THÉORÈME DE GIRSANOV

Dans cette feuille, $(B_t)_{t\geq 0}$ *désigne un mouvement brownien réel sur l'espace filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 (Dérive). Soit $a > 0$. On rappelle que $T := \inf\{t \geq 0 \colon B_t \geq a\}$ a pour densité

$$f_T(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Étant donné $b \in \mathbb{R}$, on pose $\widetilde{B}_t := B_t - bt$ et on s'intéresse à $\widetilde{T} := \inf\{t \geq 0 \colon \widetilde{B}_t \geq a\}$.

1. Trouver une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ sous laquelle $\{\widetilde{B}_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   D'après le théorème de Girsanov, si $\mathbb{Q}$ est définie par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t}$ pour un certain L qui est une martingale locale sous $\mathbb{P}$, alors pour toute martingale locale M de $\mathbb{P}$, l'expression $\tilde{M} = M - \langle M, L \rangle$ définie une martingale locale sous $\mathbb{Q}$.
   Ici il s'agit (comme souvent) de procéder “à l'envers”, nous allons donc construire L et donc $\mathbb{Q}$ pour que le théorème s'applique.
   On veut écrire $\tilde{B}$ sous la forme $M - \langle M, L \rangle$ donc naturellement on veut prendre $M = B$ et donc $\langle B, L \rangle = bt$. Comme L doit être une martingale locale on voit qu'on doit prendre $L_t = bB_t$ et on doit donc définir $\mathbb{Q}$ par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid_t = e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$.
   Attention, il reste une étape ! En effet pour que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid_t = e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$ définisse bien une probabilité (et que l'on n'ait donc pas raconté n'importe quoi), il faut vérifier que $e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$ est bien une martingale sous $\mathbb{P}$. Ici c'est clair puisque ça n'est rien d'autre qu'une martingale exponentielle d'un mouvement Brownien.
   Par le théorème de Girsanov, $\tilde{B}$ est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$ mais comme son crochet est t et que $\tilde{B}_0 = 0$ on a bien un mouvement Brownien.

2. En déduire, sous la mesure $\mathbb{P}$, la fonction de répartition de $\widetilde{T}$ puis la loi de $Z := \sup_{t\geq 0} \widetilde{B_t}$.

On connaît par l'énoncé la densité de $\tilde{T}$ sous $\mathbb{Q}$, on obtient donc celle sous $\mathbb{P}$ comme :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{T} \leq t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{d\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_t 1_{\tilde{T}\leq t})\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}(\frac{d\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_t| \mathcal{F}_{\tilde{T}\wedge t})1_{\tilde{T}\leq t})\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{d\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_{\tilde{T}\wedge t} 1_{\tilde{T}\leq t})\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-b(a+b\tilde{T})+\frac{b^2}{2}\tilde{T}}1_{\tilde{T}\leq t})\\ &= \int_0^t e^{-ba-\frac{b^2}{2}x}\frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}e^{-\frac{a^2}{2x}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pour calculer la loi de Z, on observe que $\mathbb{P}(Z \geq a) = \mathbb{P}(\tilde{T} < \infty) = \int_0^\infty e^{-ba-\frac{b^2}{2}x}\frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}}e^{-\frac{a^2}{2x}}$. Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la méthode suivante

$$\begin{aligned}e^{2ba}\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(\tilde{T} < \infty) &= e^{ba}\int_0^\infty \frac{a}{x^{3/2}}e^{-\frac{b^2}{2}x-\frac{a^2}{2x}}\\ &= \int_0^\infty \frac{a}{x^{3/2}}\exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}})^2\mathrm{d}x\\ &= \int_{a/b}^\infty \frac{a}{x^{3/2}}\exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}})^2\mathrm{d}x + \int_{b/a}^\infty ax^{3/2}\exp -\frac{1}{2}(\frac{b}{\sqrt{x}}-a\sqrt{x})^2\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= \int_{a/b}^\infty (\frac{a\mathrm{d}x}{x^{3/2}}+\frac{a\frac{b^2}{a^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{x\frac{b^2}{a^2}}})\exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}})^2\\ &= \int 2d(b\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}})\exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x}-\frac{a}{\sqrt{x}})^2\\ &= 2\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

avec un changement de variable $x \to 1/x$ puis un changement de variable $x \to \frac{a^2}{b^2}x$ et une séparation de l'intégrale en 2.

Exercice 2 (Examen 2015). Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on considère l'EDS

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1+X_t^2}\,dt, \qquad X_0 = x.$$

1. Justifier que cette équation différentielle stochastique admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.

Le coefficient devant $\mathrm{d}t$ est Lipshitz en x (et indépendant de t)

2. Justifier que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, où

$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \frac{X_s}{1+X_s^2}dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{X_s^2}{(1+X_s^2)^2}ds\right\}.$$

Z est de la forme $e^{M-\frac{1}{2}\langle M\rangle}$ avec $M = \int \frac{X_s}{1+X_s^2}\mathrm{d}B_s$ est une martingale locale donc c'est une martingale locale. Par ailleurs, comme $|x/(1+x^2)| \leq 1$ pour tout x, la condition de Novikov (voir exercice 4) est clairement vérifiée donc Z est une vraie martingale.

3. Calculer la différentielle stochastique de $\left(\ln\left(1+X_t^2\right)\right)_{t\geq 0}$ et en déduire que pour $t \geq 0$,

$$\frac{1+X_t^2}{1+x^2} = Z_t^2 \exp\left\{\int_0^t \frac{1-2X_s^2}{\left(1+X_s^2\right)^2} ds\right\}.$$

Les dérivées de $\ln(1+x^2)$ sont $\frac{2x}{1+x^2}$ et $\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln(1+X^2) &= \frac{2X}{1+X^2}\mathrm{d}X + \frac{1-X^2}{(1+X^2)^2}\mathrm{d}\langle X\rangle \\ &= \frac{2X}{1+X^2}\mathrm{d}B - \frac{2X^2}{(1+X^2)^2}\mathrm{d}t + \frac{1-X^2}{(1+X^2)^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation recherchée en réécrivant la dérivée stochastique sous forme intégrale et en prenant l'exponentielle. (Attention au point de départ dans l'expression intégrale de $\ln(1+X^2)$.)

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle $(X_s - x)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien.

Comme dans l'exercice 1, on cherche une martingale locale L telle que $X = B - \langle B, L\rangle$. Ici on veut clairement poser $L = \int \frac{X_t}{1+X^2}\mathrm{d}B$ (qui n'est rien d'autre que la martingale locale M de la question 2). D'après la question 2, on peut définir une probabilité $\mathbb{Q}$ par $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = Z_t$.
Par le théorème de Girsanov sous la probabilité $\mathbb{Q}$, $X - x$ est une martingale mais comme son crochet est t et que le processus part de 0, c'est un mouvement Brownien.

5. On fixe $t \geq 0$. En déduire que pour $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t)\right] = \widehat{h}(x)$ avec

$$\widehat{h}(x) := \mathbb{E}\left[h(x+B_t)\left(\frac{1+x^2}{1+(x+B_t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(x+B_s)^2}{\left(1+(x+B_s)^2\right)^2} ds\right\}\right].$$

On écrit $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{Q}$ en indice pour indiquer la probabilité sous laquelle on prend l'espérance. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(h(X_t)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h(X_t)\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h(X_t)Z_t^{-1}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[h(X_t)\Big(\frac{1+x^2}{1+X^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2X_s^2}{(1+X_s^2)^2}\Big)\Big] \end{aligned}$$

La dernière égalité consiste juste à remarquer que X_t est un Brownien sous $\mathbb{Q}$ donc que l'on écrive $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ d'une fonction de X_t ou $\mathbb{E}$ d'une fonction de B_t, on fait toujours la même intégrale par rapport à la loi du mouvement Brownien.

6. Soit ζ une variable aléatoire indépendante de $(B_s)_{s\geq 0}$, de densité $x \mapsto (\pi(1+x^2))^{-1}$. On note $(X_s^\star)_{s\geq 0}$ la solution de l'EDS ci-dessus avec $X_0^\star = \zeta$. Ainsi, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t^\star)|\zeta\right] = \widehat{h}\left(\zeta\right)$.
   (a) Vérifier que le processus $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien restreint à $[0,t]$.

   On calcule les covariances entre différents temps, voir TD 3

   (b) En déduire que pour tout $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(x)}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{1+x^2} dx.$$

On écrit les calculs avant de les justifier et de les expliquer ligne à ligne.

$$\begin{aligned}\int \frac{\hat{h}(x)}{1+x^2} &= \mathbb{E}\int h(x+B_t)\Big(\frac{1}{(1+x^2)(1+(x+B_t)^2)}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\big(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(x+B_s)^2}{(1+(x+B_s)^2)^2}\big)\\
&= \mathbb{E}\int h(y)\big(\frac{1}{(1+(y-B_t)^2)(1+y^2)}\big)^{\frac{1}{2}}\exp\big(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(y+B_s-B_t)^2}{(1+(y+B_s-B_t)^2)^2}\big)\\
&= \int \frac{h(y)}{1+y^2}\mathbb{E}\big(\frac{1+y^2}{1+(y-B_t)^2}\big)^{\frac{1}{2}}\exp\big(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(y+B_s-B_t)^2}{(1+(y+B_s-B_t)^2)^2}\big)\\
&= \int \frac{h(y)}{1+y^2}\hat{1}(y) = \int \frac{h(y)}{1+y^2}.\end{aligned}$$

Dans la première ligne on écrit la définition du terme de droite et on échange l'espérance et l'intégrale (tout est positif). Dans la deuxième ligne, on fait un changement de variable dans l'intégrale $y = x + B_t$. Dans la troisième ligne on ré-échange intégrale et espérance mais maintenant on peut sortir $h(y)$. Le point clé est que le terme qui reste dans l'espérance est de la même forme que celui pour $\hat{h}$ mais en remplaçant le brownien B par le Brownien $B_{t-s} - B_t$ et en prenant la fonction $h = 1$! C'est ce qu'on a écrit dans la dernière ligne, avec le fait que pour la fonction $h = 1$, d'après la question 5 l'expression vaut toujours 1.

(c) Pour $t \geq 0$, quelle est la loi de $X_t^\star$?

On constate que pour tout t, et pour toute fonction mesurable bornée h, on a

$$\mathbb{E}(h(X_t^*)) = \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{1+x^2}\mathbb{E}(h(X^*)|X_0^* = x) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\hat{h}(x)}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int \frac{h(x)}{\pi(1+x^2)}$$

donc pour tout t, X_t^* a pour densité $1/\pi(1+x^2)$. X^* est un processus stationnaire !

Exercice 3 (Fonctionnelles quadratiques du brownien). Pour $a, b, t \geq 0$, on cherche ici à calculer

$$I(a,b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,ds\right\}\right].$$

1. Calculer $I(a, 0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.

C'est juste une intégrale gaussienne $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-(a+\frac{1}{2t})x^2)\mathrm{d}x$.

2. Trouver $\psi \in M^1_{\text{loc}}$ tel que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :

$$Z_t := \exp\left\{-b\int_0^t B_s\,dB_s - \int_0^t \psi(s)\,ds\right\}.$$

On calcule la différentielle stochastique :

$$\mathrm{d}Z = -b\mathrm{d}B - \phi\mathrm{d}t + \frac{1}{2}b^2B^2\mathrm{d}t$$

donc on voit qu'on doit prendre $\psi = \frac{b^2B^2}{2}$.

3. Exprimer Z_t en fonction de b, t, B_t et $\int_0^t B_s^2\,ds$ seulement, et en déduire que

$$I(a,b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right)B_t^2\right\}\right]\exp\left(-\frac{bt}{2}\right).$$

On sait que $\mathrm{d}B^2 = 2B\mathrm{d}B + \mathrm{d}t$ et donc que $\int B_s \mathrm{d}B_s = B_t^2/2 + t/2$. On en déduit que $Z_t = \exp -\frac{b}{2}B_t^2 - \frac{bt}{2} - \frac{b^2}{2}\int B^2 \mathrm{d}s$. Le résultat en découle immédiatement.

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_t := B_t + b\int_0^t B_s\, ds$ soit un mouvement brownien.

On cherche L tel que $\langle B, L\rangle = -b\int B\mathrm{d}s$, clairement on peut prendre $L = -b\int B_s \mathrm{d}B_s$ c'est à dire $L = -\frac{b}{2}B^2 + \frac{tb}{2}$. On veut poser formellement $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = e^{L - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle}$ et pour que cela définisse bien une probabilité il faut vérifier que l'exponentielle est une vrai martingale. Ici c'est vrai car on a $L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t \leq bt/2$ pour tout t. Sous $\mathbb{Q}$, W est une martingale de variation quadratique égale à t et partant de 0 donc un mouvement brownien.

5. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$B_t = \int_0^t e^{b(s-t)}\, dW_s.$$

On a $d(e^{bt}B_t = e^{bt}dB_t + be^{bt}B_t\mathrm{d}t = e^{bt}\mathrm{d}W_t$. Par ailleurs ces deux processus partent de 0 donc on a bien l'égalité demandée.

6. Pour $t \geq 0$ fixé, expliciter la loi de B_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ et en déduire la formule suivante :

$$I(a,b) = \left\{\cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Sous la mesure $\mathbb{Q}$, comme W est un mouvement Brownien on peut reconnaître que B_t est un processus d'Onstein Ulenbeck partant de 0 (voir TD5). alternativement, $t \to \int_0^t e^{bs}dW$ est une martingale continue à accroissement indépendants et de crochet $\int e^{2bs} = \frac{e^{2bt}-1}{2b}$. C'est donc un Brownien changé de temps et sous $\mathbb{Q}$ la loi de B_t est donc $N(0, \frac{1-e^{-2bt}}{2b})$.
Comme l'expression de la question 3 est une intégrale sous $\mathbb{Q}$ du type donné à la question 1, on en déduit le résultat.

Exercice 4 (Condition de Novikov).⚠ Étant donné $\phi \in M^2_{\mathrm{loc}}$, on pose pour tout $t \geq 0$,

$$Z_\phi(t) := \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s) ds\right\}.$$

Le but est de démontrer que $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ est une martingale sous la condition de Novikov :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\, ds\right\}\right] < \infty. \qquad (\star)$$

1. Que peut-on dire du processus $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ en général ? Et si $\mathbb{E}[Z_\phi(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$?

Le processus Z est toujours une martingale locale positive et donc une surmartingale. Si en plus on sait que $\mathbb{E}(Z(t)) = 1$ pour tout t alors c'est une vrai martingale. (voir l'exercice 1 de la feuille 6).

2. Soit $0 < \lambda < 1$. Trouver $p > 1$ et $0 < \theta < 1$ tels que pour tout $t \geq 0$,

$$Z^p_{\lambda\phi}(t) = Z^\theta_\phi(t)\exp\left\{\frac{1-\theta}{2}\int_0^t \phi^2(s)\, ds\right\}.$$

On a $Z^p_{\lambda\phi} = \exp \lambda p \int \phi \mathrm{d}B - \frac{\lambda^2 p}{2} \int \phi^2 \mathrm{d}s$ tandis que l'autre terme est $\exp(\theta \int \phi \mathrm{d}B - \frac{1}{2} \int \phi^2 \mathrm{d}s)$. On obtient les équations $p\lambda = \theta$ et $1 - 2\theta = -p\lambda^2$ ce qui se résout en $\theta = \frac{1}{2-\lambda}$ et $p = \frac{1}{\lambda(2-\lambda)}$ qui vérifient bien les conditions.

3. En déduire que sous la condition $(\star)$, on a $\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$.

L'idée générale est d'appliquer l'inégalité de Hölder au terme de droite avec des exposants $1/\theta$ et $1/(1-\theta)$ (qui sont bien conjugués) ce qui donne

$$\mathbb{E}(Z^p_{\lambda\phi}) \leq \mathbb{E}(Z_\phi(t))^\theta \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int \phi^2)^{1-\theta}.$$

Le terme de droite est borné par hypothèse et en utilisant le fait que Z_ϕ est une surmartingale, on est donc assez content puisque qu'on a une borne dans L^p alors qu'on cherche à monter une propriété L^1. Malheureusement, on ne peut pas conclure directement par cet argument puisqu'un martingale locale bornée dans Lp n'est pas forcément une vraie martingale (c.f exemple dans l'exercice 9 du TD 6). On doit affiner un peu l'analyse.
Soit T_n une suite croissante de temps d'arrêts tels que $s \to Z_{\lambda\phi}(s \wedge T_n)$ soit une martingale pour tout n et $T_n \to \infty$ p.s. La suite $n \to Z(t \wedge T_n)$ est une martingale à temps discret et la même application de Hölder montre que

$$\mathbb{E}(Z^p_{\lambda\phi}(t \wedge T_n)) \leq \mathbb{E}(Z_\phi(t \wedge T_n))^\theta \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T_n} \phi^2)^{1-\theta} \leq \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int_0^t \phi^2)^{1-\theta}$$

donc la martingale à temps discret $n \to Z_{\lambda\phi}(t \wedge T_n)$ est bornée dans L^p donc elle converge p.s et dans L^1 vers $Z_{\lambda\phi}(t)$.
Remarque : La différence entre la première borne et le véritable argument dans la deuxième partie en utilisant un temps d'arrêt est qu'on a utilisé la croissance en t de l'intégrale $\int_0^t \phi^2$ pour passer du temps aléatoire $t \wedge T_n$ au temps fixé t. C'est similaire à la différence entre une borne L^2 sur une martingale locale et une borne L^1 sur le crochet.

4. Montrer par ailleurs que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}\left[Z_\phi(t)\right]^{\lambda^2} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)\, dB_s\right\}\right]^{2\lambda(1-\lambda)}.$$

On a $Z_{\lambda\phi} = Z_\phi^{\lambda^2} \exp \frac{\lambda-\lambda^2}{2} \int \phi \mathrm{d}B$. On peut appliquer Hölder avec $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{1-\lambda^2}$ et on obtient

$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}[Z_\phi(t)]^{\lambda^2} \mathbb{E}\Big[\exp \frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda} \int \phi \mathrm{d}B\Big]^{1-\lambda^2}.$$

On conclue avec Jensen.

5. Vérifier que le membre droit est fini sous la condition $(\star)$, et conclure.

L'espérance de Z_ϕ est finie par la propriété de surmartingale. Pour le terme exponentiel, on le note $Z_\phi^{\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{4} \int \phi^2 ds$ et on applique Cauchy Schwartz.
Comme le terme de droite est fini, il converge vers $\mathbb{E}(Z_\phi)$ quand λ tends vers 1 et d'après la question 3 on a donc $\mathbb{E}(Z_\phi) \geq 1$ pour tout t. On conclue car Z_ϕ est une surmartingale.