

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

**Exercice 1** (Lois usuelles). Dans chaque cas, calculer  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\mathbb{E}[e^{tX}]$  si cela existe.

- $X \sim \mathcal{U}(n)$  (Uniforme sur  $\{1, \dots, n\}$ ).
- $X \sim \mathcal{B}(p)$  (Bernoulli de paramètre  $p$ ).
- $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  (Binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ ).
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  (Poisson de paramètre  $\lambda$ ).
- $X \sim \mathcal{G}(p)$  (Géométrique de paramètre de succès  $p$ ).
- $X \sim \mathcal{U}(a, b)$  (Uniforme sur  $[a, b]$ ).
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  (Exponentielle de paramètre  $\lambda$ ).
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  (Normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma^2$ ).
- $X \sim \Gamma(r, \lambda)$  (Gamma de paramètres  $r$  et  $\lambda$ ).
- $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$  (Cauchy de paramètre  $\lambda$ ).

**Exercice 2** (Changements de variables). Dans chacun des cas suivants, montrer que la variable aléatoire  $Y$  admet une densité que l'on explicitera.

- $Y = \exp(-X)$  avec  $X \sim \mathcal{E}(1)$ .
- $Y = \tan(X)$  avec  $X \sim \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .
- $Y = 1/X$  avec  $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ .
- $Y = X^2$  avec  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- $Y = aX + b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $X$  de densité  $f$  quelconque.
- $Y = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$  avec  $X$  de densité  $x \mapsto \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{1+x} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ .
- $Y = 1/X^2$  avec  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Exercice 3** (Intégration par parties gaussienne). Soit  $X$  une variable de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , et soit  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\mathbb{E}[|h'(X)|] < \infty$ .

- Montrer que  $\mathbb{E}[|Xh(X)|] < \infty$ .
- Montrer que  $h(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- Établir la formule d'intégration par parties gaussienne :

$$\mathbb{E}[Xh(X)] = \mathbb{E}[h'(X)].$$

- En déduire  $\mathbb{E}[X^n]$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Généraliser cet exercice au cas où  $X$  est une variable gaussienne générale.

**Exercice 4** (Absence de mémoire). Soit  $X$  une variable aléatoire positive. On dit que  $X$  (ou plutôt sa loi) a la propriété d'absence de mémoire si pour tout  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

- Vérifier que la loi Exponentielle a la propriété d'absence de mémoire.
- Trouver toutes les lois qui ont la propriété d'absence de mémoire.

**Exercice 5** (Atomes). Soit  $X$  une variable aléatoire réelle, et soit

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = x) > 0\}.$$

- Montrer que  $\mathcal{A}$  est au plus dénombrable.
- Montrer que si  $X$  admet une densité, alors  $\mathcal{A} = \emptyset$ .
- On suppose que  $\mathcal{A} = \emptyset$ . Montrer que  $F_X(X)$  suit la loi uniforme sur  $(0, 1)$ .

**Exercice 6** (Un classique). Soit  $X$  une variable aléatoire positive.

a) Justifier l'identité suivante :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt.$$

b) Que donne cette formule dans le cas particulier où  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ?

c) Montrer plus généralement que pour tout  $0 < p < \infty$ , on a

$$\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^\infty t^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

d) Montrer que si  $X$  est dans  $L^p$ , alors  $\mathbb{P}(X > t) = o(t^{-p})$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Exercice 7** (Théorème de Stone-Weierstrass). Soit  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

a) Vérifier que pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $[0, 1]$  et tout  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{E}[|f(X) - f(\mathbb{E}[X])|] \leq \frac{2\|f\|_\infty \text{Var}(X)}{\delta^2} + \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

b) En déduire que les polynômes  $(B_n)_{n \geq 1}$  convergent uniformément vers  $f$ , où

$$B_n(t) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

c) Étendre ce résultat au cas où  $[0, 1]$  est remplacé par un segment  $[a, b]$  quelconque.

**Exercice 8** (Hotelling-Solomons, 1932). Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de carré intégrable. On suppose que  $X$  possède une unique médiane  $m$  et on note  $\mu = \mathbb{E}[X]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ . Montrer que

$$|\mu - m| \leq \sigma.$$

*Indication : montrer qu'on peut se ramener sans perte de généralité à une v.a. de loi  $\frac{1}{2}\delta_m + \frac{1}{2}\delta_\mu$ .*