CHANGEMENTS DE MESURE

Exercice 1 . Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, et soit $T > 0$. Construire une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_T$, équivalente à $\mathbb{P}$ (sur $\mathscr{F}_T$), sous laquelle le processus $(\exp(\sigma B_t + rt))_{0\leq t\leq T}$ est une martingale.

Exercice 2 . Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, et soient $\phi, \psi \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right) \qquad \text{et} \qquad Y_t := \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s.$$

1. Montrer que le processus $(Z_t Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.
2. Soit T un réel positif tel que $\mathbb{E}[Z_T] = 1$. Montrer que $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale locale sous une certaine probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_T$ équivalente à $\mathbb{P}$, que l'on explicitera.

Exercice 3 (Dérive). Soit $a > 0$. On rappelle que $T := \inf\{t \geq 0\colon B_t \geq a\}$ a pour densité

$$f_T(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Étant donné $b \in \mathbb{R}$, on pose $\widetilde{B}_t := B_t - bt$ et on s'intéresse à $\widetilde{T} := \inf\{t \geq 0\colon \widetilde{B}_t \geq a\}$.

1. Trouver une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathscr{F}_\infty$ sous laquelle $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

   D'après le théorème de Girsanov, si $\mathbb{Q}$ est définie par $\frac{d\mathbb{Q}}{\mathrm{d}¶}\ |_t = e^{L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t}$ pour un certain L qui est une martingale locale sous ¶, alors pour toute martingale locale M de ¶, l'expression $\tilde{M} = M - \langle M, L\rangle$ définie une martingale locale sous $\mathbb{Q}$.
   Ici il s'agit (comme souvent) de procéder "à l'envers", nous allons donc construire L et donc $\mathbb{Q}$ pour que le théorème s'applique.
   On veut écrire $\tilde{B}$ sous la forme $M - \langle M, L\rangle$ donc naturellement on veut prendre $M = B$ et donc $\langle B, L\rangle = bt$. Comme L doit être une martingale locale on voit qu'on doit prendre $L_t = bB_t$ et on doit donc définir $\mathbb{Q}$ par $\frac{d\mathbb{Q}}{d¶}\ |_t = e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$.
   Attention, il reste une étape ! En effet pour que $\frac{d\mathbb{Q}}{d¶}\ |_t = e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$ définisse bien une probabilité (et que l'on n'ait donc pas raconté n'importe quoi), il faut vérifier que $e^{bB_t - \frac{1}{2}b^2 t}$ est bien une martingale sous ¶. Ici c'est clair puisque ça n'est rien d'autre qu'une martingale exponentielle d'un mouvement Brownien.
   Par le théorème de Girsanov, $\tilde{B}$ est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$ mais comme son crochet est t et que $\tilde{B}_0 = 0$ on a bien un mouvement Brownien.

2. En déduire, sous la mesure $\mathbb{P}$, la fonction de répartition de $\widetilde{T}$ puis la loi de $Z := \sup_{t\geq 0} \widetilde{B_t}$.

On connaît par l'énoncé la densité de $\tilde{T}$ sous $\mathbb{Q}$, on obtient donc celle sous ¶ comme :

$$\begin{aligned}
¶(\tilde{T} \le t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{d¶}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_t \, 1_{\tilde{T}\le t}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{E}(\frac{d¶}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_t| \, \mathscr{F}_{\tilde{T}\wedge t}) 1_{\tilde{T}\le t}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{d¶}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} |_{\tilde{T}\wedge t} \, 1_{\tilde{T}\le t}) \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-b(a+b\tilde{T})+\frac{b^2}{2}\tilde{T}} 1_{\tilde{T}\le t}) \\
&= \int_0^t e^{-ba-\frac{b^2}{2}x} \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{2x}} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pour calculer la loi de Z, on observe que $¶(Z \ge a) = ¶(\tilde{T} < \infty) = \int_0^\infty e^{-ba-\frac{b^2}{2}x} \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{a^2}{2x}}$. Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser la méthode suivante

$$\begin{aligned}
e^{2ba}\sqrt{2\pi}¶(\tilde{T} < \infty) &= e^{ba} \int_0^\infty \frac{a}{x^{3/2}} e^{-\frac{b^2}{2}x - \frac{a^2}{2x}} \\
&= \int_0^\infty \frac{a}{x^{3/2}} \exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{a/b}^\infty \frac{a}{x^{3/2}} \exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 \mathrm{d}x + \int_{b/a}^\infty a x^{3/2} \exp -\frac{1}{2}(\frac{b}{\sqrt{x}} - a\sqrt{x})^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&= \int_{a/b}^\infty (\frac{a\mathrm{d}x}{x^{3/2}} + \frac{a\frac{b^2}{a^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{x\frac{b^2}{a^2}}}) \exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 \\
&= \int 2d(b\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}) \exp -\frac{1}{2}(b\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^2 \\
&= 2\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

avec un changement de variable $x \to 1/x$ puis un changement de variable $x \to \frac{a^2}{b^2}x$ et une séparation de l'intégrale en 2.

Exercice 4 (Fonctionnelles quadratiques du brownien). Pour $a, b, t \ge 0$, on cherche à calculer

$$I(a,b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}s\right\}\right].$$

1. Calculer $I(a, 0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.

C'est juste une intégrale gaussienne $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(a + \frac{1}{2t})x^2)\mathrm{d}x$.

2. Trouver un processus ψ localement intégrable tel que le processus $(Z_t)_{t\ge 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :

$$Z_t := \exp\left\{-b\int_0^t B_s \, dB_s - \int_0^t \psi(s)\, ds\right\}.$$

On calcule la différentielle stochastique :

$$\mathrm{d}Z = -b\mathrm{d}B - \phi\mathrm{d}t + \frac{1}{2}b^2B^2\mathrm{d}t$$

donc on voit qu'on doit prendre $\psi = \frac{b^2B^2}{2}$.

3. Exprimer Z_t en fonction de b, t, B_t et $\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s$ seulement, et en déduire que

$$I(a,b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2}-a\right)B_t^2\right\}\right]\exp\left(-\frac{bt}{2}\right).$$

On sait que $\mathrm{d}B^2 = 2B\mathrm{d}B + \mathrm{d}t$ et donc que $\int B_s\mathrm{d}B_s = B_t^2/2 + t/2$. On en déduit que $Z_t = \exp -\frac{b}{2}B_t^2 - \frac{bt}{2} - \frac{b^2}{2}\int B^2\mathrm{d}s$. Le résultat en découle immédiatement.

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_t := B_t + b\int_0^t B_s\mathrm{d}s$ soit un mouvement brownien.

On cherche L tel que $< B, L >= -b\int Bds$, clairement on peut prendre $L = -b\int B_s dB_s$ c'est à dire $L = -\frac{b}{2}B^2 + \frac{tb}{2}$. On veut poser formellement $\frac{dQ}{dP} = e^{L - \frac{1}{2}\langle L,L\rangle}$ et pour que cela définisse bien une probabilité il faut vérifier que l'exponentielle est une vrai martingale. Ici c'est vrai car on a $L_t - \frac{1}{2} < L, L >_t \leq bt/2$ pour tout t. Sous Q, W est une martingale de variation quadratique égale à t et partant de 0 donc un mouvement brownien.

5. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$B_t = \int_0^t \mathrm{e}^{b(s-t)}\,\mathrm{d}W_s.$$

On a $d(e^{bt}B_t = e^{bt}dB_t + be^{bt}B_t\mathrm{d}t = e^{bt}\mathrm{d}W_t$. Par ailleurs ces deux processus partent de 0 donc on a bien l'égalité demandée.

6. Pour $t \geq 0$ fixé, expliciter la loi de B_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ et en déduire la formule suivante :

$$I(a,b) = \left\{\cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt)\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Sous la mesure $\mathbb{Q}$, comme W est un mouvement Brownien on peut reconnaître que B_t est un processus d'Onstein Ulenbeck partant de 0 (voir TD5). alternativement, $t \to \int_0^t e^{bs}dW$ est une martingale continue à accroissement indépendants et de crochet $\int e^{2bs} = \frac{e^{2bt}-1}{2b}$. C'est donc un Brownien changé de temps et sous $\mathbb{Q}$ la loi de B_t est donc $N(0, \frac{1-e^{-2bt}}{2b})$.
Comme l'expression de la question 3 est une intégrale sous $\mathbb{Q}$ du type donné à la question 1, on en déduit le résultat.

Exercice 5 (Condition de Novikov). Soit $\phi \in \mathscr{H}^2_{\mathrm{loc}}$. On pose pour tout $t \geq 0$,

$$Z_\phi(t) := \exp\left\{\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}.$$

Le but est de démontrer que $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ est une martingale sous la condition de Novikov :

$$\forall t \geq 0, \qquad \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right] < \infty. \tag{$\star$}$$

1. Que peut-on dire du processus $(Z_\phi(t))_{t\geq 0}$ en général ? Et si $\mathbb{E}[Z_\phi(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$?

Le processus Z est toujours une martingale locale positive et donc une surmartingale. Si en plus on sait que $\mathbb{E}(Z(t)) = 1$ pour tout t alors c'est une vrai martingale. (voir l'exercice 1 de la feuille 6).

2. Soit $0 < \lambda < 1$. Trouver $p > 1$ et $0 < \theta < 1$ tels que pour tout $t \geq 0$,

$$Z^p_{\lambda\phi}(t) = Z^\theta_\phi(t) \exp\left\{ \frac{1-\theta}{2} \int_0^t \phi^2(s)\mathrm{d}s \right\}.$$

On a $Z^p_{\lambda\phi} = \exp \lambda p \int \phi \mathrm{d}B - \frac{\lambda^2 p}{2} \int \phi^2 \mathrm{d}s$ tandis que l'autre terme est $\exp(\theta \int \phi \mathrm{d}B - \frac{1}{2}\int \phi^2 \mathrm{d}s)$. On obtient les équations $p\lambda = \theta$ et $1 - 2\theta = -p\lambda^2$ ce qui se résout en $\theta = \frac{1}{2-\lambda}$ et $p = \frac{1}{\lambda(2-\lambda)}$ qui vérifient bien les conditions.

3. En déduire que sous la condition $(\star)$, on a $\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] = 1$ pour tout $t \geq 0$.

L'idée générale est d'appliquer l'inégalité de Hölder au terme de droite avec des exposants $1/\theta$ et $1/(1-\theta)$ (qui sont bien conjugués) ce qui donne

$$\mathbb{E}(Z^p_{\lambda\phi}) \leq \mathbb{E}(Z_\phi(t))^\theta \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int \phi^2)^{1-\theta}.$$

Le terme de droite est borné par hypothèse et en utilisant le fait que Z_ϕ est une surmartingale, on est donc assez content puisque qu'on a une borne dans L^p alors qu'on cherche à monter une propriété L^1. Malheureusement, on ne peut pas conclure directement par cet argument puisqu'un martingale locale bornée dans Lp n'est pas forcément une vraie martingale (c.f exemple dans l'exercice 9 du TD 6). On doit affiner un peu l'analyse.
Soit T_n une suite croissante de temps d'arrêts tels que $s \to Z_{\lambda\phi}(s \wedge T_n)$ soit une martingale pour tout n et $T_n \to \infty$ p.s. La suite $n \to Z(t \wedge T_n)$ est une martingale à temps discret et la même application de Hölder montre que

$$\mathbb{E}(Z^p_{\lambda\phi}(t \wedge T_n)) \leq \mathbb{E}(Z_\phi(t \wedge T_n))^\theta \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge T_n} \phi^2)^{1-\theta} \leq \mathbb{E}(\exp \frac{1}{2} \int_0^t \phi^2)^{1-\theta}$$

donc la martingale à temps discret $n \to Z_{\lambda\phi}(t \wedge T_n)$ est bornée dans L^p donc elle converge p.s et dans L^1 vers $Z_{\lambda\phi}(t)$.
Remarque : La différence entre la première borne et le véritable argument dans la deuxième partie en utilisant un temps d'arrêt est qu'on a utilisé la croissance en t de l'intégrale $\int_0^t \phi^2$ pour passer du temps aléatoire $t \wedge T_n$ au temps fixé t. C'est similaire à la différence entre une borne L^2 sur une martingale locale et une borne L^1 sur le crochet.

4. Montrer par ailleurs que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}\left[Z_\phi(t)\right]^{\lambda^2} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s\right\}\right]^{2\lambda(1-\lambda)}.$$

On a $Z_{\lambda\phi} = Z_\phi^{\lambda^2} \exp \frac{\lambda - \lambda^2}{2} \int \phi \mathrm{d}B$. On peut appliquer Hölder avec $\frac{1}{\lambda^2}$ et $\frac{1}{1-\lambda^2}$ et on obtient

$$\mathbb{E}[Z_{\lambda\phi}(t)] \leq \mathbb{E}[Z_\phi(t)]^{\lambda^2} \mathbb{E}\Big[\exp \frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda} \int \phi \mathrm{d}B\Big]^{1-\lambda^2}.$$

On conclut avec Jensen.

5. Vérifier que le membre droit est fini sous la condition $(\star)$, et conclure.

L'espérance de Z_ϕ est finie par la propriété de surmartingale. Pour le terme exponentiel, on le note $Z_\phi^{\frac{1}{2}} \exp \frac{1}{4} \int \phi^2 ds$ et on applique Cauchy Schwartz.
Comme le terme de droite est fini, il converge vers $\mathbb{E}(Z_\phi)$ quand λ tends vers 1 et d'après la question 3 on a donc $\mathbb{E}(Z_\phi) \geq 1$ pour tout t. On conclue car Z_ϕ est une surmartingale.

Exercice 6 Soit $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$ un mouvement brownien et H un processus localement intégrable. On considère le processus $X_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}s + B_t$. On note $\mathbb{P}$ la loi de B et $\mathbb{Q}$ celle de X .

1. Montrer que $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ sont équivalentes et calculer la dérivée de Radon-Nikodym
$$Z = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}.$$
2. Calculer la distance de Kullback-Leibler entre ces deux mesures, c'est-à-dire
$$\mathrm{d}_{\mathrm{KL}}(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\right].$$

C'est Girsanov. On pose $L = \int_0^t H_s dB_s$. C'est une martingale locale et $\langle B, L\rangle_t = \int_0^t H_s ds$.

C'est Girsanov. B est un MB sous $\mathbb{P}$. On pose $L_t = -\int_0^t H_s dB_s$. C'est une martingale locale sous $\mathbb{P}$ et $\langle B, L\rangle_t = -\int_0^t H_s ds$. Girsanov dit que $B_t + \int_0^t H_s ds$ est un MB sous $\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L) \bullet \mathbb{P} = Z \bullet \mathbb{P}$. Autrement dit :
(1) la loi de X sous $\mathbb{P}$ est $\mathbb{Q}$
(2) la loi de X sous $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{P}$.
Pour faire les choses proprement, on se place sur l'espace canonique $\Omega = \mathscr{C}[0,1]$ muni de la variable aléatoire $B : \omega \to \omega$ qui est l'identité, donc la loi de B sous $\mathbb{P}$ est bien un MB. Le processus H est une variable aléatoire et $\int_0^t H(\omega)(s) ds \in \mathscr{C}$. On définit X par
$$X(\omega) : t \to \omega(t) + \int_0^t H_s(\omega) ds \qquad \omega \in \mathscr{C}.$$
C'est une variable aléatoire dont on appellera momentanément R la loi (mesure de proba sur Ω).
Pour toute fonctionnelle continue bornée Φ on a
$$\mathbb{E}[\Phi(X)] = \int_\Omega \Phi(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \Phi(\omega) R(d\omega)$$
par définition de la loi Q de X. Par conséquent
$$\int \frac{\Phi(X(\omega))}{Z(\omega)}\mathbb{Q}(dx) = \int \frac{\Phi(X(\omega))}{Z(\omega)} Z(\omega)\mathbb{P}(dx) = \int \Phi(X(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int \Phi(\omega) R(d\omega). \tag{1}$$
Mais par le point (2) ci-dessus on a aussi
$$\int \frac{\Phi(X(\omega))}{Z(\omega)}\mathbb{Q}(d\omega) = \tag{2}$$
Donc
$$d\mathbb{P}/d\mathbb{Q} = \mathscr{E}(L) = \exp\left(-\int_0^1 H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^s H_s^2 ds\right)$$
. Et $dQ/dP = 1/Z$.
En plus on a
$$d_{KL}(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) = \mathbb{E}\left[-\int_0^1 H_s dB_s - \frac{1}{2} H_s^2 ds\right]$$