

APPLICATIONS DE LA FORMULE D'ITÔ

Exercice 1 (Différentielle stochastique d'un produit). Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus d'Itô. Montrer que $(X_t Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.

Exercice 2 (Examen 2009). Soit $\{(B_t, \tilde{B}_t)\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan, et

$$X_t := \int_0^t B_s d\tilde{B}_s - \int_0^t \tilde{B}_s dB_s, \quad (t \geq 0).$$

1. Montrer que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ est une martingale de carré intégrable.
2. Soit $\lambda > 0$. Justifier que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}] = \mathbb{E}[\cos(\lambda X_t)]$
3. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Calculer la différentielle stochastique des processus suivants :

$$Y_t := \cos(\lambda X_t) \quad \text{et} \quad Z_t := h(t) - \frac{h'(t)}{2}(B_t^2 + \tilde{B}_t^2)$$

4. Calculer le crochet $\langle Y, Z \rangle$.
5. Montrer que $\{Y_t e^{Z_t}\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale dès que h vérifie $h'' = (h')^2 - \lambda^2$.
6. Vérifier que $h: t \mapsto -\log \{\cosh(\lambda r - \lambda t)\}$ est solution, pour tout $r \geq 0$.
7. En déduire $\mathbb{E}[e^{i\lambda X_t}]$, pour tout $t \geq 0$.

Exercice 3 (Loi de l'arcsinus). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. Il est facile de voir que la formule d'Itô pour $\{f(B_t)\}_{t \geq 0}$ reste valable si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^2 partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' est bornée. Voici une application. Soit

$$H_t := \int_0^t \mathbf{1}_{(B_s \geq 0)} ds \quad (t \geq 0).$$

Il s'agit de montrer que la variable aléatoire $\frac{H_t}{t}$ admet pour densité $x \mapsto \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$ sur $(0, 1)$.

1. Étant donnés $\alpha, \beta > 0$, trouver $a, b \in \mathbb{R}$ pour que f satisfasse les conditions ci-dessus, avec

$$f(x) := \begin{cases} a \exp\left(-\sqrt{2(\alpha + \beta)}x\right) + \frac{1}{\alpha + \beta} & \text{si } x \geq 0 \\ b \exp\left(\sqrt{2\alpha}x\right) + \frac{1}{\alpha} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Construire une martingale bornée à partir de $\{f(B_t)e^{-(\alpha t + \beta H_t)}\}_{t \geq 0}$ et en déduire que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbb{E}\left[e^{-\beta H_t}\right] dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}.$$

3. On admet que $\int_0^\infty \int_0^1 e^{-\alpha t} \frac{e^{-\beta t x}}{\pi \sqrt{x(x-1)}} dx dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}$ pour tout α et β , conclure.

Remarque : Pour calculer l'intégrale dans la dernière question, après avoir fait l'intégrale en t , on peut utiliser une intégrale de contour en choisissant de définir sur $\mathbb{C} \setminus (1, 1)$ la racine dans l'intégrale. Alternativement on peut symétriser autour de $x = \frac{1}{2}$ ce qui donne une intégrale de la forme $\sqrt{1-y^2}$ puis faire un changement de variable en sinus.

Exercice 4 (Partiel 2015). Soit B un mouvement brownien réel et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On considère le processus

$$M(t) = \Phi\left(\frac{B(t)}{\sqrt{1-t}}\right), \quad t \in [0, 1).$$

1. Calculer la différentielle stochastique de M . Qu'en concluez-vous ?
2. Montrer l'existence et donner la valeur $M(1)$ de la limite p.s. de $M(t)$ quand t croît vers 1.
3. Écrire $\mathbb{E}(M(1)|B(s); s \leq t)$ comme une probabilité conditionnelle et en déduire que $(M(t); t \in [0, 1])$ est une martingale.
4. Calculer la probabilité que B intersecte la courbe $t \mapsto \sqrt{1-t}$, $t \in [0, 1]$.

Exercice 5 (Temps local). Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. La formule d'Itô

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

s'étend aisément à toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^2 partout sauf en un nombre fini de points au voisinage desquels f'' reste bornée. Voici un exemple où cette extension est utile.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{f_\varepsilon(B_t)\}_{t \geq 0}$, où

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon} \right) & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

2. On note Λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . En déduire que pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \Lambda \{s \in [0, t]: |B_s| < \varepsilon\} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{L^2} |B_t| - \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s.$$

Exercice 6 (Récurrence ou transience du mouvement brownien).

1. Trouver une fonction harmonique non-triviale $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ à symétrie sphérique, i.e.

$$\|z\| = \|z'\| \implies u(z) = u(z').$$

2. On fixe $0 < r < R < \infty$ et $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $r < \|z\| < R$. Soit $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien plan issu de z , et

$$\tau := \inf \{t \geq 0: \|B_t\| \leq r \text{ ou } \|B_t\| \geq R\}.$$

Que dire du processus $\{u(B_{t \wedge \tau})\}_{t \geq 0}$? En déduire la probabilité que $\{B_t\}_{t \geq 0}$ atteigne le cercle de centre 0 et de rayon r avant d'avoir touché celui de rayon R .

3. Montrer qu'un point donné distinct du point de départ ne sera presque-sûrement jamais visité par le mouvement brownien plan, mais que presque-sûrement, chaque ouvert de \mathbb{R}^2 est visité infiniment souvent.
4. On se place désormais en dimension $d \geq 3$. Pour $r < \|z\| < R$, déterminer la probabilité qu'un mouvement brownien issu de z touche la sphère de rayon r avant celle de rayon R .
5. Quelle est la probabilité qu'une fois sorti de la boule de rayon n^3 , le mouvement brownien ne revienne plus jamais dans la boule de rayon n ?
6. En déduire qu'en dimension $d \geq 3$, le mouvement brownien est transient : $\|B_t\| \rightarrow \infty$ p.s.