1. I numeri

1.1. Sistemi numerici

Sia $\mathbb{N}$ un insieme non vuoto, in cui si fissa un elemento detto *zero*, indicato con 0, ed una funzione $+$ da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Indicata con a^+ l'immagine di a tramite $+$ al variare di $a \in \mathbb{N}$, si dice che a^+ é *elemento successivo*, o *successore*, di a. Si assuma che per l'insieme $\mathbb{N}$ valgano i seguenti assiomi, detti **Assiomi di Peano**:

1. $0 \neq a^+ \ \forall a \in \mathbb{N}$. Ovvero, non esiste alcun elemento di $\mathbb{N}$ avente 0 come successore;
2. La funzione $+$ é iniettiva. Ovvero, non esistono due $a_1, a_2 \in S$ distinti che abbiano uno stesso a^+ come successore;
3. Se $S \subseteq \mathbb{N}, 0 \in S$ e $s^+ \in S \ \forall s \in S$, allora $S = \mathbb{N}$. Ovvero, se S é un sottoinsieme anche improprio di $\mathbb{N}$ che contiene (almeno) 0 e che, per ciascun elemento di S, ne contiene anche l'immagine tramite $+$, allora S e $\mathbb{N}$ sono lo stesso insieme.

L'insieme $\mathbb{N}$ cosí definito prende il nome di **insieme dei numeri naturali**.

Principio 1.1.1 (Principio di induzione): Dato un numero fissato $n_0 \in \mathbb{Z}$, sia $P(n)$ una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq n_0$. Si supponga che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. $P(n_0)$ é vera;
2. $\forall n$, supponendo che sia vera $P(n)$ é possibile dimostrare che lo sia anche $P(n+1)$.

Allora $P(n)$ é vera $\forall n \in \mathbb{Z}$

Principio di induzione

Si consideri la seguente proposizione, dipendente da n:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2, \forall n \geq 1$$

É possibile applicarvi il principio di induzione ponendo $n_0 = 1$. Nello specifico:

- $P(1)$ é vera. Infatti, $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = (2 \cdot 1) - 1 = 2 - 1 = 1$ e $1^2 = 1$;
- Supponendo che sia vera $P(n)$, si dimostri che é vera $P(n+1)$, ovvero che sia vera $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$. Si ha:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (2(n+1)-1) + \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2n+1+\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2n+1+n^2$$

  Che é peró proprio la formula per il calcolo del quadrato di binomio. Pertanto $n^2+1+2n = (n+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)$

Essendo verificate entrambe le ipotesi del principio di inudzione, si ha che $P(n)$ é vera $\forall n \geq 1$