

INTÉGRALE DE WIENER

Exercice 1 (Propriétés générales). Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $t \geq 0$ on pose

$$M_t := \int_0^t f(s) \, dB_s.$$

1. Montrer que $(M_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien à accroissements indépendants.
2. Montrer que $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.
3. Construire une martingale à partir de $(M_t^2)_{t \geq 0}$.
4. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Construire une martingale à partir de $(e^{\theta M_t})_{t \geq 0}$.
5. Pour quels choix de f le processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est-il un mouvement brownien ?
6. Soit $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et $N_t := \int_0^t g(s) \, dB_s$. À quelle condition $(M_t)_{t \geq 0}$ et $(N_t)_{t \geq 0}$ sont-ils indépendants ?
7. On suppose maintenant seulement que $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, esquisser pourquoi les résultats précédents sont toujours valables.

Exercice 2 Soit (φ_n) une base Hilbertienne de $L^2(0, 1)$. Montrer que pour toute fonction $f \in L^2(0, 1)$, on a \mathbb{P} -presque sûrement

$$\int f(t) \, dB_t = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \int_0^1 \varphi_n(t) \, dB_t.$$

Exercice 3 Pour quels nombres réels a, b le processus

$$X_t = \int_0^t \left(a + b \frac{u}{t} \right) \, dB_u$$

est-il un mouvement brownien ?

Exercice 4 Que dire du processus $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par la formule suivante ?

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s} \, dB_s.$$

Exercice 5 (Pont brownien). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $(Z_t)_{0 \leq t < 1}$ défini par

$$Z_t := a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} \, dB_s \quad (0 \leq t < 1).$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0 \leq t < 1}$ est un processus gaussien dont on explicitera les paramètres.
2. Que dire de ce processus dans le cas $a = b = 0$?
3. Montrer que lorsque $t \rightarrow 1$, on a $Z_t \rightarrow b$ au sens de la convergence L^2 .
4. Montrer que la convergence a en fait lieu presque-sûrement.

Exercice 6 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Soit V_0 une variable aléatoire réelle indépendante de $(B_t)_{t \geq 0}$, et $b, \sigma > 0$. On définit un processus $(V_t)_{t \geq 0}$ par

$$V_t := e^{-bt} \left(V_0 + \sigma \int_0^t e^{bs} dB_s \right).$$

1. Montrer que V_t converge en loi lorsque $t \rightarrow \infty$, et déterminer la limite.
2. On suppose désormais que $V_0 \sim \mathcal{N} \left(0, \frac{\sigma^2}{2b} \right)$. Montrer que $(V_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire dont on précisera les paramètres.
3. Que dire du processus $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$ défini ci-dessous ?

$$W_t := \frac{\sigma}{\sqrt{2b}} e^{-bt} B_{e^{2bt}}.$$

Exercice 7 (Intégration par partie). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Établir que pour tout $t \geq 0$, on a presque-sûrement

$$\int_0^t f(s) dB_s + \int_0^t f'(s) B_s ds = f(t) B_t.$$

2. Sous les hypothèses supplémentaires $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et $\int_0^\infty |f'(t)| \sqrt{t} dt < \infty$, en déduire

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s = - \int_{\mathbb{R}_+} f'(s) B_s ds.$$

Exercice 8 Quelle est la loi de $\int_0^t B_s \cos(t-s) ds$?

Exercice 9 Quelle est la loi de $\int_0^1 t^n B_t dt$?

Exercice 10 (Espace gaussien). Soit H^B l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t \geq 0}$:

$$H^B := \overline{\text{Vect}(B_t : t \geq 0)}^{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}.$$

1. Établir l'égalité

$$H^B = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s : f \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

2. Soit $X \in H^B$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(a) $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s$

(b) $\mathbb{E}[XB_t] = \int_0^t f(s) ds$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.