Dirichletの近似定理

https://seasawher.github.io/kitamado/
@seasawher

2019年7月25日

京大数学系平成27年度基礎科目IIの問7のための補足です。あの問題はDirichletの近似定理を認めてしまえばほぼ当たり前なのですが、しかしDirichletの近似定理ってあんまり本に載ってませんからね。見たことないひとも多いと思います。そこで、Dirichletの近似定理の正確な内容とその証明をここで補うことにしました。

定義. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S があるとする。このとき S が点対称 (centrally symmetric) であるとは、任意の $x \in S$ に対して $-x \in S$ であることをいう。また S が凸 (convex) であるとは、任意の $x, y \in S$ に対し、x と y を結ぶ線分が S に含まれるということである。つまり任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して $tx + (1-t)y \in S$ であることを指す。

命題. (Minkowsiの定理)
μ はLebesgue測度とする。$S \subset \mathbb{R}^n$ が点対称かつ凸で、$\mu(S) > 2^n$ ならば $S \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \neq \emptyset$ である。

証明. ハイリホーによる。$S \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ と仮定しよう。I を $\mathbb{R}^n$ の標準基底が張る超立方体とする。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\mu(S) &= \mu\left(\frac{S}{2}\right) \\
&= \mu\left(\frac{S}{2} \cap \coprod_{d \in \mathbb{Z}^n} (I + d)\right) \\
&= \mu\left(\coprod_{d \in \mathbb{Z}^n} \frac{S}{2} \cap (I + d)\right) \\
&= \sum_{d \in \mathbb{Z}^n} \mu\left(\frac{S}{2} \cap (I + d)\right) \\
&= \sum_{d \in \mathbb{Z}^n} \mu\left(\left(\frac{S}{2} - d\right) \cap I\right)
\end{aligned}$$

である。ここで S が凸かつ点対称という仮定により $d \neq d'$ のとき $(S/2 + d) \cap (S/2 + d') = \emptyset$ である。したがって

$$\frac{1}{2^n}\mu(S) = \mu\left(\coprod_{d \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{S}{2} - d\right) \cap I\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mu(I) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となって矛盾。

□

命題. (Dirichlet の近似定理)
$d \geq 1$ とする。実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ と $N \in \mathbb{N}$ が与えられたとき次が成り立つ。

$$
\exists q, p_i \in \mathbb{Z} \ \text{ s.t. } \ 1 \leq q \leq N \quad \text{and} \quad \forall i \quad |q\alpha_i - p_i| \leq \frac{1}{N^{1/d}}
$$

証明. 次のような $\mathbb{R}^{1+d}$ の部分集合 S を考える。

$$
S = \left\{ (x, y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^{1+d} \;\middle|\; -N - 1/2 \leq x \leq N + 1/2, \forall i \quad |q\alpha_i - p_i| \leq \frac{1}{N^{1/d}} \right\}
$$

このとき S はあきらかに凸かつ点対称なので、あとは $\mu(S) > 2^{d+1}$ がいえれば Minkowski の定理から主張が従う。計算すると $M = \frac{1}{N^{1/d}}$ として

$$
\begin{aligned}
\mu(S) &= \int_{-N-1/2}^{N+1/2} dx \int_{\alpha_d x - M}^{\alpha_d x + M} dy_d \cdots \int_{\alpha_1 x - M}^{\alpha_1 x + M} dy_1 \\
&= (2M)^d (2N+1) \\
&= \frac{2^d(2N+1)}{N} \\
&> 2^{d+1}
\end{aligned}
$$

である。よって示すべきことがいえた。 □