

MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

**Exercice 1** (Temps d'arrêt). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  un espace filtré. Parmi les variable aléatoires suivantes, lesquelles sont des temps d'arrêt?

1. Le minimum de deux temps d'arrêt.

Oui car  $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$

2. Le maximum de deux temps d'arrêt.

Oui car  $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$

3. La somme de deux temps d'arrêt.

Oui, et on peut le prouver même sans continuité de la filtration en passant au complémentaire. On écrit  $\{S + T > t\} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}, x < t} \{S > x\} \cap \{T > t - x\}$  ce qui est bien  $\mathcal{F}_t$  mesurable.

4. Le premier instant où un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien atteint une valeur donnée  $a \in \mathbb{R}$ .

Oui, mais il faut être attentif à bien écrire l'événement en terme d'union et d'intersection dénombrable. Supposons pour simplifier les notations que  $a > 0$ . On peut remarquer que comme l'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé, on a  $T \leq t \Leftrightarrow \forall b \in (0, a), \exists s < t, B_s > b$ . Dans l'expression de droite on peut clairement se restreindre au rationnels ce qui conclue.

5. Le dernier zéro d'un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

C'est clairement faux. On peut par exemple le prouver en constatant qu'on obtient une contradiction en appliquant le théorème d'arrêt à ce temps et à la martingale  $B_t^2 - t$ .

**Exercice 2** ( $\Delta$  Quelques martingales du mouvement brownien). Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité filtré et soit  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ -mouvement brownien.

1. Montrer que  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est une martingale.

On doit vérifier que  $B_t$  est bien intégrable à tout temps, adapté ainsi que la propriété de martingale pour tout paire de temps  $t$  et  $t + s$ . Tout est trivial.

2. Montrer que  $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$  est une martingale.

L'intégrabilité et l'adaptation sont triviales. On a  $\mathbb{E}(B_{t+s}^2 - t - s \mid \mathcal{F}_t) = B_t^2 - t + \mathbb{E}((B_t + s - B_t)^2 - s) + 2\mathbb{E}(B_t(B_t + s - B_t) \mid \mathcal{F}_t)$  et le deux second termes sont clairement nuls.

3. Construire une martingale à partir du processus  $\{B_t^3\}_{t \geq 0}$ .

On développe  $B_{t+s}^3 = B_t^3 + 3B_t^2(B_{t+s} - B_t) + 3B_t(B_{t+s} - B_t)^2 + (B_{t+s} - B_t)^3$ . Il est alors facile de voir que  $B_t^3 - 3tB_t$  sera alors une martingale.

4. Construire une martingale à partir du processus  $\{B_t^4\}_{t \geq 0}$ .

Même technique que ci dessus, on peut partir des termes de plus haut degré et voir comment les compenser. On trouve  $B_t^4 - 6B_t^2t + 3t^2$ .

5. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que le processus  $\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}\}_{t \geq 0}$  est une martingale.

Même chose que dans les questions précédentes mais il faut passer par le calcul de l'intégrale  $\mathbb{E}(e^N)$  pour une loi normale comme pour la fonction caractéristique.

6. Construire une martingale à partir du processus  $\{\cosh(\lambda B_t)\}_{t \geq 0}$ .

Simplement par linéarité,  $\cosh(\lambda B_t)e^{-\lambda^2 t/2}$  est une martingale.

**Exercice 3** (Loi de temps d'atteinte). Soit  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un mouvement brownien et  $a > 0$ .

1. À l'aide de la martingale  $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ , calculer l'espérance de  $T_a^* := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$ .

C'est exactement comme dans l'application classique avec des marches aléatoires, on obtient  $\mathbb{E}(T_a^*) = a^2$ .

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la variance de  $T_a^*$ .

On utilise la martingale pour  $B_t^4$ . On peut bien prendre l'espérance car  $T_a^{*2}$  est intégrable et on obtient

$$0 = a^4 - 6a^2 \cdot a^2 + 3\mathbb{E}(T_a^{*2})$$

ce qui donne  $\text{Var}(T_a^*) = \frac{5}{3}a^4 - a^4$ . Notez qu'il est normal d'arriver sur un multiple de  $a^4$  d'après les propriétés d'invariance du mouvement brownien.

3. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de  $T_a^*$ .

On utilise la martingale en cosh pour obtenir que pour  $s \geq 0$ ,  $\mathbb{E}(e^{-sT_a^*}) = \frac{1}{\cosh \sqrt{2sa}}$

4. Calculer la transformée de Laplace de  $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$  et retrouver le fait que  $T_a$  a même loi que  $(a/B_1)^2$ . Que vaut  $\mathbb{E}[T_a]$ ?

Pour calculer  $e^{-sT_a}$  pour  $s \geq 0$ , on veut utiliser la martingale de la question 5 de l'exercice précédent avec  $\lambda = +\sqrt{2s}$  et maintenant le signe devient important. En effet cette martingale est bornée par  $e^{\lambda a}$  avant  $T_a$  donc permet d'échanger limite et espérance ce qui n'est pas le cas de la martingale avec  $-\sqrt{2s}$ . On obtient  $\mathbb{E}(e^{-sT_a}) = e^{-\sqrt{2sa}}$ .

Pour vérifier l'identité en loi demandée, on calcule la transformée de Laplace de  $(a/B_1)^2$  et on peut clairement prendre  $a = 1$  pour simplifier les notations. On a

$$\mathbb{E}(e^{-s/B_1^2}) = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{s}{x^2} - \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2s}}{x} - x)^2} e^{-\sqrt{2s}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

On fait un changement de variable  $u = x - \frac{\sqrt{2s}}{x}$  qui donne  $x = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}{2}$  (attention au choix du signe en résolvant l'équation,  $x$  doit être positif) et donc

$$dx = \frac{du}{2} + \frac{udu}{2\sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}.$$

La partie de l'intégrale en  $\frac{du}{2}$  redonne exactement le terme souhaité tandis que la partie en  $\frac{udu}{2\sqrt{u^2 + 4\sqrt{2s}}}$  est antisymétrique et donne donc une intégrale nulle.

**Exercice 4** (Maximum du mouvement brownien avec dérive). Soit  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un mouvement brownien. On fixe  $a, b > 0$  et on pose  $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t - bt = a\}$ .

1. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt relativement à la filtration naturelle.

Même chose que l'exercice 1 question 4.

2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de  $\tau$ .

On considère à nouveau la martingale  $e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$ . Pour tout  $\lambda > 2b$  on a une martingale bornée jusqu'au temps  $\tau$  et donc

$$\mathbb{E}[e^{(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda b)\tau}] = e^{-\lambda a}$$

soit en inversant la formule une transformée de Laplace  $e^{-ab - \sqrt{b^2 + 2sa}}$ .

3. En déduire la probabilité que la courbe du mouvement brownien soit au dessous de la demi-droite  $t \mapsto a + bt$ . Pouvait-on prévoir que la réponse ne dépendrait que de  $ab$ ?

On cherche  $\mathbb{P}(\tau = \infty)$  et il est facile de voir par convergence dominée que c'est  $1 - \lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{E}(e^{-s\tau}) = 1 - e^{-2ab}$ . On pouvait le prévoir par grâce au changement d'échelle  $B_t \rightarrow \sigma B_{t/\sigma^2}$

4. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $U := \sup_{t \geq 0} B_t - bt$ ?

On vient de calculer la fonction de répartition de cette variable donc on voit que c'est une variable exponentielle de paramètre  $b$ .

**Exercice 5** (Maximum du pont brownien). Soit  $\{Z_t\}_{0 \leq t \leq 1}$  un pont brownien.

1. Pour  $t \geq 0$  on pose  $B_t = (1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}$ . Vérifier que  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien.

Fait dans la feuille 3.

2. En utilisant l'exercice précédant, déterminer la loi de la variable  $V := \sup_{0 \leq t \leq 1} Z_t$ .

On a  $\mathbb{P}(V \geq b) = \mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R}_+, \frac{B_t}{1+t} \leq b) = \mathbb{P}(\exists t, B_t = b + bt) = e^{-2b^2}$  (on se permet de ne pas justifier la mesurabilité même si on écrit des conditions sur un ensemble non dénombrable de temps).

**Exercice 6** (Une preuve du théorème d'arrêt). Sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , on considère une martingale continue  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  et un temps d'arrêt  $T$ . Le but de cet exercice est de montrer que  $\{M_{t \wedge T}\}_{t \geq 0}$  est encore une martingale. Dans tout l'exercice, "discret" signifiera à valeurs dans  $\mathcal{D}_n := \{k2^{-n} : k \in \mathbb{N}\}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Vérifier que la famille  $\{M_\tau : \tau \text{ temps d'arrêt discret } \leq t\}$  est uniformément intégrable.

Si  $\tau$  est un temps d'arrêt discret donné, on peut le voir comme un temps d'arrêt pour la martingale discrète  $k \rightarrow M_{k2^{-n}}$ . On a donc  $\mathbb{E}(M_\tau 1_{M_\tau \geq C}) \leq \mathbb{E}(M_t 1_{M_t \geq C}) \leq \mathbb{E}|M_t|$  et en particulier  $\mathbb{P}(M_\tau \geq C) \leq \mathbb{E}(|M_t|)/C$  pour tout  $C$  (ça n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'inégalité maximale). Comme  $M_t$  est intégrable, on doit donc aussi avoir  $\mathbb{E}(M_t 1_{M_t \geq C}) \rightarrow 0$  quand  $C \rightarrow \infty$  ce qui conclue.

2. Montrer que si  $s, t$  et  $T$  sont discrets avec  $s \leq t$  deux réels non aléatoires, alors

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge T} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T}.$$

On se fixe  $n$  convenant à  $s, t$  et  $T$ , c'est alors juste une application du théorème d'arrêt pour les martingales à temps discrets.

3. Exhiber une suite de temps d'arrêt discrets qui décroît vers  $T$ , et conclure.

On pose  $T^n = (\lfloor 2^n T \rfloor + 1)2^{-n}$ . On a clairement  $T^n > T$  pour tout  $n$  ce qui permet facilement de voir que  $T_n$  est un temps d'arrêt. On sait que  $M_{t \wedge T^n}$  converge presque sûrement vers  $M_{t \wedge T}$  par continuité de la martingale et on conclue donc par le théorème de convergence dominée pour les suite uniformément intégrable.

**Exercice 7** (Tribu des événements antérieurs à  $T$ ). Soit  $T$  un temps d'arrêt sur un espace filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ . On rappelle que la tribu des événements antérieurs à  $T$  est

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

Trivial, on vérifie chaque point dans la définition.

2. Soit  $S$  un temps d'arrêt tel que  $S \leq T$ . Montrer que  $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$ .

Soit  $A \in \mathcal{F}_S$  et  $t > 0$ , il suffit de remarquer que  $A \cap \{T \leq t\} = A \cap \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$ .

3. Soit  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un processus continu et adapté. Montrer que  $X_T \mathbf{1}_{T < \infty}$  est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

On pose  $T^n = \lfloor 2^n T \rfloor 2^{-n}$ , il est facile de voir que  $X_{T^n}$  est  $\mathcal{F}_T$  mesurable pour tout  $n$  car il suffit de considérer des unions dénombrables d'événements. Par ailleurs  $T^n \rightarrow T$  et donc par continuité  $X_{T^n} \rightarrow X_T$ .

**Exercice 8** ( $\Delta$  Martingale à variation finie). Une fonction  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  est à variation finie si

$$V_t(f) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| : n \in \mathbb{N}^*, 0 = t_0 \leq \dots \leq t_n = t \right\} < +\infty,$$

pour tout  $t \geq 0$ . On rappelle que si  $f$  est continue, alors  $t \mapsto V_t(f)$  l'est aussi. Soit  $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$  une martingale dont les trajectoires sont continues et à variation finie. Montrer que p.s., les trajectoires de  $M$  sont constantes. *Indication* : on pourra supposer que  $V_t(M) \in L^\infty$ .

Quitte à introduire  $T_n = \inf\{t : V_t(M) \geq n\}$  on suppose que  $V_t(M)$  est borné par un certain  $n$ . En particulier  $M$  doit aussi être bornée. Par ailleurs on observe que  $\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 \leq V_t(f) \sup_i |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$  donc par continuité on voit que  $\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$  converge vers 0 quand  $n$  tends vers l'infini et est borné par  $V_t(M)^2$ . On peut donc passer à l'espérance. Or on vérifie facilement que  $\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2] = \text{Var}(M_t - M_0)$ . Cette variance doit donc être nulle ce qui conclue.

**Exercice 9** ( $\Delta$  Caractérisation de Lévy). Sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , on considère une martingale continue  $\{M_t\}_{t \geq 0}$ . On suppose que  $M_0 = 0$  et que  $\{M_t^2 - t\}_{t \geq 0}$  est une martingale.

1. Donner un exemple d'une telle martingale.

Le mouvement Brownien.

2. Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  telle que  $f, f'$  et  $f''$  sont bornées. Montrer que pour tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E}[f(M_t) | \mathcal{F}_s] = f(M_s) + \frac{1}{2} \int_s^t \mathbb{E}[f''(M_u) | \mathcal{F}_s] du.$$

(On pourra subdiviser l'intervalle  $[s, t]$  et utiliser le développement de Taylor de  $f$ .)

Pour simplifier les notations on considère seulement  $s = 0$  et  $t = 1$ . On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(M_t)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}f(M_{i+1/n}) - f(M_{i/n}) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}f'(M_{i/n})(M_{i+1/n} - M_{i/n}) + \frac{1}{2}f''(M_{i/n})(M_{i+1/n} - M_{i/n})^2 + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\frac{1}{2}f''(M_{i/n})\frac{1}{n} + o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2) \\
 &\rightarrow \int \mathbb{E}(f''(M_u))du
 \end{aligned}$$

Dans la troisième ligne, on utilise la propriété de martingale pour  $M$  et  $M^2 - t$ . Dans la dernière ligne, on peut ignorer le  $o((M_{i+1/n} - M_{i/n})^2)$  car le préfacteur qui intervient dans ce terme ne dépend que du module de continuité de  $f''$  et est donc uniformément borné tandis que la somme des carrés des incréments est toujours intégrable.

3. En déduire que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $0 \leq s \leq t$ ,

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(M_t - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_s^t \mathbb{E} \left[ e^{i\lambda(M_u - M_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right] du.$$

Application directe de la question précédente.

4. En déduire que  $\{e^{i\lambda M_t + \frac{\lambda^2}{2}t}\}_{t \geq 0}$  est une martingale pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De l'expression précédente, on voit que  $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$  est dérivable en  $t$  et on vérifie trivialement que  $\mathbb{E}(e^{i\lambda M_t} | \mathcal{F}_s)$  est en fait constant en  $t$  en calculant sa dérivée.

5. En conclure que  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  est en fait nécessairement un mouvement brownien !

On vient de calculer la fonction caractéristique de tout incrément.