

FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES

Exercice 1 (Propriétés élémentaires).

- a) Montrer que ϕ_X est bornée et uniformément continue.
- b) Montrer que ϕ_X est de type positif : pour tout $n \geq 1$ et tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice complexe $\{\phi_X(t_j - t_k)\}_{1 \leq j, k \leq n}$ est hermitienne positive.
- c) Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Montrer que $\phi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, et calculer $\phi_X^{(n)}$.
- d) Donner le développement de Taylor de ϕ_X d'ordre 2 en zéro lorsque $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{E}[X] = 0$.
- e) Plus généralement, montrer que si $\mathbb{E}[e^{aX}] < \infty$ pour un certain $a > 0$, alors ϕ_X est analytique dans $[-a, a]$ et que

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \mathbf{E}[X^n].$$

Exercice 2 (Lois usuelles). Calculer la fonction caractéristique de chacune des lois suivantes.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $X \sim \mathcal{U}(\{-1, +1\})$. | f) $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$. |
| b) $X \sim \mathcal{B}(p)$. | g) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. |
| c) $X \sim \text{Bin}(n, p)$. | h) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. |
| d) $X \sim \mathcal{G}(p)$. | i) $X \sim \Gamma(r, \lambda)$. |
| e) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. | |

Exercice 3 Calculer la fonction caractéristique du carré d'une gaussienne centrée réduite.

Exercice 4 (Formule d'inversion de Fourier). On se propose de montrer que si $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$, alors X admet une densité continue et bornée, donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi_X(t) dt \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- a) Vérifier que f est bien continue et bornée.
- b) Justifier que pour tous $\sigma > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(iut - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dt.$$

- c) En déduire que pour tous $\sigma > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iyt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \phi_X(t) dt.$$

- d) En déduire que pour toute fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, on a

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{(X-y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] dy \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} h(y) f(y) dy.$$

- e) Vérifier que le membre de gauche vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[h(X + \sigma s)] e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ et conclure.

Exercice 5 (Cauchy). Soit λ un réel strictement positif.

- Vérifier que $f: x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ est une densité (dite densité de Laplace de paramètre λ), et calculer la fonction caractéristique associée.
- En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre λ .
- Que peut-on dire de la somme de deux variables aléatoires de Cauchy indépendantes ?

Exercice 6 (Atomes). Soit X une variable aléatoire. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \Phi_X(t) dt \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = x).$$

Exercice 7 (Transformations). Montrer que si ϕ est une fonction caractéristique, alors $\bar{\phi}$, $\text{Re}(\phi)$, $|\phi|^2$ et $e^{\phi-1}$ en sont aussi.

Exercice 8 (Somme d'uniformes). Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'intervalle $(-1, 1)$. On pose $Z := X + Y$.

- Montrer que Z admet une densité que l'on calculera.
- Calculer par ailleurs ϕ_Z .
- En déduire la fonction caractéristique de la loi de densité $t \mapsto c \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2$, ainsi que la valeur de la constante c .

Exercice 9 (Laplace). Soient W, X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Déterminer la fonction caractéristique de WX .
- En déduire la loi de $WX + YZ$.
- Montrer que $|WX + YZ|$ suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 10 (Une énigme). Soit Q une loi symétrique sur \mathbb{R} , avec la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, si X_1, \dots, X_n sont i.i.d. de loi Q , alors $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ suit encore la loi Q . Trouver Q !

Exercice 11 (Une autre énigme). Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi inconnue, de moyenne 0 et de variance 1. De plus, $X + Y$ est indépendante de $X - Y$. Quelle est la loi de X et Y ?

Exercice 12 (Encore une énigme). Dans cet exercice, X et Y désignent des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi inconnue, de carré intégrable. De plus, $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ suit aussi la même loi que X et Y .

- Quelle est l'espérance de X ?
- Déterminer une équation fonctionnelle satisfaite par ϕ_X .
- Résoudre cette équation à l'aide d'un développement de Taylor, et trouver la loi de X .

Exercice 13 Soit X_t une variable aléatoire de loi $\Gamma(1, t)$, c'est-à-dire de densité $x \mapsto \Gamma(t)^{-1} \mathbf{1}_{x \geq 0} e^{-x} x^{t-1}$.

- Calculer la densité de $Y_t = (X_t - t)/\sqrt{t}$, ainsi que sa fonction caractéristique.
- En déduire que

$$\frac{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}}{\Gamma(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iu\sqrt{t}} \left(1 - \frac{iu}{\sqrt{t}} \right)^{-t} du.$$

- Démontrer la formule de Stirling, à savoir l'équivalent suivant en $t \rightarrow \infty$:

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}.$$