Indice

1. Introduzione

1.1. Cos'é la fisica?

Come tutte le altre scienze, la fisica è una scienza basata su osservazioni sperimentali e misure quantitative. L'obiettivo principale della fisica è quello di determinare poche leggi fondamentali che governano i fenomeni naturali, ed usarle nello sviluppo di teorie che siano in grado di predire in anticipo i risultati di esperimenti successivi. Le leggi fondamentali sono espresse nei linguaggio della matematica, lo strumento che fa da ponte fra teoria ed esperimento. Quando c'è disaccordo tra le predizioni di una teoria ed i risultati sperimentali è necessario modificare la teoria, o formularne una nuove finché il disaccordo scompaia. Esistono una moltitudine di sottoinsiemi della fisica, che si occupano di studiare la natura da diversi punti di vista: la termodinamica studia il comportamento dei corpi in relazione ai cambiamenti della temperatura, la fisica nucleare studia le microscopiche particelle che costituiscono la materia, la meccanica studia la velocitá dei corpi e la loro posizione nello spazio, ecc.

In genere, non é possibile osservare un fenomeno interagendovi direttamente. Per questo motivo, é preferibile approcciarvi costruendo un **modello** di un sistema fisico correlato a quel fenomeno. Per esempio, dal momento che sono troppo piccoli, non è possibile interagire direttamente con gli atomi. Viene creato allora un modello dell'atomo nella familiare rappresentazione come un sistema formato da un nucleo e da uno o piú elettroni esterni al nucleo. Una volta che le componenti fisiche del modello sono state fissate, siamo in grado di predirne il comportamento sulla base delle interazioni interne al sistema e con l'ambiente esterno al sistema. Un modello puó essere quindi pensato come una rappresentazione semplificata del sistema in cui il fenomeno si trova, dal quale vengono eliminate tutte le caratteristiche superflue che non sono necessarie ai fini dell'analisi in questione.

1.2. Grandezze fondamentali

Per descrivere i fenomeni naturali è necessario **misurare** i vari aspetti che li caratterizzano. Ogni **misura** è associata ad una **grandezza fisica**: le leggi della fisica sono espresse da relazioni matematiche fra le grandezze fisiche.

Se si vuole comunicare i risultati di una misura a qualcuno che voglia riprodurla è necessario definire una "unità campione" comune, che sia valida per entrambe le parti. Una qualunque unità campione deve essere facilmente disponibile e deve possedere una qualche proprietà che permetta una misura affidabile e riproducibile. Lo stesso campione, utilizzato da misuratori diversi per effettuare la stessa misura in un posto qualunque dell'Universo, deve dare sempre lo stesso risultato in ogni occasione. Inoltre, i campioni non devono cambiare o deformarsi nel tempo.

I campioni utilizzati nella fisica sono stati standardizzati dalla comunitá scientifica, e continuano a venire rifiniti per essere il piú precisi possibile. Questi campioni nella fisica sono chiamati **unitá di misura**. Esistono differenti insiemi di unitá di misura, ma quello piú importante ed adottato é il **Sistema Internazionale** (abbreviato **SI**), costituito da sette unitá di misura **fontamentali** che vengono fra loro combinate per generare unitá di misura composite. Le unitá fondamentali del SI sono le seguenti:

Grandezza	Unitá di misura	Simbolo
Lunghezza	Metro	m
Massa	Chilogrammo	kg
Tempo	Secondo	s
Temperatura	Kelvin	K
Corrente elettrica	Ampere	A
Quantitá di materia	Mole	mol
Intensitá luminosa	Candela	cd

Il modo in cui il campionamento delle unitá di misura viene effettuato é variegato. Ad esempio:

- Il metro é fissato alla distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo di $1299792458s$. Questo sia perché la luce ha sempre la stessa velocitá, sia perché la luce é uguale a sé stessa dovunque nell'Universo;
- Il chilogrammo é fissato come la massa di un lega metallica tenuta sotto strettissime condizioni di sicurezza;

- Il secondo é fissato come 9192631770 volte il periodo delle vibrazioni di un atomo di cesio-133, grazie all'alta precisione degli orologi atomici.

Oltre alle unitá SI di base, vengono anche usati i loro multipli e sottomultipli. Per comoditá, vengono usati solamente i multipli e sottomultipli delle decine di ordini di grandezza, e vengono chiamate anteponendo alle unitá di base dei prefissi, quali:

Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d

Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Le grandezze scientifiche possono essere suddivise in due grandi macrocategorie: le **grandezze scalari** e le **grandezze vettoriali**. Le prime sono definite soltanto da un valore numerico, mentre le seconde sono definite da un vettore orientato e dal suo modulo. Una seconda distinzione (non mutualmente esclusiva con la precedente) é quella tra le **grandezze quantizzate** e le **grandezze continue**. Una grandezza quantizzata é una grandezza che puó assumere solo valori multipli di una unitá elementare detta **quanto**, mentre una grandezza continua é una grandezza che puó assumere ogni valore reale possibile.

In fisica i valori delle misurazioni sono in genere espressi in una notazione particolare, detta **notazione scientifica**. Per riscrivere un valore nella notazione scientifica occorre dividerlo per una potenza di dieci tale che il numero sia ridotto ad una sola cifra non decimale, per poi moltiplicarlo per la potenza stessa. Questa notazione é molto efficiente perché nella fisica é molto frequente che sia necessario riportare dei valori con moltissime cifre, e la notazione scientifica permette di esprimere un valore in maniera compatta senza perderne in accuratezza.

Esercizio 1.2.1: Convertire le seguenti grandezze in notazione scientifica: $0.0086m$, $725555s$, $0.00000000069kg$.

Soluzione:

$$0.0086m = 8.6 \times 10^{-3}m \qquad 725555s = 7.255555 \times 10^{6}s \qquad 0.00000000069kg = 6.9 \times 10^{-10}kg$$

□

1.3. Errore di misurazione

Quando si effettua una misurazione, non ci si puó aspettare di ottenere un risultato che corrisponda perfettamente alla realtá, dato che sia i sensi che gli strumenti di misurazione hanno una portata limitata. Un modo semplice per delimitare l'ampiezza della certezza di una misurazione é effettuarne piú di una e farne la media: in altre parole, farne una **stima**. In fisica, una stima é ritenuta valida se é dello stesso **ordine di grandezza** del risultato atteso.

L'ordine di grandezza di una misurazione si ottiene come segue: se la parte non decimale del numero é minore di $\sqrt{10}$, allora l'ordine di grandezza equivale alla potenza di dieci per la quale questa é moltiplicato, se invece é superiore a $\sqrt{10}$ allora l'ordine di grandezza é la potenza di dieci che lo moltiplica piú uno. Per indicare che due valori hanno lo stesso ordine di grandezza si utilizza il simbolo $\sim$.

Quando si effettuano una serie di misurazioni ripetute, le cifre che compaiono nella stessa posizione in tutte le misurazioni sono dette **cifre significative**. In altre parole, le cifre significative di una misurazione sono le cifre su cui si é sufficientemente certi che siano *esatte*.

Quando delle operazioni matematiche vengono applicate a delle grandezze, bisogna tenere conto di quali cifre significative avrá il risultato. Come regola pratica é possibile assumere che il risultato di una operazione abbia numero di cifre significative pari a quelle dell'operando che ne ha di meno. Nel caso in cui il numero di cifre significative debba essere ridotto, é possibile arrotondare in questo modo: l'ultima cifra che si conserva va aumentata di 1 se la cifra successiva, che si scarta, è maggiore o uguale di 5, mentre rimane uguale se la cifra scartata è minore di 5. Dato che in un lungo calcolo si pué incorrere in una moltitudine di «rifiniture» delle cifre significative, una tecnica utile per evitare di accumulare errori è quella di attendere il risultato finale prima di arrotondare. Limitando l'approssimazione delle cifre significative ad un solo passaggio si é certi di accumulare il minor numero di errori possibile.

É possibile esprimere matematicamente quanto é accurata una misurazione mediante i concetti di **errore assoluto** e **errore relativo**. L'errore assoluto e_A é la semi-differenza tra la massima e la minima tra le misurazioni che sono state effettuate, mentre l'errore relativo e_R é il rapporto tra l'errore assoluto e la media matematica delle misurazioni effettuate. L'errore assoluto quantifica l'intervallo entro al quale i valori delle misurazioni sono da considerarsi accettabili, mentre l'errore relativo rappresenta lo scarto tra il valore ricavato dalla misurazione e il valore *reale*. L'errore relativo puó essere moltiplicato per 100% per ottenere l'**errore relativo percentuale** e_{Rp} che rappresenta, in percentuale, quanto la misurazione si avvicina al valore *reale*.

$$e_A = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{2} \qquad e_R = \frac{e_A}{n_{\text{avg}}} \qquad e_{Rp} = e_R \cdot 100\%$$

Esercizio 1.3.1: Nel determinare la lunghezza di una scrivania, sono state effettuate cinque misurazioni, ottenendo i cinque valori seguenti:

$2.5561m$	$2.5505m$	$2.5597m$	$2.5523m$	$2.5549m$

Quali sono le cifre significative? Qual'é la misurazione media? Quali sono errore assoluto, errore relativo e errore relativo percentuale?

Soluzione: Le cifre significative sono le prime tre, perché compaiono in tutte e cinque le misurazioni. La misurazione media é data da:

$$\frac{2.5561m + 2.5505m + 2.5597m 2.5523m + 2.5549m}{5} = 2.5547m$$

Errore assoluto, relativo e relativo percentuale sono dati da:

$$e_A = \frac{(2.5597 - 2.5505)m}{2} = 0.0046m \qquad e_R = \frac{0.0046m}{2.5547m} = 0.0018 \qquad e_{Rp} = 0.0018 * 100\% = 0.18\%$$

La misurazione media puó quindi essere scritta piú accuratamente come $2.5547m \pm 0.0046m$. □

2. Cinematica

2.1. Moto unidimensionale

Il modello piú semplice per descrivere un moto é quello **unidimensionale**, ovvero di un punto materiale che si muove lungo una linea retta. Il punto al centro della retta indica il punto zero, detto **origine**. La direzione positiva della retta é quella in cui le coordinate della posizione del punto aumentano, mentre quella negativa é quella in cui le coordinate diminuiscono. Il segno piú e meno indica in quale delle due direzioni il punto si trova; il segno piú viene in genere sottinteso.

La **posizione** é una quantitá $\vec{x}(t)$ in funzione del tempo, un vettore che ha punto iniziale nell'origine e punto finale nella coordinata che corrisponde a dove si trova il punto materiale nel dato istante di tempo.

Lo **spostamento** $\Delta\vec{x}$ é il vettore differenza fra una posizione di partenza $\vec{x}(t)$ ed una posizione di arrivo $\vec{x}(t_0)$. Una differenza di tempo Δt é la differenza tra un tempo finale t ed un tempo iniziale t_0. É pertanto possibile scrivere:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0)$$

Si indica invece con **distanza** la lunghezza complessiva che é stata percorsa dal punto materiale. Questa non é una quantitá vettoriale, bensí uno scalare, ed é sempre positiva, mentre lo spostamento puó essere sia positivo che negativo.

Esercizio 2.1.1: Un punto materiale si muove in linea retta a partire dall'origine e da un tempo iniziale $t_0 = 0$. Dopo un certo tempo t_1 si trova a L metri dall'origine; dopo un ulteriore tempo t_2 si trova di nuovo nell'origine. Calcolare spostamento e distanza al tempo $t_1 + t_2$.

Soluzione: $\Delta t = t_1 + t_2 - t_0 = t_1 + t_2 - 0 = t_1 + t_2$.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2 + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2) - \vec{x}(0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

$$d(\Delta t + t_0) = \parallel L + L \parallel = 2L$$

□

La rapiditá con cui uno spostamento é compiuto é inversamente proporzionale al tempo impiegato. Ovvero, se uno stesso spostamento viene compiuto in meno tempo, la rapiditá di tale spostamento é piú alta. La **velocitá media** fornisce una prima informazione su quanto rapidamente avvenga lo spostamento di un corpo, da una situazione di partenza ad una di arrivo:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Essendo la velocitá media un rapporto tra un vettore ed uno scalare, é anch'essa un vettore. Inoltre, essendo il tempo una quantitá non negativa, il segno della velocitá media é necessariamente lo stesso dello spostamento.

É possibile associare una velocitá anche alla distanza, chiamata **velocitá scalare media**. Tale grandezza é data dal rapporto fra la distanza percorsa in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

$$\vec{s}_{\text{media}} = \frac{d(x)}{\Delta t} = \left[\frac{m}{s}\right]$$

Cosí come la distanza, anche la velocitá scalare media é (come da nome) uno scalare, ed é sempre positiva.

La velocitá media non é ancora sufficiente a descrivere il concetto di rapiditá dello spostamento, perché non é in grado di descrivere cosa accade istante per istante, ma soltanto ció che accade in due istanti (partenza e arrivo); tutto ció che avviene nel mezzo é perduto.

Per ottenere questa forma di velocitá é possibile calcolare la velocitá media in un lasso di tempo sempre piú piccolo. L'idea é che se é possibile calcolare la velocitá media in un lasso di tempo infinitesimo, si avrebbe la conoscenza della velocitá istante di tempo per istante di tempo, ovvero una **velocitá istantanea**[1]:

$$\vec{v}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\text{media}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \left[\frac{m}{s}\right]$$

Si noti infatti come l'espressione nel penultimo termine dell'uguaglianza corrisponda perfettamente alla definizione di derivata. Inoltre, riportando la funzione posizione-tempo su un piano cartesiano, é evidente come la velocitá istantanea non sia altro che un vettore lungo la tangente in quel punto.

Esercizio 2.1.2: Un punto materiale si sta muovendo; la sua posizione é nota in ogni istante a partire dall'equazione $x(t) = -4t + 2t^2$. Si vuole calcolare:

- Il suo spostamento tra gli istanti $t = 0s$ e $t = 1s$;
- Il suo spostamento tra gli istanti $t = 1s$ e $t = 3s$;
- La sua velocitá media tra gli istanti $t = 0s$ e $t = 1s$;
- La sua velocitá media tra gli istanti $t = 1s$ e $t = 3s$;
- La sua velocitá istantanea in $t = 2.5s$.

Soluzione:

$$\Delta x = x(1) - x(0) = (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)m - (-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2)m = (-4 + 2)m - (0 + 0)m = -2m$$

$$\Delta x = x(3) - x(1) = (-4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)m - (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)m = (-12 + 18)m - (-4 + 2)m = 8m$$

$$v_{\text{media}} = \frac{x(1) - x(0)}{1s - 0s} = \frac{-2m}{1s} = -2\frac{m}{s} \qquad v_{\text{media}} = \frac{x(3) - x(1)}{3s - 1s} = \frac{8m}{2s} = 4\frac{m}{s}$$

$$v(2.5) = \frac{d}{dt}x(2.5) = \frac{d}{dt}_{t=2.5} - 4t + 2t^2 = -4 + 4 \cdot 2.5 = 6\frac{m}{s}$$

□

Oltre alla variazione della posizione in funzione del tempo, potrebbe essere d'interesse a conoscere la variazione della velocitá in funzione del tempo. Tale variazione é descritta dall'**accelerazione media**:

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Cosí come per la velocitá, é possibile definire una **accelerazione istantanea**:

$$\vec{a}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt}\vec{x}(t) \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

La velocitá istantanea e l'accelerazione istantanea sono le quantitá che vengono indicate come «velocitá» e «accelerazione» in senso stretto. Pertanto, se non specificato diversamente, si tende ad indicare la velocitá e l'accelerazione istantanea semplicemente con «velocitá» e «accelerazione».

In genere, l'accelerazione é nota (per altri mezzi) cosí come lo é il tempo, mentre non lo é la velocitá. Per tale motivo, é ragionevole esplicitare la formula rispetto alla velocitá. Questo comporta di invertire una derivata, ovvero calcolare un integrale:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\vec{v}(t') = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) \qquad \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\vec{x}(t') = \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$$

Una espressione di questo tipo necessita peró di descrivere interamente la funzione con cui varia l'accelerazione. Questo puó essere fatto solamente se la funzione accelerazione é una funzione nota.

[1] In realtá, questa é una semplificazione. Infatti, non é davvero possibile considerare un istante di tempo infinitesimo, perché al di sotto di una certa scala diventa impossibile osservare lo scorrere del tempo. Pertanto, si dovrebbe parlare di «lasso di tempo arbitrariamente piccolo» piú che infinitesimo.

Esercizio 2.1.3: Un punto materiale si sta muovendo; la sua posizione é nota in ogni istante a partire dall'equazione $v(t) = 40t - 5t^2$. Qual'é l'accelerazione media tra gli istanti $t = 0s$ e $t = 2s$? Qual'é l'accelerazione istantanea al tempo $t = 2s$?

Soluzione:

$$a_{\text{media}} = \frac{v(2) - v(0)}{(2-0)s} = \frac{(40 - 5 \cdot 2^2)\frac{m}{s} - (40 - 5 \cdot 0^2)\frac{m}{s}}{2s} = \frac{20\frac{m}{s} - 40\frac{m}{s}}{2s} = -10\frac{m}{s^2}$$

$$a(2) = \frac{d}{dt}v(2) = \frac{d}{dt}_{t=2} 40t - 5t^2 = 40 - 5 \cdot 2(2) = 20\frac{m}{s^2}$$

□

2.1.1. Caso di studio: moto uniformemente accelerato

Il moto unidimensionale piú semplice da esaminare é il **moto uniformemente accelerato**, in cui la funzione accelerazione é una funzione costante. In altri termini, $\vec{a}(t) = \vec{a}$ per qualsiasi istante di tempo t. Recuperando la formula, si ha:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt' = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{a} \cdot (t - t_0) = \vec{a}t - \vec{a}t_0$$

É poi possibile fare lo stesso rispetto alla posizione, sostituendo nell'espressione della velocitá la formula appena ricavata:

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0) + \vec{a}t - \vec{a}t_0 dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0)dt' + \int_{t_0}^{t} \vec{a}tdt' - \int_{t_0}^{t} \vec{a}t_0 dt' =$$

$$\vec{v}(t_0)\int_{t_0}^{t} dt' + \vec{a}\int_{t_0}^{t} tdt' - \vec{a}\int_{t_0}^{t} t_0 dt' = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a}\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \vec{a}\left(\frac{1}{2}t_0^2\right) = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Riassumendo le due formule trovate ed esplicitando rispetto a $\vec{x}(t)$ e $\vec{v}(t)$ si ottiene:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0) \qquad \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Esercizio 2.1.1.1: Un aereo sta effettuando un atterraggio: tocca terra con una velocitá di $64\frac{m}{s^2}$ per poi rallentare con decelerazione costante fino a fermarsi. Quanto vale questa decelerazione se per fermarsi l'aereo impiega $2s$? Qual'é la sua posizione dopo essersi fermato? Si assuma $t_0 = 0s$ e $x(t_0) = 0m$.

Soluzione: Se l'aereo sta rallentando con accelerazione (negativa) costante, sono valide le leggi del moto uniformemente accelerato. Il fatto che si sia fermato indica che la sua velocitá dopo $2s$ é nulla. La velocitá con cui l'aereo tocca terra é la velocitá con cui inizia il suo moto a decelerazione costante. Tale decelerazione é quindi:

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(2) - v(0)}{2s - 0s} = \frac{(0 - 64)\frac{m}{s}}{2s} = -32\frac{m}{s^2}$$

La sua posizione dopo essersi fermato é data da:

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(2) = x(0) + v(0) \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 s =$$

$$= 0m + 64\frac{m}{s} \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot (-32)\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 64m$$

□

2.1.2. Caso di studio: moto in caduta libera

Un esempio specifico di moto uniformemente accelerato é il **moto in caduta libera**. Questo é tipo di moto che descrive i corpi lasciati liberi di subire l'effetto della forza di gravitá del pianeta Terra. Tale accelerazione é indipendente da qualsiasi caratteristica del corpo che compie il moto, come la sua massa o la sua forma (Il motivo per cui questo non sempre avviene é perché la forma di un corpo subisce l'attrito dell'aria).

Tale accelerazione varia a seconda dell'altitudine: piú ci si trova vicino al livello del mare e piú é intensa. Tuttavia, per le applicazioni pratiche il suo valore é approssimativamente costante, ed é pari a $\pm 9.8 \frac{m}{s^2}$.

Esercizio 2.1.2.1: Una palla viene lanciata verso l'alto con velocitá $20\frac{m}{s}$, che ricade poi verso il basso toccando il suolo. Si assuma $t_0 = 0s$ e $x(t_0) = 0m$.

- Quanto tempo impiega la palla a raggiungere il punto di massima altezza?
- Qual'é la massima altezza che la palla riesce a raggiungere?
- Qual'é la posizione della palla al tempo $t = 5s$?
- Qual'é la velocitá della palla al tempo $t = 5s$?

Soluzione: Il punto di massima altezza é quello dove la palla é ferma a mezz'aria. Si noti come l'accelerazione del corpo in caduta libera sia negativa.

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow 0 = v(0) - g \cdot (t - 0) \Rightarrow t = \frac{v(0)}{g} = \frac{20\frac{m}{s}}{9.8\frac{m}{s^2}} = 2.04s$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 = x(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0m + 20\frac{m}{s} \cdot 2.04s - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}(2.04)^2 s^2 = 20.4m$$

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow v(5) = v(0) - g \cdot (5 - 0) = 20\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2} \cdot (5s - 0s) = -29\frac{m}{s}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(5) = x(0) + v(0) \cdot 5 - \frac{1}{2}g \cdot 5^2 = 0m + 20\frac{m}{s} \cdot 5s - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}5^2 s^2 = -22.5m$$

□

2.2. Moto bidimensionale

Per analizzare un moto in due dimensioni, non é sufficiente considerare posizioni, velocitá e accelerazioni esclusivamente in termini del loro valore assoluto e del loro segno. Diventa pertanto necessario associarvi un vettore, il cui modulo rappresenta il valore in sé associato alla quantitá e la direzione rappresenta come questo si orienta nello spazio bidimensionale.

Un punto materiale che si muove in due dimensioni puó essere decomposto come somma di un moto unidimensionale in orizzontale ed un moto unidimensionale in verticale. É allora possibile descrivere una posizione in due dimensioni $\vec{r}$ in un certo tempo fissato t_0 come una somma vettoriale:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{x}(t_0) + \vec{y}(t_0) = \hat{\imath}x(t_0) + \hat{\jmath}y(t_0)$$

Essendo le due direzioni completamente indipendenti, per costruire dei vettori velocitá é sufficiente calcolare separatamente velocitá per ciascuna direzione ed operare una somma vettoriale:

$$v_x(t) = \cos(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_y(t) = \sin(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}y(t) \qquad \vec{v}(t) = \hat{\imath}v_x(t) + \hat{\jmath}v_y(t)$$

Lo stesso puó essere fatto per l'accelerazione:

$$a_x(t) = \cos(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt}x(t) \qquad a_y(t) = \sin(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt}y(t) \qquad \vec{a}(t) = \hat{\imath}a_x(t) + \hat{\jmath}a_y(t)$$

Si assuma che sia l'accelerazione rispetto alla componente orizzontale che quella rispetto alla componente verticale siano costanti. Diventa allora possibile scrivere delle leggi orarie per la posizione rispetto ad entrambe le componenti:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \qquad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2$$

2.2.1. Caso di studio: moto parabolico

Il **moto parabolico** é il moto bidimensionale a cui obbedisce un oggetto che si muove nello spazio unicamente sottoposto all'attrazione gravitazionale.

Un corpo di questo tipo si muove lungo la direzione orizzontale con accelerazione costante pari a 0, mentre si muove lungo la direzione verticale con accelerazione costante pari a $-g$, essendo influenzato dalla gravitá della Terra (il segno meno é dovuto al fatto che la gravitá va dall'alto al basso). Fintanto che la distanza percorsa é sensibilmente piú piccola del raggio terreste, é possibile approssimare la Terra come un piano ed é quindi giustificato considerare l'accelerazione di gravitá uniforme ovunque. Un moto di questo tipo puó quindi essere descritto lungo le due direzioni come:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \qquad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Il nome moto parabolico viene dal fatto che risolvendo la prima equazione rispetto a $(t - t_0)$ e sostituendo nella seconda, si ottiene l'equazione di una parabola:

$$\begin{gathered}
y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)}\right)^2 = \\
y(t_0) + \frac{\sin(\theta)\cancel{v(t_0)}[x(t) - x(t_0)]}{\cos(\theta)\cancel{v(t_0)}} - \frac{g[x^2(t) + x^2(t_0) - 2x(t)x(t_0)]}{2(\cos(\theta)v(t_0))^2} = \\
y(t_0) + \tan(\theta)[x(t) - x(t_0)] - \frac{gx^2(t) + gx^2(t_0) - 2gx(t)x(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} = \\
y(t_0) + \tan(\theta)x(t) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} + \frac{\cancel{2}gx(t)x(t_0)}{\cancel{2}\cos^2(\theta)v^2(t_0)} = \\
\underbrace{\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)}_{A}x^2(t) + \underbrace{\left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)}_{B}x(t) + \underbrace{y(t_0) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}}_{C}
\end{gathered}$$

Dove A, B e C sono costituite da valori noti.

A partire da tale equazione é possibile calcolare il range orizzontale, ovvero la posizione in cui il corpo si trova orizzontalmente alla stessa altezza di quando il corpo é stato lanciato. Per farlo é sufficiente imporre $y(t) = y(t_0)$; dato che le due quantitá si trovano da parti opposte dell'equazione, le due si elidono, ottenendo:

$$\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)x^2(t) + \left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)x(t) - \left(\tan(\theta)x(t_0) + \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right) = 0$$

Esercizio 2.2.1.1: Un saltatore in lungo spicca un balzo in avanti con un angolo $\theta = \frac{\pi}{9}rad$ rispetto al terreno ed una velocitá di $11\frac{m}{s}$. Quale sará la lunghezza del salto? Quale sará l'altezza massima? Si assuma $t_0 = 0s$, $x(0) = 0m$ e $y(0) = 0m$.

Soluzione: Imponendo come asse x il terreno, la distanza da terra é nulla nell'istante iniziale e nell'istante in cui viene percorsa la massima distanza.

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow y(t) = y(0) + v_y(0)(t - 0) - \frac{1}{2}g(t - 0)^2 \Rightarrow$$

$$0 = 0 + v(0)\sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = t\left(v(0)\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt\right) \Rightarrow t = \frac{2v(0)\sin(\theta)}{g}$$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \Rightarrow x\left(\frac{2v(0)\sin(\theta)}{g}\right) = x(0) + v(0)\cos(\theta)\left(\frac{2v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right) =$$

$$0 + \frac{2v^2(0)\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v^2(0)\sin(2\theta)}{g} = \frac{\left(11\frac{m}{s}\right)^2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{9}rad\right)}{9.8\frac{m}{s^2}} \approx 7.94m$$

Il punto di massima altezza é quello in cui la velocitá lungo y é nulla:

$$v_y(t) = v_y(t_0) - g \cdot (t - t_0) \Rightarrow 0 = v(0)\sin(\theta) - g \cdot (t - 0) \Rightarrow t = \frac{v(0)\sin(\theta)}{g}$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$y\left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g}\right) = y(0) + \sin(\theta)v(0)\left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right)^2 =$$

$$\frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{g} - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{g}\right) = \frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{2g} = \frac{\left(11\frac{m}{s}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{9}rad\right)}{2 \cdot 9.8\frac{m}{s^2}} \approx 0.722m$$

□

2.3. Moto circolare

Una classe di moti bidimensionali di particolare interesse é quella dove la traiettoria descritta dal punto materiale é una circonferenza. Un moto di questo tipo prende il nome di **moto circolare**.

Imponendo un sistema di assi cartesiani al centro di tale circonferenza, la posizione in ogni momento del punto materiale é data dal vettore che unisce il centro con un punto lungo tale circonferenza, che per definizione é un raggio, ed é quindi di modulo costante nel tempo. Tale vettore forma un angolo θ con l'asse orizzontale, ed é pertanto possibile scomporre la posizione di un punto $\vec{p}(t)$ nelle due componenti:

$$\vec{p}(t) = \begin{cases} \vec{p_x}(t) = |\vec{r}|\cos(\theta(t)) \\ \vec{p_y}(t) = |\vec{r}|\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

La posizione di un punto materiale che si muove di moto circolare puó anche essere determinata dalla lunghezza dell'arco di circonferenza che ha per estremi il punto in questione ed il punto di coordinate $(|\vec{r}|, 0)$. Le due descrizioni sono equivalenti, perché l'arco di circonferenza $x(t)$ descritto dal punto all'istante t ed il modulo del vettore $\vec{p}(t)$ che congiunge il punto con il centro della circonferenza sono legati da un rapporto:

Essendo $|r|$ una costante, $x(t)$ e $\theta(t)$ sono proporzionali.

La velocitá di un punto materiale che si muove di moto circolare puó essere definita anche come variazione istantanea (in istanti di tempo infinitesimi) dell'angolo θ formato dal vettore posizione con l'asse orizzontale. Tale velocitá prende il nome di **velocitá angolare**.

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\theta(t)\left[\frac{rad}{s}\right]$$

La velocitá in senso stretto (la velocitá istantanea) rimane comunque definita come la variazione istantanea della posizione del punto materiale. Per quanto appena stabilito, tale velocitá puó anche essere espressa come prodotto fra la velocitá angolare ed il raggio del cerchio descritto dal punto materiale:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(|r|\cos(\theta(t))) \\ \frac{d}{dt}(|r|\sin(\theta(t))) \end{cases} = \begin{cases} |r|\ \frac{d}{dt}\cos(\theta(t)) \\ |r|\ \frac{d}{dt}\sin(\theta(t)) \end{cases} = \begin{cases} -|r|\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \\ |r|\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \end{cases} = \begin{cases} -|r|\sin(\theta(t))\omega(t) \\ |r|\cos(\theta(t))\omega(t) \end{cases}$$

Il punto materiale potrebbe avere anche una accelerazione rispetto alla velocitá angolare, ovvero potrebbe percorrere sezioni di circonferenza di uguale lunghezza in tempi diversi. Tale accelerazione prende il nome di **accelerazione angolare** $\alpha(t)$, ed in analogia con l'accelerazione in senso stretto é data dalla derivata seconda dell'angolo descritto dal vettore posizione del punto materiale in funzione del tempo.

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d^2}{dt}\theta(t)$$

L'accelerazione in senso stretto é quindi data da:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = |r|\ \frac{d^2}{dt}\theta(t) = \begin{cases} |r|\ \frac{d}{dt}(-\sin(\theta(t))\omega(t)) \\ |r|\ \frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))\omega(t)) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} -|r|\ \left((\cos(\theta(t))\omega(t))\omega(t) + \sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\omega(t)\right) \\ -|r|\ \left((\sin(\theta(t))\omega(t))\omega(t) - \cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\omega(t)\right) \end{cases} = \begin{cases} -|r|\ (\cos(\theta(t))\omega^2(t) + \sin(\theta(t))\alpha(t)) \\ -|r|\ (\sin(\theta(t))\omega^2(t) - \cos(\theta(t))\alpha(t)) \end{cases}$$

In genere, l'accelerazione é nota (per altri mezzi) cosí come lo é il tempo, mentre non lo é la velocitá. Per tale motivo, é ragionevole esplicitare la formula rispetto alla velocitá. Questo comporta di invertire una derivata, ovvero calcolare un integrale:

Come é stato fatto per il moto unidimensionale, é possibile esplicitare le formula per l'accelerazione angolare rispetto alla velocitá angolare calcolando un integrale:

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\omega(t') = \omega(t) - \omega(t_0) \qquad \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\theta(t') = \theta(t) - \theta(t_0)$$

2.3.1. Caso di studio: moto circolare uniforme

Il **moto circolare uniforme** é un moto circolare dove oltre al modulo del vettore posizione anche la velocitá angolare é costante nel tempo. Naturalmente, essendo la velocitá proporzionale alla velocitá angolare, anche la velocitá sará costante in modulo nel tempo.

In questa particolare situazione, il numero di rivoluzioni che il punto compie é necessariamente costante, pertanto per descrivere il suo moto é sufficiente conoscere il tempo che il punto materiale impiega per compiere un giro completo. Il numero di rivoluzioni che un punto materiale compie in un secondo prende il nome di **frequenza**, mentre il tempo necessario per compiere un giro completo prende il nome di **periodo**:

$$\nu = \frac{\text{numero di giri}}{1s}[Hz] \qquad T = \frac{1}{\nu}[s]$$

Diventa pertanto possibile esprimere la velocitá e la velocitá angolare in termini di frequenza e periodo:

$$\omega(t) = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad v(t) = v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

Sebbene il moto abbia una velocitá costante in modulo, la sua direzione varia costantemente, pertanto il vettore velocitá (ovvero, se si considera sia la direzione del moto che il suo modulo) non é costante. É quindi possibile associare a questo moto una accelerazione, derivando la velocitá. Il verso di questo vettore accelerazione punta sempre verso il centro, pertanto prende il nome di **accelerazione centripeta**.

Per ricavare il modulo, é possibile approcciare il problema descrivendo il moto usando come sistema di riferimento un sistema di assi rotanti, dove il primo versore $\hat{u}_r$ si trova sulla retta che congiuge il punto con il centro del cerchio descritto mentre il secondo versore $\hat{u}_\theta$ é a questo perpendicolare.

Il sistema di riferimento cosí descritto cambia la direzione dei suoi versori in ogni istante di tempo, ma ha il vantaggio di avere il vettore velocitá sempre parallela al versore $\hat{u}_r$ e sempre perpendicolare al versore $\hat{u}_\theta$ mentre il vettore spostamento é sempre parallelo al versore $\hat{u}_\theta$ e sempre perpendicolare al vettore $\hat{u}_r$. É allora possibile scrivere:

$$\vec{v} = \hat{u}_\theta v \qquad\qquad \vec{r} = \hat{u}_r r$$

Il versore $\hat{u}_\theta$ puó essere scomposto lungo due componenti, una orizzontale ed una verticale, rispetto ad un secondo sistema di riferimento centrato nel centro del cerchio. In ogni istante di tempo, il versore descrive un diverso angolo θ con l'orizzontale, pertanto le due componenti sono dipendenti dal tempo. É pertanto possibile decomporre il vettore come:

$$\hat{u}_\theta = \hat{\imath} u_\theta^x(t) + \hat{\jmath} u_\theta^y(t) = \hat{\imath} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) + \hat{\jmath} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) = \hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \hat{\imath}\sin(\theta(t))$$

Dove il fattore 1 deriva dal fatto che $\hat{u}_\theta$ é un versore e ha quindi modulo 1. La quantitá $\frac{\pi}{2}$ deriva invece dal fatto che l'angolo che si sta considerando é quello formato dal versore $\hat{u}_r$, che é perpendicolare a quello formato da $\hat{u}_\theta$, ed é quindi «spostato» di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Derivando la velocitá rispetto al tempo, si ha il modulo dell'accelerazione centripeta:

$$|a| = \left|\frac{d}{dt}\vec{v}\right| = \left|\frac{d}{dt}\hat{u}_\theta v\right| = v\left|\frac{d}{dt}\hat{u}_\theta\right| = v\left|\frac{d}{dt}\left(\hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \hat{\imath}\sin(\theta(t))\right)\right| = v\left|\frac{d}{dt}\hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \frac{d}{dt}\hat{\imath}\sin(\theta(t))\right| =$$

$$v\left|-\hat{\jmath}\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) - \hat{\imath}\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t)\right| = v\left|\hat{\jmath}\sin(\theta(t))\omega + \hat{\imath}\cos(\theta(t))\omega\right| = v\omega\left|\hat{\jmath}\sin(\theta(t)) + \hat{\imath}\cos(\theta(t))\right| =$$

$$v\omega\sqrt{\sin^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))} = v\omega \cdot 1 = \omega r \cdot \omega = \omega^2 r$$

Che é anch'essa costante, dato che nella sua espressione non vi é una dipendenza dal tempo.

Esercizio 2.3.1.1: Il moto di rivoluzione di un pianeta attorno alla sua stella puó essere approssimato ad un moto circolare uniforme[2]. Sapendo che la Terra dista circa $1.496 \times 10^{11} m$ dal Sole, qual'é il valore della velocitá angolare che ha la Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole? E quello dell'accelerazione centripeta?

Soluzione: La Terra impiega (circa) 1 anno a compiere una rivoluzione completa attorno al Sole, ed é pertanto questo il periodo del moto in esame:

$$1 \text{ anno} = 365 \text{ giorni} = 8760 \text{ ore} = 525600 \text{ minuti} = 31536000 s$$

Noto il periodo, é possibile calcolare la velocitá angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7 s} = 2.00 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}$$

Nota la velocitá angolare, é possibile calcolare l'accelerazione centripeta:

$$a = \omega^2 r = \left(2.00 \times 10^{-7} \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 1.496 \times 10^{11} m = 5.93 \times 10^{-3} \frac{rad}{s^2}$$

□

Un modo alternativo per derivare l'accelerazione centripeta é quello di osservare la formula dell'accelerazione per un moto circolare. Essendo il moto rettilineo uniforme privo di accelerazione angolare e dalla velocitá (angolare) costante, sostituendovi $\alpha(t) = 0$ e $\omega(t) = \omega$ si ha:

[2] Questo é vero solamente se il pianeta in questione si trova sufficientemente vicino alla stella. Piú é lontano, piú l'orbita che descrive si fa ellittica.

$$\begin{cases} -|r| \ (\cos(\theta(t))\omega^2(t) + \sin(\theta(t)) \cdot 0) \\ -|r| \ (\sin(\theta(t))\omega^2(t) - \cos(\theta(t)) \cdot 0) \end{cases} = \begin{cases} -|r| \cos(\theta(t))\omega^2 \\ -|r| \sin(\theta(t))\omega^2 \end{cases} = \sqrt{(-|r| \cos(\theta(t))\omega^2)^2 + (-|r| \sin(\theta(t))\omega^2)^2} =$$

$$\sqrt{(|r|^2 \cos^2(\theta(t))\omega^4) + (|r|^2 \sin^2(\theta(t))\omega^4)} = \sqrt{(|r|^2 \ \omega^4)(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t)))} = \sqrt{(|r|^2 \ \omega^4) \cdot 1} = |r| \ \omega^2$$

2.3.2. Caso di studio: moto armonico

La proiezione di un moto circolare uniforme lungo un asse viene detta **moto armonico**. Di fatto, ciascuna delle due componenti dimensionali di un moto circolare uniforme, se presa singolarmente, descrive un moto armonico.

$$\vec{p_x}(t) = |\vec{r}| \cos(\theta(t)) \qquad \vec{p_y}(t) = |\vec{r}| \sin(\theta(t)))$$

Per semplicitá, si consideri un moto lungo la componente x, e si introduca uno sfasamento ϕ di modo che non vi sia differenza fra seno e coseno (essendo l'una la traslazione dell'altra).

$$x(t) = r \cos(\omega t + \phi)$$

r viene detta **ampiezza**, ed indica l'altezza massima che la traiettoria descritta dal punto riesce a raggiungere. ϕ viene detta **fase iniziale** ed indica l'altezza al tempo iniziale. ω viene detta **frequenza angolare**.

Il tempo che un punto materiale impiega per percorrere un giro completo in un moto circolare uniforme corrisponde al tempo che un punto materiale impiega per passare da un punto ad una certa altezza ad un punto con la medesima altezza in un moto armonico. Ricordando che la formula per il calcolo della velocitá angolare di un moto circolare uniforme é $\omega = 2\pi/T$, il periodo $T = 2\pi/\omega$ viene detto **periodo di oscillazione** per il moto armonico.

2.3.3. Caso di studio: moto circolare uniformemente accelerato

Il **moto circolare uniformemente accelerato** é un moto circolare in cui l'accelerazione angolare é costante. In questo caso, é effettivamente possibile risolvere l'integrale in maniera semplice:

$$\omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \alpha dt' = \alpha \int_{t_0}^{t} dt' = \alpha \cdot (t - t_0) = \alpha t - \alpha t_0$$

Da cui si ha:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \omega(t_0) + \alpha t - \alpha t_0 dt' = \int_{t_0}^{t} \omega(t_0)dt' + \int_{t_0}^{t} \alpha t dt' - \int_{t_0}^{t} \alpha t_0 dt' =$$

$$\omega(t_0) \int_{t_0}^{t} dt' + \alpha \int_{t_0}^{t} t dt' - \alpha \int_{t_0}^{t} t_0 dt' = \omega(t_0)(t - t_0) + \alpha\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}t_0^2\right) = \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Ovvero:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0) \qquad \theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Che corrisponde al risultato trovato per il moto uniformemente accelerato in una dimensione.

2.4. Moti relativi e sistemi inerziali

Siano A e B due sistemi di riferimento, dove uno dei due si sta muovendo rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme. Se si osserva la situazione dal punto di vista di A, il sistema di riferimento A é fermo mentre B si sta muovendo di moto rettilineo uniforme con velocitá v rispetto a questo. Se si osserva la situazione dal punto di vista di B, il sistema di riferimento B é fermo mentre A si sta muovendo di moto rettilineo uniforme con velocitá $-v$ rispetto a questo. Entrambe le esperienze sono equamente valide.

Questo sta a significare che non esiste alcun modo di determinare in senso «assoluto» se un sistema di riferimento é fermo oppure in moto rettilineo uniforme, ma é possibile farlo solamente rispetto ad un secondo sistema di riferimento. Questa osservazione prende il nome di **principio di relativitá**. Sistemi di riferimento che sono fermi l'uno rispetto all'altro o in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro si dicono **inerziali**. In altre parole, il principio di relatività sancisce che non esistono sistemi di riferimento «universalmente» inerziali: si è sempre inerziali rispetto ad un altro sistema.

Le descrizioni compiute da piú sistemi di riferimento inerziali del moto di uno stesso punto materiale possono essere messe in relazione fra di loro. Siano A e B due sistemi di riferimento con origine coincidente, e sia P un punto materiale. Si osservi la situazione dal punto di vista di A, e si supponga che B si stia muovendo di moto rettilineo uniforme rispetto a questo con velocitá $\vec{v}_{BA}$. Entrambi i sistemi di riferimento osserveranno P muoversi, ma non necessariamente alla stessa velocitá e non necessariamente compiendo la stessa traiettoria.

In questo scenario vi sono tre vettori posizione, $\vec{r}_{BA}(t)$, $\vec{r}_{PA}(t)$ e $\vec{v}_{PB}(t)$. Questi indicano, rispettivamente: la posizione di P rispetto ad A, la posizione di P rispetto a B e la posizione di B rispetto ad A. Tali vettori cambiano di direzione e/o di modulo in ogni istante, da cui la dipendenza dal tempo. Il vettore $\vec{r}_{BA}(t)$ ha origine nell'origine di A e punto di applicazione nell'origine di B, mentre $\vec{r}_{PB}(t)$ ha origine nell'origine di B e punto di applicazione in P. Essendo il punto di applicazione del primo coincidente con l'origine del secondo, la loro somma avrá origine nell'origine di A e punto di applicazione in P, ma questo vettore é precisamente $\vec{r}_{PA}(t)$. In altre parole, i reciproci vettori posizione sono componibili semplicemente per somma:

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{BA}(t) + \vec{r}_{PB}(t)$$

Essendo poi la velocitá la derivata della posizione, si osserva che anche questa puó essere composta per somma:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{PA}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{BA}(t) + \vec{r}_{PB}(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{r}_{PA}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{BA}(t) + \frac{d}{dt}\vec{r}_{PB}(t) \Rightarrow \vec{v}_{PA}(t) = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}(t)$$

Derivando ulteriormente l'espressione, si ottiene che l'accelerazione di P non dipende dal sistema di riferimento, dato che $\vec{v}_{BA}$ é una costante.

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{PA}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v}_{PA}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{BA} + \frac{d}{dt}\vec{v}_{PB}(t) \Rightarrow \vec{a}_{PA}(t) = \vec{a}_{PB}(t)$$

3. Dinamica

3.1. Leggi di Newton

La cinematica permette di descrivere la legge oraria di un corpo una volta nota la sua accelerazione, ma non é in grado di spiegare perché i corpi accelerano. Questo aspetto viene indagato da una seconda branca della fisica, chiamata **meccanica**. La formulazione di meccanica storicamente piú rilevante é la **meccanica Newtoniana**, ancora applicabile entro certi limiti[3].

Centrale nella meccanica Newtoniana é il concetto intuitivo di **forza**: una forza é una interazione che avviene tra due o piú corpi in grado di modificarne la velocitá, in direzione e/o intensitá. É possibile darne una descrizione ontologica dividendole in due grandi categorie: **fondamentali** e **non fondamentali** (o **emergenti**). Le forze fondamentali sono quelle che interessano i costituenti fondamentali della materia, quindi atomi, protoni, elettroni e quark. Nello specifico, in natura sono state osservate solamente quattro forze fondamentali:

1. **Forza elettromagnetica**;
2. **Forza di gravità**;
3. **Interazione nucleare debole**;
4. **Interazione nucleare forte**.

Le forze emergenti sono quelle che nascono dall'applicazione di una o più forze fondamentali, ma che dal punto di vista macroscopico è più comodo considerare come forze in sè. Ad esempio, i contatti tra due corpi (spinte, urti, ecc...) sono tecnicamente il risultato della reciproca repulsione di cariche elettriche, ed é quindi la somma di miliardi di forze elettromagnetiche, ma approcciare il problema a questo livello di dettaglio non é rilevante. Si noti come la distinzione fra forze fondamentali e forze emergenti, e fra diversi tipi di forze che appartengono alla stessa classe, é soltanto nominale: tutte le forze sono fra loro commensurabili.

L'unitá di misura della forza (di tutte le forze) é il **Newton** (simbolo N); un Newton corrisponde alla quantitá di interazione necessaria all'incrementare di una unitá l'accelerazione di un corpo avente massa unitaria. Pertanto, $1N = 1\frac{m}{s^2} \cdot 1kg$. Essendo l'accelerazione una quantitá vettoriale, anche la forza deve necessariamente esserlo. Per tale motivo, la forza che agisce complessivamente su un corpo, detta **forza risultante**, é data dal sommare vettorialmente le singole forze. Naturalmente, la forza risultante puó anche essere il vettore nullo. Di fatto, a livello di effetto sull'accelerazione, non c'é nessuna distinzione fra un corpo su cui non agisce alcuna forza ed un corpo su cui agiscono piú forze la cui somma complessiva é nulla.

Prima di enunciare le leggi che descrivono il moto dei corpi, occorre ricordare la definizione di sistema di riferimento inerziale: un sistema di riferimento é inerziale rispetto ad un altro se é fermo o in moto non accelerato.

Le forze permettono di dare una migliore definizione di sistema di riferimento inerziale. Infatti, un sistema di questo tipo è un sistema in cui sono valide le cosiddette **Leggi di Newton**:

1. Un oggetto su cui agisce una forza totale nulla non modifica il proprio stato di moto. Ovvero, un oggetto che subisce una forza complessivamente nulla o rimane fermo o si muove di muovo rettilineo uniforme;
2. **Legge di inerzia**: la somma totale di tutte le forze che agiscono su un corpo è direttamente proporzionale alla sua accelerazione. La costante di proporzionalità che le lega, diversa per ciascun corpo, prende il nome di **massa inerziale**:

   $$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

   Nella somma, non sono conteggiate le forze che é il corpo stesso ad imprimere, solamente quelle che «subisce»;
3. **Principio di azione-reazione**: se un corpo A imprime una forza su un corpo B, il corpo B imprime una forza su A con ugual modulo e direzione, ma verso opposto:

   $$\vec{F}_{A \text{ su } B} = -\vec{F}_{B \text{ su } A}$$

   In altre parole, non è possibile avere una forza «a vuoto».

[3] Sulla scala delle velocitá estremamente grandi, vicine a quelle della luce, alla meccanica Newtoniana si sostituisce la teoria della relativitá (speciale). Similmente, sulla scala delle dimensioni estremamente piccole, vicine a quelle dei costituenti ultimi della materia, alla meccanica Newtoniana si sostituisce la meccanica quantistica. Nonostante questo, la meccanica Newtoniana ha comunque un potere predittivo sufficiente per la maggior parte delle applicazioni pratiche.

Se la massa di un corpo aumenta, la forza (totale) necessaria ad indurgli la stessa accelerazione aumenta. Viceversa, se la massa diminuisce, serve una forza minore per indurre la stessa acceelerazione. La massa è quindi la misura della «resistenza» di un corpo ad accelerare.

Naturalmente, in un sistema di riferimento non inerziale le Leggi di Newton non sono valide. In particolare, possono presentarsi situazioni in cui un corpo può variare di accelerazione senza che sia una forza a farlo. Ci si chiede allora quali siano le leggi che governano il moto nei sistemi di riferimento non inerziali.

A tal proposito, si ricordi come l'accelerazione osservata in un sistema di riferimento è data dalla somma fra l'accelerazione nel secondo sistema e l'accelerazione fra un sistema di riferimento e l'altro. Moltiplicando per la massa m:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{1,2} \Rightarrow m\vec{a}_1 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2}$$

Si supponga che il primo sistema di riferimento sia inerziale. Allora vale la seconda legge di Newton, e quindi non vi sono forze in gioco, e non essendovi forze in gioco il prodotto fra massa e accelerazione è nullo. Ma allora:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2} \Rightarrow 0 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2} \Rightarrow \cancel{m}\vec{a}_2 = -\cancel{m}\vec{a}_{1,2} \Rightarrow \vec{a}_2 = -\vec{a}_{1,2}$$

Ovvero, l'accelerazione del secondo sistema è pari all'accelerazione con cui il secondo sistema si muove, ma di segno opposto.

Di fatto, anche sistemi di riferimento non inerziali possono essere approcciati con il «linguaggio» delle leggi di Newton, a patto di considerare la quantità $-m\vec{a}_{1,2}$ come una forza (anche se di fatto non lo è). Tale quantità viene anche chiamata **forza apparente**: il nome «apparente» non sta ad indicare che tale quantità non esiste, ma indica invece che tale quantità si comporta come una forza nonostante non lo sia.

Le forze che agiscono ogni sistema di riferimento non inerziale possono essere analizzate con le leggi di Newton se osservate da un sistema di riferimento inerziale. In generale, questo é sempre possibile.

Esercizio 3.1.1: Appoggiando una tazza di caffé sul tavolino di un treno fermo o in moto rettilineo uniforme, la tazza rimane ferma. Se peró il treno inizia a accelerare, la tazza inizia a muoversi accelerando in direzione opposta rispetto al moto del treno. Se la tazza era ferma e improvvisamente ha iniziato a muoversi con una accelerazione, non nulla, allora significa che una forza di qualche tipo la sta facendo muovere, ma non é realmente presente alcuna forza: la seconda legge di Newton sembrerebbe violata. Come é possibile interpretare correttamente questo scenario?

Soluzione: Il sistema di riferimento in esame non é inerziale, perché il treno sta accelerando. Si ipotizzi invece uno scenario dove il treno sta venendo osservato dalla banchina: da questo punto di vista, la tazza non ha una accelerazione, é ferma. Il motivo per cui si ha l'illusione che si stia muovendo é dovuto al fatto che il treno sta accelerando, ovvero si muove a una velocitá diversa dalla tazza, mentre questa sta mantenendo la sua velocitá nulla (in accordo con la prima legge di Newton). In sostanza, non é la tazza a muoversi all'indietro, é tutto il resto del treno che si muove in avanti: la tazza rimane ferma, ma ció che vi sta sotto si muove piú velocemente di quanto questa stia facendo. Non a caso, se immaginassimo di incollare saldamente la tazza al tavolo, anche se il treno accelerasse la tazzina non cadrebbe, perché tazza e treno formerebbero un unico corpo sottoposto allo stesso moto. □

La descrizione delle forze in gioco viene fatta delineando un **diagramma di corpo libero**, fissando un sistema di coordinate cartesiane e riportando i vettori delle forze in gioco, eventualmente «spezzandole» nelle loro componenti orizzontali e verticali rispetto agli assi.

Esercizio 3.1.2: Un disco da hockey di massa $0.3kg$ si sta muovendo sulla superficie ghiacciata del campo da gioco di moto rettilineo uniforme. Due bastoni da hockey lo colpiscono contemporaneamente: il primo gli imprime una forza F_1 di $5N$ con un angolo θ di 20° sotto l'orizzontale, mentre il secondo gli imprime una forza F_2 di $8N$ con un angolo φ di 60° sopra l'orizzontale. Assumendo che queste forze siano le uniche che stanno agendo sul disco, si determini l'intensitá della sua accelerazione.

Soluzione: Le due forze possono essere scomposte lungo gli assi x, y e z, per poi venire sommate componente per componente:

$$\begin{cases} F_x = F_{1,x} + F_{2,x} = \cos(\theta)F_1 + \cos(\varphi)F_2 = \cos(-20°) \cdot 5N + \cos(60°) \cdot 8N = 8.7N \\ F_y = F_{1,y} + F_{2,y} = \cos(\theta)F_1 + \cos(\varphi)F_2 = \sin(-20°) \cdot 5N + \sin(60°) \cdot 8N = 5.2N \\ F_z = 0N \end{cases}$$

Il modulo della forza risultante viene ricavato mediante somma vettoriale:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_x| + |\vec{F}_y| + |\vec{F}_z| = \sqrt{(8.7N)^2 + (5.2N)^2 + (0N)^2} = 10.1N$$

Applicando la seconda legge di Newton é possibile poi ricavare il modulo dell'accelerazione:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow |\vec{F}| = |m\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{10.1N}{0.3kg} = 33.8\frac{m}{s^2}$$

□

3.1.1. Caso di studio: piano inclinato liscio

Il **piano inclinato** é uno scenario in cui un corpo avente massa m, approssimabile ad un punto materiale, si trova su una superficie inclinata rispetto all'orizzontale di un certo angolo θ, chiamata **vincolo**. Le coordinate sono comode da fissare centrate nel vertice piú distante dalla superficie.

Una forza in gioco é la **forza di gravitá** P, che spinge il corpo verso il centro della Terra. In realtá, la forza di gravitá é una forza che intercorre fra qualsiasi coppia di corpi, non soltanto fra un corpo e la terra, ma per semplicitá (chiarita meglio in seguito) é possibile assumere che la forza di gravitá spinga semplicemente un corpo verso il terreno. Naturalmente, si assume che il terreno sia un sistema di riferimento inerziale.

Il modulo della forza di gravitá é dato dal prodotto fra la massa del corpo e una costante, denominata g, che rappresenta l'accelerazione che un corpo subisce per l'influenza della forza di gravitá esercitata dalla Terra. Sebbene tale valore non sia costante, perché dipende dalla distanza fra il suolo ed il corpo, la sua variazione é in genere sufficientemente piccola da essere trascurabile. In genere, viene preso in considerazione un sistema di riferimento con le ascisse positive in alto; dato che, in questo modello, il suolo si trova al di sotto del corpo, e quindi la forza di gravitá spinge il corpo verso il basso, questa ha segno negativo:

$$P = mg \qquad \vec{P} = -P\hat{j} = -mg\hat{j} = m\vec{g}$$

Se il piano é impenetrabile, ovvero se il corpo non «sprofonda» dentro la superficie, respinge il corpo verso l'altro con una forza N, che gli impedisce di «bucarla». Questa forza, chiamata **reazione vincolare** o **forza normale**, ha direzione perpendicolare alla superficie e uguale in modulo alla componente verticale della forza di gravitá.

Il modulo della componente parallela al piano della forza di gravitá é data dal prodotto fra il modulo della forza di gravitá per il seno dell'angolo θ, mentre il modulo della componente perpendicolare é dato dal prodotto del modulo della forza di gravitá per il coseno di θ (Le componenti sono invertite perché l'angolo non é quello fra il corpo e il piano). La reazione vincolare ha invece esclusivamente una componente perpendicolare. Riassumendo:

$$\begin{cases} P_x = P\sin(\theta) = mg\sin(\theta) \\ N_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_y = -P\cos(\theta) = -mg\cos(\theta) \\ N_y = N \end{cases}$$

Anche l'accelerazione del corpo, come le forze, puó essere scomposta nelle due componenti. Il corpo non sta sprofondando, pertanto non ha moto lungo la componente perpendicolare al vincolo, mentre scivola parallelamente a questo. Applicando la seconda legge di Newton:

$$ma_x = P_x + N_x \Rightarrow \qquad ma_y = P_y + N_y \Rightarrow$$

$$\cancel{m}a_x = \cancel{m}g\sin(\theta) + 0 \Rightarrow a_x = g\sin(\theta) \qquad 0 = -mg\cos(\theta) + N \Rightarrow N = mg\cos(\theta)$$

Nel caso limite in cui $\theta = \frac{\pi}{2}$, ovvero in cui il vincolo é «a strapiombo», non agisce alcuna forza perpendicolare al vincolo, perché $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, mentre l'accelerazione parallela al vincolo coincide perfettamente con l'accelerazione di gravità perché $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Nel caso limite in cui $\theta = 0$, ovvero in cui il vincolo é «piatto», la reazione vincolare e la forza di gravitá coincidono perfettamente, perché $\cos(0) = 1$, mentre non agisce alcuna forza parallela al vincolo, perché $\sin(0) = 0$.

Esercizio 3.1.1.1: Una palla di massa $m = 1kg$ viene lasciata cadere da una certa altezza. Sapendo che la massa del pianeta Terra é pari a circa $M = 6 \times 10^{24}kg$, calcolare l'accelerazione che la Terra subisce per effetto della forza esercitata dalla palla

Soluzione: Dal punto di vista della palla, l'unica forza su cui questa agisce é la forza di gravitá, che ha modulo $m_{\text{palla}} \cdot g$. Applicando la Terza Legge di Newton:

$$|\vec{F}_{\text{Terra-palla}}| = |-\vec{F}_{\text{palla-Terra}}| \Rightarrow mg = M\ |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{m}{M}g = \frac{1kg}{6 \times 10^{24}kg} \cdot 9.8\frac{m}{s^2} = 1.63 \times 10^{-24}\frac{m}{s^2}$$

□

3.1.2. Caso di studio: macchina di Atwood

Una **macchina di Atwood** é una macchina (ideale) costituita da una carrucola dotata di una fune inestensibile, che scorre liberamente senza spezzarsi. Sia la carrucola che la fune sono da considerarsi prive di massa, o comunque di massa cosí piccola da non essere rilevante. Agli estremi della fune sono appesi due corpi rispettivamente di massa m_1 e m_2. Il sistema di riferimento piú semplice per descrivere le accelerazioni é usarne uno centrato nel centro di massa di ciascun corpo.

Le due masse subiscono la forza di gravità, ciascuna con la propria intensitá. Se la fune si spezzasse, i due corpi cadrebbero verso il basso come di consueto, mentre in questo scenario i due corpi si muovo in alto o in basso tirati dalla fune. Questo accade perché i corpi subiscono una forza opposta in verso a quella di gravitá chiamata **tensione**, indotta dalla fune. Essendo la fune la stessa da ambo le parti della carrucola, anche la tensione deve essere uguale. Riassumendo:

$$\begin{cases} P_1 = -m_1 g \\ T_1 = T \end{cases} \qquad \begin{cases} P_2 = -m_2 g \\ T_2 = T \end{cases}$$

Rispetto al sistema di coordinate cosí fissato, i due corpi si muovono esclusivamente lungo l'asse verticale. Essendo la fune inestensibile, se un corpo accelera in un certo verso con un certo modulo l'altro corpo deve necessariamente accelerare con ugual modulo e senso inverso. Applicando la seconda legge di Newton:

$$m_1 a_1 = T + P_1 \Rightarrow m_1 a = T - m_1 g \qquad m_2 a_2 = T + P_2 \Rightarrow -m_2 a = T - m_2 g$$

3.1.3. Caso di studio: piano inclinato scabro

Introdurre la **forza di attrito** permette di spiegare molti fenomeni empirici che, altrimenti, contraddirebbero le Leggi di Newton. L'attrito puó essere pensato come una forza che emerge dallo «sfregamento» di superfici diverse a contatto, avente direzione opposta rispetto alla forza agente. La causa di tale sfregamento é da cercarsi nelle interazioni elettromagnetiche fra gli atomi che si trovano sull'«esterno» delle due superfici. Sebbene ogni singolo atomo abbia una interazione propria, é possibile approssimare l'attrito come uniforme lungo tutta la superficie.

Esercizio 3.1.3.1: Si considerino le seguenti tre situazioni reali, e si cerchi di interpretarle introducendo la forza di attrito:

- Dando una spinta ad un libro lungo la superficie orizzontale di un comodino, questo si muove per alcuni secondi decelerando per poi smettere di muoversi;
- Spingendo orizzontalmente il libro e mantenendo costante la spinta, il libro continua a muoversi senza accelerazione;
- Spingendo una cassa molto pesante, questa non si sposta, anche se non é fissata al terreno, a meno che la forza con cui la si spinge sia sufficientemente intensa.

Soluzione:
- Il fatto che il libro acceleri (tecnicamente, deceleri) anziché procedere di moto rettilineo uniforme puó essere spiegato introducendo una forza di attrito che si verifica tra la superficie del libro e quella del tavolo; in questo modo, la forza netta non é nulla e una accelerazione puó verificarsi;
- Se la forza che tiene spinto il libro fosse la sola forza in gioco, il libro dovrebbe accelerare, ma questo non accade. Questo puó essere spiegato dal fatto che una forza di attrito di modulo uguale e verso opposto alla forza che imprime la spinta la controbilancia, e quindi la forza totale netta é nulla;
- Se la cassa non si muove, significa che un'altra forza sta controbilanciando l'azione della spinta; tale spinta é la forza di attrito che si genera fra la cassa ed il terreno. Spingendo sufficientemente forte, é possibile vincere tale attrito e riuscire effettivamente a spostare la cassa.

□

Si tende a distinguere due tipi di forze di attrito, la **forza di attrito statica** e la **forza di attrito dinamica**. La prima é quella che si verifica quando lo «sfregamento» di due superfici impedisce ad un corpo fermo di iniziare a muoversi, mentre la seconda é quella che si verifica quando lo «sfregamento» di due superfici frena il movimento di un corpo che si sta giá muovendo.

La forza di attrito statica cresce con il crescere della forza agente, fino a raggiungere un plateau, mentre la forza di attrito dinamica é sostanzialmente costante. In genere, la forza di attrito dinamica f_d ha modulo inferiore a quello della massima forza di attrito statica $f_{s,\ \max}$. Fintanto che la forza che induge lo «sfregamento» é inferiore a $f_{s,\ \max}$, il corpo che viene spinto non si muove; quando il corpo inizia a muoversi, la forza di attrito statico viene vinta ed entra in gioco la forza di attrito dinamico.

Il modulo di f_d e di $f_{s,\ \max}$ é ricavato a partire dalle seguenti formule:

$$f_d = \mu_d F_N \qquad\qquad f_{s,\ \max} = \mu_s F_N$$

Dove F_N é la forza normale che agisce sul corpo impressa dalla superficie. I coefficienti u_s e μ_d sono detti rispettivamente **coefficiente di attrito statico** e **coefficiente di attrito dinamico**, e sono coefficienti adimensionali che sono propri di qualsiasi coppia di superfici, e vanno determinati sperimentalmente. Le due equazioni non sono equazioni vettoriali, dato che la forza di attrito ha sempre la stessa direzione (parallela alla superficie) e sempre lo stesso verso (opposto rispetto a quello lungo cui avviene lo «sfregamento»).

Il piano inclinato scabro é uno scenario analogo al piano inclinato liscio, ma dove la reazione vincolare ha sia una componente perpendicolare al vincolo, sia una parallela: la forza di attrito tra il vincolo ed il corpo.

$$\begin{cases} P_x = P\sin(\theta) = mg\sin(\theta) \\ N_x = \mu N_y = \mu N \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} P_y = -P\cos(\theta) = -mg\cos(\theta) \\ N_y = N \end{cases}$$

Applicando la seconda legge di Newton:

$$\begin{gathered} ma_x = P_x + N_x \Rightarrow \\ ma_x = mg\sin(\theta) - \mu N \end{gathered} \qquad\qquad \begin{gathered} ma_y = P_y + N_y \Rightarrow \\ 0 = -mg\cos(\theta) + N \Rightarrow N = mg\cos(\theta) \end{gathered}$$

3.1.4. Caso di studio: forza centripeta

É giá stato introdotto il moto circolare come il moto di un corpo che percorre una traiettoria circolare, ed é anche stato puntualizzato come ogni moto circolare abbia necessariamente una accelerazione centripeta. Applicando la Seconda Legge di Newton, deve allora esistere una forza che induce tale accelerazione centripeta:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_c = m\vec{a}_c \Rightarrow F_c = m\frac{v^2}{r}$$

Tale forza viene chiamata **forza centripeta**, perché ha la stessa direzione dell'accelerazione che questa induce (l'accelerazione centripeta, appunto).

Si noti come la forza centripeta non sia un nuovo tipo di forza, ma sia semplicemente una qualsiasi forza (una tensione, una forza di attrito, la forza di gravitá, ecc...) che modifica la direzione di un corpo inducendo una accelerazione centripeta senza modificarne la velocitá.

3.1.5. Caso di studio: forza elastica di una molla

Un esempio di forza variabile é quello della **forza elastica** esercitata da una molla su un punto materiale[4].

Una situazione tipica é quella di una molla attaccata ad una parete sul lato sinistro e con il punto materiale attaccato al suo «lato libero» (quello destro), centrando il sistema di riferimento nel lato sinistro della molla. Inizialmente, si assume che la molla sia *a riposo*, ovvero né tirata né contratta.

Se il punto materiale subisce una forza esterna che lo fa allontanare dalla molla, questa verrá tirata a sua volta verso destra, ed imprimerá sul punto materiale una forza diretta in senso opposto atta a farla ritornare nella posizione di riposo. Allo stesso modo, se il punto materiale subisce una forza esterna che lo fa avvicinare alla molla, questa verrá contratta ed imprimerá sul punto materiale una forza diretta in senso opposto atta a ritornare nella posizione di riposo.

Fintanto che la forza che tira o contrae la molla é relativamente piccola, la forza elastica che la molla esercita sul punto materiale puó essere approssimata dalla seguente equazione, chiamata **Legge di Hooke**:

$$\vec{F}_s = -k\vec{d}$$

Dove $\vec{d}$ é lo spostamento che la molla subisce, calcolato come la differenza fra la sua estensione a riposo e la sua estensione ora che é tesa o contratta, e k é una costante di proporzionalitá (inversa) univoca per ciascuna molla. La costante k, avente come unitá di misura $N \cdot m$, rappresenta la «rigiditá» della molla; piú k é grande, piú é grande la forza necessaria a far compiere alla molla il medesimo spostamento. Il segno meno a secondo membro sta ad indicare che la forza della molla agisce sempre in senso opposto a quello della forza che ne «disturba» l'equilibrio.

3.2. Energia cinetica

L'**energia cinetica** di un punto materiale è la quantità di energia associata al suo essere in movimento. Un punto materiale di massa m che si muove di velocità v[5] ha associata la seguente energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}mv^2[J]$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è il **Joule**: $1J = 1kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$

Quando la velocità di un punto materiale aumenta, anche la sua energia cinetica aumenta. Viceversa, quando la velocità di un punto materiale diminuisce, anche la sua energia cinetica diminuisce. Nel caso limite in cui il punto materiale sia fermo, la sua energia cinetica è nulla.

Esercizio 3.2.1: Una papera di massa $m = 3.0kg$ sta volando con velocità $v = 2.0\frac{m}{s}$. Assumendo di poter trattare la papera come punto materiale, qual'è la sua energia cinetica?

Soluzione:

$$K = \frac{1}{2} \cdot 3.0kg \cdot \left(2.0\frac{m}{s}\right)^2 = 6J$$

□

Modificare la velocità di un punto materiale significa quindi modificare la sua energia cinetica. Ma modificare la velocità di un punto materiale significa imprimergli una forza, pertanto il «tramite» dello scambio di energia cinetica è la forza. In particolare, se l'energia cinetica di un punto materiale aumenta in seguito all'applicazione di una forza, si dice che tale forza ha *fornito* energia al punto materiale, mentre se diminuisce che ha *sottratto* energia. Il quantitativo di energia fornita o sottratta ad un punto materiale per mezzo di una forza prende il nome di **lavoro**.

Si consideri un punto materiale, che subisce l'effetto di una forza costante $\vec{F}$ e modifica la sua velocità da un valore iniziale $\vec{v}_0$ al tempo t_0 ad un valore finale $\vec{v}_f$ al tempo t_f. Sia poi $\vec{d}$ lo spostamento che il punto materiale

[4] Molte interazioni in natura possono essere assimilate a quelle di una molla, pertanto questo caso di studio é molto piú ampio.
[5] Occorre anche assumere che ci si trova a velocità di netto inferiori a quelle della luce.

compie nell'intervallo di tempo da t_0 a t_f. è possibile legare forza e accelerazione del punto materiale lungo l'asse x applicando la Seconda Legge di Newton:

$$F_x = ma_x$$

Avendo assunto che la forza sia costante, anche l'accelerazione sarà costante. Ricordando che, per un moto uniformemente accelerato, vale l'espressione:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a_x d \Rightarrow a_x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2d}$$

Dove d è lo spostamento del punto materiale nel lasso di tempo $[t_0, t_f]$, è possibile sostituire nella precedente come:

$$F_x = m\left(\frac{v_f^2 - v_0^2}{2d}\right) \Rightarrow F_x d = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = K_f - K_i$$

Dove $\frac{1}{2}mv_f^2 = K_f$ e $\frac{1}{2}mv_0^2 = K_i$ indicano, rispettivamente, l'energia cinetica prima e dopo che il punto materiale ha subito l'effetto della forza. Il lavoro viene quindi ad essere il prodotto fra la componente orizzontale della forza che agisce sul punto materiale e lo spostamento indotto dalla variazione di velocità conseguente all'agire della forza:

$$W = F_x d = K_f - K_i = \Delta K$$

Se $K_f > K_i$, ovvero se l'energia cinetica «netta» è positiva, allora anche il lavoro è positivo, e pertanto la forza ha fornito energia al punto materiale. Viceversa, se $K_f < K_i$, ovvero se l'energia cinetica «netta» è negativa, allora anche il lavoro è negativo, e pertanto la forza ha sottratto energia al punto materiale.

Applicando la trigonometria, è possibile scrivere:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\cos(\theta)d$$

Dove θ è l'angolo formato dai vettori $\vec{F}$ e $\vec{d}$. Se l'angolo fra i due è retto, $\cos(\theta) = 0$, e pertanto il lavoro è zero. Se è invece piatto o nullo, $\cos(\theta) = \pm 1$, e pertanto il lavoro è massimo in modulo.

L'espressione per W indica che una forza con componente orizzontale concorde con lo spostamento dell'oggetto induce un lavoro con segno positivo, che quindi fornisce energia all'oggetto, mentre una forza con componente orizzontale discorde con lo spostamento dell'oggetto induce un lavoro con segno negativo, che quindi sottrae energia all'oggetto.

L'espressione per W assume che la forza sia costante, ovvero che non dipenda né dal tempo passato né dallo spazio percorso dal corpo per il suo effetto. Il calcolo del lavoro puó peró essere generalizzato anche al caso in cui la forza di cui é causa sia dipendente dallo spazio.

Si supponga di suddividere lo spazio in incrementi infinitesimi, dove in ciascun incremento j-esimo la forza é approssimativamente costante per tutta la durata dell'incremento. Sia F_j la forza costante associata al j-esimo incremento e sia Δx la porzione di spazio percorso dal corpo per effetto di tale forza in un qualsiasi incremento. Il lavoro totale viene pertanto ad essere la somma di tanti lavori infinitesimi W_j:

$$W = \sum_j W_j = \sum_j F_j \Delta x$$

Imponendo che Δx approcci zero, si ottiene il seguente integrale:

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_j F_j \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

Dove x_i e x_f indicano, rispettivamente, la posizione iniziale e finale del punto materiale sottoposto alla forza.

Applicando la seconda legge di Newton, si ha:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} madx$$

L'accelerazione é data dalla derivata della velocitá rispetto al tempo. Applicando la regola della catena:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} madx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dx}{dt}dv = \int_{v_i}^{v_f} mvdv$$

Risolvendo:

$$W = m\int_{v_i}^{v_f} vdv = m\left(\frac{v_f^2}{2} - \frac{v_i^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i$$

Riottenendo l'espressione per il lavoro come differenza dell'energia cinetica.

Sotto alcune ipotesi, é possibile estendere il concetto anche a forze che agiscono con piú componenti:

$$\vec{F} = F(x)\vec{\boldsymbol{i}} + F(y)\vec{\boldsymbol{j}} + F(z)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Si consideri uno spostamento infinitesimo in piú dimensioni:

$$d\vec{r} = dx\vec{\boldsymbol{i}} + dy\vec{\boldsymbol{j}} + dz\vec{\boldsymbol{k}}$$

Fintanto che le componenti della forza dipendono solamente dalle relative componenti spaziali ($F(x)$ dipende solo da x, $F(y)$ dipende solo da y, $F(z)$ dipende solo da z), é possibile esprimere la variazione infinitesima di lavoro come:

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = F(x)dx + F(y)dy + F(z)dz$$

Integrando, si ottiene l'espressione per il lavoro compiuto da una forza esterna su un punto materiale, che si muove in tre direzioni da una posizione iniziale $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ ad una finale $r_f = (x_f, y_f, z_f)$:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx + \int_{y_i}^{y_f} F(y)dy + \int_{z_i}^{z_f} F(z)dz$$

3.2.1. Caso di studio: lavoro compiuto dalla forza di gravità

Si consideri un punto materiale di massa m che viene lanciato in aria perpendicolarmente al terreno (e quindi parallelamente alla forza di gravità) con velocità iniziale v_0, percorrendo uno spostamento verticale pari a $\vec{d}$. Tale punto materiale avrà una energia cinetica iniziale pari a $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Ricordando l'espressione analitica della forza di gravità, il lavoro compiuto dalla forza di gravità sul punto materiale viene ad essere:

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgd\cos(\theta)$$

La spinta è verso l'alto, così come lo spostamento, mentre la forza di gravità è verso il basso, pertanto i due vettori hanno la medesima direzione ma verso opposto. L'angolo fra i due vettori è pertanto π, e si ha quindi:

$$W_g = mgd\cos(\pi) = mgd(-1) = -mgd$$

Infatti, la forza di gravità sta rallentando il punto materiale fino a fermarlo, e quindi sta compiendo su di esso un lavoro negativo, sottraendovi energia.

Quando il punto materiale raggiunge la sua massima altezza, questo inizia a cadere verso il basso, ed il suo spostamento diviene quindi concorde sia in direzione che in verso con la forza di gravità. L'angolo fra i due vettori è pertanto 0, e si ha quindi:

$$W_g = mgd\cos(0) = mgd(1) = mgd$$

Infatti, la forza di gravità sta facendo accelerare il punto materiale, e quindi sta compiendo su di esso un lavoro positivo, fornendovi energia.

3.2.2. Caso di studio: lavoro compiuto dalla forza elastica di una molla

Considerando uno scenario in cui una molla avente costante k é attaccata ad una parete dal lato sinistro ed ha un punto materiale attaccato a quello destro, é possibile scrivere:

$$F_s(x) = -kx$$

Dove x indica lo spostamento della molla dalla sua posizione originale.

Si supponga di imprimere una forza al punto materiale che lo faccia muovere verso destra, lasciandolo poi libero; la forza elastica della molla lo fará rallentare, compiendo lavoro negativo e sottraendo energia dal punto materiale.

Essendo la forza elastica una forza variabile (dipendente da x), non é possibile applicare direttamente l'equazione per il calcolo del lavoro. É peró possibile applicare quanto detto sulle forze variabili dipendenti dallo spazio per ottenere il seguente integrale:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_s(x)dx$$

Dove x_i e x_f indicano, rispettivamente, la posizione iniziale e finale dell'estremo destro della molla. Sostituendo l'espressione per F_s nell'equazione, si ha:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kxdx = -k\int_{x_i}^{x_f} xdx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f} = -k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_i^2\right) = \frac{1}{2}k\left(x_i^2 - x_f^2\right)$$

3.3. Energia potenziale

L'**energia potenziale**, indicata con U, é una forma di energia associata alla «configurazione» di un sistema, ovvero alle posizioni che le entitá nel sistema che imprimono forze l'una sull'altra occupano. La variazione di energia potenziale di un punto materiale é definita come l'opposto del lavoro su questo compiuto:

$$\Delta U = -W$$

All'energia potenziale é legato il concetto di *conservativitá* delle forze. Si consideri un sistema fisico cosí definito:

1. Il sistema é costituito da due o piú oggetti fisici;
2. Le forze sussistono fra uno degli oggetti del sistema ed uno o piú oggetti del sistema;
3. Quando la configurazione del sistema cambia, una forza compie lavoro W_1, trasferendo energia dall'energia cinetica dell'oggetto ad un altro tipo di energia (potenziale, ecc...) del sistema;
4. Quando tale cambiamento nella configurazione viene rovesciato, una forza compie un lavoro W_2 che fornisce energia all'oggetto.

Nella situazione in cui W_2 e W_1 sono sempre uguali in valore assoluto, ovvero quando l'energia ceduta dall'oggetto al sistema viene sempre restituita per intero se il processo viene invertito, allora l'energia che viene restituita é energia potenziale e la forza in questione é una **forza conservativa**. Se questo non avviene, si dice che si é in presenza di una **forza non conservativa**. La forza elastica e la forza di gravitá sono esempi di forze conservative; la forza di attrito é un esempio di forza non conservativa.

Una proprietá delle forze conservative é che il lavoro netto compiuto lungo un percorso chiuso (ovvero, dove il punto iniziale e quello finale coincidono) é sempre zero, a prescindere dalla lunghezza e dalla forma del percorso. In maniera sostanzialmente equivalente, é possibile dire che il lavoro compiuto da una forza conservativa da un punto A ad un punto B non dipende né dalla forma percorso, né dalla sua lunghezza.

Una espressione per U puó essere scritta come segue. Si consideri un punto materiale che fa parte di un sistema su cui agisce una forza conservativa $\vec{F}$. Se questa compie un lavoro W sul punto materiale, la variazione di energia potenziale é uguale in modulo al lavoro, ma in segno opposto. É pertanto possibile sostituire ΔU nell'espressione per il calcolo del lavoro come:

$$-W = \Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

Dove x_i e x_f sono rispettivamente il punto iniziale e finale dello spostamento del corpo indotto dalla forza.

3.3.1. Caso di studio: energia potenziale gravitazionale

Si consideri un punto materiale di massa m che viene lanciato verticalmente da un punto y_i ad un punto y_f; su questa agisce la forza di gravitá F_g. Applicando la formula appena trovata:

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} \vec{F}_g(y)dy = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f} = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y$$

Dove l'integrazione avviene verticalmente, e non orizzontalmente. Si noti come la forza di gravitá abbia segno negativo, in accordo con il fatto che questa agisce dal basso verso l'alto.

Sebbene solamente una *variazione* di energia potenziale sia una quantitá fisicamente rilevante, talvolta puó essere utile associare una energia potenziale $U(y)$ ad un punto materiale in un sistema Terra-punto ad una certa altezza y. Riscrivendo l'espressione precedente in questo modo:

$$U_f - U_i = mg(y_f - y_i)$$

Si ha che U_f e U_i sono rispettivamente l'energia potenziale associata al punto materiale quando questo si trova ad altezza y_f e y_i. In generale, ad una certa altezza y, si ha:

$$U(y) = mgy$$

3.3.2. Caso di studio: energia potenziale elastica

Si consideri una molla con un estremo fissato a sinistra ed un punto materiale attaccato a destra. Quando il punto materiale si muove da una posizione iniziale x_i ad una nuova posizione x_f, la molla esercita su questo una forza $F(x) = -kx$, e compie pertanto un lavoro. Sostituendo tale forza nell'equazione per la variazione dell'energia potenziale, si ha:

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = k\int_{x_i}^{x_f} xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f} = k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right) = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

In maniera analoga a quanto fatto per l'energia potenziale gravitazionale, é possibile associare un'energia potenziale ad una posizione specifica del punto materiale come:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

3.4. Energia meccanica

La somma fra l'energia cinetica di tutti gli elementi di un sistema e l'energia potenziale di tutti gli elementi di un sistema prende il nome di **energia meccanica**, indicata con E:

$$E = K + U$$

É particolarmente interessante trattare l'energia meccanica associata a sistemi *isolati*, ovvero in cui non avvengono scambi di energia e/o di materia con l'esterno, ed in cui agiscono solamente forze conservative. Questo perché analizzarli diventa nettamente piú semplice.

Una variazione di energia cinetica ΔK su un elemento del sistema corrisponde ad un lavoro W_1 compiuto su tale elemento. Allo stesso modo, una variazione di energia potenziale ΔU su un elemento del sistema corrisponde ad un lavoro $-W_2$ compiuto su tale elemento. Se nel sistema in questione agiscono solo forze conservative, una variazione di energia cinetica corrisponde ad una variazione uguale in modulo ma opposta in segno di energia potenziale, pertanto W_1 e $-W_2$ hanno lo stesso modulo. Indicando con i pedici f e i rispettivamente le energie associate all'istante in cui la forza inizia e finisce di agire, é possibile scrivere:

$$W_1 = -W_2 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow K_f - K_i = -(U_f - U_i) \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$$

Ma la somma fra l'energia potenziale e l'energia cinetica é l'energia meccanica, pertanto:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \Rightarrow E_f = E_i \Rightarrow E_f - E_i = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

Ovvero, la variazione di energia meccanica all'interno di un sistema isolato in cui agiscono solamente forze conservative é sempre nulla; per quanto le energie cinetica e potenziale possano variare liberamente, la loro somma é sempre costante. Il motivo per cui analizzare sistemi di questo tipo é molto semplice sta nel fatto che, essendo l'energia meccanica sempre costante, due stati distinti del sistema possono essere analizzati senza dover anche considerare gli stati intermedi e senza dover ricavare il lavoro svolto dalle singole forze.

L'energia meccanica permette di estendere la nozione di forza che fornisce energia ad un corpo compiendo un lavoro al fornire energia ad un sistema dall'esterno. Una forza esterna agisce su un sistema trasferendovi energia; se l'energia del sistema aumenta, la forza vi sta fornendo energia, mentre se l'energia del sistema diminuisce, la forza vi sta sottraendo energia. Naturalmente, se piú forze esterne stanno agendo sul sistema contemporaneamente, il trasferimento di energia dipende dal lavoro compiuto dalla forza netta.

Fintanto che il sistema é costituito da soltanto un punto materiale, l'unica forma di energia che puó venirmi fornita é l'energia cinetica. Se invece il sistema é costituito da piú di un corpo, l'energia fornita potrebbe figurare anche in altre forme, come l'energia potenziale.

Nel caso in cui nel sistema sono presenti solamente forze conservative, l'energia fornita dall'esterno figura come energia meccanica. Se W é il lavoro compiuto sul sistema da una forza esterna, il guadagno o la perdita di energia da parte del sistema é data da:

$$W = \Delta E = \Delta K + \Delta U$$

Si noti come, in questo caso, é ammesso che l'energia meccanica del sistema aumenti o diminuisca, anche si é in presenza di sole forze conservative. Questo perché l'input di energia viene dall'esterno del sistema, non dall'interno.

Si consideri invece il caso in cui fra le forze esterne al sistema che agiscono su questo figura la forza d'attrito, che é una forza non conservativa. Sia $\vec{F}$ una forza costante esterna al sistema, parzialmente controbilanciata da una forza di attrito $\vec{f}_k$, che agisce su un suo elemento. Sia $\vec{d}$ lo spostamento indotto da tale forza, e siano $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_f$ le velocitá che il corpo ha rispettivamente all'inizio ed alla fine dello spostamento. Applicando la Seconda Legge di Newton:

$$\vec{F} - \vec{f}_k = m\vec{a}$$

Avendo assunto che $\vec{F}$ é costante, anche $\vec{a}$ é costante. Ricordando che $\vec{v}_f^2 = \vec{v}_i^2 + 2\vec{a}\vec{d}$:

$$\vec{F} - \vec{f}_k = m\left(\frac{\vec{v}_f^2 - \vec{v}_i^2}{2d}\right) \Rightarrow \vec{F}d - \vec{f}_k d = \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 \Rightarrow \vec{F}d = \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 + \vec{f}_k d$$

Sostituendo con le espressioni per il lavoro e per l'energia cinetica, si ha:

$$W = \Delta K + f_k d$$

É possibile generalizzare al caso in cui vi sia anche energia potenziale:

$$W = \Delta E + f_k d$$

L'energia obbedisce ad un principio empirico che (al momento) non trova alcuna eccezione, chiamato **principio di conservazione dell'energia**, che stabilisce che il quantitativo totale di energia all'interno di un sistema isolato non possa mai cambiare, ma solamente venire convertita (da cinetica a potenziale, per esempio, o viceversa). Si noti come l'introdurre o sottrarre energia in un sistema isolato da parte di una forza esterna non viola questo principio; il lavoro fornito/sottratto é comunque presente, ma in un sistema piú ampio. Nel caso limite in cui si consideri l'intero Universo, non esiste alcuna forza a questo esterna, pertanto l'energia totale dell'Universo é sempre la stessa.