MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

Exercice 1 (Temps d'arrêt). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espace filtré. Parmi les variable aléatoires suivantes, lesquelles sont des temps d'arrêt ?

1. Le minimum de deux temps d'arrêt.
2. Le maximum de deux temps d'arrêt.
3. La somme de deux temps d'arrêt.
4. Le premier instant où un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien atteint une valeur donnée $a \in \mathbb{R}$.
5. Le dernier zéro d'un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 2 (⚠ Quelques martingales du mouvement brownien). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien.

1. Montrer que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.
3. Construire une martingale à partir du processus $\{B_t^3\}_{t\geq 0}$.
4. Construire une martingale à partir du processus $\{B_t^4\}_{t\geq 0}$.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que le processus $\{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}\}_{t\geq 0}$ est une martingale.
6. Construire une martingale à partir du processus $\{\cosh(\lambda B_t)\}_{t\geq 0}$.

Exercice 3 (Loi de temps d'atteinte). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. À l'aide de la martingale $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$, calculer l'espérance de $T_a^\star := \inf\{t \geq 0\colon |B_t| = a\}$.
2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la variance de $T_a^\star$.
3. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de $T_a^\star$.
4. Calculer la transformée de Laplace de $T_a := \inf\{t \geq 0\colon B_t = a\}$ et retrouver le fait que T_a a même loi que $(a/B_1)^2$. Que vaut $\mathbb{E}[T_a]$?

Exercice 4 (Maximum du mouvement brownien avec dérive). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On fixe $a, b > 0$ et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0\colon B_t - bt = a\}$.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt relativement à la filtration naturelle.
2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de τ.
3. En déduire la probabilité que la courbe du mouvement brownien soit au dessous de la demi-droite $t \mapsto a + bt$. Pouvait-on prévoir que la réponse ne dépendrait que de ab ?
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U := \sup_{t\geq 0} B_t - bt$?

Exercice 5 (Maximum du pont brownien). Soit $\{Z_t\}_{0\leq t\leq 1}$ un pont brownien.

1. Pour $t \geq 0$ on pose $B_t = (1+t)Z_{\frac{t}{1+t}}$. Vérifier que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
2. En utilisant l'exercice précédant, déterminer la loi de la variable $V := \sup_{0\leq t\leq 1} Z_t$.

Exercice 6 (Une preuve du théorème d'arrêt). Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $\{M_t\}_{t\geq 0}$ et un temps d'arrêt T. Le but de cet exercice est de montrer que $\{M_{t\wedge T}\}_{t\geq 0}$ est encore une martingale. Dans tout l'exercice, *"discret"* signifiera à valeurs dans $\mathcal{D}_n := \{k2^{-n} \colon k \in \mathbb{N}\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que la famille $\{M_\tau \colon \tau \text{ temps d'arrêt discret} \leq t\}$ est uniformément intégrable.
2. Montrer que si s, t et T sont discrets avec $s \leq t$ deux réels non aléatoires, alors
$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T}|\mathcal{F}_s] = M_{s\wedge T}.$$
3. Exhiber une suite de temps d'arrêt discrets qui décroît vers T, et conclure.

Exercice 7 (Tribu des événements antérieurs à T). Soit T un temps d'arrêt sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$. On rappelle que la tribu des événements antérieurs à T est
$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \colon \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une sous-tribu de $\mathcal{F}$.
2. Soit S un temps d'arrêt tel que $S \leq T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.
3. Soit $\{X_t\}_{t\geq 0}$ un processus continu et adapté. Montrer que $X_T \mathbf{1}_{T<\infty}$ est $\mathcal{F}_T-$mesurable.

Exercice 8 (⚠ Martingale à variation finie). Une fonction $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à variation finie si
$$V_t(f) := \sup\left\{\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \colon n \in \mathbb{N}^*, 0 = t_0 \leq \cdots \leq t_n = t\right\} < +\infty,$$
pour tout $t \geq 0$. On rappelle que si f est continue, alors $t \mapsto V_t(f)$ l'est aussi. Soit $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues et à variation finie. Montrer que p.s., les trajectoires de M sont constantes. *Indication :* on pourra supposer que $V_t(M) \in L^\infty$.

Exercice 9 (⚠ Caractérisation de Lévy). Sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, on considère une martingale continue $\{M_t\}_{t\geq 0}$. On suppose que $M_0 = 0$ et que $\{M_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

1. Donner un exemple d'une telle martingale.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que f, f' et f'' sont bornées. Montrer que pour tout $0 \leq s \leq t$,
$$\mathbb{E}[f(M_t)|\mathcal{F}_s] = f(M_s) + \frac{1}{2}\int_s^t \mathbb{E}[f''(M_u)|\mathcal{F}_s]du.$$
(On pourra subdiviser l'intervalle $[s, t]$ et utiliser le développement de Taylor de f.)
3. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $0 \leq s \leq t$,
$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda(M_t - M_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\int_s^t \mathbb{E}\left[e^{i\lambda(M_u - M_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right]du.$$
4. En déduire que $\{e^{i\lambda M_t + \frac{\lambda^2 t}{2}}\}_{t\geq 0}$ est une martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. En conclure que $\{M_t\}_{t\geq 0}$ est en fait nécessairement un mouvement brownien !