Vecteurs aléatoires

Exercice 1 (Indépendance). Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, à valeurs respectivement dans $(E_1, \mathscr{A}_1), \ldots, (E_n, \mathscr{A}_n)$. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathscr{A}_i = \sigma(\mathscr{C}_i)$ avec $\mathscr{C}_i \ni E_i$ stable par intersection finie. Montrer l'équivalence entre :

a) Pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{C}_1 \times \cdots \times \mathscr{C}_n$,
$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \quad = \quad \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

b) Pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n$,
$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) \quad = \quad \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n).$$

c) Pour toutes fonctions mesurables positives $h_1 \colon E_1 \to \mathbb{R}, \ldots, h_n \colon E_n \to \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\left[h_1(X_1) \times \cdots \times h_n(X_n)\right] \quad = \quad \mathbb{E}\left[h_1(X_1) \times \cdots \times h_n(X_n)\right].$$

Exercice 2 (Fonction de répartition vectorielle). Soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire. Soit $F_{\underline{X}} \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ la fonction définie par
$$F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_n) \quad := \quad \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n).$$

a) Montrer que $F_{\underline{X}}$ caractérise la loi du vecteur aléatoire $\underline{X}$.

b) A quelle condition sur $F_{\underline{X}}$ les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (Convolutions). Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer la loi de $Z := X + Y$ dans chacun des cas particulier suivants :

a) $X \sim \mathscr{P}(\lambda), Y \sim \mathscr{P}(\mu)$.

b) $X \sim \mathscr{B}(n, p), Y \sim \mathscr{B}(m, p)$.

c) $X \sim \mathscr{U}(-1, 1), Y \sim \mathscr{U}(-1, 1)$.

d) $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2), Y \sim \mathscr{N}(\nu, \tau^2)$.

e) $X \sim \Gamma(r, \lambda), Y \sim \Gamma(s, \lambda)$.

Exercice 4 (Loi du chi-2). Soient $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$uplet de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes. Déterminer la loi de $\|\underline{X}\|^2 := X_1^2 + \cdots + X_n^2$.

Exercice 5 (Matrice de covariance). Soit $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbb{E}[\|\underline{X}\|^2] < \infty$. On appelle *matrice de covariance* de $\underline{X}$ la matrice $\Gamma = (\Gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où
$$\Gamma_{ij} \quad := \quad \mathbb{E}\left[X_i X_j\right] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j].$$

a) Vérifier que Γ est une matrice symétrique positive. Est-elle définie positive ?

b) Que dire de Γ lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes ? Et la réciproque ?

c) On fixe une matrice (déterministe) $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et on pose $\underline{Y} := A\underline{X}$. Déterminer la matrice de covariance de $\underline{Y}$, en fonction de celle de $\underline{X}$.

d) Montrer que toute matrice symétrique positive est une matrice de covariance.

Exercice 6 (Énigme). Déterminer les lois $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{R}_+$ ayant la propriété suivante : pour $n \geq 1$, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{L}$, alors $n \min(X_1, \ldots, X_n)$ est de loi $\mathcal{L}$.

Exercice 7 (Partie entière/fractionnelle). On note $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ la partie entière de x et $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnelle. Quelle est la loi de $(\lfloor X \rfloor, \{X\})$ si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$?

Exercice 8 (Coordonnées polaires).

a) Montrer que pour toute fonction mesurable $h\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad = \quad \int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

b) Retrouver en particulier l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \sqrt{2\pi}.$$

c) Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $\mathscr{N}(0,1)$. On note (R,Θ) l'écriture du point (X,Y) en coordonnées polaires. Trouver la loi de (R,Θ).

Exercice 9 (Problème de couple). Soit $\lambda,\mu > 0$ et (X,Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{\lambda\mu}{y} e^{-\frac{\lambda x}{y}-\mu y}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(y).$$

a) Déterminer la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

b) Montrer que le couple $\left(\frac{X}{Y}, Y\right)$ admet une densité que l'on explicitera.

c) En déduire $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Encore un problème de couple). Soient X et Y deux variables indépendantes de lois respectives $\Gamma(r,\lambda)$ et $\Gamma(s,\lambda)$, avec $r,s,\lambda > 0$. On pose $Z := X+Y$ et $U := X/Z$. Quelle est la loi du couple (Z,U) ? En déduire la *formule des compléments* :

$$\int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Exercice 11 (Ratio). Quelle est la loi de X/Y si X,Y sont indépendantes de loi $\mathscr{N}(0,1)$?

Exercice 12 (Isotropie gaussienne).

a) Soient X,Y,Z des variables indépendantes $\mathscr{N}(0,1)$. Trouver la loi de (U,V,W) où

$$U := \frac{1}{3}(2X-2Y+Z), \qquad V := \frac{1}{3}(X+2Y+2Z); \qquad W := \frac{1}{3}(2X+Y-2Z).$$

b) Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables indépendantes, de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = (A_{ij})_{1\le ij\le n}$ pour que les vecteurs aléatoires $\underline{X} := (X_1,\dots,X_n)$ et $\underline{Y} := A\underline{X}$ aient la même loi.