Audition : laboratoire Modal'X

Simon Coste

2016 - 2019	thèse, supervision de Charles Bordenave & Justin Salez
2019 - 2021	postdoctorat dans l'équipe de François Baccelli (INRIA)
2021 - 2022	postdoctorat dans l'équipe de Stéphane Mallat (ÉNS Paris)
	co-organisateur de Challenge data 2022

ENS | PSL

Matrices creuses ~~hermitiennes~~

Matrices creuses ~~hermitiennes~~ : motivations

Mathématiques

- Matrices creuses $\Rightarrow$ autres classes d'universalité [1] !
- Objets poissoniens.
  Liens avec la combinatoire, l'arithmétique.

Modélisation et statistiques

- Énormément de réseaux sont creux [2].
- Énormément de réseaux sont dirigés.
- Trouver des méthodes <u>vraiment</u> non-hermitiennes (ex : non-backtracking).

1. Metz, Neri, Rogers 2018, *Spectral Theory of Sparse Non-Hermitian Random Matrices* (physique)
2. Cf `StanfordLargeNetworkDatasetCollection`

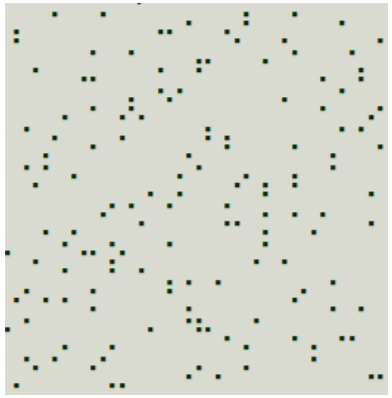
I
Modèles à entrées indépendantes et applications en statistiques

Un modèle naturel : entrées indépendantes

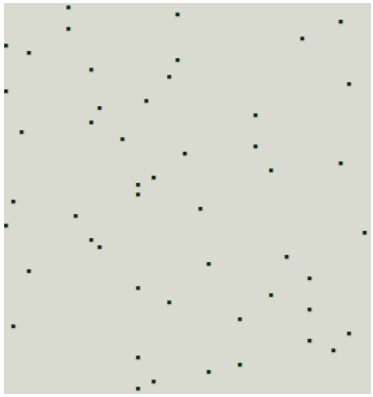
Définition ([Bordenave, C, Nadakuditi, 22, J.FoCM])

matrice de poids $n \times n$	*matrice de masque $n \times n$*	*matrice observée A*
$X_{i,j}$	$\xi_{i,j} \sim \mathrm{Bernoulli}(P_{i,j})$	$A_{i,j} = X_{i,j}\xi_{i,j}$
		(ainsi $\mathbb{E}[A] = P \odot X$*)*

modèle d-creux $\Leftrightarrow \max P_{i,j} \leqslant d/n$

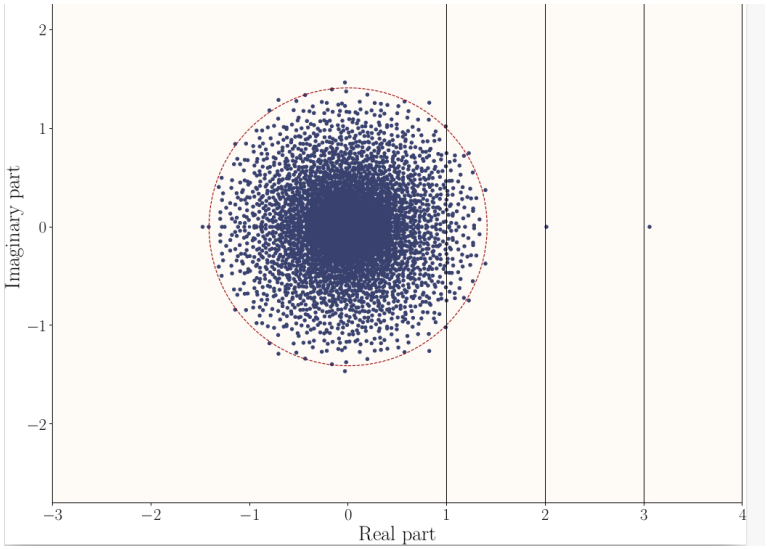


$d = 4$ entrées non nulles par ligne



$d = 1$

Théorie spectrale « extrémale »



$Av_i = \lambda_i v_i \qquad \mathbb{E}[A]u_i = \mu_i u_i$ (valeurs propres, vecteurs propres)

Théorème ([Bordenave, C, Nadakuditi, 22, J.FoCM] et [C, Stephan, 21+])

Il existe un seuil $\vartheta = \sqrt{\|P \odot X \odot X\|_{\mathrm{op}}}$ *tel que si* $|\mu_i| > \vartheta$, *alors* $\lambda_i \sim \mu_i$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} |\langle u_i, v_i\rangle| = |\mu_i|^{-1} \times \left(|(\mu_i^2 I - PX^2)^{-1} v_i^2|_1\right)^{-1/2}$$

Toutes les autres valeurs propres de A *sont plus petites que* ϑ.

Statistique non supervisée : reconstruction de matrices

Problème statistique : on veut reconstruire X à partir de l'observation de A.

Théorème

1) Séparer aléatoirement $A = A_1 + A_2$.
2) Étudier les vecteurs propres de $A_1 A_2^*$ plutôt que ceux de AA^*.

[Bordenave, C, Nadakuditi, 22, J.FoCM] : identification de la limite

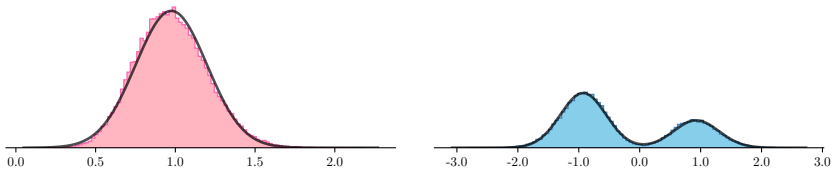
$$RMSE = \frac{1}{n} \|X - \hat{X}\|_F$$

Détection des communautés dans un SBM

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} a & \dots & a & b & \dots & b \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a & b & \dots & b \\ c & \dots & c & d & \dots & d \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & \dots & c & d & \dots & d \end{pmatrix}$$

Theorem ([C, Stephan, 21+])

1) Nous avons identifié tous les seuils de Kesten-Stigum dans ce type de modèle.
2) Nous avons « identifié » la limite de la loi empirique des entrées des vecteurs propres associés aux outliers



À faire avec la méthode des traces

Projets

- Markovian Block-Models
  Clustering in block markov chains (Proutière, Sanders, Yun, *Annals of Stat.* 20).
- Alignement de bases de données creuses
  Travaux de Ganassali, Lelarge, Massoulié, Jiaming Xu
- Graphes dynamiques : méthodes tensorielles

II
Modèles de matrices aléatoires avec des dépendances

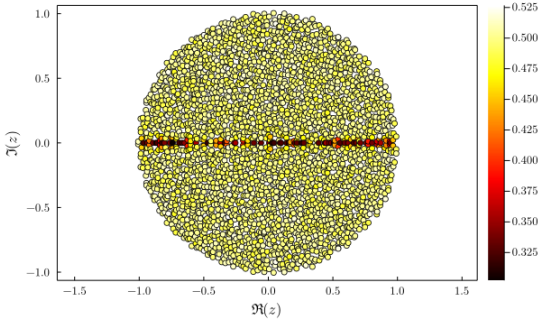
Matrices avec des entrées **dépendantes**

Modèle 1. graphes de configuration [C, 20, Ann. IHP].

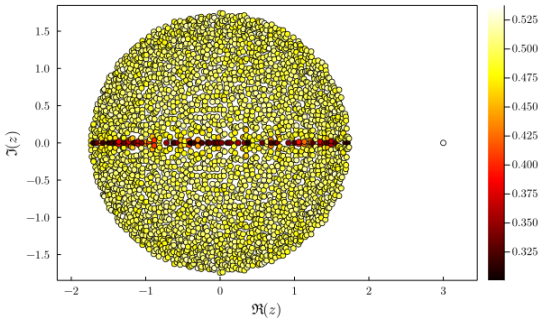
Modèle 2. Soient $\pi_1, \dots, \pi_d$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$ aléatoires.

$$A = \pi_1 + \cdots + \pi_d \quad \in \mathscr{M}_{n,n}(\{0,1\})$$

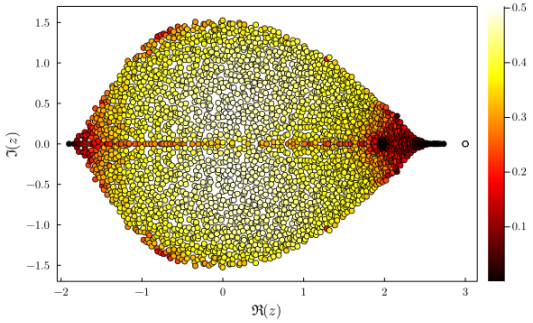
Exemples de valeurs propres de A



$d = 50$



uniforme, $d = 3$

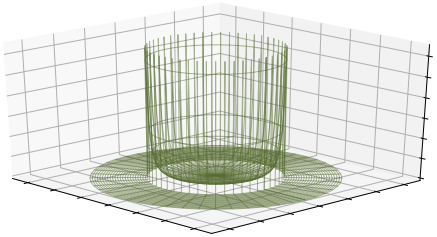


Ewens$(500), d = 3$

Conjecture « Oriented Kesten-McKay » (difficile)

$$\mathrm{ESD} = \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$$

<u>Conjecture</u> : μ_n converge vers $\frac{d^2(d-1)}{\pi}\frac{\mathbf{1}_{|z|<\sqrt{d}}}{(d^2-|z|^2)^2}dz$.



Quelles sont les autres lois limites des matrices creuses ?

1. Loi limite pour Erdos-Rényi dirigé ?
   Mesure de Brown, [Haagerup et Larsen 2000]
2. Équivalent unitaire (libre) de la mesure de Ewens ?

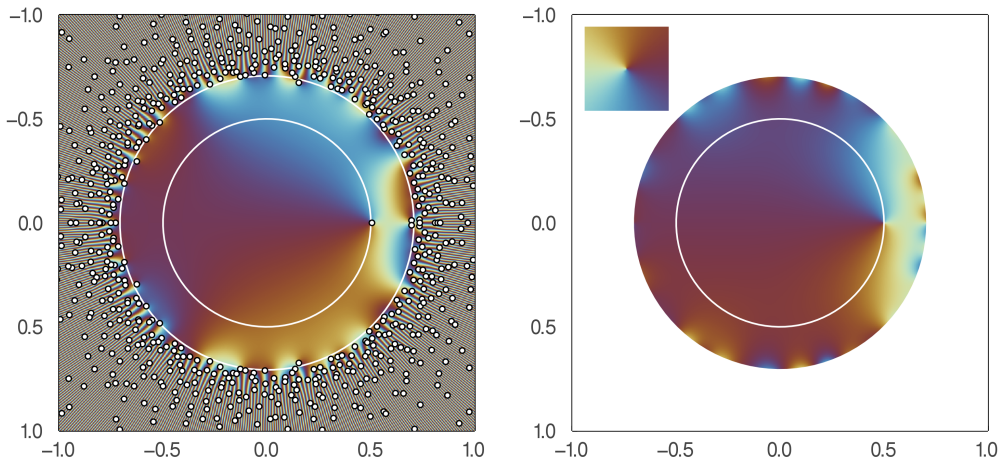
Convergence du polynôme caractéristique

Théorème ([C, 21+] et [C, Lambert, Zhu, 22+])

A_n = *au choix,*

- *la matrice d'adjacence d'un graphe d'Erdős-Rényi dirigé* $G(n, d/n)$
- *la somme de* d *matrices de permutations uniformes (si* d *est entier),*

Alors $det(I_n - zA_n)$ *converge vers* $e^{-f(z)}$ *lorsque* $|z| < \sqrt{d}$.



Un champs poissonnien log-corrélé

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left(\sum_{\ell | k} \ell Y_\ell \right) \qquad Y_\ell \sim \text{Poisson}(d^\ell / \ell)$$

- fonction méromorphe sur $D(0, 1/\sqrt{d})$ avec un unique pôle en $1/d$.
- $\text{cov}(f(z), f(w)) = -\log(1 - z\bar{w}) + O_d(1)$ (« log-corrélé »)
- $\lim_{d\to\infty} f_d(z/\sqrt{d}) =$ processus gaussien log-corrélé.
- Expression remarquable (fonction Log-Lambert) :

$$e^{-f(z)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z^\ell)^{Y_\ell}$$

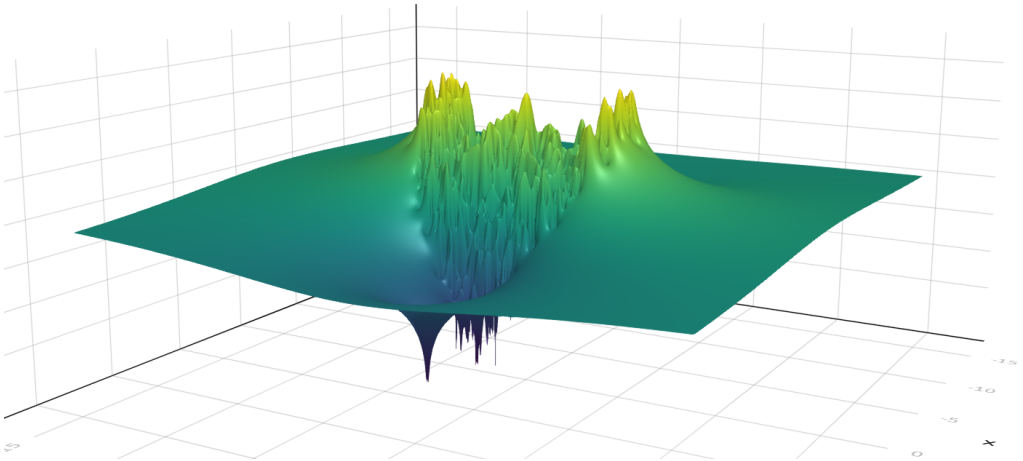
- Fonction génératrice des moments de $F = e^{-f}$ connue [3]

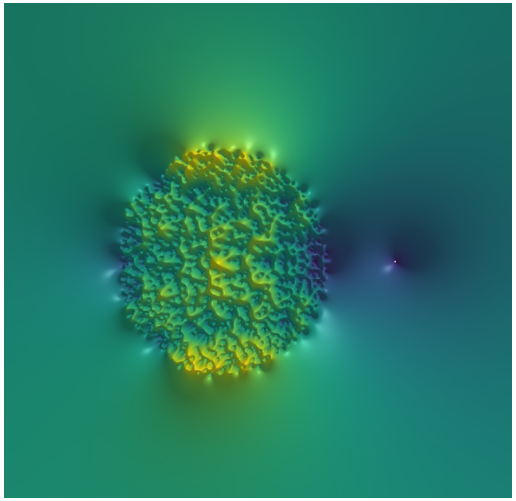
$$\mathbb{E}[F(z_1) \ldots F(z_m)] = \frac{\prod_{S \subset [m] \text{ odd}} (1 - d \prod_{s \in S} z_s)}{\prod_{S \subset [m] \text{ even}} (1 - d \prod_{s \in S} z_s)}$$

...mais pas d'interprétation combinatoire.

3. [C, 21+]section 2.3

Fluctuations et champs poissonniens log-corrélés





Chaos holomorphe Poissonien défini comme une distribution de Schwartz sur $\mathbb{T}$:

$$(\mathrm{PHC}_d, \varphi) = \lim_{r \to d^{-1/2}} \int_{\mathbb{T}} e^{-f(re^{i\theta})} \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

Régularité Sobolev [C, 21+] : $\mathrm{PHC}_d \in H^{\varepsilon}(\mathbb{T})$ pour tout $\varepsilon < -1/2$.

Question dans l'esprit de [Rider et Virag 2006]

$$\max \log |\det(I - zA)| \sim \frac{\text{constante}}{\log n} ?$$

Partie non-harmonique des fluctuations (polynômes en z et $\bar{z}$) ?
Formule de Fyodorov-Bouchaud pour PHC_d ?

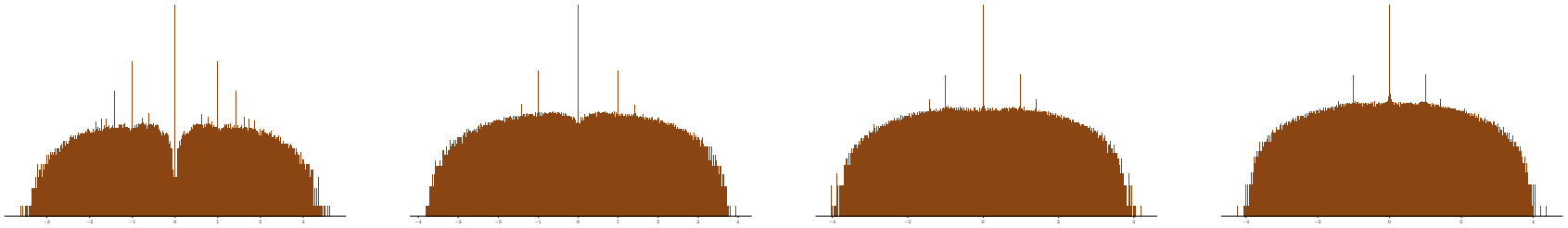
III

Matrices creuses **Hermitiennes**

Matrices creuses **Hermitiennes**

Quid des matrices d'adjacence des graphes d'Erdős-Rényi $G(n, d/n)$?

Théorème : ESD_n converge vers une mesure borélienne μ_d.



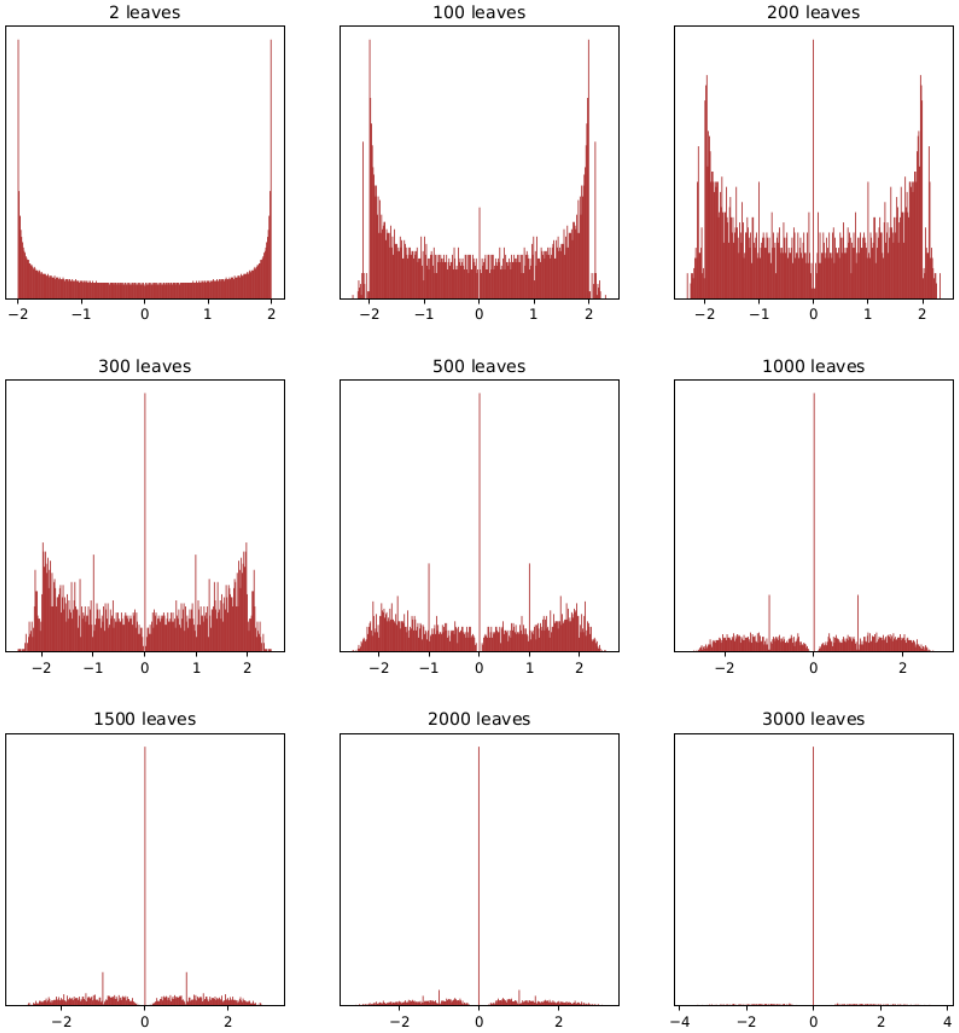
$c = 2$ $c = 2,6$ $c = 2,8$ $c = 3$

Theorem ([C, Salez, 21, Ann. Proba.])

μ_d possède des états étendus en zéro si et seulement si $d > e$.

[C., PhD thesis] : la mesure spectrale limite des arbres aléatoires uniformes n'a pas d'états étendus en zéro.

Spectre des arbres



Insertion au laboratoire Modal'X

Graphes : Laurent Ménard, Lucas Gérin
Statistiques : Olga Klopp

Annexe. Challenge data

Challenge Data

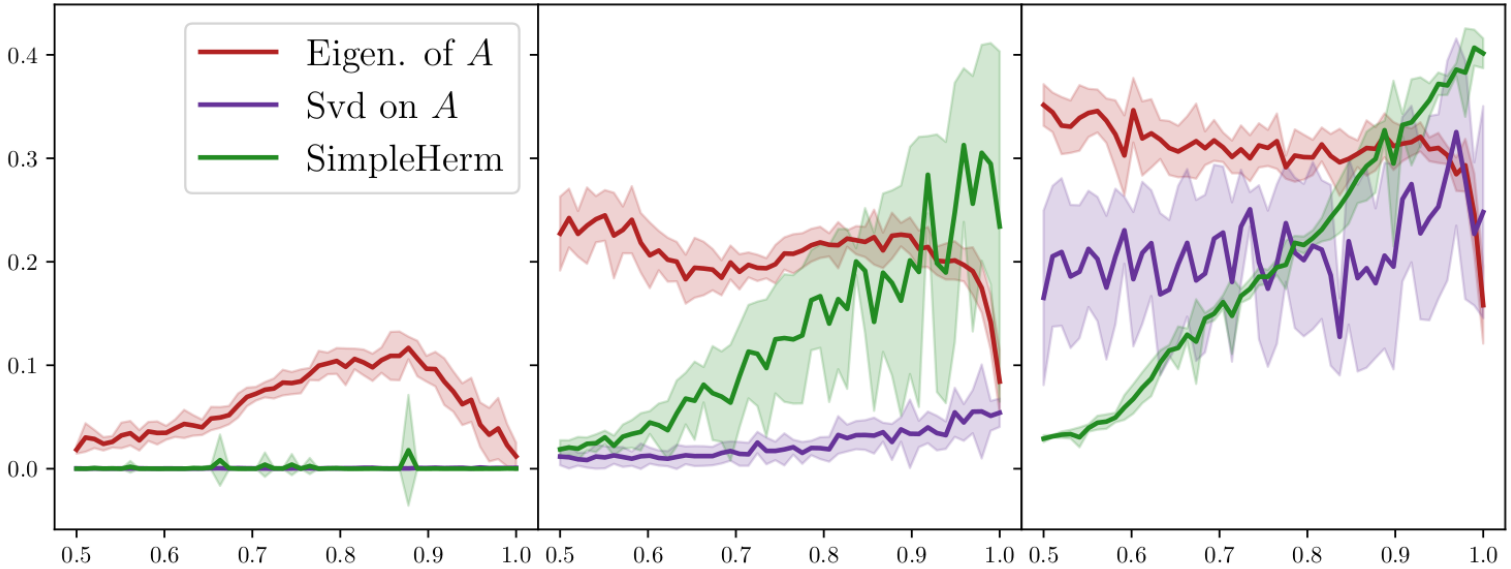
About us

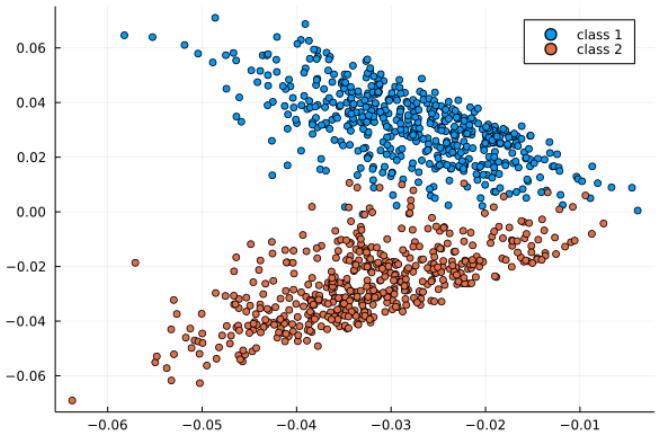
Challenge Data is managed by **the Data team (ENS Paris)**, in partnership with the Collège de France, and the **DataLab** at Institut Louis Bachelier. It is supported by the CFM chair and the PRAIRIE Institute.

32789	56	9994
Submissions	Challenges currently running	Participants

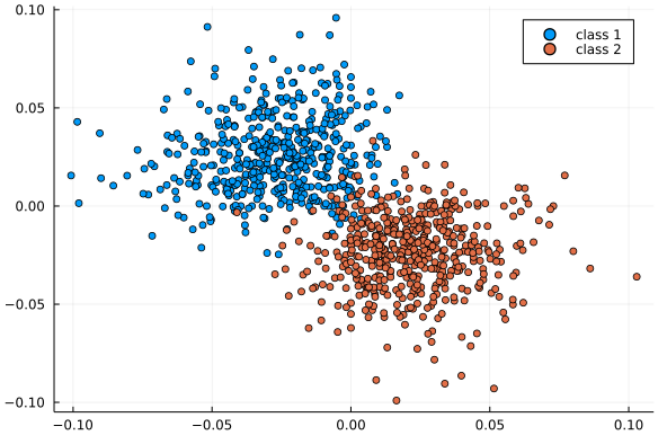
Annexe. Résultats expérimentaux de [C, Stephan, 21+] : détection de communautés

Performance du clustering à partir de vecteurs propres de matrices non-normales





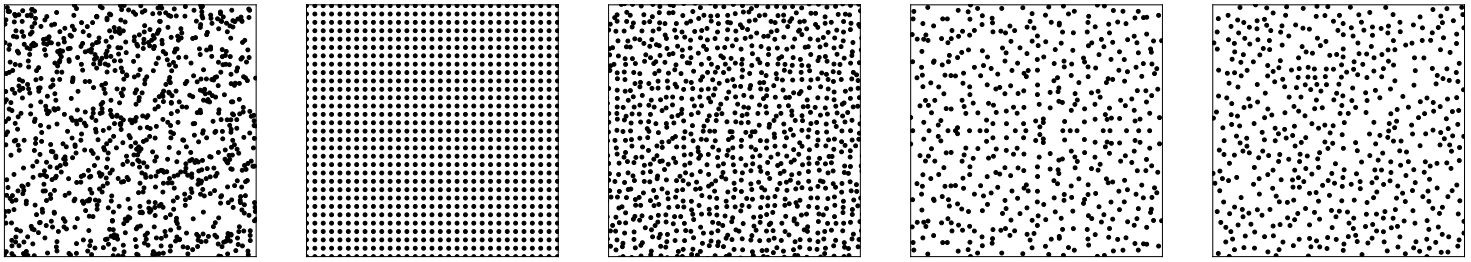
plongement spectral classique



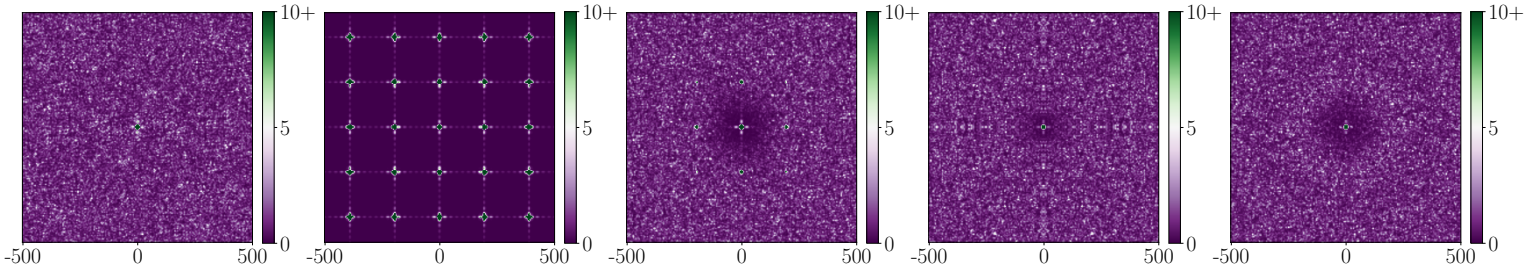
plongement « non-symétrique »

Annexe. Rigidité des processus ponctuels

Quelques processus avec des rigidités différentes



Poisson | Grid | Perturbed grid | Ginibre | Matern-II



La transformée de Fourier de la fonction de corrélation

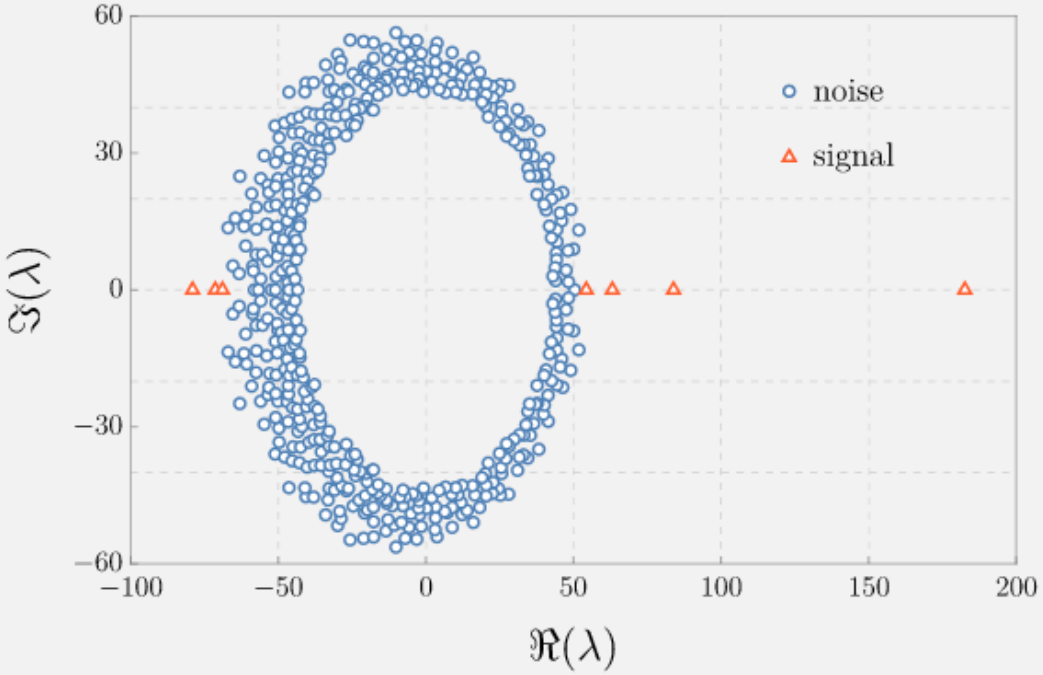
Un survey en cours d'écriture sur les notions de « rigidités » des processus ponctuels : hyperuniformité, number-rigidity, stealthyness...

<u>Question</u> : le gas de Coulomb en dimension $d \geqslant 2$ est-il hyperuniforme ?

Annexe. Utilisation de [Bordenave, C, Nadakuditi, 22, J.FoCM] dans l'industrie bioinformatique

https://fasma.io

fasma



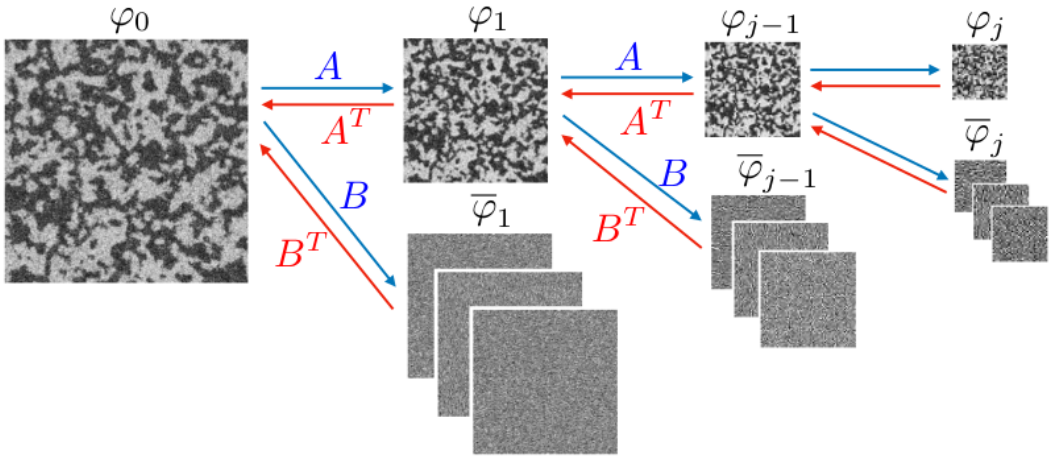
Pow

Becaus
biologic
extreme

We leve
random
unsupe

We war
perform
perform

Annexe. Deep learning et groupe de renormalisation



$$X_0 \in \mathbb{R}^{2^d} \to X_1 \in \mathbb{R}^{2^{d-1}} \to \cdots \to X_J \in \mathbb{R}^1$$

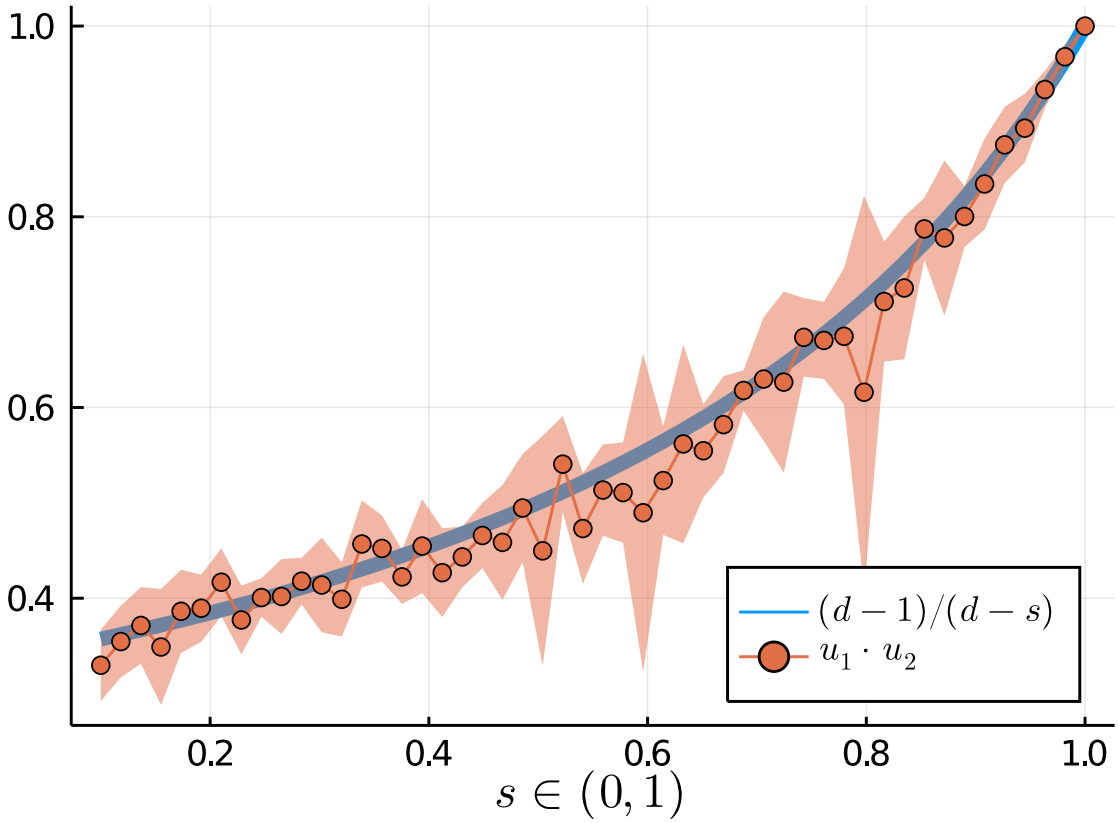
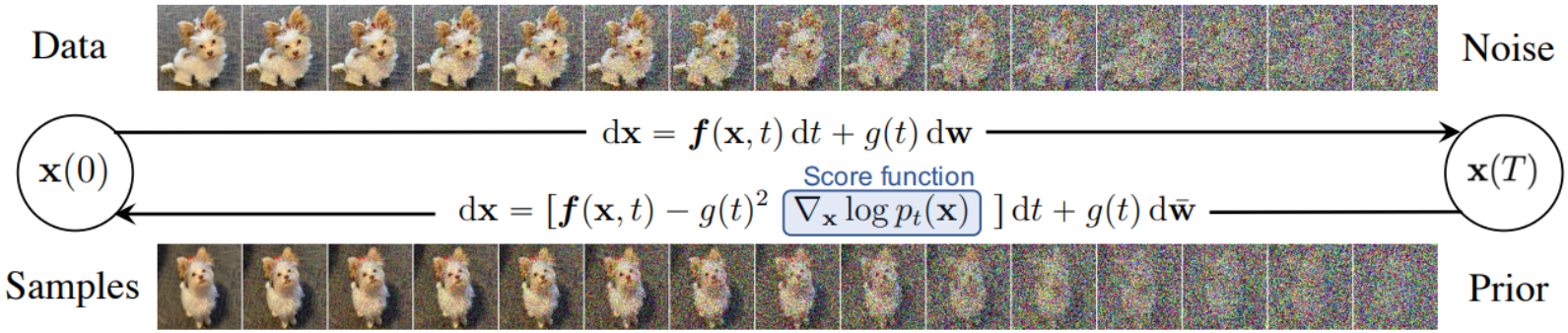
Idée du Groupe de Renormalisation : paramétriser les lois conditionnelles $p(X_j|X_{j+1})$.

$$p(x_j|x_{j+1}) = \frac{e^{-E_{\theta_j}(x_j,x_{j+1})}}{Z_{\theta_j}(x_{j+1})}$$

Annexe. Alignement de base de données / désanonymisation

M_1, M_2 : matrices d'Erdős-Rényi dirigés, avec corrélation des entrées s.
u_1, u_2 : vecteurs propres dominants.

$$\langle u_1, u_2 \rangle \to \frac{1 - 1/d}{1 - s/d}$$



Annexe. Modèles de diffusion en deep learning