

MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

Exercice 1 (Temps d'arrêt). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ un espace filtré. Parmi les variable aléatoires suivantes, lesquelles sont des temps d'arrêt ?

1. Le minimum de deux temps d'arrêt.

Oui car $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$

2. Le maximum de deux temps d'arrêt.

Oui car $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$

3. La somme de deux temps d'arrêt.

4. La moyenne de deux temps d'arrêt.

5. La médiane de 5 temps d'arrêt.

6. Le premier temps à partir duquel le mouvement brownien passe un temps supérieur à 1 sans revenir en zéro.

Oui, et on peut le prouver même sans continuité de la filtration en passant au complémentaire. On écrit $\{S + T > t\} = \cup_{x \in \mathbb{Q}, x < t} \{S > x\} \cap \{T > t - x\}$ ce qui est bien \mathcal{F}_t mesurable.

7. Le premier instant où un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien atteint une valeur donnée $a \in \mathbb{R}$.

Oui, mais il faut être attentif à bien écrire l'événement en terme d'union et d'intersection dénombrable. Supposons pour simplifier les notations que $a > 0$. On peut remarquer que comme l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé, on a $T \leq t \Leftrightarrow \forall b \in (0, a), \exists s < t, B_s > b$. Dans l'expression de droite on peut clairement se restreindre au rationnels ce qui conclue.

8. Le dernier zéro d'un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$.

C'est clairement faux. On peut par exemple le prouver en constatant qu'on obtient une contradiction en appliquant le théorème d'arrêt à ce temps et à la martingale $B_t^2 - t$.

9. Le premier instant en lequel le mouvement brownien est 1/2-Hölderien¹.

10. Le premier point d'intersection de deux browniens indépendants après le temps 1.

11. Le premier point à partir duquel deux mouvements browniens indépendants ne se rencontrent plus.

1. \mathbb{P} -presque sûrement, de tels points points (appelés « slow times ») existent dans la trajectoire du mouvement brownien, même si celui-ci est \mathbb{P} -presque sûrement non-1/2-Hölderien.

12. Le premier t tel que $\int_{t-1}^{t+1} B_s ds > 1$.

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien.

1. Trouver deux temps d'arrêt $S \leq T$ avec $S \in L^1$, tels que $\mathbb{E}[B_S^2] > \mathbb{E}[B_T^2]$.
2. Trouver un temps d'arrêt T tel que $\mathbb{E}[T] = +\infty$ et $\mathbb{E}[B_T^2] < \infty$.

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien. Montrer que si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt bornés, alors

$$\mathbb{E}[(B_T - B_S)^2] = \mathbb{E}[B_T^2] - \mathbb{E}[B_S^2] = \mathbb{E}[T - S].$$

Exercice 4 (Quelques martingales du mouvement brownien). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien.

1. Montrer que $(B_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

On doit vérifier que B_t est bien intégrable à tout temps, adapté ainsi que la propriété de martingale pour tout paire de temps t et $t + s$. Tout est trivial.

2. Montrer que $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

L'intégrabilité et l'adaptation sont triviales. On a $\mathbb{E}(B_{t+s}^2 - t - s \mid \mathcal{F}_t) = B_t^2 - t + \mathbb{E}((B_t + s - B_t)^2 - s) + 2\mathbb{E}(B_t(B_t + s - B_t) \mid \mathcal{F}_t)$ et les deux second termes sont clairement nuls.

3. Construire une martingale à partir du processus $(B_t^3)_{t \geq 0}$.

On développe $B_{t+s}^3 = B_t^3 + 3B_t^2(B_{t+s} - B_t) + 3B_t(B_{t+s} - B_t)^2 + (B_{t+s} - B_t)^3$. Il est alors facile de voir que $B_t^3 - 3tB_t$ sera alors une martingale.

4. Construire une martingale à partir du processus $(B_t^4)_{t \geq 0}$.

Même technique que ci dessus, on peut partir des termes de plus haut degré et voir comment les compenser. On trouve $B_t^4 - 6B_t^2t + 3t^2$.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le processus $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}})_{t \geq 0}$ est une martingale.

Même chose que dans les questions précédentes mais il faut passer par le calcul de l'intégrale $\mathbb{E}(e^N)$ pour une loi normale comme pour la fonction caractéristique.

6. Construire une martingale à partir du processus $(\cosh(\lambda B_t))_{t \geq 0}$.

Simplement par linéarité, $\cosh(\lambda B_t)e^{-\lambda^2 t/2}$ est une martingale.

Exercice 5 (**) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et B un (\mathcal{F}_t) -mouvement Brownien. Pour tout entier n , construire un polynôme h_n unitaire de degré n tel que $(h_n(B_t))_{t \geq 0}$ est une martingale. (Indice : Charles.)

Exercice 6 (changements de mesures via les martingales) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $L = (L_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale continue fermée par L_T . On suppose que

$$\mathbb{P}(L_T > 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[L_T] = 1.$$

On définit une nouvelle mesure de probabilité \mathbb{P}' sur (Ω, \mathcal{F}_T) via la formule

$$\mathbb{P}'(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A L_T].$$

1. Vérifier que \mathbb{P}' est une mesure de probabilité et qu'elle est équivalente² à \mathbb{P} .
2. Montrer que pour toute variable aléatoire \mathcal{F}_t -mesurable positive X , on a $\mathbb{E}'[X] = \mathbb{E}[L_t X]$. Montrer que c'est également vrai si t est un temps d'arrêt.
3. Montrer qu'un processus $(\mathcal{F}_t)_t$ -adapté $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale pour la mesure \mathbb{P}' si et seulement si le processus $(X_t L_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale pour la mesure \mathbb{P} .

Exercice 7 Soit $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ une sous-martingale. Montrer que si $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$, alors X est une martingale.

Exercice 8 (Loi de temps d'atteinte). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. À l'aide de la martingale $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$, calculer l'espérance de

$$T_a^* := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}.$$

C'est exactement comme dans l'application classique avec des marches aléatoires, on obtient $\mathbb{E}(T_a^*) = a^2$.

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la variance de T_a^* .

On utilise la martingale pour B_t^4 . On peut bien prendre l'espérance car T_a^{*2} est intégrable et on obtient

$$0 = a^4 - 6a^2 \cdot a^2 + 3\mathbb{E}(T_a^{*2})$$

ce qui donne $\text{Var}(T_a^*) = \frac{5}{3}a^4 - a^4$. Notez qu'il est normal d'arriver sur un multiple de a^4 d'après les propriétés d'invariance du mouvement brownien.

3. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de T_a^* .

On utilise la martingale en cosh pour obtenir que pour $s \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{-sT_a^*}) = \frac{1}{\cosh \sqrt{2sa}}$

4. Calculer la transformée de Laplace de

$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

et retrouver le fait que T_a a même loi que $(a/B_1)^2$. Que vaut $\mathbb{E}[T_a]$?

2. Deux mesures μ, ν sur une même tribu sont équivalentes si elles ont les mêmes événements négligeables.

Pour calculer e^{-sT_a} pour $s \geq 0$, on veut utiliser la martingale de la question 5 de l'exercice précédent avec $\lambda = +\sqrt{2s}$ et maintenant le signe devient important. En effet cette martingale est bornée par $e^{\lambda a}$ avant T_a donc permet d'échanger limite et espérance ce qui n'est pas le cas de la martingale avec $-\sqrt{2s}$. On obtient $\mathbb{E}(e^{-sT_a}) = e^{-\sqrt{2s}a}$.

Pour vérifier l'identité en loi demandée, on calcule la transformée de Laplace de $(a/B_1)^2$ et on peut clairement prendre $a = 1$ pour simplifier les notations. On a

$$\mathbb{E}(e^{-s/B_1^2}) = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{s}{x^2} - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2s}}{x} - x)^2} e^{-\sqrt{2s}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

On fait un changement de variable $u = x - \frac{\sqrt{2s}}{x}$ qui donne $x = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}{2}$ (attention au choix du signe en résolvant l'équation, x doit être positif) et donc

$$dx = \frac{du}{2} + \frac{udu}{2\sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}.$$

La partie de l'intégrale en $\frac{du}{2}$ redonne exactement le terme souhaité tandis que la partie en $\frac{udu}{2\sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}$ est antisymétrique et donne donc une intégrale nulle.

Exercice 9 (Maximum du mouvement brownien avec dérive). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. On fixe $a, b > 0$ et on pose

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t - bt = a\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt relativement à la filtration naturelle.

Même chose que l'exercice 1 question 4.

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de τ .

On considère à nouveau la martingale $e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$. Pour tout $\lambda > 2b$ on a une martingale bornée jusqu'au temps τ et donc

$$\mathbb{E}[e^{(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda b)\tau}] = e^{-\lambda a}$$

soit en inversant la formule une transformée de Laplace $e^{-ab - \sqrt{b^2 + 2s}a}$.

3. En déduire la probabilité que la courbe du mouvement brownien soit au dessous de la demi-droite $t \mapsto a + bt$. Pouvait-on prévoir que la réponse ne dépendrait que de ab ?

On cherche $\mathbb{P}(\tau = \infty)$ et il est facile de voir par convergence dominée que c'est $1 - \lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{E}(e^{-s\tau}) = 1 - e^{-2ab}$. On pouvait le prévoir par grâce au changement d'échelle $B_t \rightarrow \sigma B_{t/\sigma^2}$

4. Trouver la loi de la variable aléatoire

$$U := \sup_{t \geq 0} B_t - bt.$$

On vient de calculer la fonction de répartition de cette variable donc on voit que c'est une variable exponentielle de paramètre b .

Exercice 10 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . Soit X une variable aléatoire réelle telle que $e^{tX} \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que X et \mathcal{G} sont indépendantes si et seulement si pour tout t réel et toute variable aléatoire Y qui est \mathcal{G} -mesurable, on a

$$\mathbb{E}[e^{tX}Y] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[Y].$$

Exercice 11 (Maximum du pont brownien). Soit $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ un pont brownien.

1. Pour $t \geq 0$ on pose $B_t = (1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}$. Vérifier que $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Fait dans la feuille 3.

2. En utilisant l'exercice précédant, déterminer la loi de la variable

$$V := \sup_{0 \leq t \leq 1} Z_t.$$

On a $\mathbb{P}(V \geq b) = \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+, \frac{B_t}{1+t} \leq b) = \mathbb{P}(\exists t, B_t = b + bt) = e^{-2b^2}$ (on se permet de ne pas justifier la mesurabilité même si on écrit des conditions sur un ensemble non dénombrable de temps).

Exercice 12 (Une preuve du théorème d'arrêt). Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ et un temps d'arrêt T . Le but de cet exercice est de montrer que $(M_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ est encore une martingale. Dans tout l'exercice, "discret" signifiera à valeurs dans $\mathcal{D}_n := \{k2^{-n} : k \in \mathbb{N}\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que la famille $\{M_\tau : \tau \text{ temps d'arrêt discret} \leq t\}$ est uniformément intégrable.

Si τ est un temps d'arrêt discret donné, on peut le voir comme un temps d'arrêt pour la martingale discrète $k \rightarrow M_{k2^{-n}}$. On a donc $\mathbb{E}(M_\tau 1_{M_\tau \geq C}) \leq \mathbb{E}(M_t 1_{M_t \geq C}) \leq \mathbb{E}|M_t|$ et en particulier $\mathbb{P}(M_\tau \geq C) \leq \mathbb{E}(|M_t|)/C$ pour tout C (ça n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'inégalité maximale). Comme M_t est intégrable, on doit donc aussi avoir $\mathbb{E}(M_t 1_{M_t \geq C}) \rightarrow 0$ quand $C \rightarrow \infty$ ce qui conclue.

2. Montrer que si s, t et T sont discrets avec $s \leq t$ deux réels non aléatoires, alors

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge T} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T}.$$

On se fixe n convenant à s, t et T , c'est alors juste une application du théorème d'arrêt pour les martingales à temps discrets.

3. Exhiber une suite de temps d'arrêt discrets qui décroît vers T , et conclure.

On pose $T^n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)2^{-n}$. On a clairement $T^n > T$ pour tout n ce qui permet facilement de voir que T^n est un temps d'arrêt. On sait que $M_{t \wedge T^n}$ converge presque sûrement vers $M_{t \wedge T}$ par continuité de la martingale et on conclue donc par le théorème de convergence dominée pour les suite uniformément intégrable.

Exercice 13 (Tribu des événements antérieurs à T). Soit T un temps d'arrêt sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$. On rappelle que la tribu des événements antérieurs à T est

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une sous-tribu de \mathcal{F} .

Trivial, on vérifie chaque point dans la définition.

2. Soit S un temps d'arrêt tel que $S \leq T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Soit $A \in \mathcal{F}_S$ et $t > 0$, il suffit de remarquer que $A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$.

3. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu et adapté. Montrer que $X_T \mathbf{1}_{T < \infty}$ est \mathcal{F}_T -mesurable.

On pose $T^n = \lfloor 2^n T \rfloor 2^{-n}$, il est facile de voir que X_{T^n} est \mathcal{F}_{T^n} mesurable pour tout n car il suffit de considérer des unions dénombrables d'événements. Par ailleurs $T^n \rightarrow T$ et donc par continuité $X_{T^n} \rightarrow X_T$.

Exercice 14 (Martingale à variation finie). Une fonction $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie si

$$V_t(f) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : n \in \mathbb{N}^*, 0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = t \right\} < +\infty,$$

pour tout $t \geq 0$. On rappelle que si f est continue, alors $t \mapsto V_t(f)$ l'est aussi. Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues et à variation finie. Montrer que p.s., les trajectoires de M sont constantes. *Indication* : on pourra supposer que $V_t(M) \in L^\infty$.

Quitte à introduire $T_n = \inf\{t : V_t(M) \geq n\}$ on suppose que $V_t(M)$ est borné par un certain n . En particulier M doit aussi être bornée. Par ailleurs on observe que $\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \leq V_t(f) \sup_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$ donc par continuité on voit que $\sum_{i=0}^{n-1} (M_{\frac{i+1}{n}} - M_{\frac{i}{n}})^2$ converge vers 0 quand n tends vers l'infini et est borné par $V_t(M)^2$. On peut donc passer à l'espérance. Or on vérifie facilement que $\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{\frac{i+1}{n}} - M_{\frac{i}{n}})^2] = \text{Var}(M_t - M_0)$. Cette variance doit donc être nulle ce qui conclue.

Exercice 15 (Pré-Characterisation de Lévy) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté continu issu de zéro. On suppose que pour tout réel λ , le processus

$$(e^{\lambda X_t - \frac{t\lambda^2}{2}})_{t \geq 0}$$

est une (\mathcal{F}_t) -martingale. Montrer que X est un mouvement Brownien.

Exercice 16 (Caractérisation de Lévy). Sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ issue de 0 et telle que $(M_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

1. Donner un exemple d'une telle martingale.

Le mouvement Brownien.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que f, f' et f'' sont bornées. Montrer que pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[f(M_t) | \mathcal{F}_s] = f(M_s) + \frac{1}{2} \int_s^t \mathbb{E}[f''(M_u) | \mathcal{F}_s] du.$$

(On pourra subdiviser l'intervalle $[s, t]$ et utiliser le développement de Taylor de f .)

Pour simplifier les notations on considère seulement $s = 0$ et $t = 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(M_t)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}f(M_{i+1/n}) - f(M_{i/n}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}f'(M_{i/n})(M_{i+1/n} - M_{i/n}) + \frac{1}{2}f''(M_{i/n})(M_{i+1/n} - M_{i/n})^2 + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\frac{1}{2}f''(M_{i/n})\frac{1}{n} + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\ &\rightarrow \int \mathbb{E}(f''(M_u))du \end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, on utilise la propriété de martingale pour M et $M^2 - t$. Dans la dernière ligne, on peut ignorer le $o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2)$ car le préfacteur qui intervient dans ce terme ne dépend que du module de continuité de f'' et est donc uniformément borné tandis que la somme des carrés des incréments est toujours intégrable.

3. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E} \left[e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t \mathbb{E} \left[e^{i\lambda(M_u - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] du.$$

Application directe de la question précédente.

4. En déduire que $(e^{i\lambda M_t + \frac{\lambda^2}{2}t})_{t \geq 0}$ est une martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

De l'expression précédente, on voit que $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$ est dérivable en t et on vérifie trivialement que $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$ est en fait constant en t en calculant sa dérivée.

5. En conclure que $(M_t)_{t \geq 0}$ est en fait nécessairement un mouvement brownien.

On vient de calculer la fonction caractéristique de tout incrément.