

INTÉGRALE STOCHASTIQUE**Exercice 1** (Martingales locales). Δ

1. La somme de deux martingales locales est-elle encore une martingale locale ?
2. Soit $\{M_t\}_{t \geq 0}$ une martingale locale continue. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \right] < \infty.$$

Montrer que $\{M_t\}_{t \geq 0}$ est en réalité une vraie martingale.

3. Aurait t'on pu conclure en supposant seulement que $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout t (donner une preuve ou un contre exemple) ?
4. On suppose maintenant que M est une martingale locale telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t) < \infty$. Montrer que M est une vraie martingale.
5. Soit $\{M_t\}_{t \geq 0}$ une martingale locale positive telle que $\mathbb{E}[M_0] < \infty$. Montrer que c'est une surmartingale, et que c'est une martingale si et seulement si $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

Exercice 2 (Unicité de l'écriture d'un processus d'Itô). Δ Étant donné $\psi \in M_{\text{loc}}^1$, on pose

$$Z_t := \int_0^t \psi(s) ds \quad (t \geq 0).$$

1. Vérifier que $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est adapté.
2. Montrer que si $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale, alors ψ est nul $\mathbb{P} \otimes dt$ -p.p.
3. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale. On pourra introduire une suite de temps d'arrêts bien choisie.
4. En déduire que l'écriture d'un processus d'Itô $\{X_t\}_{t \geq 0}$ sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s) dB_s + \int_0^t \psi(s) ds,$$

avec $(\psi, \phi) \in M_{\text{loc}}^1 \times M_{\text{loc}}^2$ est unique.

Exercice 3 (Formule d'Itô). Δ Dans chacun des cas suivants, montrer que $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô, calculer sa différentielle stochastique, et déterminer si $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale.

1. $Z_t = B_t + 4t$
2. $Z_t = B_t^2 - t$
3. $Z_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t s B_s ds$
4. $Z_t = B_t^3 - 3t B_t$
5. $Z_t = B_t^2 (B_t^2 - 6t)$
6. $Z_t = B_t (B_t^4 - 10t B_t^2 + 15t^2)$
7. $Z_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$, avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.
8. $Z_t = (\cos B_t, \sin B_t)$

Exercice 4 (Fonction du brownien). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (f'(B_s))^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^t |f''(B_s)| ds \right] < \infty.$$

1. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[f(B_t)] = f(0) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t f''(B_s) ds \right].$$

2. Retrouver la formule donnant les moments de la loi gaussienne.

Exercice 5 (EDP). Soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

1. Montrer que le processus $\{f(t, B_t)\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale, et donner une condition suffisante sur f pour que ce soit une vraie martingale.
2. Que dire de $\{B_t^3 - 3tB_t\}_{t \geq 0}$, $\{B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2\}_{t \geq 0}$ et $\{B_t^5 - 10tB_t^3 + 15t^2B_t\}_{t \geq 0}$?

Exercice 6 (Pont brownien). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $\{Z_t\}_{0 \leq t < 1}$ défini par

$$Z_t = a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

Montrer que $\{Z_t\}_{0 \leq t < 1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dZ_t = \frac{b - Z_t}{1-t} dt + dB_t.$$

Exercice 7 (Cas vectoriel). Soit $\{(B_t, \tilde{B}_t)\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan. Pour $t \geq 0$ on pose :

$$X_t := \exp(B_t) \cos(\tilde{B}_t) \quad \text{et} \quad Y_t := \exp(B_t) \sin(\tilde{B}_t).$$

1. Montrer que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ et $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ sont des martingales de carré intégrable.
2. Le produit $\{X_t Y_t\}_{t \geq 0}$ est-il une martingale ?
3. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ défini par

$$Z_t := (X_t - 1)^2 + (Y_t)^2.$$

Exercice 8 (Carré de Bessel). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un brownien d -dimensionnel.

1. Montrer que $\{\|B_t\|^2\}_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.
2. On considère $d = 3$ à partir de maintenant. Déterminer la loi de $\|B_t\|$ et calculer $\mathbb{E}(1/\|B_t\|)$ et $\mathbb{E}(1/\|B_t\|^2)$ pour tout t .
3. On admet qu'on peut appliquer la formule d'Itô au processus $M_t = 1/\|B_t\|$ même s'il n'est pas défini quand $\|B_t\| = 0$, montrer que c'est une martingale locale. \triangle Elle est bornée dans L^2 mais n'est pas une vraie martingale !