Applications de la formule d'Itô

Exercice 1 (Différentielle stochastique d'un produit). Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus d'Itô. Montrer que $(X_tY_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.

Exercice 2 (Examen 2009). Soit $(B_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan, et

$$X_t := \int_0^t B_s \,\mathrm{d}\widetilde{B}_s - \int_0^t \widetilde{B}_s \,\mathrm{d}B_s, \qquad (t \geq 0).$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Soit $\lambda > 0$. Justifier que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}\big[\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}\,\big] = \mathbb{E}\big[\cos(\lambda X_t)\big]$
3. Soit $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Calculer la différentielle stochastique des processus suivants :

$$Y_t := \cos(\lambda X_t) \qquad \text{et} \qquad Z_t := h(t) - \frac{h'(t)}{2}(B_t^2 + \tilde{B}_t^2)$$

4. Calculer le crochet $\langle Y, Z\rangle$.
5. Montrer que $(Y_t e^{Z_t})_{t\geq 0}$ est une martingale locale dès que h vérifie $h'' = (h')^2 - \lambda^2$.
6. Vérifier que $h\colon t \mapsto -\log\big\{\cosh\big(\lambda r - \lambda t\big)\big\}$ est solution, pour tout $r \geq 0$.
7. En déduire $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda X_t}]$, pour tout $t \geq 0$.

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel. Il est facile de voir que la formule d'Itô pour $\{f(B_t)\}_{t\geq 0}$ reste valable si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^2$ partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' est bornée. Voici une application. Soit

$$H_t := \int_0^t \mathbf{1}_{(B_s\geq 0)} \,\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

Il s'agit de montrer que la variable aléatoire $\frac{H_t}{t}$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sur $(0,1)$.

1. Étant donnés $\alpha, \beta > 0$, trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que f satisfasse les conditions ci-dessus, avec

$$f(x) := \begin{cases} a\exp\left(-\sqrt{2(\alpha+\beta)}x\right) + \frac{1}{\alpha+\beta} & \text{si } x \geq 0 \\ b\exp\left(\sqrt{2\alpha}x\right) + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$

2. Construire une martingale bornée à partir de $\left\{f(B_t)e^{-(\alpha t+\beta H_t)}\right\}_{t\geq 0}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\beta H_t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}.$$

3. On admet que $\int_0^\infty\int_0^1 \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta t x}}{\pi\sqrt{x(x-1)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta)}}$ pour tout α et β, conclure.

Remarque. Pour calculer l'intégrale dans la dernière question, après avoir fait l'intégrale en t, on peut utiliser une intégrale de contour en choisissant de définir sur $\mathbb{C} \setminus (1,1)$ la racine dans l'intégrale. Alternativement on peut symétriser autour de $x = \frac{1}{2}$ ce qui donne une intégrale de la forme $\sqrt{1-y^2}$ puis faire un changement de variable en sinus.

Exercice 4 (Partiel 2015). Soit B un mouvement brownien réel et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On considère le processus

$$M(t) = \Phi\left(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}}\right), \qquad t \in [0,1).$$

1. Calculer la differentielle stochastique de M. Qu'en concluez-vous ?
2. Montrer l'existence et donner la valeur $M(1)$ de la limite p.s. de $M(t)$ quand t croit vers 1.
3. Écrire $\mathbb{E}(M(1)|B(s); s \le t)$ comme une probabilité conditionnelle et en déduire que $(M(t); t \in [0,1])$ est une martingale.
4. Calculer la probabilité que B intersecte la courbe $t \mapsto \sqrt{1-t},\ t \in [0,1]$.

Exercice 5 (Temps local). Soit $(B_t)_{t \ge 0}$ un mouvement brownien réel. La formule d'Itô

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\mathrm{d}s$$

s'étend aisément à toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^2$ partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' reste bornée. Voici un exemple où cette extension est utile.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{f_\varepsilon(B_t)\}_{t \ge 0}$, où
$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \ge \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}.$$
2. On note Λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout $t \ge 0$,
$$\frac{1}{2\varepsilon}\Lambda\left\{s \in [0,t] \colon |B_s| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{L^2} |B_t| - \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\mathrm{d}B_s.$$

Exercice 6 (Récurrence ou transience du mouvement brownien).

1. Trouver une fonction harmonique non-triviale $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ à symétrie sphérique, i.e.
$$|z| = |z'| \Longrightarrow u(z) = u(z').$$
2. On fixe $0 < r < R < \infty$ et $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $r < |z| < R$. Soit $(B_t)_{t \ge 0}$ un mouvement brownien plan issu de z, et
$$\tau := \inf\left\{t \ge 0 \colon |B_t| \le r \text{ ou } |B_t| \ge R\right\}.$$
Que dire du processus $\left(u\left(B_{t \wedge \tau}\right)\right)_{t \ge 0}$? En déduire la probabilité que $(B_t)_{t \ge 0}$ atteigne le cercle de centre 0 et de rayon r avant d'avoir touché celui de rayon R.
3. Montrer qu'un point donné distinct du point de départ ne sera presque-sûrement jamais visité par le mouvement brownien plan, mais que presque-sûrement, chaque ouvert de $\mathbb{R}^2$ est visité infiniment souvent.
4. On se place désormais en dimension $d \ge 3$. Pour $r < |z| < R$, déterminer la probabilité qu'un mouvement brownien issu de z touche la sphère de rayon r avant celle de rayon R.
5. Quelle est la probabilité qu'une fois sorti de la boule de rayon n^3, le mouvement brownien ne revienne plus jamais dans la boule de rayon n ?
6. En déduire qu'en dimension $d \ge 3$, le mouvement brownien est transient : $|B_t| \to \infty$ p.s.