

京都大学 数学系 院試

<https://seasawher.github.io/kitamado/>

@seasawher

2019 年 8 月 17 日

目次

1	平成 31 年度 基礎科目	4
	問 1	4
	問 2	5
	問 3	6
	問 4	7
	問 5	9
	問 6	10
	問 7	11
2	平成 31 年度 専門科目	13
	問 1	13
	問 2	14
	問 3	15
	問 4	16
	問 5	17
3	平成 30 年度 基礎科目	19
	問 1	19
	問 2	20
	問 3	21
	問 4	23
	問 5	25
	問 6	26
	問 7	28
4	平成 30 年度 専門科目	29
	問 1	29

	問 2	30
	問 3	31
5	平成 29 年度 基礎科目	34
	問 1	34
	問 2	35
	問 3	37
	問 4	38
	問 5	39
	問 6	40
	問 7	41
6	平成 29 年度 専門科目	42
	問 1	42
	問 2	43
	問 3	44
7	平成 28 年度 基礎科目 I	46
	問 1	46
	問 2	47
	問 3	48
	問 4	49
8	平成 28 年度 基礎科目 II	50
	問 1	50
	問 2	51
	問 3	52
	問 4	53
	問 5	54
	問 6	55
9	平成 28 年度 専門科目	56
	問 1	56
	問 2	57
	問 3	59
10	平成 27 年度 基礎科目 I	62
	問 1	62
	問 2	63
	問 3	64
	問 4	65

11	平成 27 年度 基礎科目 II	66
	問 1	66
	問 2	68
	問 3	69
	問 4	70
	問 5	71
	問 6	73
	問 7	74
12	平成 27 年度 専門科目	75
	問 1	75
	問 2	76
	問 3	78
13	平成 26 年度 基礎科目 I	81
	問 1	81
	問 2	82
	問 3	84
	問 4	85
14	平成 26 年度 基礎科目 II	86
	問 1	86
	問 2	87

平成 31 年度 基礎科目

問 1

α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。このとき広義積分

$$\iint_D e^{-(x^2+2xy \cos \alpha+y^2)} dx dy$$

を計算せよ。ただし、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ とする。

解答. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変数変換する。領域 D は、 $\{(r, \theta) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ へ移る。すると $dx dy = r dr d\theta$ であって

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+2xy \cos \alpha+y^2)} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-r^2(1+\sin 2\theta \cos \alpha)} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty e^{-r(1+\sin 2\theta \cos \alpha)} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \sin 2\theta \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \sin \theta \cos \alpha} \end{aligned}$$

と計算できる。さらに $t = \tan \frac{\theta}{2}$ として変数変換を行う。 $d\theta = 2(1+t^2)^{-1}dt$ で、 $\sin \theta = 2t/(1+t^2)$ だから

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+2xy \cos \alpha+y^2)} dx dy &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{2(1+t^2)^{-1}dt}{1 + 2t(1+t^2)^{-1} \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\cos \alpha}^\infty \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha} \int_{1/\tan \alpha}^\infty \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\tan \alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$ であることから、結論として次を得る。

$$\iint_D e^{-(x^2+2xy \cos \alpha+y^2)} dx dy = \frac{\alpha}{2 \sin \alpha}$$

問 2

複素数 α に対し、3 次複素正方行列 $A(\alpha)$ を次のように定める。

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 4 & \alpha + 4 & -2\alpha + 1 \\ -2 & 2\alpha + 1 & -2\alpha + 2 \\ -1 & \alpha & -\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

- (1) $A(\alpha)$ の行列式を求めよ。
- (2) $A(\alpha)$ の階数を求めよ。

解答.

- (1) ある行に別の行の定数倍を足す操作を繰り返し行っていくと

$$\begin{aligned} A(\alpha) &\sim \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 4 & -\alpha - 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & \alpha & -\alpha + 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \alpha - 3 & 0 & -\alpha + 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha + 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\alpha - 1)^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できる。よって $\det A(\alpha) = (\alpha - 1)^2$ である。

- (2) $\alpha = 1$ のときは階数 2 である。それ以外のときは正則で、階数は 3 である。

問 3

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して、 \mathbb{R} 上の連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2y - y^3 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + xy^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

の解 $(x(t), y(t))$ は周期を持つことを示し、最小の周期を求めよ。ただし正の実数 T が $(x(t), y(t))$ の周期であるとは、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$$

が成り立つことである。

解答. 与式より

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。したがって $C = x^2 + y^2$ は定数であり、 $C = x_0^2 + y_0^2$ が成り立つ。ゆえに与式は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Cy \\ \frac{dy}{dt} = Cx \end{cases}$$

と書き直せる。この連立方程式を一変数にまとめると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C^2x$$

となるが、この解空間は $\cos(Ct)$ と $\sin(Ct)$ で張られる。したがって、一般解はこの線形結合で書けるのだから

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(Ct) - y_0 \sin(Ct) \\ y(t) &= y_0 \cos(Ct) + x_0 \sin(Ct) \end{aligned}$$

でなくてはならない。常微分方程式の初期値問題の解の一意性より、解はこれだけである。よって求める周期は $2\pi/C$ である。

問 4

f は \mathbb{R} 上の実数値 C^1 級関数で任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たすとする。このとき以下の 2 条件は同値であることを示せ。

(A) 広義積分

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+f(x)^2}} dx$$

が収束する。

(B) $f(x) = 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在しない。

解答.

(B) \Rightarrow (A) このときある $\varepsilon > 0$ が存在して $\forall x f(x)^2 > \varepsilon$ が成り立つ。よって

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+f(x)^2}} dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

より積分は有界である。被積分関数は正の値しかとらないので、これで広義積分の収束がいえた。

(A) \Rightarrow (B) 対偶を示そう。 $f(a) = 0$ なる a があったとする。周期性から $f(a_1) = 0$ なる $1 \leq a_1 < 2$ がとれる。 $n \geq 2$ に対し $n \leq a_n < n+1$ を $a_n = a_1 + n - 1$ で定める。 $f(x) = f(x+1)$ より、 f はコンパクト空間 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の C^1 級関数である。とくに f' は有界であり、 $\forall x |f'(x)| \leq M$ なる $M > 0$ をとることができる。したがって平均値の定理を適用することにより、任意の n について

$$|f(x)| = |f(x) - f(a_n)| \leq M |x - a_n|$$

が成り立つことがわかる。ここまでの議論を踏まえると次の補題が示せる。

補題. ある $r > 0$ が存在して、任意の自然数 $n \geq 2$ に対して

$$\int_{2n-2}^{2n} x^{-f(x)^2} dx \geq \frac{r}{\sqrt{\log 2n}}$$

が成り立つ。

証明. 以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \int_{2n-2}^{2n} x^{-f(x)^2} dx &\geq \int_{2n-2}^{2n} \exp \{ -(\log x) f(x)^2 \} dx \\ &\geq \int_{2n-2}^{2n} \exp \{ -(\log 2n) f(x)^2 \} dx \\ &\geq \int_{a_{2n-2}}^{a_{2n-2}+1} \exp \{ -(\log 2n) f(x)^2 \} dx \\ &\geq \int_{a_{2n-2}}^{a_{2n-2}+1} \exp \{ -M^2 (\log 2n) (x - a_{2n-2})^2 \} dx \\ &\geq \int_{a_{2n-2}}^{a_{2n-2}+1} \exp \{ -(M \sqrt{\log 2n} (x - a_{2n-2}))^2 \} dx \end{aligned}$$

変数変換 $y = M\sqrt{\log 2n}(x - a_{2n-2})$ を行つて

$$\begin{aligned} \int_{2n-2}^{2n} x^{-f(x)^2} dx &\geq \frac{1}{M\sqrt{\log 2n}} \int_0^{M\sqrt{\log 2n}} e^{-y^2} dy \\ &\geq \frac{1}{M\sqrt{\log 2n}} \int_0^{M\sqrt{\log 4}} e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

したがって

$$r = \frac{1}{M} \int_0^{M\sqrt{\log 4}} e^{-y^2} dy$$

とおけばよい。 □

(A) \Rightarrow (B) の証明に戻る。 $R \geq 4$ に対し、 $4 \leq 2N \leq R$ を満たす最大の $N \in \mathbb{Z}$ を N_R とおく。すると

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{dx}{x^{1+f(x)^2}} &\geq \sum_{n=2}^{N_R} \int_{2n-2}^{2n} \frac{dx}{x^{1+f(x)^2}} \\ &\geq \sum_{n=2}^{N_R} \frac{1}{2n} \int_{2n-2}^{2n} \frac{dx}{x^{f(x)^2}} \\ &\geq \sum_{n=2}^{N_R} \frac{r}{2n\sqrt{\log 2n}} \end{aligned}$$

というように評価できる。さらに $1/x\sqrt{\log x}$ は単調減少なので

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{dx}{x^{1+f(x)^2}} &\geq r \int_2^{N_R+1} \frac{dx}{2x\sqrt{\log 2x}} \\ &\geq \frac{r}{2} \int_4^{2N_R+2} \frac{dy}{y\sqrt{\log y}} \\ &\geq r(\sqrt{\log(2N_R+2)} - \sqrt{\log 4}) \\ &\geq r(\sqrt{R} - \sqrt{\log 4}) \end{aligned}$$

である。ゆえに結論が従う。

問 5

n を 2 以上の整数、 A を n 次複素正方行列とする。 A^{n-1} は対角化可能でないが、 A^n が対角化可能であるとき、 $A^n = 0$ となることを示せ。

解答. \mathbb{C} 係数なので、Jordan 標準形が存在する。 A ははじめから Jordan 標準形であるとしてよい。

$$A = \bigoplus_{i=1}^r J_{\lambda_i}(a_i)$$

とする。 a_1, \dots, a_r は (異なるとは限らない) 固有値であり、 λ_i はそれぞれのジョルダン細胞のサイズである。

$$A^n = \bigoplus_{i=1}^r J_{\lambda_i}(a_i)^n$$

は対角化可能なので、各 $J_{\lambda_i}(a_i)^n$ も対角化可能。ここで $J_{\lambda_i}(a_i)$ の Jordan 分解

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & & \\ & \ddots & \\ & & a_i \end{pmatrix} \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。

$$J_{\lambda_i}(a_i)^n = S_i^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k$$

であって、 S_i^n は対角行列で $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k$ はべき零行列だから、Jordan 分解の一意性より

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k = 0$$

を得る。左辺は具体的に書くことができ、次のような λ_i 次行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \binom{n}{1}a_i^{n-1} & \binom{n}{2}a_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{\lambda_i-1}a_i \\ & 0 & \binom{n}{1}a_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{\lambda_i-2}a_i^2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である。 $\lambda_i = 1$ のときにはこの等式から情報を得ることはできない。しかし $\lambda_i \geq 2$ ならば $a_i = 0$ であることがわかる。つまりサイズが 2 以上の Jordan 細胞はべき零である。そこで仮にサイズが 1 の Jordan 細胞 $J_1(a_i)$ が存在したと仮定する。 $n \geq 2$ という仮定より、このときサイズが 2 以上の Jordan 細胞のサイズは $n-1$ 以下でなくてはならない。したがって、サイズが 2 以上の Jordan 細胞はすべて $n-1$ 乗するとゼロである。よって A^{n-1} は対角化可能となるが、これは矛盾。ゆえにサイズが 1 の Jordan 細胞は存在しないので、 A の Jordan 細胞はただひとつしかなく、 $A^n = 0$ であることが導かれる。

問 6

\mathbb{R}^2 上の実数値連続関数 f についての次の条件 (*) を考える。

(*) 任意の正の実数 R に対して、次の集合は有界である。

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |f(x, y)| \leq R\}$$

以下の問に答えよ。

- (1) 条件 (*) をみたす連続関数 f の例を与え、それが (*) をみたすことを示せ。
- (2) 連続関数 f が条件 (*) を満たすとき、次のいずれかが成り立つことを示せ。
 - (a) f は最大値を持つが、最小値は持たない。
 - (b) f は最小値を持つが、最大値は持たない。

解答.

- (1) たとえば $f(x, y) = x^2 + y^2$ とすればよい。これが (*) を満たすことはあきらか。
- (2) f が条件 (*) を満たすとする。 f の可能性としては、次の 4 通りが考えられる。

- (A1) f は上にも下にも有界
- (A2) f は上に有界だが下に有界でない
- (A3) f は下に有界だが上に有界でない
- (A4) f は上にも下にも有界でない

それぞれの場合について考えていく。まず (A1) の場合、任意の x について $|f(x)| \leq M$ なる $M > 0$ が存在する。よって仮定より、 \mathbb{R}^2 が有界となって矛盾。つまりそんな関数はない。

次に (A2) の場合。 $\sup f(x) = R$ とする。仮定から集合

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |f(x, y)| \leq R\}$$

は有界閉集合である。よって V はコンパクト。 $f(V)$ もコンパクトなので、 $f(V)$ は最大値 M を持つ。あきらかに $M \leq R$ である。任意に $0 < \varepsilon \leq R/2$ が与えられたとしよう。 $\sup f(x) = R$ より $R - \varepsilon < f(z)$ なる z がある。このとき $z \in V$ だから $R - M \leq \varepsilon$ であり、 $0 < \varepsilon \leq R/2$ は任意だったから $R \leq M$ でなくてはならない。よって $R = M$ であり、 f は最大値を持つが、最小値は持たない関数である。(A3) は (A2) と同様で、このとき f は最小値を持つが最大値を持たない。

残る (A4) について考えよう。 $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ とすると、仮定から K は有界閉集合である。 M を十分に大きな正の実数として、 K をすっぽり含むような閉円板 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq M\}$ をとることができる。 \mathbb{R}^2 を全体として補集合をとることになると、このとき B^c は連結開集合である。

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\} \quad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0\}$$

とおく。このとき U と V の共通部分は空であり、ともに開集合である。だから、 $B^c = (U \cap B^c) \cup (V \cap B^c)$ から、 B^c が連結集合であることに矛盾。よってそのような関数はない。以上により示すべきことがいえた。

問 7

2 以上の整数 n に対し、 (i, j) 成分が $|i - j|$ となる n 次正方行列を A_n とする。すなわち

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とする。 A_n の行列式を求めよ。

解答. $n \leq 4$ のときに具体的に求めることは省略する。説明の都合上、 $n \geq 5$ とする。行または列に関する基本変形によって行列式は不変であることを利用しよう。1 列目に n 列目を足すと

$$\det A_n = \det \begin{pmatrix} n-1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のように数字が揃えられる。1 行目を 2 行目以降から引くことにより、ある $n-1$ 次正方行列 B_n に関して

$$\det A_n = (n-1) \det \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & B_n \end{pmatrix}$$

という形になる。ここで B_n の (i, j) 成分を $b_{i,j}$ とすると

$$b_{i,j} = |i - j| - j = \begin{cases} -i & (i \leq j, \text{上半分}) \\ i - 2j & (i \geq j, \text{下半分}) \end{cases}$$

である。つまり、具体的に書けば

$$B_n = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ 1 & -1 & -3 & \cdots & -3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-3 & n-5 & n-7 & \cdots & -(n-1) \end{pmatrix}$$

ということである。 B_n の 1 行目の $i-2$ 倍を i 行目に加えることにより、ある $n-2$ 次正方行列 C_n に関して

$$B_n \sim \begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & C_n \end{pmatrix}$$

という形になる。ここで C_n の (i, j) 成分を $c_{i,j}$ とすると

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= b_{i+1,j+1} - (i-1) \\ &= \begin{cases} -2i & (i \leq j, \text{上半分}) \\ -2j & (i \geq j, \text{下半分}) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、具体的に書けば

$$C_n = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 \\ -2 & -4 & -4 & \cdots & -4 \\ -2 & -4 & -6 & \cdots & -6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -4 & -6 & \cdots & -2(n-2) \end{pmatrix}$$

ということである。この行列は行基本変形で対角成分がすべて -2 であるような上三角行列に変形できる。したがって $\det C_n = (-2)^{n-2}$ である。ゆえに

$$\det A_n = (n-1) \det B_n = (n-1)(-1) \det C_n = -(n-1)(-2)^{n-2}$$

である。 $n \geq 5$ という仮定は C_n があまり小さくならないようにするためだけの仮定であり、この式は一般に成り立つ。そのことの確認は読者に任せる。

平成 31 年度 専門科目

問 1

$\mathbb{R}[X, Y]$ を変数 X, Y に関する実数係数の 2 変数多項式環とする。 I を $X^2 + Y^2$ で生成された $\mathbb{R}[X, Y]$ のイデアルとする。 $A = \mathbb{R}[X, Y]/I$ とおく。このとき、以下の問に答えよ。

- (i) A は整域であることを示せ。
- (ii) A の商体を K とおき、 A の K における整閉包を B とおく。 A 加群としての B の生成系を一組与えよ。

解答.

- (i) $\mathbb{R}[X, Y]$ は UFD なので、 $X^2 + Y^2$ が既約元であることを示せばよい。可約であると仮定する。そうするとある実数 a, b, c, d が存在して $X^2 + Y^2 = (aX + bY)(cX + dY)$ が成り立つことになるが、そうすると $ac - 1 = ad + bc = bd - 1 = 0$ でなくてはならない。これは a, b, c, d が実数であったことに矛盾。よって $X^2 + Y^2$ は既約元であり、 $I \subset \mathbb{R}[X, Y]$ は素イデアル。
- (ii) $a = Y/X$ とする。 $a^2 + 1 = 0$ なので $a \in B$ である。 $B = A[a]$ を示そう。それには、 $A[a]$ が整閉であることを示せば十分である。 \mathbb{R} 代数の準同形 $\varphi: \mathbb{R}[X, \sqrt{-1}] \rightarrow A[a]$ を $\varphi(\sqrt{-1}) = a, \varphi(X) = X$ で定める。これは well-defined であり、あきらかに全射。
また逆写像が構成できるので φ は単射。よって φ は同型であり、 $A[a] \cong \mathbb{R}[X, \sqrt{-1}] \cong \mathbb{C}[X]$ である。 $\mathbb{C}[X]$ は PID であり、とくに UFD でもあるから整閉である。よって $A[a]$ も整閉だから $B = A[a]$ が示された。よって、 B の A 加群としての生成系としては $\{1, a\}$ がとれる。

問 2

有限群 G に対して、次の条件 (*) を考える。

(*) 任意の正整数 n に対して、 G の部分群のうち、位数が n のものの個数は 1 以下である。

以下の問に答えよ。

- (i) G は有限 Abel 群で (*) を満たすとする。このとき、 G は巡回群であることを示せ。
- (ii) G は有限群で (*) を満たすとする。 H を G の正規部分群とする。このとき、 G/H も (*) を満たすことを示せ。
- (iii) G は有限群で (*) を満たすとする。このとき、 G は巡回群であることを示せ。

証明.

- (i) ハイリホーによる。(*) を満たし巡回群でない G があったとする。有限生成 Abel 群の構造定理により G は巡回群の直和で表されており、

$$G = \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$$

なる m_i がある。 G は巡回群ではないので $t \geq 2$ であり、中国剰余定理により m_i のなかには少なくとも一組互いに素でないものがある。その最大公約数を e とすると、 G は位数 e の部分群を少なくとも二つもつことになり矛盾。よって示せた。

- (ii) G/H の部分群全体 X と、 G の H を含む部分群全体 Y の間には全単射がある。それは自然な写像 $\pi: G \rightarrow G/H$ を用いて次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} X &\rightarrow Y \text{ s.t. } M \mapsto \pi^{-1}(M) \\ Y &\rightarrow X \text{ s.t. } K \mapsto \pi(K) \end{aligned}$$

この全単射により、位数が等しい部分群の組は位数が等しい部分群の組に送られるため、これで示すことができる。

- (iii) G の部分群 H と $g \in G$ に対して、 $gHg^{-1} = H$ でなくてはならないため、 H は正規部分群であることに注意しておく。そうすると、 G の Sylow- p 部分群はどの p についても正規部分群である。そこで $\#G$ の異なる素因子を p_1, \dots, p_t として対応する Sylow 部分群を H_i とする。任意の i, j について交換子 $[H_i, H_j]$ は $H_i \cap H_j = 1$ の部分集合だから、異なる H_i の元同士は可換である。よって積をとる写像 $\prod_{i=1}^t H_i \rightarrow G$ は準同形であり、全射であり、位数の考察から全単射でもある。位数が互いに素な巡回群の直積は巡回群なので、 G ははじめから p 群であるとしてよい。

$\#G = p^e$ とする。 e についての帰納法で示そう。 $e = 1$ ならば G はあきらかに巡回群であるから $e \geq 2$ とする。よく知られているように、 p 群の中心は自明ではない。(雪江 [1] 命題 4.4.3) そこで位数 p の元 $\pi \in Z(G)$ が存在することがわかる。 $G/\langle \pi \rangle$ は (ii) と帰納法の仮定により巡回群である。 $G/\langle \pi \rangle$ の生成元の代表元として $\sigma \in G$ をとる。そうすると積をとる写像 $\langle \pi \rangle \times \langle \sigma \rangle \rightarrow G$ は準同形でありかつ全射で、位数の考察から全単射でもある。ゆえに $G \cong \langle \pi \rangle \times \langle \sigma \rangle$ だから G は Abel 群であり、したがって (i) より巡回群である。

□

問 3

多項式 $f(X) = X^4 + 6X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体を K とおく。 K を \mathbb{C} の部分体とみなし、 $F = K \cap \mathbb{R}$ とおく。このとき、次の間に答えよ。

- (i) 拡大次数 $[F : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (ii) F/\mathbb{Q} は Galois 拡大であることを示せ。

証明. 以下この解答では $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) : \mathbb{Q}] = 4$ は認めて使う。

- (i) $X^4 + 6X^2 + 2$ は複 2 次式なので因数分解ができる。

$$\begin{aligned} X^4 + 6X^2 + 2 &= (X^2 + 3)^2 - 7 \\ &= (X^2 + 3 + \sqrt{7})(X^2 + 3 - \sqrt{7}) \end{aligned}$$

なので、この多項式の根は $\pm i\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$ である。 $\alpha = i\sqrt{3 + \sqrt{7}}$, $\beta = i\sqrt{3 - \sqrt{7}}$ とおく。 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$ である。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{7}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}(\alpha) \end{array}$$

多項式 $f(X)$ は $p = 2$ に関する Eisenstein 多項式だから $\mathbb{Q}[X]$ の元として既約。ゆえに $f(X)$ は α の \mathbb{Q} 上の最小多項式であるから $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ である。さらに $[K : \mathbb{Q}] = 8$ であることを示そう。 $K = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{2})$ なので $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ を示せばよい。仮に $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ だったとする。このときある $b, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ が存在して

$$\sqrt{2} = b\alpha + c$$

である。この式から

$$\begin{cases} bc = 0 \\ c^2 - (3 + \sqrt{7})b^2 = 2 \end{cases}$$

を得る。 $bc = 0$ より $b = 0$ または $c = 0$ である。 $b = 0$ なら $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ということになり矛盾。 $c = 0$ なら $N : \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \rightarrow \mathbb{Q}$ をノルムとすると $2 = N(b)^2$ となり $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ となって矛盾。いずれにせよ矛盾が得られたので、 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ が示せた。よって $[K : \mathbb{Q}] = 8$ である。

一方で $\mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{2}) \subset F$ より $[F : \mathbb{Q}] \geq 4$ である。かつ $F \subsetneq K$ から $[F : \mathbb{Q}] < 8$ なので、 $[F : \mathbb{Q}] = 4$ でなくてはならない。

- (ii) 包含関係があつて \mathbb{Q} 上の次元が同じなので $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7}, \sqrt{2})$ である。 \mathbb{Q} は標数 0 なので完全体であり、したがって F/\mathbb{Q} は分離拡大。かつ F を \mathbb{Q} 上生成する $\sqrt{7}$ と $\sqrt{2}$ の共役はすべて F に含まれているので、 F/\mathbb{Q} は Galois 拡大である。

□

問 4

$n \geq 2$ に対して、

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \quad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

とし、写像 $\Phi: S^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ を

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 z, \dots, x_n z)$$

と定める。

- (1) Φ の像 M が \mathbb{C}^n の実 n 次元部分多様体であることを示せ。
- (2) n が偶数のとき、 M が向き付け可能であることを示せ。

解答.

- (1) $\Phi(x, z) = \Phi(y, w)$ とする。すると $\forall i \ x_i z = y_i w$ である。 S^{n-1} の定義により $x_i \neq 0$ なる i がある。よって $z/w = y_i/x_i \in \mathbb{R}$ であるので、 $z = w$ または $z = -w$ である。したがって $w \in M$ に対して $\#\Phi^{-1}(w) = 2$ であることが分かった。

$N = S^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ とおく。 N に $(x, z) \sim (-x, -z)$ で生成される同値関係 \sim を定義する。このとき $\Phi(x, z) = \Phi(y, w)$ と $(x, z) \sim (y, w)$ は同値である。ゆえに次の図式

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\Phi} & M \\ P \downarrow & \nearrow \tilde{\Phi} & \\ N/\sim & & \end{array}$$

を可換にするような全単射連続写像 $\tilde{\Phi}$ がある。 N/\sim はコンパクトで、 M は Hausdorff なので $\tilde{\Phi}$ は同相でなければならない。したがって M の代わりに N/\sim が n 次元位相多様体であることをいえばよいが、 P が被覆写像であるためこれはあきらか。

- (2) n は偶数と仮定されているので $n = 2k$ とおける。接ベクトル束 TM の切断 s であって、至る所ゼロでないものの存在をいえば十分である。 $\beta = (x, z) \in N$ に対して

$$\tilde{z} = (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}, -y_2, y_1)$$

と定めておき、これによりベクトル場 $N \rightarrow TN$ s.t. $z \mapsto (z, \tilde{z})$ を定める。このベクトル場は N/\sim 上のベクトル場を誘導し、あきらかに至る所ゼロでない。よって示せた。

問 5

\mathbb{C} の部分空間

$$X = \{1 - e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \cup \{-1 + e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

を考える。整数 p, q に対して、写像 $f: X \rightarrow X$ を

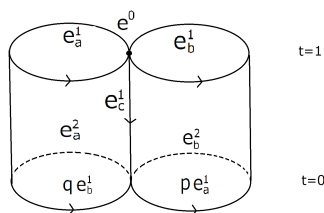
$$\begin{aligned} f(1 - e^{i\theta}) &= -1 + e^{ip\theta} \\ f(-1 + e^{i\theta}) &= 1 - e^{iq\theta} \end{aligned}$$

で定め、 $X \times [0, 1]$ に

$$(x, 0) \sim (f(x), 1)$$

$(x \in X)$ で生成される同値関係 \sim を与える。商空間 $Y = (X \times [0, 1]) / \sim$ の整数係数ホモロジー群を計算せよ。

解答．セル複体を使ってホモロジーを求めよう。空間 Y を直接書くことは難しいが、次のようなものを想像することはできる。



この対になった円筒は、 $X \times I$ および Y を表している。上下の円盤に見える部分は円周であり、ちくわを2つつくつけたような形をしている。側面も輪郭しか書かれていないが、面になっている。垂直方向が I 成分を表しており、上が $t = 1$ で下が $t = 0$ であるものとしよう。また右を実軸のプラス方向、奥を虚軸のプラス方向とする。上部にある点は原点を表す。図に e と書かれているのはセルである。それぞれ具体的には次のように与えられる。

$$\begin{aligned} e^0 &= (0, 1) \\ e_a^1 &= \{(-1 + e^{i\theta}, 1) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\ e_b^1 &= \{(1 - e^{i\theta}, 1) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\ e_c^1 &= \{(0, t) \mid 0 < t < 1\} \\ e_a^2 &= \{(-1 + e^{i\theta}, t) \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < t < 1\} \\ e_b^2 &= \{(1 - e^{i\theta}, t) \mid 0 < \theta < 2\pi, 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

このとき、次に注意する。

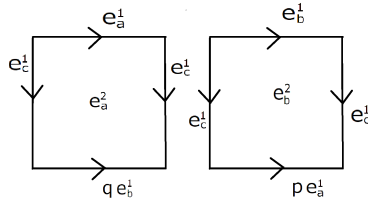
$$\begin{aligned} e^0 &= (0, 0) \\ pe_a^1 &= \{(1 - e^{i\theta}, 0) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \\ qe_b^1 &= \{(-1 + e^{i\theta}, 0) \mid 0 < \theta < 2\pi\} \end{aligned}$$

さて以上の準備の下セル複体のホモロジーを計算しよう。 Y の 0 セル、1 セル、2 セルの数はそれぞれ 1, 3, 2

個なので

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

という図式に表されるような状況になっている。まず σ だが、0 セルはただひとつしかないのでこれはゼロ写像である。よって $H_0(Y) = \mathbb{Z}$ がわかる。次に ∂ を計算する。次の図



のような状況になっているので

$$\partial(e_a^2) = e_a^1 - q e_b^1 \quad \partial(e_b^2) = e_b^1 - p e_a^1$$

である。したがって ∂ は次の行列

$$\partial = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で表される写像である。この行列の階数は $pq = 1$ のとき 1 でそうでないとき 2 である。よって $pq = 1$ のとき

$$\begin{aligned} H_1(Y) &= \mathbb{Z}^3 / \text{Im } \partial \\ &= \mathbb{Z}^2 \\ H_2(Y) &= \text{Ker } \partial \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

である。 $pq \neq 1$ ならば

$$\begin{aligned} H_1(Y) &= \mathbb{Z}^3 / \text{Im } \partial \\ &= (a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z} \oplus c\mathbb{Z}) / (a - qb, b - pa) \\ &= (a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}) / ((1 - pq)a, b - pa) \oplus c\mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z} / (1 - pq)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ H_2(Y) &= \text{ker } \partial \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上により求めるホモロジーは、 $pq = 1$ のとき

$$H_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^2 & (i = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり、 $pq \neq 1$ のとき

$$H_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (i = 0) \\ \mathbb{Z}/(pq - 1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (i = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

■ 平成 30 年度 基礎科目

問 1

広義積分

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$$

を計算せよ。ただし、 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z\}$ とする。

解答. 極座標変換 $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, z)$ を考える。このとき $dx dy dz = r dr d\theta dz$ であり、

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{\frac{3}{2}}} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2} \left(\int_{r^2}^\infty z^{-\frac{3}{2}} dz \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2} \left[(-2)z^{-\frac{1}{2}} \right]_{r^2}^\infty dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2} \frac{1}{r} dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+r^2} dr \\ &= 4\pi \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi^2 \end{aligned}$$

と計算できる。

問 2

a, b を実数とする。実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

- (1) 行列 A の階数を求めよ。
- (2) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解を持つような実数 a, b をすべて求めよ。

解答.

- (1) ある行に別の行の定数倍を足す操作を繰り返すと

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1-2a & 4-2b \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2a & 4-2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって $\text{rank } A \geq 2$ であり、 $(a, b) = (\frac{5}{2}, 2)$ のときは $\text{rank } A = 2$ で、 $(a, b) \neq (\frac{5}{2}, 2)$ のときは $\text{rank } A = 3$ である。

- (2) $(a, b) \neq (\frac{5}{2}, 2)$ ならば、 $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ は全射なので、解がある。 $(a, b) = (\frac{5}{2}, 2)$ のとき、拡大係数行列を考えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、解はない。

問 3

広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2+x^4} dx$$

を求めよ。

解答. f, F を

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2+x^4}, \quad F(z) = \frac{e^{\sqrt{-1}\pi z}}{1+z^2+z^4}$$

により定める。 $x \in \mathbb{R}$ なら $f(x) = \operatorname{Re} F(x)$ である。

ここで分母の $1+z^2+z^4$ を因数分解しておく。 $\zeta = \exp(\sqrt{-1}\pi/3) = (1+\sqrt{-3})/2$ とする。 $1+z+z^2$ の根は 1 の原始 3 乗根であることから

$$\begin{aligned} z^4 + z^2 + 1 &= (z^2 - \zeta^2)(z^2 - \zeta^4) \\ &= (z - \zeta)(z + \zeta)(z - \zeta^2)(z + \zeta^2) \end{aligned}$$

である。

上反平面に含まれる半径 R の半円を C_R とする。留数定理により、任意の $R > 1$ について

$$2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F) = \int_{-R}^R F(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz$$

が成り立つ。

ここで、

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{R \exp(\sqrt{-1}R\pi e^{\sqrt{-1}\theta})}{1 + R^2 e^{2\sqrt{-1}\theta} + R^4 e^{4\sqrt{-1}\theta}} \right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R e^{-R\pi \sin \theta}}{R^4 - R^2 - 1} d\theta \\ &\leq \frac{R}{R^4 - R^2 - 1} \int_0^\pi d\theta \\ &\leq \frac{R\pi}{R^4 - R^2 - 1} \end{aligned}$$

だから、 $R \rightarrow \infty$ のとき $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$ である。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \operatorname{Re}(2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F))$$

であることがわかる。

実際に留数を計算しよう。詳細は省略するが、堅実な計算により

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=\zeta} F &= \frac{\exp(\sqrt{-1}\pi \frac{1+\sqrt{-3}}{2})}{(2\zeta)(\zeta-\zeta^2)(\zeta+\zeta^2)} \\ &= \frac{-\sqrt{-1}\exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})}{2(1-\zeta^2)} \\ \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F &= \frac{\exp(\sqrt{-1}\pi \frac{-1+\sqrt{-3}}{2})}{(\zeta^2-\zeta)(\zeta^2+\zeta)(\zeta^2+\zeta^2)} \\ &= \frac{-\sqrt{-1}\exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})}{2(1+\zeta)}\end{aligned}$$

がわかる。 $\alpha = \exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})$ とおこう。すると

$$\begin{aligned}2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F) &= \alpha\pi \left(\frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{1}{1+\zeta} \right) \\ &= \alpha\pi \left(\frac{2-\zeta}{1-\zeta^2} \right) \\ &= \alpha\pi\end{aligned}$$

である。 $\alpha \in \mathbb{R}$ だから、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} \pi$$

が結論される。

問 4

閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、各 f_n は広義単調増加であるものとする。つまり、 $0 \leq x < y \leq 1$ なら、 $f_n(x) \leq f_n(y)$ である。この関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \rightarrow \infty$ で関数 f に各点収束したとする。

- (1) 任意の $0 \leq x < y \leq 1$ に対し、不等式

$$\sup_{x \in [x, y]} |f_n(z) - f(z)| \leq \max\{|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\}$$

を示せ。

- (2) 関数 f が連続であるとき、関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $[0, 1]$ 上で一様収束することを示せ。

解答.

- (1) まず f が広義単調増加であることを示す。 $0 \leq x < y \leq 1$ とする。 $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。 f_n が f に各点収束することにより

$$n \geq N(x) \rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$n \geq N(y) \rightarrow |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$$

なる $N(x), N(y)$ の存在がわかる。したがって $n \geq \max\{N(x), N(y)\}$ のとき

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) + 2\varepsilon &= (f(y) + \varepsilon) - f(x) + \varepsilon \\ &\geq f_n(y) - f(x) + \varepsilon && (-\varepsilon < f(y) - f_n(y) < \varepsilon \text{ より}) \\ &\geq f_n(y) - f_n(x) && (-\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon \text{ より}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

がわかる。 $\varepsilon > 0$ は任意だったから、 $f(y) \geq f(x)$ がわかる。つまり f は広義単調増加である。

したがって任意の $z \in [x, y]$ に対して

$$f_n(z) - f(z) \leq f_n(y) - f(x)$$

$$f(z) - f_n(z) \leq f(y) - f_n(x)$$

が成り立つので、

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \max\{|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\}$$

である。右辺は z の取り方によらないので、

$$\sup_{x \in [x, y]} |f_n(z) - f(z)| \leq \max\{|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\}$$

がいえた。

- (2) $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。 $I = [0, 1]$ はコンパクトなので、 f は一様連続であることまでいえる。そこで

$$|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

なる $\delta > 0$ がある。この δ を固定し、 $B(z) = [z - \delta/3, z + \delta/3] \cap I$ とする。 $\delta > 0$ なので、 $I = \bigcup_{i=1}^m B(z_i)$ なる有限個の $z_i \in I$ をとることができる。 $B(z_i) = [x_i, y_i]$ と表すことにする。

f_n は f に各点収束しているので、

$$\begin{aligned} n \geq N(x_i) &\rightarrow |f(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \\ n \geq N(y_i) &\rightarrow |f(y_i) - f_n(y_i)| < \varepsilon \end{aligned}$$

なる $N(x_i), N(y_i)$ がある。そこで

$$n \geq \max\{N(x_1), \dots, N(x_m), N(y_1), \dots, N(y_m)\}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} |f_n(x_i) - f(y_i)| &\leq |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y_i)| \\ &\leq 2\varepsilon \\ |f_n(y_i) - f(x_i)| &\leq |f_n(y_i) - f(y_i)| + |f(y_i) - f(x_i)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって (1) により、不等式評価を端点に押しつけることができ

$$\begin{aligned} \sup_{z \in I} |f_n(z) - f(z)| &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{x \in [x_i, y_i]} |f_n(z) - f(z)| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \max\{|f_n(x_i) - f(y_i)|, |f_n(y_i) - f(x_i)|\} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

である。これで一様収束がいえた。

問 5

p を素数とし、 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の有限体とする。行列の乗法による群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

で定める。このとき、 G から乗法群 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ への準同形写像の個数を求めよ。

解答. 集合 $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ と $\text{Hom}(G/[G, G], \mathbb{C}^\times)$ の間には全単射がある。したがって $G/[G, G]$ の構造を決定すればよい。そのためにまず $[G, G]$ を決定する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \delta & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。 $(\alpha$ は a と間違えやすいので、 δ を使った。) 計算すれば、このとき

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a\gamma - c\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが判る。 $a\gamma - c\delta$ は \mathbb{F}_p 全体をわたるので、

$$[G, G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{F}_p \right\}$$

が結論できる。

次に $G/[G, G]$ の構造を決定したい。

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、 $E_1, E_2 \in G/[G, G]$ と見なす。

$$E_1^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、 E_1, E_2 は位数がちょうど p である。また、 $C = E_1^n = E_2^m$ とするとき

$$1 = E_1^n E_2^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & n & -nm \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $n = m = 0$ が従う。つまり $\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle = 1$ である。 $G/[G, G]$ は Abel 群なので積による準同形 $\langle E_1 \rangle \times \langle E_2 \rangle \rightarrow G/[G, G]$ がある。これは、 $\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle = 1$ により単射である。位数 p^2 の有限群の間の単射なので、とくに同型である。よって $G/[G, G] \cong \mathbb{F}_p^2$ がわかった。

あとは $\#\text{Hom}(\mathbb{F}_p^2, \mathbb{C}^\times)$ を求めよう。これは $\#\text{Hom}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C}^\times)$ の 2 乗である。 $\#\text{Hom}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C}^\times) = p$ より求める答えは p^2 である。

問 6

\mathbb{R}^4 の部分空間 M を

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, xy + zw = 0\}$$

で定める。

(1) M が 2 次元微分可能多様体になることを示せ。

(2) M 上の関数 f を

$$f(x, y, z, w) = x$$

で定めるとき、 f の臨界点をすべて求めよ。ただし、 $p \in M$ が f の臨界点であるとは、 p における M の局所座標 (u, v) に関して

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$$

となることである。

解答.

(1) $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1 \\ xy + zw \end{pmatrix}$$

により定める。 $M = F^{-1}(O)$ である。 $p = (x, y, z, w) \in M$ としよう。 p におけるヤコビアンを計算すると

$$JF_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ y & x & w & z \end{pmatrix}$$

である。ここで $p \neq O$ より $\text{rank } JF_p \geq 1$ である。仮に $\text{rank } JF_p = 1$ ならば、 JF_p の 2 つの行は 1 次従属である。よって、 $p \neq O$ により $(y, x, w, z) = c(x, y, z, w)$ なる定数 $c \in \mathbb{R}$ がある。このとき $xy + zw = c(x^2 + z^2) = 0$ となり、 $p \neq O$ に矛盾。よって $\text{rank } JF_p = 2$ である。ゆえに p は F の正則点であり、 M は \mathbb{R}^4 の 2 次元部分多様体。 F は \mathbf{C}^∞ 級なので、 M は微分可能になる。

(2) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ の \mathbb{R}^4 への自然な拡張を \tilde{f} とする。このとき $p \in M$ に対して $T_p M \subset \mathbb{R}^4$ と見なせば、 $T_p M = \text{Ker } JF_p$ であるから、

$$\begin{aligned} p \text{ が } f \text{ の臨界点} &\iff \text{rank}(df_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}) < 1 \\ &\iff \dim \text{Ker } df_p = 2 \\ &\iff \dim \text{Ker } \begin{pmatrix} JF_p \\ J\tilde{f}_p \end{pmatrix} = 2 \\ &\iff \text{rank} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ y & x & w & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \\ &\iff \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z & 2w \\ 0 & x & w & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

である。いま $p = (x, y, z, w) \in M$ が臨界点であったと仮定する。このとき (x, w, z) と (y, z, w) は 1 次従属である。よって $(y, w, z) = 0$ かまたは、ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $(x, w, z) = c(y, z, w)$ であ

る。 $(y, w, z) = 0$ なら $p = (\pm 1, 0, 0, 0)$ である。 $(x, w, z) = c(y, z, w)$ なら、 $c(y^2 + z^2) = 0$ より $p = (0, \pm 1, 0, 0)$ である。

逆に $p = (\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0)$ ならば $p \in M$ であり、 f の臨界点であることはあきらかなので、臨界点はこれですべて求まったことになる。

問 7

A を実正平方行列、 k を正の整数とし、 $\text{rk}(A^{k+1}) = \text{rk}(A^k)$ が成り立つとする。このとき、任意の整数 $m \geq k$ に対し、 $\text{rk}(A^m) = \text{rk}(A^k)$ であることを証明せよ。ここで行列 X に対し、 $\text{rk}(X)$ は X の階数を表す。

証明. 仮定から、 $\text{Ker } A^{k+1}$ の次元と $\text{Ker } A^k$ の次元は等しい。包含関係があつて次元が等しいので、 $\text{Ker } A^{k+1} = \text{Ker } A^k$ である。ここで $m \geq k+2$ に対して $x \in \text{Ker } A^m$ と仮定する。そうすると $A^m x = A^{m-k-1} A^{k+1} x$ だから $A^{m-k-1} x \in \text{Ker } A^{k+1} = \text{Ker } A^k$ である。よつて $A^k A^{m-k-1} x = A^{m-1} x = 0$ であり、 $x \in \text{Ker } A^{m-1}$ がわかる。これを帰納的に繰り返して、 $\text{Ker } A^m \subset \text{Ker } A^{m-1} \subset \cdots \subset \text{Ker } A^k$ を得る。逆はあきらかなので $\text{Ker } A^m = \text{Ker } A^k$ である。よつてとくに階数も等しい。 \square

平成 30 年度 専門科目

問 1

k を可換体とする。 $k[X, Y]$ を k 上の 2 変数多項式環として、 $f \in k[X, Y]$ の零点集合 $V(f)$ を

$$V(f) = \{(a, b) \in k \times k \mid f(a, b) = 0\}$$

によって定義する。次の 2 条件は同値であることを示せ。

- (1) k は代数的閉体ではない。
- (2) $V(f) = \{(0, 0)\}$ となる $f \in k[X, Y]$ が存在する。

解答.

- (1) \Rightarrow (2) k は代数的閉体ではないので、ある 1 次以上の多項式 $g \in k[X]$ であって、 k 上根を持たないものが存在する。 $n = \deg g$ とおいて、

$$f(X, Y) = Y^n g\left(\frac{X}{Y}\right)$$

とおく。別の言い方をすれば $g(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ とするとき、 $f(X, Y) = X^n + a_{n-1}X^{n-1}Y + \cdots + a_1XY^{n-1} + a_0Y^n$ である。 $X \in k, Y \in k \setminus \{0\}$ に対して Y^n と $g(X/Y)$ は決して 0 にならないので、 $f(X, Y) = 0$ となるのは $Y = 0$ のときだけである。 $f(X, 0) = X^n$ なので、 $V(f) = \{(0, 0)\}$ が成り立つ。

- (2) \Rightarrow (1) 対偶をとり、 k が代数閉体であってかつ $V(f) = \{(0, 0)\}$ となる $f \in k[X, Y]$ が存在すると仮定し矛盾を示そう。このとき k は無限体 (k が有限体であっても、アイゼンシュタイン多項式は無限個あるため) であることに注意する。またここではそもそも k は零環ではないとして考えていることに注意する。

さて $a, b \in k^\times$ を任意にとると、 $f(a, Y) \in k[Y]$ 、 $f(X, b) \in k[X]$ は決して 0 にならないので、定数でなければならない。このとき $f(a, Y) = f(a, b) = f(X, b)$ であるので、常にこの 2 つは一致する。割り算を実行して

$$f(X, Y) = (X - a)g(X, Y) + f(a, Y)$$

$$f(X, Y) = (Y - b)h(X, Y) + f(X, b)$$

なる $g, h \in k[X, Y]$ をとってくる。すると辺々引いて

$$0 = (X - a)g(X, Y) - (Y - b)h(X, Y)$$

が成り立つ。この等式は任意の $a, b \in k^\times$ について成り立つので、 $g = h = 0 \in k[X, Y]$ が判る。ゆえに f は定数となるがこれは矛盾。

- 別解 (2) \Rightarrow (1) を示す部分については Hilbert の零点定理を知っていればすこし議論を省略できる。 k が代数閉体だと仮定し $V(f) = \{(0, 0)\}$ となる $f \in k[X, Y]$ が存在するとしよう。 $k[X, Y]$ は UFD なので、 f は既約であるとしてよい。すると (f) は根基イデアルなので Hilbert の零点定理により $(f) = (X, Y)$ である。しかし右辺は単項イデアルではないので矛盾。

問 2

p を素数, k, m を正の整数で, k と $p^2 - p$ は互いに素であるとする。位数 kp^m の有限群 G が次の性質を満たす部分群 N, H をもつとする。

- (1) N は位数 p^m の巡回群で G の正規部分群である。
- (2) H は位数 k の群である。

このとき、 G は N と H の直積であることを示せ。

解答. $H \triangleleft G$ を示せば十分である。(付録の「半直積と Gaois 群」を参照のこと) $N \triangleleft G$ なので、 H の共役による N への作用 $\Phi: H \rightarrow \text{Aut } N$ を $\Phi_h(q) = hqh^{-1}$ により定義できる。 $H/\text{Ker } \Phi$ は $\text{Aut } N$ の部分群とみなせる。

$$\begin{aligned}\#(\text{Aut } N) &= \#((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times) \\ &= p^m - p^{m-1}\end{aligned}$$

なので、 $\#(H/\text{Ker } \Phi)$ は $\#H = k$ と $p^m - p^{m-1}$ の両方を割り切る。したがって $\#(H/\text{Ker } \Phi) \leq \gcd(k, p^m - p^{m-1})$ であるが、右辺は仮定により 1 だから Φ は自明な作用であって、 H の元はすべての N の元と可換である。

よって、 G の元 $g = hq$ ($h \in H, q \in N$) と $x \in N$ に対して $g^{-1}xg = x^g = x^{hq} = (x^h)^q = x^h \in N$ だから、 $H \triangleleft G$ が言えた。

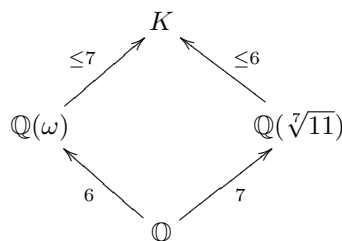
問 3

多項式 $X^7 - 11$ の有理数体 \mathbb{Q} 上の最小分解体を $K \subset \mathbb{C}$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
- (2) \mathbb{Q} と K の間の (\mathbb{Q} でも K でもない) 真の中間体の個数を求めよ。
- (3) 上記 (2) の中間体のうち、 \mathbb{Q} 上 Galois 拡大になるものの個数を求めよ。

解答.

- (1) $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$ とする。あきらかに $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[7]{11})$ である。状況を図式で表すと次のようになる。



円分体の一般論から $6 = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$ である。また $X^7 - 11$ は Eisenstein 多項式なので既約であり $7 = [\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) : \mathbb{Q}]$ である。7 と 6 は互いに素なので $\mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) = \mathbb{Q}$ である。 $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大なので、Galois 拡大の推進定理により $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ であり、とくに $[K : \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})] = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 6$ である。したがって、 $[K : \mathbb{Q}] = 42$ である。

- (2) $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とする。付録「半直積と Galois 群」により、 G は半直積

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega)) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}))$$

と同型である。素数次数なので $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega)) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ であり、円分体の一般論から

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

である。つまりともに有限巡回群である。 $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega))$ を $\sigma(\sqrt[7]{11}) = \sqrt[7]{11}\omega$ により定め、 $\tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}))$ を $\tau(\omega) = \omega^3$ により定める。 σ, τ はそれぞれ生成元となる。 $\tau\sigma\tau^{-1}(\sqrt[7]{11}) = \sqrt[7]{11}\omega^3$ より $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3$ である。したがって次の表示

$$G \cong \{\sigma, \tau \mid \sigma^7 = \tau^6 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3\} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

を得る。

Galois の基本定理により、 G の自明でない部分群の個数を求めればよい。そこでまずすべての元の位数を決定する。 $\langle \sigma \rangle \rtimes \langle \tau \rangle \rightarrow \langle \tau \rangle$ は群準同型なので、 $x = \sigma^i \tau^j \in G$ の共役は $\sigma^* \tau^j$ という形をしてい

る。具体的には

$$\begin{aligned}
\sigma x \sigma^{-1} &= \sigma \sigma^i \tau^j \sigma^{-1} \\
&= \sigma \sigma^i (\tau^j \sigma^{-1} \tau^{-j}) \tau^j \\
&= \sigma \sigma^i (\sigma^{3^j})^{-1} \tau^j \\
&= \sigma^{1-3^j} \sigma^i \tau^j \\
&= \sigma^{1-3^j} x
\end{aligned}$$

である。そこで共役元を求めることにより次のような位数の表をつくることができる。

位数	元	個数
1	1	1
2	$\sigma^i \tau^3 \ (0 \leq i \leq 6)$	7
3	$\sigma^i \tau^2 \ (0 \leq i \leq 6), \sigma^i \tau^4 \ (0 \leq i \leq 6)$	14
6	$\sigma^i \tau \ (0 \leq i \leq 6), \sigma^i \tau^5 \ (0 \leq i \leq 6)$	14
7	$\sigma^i \ (1 \leq i \leq 6)$	6

次に部分群を列挙する作業に移る。 G の位数は 42 なので、自明でない部分群の位数としてありえるのは 2, 3, 6, 7, 14, 21 である。まず位数 2 の部分群は位数 2 の元と同じ数だけあるので、7 個である。位数 3 の部分群は、素数位数なのですべて巡回群であり、生成元はひとつの群に対して 2 つある。よって位数 3 の部分群は $14/2 = 7$ 個ある。

位数 6 の部分群 $M \subset G$ が与えられたとする。このとき次のような各行が完全な可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \longrightarrow 1 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
1 & \longrightarrow & j^{-1}(M) & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{p} & p(M) \longrightarrow 1
\end{array}$$

$j^{-1}(M) = 1$ でなくてはならないため、 $M \cong p(M)$ でありしたがって M は巡回群である。位数 6 の巡回群の生成元はひとつの群に対して 2 つなので、位数 6 の部分群は $14/2 = 7$ 個ある。位数 7 の部分群は、Sylow-7 部分群なのですべて共役である。ところが $\langle \sigma \rangle$ は正規部分群だったので、ひとつしかない。位数 14 の部分群は、Sylow の定理より位数 2 の元と位数 7 の元で生成される。したがって $\langle \sigma, \tau^3 \rangle$ しかない。よって 1 個。位数 21 の部分群も、Sylow の定理により位数 3 の元と位数 7 の元で生成される。したがって $\langle \sigma, \tau^2 \rangle$ しかない。よって 1 個。以上により、次の表のようになる。

位数	部分群	個数
2	$\langle \sigma^i \tau^3 \rangle \ (0 \leq i \leq 6)$	7
3	$\langle \sigma^i \tau^2 \rangle \ (0 \leq i \leq 6)$	7
6	$\langle \sigma^i \tau \rangle \ (0 \leq i \leq 6)$	7
7	$\langle \sigma \rangle$	1
14	$\langle \sigma, \tau^3 \rangle$	1
21	$\langle \sigma, \tau^2 \rangle$	1

したがって非自明な部分群は $7 + 7 + 7 + 1 + 1 + 1 = 24$ 個ある。

- (3) Galois の基本定理により、 G の自明でない正規部分群の個数を求めればよい。 $x = \sigma^i \tau^j \in G$ の共役 $\sigma x \sigma^{-1}$ は $\sigma^{1-3^j} x$ であることを思い出そう。これをみると、位数 $2, 3, 6$ の群のなかに正規部分群は存在しない。また、位数 $7, 14, 21$ の群はすべて正規部分群である。よって自明でない正規部分群は 3 個である。

■ 平成 29 年度 基礎科目

問 1

次の重積分を求めよ。

$$\iint_D e^{-\max\{x^2, y^2\}} dx dy$$

ここで $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ とする。

解答. $E = \{(x, y) \in D \mid x \geq y\}$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-\max\{x^2, y^2\}} dx dy &= 2 \iint_E e^{-x^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^1 e^{-z} dz && (z = x^2 \text{とおいた}) \\ &= 1 - e^{-1} \end{aligned}$$

問 2

実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(i) 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解をすべて求めよ。

(ii) 連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

が解を持つような実数 c をすべて求めよ。

解答.

(i) 行列 A に行基本変形を繰り返し行っていく。

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 10 & -2 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 + 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 5R_1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_1 + 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 - 3R_2 \\ R_4 - 10R_2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_1 + R_3 \\ R_2 \\ -R_3 \\ R_4 - 2R_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって、 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間は $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$ で貼られる 2 次元実ベクトル空間

$$S = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(ii) 次の事実に気を付ける。

命題. k は体、 A は k 係数の (n, m) 行列であり $\mathbf{x} \in k^m, \mathbf{b} \in k^n$ であるとする。このとき \mathbf{x} についての一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持つことと、 $\text{rank } A = \text{rank}(A \ \mathbf{b})$ は同値。

証明. まず次は同値である。

$$\exists \mathbf{x} \ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \exists \mathbf{x} \ (A \ \mathbf{b}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで、 $\text{Ker } A \rightarrow \text{Ker}(A \ \mathbf{b})$ s.t. $\mathbf{x} \mapsto {}^t(\mathbf{x} \ 0)$ によって $\text{Ker } A$ は $\text{Ker}(A \ \mathbf{b})$ の部分空間 $\text{Ker}(A \ \mathbf{b}) \cap \{\mathbf{y} \in k^{m+1} \mid y_{m+1} = 0\}$ だと思えることに気を付けると

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{x} \ A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\iff \dim \text{Ker}(A \ \mathbf{b}) > \dim \text{Ker } A \\ &\iff 0 \leq \text{rank}(A \ \mathbf{b}) - \text{rank } A < 1 \\ &\iff \text{rank } A = \text{rank}(A \ \mathbf{b}) \end{aligned}$$

であることがわかる。 □

(ii) の解答に戻る。 $\mathbf{b} = {}^t(0 \ -1 \ 1 \ c)$ とおく。拡大係数行列 $(A \ \mathbf{b})$ は行基本変形により

$$(A \ \mathbf{b}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+2 \end{pmatrix}$$

と変形できる。したがって求める c の値は $c = -2$ である。

問 3

m, n を正の整数とし、 A を複素 (n, m) 行列、 B を複素 (m, n) 行列とする。複素数 $\lambda \neq 0$ について、以下の間に答えよ。

- (i) λ が BA の固有値ならば、 λ は AB の固有値でもあることを示せ。
- (ii) $\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n$ の部分空間 V, W をそれぞれ

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m \mid \text{ある正の整数 } k \text{ に対して } (BA - \lambda I_m)^k \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ が成り立つ}\}$$

$$W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \mid \text{ある正の整数 } l \text{ に対して } (AB - \lambda I_n)^l \mathbf{y} = \mathbf{0} \text{ が成り立つ}\}$$

で定める。ただし、 I_m, I_n は単位行列、 $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す。このとき、 $\dim V = \dim W$ であることを示せ。

解答.

- (i) $BA\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ なる $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ があったとする。このとき

$$\begin{aligned} AB(A\mathbf{v}) &= A(BA\mathbf{v}) \\ &= A(\lambda\mathbf{v}) \\ &= \lambda A\mathbf{v} \end{aligned}$$

である。もしも $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ならば $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となり矛盾。したがって $A\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ は AB の固有ベクトルである。

- (ii) $M = AB, N = BA$ とする。 $MA = AN$ である。いま $\mathbf{x} \in V$ とする。ある k が存在して $(N - \lambda I_m)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$ である。このとき

$$(M - \lambda I_n)^k (A\mathbf{x}) = A(N - \lambda I_m)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

であるから $A\mathbf{x} \in W$ である。したがって行列 A は線形写像 $A: V \rightarrow W$ であるとみなせる。このとき A は V の定義および $\lambda \neq 0$ により単射だから、 $\dim V \leq \dim W$ である。同様にして逆が言えるので $\dim V = \dim W$ が従う。

問 4

f を $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ 上の実数値連続関数とする。正の整数 n に対し、 I 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = f(x+n)$$

で定める。関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で一様収束するとき、以下の問に答えよ。

(i) I 上の関数 g を

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

で定める。このとき g は I 上で一様連続であることを示せ。

(ii) f は I 上で一様連続であることを示せ。

解答. 以下 I 上の連続関数 h に対してその一様ノルムを $\|h\| = \sup_{x \in I} |h(x)|$ とかく。

- (i) 連続関数 f_n の一様極限なので g は連続である。さらに定義より $g(x+1) = g(x)$ だから、 g はコンパクト集合 \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の連続関数であるとみなせ、したがって一様連続である。
- (ii) $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。 g の一様連続性から

$$\forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta_0 \rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

なる $\delta_0 > 0$ がある。 f_n は g に一様収束するので

$$n \geq N \rightarrow \|f_n - g\| < \varepsilon$$

なる $N \in \mathbb{Z}$ がある。このとき

$$\forall x, y \in [N, \infty) \quad |x - y| < \delta_0 \rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

が成り立つ。なぜなら

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_N(x - N) - g(x - N)| + |g(x) - g(y)| + |g(y - N) - f_N(y - N)|$$

であるから。また f は連続なので、コンパクト集合 $[0, N]$ 上ではとくに一様連続である。したがって

$$\forall x, y \in [0, N] \quad |x - y| < \delta_1 \rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

なる $\delta_1 > 0$ がある。したがって $\delta = \min_i \delta_i$ とすると

$$\forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 4\varepsilon$$

であり、これで f が I 上一様連続であることがいえた。

問 5

p を正の実数とし、 $f(t)$ を \mathbb{R} 上の実数値連続関数で

$$\int_0^\infty |f(t)| \, dt < \infty$$

を満たすものとする。このとき \mathbb{R} 上の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -px + f(t)$$

の任意の解 $x(t)$ に対し $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ が成り立つことを示せ。

解答. 任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。仮定により

$$\int_R^\infty |f(t)| \, dt < \varepsilon$$

となるような $R \geq 0$ がある。 $x = ye^{-pt}$ と置いて変数変換をすると

$$\frac{dy}{dt} = e^{pt} f(t)$$

となる。よってある定数 C により

$$y(t) = \int_0^t f(s)e^{ps} \, ds + C$$

と表せる。 C の値は $t \rightarrow \infty$ での x の振る舞いに関与しないので、はじめから $C = 0$ と仮定してよい。これにより

$$x(t) = \int_0^t f(s)e^{p(s-t)} \, ds$$

であることがわかる。そこで $M = \int_0^R |f(s)| \, ds$ とおき、 $t > \max\{R, R + \frac{1}{p} \log \frac{M}{\varepsilon}\}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_0^R |f(s)| e^{p(s-t)} \, ds + \int_R^t |f(s)| e^{p(s-t)} \, ds \\ &\leq e^{p(R-t)} M + \int_R^t |f(s)| \, ds \\ &\leq \varepsilon + \int_R^\infty |f(s)| \, ds \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

である。よって $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ である。

問 6

X, Y を位相空間とし、直積集合 $X \times Y$ を積位相によって位相空間とみなす。写像 $f: X \times Y \rightarrow Y$ を $f(x, y) = y$ で定める。 X がコンパクトならば、 $X \times Y$ の任意の閉集合 Z に対し、 $f(Z)$ は Y の閉集合であることを示せ。

注意. X がコンパクトという仮定は必要である。例えば、 $X = Y = \mathbb{R}$ かつ $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ としてみればわかる。

解答. $Y \setminus f(Z)$ の元 y が任意に与えられたとする。このとき $f^{-1}(y) \subset X \times Y \setminus Z$ である。ここで Z が $X \times Y$ の閉集合という仮定から、 $X \times Y \setminus Z \subset_{\text{open}} X \times Y$ である。したがって積位相の定義により、ある開集合の族 $U_i \subset X$ と $V_i \subset Y$ であって $X \times Y \setminus Z = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$ なるものがある。 $f^{-1}(y) = X \times \{y\} \cong X$ はコンパクトであると仮定したので、ある有限集合 $J \subset I$ が存在して $X \times \{y\} = f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i \in J} U_i \times V_i$ が成り立つ。

ここで $V = \bigcap_{i \in J} V_i$ とおく。 J は有限集合なので V は Y の開集合であり、かつ y を含む。また $X = \bigcup_{i \in J} U_i$ であることより $Z \cap f^{-1}(V) = Z \cap (X \times V) = Z \cap \bigcup_{i \in J} (U_i \times V) \subset Z \cap (X \times Y \setminus Z) = \emptyset$ となる。これは $V \cap f(Z) = \emptyset$ を意味し、 y は内点であったことがわかった。よって $f(Z)$ は Y の閉集合。

問 7

n を正の整数とし、 \mathbb{R}^n の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

と定める。 \mathbb{R}^n の空でない部分集合 A に対し、関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \inf_{z \in A} d(x, z)$$

で定めるとき、 \mathbb{R}^n の任意の 2 点 x, y に対して $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ が成り立つことを示せ。

解答. $d(x, 0) = |x|$ と書くことにする。任意に $\varepsilon > 0$ が与えられたとしよう。このとき f の定義から、 $f(y) + \varepsilon > |y - w| \geq f(y)$ なる $w \in A$ が存在する。このとき $f(x) \leq |x - w|$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \varepsilon &\leq f(x) - |y - w| \\ &\leq |x - w| - |y - w| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

である。 $\varepsilon > 0$ は任意だったので、 $f(x) - f(y) \leq |x - y|$ でなくてはならない。同様にして $f(y) - f(x) \leq |x - y|$ がいえるので、示すべきことがいえた。

平成 29 年度 専門科目

問 1

G を有限群とする。 G の自己準同形全体のなす群を $\text{Aut}(G)$ とおく。また、 G および $\text{Aut}(G)$ の位数をそれぞれ $a = |G|$, $b = |\text{Aut } G|$ とおく。以下の問に答えよ。

- (i) $b = 1$ のとき、 G は自明群であるか、または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ。
- (ii) a が奇数で $b = 2$ となるような G をすべて求めよ。

解答. この解答では集合の元の個数を $\#$ で表記する。

- (i) 群準同形 $\phi: G \rightarrow \text{Aut } G$ を $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ により定める。 $\# \text{Aut } G = 1$ という仮定より、 $G = \text{Ker } \phi = Z(G)$ である。したがって G は Abel 群。よって有限生成 Abel 群の基本定理により、ある素数の集合 $M \subset \mathbb{Z}$ と写像 $I: M \rightarrow P(\mathbb{Z})$ が存在して

$$G = \bigoplus_{p \in M} \bigoplus_{i \in I(p)} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}$$

と表すことができる。このとき乗法群 $(\prod_{p,i} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z})^\times$ は $\text{Aut } G$ の部分群とみなせるので

$$\prod_{p,i} p^{e_i-1}(p-1) = 1$$

である。したがって $M = \{2\}$ である。また任意の $i \in I(2)$ に対して $e_i = 1$ である。よって $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と表せるが、 $\text{Aut } G = 1$ という仮定から $n = 1$ でなくてはならない。 $(n \geq 2$ なら、たとえば順番を入れ替える写像などがある)

- (ii) 仮定から $G/Z(G) = G/\text{Ker } \phi$ の位数は 2 以下である。写像 $f: G \rightarrow G$ を $f(x) = x^2$ で定義する。 $x, y \in G$ に対して、もしも $x \in Z(G)$ または $y \in Z(G)$ ならば $f(xy) = f(x)f(y)$ である。また $x, y \in G \setminus Z(G)$ であれば、 $xy \in Z(G)$ なので $f(xy) = xy(xy) = f(x)f(y)$ である。したがって f は群準同形となる。 $\#G$ は奇数なので f は単射であり、位数の考察から同型となる。このことから結局 $G = Z(G)$ であり、 G は Abel 群である。ゆえに有限生成 Abel 群の基本定理から

$$G = \bigoplus_{p \in M} \bigoplus_{i \in I(p)} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}$$

と表すことができる。このとき乗法群 $(\prod_{p,i} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z})^\times$ は $\text{Aut } G$ の部分群とみなせるので

$$\prod_{p,i} p^{e_i-1}(p-1) \leq 2$$

である。 p としては 3 以上のものしか現れないから、 $M = \{3\}$ である。また $\#I(3) = 1$ かつ $i \in I(3)$ に対して $e_i = 1$ であることもわかる。したがって $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

問 2

n は 2 以上の整数とし、 $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ を 1 の原始 n 乗根とする。 $\mathbb{C}[X, Y]$ は変数 X, Y に関する複素数係数の 2 変数多項式環とする。

$$R = \{f(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y] \mid f(\zeta X, \zeta Y) = f(X, Y)\}$$

とおく。以下の問に答えよ。

- (i) \mathbb{C} 代数として R は $n+1$ 個の元 $X^n, X^{n-1}Y, \dots, XY^{n-1}, Y^n$ で生成されることを示せ。
- (ii) 複素数 a, b, c, d に対し $m_{a,b} = (X-a, Y-b)$, $m_{c,d} = (X-c, Y-d)$ を $\mathbb{C}[X, Y]$ のイデアルとする。 $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ が成り立つための a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ。

解答.

- (i) $X^n, X^{n-1}Y, \dots, XY^{n-1}, Y^n$ で \mathbb{C} 上生成される環を R' とおく。 $f \in R$ が与えられたとする。 f をゼロでない d 次斉次元 f_d の和として $f = \sum_{d \in I} f_d$ と書く。このとき仮定から $0 = f(\zeta X, \zeta Y) - f(X, Y) = \sum_{d \in I} (\zeta^d - 1) f_d(X, Y)$ である。したがって I の元はすべて n の倍数である。これはつまり $f \in R'$ を意味する。よって $R \subset R'$ である。逆は明らかだから $R = R'$ がいえた。
- (ii) 1 の n 乗根全体がなす位数 n の巡回群を G と書くことにする。このとき、 $(za, zb) = (c, d)$ なる $z \in G$ が存在すれば $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ が成り立つことはあきらめ。逆を示そう。
 $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ が成り立ったと仮定する。このとき $X^n - a^n$ と $Y^n - b^n$ はともに $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ の元である。よって $c^n - a^n = d^n - b^n = 0$ であり、ある $z, w \in G$ が存在して $c = za$, $d = wb$ が成り立つ。ここでさらに $(bX - aY)^n$ も $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ の元だから、 \mathbb{C} は整域なので $bc - ad = 0$ である。よって $(z - w)ab = 0$ である。このとき $ab = 0$ または $z - w = 0$ であるが、いずれにせよ $(za, zb) = (c, d)$ なる $z \in G$ が存在することには違いがないので、示すべきことがいえた。

問 3

以下の問に答えよ。

- (i) S_5 を文字 $1, 2, 3, 4, 5$ に関する対称群とする。 S_3 を文字 $1, 2, 3$ に関する対称群とし、 S_3 を S_5 の部分群とみなす。 $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_5$ を長さ 3 の巡回置換とし、 σ で生成された S_5 の部分群を $G = \langle \sigma \rangle$ とおく。 $\tau = (4\ 5) \in S_5$ を互換とし、 τ で生成された S_5 の部分群を $H = \langle \tau \rangle$ とおく。 S_5 の部分群 G の正規化群を

$$N_{S_5}(G) = \{ \eta \in S_5 \mid \eta G \eta^{-1} = G \}$$

で定める。このとき、 $N_{S_5}(G) = S_3 \times H$ であることを示せ。

- (ii) $f(X)$ は \mathbb{Q} 係数の 5 次の多項式とする。 $K \subset \mathbb{C}$ を $f(X)$ の \mathbb{Q} 上の最小分解体とする。 K は次の条件 (*) を満たすとする。

(*) $[K : F] = 3$ となる K の部分体 F がただ一つ存在する。

このとき、 $f(X)$ は \mathbb{Q} 係数の 3 次の既約多項式で割り切れることを示せ。

解答.

- (i) S_3 の元と H の元は互いに可換なので、積をとる写像 $S_3 \times H \rightarrow S_5$ は準同型となる。 $G \triangleleft S_3$ より、 $(s, t) \in S_3 \times H$ としたとき

$$(st)\sigma(st)^{-1} = s\sigma s^{-1} \in G$$

だから積 st は $N_{S_5}(G)$ に含まれる。よって準同型 $\varphi: S_3 \times H \rightarrow N_{S_5}(G)$ が構成できたことになる。 $S_3 \cap H = 1$ より φ は単射である。全射であることを示そう。

$h \in N_{S_5}(G)$ が与えられたとする。このとき定義から $h\sigma h^{-1} \in G$ である。よって $x \in \{4, 5\}$ への作用を考えると $h\sigma h^{-1}(x) = x$, つまり $\sigma h^{-1}(x) = h^{-1}(x)$ がわかる。 σ が固定するのは $\{4, 5\}$ の元だけなので $h^{-1}(x) \in \{4, 5\}$ である。まとめると、任意の $h \in N_{S_5}(G)$ に対して $h = \sigma_0 \tau_0$ なる $\sigma_0 \in S_3$ と $\tau_0 \in H$ があることが判ったことになり、したがって φ は全射、ゆえに同型である。

- (ii) Galois の基本定理により、 $F \mapsto \text{Gal}(K/F)$ で与えられる対応

$$\{K/\mathbb{Q} \text{ の部分体} \} \rightarrow \{ \Gamma := \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \text{ の部分群} \}$$

は全単射である。ゆえに Γ は位数 3 の部分群をただひとつしかもたない。とくに $\text{Gal}(K/F)$ の Γ での共役はただひとつなので $\text{Gal}(K/F) \triangleleft \Gamma$ である。 $G = \text{Gal}(K/F)$ とおく。 f の根を $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ とすると Γ は $\{\alpha_1, \dots, \alpha_5\}$ への作用により 5 次対称群 S_5 の部分群とみなせる。 $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ なので必要ならば番号を付けなおすことにより G は $\sigma = (1\ 2\ 3)$ で生成されているとしてよい。いま $G \triangleleft \Gamma$ により $\Gamma \subset N_{S_5}(G)$ である。(i) により $N_{S_5}(G) \cong S_3 \times H$ であるので、 $\Gamma \subset S_3 \times H$ とみなせる。

f は 5 次多項式であるので、 f の $\mathbb{Q}[X]$ における既約分解の様相には次の可能性がある。

- (1) f は既約
- (2) $f = (4 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式})$
- (3) $f = (3 \text{ 次式}) \times (2 \text{ 次式})$
- (4) $f = (3 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式})$
- (5) $f = (2 \text{ 次式}) \times (2 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式})$
- (6) $f = (2 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式})$

(7) $f = (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式}) \times (1 \text{ 次式})$

ここで (5),(6),(7) は条件 (*) を満たさないので却下される。(1),(2) の場合 Γ は集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の位数 4 以上の部分集合に推移的に作用しなければならないが、これは $\Gamma \subset S_3 \times H$ に反する。したがって残る可能性は (3),(4) のみであり、示すべきことがいえた。

■ 平成 28 年度 基礎科目 I

問 1

線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) として定める。 V を 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

が張る \mathbb{R}^4 の部分空間としたとき、 f の V への制限 $g = f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ。ただし、 g の階数とは、 $g(V)$ の次元のこととする。

解答. 与えられたベクトルをそれぞれ v_1, v_2, v_3 とする。このとき $B = (gv_1, gv_2, gv_3)$ であるとする。 B は基本変形で

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -10 & 8 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と変形できる。したがって $\text{rank } B = 3$ であり、 g の階数は 3 である。

問 2

a を実数とする。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

- (i) 行列 A の固有値を求めよ。
- (ii) 行列 A が対角化可能となる実数 a をすべて求めよ。ただし、 A が対角化可能であるとは、複素正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在することをいう。

解答.

- (i) 与えられた A を変数 a を明示して $A(a)$ と書くことにしよう。そうして $A(a)$ の固有多項式を $\Phi_a(\lambda)$ で書くことにする。このとき

$$\Phi_a(\lambda) = \det(\lambda I - A(a)) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - a\lambda + 4)$$

である。だから固有値は $1, (a \pm \sqrt{a^2 - 16})/2$ である。

- (ii) $\lambda^2 - a\lambda + 4$ が 1 を根に持つのは $a = 5$ のとき。また重根を持つのは $a = \pm 4$ のとき。だから a が $5, \pm 4$ のいずれでもないときには $A(a)$ は異なる 3 つの固有値を持ち、したがって対角化可能である。では $a = 5, \pm 4$ のときはどうか。

行列 A が対角化可能であることと、 A の各固有値についての固有空間の直和が全体と一致することは同値であることに注意する。固有値 λ に属する固有空間を $V(\lambda)$ と表すことにする。

$a = 4$ のとき、 $\Phi_4(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ である。固有空間 $V(2)$ の次元は線形写像 $2I - A(4)$ の核の次元だから

$$2I - A(4) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

より $\dim V(2) = 3 - 2 = 1$ である。よって $A(4)$ は対角化できない。 $a = -4, 5$ についても同様の考察により $A(a)$ が対角化できないことが判るが、詳細は省略する。これですべての a について $A(a)$ の対角化可能性が求まった。

問 3

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx$$

ただし、 n は自然数とし、 $[y]$ は y を超えない最大の整数を表す。

解答. 1 以上の $n \in \mathbb{Z}$ を固定すると、任意の $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}$$

なる $k \in \mathbb{Z}$ が一意にある。このとき $nx - [nx] = nx - k$ である。そこで $M_n = \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx$ とおくと

$$M_n = \sum_{k \geq 0} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx$$

である。いったん n は固定して $F_k = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} (nx - k) dx$ とおこう。部分積分を用いることにより

$$F_k = -(n+1)e^{-\frac{k+1}{n}} + ne^{-\frac{k}{n}}$$

が示せる。 $\zeta = e^{-\frac{1}{n}}$ とおけば $F_k = -(n+1)\zeta^{k+1} + n\zeta^k$ である。したがって

$$M_n = (n - (n+1)\zeta) \sum_{k \geq 0} \zeta^k = \frac{n - (n+1)\zeta}{1 - \zeta}$$

を得る。あとは次のように式変形を行えばよい。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n+1)e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{1/n} - (n+1)}{e^{1/n} - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{-1}e^h - (h^{-1} + 1)}{e^h - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - (1+h)}{h(e^h - 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{e^h - 1} \frac{e^h - (1+h)}{h^2} \end{aligned}$$

そうすると $e^h = 1 + h + h^2/2 + O(h^3)$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1/2$ が結論できる。

問 4

\mathbb{R}^2 で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{xy(xy + 4)}{x^2 + y^2 + 1}$$

の最大値および最小値のそれぞれについて、存在するなら求め、存在しないならそのことを示せ。

解答. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと

$$f(x, y) = \frac{r^4 \sin^2 2\theta + 8r^2 \sin 2\theta}{4(r^2 + 1)}$$

である。さらに $t = \sin 2\theta$ とおけば次のように変形できる。

$$f(x, y) = \frac{r^4 t^2 + 8r^2 t}{4(r^2 + 1)}$$

したがって、右辺の関数を $g(r, t)$ とおいて $0 \leq r, -1 \leq t \leq 1$ における g の最大値と最小値を求めればよい。最大値の方はすぐにわかる。 $t = 1$ としてみると $g(r, 1) = (r^4 + 8r^2)/4(r^2 + 1)$ であり、あきらかに $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r, 1) = \infty$ なので g に最大値はない。

では最小値はどうか。 g を t について平方完成すると

$$g(r, t) = \frac{r^4}{4(r^2 + 1)} \left(\left(t + \frac{4}{r^2} \right) - \frac{16}{r^4} \right)$$

である。 $h(t) = (t + 4/r^2) - 16/r^4$ とおく。 $h(t)$ のグラフは、軸が直線 $t = -4/r^2$ であるような下に凸な放物線である。そこで軸が $-1 \leq t \leq 1$ に入るかどうかで場合分けをして

$$\min_{-1 \leq t \leq 1} h(t) = \begin{cases} h(-4/r^2) = -16/r^4 & (r \geq 2) \\ h(-1) = -8/r^2 + 1 & (0 \leq r \leq 2) \end{cases}$$

を得る。ゆえに

$$\min_{r \geq 0, -1 \leq t \leq 1} g(r, t) = \min \left\{ \min_{r \geq 2} \frac{-4}{r^2 + 1}, \min_{0 \leq r \leq 2} \frac{1}{4} \left(r^2 - 9 + \frac{9}{r^2 + 1} \right) \right\}$$

である。 $k(r) = r^2 - 9 + 9/(r^2 + 1)$ とおいて微分すると $k(r)$ の $0 \leq r \leq 2$ での最小値は $k(\sqrt{2}) = -4$ であることがわかる。あきらかに $\min_{r \geq 2} -4/(r^2 + 1) = -4/5$ だから、求める最小値は -1 である。

■ 平成 28 年度 基礎科目 II

問 1

次の積分が収束するような実数 α の範囲を求めよ。

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

ただし、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$ とする。

解答．与えられた積分を $I(\alpha)$ と略記する。極座標変換を行うと次の形になる。

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= 2 \iint_{0 < y < 1, 0 \leq x} \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\sin \theta} r^{1-2\alpha} \, dr \end{aligned}$$

ここでもし $\alpha = 1$ ならば

$$I(1) \geq 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{dr}{r} = \infty$$

より発散する。そこで $\alpha \neq 1$ と仮定して先に進むと、次のようになる。

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\alpha-2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2-2\alpha} \, d\theta$$

$\alpha > 1$ ならこれは発散する。そこで $\alpha < 1$ と仮定して先へ進むと、次の形に帰着する。

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\alpha-2} \, d\theta \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{2\alpha-2} \cdot \theta^{2\alpha-2} \, d\theta \end{aligned}$$

$\sin \theta / \theta$ は $[0, \pi/2]$ 上の連続関数であり、0 より大きい最小値と最大値を持つ。よって収束には関与しないので、 $\alpha < 1$ のとき $I(\alpha)$ が収束することは $\alpha > 1/2$ と同値であることがわかる。つまり $I(\alpha)$ は、 $\alpha \leq 1/2$ または $1 \leq \alpha$ なら無限大に発散、 $1/2 < \alpha < 1$ なら収束するということが結論できたことになる。

問 2

A と B を複素 3 次正方行列とする。 A の最小多項式は $x^3 - 1$, B の最小多項式は $(x - 1)^3$ とする。このとき

$$AB \neq BA$$

となることを示せ。

解答. 行列 $M \in M(3, \mathbb{C})$ の固有値 λ に属する固有空間を $E(\lambda, M)$ と書くことにする。仮定より、 A の固有値は $x^2 + x + 1$ の根のひとつを ω として、 $1, \omega, \omega^2$ の 3 つである。もしも $AB = BA$ ならば、 $v \in E(\lambda, A)$ に対して

$$ABv = BAv = B(\lambda v) = \lambda(Bv)$$

であるから $Bv \in E(\lambda, A)$ である。つまり B を写像 $B: E(\lambda, A) \rightarrow E(\lambda, A)$ とみなせる。

ここで $e_i \in E(\omega^i, A) \setminus \{0\}$ ($0 \leq i \leq 2$) としよう。 e_i はそれぞれ 1 次元ベクトル空間である $E(\omega^i, A)$ の基底となる。ゆえに $Be_i = \lambda_i e_i$ となる λ_i が存在することになる。つまり e_i は B の固有ベクトルである。 e_i は \mathbb{C}^3 全体を張るので、とくに B は対角化可能となるが、これは B の最小多項式が重根を持つことに矛盾。よって $AB \neq BA$ でなくてはならない。

問 3

複素関数 $f(z)$ は $z = 0$ の近傍で正則な関数で $f(z)e^{f(z)} = z$ をみたすとする。以下の問に答えよ。

- (i) 非負整数 n と十分小さい正数 ε に対して次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1+u}{e^{nu}u^n} du$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとする。

- (ii) $f(z)$ の $z = 0$ におけるべき級数展開を求め、その収束半径を求めよ。

解答.

- (i) 仮定の式 $f(z)e^{f(z)} = z$ の両辺を微分して $(1+f)f'e^f = 1$ を得る。とくに f' は零点を持たない。したがって逆関数定理により f は 0 の十分小さな近傍 U に制限すれば像への同相写像となる。よって $u = f(z)$ と変数変換することができて

$$\begin{aligned} \frac{1+u}{(e^u u)^n} du &= \frac{(1+f(z))f'(z)}{z^n} dz \\ &= \frac{e^{-f(z)}}{z^n} dz \\ &= \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \end{aligned}$$

であることがわかる。したがって Cauchy の積分公式から、十分小さい ε をとればすべての n に対して

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{f^{-1}(C_\varepsilon)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1+u}{e^{nu}u^n} du$$

が成り立つ。

- (ii) べき級数展開すると

$$\begin{aligned} (1+z)e^{-nz} &= (1+z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-n)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-n)^k}{k!} \right) z^k \end{aligned}$$

である。よって $z = 0$ のまわりでの Laurent 展開は

$$\frac{(1+z)e^{-nz}}{z^n} = \frac{1}{z^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-n)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-n)^k}{k!} \right) z^{n-k}$$

であることがわかる。ゆえに留数定理から

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{1+u}{e^{nu}u^n} du = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (-n)^{n-1}/n! & (n \geq 1) \end{cases}$$

が従う。よって f のべき級数展開を $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ とすると $a_n = (-n)^{n-1}/n!$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = e$ だから収束半径は $1/e$ である。

問 4

正則な複素 2 次正方行列のなす群を $GL_2(\mathbb{C})$ とおく。行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G について、以下の問に答えよ。

- (i) 群 G の位数を求めよ。
- (ii) 群 G の中心の位数を求めよ。ただし、 G の中心とは、 G のすべての元と可換な元全体のなす G の部分群のことである。
- (iii) 群 G に含まれる位数 2 の元の個数を求めよ。

解答. I は単位行列とする。群の特定の部分集合 S で生成される部分群を $\langle S \rangle$ で書く。

- (i) 計算により $\langle A \rangle \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $B^2 = I$, $BAB^{-1} = A^{-1}$ がわかる。ゆえに $BA = (BAB)B = A^5B$ だから、 G の元はすべて $A^i B^j$ ($0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 1$) という形をしている。よって $\#G \leq 12$ である。
逆を考察しよう。 $BAB^{-1} = A^{-1}$ より、 $\langle A \rangle \triangleleft G$ である。 A^3 は $\langle A \rangle$ の元で位数が 2 であるような唯一の元なので $BA^3B = A^3$ である。つまり A^3 は G の中心 $Z(G)$ の元である。したがって $\langle A^3, B \rangle = \{I, A^3, B, A^3B\}$ であり G は位数 4 の部分群を持つ。 G が位数 3 の部分群を持つことは A^2 の位数が 3 であることからあきらかなので、 $\#G \geq 12$ を得る。つまり $\#G = 12$ ということである。
- (ii) $Z = A^i B^j$ ($0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 1$) が $Z(G)$ の元だったとする。このとき

$$\begin{aligned} AZA^{-1}Z^{-1} &= A^{i+1}B^jA^{-1}B^{-j}A^{-i} \\ &= A^{i+1}(B^jAB^{-j})^{-1}A^{-i} \\ &= A^{i+1}(A^{1-2j})^{-1}A^{-i} \\ &= A^{2j} \end{aligned}$$

だから $j = 0$ でなくてはならない。また

$$\begin{aligned} BZBZ^{-1} &= BA^iBA^{-1} \\ &= A^{-i}A^{-i} \\ &= A^{-2i} \end{aligned}$$

より $i = 0, 3$ でなくてはならない。よって $Z(G) = \{I, A^3\}$ である。これで $\#Z(G) = 2$ が示せた。

- (iii) 各々の元の共役類を求めて位数の表を作ると次のようになる。

位数	元	個数
1	I	1
2	$B, A^2B, A^4B, A^3, AB, A^3B, A^5B$	7
3	A^2, A^4	2
6	A, A^5	2

よって位数 2 の元の数 は 7 個。

問 5

3次元微分多様体 $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy - z^2 = w\}$ から \mathbb{R}^3 への写像 $f = (f_1, f_2, f_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f(x, y, z, w) = (x + y, z, w)$$

により定める。以下の問に答えよ。

- (i) f の臨界点の集合 C を求めよ。ただし $p \in M$ が f の臨界点であるとは、 p のまわりの M の座標系 (u_1, u_2, u_3) に関する f のヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

が正則でないことである。

- (ii) C が M の部分多様体になることを証明せよ。

解答.

- (i) $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x, y, z, w) = xy - z^2 - w$ により定める。このとき $M = g^{-1}(0)$ であり、 f の微分 $df_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は f の \mathbb{R}^4 への延長のヤコビアン $Jf_p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ の $\text{Ker } Jg_p$ への制限だとみなせる。したがって $p \in M$ に対して

$$\begin{aligned} p \in C &\iff \text{rank } df_p \leq 2 \\ &\iff \dim \text{Ker } df_p \geq 1 \\ &\iff \dim(\text{Ker } Jf_p \cap \text{Ker } Jg_p) \geq 1 \\ &\iff \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} Jg_p \\ Jf_p \end{pmatrix} \geq 1 \\ &\iff \text{rank} \begin{pmatrix} Jg_p \\ Jf_p \end{pmatrix} \leq 3 \\ &\iff \text{rank} \begin{pmatrix} y & x & -2z & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leq 3 \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

だから $C = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy - z^2 = w, x = y\}$ である。

- (ii) $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(x, y, z, w) = x - y$ で定める。任意の点 $p \in h^{-1}(0)$ が正則点であることをいえばよい。計算すると

$$\begin{aligned} \text{rank } dh_p &= 3 - \dim \text{Ker } dh_p \\ &= 3 - \dim \text{Ker} \begin{pmatrix} Jg_p \\ Jh_p \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} Jg_p \\ Jh_p \end{pmatrix} - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。よって 0 は h の正則値であり、示すべきことがいえた。

問 6

$A(z) = (a_{ij}(z))_{1 \leq j, k \leq N}$ を N 次正方行列、 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を単位円板、 m を正の整数とし、以下の (A), (B) を仮定する。

(A) 各 $a_{jk}(z)$ は D 上の正則関数である。

(B) $\det A(z)$ は $z = 0$ に m 位の零点をもつ。

このとき、十分に小さい正数 ε に対して、次式が成り立つことを示せ。

$$m = \operatorname{tr} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z) dz \right)$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとし、 $\operatorname{tr}(X)$ は行列 X のトレースを表す。

解答. 偏角の原理により、次を示せば十分である。

$$\operatorname{tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dz} \right) = \frac{(\det A)'}{\det A}$$

いま A の余因子行列を B とする。つまり B の (i, j) 成分 b_{ij} を

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

により定める。ただし A_{ji} とは A の j 行目と i 列目を飛ばした $(N-1)$ 次正方行列のことである。このとき A^{-1} は B を $\det A$ で割ったものとなる。そうすると $C := A^{-1} \frac{dA}{dz}$ の (i, j) 成分 c_{ij} は

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^N b_{ik} a'_{kj} \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^N (-1)^{i+k} \det A_{ki} a'_{kj} \end{aligned}$$

である。したがって a_i で A の i 列目を表すことにすると

$$\begin{aligned} (\det A) \operatorname{tr} C &= \sum_{i,k} (-1)^{i+k} \det A_{ki} a'_{ki} \\ &= \sum_k (-1)^{1+k} \det A_{k1} a'_{k1} + \cdots + \sum_k (-1)^{N+k} \det A_{kN} a'_{kN} \\ &= \det(a'_1, a_2, \cdots, a_N) + \cdots + \det(a_1, \cdots, a_{N-1}, a'_N) \\ &= (\det A)' \end{aligned}$$

である。

■ 平成 28 年度 専門科目

問 1

有理数係数の既約多項式 $f(x) = x^3 + ax + b$ を考え、 $K \subset \mathbb{C}$ を $f(x)$ の最小分解体とする。 $a > 0$ のとき、 K/\mathbb{Q} の Galois 群が 3 次対称群と同型であることを示せ。

解答. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ より、 f は連続なので $f(\beta_1) = 0$ なる $\beta_1 \in \mathbb{R}$ がある。 $f'(x) = 3x^2 + a > 0$ より f は単調増加なので f の実根は β_1 のみである。そこで f の残りの根を β_2, β_3 とすると $\beta_2 = \overline{\beta_3}$ である。いま $G = \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を根への作用により 3 次対称群 S_3 の部分群とみなす。 G は複素共役をとる写像を含むので、 $\#G$ は偶数でなくてはならない。また f は既約と仮定したので、 G は集合 $\{1, 2, 3\}$ に推移的に作用するはずであり、とくに $\#G$ は 3 の倍数である。よって $\#G$ は 6 の倍数となるが、 $\#S_3 = 6$ なので $G \cong S_3$ となるしかない。

問 2

K を標数が 2 でない代数的閉体とし、 K の元 a に対して、2 変数多項式環 $K[X, Y]$ の剰余環

$$R_a = K[X, Y]/(X^2 - Y^2 - X - Y - a)$$

を考える。以下の問に答えよ。

- (i) $a = 0$ のとき R_a の各極大イデアル \mathfrak{m} に対して $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ を求めよ。また \mathfrak{m} はいつ R_a の単項イデアルとなるか？理由をつけて答えよ。
- (ii) $a \neq 0$ のとき R_a の各極大イデアル \mathfrak{m} に対して $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ を求めよ。また \mathfrak{m} はいつ R_a の単項イデアルとなるか？理由をつけて答えよ。

解答. 式を変形すると $X^2 - Y^2 - X - Y - a = (X + Y)(X - Y - 1) - a$ である。いま K の標数は 2 ではないと仮定したので

$$\begin{aligned} K[S, T] &\rightarrow K[X, Y] \\ S &\mapsto X + Y \\ T &\mapsto X - Y - 1 \end{aligned}$$

という K 準同型を考えると、これは

$$\begin{aligned} K[X, Y] &\rightarrow K[S, T] \\ X &\mapsto (S + T + 1)/2 \\ Y &\mapsto (S - T - 1)/2 \end{aligned}$$

を逆写像とする同型である。これにより R_a は

$$U_a := K[S, T]/(ST - a)$$

に対応する。 U_a の極大イデアルを表すのに、記号の濫用だが R_a の極大イデアルと同じ記号 \mathfrak{m} を使うことにする。いま U_a の極大イデアル \mathfrak{m} は、 $E := K[S, T]$ の極大イデアル \mathfrak{n} であって $(ST - a)$ を含むものに対応している。Hilbert の零点定理により、 E/\mathfrak{n} は K の有限次拡大である。 K は代数閉という仮定があったので、 $E/\mathfrak{n} \cong K$ である。この同型による S, T の像をそれぞれ $\beta, \gamma \in K$ とする。すると $(S - \beta, T - \gamma) \subset \mathfrak{n}$ であるが $(S - \beta, T - \gamma)$ は極大イデアルなので $(S - \beta, T - \gamma) = \mathfrak{n}$ である。まとめると、 \mathfrak{n} は $\beta\gamma = a$ なる β, γ によって $\mathfrak{n} = (S - \beta, T - \gamma)$ と表されることがわかった。このことを踏まえて考察をしていく。

- (i) $a = 0$ のとき $\beta\gamma = 0$ なので $\beta = 0$ または $\gamma = 0$ である。どちらでも同じことなので $\beta = 0$ とする。 $\gamma = 0$ である場合には

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 &= ((S, T)/ST)/((S^2, ST, T^2)/ST) \\ &\cong (S, T)/(S^2, ST, T^2) \\ &\cong K^2 \end{aligned}$$

だから $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$ である。もし \mathfrak{m} が U_0 の単項イデアルなら $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \otimes_{U_0} K \cong K$ となるはずだから、 \mathfrak{m} は単項イデアルではない。

$\gamma \neq 0$ のとき。このときには

$$\begin{aligned}(T - \gamma)U_0 &= (T - \gamma, ST)/ST \\ &= (S(T - \gamma), T - \gamma, ST)/ST \\ &= (S, T - \gamma)/ST \\ &= \mathfrak{m}\end{aligned}$$

だから \mathfrak{m} は単項イデアルである。とくに $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ となる。

以上の結果をまとめると

$$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \begin{cases} 1 & (\beta, \gamma) \neq (0, 0) \text{ のとき。このとき } \mathfrak{m} \text{ は単項イデアル} \\ 2 & (\beta, \gamma) = (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

である。 U_0 から R_0 に話を戻すと

$$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \begin{cases} 1 & (b, c) \neq (1/2, 1/2) \text{ のとき。このとき } \mathfrak{m} \text{ は単項イデアル} \\ 2 & (b, c) = (1/2, 1/2) \text{ のとき} \end{cases}$$

がわかったことになる。ただし、 b, c は $\mathfrak{m} = (X - b, Y - c)/(X^2 - Y^2 - X - Y)$ となるような $b, c \in K$ である。

(ii) 再び U_a に話を持っていく。 $a \neq 0$ のとき $\beta \neq 0$ かつ $\gamma \neq 0$ である。このとき

$$\begin{aligned}(S - \beta)U_0 &= (S - \beta, ST - a)/(ST - a) \\ &= (T(S - \beta), S - \beta, ST - a)/(ST - a) \\ &= (\beta(T - \gamma), S - \beta, ST - a)/(ST - a) \\ &= (T - \gamma, S - \beta)/(ST - a) \\ &= \mathfrak{m}\end{aligned}$$

だから \mathfrak{m} は単項イデアルであり、とくに $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ がわかる。

問 3

位数が奇素数 p である有限体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考え、

$$G = GL_2(\mathbb{F}_p) = \{X \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid \det X \neq 0\}$$

とおく。ただし、 $M_2(\mathbb{F}_p)$ は \mathbb{F}_p の元を成分とする 2 次正方行列全体の集合を表す。以下の問に答えよ。

- (i) G の元で対角行列と共役でないものの個数を求めよ。
- (ii) G の 2 つの元 X, Y の最小多項式 $\phi_X(t), \phi_Y(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ が一致すれば、 X と Y は互いに共役であることを示せ。
- (iii) 対角行列を含まない G の共役類の個数を求めよ。

解答. 以下単位行列を E で表すことにする。

- (i) まず、行列の正則性と列ベクトルの一次独立性は同値なので $\#G = (p^2 - 1)(p^2 - p) = p(p - 1)^2(p + 1)$ である。 G の対角行列の全体を Λ とする。 $T \in \Lambda$ は対角成分を入れ替えたものと共役であるので、 Λ の共役類は定数行列と、対角成分の入れ替えを無視した定数でない対角行列で代表される。 G の元のうち定数行列全体を Λ_0 で、定数でない対角行列の全体を Λ_1 であらわすことにする。 G の G 自身への共役による作用を考えると、 G の元のうち対角行列と共役なもの個数は

$$\#\Lambda_0 + \frac{1}{2} \sum_{T \in \Lambda_1} \# \text{Orbit}(T)$$

で求まる。 $\# \text{Orbit}(T) = \#G / \# \text{Stab}(T)$ なので、群 $\text{Stab}(T)$ を決定すればよい。いま $T \in \Lambda_1$ と $A \in G$ をとり

$$T = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく。このとき計算すると

$$\det A(ATA^{-1} - T) = (\beta - \gamma) \begin{pmatrix} bc & -ab \\ cd & -bc \end{pmatrix}$$

なので $A \in \text{Stab}(T)$ であるということは $bc = ab = cd = 0$ と同値である。 $ad - bc \neq 0$ と仮定したので、これはつまり $b = c = 0$ を意味する。よって T に依存せずに $\# \text{Stab}(T) = \#\Lambda = (p - 1)^2$ である。よって G の元のうち対角行列と共役なもの個数は

$$(p - 1) + \frac{1}{2}(p - 1)(p - 2)p(p + 1) = \frac{(p - 1)^2(p^2 - 2)}{2}$$

である。ゆえに求めるべき、対角行列と共役でない元の個数は

$$\#G - \frac{(p - 1)^2(p^2 - 2)}{2} = \frac{1}{2}(p - 1)^2(p^2 + 2p + 2)$$

である。

- (ii) X と Y の最小多項式が一致していると仮定し、 $\phi = \phi_X = \phi_Y$ とおく。 ϕ がどういう式であるかにより場合分けをする。 $V = \mathbb{F}_p^2$ とおく。

まず $\phi(t) = t - \lambda$ と表されるとき。このとき X と Y は定数行列 λE に一致するので、とくに共役となる。

次に $\phi(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) と表されるとき。このとき X と Y は \mathbb{F}_p 上対角化可能であり、同じ対角行列と共役である。よって互いに共役となる。

次に $\phi(t) = (t - \lambda)^2$ という形するとき。このとき $\dim \text{Ker}(X - \lambda E) = 1$ かつ $\dim \text{Ker}(X - \lambda E)^2 = 2$ であるので、 $v \in \text{Ker}(X - \lambda E) \setminus \{0\}$ と $w \in \text{Ker}(X - \lambda E)^2 \setminus \text{Ker}(X - \lambda E)$ をとると $\{v, w\}$ は V の基底となる。このとき

$$\begin{aligned} Xv &= \lambda v \\ Xw &= cv + dw \end{aligned}$$

なる $c, d \in \mathbb{F}_p$ がある。 $c \neq 0$ なので w を $c^{-1}w$ で置き換えて $c = 1$ としてよい。このとき

$$\begin{aligned} (X - dE)w &= v \\ (X - dE)v &= (\lambda - d)v \end{aligned}$$

より $\det(X - dE) = 0$ だから $d = \lambda$ である。したがって

$$\begin{aligned} Xv &= \lambda v \\ Xw &= v + \lambda w \end{aligned}$$

だから X は \mathbb{F}_p 係数の正則行列で共役をとることにより Jordan 標準形に変形できる。これは Y についても同様なので X と Y は共役。

最後に ϕ が $\mathbb{F}_p[t]$ の 2 次既約多項式であった場合。 X が定める $R := \mathbb{F}_p[t]$ の V への作用 $R \times V \rightarrow V$ は作用 $\varphi_A: R/(\phi) \times V \rightarrow V$ を誘導する。 ϕ は既約で R は PID なので、 $(\phi) \subset R$ は極大イデアルである。したがって $R/(\phi)$ は位数 p^2 の有限体 $F := \mathbb{F}_{p^2}$ と同型である。これにより V を F ベクトル空間と見なす。 $\#V = \#F$ なので次元は 1 である。よって $v \in V \setminus \{0\}$ を固定したとき、写像

$$\begin{aligned} F \times \{v\} &\xrightarrow{\varphi_A} V \\ (f, v) &\mapsto f \cdot v = f(A)v \end{aligned}$$

は F 同型である。以上の議論は Y についても同様に適用できて、 $\varphi_B: F \times \{v\} \rightarrow V$ も φ_A と同様に F 同型となる。よって次の図式

$$\begin{array}{ccc} F \times \{v\} & \xrightarrow{\varphi_A} & V \\ & \searrow \varphi_B & \downarrow T \\ & & V \end{array}$$

を可換にするような F 同型 T が存在する。 F 同型は \mathbb{F}_p 同型でもあるので、 T を表現する正則行列 $P \in G$ がある。このとき

$$\forall f \in F \quad Pf(A)v = f(B)v$$

だから、とくに

$$\begin{aligned} PAv &= Bv \\ PA^2v &= B^2v \\ PA^3v &= B^3v \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
B^2v &= PA^2v \\
&= PAP^{-1}PAv \\
&= PAP^{-1}Bv \\
B^3v &= PA^3v \\
&= PAP^{-1}PA^2v \\
&= PAP^{-1}B^2v
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
(PAP^{-1} - B)Bv &= 0 \\
(PAP^{-1} - B)B^2v &= 0
\end{aligned}$$

である。いま B の最小多項式は 2 次式なので、 $B^2v = aBv + bv$ なる $a \in \mathbb{F}_p$ と $b \in \mathbb{F}_p^\times$ がある。よって $(PAP^{-1} - B)v = 0$ である。 ϕ が既約という仮定より B は固有ベクトルを持たないので、 $\{v, Bv\}$ は V の \mathbb{F}_p 基底となる。よって $PAP^{-1} = B$ を得る。これですべての場合を尽くせたので、示すべきことがいえた。

- (iii) 共役ならば最小多項式が同じになることはあきらかなので、(ii) により共役であることと最小多項式が一致することの同値性がいえた。 G の共役類の全体を $C(G)$ とおくと、最小多項式を対応させる写像

$$\Phi: C(G) \rightarrow \{t^2 + at + b \mid b \neq 0\} \cup \{t + c \mid c \neq 0\}$$

が単射であることがわかったことになる。逆に

$$t^2 + at + b = \det \left(tE - \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix} \right)$$

であるから、 Φ は全射でもある。対角行列を含まない G の共役類は、 Φ によって $(t - \lambda)^2$ という形の式か 2 次既約多項式に対応するので、その個数は

$$(p-1) + \left(p^2 - p - \frac{(p-1)(p-2)}{2} \right) = \frac{(p+2)(p-1)}{2}$$

である。

■ 平成 27 年度 基礎科目 I

問 1

次の広義積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{y^2 e^{-xy}}{x^2 + y^2} dx dy$$

ここで、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq x\}$ とする。

解答. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと $dx dy = r dr d\theta$ であって

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^2 e^{-xy}}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^\infty r \sin^2 \theta e^{-r^2 \sin \theta \cos \theta} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 \theta \left(\int_0^\infty e^{-s \sin \theta \cos \theta} ds \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{t} \\ &= \frac{\log 2}{4} \end{aligned}$$

問 2

\mathbb{R}^2 で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{4x^2 + (y+2)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

解答. $f \geq 0$ であり $f(0, -2) = 0$ なので $\min f = 0$ はあきらか。最大値を求めよう。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと

$$f(x, y) = 4 + \frac{-3r^2 \sin^2 \theta + 4r \sin \theta}{r^2 + 1}$$

である。 $t = \sin \theta$ とおく。このとき $-1 \leq t \leq 1$ であって

$$f - 4 = \frac{3r^2}{r^2 + 1} \left(- \left(t - \frac{2}{3r} \right)^2 + \frac{4}{9r^2} \right)$$

である。したがって

$$g = - \left(t - \frac{2}{3r} \right)^2 + \frac{4}{9r^2}$$

としたとき

$$\max(f - 4) = \max_{r \geq 0} \frac{3r^2}{r^2 + 1} \left(\max_{-1 \leq t \leq 1} g(r, t) \right)$$

である。いま

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} g(r, t) = \begin{cases} g(2/3r) = 4/(9r^2) & (2/3 \leq r) \\ g(1) = (4 - 3r)/3r & (0 \leq r \leq 2/3) \end{cases}$$

だから

$$\max(f - 4) = \max \left\{ \max_{r \geq 2/3} \frac{4}{3(r^2 + 1)}, \max_{0 \leq r \leq 2/3} \frac{r(4 - 3r)}{r^2 + 1} \right\}$$

が判る。あきらかに

$$\max_{r \geq 2/3} \frac{4}{3(r^2 + 1)} = \frac{12}{13}$$

である。また $h(r) = r(4 - 3r)/(r^2 + 1)$ とおくと $h'(r) = -4(r - 1/2)(r + 2)/(r^2 + 1)^2$ だから

$$\max_{0 \leq r \leq 2/3} h(r) = h(1/2) = 1$$

である。すなわち $\max f = 5$ である。 f は連続関数なのでとりうる値の範囲は区間 $[0, 5]$ ということになる。

問 3

a, b を複素数とする。3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ b & 2 & 0 \\ -b & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

- (i) 行列 A の固有値を求めよ。
- (ii) 行列 A と行列 B が相似となるような複素数 a, b をすべて求めよ。ただし、 A と B が相似であるとは、複素正則行列 P で $A = P^{-1}AP$ をみたすものが存在するときをいう。

解答.

- (i) 固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は $(\lambda - 2)^3$ なので、固有値は 2 のみ。
- (ii) A の Jordan 標準形が B になるのはいつかを求めればよい。それは $\text{rank}(2 - A) = 1$ と同値である。計算すると

$$\text{rank}(2 - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから A と B が相似になるのは $a = 0, b \neq 0$ または $a \neq 0, b = 0$ のとき。

問 4

a, b, c, d を複素数とする。次の行列の階数を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 & -6 & a \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$

解答. 問題の行列を A とおく。行基本変形で変形していくと

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 & -6 & a \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & a-2d \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 & b+d \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 & c+d \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & a-2d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & a+b-d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & a+c-3d \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -a+3d \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & a-2d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & a+b-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b+c-2d \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -a+3d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから $-b+c-2d \neq 0$ のとき $\text{rank } A = 4$ であり、 $-b+c-2d = 0$ のとき $\text{rank } A = 3$ である。

■ 平成 27 年度 基礎科目 II

問 1

$f(x), \phi(x)$ は区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とし、さらに $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \phi(x+1) \quad (x \geq 0)$$

$$\int_0^1 \phi(x) dx = 1$$

をみたすとする。このとき、任意の実数 $a > 0$ に対し

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) \phi(\lambda x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

解答. 示すべきことは

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) (\phi(\lambda x) - 1) dx = 0$$

なので $\psi(x) = \phi(x) - 1$ とおく。 $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする。

$$I_\lambda = \int_0^a f(x) \psi(\lambda x) dx$$

とおく。すると

$$I_\lambda = \frac{1}{\lambda} \int_0^{a\lambda} f(y/\lambda) \psi(y) dy$$

である。 $a\lambda = n + b$ なる $n \in \mathbb{Z}$ と $0 \leq b < 1$ をとると

$$I_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(y/\lambda) \psi(y) dy + \frac{1}{\lambda} \int_n^{n+b} f(y/\lambda) \psi(y) dy$$

となるが、ここで $M = \int_0^1 |\psi(x)| dx$ とすると

$$\int_n^{n+b} |f(y/\lambda) \psi(y)| dy \leq \sup_{0 \leq x \leq a} |f(x)| M$$

だから $\lambda \rightarrow \infty$ のとき第 2 項は無視してよい。よって

$$I_\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(y/\lambda) \psi(y) dy + O(1/\lambda)$$

であるが、

$$0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/\lambda) \int_k^{k+1} \psi(y) dy$$

であることから

$$|I_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |f(y/\lambda) - f(k/\lambda)| |\psi(y)| dy + O(1/\lambda)$$

である。ここで $0 \leq y \leq n$ のとき $0 \leq y/\lambda \leq a$ であることに注意する。 f は $[0, a]$ 上一様連続なので

$$|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

なる $\delta > 0$ がある。そこで $\lambda > 1/\delta$ とすると

$$\begin{aligned} |I_\lambda| &\leq \frac{n\varepsilon}{\lambda} M + O(1/\lambda) \\ &\leq aM\varepsilon + O(1/\lambda) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\lambda \rightarrow \infty$ として $\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} |I_\lambda| \leq a\varepsilon M$ を得る。 $\varepsilon > 0$ は任意だったので $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I_\lambda = 0$ である。

問 2

n を正の整数とし、 A を n 次実正方行列で、交代行列であるとする。すなわち A の転置行列 tA が $-A$ に一致するとする。このとき、以下の間に答えよ。

- (i) 任意の列ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|(E - A)\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{u}\|$ が成立することを示せ。ただし E は単位行列であり、 \mathbf{u} はユークリッドノルム $\sqrt{{}^t\mathbf{u}\mathbf{u}}$ である。
- (ii) $E - A$ は正則行列であり、 $(E + A)(E - A)^{-1}$ は直行行列となることを示せ。

解答.

- (i) A は実行列と仮定したので A の随伴行列は tA に等しい。よって

$$\begin{aligned}
 \langle (E - A)\mathbf{u}, (E - A)\mathbf{u} \rangle &= \langle \mathbf{u} - A\mathbf{u}, \mathbf{u} - A\mathbf{u} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle - \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle {}^tA\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle \\
 &\geq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle
 \end{aligned}$$

である。

- (ii) (i) より、 $\mathbf{u} \neq 0$ ならば $(E - A)\mathbf{u} \neq 0$ なので $E - A$ は正則。 $B = (E - A)^{-1}$ とおく。このとき $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}
 \langle (E + A)B\mathbf{u}, (E + A)B\mathbf{v} \rangle &= \langle {}^t(E + A)(E + A)B\mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle (E - A)(E + A)B\mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle (E + A)(E - A)B\mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle (E + A)\mathbf{u}, B\mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, {}^t(E + A)B\mathbf{v} \rangle \\
 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle
 \end{aligned}$$

であるから $(E + A)B$ は等長、つまり直行行列である。

問 3

a を正の実数とすると、次の広義積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

解答. $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2 + a^2)^2}$$

とおく。求める積分は

$$I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

である。 $R > 0$ に対して、反時計まわりに半径 R の半円 $\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ を描くような積分路を C_R とかく。 $S_R = [-R, R] \cup C_R$ とおこう。このとき留数定理から

$$\forall R > 0 \quad \int_{S_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai)$$

が成り立つ。

$R \rightarrow \infty$ のときの C_R 上での積分を評価しよう。 $z = Re^{i\theta}$ において計算すると

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |f(z)| dz &\leq \frac{R^2}{(R^2 - a^2)^2} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &\leq \frac{R^2 \pi}{(R^2 - a^2)^2} \end{aligned}$$

である。したがって $R \rightarrow \infty$ のとき左辺は収束して 0 になる。これにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ai)$$

が判ったことになる。

$b = ai$ とおく。 f の b での留数を求めたい。

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+b)^2}$$

とすると $g(z)(z-b)^{-2} = f(z)$ である。 g は $z = b$ で正則なので、 g の $z = b$ の周りでの Taylor 展開の一次の係数を求めればよい。つまり

$$\operatorname{Res}(f, ai) = g'(b)$$

である。計算すると

$$g'(z) = \frac{e^{iz}((1+iz)(z+b) - 2z)}{(z+b)^3}$$

だから代入して

$$g'(b) = \frac{ie^{ib}}{4b} = \frac{e^{-a}}{4a}$$

を得る。よって

$$I = \operatorname{Im} \left(2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{4a} \right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$$

である。

問 4

| 1 以上 3500 以下の整数 x のうち、 $x^3 + 3x$ が 3500 で割り切れるものの個数を求めよ。

解答. $3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$ なので、中国剰余定理より $\mathbb{Z}/3500\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ である。いま $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ で x に値を代入することにより調べると $x^3 + 3x = 0 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \iff x = 0, \pm 1$ がわかる。

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ で考えると $x^3 + 3x = x(x^2 + 3) = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$ であり、 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ は整域だから $x^3 + 3x = 0 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \iff x = 0, \pm 2$ が判る。

$\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$ で考える。 $x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$ であるが、 $x^2 + 3$ は決して 5 の倍数にならないので $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$ において常に単元である。よって $x^3 + 3x = 0 \in \mathbb{Z}/125\mathbb{Z} \iff x = 0$ が判る。

以上の議論により求める x の個数は $3 \times 3 \times 1 = 9$ 個である。

問 5

2次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の関数

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

の臨界点をすべて求め、それらが非退化かどうかを答えよ。

ただし、 $p \in S^2$ が f の臨界点であるとは、 S^2 の p のまわりの局所座標 (u, v) に関して

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$$

となることである。また、 f の臨界点 p は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(p) \end{pmatrix}$$

が正則行列であるとき非退化であるという。なおこれらの定義は (u, v) のとり方によらない。

解答. まず f の臨界点を求めよう。 $P = (x, y, z) \in S^2$ をとる。 \tilde{f} を f の \mathbb{R}^3 への延長とし、写像 $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ で定める。このとき

$$\begin{aligned} p \text{ が } f \text{ の臨界点} &\iff \dim \operatorname{Ker} df_p = 2 \\ &\iff \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ dg_p \end{pmatrix} = 2 \\ &\iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ dg_p \end{pmatrix} = 1 \\ &\iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 1 \\ &\iff x+y+z=0 \text{ または } x=y=z \end{aligned}$$

である。ゆえに f の臨界点は $C = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x+y+z=0\}$ の点と、

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad Q = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

である。 f の非退化な臨界点の集合は、 $C \cup \{P\} \cup \{Q\}$ の中で孤立点でなくてはならないはずなので、 C の点はすべて非退化ではない。

北極からの立体射影

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) = (s, t)$$

を考える。 φ の逆写像は $K = (1+s^2+t^2)/2$ とおけば

$$\varphi^{-1}(s, t) = \left(\frac{s}{K}, \frac{t}{K}, \frac{K-1}{K} \right)$$

とかける。よって $f = ((x+y+z)^2 - 1)/2$ により $T = s+t-1$ とおくと

$$h = f \circ \varphi^{-1}(s, t) = \frac{(2K+T)T}{2K^2}$$

である。したがって面倒極まる計算を実行すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{(K - sT)(K - T)}{K^3} \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{(K - tT)(K - T)}{K^3} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} &= \frac{K^2(3s - t) + KT(t - s - 4s^2 - 1) + 3sT^2}{K^4} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= \frac{K^2(3t - s) + KT(s - t - 4t^2 - 1) + 3tT^2}{K^4} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} &= \frac{-(s + t + 1)K^2 + 2(s + t + st)KT - 3sT^2}{K^4}
\end{aligned}$$

がわかる。ここで

$$\begin{aligned}
\varphi(P) &= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \\
\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \\
K(P) &= \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{2} \\
K(P)^2 &= \frac{3(2 + \sqrt{3})}{2}
\end{aligned}$$

を代入して忍耐強く計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(\varphi(P)) &= \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\varphi(P)) = \frac{-7 - 3\sqrt{3}}{2K(P)^4} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(\varphi(P)) &= 0
\end{aligned}$$

を得る。よって P での Hessian は正則なので P は非退化。 $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}$ や $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}$ は \mathbb{Q} 係数の有理式なので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(\varphi(Q)) &= \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(\varphi(Q)) = \frac{-7 + 3\sqrt{3}}{2K(Q)^4} \\
\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(\varphi(Q)) &= 0
\end{aligned}$$

であり、 Q も非退化。

問 6

a は実数で $0 < a < \frac{1}{4}$ とする。このとき、区間 $(0, \infty)$ における常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x^2} y = 0$$

の任意の解 $y(x)$ は $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$ をみたすことを示せ。

解答. $y = x^\beta$ とおくと

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\beta(\beta-1)}{x^2} y$$

である。ゆえに $\beta^2 - \beta + a = 0$ なる β に対して $y = x^\beta$ は特殊解である。 $\beta^2 - \beta + a = 0$ の解は

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a} \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}\end{aligned}$$

である。 $0 < a < 1/4$ という仮定より β_1, β_2 はともに正の実数である。係数である a/x^2 は区間 $(0, \infty)$ 上で連続なので、常微分方程式の初期値問題の解の存在と一意性定理が適用できて、与えられた微分方程式の解空間は 2 次元ベクトル空間である。よって x^{β_1} と x^{β_2} は一次独立なので任意の解 y は x^{β_1} と x^{β_2} の線形結合で書ける。よって $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$ である。

問 7

A を実正平方行列とする。このとき、ある正の整数 k が存在して $\operatorname{tr}(A^k) \geq 0$ となることを示せ。ただし tr は行列のトレースを表す。

解答. 行列 A のサイズを n とする。 A の固有多項式の根を重複を込めて

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \overline{\lambda_{r+1}}, \dots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda_{r+s}} \quad (r + 2s = n)$$

とおく。するとトレースは固有値の和なので

$$\operatorname{tr} A^k = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k + 2 \sum_{i=1}^s \operatorname{Re} \lambda_{r+i}^k$$

と書ける。ここで λ_i の偏角を考える。 $\arg \lambda_i = 2\pi\alpha_i$ ($0 \leq \alpha_i < 1$) とおく。このとき Dirichlet の近似定理から

$$\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad \forall 1 \leq i \leq s+r \quad \exists m_i \in \mathbb{Z} \quad |k\alpha_i - m_i| < \frac{1}{4}$$

が成り立つ。この k について $\forall i \quad \arg \lambda_i^k \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ だから $\operatorname{tr} A^k \geq 0$ が成り立つ。

■ 平成 27 年度 専門科目

問 1

G は非可換群で次の条件 (*) を満たすとする。

(*) $N_1, N_2 \subset G$ が相異なる自明でない (つまり 1 とも G とも異なる) 正規部分群なら、 $N_1 \not\subset N_2$ である。
このとき、以下の問に答えよ。

- (i) N_1, N_2 が相異なる G の自明でない正規部分群なら、 $G = N_1 \times N_2$ であることを証明せよ。
- (ii) G の自明でない正規部分群の数は高々 2 個であることを証明せよ。

解答.

- (i) 仮定より $N_1 \cap N_2 \subsetneq N_i \subset G$ かつ $N_1 \cap N_2 \triangleleft G$ なので $N_1 \cap N_2 = 1$ である。また $1 \subsetneq N_i \subsetneq N_1 N_2$ かつ $N_1 N_2 \triangleleft G$ より $N_1 N_2 = G$ である。したがって交換子が $[N_1, N_2] \subset N_1 \cap N_2 = 1$ より自明になるので、 N_1 と N_2 の元は互いに可換。よって積をとる写像 $N_1 \times N_2 \rightarrow G$ は準同型でかつ全単射なので同型である。
- (ii) ハイリホーによる。相異なる 3 つの自明でない正規部分群 N_1, N_2, N_3 が存在したとしよう。相異なるという仮定から、(i) により $N_i N_j = G$ ($i \neq j$) であり、 $i \neq j$ である限り N_i と N_j の元は互いに可換である。したがって $G = N_1 N_2$ と N_3 の元は可換なので、とくに N_3 は Abel 群である。同様にして各 N_i が Abel 群であることが判る。よってとくに G は Abel 群であるが、これは G が非可換群であるとした仮定に反する。

問 2

X, Y, T を変数とし、 $A = \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - 6X^2)$, $B = \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 6)$ とおく。また、 A における X, Y の剰余類を x, y , B における X, T の剰余類を x', t とする。 A のイデアル P_1, P_2 と B のイデアル Q_1 を

$$P_1 = xA + yA + 5A, P_2 = (x - y)A + 5A, Q_1 = x'B + (t + 1)B$$

と定めるとき、以下の間に答えよ。

- (i) 単射な環準同型 $\phi: A \rightarrow B$ で $\phi(x) = x'$, $\phi(y) = x't$ であるものが存在することを証明せよ。
- (ii) P_1, P_2 は A の素イデアルで $P_2 \subsetneq P_1$ であることを証明せよ。
- (iii) (i) により A を B の部分環とみなすとき、 Q_1 は B の素イデアルで $Q_1 \cap A = P_1$ であることを証明せよ。
- (iv) B の素イデアル Q_2 で $Q_2 \subset Q_1$, $Q_2 \cap A = P_2$ となるものは存在しないことを証明せよ。

解答.

- (i) $\tilde{\phi}: \mathbb{Z}[X, Y] \rightarrow B$ を $\tilde{\phi}(X) = x'$, $\tilde{\phi}(Y) = x't$ で定める。このときあきらかに $(Y^2 - 6X^2) \subset \text{Ker } \tilde{\phi}$ である。逆に $f \in \text{Ker } \tilde{\phi}$ とする。このとき

$$f(X, Y) = f_0(X) + f_1(X)Y + g(X, Y)(Y^2 - 6X^2)$$

なる $f_0, f_1 \in \mathbb{Z}[X]$ と $g \in \mathbb{Z}[X, T]$ がある。よって

$$f_0(X) + f_1(X, T)XT \in (T^2 - 6)$$

であるが、 T についての次数の考察から $f_0 = f_1 = 0$ でなくてはならない。 $f \in \text{Ker } \tilde{\phi}$ は任意だったから $\text{Ker } \tilde{\phi} = (Y^2 - 6X^2)$ である。したがってそのような単射 ϕ は存在する。

- (ii) 商環を計算すると

$$\begin{aligned} A/P_1 &\cong \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - 6X^2, X, Y, 5) \\ &\cong \mathbb{F}_5 \\ A/P_2 &\cong \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - 6X^2, X - Y, 5) \\ &\cong \mathbb{F}_5[X] \end{aligned}$$

であり、それぞれ整域なので P_1 と P_2 は素イデアル。 $P_2 \subset P_1$ はあきらかであろう。また商環が異なるので $P_1 \neq P_2$ である。

- (iii) やはり商環の計算により示す。

$$\begin{aligned} B/Q_1 &\cong \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 6, X, T + 1) \\ &\cong \mathbb{F}_5 \end{aligned}$$

より \mathbb{F}_5 は整域なので Q_1 は素イデアルである。また

$$\begin{aligned} B/P_1B &\cong \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 6, X, XT, 5) \\ &\cong \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 1, X, 5) \\ &\cong \mathbb{F}_5[T]/(T - 1)(T + 1) \\ &\cong \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5 \end{aligned}$$

により $P_1B = (x', t+1)(x', t-1)$ がわかる。よって $P_1B \subset Q_1$ であり、とくに $P_1 \subset Q_1 \cap A$ である。
 $Q_1 \cap A$ は素イデアルで、 P_1 は極大イデアルなので $P_1 = Q_1 \cap A$ でなくてははいけない。

(iv) ハイリホーによる。そのような Q_2 が存在したとする。

$$\begin{aligned} B/P_2B &\cong \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 6, 5, X - XT) \\ &\cong \mathbb{F}_5[X, T]/(T^2 - 1, 5, X(1 - T)) \\ &\cong \mathbb{F}_5[X, T]/(T - 1)(T + 1, X) \\ &\cong \mathbb{F}_5[X] \times \mathbb{F}_5 \end{aligned}$$

により $P_2B = (t - 1)(t + 1, x')$ である。 Q_2 は素イデアルと仮定したことから、 $P_2B \subset Q_2$ なので $(t - 1) \subset Q_2$ あるいは $Q_1 = (t + 1, x') \subset Q_2$ でなくてははいけない。 $P_1 \neq P_2$ なので、 $(t - 1) \subset Q_2$ ということになる。しかしこのとき

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1 + Q_2 \\ &\supset (t - 1, t + 1, x') \\ &\supset B \end{aligned}$$

となり矛盾。よって示すべきことがいえた。

問 3

$\mathbb{C}(t)$ を \mathbb{C} 上の 1 変数有理関数体とする。 a を複素数とし、 $s = t^3 + 3t^2 + at \in \mathbb{C}(t)$ とおく。 \mathbb{C} 上 s で生成された $\mathbb{C}(t)$ の部分体を $\mathbb{C}(s)$ とするとき、以下の問に答えよ。

- (i) 拡大次数 $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)]$ を求めよ。
- (ii) $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(s)$ がガロア拡大となる複素数 a をすべて求めよ。

解答.

- (i) t は $\mathbb{C}(s)$ 係数の多項式

$$F := X^3 + 3X^2 + aX - (t^3 + 3t^2 + at)$$

の根である。よって $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] \leq 3$ である。

まず $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] \geq 2$ を示そう。ハイリホーによる。仮に $t \in \mathbb{C}(s)$ だったとする。 s は \mathbb{C} 上超越的なので $\mathbb{C}[s]$ は PID であり、とくに整閉である。よって t は $\mathbb{C}[s]$ 上整なので $t \in \mathbb{C}[s]$ である。しかし $s \in \mathbb{C}[t]$ は 3 次式なのでこれは矛盾。よって $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] \geq 2$ である。

次に $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] \geq 3$ を示そう。ハイリホーによる。仮に $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] = 2$ だったとしよう。 t の $\mathbb{C}(s)$ 上の共役を $\{t, \bar{t}\}$ とする。2 次拡大は正規拡大なので $\bar{t} \in \mathbb{C}(t)$ であるが、 \bar{t} は $\mathbb{C}[t]$ 上整なので $\bar{t} \in \mathbb{C}[t]$ である。仮定より F は $\mathbb{C}(s)$ 係数の多項式として可約な 3 次式なので 1 次式を因数として含む。よって F の根 u であって $u \in \mathbb{C}(s)$ なるものがある。むろん $\mathbb{C}[s]$ の整閉性により実際には $u \in \mathbb{C}[s]$ である。このとき $\mathbb{C}[t]$ において

$$ut\bar{t} = t^3 + 3t^2 + at$$

だから $u\bar{t} = t^2 + 3t + a$ であり、右辺の次数が 2 なので $u \in \mathbb{C}$ である。よって \bar{t} は 2 次式ということになるが、これは $t + \bar{t} \in \mathbb{C}[s]$ に矛盾。以上により $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)] = 3$ が結論される。

- (ii) $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(s)$ が Galois 拡大であるという命題を (P) であらわすことにする。(P) は次と同値である。

(P1) $\mathbb{C}(s)$ 係数の多項式 F のすべての根は $\mathbb{C}(t)$ に含まれる。

多項式の根が $\mathbb{C}(t)$ に入ることと、 $\mathbb{C}(t)$ で因数分解できることは同じなので (P1) は次と同値。

(P2) ある $f, g, h \in \mathbb{C}(t)$ が存在して $F(X) = (X - f)(X - g)(X - h)$ が成り立つ。

F は $\mathbb{C}[t]$ 係数のモニック多項式であり、かつ $\mathbb{C}[t]$ は整閉なので $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$ としてよい。つまり (P2) は次と同値。

(P3) ある $f, g, h \in \mathbb{C}[t]$ が存在して

$$\begin{aligned} f + g + h &= -3 \\ fg + gh + hf &= a \\ fgh &= t(t - \beta)(t - \gamma) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし β, γ は $t^2 + 3t + a = (t - \beta)(t - \gamma)$ なる \mathbb{C} の元とする。

$f + g + h$ が定数で fgh が 3 次式という条件より、 $\deg f = \deg g = \deg h = 1$ でなくてはならない。 f, g, h を適当に並び替えることにより、ある $b, c, d \in \mathbb{C}$ が存在して $f(t) = bt$, $g(t) = c(t - \beta)$, $h(t) = d(t - \gamma)$ と表せるとしてよい。このとき計算すると

$$\begin{aligned} f + g + h + 3 &= (b + c + d)t - c\beta - d\gamma + 3 \\ fg + gh + hf - a &= (bc + cd + db)t^2 + (-bc\beta + 3cd - bd\gamma)t + (cd - 1)a \\ fgh &= bcdt(t - \beta)(t - \gamma) \end{aligned}$$

である。よって b, c, d は次を満たさなくてはならない。

$$\begin{aligned} b + c + d &= 0 \\ bc + cd + db &= 0 \\ bcd &= 1 \\ c\beta + d\gamma - 3 &= 0 \\ -bc\beta + 3cd - bd\gamma &= 0 \\ (cd - 1)a &= 0 \end{aligned}$$

前半の 3 つの条件は、 b, c, d が $X^3 - 1$ の異なる 3 つの根であることを意味する。残りの条件も使うと

$$3b^2 = b^2(c\beta + d\gamma) = 3bcd = 3$$

より $b = 1$ が得られる。よって c, d は $X^2 + X + 1$ の異なる 2 つの根である。よって、与えられた条件は

$$c\beta + d\gamma = 3$$

と要約できる。つまり (P3) は次と同値である。

(P4) $X^2 + X + 1$ の異なる 2 つの根 c, d をうまく選べば $c\beta + d\gamma = 3$ が成り立つ。

いま (P4) が成り立つと仮定する。 $-3 = \beta + \gamma$ により $(1 + c)\beta + (1 + d)\gamma = 0$ であるが、これは $1 + d + c = 0$ により $d\beta + c\gamma = 0$ を意味する。よって

$$\begin{aligned} 0 &= (c\beta + d\gamma)(d\beta + c\gamma) \\ &= \beta^2 + \gamma^2 - a \\ &= (\beta + \gamma)^2 - 3a \\ &= 9 - 3a \end{aligned}$$

である。これは $a = 3$ ということである。逆に $a = 3$ だと仮定しよう。このとき β, γ が

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{3}e^{5\pi i/6} \\ \gamma &= \frac{-3 - \sqrt{-3}}{2} = \sqrt{3}e^{7\pi i/6} \end{aligned}$$

と与えられていたとすると、 $d = e^{2\pi i/3}$, $c = e^{4\pi i/3}$ とおけば

$$c\beta + d\gamma = \sqrt{3}(e^{\pi i/6} + e^{11\pi i/6}) = 3$$

となり (P4) が成立する。ゆえに求める条件をみたす a は $a = 3$ である。

平成 26 年度 基礎科目 I

問 1

- (i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で、任意の正整数 k について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$$

をみたすとする。このとき、この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するか？理由をつけて答えよ。

- (ii) 次の広義積分は収束するか？理由をつけて答えよ：

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx.$$

解答.

- (i) 収束するとは限らない。反例はたとえば $a_n = \log n$ とすれば得られる。

- (ii) $y = 1/x$ とおくと $dx = -1/y^2 dy$ であって

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-y}}{y^2} dy$$

であるはずだから、右辺の収束性を考えればよい。いま Taylor 展開を考えると

$$e^{-y} = 1 - y + O(y^2)$$

だから、 $g(y) = (1 - e^{-y})/y^2$ とおくと $g(y) = 1/y + h(y)$ なる $[0, \infty)$ 上の連続関数 h がある。 $0 < y$ のとき $g(y) > 0$ なので、 $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\infty} g(y) dy &\geq \int_{\varepsilon}^1 g(y) dy \\ &\geq \int_{\varepsilon}^1 \left| \frac{1}{y} + h(y) \right| dy \\ &\geq \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy}{y} - \int_{\varepsilon}^1 |h(y)| dy \\ &\geq \log 1/\varepsilon - \int_0^1 |h(y)| dy \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 g(y) dy = \infty$$

である。よって件の積分は収束しない。

問 2

n は 2 以上の整数とする。 \mathbb{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = x^{2n} + y^{2n} - nx^2 + 2nxy - ny^2$$

について次の問に答えよ：

- (i) f の最大値・最小値は存在するか？理由をつけて答えよ。
- (ii) f が極大値・極小値をとる点をすべて求めよ。

解答.

- (i) $f(x, y) = x^{2n} + y^{2n} - n(x - y)^2$ と書ける。よって $f(x, x) = 2x^{2n}$ なので f は最大値を持たない。また $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ おいて $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とするとき

$$g(r, \theta) = r^{2n}(\cos^{2n} \theta + \sin^{2n} \theta) - nr^2(1 - \sin 2\theta)$$

であるが、

$$\begin{aligned} \cos^{2n} \theta + \sin^{2n} \theta &\geq \max\{\cos^{2n} \theta, \sin^{2n} \theta\} \\ &\geq (1/\sqrt{2})^{2n} \\ &\geq 1/2^n \end{aligned}$$

であるため $|g(r, \theta)| \geq 2^{-n}r^{2n} - 2nr^2$ と評価できる。したがってある $R > 0$ が存在して g は $\{(r, \theta) \mid r \geq R\}$ 上で 0 以上となる。ゆえに $f(0, 0) = 0$ より

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{r \leq R} g(r, \theta)$$

だから f は最小値を持つ。

- (ii) x, y についてそれぞれ偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2n(x^{2n-1} - x + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2n(y^{2n-1} - y + x) \end{aligned}$$

である。よって点 (x, y) がもし極値を与えるならば、

$$\begin{aligned} x^{2n-1} - x + y &= 0 \\ y^{2n-1} - y + x &= 0 \end{aligned}$$

である。よって極値を与える点は、 $\alpha = 2^{1/(2n-2)} > 0$ として

$$P = (0, 0), \quad Q_1 = (\alpha, -\alpha), \quad Q_2 = (-\alpha, \alpha)$$

の中にある。これらが実際に極値なのか、そして極値だとすれば極小か極大かを判断するために

Hessian を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2n((2n-1)x^{2n-2} - 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2n((2n-1)y^{2n-2} - 1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2n\end{aligned}$$

であるから、 P における Hessian は

$$H_P = 2n \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。 $1/2nH_P$ の固有値は $0, -2$ であり H_P は正則でないので、Hessian から P が極値であるかどうかを判定することはできない。実際、 $f(x, 0) = x^2(x^{2n-2} - n)$ より直線 $y = 0$ 上では $f(P)$ は極大値。 $f(x, x) = 2x^{2n}$ より直線 $y = x$ 上では $f(P)$ は極小値。よって P は鞍点であり極値を与えない。

Q_i における Hessian は

$$H_{Q_1} = H_{Q_2} = 2n \begin{pmatrix} 4n-3 & 1 \\ 1 & 4n-3 \end{pmatrix}$$

である。 $1/2nH_{Q_i}$ の固有値は $4n-4, 4n-2$ でありどちらも正。よって Hessian は正定値であるから $f(Q_1) = f(Q_2) = 4\alpha^2(1-n)$ は極小値。(最小値でもある)

問 3

次の 4 次正方行列 A, B は正則か？正則ならば逆行列を求め、正則でないならば階数を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

解答. E を単位行列とする。拡大係数行列 $(A \ E)$ を行基本変形すると

$$(A \ E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。したがって A は正則で、逆行列は

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。同様に $(B \ E)$ を行基本変形していくと $\text{rank } B = 3$ であることがわかる。とくに B は正則ではない。

問 4

3 次の複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

に対して、 A と B が相似になるような複素数 x をすべて求めよ。ただし、行列 A と B が相似とは、複素正方行列 P で $A = P^{-1}AP$ を満たすものが存在することをいう。

解答. A の固有多項式は $(t-1)^2(t-2)$ なので固有値は $1, 2$ である。計算すると $\text{rank}(E-A) = 1$ なので $\text{Ker}(E-A)$ は 2 次元空間。したがって A の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

である。 B の固有多項式も $(t-1)^2(t-2)$ で、固有値は A と同じ。しかし

$$\text{rank}(E-B) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので B の Jordan 標準形は $x \neq 0$ のとき対角行列でなく、 $x = 0$ のとき対角行列となる。よって A と B が相似となる x は $x = 0$ である。

■ 平成 26 年度 基礎科目 II

問 1

実数値関数 $f(x)$ は $[0, \infty)$ で連続で $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^n dx = 1$$

であることを証明せよ。

解答. Gamma 関数についてのよく知られた事実として

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

が成り立つことを注意しておく。 $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。仮定より

$$x \geq R \rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

なる $R > 0$ がある。このとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^n dx - 1 \right| &= \frac{1}{n!} \left| \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^n dx - \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} |f(x) - 1| e^{-x} x^n dx \\ &\leq \varepsilon + \frac{1}{n!} \int_0^R |f(x) - 1| e^{-x} x^n dx \end{aligned}$$

である。よって

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^n dx - 1 \right| \leq \varepsilon$$

が従う。 $\varepsilon > 0$ は任意だったので、示すべきことがいえた。

問 2

n, m を正の整数とする。 x を変数とする n 次以下の \mathbb{C} 係数多項式の全体を V_n とし、和・差・スカラー倍により V_n を \mathbb{C} 上のベクトル空間とみなす。 m 個の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ に対し、線形写像 $F: V_n \rightarrow \mathbb{C}^m$ を

$$F(f) = (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_m))$$

で定める。このとき

- (i) F が単射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ のみを用いて述べよ。
- (ii) F が全射になるための必要十分条件を $n, m, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ のみを用いて述べよ。

解答. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ のうち相異なるものの数を k とする。適当に番号を付けなおすことにより $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ が相異なるとしてよい。 V_n の基底 $\{1, x, \dots, x^n\}$ と \mathbb{C}^m の標準基底について F を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \cdots & \alpha_m^n \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$\text{rank } F = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_k & \cdots & \alpha_k^n \end{pmatrix}$$

である。右辺の行列のサイズが $s := \min\{k, n+1\}$ の部分正方行列

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{s-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_s & \cdots & \alpha_s^{s-1} \end{pmatrix}$$

の行列式は Vandermonde の行列式であって

$$|\det \Delta| = \prod_{i>j} |\alpha_i - \alpha_j| \neq 0$$

である。したがって $\text{rank } F = \min\{k, n+1\}$ である。ここまでの準備をもってすれば問に答えることはやさしい。

- (i) F が単射であることは $\text{rank } F = \dim V_n$ と同値。つまり $n+1 \leq k$ である。
- (ii) F が全射であることは $\text{rank } F = \dim \mathbb{C}^m$ と同値。つまり $m = k \leq n+1$ である。

■ 参考文献

- [1] 雪江明彦『代数学 1 群論入門』(日本評論社, 2010)