

## INTÉGRALE DE WIENER

**Exercice 1** (Propriétés générales). Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $t \geq 0$  on pose

$$M_t := \int_0^t f(s) dB_s.$$

1. Montrer que  $(M_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien à accroissements indépendants.
2. Montrer que  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale.
3. Construire une martingale à partir de  $(M_t^2)_{t \geq 0}$ .
4. Soit  $\theta \in \mathbb{C}$ . Construire une martingale à partir de  $(e^{\theta M_t})_{t \geq 0}$ .
5. Pour quels choix de  $f$  le processus  $(M_t)_{t \geq 0}$  est-il un mouvement brownien ?
6. Soit  $g \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$  et  $N_t := \int_0^t g(s) dB_s$ . À quelle condition  $(M_t)_{t \geq 0}$  et  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont-ils indépendants ?
7. On suppose maintenant seulement que  $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ , esquisser pourquoi les résultats précédents sont toujours valables.

**Exercice 2** Soit  $(\varphi_n)$  une base Hilbertienne de  $L^2(0, 1)$ . Montrer que pour toute fonction  $f \in L^2(0, 1)$ , on a  $\mathbb{P}$ -presque sûrement

$$\int f(t) dB_t = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \int_0^1 \varphi_n(t) dB_t.$$

**Exercice 3** Pour quels nombres réels  $a, b$  le processus

$$X_t = \int_0^t \left( a + b \frac{u}{t} \right) dB_u$$

est-il un mouvement brownien ?

**Exercice 4** Que dire du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  défini par la formule suivante ?

$$X_t := \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{2s} dB_s.$$

**Exercice 5** (Pont brownien). Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On considère le processus  $(Z_t)_{0 \leq t < 1}$  défini par

$$Z_t := a(1-t) + bt + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \quad (0 \leq t < 1).$$

1. Montrer que  $(Z_t)_{0 \leq t < 1}$  est un processus gaussien dont on explicitera les paramètres.
2. Que dire de ce processus dans le cas  $a = b = 0$  ?
3. Montrer que lorsque  $t \rightarrow 1$ , on a  $Z_t \rightarrow b$  au sens de la convergence  $L^2$ .
4. Montrer que la convergence a en fait lieu presque-sûrement.

**Exercice 6** (Processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Soit  $V_0$  une variable aléatoire réelle indépendante de  $(B_t)_{t \geq 0}$ , et  $b, \sigma > 0$ . On définit un processus  $(V_t)_{t \geq 0}$  par

$$V_t := e^{-bt} \left( V_0 + \sigma \int_0^t e^{bs} dB_s \right).$$

1. Montrer que  $V_t$  converge en loi lorsque  $t \rightarrow \infty$ , et déterminer la limite.
2. On suppose désormais que  $V_0 \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{\sigma^2}{2b} \right)$ . Montrer que  $(V_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien stationnaire dont on précisera les paramètres.
3. Que dire du processus  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  défini ci-dessous ?

$$W_t := \frac{\sigma}{\sqrt{2b}} e^{-bt} B_{e^{2bt}}.$$

**Exercice 7** (Intégration par partie). Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ .

1. Établir que pour tout  $t \geq 0$ , on a presque-sûrement

$$\int_0^t f(s) dB_s + \int_0^t f'(s) B_s ds = f(t) B_t.$$

2. Sous les hypothèses supplémentaires  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  et  $\int_0^\infty |f'(t)| \sqrt{t} dt < \infty$ , en déduire

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s = - \int_{\mathbb{R}_+} f'(s) B_s ds.$$

**Exercice 8** Quelle est la loi de  $\int_0^t B_s \cos(t-s) ds$  ?

**Exercice 9** Quelle est la loi de  $\int_0^1 t^n B_t dt$  ?

**Exercice 10** (Espace gaussien). Soit  $H^B$  l'espace gaussien engendré par  $(B_t)_{t \geq 0}$  :

$$H^B := \overline{\text{Vect}(B_t : t \geq 0)}^{L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})}.$$

1. Établir l'égalité

$$H^B = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s : f \in L^2(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

2. Soit  $X \in H^B$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ . Montrer l'équivalence des deux conditions suivantes :

(a)  $X = \int_{\mathbb{R}_+} f(s) dB_s$

(b)  $\mathbb{E}[XB_t] = \int_0^t f(s) ds$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .