

LOGICA E ALGEBRA

11 luglio 2014

Parte seconda

Esercizio 1

Si consideri la formula

$$\forall x \exists y (A_1^2(x, y) \Rightarrow A_1^1(y)) \Rightarrow (\exists x \forall y A_1^2(x, y) \Rightarrow \exists y A_1^1(y))$$

- 1) Si dica se, nella struttura interpretativa che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} e in cui $A_1^2(x, y)$ significa x divide y e $A_1^1(x)$ significa x non è un numero primo, la formula è vera, soddisfacibile ma non vera, falsa
- 2) Si porti la formula data in forma normale prenessa e poi in forma di Skolem.
- 3) Si dimostri che la formula data è logicamente valida.

Esercizio 2

$$\text{Sia } G = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, M.C.D.(m, n) = 1, n \text{ divide } 15 \right\}.$$

- 1) Si dimostri che G è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$.
- 2) Si provi che $(\mathbb{Z}, +)$ è un sottogruppo normale di G .
- 3) Si provi che la relazione $\rho \subseteq G \times G$, definita ponendo $(a, b) \in \rho$ se e solo se $a - b \in \mathbb{Z}$, è una relazione di congruenza su G .
- 4) Si provi che ogni ρ -classe contiene uno e un solo elemento di G compreso fra 0 ed 1 (1 escluso) e si dica quanti elementi contiene il gruppo G/ρ (si considerino le frazioni ridotte ai minimi termini).

Motivare ogni risposta