

# Introducción a la Programación

## Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2023

Lógica proposicional

# Habíamos visto...

**Objetivo:** Aprender a programar en lenguajes funcionales y en lenguajes imperativos.

# Habíamos visto...

**Objetivo:** Aprender a programar en lenguajes funcionales y en lenguajes imperativos.

- ▶ Especificar problemas.
  - ▶ Describirlos en un lenguaje semiformal.
- ▶ Pensar algoritmos para resolver los problemas.
  - ▶ En esta materia nos concentramos en programas para tratamiento de secuencias principalmente.
- ▶ Empezar a razonar acerca de estos algoritmos y programas.
  - ▶ Veremos conceptos de testing.
  - ▶ Veremos nociones de complejidad.

# Definición (Especificación) de un problema

```
problema nombre(parámetros) :tipo de dato del resultado{  
  requiere etiqueta { condiciones sobre los parámetros de entrada }  
  asegura etiqueta { condiciones sobre los parámetros de salida }  
}
```

- ▶ *nombre*: nombre que le damos al problema
  - ▶ será resuelto por una función con ese mismo nombre
- ▶ *parámetros*: lista de parámetros separada por comas, donde cada parámetro contiene:
  - ▶ Nombre del parámetro
  - ▶ Tipo de datos del parámetro
- ▶ *tipo de dato del resultado*: tipo de dato del resultado del problema (inicialmente especificaremos funciones)
  - ▶ En los asegura, podremos referenciar el valor devuelto con el nombre de **res**
- ▶ *etiquetas*: son nombres **opcionales** que nos servirán para nombrar declarativamente a las condiciones de los requiere o asegura.

# Definición (Especificación) de un problema

## ► *Sobre los requiere*

- Describen todas las condiciones y posibles valores o casuísticas de los parámetros de entrada.
- Puede haber más de un requiere (recomendamos una condición por renglón). Se asume que valen todos juntos (es una conjunción).
- Evitar contradicciones (un requiere no debería contradecir a otro).

## ► *Sobre los asegura*

- Describen todas las condiciones y posibles valores o casuísticas de los parámetros de salida y entrada/salida en función de los parámetros de entrada.
- Puede haber más de un asegura (recomendamos una condición por renglón). Se asume que valen todos juntos (es una conjunción).
- Evitar contradicciones (un asegura no debería contradecir a otro).

# Antes de continuar... hablemos de lógica proposicional

- ▶ Si bien no utilizaremos un lenguaje formal para especificar... ¿Es lo mismo decir...?
  - ▶ Mañana llueve e iré a comprar un paraguas
  - ▶ Si mañana llueve iré a comprar un paraguas
  - ▶ O mañana no llueve o no iré a comprar un paraguas
  - ▶ Compraré un paraguas por si mañana llueve
  - ▶ Si compro un paraguas, mañana llueve

# Lógica proposicional - Sintaxis

► Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

# Lógica proposicional - Sintaxis

- Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

- Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...



# Lógica proposicional - Sintaxis

- ▶ Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

- ▶ Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

- ▶ Fórmulas

1. True y False son fórmulas

# Lógica proposicional - Sintaxis

- Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

- Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

- Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula

# Lógica proposicional - Sintaxis

- Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

- Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

- Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula
3. Si  $A$  es una fórmula,  $\neg A$  es una fórmula

# Lógica proposicional - Sintaxis

► Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

► Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

► Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula
3. Si  $A$  es una fórmula,  $\neg A$  es una fórmula
4. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$  es una fórmula

# Lógica proposicional - Sintaxis

► Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

► Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

► Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula
3. Si  $A$  es una fórmula,  $\neg A$  es una fórmula
4. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$  es una fórmula
5. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$  es una fórmula

# Lógica proposicional - Sintaxis

► Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

► Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

► Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula
3. Si  $A$  es una fórmula,  $\neg A$  es una fórmula
4. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$  es una fórmula
5. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$  es una fórmula
6. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas,  $(A \rightarrow B)$  es una fórmula

# Lógica proposicional - Sintaxis

► Símbolos:

True , False ,  $\neg$  ,  $\wedge$  ,  $\vee$  ,  $\rightarrow$  ,  $\leftrightarrow$  , ( , )

► Variables proposicionales (infinitas)

$p$  ,  $q$  ,  $r$  , ...

► Fórmulas

1. True y False son fórmulas
2. Cualquier variable proposicional es una fórmula
3. Si  $A$  es una fórmula,  $\neg A$  es una fórmula
4. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$  es una fórmula
5. Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son fórmulas,  $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$  es una fórmula
6. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas,  $(A \rightarrow B)$  es una fórmula
7. Si  $A$  y  $B$  son fórmulas,  $(A \leftrightarrow B)$  es una fórmula

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).



# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	
F	

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	



# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

# Semántica clásica

- ▶ Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- ▶ Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	



# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

# Semántica clásica

- Dos valores de verdad: “verdadero” (V) y “falso” (F).
- Conociendo el valor de las variables proposicionales de una fórmula, podemos calcular el valor de verdad de la fórmula.

$p$	$\neg p$
V	F
F	V

$p$	$q$	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p$	$q$	$(p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p$	$q$	$(p \rightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$p$	$q$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V



# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	F	

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- Una fórmula es una **contradicción** si siempre toma el valor  $F$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- Una fórmula es una **contradicción** si siempre toma el valor  $F$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $(p \wedge \neg p)$  es contradicción:

$p$	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
V	F	
F	V	

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- Una fórmula es una **contradicción** si siempre toma el valor  $F$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $(p \wedge \neg p)$  es contradicción:

$p$	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
V	F	F
F	V	F

# Tautologías, contradicciones y contingencias

- Una fórmula es una **tautología** si siempre toma el valor  $V$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $((p \wedge q) \rightarrow p)$  es tautología:

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

- Una fórmula es una **contradicción** si siempre toma el valor  $F$  para valores definidos de sus variables proposicionales.

Por ejemplo,  $(p \wedge \neg p)$  es contradicción:

$p$	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$
V	F	F
F	V	F

- Una fórmula es una **contingencia** cuando no es ni tautología ni contradicción.



# Equivalencias entre fórmulas

- **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

# Equivalencias entre fórmulas

► **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

# Equivalencias entre fórmulas

► **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

2. Asociatividad

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

# Equivalencias entre fórmulas

► **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

2. Asociatividad

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

3. Conmutatividad

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

# Equivalencias entre fórmulas

► **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

2. Asociatividad

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

3. Conmutatividad

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

4. Distributividad

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

# Equivalencias entre fórmulas

► **Teorema.** Las siguientes son tautologías.

1. Idempotencia

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

2. Asociatividad

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

3. Conmutatividad

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

4. Distributividad

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

5. Reglas de De Morgan

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

# Relación de fuerza

- Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .



# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
  3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1.  $\iota(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2.  $\iota(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
  3.  $\iota p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí  
    Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.
  4.  $\iota p$  es más fuerte que  $q$ ?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
  3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

  4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,

1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?



# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,

1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?    sí

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,

1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
6. ¿hay una fórmula más fuerte que todas?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,
  1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
  3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

  4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
  5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
  6. ¿hay una fórmula más fuerte que todas?    False!

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,

1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
6. ¿hay una fórmula más fuerte que todas?    False!
7. ¿hay una fórmula más débil que todas?

# Relación de fuerza

- ▶ Decimos que  $A$  es más fuerte que  $B$  cuando  $(A \rightarrow B)$  es tautología.
- ▶ También decimos que  $A$  fuerza a  $B$  o que  $B$  es más débil que  $A$ .
- ▶ Por ejemplo,

1. ¿ $(p \wedge q)$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
2. ¿ $(p \vee q)$  es más fuerte que  $p$ ?    no
3. ¿ $p$  es más fuerte que  $(q \rightarrow p)$ ?    sí

Pero notemos que si  $q$  está indefinido y  $p$  es verdadero entonces  $(q \rightarrow p)$  está indefinido.

4. ¿ $p$  es más fuerte que  $q$ ?    no
5. ¿ $p$  es más fuerte que  $p$ ?    sí
6. ¿hay una fórmula más fuerte que todas?    False!
7. ¿hay una fórmula más débil que todas?    True

# Expresión bien definida

- ▶ Toda expresión está **bien definida** en un estado si todas las proposiciones valen  $T$  o  $F$ .
- ▶ Sin embargo, existe la posibilidad de que haya expresiones que no estén bien definidas.
  - ▶ Por ejemplo, la expresión  $x/y = 5$  no está bien definida si  $y = 0$ .
- ▶ Por esta razón, necesitamos una lógica que nos permita decir que está bien definida la siguiente expresión
  - ▶  $y = 0 \vee x/y = 5$
- ▶ Para esto, introducimos **tres** valores de verdad:
  1. verdadero ( $V$ )
  2. falso ( $F$ )
  3. indefinido ( $\perp$ )

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,



# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	V
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	



# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	V
F	$\perp$	$\perp$
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

Se llama **secuencial** porque ...

- ▶ los términos se evalúan de izquierda a derecha,
- ▶ la evaluación termina cuando se puede deducir el valor de verdad, aunque el resto esté indefinido.

Introducimos los operadores lógicos  $\wedge_L$  (y-luego, o *conditional and*, o **cand**),  $\vee_L$  (o-luego o *conditional or*, o **cor**).

$p$	$q$	$(p \wedge_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	F
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

$p$	$q$	$(p \vee_L q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F
V	$\perp$	V
F	$\perp$	$\perp$
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

# Semántica trivaluada (secuencial)

¿Cuál es la tabla de verdad de  $\rightarrow_L$ ?

$p$	$q$	$(p \rightarrow_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
V	$\perp$	
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

¿Cuál es la tabla de verdad de  $\rightarrow_L$ ?

$p$	$q$	$(p \rightarrow_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

¿Cuál es la tabla de verdad de  $\rightarrow_L$ ?

$p$	$q$	$(p \rightarrow_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	V
$\perp$	V	
$\perp$	F	
$\perp$	$\perp$	

# Semántica trivaluada (secuencial)

¿Cuál es la tabla de verdad de  $\rightarrow_L$ ?

$p$	$q$	$(p \rightarrow_L q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V
V	$\perp$	$\perp$
F	$\perp$	V
$\perp$	V	$\perp$
$\perp$	F	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

# Cuantificadores

- ▶ La lógica proposicional no alcanza para expresar o describir propiedades que tendran los elementos de un conjunto.
- ▶ Formalmente, ese grado de abstracción se alcanzaría introduciendo **lógica de primer orden**.
- ▶ En la LPO existen **cuantificadores** que permiten predicar sobre algunos o todos los elementos de un conjunto.
- ▶  $(\forall x : T) P(x)$ : Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos de tipo  $T$  cumplen la propiedad  $P$ .
  - ▶ Se lee “Para todo  $x$  de tipo  $T$  se cumple  $P(x)$ ”
- ▶  $(\exists x : T) P(x)$ : Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento de tipo  $T$  cumple la propiedad  $P$ .
  - ▶ Se lee “Existe al menos un  $x$  de tipo  $T$  que cumple  $P(x)$ ”

# Cuantificadores

- ▶ La lógica proposicional no alcanza para expresar o describir propiedades que tendran los elementos de un conjunto.
- ▶ Formalmente, ese grado de abstracción se alcanzaría introduciendo **lógica de primer orden**.
- ▶ En la LPO existen **cuantificadores** que permiten predicar sobre algunos o todos los elementos de un conjunto.
- ▶  $(\forall x : T) P(x)$ : Fórmula lógica. Afirma que **todos** los elementos de tipo  $T$  cumplen la propiedad  $P$ .
  - ▶ Se lee “Para todo  $x$  de tipo  $T$  se cumple  $P(x)$ ”
- ▶  $(\exists x : T) P(x)$ : Fórmula lógica. Afirma que **al menos un** elemento de tipo  $T$  cumple la propiedad  $P$ .
  - ▶ Se lee “Existe al menos un  $x$  de tipo  $T$  que cumple  $P(x)$ ”

En la expresión  $(\forall x : T) P(x)$ , la variable  $x$  está **ligada** al cuantificador. Una variable es **libre** cuando no está ligada a ningún cuantificador.



## Ejemplo (semiformal)

- **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.

## Ejemplo (semiformal)

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶ `pred esPrimo( $n : \mathbb{Z}$ ) {`  
     $n$  es mayor que 1 y sólo divisible por sí mismo y la unidad  
}

# Ejemplo (semiformal)

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶ `pred esPrimo( $n : \mathbb{Z}$ ) {`  
     $n$  es mayor que 1 y sólo divisible por sí mismo y la unidad  
}
- ▶ **Ejemplo:** Especificar el problema de, dado un número mayor a 1, indicar si el número es un número primo (con un mini spoiler/ejemplo de especificación).

# Ejemplo (semiformal)

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶ `pred esPrimo( $n : \mathbb{Z}$ ) {`  
     $n$  es mayor que 1 y sólo divisible por sí mismo y la unidad  
}
- ▶ **Ejemplo:** Especificar el problema de, dado un número mayor a 1, indicar si el número es un número primo (con un mini spoiler/ejemplo de especificación).
- ▶ `problema primo(in  $n : \mathbb{Z}$ ) : Bool {`  
    requiere  $\{n > 1\}$   
    asegura  $\{resultado = true \leftrightarrow esPrimo(n)\}$   
}

# Ejemplo

- **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.

# Ejemplo

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado esPrimo que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶  $\text{pred esPrimo}(n : \mathbb{Z}) \{$   
     $n > 1 \wedge (\forall n' : \mathbb{Z})(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$   
}

# Ejemplo

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado esPrimo que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶  $\text{pred esPrimo}(n : \mathbb{Z}) \{$   
     $n > 1 \wedge (\forall n' : \mathbb{Z})(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$   
}
- ▶ **Observación:**  $x \bmod y$  se indefine si  $y = 0$ .
- ▶ **Ejemplo:** Especificar el problema de, dado un número mayor a 1, indicar si el número es un número primo.

# Ejemplo

- ▶ **Ejemplo:** Crear un predicado `esPrimo` que sea **Verdadero** si y sólo si el número  $n$  es un número primo.
- ▶  $\text{pred esPrimo}(n : \mathbb{Z}) \{$   
     $n > 1 \wedge (\forall n' : \mathbb{Z})(1 < n' < n \rightarrow_L n \bmod n' \neq 0)$   
}
- ▶ **Observación:**  $x \bmod y$  se indefine si  $y = 0$ .
- ▶ **Ejemplo:** Especificar el problema de, dado un número mayor a 1, indicar si el número es un número primo.
- ▶  $\text{problema primo}(\text{in } n : \mathbb{Z}) : \text{Bool} \{$   
    requiere  $\{n > 1\}$   
    asegura  $\{\text{resultado} = \text{true} \leftrightarrow \text{esPrimo}(n)\}$   
}



# Operando con cuantificadores

- **Ejemplo:** Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:

$$(\forall n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0).$$

# Operando con cuantificadores

- ▶ **Ejemplo:** Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:  
 $(\forall n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$ .
- ▶ **Ejemplo:** Existe un entero entre 1 y 10 que es par:  
 $(\exists n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0)$ .

# Operando con cuantificadores

- ▶ **Ejemplo:** Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:  
 $(\forall n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0)$ .
- ▶ **Ejemplo:** Existe un entero entre 1 y 10 que es par:  
 $(\exists n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0)$ .
- ▶ En general, si queremos decir que todos los enteros  $x$  que cumplen  $P(x)$  también cumplen  $Q(x)$ , decimos:  
 $(\forall x : \mathbb{Z})(P(x) \rightarrow Q(x))$ .

# Operando con cuantificadores

- ▶ **Ejemplo:** Todos los enteros entre 1 y 10 son pares:  
 $(\forall n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \rightarrow n \bmod 2 = 0).$
- ▶ **Ejemplo:** Existe un entero entre 1 y 10 que es par:  
 $(\exists n : \mathbb{Z})(1 \leq n \leq 10 \wedge n \bmod 2 = 0).$
- ▶ En general, si queremos decir que todos los enteros  $x$  que cumplen  $P(x)$  también cumplen  $Q(x)$ , decimos:  
 $(\forall x : \mathbb{Z})(P(x) \rightarrow Q(x)).$
- ▶ Para decir que existe un entero que cumple  $P(x)$  y que también cumple  $Q(x)$ , decimos:  
 $(\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge Q(x)).$

# Operando con cuantificadores

- La **negación** de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

# Operando con cuantificadores

- ▶ La **negación** de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

- ▶  $\neg(\forall n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow (\exists n : \mathbb{Z})\neg P(n)$

*No es cierto que todos cumplen  $P$  sí y sólo si existe un elemento que no cumple  $P$*

# Operando con cuantificadores

- La **negación** de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

$$\text{► } \neg(\forall n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow (\exists n : \mathbb{Z})\neg P(n)$$

*No es cierto que todos cumplen  $P$  sí y sólo si existe un elemento que no cumple  $P$*

**¡Qué no es lo mismo que:**

*Ningún elemento cumple  $P$  sí y sólo si existe un elemento que no cumple  $P$*

# Operando con cuantificadores

- ▶ La **negación** de un cuantificador universal es un cuantificador existencial, y viceversa:

$$\neg(\forall n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow (\exists n : \mathbb{Z})\neg P(n)$$

*No es cierto que todos cumplen  $P$  sí y sólo si existe un elemento que no cumple  $P$*

**¡Qué no es lo mismo que:**

*Ningún elemento cumple  $P$  sí y sólo si existe un elemento que no cumple  $P$*

$$\neg(\exists n : \mathbb{Z})P(n) \leftrightarrow (\forall n : \mathbb{Z})\neg P(n).$$

*No existe un elemento que cumple  $P$  sí y sólo si todos los elementos no cumplen  $P$*



# Operando con cuantificadores

- Un cuantificador universal **generaliza la conjunción**:

$$\begin{aligned} & (\forall n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b \rightarrow P(n)) \wedge P(b+1) \\ \Leftrightarrow & (\forall n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b+1 \rightarrow P(n)). \end{aligned}$$

# Operando con cuantificadores

- Un cuantificador universal **generaliza la conjunción**:

$$\begin{aligned} & (\forall n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b \rightarrow P(n)) \wedge P(b+1) \\ \Leftrightarrow & (\forall n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b+1 \rightarrow P(n)). \end{aligned}$$

- Un cuantificador existencial generaliza la disyunción:

$$\begin{aligned} & (\exists n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b \wedge P(n)) \vee P(b+1) \\ \Leftrightarrow & (\exists n : \mathbb{Z})(a \leq n \leq b+1 \wedge P(n)). \end{aligned}$$