CCI-22 Matemática Computacional

Sistemas Lineares

Prof. Dr. Johnny Marques
johnny@ita.br

Introdução

- Em um caso geral em que um sistema linear envolve m equações e n variáveis, apenas uma entre as situações a seguir irá ocorrer:
  - O sistema linear tem solução única:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \qquad S = (1, 1)$$

  - O sistema linear tem infinitas soluções:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \qquad S = (\alpha, 3 - 2\alpha) \ \text{ com } \ \alpha \epsilon R$$

  - O sistema linear não admite solução:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

Métodos Numéricos

- Diretos
  - A solução pode ser encontrada através de um número finito de passos:
    - Método de Gauss
    - Método de Gauss-Jordan
    - Fatoração LU
- Indiretos
  - A solução é obtida a partir de uma sequencia de aproximações para o valor do vetor de solução S, até que seja obtido um valor que satisfaz a precisão pré-estabelecida:
    - Método de Gauss-Jacobi
    - Método de Gauss-Siedel

Método de Gauss

- Transformação do sistema linear a ser resolvido em um sistema linear triangular
- Resolução do sistema linear triangular de forma retroativa
- Transformação do Sistema Linear
  - Troca da ordem das linhas
  - Multiplicação de uma das equações por um número real não nulo
  - Substituição de uma das equações por uma combinação linear dela mesma com outra equação

Método de Gauss

- O sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Transforma-se na matriz aumentada $[Ab]$:

$$[Ab] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}x_1 & a_{12}x_1 & \cdots & a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn}x_n & b_n \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Linha } L_1 \\ \leftarrow \text{Linha } L_2 \\ \\ \leftarrow \text{Linha } L_n \end{array}$$

Método de Gauss

- **Passo 1:**
  - Anular os coeficientes nas linhas L_2 até L_n.
  - Substituir a Linha L_2 por L_2' usando a combinação linear:

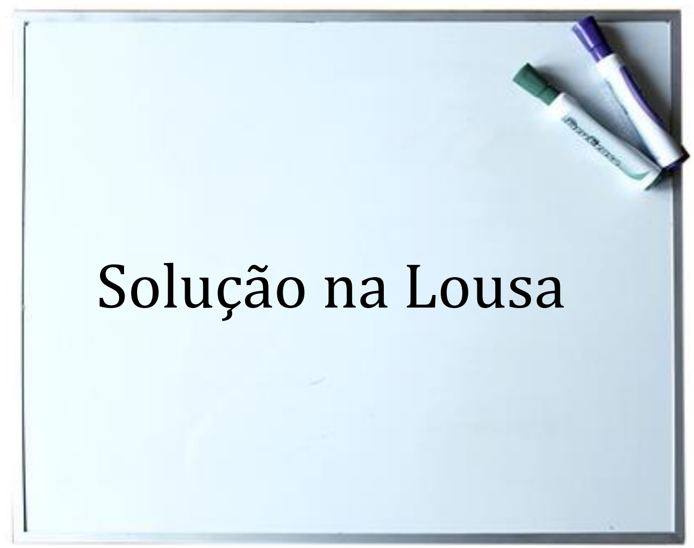
$$L_2' = L_2 - m_{21}.L_1 \quad \text{onde} \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

  - Se $a_{11} = 0$, trocar L_1 com L_k, onde $a_{k1} \neq 0$.
  - Se L_k não existir, então o sistema não tem solução.
  - Continuar analogamente para as linhas L_j, para $2 < j \leq n$.
- **Passo *i*:**
  - Para $1 < i < n$, anular os coeficientes de x_i nas linhas L_{i+1} a L_n.

Método de Gauss

- **Exemplo 1:** Solucionar o sistema a seguir, usando o Método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$



Algoritmo para Eliminação de Gauss

- Seja o sistema linear Ax = b, com A: $n\ x\ n$, x: $n\ x$ 1, b: $n\ x$ 1, com $a_{kk} \neq 0$ no início do passo k

```
EliminaçãodeGauss{

    para k=1 até n-1
        para i=k+1 até n {
            m = a_ik/a_kk        // a_kk ≠ 0
            a_ik = 0
            para j=k+1 até n
                a_ij = a_ij - m.a_kj
            b_i = b_i - m.b_k
        }

    x_n = b_n/a_nn
    para k=n-1 até 1 {
        s = 0
        para j=k+1 até n
            s = s + a_kj.x_j
        x_k = (b_k - s)/a_kk
    }
}
```

Eliminação

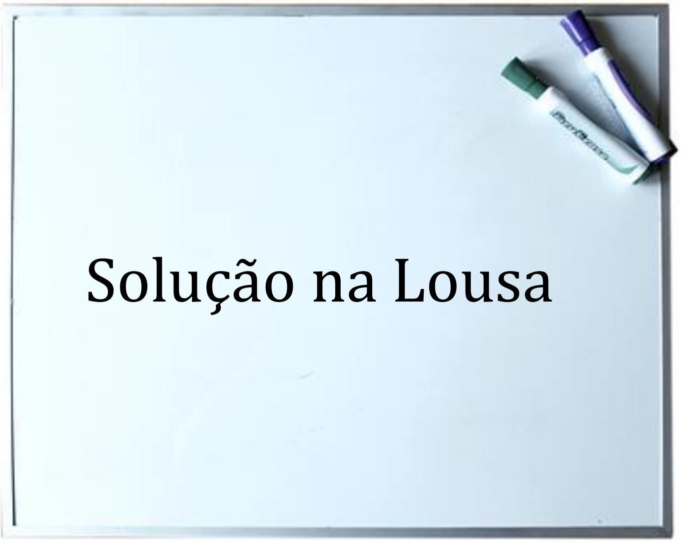
Complexidade de tempo: O(n3)

Sistema triangular

Método de Gauss

- **Exemplo 2:** Resolver pelo Método de Gauss considerando que o sistema computacional usado prevê $F(10, 3, 5, 5)$ com truncamento.

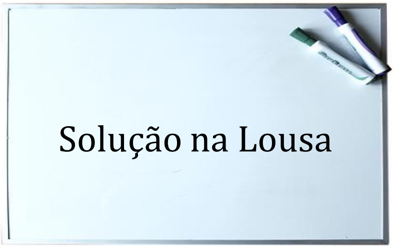
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 52x_3 = 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 = 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 38 \end{cases}$$



Método de Gauss

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração no método de Gauss é escolher como pivô o elemento de maior módulo :
  - em cada coluna (pivoteamento parcial)
  - dentre todos os elementos possíveis no processo de eliminação (pivoteamento completo): exige um maior esforço computacional
- **Exemplo 3**: Resolver o **Exemplo 2** com precisão de 3 casas decimais, mas com pivoteamento parcial e **truncamento**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$



Método de Gauss-Jordan

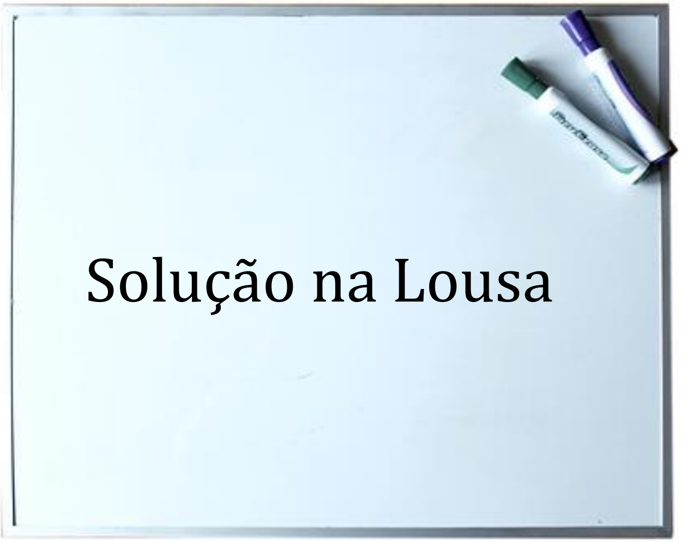
- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema com a finalidade de transformá-lo em um *sistema diagonal equivalente*, isto é, são nulos todos os coeficientes a_{ik}, quando $i \neq k$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

- **Exemplo 4:** Solucionar o sistema a seguir, usando o Método de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$



Decomposição em LU

- O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto de duas matrizes L e U.
  - Seja:

$$[LU]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição em LU

- E a matriz coeficiente A:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Tem-se, então:

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}=[LU]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição em LU

- Para se obter os elementos da matriz L e da matriz U, deve-se calcular os elementos das linhas de U e os elementos da colunas de L como segue.

Decomposição em LU

- 1ª linha de U: Faz-se o produto da 1ª linha de L por todas as colunas de U e a iguala com todos os elementos da 1ª linha de A, assim:

$$\begin{cases} 1 \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}, \\ 1 \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}, \\ \qquad \vdots \\ 1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}, \\ u_{1j} = a_{1j},\ j = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- 1ª coluna de L: Faz-se o produto de todas as linhas de L, (da 2ª a até a nª), pela 1ª coluna de U e a iguala com os elementos da 1ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal), obtendo ,

$$
\begin{cases}
l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}, \\
l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}, \\
\qquad\qquad\vdots \\
l_{i1} \cdot u_{11} = a_{j1} \Rightarrow l_{j1} = \dfrac{a_{j1}}{u_{11}}, \\
l_{j1} = \dfrac{a_{l1}}{u_{11}}, \; j = 1,2,\ldots, n.
\end{cases}
$$

Decomposição em LU

- 2ª linha de U: Faz-se o produto da 2ª linha de L por todas as colunas de U, (da 2ª **até** a nª), e igualando com os elementos da 2ª linha de A, (da diagonal principal em diante), obtêm-se ,

$$
\begin{cases}
l_{21}\cdot u_{12}+u_{22}=a_{22}\Rightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}\cdot u_{12}, \\
l_{21}\cdot u_{13}+u_{23}=a_{23}\Rightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}\cdot u_{13}, \\
\qquad\vdots \\
l_{21}\cdot u_{1j}+u_{2j}=a_{2j}\Rightarrow u_{2j}=a_{2j}-l_{21}\cdot u_{1j}, \\
u_{2j}=a_{2j}-l_{21}\cdot u_{1j},\ j=3,\ldots,n.
\end{cases}
$$

Decomposição em LU

- 2ª coluna de L: Faz-se o produto de todas as linhas de L (da 3ª até a nª) pela 2ª coluna de U e a iguala com os elementos da 2ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal), obtendo ,

$$\begin{cases} l_{31}\cdot u_{12}+l_{32}\cdot u_{22}=a_{32}\Rightarrow l_{32}=\dfrac{a_{32}-l_{31}\cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ l_{41}\cdot u_{12}+l_{42}\cdot u_{22}=a_{42}\Rightarrow l_{42}=\dfrac{a_{42}-l_{41}\cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ \qquad\qquad \vdots \\ l_{i1}\cdot u_{12}+l_{i2}\cdot u_{22}=a_{i2}\Rightarrow l_{i2}=\dfrac{a_{l2}-l_{i1}\cdot u_{12}}{u_{22}}, \\ l_{i2}=\dfrac{a_{i2}-l_{i1}\cdot u_{12}}{u_{22}}, i=3,\dots,n. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- Temos a seguinte fórmula geral:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, & i \leq j, \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}) / u_{jj}, & i > j. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- Resumo de Passos:
  - Seja um sistema $Ax = b$ de ordem n, onde A satisfaz as condições da fatoração LU.
  - Então, o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:
    - $LUx = b$

Decomposição em LU

- Resumo dos Passos:
  - Fazendo $Ux = y$, a equação acima reduz-se a $Ly = b$.
  - Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$, obtém-se o vetor y.

Decomposição em LU

- Resumo dos Passos:

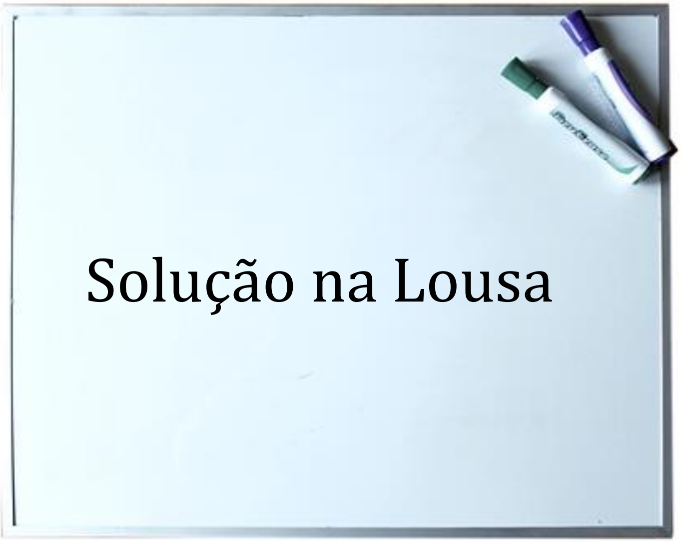
    - Substituição do valor de y no sistema $Ux = y \Rightarrow$ Obtenção de um sistema triangular superior cuja solução é o vetor x procurado;

    - Aplicação da fatoração LU na resolução de sistemas lineares $\Rightarrow$ Necessidade de solução de dois sistemas triangulares

Decomposição em LU

Exemplo 5: Solucionar o sistema a seguir, usando Decomposição LU

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$



Métodos Iterativos

- Motivação
  - Ocorrência em larga escala de sistemas lineares em cálculos de Engenharia e modelagem científica
    - Exemplos:
      - Simulações de processos químicos
      - Simulações de dispositivos e circuitos
      - Modelagem de processos geocientíficos e geoambientais
      - Análise estrutural
      - Biologia estrutural
      - Modelagem de processos físicos

Métodos Iterativos

- Motivação
  - Tendência à existência de matrizes de coeficientes à grandes e esparsas
    - Grandes ⇨ Comum para $n > 100.000$
    - Esparsas ⇨ Maioria dos coeficientes nulos
  - Resolução de sistemas esparsos por métodos diretos
    - Processos de triangularização e fatoração ⇨ Onerosos, por não preservarem a esparsidade original, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema.

Métodos Iterativos

- Motivação
  - Métodos mais apropriados para a resolução de sistemas de natureza esparsa ⇨ Métodos iterativos
    - Gauss-Jacobi
    - Gauss-Seidel

Métodos Iterativos

- A partir de uma estimativa inicial $x_i^{(0)}$, consistem em encontrar uma sequência de estimativas $x_i^{(k)}$ que convirja para uma solução do Sistema de Equações Lineares após um número suficientemente grande de iterações.

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}
\Rightarrow \cdots \Rightarrow
\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}
$$

Métodos Iterativos

- Vantagem $\Rightarrow$ Menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento do que o método de Eliminação de Gauss.
- Lembretes importantes:
  - Como todo processo iterativo, estes métodos sempre apresentarão um resultado aproximado, que será tão próximo do resultado real conforme o número de iterações realizadas.
  - Além disto, também é preciso ter cuidado com a convergência destes métodos.

Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos

- Transformação do sistema linear $Ax = b$ em $x = Cx + g$
  - A: matriz dos coeficientes, n x m
  - x: vetor das variáveis, n x 1;
  - b: vetor dos termos constantes, n x 1;
  - C: matriz, n x n; e
  - g: vetor, n x 1.
- Métodos a estudar
  - *Gauss-Jacobi*
  - *Gauss-Seidel*

Método de Gauss-Jacobi

- Conhecida a estimativa inicial, $x^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores:

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g, \quad \text{Primeira aproximação}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g, \quad \text{Segunda aproximação}$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g, \quad \text{K-ésima aproximação}$$

- De um modo geral, a aproximação x(k+1) é calculada pela fórmula:

$$x^{(k+1)} = C\,x^{(k)} + g, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Método de Gauss-Jacobi

- Da primeira equação do sistema:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1$$

- Obtém-se:

$$x_1 = (1/a_{11})\,(b_1 - a_{12}\, x_2 - \dots - a_{1n}\, x_n)$$

- Analogamente,

$$x_2 = (1/a_{22})\,(b_2 - a_{21}\, x_1 - \dots - a_{2n}\, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1/a_{nn})\,(b_n - a_{n1}\, x_1 - \dots - a_{nn-1}\, x_{n-1})$$

Método de Gauss-Jacobi

- Desta forma, para x = C x + g, obtém-se:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dfrac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Distância entre duas iterações:

$$d^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

- Critério de Parada:

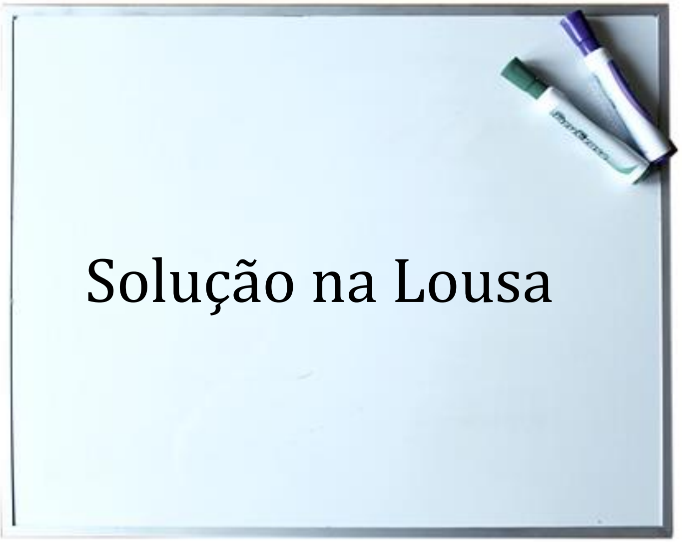
$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Método de Gauss-Jacobi

- **Exemplo 6:**
  - Seja o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

  - Com $\varepsilon = 0{,}05$



Método de Gauss-Siedel

- Similarmente ao método de Gauss-Jacobi, conhecida a estimativa inicial, $x^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$
- Todavia, ao se calcular $x_j^{(k+1)}$, usa-se todos os valores $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $x_{j+1}^{(k)}$, $x_{j+2}^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$ restantes.

Método de Gauss-Siedel

- Seja o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{cases}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n-1}.x_{n-1} + a_{1n}.x_n = b_1 \\
a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \cdots + a_{2n-1}.x_{n-1} + a_{2n}.x_n = b_2 \\
a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + \cdots + a_{3n-1}.x_{n-1} + a_{3n}.x_n = b_3 \\
\\
a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + a_{n3}.x_3 + \cdots + a_{nn-1}.x_{n-1} + a_{nn}.x_n = b_n
\end{cases}
$$

Método de Gauss-Siedel

- Isolando x_i a partir da linha i, tem-se:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}.x_2 - a_{13}.x_3 - \cdots - a_{1n-1}.x_{n-1} - a_{1n}.x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}.x_1 - a_{23}.x_3 - \cdots - a_{2n-1}.x_{n-1} - a_{2n}.x_n)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}.x_2 - a_{32}.x_2 - \cdots - a_{3n-1}.x_{n-1} - a_{3n}.x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}.x_1 - a_{n2}.x_2 - \cdots - a_{nn-1}.x_{n-1})$$

Método de Gauss-Siedel

- O processo iterativo se dá a partir das equações:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}.x_2^k - a_{13}.x_3^k - \ldots - a_{1,n-1}.x_{n-1}^k - a_{1n}.x_n^k\right)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}.x_1^{k+1} - a_{23}.x_3^k - \ldots - a_{2,n-1}.x_{n-1}^k - a_{2n}.x_n^k\right)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}.x_1^{k+1} - a_{32}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{3,n-1}.x_{n-1}^k - a_{3n}.x_n^k\right)$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}.x_1^{k+1} - a_{n2}.x_2^{k+1} - \ldots - a_{n,n-1}.x_{n-1}^{k+1}\right)$$

Método de Gauss-Siedel

- Critério de Parada:

- Distância entre duas iterações:

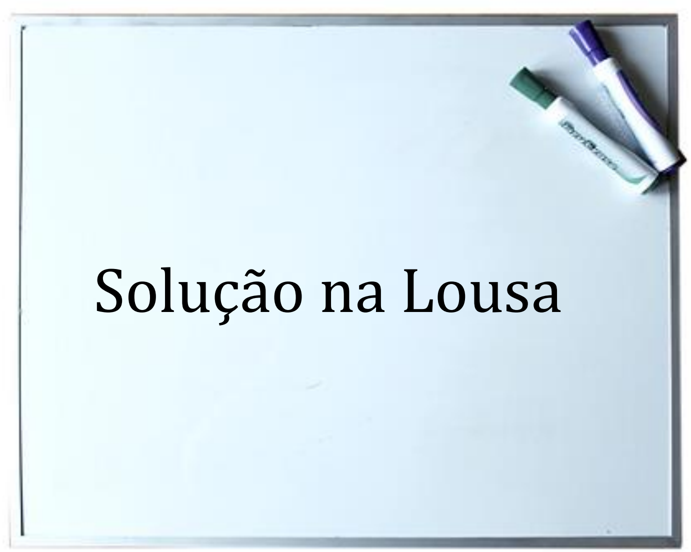
$$d^{(k)} = \max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

- Critério de Parada:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max \left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Método de Gauss-Seidel

- **Exemplo 7:**
  - Seja o sistema: $\begin{cases} 5\,x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3\,x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$
  - Com $\mathcal{E} = 0{,}05$



Critérios de Convergência

- Processo iterativo ⇨ Convergência para a solução exata não garantida para qualquer sistema.
- Necessidade de determinação de certas condições que devem ser satisfeitas por um Sistema de Equações Lineares (SEL) para a garantia da convergência do método.
- Critérios de determinação das condições de convergência
  - **Critério de Sassenfield**: garantia de convergência para o Método de Gauss-Siedel.
  - **Critério das Linhas**: garantia de convergência para o Método de Gauss-Jacobi e Gauss-Siedel

Critério de Sassenfeld

- Sejam as quantidades β_i dadas por:

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \sum_{j=2}^{n} \left|a_{1j}\right| \quad \text{e} \quad \beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}\right| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|a_{ij}\right| \right]$$

para i = 2, 3, ..., n

- n - ordem do sistema linear que se deseja resolver
- a_{ij} - coeficientes das equações do sistema

Critério de Sassenfeld

- Este critério garante que o método de Gauss-Seidel convergirá para um dado SEL se a quantidade M, definida por:

$$M = \max_{1 \le i \le n} \beta_i$$

- For menor que 1 (M<1).

Critério de Sassenfeld

- **Exemplo 8**: Seja A a matriz dos coeficientes e b o vetor dos termos constantes, dados por:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{array}$$

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \left(|a_{12}|\,| + |a_{13}| + |a_{14}|\right)$$

$$\beta_2 = \left|\frac{1}{a_{22}}\right| \cdot \left(|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}|\right)$$

$$\beta_3 = \left|\frac{1}{a_{33}}\right| \cdot \left(|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 + |a_{34}|\right)$$

$$\beta_4 = \left|\frac{1}{a_{44}}\right| \cdot \left(|a_{41}|\beta_1 + |a_{42}|\beta_2 + |a_{43}|\beta_3\right)$$

Critério de Sassenfeld

- **Exemplo 8** :

$$\begin{cases} 2{,}0 \cdot x_1 + x_2 - 0{,}2 \cdot x_3 + 0{,}2 \cdot x_4 = 0{,}4 \\ 0{,}6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 0{,}6 \cdot x_3 - 0{,}3 \cdot x_4 = -7{,}8 \\ -0{,}1 \cdot x_1 - 0{,}2 \cdot x_2 + x_3 + 0{,}2 \cdot x_4 = 1{,}0 \\ 0{,}4 \cdot x_1 + 1{,}2 \cdot x_2 + 0{,}8 \cdot x_3 + 4{,}0 \cdot x_4 = -10{,}0 \end{cases}$$

Critério de Sassenfeld

- **Exemplo 8** : Solução

A **b**

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 2.0 & 1.0 & -0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 3.0 & -0.6 & -0.3 & -7.8 \\ -0.1 & -0.2 & 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 0.4 & 1.2 & 0.8 & 4.0 & -10.0 \end{array}\right|$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\cdot(1+0{,}2+0{,}2) = 0{,}7$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}\cdot(0{,}6\cdot 0{,}7+0{,}6+0{,}3) = 0{,}44$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1}\cdot(0{,}1\cdot 0{,}7+0{,}2\cdot 0{,}44+0{,}2) = 0{,}358$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4}\cdot(0{,}4\cdot 0{,}7+1{,}2\cdot 0{,}44+0{,}8\cdot 0{,}358) = 0{,}2736$$

$$M = \max_{1\le i\le n} \beta_i = 0{,}7$$

$M < 1 \Rightarrow$ Convergência da solução do sistema a partir do método de Gauss-Seidel

Critério das Linhas

- Segundo este critério, um determinado sistema irá convergir, se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \text{ para } \mathrm{i} = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}.$$

Critério das Linhas

- **Exemplo 9:** O SEL do **Exemplo 8** satisfaz o Critério das Linhas, sendo a verificação quase imediata, se for observado que:

$$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 1 + 0,2 + 0,2 = 1,4$$

$$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 0,6 + 0,6 + 0,3 = 1,5$$

$$|a_{33}| = 1 > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$$

$$|a_{44}| = 4 > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 0,4 + 1,2 + 0,8 = 2,4$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ para } \mathrm{i} = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Considerações Finais

- Há uma condição suficiente para a garantia convergência do Método de Gauss-Jacobi, conhecido como o **Critério das Linhas**.
- No **Exemplo 6**, temos:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ 2+1<10 \\ \blacksquare\ 1+1<8 \\ \blacksquare\ 2+3<10 \end{array}\right\} \text{Garantia de Convergência}$$

- No entanto, o Critério das Linhas **é suficiente**, mas **não necessário** para garantir convergência.

Considerações Finais

- **Exemplo 10:** Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad\quad 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

- $3 + 1 > 1$
- $5 + 2 > 2$
- $0 + 6 < 8$

Não há Garantia de Convergência

Considerações Finais

- No entanto, uma permutação entre as duas primeiras linhas garante a convergência:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ \phantom{x_1 +{}} 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \blacksquare\ 2 + 2 < 5 \\ \blacksquare\ 1 + 1 < 3 \\ \blacksquare\ 0 + 6 < 8 \end{array}\right\} \text{Garantia de Convergência}$$

- Quando o critério das linhas não for satisfeito, convém tentar uma permutação de linhas e/ou colunas

Considerações Finais

- Tanto o **Critério de Sassenfeld** quanto o **Critério das Linhas** são condições suficientes, porém não necessárias, para a convergência do método de Gauss-Seidel para um dado SEL.
  - Um dado SEL pode não satisfazer estes critérios e ainda convergir.
  - Um sistema pode não satisfazer o **Critério das Linhas**, porém sua convergência será garantida se satisfizer o **Critério de Sassenfeld.**

Considerações Finais

- Critério das Linhas x Critério de Sassenfeld
  - **Exemplo 11:** Seja o seguinte SEL:

$$10 \cdot x_1 + x_2 = 23$$
$$6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 18$$

  - O Critério das Linhas não é satisfeito, visto que:

$$|a_{22}| = 2 < |a_{21}| = 6$$

  - Todavia, o Critério de Sassenfeld é satisfeito, uma vez que:

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{10}\right| \cdot 1 = 0{,}1 \qquad e \qquad \beta_2 = \left|\frac{1}{2}\right| \cdot (6 \cdot 0{,}1) = 0{,}3$$

  - Assim sendo, a convergência do SEL é garantida.