Équations différentielles stochastiques

Exercice 1 (Diffusion linéaire). Étant donnés des réels μ, ν, σ, τ et x, on considère l'EDS

$$dX_t = (\mu X_t + \nu)\ dt + (\sigma X_t + \tau)\ dB_t, \qquad X_0 = x.$$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.
2. Expliciter la solution $(S_t)_{t\geq 0}$ du cas particulier $\nu = \tau = 0$ et $x_0 = 1$.
3. Dans le cas général, calculer la différentielle stochastique de $(X_t/S_t)_{t\geq 0}$.
4. En déduire une expression pour $(X_t)_{t\geq 0}$.
5. Dans le cas particulier $\sigma = 0$, déterminer complètement la loi de X_t.

Exercice 2 (Changement de variable). Résoudre l'EDS suivante, pour $t \in [0, 1)$:

$$dZ_t = -\frac{Z_t}{1-t}\, dt + \, dB_t, \qquad Z_0 = 0.$$

Que dire du processus $(Z_t)_{0\leq t<1}$?

Exercice 3 (Examen 2015). On se donne une constante $\sigma > 0$ et on considère l'EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{\sigma}{1+t}\, dB_t, \qquad X_0 = 0.$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Calculer la différentielle stochastique du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par $Y_t := (1+t)X_t$. En déduire la forme explicite de $(X_t)_{t\geq 0}$. Justifier que $X_t \to 0$ quand t tend vers l'infini.
3. On fixe $a > 0$ et on note $\tau_a := \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq a\}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$M_t := \exp\left(\frac{2at}{\sigma^2}(X_t - a) + \frac{2a}{\sigma^2} X_t\right).$$

   Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$.
4. Conclure que la variable aléatoire $X^\star := \sup_{t\geq 0} X_t$ est la racine carrée d'une variable aléatoire de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 4 (Examen 2015). Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on considère l'EDS

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1+X_t^2}\, dt, \qquad X_0 = x.$$

1. Justifier que cette équation différentielle stochastique admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Justifier que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, où

$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \frac{X_s}{1+X_s^2} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{X_s^2}{(1+X_s^2)^2} ds\right\}.$$

3. Calculer la différentielle stochastique de $\left(\ln\left(1+X_t^2\right)\right)_{t\geq 0}$ et en déduire que pour $t \geq 0$,

$$\frac{1+X_t^2}{1+x^2} = Z_t^2 \exp\left\{\int_0^t \frac{1-2X_s^2}{(1+X_s^2)^2} ds\right\}.$$

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle $(X_s - x)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. On fixe $t \geq 0$. En déduire que pour $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t)\right] = \widehat{h}(x)$ avec

$$\widehat{h}(x) := \mathbb{E}\left[h(x+B_t)\left(\frac{1+x^2}{1+(x+B_t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(x+B_s)^2}{\left(1+(x+B_s)^2\right)^2} ds\right\}\right].$$

6. Soit ζ une variable aléatoire indépendante de $(B_s)_{s\geq 0}$, de densité $x \mapsto (\pi(1+x^2))^{-1}$. On note $(X_s^\star)_{s\geq 0}$ la solution de l'EDS ci-dessus avec $X_0^\star = \zeta$. Ainsi, on a $\mathbb{E}\left[h(X_t^\star)|\zeta\right] = \widehat{h}\left(\zeta\right)$.
   (a) Vérifier que le processus $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien restreint à $[0,t]$.
   (b) En déduire que pour tout $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{h}(x)}{1+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{1+x^2} dx.$$

   (c) Pour $t \geq 0$, quelle est la loi de $X_t^\star$?

Exercice 5 (Examen 2016). On considère l'équation différentielle stochastique

$$X_0 = 0, \qquad dX_t = \frac{1}{2(1+X_t^2)}\, dt + \frac{1}{\sqrt{1+X_t^2}}\, dB_t,$$

où B désigne un mouvement brownien réel. Le but est d'étudier les variables aléatoires

$$X_\star := \inf\{X_t\colon t \geq 0\} \in [-\infty, 0] \quad \text{et} \quad X^\star := \sup\{X_t\colon t \geq 0\} \in [0, +\infty].$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution forte.
2. Trouver $F \in \mathcal{C}^2$ avec $F(0) = 1, F(\infty) = 0$, telle que $(F(X_t))_{t\geq 0}$ soit une martingale locale.
3. Soient $a, b > 0$. On pose $\tau := \tau_{-a} \wedge \tau_b$, où pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\tau_r := \inf\{t \geq 0\colon X_t = r\}$.
   (a) Montrer que $(e^{-X_{t\wedge\tau}})_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable, et que pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[e^{-2X_{t\wedge\tau}}\right] = 1 + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau} \frac{e^{-2X_s}}{1+X_s^2}\, ds\right].$$

   (b) En déduire une constante $C(a,b)$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[t \wedge \tau] \leq C(a,b)$.
4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b) = \frac{1-e^{-b}}{e^a - e^{-b}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b) = \frac{e^a - 1}{e^a - e^{-b}}.$$

5. Conclure que $X^\star = \infty$ p.s. et que $-X_\star$ suit une loi exponentielle.

Exercice 6 (Monotonie). Soient $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions lipschitziennes, et $x \leq y$ des réels. On note $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ les solutions de $dZ_t = b(Z_t)\, dt + \sigma(Z_t)\, dB_t$ avec $X_0 = x$ et $Y_0 = y$.

1. Justifier que le processus $(U_t)_{t\geq 0}$ défini par la formule suivante a bien un sens :
$$U_t := \int_0^t \frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s-Y_s}\mathbf{1}_{X_s\neq Y_s}\,dB_s + \int_0^t \frac{b(X_s)-b(Y_s)}{X_s-Y_s}\mathbf{1}_{X_s\neq Y_s}\,ds.$$
2. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t\geq 0$:
$$X_t - Y_t = (x-y)\exp\left\{U_t - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\sigma(X_s)-\sigma(Y_s)}{X_s-Y_s}\right)^2 \mathbf{1}_{X_s\neq Y_s}\,ds\right\}.$$
3. En déduire que presque-sûrement : $\forall t\geq 0, X_t\leq Y_t$.

Exercice 7 (Changement de variable). Établir l'existence d'une unique solution forte à l'EDS
$$dX_t = \left(\sqrt{1+X_t^2}+\frac{X_t}{2}\right)dt + \sqrt{1+X_t^2}\,dB_t, \qquad X_0 = x$$
puis la déterminer explicitement en effectuant le changement de variable $Y_t = \operatorname{argsinh}(X_t)$.

Exercice 8 (Brownien géométrique). Le but de cet exercice est de résoudre l'EDS suivante :
$$dX_t \;=\; \{r(t)X_t + f(t)\}\,dt + \{v(t)X_t+g(t)\}\,dB_t, \qquad X_0 = \zeta,$$
où $v,r,f,g\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ sont boréliennes bornées et $\zeta\in L^2$ est indépendante de $(B_t)_{t\geq 0}$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution forte.
2. Trouver une solution dans le cas où $f=g=0$ et où r et v sont des fonctions constantes.
3. En déduire une solution dans le cas où $f=g=0$ mais r et v ne sont pas constantes.
4. Résoudre le cas général.
   Indication : On pourra s'inspirer de la variation de la constante pour passer de la solution d'une équation différentielle homogène à une équation avec second membre.

Exercice 9 (Sinh du brownien). Soit $((B_t,C_t))_{t\geq 0}$ un brownien plan. Pour $t\geq 0$, on pose
$$Y_t := \int_0^t e^{C_t-C_s}\,dB_s \qquad \text{et} \qquad W_t := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+Y_s^2}}\,dB_s + \int_0^t \frac{Y_s}{\sqrt{1+Y_s^2}}\,dC_s.$$

1. Montrer que $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien réel.
2. Vérifier que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique
$$dY_t = \sqrt{1+Y_t^2}\,dW_t + \frac{Y_t}{2}\,dt\,; \qquad Y_0 = 0.$$
3. Pour $t\geq 0$, on pose $X_t := \sinh(W_t)$. Quelle équation différentielle stochastique vérifie le processus $(X_t)_{t\geq 0}$? Que peut-on en conclure ?
4. Pour $0\leq s\leq t$, on pose $\widetilde{B}^t_s := B_t - B_{t-s}$. On rappelle que $(\widetilde{B}^t_s)_{0\leq s\leq t}$ est un mouvement brownien sur $[0,t]$. Prouver l'identité suivante, valable pour tout $f\in L^2([0,t])$:
$$\int_0^t f(s)\,dB_s = \int_0^t f(t-s)\,d\widetilde{B}^t_s.$$
5. Pour $t\geq 0$, on pose $Z_t := \int_0^t e^{C_s}dB_s$. Montrer que pour tout $t\geq 0$, Z_t a même loi que Y_t.
6. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 0}$ n'est pas une martingale, mais que $(Z_t)_{t\geq 0}$ en est une.