Espérance conditionnelle

Exercice 1 (Couples à densité). Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$ dans chacun des cas suivants :

a) (X,Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-y}\mathbf{1}_{(0<x<y)}$.

b) (X,Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x,y) = xe^{-xy}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbf{1}_{(1,\infty)}(y)$.

c) (X,Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x,y) = 4\frac{y}{x^3}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\mathbf{1}_{(0,x^2)}(y)$.

d) (X,Y) est uniformément distribué sur le disque unité.

e) $X = \min\{U_1,\ldots,U_n\}$ et $Y = \max\{U_1,\ldots,U_n\}$ avec $U_1,\ldots,U_n$ i.i.d. de loi $\mathscr{U}(0,1)$.

Exercice 2 (Couple mixte). Soient $a,b>0$, et (N,X) un v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{P}(N=n, X\le t) \quad = \quad \frac{a^n b}{n!}\int_0^t x^n e^{-(a+b)x}dx \qquad (n\in\mathbb{N}, t\ge 0).$$

a) Déterminer les lois marginales de N et X.

b) Montrer que pour toute fonction mesurable $g\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, on a

$$\mathbb{E}\left[g(X)\mathbf{1}_{(N=n)}\right] = \frac{a^n b}{n!}\int_0^\infty g(x)x^n e^{-(a+b)x}dx.$$

c) En déduire $\mathbb{E}\left[X|N\right]$ et $\mathbb{E}[N|X]$.

Exercice 3 (Exponentielles). Soient X,Y indépendantes et de lois respectives $\mathscr{E}(\lambda)$ et $\mathscr{E}(\mu)$.

a) Quelle est la loi de $U := \min\{X,Y\}$?

b) Calculer $\mathbb{E}[U|X]$ et $\mathbb{E}[X|U]$.

Exercice 4 (Un terme sachant la somme). Calculer $\mathbb{E}[X|X+Y]$ dans les cas suivants :

a) X et Y sont indépendantes avec $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$ et $Y\sim\mathscr{P}(\mu)$ $(\lambda,\mu>0)$.

b) X et Y sont indépendantes avec $X\sim\mathscr{B}(n,p)$ et $Y\sim\mathscr{B}(m,p)$ $(m,n\in\mathbb{N}, 0<p<1)$.

c) X et Y sont indépendantes avec $X\sim\Gamma(r,\lambda)$ et $Y\sim\Gamma(s,\lambda)$ $(r,s,\lambda>0)$.

d) X et Y sont indépendantes avec $X\sim\mathscr{N}(\mu,\sigma^2)$ et $Y\sim\mathscr{N}(\nu,\tau^2)$ $(\mu,\nu\in\mathbb{R};\sigma,\tau>0)$.

Exercice 5 (Classique). Soient $X_1,X_2,\ldots,X_n$ i.i.d. de loi $\mathscr{N}(0,1)$ et soit $S_n := X_1+\cdots+X_n$. Calculer $\mathbb{E}[f(S_n)|X_1,\ldots,X_{n-1}]$ lorsque $f(x) = x, x^2, x^3, \exp(x), \cos(x)$ et $\exp(-x^2)$.

Exercice 6 (Marche aléatoire). Soient $(X_n)_{n\ge1}$ des v.a.i.i.d. dans L^1, et $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left[S_n|S_m\right]$ pour tout $n,m\ge 1$.

b) Calculer $\mathbb{E}\left[X_1|S_n,S_{n+1},\ldots\right]$ pour tout $n\ge1$. Que dire lorsque $n\to\infty$?

Exercice 7 (Variance conditionnelle). Soit $X\in L^2(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ et $\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$ une sous-tribu. On pose $\mathrm{Var}(X|\mathscr{G}) := \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X|\mathscr{G}\right])^2\,|\mathscr{G}\right]$. Montrer que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}(X|\mathscr{G})\right] + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\right).$$

Exercice 8 (Identité de Wald). Calculer l'espérance et la variance de $Z := X_1+\cdots+X_T$, où les $(X_k)_{k\ge1}$ sont i.i.d. dans L^2, et T est dans L^2, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de $(X_k)_{k\ge1}$.

Exercice 9 (Signe). Soit X une v.a. et $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction measurable bornée. Calculer $\mathbb{E}\left[h(X)\big||X|\right]$ lorsque X est symétrique (i.e. $-X \overset{\text{(loi)}}{=} X$), puis dans le cas général.

Exercice 10 (Indépendance). Soient X,Y,Z des v.a. réelles, avec X intégrable.

a) Montrer que si Z est indépendant de (X, Y), alors $\mathbb{E}[X|Y, Z] = \mathbb{E}[X|Y]$.

b) Construire un contre-exemple lorsque l'on suppose simplement Z indépendant de X.

Exercice 11 (Cas gaussien).

a) Calculer $\mathbb{E}\left[\langle Z, x\rangle | \langle Z, y\rangle\right]$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0, \Gamma)$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$.

b) Soit (X, Y) un couple gaussien. Exprimer $\mathbb{E}[X|Y]$ en fonction des paramètres.

Exercice 12 (Problème). Soient X, Y des v.a. intégrables telles que $\mathbb{E}[X|Y] \leq Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] \leq X$ presque-sûrement. Le but est de démontrer que $X = Y$ presque-sûrement.

a) Montrer que les inégalités apparaissant dans l'hypothèse sont en fait des égalités.

b) On suppose $X, Y \in L^2$. Calculer $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ et conclure.

c) On suppose $X, Y \geq 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X \wedge n | Y \wedge n] \leq Y \wedge n$ pour tout n et conclure.

d) On revient au cas général. Montrer que $\mathbb{E}[X_+ | Y_+] \geq Y_+$, et conclure.

e) Retrouver le résultat en montrant directement que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[(Y - X)\mathbf{1}_{(X>\theta, Y>\theta)}\right] \quad = \quad \mathbb{E}\left[(X - Y)\mathbf{1}_{(X>\theta\geq Y)}\right].$$