INTÉGRALE DE WIENER

Dans toute cette feuille, on considère un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$−mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.

Exercice 1 (Propriétés générales). ⚠ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $t \geq 0$ on pose

$$M_t := \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

1. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien à accroissements indépendants.

   M_t est un processus Gaussien comme limite de processus gaussiens. Pour $a < b < c < d$, il est facile de voir que $M_b - M_a$ est mesurable par rapport à $(B_t - B_a)_{a\leq t\leq b}$ et de même pour $M_d - M_c$. Comme les incréments du browniens sont indépendants, on a en particulier que $M_b - M_a$ et $M_d - M_c$ sont indépendants. Par ailleurs, on a que $M_d - M_b = \lim_{c\to b} M_d - M_c$ (ps d'après la continuité de M) donc $M_d - M_b$ est bien aussi indépendant de $M_b - M_a$.

2. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

   Trivial par indépendance des incréments et le fait que l'espérance soit nulle.

3. Construire une martingale à partir de $(M_t^2)_{t\geq 0}$.

   On veut calculer $\mathrm{Var}(M_t)$ dans un premier temps. On admet qu'il suffit de considérer le cas d'un f continu. On revient à la définition comme limite, soit $M_t^{(n)} = \sum f(\frac{ti}{n})[B_{\frac{ti}{n}} - B_{\frac{t(i-1)}{n}}]$, on a $\mathrm{Var}(M_t^{(n)}) = \sum f^2(\frac{ti}{n})\frac{t}{n}$ donc par la théorie de l'intégrale de Riemann, $\mathrm{Var}(M_t^{(n)}) \to \int_0^n f^2$.
   Maintenant comme M est une martingale, on remarque que $\mathbb{E}(M_{t+s}^2 \mid \mathcal{F}_t) = M_t^2 + \mathbb{E}[(\int_t t + sfdB)^2] = M_t^2 + \int_t^{t+s} f^2$ et donc $M_t^2 - \int_0^t f^2$ est une martingale.

4. Soit $\theta \in \mathbb{C}$. Construire une martingale à partir de $(e^{\theta M_t})_{t\geq 0}$.

   Comme ci-dessus par indépendance des incréments, on a $\mathbb{E}(e^{\theta M_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t) = e^{\theta M_t}\mathbb{E}(e^{\theta(M_{t+s}-M_t)})$. Comme $M_{t+s} - M_t$ est une gaussienne d'espérance nulle et de variance connue, on voit que

   $$\mathbb{E}(e^{\theta M_{t+s}} \mid \mathcal{F}_t) = e^{\theta M_t} e^{\frac{1}{2}\theta^2 \int_t^{t+s} f^2}$$

   et donc $e^{\theta M_t - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t f^2}$ est une martingale.

5. Pour quels choix de f le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien ?

> On voit que pour que M soit un mouvement Brownien, on doit avoir $\int_0^t f^2 = t$ pour tout t. Cela implique $f^2 = 1$ pour presque tout t. Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, la réciproque est aussi vraie donc on voit que M est un mouvement brownien si et seulement si f est à valeur dans $\{-1, 1\}$ presque partout.

6. Soit $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et $N_t := \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}B_s$. À quelle condition $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ sont-ils indépendants ?

> À nouveau en discrétisant les intégrales de Wiener en utilisant les mêmes intervalles, on voit comme dans la question 3 que $\mathrm{Cov}(M_t, N_t) = \int_0^t fg$.
> Les processus sont donc indépendants si et seulement si $f(t)g(t) = 0$ pour presque tout t, c.a.d si f et g ont des supports disjoints.

7. On suppose maintenant seulement que $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, esquisser pourquoi les résultats précédents sont toujours valables.

> Il s'agit principalement de rappeler comment l'intégrale de Wiener peut s'étendre à $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$. La première observation (liée au calcul de variance dans la question 3) est que $\mathbb{E}|\int_0^t f(s)dB_s - \int_0^t g(s)dB_s| = \int_0^t |f-g|ds$, où en d'autre terme que l'intégrale de Wiener est un isomorphisme entre $L^2(\Omega)$ et $L^2([0,t])$. On peut donc définir l'intégrale pour $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et par densité et tous les calculs de variance s'étendent à ce cas par construction. La limite reste un processus gaussien comme limite en loi de processus gaussiens.

Exercice 2 (Exemple). Que dire du processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par la formule suivante ?

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s}\,\mathrm{d}B_s.$$

> X_t est un changement de temps dans une intégrale de Wiener donc d'après les points 1 et 2 de l'exercice 1, c'est un processus gaussien à accroissement indépendants et une martingale. On a par ailleurs que $\mathrm{Var}(X_t) = \int_0^{\sqrt{t}} 2sds = t$ donc X est un mouvement Brownien.

Exercice 3 (Pont brownien). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $(Z_t)_{0\leq t<1}$ défini par

$$Z_t := a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s \qquad (0 \leq t < 1).$$

1. Montrer que $(Z_t)_{0\leq t<1}$ est un processus gaussien dont on explicitera les paramètres.

D'après l'exercice 1, la partie intégrale stochastique est un processus gaussien à accroissements indépendants et de variance connue. Par stabilité par combinaison linéaire, Z_t est toujours un processus gaussien et vérifie $\mathbb{E}(Z_t) = a(1-t) + bt$ et

$$\operatorname{Var}(Z_t) = (1-t)^2 \operatorname{Var}\left(\int_0^t \frac{1}{(1-s)} dBs\right) = (1-t)^2 \left[\frac{1}{1-s}\right]_0^t = t(1-t).$$

et pour $t < t'$

$$\operatorname{Cov}(Z_t, Z_{t'}) = (1-t)(1-t') \operatorname{Cov}\left(\int_0^t \dots, \int_0^t \dots + \int_0^{t'} \dots\right) = (1-t)(1-t') \operatorname{Var}\left(\int_0^t \dots\right) = t(1-t').$$

2. Que dire de ce processus dans le cas $a = b = 0$?

On l'a déjà vu dans une feuille précédente. On peut l'écrire en loi comme $Z_t = B_t - tB_1$.

3. Montrer que lorsque $t \to 1$, on a $Z_t \to b$ au sens de la convergence L^2.

On a déjà calculé que l'espérance tends vers b et que la variance tends vers 0.

4. Montrer que la convergence a en fait lieu presque-sûrement.

On sait qu'il existe une version du processus qui est continue presque sûrement en 1 et pour cette version la convergence a clairement lieu presque sûrement. Comme la convergence ne dépend que de la loi restreinte à $[0, 1)$, la convergence doit être vraie pour toute version du processus. (C'est le même argument qu'on avait utilisé pour le mouvement brownien dans la feuille 3).

Exercice 4 (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck).⚠ Soit V_0 une variable aléatoire réelle indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$, et $b, \sigma > 0$. On définit un processus $(V_t)_{t\geq 0}$ par

$$V_t := e^{-bt} \left(V_0 + \sigma \int_0^t e^{bs} \, \mathrm{d}B_s \right).$$

1. Montrer que V_t converge en loi lorsque $t \to \infty$, et déterminer la limite.

On sait que $V_t - e^{-bt}$ est un processus Gaussien. On a $\mathbb{E}(V_t - e^{-bt}) = 0$ et $\operatorname{Var}(V_t - e^{-bt}) = e^{-2bt}\sigma^2 \int_0^t e^{2bs} = \sigma^2(1 - e^{-2bt})$. D'après le critère de convergence des gaussiennes, $V_t - e^{-2bt}V_0 \to N(0, \sigma^2/2b)$ ce qui conclue car clairement $e^{-2bt}V_0 \to 0$ en loi.

2. On suppose désormais que $V_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2b}\right)$. Montrer que $(V_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire dont on précisera les paramètres.

Si V_0 est gaussien, clairement V_t est gaussien pour tout t. Le même calcul qu'à la question 1 montre que $V_t \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2b})$ pour tout t. La covariance donne (pour $t < t'$)

$$\mathrm{Cov}(V_t, V_{t'}) = e^{-b(t+t')}[\mathrm{Var}(V_0) + \sigma^2 \mathrm{Var}(\int_0^t e^{bs} dB_s)] = \frac{\sigma^2}{2} e^{t'-t}.$$

Comme la matrice de covariance et l'espérance sont indépendantes par translation du temps, le processus est bien stationnaire.

3. Que dire du processus $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini ci-dessous ?

$$W_t := \frac{\sigma}{\sqrt{2b}} e^{-bt} B_{e^{2bt}}.$$

Un calcul direct des covariances montrer qu'il a la loi d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Exercice 5 (Intégration par partie). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Établir que pour tout $t \geq 0$, on a presque-sûrement

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t f'(s) B_s\,\mathrm{d}s = f(t)B_t.$$

On reprend la définition de l'intégrale de Wiener comme une limite. Pour simplifier les notations on considère $t = 1$. On remarque que

$$\begin{aligned} f(1)B_1 &= \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})B_{\frac{i}{n}} - f(\frac{i-1}{n})B_{\frac{i-1}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})[B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}}] + \sum_{i=1}^n [f(\frac{i}{n}) - f(\frac{i-1}{n})]B_{\frac{i-1}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n})[B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}}] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f'(\frac{i-1}{n})B_{\frac{i-1}{n}} \\ &\quad + O(\sup_{|s-t|\leq 1/n} [f'(s) - f'(t)] \sup_{[0,1]}|B_t|) \end{aligned}$$

Le premier terme converge d'après la théorie de l'intégrale de Wiener et le second d'après celle de l'intégrale de Riemann.

2. Sous les hypothèses supplémentaires $f(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et $\int_0^\infty |f'(t)|\sqrt{t}\,\mathrm{d}t < \infty$, en déduire

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s = -\int_{\mathbb{R}_+} f'(s)B_s\,\mathrm{d}s.$$

On remarque que des hypothèses supplémentaires sont forcément nécessaires pour garantir que $f(t)B_t$ tends vers 0 et que comme B_t devient de plus en plus grand, il ne peut pas être suffisant de juste dire $f(t) \to 0$.
On remarque que $f(t) = -\int_t^\infty f'(s)ds$ donc

$$\begin{aligned}|f(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_t^\infty |f'(s)|\sqrt{s}ds \\ &= o(\frac{1}{\sqrt{t}})\end{aligned}$$

puisque le second terme est le reste d'une intégrale convergente. On a donc $f(t)B_t \to 0$ dans L^2. Pour conclure il faudrait borner dans L^2 au moins l'une des intégrales. Clairement l'intégrale de Wiener est plus simple. On peut clairement commencer l'intégrale en 1 sans perte de généralité (pour éviter d'introduire une singularité avec des $1\sqrt{t}$)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\int_1^t f dB) &= \int_1^t f^2(s)ds \\ &\leq C \int_1^t \frac{f}{\sqrt{s}}ds \\ &\leq C \int_1^t ds \int_s^\infty du \frac{|f'(u)|}{\sqrt{s}} \\ &\leq C \int_1^\infty du |f'(u)| \int_1^{u\wedge t} ds \frac{1}{\sqrt{s}} \\ &\leq C \int |f'(u|\sqrt{u} < \infty\end{aligned}$$

où la constante C change de ligne en ligne. Les intégrales sont bien bornées dans L^2 donc elles ont du sens sur $\mathbb{R}$ et on a l'égalité demandée.

Exercice 6 (Espace gaussien). Soit H^B l'espace gaussien engendré par $(B_t)_{t\geq 0}$:

$$H^B := \overline{\mathrm{Vect}(B_t \colon t \geq 0)}^{L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})}.$$

1. Établir l'égalité
$$H^B = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(s)dB_s \colon f \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

Soit X de la forme $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s)dB_s$, par construction de l'intégrale de Wiener X est une limite de combinaison linéaire de variables B_t et X est dans L^2 donc $X \in H^B$.
Réciproquement, on commence par écrire $Vect(B_t)$ sous forme d'intégrale de Wiener. Soit $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_{t_i}$ avec sans perte de généralité t_i croissant. Clairement par un changement de base dans $\mathbb{R}^n$, on peut écrire $X = \sum_i \beta_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ avec comme convention $B_0 = 0$. On a alors $X = \int f dB$ avec $f = \sum \beta_i 1_{[t_{i-1},t_i]}$.
Il suffit donc de vérifier que H^B est fermé dans L^2. Si X^n est une suite de variables obtenues par intégrale de Wiener(i.e $f_n = \int f_n dB$) qui forme une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{P})$, alors il est facile de voir que f_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ et donc converge vers un certain $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. On vérifie enfin facilement que $X_n \to \int f dB$ dans L^2, ce qui conclue.

2. Soit $X \in H^B$ et $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :
   (a) $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s)\,\mathrm{d}B_s$
   (b) $\mathbb{E}[XB_t] = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour passer de (a) à (b), si $X = \int f(s)dB_s$, alors on a $\mathbb{E}(XB_t) = \mathrm{Cov}(\int f dB, \int 1_{[0,t]}dB) = \int f 1_{[0,t]}ds$ qui est bien la formule désirée.
Pour passer de (b) à (a), soit X vérifiant le (b). Comme $X \in H^B$ on écrit $X = \int g dB$ et on a donc $\int_0^t f = \int_0^t g$ pour tout t. On a donc $f = g$ presque partout et donc aussi $X = \int f dB$.