

SUITES ALÉATOIRES

**Exercice 1** (Convergences). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables de Bernoulli indépendantes, de paramètres respectifs  $(p_n)_{n \geq 1}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

- a)  $X_n \rightarrow 0$  presque-sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$  ;
- b)  $X_n \rightarrow 0$  en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$  ;
- c)  $X_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $p \geq 1$  est un nombre donné ;
- d)  $nX_n \rightarrow 0$  presque sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$  ;
- e)  $nX_n \rightarrow 0$  en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$  ;
- f)  $nX_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $p \geq 1$  est un nombre donné.

**Exercice 2** (Concentration). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables dans  $L^2$ , d'espérances  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  et de variances  $(\sigma_n^2)_{n \geq 1}$ . On suppose que  $\mu_n \neq 0$  et que  $\sigma_n/\mu_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrer que

$$\frac{X_n}{\mu_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

**Exercice 3** (Problème du collectionneur). Chaque œuf en chocolat contient une surprise choisie au hasard et uniformément parmi  $n$  surprises possibles, indépendamment des autres œufs. Un enfant décide de manger les œufs un à un, jusqu'à ce qu'il ait récolté un exemplaire de chacune des  $n$  surprises possibles. On cherche à estimer le nombre  $T_n$  d'œufs qu'il lui faudra manger.

- a) Montrer que  $T_n$  est la somme de  $n$  variables géométriques indépendantes.
- b) En déduire l'espérance et la variance de  $T_n$ .
- c) Conclure que  $\frac{T_n}{n \ln n} \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , en un sens que l'on précisera.

**Exercice 4** (Records). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. de fonction de répartition  $F$ , et

$$\alpha := \inf \{t \in \mathbb{R} : F(t) > 0\} \in [-\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad \beta := \sup \{t \in \mathbb{R} : F(t) < 1\} \in (-\infty, +\infty].$$

Montrer que presque-sûrement,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \alpha$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \beta$ .

**Exercice 5** (Maximum d'exponentielles). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On cherche à établir que

$$Z_n := \frac{\max \{X_1, \dots, X_n\}}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1.$$

- a) Vérifier que la convergence a lieu en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- b) Montrer que presque-sûrement,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \geq 1$ .
- c) Montrer que presque-sûrement  $Z_{2^k} \rightarrow 1$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , puis conclure.

**Exercice 6** (Maximum de gaussiennes). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On veut montrer que

$$\frac{\max \{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt{2 \ln n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 1.$$

- a) Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$ .
- b) Montrer qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $t$  suffisamment grand,  $\mathbb{P}(X > x) \geq c \frac{e^{-x^2/2}}{x}$ .
- c) Conclure à l'aide d'une approche similaire à celle de l'exercice précédent.

**Exercice 7** (Pas de loi des grands nombres sans moment). Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables i.i.d.

- Montrer que  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n| \geq n\})$  vaut 0 ou 1 selon que  $X_1$  est intégrable ou non.
- Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombre réels telle que la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k)_{n \geq 1}$  soit convergente dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que nécessairement,  $\frac{u_n}{n} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- Déduire des deux questions précédentes que si  $X_1$  n'est pas intégrable, alors la probabilité pour que la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k)_{n \geq 1}$  soit convergente dans  $\mathbb{R}$  est nulle.

**Exercice 8** (Processus de Poisson). Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{E}(1)$ . On pose  $T_0 := 0$  et  $T_n := X_1 + \dots + X_n$  pour  $n \geq 1$ . Enfin, on fixe  $\lambda > 0$  et on pose

$$N := \max \{n \geq 0 : T_n \leq \lambda\}.$$

- Justifier que  $N < \infty$  presque-sûrement.
- Montrer que pour  $n \geq 1$ , le vecteur  $(T_1, \dots, T_n)$  admet une densité que l'on déterminera.
- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $N$ .
- Pour  $n \geq 1$ , déterminer la loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$  sachant  $\{N = n\}$ .

**Exercice 9** Soit  $p \in [0, 1], \lambda > 0$ . Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  des variables indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ , et soit  $N$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , indépendante de  $(X_n)_{n \geq 1}$ . On pose

$$X := \sum_{k=1}^N X_k \quad \text{et} \quad Y := \sum_{k=1}^N (1 - X_k).$$

Montrer que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et déterminer leurs lois.

**Exercice 10** (Récurrence/transience). Soit  $p \in [0, 1]$ , et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables i.i.d. avec  $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ . On pose  $S_0 := 0$  et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n.$$

On s'intéresse à  $Z := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{(S_n=0)}$ , le nombre de visites en zéro du processus  $(S_n)_{n \geq 0}$ .

- Donner la loi de  $S_n$  pour  $n \geq 0$ , et trouver le comportement de  $\mathbb{P}(S_n = 0)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- En déduire que si  $p \neq \frac{1}{2}$ , alors  $\mathbb{P}(Z < \infty) = 1$ . Pouvait-on le prévoir sans faire de calcul ?
- On pose  $A_n := \{S_n = 0\} \cap \bigcap_{k \geq n+1} \{S_k \neq 0\}$ . Montrer que

$$\mathbb{P}(Z < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(A_0).$$

- En déduire que si  $p = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(Z < \infty) = 0$ .

**Exercice 11** Soit  $(A_n)$  une suite de variables aléatoires iid strictement positives, au sens où  $\mathbb{P}(A_n \leq 0) = 0$ . On suppose que  $\mathbb{E}[\ln A_n] < 0$ .

- Étudier la convergence de la suite de variables aléatoires définie par  $X_n = A_1 \dots A_n$ .
- Étudier la convergence de la série de terme général  $X_n$ .

**Exercice 12** (théorème de Carleman) Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe deux constantes  $C, c$  telles que pour tout  $n$ ,  $\mathbb{P}(|X_n| > x) \leq Ce^{-cx^2}$  (on dit que ces variables aléatoires sont *sous-gaussiennes*).

- On suppose que  $X_n$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$ . Montrer que pour tout entier  $k$ ,  $\mathbb{E}[X_n^k]$  converge vers  $\mathbb{E}[X^k]$ .
- Réciproquement, on suppose que pour tout entier  $k$ ,  $\mathbb{E}[X_n^k]$  converge vers  $\mathbb{E}[X^k]$ .
  - Montrer qu'il existe une constante  $a$  telle que pour tout  $n$  et pour tout  $k$ ,  $\mathbb{E}[|X_n|^{k+1}] \leq (ak)^{k/2}$ .
  - En déduire que

$$\varphi_{X_n}(t) = \sum_{j=0}^k \frac{(it)^j}{j!} \mathbb{E}[X_n^j] + O((ak)^{-k/2} |t|^{k+1})$$

où les constantes du  $O(\cdot)$  ne dépendent ni de  $t$ , ni de  $n$ .

- En déduire que  $X_n$  converge en loi vers  $X$ .