

ESPACES MESURÉS

**Exercice 1** (Rappels). Soient  $(A_n)_{n \geq 1}$  des événements d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

a) Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

b) On suppose que  $\mathbb{P}(A_n) = 1$  pour tout  $n \geq 1$ . Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

c) On suppose que  $(A_n)_{n \geq 1}$  est décroissante. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

d) Justifier que les ensembles suivants sont des événements, et les décrire avec des mots.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

e) Démontrer le premier Lemme de Borel-Cantelli :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \implies \quad \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

f) Démontrer la formule du crible de Poincaré (inclusion-exclusion) : pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

**Exercice 2** Soit  $(A_n)$  une suite décroissante d'ensembles mesurables et  $\mu$  une mesure. A-t-on toujours  $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$  ?

**Exercice 3** (La tribu  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ). Montrer que les classes suivantes engendrent la même tribu sur  $\mathbb{R}$  :

- a) Les ouverts de  $\mathbb{R}$ .
- b) Les fermés de  $\mathbb{R}$ .
- c) Les intervalles de la forme  $(a, b)$  avec  $-\infty < a < b < +\infty$ .
- d) Les intervalles de la forme  $(-\infty, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- e) Les intervalles de la forme  $(-\infty, t]$ ,  $t \in \mathbb{Q}$ .

**Exercice 4** (Tribu engendrée par une application). Soit  $f$  une application d'un ensemble  $\Omega$  vers un espace mesuré  $(E, \mathcal{B})$ . Montrer que

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\},$$

définit une tribu sur  $\Omega$ . On l'appelle la tribu engendrée par l'application  $f$ .

**Exercice 5** (Lemme des classes monotones). Soit  $\Omega$  un ensemble, et  $\mathcal{M}$  un ensemble de parties de  $\Omega$ . On rappelle que  $\mathcal{M}$  est une classe monotone si elle vérifie :

- $\Omega \in \mathcal{M}$  ;
- si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{M}$ , alors  $\bigcup_{n \geq 1} A_n$  est aussi dans  $\mathcal{M}$  ;
- si  $A, B$  sont des éléments de  $\mathcal{M}$  avec  $A \subseteq B$ , alors  $B \setminus A$  est aussi dans  $\mathcal{M}$ .

- a) Montrer que les tribus sont exactement les classes monotones stables par intersection finie.
- b) Soit  $\mathcal{M}$  une classe monotone et soit  $C \in \mathcal{M}$ . Montrer que  $\mathcal{M}_C := \{A \in \mathcal{M} : A \cap C \in \mathcal{M}\}$  est encore une classe monotone.
- c) En déduire le lemme des classes monotones : si  $\mathcal{C}$  est stable par intersections finies, alors toute classe monotone qui contient  $\mathcal{C}$  contient aussi  $\sigma(\mathcal{C})$ .
- d) Application : montrer que, si  $\mathcal{C}$  est stable par intersection finie, toute mesure de probabilité sur  $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$  est entièrement déterminée par ses valeurs sur  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 6** Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble fini est nulle.

**Exercice 7** (Fonction de répartition). Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On appelle fonction de répartition associée à  $\mu$  la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$F(x) := \mu((-\infty, x]).$$

- a) Montrer que  $\mu$  est caractérisée par sa fonction de répartition.
- b) Montrer que  $F$  est croissante et continue à droite et calculer ses limites en  $\pm\infty$ .
- c) Réciproquement, montrer que toute fonction croissante, continue à droite et de limites 0 et 1 en  $\pm\infty$  est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .
- d) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\mu(\{a\})$  en fonction de  $F$ .
- e) Montrer que l'ensemble des atomes  $\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{a\}) > 0\}$  est au plus dénombrable.
- f) Représenter le graphe d'une fonction de répartition « générale ».
- g) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Démontrer l'identité

$$\int_a^\infty (1 - F(x))dx = \int_{\mathbb{R}} (x - a)_+ \mu(dx).$$

**Exercice 8** Donner la mesure de Lebesgue des ensembles suivants :  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , l'ensemble de Cantor, l'ensemble des entiers algébriques.

**Exercice 9** Soit  $\mu$  une mesure borélienne finie sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout borélien  $X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ouvert  $O$  et un fermé  $F$  tels que  $F \subset X \subset O$  et tel que  $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$ .

**Exercice 10** Montrer qu'il existe une unique mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $a < b$ ,  $\mu([a, b]) = \int_a^b |x|dx$ .

**Exercice 11** (Cas particuliers).

- a) Lois discrètes : soit  $\Omega$  un ensemble fini ou dénombrable, et soit  $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$  une fonction telle que  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Pour  $A \subseteq \Omega$ , on pose :

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Vérifier que  $\mathbb{P}$  définit une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . Rappeler les définitions des lois discrètes suivantes : uniforme, Bernoulli, Binômiale, Géométrique, Poisson.

- b) Lois à densité : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction borélienne avec  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ . Pour  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on pose :

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f(x)dx.$$

Vérifier que  $\mathbb{P}$  définit une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Rappeler les densités des lois suivantes : uniforme, Exponentielle, Gaussienne, Cauchy, Gamma.

**Exercice 12** (Tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^2$ ) On note  $\Sigma_1$  la plus petite tribu sur  $\mathbb{R}^2$  qui rend les applications coordonnées (à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ) mesurables,  $\Sigma_2$  la tribu  $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (engendrée par les produits de boréliens réels), et  $\Sigma_3$  la tribu des boréliens de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que  $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$ .