Variables aléatoires réelles

Exercice 1 (Lois usuelles). Dans chaque cas, calculer $\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X), \mathbb{E}[e^{tX}]$ si cela existe.

a) $X \sim \mathscr{U}(n)$ (Uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$).
b) $X \sim \mathscr{B}(p)$ (Bernoulli de paramètre p).
c) $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ (Binomiale de paramètres n et p).
d) $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ (Poisson de paramètre λ).
e) $X \sim \mathscr{G}(p)$ (Géométrique de paramètre de succès p).
f) $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ (Uniforme sur $[a, b]$).
g) $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ (Exponentielle de paramètre λ).
h) $X \sim \mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ (Normale de paramètres μ et σ^2).
i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ (Gamma de paramètres r et λ).
j) $X \sim \mathscr{C}(\lambda)$ (Cauchy de paramètre λ).

Exercice 2 (Changements de variables). Dans chacun des cas suivants, montrer que la variable aléatoire Y admet une densité que l'on explicitera.

a) $Y = \exp(-X)$ avec $X \sim \mathscr{E}(1)$.
b) $Y = \tan(X)$ avec $X \sim \mathscr{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
c) $Y = 1/X$ avec $X \sim \mathscr{C}(\lambda)$.
d) $Y = X^2$ avec $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$.
e) $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et X de densité f quelconque.
f) $Y = \frac{1}{X} - \left\lfloor \frac{1}{X} \right\rfloor$ avec X de densité $x \mapsto \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.
g) $Y = 1/X^2$ avec $X \sim \mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 3 (Intégration par parties gaussienne). Soit X une variable de loi $\mathscr{N}(0, 1)$, et soit $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\mathbb{E}\left[|h'(X)|\right] < \infty$.

a) Montrer que $\mathbb{E}\left[|Xh(X)|\right] < \infty$.
b) Montrer que $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$.
c) Établir la formule d'intégration par parties gaussienne :

$$\mathbb{E}\left[Xh(X)\right] \quad = \quad \mathbb{E}\left[h'(X)\right].$$

d) En déduire $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \geq 0$.
e) Généraliser cet exercice au cas où X est une variable gaussienne générale.

Exercice 4 (Absence de mémoire). Soit X une variable aléatoire positive. On dit que X (ou plutôt sa loi) a la propriété d'*absence de mémoire* si pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s) \quad = \quad \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

a) Vérifier que la loi Exponentielle a la propriété d'absence de mémoire.
b) Trouver toutes les lois qui ont la propriété d'absence de mémoire.

Exercice 5 (Atomes). Soit X une variable aléatoire réelle, et soit

$$\mathscr{A} \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} \colon \mathbb{P}(X = x) > 0\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{A}$ est au plus dénombrable.
b) Montrer que si X admet une densité, alors $\mathscr{A} = \emptyset$.
c) On suppose que $\mathscr{A} = \emptyset$. Montrer que $F_X(X)$ suit la loi uniforme sur $(0, 1)$.

Exercice 6 (Hotelling-Solomons, 1932). Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On suppose que X possède une unique médiane m et on note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Montrer que

$$|\mu - m| \leqslant \sigma.$$

Indication : montrer qu'on peut se ramener sans perte de généralité à une v.a. de loi $\frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{2}\delta_\mu$.

Exercice 7 (Un classique). Soit X une variable aléatoire positive.

a) Justifier l'identité suivante :

$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Que donne cette formule dans le cas particulier où X est à valeurs dans $\mathbb{N}$?

c) Montrer plus généralement que pour tout $0 < p < \infty$, on a

$$\mathbb{E}[X^p] \quad = \quad p \int_0^\infty t^{p-1}\,\mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que si X est dans L^p, alors $\mathbb{P}(X > t) = o(t^{-p})$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 8 (Inégalité de corrélation). Soit X une variable aléatoire réelle et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)].$$

Exercice 9 (Théorème de Stone-Weierstrass). Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Vérifier que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[0,1]$ et tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{E}\left[|f(X) - f(\mathbb{E}[X])|\right] \quad \leq \quad \frac{2\|f\|_\infty \mathrm{Var}(X)}{\delta^2} + \sup_{|x-y|\leq\delta} |f(x) - f(y)|\,.$$

b) En déduire que les polynômes $(B_n)_{n\geq 1}$ convergent uniformément vers f, où

$$B_n(t) \quad := \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

c) Étendre ce résultat au cas où $[0,1]$ est remplacé par un segment $[a,b]$ quelconque.

Exercice 10 (Théorème de Strassen, 1965). Soient X, Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, de fonctions de répartition F_X et F_Y. On dit que X est stochastiquement dominée par Y si $F_Y \leq F_X$, et dans ce cas on note $X \preceq Y$. L'objectif de l'exercice est de montrer le théorème de Strassen : $X \preceq Y$ *si et seulement s'il existe deux variables aléatoires* X', Y' *définies sur* Ω *telles que* X *a la même loi que* X', Y *a la même loi que* Y', *et telles que* $\mathbb{P}(X' \leq Y') = 1$.

a) Montrer le sens facile.

b) On montre maintenant le sens moins facile. On définit l'inverse généralisé de F_X par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ F(x) \geq u\}.$$

i) Montrer que si $U \sim \mathscr{U}[0,1]$, alors $F_X^{-1}(U)$ a la même loi que X.

ii) Montrer que $F_X^{-1}(U)$ et $F_Y^{-1}(U)$ résolvent la deuxième partie du théorème.