# 半直積と Galois 群

https://seasawher.hatenablog.com/

@seasawher

2019 年 2 月 11 日

**命題.** (直積の内部特徴づけ)
群 $G$ とその部分群 $N$, $H$ があるとする。このとき次は同値。

(1) $G$ と直積 $N \times H$ は自然に同型である。つまり積をとる写像 $\varphi\colon N \times H \to G$ は群の準同型であって、かつ同型になる。次の図式

$$\begin{tikzcd} & N \times H \arrow[d, "\varphi"] & \\ N \arrow[ur] \arrow[r] & G & H \arrow[ul] \arrow[l] \end{tikzcd}$$

を可換にするような同型 $\varphi$ があるといってもよい。

(2) $N \lhd G$ かつ $H \lhd G$ であり、かつ $N \cap H = 1$ で $NH = G$ である。

**証明.**

(1)⇒(2) $q \in N$, $g \in G$ が与えられたとする。($n \in N$ としないのは、$n$ と $h$ の形が似ていて間違えやすいため) $\varphi$ の逆写像 $\psi$ をとっておく。すると、$\psi(g) = (g_N, g_H)$ と表せる。ゆえに

$$\begin{aligned} \psi(gqg^{-1}) &= \psi(g)(q,1)\psi(g)^{-1} \\ &= (g_N, g_H)(q,1)(g_N^{-1}, g_H^{-1}) \\ &= (g_N q g_N^{-1}, 1) \end{aligned}$$

である。したがって $gqg^{-1} = \varphi(g_N q g_N^{-1}, 1) \in N$ であるから、$N \lhd G$ である。同様にして $H \lhd G$ もいえる。また、$x \in N \cap H$ とすると、$\psi(x) \in N \times H$ は $(1,1)$ でなくてはならない。したがって、$x \in \operatorname{Ker}\psi$ である。$\psi$ は同型だから $x = 1$ であって、$N \cap H = 1$ がいえた。さらに、$G = NH$ であることはあきらかであろう。

(2)⇒(1) $N$, $H$ は $G$ の部分群なので、積をとる写像 $\varphi\colon N \times H \to G$ が定義できる。$N \lhd G$, $H \lhd G$ なので交換子 $[N, H]$ は $N \cap H$ の部分群であるが、$N \cap H = 1$ なので $[N, H] = 1$ である。よって $N$ の元と $H$ の元は可換であり、$\varphi$ は群準同型になる。$N \cap H = 1$ より $\varphi$ は単射であり、$NH = G$ より $\varphi$ は全射である。

□

**補題.** (半直積の基本的な性質)
群 $N$, $H$ と群作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ があって、半直積 $N \rtimes_\Phi H$ を考えているとする。$q \in N$, $h \in H$ とする。このとき次が成り立つ。

(1) 作用成分への射影 $N \rtimes_\Phi H \to H$ s.t. $(q, h) \mapsto h$ は準同型である。
(2) 正規成分への入射 $N \to N \rtimes_\Phi H$ s.t. $q \mapsto (q, 1)$ は準同型である。
(3) 作用成分への入射 $H \to N \rtimes_\Phi H$ s.t. $h \mapsto (1, h)$ は準同型である。
(4) $h \in \operatorname{Ker} \Phi$ ならば $(q, h) = (1, h)(q, 1)$ である。
(5) 常に $(q, h) = (q, 1)(1, h)$ が成り立つ。
(6) 自然な入射と射影は、分裂する短完全列

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & N \rtimes_\Phi H \arrow[r] & H \arrow[r] & 1 \\
 & & H \arrow[u] \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

をなす。

証明. あきらか。 □

**命題.** (半直積の内部特徴づけ)
群 $G$ の部分群 $N$, $H$ が与えられているとする。このとき次は同値。

(1) ある群作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ が存在して、$G$ は半直積 $N \rtimes_\Phi H$ と自然に同型である。つまり積をとる写像 $\varphi\colon N \rtimes_\Phi H \to G$ s.t. $(q, h) \mapsto qh$ は群準同型で、かつ同型である。次の図式

$$\begin{tikzcd}
 & N \rtimes_\Phi H \arrow[d, "\varphi"] & \\
N \arrow[ur] \arrow[r] & G & H \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

を可換にするような同型 $\varphi$ があるといってもよい。
(2) $N \lhd G$ かつ $NH = G$ かつ $N \cap H = 1$ が成り立つ。

証明.

(1)⇒(2)　$NH = G$ はあきらか。$x \in N \cap H$ とすると $(x, x^{-1}) \in \operatorname{Ker}\varphi$ だから $x = 1$ でなくてはならない。よって $N \cap H = 1$ である。$N \lhd G$ を示そう。$g \in G$ と $q \in N$ が与えられたとする。$p\colon N \rtimes_\Phi H \to H$ を射影とし、$\psi$ を $\varphi$ の逆写像とする。このとき $\psi(g) = (g_N, g_H)$ と表せる。ゆえに

$$\begin{aligned} p \circ \psi(gqg^{-1}) &= p((g_N, g_H)(q, 1)(g_N^{-1}, g_H^{-1})) \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。したがって $gqg^{-1} \in \varphi(\operatorname{Ker} p) = N$ である。よって $N \lhd G$ がわかった。

(2)⇒(1)　$N \lhd G$ より、群作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ を $\Phi_h(q) = hqh^{-1}$ により定めることができる。(順序を逆にして $\Phi_h(q) = h^{-1}qh$ とするとうまくいかないことに注意) このとき $q_1, q_2 \in N$ と $h_1, h_2 \in H$ が与えられたとすれば

$$\begin{aligned} \varphi((q_1, h_1)(q_2, h_2)) &= \varphi(q_1 \Phi_{h_1}(q_2), h_1 h_2) \\ &= \varphi(q_1 h_1 q_2 h_1^{-1}, h_1 h_2) \\ &= q_1 h_1 q_2 h_2 \\ &= \varphi(q_1, h_1)\varphi(q_2, h_2) \end{aligned}$$

だから $\varphi$ は群準同型になる。$\varphi$ が単射であることは $N \cap H = 1$ より従い、全射であることは $NH = G$ より従う。

□

**命題.** (半直積の関手性 その 1)
$N_1, N_2, H$ が群で群作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N_1$ が与えられていたとする。このとき同型 $g\colon N_1 \to N_2$ に対して ${}_g\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N_2$ を ${}_g\Phi(h) = g \circ \Phi_h \circ g^{-1}$ で定めると、写像 $g_*\colon N_1 \rtimes_\Phi H \to N_2 \rtimes_{{}_g\Phi} H$ s.t. $g_*(q, h) = (g(q), h)$ は群の準同型である。

証明. 計算すればわかる。実際に行ってみると

$$\begin{aligned} g_*((q, h_1)(q', h_2)) &= g_*(q\Phi_{h_1}(q'), h_1 h_2) \\ &= (g(q) g(\Phi_{h_1}(q')), h_1 h_2) \\ (g(q), h_1)(g(q'), h_2) &= (g(q)\, {}_g\Phi_{h_1}(g(q')), h_1 h_2) \\ &= (g(q) g(\Phi_{h_1}(q')), h_1 h_2) \end{aligned}$$

であるから一致する。 $\square$

**命題.** (半直積の関手性 その 2)
$N$, $H_1$, $H_2$ が群で群作用 $\Phi\colon H_2 \to \operatorname{Aut} N$ が与えられていたとする。このとき群準同型 $f\colon H_1 \to H_2$ に対して $\Phi_f\colon H_1 \to \operatorname{Aut} N$ を $(\Phi_f)_h = \Phi_{f(h)}$ により定める。そうすると写像 $f_*\colon N \rtimes_{\Phi_f} H_1 \to N \rtimes_{\Phi} H_2$ s.t. $f_*(q,h) = (q, f(h))$ は群の準同型である。

**証明.** 計算すればわかる。実際に行ってみると

$$\begin{aligned} f_*((q_1,h)(q_2,h')) &= f_*(q_1\Phi_{f(h)}(q_2), hh') \\ &= (q_1\Phi_{f(h)}(q_2), f(h)f(h')) \\ &= f_*(q_1,h)f_*(q_2,h') \end{aligned}$$

であるから一致。 $\square$

**命題.** (分裂する完全列からの半直積の構成)
群 $G$, $H$, $N$ と準同型 $i$, $j$, $p$ からなる分裂する短完全列

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "j"] & G \arrow[r, "p"] & H \arrow[r] & 1 \\ & & H \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "1"'] & & \end{tikzcd}$$

が与えられたとする。このとき、ある群作用 $\Psi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ が存在して、自然な同型 $G \cong N \rtimes_{\Psi} H$ がある。すなわち、ある同型 $\psi$ が存在して次の図式

$$\begin{tikzcd} & N \rtimes_{\Psi} H \arrow[d, "\psi"] & \\ N \arrow[ur] \arrow[r, "j"] & G & H \arrow[ul] \arrow[l, "i"'] \end{tikzcd}$$

が可換になる。

**証明.** $N' = j(N)$, $H' = i(H)$ とおく。このとき $N' = \operatorname{Ker} p$ より $N' \lhd G$ である。$x \in N' \cap H'$ とすると $x = j(q) = i(h)$ なる $q \in N, h \in H$ があるが、$p(x) = 1 = h$ より $x = 1$ でなくてはならない。よって $N' \cap H' = 1$ である。また $g \in G$ とすると $g(i \circ p)(g^{-1}) \in \operatorname{Ker} p$ なので $g(i \circ p)(g^{-1}) = j(q)$ なる $q \in N$ がある。したがって $g = j(q)(i \circ p)(g) \in N'H'$ だから $G = N'H'$ が成り立つ。よって、ある同型 $\varphi$ と群作用 $\Phi\colon H' \to \operatorname{Aut} N'$ であって、次の図式

$$\begin{tikzcd}
 & N' \rtimes_\Phi H' \arrow[d, "\varphi"] & \\
N' \arrow[ur] \arrow[r] & G & H' \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

を可換にするようなものがある。ここで $i, j$ は単射であるので、同型 $I\colon H \to H'$ と $K\colon N' \to N$ が存在して、次の図式

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "K^{-1}"] & N \rtimes_{{}_K\Phi_I} H \arrow[d, "K_*^{-1}"] & H \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
N' \arrow[r] \arrow[d, equal] & N' \rtimes_{\Phi_I} H \arrow[d, "I_*"] & H \arrow[l] \arrow[d, "I"] \\
N' \arrow[r] \arrow[d, equal] & N' \rtimes_\Phi H' \arrow[d, "\varphi"] & H' \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
N' \arrow[r] \arrow[d, "K"] & G \arrow[d, equal] & H' \arrow[l] \arrow[d, "I^{-1}"] \\
N \arrow[r, "j"] & G & H \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

は可換になる。これで示すべきことがいえた。 $\square$

**命題.** (有限巡回群の半直積の表示)
群 $N$, $H$ は有限巡回群であり群作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ が存在して半直積 $N \rtimes_\Phi H$ を考えているとする。$N$, $H$ の生成元 $q, h$ をそれぞれとって固定し $\Phi_h(q) = q^t$ となる $t \in \mathbb{Z}$ をとることができる。このとき

$$N \rtimes_\Phi H \cong \left\{ q, h \;\middle|\; q^{\#N} = h^{\#H} = 1, hqh^{-1} = q^t \right\}$$

が成り立つ。

**証明**. 右辺の群を $G$ とおく。自由群の普遍性により、自由群 $F_2$ から $N \rtimes_\Phi H$ への準同型 $\varphi$ であって $\varphi(q) = (q, 1)$ かつ $\varphi(h) = (1, h)$ なるものがある。なお、ここで $q \in F_2$ と $q \in N$ は本来別の記号で書くべきだが、かえって煩雑になるので同じ記号とした。$\varphi$ は全射である。このとき $q^{\#N}, h^{\#H} \in \operatorname{Ker}\varphi$ はあきらか。また

$$\begin{aligned}\varphi(hqh^{-1}) &= (1, h)(q, 1)(1, h^{-1}) \\ &= (\Phi_h(q), 1) \\ &= (q^t, 1) \\ &= \varphi(q)^t\end{aligned}$$

だから $hqh^{-1}q^{-t} \in \operatorname{Ker}\varphi$ である。したがって、全射 $\psi\colon G \to N \rtimes_\Phi H$ が誘導される。ここで $N \rtimes_\Phi H$ の位数は $\#(N \times H)$ であるので $\#G \geq \#(N \times H)$ である。一方で $\#G \leq \#(N \times H)$ はあきらかなので結局 $\#G = \#(N \times H)$ であり、$\psi$ は同型でなくてはならない。 $\square$

**命題.** (半直積と Galois 群)
有限次 Galois 拡大 $L/K$ があり、その中間体 $M, N$ があって $L = M \cdot N$ かつ $K = M \cap N$ を満たすとする。

$$\begin{tikzcd} & L & \\ M \arrow[ur, "Gal"] & & N \arrow[ul, "Gal"'] \\ & K \arrow[ul, "Gal"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

さらに $M/K$ は Galois 拡大であるとする。このとき

$$\operatorname{Gal}(L/K) \cong \operatorname{Gal}(L/M) \rtimes \operatorname{Gal}(L/N)$$

が成り立つ。

**証明.** $M/K$ は Galois 拡大なので $\mathrm{Gal}(L/M) \lhd \mathrm{Gal}(L/K)$ である。$L$ は $M$ と $N$ の合成なので $\mathrm{Gal}(L/M) \cap \mathrm{Gal}(L/N) = 1$ である。また Galois 拡大の推進定理 (雪江 [1] 定理 4.6.1) により $\mathrm{Gal}(L/N) \cong \mathrm{Gal}(M/K)$ なのでとくに $[L : N] = [M : K]$ であり、したがって $[L:N][L:M] = [L:K]$ である。ゆえに、$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(L/M) \rtimes \mathrm{Gal}(L/N)$ がわかる。 $\square$

## 参考文献

[1] 雪江明彦『代数学 2 環と体とガロア理論』(日本評論社, 2010)