INTÉGRALE STOCHASTIQUE

Exercice 1 (Martingales locales). ⚠

1. La somme de deux martingales locales est-elle encore une martingale locale ?

Soit M et M' deux martingales locales, soit T_n et T'_n des suites de temps d'arrêts associés. On pose $\tau_n = T_n \wedge T'_n$, $M_{t\wedge\tau_n}$ et $M'_{t\wedge\tau_n}$ sont des martingales en tant que version arrêtées de $M_{t\wedge T}$ et $M'_{t\wedge T_n}$, et donc la somme est encore une martingale. Par ailleurs $T_n \wedge T'_n \to \infty$ clairement, ce qui conclue.

2. Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale locale continue. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|\right] < \infty.$$

Montrer que $\{M_t\}_{t\geq 0}$ est en réalité une vraie martingale.

Soit T_n une suite de temps d'arrêt associé à la martingale locale. On fixe $s < t$. On a pour tout n,

$$\mathbb{E}(M_{t\wedge T_n} \mid \mathcal{F}_s) = M_{s\wedge T_n}.$$

Le membre de droite converge ps vers M_s et le terme dans l'intégrale converge ps vers M_t. Pour passer de la convergence ps à la convergence de l'intégrale, on observe que $|M_{t\wedge T_n}| \leq \sup_{0\leq u\leq t}|M_u|$ et qu'on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée.

3. Aurait t'on pu conclure en supposant seulement que $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout t (donner une preuve ou un contre exemple) ?

On ne peut pas conclure donc construisons un contre exemple. Nous allons adapter l'exemple d'une martingale discrète qui converge ps et pas dans L^1 : la marche aléatoire simple stoppée au premier temps où elle touche -1.
Soit B_t une mouvement brownien et soit $\tilde{M}_t = B_{\tan(t)}$ (on ne définie $\tilde{M}$ que pour $t < \pi/2$). Soit $\tau = \inf\{t : \tilde{M}_t = -1\}$ et soit $M_t = \tilde{M}_{t\wedge\tau}$. Comme $\tau < \pi/2$ presque sûrement, on peut définir M_t pour tout temps. Comme M est obtenue à partir d'un changement de temps d'un mouvement brownien, il est facile de vérifier que c'est une martingale locale, on peut par exemple utiliser directement la définition avec la suite de temps $T_n = (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})1_{\tau\geq\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} + n1_{\tau<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}$. Par ailleurs $E(|M_t|) < \infty$ pour tout t puisque avant $\pi/2$ cela vient juste d'un Brownien arrêté à un temps borné et pour $t \geq \pi/2$ la martingale locale vaut juste -1.

4. On suppose maintenant que M est une martingale locale telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t) < \infty$. Montrer que M est une vraie martingale.

Comme à la question 2, on a $\mathbb{E}(M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s) = M_{s\wedge T_n}$ et on doit montrer qu'on peut échanger limite $n \to \infty$ et espérance dans le terme de gauche. On note M^n le processus arrêté en T_n, $M^n_t = M_{t\wedge T_n}$. Les M^n sont des vraies martingales (en t) de crochet $\langle M^n\rangle_t = \langle M\rangle_{t\wedge T_n}$ et (comme ce sont de vraies martingales) on a $\mathrm{Var}(M^n_t) = \mathbb{E}(\langle M^n\rangle_t)$. Comme le crochet est croissant, $\langle M^n\rangle_t$ est donc borné (comme suite dépendant de n) dans L^1 et donc les M^n_t sont bornés dans L^2 (à nouveau comme suite dépendant de n). Enfin, on observe facilement que comme les T_n sont croissant, la suite M^n_t est une martingale en n. On vient de dire qu'elle est bornée dans L^2 donc elle converge dans L^1 (et L^2).

5. Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale locale positive telle que $\mathbb{E}[M_0] < \infty$. Montrer que c'est une surmartingale, et que c'est une martingale si et seulement si $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

   Pour montrer que M est une surmartingale, on applique le même raisonnement qu'à la question 2 en remplaçant le TCD par Fatou. La deuxième partie est vraie pour toute surmartingale, on a $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$ presque sûrement mais par hypothèse ces deux termes on la même espérance et donc $\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq M_s$ ps.

Exercice 2 (Unicité de l'écriture d'un processus d'Itô). ⚠ Étant donné $\psi \in M^1_{\text{loc}}$, on pose

$$Z_t := \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

1. Vérifier que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est adapté.

   On va en fait montrer que toute fonction à variation finie est Riemann intégrable. On prend $t = 1$ pour simplifier les notations. Soit $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que i est "bon" si $\sup_{\frac{i-1}{n} \leq s,t \leq \frac{i}{n}} |\psi(s) - \psi(t)| \leq \epsilon$. On remarque que le nombre de mauvais i est bornée indépendamment de n. On peut donc écrire

   $$\sum_{i \text{ bon}} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \psi(s) - \epsilon \mathrm{d}s \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{i}{n}) \leq \sum_{i \text{ bon}} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \psi(s) + \epsilon \mathrm{d}s + \frac{\sharp\{i \text{ mauvais}\}}{n} \sup \psi$$

   et on voit que la somme de Riemann converge bien en faisant tendre $n \to \infty$ puis $\epsilon \to 0$.

2. Montrer que si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale, alors ψ est nul $\mathbb{P} \otimes dt-$p.p.

   On a vu au TD 4 qu'une martingale à variation finie est forcément constante. Comme ψ est à variation finie, presque sûrement ψ est en particulier une fonction borné sur $[0, t]$. On a donc que Z est à variation finie (en fait la variation finie de Z au temps t est simplement $\int_0^t |\psi(s)|ds$.
   Maintenant qu'on sait que Z est nulle ps, on passe au fait que ψ et nulle p.s en remarquant que comme ψ est la différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante, ψ ne peut avoir qu'un nombre dénombrable de saut. Par ailleurs si t est un point de continuité de ψ, on peut retrouver ψ comme la dérivée de Z et donc $\psi = 0$ en tout point de continuité.

3. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale locale. On pourra introduire une suite de temps d'arrêts bien choisie.

   Si Z est une martingale locale, on note T_n une suite de temps d'arrêt qui la régularise. En appliquant la question 2 on obtient que $0 = \int_0^{t \wedge T_n} \psi(s)ds$ presque sûrement. On peut passer à la limite en n et conclure comme à la question précédente.

4. En déduire que l'écriture d'un processus d'Itô $\{X_t\}_{t\geq 0}$ sous la forme

   $$X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s,$$

   avec $(\psi, \phi) \in M^1_{\text{loc}} \times M^2_{\text{loc}}$ est unique.

On suppose qu'on a deux écritures utilisant (ψ, ϕ) et (ψ', ϕ'). En prenant leur différence, on obtient

$$\int_0^t \phi(s) - \phi'(s) \mathrm{d}B_s = \int_0^t \psi'(s) - \psi(s) \mathrm{d}s$$

et d'après les propriétés de l'intégrale stochastique, le terme de gauche est une martingale locale. La question précédente montre donc que $\psi = \psi'$ dans M^1_{loc}. On a donc $\int_0^t \phi(s) - \phi'(s) \mathrm{d}B_s = 0$ p.s et (par exemple en passant à la variation quadratique) $\phi = \phi'$ dans M^2_{loc}.

Exercice 3 (Formule d'Itô). ⚠ Dans chacun des cas suivants, montrer que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô, calculer sa différentielle stochastique, et déterminer si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

D'après la Formule d'Itô, on sait que si M est un processus d'Itô, et que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors $f(M)$ est encore une processus d'Itô. De manière similaire on sait qu'une somme et un produit de processus d'Itô sont encore des processus d'Itô. Tous les processus de l'exercice sont donc clairement de processus d'Itô.

1. $Z_t = B_t + 4t$

   $\mathrm{d}Z_t = \mathrm{d}B_t + 4\mathrm{d}t$ par linéarité.

2. $Z_t = B_t^2 - t$

   $\mathrm{d}Z_t = 2B_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}.2\mathrm{d}t - \mathrm{d}t$ et Z est une martingale.

3. $Z_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s \,\mathrm{d}s$

   $\mathrm{d}Z_t = 2tB_t \mathrm{d}t + t^2 \mathrm{d}B_t - 2tB_t$ et Z est une martingale.

4. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$

   $Z_t = 3B_t^2 \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}6B_t \mathrm{d}t - 3t\mathrm{d}B_t - 3B_t \mathrm{d}t = (3B_t^2 - 3t)\mathrm{d}B_t$ et Z est une martingale.

5. $Z_t = B_t^2(B_t^2 - 6t)$

   On a deux solutions, soit on développe et on applique la même méthode que pour les questions précédentes, soit on voit Z comme un produit. On va faire la deuxième solution pour changer même si elle peut être moins efficace ici.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B_t^2) &= 2B_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}.2\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}(B_t^2 - 6t) &= 2B_t \mathrm{d}B_t - 5\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\langle B_t^2, B_t^2 - 6t\rangle &= 4B_t^2 \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}Z_t &= (2B_t \mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t)(B_t^2 - 6t) + B_t^2(2B_t \mathrm{d}B_t - 5\mathrm{d}t) + (4B_t^2 \mathrm{d}t) \\ &= (4B_t^3 - 12B_t)\mathrm{d}B_t - 6t\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

6. $Z_t = B_t\left(B_t^4 - 10tB_t^2 + 15t^2\right)$

   $\mathrm{d}Z_t = (5B_t^4 - 30tB_t^2 + 15t^2)\mathrm{d}B_t$, martingale.

7. $Z_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$, avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.

   $\mathrm{d}Z_t = \sigma Z_t dB_t + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})Z_t \mathrm{d}t$, martingale si $\mu = -\frac{\sigma^2}{2}$.

8. $Z_t = (\cos B_t, \sin B_t)$

La dérivée agit tout simplement de manière séparée sur chaque composante, $\mathrm{d}Z_t = (-\sin B_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\cos B_t \mathrm{d}t, \cos B_t \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\sin B_t \mathrm{d}t)$.

Exercice 4 (Fonction du brownien). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (f'(B_s))^2 \,\mathrm{d}s\right] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^t |f''(B_s)| \,\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

1. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[f(B_t)] = f(0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t f''(B_s) \,\mathrm{d}s\right].$$

D'après la formule d'Itô, on a $f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\mathrm{d}s$. Les hypothèses de l'exercice nous disent que la première intégrale est bornée dans L^2 et donc aussi dans L^1 et que la deuxième intégrale est aussi bornée dans L^1. On obtient la formule désirée en passant à l'espérance.

2. Retrouver la formule donnant les moments de la loi gaussienne.

Soit $C_n = \mathbb{E}(B_1^n)$. Pour $f(x) = x^n$, on peut clairement échanger l'espérance et l'intégrale dans le terme de droite et on obtient donc la récurrence :

$$C_n = \frac{n(n-1)}{2} C_{n-2} \int_0^1 (\sqrt{s})^{n-2} \mathrm{d}s = \frac{n(n-1)}{n+2} C_{n-2}.$$

On conclue facilement.

Exercice 5 (EDP). Soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

1. Montrer que le processus $\{f(t, B_t)\}_{t \geq 0}$ est une martingale locale, et donner une condition suffisante sur f pour que ce soit une vraie martingale.

Par la formule d'Itô, on a $\mathrm{d}f(t, B_t) = \frac{df}{d_t}(t, B_t)\mathrm{d}t + \frac{df}{dx}(t, B_t)\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(t, B_t)\mathrm{d}t$ et on voit que d'après l'EDP, on a bien une martingale locale.
Pour avoir une vrai martingale, il faut une condition d'intégrabilité. On peut par exemple demander que $|f(t, x)| \leq e^{a(t)|B_t|} + b(t)$ avec a et b des fonctions continues. On peut alors borner $\sup_{0 \leq s \leq t} |f| \leq e^{\sup_{[0,t]} a(s) \sup_{[0,t]} |B_s|} + \sup_{[0,t]} b(s)$ ce qui est bien intégrable car le sup du mouvement brownien a une queue de distribution gaussienne.

2. Que dire de $\{B_t^3 - 3tB_t\}_{t \geq 0}$, $\{B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2\}_{t \geq 0}$ et $\{B_t^5 - 10tB_t^3 + 15t^2 B_t\}_{t \geq 0}$?

On calcule les dérivées et on constate que toutes ces expressions définissent des martingales.

Exercice 6 (Pont brownien). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $\{Z_t\}_{0 \leq t < 1}$ défini par

$$Z_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} \,\mathrm{d}B_s.$$

Montrer que $\{Z_t\}_{0\leq t<1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{b - Z_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

On dérive, pour le produit de $(1-t)$ et de l'intégrale il suffit de se rappeler que par définition $\mathrm{d}\int_0^t f\mathrm{d}B = f\mathrm{d}B$.

Exercice 7 (Cas vectoriel). Soit $\{(B_t, \widetilde{B}_t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan. Pour $t \geq 0$ on pose :

$$X_t := \exp(B_t)\cos(\widetilde{B}_t) \qquad \text{et} \qquad Y_t := \exp(B_t)\sin(\widetilde{B}_t).$$

1. Montrer que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ et $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ sont des martingales de carré intégrable.

$$\mathrm{d}X_t = X_t dB_t + \frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t - \sin(\tilde{B}_t)e^{B_t}\mathrm{d}\tilde{B}_t - \frac{1}{2}X_t\mathrm{d}t = X_t\mathrm{d}B_t - Y_t\mathrm{d}\tilde{B}_t$$

et le terme de crochet est nul car B et $\tilde{B}$ sont indépendants. De même

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t\mathrm{d}B_t + X_t\mathrm{d}\tilde{B}_t.$$

Par ailleurs, il est facile de vérifier la question 2 de l'exercice 1 donc ce sont de vrais martingales.

2. Le produit $\{X_tY_t\}_{t\geq 0}$ est-il une martingale ?

On calcule le crochet de X et Y. On a $\mathrm{d}\langle X, Y\rangle = X_tY_t\mathrm{d}t + (-Y_t)X_t\mathrm{d}t = 0$. Le produit est donc encore une martingale.

3. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ défini par

$$Z_t := (X_t - 1)^2 + (Y_t)^2.$$

On pourrait se ramener à une expression en terme de Browniens mais on va plutôt utiliser une dérivée composée.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Z_t &= 2(X_t-1)\mathrm{d}(X_t-1) + \frac{1}{2}.2\mathrm{d}\langle X\rangle_t + 2Y_t\mathrm{d}Y_t + \frac{1}{2}.2\mathrm{d}\langle Y\rangle \\
&= (X_t-1)(X_t\mathrm{d}B_t - Y_t\mathrm{d}\tilde{B}_t) + (X_t^2+Y_t^2)\mathrm{d}t + Y_t(Y_t\mathrm{d}B_t + X_t\mathrm{d}\tilde{B}_t) + (X_t^2+Y_t^2)\mathrm{d}t \\
&= (X_t^2 - X_t)\mathrm{d}B_t + (Y_t^2 + Y_t)\mathrm{d}B_t + 2(X_t^2+Y_t^2)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Exercice 8 (Carré de Bessel). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un brownien $d-$dimensionnel.

1. Montrer que $\{\|B_t\|^2\}_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.

C'est un processus d'Itô comme somme de carrés de processus d'Itô. On note $B = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$

$$d\|B_t\|^2 = \sum_i \mathrm{d}B_i^2 = \sum_i (2B_i dB_i + dt) = 2\langle B, \mathrm{d}B\rangle + d\mathrm{d}t.$$

2. On considère $d = 3$ à partir de maintenant. Déterminer la loi de $\|B_t\|$ et calculer $\mathbb{E}(1/\|B_t\|)$ et $\mathbb{E}(1/\|B_t\|^2)$ pour tout t.

En faisant un changement de variable en coordonnée sphérique, on trouve que $\|B_t\|$ a pour densité $f_t(r) = r^2 e^{-r^2/2t} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}t}$. (On peut en fait retrouver la constante en utilisant la variance connue de la loi normale). On en déduit les espérances demandées sans difficulté puisque c'est le même calcul que les moments d'une loi normale.

3. On admet qu'on peut appliquer la formule d'Itô au processus $M_t = 1/\|B_t\|$ même s'il n'est pas défini quand $\|B_t\| = 0$, montrer que c'est une martingale locale. ⚠ Elle est bornée dans L^2 mais n'est pas une vrai martingale !

On applique la fonction $1/\sqrt{x}$ au processus de la question 1 qu'on va appeler X_t.

$$d(1/\sqrt{X_t}) = \frac{-1}{2} X_t^{-3/2} dX_t + \frac{1}{2}\frac{3}{4} X_t^{-5/2} d\langle X\rangle_t.$$

Pour calculer la dérivée du crochet, on peut se rapporter à l'expression en coordonnée (le troisième terme dans la solution à la question 1) et on trouve $d\langle X\rangle_t = 4X_t dt$. On voit que le terme en dt se simplifie et M_t est donc une martingale locale.