

FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES**Exercice 1** (Propriétés élémentaires).

- Montrer que φ_X est bornée et uniformément continue.
- Montrer que φ_X est de type positif : pour tout $n \geq 1$ et tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice complexe $\{\varphi_X(t_j - t_k)\}_{1 \leq j, k \leq n}$ est hermitienne positive.
- Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Montrer que $\varphi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, et calculer $\varphi_X^{(n)}$.
- Donner le développement de Taylor de φ_X d'ordre 2 en zéro lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty, \mathbb{E}[X] = 0$.
- Plus généralement, montrer que si $\mathbb{E}[e^{a|X|}] < \infty$ pour un certain $a > 0$, alors φ_X s'étend en une unique fonction holomorphe dans $D(0, a)$ vérifiant

$$\varphi_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} \mathbb{E}[X^n].$$

Exercice 2 (Lois usuelles). Calculer Φ_X dans chacun des cas suivants.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $X \sim \mathcal{U}(\{-1, +1\})$. | f) $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$. |
| b) $X \sim \mathcal{B}(p)$. | g) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. |
| c) $X \sim \text{Bin}(n, p)$. | h) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. |
| d) $X \sim \mathcal{G}(p)$. | i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$. |
| e) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. | |

Exercice 3 (Formule d'inversion de Fourier). On se propose de montrer que si $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue et bornée, donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- Vérifier que f est bien continue et bornée.
- Justifier que pour tous $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt.$$

- En déduire que pour tous $\sigma > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iyt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \varphi_X(t) dt.$$

- En déduire que pour toute fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, on a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] dy \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) dy.$$

- Vérifier que le membre de gauche vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X + \sigma s)] e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ et conclure.

Exercice 4 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} , et X une variable aléatoire réelle. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $A \in \mathcal{G}$, on a

$$\mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{P}(A).$$

Montrer qu'alors X est indépendante de \mathcal{G} .**Exercice 5** Soit X une variable aléatoire réelle bornée. Montrer que φ_X ne peut pas être à support compact.**Exercice 6** (Cauchy). Soit λ un réel strictement positif.

- Vérifier que $f: x \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ est une densité (dite densité de Laplace de paramètre λ), et calculer la fonction caractéristique associée.
- En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre λ .
- Que peut-on dire de la somme de deux variables aléatoires de Cauchy indépendantes ?

Exercice 7 (Atomes). Soit X une variable aléatoire. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \varphi_X(t) dt \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(X = x).$$

Exercice 8 (Transformations). Montrer que si φ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle, alors $\overline{\varphi}$, $\operatorname{Re}(\varphi)$, $|\varphi|^2$ et $e^{\varphi-1}$ en sont aussi.

Exercice 9 (Somme d'uniformes). Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $(-1, 1)$. On pose $Z := X + Y$.

- Montrer que Z admet une densité que l'on calculera.
- Calculer par ailleurs φ_Z .
- En déduire la fonction caractéristique de la loi de densité $t \mapsto c \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$, ainsi que la valeur de la constante c .

Exercice 10 (Laplace). Soient W, X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Déterminer la fonction caractéristique de WX .
- En déduire la loi de $WX + YZ$.
- Montrer que $|WX + YZ|$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 11 Soit Q une loi symétrique sur \mathbb{R} , avec la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. de loi Q , alors $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ suit encore la loi Q . Trouver Q .

Exercice 12 Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi inconnue, de moyenne 0 et de variance 1. De plus, $X + Y$ est indépendante de $X - Y$. Quelle est la loi de X et Y ?

Exercice 13 . Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi inconnue, de carré intégrable. De plus, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ suit aussi la même loi que X et Y .

- Quelle est l'espérance de X ?
- Déterminer une équation fonctionnelle satisfaite par φ_X .
- Résoudre cette équation à l'aide d'un développement de Taylor, et trouver la loi de X .

Exercice 14 (Formule de Stirling). Soit X_t une variable aléatoire de loi $\Gamma(1, t)$, c'est-à-dire de densité $\Gamma(t)^{-1} \mathbf{1}_{x>0} e^{-x} x^{t-1}$.

- Calculer la densité de $Y_t = (X_t - t)/\sqrt{t}$ et sa fonction caractéristique.
- En déduire que

$$\frac{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iu\sqrt{t}} \left(1 - \frac{iu}{\sqrt{t}}\right)^{-t} du.$$

- Démontrer la formule de Stirling sous la forme suivante :

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}.$$

Exercice 15 Est-ce que la fonction $\cos(t^2)$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle ?