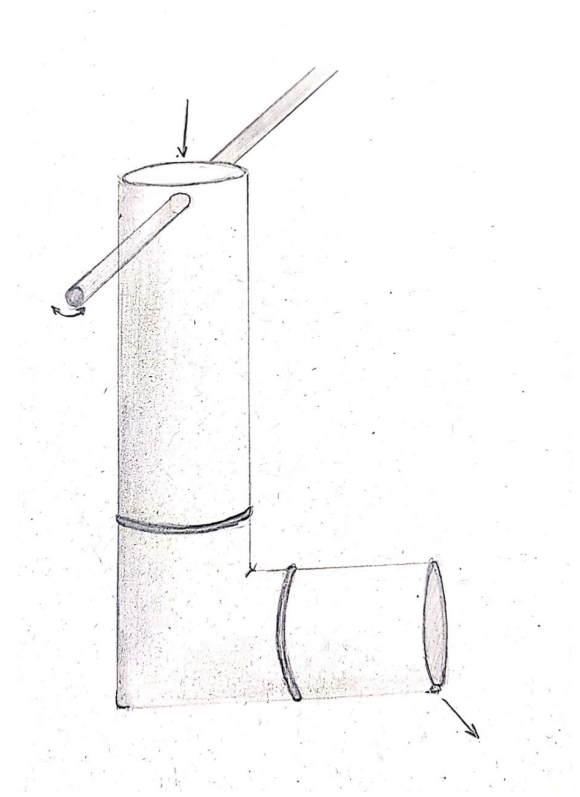


Figura 2. Figura representa o esquema do cilindro utilizado no experimento e dos eixos x de movimento dele. Fonte: Acervo pessoal.

2. pelo teorema dos eixos perpendiculares mostrado em (8) (R.C HIBBELER; R.C HIBBELER, 2000), em que I_z , I_x e I_y , representam, respectivamente, os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z .

$$I_z = I_x + I_y \quad (15)$$

Tem-se que, pela simetria do cilindro em relação aos eixos x e y :

$$I_y = I_z/2 \quad (16)$$

Por fim, pelo teorema dos eixos paralelos (R.C HIBBELER; R.C HIBBELER, 2000),

associado às equações (7) e (15), encontra-se a seguinte expressão para o momento de inércia da vertical:

$$I_v = \frac{L^2}{2} + Mc\frac{4L^2}{4} + (pv - pzt)(L + \frac{z(t)t}{2\pi Ri})^2 \quad (17)$$

Sendo I_h o momento de inércia do cano na horizontal, temos para tal expressão o seguinte valor:

$$I_h = \frac{4L^2}{3} (\frac{Mc}{3} + p\pi Ri^2 L) \quad (18)$$

Assim, como demonstrado no livro (R.C HIBBELER; R.C HIBBELER, 2000), o momento de inércia total (I) será a soma dos momentos de inércia da horizontal (I_h) com o da vertical (I_v):

$$I = I_v + I_h \quad (19)$$

Com isso, o período de (4) em dependência do tempo é dado por:

$$T(t) = 2\pi\sqrt{\frac{I(t)}{M(t)gx(t)}} \quad (12)$$

Feita a modelagem teórica, o objetivo do estudo é, a partir dos dados obtidos pela vídeo-análise do experimento, comparar gráficos experimentais e teóricos avaliando, dessa forma, como o período a massa, o momento de inércia e a posição do centro de massa do sistema em relação ao eixo de oscilação variam em relação ao tempo.

Além disso, uma possível aplicação desse estudo é a análise de variações oscilatórias em sistemas mecânicos, como mancais hidrodinâmicos e bombas centrífugas, possibilitando a detecção de vazamentos constantes (perda de massa) ou de acúmulo de

material inapropriado (ganho de massa), facilitando, assim, reparos e otimizações mecânicas.

MATERIAIS E METODOLOGIA

Descrição do material utilizado

A) Materiais utilizados na confecção do cano utilizado como pêndulo físico

- I. Dois pedaços de um cano PVC de raios interno $(28,28 \pm 0,05)\text{mm}$ e externo $(31,91 \pm 0,05)\text{mm}$, um com $(60,3 \pm 0,1)\text{cm}$ e outro de $(31,4 \pm 0,1)\text{cm}$ de comprimento.
- II. Tampa com um furo, também de PVC, para possibilitar a vazão de água durante a oscilação.
- III. Conexão de PVC com formato de "L" a fim de conectar os dois pedaços de cano.
- IV. cola de PVC, para fixar (A.I), (A.II) e (A.III)

B) Material Auxiliar:

- I. Suporte metálico, utilizado como base (Figura 3)
- II. haste horizontal de $(15,4 \pm 0,1)\text{cm}$ acoplada ao suporte, utilizada como eixo de rotação do pêndulo (Figura 3).
- III. câmera de 1 *Apple iPad* (240 fps), utilizada para realizar as gravações do movimento pendular, a fim de serem analisadas no software *Tracker*.

Descrição das ferramentas computacionais e seus programas de computação

C) *Tracker*: Software de vídeo-análise do movimento de corpos, que neste trabalho gerou gráficos de posição, velocidade e aceleração com relação ao tempo, a partir dos vídeos importados do *Apple Ipad* (B.III) para o computador com o *Tracker* instalado. Para isso, esse software utiliza uma escala de calibração (a partir da distância entre o ponto médio e o eixo de rotação que é 30 cm) convertendo de pixels para unidades de medida;

D) Biblioteca *Vpython* em Python, utilizado para simular matematicamente o modelo teórico desenvolvido na introdução. Para isso, foram utilizados métodos numéricos no programa que relacionava, a cada pequeno intervalo de tempo, ângulo de oscilação e posição do pêndulo com o tempo total. Além de avaliar, instantaneamente, as variáveis: massa, momento de inércia e posição do centro de massa do sistema em relação ao eixo de oscilação.

Descrição dos métodos experimentais utilizados

Utilizando-se cola específica para PVC (A.IV), colou-se a conexão (A.III) e a tampa (A.II) nos canos (A.I), como exemplifica a figura 3, e fez-se um furo na tampa para que a água pudesse escoar, viabilizando a variação do momento de inércia do pêndulo e da posição do seu centro de massa.

Além disso, próximo a extremidade superior do “L”, fez-se um furo diametral para que fosse possível prendê-lo ao suporte (B.I) através da haste horizontal (B.II) acoplada, possibilitando a oscilação. Para diminuir o atrito nessa região, usou-se óleo de cozinha como lubrificante.

Por último, foi feita a marcação de um ponto no cano a fim de destacá-lo, possibilitando, posteriormente, a análise pelo *software Tracker* (C). Vale ressaltar que a dimensão entre o ponto analisado e o eixo de rotação é conhecida, ($30,0 \pm 0,1$) cm, fato que possibilita a conversão entre metragens e pixels durante a análise do vídeo obtido por meio da construção de uma escala (Figura 3).

Durante esse experimento, foram analisadas as oscilações do ponto destacado pertencente ao cano (Figura 3), com o intuito de calcular a dependência do período deles com o tempo enquanto houve vazamento de água, com o objetivo de obter os resultados necessários para análise da oscilação. Neste contexto, o cano foi posto para oscilar duas vezes e, durante todo o tempo que houve fluxo de água pelo furo, filmou-se o movimento com o *iPad* (B.III).

Os vídeos obtidos foram importados para o *Tracker* (C) e foi realizada a análise dos parâmetros: velocidade e posição em relação ao eixo de oscilação com respeito ao tempo, gerando gráficos de trajetória e localização dos ponto marcado (Figura 3), além dos Gráficos 7, 8 e 9, utilizados na comparação com a simulação teórica.

O código em python, em conjunto com a biblioteca *Vpython*, foi utilizado na simulação computacional do fenômeno de estudo, onde os seguintes dados relativos ao cano utilizado como pêndulo foram levados em consideração: comprimentos, massas e raios interno e externo, densidade do líquido vazante, aceleração da gravidade ($9,78 \text{ m/s}^2$) e área do furo na extremidade inferior do cano.

A partir desses dados, as equações (5, 6, 7, 11 e 12) foram usadas gerando os gráficos resultantes do movimento pendular a partir do código em python.



Figura 3. Imagem detalhada do aparato utilizado no experimento. Ponto 1: Haste horizontal, eixo de rotação do sistema, Ponto 2: Ponto analisado na vídeo-análise, Ponto 3: Conexão em "L", Ponto 4: Tampa com furo que possibilita a vazão, Ponto 5: Escala utilizada na vídeo-análise - Fonte: acervo pessoal.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Resultados da simulação teórica

Depois de efetuar as simulações matemáticas do modelo teórico seguindo os passos detalhados no item MATERIAIS E METODOLOGIA, foram obtidos gráficos que mostram os comportamentos: da massa do corpo, do momento de inércia do sistema e da posição do centro de massa em relação ao eixo de rotação, de acordo com o avanço do tempo de experimento. Esses comportamentos variam de forma significativa (Figura 4) por conta da vazão variável de água.

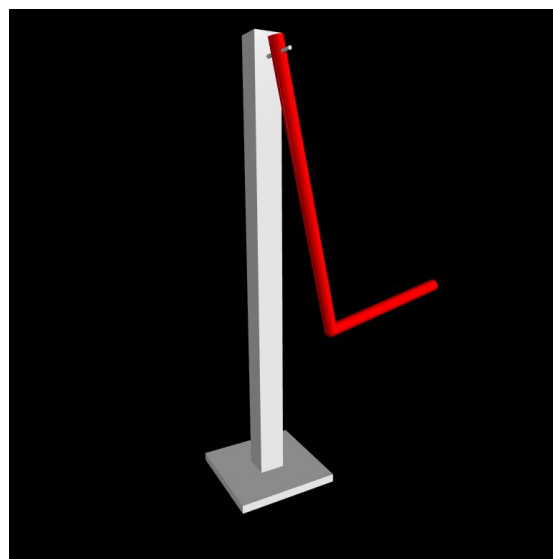


Figura 4. Imagem da simulação computacional realizada com linguagem de programação Python3 e biblioteca vPython. Fonte: Acervo Pessoal.

Pelo gráfico da Figura 5 é possível notar que a massa do corpo diminui em toda a simulação indo de $(624,4 \pm 0,1) \text{ g}$ até $(214,3 \pm 0,1) \text{ g}$, o que é esperado, já que a água deixa o cano sem haver reposição. Já a posição do

centro de massa se inicia no ponto médio do cano ($33,05 \pm 0,05$)cm, quando ele está preenchido, passa por um valor máximo de ($41,80 \pm 0,05$)cm, e retorna ao valor inicial. O momento de inércia do sistema segue a mesma tendência variando de ($0,068 \pm 0,002$)Kg.m², atingindo um máximo de ($0,077 \pm 0,002$)Kg.m² e caindo até ($0,023 \pm 0,002$)Kg.m².

Após toda a massa extra deixar o corpo, o que ocorre no tempo $t = (9,1 \pm 0,2)$ s de simulação (Figura 5) o valor de todas as variáveis listadas acima se estabilizam e o corpo volta a se comportar como um pêndulo físico comum de período constante (Figura 6).

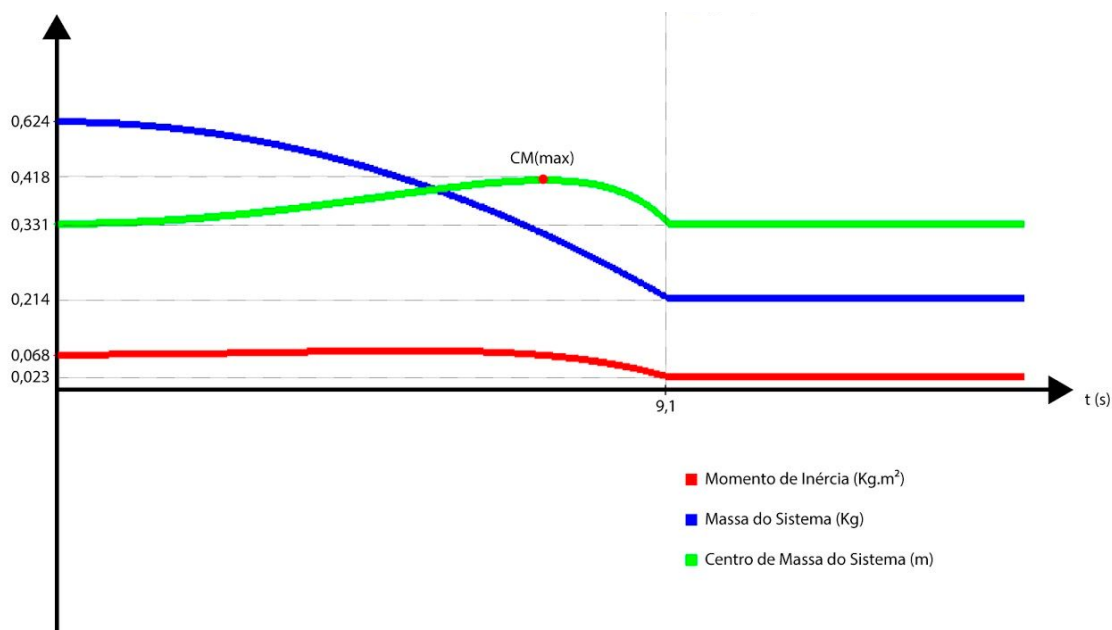


Figura 5. Simulação matemática obtida com código em Python3 do modelo teórico proposto baseado nas equações descritas na INTRODUÇÃO: cada um dos gráficos mostra como variam os parâmetros: massa do sistema (azul), posição do centro de massa com relação ao eixo de rotação do pêndulo (verde) e momento de inércia do corpo (vermelho) com o passar do tempo.

Além disso, a partir da simulação (Figura 4), foi obtido um segundo gráfico (Figura 6), que expressa, em função do tempo, o período instantâneo do pêndulo, que se inicia em ($1,155 \pm 0,001$)s passa por um valor máximo de ($1,342 \pm 0,001$)s e retorna a um valor quase idêntico ao inicial, com alteração apenas na terceira casa decimal, sendo de ($1,156 \pm 0,001$)s; e a posição do pêndulo em relação ao eixo x da oscilação, expressa na amplitude do movimento. É importante notar que a tendência de variação do

período com o tempo descrita é compatível qualitativamente com o gráfico da posição no eixo x em função do tempo, pois a distância entre as cristas varia semelhantemente ao período com o avanço da simulação (Figura 6).

As principais razões da tendência assumida pelo gráfico do período em função do tempo são: a variação na posição do centro de massa do sistema, que, como mostra a (Figura 5), acompanha a tendência de variação do período; e a mudança na vazão,

detalhada pela equação (6), que gera um efeito de reparação no movimento quando o vazamento se aproxima do fim, fazendo-o retornar a um dispositivo semelhante ao inicial. Os valores de massa e momento de inércia, que variam

em toda a simulação, influenciam nos dados intermediários, mas não têm grande importância sobre as condições final e inicial do segundo gráfico (Figura 6).

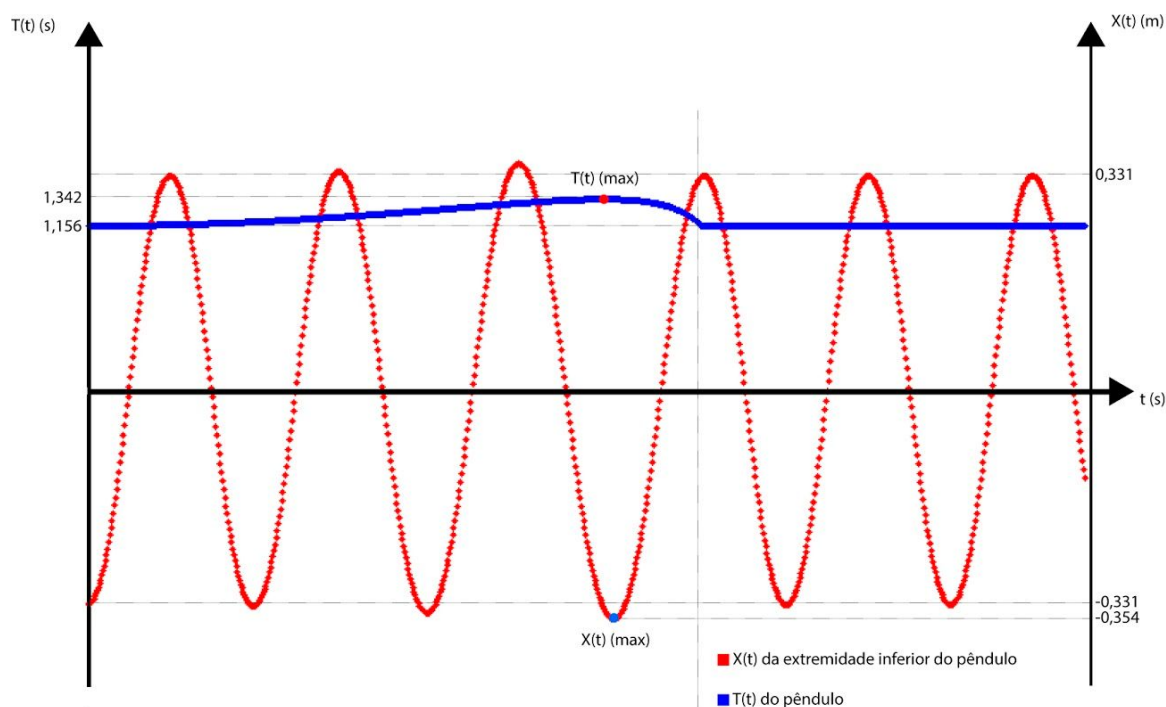


Figura 6. Simulação matemática obtida com código em Python3 do modelo teórico proposto baseado nas equações descritas na INTRODUÇÃO: o gráfico de cor vermelha aponta como varia a posição do corpo no eixo x com o passar do tempo e a curva azul mostra a variação instantânea do período com relação ao tempo.

Resultados do experimento e da vídeo análise

Seguindo o item metodologia, realizamos o experimento que teve sua filmagem analisada pelo *software Tracker*, foi obtido o gráfico da posição no eixo x de oscilação do ponto médio do cano em “L” (Figura 3) em função do tempo, tendo como fim a obtenção de quatro principais gráficos com as finalidades descritas a seguir: O primeiro (Figura 7) trata-se da posição do ponto com relação ao eixo X em função do tempo e mostra características de uma senóide

amortecida, já que a amplitude reduziu-se com o decorrer do experimento, como está descrito no segundo gráfico (Figura 8) segundo a equação $y = -0,023 \ln(x) + 0,1217$ obtida por meio de uma regressão logarítmica com $R^2 = 0,9689$. Utilizando os pontos em que a velocidade se anula (pontos em vermelho) foi obtido o período médio entre cada vale da curva e, com isso, foi construído o gráfico que relaciona o período do movimento com o tempo (Figura 9). Como pode-se observar, a figura obtida se equipara à do gráfico

apresentado no tópico anterior (simulação matemática do problema) para as mesmas variáveis físicas, já que o período sai de um valor mínimo, cresce enquanto a água deixa o cano e volta a se estabilizar num valor próximo ao inicial depois da vazão cessar. Finalmente, o último gráfico (Figura 10), relaciona velocidade do corpo com o tempo e aponta para uma perda de energia

mecânica, já que a velocidade reduziu-se a cada oscilação concluída pelo corpo. Isso pode ser explicado, principalmente por três motivos: Atrito entre o cano e a haste que funcionou como eixo, que gera uma resistência ao movimento, resistência do ar, ou força de saída da água pelo furo, como prevêem as equações da hidrodinâmica.

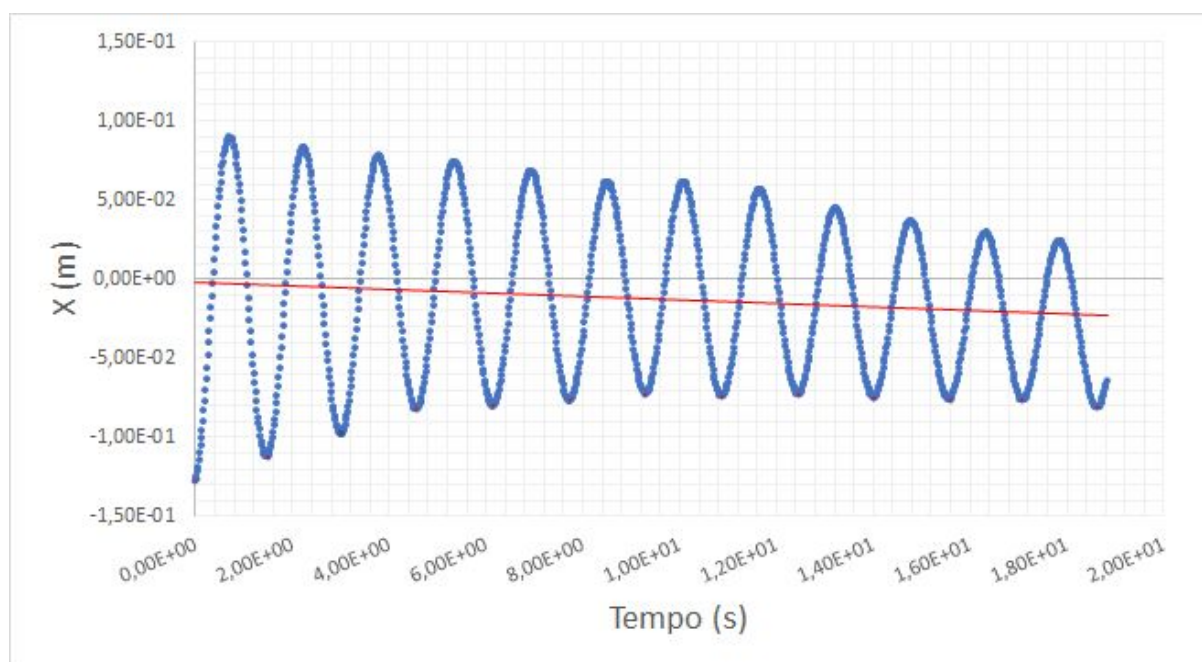


Figura 7. Representação gráfica da posição do ponto analisado na oscilação em função do tempo (Pontos azuis) com correção do eixo de oscilação (reta vermelha) que foi afetado por pequenos erros durante a gravação.

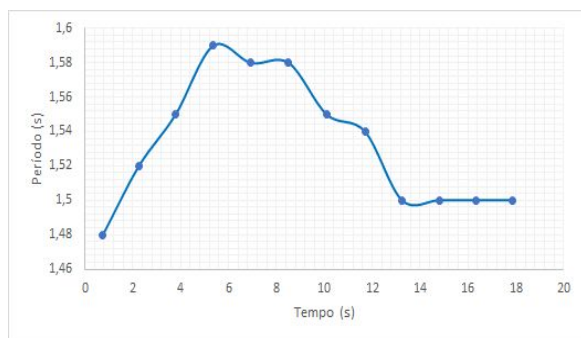


Figura 8. Representação gráfica da variação do período em função do tempo de experimento

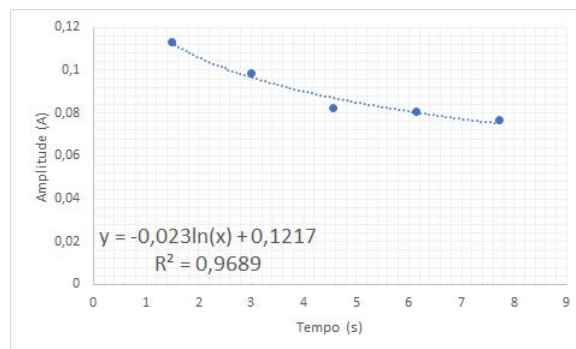


Figura 9. Representação gráfica da variação da amplitude do movimento em função do tempo e regressão utilizada

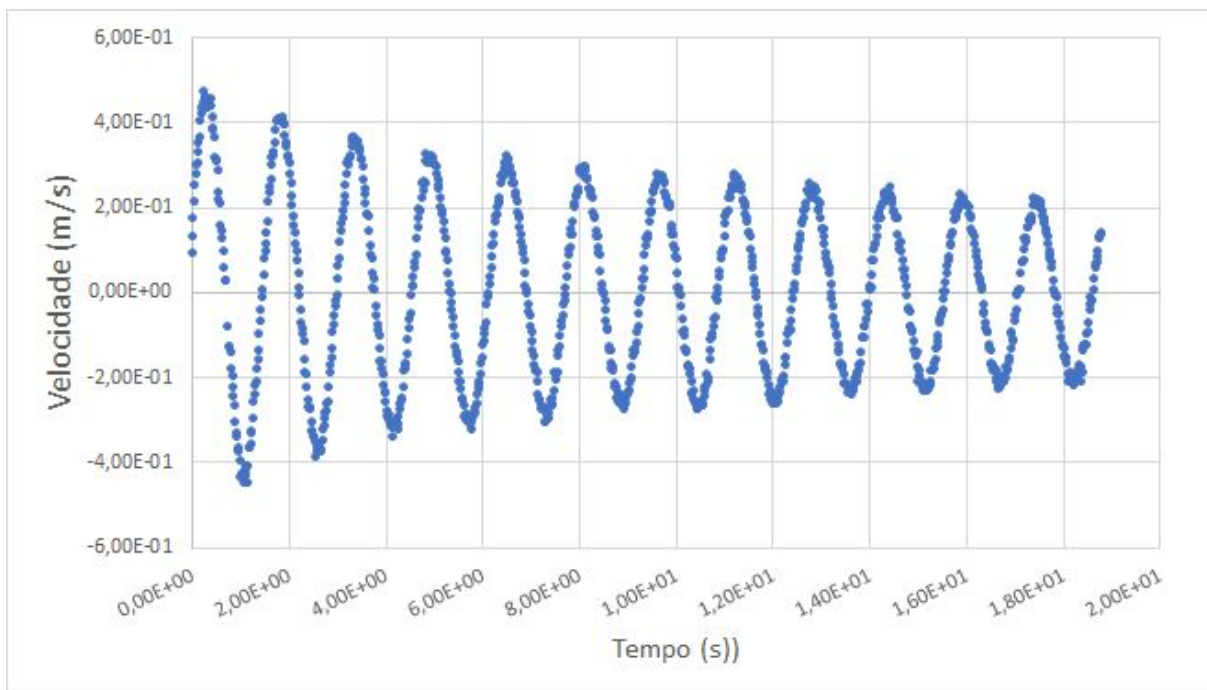


Figura 10. Representação gráfica da velocidade do ponto analisado na oscilação em função do tempo, mostrando uma redução nas velocidades em cada vale/crista do gráfico, evidenciada pela perda de energia cinética.

CONCLUSÃO

A partir dos dados obtidos nesse trabalho, tanto pela simulação realizada quanto pelo experimento feito, foi concluído que, em um pêndulo físico com formato de “L” e com perda de massa por meio de uma vazão que varia em função do tempo, características físicas, como centro de massa e momento de inércia variam consistentemente. Essa variação afeta o período de oscilação do movimento e, no caso do experimento prático, a amplitude também é afetada, principalmente por dois motivos: o atrito com o eixo e a força de saída da água, que geraram um fator de amortecimento na amplitude do movimento. Entretanto, no fim do experimento, quando quase toda a água já deixou o pêndulo, o período tende a normalizar, já que o centro de massa fica

praticamente estático e o momento de inércia constante.

Em um ambiente sem atrito e imperfeições, como na simulação, pode-se notar o retorno dos valores de amplitude e período para um valor aproximadamente inicial assim que o líquido deixa completamente o recipiente, já no experimento real devido o atrito, lubrificação fora da idealidade, imperfeições no cano, resistência do ar e força de vazão da água, essa variação continuou a aumentar pela perda de energia mecânica do sistema, até o ponto de cessar o movimento. Essas condições levaram à divergências entre o modelo teórico e experimental quando comparados, entretanto não se contradizem pois tal comportamento no

experimento real já era esperado e foi previsto pelo amortecimento descrito.

MORIN, David. **Introduction to Classical Mechanics**. Cambridge. Janeiro, 2008.

Além disso, concluímos que, uma possível aplicação desse estudo é a análise de variações oscilatórias em sistemas mecânicos, como mancais hidrodinâmicos e bombas centrífugas, possibilitando a detecção de vazamentos pela análise do período de oscilação desse tipo de mecanismo, que ocorreria de maneira mais lenta e detectável.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Departamento de Física do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, em especial à Professor Silvério pela orientação e aulas ministradas. Nos honra ser alunos desta instituição.

REFERÊNCIAS

R.C. HIBBELER, Dinâmica: **Mecânica para engenharia**, 12ª Edição, cap. 10, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2000.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, **Física para Cientistas e Engenheiros** - Vol. 2, cap 13, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Tracker: Measurement Device. Disponível em:<<https://physlets.org/tracker/help/>>. Acessado em: 17/11/2018.

OpenCV - Open Source Computer Vision Library. Disponível em <<https://opencv.org/>>. Acesso em: 17/11/2018.