INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Exercice 1 (Martingales locales).

1. La somme de deux martingales locales est-elle encore une martingale locale ?
2. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue. On suppose que pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|\right] < \infty.$$
Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est en réalité une vraie martingale.
3. Aurait-t-on pu conclure en supposant seulement que $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout t (donner une preuve ou un contre exemple) ?
4. On suppose maintenant que M est une martingale locale telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$. Montrer que M est une vraie martingale.
5. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale positive telle que $\mathbb{E}[M_0] < \infty$. Montrer que c'est une surmartingale, et que c'est une martingale si et seulement si $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

Exercice 2 (Formule d'Itô). Dans chacun des cas suivants, montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô, calculer sa différentielle stochastique, et déterminer si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale.

1. $Z_t = B_t + 4t$
2. $Z_t = B_t^2 - t$
3. $Z_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s \,\mathrm{d}s$
4. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$
5. $Z_t = B_t^2(B_t^2 - 6t)$
6. $Z_t = B_t\left(B_t^4 - 10tB_t^2 + 15t^2\right)$
7. $Z_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$, avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.
8. $Z_t = (\cos B_t, \sin B_t)$

Exercice 3 Le processus $X_t = \int_0^t \mathrm{e}^{B_s^2} \,\mathrm{d}B_s$ est-il une martingale ?

Exercice 4 On pose $X_\varepsilon = \int_0^1 \varepsilon^{-\lambda} \,\mathrm{e}^{-B_s^2/2\varepsilon} \,\mathrm{d}B_s$. Montrer que $X_\varepsilon \to 0$ dans L^2 quand $\varepsilon \to 0$ si et seulement si $\lambda \in]0, 1/4[$.

Exercice 5 (Unicité de l'écriture d'un processus d'Itô). Étant donné $\psi \in M^1_{\text{loc}}$, on pose
$$Z_t := \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

1. Vérifier que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est adapté.
2. Montrer que si $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors ψ est nul $\mathbb{P} \otimes dt-$p.p.
3. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale. On pourra introduire une suite de temps d'arrêts bien choisie.
4. En déduire que l'écriture d'un processus d'Itô $\{X_t\}_{t\geq 0}$ sous la forme
$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s,$$
avec $(\psi, \phi) \in M^1_{\text{loc}} \times M^2_{\text{loc}}$ est unique.

Exercice 6 (Fonction du brownien). Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(f'(B_s)\right)^2 \mathrm{d}s\right] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|f''(B_s)\right| \mathrm{d}s\right] < \infty.$$

1. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$ (formule de Dynkin) :

$$\mathbb{E}[f(B_t)] = f(0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t f''(B_s)\,\mathrm{d}s\right].$$

2. Retrouver la formule donnant les moments de la loi gaussienne.

Exercice 7 (EDP). Soit $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction deux fois dérivable, solution de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

1. Montrer que le processus $(f(t,B_t))_{t\geq 0}$ est une martingale locale, et donner une condition suffisante sur f pour que ce soit une vraie martingale.
2. Que dire de $(B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0}$, $(B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2)_{t\geq 0}$ et $(B_t^5 - 10tB_t^3 + 15t^2 B_t)_{t\geq 0}$?

Exercice 8 (Pont brownien). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $(Z_t)_{0\leq t<1}$ défini par

$$Z_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s.$$

Montrer que $(Z_t)_{0\leq t<1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{b - Z_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

Exercice 9 (Cas vectoriel). Soit $((B_t, \widetilde{B}_t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan. Pour $t \geq 0$ on pose :

$$X_t := \exp(B_t)\cos(\widetilde{B}_t) \qquad \text{et} \qquad Y_t := \exp(B_t)\sin(\widetilde{B}_t).$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ sont des martingales de carré intégrable.
2. Le produit $(X_t Y_t)_{t\geq 0}$ est-il une martingale ?
3. Calculer la différentielle stochastique du processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$Z_t := (X_t - 1)^2 + (Y_t)^2.$$

Exercice 10 (Carré de Bessel). Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel.

1. Montrer que $(|B_t|^2)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.
2. On considère $d = 3$ à partir de maintenant. Déterminer la loi de $|B_t|$ et calculer $\mathbb{E}[1/|B_t|]$ et $\mathbb{E}[1/|B_t|^2]$ pour tout t.
3. On admet qu'on peut appliquer la formule d'Itô au processus $M_t = 1/|B_t|$ même s'il n'est pas défini quand $|B_t| = 0$; montrer que c'est une martingale locale. Elle est ainsi bornée dans L^2 mais n'est pas une vraie martingale.