京都大学 数学系 院試

https://seasawher.hatenablog.com/

@seasawher

2019 年 2 月 23 日

平成 31 年度 基礎科目

問 1

> **引用.** α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。このとき広義積分
>
> $$\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\ dxdy$$
>
> を計算せよ。ただし、$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0\right\}$ とする。

解答. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数変換する。領域 D は、$\left\{(r,\theta) \;\middle|\; r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ へ移る。すると $dxdy = rdrd\theta$ であって

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\ dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ d\theta \int_0^\infty e^{-r^2(1+\sin 2\theta\cos\alpha)} r\ dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ d\theta \int_0^\infty e^{-r(1+\sin 2\theta\cos\alpha)}\ dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin 2\theta\cos\alpha} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1+\sin\theta\cos\alpha}
\end{aligned}$$

と計算できる。さらに $t = \tan\frac{\theta}{2}$ として変数変換を行う。$d\theta = 2(1+t^2)^{-1}dt$ で、$\sin\theta = 2t/(1+t^2)$ だから

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\ dxdy &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2(1+t^2)^{-1}dt}{1+2t(1+t^2)^{-1}\cos\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\cos\alpha}^\infty \frac{dt}{t^2+\sin^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha}\int_{1/\tan\alpha}^\infty \frac{dt}{t^2+1} \\
&= \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

である。ここで、$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$ であることから、結論として次を得る。

$$\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\ dxdy = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}$$

問 2

> **引用.** 複素数 α に対し、3 次複素正方行列 $A(\alpha)$ を次のように定める。
>
> $$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-4 & \alpha+4 & -2\alpha+1 \\ -2 & 2\alpha+1 & -2\alpha+2 \\ -1 & \alpha & -\alpha+2 \end{pmatrix}$$
>
> (1) $A(\alpha)$ の行列式を求めよ。
>
> (2) $A(\alpha)$ の階数を求めよ。

解答.

(1) ある行に別の行の定数倍を足す操作を繰り返し行っていくと

$$\begin{aligned} A(\alpha) &\sim \begin{pmatrix} \alpha-3 & 4 & -\alpha-1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & \alpha & -\alpha+2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \alpha-3 & 0 & -\alpha+7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\alpha-1)^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & \alpha+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できる。よって $\det A(\alpha) = (\alpha-1)^2$ である。

(2) $\alpha = 1$ のときは階数 2 である。それ以外のときは正則で、階数は 3 である。

問 3

> **引用.** $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して、$\mathbb{R}$ 上の連立常微分方程式
>
> $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 y - y^3 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + xy^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
>
> の解 $(x(t), y(t))$ は周期を持つことを示し、最小の周期を求めよ。ただし正の実数 T が $(x(t), y(t))$ の周期であるとは、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して
>
> $$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$$
>
> が成り立つことである。

解答. 与式より

$$\begin{aligned} x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 0 \end{aligned}$$

を得る。したがって $C = x^2 + y^2$ は定数であり、$C = x_0^2 + y_0^2$ が成り立つ。ゆえに与式は

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Cy \\ \frac{dy}{dt} = Cx \end{cases}$$

と書き直せる。この連立方程式を一変数にまとめると

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -C^2 x$$

となるが、この解空間は $\cos(Ct)$ と $\sin(Ct)$ で張られる。したがって、一般解はこの線形結合で書けるのだから

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(Ct) - y_0 \sin(Ct) \\ y(t) &= y_0 \cos(Ct) + x_0 \sin(Ct) \end{aligned}$$

でなくてはならない。常微分方程式の初期値問題の解の一意性より、解はこれだけである。よって求める周期は $2\pi/C$ である。

問 4

> **引用.** f は $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数で任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ を満たすとする。このとき以下の 2 条件は同値であることを示せ。
>
> (A) 広義積分
> $$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+f(x)^2}}\ dx$$
> が収束する。
>
> (B) $f(x) = 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在しない。

解答.

問 5

> **引用.** n を 2 以上の整数、A を n 次複素正方行列とする。A^{n-1} は対角化可能でないが、A^n が対角化可能であるとき、$A^n = 0$ となることを示せ。

解答. $\mathbb{C}$ 係数なので、Jordan 標準形が存在する。A ははじめから Jordan 標準形であるとしてよい。

$$A = \bigoplus_{i=1}^{r} J_{\lambda_i}(a_i)$$

とする。$a_1, \cdots, a_r$ は (異なるとは限らない) 固有値であり、λ_i はそれぞれのジョルダン細胞のサイズである。

$$A^n = \bigoplus_{i=1}^{r} J_{\lambda_i}(a_i)^n$$

は対角化可能なので、各 $J_{\lambda_i}(a_i)^n$ も対角化可能。ここで $J_{\lambda_i}(a_i)$ の Jordan 分解

$$S_i = \begin{pmatrix} a_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_i \end{pmatrix} \quad N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。

$$J_{\lambda_i}(a_i)^n = S_i^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k$$

であって、S_i^n は対角行列で $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k$ はべき零行列だから、Jordan 分解の一意性より

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_i^{n-k} N_i^k = 0$$

を得る。左辺は具体的に書くことができて、次のような λ_i 次行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \binom{n}{1} a_i^{n-1} & \binom{n}{2} a_i^{n-2} & \cdots & \binom{n}{\lambda_i - 1} a_i \\ & 0 & \binom{n}{1} a_i^{n-1} & \cdots & \binom{n}{\lambda_i - 2} a_i^2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

である。$\lambda_i = 1$ のときにはこの等式から情報を得ることはできない。しかし $\lambda_i \geq 2$ ならば $a_i = 0$ であることがわかる。つまりサイズが 2 以上の Jordan 細胞はべき零である。そこで仮にサイズが 1 の Jordan 細胞 $J_1(a_i)$ が存在したと仮定する。$n \geq 2$ という仮定より、このときサイズが 2 以上の Jordan 細胞のサイズは $n-1$ 以下でなくてはならない。したがって、サイズが 2 以上の Jordan 細胞はすべて $n-1$ 乗するとゼロである。よって A^{n-1} は対角化可能となるが、これは矛盾。ゆえにサイズが 1 の Jordan 細胞は存在しないので、A の Jordan 細胞はただひとつしかなく、$A^n = 0$ であることが導かれる。

問 6

> **引用.** $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 f についての次の条件 $(*)$ を考える。
> $(*)$ 任意の正の実数 R に対して、次の集合は有界である。
>
> $$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x,y)|\le R\right\}$$
>
> 以下の問に答えよ。
>
> (1) 条件 $(*)$ をみたす連続関数 f の例を与え、それが $(*)$ をみたすことを示せ。
> (2) 連続関数 f が条件 $(*)$ を満たすとき、次のいずれかが成り立つことを示せ。
> (a) f は最大値を持つが、最小値は持たない。
> (b) f は最小値を持つが、最大値は持たない。

解答.

(1) たとえば $f(x,y)=x^2+y^2$ とすればよい。これが $(*)$ を満たすことはあきらか。

(2) f が条件 $(*)$ を満たすとする。f の可能性としては、次の 4 通りが考えられる。

(A1) f は上にも下にも有界

(A2) f は上に有界だが下に有界でない

(A3) f は下に有界だが上に有界でない

(A4) f は上にも下にも有界でない

それぞれの場合について考えていく。まず (A1) の場合、任意の x について $|f(x)|\le M$ なる $M>0$ が存在する。よって仮定より、$\mathbb{R}^2$ が有界となって矛盾。つまりそんな関数はない。

次に (A2) の場合。$\sup f(x)=R$ とする。仮定から集合

$$V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; |f(x,y)|\le R\right\}$$

は有界閉集合である。よって V はコンパクト。$f(V)$ もコンパクトなので、$f(V)$ は最大値 M を持つ。あきらかに $M\le R$ である。任意に $0\le\varepsilon\le R/2$ が与えられたとしよう。$\sup f(x)=R$ より $R-\varepsilon<f(z)$ なる z がある。このとき $z\in V$ だから $R-M\le\varepsilon$ であり、$0\le\varepsilon\le R/2$ は任意だったから $R\le M$ でなくてはならない。よって $R=M$ であり、f は最大値を持つが、最小値は持たない関数である。(A3) は (A2) と同様で、このとき f は最小値を持つが最大値を持たない。

残る (A4) について考えよう。

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = 0 \right\}$$

とすると、仮定から K は有界閉集合である。M を十分に大きな正の実数として、K をすっぽり含むような閉円板

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq M \right\}$$

をとることができる。$\mathbb{R}^2$ を全体として補集合をとることにすると、このとき B^c は連結開集合である。

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) > 0 \right\} \quad V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) < 0 \right\}$$

とおく。このとき U と V の共通部分は空であり、ともに開集合である。だから、$B^c = (U \cap B^c) \cup (V \cap B^c)$ から、B^c が連結集合であることに矛盾。よってそのような関数はない。以上により示すべきことがいえた。

平成 30 年度 基礎科目

問 1

広義積分

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz$$

を計算せよ。ただし、$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq z\right\}$ とする。

解答. 極座標変換 $(x,y,z) \mapsto (r,\theta,z)$ を考える。このとき $dxdydz = rdrd\theta dz$ であり、

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2}\left(\int_{r^2}^\infty z^{-\frac{3}{2}}\, dz\right) dr \\
&= 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2}\left[(-2)z^{-\frac{1}{2}}\right]_{r^2}^\infty dr \\
&= 4\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2}\frac{1}{r}\, dr \\
&= 4\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+r^2}\, dr \\
&= 4\pi \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}$$

と計算できる。

問 2

a, b を実数とする。実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

について、以下の問に答えよ。

(1) 行列 A の階数を求めよ。

(2) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解を持つような実数 a, b をすべて求めよ。

解答.

(1) ある行に別の行の定数倍を足す操作を繰り返すと

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1-2a & 4-2b \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2a & 4-2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって $\operatorname{rank} A \geq 2$ であり、$(a, b) = (\frac{5}{2}, 2)$ のときは $\operatorname{rank} A = 2$ で、$(a, b) \neq (\frac{5}{2}, 2)$ のときは $\operatorname{rank} A = 3$ である。

(2) $(a, b) \neq (\frac{5}{2}, 2)$ ならば、$A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ は全射なので、解がある。$(a, b) = (\frac{5}{2}, 2)$ のとき、拡大係数行列を考えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{5}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので、解はない。

問 3

> **引用.** 広義積分
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2+x^4}\,dx$$
> を求めよ。

解答. f, F を

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2+x^4}, \quad F(z) = \frac{e^{\sqrt{-1}\pi z}}{1+z^2+z^4}$$

により定める。$x \in \mathbb{R}$ なら $f(x) = \operatorname{Re} F(x)$ である。

ここで分母の $1+z^2+z^4$ を因数分解しておく。$\zeta = \exp(\sqrt{-1}\pi/3) = (1+\sqrt{-3})/2$ とする。$1+z+z^2$ の根は 1 の原始 3 乗根であることから

$$\begin{aligned} z^4+z^2+1 &= (z^2-\zeta^2)(z^2-\zeta^4) \\ &= (z-\zeta)(z+\zeta)(z-\zeta^2)(z+\zeta^2) \end{aligned}$$

である。

上反平面に含まれる半径 R の半円を C_R とする。留数定理により、任意の $R>1$ について

$$2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F) = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

が成り立つ。

ここで、

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| &\le \int_0^{\pi} \left|\frac{R\exp(\sqrt{-1}R\pi e^{\sqrt{-1}\theta})}{1+R^2e^{2\sqrt{-1}\theta}+R^4e^{4\sqrt{-1}\theta}}\right|\,d\theta \\ &\le \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\pi\sin\theta}}{R^4-R^2-1}\,d\theta \\ &\le \frac{R}{R^4-R^2-1}\int_0^{\pi} d\theta \\ &\le \frac{R\pi}{R^4-R^2-1} \end{aligned}$$

だから、$R\to\infty$ のとき $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ である。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Re}(2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F))$$

であることがわかる。

　実際に留数を計算しよう。詳細は省略するが、堅実な計算により

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=\zeta} F &= \frac{\exp(\sqrt{-1}\pi\frac{1+\sqrt{-3}}{2})}{(2\zeta)(\zeta-\zeta^2)(\zeta+\zeta^2)} \\
&= \frac{-\sqrt{-1}\exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})}{2(1-\zeta^2)} \\
\operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F &= \frac{\exp(\sqrt{-1}\pi\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})}{(\zeta^2-\zeta)(\zeta^2+\zeta)(\zeta^2+\zeta^2)} \\
&= \frac{-\sqrt{-1}\exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})}{2(1+\zeta)}
\end{aligned}
$$

がわかる。$\alpha = \exp(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2})$ とおこう。すると

$$
\begin{aligned}
2\pi\sqrt{-1}(\operatorname{Res}_{z=\zeta} F + \operatorname{Res}_{z=\zeta^2} F) &= \alpha\pi\left(\frac{1}{1-\zeta^2} + \frac{1}{1+\zeta}\right) \\
&= \alpha\pi\left(\frac{2-\zeta}{1-\zeta^2}\right) \\
&= \alpha\pi
\end{aligned}
$$

である。$\alpha \in \mathbb{R}$ だから、

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}\pi
$$

が結論される。

問 4

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について、各 f_n は広義単調増加であるものとする。つまり、$0 \leq x < y \leq 1$ なら、$f_n(x) \leq f_n(y)$ である。この関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ で関数 f に各点収束したとする。

(1) 任意の $0 \leq x < y \leq 1$ に対し、不等式

$$\sup_{x \in [x,y]} |f_n(z) - f(z)| \leq \max\{|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\}$$

を示せ。

(2) 関数 f が連続であるとき、関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ。

解答.

(1) まず f が広義単調増加であることを示す。$0 \leq x < y \leq 1$ とする。$\varepsilon > 0$ が与えられたとする。f_n が f に各点収束することにより

$$n \geq N(x) \to |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$n \geq N(y) \to |f(y) - f_n(y)| < \varepsilon$$

なる $N(x), N(y)$ の存在がわかる。したがって $n \geq \max\{N(x), N(y)\}$ のとき

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) + 2\varepsilon &= (f(y) + \varepsilon) - f(x) + \varepsilon \\ &\geq f_n(y) - f(x) + \varepsilon & (-\varepsilon < f(y) - f_n(y) < \varepsilon \text{より}) \\ &\geq f_n(y) - f_n(x) & (-\varepsilon < f(x) - f_n(x) < \varepsilon \text{より}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

がわかる。$\varepsilon > 0$ は任意だったから、$f(y) \geq f(x)$ がわかる。つまり f は広義単調増加である。

したがって任意の $z \in [x,y]$ に対して

$$f_n(z) - f(z) \leq f_n(y) - f(x)$$
$$f(z) - f_n(z) \leq f(y) - f_n(x)$$

が成り立つので、

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \max\{|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\}$$

である。右辺は z の取り方によらないので、

$$\sup_{x\in[x,y]} |f_n(z)-f(z)| \leq \max\{|f_n(x)-f(y)|, |f_n(y)-f(x)|\}$$

がいえた。

(2) $\varepsilon > 0$ が与えられたとする。$I=[0,1]$ はコンパクトなので、f は一様連続であることまでいえる。そこで

$$|x-y|<\delta \to |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

なる $\delta > 0$ がある。この δ を固定し、$B(z)=[z-\delta/3, z+\delta/3]\cap I$ とする。$\delta > 0$ なので、$I=\bigcup_{i=1}^m B(z_i)$ なる有限個の $z_i \in I$ をとることができる。$B(z_i)=[x_i, y_i]$ と表すことにする。

f_n は f に各点収束しているので、

$$\begin{aligned} n \geq N(x_i) &\to |f(x_i)-f_n(x_i)|<\varepsilon \\ n \geq N(y_i) &\to |f(y_i)-f_n(y_i)|<\varepsilon \end{aligned}$$

なる $N(x_i), N(y_i)$ がある。そこで

$$n \geq \max\{N(x_1),\cdots,N(x_m),N(y_1),\cdots,N(y_m)\}$$

とする。このとき

$$\begin{aligned} |f_n(x_i)-f(y_i)| &\leq |f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(y_i)| \\ &\leq 2\varepsilon \\ |f_n(y_i)-f(x_i)| &\leq |f_n(y_i)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(x_i)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって (1) により、不等式評価を端点に押しつけることができて

$$\begin{aligned} \sup_{z\in I}|f_n(z)-f(z)| &\leq \max_{1\leq i\leq m} \sup_{x\in[x_i,y_i]} |f_n(z)-f(z)| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq m} \max\{|f_n(x_i)-f(y_i)|, |f_n(y_i)-f(x_i)|\} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

である。これで一様収束がいえた。

問 5

> 引用. p を素数とし、$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の有限体とする。行列の乗法による群 G を
>
> $$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$
>
> で定める。このとき、G から乗法群 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ への準同形写像の個数を求めよ。

解答.

Step 1　集合 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ と $\mathrm{Hom}(G/[G,G], \mathbb{C}^\times)$ の間には全単射がある。したがって $G/[G,G]$ の構造を決定すればよい。そのためにまず $[G,G]$ を決定する。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \delta & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。(α は a と間違えやすいので、δ を使った。) 計算すれば、このとき

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a\gamma - c\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが判る。$a\gamma - c\delta$ は $\mathbb{F}_p$ 全体をわたるので、

$$[G,G] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, d \in \mathbb{F}_p \right\}$$

が結論できる。

Step 2　$G/[G,G]$ の構造を決定したい。

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、$E_1, E_2 \in G/[G,G]$ と見なす。

$$E_1^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、E_1, E_2 は位数がちょうど p である。また、$C = E_1^n = E_2^m$ とするとき

$$1 = E_1^n E_2^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & n & -nm \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $n = m = 0$ が従う。つまり $\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle = 1$ である。$G/[G,G]$ は Abel 群なので積による準同形

$$\langle E_1 \rangle \times \langle E_2 \rangle \to G/[G,G]$$

がある。これは、$\langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle = 1$ により単射である。位数 p^2 の有限群の間の単射なので、とくに同型である。よって $G/[G,G] \cong \mathbb{F}_p^2$ がわかった。

Step 3　あとは $\#\operatorname{Hom}(\mathbb{F}_p^2, \mathbb{C}^\times)$ を求めればよい。これは $\#\operatorname{Hom}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C}^\times)$ の 2 乗であるが、$\#\operatorname{Hom}(\mathbb{F}_p, \mathbb{C}^\times) = p$ なので、求める答えは p^2 である。

問 6

> **引用.** $\mathbb{R}^4$ の部分空間 M を
>
> $$M = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1,\ xy + zw = 0\right\}$$
>
> で定める。
>
> (1) M が 2 次元微分可能多様体になることを示せ。
>
> (2) M 上の関数 f を
>
> $$f(x, y, z, w) = x$$
>
> で定めるとき、f の臨界点をすべて求めよ。ただし、$p \in M$ が f の臨界点であるとは、p における M の局所座標 (u, v) に関して
>
> $$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$$
>
> となることである。

解答.

(1) $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1 \\ xy + zw \end{pmatrix}$$

により定める。$M = F^{-1}(O)$ である。$p = (x, y, z, w) \in M$ としよう。p におけるヤコビアンを計算すると

$$JF_p = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ y & x & w & z \end{pmatrix}$$

である。ここで $p \neq O$ より $\operatorname{rank} JF_p \geq 1$ である。仮に $\operatorname{rank} JF_p = 1$ ならば、JF_p の 2 つの行は 1 次従属である。よって、$p \neq O$ により $(y, x, w, z) = c(x, y, z, w)$ なる定数 $c \in \mathbb{R}$ がある。このとき $xy + zw = c(x^2 + z^2) = 0$ となり、$p \neq O$ に矛盾。よって $\operatorname{rank} JF_p = 2$ である。ゆえに p は F の正則点であり、M は $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分多様体。F は $\mathbf{C}^\infty$ 級なので、M は微分可能になる。

(2) $f\colon M \to \mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^4$ への自然な拡張を $\widetilde{f}$ とする。このとき $p \in M$ に対して $T_pM \subset$

$\mathbb{R}^4$ と見なせば、$T_pM = \operatorname{Ker} JF_p$ であるから、

$$
\begin{aligned}
p \text{ が } f \text{ の臨界点 } &\iff \operatorname{rank}(df_p \colon T_pM \to \mathbb{R}) < 1 \\
&\iff \dim \operatorname{Ker} df_p = 2 \\
&\iff \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} JF_p \\ J\widetilde{f}_p \end{pmatrix} = 2 \\
&\iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z & 2w \\ y & x & w & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \\
&\iff \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 2y & 2z & 2w \\ 0 & x & w & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2
\end{aligned}
$$

である。いま $p = (x, y, z, w) \in M$ が臨界点であったと仮定する。このとき (x, w, z) と (y, z, w) は 1 次従属である。よって $(y, w, z) = 0$ かまたは、ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $(x, w, z) = c(y, z, w)$ である。$(y, w, z) = 0$ なら $p = (\pm 1, 0, 0, 0)$ である。$(x, w, z) = c(y, z, w)$ なら、$c(y^2 + z^2) = 0$ より $p = (0, \pm 1, 0, 0)$ である。
逆に $p = (\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0)$ ならば $p \in M$ であり、f の臨界点であることはあきらかなので、臨界点はこれですべて求まったことになる。

▌平成 30 年度 専門科目

問 1

> **引用.** k を可換体とする。$k[X,Y]$ を k 上の 2 変数多項式環として、$f \in k[X,Y]$ の零点集合 $V(f)$ を
> $$V(f) = \{(a,b) \in k \times k \mid f(a,b) = 0\}$$
> によって定義する。次の 2 条件は同値であることを示せ。
>
> (1) k は代数的閉体ではない。
>
> (2) $V(f) = \{(0,0)\}$ となる $f \in k[X,Y]$ が存在する。

解答.

(1)⇒(2) k は代数的閉体ではないので、ある 1 次以上の多項式 $g \in k[X]$ であって、k 上根を持たないものが存在する。$n = \dim \mathrm{g}$ とおいて、

$$f(X,Y) = Y^n g\left(\frac{X}{Y}\right)$$

とおく。別の言い方をすれば $g(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ とするとき, $f(X,Y) = X^n + a_{n-1}X^{n-1}Y + \cdots + a_1XY^{n-1} + a_0Y^n$ である。$X \in k$, $Y \in k \setminus \{0\}$ に対して Y^n と $g(X/Y)$ は決して 0 にならないので、$f(X,Y) = 0$ となるのは $Y = 0$ のときだけである。$f(X,0) = X^n$ なので、$V(f) = \{(0,0)\}$ が成り立つ。

(2)⇒(1) 対偶をとり、k が代数閉体であってかつ $V(f) = \{(0,0)\}$ となる $f \in k[X,Y]$ が存在すると仮定し矛盾を示そう。このとき k は無限体 (k が有限体であっても、アイゼンシュタイン多項式は無限個あるため) であることに注意する。またここではそもそも k は零環ではないとして考えていることにも注意する。

さて $a,b \in k^\times$ を任意にとると、$f(a,Y) \in k[Y]$、$f(X,b) \in k[X]$ は決して 0 にならないので、定数でなければならない。このとき $f(a,Y) = f(a,b) = f(X,b)$ であるので、常にこの 2 つは一致する。割り算を実行して

$$f(X,Y) = (X-a)g(X,Y) + f(a,Y)$$
$$f(X,Y) = (Y-b)h(X,Y) + f(X,b)$$

なる $g, h \in k[X, Y]$ をとってくる。すると辺々引いて

$$0 = (X - a)g(X, Y) - (Y - b)h(X, Y)$$

が成り立つ。この等式は任意の $a, b \in k^\times$ について成り立つので、$g = h = 0 \in k[X, Y]$ が判る。ゆえに f は定数となるがこれは矛盾。

別解　(2)⇒(1) を示す部分については Hilbert の零点定理を知っていればすこし議論を省略できる。k が代数閉体だと仮定し $V(f) = \{(0, 0)\}$ となる $f \in k[X, Y]$ が存在するとしよう。$k[X, Y]$ は UFD なので、f は既約であるとしてよい。すると (f) は根基イデアルなので Hilbert の零点定理により $(f) = (X, Y)$ である。しかし右辺は単項イデアルではないので矛盾。

問 2

> **引用.** p を素数, k, m を正の整数で、k と $p^2 - p$ は互いに素であるとする。位数 kp^m の有限群 G が次の性質を満たす部分群 N, H をもつとする。
>
> (1) N は位数 p^m の巡回群で G の正規部分群である。
>
> (2) H は位数 k の群である。
>
> このとき、G は N と H の直積であることを示せ。

解答. $H \lhd G$ を示せば十分である。(付録の「半直積と Gaois 群」を参照のこと) $N \lhd G$ なので、H の共役による N への作用 $\Phi\colon H \to \operatorname{Aut} N$ を $\Phi_h(q) = hqh^{-1}$ により定義できる。$H/\operatorname{Ker}\Phi$ は $\operatorname{Aut} N$ の部分群とみなせる。

$$\begin{aligned}\#(\operatorname{Aut} N) &= \#((\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times) \\ &= p^m - p^{m-1}\end{aligned}$$

なので、$\#(H/\operatorname{Ker}\Phi)$ は $\#H = k$ と $p^m - p^{m-1}$ の両方を割り切る。したがって $\#(H/\operatorname{Ker}\Phi) \leq \gcd(k, p^m - p^{m-1})$ であるが、右辺は仮定により 1 だから Φ は自明な作用であって、H の元はすべての N の元と可換である。

よって、G の元 $g = hq$ $(h \in H, q \in N)$ と $x \in H$ に対して $g^{-1}xg = x^g = x^{hq} = (x^h)^q = x^h \in H$ だから、$H \lhd G$ が言えた。

問 3

> **引用.** 多項式 $X^7 - 11$ の有利数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を $K \subset \mathbb{C}$ とする。このとき、次の問に答えよ。
>
> (1) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ。
> (2) $\mathbb{Q}$ と K の間の ($\mathbb{Q}$ でも K でもない) 真の中間体の個数を求めよ。
> (3) 上記 (2) の中間体のうち、$\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大になるものの個数を求めよ。

解答.

(1) $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$ とする。あきらかに $K = \mathbb{Q}(\omega, \sqrt[7]{11})$ である。状況を図式で表すと次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
 & K & \\
\mathbb{Q}(\omega) \arrow[ur, "\leq 7"] & & \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) \arrow[ul, "\leq 6"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "6"] \arrow[ur, "7"'] &
\end{tikzcd}
$$

円分体の一般論から $6 = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$ である。また $X^7 - 11$ は Eisenstein 多項式なので既約であり $7 = [\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) : \mathbb{Q}]$ である。7 と 6 は互いに素なので $\mathbb{Q}(\omega) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}) = \mathbb{Q}$ である。$\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大なので、Galois 拡大の推進定理により $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ であり、とくに $[K : \mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})] = [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 6$ である。したがって、$[K : \mathbb{Q}] = 42$ である。

(2) $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とする。付録「半直積と Galois 群」により、G は半直積

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega)) \rtimes \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}))$$

と同型である。素数次数なので $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega)) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ であり、円分体の一般論から $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11})) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である。つまりともに有限巡回群である。$\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\omega))$ を $\sigma(\sqrt[7]{11}) = \sqrt[7]{11}\omega$ により定め、$\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[7]{11}))$ を $\tau(\omega) = \omega^3$ により定める。σ, τ はそれぞれ生成元となる。$\tau\sigma\tau^{-1}(\sqrt[7]{11}) = \sqrt[7]{11}\omega^3$ より $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3$ である。したがって次の表示

$$G \cong \left\{\sigma, \tau \;\middle|\; \sigma^7 = \tau^6 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3\right\} \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

を得る。

Galois の基本定理により、G の自明でない部分群の個数を求めればよい。そこでまずすべての元の位数を決定する。$\langle\sigma\rangle \rtimes \langle\tau\rangle \to \langle\tau\rangle$ は群準同型なので、$x = \sigma^i\tau^j \in G$ の共役は $\sigma^*\tau^j$ という形をしている。具体的には

$$\begin{aligned}
\sigma x \sigma^{-1} &= \sigma\sigma^i\tau^j\sigma^{-1} \\
&= \sigma\sigma^i(\tau^j\sigma^{-1}\tau^{-j})\tau^j \\
&= \sigma\sigma^i(\sigma^{3^j})^{-1}\tau^j \\
&= \sigma^{1-3^j}\sigma^i\tau^j \\
&= \sigma^{1-3^j}x
\end{aligned}$$

である。そこで共役元を求めることにより次のような位数の表をつくることができる。

位数	元	個数
1	1	1
2	$\sigma^i\tau^3$ $(0 \le i \le 6)$	7
3	$\sigma^i\tau^2$ $(0 \le i \le 6)$, $\sigma^i\tau^4$ $(0 \le i \le 6)$	14
6	$\sigma^i\tau$ $(0 \le i \le 6)$, $\sigma^i\tau^5$ $(0 \le i \le 6)$	14
7	σ^i $(1 \le i \le 6)$	6

次に部分群を列挙する作業に移る。G の位数は 42 なので、自明でない部分群の位数としてありえるのは $2, 3, 6, 7, 14, 21$ である。まず位数 2 の部分群は位数 2 の元と同じ数だけあるので、7 個である。位数 3 の部分群は、素数位数なのですべて巡回群であり、生成元はひとつの群に対して 2 つある。よって位数 3 の部分群は $14/2 = 7$ 個ある。

位数 6 の部分群 $M \subset G$ が与えられたとする。このとき次のような各行が完全な可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & j^{-1}(M) & \xrightarrow{j} & M & \xrightarrow{p} & p(M) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

$j^{-1}(M) = 1$ でなくてはならないため、$M \cong p(M)$ でありしたがって M は巡回群である。位数 6 の巡回群の生成元はひとつの群に対して 2 つなので、位数 6 の部分

群は $14/2 = 7$ 個ある。位数 7 の部分群は、Sylow-7 部分群なのですべて共役である。ところが $\langle\sigma\rangle$ は正規部分群だったので、ひとつしかない。位数 14 の部分群は、Sylow の定理より位数 2 の元と位数 7 の元で生成される。したがって $\langle\sigma, \tau^3\rangle$ しかない。よって 1 個。位数 21 の部分群も、Sylow の定理により位数 3 の元と位数 7 の元で生成される。したがって $\langle\sigma, \tau^2\rangle$ しかない。よって 1 個。以上により、次の表のようになる。

位数	部分群	個数
2	$\langle\sigma^i\tau^3\rangle$ $(0 \leq i \leq 6)$	7
3	$\langle\sigma^i\tau^2\rangle$ $(0 \leq i \leq 6)$	7
6	$\langle\sigma^i\tau\rangle$ $(0 \leq i \leq 6)$	7
7	$\langle\sigma\rangle$	1
14	$\langle\sigma, \tau^3\rangle$	1
21	$\langle\sigma, \tau^2\rangle$	1

したがって非自明な部分群は $7 + 7 + 7 + 1 + 1 + 1 = 24$ 個ある。

(3) Galois の基本定理により、G の自明でない正規部分群の個数を求めればよい。$x = \sigma^i\tau^j \in G$ の共役 $\sigma x\sigma^{-1}$ は $\sigma^{1-3^j}x$ であることを思い出そう。これをみると、位数 $2, 3, 6$ の群のなかに正規部分群は存在しない。また、位数 7,14,21 の群はすべて正規部分群である。よって自明でない正規部分群は 3 個である。