Dirichlet の近似定理

https://seasawher.github.io/kitamado/
@seasawher

2019 年 8 月 19 日

京大数学系平成 27 年度基礎科目 II の問 7 のための補足です。あの問題は Dirichlet の近似定理を認めてしまえばほぼ当たり前なのですが、しかし Dirichlet の近似定理ってあんまり本に載ってませんからね。見たことないひとも多いと思います。そこで、Dirichlet の近似定理の内容とその証明をここで補うことにしました。鳩の巣論法を使った証明もあります。それについては Dirichlet の Diophantus 近似定理で調べてください。

定義. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S があるとする。このとき S が点対称 (centrally symmetric) であるとは、任意の $x \in S$ に対して $-x \in S$ であることをいう。また S が凸 (convex) であるとは、任意の $x, y \in S$ に対し、x と y を結ぶ線分が S に含まれるということである。つまり任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して $tx + (1-t)y \in S$ であることを指す。

命題. (Minkowski の定理)
μ は Lebesgue 測度とする。$S \subset \mathbb{R}^n$ が点対称かつ凸な可測集合で、$\mu(S) > 2^n$ ならば $S \cap \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \neq \emptyset$ である。

証明. ハイリホーによる。$S \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ と仮定しよう。I を $\mathbb{R}^n$ の標準基底が張る超立方体とする。このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\mu(S) &= \mu\left(\frac{S}{2}\right) \\
&= \mu\left(\frac{S}{2} \cap \coprod_{d \in \mathbb{Z}^n} (I+d)\right) \\
&= \mu\left(\coprod_{d \in \mathbb{Z}^n} \frac{S}{2} \cap (I+d)\right) \\
&= \sum_{d \in \mathbb{Z}^n} \mu\left(\frac{S}{2} \cap (I+d)\right) \\
&= \sum_{d \in \mathbb{Z}^n} \mu\left(\left(\frac{S}{2} - d\right) \cap I\right)
\end{aligned}$$

である。ここで S が凸かつ点対称という仮定により $d \neq d'$ のとき $(S/2 + d) \cap (S/2 + d') = \emptyset$ である。した

がって

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\mu(S) &= \mu\left(\coprod_{d\in\mathbb{Z}^n}\left(\frac{S}{2}-d\right)\cap I\right)\\ &\leq \mu(I)\\ &= 1\end{aligned}$$

となって矛盾。

□

命題. (Dirichlet の近似定理)
$d \geq 1$ とする。実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ と $N \in \mathbb{N}$ が与えられたとき次が成り立つ。

$$\exists q, p_i \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } 1 \leq q \leq N \quad \text{and} \quad \forall i \quad |q\alpha_i - p_i| \leq \frac{1}{N^{1/d}}$$

証明. 次のような $\mathbb{R}^{1+d}$ の部分集合 S を考える。

$$S = \left\{(x, y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^{1+d} \,\middle|\, -N-1/2 \leq x \leq N+1/2, \forall i \quad |x\alpha_i - y_i| \leq \frac{1}{N^{1/d}}\right\}$$

このとき S はあきらかに凸かつ点対称な可測集合なので、あとは $\mu(S) > 2^{d+1}$ がいえれば Minkowski の定理から主張が従う。計算すると $M = \frac{1}{N^{1/d}}$ として

$$\begin{aligned}\mu(S) &= \int_{-N-1/2}^{N+1/2} dx \int_{\alpha_d x - M}^{\alpha_d x + M} dy_d \cdots \int_{\alpha_1 x - M}^{\alpha_1 x + M} dy_1\\ &= (2M)^d(2N+1)\\ &= \frac{2^d(2N+1)}{N}\\ &> 2^{d+1}\end{aligned}$$

である。よって示すべきことがいえた。 □