

Indice

Introduzione

Agente intelligente

Rappresentazione della conoscenza

Knowledge representation and reasoning

Knowledge Graphs

Resource Description Framework

Termini

Sintassi: N-triples e Turtle

SPARQL Protocol And RDF Query Language

RDFS

OWL

Search and plan

Risolvere problemi con la ricerca

Algoritmi di ricerca

Ricerca non informata

Ricerca informata

Planning classico

Planning probabilistico

Intelligenza artificiale sub-simbolica

Apprendimento

Alberi di decisione

Valutare modelli di classificazione

K-nearest neighbour

Metodi ensemble

Percettrone

Clustering basato su partizioni: K-means

Clustering basato su densità: DBSCAN

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Agente intelligente

Si definisce **agente intelligente**, o semplicemente **agente**, qualsiasi entità in grado di percepire l'ambiente in cui si trova mediante sensori e modificando tale ambiente compiendo delle azioni, mappando percezioni ad azioni. Con **ambiente** si intende la parte di universo a disposizione delle percezioni dell'agente e da questa influenzabile. L'intelligenza artificiale è definibile come lo studio degli agenti.

Un essere umano può essere modellato come un agente, potendo percepire l'ambiente tramite occhi, orecchie e altri organi e agendo su di esso per mezzo dei suoi arti. Allo stesso modo, un robot può essere modellato come un agente, percependo l'ambiente attraverso telecamere o sensori infrarossi e agendo su di esso mediante appendici e/o motori elettrici. Infine, anche un programma per computer può essere modellato come un agente, se si considera l'input umano (tramite tastiera, mouse, touchscreen o voce) come percezione ed il suo output (scrivere su un file, mostrare un contenuto a schermo, generare un suono, eccetera) come azione compiuta sull'ambiente.

La sequenza di percezioni di un agente è la storia completa di tutto ciò che l'agente ha percepito. In generale, la scelta dell'azione compiuta da un agente in un certo istante dipende dalla sua conoscenza a priori e/o dall'intera sequenza di percezioni precedente. Formalmente, il comportamento di un agente è descritto da una funzione agente che mappa sequenze di percezioni in azioni: $f : \text{Pow}(P) \rightarrow A$. Tale funzione è un concetto astratto, una caratterizzazione *esterna* di un agente: *internamente*, la funzione agente di un agente intelligente è implementata da un **programma agente**; tale funzione viene eseguita da un dispositivo elettronico dotato di sensori di sorta, chiamato **architettura**.

Un **agente razionale** è un agente che "fa la scelta giusta". La nozione di "scelta giusta" comunemente adottata nel campo dell'intelligenza artificiale è il **conseguenzialismo**: il comportamento dell'agente è valutato sulla base delle conseguenze delle sue azioni. Se un agente, in relazione ad una certa percezione, compie una azione desiderabile dal punto di vista dell'utilizzatore, allora tale agente ha compiuto la "scelta giusta", ed è definibile agente razionale. La nozione di desiderabilità viene descritta da una **misura di prestazione** che valuta ogni sequenza di stati in cui l'ambiente si trova. In genere, è preferibile definire una misura di prestazione rispetto a ciò che si vuole accada all'ambiente piuttosto che rispetto al modo in cui ci si aspetta che funzioni.

È allora possibile fornire una definizione operativa di agente razionale: per ogni possibile sequenza di percezioni, un agente razionale sceglierà di compiere l'azione che, sulla base delle percezioni precedenti e sulla base della conoscenza che possiede a priori, restituisce il massimo valore possibile in termini di misura di prestazione. Si noti come "razionale" non significhi "onnisciente", ovvero in grado di prevedere con assoluta certezza ciò che accadrà in futuro, dato che questo è realisticamente impossibile; un agente razionale deve limitarsi a compiere azioni che massimizzano la prestazione *attesa*.

La definizione di agente razionale sopra presentata prevede che questo possieda anche una qualche nozione di **apprendimento**: per quanto la sua configurazione iniziale possa essere fissata, questa può venire modificata e potenziata con l'esperienza. Nel caso in cui l'ambiente sia interamente conosciuto a priori, l'agente non ha alcuna forma di apprendimento, limitandosi a compiere le azioni preimpostate.

Un agente che compie azioni esclusivamente sulla base della sua conoscenza a priori e non fa uso di apprendimento si dice che non è **autonomo**. Un agente razionale dovrebbe invece essere autonomo, ovvero partire sì da una base di conoscenza pregressa ma, attraverso l'apprendimento, colmarne le lacune. Dopo abbastanza esperienza, ci si aspetta che un agente razionale diventi di fatto indipendente dalla sua conoscenza a priori. È possibile classificare gli ambienti rispetto a cinque metriche informali, utili a ragionare sulla difficoltà del problema e sulla modalità risolutiva da adottare:

- **Accessibile o inaccessibile.** Un ambiente è tanto accessibile quanto un agente è in grado di ottenere le informazioni sul suo stato di cui necessita con completa accuratezza. Un ambiente può essere inaccessibile perché i sensori dell'agente non sono precisi oppure perché parte dell'ambiente è del tutto preclusa ai sensori dell'agente. Gli ambienti nel mondo reale hanno necessariamente un certo grado di inaccessibilità;
- **Deterministico o non deterministico.** Un ambiente è deterministico (in riferimento alle azioni dell'agente) se la sua evoluzione è completamente determinata dal suo stato attuale e dalle azioni dell'agente. Un ambiente è non deterministico se la sua evoluzione è anche influenzata da forze al di là dell'agente. Il mondo fisico da modellare ha sempre un certo grado di non determinismo;
- **Episodico o sequenziale.** In un ambiente episodico l'esperienza di un agente può essere divisa in step atomici dove la scelta di un'azione dipende esclusivamente dalla percezione attuale. In un ambiente sequenziale le azioni che un agente compie possono dipendere del tutto o in parte da quali azioni sono state prese in precedenza;
- **Statico o dinamico.** Un ambiente è statico se non subisce modifiche mentre l'agente sta deliberando, altrimenti è dinamico;
- **Discreto o continuo.** Un ambiente è discreto se il numero di stati in cui questo può trovarsi è finito, ovvero se è possibile (almeno in linea teorica) enumerare tutti i suoi possibili stati, altrimenti è continuo. Essendo i computer discreti per definizione, modellare un ambiente continuo attraverso un sistema automatico richiederà sempre un certo grado di approssimazione.

- Si consideri come ambiente il gioco degli scacchi e come agenti i giocatori umani (si assuma che le mosse non abbiano alcun limite di tempo). Tale ambiente é:
 1. Accessibile, perché ciascun giocatore ha completa conoscenza dello stato della partita;
 2. Deterministico, perché l'evoluzione degli stati dipende esclusivamente da quali mosse scelgono di compiere i giocatori;
 3. Sequenziale, perché le mosse di un giocatore possono anche dipendere da quali mosse ha compiuto in precedenza;
 4. Statico, perché durante l'esecuzione di una mossa e durante la scelta della stessa lo stato della partita rimane invariato;
 5. Discreto, perché il numero di possibili stati in cui la partita può trovarsi é finito.
- Si consideri come ambiente le strade di una città e come agente un sistema di guida automatico per automobili. Tale ambiente é:
 1. Inaccessibile, perché non é possibile conoscere l'intero stato del traffico di tutta la città in ciascun istante;
 2. Non deterministico, perché l'evoluzione del traffico non dipende esclusivamente dalle scelte dell'agente;
 3. Sequenziale, perché la scelta di quale strada percorrere può dipendere anche da quali strade ha percorso in precedenza;
 4. Dinamico, perché lo stato della città e del traffico cambiano anche mentre l'agente é in movimento;
 5. Continuo, perché lo stato della città e del traffico si modificano costantemente.

Gli agenti intelligenti possono essere informalmente classificati in quattro categorie, di crescente ordine di complessità.

1.1.1 Agenti con riflessi semplici

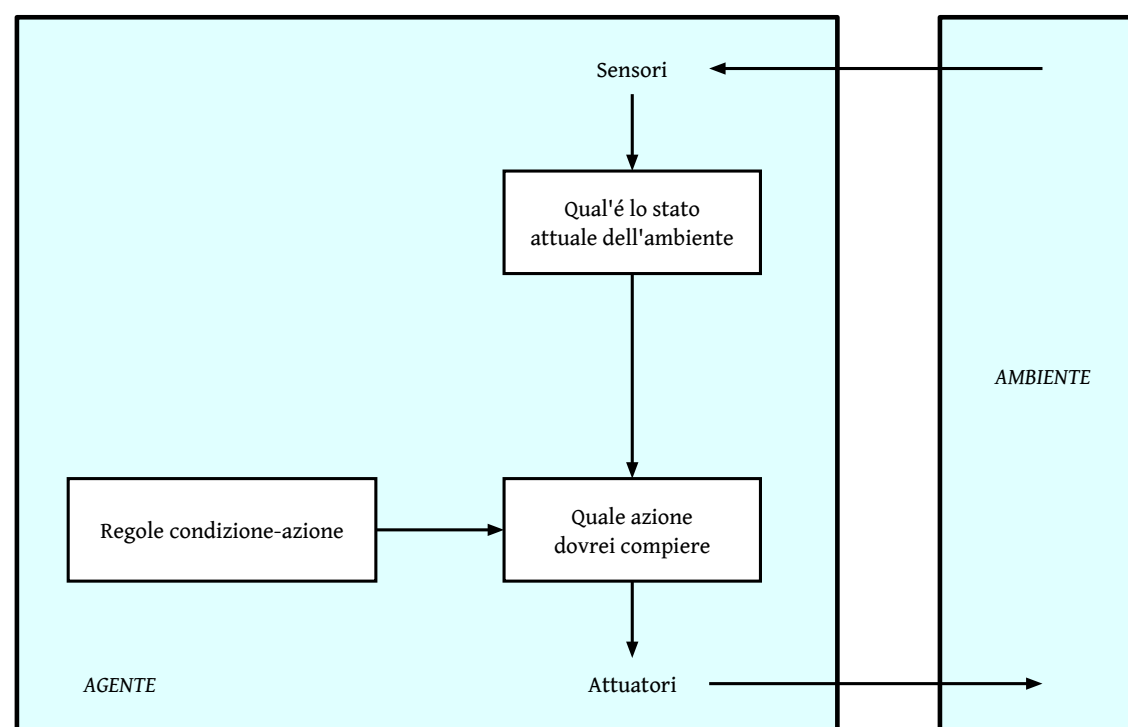
Gli agenti più facili da realizzare sono gli **agenti con riflessi semplici**. Questi agenti non hanno alcun modello dell'ambiente: scelgono che azione compiere esclusivamente sulla base della percezione attuale e non hanno cognizione delle percezioni precedenti.

Agenti di questo tipo scelgono che azioni compiere seguendo **regole condizione-azione**: se si verifica una certa condizione, allora viene compiuta l'azione associata a tale condizione.

Una rappresentazione schematica di un agente con riflessi semplici é presentata in basso. La funzione **INTERPRET-INPUT** genera una descrizione astratta della percezione ricevuta dall'agente, mentre la funzione **RULE-MATCH** restituisce la prima azione associata a tale rappresentazione di percezione nel set di regole **rules**.

```
rules <= set of condition-action rules
```

```
function SIMPLE-REFLEX-AGENT(percept)
state <= INTERPRETER-INPUT(percept)
rule <= RULE-MATCH(state, rules)
action <= rule.action
return action
```



Gli agenti con riflessi semplici hanno una intelligenza limitata. Infatti, agenti di questo tipo operano correttamente solamente se l'azione da compiere che massimizza la funzione di prestazione può essere determinata solo sulla base delle proprie percezioni, ovvero se l'ambiente é completamente accessibile. Se nella propria conoscenza a priori sono presenti errori o se l'ambiente é accessibile solo in parte, l'agente sarà destinato ad operare in maniera non razionale.

Ancora più problematica è la situazione in cui agenti con riflessi semplici entrano in loop infiniti, dato che non sono in grado di determinarli. L'unica contromisura che possono adottare è randomizzare le proprie azioni, dato che in questo modo si riduce la probabilità che l'agente compia le stesse azioni più volte di fila. Tuttavia, sebbene questo approccio possa mettere una pezza al problema del loop infinito in maniera semplice, in genere comporta uno spreco di risorse, e pertanto risulta difficilmente in un comportamento razionale da parte dell'agente.

1.1.2 Agenti con riflessi, ma basati su un modello

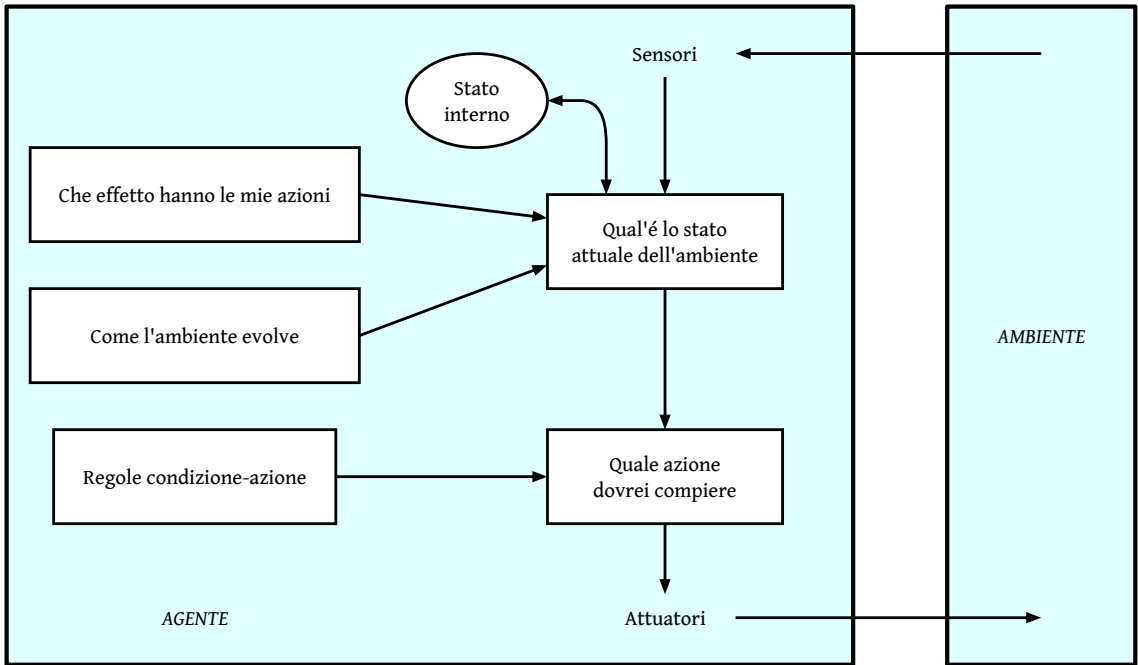
Il modo più efficiente per risolvere il problema dell'avere a che fare con un agente parzialmente accessibile è tenere traccia della parte di ambiente di cui questo non ha conoscenza. Ovvero, l'agente dovrebbe avere una qualche sorta di **stato interno** che dipende dalle percezioni che questo ha captato in precedenza, di modo da avere informazioni su alcuni degli stati diversi da quello corrente. Agenti di questo tipo sono detti **agenti con riflessi ma basati su un modello**.

Aggiornare periodicamente tale stato interno richiede che l'agente possieda due forme di conoscenza. Innanzitutto, è necessario avere informazioni relative al modo in cui l'ambiente si evolve nel tempo, sia in termini di come le azioni dell'agente influenzano l'ambiente che in termini di come l'ambiente si evolve in maniera indipendente dall'agente. Questo corpo di informazioni prende il nome di **modello di transizione**. Inoltre, è necessario avere informazioni relative a come l'evoluzione dell'ambiente si riflette sulle percezioni dell'agente, nel complesso chiamate **modello sensoriale**.

Una rappresentazione schematica di un agente con riflessi ma basati su un modello è presentata in basso, dove la funzione UPDATE-STATE aggiorna lo stato interno dell'agente prima di restituire l'azione da compiere.

```
state <= the agent's current conception of the environment state
transition_model <= a description on how the next state depends on the current state and action
sensor_model <= a description on how the current world state is reflected in the agent's percepts
rules <= set of condition-action rules
action <= the most recent action (starts NULL)

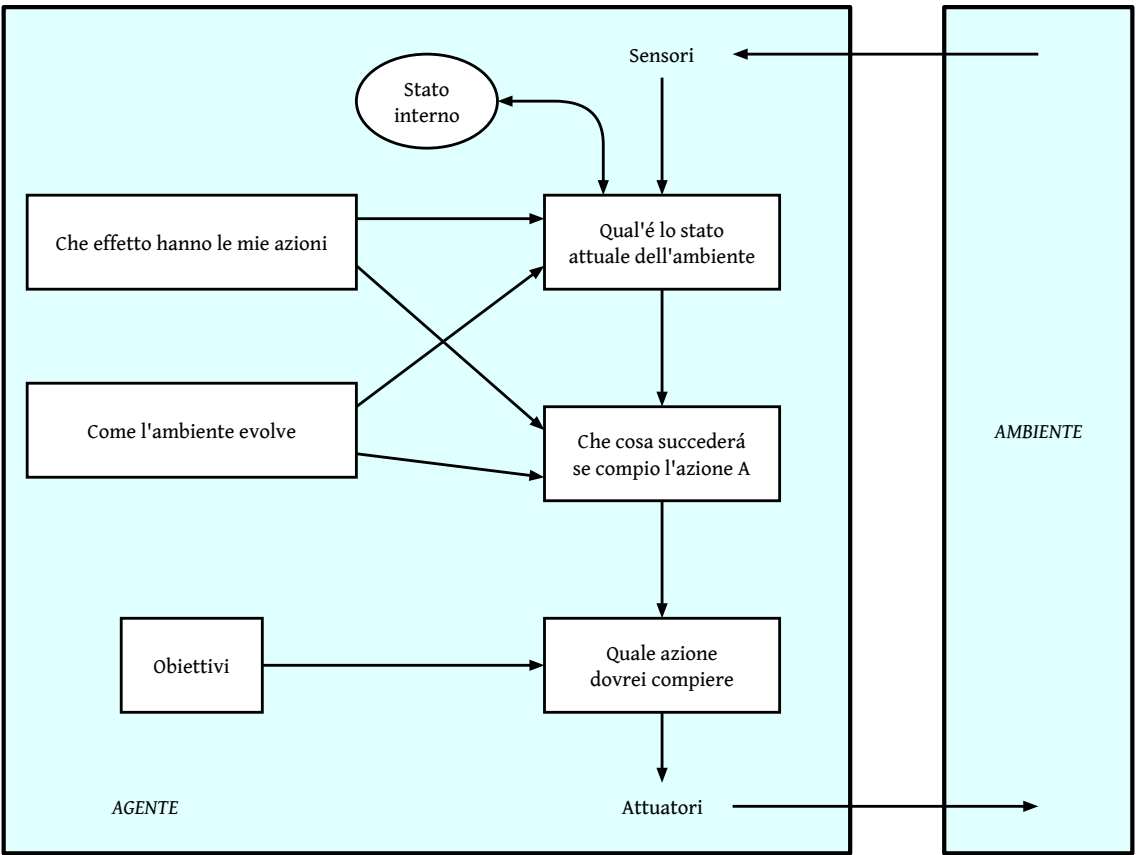
function MODEL-BASED-REFLEX-AGENT(percept)
state <= UPDATE-STATE(state, action, percept, transition_model, sensor_model)
rule <= RULE-MATCH(state, rules)
action <= rule.action
return action
```



Si noti come difficilmente un agente con riflesso basato su un modello può determinare con certezza lo stato attuale dell'ambiente. In genere, un agente può limitarsi ad averne una descrizione parziale.

1.1.3 Agenti basati su un modello, ma basati su obiettivi

Vi sono situazioni in cui la scelta di quale sia l'azione migliore da compiere da parte di un agente dipenda anche da un qualche tipo di obiettivo a lungo termine. Non sempre questo obiettivo viene raggiunto nell'operare una sola azione, ma può richiedere diverse azioni intermedie. In agenti di questo tipo, la medesima azione ed il medesimo stato interno possono risultare in azioni diverse se è diverso l'obiettivo.

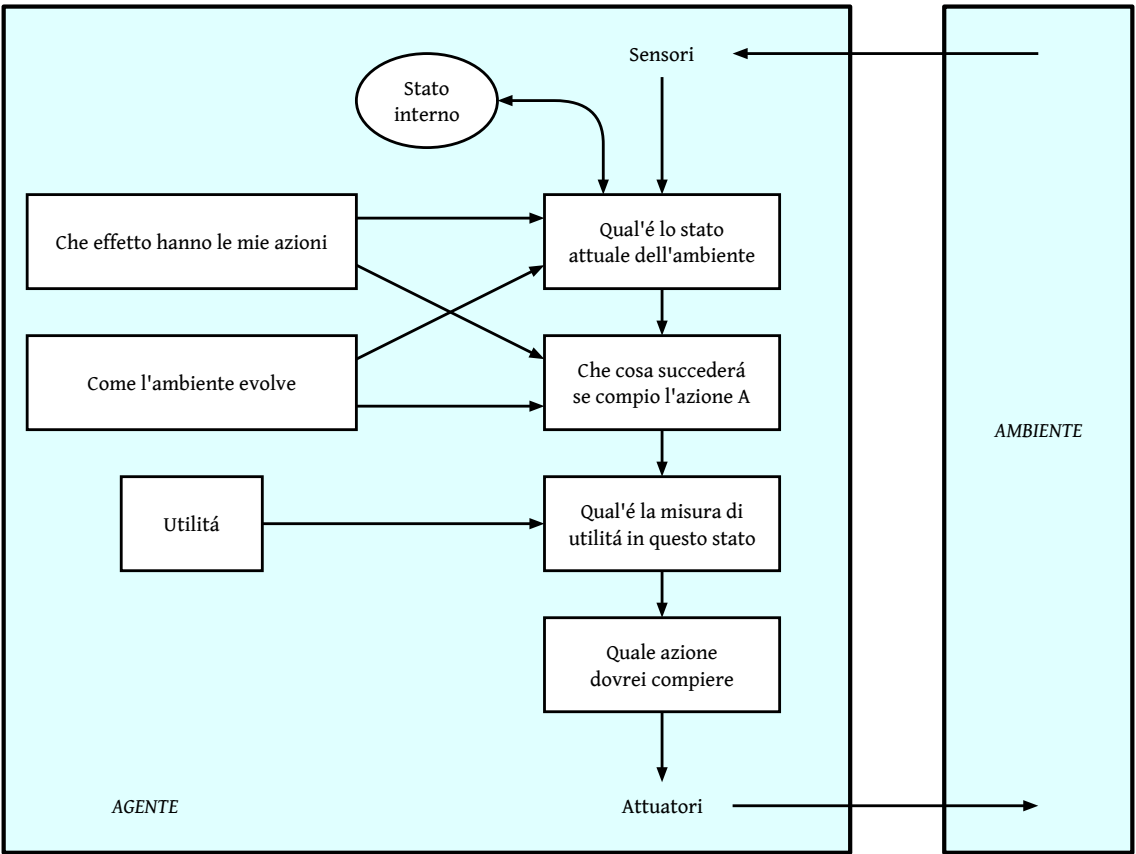


1.1.4 Agenti basati su un modello e guidati da utilità

Non sempre é possibile costruire un agente razionale semplicemente spingendolo a raggiungere un obiettivo. Infatti, se tale obiettivo può essere raggiunto tramite diverse sequenze di azioni, una potrebbe essere preferibile ad un'altra. Inoltre, un agente potrebbe dover perseguire più obiettivi contemporaneamente fra di loro incompatibili, ovvero compiere azioni che lo "avvicinano" ad un obiettivo ma al contempo "allontanarlo" da un altro.

Un obiettivo permette di discriminare gli stati dell'ambiente esclusivamente come "favorevoli" e "sfavorevoli", senza alcuna sfumatura nel mezzo. Un migliore approccio prevede invece di introdurre una misura di **utilità**, che influenza la scelta dell'agente nello scegliere quale azione compiere (insieme alla misura di prestazione, all'obiettivo da seguire e dal proprio stato interno).

La misura di utilità permette all'agente di, nel dover perseguire più obiettivi fra di loro incompatibili, scegliere l'azione che comporta il miglior compromesso nell'avanzamento di tutti loro. Inoltre, non sempre la struttura dell'ambiente garantisce che sia possibile raggiungere con assoluta certezza un obiettivo semplicemente eseguendo le azioni appropriate; anche in questo caso, la misura di utilità permette di valutare quanto sia "conveniente" per l'agente compiere una certa azione in vista di un determinato obiettivo sulla base di quanto sia ragionevole che tale obiettivo venga effettivamente raggiunto.

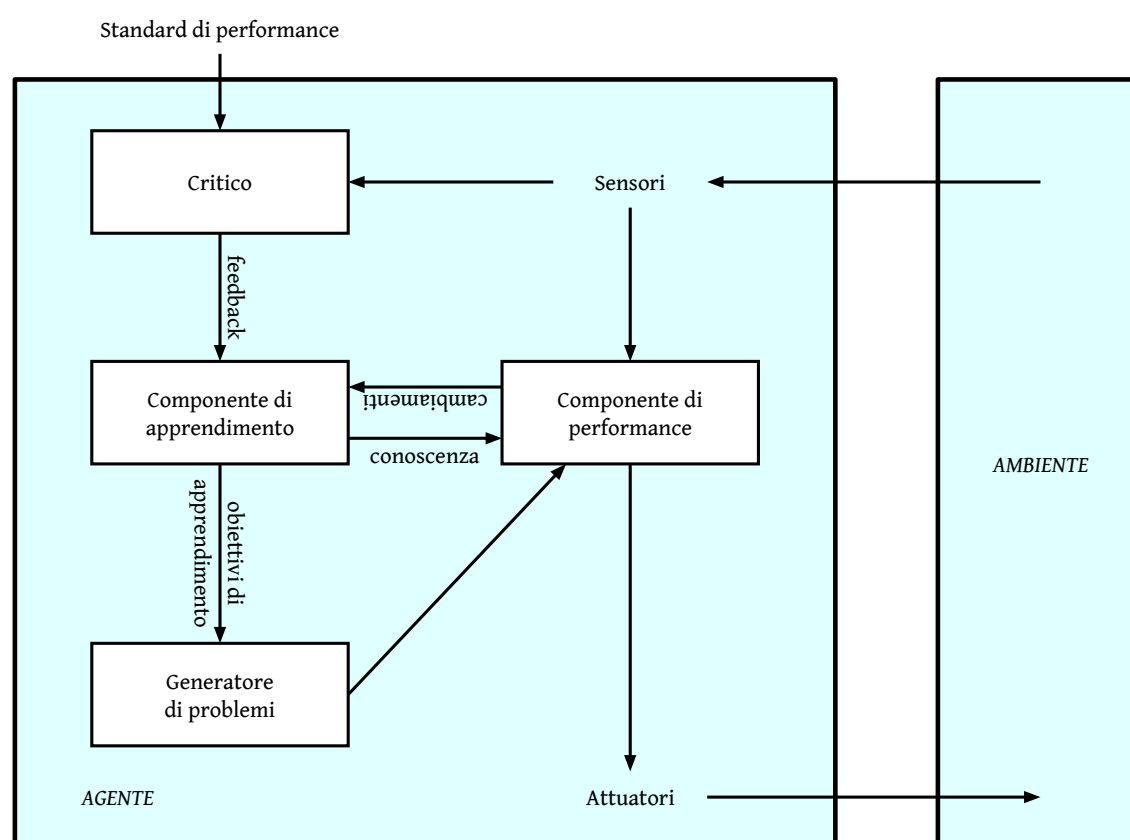


1.1.5 Agenti che apprendono

Gli agenti più interessanti sono indubbiamente quelli in grado di **apprendere**; tutti i tipi di agenti presentati finora possono essere costruiti come agenti che apprendono. Il notevole vantaggio che presentano è che possono operare in un ambiente del tutto sconosciuto apprendendo da questo, di modo da compiere le azioni migliori anche in situazioni dove lo stesso designer non ha modo di poter prevedere quali queste possano essere.

Un agente in grado di apprendere può essere concettualmente suddiviso in quattro componenti:

- La **componente di apprendimento**, che si occupa di migliorare la performance dell'agente;
- La **componente di performance**, che sceglie quale azione compiere sulla base delle percezioni e dello stato di conoscenza interno. Di fatto, questa componente costituiva l'intero agente dei modelli precedenti;
- Il **critico**, che informa la componente di apprendimento di quanto l'agente si sta comportando in maniera ottimale (razionale) sulla base di uno standard di performance prestabilito. Questa componente è necessaria perché le percezioni, di per loro, non sono in grado di informare l'agente sull'ottimalità del proprio comportamento;
- Il **generatore di problemi**, che suggerisce azioni all'agente che possono comportare nuove ed informative esperienze. Questa componente è necessaria perché se l'agente si affidasse esclusivamente alla componente di performance sceglierebbe sempre le azioni migliori sulla base della sua conoscenza attuale, che non sono necessariamente complete. Il generatore di problemi può portare l'agente a compiere azioni che possono potenzialmente essere localmente subottimali ma che sul lungo termine possono portare a compiere azioni ancora migliori.



Capitolo 2

Rappresentazione della conoscenza

2.1 Knowledge representation and reasoning

Gli esseri umani sono in grado di compiere azioni anche sulla base del fatto che possiedono delle **conoscenze** utilizzate per operare dei **ragionamenti** su una **rappresentazione** interna della conoscenza. Nel campo della AI questo si traduce nella costruzione di **agenti basati sulla conoscenza**.

Il componente principale di un agente basato sulla conoscenza é la **base di conoscenza**, o KB. Una KB é composta da un insieme di **fatti**, che rappresentano delle asserzioni sul mondo. Un agente basato sulla conoscenza deve essere in grado di fare **inferenze**, ovvero essere in grado di aggiungere dei nuovi fatti alla KB sulla base di quelli presenti applicando delle **regole**. Affinché questo sia possibile, é necessario che alcuni fatti siano presenti nella KB fin da subito. Questi vengono detti **assiomi**; l'unione di tutti gli assiomi prende il nome di **conoscenza pregressa** (**background knowledge**).

Sia i fatti (le asserzioni sul mondo) che le regole (le trasformazioni che aggiungono nuovi fatti alla KB sulla base di quelli presenti) vengono espressi in genere espressi in linguaggi specifici. Tali linguaggi sono detti **linguaggi di Knowledge Representation and Reasoning**, o **linguaggi KRR (linguaggi di rappresentazione della conoscenza)**. Un linguaggio KRR deve necessariamente basarsi su una qualche formalizzazione della logica, e ci si chiede allora quale formalizzazione della logica potrebbe ben adattarsi ad essere quella utilizzata dagli agenti basati sulla conoscenza. La logica proposizionale (logica di ordine zero) può venire scartata subito: nonostante abbia il pregio di essere decidibile, é troppo semplicistica, dato che non supporta i quantificatori universali "per ogni" e "esiste". Un miglior candidato potrebbe allora essere la logica proposizionale (logica del primo ordine), ma anche questa presenta dei problemi:

- *Decidibilità*. Come mostrato dai Teoremi di Incompletezza di Godel, la logica proposizionale é **indecidibile**, ovvero non tutte le formule possono essere provate vere o false all'interno della logica stessa ¹. Questo significa che un sistema di deduzione automatico, essendo limitato dall'Halting Problem, potrebbe rimanere eternamente bloccato nel computare se una data proposizione segua dalle premesse senza essere in grado di fornire una risposta;
- *Complessità*. La logica proposizionale é estremamente espressiva, pertanto alcune inferenze possono richiedere molto tempo computazionale (per quanto finito) per essere completate;
- *Approssimazione*. Per lo stesso motivo, non tutte le proprietà della logica proposizionale sono strettamente necessarie nel campo della IA. Cercare di implementarle tutte risulterebbe in uno spreco di risorse e nella costruzione di un sistema di deduzione inefficiente.

La scelta di un formalismo logico adatto al campo delle IA sembrerebbe allora ricadere in una logica che si trovi "nel mezzo" fra la logica proposizionale e la logica predicativa.

2.2 Knowledge Graphs

Un **Knowledge Graph (KG)** é un grafo diretto ed etichettato il cui scopo é riportare e trasmettere conoscenze sul mondo reale. I nodi del grafo rappresentano delle **entità**, ovvero degli oggetti che appartengono al mondo di interesse, mentre gli archi del grafo rappresentano delle **relazioni** che intercorrono fra queste entità.

Con "conoscenza" si intende genericamente qualsiasi cosa sia *nota*: tale conoscenza può essere ricavata da dal mondo che il grafo vuole modellare oppure estratta dal grafo stesso. La conoscenza può essere composta sia da semplici asserzioni che coinvolgono due entità ("A possiede/fa uso di/fa parte di/... B") oppure asserzioni che coinvolgono gruppi di entità ("tutti i membri di A possiedono/fanno uso/fanno parte di/... B"). Le asserzioni semplici sono riportate come etichette degli archi del grafo: se esiste un arco fra i nodi A e B, significa che A e B sono legati dalla relazione che etichetta l'arco che li unisce.

Formalmente, un Knowledge Graph é definito a partire dalla quintupla $\langle E, L, T, P, A \rangle$:

- Un insieme E di simboli, che rappresentano gli identificativi associati alle entità;
- Un insieme L di **letterali**, che rappresentano tutti i dati "grezzi" che il modello necessita di rappresentare (stringhe, numeri, eccettera);
- Un insieme T di tipi;
- Un insieme P di simboli di relazione;
- Un insieme A di assiomi.

A loro volta, gli assiomi vengono distinti in due sottogruppi:

- I fatti, ovvero assiomi che riguardano le singole entita. Indicano:

- ☐ Se una certa entità appartiene ad un certo tipo, ovvero $t(e) \mid t(l)$ con $e \in E$ e $l \in L$;
- ☐ Se due entità sono legate da una certa relazione, ovvero $r(e_1, e_2) \mid r(e, l)$ con $e_i \in E$ e $l \in L$.

1. Più correttamente, si dice che la logica proposizionale é **semidecidibile**, in quanto é sempre possibile dimostrare se una proposizione é vera sulla base delle premesse ma non é sempre possibile dimostrare se sia falsa.

- Gli assiomi generali, ovvero assiomi che non riguardano singole entità ma riguardano classi. La loro espressività dipende dal linguaggio logico a cui il KG fa riferimento, ma in genere sono nella forma $\forall x(t_1(x) \rightarrow t_2(x))$, ovvero che specificano una relazione di ordine parziale rispetto ai tipi.

Nei modelli di database relazionale, i dati sono rigidamente strutturati; la struttura è data dallo schema del database (che definisce le relazioni, le entità, gli attributi, ecc ...). I dati e lo schema sono *fortemente accoppiati*, dato che lo schema deve necessariamente venire definito prima di poter inserire i dati. Inoltre, lo schema è prescrittivo, dato che i dati non conformi allo schema non possono venire inseriti nel database.

Nei modelli di database a grafo, i dati sono parzialmente strutturati, dato che lo schema "emerge" in maniera implicita dal modo in cui sono scritte le triple. I dati e lo schema sono *debolmente accoppiati*, dato che i dati possono venire inseriti prima ancora di definire lo schema². Inoltre, lo schema non è prescrittivo, dato che i dati non conformi alla forma attuale dello schema possono venire inseriti comunque (e modificano lo schema).

Lo schema di un grafo RDF può essere visto sotto due aspetti. Il primo aspetto è lo schema come "patto sociale", dove i costruttori di grafi si impegnano a seguire degli standard (non obbligatori) per fare in modo che diversi grafi siano fra loro compatibili. Il secondo aspetto è lo schema è uno schema deduttivo, dato che fornisce solamente il significato dei termini e permette di fare inferenze (anche false).

Un primo approccio al fare in modo che i grafi siano compatibili è quello di costruire dei vocabolari standard che vengono impiegati per modellare domini diversi. Questo approccio funziona se esistono degli enti autorevoli che forniscono tali vocabolari; fra questi figurano **FOAF (friend of a friend)** e schema.org.

Modellare i dati sotto forma di grafo offre maggior flessibilità per integrare nuovi dataset rispetto ai modelli relazionali standard, dove uno schema deve essere definito prima che i dati possano essere inseriti. Nonostante anche modelli di dato ad albero (XML, JSON, ecc ...) offrano questa flessibilità, i modelli a grafo non necessitano di dover organizzare i dati in una gerarchia. Inoltre, i modelli a grafo permettono facilmente di rappresentare relazioni cicliche.

Essendo un KG un grafo, è possibile studiarne le proprietà tipiche dei grafi (simmetria, antisimmetria, transitività, eccetera) e metterle in relazione con il significato che hanno nel modello che questi rappresentano. È inoltre possibile *visitare* il grafo per ricavare informazioni più elaborate di quelle riportate nei soli archi.

2.3 Resource Description Framework

Resource Description Framework (RDF) è un esempio di modello di dati a grafo; sebbene inizialmente concepito per il web (è infatti parte di un insieme di protocolli più grande noto come **Semantic Web Stack**), trova uso anche come formato per la rappresentazione della conoscenza.

2.4 Termini

RDF è un modello di dati pensato per descrivere risorse. Con **risorsa** si intende qualsiasi entità a cui sia possibile associare un'identità, che siano entità virtuali (pagine web, siti web, file, ...), entità concrete (libri, persone, luoghi, ...) o entità astratte (specie animali, categorie, ere geologiche, ...). Ad una risorsa RDF viene fatto riferimento attraverso un **termine**; RDF ammette l'esistenza di tre tipi di termini: **IRI**, **letterali** e **nodi blank**. Un IRI (**International Resource Identifier**) è una stringa di caratteri Unicode che identifica univocamente una qualsiasi risorsa; se due risorse hanno lo stesso IRI, allora sono in realtà la stessa risorsa. Gli IRI sono un superset degli **URI (Unique Resource Identifier)**, che hanno la medesima funzione ma sono limitati ai soli caratteri ASCII.

Gli URI costituiscono a loro volta un soprainsieme sia degli **URL (Universal Resource Locator)** sia degli **URN (Uniform Resource Name)**. Il primo serve ad indicare la locazione di una risorsa (sul web), mentre il secondo il nome proprio della risorsa, scritto con una sintassi specifica. Pertanto, ad una risorsa è possibile riferirsi indifferentemente per locazione (URL) o per nome (URN).³

Le seguenti stringhe alfanumeriche sono degli IRI validi:

`https://www.example.org/alice` `https://en.wikipedia.org/wiki/Ice_cream` `https://www.nyc.org`

I letterali forniscono informazioni relative a descrizioni, date, valori numerici, ecc In RDF, un letterale è costituito dalle seguenti tre componenti:

- Una **forma lessicale**, ovvero una stringa di caratteri Unicode;
- Un **datatype IRI** che indica il tipo di dato del letterale, definendo un dominio di possibili valori che questo può assumere. Viene preceduto da "^^";
- Un **language tag** che indica la lingua in cui il termine viene espresso. Viene preceduto da "@"

2. Questa non è comunque una buona pratica, dato che è comunque preferibile definire lo schema prima dei dati.

3. Si noti come gli IRI risolvono il problema di avere a che fare con risorse diverse aventi lo stesso nome, ma non risolvono il problema inverso, ovvero dove IRI distinti si riferiscono alla stessa risorsa. RDF permette che una situazione di questo tipo si verifichi, ma in genere è preferibile risolvere questo tipo di conflitti adottando uno degli IRI che si riferiscono alla stessa risorsa a discapito degli altri.

I letterali più semplici sono quelli composti dalla sola forma lessicale; il datatype ed il language tag sono opzionali, ma spesso utili a dare l'interpretazione corretta del letterale a cui si riferiscono. I tipi di dato definiti da RDF sono un sottoinsieme dallo standard XSD, a cui si aggiungono i tipi di dato `rdf:XML` e `rdf:XMLLiteral` propri di RDF. Questi possono essere raggruppati in quattro categorie:

- **Booleani**, (`xsd:boolean`);
- **Numerici**, sia interi (`xsd:decimal`, `xsd:byte`, `xsd:unsignedInt`, ecc ...) che razionali (`xsd:float` e `xsd:double`);
- **Temporal**, che siano istanti di tempo (`xsd:time`, ...), lassi di tempo (`xsd:duration`, ...) o una data specifica (`xsd:gDay`, `xsd:gMonth`, `xsd:gYear`, ...);
- **Testuali**, sequenze di caratteri generiche (`xsd:string`) oppure conformi rispetto ad una certa sintassi (`rdf:XML`, `rdf:XMLLiteral`, `xsd:anyURI`, ecc ...).

Alcuni tipi di dato sono derivati da altri tipi di dato, ovvero restringono i valori ammissibili dal dato da cui derivano ad un sottoinsieme più piccolo (e più specifico); i tipi di dato che non derivano da altri sono detti **primitivi**. Inoltre, mentre alcuni tipi di dato (come `xsd:decimal`) hanno una cardinalità infinita numerabile, altri (come `xsd:unsignedLong`) hanno un numero finito di valori ammissibili.

Se ad un letterale non è associato un tipo di dato, si assume che sia di tipo `xsd:string`; l'unica eccezione sono i letterali che presentano un language tag, a cui viene implicitamente assegnato il tipo `rdf:langString`. Sebbene RDF ammetta la possibilità di definire dei tipi di dato custom, non fornisce un meccanismo standard per riportare esplicitamente che tale tipo di dato derivi da un altro, o per definire un dominio di valori ammissibili.

Vi sono situazioni in cui è preferibile che una certa risorsa non venga identificata per mezzo di un IRI, ad esempio perché un'informazione è mancante oppure perché non è rilevante. RDF gestisce tali casistiche per mezzo dei **blank nodes**, che per convenzione hanno come prefisso il carattere "_". Se una risorsa è identificata da un blank node, significa che tale risorsa esiste, ma non si ha modo o interesse di assegnarle un nome. I blank node operano come variabili esistenziali locali al loro dataset; due blank node di due dataset distinti si riferiscono a due risorse distinte.

2.4.1 Triple

I dati in formato RDF non possono riportare risorse singole, ma solo ed esclusivamente **triple**. Una tripla RDF è nella forma soggetto-predicato-oggetto⁴, dove tutti e tre gli elementi sono termini RDF. Nello specifico, il soggetto deve essere un IRI o un blank node, il predicato deve essere un IRI e l'oggetto può essere di qualsiasi tipo di termine.

ex:Boston
ex:hasPopulation
"646000"^^xsd:integer

ex:VoynichManuscript
ex:hasAuthor
_:b

Queste restrizioni sono in linea con lo scopo che RDF si prefissa. Ai predicati deve necessariamente venire fornito un nome, dato che l'informazione "un soggetto ed un oggetto sono legati da un predicato ignoto" non è particolarmente rilevante. Inoltre, tale nome deve essere unico, perché i predicati devono poter essere univocamente identificati in qualsiasi dataset. Infine, per RDF, i letterali sono risorse di minore importanza rispetto agli IRI, pertanto sarebbe poco sensato averli come soggetto di una tripla.

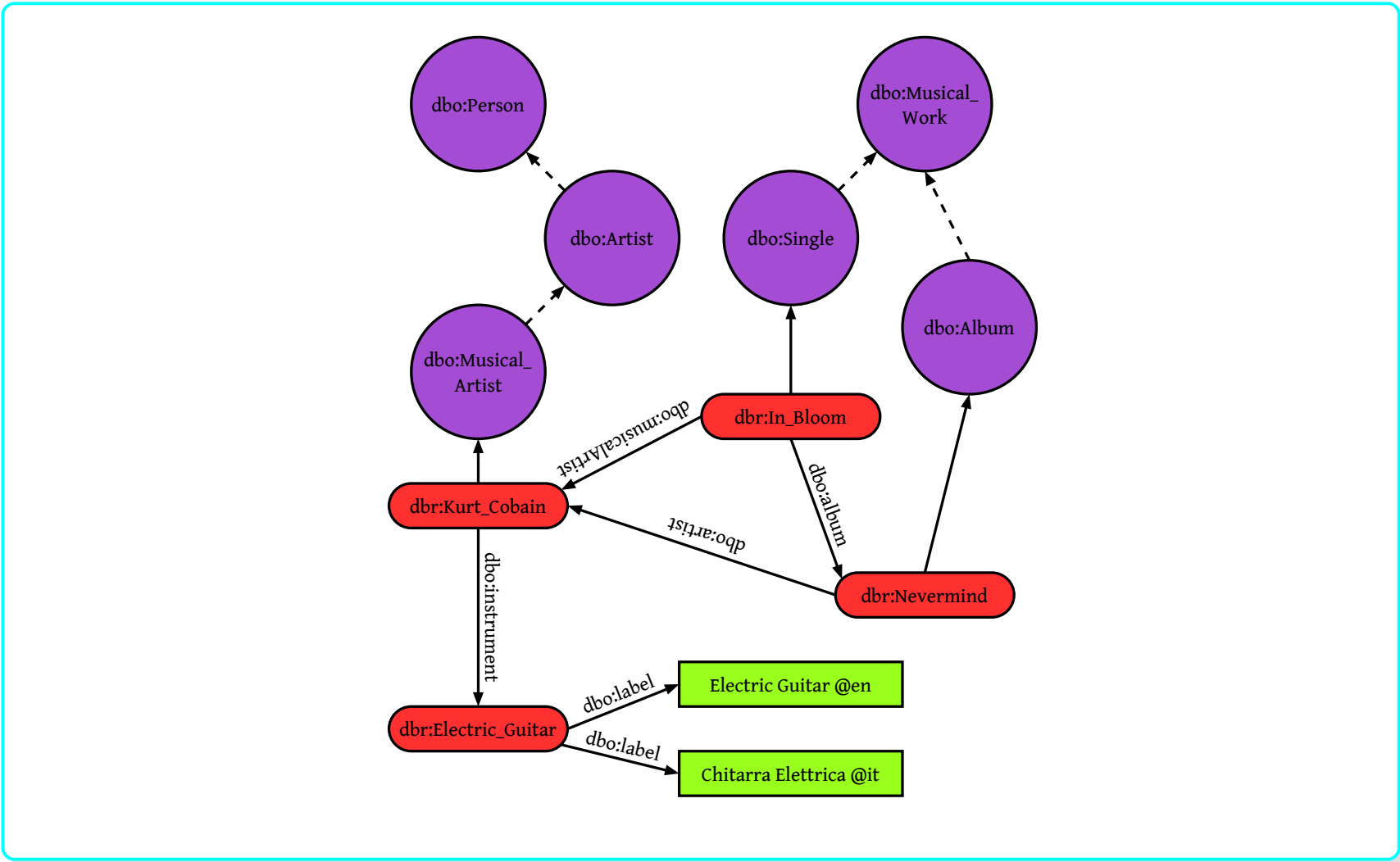
Sebbene le triple RDF non abbiano di per loro una semantica, le restrizioni sui tipi di termini che possono comparire in ciascuna tripla porta portano a due tipi di interpretazioni. Se il primo elemento è un IRI o un blank node ed terzo elemento è un letterale, la tripla è da interpretarsi come una descrizione: la tripla (A, B, C) è da intendersi come "All'entità A è associata la proprietà C ". Se il primo elemento è un IRI o un blank node ed terzo elemento è un IRI, la tripla è da interpretarsi come una relazione: la tripla (A, B, C) è da intendersi come "L'entità A è legata per mezzo di B all'entità C "⁵.

Un insieme di triple RDF costituisce un **grafo RDF**. Il nome grafo deriva dall'osservazione che ciascuna tripla RDF può essere rappresentata in maniera equivalente come una coppia di nodi di un grafo uniti da un arco: l'etichetta di tale arco è il predicato della tripla, il soggetto è il nodo di partenza dell'arco e l'oggetto è il nodo di arrivo. Più triple RDF danno allora vita ad un grafo diretto ed etichettato. Tale grafo è un esempio di knowledge graph.

Il fatto che RDF sia un modello di dati strutturato a grafo lo rende molto flessibile. Infatti, per introdurre nuovi predicati in un grafo RDF è sufficiente aggiungere un arco che ha tale predicato come etichetta, così come per introdurre nuovi soggetti o oggetti è sufficiente aggiungere dei nodi. Similmente, due grafi diversi (che corrispondono a due dataset diversi) possono essere unificati in maniera diretta mediante l'operazione di unione sui due insiemi di triple; l'unica eccezione sono i grafi che contengono dei blank node, perché il loro significato dipende dal grafo in cui si trovano, ed è quindi necessario prendere misure aggiuntive.

4. La struttura segue quella delle lingue anglosassoni.

5. Sebbene, per convenzione, il soggetto di una tripla sia la "risorsa primaria" che viene descritta dalla tripla stessa, la distinzione è del tutto arbitraria, in quanto è possibile invertire l'ordine del soggetto e dell'oggetto di una tripla per ottenerne una che descrive la stessa cosa.



2.5 Sintassi: N-triples e Turtle

Le uniche forme di sintassi specificate da RDF sono il vincolo di tripla ed i tipi di termine che possono comparire nelle tre posizioni delle triple. A parte queste restrizioni, RDF non fornisce alcun formalismo su come, ad esempio, riportare gli IRI ed i letterali. A tal scopo, sono stati definiti diversi formalismi per le triple RDF.

Una rappresentazione testuale estremamente semplice é **N-triples**; questa prevede di riportare per intero ciascun elemento di ogni tripla, una tripla per riga, terminandole con un punto. Le tre componenti di ciascuna tripla ed il punto alla fine della tripla sono separate da uno o più caratteri di spaziatura (spazi, tab, a capo, ecc ...). Se un elemento é un IRI, viene riportato fra parentesi angolate, mentre se é un letterale viene riportato fra doppi apici. I blank node, i language tag ed i datatype IRI vengono riportati come di consueto. Una riga che inizia con il carattere "#" viene interpretata come un commento.

Le tre triple riportate di seguito sono sintatticamente valide per N-triples.

<http://www.example.org/alice>	<http://schema.org/knows>	<http://www.example.org/bob>	.
_:dave	<http://xmlns.com/foaf/0.1/name>	"Dave Beckett"^^xsd:string	.
<http://www.w3.org/2001/sw/RDFCore/ntriples/>	<http://purl.org/dc/terms/title>	"N-Triples"@en-US	.

N-triples é tanto intuitivo quanto poco leggibile, perché gli IRI sono sempre riportati per intero, e gli IRI tendono ad essere molto lunghi. Una rappresentazione testuale leggermente più complessa é **Turtle**, che eredita la sintassi di N-triples estendendola ed aggiungendovi delle abbreviazioni per migliorarne la leggibilità.

Ai prefissi può essere associata una parola chiave mediante la direttiva @prefix: . Se due triple consecutive hanno in comune il soggetto, é possibile terminare la prima con un punto e virgola e non riportare il soggetto nella seconda. Se due triple consecutive hanno in comune sia il soggetto che il predicato, é possibile terminare la prima con una virgola e non riportare soggetto e predicato nella seconda.

Turtle permette di definire triple RDF molto più facilmente rispetto a N-triples.

```
@prefix dbr: <http://dbpedia.org/resource/> .
@prefix dbo: <http://dbpedia.org/ontology/> .

dbr:Kurt_Cobain    dbo:instrument    dbr:Electric_guitar .
dbr:In_Bloom      dbo:musicalArtist  dbr:Kurt_Cobain    ;
dbr:Nevermind     dbo:album          dbr:Nevermind      .
dbr:Nevermind     dbo:artist         dbr:Kurt_Cobain    .
```

2.6 SPARQL Protocol And RDF Query Language

Avendo a disposizione un grafo RDF, ci si chiede come sia possibile formulare domande sullo stesso, ad esempio determinare se esiste una tripla in cui figura un certo IRI. Dato che porre questo tipo di domande in linguaggio naturale è di difficile interpretazione per una macchina, queste vanno riformulate in un **linguaggio di query**. In particolare, un linguaggio di query appositamente pensato per estrarre informazioni da grafi RDF è **SPARQL (SPARQL Protocol And RDF Query Language)** ⁶.

La nozione più importante nel linguaggio SPARQL è il **pattern di tripla RDF**. Questa è di fatto analoga ad una tripla RDF, ma oltre ad ammettere IRI, letterali e nodi blank può contenere anche **variabili di query**, che ha il carattere "?" come prefisso. Tale pattern viene riportato nel quarto campo di una query SPARQL dopo la direttiva **WHERE**.

Un pattern di tripla viene valutato mappando le variabili/costanti del pattern alle costanti del grafo, di modo che l'immagine del pattern rispetto alla mappa (dove le variabili del pattern sono sostituite con le rispettive costanti del grafo) sia un sottografo del grafo. Nello specifico, gli IRI ed i letterali hanno un match solamente con, rispettivamente, un IRI ed un letterale a loro identico, mentre i blank node e le variabili di query hanno un match con qualsiasi termine. La differenza fra i due sta nel fatto che i termini che hanno un match con una variabile di query possono venire restituiti come parte della soluzione, mentre quelli che hanno un match con un blank node non possono.

Sia Con un insieme infinito numerabile di costanti, e sia invece Var un insieme infinito numerabile di variabili: i due insiemi sono disgiunti. L'insieme dei termini $Term$ è formulato come $Term = Con \cup Var$. Un grafo diretto ed etichettato è definito come una tupla $G = (V, E, L)$, dove $V \subseteq Con$ è un insieme di nodi, $L \subseteq Con$ è un insieme di etichette e $E \subseteq V \times L \times V$ è un insieme di archi.

Un pattern di tripla è formalmente definito come una tupla $Q = (V, E, L)$, dove $V \subseteq Term$ è un insieme di termini assegnabili ai nodi (IRI e blank nodes), $L \subseteq Term$ è un insieme di termini assegnabili agli archi (IRI) e $E \subseteq V \times L \times V$ è un insieme di archi (triple pattern).

Sia $\mu : Var \mapsto Con$ una mappa, il cui dominio è indicato con $Dom(\mu)$. Dato un pattern di tripla Q , sia $Var(Q)$ l'insieme di tutte le variabili che compaiono in Q . Sia poi $\mu(Q)$ l'immagine di Q rispetto ad μ , ovvero il sottografo indotto da Q dove tutte le variabili $v \in Var(Q) \cap Dom(\mu)$ vengono sostituite con $\mu(v)$.

Dati due grafi diretti ed etichettati $G_1 = (V_1, E_1, L_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2, L_2)$, si dice che G_1 è sottografo di G_2 se $V_1 \subseteq V_2, E_1 \subseteq E_2, L_1 \subseteq L_2$.

Formalmente, sia Q un pattern di tripla e sia G un grafo diretto ed etichettato. La valutazione del pattern Q sul grafo G , indicato con $Q(G)$, viene definito dall'insieme $Q(G) = \{\mu \mid \mu(Q) \subseteq G \wedge Dom(\mu) = Var(Q)\}$.

Un pattern di tripla restituisce una tabella. Per questo motivo, un pattern di tripla può venire poi esteso con gli operatori propri dell'algebra relazionale per creare **pattern complessi**. Gli operatori elementari dell'algebra relazionale sono i seguenti:

- π , che restituisce la tabella con una o più colonne rimosse;
- σ , che restituisce solo le righe della tabella che rispettano una determinata condizione;
- ρ , che restituisce la tabella con una o più colonne cambiate di nome;
- \cup , che unisce le righe di due tabelle in un'unica tabella;
- $-$, che rimuove le righe della prima tabella che compaiono nella seconda;
- \bowtie , che estendono le righe della prima tabella con le righe della seconda tabella che rispettano una determinata condizione;

I pattern complessi sono definiti in maniera ricorsiva come segue:

- Se Q è un pattern semplice, allora Q è un pattern complesso;
- Se Q è un pattern complesso e $V \subseteq Var(Q)$, allora $\pi_V(Q)$ è un pattern complesso;
- Se Q è un pattern complesso e R è una condizione di selezione espressa per mezzo di operatori booleani ($\wedge, \vee, \neg, =$), allora $\sigma_R(Q)$ è un pattern complesso;
- Se Q_1 e Q_2 sono due pattern complessi, allora $Q_1 \bowtie Q_2$, $Q_1 \cup Q_2$ e $Q_1 - Q_2$ sono pattern complessi.

Data una mappa μ , per un insieme di variabili $V \subseteq Var$ sia $\mu[V]$ la proiezione delle variabili V da μ , ovvero la mappatura μ' tale per cui $Dom(\mu') = Dom(\mu) \cap V$ e $\mu'(v) = \mu(v)$ per ogni $v \in Dom(\mu')$. Data la condizione di selezione R ed una mappa μ , si indica con $\mu \models R$ che la mappa μ soddisfa R . Infine, due mappe μ_1 e μ_2 vengono dette *compatibili* se $\mu_1(v) = \mu_2(v)$ per ogni $v \in Dom(\mu_1) \cap Dom(\mu_2)$, ovvero se mappano le variabili che hanno in comune alle medesime costanti. Due mappe compatibili μ_1 e μ_2 si indicano con $\mu_1 \sim \mu_2$.

Le operazioni sui pattern semplici, che restituiscono pattern complessi, si indicano allora come segue:

6. Sia il nome che la struttura delle query di SPARQL hanno molto in comune con **SQL**, che è invece un linguaggio di query per database relazionali.

- $\pi_V(Q)(G) = \{\mu \mid \mu \in Q(G)\}$
- $\sigma_R(Q)(G) = \{\mu \mid \mu \in Q(G) \wedge \mu \vdash R\}$
- $Q_1 \bowtie Q_2(G) = \{\mu_1 \cup \mu_2 \mid \mu_1 \in Q_2(G) \wedge \mu_2 \in Q_1(G) \wedge \mu_1 \sim \mu_2\}$
- $Q_1 \cup Q_2(G) = \{\mu \mid \mu \in Q_1(G) \vee \mu \in Q_2(G)\}$
- $Q_1 - Q_2(G) = \{\mu \mid \mu \in Q_1(G) \wedge \mu \notin Q_2(G)\}$

Una funzionalità che distingue i linguaggi di query é la possibilità di includere le **path expression** nelle query. Una path expression é una espressione regolare che permette di avere un match su percorsi di lunghezza variabile fra due nodi mediante una **path query** (x, r, y) , dove x e y possono essere sia variabili che costanti. Le path expression *semplici* sono quelle dove r é una costante, ovvero l'etichetta di un arco; si noti come le path expression siano sempre invertibili. É poi possibile costruire path expression *complesse* mediante i noti operatori delle espressioni regolari oppure mediante inversione:

- Se r é una path expression (l'etichetta di un arco), allora r^* é una path expression (un certo numero di archi etichettati r o anche nessuno);
- Se r é una path expression, allora r^- é una path expression (l'etichetta r letta a rovescio);
- Se r_1 e r_2 sono due path expression, allora $r_1 \mid r_2$ é una path expression (é presente l'etichetta r_1 di un arco oppure é presente l'etichetta r_2 di un arco);
- Se r_1 e r_2 sono due path expression, allora $r_1 \cdot r_2$ é una path expression (é presente l'etichetta r_1 di un arco seguita dall'etichetta r_2 di un arco).

Dato un grafo diretto ed etichettato $G = (V, E, L)$ ed una path expression r , si definisce l'applicazione di r su G , ovvero $r[G]$, come segue:

- $r[G] = \{(u, v) \mid (u, r, v) \in E\} (r \in Con)$
- $r^-[G] = \{(u, v) \mid (v, u) \in r[G]\}$
- $r_1 \mid r_2[G] = r_1[G] \cup r_2[G]$
- $r_1 \cdot r_2[G] = \{(u, v) \mid \exists w \in V : (u, w) \in r_1[G] \wedge (w, v) \in r_2[G]\}$
- $r^*[G] = \{(u, u) \mid u \in V\} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} r^n[G]$

Dato un grafo diretto ed etichettato G , delle costanti $c_i \in Con$ e delle variabili $z_i \in Var$, una **path query** semplice é una tripla (x, y, z) dove $x, y \in Con \cup Var$ e r é una path expression. La valutazione di una path query é definita come segue:

- $(c_1, r, c_2)(G) = \{\mu_\emptyset \mid (c_1, c_2) \in r[G]\}$
- $(c, r, z)(G) = \{\mu \mid \text{Dom}(\mu) = \{z\} \wedge (c, \mu(z)) \in r[G]\}$
- $(z, r, c)(G) = \{\mu \mid \text{Dom}(\mu) = \{z\} \wedge (\mu(z), c) \in r[G]\}$
- $(z_1, r, z_2)(G) = \{\mu \mid \text{Dom}(\mu) = \{z_1, z_2\} \wedge (\mu(z_1), \mu(z_2)) \in r[G]\}$

Dove μ_\emptyset indica la mappatura vuota, ovvero $\text{Dom}(\mu_\emptyset) = \emptyset$.

Path query semplici possono essere usate come pattern di tripla per ottenere **graph pattern di navigazione**. Se Q é un pattern di tripla, allora é anche un graph pattern di navigazione. Se Q é un graph pattern di navigazione e (x, r, y) é una path query, allora $Q \bowtie (x, r, y)$ é un graph pattern di navigazione.

Una query SPARQL é costituita dalle seguenti sei componenti, non tutte strettamente obbligatorie:

1. *Dichiarazione dei prefissi*. Similmente a Turtle, é possibile dichiarare dei prefissi mediante la direttiva `PREFIX`, seguita dal nome scelto per il prefisso e dall'URI a cui il prefisso é associato;
2. *Tipo di query*. SPARQL supporta quattro tipi di query:
 - `SELECT`, che restituisce il risultato della query sotto forma di tabella. Questa supporta l'eliminazione delle soluzioni duplicate per mezzo delle direttive `REDUCED` (possono essere rimosse) e `DISTINCT` (devono essere rimosse). É possibile restituire l'intera tabella con tutte le colonne con "*" oppure specificando solo parte delle colonne mediante proiezione;
 - `ASK`, che restituisce true se la query ha un risultato non nullo e false altrimenti;
 - `CONSTRUCT`, che restituisce il risultato della query sotto forma di (sotto) grafo;
 - `DESCRIBE`, che restituisce il risultato della query sotto forma di grafo che descrive termini e soluzioni.
3. *Costruzione del dataset*. mediante la direttiva `FROM` é possibile specificare su quale/i grafo/i si vuole operare la query. Se vengono specificati più grafi, la query verrà operata sulla loro unione;
4. *Pattern*. La direttiva `WHERE` specifica il pattern che discrimina un elemento del grafo che é parte della soluzione da uno che non lo é. Le condizioni sono riportate in un blocco di parentesi graffe seguendo la sintassi Turtle;
5. *Aggregazione*. Le direttive `GROUP BY` e `HAVING`, analoghe alle direttive omonime di SQL permettono di raggruppare o di filtrare gli elementi della soluzione secondo specifiche regole. I valori possono venire aggregati sulla base di diverse direttive quali `COUNT`, `SUM`, `MIN`, `MAX`, `AVG`;
6. *Modificatori della soluzione*. Alcune direttive permettono di modificare gli elementi della soluzione disponendoli secondo un certo ordine (`ORDER BY`) oppure restituendone solo una parte.


```

PREFIX dbpedia: <http://dbpedia.org/resource/>
PREFIX foaf: <http://xmlns.com/foaf/0.1/>
PREFIX dc: <http://purl.org/dc/elements/1.1/>
PREFIX mo: <http://purl.org/ontology/mo/>

SELECT ?album_name ?track_title
WHERE
  dbpedia:The_Beatles foaf:made ?album .
  ?album              dc:title  ?album_name ;
  ?album              mo:track  ?track .
  ?track              dc:title  ?track_title .

```

I modificatori di soluzione sono diversi, fra cui figurano:

- **OPTIONAL** quando una parte del grafo non é obbligatoria;
- **UNION** quando si vuole ricavare l'unione di due o piú sottografi risultanti;
- **MINUS** quando si vuole eliminare i risultati che hanno una corrispondenza con un pattern;
- **VALUES** quando parte del match é predefinito;
- **BIND** quando parte del match é precalcolato;
- **FILTER** quando occorre rimuovere i risultati che rispecchiano un certo pattern espresso sottoforma di espressione booleana;

Le espressioni booleane ammesse in SPARQL possono contenere i seguenti elementi:

- Variabili e costanti;
- Operatori di uguaglianza e disuguaglianza: = , <= , >= , != ;
- Connettori: && , || , (,) , ! ;
- Espressioni regolari: `regex(?x, "A.*")`;
- Test sulla natura delle variabili: `isURI(?x)` , `isBlank(?x)` , `isLiteral(?x)` , `bound(?x)` .
- Inclusione di una stringa
`CONTAINS(literal1, literal2)` , `STRSTARTS(literal1, literal2)` , `STRENDS(literal1, literal2)`
- Crea un letterale con un tipo di dato associato
`STRDT(value, type)`
- Crea un letterale con un language tag associato
`STRLANG(value, lang)`
- Concatena piú stringhe
`CONCAT(literal1, literal2, ..., literalN)`
- Estrai una sottostringa
`SUBSTR(literal, start [, length])`

2.7 RDFS

Come già detto, il terzo membro di una tripla RDF può essere un IRI o un letterale. Nel primo caso, é possibile vedere tale tripla come la descrizione di una relazione fra l'entità primo membro della tripla e l'entità terzo membro della tripla, mentre nel secondo caso la tripla riporta che il primo membro della tripla ha come attributo il terzo membro. Si noti però come RDF non fornisca esplicitamente un'interpretazione di questo tipo, ma é piú una assunzione implicita.

La semantica definita da RDF si limita soltanto al vincolo di tripla (tutte le risorse devono essere nella forma soggetto-predicato-oggetto) ed il tipo di ciascun termine (il predicato non può essere un blank node, il soggetto non può essere un letterale, ecc ...). Al di lá di questo, RDF non permette la costruzione di una vera e propria **ontologia**.

L'ontologia é una branca della filosofia che si occupa di comprendere la natura delle cose e come categorizzarle. Nel contesto dell'informatica, con ontologia si intende una rappresentazione formale della conoscenza rispetto ad un determinato dominio; si occupa quindi di determinare quali sono le entità che appartengono a tale dominio, come possono essere categorizzate, quali sono le loro proprietà, quali di queste proprietà sono rilevanti e quali no, ecc ...

L'obiettivo di una ontologia informatica non é quello di trovare la modellazione "corretta" (qualunque cosa questo significhi) per un determinato dominio, quanto piú trovare una rappresentazione che sia funzionale per tutte le parti interessate. Nel contesto di un sistema distribuito, costruire ontologie dettagliate le cui definizioni sono state prese di comune accordo da tutti i nodi fornisce loro una concettualizzazione comune, sulla base della quale potersi scambiare informazioni.

Resource Description Framework Schema (RDFS) é un semplice linguaggio che permette di associare uno schema ad un insieme di dati scritti in formato RDF. Questo permette di descrivere le risorse RDF in termini di classi e di proprietà. Queste hanno `rdfs:` come prefisso.

RDFS si compone di due elementi concettuali ad alto livello: le **proprietá** e le **classi**. Le proprietá sono le relazioni che sussistono fra coppie di risorse: sono i termini in genere presenti come predicati nelle triple. Le classi sono gruppi di risorse che hanno caratteristiche in comune. Una risorsa può essere membro di piú classi. Un membro di una classe é detto **istanza** di tale classe. La classe di una risorsa viene anche chiamata il suo **tipo**. Per convenzione, le classi hanno un nome con la prima lettera maiuscola, mentre le proprietá hanno un nome con la prima lettera minuscola.

RDFS permette inoltre di fare **inferenze** a partire dalle informazioni a disposizione. Nello specifico, a partire da una certa semantica, é possibile definire una nozione di **entailment** tra due grafi RDF di modo che se il primo grafo contiene triple vere, allora anche il secondo conterrá triple vere (rispetto alla medesima semantica). In questo caso, il secondo grafo non aggiunge alcuna informazione che non sia già presente, eventualmente implicitamente, nel primo grafo. RDFS mette a disposizione 13 regole di inferenza:

Regola	Se vale allora si deduce
Regola 1	xxx aaa yyy .	aaa rdf:type rdfs:Property .
Regola 2	aaa rdfs:domain xxx . yyy aaa zzz .	yyy rdf:type xxx .
Regola 3	aaa rdfs:range xxx . yyy aaa zzz .	zzz rdf:type xxx .
Regola 4a	xxx aaa yyy .	xxx rdf:type rdfs:Resource .
Regola 4b	xxx aaa yyy .	yyy rdf:type rdfs:Resource .
Regola 5	xxx rdfs:subPropertyOf yyy . yyy rdfs:subPropertyOf zzz .	xxx rdfs:subPropertyOf zzz .
Regola 6	xxx rdf:type rdf:Property .	xxx rdfs:subPropertyOf xxx .
Regola 7	aaa rdfs:subPropertyOf bbb . xxx aaa yyy .	xxx bbb yyy .
Regola 8	xxx rdf:type rdfs:Class .	xxx rdfs:subClassOf rdfs:Resource .
Regola 9	xxx rdfs:subClassOf yyy . zzz rdf:type xxx .	zzz rdf:type yyy .
Regola 10	xxx rdf:type rdfs:Class .	xxx rdfs:subClassOf xxx .
Regola 11	xxx rdfs:subClassOf yyy . yyy rdfs:subClassOf zzz .	xxx rdfs:subClassOf zzz .
Regola 12	xxx rdf:type rdfs:ContainerMembershipProperty .	xxx rdfs:subPropertyOf rdfs:member .
Regola 13	xxx rdf:type rdfs:DataType .	xxx rdfs:subClassOf rdfs:Literal .

La proprietá `rdf:type` permette di istanziare una classe. La tripla `A rdf:type B` indica che l'entitá `A` é una istanza della classe `B`. Spesso `rdf:type` viene abbreviato con `a`. Diverse entitá in RDFS sono istanze di metaclassi predefinite:

- Ogni risorsa (classi, entitá, proprietá, letterali, ecc ...) é implicitamente istanza della metaclassa `rdfs:Resource` ;
- Tutte le proprietá sono istanza di `rdf:Property` ;
- Le classi sono istanza di `rdfs:Class` ;
- I letterali sono istanza di `rdfs:Literal` ;
- I tipi di dato (`xsd:string` , `xsd:integer` , ecc ...) sono istanza di `rdfs:Datatype` .

ex:LemonCheesecake	ex:contains	ex:Lemon
ex:LemonCheesecake	ex:contains	ex:Cheese
ex:LemonCheesecake	rdf:type	ex:DessertRecipe
ex:Lemon	rdf:type	ex:Ingredient
ex:Lemon	rdf:type	ex:Fruit
ex:Cheese	rdf:type	ex:Ingredient
ex:Cheese	rdf:type	ex:Dairy

`rdfs:subClassOf` mette due classi nella relazione di sottoclasse. La tripla `C rdfs:subClassOf D` indica che la classe `C` é una sottoclasse della classe `D` , ovvero che tutte le istanze di `C` sono automaticamente anche istanze di `D` . Questa relazione é sia riflessiva (ogni classe é sottoclasse di sé stessa) che transitiva (se `C` é sottoclasse di `D` e `D` é sottoclasse di `E` , allora `C` é sottoclasse di `E`).

Si consideri il seguente insieme di triple:

ex:DessertRecipe	rdfs:subClassOf	ex:Recipe
ex:VeganRecipe	rdfs:subClassOf	ex:VegetarianRecipe
ex:VegetarianRecipe	rdfs:subClassOf	ex:Recipe
ex:LemonPie	rdfs:subClassOf	ex:DessertRecipe
ex:LemonPie	rdfs:subClassOf	ex:VeganRecipe

Per simmetrit  , sono automaticamente vere anche le seguenti triple:

ex:DessertRecipe	rdfs:subClassOf	ex:Recipe
ex:Recipe	rdfs:subClassOf	ex:Recipe
ex:VeganRecipe	rdfs:subClassOf	ex:VeganRecipe
ex:VegetarianRecipe	rdfs:subClassOf	ex:VegetarianRecipe
ex:LemonPie	rdfs:subClassOf	ex:LemonPie

Inoltre, per transitivit  , vale:

ex:VeganRecipe	rdfs:subClassOf	ex:Recipe
ex:LemonPie	rdfs:subClassOf	ex:VegetarianRecipe
ex:LemonPie	rdfs:subClassOf	ex:Recipe

rdfs:subPropertyOf mette due propriet   nella relazione di sottopropriet  . La tripla C rdfs:subPropertyOf D indica che la propriet   P    una sottopropriet   della propriet   Q , ovvero che tutte le coppie di entit   legate da P sono automaticamente legate anche da Q . Cos   come la relazione di sottoclasse, la relazione di sottopropriet      sia riflessiva che transitiva.

A partire dalle triple:

ex:hasTopping	rdfs:subPropertyOf	ex:hasIngredient
ex:hasIngredient	rdfs:subPropertyOf	ex:contains

   possibile inferire:

ex:hasTopping	rdfs:subPropertyOf	ex:hasTopping
ex:hasIngredient	rdfs:subPropertyOf	ex:hasIngredient
ex:contains	rdfs:subPropertyOf	ex:contains
ex:hasTopping	rdfs:subPropertyOf	ex:contains

rdfs:domain mette in relazione una propriet   P ed una classe C . La tripla P rdfs:domain C indica che se due elementi x e y sono messi in relazione dalla propriet   P , allora x    una istanza di C .

A partire dalle triple:

ex:hasIngredient	rdfs:domain	ex:Recipe
ex:LemonPie	ex:hasIngredient	ex:Lemon

   possibile inferire:

ex:LemonPie	rdf:type	ex:Recipe
-------------	----------	-----------

rdfs:range mette in relazione una propriet   P ed una classe C . La tripla P rdfs:range C indica che se due elementi x e y sono messi in relazione dalla propriet   P , allora y    una istanza di C .

A partire dalle triple:

ex:hasIngredient rdfs:range ex:Ingredient
ex:LemonPie ex:hasIngredient ex:Lemon

É possibile inferire:

ex:Lemon rdf:type ex:Ingredient

Le classi e le proprietà forniscono un **vocabolario**, ovvero un insieme di termini RDF per descrizioni generali. Una singola proprietà o una classe può essere usata per descrivere un numero arbitrario di istanze. É facile riutilizzare uno stesso vocabolario in diversi grafi RDF. RDFS permette di fare query SPARQL su grafi RDF ed ottenere informazioni che non sono esplicitamente contenute nel grafo, applicando le regole di inferenza.

Si consideri il seguente grafo RDF (espresso in notazione Turtle):

```
@prefix dbr: https://dbpedia.org/resource/
@prefix dbo: https://dbpedia.org/ontology/
@prefix rdfs: https://www.w3.org/2000/01/rdfs-schema#

dbo:Singer
dbr:Come_As_You_Are_(Nirvana_Song)
dbr:Come_As_You_Are_(Nirvana_Song)
dbr:Come_As_You_Are_(Nirvana_Song)
rdfs:subClassOf
dbo:Singer
dbo:MusicalArtist
dbo:MusicalArtist
dbo:MusicalArtist
dbo:MusicalArtist
dbo:MusicalArtist
dbr:Kurt_Cobain
dbr:Dave_Grohl
dbr:Krist_Novoselic
.
```

É possibile derivare che le entità `dbr:Kurt_Cobain` e `dbr:Come_As_You_Are_(Nirvana_Song)` sono legate da `dbo:MusicalArtist` applicando le regole di entailment RDFS. Questo perché le due entità sono legate da `dbo:Singer` e tale classe é una sottoclasse di `dbo:MusicalArtist`. Infatti, tale tripla é presente nel risultato dalla seguente query SPARQL nonostante nel grafo non sia riportata esplicitamente:

```
SELECT ?name
WHERE {
  dbr:Come_As_You_Are_(Nirvana_Song)  dbo:MusicalArtist  ?name  .
}
```

?name
dbr:Kurt_Cobain
dbr:Dave_Grohl
dbr:Krist_Novoselic

Esistono due approcci in merito al combinare le inferenze e le query. Il primo prevede di applicare le regole di inferenza su tutte le triple del grafo prima che questo venga pubblicato e salvare tutte le triple inferite all'interno dello stesso. In questo modo, quando viene effettuata una query, tutte le triple sono già presenti nel grafo ed é sufficiente restituirle. Questo comporta però che ogni volta che il grafo viene modificato, ad esempio perché viene introdotta o rimossa una tripla, occorre riapplicare le regole di inferenza per aggiornarlo. Il secondo approccio prevede di applicare le regole di inferenza quando viene effettuata una query che le richiede. In questo modo non é necessario aggiornare il grafo ogni volta che questo viene modificato, ma d'altra parte ogni query sarà più lenta perché é necessario spendere ulteriore tempo per il calcolo delle inferenze.

2.8 OWL

Le ontologie che RDFS permette di costruire non sono particolarmente espressive. Ad esempio, RDFS presenta le seguenti limitazioni:

- Non é possibile modellare le **classi disgiunte**, ovvero non é possibile definire delle classi a cui sia impedito avere istanze in comune;
- Non é possibile specificare che una proprietà sia transitiva, inversa e/o simmetrica;
- Non é possibile specificare un vincolo di **cardinalità**, ad esempio che l'istanza di una classe possa essere in relazione con al massimo *n* istanze di un'altra classe;
- Non é possibile costruire classi applicando gli operatori dell'insiemistica (unione, intersezione, complemento) sulle classi esistenti;
- Non é possibile definire un range/dominio che vari in base a quale entità si riferisce.

Si consideri il grafo RDF presentato di seguito, che contiene informazioni relative a città, regioni e paesi:

```
@prefix rdf: https://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#
@prefix rdfs: https://www.w3.org/2000/01/rdfs-schema#
@prefix dbr: https://dbpedia.org/resource/
@prefix dbo: https://dbpedia.org/ontology/

capitalOf      rdfs:domain  dbo:Capital .
capitalOf      rdfs:range   dbo:Country .
cityOf         rdfs:range   dbo:Country .
cityOf         rdfs:range   dbo:Region .

dbr:Milan      cityOf      dbr:Lombardy .
dbr:Milan      cityOf      dbr:Italy .
dbr:Rome       capitalOf   dbr:Italy .
dbr:Italy      rdf:type     dbo:Country .
dbr:Lombardy   rdf:type     dbo:Region .
```

Nonostante le triple siano tutte logicamente valide, é comunque possibile applicare le regole di inferenza di RDFS per derivare delle triple che non lo sono.

Ad esempio, `dbr:Milan` é legato sia a `dbr:Italy` che a `dbr:Lombardy` per mezzo del predicato `cityOf`. Tuttavia, l'esistenza della tripla `cityOf rdfs:range dbo:Country` . permette di applicare la regola di inferenza 3, a partire dalla quale si deriva che `dbr:Lombardy` é una istanza della classe `dbo:Country` .

Per sopperirvi é necessario utilizzare un linguaggio piú ricco. A tal scopo é stato definito **Ontology Web Language (OWL)**, che opera come RDFS su triple conformi allo standard RDF ma permettendo una modellazione piú fine.

A differenza di RDFS, che si compone di "sole" 13 regole di inferenza, OWL si prefigge di modellare una ontologia molto complessa, ed un insieme di regole di inferenza dedicate non sarebbe sufficiente. Per questo motivo, OWL utilizza un linguaggio logico vero e proprio, ispirato ad una famiglia di linguaggi chiamati **Description Logic (DL)**. Tali linguaggi non sono altro che restrizioni della logica del primo ordine. Nel caso specifico di OWL2, la versione attuale⁷, la DL di riferimento é chiamata **SROIQ**; sebbene SROIQ e OWL siano intimamente collegati, i due hanno terminologie distinte, ma mappabili uno-ad-uno.

A partire dalla specifica completa di OWL sono stati definiti tre **profili**. Questi sono dei "dialetti" di OWL 2, ovvero delle restrizioni al linguaggio pensati per distinti casi d'uso. Ogni profilo ha una propria ricchezza espressiva ed una propria capacità computazionale. ⁸. I profili sono tre:

- **OWL 2 EL** permette di modellare classificazioni semplici (comunque piú sofisticate di quanto possa fare RDFS), ma viene garantito il calcolo delle inferenze in tempo polinomiale;
- **OWL 2 QL** é costruito di modo che le inferenze siano automaticamente traducibili come query su database relazionali;
- **OWL 2 RL** é pensato per essere implementato in maniera efficiente in sistemi a regole.

Se RDFS metteva a disposizione la relazione di sottoclasse, OWL fornisce il predicato `owl:equivalentClass`, che indica che le due classi che mette in relazione hanno gli stessi membri. Tale predicato é piú ricco di `rdfs:subClassOf`, perché oltre allo specificare che una classe é sottoclasse di un'altra é anche possibile introdurre dei vincoli aggiuntivi. Inoltre, il predicato `owl:disjointWith` indica che due classi non possono avere una istanza in comune.

L'inconsistenza nell'esempio precedente viene risolta introducendo la tripla `dbo:Region owl:disjointWith dbo:Country` . , perché in questo modo si impedisce che `dbr:Lombardy` possa essere istanza di `dbo:Country` .

L'istanza di una classe in OWL prende il nome di **individuo**. Un individuo é legato alla propria classe per mezzo di `rdfs:type`. OWL permette di specificare che due individui sono in realtà lo stesso individuo (nonostante abbiano due IRI distinti) per mezzo del predicato `owl:sameAs`. Inoltre, é possibile specificare che due individui sono distinti per mezzo del predicato `owl:differentFrom`. OWL, infatti, non adotta la politica *UniqueNameAssumption (UNA)*, ovvero l'idea che due entità a cui sono stati assegnati due nomi diversi (due URI diversi, in questo caso) siano necessariamente distinte esse stesse.

7. Per comodità, da ora in poi con "OWL" si intenderá la specifica completa della seconda versione del linguaggio (se non diversamente specificato).
8. In genere, i reasoner commerciali utilizzano una intersezione di questi dialetti di modo da bilanciare efficienza ed espressività.

```
@prefix dbr: https://dbpedia.org/resource/
@prefix msb: https://musicbrainz.org/artist/
@prefix owl: https://www.w3.org/2002/07/owl#
```

```
msb:5b11f4ce-a62d-471e-81fc-a69a8278c7da owl:sameAs dbr:Nirvana_(band) .
dbr:Nirvana owl:differentFrom dbr:Nirvana_(band) .
```

Sebbene le proprietà in RDF(S) siano in genere modellate come attributi di una entità o come relazione fra due entità, non esiste un costrutto che permetta di fare esplicitamente questa distinzione. In OWL si distingue invece fra `owl:ObjectProperty`, ovvero proprietà i cui valori sono risorse, e `owl:DatatypeProperty`, ovvero proprietà i cui valori sono letterali.

Così come per le classi, OWL permette di stabilire che due proprietà (con diverso IRI) si riferiscono alla medesima proprietà per mezzo del predicato `owl:equivalentProperty`, e stabilire che due proprietà sono distinte per mezzo di `owl:propertyDisjointWith`.

OWL permette di assegnare delle caratteristiche alle proprietà che permettono di inferire nuovi fatti sulla base delle stesse:

- Se una proprietà `p` appartiene alla classe `owl:SymmetricProperty`, allora tale proprietà è simmetrica. Ovvero:

Se in un grafo sono presenti le triple `p rdf:type owl:SymmetricProperty`. Allora è possibile inferire `y p x`.

`x p y`.

- Se due proprietà `p` e `q` sono messe in relazione dal predicato `owl:inverseOf`, allora tali proprietà sono l'una l'inversa dell'altra. Ovvero:

Se in un grafo sono presenti le triple `p owl:inverseOf q`. Allora è possibile inferire `y q x`.

`x p y`.

- Se una proprietà `p` appartiene alla classe `owl:TransitiveProperty`, allora tale proprietà è transitiva. Ovvero:

Se in un grafo sono presenti le triple `p rdf:type owl:TransitiveProperty`. Allora è possibile inferire `x p z`.

`x p y`.

`y p z`.

- Se una proprietà `p` appartiene alla classe `owl:FunctionalProperty`, allora tale proprietà è una relazione funzionale, ovvero una relazione il cui argomento è associato ad al più un valore. Ovvero:

Se in un grafo sono presenti le triple `p rdf:type owl:FunctionalProperty`. Allora è possibile inferire `y owl:sameAs z`.

`x p y`.

`x p z`.

- Se una proprietà `p` appartiene alla classe `owl:InverseFunctionalProperty`, allora l'inverso di tale proprietà è una relazione funzionale. Ovvero:

Se in un grafo sono presenti le triple `p rdf:type owl:InverseFunctionalProperty`. Allora è possibile inferire `x owl:sameAs y`.

`x p z`.

`y p z`.

Si consideri il grafo RDF presentato di seguito:

```
@prefix rdf: https://www.w3.org/1999/02/22-rdf-syntax-ns#
@prefix rdfs: https://www.w3.org/2000/01/rdfs-schema#
@prefix dbr: https://dbpedia.org/resource/
@prefix dc: https://purl.org/dc/elements/1.1/
@prefix foaf: https://xmlns.org/foaf/0.1/
```

```
foaf:knows    rdfs:domain    foaf:Person    ;
              rdfs:range    foaf:Person    .
foaf:made     rdfs:domain    foaf:Agent     .
```

```
dbr:Kurt_Cobain    foaf:made    dbr:Heart-Shaped_Box    ;
                  foaf:knows    dbr:Dave_Grohl         .
```

Sia in RDFS che in OWL é possibile inferire:

```
dbr:Kurt_Cobain    a    foaf:Agent    ;
                  a    foaf:Person    .
dbr:Dave_Grohl     a    foaf:Person    .
```

OWL permette però di derivare molte più informazioni. Aggiungendo al grafo le triple:

```
dc:creator    owl:inverseOf    foaf:Made    .
foaf:knows    a                  owl:SymmetricProperty    .
```

É possibile inferire anche:

```
dbr:Heart-Shaped_Box    dc:creator    dbr:Kurt_Cobain    .
dbr:Dave_Grohl          foaf:knows    dbr:Kurt_Cobain    .
```

Per poter costruire classi mediante operatori booleani é necessario che queste siano organizzate in una struttura a **reticolo**, con un top ed un bottom. A tal scopo, ogni entità in OWL (classi, proprietà, letterali, ecc ...) é implicitamente istanza della classe `owl:Thing`, mentre la classe `owl:Nothing` é la classe che non ha istanze. Similmente, ogni proprietà é implicitamente istanza della classe `owl:TopObjectProperty`, mentre nessuna proprietà é istanza della classe `owl:BottomObjectProperty`. Le classi possono avere più superclassi dirette; le proprietà possono avere più superproprietà dirette.

La sintassi di SROIQ é composta da tre elementi: **concetti**, **ruoli** e **asserzioni**. Un concetto SROIQ corrisponde ad una classe OWL, un ruolo SROIQ ad una proprietà OWL ed una asserzione SROIQ ad un individuo. Si distinguono poi le **definizioni** dagli **assiomi**: le definizioni permettono di fare riferimento ad un concetto/ruolo/asserzione o di definirne di nuovi, mentre gli assiomi specificano una proprietà di un certo concetto/ruolo/asserzione.

Le asserzioni che si riferiscono ai concetti e ai ruoli costituiscono la **Terminological Box (T-box)**, mentre le asserzioni che si riferiscono agli assiomi costituiscono la **Assertional Box (A-box)**. La A-box riporta le informazioni relative agli individui OWL; a tutti gli individui é necessario associare un nome univoco (non sono ammessi blank node come in RDF(S)). La T-box definisce la semantica relativa alle classi OWL.

La semantica di una Description Logic, e quindi anche di SROIQ, é definita a partire da una **teoria dei modelli**. Una interpretazione I di una Description Logic é tipicamente definita come una coppia (Δ^I, \cdot^I) , dove Δ^I é il **dominio di interpretazione** e \cdot^I é la **funzione di interpretazione**. Il dominio di interpretazione contiene un insieme di individui. La funzione di interpretazione mappa la definizione di un individuo, di un concetto o di un ruolo e li mappa, rispettivamente, ad un elemento del dominio, ad un sottoinsieme del dominio o ad un insieme di coppie ordinate estratte dal dominio. D'altra parte, gli assiomi sono interpretati come condizioni semantiche. Dalla semantica di una Description Logic discende una "classica" nozione di entailment, ovvero dove per due ontologie O_1 e O_2 vale $O_1 \models O_2$ se e solo se ogni interpretazione che soddisfa O_1 soddisfa anche O_2 .

Vi sono diverse possibili tecniche per costruire inferenze sulla base di una DL. Fra queste, figura la **tecnica a tableau**, una tecnica generale utilizzata in diverse logiche per testare la soddisfacibilità di una o più formule. L'idea alla base della tecnica consiste nell'esplorare lo spazio delle possibilità che possono soddisfare tali formule: le possibilità che conducono ad una contraddizione vengono scartate, e se tutte le possibilità vengono scartate la formula é considerata una contraddizione. Nel caso specifico delle Description Logic, ad esempio, la tecnica a tableau prevede di esplorare tutte le possibilità che possono condurre ad un modello per l'ontologia in esame; questa é allora soddisfacibile se (almeno) un modello esiste ed una contraddizione in caso contrario.

Si noti come non sia sempre possibile *chiudere* un tableau, ovvero esaurire tutte le possibilità ed ottenere una risposta. Questo perché, essendo SROIQ una logica **indecidibile**, possono presentarsi dei cicli infiniti in cui vengono continuamente eseguite le stesse sostituzioni senza poter proseguire oltre. Un ciclo di questo tipo può essere facilmente individuabile da un umano, ma un risolutore automatico fatica a distinguere una computazione molto onerosa (ma che giungerá a termine) da un ciclo infinito.

	Nome	Espr.	Semantica	Equivalente in OWL
Simboli di base	Individuo	a	$a^I \in \Delta^I$	
	Concetto	C	$C^I \subseteq \Delta^I$	Classe
	Ruolo	R	$R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$	Proprietá
Assiomi della Abox	Asserzione di concetto	$C(a)$	$a^I \in C^I$	<code>:a :rdfType :C</code>
	Asserzione di ruolo	$R(a,b)$	$(a^I,b^I) \in R^I$	<code>:a :R :b</code>
Assiomi della Tbox	Inclusione di concetto	$C \sqsubset D$	$C^I \subseteq D^I$	<code>:C :rdfsSubclassOf :D</code>
	Equivalenza di concetto	$C = D$	$C^I = D^I$	<code>:C owl:EquivalentClass :D</code>
Costruttori di ruolo	Inversione di ruolo	R^-	$(R^-)^I = \{(y,x) \mid (x,y) \in R^I\}$	
Costruttori di concetto	Top	\top	Δ^I	<code>owl:Thing</code>
	Bottom	\perp	\emptyset	<code>owl:Nothing</code>
	Negazione	$\neg C$	$\Delta^I - C^I$	<code>[rdf:type owl:Class ; owl:complementOf :C]</code>
	Intersezione	$C \sqcap D$	$C^I \cap D^I$	<code>[rdf:type owl:Class ; owl:intersectionOf (:C :D)]</code>
	Unione	$C \sqcup D$	$C^I \cup D^I$	<code>[rdf:type owl:Class ; owl:unionOf (:C :D)]</code>
	Nominale	$\{a\}$	$\{a^I\}$	<code>[a owl:Class ; owl:oneOf (:a)]</code>
	Restrizione esistenziale	$\exists R.C$	$\{x \in \Delta^I \mid R^I(x) \cap C^I \neq \emptyset\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:onProperty :R ; owl:someValuesFrom :C]</code>
	Restrizione universale	$\forall R.C$	$\{x \in \Delta^I \mid R^I(x) \subseteq C^I\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:onProperty :R ; owl:allValuesFrom :C]</code>
	Restrizione 'al piú'	$\leq n R.C$	$\{x \in \Delta^I \mid R^I(x) \cap C^I \leq n\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:minQualifiedCardinality "n"^^xsd:nonNegativeInteger ; owl:onProperty :R ; owl:onClass :C]</code>
	Restrizione 'almeno'	$\geq n R.C$	$\{x \in \Delta^I \mid R^I(x) \cap C^I \geq n\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:maxQualifiedCardinality "n"^^xsd:nonNegativeInteger ; owl:onProperty :R ; owl:onClass :C]</code>
	Restrizione esatta	$= n R.C$	$\{x \in \Delta^I \mid R^I(x) \cap C^I = n\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:qualifiedCardinality "n"^^xsd:nonNegativeInteger ; owl:onProperty :R ; owl:onClass :C]</code>
	Riflessività locale	$\exists R.\text{Self}$	$\{x \in \Delta^I \mid (x,x) \in R^I\}$	<code>[rdf:type owl:Restriction ; owl:onProperty :R ; owl:hasSelf "true"^^xsd:boolean]</code>

A-box	T-box
<div>GenitoreEquinoMaschio(Zia, Marty) GenitoreEquinoMaschio(Zach, Marty) GenitoreEquinoFemmina(Zia, Lea) GenitoreEquinoFemmina(Zach, Lea) Zebroide(Zach)</div>	<div>GenitoreEquinoMaschio \sqsubseteq Genitore GenitoreEquinoFemmina \sqsubseteq Genitore CavalloMaschio \sqsubseteq EquinoMaschio CavalloFemmina \sqsubseteq EquinoFemmina Equino \equiv EquinoMaschio \sqcup EquinoFemmina EquinoMaschio \sqcap EquinoFemmina $\sqsubseteq \perp$ $\top \sqsubseteq \forall \text{GenitoreEquinoMaschio}^-. \text{Equino}$ $\top \sqsubseteq \forall \text{GenitoreEquinoFemmina}^-. \text{Equino}$ $\top \sqsubseteq \forall \text{GenitoreEquinoMaschio}. \text{CavalloMaschio}$ $\top \sqsubseteq \forall \text{GenitoreEquinoFemmina}. \text{CavalloFemmina}$ Equino \sqsubseteq =2Genitore NonZebraEquino \equiv Equino \sqcap ¬Zebra Zebroide $\equiv \exists \text{Genitore}. \text{Zebra} \sqcap \exists \text{Genitore}. \text{NonZebraEquino}$</div>

Si noti come OWL e le Description Logic adottino la politica **Open World Semantic**, ovvero tutto ciò che non é esplicitamente contenuto nella Knowledge Base e non é deducibile dagli assiomi (ovvero, tutto ciò su cui non si ha informazione) viene assunto come vero.

Capitolo 3

Search and plan

3.1 Risolvere problemi con la ricerca

Non é sempre scontato quale debba essere l'azione che permette ad un agente razionale di massimizzare la sua funzione di prestazione. In questo caso, l'agente deve essere in grado di *programmare*: individuare una sequenza di azioni che, intraprese, permettono di raggiungere uno stato obiettivo. Un agente con queste caratteristiche viene chiamato **problem-solver** e la computazione che sottostá all'individuare tale sequenza prende il nome di **ricerca**.

La ricerca può essere descritta sotto forma di algoritmo. É possibile classificare gli algoritmi in due classi: **informati**, ovvero che operano in un ambiente del quale hanno tutte le informazioni in qualsiasi momento, e **non informati**, dove una (piú o meno) grande parte di queste informazioni non é ottenibile in ogni momento. Un ambiente in cui opera un algoritmo informato é, di norma: accessibile, deterministico, episodico, statico e discreto.

Un problem-solver con a disposizione questo livello di conoscenza sull'ambiente può allora organizzare il processo di risoluzione del problema in quattro fasi:

1. **Formulazione dell'obiettivo.** L'agente determina quale sia l'obiettivo da perseguire e, di conseguenza, guida il suo operato e le azioni che andrà a compiere in una certa direzione;
2. **Formulazione del problema.** L'agente formula una descrizione degli stati e le azioni necessarie a poter raggiungere tale obiettivo, ovvero un *modello* della parte di ambiente di interesse;
3. **Formulazione della soluzione.** Prima di compiere una qualsiasi azione nel mondo reale, l'agente simula una sequenza di azioni sul modello, fino a trovarne una che gli permette di raggiungere l'obiettivo. Una sequenza con queste caratteristiche viene chiamata **soluzione**. Si noti come l'agente possa dover formulare diverse sequenze che non sono soluzioni prima di riuscire a trovarne una, oppure potrebbe determinare che una soluzione non esiste;
4. **Esecuzione.** Una volta individuata una soluzione (se esiste), l'agente compie, uno alla volta, i passi di cui questa é costituita.

In un ambiente accessibile, deterministico e discreto la soluzione ad ogni problema é una sequenza fissata ¹. Ovvero, una volta che tale soluzione é stata individuata, l'agente può percorrerne i passi con la consapevolezza che, dall'uno all'altro, non é necessario ricavare percezioni aggiuntive dall'ambiente per rivalutare la soluzione presa. Questo tipo di approccio é chiamato **closed loop**, ed é possibile solamente se l'ambiente possiede le caratteristiche sopra citate. Se l'ambiente fosse inaccessibile, non sarebbe possibile ottenere subito la soluzione per intero. Se l'ambiente fosse sequenziale o non deterministico, l'agente dovrebbe ricalcolare la soluzione ad ogni passo, perché le caratteristiche dell'ambiente sarebbero mutevoli.

Formalmente, é possibile formulare un **problema di ricerca** come segue:

- Un insieme di **stati**, ovvero di *configurazioni* in cui l'ambiente può trovarsi. Tale insieme viene chiamato **spazio degli stati**;
- Uno **stato iniziale**, ovvero lo stato in cui l'agente inizia il suo operato;
- Uno o piú **stati obiettivo**, ovvero stati in cui il problema é risolto una volta che l'ambiente si trova in uno di questi. Se gli stati obiettivo sono piú di uno, allora si assume che il problema sia risolto a prescindere da quale di questi si raggiunge;
- Le **azioni** che l'agente può compiere. Queste possono dipendere dallo stato in cui l'agente si trova oppure possono essere eseguite a prescindere. Dato uno stato s , la funzione $ACTIONS(s)$ restituisce l'insieme di azioni che l'agente può compiere se si trova in s . Ciascuna di queste azioni si dice **applicabile** in s ;
- Una **funzione di transizione**, che descrive l'effetto che l'eseguire ciascuna azione comporta. Il cambiamento di stato, da uno stato di partenza ad uno stato di arrivo, per mezzo di una certa azione, prende il nome di **transizione**. Dato uno stato s ed una azione a , la funzione $RESULT(s, a)$ restituisce lo stato che viene raggiunto se viene eseguita a mentre ci si trova in s ;
- Opzionalmente, una **funzione di costo**, che associa un valore numerico a ciascuna transizione. Dati due stati s e s' ed una azione a , la funzione $ACTION-COST(s, a, s')$ restituisce il costo che comporta il passare da s a s' applicando a . La funzione di costo rappresenta il "disincentivo" che l'agente ha nel compiere una determinata azione.

Una qualsiasi sequenza di azioni forma un **percorso**; una soluzione non é altro che un percorso avente uno degli stati obiettivo come ultimo stato. A partire da uno stesso ambiente e da un agente capace di compiere le stesse azioni, cambiando gli stati obiettivo si ottiene un problema completamente diverso.

Talvolta si ha interesse non a ricavare una soluzione qualsiasi, ma bensí una soluzione che rispecchia determinate caratteristiche, detta **soluzione ottimale**. Se la funzione di costo é assente, la soluzione ottimale é in genere quella composta dal minimo numero di azioni. Se invece é presente una funzione di costo, la soluzione ottimale é quella che ha il costo complessivo piú piccolo: tale costo é dato dalla somma, eventualmente pesata, dei costi che comporta ciascuna transizione che avviene nel percorso. Si noti come anche le soluzioni ottimali possano non essere univoche.

Lo spazio degli stati può venire rappresentato sotto forma di grafo: i nodi del grafo corrispondono agli stati, gli archi corrispondono alle azioni che permettono di passare da uno stato all'altro ed il costo delle azioni é, se il problema ha associato una funzione di costo, l'etichetta dell'arco.

1. Nonostante questa situazione sembri irrealistica, diversi ambienti reali possono essere modellati in questo modo.

Si consideri una versione semplificata del gioco del Pacman, dove Pacman si trova in una griglia 4x4. Ciascuna cella della griglia é identificata da una coppia di coordinate, numerate da 1 a 4 lungo gli assi. Inizialmente, Pacman si trova nella cella in basso a sinistra, ovvero la cella (1, 1). A Pacman é permesso muoversi di una cella alla volta lungo i quattro assi cardinali, fintanto che non si muove in celle che si trovano all'interno della griglia. A partire da questa situazione, é possibile costruire diversi problemi di ricerca. Si consideri un primo problema in cui l'obiettivo é raggiungere la cella in alto a destra, ovvero la cella (4, 4). Informalmente, il problema é cosí definito:

- Spazio degli stati: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ..., (4, 3), (4, 4)
- Stato iniziale: (1, 1)
- Stato obiettivo: (4, 4)
- La funzione `ACTIONS` ha in input una coppia di coordinate e restituisce le direzioni in cui Pacman può muoversi senza uscire dalla griglia. Ad esempio, `ACTIONS(2, 4)` restituisce {E, W, S}
- La funzione `RESULT` ha in input una coppia di coordinate ed una azione e restituisce una nuova coppia di coordinate. Ad esempio `RESULT(2, 4, W)` restituisce (1, 4)

Una possibile soluzione potrebbe essere il percorso:

$$(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 4)$$

Tuttavia, tale soluzione non é ottimale. Infatti, una possibile soluzione ottimale é:

$$(1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (4, 4)$$

Si consideri un secondo problema, in cui l'obiettivo é quello di raccogliere tutte le pillole. In questo caso, ciascuna cella della griglia é identificata sia da una coppia di coordinate che da un valore booleano, che indica se la cella contiene o non contiene una pillola.

Lo spazio degli stati di questa formulazione del problema é nettamente piú complessa, perché é necessario sia tenere traccia della posizione di Pacman in ogni istante sia delle pillole raccolte. Inoltre, non é piú rilevante la cella in cui Pacman si trova dopo aver raccolto tutte le pillole.

- Spazio degli stati:

```
((1, 1, F), (1, 2, T), (1, 3, T), ..., (4, 3, T), (4, 4, T)), (1, 1)
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, T), ..., (4, 3, T), (4, 4, T)), (1, 2)
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, T), (4, 4, T)), (1, 2)
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, T), (4, 4, T)), (1, 3)
[...]
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, T)), (4, 3)
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, F)), (4, 4)
[...]
```

- Stato iniziale:

```
(1, 1, F), (1, 2, T), (1, 3, T), ..., (4, 3, T), (4, 4, T)
```

- Stati obiettivo:

```
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, F)), (1, 1)
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, F)), (1, 2)
[...]
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, F)), (4, 4)
```

- La funzione `ACTIONS` é analoga alla precedente
- La funzione `RESULT` ha in input uno stato ed una azione e restituisce un nuovo stato in cui sia le coordinate sia il valore booleano delle celle viene aggiornato. Se la cella raggiunta aveva valore `T`, viene cambiato in `F`; se aveva valore `F`, rimane invariato. Ad esempio:

```
RESULT(((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, T)), (4, 3), E) =
((1, 1, F), (1, 2, F), (1, 3, F), ..., (4, 3, F), (4, 4, F)), (4, 4)
```

Si noti come una formulazione di questo tipo, in cui l'intero stato viene passato come argomento di `RESULT`, sarebbe estremamente inefficiente se implementata sotto forma di codice. Tuttavia, da un punto di vista strettamente matematico, la rappresentazione é corretta.

3.2 Algoritmi di ricerca

La ricerca di una soluzione per un problema di ricerca può essere descritta sotto forma di algoritmo. Un **algoritmo di ricerca** è un algoritmo che, avendo in input un problema di ricerca, restituisce in output una soluzione per tale problema se tale soluzione esiste, oppure un errore se tale soluzione non esiste.

Un algoritmo di ricerca sovrimpone una struttura ad albero sul grafo dello spazio degli stati, formando vari percorsi a partire dallo stato iniziale, fra i quali si distingue quello che porta ad uno degli stati obiettivo. Ciascun nodo di tale albero corrisponde agli stati nello spazio degli stati, mentre gli archi corrispondono alle azioni che costituiscono le transizioni. La radice dell'albero corrisponde allo stato iniziale del problema.

Si noti come lo spazio degli stati e l'albero di ricerca sono distinti. Lo stato degli spazi descrive il (potenzialmente infinito) insieme degli stati in cui l'ambiente può trovarsi, e le azioni che permettono di operare le transizioni da uno stato all'altro. L'albero di ricerca descrive i percorsi che si snodano lungo questi stati che raggiungono lo stato obiettivo. Un albero di ricerca potrebbe avere più percorsi che portano allo stesso stato, ma ogni nodo ha uno ed un solo percorso che permette di risalire da questo alla radice (come in ogni albero).

L'albero di ricerca, inizialmente costituito dal solo stato iniziale, viene costruito iterativamente. Dato un nodo dell'albero (rappresentante uno stato), è possibile **espanderlo** applicando la funzione `ACTIONS`, ottenendo quindi l'insieme di azioni che è possibile compiere se ci si trova in tale stato, ed applicando `RESULT` allo stato attuale e a ciascuna di tali azioni. Tutti i nodi così **generati**, detti **nodi figli** o **nodi successori**, vengono uniti al nodo attuale, detto **nodo genitore**, da un arco.

Una volta espanso un nodo, si sceglie uno dei nodi dell'albero da questo raggiungibile come nuovo nodo attuale (ovvero, si opera una transizione verso lo stato che tale nodo rappresenta) e si ripete l'operazione di espansione. L'insieme di tutti i nodi che possono essere scelti come nuovo nodo da espandere viene detto **frontiera** dell'albero di ricerca. Uno stato dello spazio degli stati si dice **raggiunto** se esiste un nodo nell'albero di ricerca a questo associato. Si noti come la frontiera separi il grafo dello spazio degli stati in due regioni: una *interna* dove ogni nodo (e lo stato ad esso legato) è stato espanso ed una *esterna* dove ogni nodo non è stato ancora raggiunto.

Ci si chiede allora quale criterio si dovrebbe adottare per scegliere quale nodo della frontiera deve diventare il nuovo nodo da espandere. Un approccio molto generico è detto **best-first search**: data una frontiera costituita dai nodi $\{a_1, \dots, a_n\}$, viene scelto il nodo a_i che minimizza una certa **funzione di valutazione** $f(n)$. Si noti come possano esistere diversi nodi appartenenti alla frontiera che minimizzano tale funzione; in questo caso, la scelta di uno di questi non è rilevante.

A ciascuna iterazione dell'algoritmo, viene scelto il nodo (o uno dei nodi) che minimizza la funzione di valutazione: se lo stato che rappresenta è uno stato obiettivo, allora questo viene restituito, altrimenti vi si applica l'operazione di espansione. Ciascun nodo così generato viene aggiunto alla frontiera se non è stato ancora raggiunto, oppure viene riaggiunto se sta venendo raggiunto da un percorso avente costo complessivo inferiore di quello finora memorizzato per raggiungerlo. L'algoritmo restituisce un messaggio di errore se uno stato obiettivo è irraggiungibile oppure uno stato obiettivo non appena viene raggiunto. Diverse funzioni di valutazione danno origine a diversi algoritmi di ricerca.

```
function BEST-FIRST-SEARCH(initial-state, f)
  node <= /a new empty node/
  node.state <= initial-state
  frontier <= /a priority queue ordered by/ f/, with/ node /as an element/
  reached <= /a lookup table, with one entry with key/ initial-state /and value/ node
  while not IS-EMPTY(frontier) do
    node <= POP(frontier)
    if (IS-GOAL(node.state) = True) then
      return node
    ex <= EXPAND(node)
    foreach child in ex do
      s <= child.state
      if (s not in reached) or (child.path-cost < reached[s].path-cost) then
        reached[s] <= child
        ADD(frontier, child)
  return error

function EXPAND(node)
  s <= node.state
  foreach action in ACTIONS(s) do
    s' <= RESULT(s, action)
    cost <= node.path-cost + ACTION-COST(s, action, s')
    n_node <= a new empty node
    n_node.state <= s'
    n_node.parent <= node
    n_node.action <= action
    n_node.path-cost <= cost
  return n_node
```

Gli algoritmi di ricerca necessitano di una struttura dati per poter tenere traccia della struttura dell'albero di ricerca. Un nodo `node` dell'albero è rappresentato mediante una struttura dati avente quattro componenti:

- `node.state` : lo stato nello spazio degli stati a cui il nodo corrisponde;
- `node.parent` : il nodo dell'albero di ricerca che ha generato `node` ;
- `node.action` : l'azione che è stata applicata a `node.parent.state` per generare `node` ;
- `node.path-cost` : il costo complessivo del percorso dallo stato iniziale a `node` .

La frontiera può venire salvata all'interno di una coda; le operazioni da eseguire su tale coda sono:

- `IS-EMPTY(frontier)` restituisce `True` se non vi sono più nodi all'interno di `frontier` e `False` altrimenti;

- `POP(frontier)` rimuove il primo elemento di `frontier` e lo restituisce;
- `TOP(frontier)` restituisce il primo elemento di `frontier` senza rimuoverlo;
- `ADD(frontier, node)` aggiunge `node` nella posizione appropriata di `frontier`.

Gli stati raggiunti possono essere invece salvati all'interno di una hash table, dove ciascuna coppia chiave-valore é costituita da uno stato e dal nodo che questo rappresenta.

Si noti come uno stato possa essere rappresentato da piú di un nodo dell'albero di ricerca. In questo caso, si dice che tale stato é uno **stato ripetuto**; gli stati ripetuti possono dare origine a dei **cicli** nell'albero di ricerca nel momento in cui compaiono piú volte all'interno di uno stesso percorso. Nonostante il numero di stati dello spazio degli stati sia finito, la presenza di uno o piú cicli comporta che l'albero di ricerca sia infinito, perché é sempre possibile percorrere un percorso contenente un ciclo infinite volte.

Un ciclo é un caso particolare di **percorso ridondante**, ovvero di un percorso che inizia e finisce negli stessi nodi di un altro percorso ma ha un costo maggiore, e quindi é del tutto irrilevante al fine di trovare un percorso ottimale. In genere, eliminare i percorsi ridondanti permette di portare a termine la ricerca molto piú velocemente, perché si evita di ripetere per piú volte la stessa computazione, ma l'individuare percorsi ridondanti richiede a sua volta di spendere risorse computazionali aggiuntive.

L'approccio che adotta la ricerca best-first é di tenere traccia di tutti gli stati giá raggiunti, potendo quindi individuare subito i percorsi ridondanti. Se l'unica forma di percorso ridondante che compare nel problema sono i cicli, un approccio piú conservativo prevede di risalire da un nodo a tutti i suoi nodi genitori fino a trovare un nodo che rappresenta il medesimo stato. Se invece il problema non presenta mai, o comunque quasi mai, dei percorsi ridondanti, allora l'algoritmo può anche non implementare alcun tipo di verifica.

Un algoritmo di ricerca si dice **completo** se garantisce, per qualsiasi istanza del problema di ricerca, di trovare una soluzione, sia che questa sia uno stato raggiunto (soluzione trovata) sia che questa sia un messaggio di errore (soluzione non trovata). Se invece esiste almeno una istanza del problema per il quale questo non é in grado di fornire una risposta e si blocca indefinitamente, allora si dice che tale algoritmo é **incompleto**.

Un algoritmo di ricerca che opera su uno spazio degli stati finito é certamente completo, perché prima o poi tutti gli stati verranno raggiunti e, se nessuno di questi é uno stato obiettivo, restituisce un messaggio d'errore. Per poter essere completo, un algoritmo di ricerca che opera su uno spazio degli stati infinito deve essere **sistematico**, ovvero esplorare lo spazio in modo da poter raggiungere tutti gli stati che possono essere raggiunti a partire dallo stato iniziale.

Nell'ambito dell'informatica, si tende a misurare le prestazioni di un algoritmo che opera su un grafo in termini di $|E|$ e di $|V|$, ovvero rispettivamente la cardinalitá del suo insieme di archi e del suo insieme di vertici. Questo é l'approccio migliore nel caso in cui il grafo sia esplicitamente rappresentato da una struttura dati, mentre nel caso dei problemi di ricerca il grafo é reso implicitamente a partire dagli stati, dalle azioni e dal modello di transizione.

Per uno spazio degli stati implicito, si predilige misurare le prestazioni in termini di d , la **profonditá**, ovvero il numero di azioni in una soluzione ottimale; m , il massimo numero di azioni che possono comparire in un percorso; e b , il **fattore di branching**, ovvero il massimo numero di successori di un nodo che é necessario considerare.

3.3 Ricerca non informata

Un algoritmo di ricerca **non informato** non possiede informazioni in merito a "quanto vicino" sia uno stato rispetto agli obiettivi.

3.3.1 Breadth-First search

Quando tutte le azioni hanno il medesimo costo, un algoritmo di ricerca non informato che conviene utilizzare é **Breadth-First search**. In questo algoritmo, il nodo radice dell'albero di ricerca viene espanso, dopodiché ciascuno dei nodi che questo genera viene espanso, dopodiché ciascuno dei nodi che questi a loro volta generano viene espanso, ecc ... fino ad esaurire tutti i nodi. Questa strategia rispetta la proprietá di sistematicitá, e pertanto garantisce che l'algoritmo sia completo anche se lo spazio degli stati é infinito.

L'algoritmo `BREADTH-FIRST-SEARCH` può essere implementato, in prima analisi, come una versione di `BEST-FIRST-SEARCH` in cui la funzione di valutazione $f(n)$ é la profonditá di n , ovvero il numero di azioni che é stato necessario per arrivare dalla radice a n . Come struttura dati atta a contenere i nodi della frontiera é bene scegliere una coda FIFO. Questo perché i nuovi nodi che vengono aggiunti, che si trovano necessariamente dopo i nodi che li hanno generati, vengono posti in fondo alla coda, mentre i nodi giá nella coda, che sono stati quindi aggiunti prima, vengono espansi prima.

É possibile ottimizzare ulteriormente l'algoritmo osservando come non sia necessario tenere traccia dei percorsi precedentemente usati per raggiungere un certo nodo, perché per come l'algoritmo é strutturato, una volta che un nodo viene raggiunto non é possibile trovare un percorso migliore per raggiungerlo. Pertanto, non é necessario implementare `reached` come una hash table, ma é sufficiente che sia un insieme non ordinato. Inoltre, per lo stesso motivo, é possibile valutare se un nodo é un nodo obiettivo prima di controllare se tale nodo é giá stato raggiunto.

```
function BREADTH-FIRST-SEARCH(problem)
  node <= /a new empty node/
  node.state <= initial-state
  frontier <= /a FIFO queue, with/ node /as an element/
  reached <= {initial-state}
  while not IS-EMPTY(frontier) do
    node <= POP(frontier)
    ex <= EXPAND(node)
    foreach child in ex do
      s <= child.state
    if (IS-GOAL(s) = True) then
      return child
    if (s not in reached) then
      reached <= reached u {s}
      ADD(frontier, child)
```

```
return error
```

Breadth-first search, quando trova una soluzione, tale soluzione sarà necessariamente trovata con il minor numero di passi possibili. Questo perché quando viene generato un nodo alla profondità d , tutti i nodi a profondità $d-1$, $d-2$, ecc ... sono già stati generati (ed espansi). Pertanto, se uno di questi nodi avesse contenuto uno stato obiettivo, sarebbe già stato trovato. Pertanto, se il costo di tutte le azioni del problema è lo stesso, Breadth-first search è necessariamente l'algoritmo più efficiente possibile dal punto di vista del costo. Inoltre, è un algoritmo completo, perché prima o poi tutti i nodi verranno raggiunti.

Per quanto riguarda la complessità di breadth-first search, si osservi come a partire dal nodo iniziale vengano allora generati al più b nodi, ed a sua volta a partire da ciascuno di questi vengono generati al più b nodi, ecc ... Questo significa che ad una certa profondità d , vengono generati al più b^d nodi. L'algoritmo prevede che tutti questi nodi debbano potenzialmente venire generati ed esplorati, a meno di trovare una soluzione prima di averli esauriti, pertanto la complessità in termini sia di tempo che di spazio della ricerca breadth-first è $O(b^d)$. Questo significa che, per quanto breadth-first search sia completo, è molto inefficiente, a meno di operare su istanze molto piccole.

3.3.2 Depth-First search

Un algoritmo più efficiente in termini di complessità rispetto a Breadth-First search è **Depth-First search**. A differenza del precedente, che prevede di espandere i nodi della frontiera uno alla volta, Depth-First search prevede di espandere sempre il nodo più profondo. Questo potrebbe essere implementato a partire da **Best-First search** scegliendo come funzione di valutazione il negativo della profondità.

In realtà, Depth-First search viene in genere implementato non come una ricerca su grafo, ma come una ricerca ad albero che non tiene traccia degli stati raggiunti. Depth-First search procede immediatamente fino alla massima profondità raggiungibile a partire dal nodo iniziale. Dopodiché, l'algoritmo opera un **backtracking**, ovvero "ritorna" al primo nodo lungo il percorso che non è stato ancora interamente espanso. Depth-First search restituisce comunque la prima soluzione che viene trovata, ma non è detto che questa sia la soluzione ottimale, perché potrebbe esserci una soluzione migliore a partire da uno dei nodi inesplorati.

Se lo spazio degli stati è finito, Depth-First search è completo fintanto che non esistono cicli; sebbene possa esplorare gli stessi stati più volte negli stessi percorsi, prima o poi tutti gli stati vengono raggiunti. Se sono presenti dei cicli, l'algoritmo potrebbe rimanere bloccato in un loop infinito, ma è possibile ottimizzare l'algoritmo per individuare tali cicli ed evitarli. Se lo spazio degli stati è infinito, l'algoritmo non è né sistematico né completo, perché l'algoritmo potrebbe rimanere bloccato nell'espandere lo stesso percorso indefinitamente, anche se non sono presenti cicli.

Per impedire che l'algoritmo si blocchi in una discesa infinita, è possibile impostare una profondità massima, oltre la quale all'algoritmo viene impedito di procedere, obbligandolo a fare backtracking anche se il nodo in esame potrebbe venire espanso. In questo modo, si garantisce che l'algoritmo non possa bloccarsi indefinitamente, ma potrebbe potenzialmente perdere parte delle soluzioni se queste esistono ma molto in profondità.

Sebbene Depth-First search possa potenzialmente non essere completo, nella pratica viene comunque spesso preferito a Breadth-First search. Questo perché la complessità in tempo e spazio di Depth-First search ha un bound infinitamente inferiore: se l'albero è finito, la complessità in tempo dell'algoritmo è proporzionale al numero degli stati, mentre la complessità in spazio è $O(bm)$, dove b è il fattore di branching e m è la massima profondità dell'albero.

3.4 Ricerca informata

Un algoritmo di ricerca **informato** possiede informazioni in merito a "quanto vicino" sia uno stato rispetto agli obiettivi. A differenza degli algoritmi di ricerca non informati, che procedono in ogni direzione ("a caso"), gli algoritmi di ricerca informati possono orientare la loro computazione verso una determinata direzione.

Viene detta **euristica** una funzione che fornisce informazioni più o meno precise su quanto lo stato generico di un problema sia vicino ad uno stato obiettivo del medesimo problema. Nello specifico: tale funzione, indicata con $h(n)$, restituisce una stima numerica del percorso a costo minimo che ha inizio in n e ha fine nello stato obiettivo più vicino. Tale funzione è in genere specifica per ogni possibile istanza del problema in esame. Si noti come l'informazione restituita dalla euristica non suggerisca necessariamente di intraprendere l'azione che risulta in un percorso efficiente.

3.4.1 Greedy search

L'algoritmo **Greedy search** è un algoritmo di ricerca informato che sceglie sempre il nodo che ha il minor valore di $h(n)$ fra tutti i nodi raggiungibili, assumendo che sia anche uno dei nodi che costituiscono il percorso più efficiente. Può essere quindi implementato a partire da Best-First search scegliendo $h(n)$ come $f(n)$.

La performance di Greedy search dipende molto da quanto l'algoritmo è in grado di fare una buona predizione sulla base dell'euristica. Se l'euristica porta quasi sempre ad un percorso favorevole, la complessità in termini di tempo e spazio può scendere fino a $O(bm)$. Se l'euristica porta quasi sempre ad un percorso sfavorevole, di fatto Greedy search opera in maniera quasi indistinguibile da Depth-first search, perché vengono esplorati molti (se non tutti) nodi in profondità, e la complessità diviene $O(|V|)$. Per lo stesso motivo, Greedy search è completo se lo spazio degli stati è finito, mentre è incompleto se lo spazio degli stati è infinito.

3.4.2 A* search

Il piú comune algoritmo di ricerca informato é **A* search** (pronuncia: "A-star search"), implementabile a partire da Best-first search usando come funzione di valutazione $f(n) = g(n) + h(n)$, dove $g(n)$ é il costo totale del percorso che va dal nodo radice a n . Di fatto, A* search é una combinazione di Uniformed Cost search e di Greedy Search.

A* search é un algoritmo completo; se A* search sia anche ottimale dipende dalle caratteristiche della funzione di euristica. In particolare, una euristica si dice **ammissibile** se approssima sempre i costi per difetto.

Fintanto che come euristica di A* search viene scelta una euristica ammissibile, A* search é ottimale.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che A* search possa restituire un percorso non ottimale anche se viene scelta una euristica ammissibile. Sia C^* l'effettivo costo del percorso ottimale di una qualche applicazione di A* search dallo stato radice ad un certo stato obiettivo e sia C il costo stimato dalla funzione di valutazione per il medesimo percorso.

Per quanto assunto nell'ipotesi di assurdo, deve aversi $C > C^*$. Deve allora esistere un certo nodo n sul percorso ottimale ma che non é stato espanso: questo perché se tutti i nodi sul percorso ottimale fossero stati espansi, allora la funzione di valutazione avrebbe restituito C^* e non C . Siano $g^*(n)$ e $h^*(n)$ rispettivamente l'effettivo costo del sottopercorso ottimale che va dallo stato di partenza a n e l'effettivo costo del sottopercorso ottimale che va da n al piú vicino stato obiettivo.

Si ha quindi $C^* = g^*(n) + h^*(n)$. Inoltre, avendo assunto che n si trovi su un sottopercorso ottimale, deve aversi che $g(n)$ e $g^*(n)$ coincidono. É quindi possibile scrivere $f(n) = g(n) + h(n) = g^*(n) + h(n)$. Avendo assunto che l'euristica é ammissibile, deve aversi $h(n) \leq h^*(n)$, e pertanto $C = f(n) \leq g^*(n) + h^*(n)$. Questo é però in contraddizione con l'ipotesi di assurdo, pertanto occorre assumere che A* search restituisca sempre una soluzione ottimale quando viene scelta una euristica ammissibile.

Una euristica $h(n)$ si dice **consistente** se, per ogni nodo n e per ogni successore n' di n generato dall'azione a , vale ²:

$$h(n) \leq \text{Cost}(n, a, n') + h(n')$$

La proprietà di consistenza é piú forte dell'ammissibilità, perché ogni euristica consistente é anche ammissibile, ma non tutte le euristiche ammissibili sono consistenti. Inoltre, se l'euristica é consistente, quando viene raggiunto un nodo per la prima volta si ha la certezza che questo si trovi su uno dei percorsi ottimali, e non verrà mai aggiunto alla frontiera piú di una volta.

Ci si chiede allora come si possa costruire una euristica per un dato problema. Se a partire da un problema se ne costruisce una versione "semplificata" rimuovendo le restrizioni imposte all'agente, ovvero aumentando il numero di azioni a questo disponibili, si dice che si ottiene un **problema rilassato**.

Il grafo dello spazio degli stati del problema rilassato é un supergrafo del grafo dello spazio degli stati del problema originale, perché aumentare il numero di azioni disponibili all'agente comporta l'aggiunta di nuovi archi al grafo. Per questo motivo, ogni soluzione ottimale del problema originale é anche una soluzione per il problema rilassato, ma il problema rilassato potrebbe avere soluzioni di costo ancora inferiore che nel problema originale non sono presenti, perché l'aggiunta di nuove azioni potrebbe condurre a delle scorciatoie. Quindi, il costo di una soluzione ottimale di un problema rilassato fornisce un limite inferiore al costo delle soluzioni del problema originale, e può essere quindi usata come euristica per il problema originale.

Date piú euristiche ammissibili per il medesimo problema, é possibile compararle per valutare quale sia la migliore. Se date due euristiche h_1 e h_2 vale $h_1(n) \geq h_2(n)$ per ogni valore di n , si dice che h_1 **domina** h_2 . Se l'euristica h_1 domina h_2 , allora h_1 é sempre una euristica migliore di h_2 , perché il bound restituito da h_1 sarà sempre maggiore di quello restituito da h_2 , e sarà quindi piú vicino all'effettivo valore della soluzione ottimale. Se vale $h_1(n) \geq h_2(n)$ solo per alcuni valori di n , una euristica che certamente domina entrambe é $h(n) = \max(h_1(n), h_2(n))$, perché per tutti i possibili n varrà sempre $h(n) = h_1(n)$ e $h(n) \geq h_2(n)$ oppure $h(n) = h_2(n)$ e $h(n) \geq h_1(n)$. Inoltre, il massimo di piú euristiche ammissibili é sempre un'euristica ammissibile a sua volta.

3.5 Planning classico

Il **Planning Classico** consiste nel trovare una sequenza di azioni che permettono di raggiungere un determinato obiettivo in un ambiente discreto, deterministico, statico e accessibile. A differenza dei problemi di ricerca, che richiedono una euristica ad-hoc per ciascun dominio, il linguaggio del planning é indipendente dal dominio del problema in esame.

Similmente ai problemi di ricerca, un **problema di planning** é definito a partire dai seguenti elementi:

- Uno **spazio degli stati** S , finito e discreto;
- Uno **stato iniziale** (noto) $s_0 \in S$;
- Un insieme di **stati obiettivo** $S_G \subseteq S$;

2. É facile verificare che questa é una forma di disuguaglianza triangolare.

- Un insieme di **azioni** $A(s) \subseteq A$ applicabile in ciascuno stato $s \in S$;
- Una **funzione di transizione deterministica** $s^j = f(a, s)$ per ogni $a \in A(s)$;

Un **plan** è una sequenza di azioni a_0, \dots, a_n che mappa s_0 su S_G . In altri termini, esiste una sequenza di stati s_0, \dots, s_{n+1} di modo che $a_i \in A(s_i)$, $s_{i+1} = f(a_i, s_i)$ e $s_{n+1} \in S_G$ per $i = 0, \dots, n$.

Un plan viene detto **ottimale** se minimizza la somma $\sum_{i=0}^n c(a_i, s_i)$, ovvero la somma dei costi di ciascuna azione di cui tale plan è costituito.

Il problema viene codificato in un linguaggio indipendente dal dominio. Questi linguaggi permettono di descrivere azioni, sensori, obiettivi e situazione iniziale mediante delle rappresentazioni schematiche che non necessitano di alcuna conoscenza specifica sul dominio del problema.

Una volta definito il linguaggio, è possibile utilizzarlo per codificare un insieme di informazioni in una knowledge base. L'approccio usato per la costruzione di un agente è **dichiarativo**: è sufficiente istruirlo con le nozioni contenute nella KB per poi fare deduzioni ed ottenere risposte. In questo modo, è possibile focalizzare l'attenzione sulla sola conoscenza, tralasciando i dettagli implementativi dell'agente, come ad esempio quale algoritmo usa per formulare le deduzioni. In questo modo, ogni inferenza può essere potenzialmente calcolata dall'agente, fintanto che è possibile formularla nel linguaggio formale di riferimento. L'approccio opposto è quello **imperativo**, dove l'agente viene istruito nel dettaglio su quali passi compiere per ciascuno stato in cui l'agente si trova ³.

Un linguaggio molto semplice appartenente a questa famiglia è **STRIPS (Stanford Research Institute Problem Solver)**. Un problema codificato nel linguaggio STRIPS è una quadrupla $P = (F, O, I, G)$:

- Un insieme F di **condizioni** (variabili proposizionali, istanziate);
- Un insieme O di **operatori** (azioni). Ogni operatore a è a sua volta una tripla $\text{Prec}(a) = \alpha, \text{Add}(a) = \beta, \text{Del}(a) = \gamma$. α è un insieme di **precondizioni**, ovvero di condizioni che devono essere vere affinché sia possibile applicare l'operatore. β è un insieme di condizioni che vengono rese vere dall'azione (vengono aggiunte allo stato corrente). γ è un insieme di condizioni che vengono rese false dall'azione (vengono rimosse dallo stato corrente);
- Uno **stato iniziale** $I \subseteq F$, costituito da tutte le condizioni che sono inizialmente vere (vale la closed-world assumption; tutto ciò che non è inizialmente vero è assunto falso);
- Una specifica dello **stato obiettivo**, riportato come una coppia $\langle N, M \rangle$ la quale riporta, rispettivamente, quali condizioni devono essere vere e false affinché uno stato possa essere considerato uno stato obiettivo.

Un problema $P = (F, O, I, G)$ scritto nel formalismo di STRIPS può essere tradotto in un problema di ricerca equivalente $S(P)$ nel seguente modo:

- Gli stati $s \in S(P)$ equivalgono a collezioni di atomi di F ;
- Lo stato iniziale s_0 di $S(P)$ equivale a I ;
- Gli stati obiettivo di $S(P)$ equivalgono agli s tali per cui $G \subseteq s$;
- Le azioni a in $A(s)$ equivalgono alle operazioni O , di modo che $\text{Prec}(a) \subseteq s$;
- Lo stato successivo s^j è dato da $s - \text{Del}(a) + \text{Add}(a)$;
- I costi delle azioni $c(a, s)$ sono tutti pari a 1;

Naturalmente, una soluzione (ottimale) per P è anche una soluzione ottimale per $S(P)$. Dato che gli stati di $S(P)$ equivalgono a "combinazioni" di elementi di P , è facile verificare che se P ha n condizioni, il problema di ricerca equivalente $S(P)$ ha 2^n stati; il risparmio in termini di spazio che offre STRIPS è quindi notevole.

Si consideri il problema $P = (F, I, O, G)$ formulato nel linguaggio STRIPS, così costruito:

$$F = \{p, q, r\} \quad I = \{p\} \quad \begin{matrix} \text{Prec}(a) = \{p\}, \text{Add}(a) = \{q\}, \text{Del}(a) = \{\} \\ \text{Prec}(b) = \{q\}, \text{Add}(b) = \{r\}, \text{Del}(b) = \{q\} \end{matrix} \quad G = \{q, r\}$$

- Partendo dallo stato iniziale, l'operazione b non è applicabile, perché le precondizioni non sono soddisfatte. È però possibile applicare a , essendo le precondizioni soddisfatte, e q viene aggiunto allo stato iniziale. Lo stato attuale diventa $\{p, q\}$;
- L'operazione b diventa applicabile, perché le precondizioni sono ora soddisfatte. Applicando b viene aggiunto r e viene tolto q , ottenendo $\{p, r\}$;
- Applicando nuovamente a viene (ri)-aggiunto p , ottenendo $\{q, r, p\}$ e raggiungendo lo stato obiettivo.

STRIPS non permette di usare variabili, perché tutti i componenti devono essere nominati esplicitamente. Questo rende STRIPS molto semplice, ma al contempo molto prolisso (per quanto non prolisso quanto riportare tutti gli stati esplicitamente).

Una estensione di STRIPS che permette l'uso di variabili è **Planning Domain Definition Language (PDDL)** ⁴. Un problema in PDDL è formato da

3. I nomi *dichiarativo* e *imperativo* sono in analogia con gli omonimi paradigmi di programmazione.
4. La sintassi di PDDL è simile a quella di Lisp.

due componenti: un **dominio** ed una **istanza**. Il dominio contiene lo schema delle azioni, degli atomi ed i tipi degli argomenti:

```
(define (domain DOMAIN_NAME)
  (:predicates (PREDICATE_1_NAME ?A1 ?A2 ... ?AN)
               (PREDICATE_2_NAME ?A1 ?A2 ... ?AN)
               ...)

  (:action ACTION_1_NAME
    [:parameters (?P1 ?P2 ... ?PN)]
    [:precondition PRECOND_FORMULA]
    [:effect EFFECT_FORMULA]
  )
  (:action ACTION_2_NAME
    ...)
  ...)
```

I nomi dei predicati e delle azioni sono costituiti da caratteri alfanumerici e/o da trattini. I parametri dei predicati e delle azioni si distinguono dai nomi perché hanno un "?" come prefisso. I parametri usati nella dichiarazione dei predicati non hanno altra utilità al di fuori di specificare il numero di argomenti che il predicato debba avere; fintanto che hanno nomi distinti, il nome scelto per i parametri non é rilevante. I predicati possono anche avere zero parametri.

Una preconditione può essere espressa come:

- Una formula atomica: (PREDICATE_NAME ARG1 ... ARGN)
- Una congiunzione di formule atomiche: (and ATOM1 ... ATOMN)
- Una disgiunzione di formule atomiche: (or ATOM1 ... ATOMN)
- La negazione di una formula atomica: (not CONDITION_FORMULA)
- Una formula con quantificatore universale: (forall (?V1 ?V2 ...) CONDITION_FORMULA)
- Una formula con quantificatore esistenziale: (exists (?V1 ?V2 ...) CONDITION_FORMULA)

In PDDL, gli effetti di una azione non sono distinti in *Add* e *Delete*. Le rimozioni vengono espresse sotto forma di negazioni. L'effetto di una azione può essere espresso come:

- Una aggiunta: (PREDICATE_NAME ARG1 ... ARGN)
- Una rimozione: (not (PREDICATE_NAME ARG1 ... ARGN))
- Una congiunzione di effetti atomici: (and ATOM1 ... ATOMN)
- Un effetto condizionale: (when CONDITION_FORMULA EFFECT_FORMULA)
- Una formula con quantificatore universale: (forall (?V1 ?V2 ...) EFFECT_FORMULA)

L'istanza contiene lo stato iniziale, lo stato obiettivo e tutti gli oggetti che figurano nel problema. Una istanza può essere espressa come:

```
(define problem PROBLEM_NAME)
  (:domain DOMAIN_NAME)
  (:objects OBJ1 OBJ2 ... OBJN)
  (:init ATOM1 ATOM2 ... ATOMN)
  (:goal CONDITION_FORMULA)
)
```

La descrizione dello stato iniziale (:init) é semplicemente una lista di tutti i predicati che sono veri nello stato iniziale; tutti gli altri sono assunti falsi. A differenza delle preconditioni delle azioni, gli stati iniziali e obiettivo devono necessariamente essere *grounded*, ovvero non possono avere delle variabili come argomenti.

I tipi devono essere dichiarati prima che possano essere utilizzati. La dichiarazione di un tipo può essere espressa come:

```
(:types NAME1 ... NAMEN)
```

Per dichiarare il tipo di un parametro di un predicato o di una azione, si riporta ?X - TYPE_OF_X . Una lista di parametri dello stesso tipo può essere abbreviata come ?X ?Y ?Z - TYPE_OF_XYZ .

I problemi di planning possono essere risolti come problemi di ricerca euristica ⁵. I problemi di ricerca euristica sono problemi NP-Completi, per

5. Un approccio alternativo prevede di riformulare i problemi di planning come **problemi di soddisfacibilità booleana (boolean satisfiability problem, SAT)**, ovvero il problema di determinare se esiste una interpretazione che soddisfi una data formula booleana.

quanto comunque risolvibili in tempo accettabile anche per grandi istanze.

Sia P un problema scritto utilizzando il formalismo di PDDL. L'idea alla base di questo approccio prevede di convertire P in $S(P)$, un problema di ricerca equivalente, ed applicare a questo un algoritmo di ricerca. Dato che, in genere, $S(P)$ é infinitamente piú complesso di P , per risolverlo in maniera efficiente é necessario adoperare un algoritmo di ricerca che fa uso di una euristica (come A* search, ad esempio). Questo sembrerebbe essere un ostacolo, perché come visto in precedenza ogni problema di ricerca che fa uso di euristiche richiede una euristica specifica. Per il modo in cui PDDL é strutturato, é invece possibile derivare in maniera del tutto automatica una euristica applicabile ad $S(P)$ a partire da P , a prescindere da quale problema P sia.

Per costruire una euristica per $S(P)$ é possibile utilizzare il medesimo metodo usato finora, ovvero ricavare un problema rilassato e usare la funzione di costo di tale problema come euristica per il problema principale. Il vantaggio dei problemi di planning é che possono operare su problemi piú semplici e dal formalismo definito, pertanto é piú vantaggioso ricavare una versione rilassata di $S(P)$ direttamente a partire da (una versione rilassata di) P . Si ricordi che, per un problema di ricerca, é possibile costruire un problema rilassato aggiungendo ulteriori azioni al problema principale.

Per un problema di planning, questo può equivalere ad eliminare tutte le precondizioni dalle operazioni, di modo che queste siano applicabili in (circa) ogni momento: questo approccio viene chiamato **ignore-precondition heuristic**. Innanzitutto, tutte le azioni vengono rilassate rimuovendo tutte le precondizioni e tutti gli effetti ad eccezione di quelli che sono presenti nell'obiettivo. Dopodiché, si conta qual'è il numero minimo di azioni necessarie affinché l'unione di tali azioni soddisfi l'obiettivo ⁶ e si usa tale valore come euristica.

In alternativa, é possibile eliminare le rimozioni da tutte le operazioni del problema, di modo che il progresso verso il goal proceda in maniera monotona e senza che un'azione influisca sul progresso di un'altra: questo approccio é chiamato **ignore-delete-lists heuristic**. Si modifica il problema di modo che tutti gli obiettivi e tutte le precondizioni contengano solo aggiunte, dopodiché se vengono eliminate tutte le rimozioni da ogni azione. La lunghezza di un percorso ottimale per il problema rilassato così costruito viene utilizzata come euristica.

Come già anticipato, non tutti i problemi non possono essere formulati in un linguaggio di planning. Altri problemi sono invece intrinsecamente complessi e, sebbene sia possibile formularli in PDDL o STRIPS, verrebbero comunque risolti in maniera subottimale. In questi casi, é preferibile un approccio imperativo, dove il codice é pensato ad-hoc per il problema in esame.

3.6 Planning probabilistico

Spesso, per il modo in cui l'ambiente é strutturato, non é possibile per l'agente ottenere informazioni con certezza. Nello specifico, le situazioni di questo tipo piú comuni sono due (non mutualmente esclusive): la prima é non poter essere in grado di determinare in che stato ci si trova, la seconda é non poter sapere con certezza l'effetto delle proprie azioni. In questi casi, l'agente é costretto a fare delle *predizioni probabilistiche*.

3.6.1 Complementi di teoria della probabilità

Siano A e B due eventi, e siano $P(A)$ e $P(B)$ le probabilità che gli eventi rispettivamente A e B si verifichino. Valgono i seguenti assiomi:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\text{True}) = 1 \quad P(\text{False}) = 0 \quad P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

É possibile dimostrare che la probabilità che un evento A avvenga é uguale alla somma tra la probabilità che sia l'evento A che un certo evento B avvengano e la probabilità che sia l'evento A che l'evento $\neg B$ avvengano. Questa proprietà é anche detta **formula di disintegrazione**:

$$P(A) = P(A \vee B) + P(A \vee \neg B)$$

Combinando la formula di disintegrazione con la formula per la probabilità condizionata si ottiene la cosiddetta **formula delle probabilità totali**:

$$P(A) = P(A | B) \cdot P(B) + P(A | \neg B) \cdot P(\neg B)$$

$P(A | B)$ e $P(B | A)$ devono necessariamente soddisfare i due assiomi fondamentali della probabilità, pertanto dovrà valere:

$$P(A | \neg B) = 1 - P(\neg A | \neg B)$$

$$P(B | \neg A) = 1 - P(\neg B | \neg A)$$

É importante puntualizzare che $P(A | B)$, la probabilità che A si verifichi sapendo che si é verificato B , non é necessariamente uguale a $P(B | A)$, la probabilità che B si verifichi sapendo che si é verificato A . Le due sono però collegate dalla **formula di Bayes**:

$$P(X | Y) = \frac{P(Y | X) \cdot P(X)}{P(Y)}$$

Nel caso in cui $P(Y)$ sia una costante, dato che questa non dipende da X (o da $P(X)$) viene spesso riportata come costante di normalizzazione. In particolare, con $P(Y)^{-1} = \eta$, si ha:

6. Questo é un esempio di **problema di copertura**.

$$P(X | Y) = \eta P(Y | X) P(X)$$

Tale formula riveste grande importanza nel campo dell'intelligenza artificiale perché é alla base di una tecnica di inferenza statistica chiamata **inferenza Bayesiana**. Data una certa ipotesi, é possibile aggiornarla mano a mano che nuove osservazioni vengono condotte, pesando quanto ciascuna osservazione debba essere presa in considerazione. In tal senso, la formula può essere interpretata in questo modo:

- X é una ipotesi la cui probabilità é stata stimata sulla base di un certo numero di osservazioni precedenti;
- $P(X)$ é la **probabilità a priori**, ovvero la stima della probabilità di X *prima* di aver integrato l'informazione portata da Y ;
- Y é una nuova osservazione, che influirá in maniera piú o meno incisiva sul futuro valore di $P(X)$;
- $P(X | Y)$ é la **probabilità a posteriori**, ovvero la stima della probabilità di X *dopo* aver integrato l'informazione portata da Y ;
- $P(Y | X)$ é la **funzione di verosimiglianza**. In funzione di Y con X fissato, indica quanto é compatibile la presenza dell'osservazione Y rispetto all'ipotesi X ;
- $P(Y)$ é la **verosimiglianza marginale**, ed indica la probabilità di osservare Y a prescindere da quale sia l'ipotesi X . Viene anche chiamata semplicemente **evidenza**.

Riassumendo ⁷:

$$\text{Posteriori} = \frac{\text{Verosimiglianza} \times \text{Priori}}{\text{Evidenza}}$$

Data una variabile aleatoria X , viene detto **valore atteso** (o **valore medio** o **speranza matematica**) di X il valore $E[X]$ cosí calcolato:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{s \in S} sp(s) & \text{se discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} uf(u) du & \text{se continua} \end{cases}$$

Nel caso in cui X sia una variabile discreta, $E[X]$ é dato dalla sommatoria di tutti i valori che X può assumere moltiplicati per la probabilità che assumano quel valore. Se invece X é una variabile aleatoria continua, $E[X]$ é dato dall'integrale calcolato su tutti i punti su cui é definita moltiplicati per la funzione di densità calcolata in quel punto.

É interessante notare come $E[X]$ sia un valore che dipende dai risultati dell'esperimento a cui é associato, pertanto é esso stesso una variabile aleatoria (e quindi una funzione). Inoltre, il valore medio non é necessariamente uno dei valori assunti dalla variabile aleatoria stessa, e nemmeno é garantito che esista. Nello specifico, questo accade quando la sommatoria o l'integrale da cui viene ricavato non convergono.

Il valore atteso é una funzione lineare: prese due variabili aleatorie X e Y e due coefficienti reali a e b , vale $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$.

3.6.2 Incertezza sugli stati: filtri Bayesiani

Si consideri una situazione in cui l'agente non é in grado di sapere con certezza se lo stato in cui si trova é effettivamente lo stato in cui questo crede di trovarsi.

Si indichi con t un **istante temporale**, un valore intero che indica l'evoluzione dell'agente e delle sue percezioni in un dato momento, contando a partire da un certo istante iniziale $t_0 = 0$. L'agente ottiene informazioni dall'ambiente ad ogni istante, ed usa tali informazioni per migliorare la stima che ha di quale stato si trova. Siano allora:

- x_t lo stato in cui l'agente effettivamente si trova allo stato t ;
- z_t la misurazione compiuta dall'agente all'istante t per mezzo dei suoi sensori. Si assuma, per semplicitá, che ad ogni istante l'agente effettui una ed una sola misura. La notazione $z_{t_1:t_2}$ indica l'insieme di tutte le misurazioni compiute dall'agente dal tempo t_1 al tempo t_2 , con $t_1 \leq t_2$;
- μ_t l'informazione sul cambio di stato che avviene nell'ambiente. La variabile μ_t corrisponde al cambio di stato nell'intervallo di tempo $(t-1;t]$. La notazione $\mu_{t_1:t_2}$ indica l'insieme di tutti i cambiamenti che avvengono nell'ambiente dal tempo t_1 al tempo t_2 , con $t_1 \leq t_2$. Si noti come l'ambiente può cambiare anche al di lá delle azioni compiute dall'agente.

Come già detto, l'agente non può conoscere con certezza in quale stato si trova, e deve limitarsi a dare una stima probabilistica. Sia allora $P(x_t)$ la probabilità "in assoluto" che l'agente si trovi nello stato x_t al tempo t . É ragionevole assumere che la probabilità che l'agente si trovi in un certo stato in un certo istante dipenda in una qualche misura dagli stati, dalle misurazioni e dai cambi di stato precedenti. In tal senso, ciò che si ha interesse a calcolare non é tanto $P(x_t)$ quanto:

$$P(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t})$$

Si noti come z_t parta da $t = 1$ e non da $t = 0$, dato che si assume che lo stato x_0 venga determinato a priori, prima di effettuare qualsiasi osservazione.

7. Questo approccio viene spesso usato nelle neuroscienze per rappresentare matematicamente il modo in cui il cervello apprende nuove informazioni.

Similmente, si ha interesse anche a calcolare la probabilità che, in un certo istante t , l'agente compia la misurazione z_t . Anche questa potrebbe dipendere in una qualche misura dagli stati, dalle misurazioni e dai cambi di stato precedenti:

$$P(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t})$$

Una assunzione molto forte che è possibile fare è che la probabilità che l'agente si trovi in un certo stato o compia una certa misurazione al tempo t non sia influenzato da *tutti* gli stati, misurazioni e cambi di stato precedenti, ma solo da quelli avvenuti nell'istante $t-1$, ovvero quello immediatamente precedente. Se vale questa assunzione, chiamata **assunzione Markoviana**, allora è possibile semplificare l'espressione come:

$$P(x_t \mid x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = P(x_t \mid x_{t-1}, \mu_t)$$

$$P(z_t \mid x_{0:t}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = P(z_t \mid x_t)$$

Gli agenti probabilistici mantengono al loro interno un "grado di fiducia" sullo stato in cui si trovano (in cui credono di trovarsi). Tale probabilità, indicata con $bel(x_t)$, è una probabilità a posteriori condizionata rispetto alle misurazioni ed ai cambi di stato precedenti a t :

$$bel(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t}, \mu_{1:t})$$

Occasionalmente, è utile anche calcolare la probabilità a posteriori *prima* di incorporare z_t . Tale probabilità è indicata con $bel^-(x_t)$:

$$bel^-(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t})$$

Filtro Bayesiano. Se sono valide le assunzioni Markoviane, allora vale:

$$bel(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid \mu_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Dimostrazione. Applicando la formula di Bayes a $bel(x_t)$, si ha:

$$bel(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t}, \mu_{1:t}) = \frac{P(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) \cdot P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t})}{P(z_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t})} = \eta P(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t})$$

Per assunzione Markoviana $P(z_t \mid x_t, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = P(z_t \mid x_t)$. Pertanto, è possibile semplificare l'espressione precedente come:

$$bel(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t}, \mu_{1:t}) = \eta P(z_t \mid x_t) P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = \eta P(z_t \mid x_t) bel^-(x_t)$$

Applicando a $bel^-(x_t)$ la formula delle probabilità totali:

$$bel^-(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = \int P(x_t \mid x_{t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) P(x_{t-1} \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) dx_{t-1} = \int P(x_t \mid x_{t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Per assunzione Markoviana $P(x_t \mid x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = P(x_t \mid x_{t-1}, \mu_t)$. Pertanto, è possibile semplificare l'espressione precedente come:

$$bel^-(x_t) = P(x_t \mid z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) = \int P(x_t \mid x_{t-1}, z_{1:t-1}, \mu_{1:t}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1} = \int P(x_t \mid x_{t-1}, \mu_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Sostituendo l'espressione per $bel^-(x_t)$ nell'espressione per $bel(x_t)$, si ottiene:

$$bel(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) bel^-(x_t) = \eta P(z_t \mid x_t) \int P(x_t \mid \mu_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

L'utilità del filtro Bayesiano sta nel fatto che è possibile esprimere il grado di certezza dell'agente sullo stato in cui si trova esclusivamente rispetto allo stato precedente.

3.6.3 Incertezza sulle azioni: Markov Decision Process

Viene chiamato **Markov Decision Process (MDP)** un problema di ricerca dove l'ambiente é accessibile ma non deterministico, ovvero dove l'agente sa sempre in che stato si trova ma non ha la certezza che compiere una azione porterá allo stato che si aspetta. Un MDP é costituito da:

- Un insieme di stati S ;
- Un insieme di azioni A ;
- Uno stato iniziale $s_0 \in S$;
- Un modello di transizione $T(s, a, s')$, con $a \in A$ e $s, s' \in S$. Questo indica qual'é la probabilitá che venga effettivamente raggiunto lo stato s' eseguendo a mentre ci si trova in s . In termini di calcolo delle probabilitá, $T(s, a, s')$ equivale di fatto a scrivere $P(s' | s, a)$. In un MDP vale l'assunzione Markoviana, ovvero la probabilitá di raggiungere uno stato di arrivo dipende solamente dallo stato attuale e non da tutti gli stati che sono stati raggiunti in precedenza (se ve ne sono);
- Una **funzione di ricompensa** $R(s, a, s')$, che associa un valore numerico a ciascuna transizione. Tale valore rappresenta quanto é "vantaggioso" per l'agente compiere la transizione da s a s' mediante a . A differenza dei problemi di ricerca, dove si cerca di minimizzare la funzione di costo, negli MDP si cerca di massimizzare la funzione di ricompensa.

Risolvere un problema MDP consiste, come di consueto, nel trovare una sequenza di azioni che permetta di passare dallo stato iniziale ad uno degli stati obiettivo. Tuttavia, gli MDP presentano delle criticitá che nei problemi di ricerca sono assenti.

In un problema di ricerca, la soluzione é una sequenza di azioni che conducono dallo stato iniziale ad uno stato obiettivo. In un MDP questo non é possibile, perché una certa sequenza di azioni é in grado di portare da uno stato ad un altro solamente con una certa probabilitá. L'azione da eseguire in un certo stato può essere pensata come una variabile aleatoria, alla quale é associata una probabilitá per ciascun valore che questa può assumere. Pertanto, una soluzione per agenti probabilistici deve specificare cosa un agente debba fare in *ogni* stato in cui l'agente potrebbe trovarsi.

Negli MDP é necessario introdurre il concetto di **politica**. Per convenzione, una politica viene indicata con π : dato uno stato s , $\pi(s)$ é l'azione raccomandata dalla politica π per lo stato s . La qualità di una politica é pertanto misurata sulla base di qual'é

Ogni volta che una determinata politica viene eseguita a partire dallo stato iniziale, la natura stocastica dell'ambiente porta a generare diverse sequenze di azioni, ciascuna con una propria probabilitá. La "qualità" di una politica viene pertanto misurata a partire dall'utilità *attesa* delle possibili sequenze di azioni generate da tali politiche. Una **politica ottimale** é una politica che restituisce il piú alto valore di utilità possibile, a prescindere da quale sia l'effetto dell'azione che l'agente esegue. Una politica ottimale viene indicata con π^* . L'agente, sulla base della percezione corrente, determina lo stato s in cui si trova ed esegue l'azione $\pi^*(s)$.

Data una sequenza di n stati $[s_0, s_1, \dots, s_n]$, sia $U_h([s_0, s_1, \dots, s_n])$ la ricompensa complessiva di tale sequenza, rispetto ad una certa *regola* h . La regola piú semplice é la **ricompensa additiva**, dove la ricompensa totale é semplicemente la somma delle ricompense associate ai singoli stati:

$$U_h([s_0, s_1, \dots]) = R(s_0, \pi(s_0), s_1) + R(s_1, \pi(s_1), s_2) + \dots$$

Una regola alternativa é la **ricompensa con discount**, dove la ricompensa associata al trovarsi in un determinato stato decresce di una certa percentuale lungo le iterazioni. Questa regola é utile per modellare situazioni in cui si vuole impedire che la ricompensa cresca indefinitamente, introducendo una "penalitá" che aumenta mano a mano. Indicando con γ un valore compreso fra 0 e 1, la ricompensa totale adoperando tale regola é data da:

$$U_h([s_0, s_1, s_2, \dots]) = R(s_0, \pi(s_0), s_1) + \gamma R(s_1, \pi(s_1), s_2) + \gamma^2 R(s_2, \pi(s_2), s_3) + \dots$$

γ determina quanta prioritá debba dare l'agente al raggiungere determinati stati in una determinata iterazione. Se γ é un valore prossimo a 0, le ricompense date dagli stati raggiunti nelle prime iterazioni hanno un peso molto maggiore sul valore di ricompensa complessivo rispetto a quelle fornite dagli stati raggiunti nelle ultime iterazioni. Se γ é un valore prossimo ad 1, le ricompense date dagli stati raggiunti nelle prime iterazioni e nelle ultime iterazioni hanno un peso comparabile. Se γ é esattamente 1, non vi é alcuna differenza nel raggiungere uno stato in una certa iterazione piuttosto che in un'altra, e la regola con discount coincide di fatto con la regola additiva.

Usando la regola con discount, se il numero di stati é finito, la ricompensa complessiva U_h è un valore limitato.

Dimostrazione. Sia $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ un insieme finito di stati. Essendo finito, deve esserlo anche $\{R(s_0, \pi(s_0), s_1), R(s_1, \pi(s_1), s_2), R(s_{n-1}, \pi(s_{n-1}), s_n)\}$, che associa a ciascuna transizione una ricompensa. Pertanto, tale insieme deve avere un massimo; sia questo R_{max} . Si noti come $1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^n$ sia una serie geometrica; se γ è un valore compreso fra 0 e 1, vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \gamma^i = \frac{1}{1-\gamma} \Rightarrow 1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^n \leq \frac{1}{1-\gamma}$$

Moltiplicando ambo i membri per R_{max} :

$$R_{max} \sum_{i=0}^n \gamma^i \leq R_{max} \left(\frac{1}{1-\gamma} \right) \Rightarrow R_{max} + R_{max}\gamma + R_{max}\gamma^2 + \dots + R_{max}\gamma^n \leq \frac{R_{max}}{1-\gamma}$$

Essendo R_{max} maggiore di tutti i valori in $\{R(s_0, \pi(s_0), s_1), R(s_1, \pi(s_1), s_2), R(s_{n-1}, \pi(s_{n-1}), s_n)\}$, è possibile effettuare la seguente minora-zione:

$$R(s_0, \pi(s_0), s_1) + \gamma R(s_1, \pi(s_1), s_2) + \gamma^2 R(s_2, \pi(s_2), s_3) + \dots + \gamma^{n-1} R(s_{n-1}, \pi(s_{n-1}), s_n) \leq \frac{R_{max}}{1-\gamma}$$

É possibile comparare diverse politiche comparando fra loro le rispettive utilità attese. Assumendo che l'agente si trovi in un certo stato s_0 , sia S_t^π una variabile aleatoria che indica lo stato che raggiunge l'agente adoperando una certa politica π a partire dallo stato s_0 al tempo t . La distribuzione di probabilità lungo la sequenza di stati S_1, S_2, \dots é determinata a partire dallo stato s_0 , dalla politica π e dal modello di transizione, e viene indicata con $U^\pi(s_0)$:

$$U^\pi(s_0) = E[R(s_0, \pi(s_0), s_1) + \gamma R(s_1, \pi(s_1), s_2) + \gamma^2 R(s_2, \pi(s_2), s_3) + \dots] = E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(s_t, \pi, s_{t+1})\right]$$

Dove il valore atteso é calcolato rispetto alla distribuzione della sequenza di stati indotta dall'applicare π a s_0 . Sia $\pi_{s_0}^*$ la politica migliore fra tutte quelle applicabili a partire da s_0 : questa non é altro che la politica π che massimizza $U^\pi(s_0)$:

$$\pi_{s_0}^* = \operatorname{argmax}_{\pi} (U^\pi(s_0))$$

Fintanto che viene impiegata la regola con discount, é possibile dimostrare che la politica ottimale non dipende da quale stato viene usato come stato di partenza. Questo significa che, per qualsiasi stato s , il valore di utilità associato a tale stato é semplicemente $U^{\pi^*}(s)$, a prescindere di come tale stato viene raggiunto.

La funzione $U(s)$ permette all'agente di scegliere la prossima azione da compiere sulla base del principio di massima utilità attesa, ovvero che massimizza la somma pesata dalla probabilità di compiere una transizione verso un certo stato fra la ricompensa che viene ottenuta raggiungendolo e la penalità introdotta dalla regola con discount:

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_{a \in A(s)} \sum_{s'} T(s, a, s') \left[R(s, a, s') + \gamma U(s') \right]$$

Da questo segue una diretta relazione che sussiste fra l'utilità di uno stato e l'utilità degli stati vicini, ovvero quelli che l'agente può raggiungere a partire da questo: il valore di utilità di uno stato é dato dalla somma fra il valore atteso della ricompensa portata dalla prossima transizione sommata all'utilità (scontata) dello stato di arrivo, assumendo che l'agente scelga una politica ottimale. L'equazione risultante, che permette di esprimere la funzione di utilità degli stati in forma ricorsiva, prende il nome di **equazione di Bellman**:

$$U(s) = \max_{a \in A(s)} \sum_{s'} T(s, a, s') \left[R(s, a, s') + \gamma U(s') \right]$$

Un'altra quantità importante é la **funzione di azione-utilità**, o **Q-function**, che riporta l'utilità attesa dal compiere una certa azione in un certo stato. Il legame fra Q-function e funzione di utilità é immediato:

$$U(s) = \max_a Q(s, a)$$

Inoltre, é possibile estrarre la politica ottimale a partire dalla Q-function come segue:

$$\pi^*(s) = \operatorname{argmax}_a Q(s, a)$$

É possibile costruire una equazione di Bellman anche per la Q-function, notando come il valore atteso totale per il compiere una azione é dato dalla somma fra la ricompensa immediata e la penalit  del raggiungere il nuovo stato, che a sua volta   esprimibile in termini della Q-function:

$$Q(s, a) = \sum_{s'} T(s, a, s') \left[R(s, a, s') + \gamma U(s') \right] = \sum_{s'} T(s, a, s') \left[R(s, a, s') + \gamma \max_{a'} Q(s', a') \right]$$

Risolvendo una equazione di Bellman per U o per Q   possibile ricavare una politica ottima per un problema di planning probabilistico. Nello specifico, le equazioni di Bellman sono alla base di uno dei metodi usati per risolvere un problema MDP chiamato **value iteration**.

Per ciascuno stato s di un MDP dovrebbe venire calcolato $U(s)$ attraverso l'equazione di Bellman. Se il numero di stati dell'MDP   n , questo consiste nel risolvere un sistema di n equazioni in n incognite. Se tale sistema fosse un sistema di equazioni lineari questo sarebbe computazionalmente possibile, ma tale sistema non   lineare, perch  nell'equazione di Bellman compare l'operatore max, che non   lineare.

Value iteration aggira il problema "stimando" il valore di $U(s)$ per ciascuno stato di iterazione in iterazione fino ad ottenerne una approssimazione accettabile. Sia $U_i(s)$ il valore di utilit  per lo stato s alla i -esima iterazione; viene chiamato **aggiornamento di Bellman** l'aggiornamento di tale valore sulla base del precedente:

$$U_{i+1}(s) \leftarrow \max_{a \in A(s)} \sum_{s'} T(s, a, s') \left[R(s, a, s') + \gamma U_i(s') \right]$$

Inizialmente, i valori di $U(s)$ vengono impostati ad un valore casuale (in genere a 0), e le iterazioni proseguono fintanto che la differenza fra l'utilit  stimata fra una iterazione e quella successiva non   trascurabile.

```
S <= a set of states
A <= a set of actions A(s)
T <= the transition function T(s', a, s)
R <= the reward function R(s', a, s)
γ <= the discount function
ε <= the maximum error allowed in the utility of any state
```

```
function VALUE-ITERATION(S, A, T, R, γ, ε)
    δ <= 0
    foreach s in S do
        U[s] <= 0
        U'[s] <= 0

    do
        foreach s in S do
            foreach a in A[s] do
                U'[s] <= max(Q-VALUE(S, A, T, R, U, γ))
            if (|U'[s] - U[s]| > δ) then
                δ <= |U'[s] - U[s]|
        while (δ > ε (1 - γ) / γ)

    return U
```

Occorre perch  dimostrare che, dopo un numero sufficiente di iterazioni, value iteration restituisce effettivamente una stima corretta dei valori di $U(s)$.

Siano date una metrica d ed un fattore $c < 1$. Un operatore F viene detto **contrazione** se, applicandolo a due elementi del suo dominio, si ottengono due valori la cui distanza (rispetto a d)   inferiore al prodotto fra c e la distanza (rispetto a d) fra i due valori originari. Formalmente, si ha che F   una contrazione se vale:

$$d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in \operatorname{Dom}(F)$$

Se un operatore   una contrazione, allora ammette al pi  un solo punto fisso.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che l'operatore F ammetta due punti fissi, siano questi z e z' . La distanza fra i due   data da $d(z, z')$, mentre la distanza fra le rispettive applicazioni di F   data da $d(F(z), F(z'))$. Per definizione di punto fisso, si ha perch  $F(z) = z$ e $F(z') = z'$; questo significa che $d(z, z') = d(F(z), F(z'))$, ovvero che la distanza fra z e z' non cambia quando F viene a questi applicata. Dato che questo viola la propriet  di contrazione, deve aversi che tale coppia di punti fissi non possa esistere.

  facile verificare che la stessa situazione si presenta se viene scelto un qualsiasi numero di punti fissi superiore a 2, pertanto occorre concludere che il numero di punti fissi di una contrazione possa essere esclusivamente 1 oppure 0.

Se una contrazione ammette un punto fisso, allora una sua applicazione ripetuta ad un qualsiasi elemento del suo dominio converge a tale punto fisso. Ovvero, dato un operatore F ed il suo punto fisso x_0 , vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = F(F(F(\dots(F(x)))))) = x_0 \quad \forall x \in \text{Dom}(F)$$

La funzione $f(x) = x / 2$, che dimezza il valore passato in input, è una contrazione rispetto alla distanza euclidea. Infatti, dati due elementi del suo dominio x e y dove $x \leq y$:

$$d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y) \Rightarrow d\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \leq c \cdot d(x, y) \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \leq c(x - y) \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - cx + cy \leq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - c\right)x \leq \left(\frac{1}{2} - c\right)y \Rightarrow x \leq y$$

Ha inoltre uno ed un solo punto fisso in 0. Infatti, $f(0) = 0 / 2 = 0$.

L'aggiornamento di Bellman è una contrazione.

Dimostrazione. Per semplicità, si consideri l'aggiornamento di Bellman come un operatore B . È quindi possibile scrivere:

$$U_{i+1} \leftarrow BU_i$$

Occorre definire una metrica per lo spazio dei vettori U . Sia $\|U\|$ il valore assoluto della componente di U avente modulo maggiore:

$$\|U\| = \max_s |U(s)|$$

La metrica $d(U, U')$ viene allora definita come $\|U - U'\|$, ovvero il valore assoluto della differenza fra le componenti aventi modulo maggiore delle due utilità. Allora:

$$\|BU - BU'\| \leq \gamma \|U - U'\|$$

Essendo $\gamma \in (0, 1)$, si ha che l'aggiornamento di Bellman è una contrazione rispetto al fattore γ e alla metrica d .

Un approccio alternativo a value iteration è **policy iteration**. Questo si basa sul presupposto che una politica ottimale può essere ottenuta anche da una funzione di utilità inaccurata. Policy iteration alterna i seguenti due step in ciascuna iterazione i :

- **Policy evaluation:** data una politica π_i , viene calcolato $U_i = U^{\pi_i}$, la funzione di utilità in ciascuno stato se venisse applicata π_i ;
- **Policy improvement:** viene calcolata una nuova politica π_{i+1} , migliore di π_i , a partire da U_i .

L'algoritmo termina quando la politica π_i non è più in grado di influire sul risultato di U_i . Quando questo accade, si ha che U_i è (approssimativamente) un punto fisso per l'aggiornamento di Bellman, ed è quindi una soluzione per l'equazione di Bellman, e la politica π_i che la ha generata è una politica ottima. Essendo il numero di politiche finito e venendo le politiche migliorate ad ogni iterazione, è garantito che l'algoritmo termini.

```

S <= a set of states
A <= a set of actions A(s)
T <= the transition function T(s', a, s)
R <= the reward function R(s', a, s)
γ <= the discount function

function POLICY-ITERATION(S, A, T, R, γ)
  foreach s in S do
    U[s] <= 0
  stop <= true
  π <= RANDOM-POLICY()

  do
    U <= POLICY-EVALUATION(S, A, T, R, γ)
    foreach s in S do
      foreach a in A[S] do

```

Search and plan

```
        a* <= argmax(Q-VALUE(S, A, T, R, γ))
    if (Q-VALUE(S, a*, T, R, γ) > Q-VALUE(S, γ[s], T, R, γ)) then
        π[s] <= a*
        stop <= false
while (stop)

return π
```

Implementare `POLICY-EVALUATION` é piú semplice che risolvere l'equazione di Bellman "per intero" (come viene fatto da value iteration), perché l'azione che compare nell'equazione non é una incognita. Infatti, questa é la azione che viene raccomandata dalla politica π_i nello stato s , quindi é una informazione nota:

$$U_i(s) = \sum_{s'} T(s, \pi_i(s), s') \left[R(s, \pi_i(s), s') + \gamma U_i(s') \right]$$

Questo semplifica l'equazione eliminando l'operatore max e rendendola una equazione lineare. Se il numero di stati é n vi saranno n equazioni lineari in n incognite, e risolverle con metodi algebrici standard richiede un tempo di esecuzione pari a $O(n^3)$.

Capitolo 4

Intelligenza artificiale sub-simbolica

4.1 Apprendimento

Si dice che un agente compie un **apprendimento** se migliora le proprie prestazioni dopo aver compiuto delle osservazioni sull'ambiente. Quando l'agente in questione é un computer, si parla di **machine learning**: il computer ricava dei dati, costruisce un modello sulla base di questi ultimi ed utilizza tale modello sia come ipotesi sul mondo che come software in grado di risolvere problemi.

La programmazione tradizionale prevede essenzialmente di descrivere delle regole che, fornite ad un computer, risolvono un problema. Questo presuppone che il programmatore sappia *già*, in una qualche misura, come risolverlo. Nel machine learning, il programmatore stabilisce un modo per produrre dati che addestri un algoritmo di apprendimento a descrivere tali regole in maniera automatica al suo posto.

I motivi per investire su un agente in grado di apprendere sono fondamentalmente due. Il primo é che il designer non é in grado di anticipare ogni possibile situazione futura, ed é quindi necessario che sia l'agente stesso (eventualmente guidato) a prendersene carico. Il secondo é che alcuni problemi sono cosí complessi che nemmeno il designer é in grado di determinare come risolverli, eppure sufficientemente approcciabili da poter fornire gli strumenti all'agente per poterlo fare.

- Nel **supervised learning** l'agente sviluppa modelli predittivi sia sulla base dell'input che dell'output. Nello specifico, osserva diverse coppie di input-output e cerca di determinare la funzione che meglio mappa ogni input al relativo output. Un esempio di supervised learning é la **classificazione**: ai dati in input viene associata una **label** ed i dati vengono raggruppati sulla base di tali label.
- Nel **unsupervised learning** l'agente cerca di individuare dei pattern solo a partire dall'input ma non dall'output. Un esempio di unsupervised learning é il **clustering**¹: l'individuare delle proprietà comuni (cluster) nell'input e raggruppare l'input sulla base di tali proprietà, senza che i cluster siano noti a priori.
- Nel **reinforcement learning** l'agente apprende mediante una serie di rinforzi, sia positivi (ricompense) che negativi (punizioni). In sostanza, l'agente cerca di determinare quali sono le azioni che minimizzano le punizioni e massimizzano le ricompense per poi applicarle.
- Nell'**instance-based learning** l'agente non costruisce alcun modello, ma (con tecniche di clustering o affini) si limita ad individuare delle similarità fra i dati che gli vengono forniti, senza conoscenza pregressa.

Si noti come, nella maggior parte dei casi, un algoritmo di machine learning non prevede che questo debba costantemente apprendere, cosí come non debba necessariamente apprendere piú di una volta. Nonostante esistano alcuni algoritmi di machine learning basati sull'apprendimento continuo, in genere questi apprendono a partire da uno o piú dataset e mantengono indefinitamente la conoscenza acquisita. Similmente, le prestazioni di un algoritmo di machine learning non necessariamente migliorano aggiungendo nuovi dati alla sua conoscenza. Tali dati potrebbero infatti non fare altro che "confondere" l'immagine del mondo che l'algoritmo si é fatto.

Nello specifico, esistono due metodi per far apprendere ad algoritmo di machine learning: **batch learning** e **online learning**. Nel primo, l'algoritmo viene addestrato a partire dall'intero dataset, mentre nel secondo l'algoritmo viene addestrato fornendogli i dati sequenzialmente, in maniera individuale o in piccoli gruppi detti mini-batch. L'online learning permette di addestrare un algoritmo con un ammontare di dati che, se considerati tutti in una sola volta, richiederebbero risorse computazionali proibitive, ma richiede maggiore attenzione perché le informazioni apprese in ciascun istante possono influenzare ciò che viene appreso negli istanti successivi. A tale scopo é necessario definire un **learning rate**, ovvero quanto rapidamente debba l'algoritmo adattarsi alle nuove informazioni che vengono introdotte.

4.1.1 Supervised learning

L'obiettivo del supervised learning é il seguente: dato un **training set** di N esempi, costituiti da coppie input-output $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ generati da una funzione ignota $y = f(x)$, si trovi la funzione h che meglio approssima f . Si noti come x_i possa essere indifferentemente uno scalare oppure un vettore a k componenti.

La funzione h viene chiamata **ipotesi**, ed é estratta da uno **spazio di ipotesi** H di possibili funzioni. Con un diverso vocabolario é possibile chiamare h il **modello** dei dati, estratto da una **classe di modelli** H , oppure come una **funzione** estratta da una **classe di funzioni**. I valori dell'output y_i vengono chiamati **verità di base**: rappresentano i valori "reali" che il modello deve cercare di prevedere. In prima battuta, é possibile considerare buona un'ipotesi h se, per ogni coppia input-output (x_i, y_i) , $h(x_i)$ restituisce un valore che approssima bene y_i .

Un esempio di supervised learning si ha nei filtri antispam dei client di posta elettronica. L'idea é quella di fornire al filtro un grande quantitativo di email contrassegnate come spam ed un grande quantitativo di email contrassegnate come non spam, di modo che questo possa estrarre dei pattern comuni nelle email spam e non spam. A questo punto, se viene fornita al filtro una mail qualsiasi, questo é (dovrebbe essere) in grado di determinare autonomamente se la mail é o non é spam.

1. Talvolta, i termini "unsupervised learning" e "clustering" sono intesi come sinonimi, ma questo non é formalmente corretto.

4.1.2 Unsupervised learning

A differenza del supervised learning, nell'unsupervised learning non sono note a priori le classi in cui gli elementi del dataset vanno catalogati. L'idea é che i dati debbano prima venire esplorati per individuare se esistono fra loro dei pattern comuni, e poi classificare i dati sulla base di questi.

Per determinati problemi, esistono soluzioni che sono intrinsecamente legate all'unsupervised learning. Un esempio é quello che viene chiamato **dimensionality reduction**, ovvero la trasformazione di dati da uno spazio dimensionale ampio ad uno spazio dimensionale piú ristretto, senza che questo comporti una perdita (troppo) significativa di informazione. Un altro esempio é dato da **anomaly detection**, ovvero riuscire ad identificare, dato un insieme di dati, quei (pochi) elementi che deviano in maniera significativa dalla maggioranza e la cui presenza non é giustificabile.

Un esempio di unsupervised learning, in particolare di anomaly detection, é il modo in cui le banche determinano se un pagamento é (potenzialmente) avvenuto senza la consapevolezza del titolare del conto bancario. L'idea é quella di individuare dei pattern negli acquisti fatti usando una determinata carta (cosa viene comprato, a che orario, quanti soldi vengono spesi, ecc ...) e notificare il responsabile se viene effettuato un pagamento che devia sensibilmente dalla routine.

Sebbene le tecniche di clustering siano molto diverse, tutte fanno uso di una funzione (non necessariamente una metrica) di distanza, utilizzata per definire quanto due elementi del dataset siano *simili*: minore é la distanza, maggiore é la somiglianza.

É evidente come il clustering e la classificazione siano fra loro legate: entrambe si occupano di determinare, fornito un certo input, a quale classe questo appartiene, ed entrambe portano a termine il compito mediante tecniche di machine learning. Eppure, le due differiscono notevolmente. Innanzitutto, nella classificazione, le classi sono note, mentre nel clustering queste non sono note (e devono venire invece dedotte a partire dal dataset stesso). Inoltre, nella classificazione é possibile tenere da parte dei dati ed utilizzarli per valutare le performance del modello, mentre nel clustering é molto piú complicato un approccio di questo tipo. Infine, dato che i nomi delle classi non sono noti a priori, un problema di clustering richiede che venga anche dato un "senso" alle classi che questo induce (ammesso che sia possibile farlo).

Il clustering é molto piú "esplorativo" della classificazione, tanto che può essere usato prima di operare un algoritmo di classificazione di modo da fornirgli una base d'appoggio. Ovvero, prima si approccia il problema come un problema di clustering, si analizzano le classi che questo induce, eventualmente se ne cambiano e/o se ne eliminano alcune e poi sulla base di questa etichettatura si opera un algoritmo di classificazione.

4.1.3 Reinforcement learning

Nel reinforcement learning, l'agente interagisce con l'ambiente e riceve periodicamente delle ricompense o delle punizioni, sotto forma di **segnali**, che riflettono il modo in cui sta operando. Non é presente alcun supervisore. In genere il **feedback**, ovvero la reazione dell'agente al segnale, non é immediata, ma impiega del tempo per essere elaborata. Possono presentarsi delle situazioni in cui il guadagno sul breve termine deve essere sacrificato per ottenere un guadagno sul lungo termine.

L'operato dell'agente si traduce quindi nel massimizzare la ricompensa che gli viene fornita e minimizzare la punizione. Questo tipo di apprendimento richiede che sia valida (o che, piú correttamente, venga assunto essere valida) la cosiddetta **reward hypothesis**, ovvero che tutti gli obiettivi possano essere espressi in termini di valore atteso di ricompensa. Questo non solo non é sempre possibile, ma spesso ha anche un risultato non neutrale.

Il concetto di ricompensa era già presente nei Markov Decision Process, e l'obiettivo degli MDP é il medesimo del reinforcement learning: massimizzare la ricompensa attesa migliorando la propria politica. Tuttavia, il reinforcement learning non consiste semplicemente nel risolvere un MDP: l'agente é parte dell'MDP. Infatti, non conosce a priori la funzione di transizione e la funzione di ricompensa: il massimo che può fare é stimarle sulla base delle sue osservazioni.

Esistono fondamentalmente due approcci al reinforcement learning:

- **Model-based Reinforcement learning**, dove l'agente ipotizza, a partire dalle sue osservazioni sull'ambiente, quale possa essere una funzione di transizione in grado di interpretare i segnali di ricompensa. In genere, gli agenti che adottano questo approccio cercano di imparare una funzione di utilità $U(s)$ definita in termini di somma delle ricompense dallo stato s in poi;
- **Model-free reinforcement learning**, dove l'agente non solo non conosce la funzione di transizione dell'ambiente, ma nemmeno la modellizza, apprendendo invece una rappresentazione piú diretta su come agire.

Essendo i problemi di reinforcement learning intrinsecamente sequenziali (ad ogni passaggio, l'agente subisce l'effetto di un segnale), é in genere preferibile una situazione in cui vale l'assunzione Markoviana.

4.2 Alberi di decisione

Un **albero di decisione (decision tree)** é la rappresentazione di una funzione che mappa un vettore di valori attributo ad un singolo valore, che rappresenta la "decisione". Un albero di decisione raggiunge la sua conclusione compiendo una serie di test, partendo dal nodo radice e seguendo un determinato percorso fino a raggiungere un nodo foglia.

In genere, i valori di input e output legati all'albero di decisione possono essere sia discreti che continui. Per semplicitá, si assuma che in input vi siano valori discreti e in output valori che possono essere *vero* (un esempio **positivo**) oppure *falso* (un esempio **negativo**). Questa classificazione prende il nome di **classificazione booleana**. Si indichino con \mathbf{x}_j il vettore che rappresenta il j -esimo input, con $x_{i,j}$ l' i -esimo attributo del j -esimo input e con y_j il j -esimo output.

Un albero di decisione è costruito a partire da una rappresentazione tabellare dei dati. Data una tabella avente n colonne, si ha che le prime $n-1$ sono le features, mentre l'ultima è l'annotazione. Se tale annotazione è un valore booleano, si parla di **classificazione**, mentre se è un valore numerico si parla di **regressione**.

Si considerino output aventi valori booleani; per analogia, gli alberi così generati prendono il nome di **alberi di decisione booleani**. Un albero di decisione booleano è un albero in cui, ad ogni nodo, viene presa in esame una delle features. Da ciascun nodo si diramano tanti figli quanti sono i possibili valori che tale feature può assumere. Nei nodi foglia viene scelto il valore dell'annotazione.

Un percorso che va dalla radice ad un nodo foglia può essere tradotto in una *regola* ovvero indica quali valori devono assumere le features che compaiono lungo i nodi affinché la sequenza di valori porti ad una decisione affermativa (il nodo foglia contiene *true*) o ad una decisione negativa (il nodo foglia contiene *false*). Più in generale, un albero di decisione booleano è equivalente ad una asserzione logica nella forma:

$$Output \Leftrightarrow (Path_1 \vee Path_2 \vee \dots)$$

Dove ciascun $Path_i$ è una congiunzione di coppie attributo-valore nella forma $A_m = v_x \wedge A_n = v_y \wedge \dots$, corrispondenti ad un percorso dalla radice ad una foglia. Interessante notare come tale espressione sia in forma normale a clausole, nello specifico nella forma normale disgiunta.

Esistono diversi alberi di decisione che rappresentano la stessa tabella, alcuni più efficienti di altri. Trovare l'albero di decisione *migliore* per una tabella, ovvero quello avente il minimo numero di nodi, è un problema NP-completo. Esistono però algoritmi euristici che permettono di trovare un albero di decisione generico (non necessariamente ottimale) con tempo di esecuzione approcciabile.

È possibile costruire un albero di decisione ricorsivamente mediante un algoritmo greedy di tipo divide-et-impera. L'albero viene costruito in maniera top-down: inizialmente viene preso in considerazione l'intero dataset, e ad ogni passaggio viene scelto un attributo che partiziona il dataset. La scelta dell'attributo avviene per mezzo di una funzione di "impurità".

```

DECISION-TREE(D, A, T)
1  if (tutti gli esempi appartengono alla stessa classe  $c_j$  in C) then
2    crea un nodo foglia T avente  $c_j$  come etichetta
3  else if ( $A = \emptyset$ ) then
4    crea un nodo foglia T avente  $c_j$  come etichetta, dove  $c_j$  è la classe avente più membri in D
5  else
6     $p_0 = \text{COMPUTE-ENTROPY}(D)$ 
7    foreach  $A_i$  in  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  do
8       $p_i = \text{COMPUTE-P-ENTROPY}(A_i, D)$ 
9    done
10    $A_g \leftarrow$  l'attributo in  $A_1, A_2, \dots, A_n$  che ha il massimo guadagno, ovvero massimo  $p_0 - p_i$ 
11   // Se  $A_g$  comunque non permette un guadagno ragionevole, allora si crea una classe subito
12   if  $(p_0 - p_i) < \text{threshold}$  then
13     crea un nodo foglia T avente  $c_j$  come etichetta, dove  $c_j$  è la classe avente più membri in D
14   else
15     crea un nodo decisione T sulla base di  $A_g$ 
16     partiziona D in m sotto-dataset disgiunti  $D_1, D_2, \dots, D_m$ , dove m sono i valori assumibili da  $A_g$ 
17     foreach  $D_j$  in  $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$  do
18       if  $(D_j \neq \emptyset)$  then
19         crea un nodo  $T_j$  figlio di T relativo al j-esimo valore assumibile da  $A_g$ 
20         // Rimuovi  $A_g$ 
21         DECISION-TREE( $D_j, A - \{A_g\}, T_j$ )

```

L'algoritmo ha in input tre variabili: D , A e T . La prima rappresenta l'insieme di individui considerati all'iterazione corrente (inizialmente tutti, poi verranno partizionati col proseguire delle iterazioni). La seconda rappresenta l'insieme di attributi ancora da analizzare (inizialmente tutti, poi verranno eliminati mano a mano che il dataset viene partizionato). La terza rappresenta la foglia che viene generata come sostituto al restante insieme di elementi a questo livello.

I casi base figurano nelle righe da 1 a 4. Il primo caso corrisponde alla condizione in cui tutti gli elementi di D hanno il medesimo valore per la j -esima classe; in questo caso la classificazione non ha ambiguità, ed è sufficiente creare un nodo foglia che ha tale classe come etichetta. Il secondo caso si verifica non ci sono più attributi da analizzare; in questo caso, occorre scegliere come etichetta del nodo foglia la classe che compare più di frequente.

Se non si ricade in un caso base, si ha che i membri del dataset appartengono ad una varietà di classi. Occorre allora scegliere un attributo sulla base del quale eseguire la partizione e chiamare ricorsivamente l'algoritmo. Scegliere un attributo "buono" permette di avere alberi di decisione dove le classi presentano il minimo numero di impurità possibili. Per determinare quale sia l'attributo occorre introdurre la teoria dell'informazione.

La **teoria dell'informazione** fornisce una base matematica per misurare la quantità di informazione. Il valore dell'informazione viene misurato in **bit**: un bit è una unità di informazione sufficiente a discriminare fra due eventi equiprobabili.

A ciascun dataset D è possibile associare una misura di "impurità" o "disordine" chiamata **entropia**²:

2. Il termine è associato al concetto analogo in fisica.

$$\text{entropy}(D) = - \sum_{j=1}^{|C|} P(c_j) \log_2(P(c_j))$$

Il valore $P(c_j)$ indica la probabilità che, scelto un elemento casuale dal dataset D , questo appartenga alla classe c_j . Questo valore, moltiplicato per il logaritmo in base due di sé stesso, viene calcolato per ogni classe esistente e sommati fra di loro. Essendo $P(c_j) \in (0, 1)$, si ha che $\log(P(c_j))$ è un numero negativo; questo viene però reso positivo dal segno meno davanti alla sommatoria.

Il prodotto $P(c_j) \log_2(P(c_j))$ è complessivamente nullo sia nel caso in cui $P(c_j) = 0$, ovvero è certo che non esista alcun elemento di D che appartenga a c_j , sia nel caso in cui $P(c_j) = 1$, ovvero è certo che qualsiasi elemento di D appartiene a c_j . Infatti:

$$0 \cdot \log_2(0) = 0 \cdot (-\infty) = 0$$

$$1 \cdot \log_2(1) = 1 \cdot 0 = 0$$

Questo significa che il contributo portato dalla classe c_j all'entropia complessiva associata a D ha un valore non nullo solamente se la probabilità che un elemento di D appartenga a c_j è un valore che non è né 1 né 0. In altre parole, c_j fa aumentare l'entropia associata a D solamente se un elemento di D *potrebbe* appartenere a c_j . In particolare, il massimo del contributo all'entropia di D fornito da c_j si ha quando la probabilità che un elemento di D appartenga a c_j è circa un terzo:

$$\frac{d}{dx}(P(c_j) \log_2(P(c_j))) = 0 \Rightarrow \log_2(P(c_j)) + \frac{1}{\ln(2)} = 0 \Rightarrow \log_2(P(c_j)) = \frac{-1}{\ln(2)} \Rightarrow P(c_j) = 2^{-1/\ln(2)} \approx 0.3679$$

Se in una certa iterazione i viene scelto per compiere il partizionamento del dataset D l'attributo A_i , che può assumere v valori distinti, questo genererà v sotto-dataset D_1, D_2, \dots, D_v . È allora possibile calcolare l'entropia di D dopo aver eseguito la partizione sulla base di A_i come:

$$\text{entropy}_{A_i}(D) = \sum_{j=1}^v \frac{|D_j|}{|D|} \text{entropy}(D_j)$$

Dove ciascun termine della sommatoria corrisponde all'entropia nel j -esimo sotto-dataset "pesata" con il rapporto fra la sua dimensione e la dimensione dell'intero D . In questo modo, affinché un sotto-dataset contribuisca considerevolmente al valore totale dell'entropia di D dopo la partizione secondo A_i deve sia avere una sua alta entropia intrinseca sia essere grande (in rapporto all'intero D).

La differenza fra l'entropia di D prima che avvenga la partizione ($\text{entropy}(D)$) e l'entropia di D dopo che questo è stato partizionato sulla base di A_i ($\text{entropy}_{A_i}(D)$) indica quanta informazione viene "guadagnata" all'operare della partizione:

$$\text{gain}(D, A_i) = \text{entropy}(D) - \text{entropy}_{A_i}(D)$$

Questo significa che l'attributo che meglio conviene scegliere per partizionare D in una certa iterazione è quello che massimizza il valore di $\text{gain}(D, A_i)$.

Sebbene l'approccio sia stato illustrato per variabili discrete, questo può essere usato anche per la costruzione di alberi dove il dataset contiene variabili continue. L'idea è quella di scegliere un valore soglia per tale variabile e costruire due rami: uno per gli elementi che hanno un valore inferiore a tale soglia come valore dell'attributo ed uno per gli elementi che hanno un valore superiore. Una scelta semplice per il valore soglia di un attributo potrebbe essere la sua mediana.

Essendo gli alberi di decisione una tecnica per risolvere problemi di classificazione, si può incorrere in overfitting, ovvero dove l'albero costruito ben rappresenta il dataset usato per costruirlo ma mal rappresenta i dataset usati per testarlo. In genere questo accade quando l'albero ha troppi livelli e/o dei nodi con troppi figli, perché in genere questo si verifica se il dataset è molto rumoroso e quindi un certo attributo lo partiziona in troppi sotto-dataset.

Esistono fondamentalmente due approcci per ridurre l'overfitting. Il primo prevede di bloccare l'espansione di un nodo, di modo che l'albero non cresca; questo è molto difficile da fare nella pratica, dato che non è possibile sapere a priori di quanto crescerà un albero dopo che un nodo viene espanso. Il secondo approccio prevede di operare uno o più **pruning**, ovvero rimuovere uno o più rami dall'albero dopo che è stato costruito. Ad esempio, viene scelto un massimo livello di profondità ammissibile e tutto ciò che sta al di sotto di questa viene unificato, andando per maggioranza.

4.3 Valutare modelli di classificazione

Una volta costruito un modello per risolvere un problema di classificazione, si ha interesse a valutarne le prestazioni, eventualmente per compararlo con altri modelli analoghi. Esistono otto parametri rispetto ai quali valutare la qualità di un modello:

- **Accuratezza predittiva**, ovvero il rapporto fra il numero di classificazioni corrette ed il numero totale di dataset usati per testare il modello:

$$\text{Accuratezza} = \frac{\text{Numero di classificazioni corrette}}{\text{Numero totale di test}}$$

Naturalmente, il modello é tanto piú accurato quanto piú il rapporto tende ad 1;

- **Efficienza**, ovvero sia il tempo di esecuzione necessario per la costruzione del modello, sia il tempo di esecuzione impiegato dal modello nel venire utilizzato;
- **Robustezza**, ovvero quanto bene il modello é in grado di gestire dati rumorosi (non cadere nel sovradattamento) e se é in grado di gestire i dati mancanti (e come lo fa);
- **Scalabilitá**, ovvero quanto il modello riesce a contenere la crescita al crescere della dimensione dei dataset;
- **Interpretabilitá**, ovvero quanto il modello é in grado di "spiegare" il suo risultato a chi lo utilizza.
- **Compattezza**, ovvero quanto il modello riesce a descrivere il dataset in maniera conservativa (senza componenti ridondanti);
- **Bias**, ovvero la tendenza di una ipotesi predittiva a deviare dal valore atteso quando viene valutata sulla media di diversi training set. Se l'ipotesi non é in grado di individuare alcun pattern nei dati che le vengono forniti, si parla di **sottoadattamento**. Questo si verifica, in genere, quando il modello si basa su troppi pochi parametri.
- **Varianza**, ovvero il grado di "flessibilitá" dell'ipotesi dovuto alle fluttuazioni presenti nel training set. Se l'ipotesi si é troppo precisa nel modellare il dataset su cui é stata allenata, tanto da non poter essere adattata a dataset leggermente diversi, si parla di **sovradattamento**. Questo si verifica, in genere, quando il modello si basa su troppi parametri.

La tecnica piú semplice per allenare un dataset é quella che viene chiamata **holdout set**, applicabile quando la dimensione del dataset a disposizione é grande. Questa prevede di separare il dataset in due sotto-dataset, un dataset che verrá usato per allenare il modello e uno che verrá utilizzato per testarlo.

Una tecnica alternativa, chiamata **n-fold cross-validation**, é preferibile quando la grandezza del dataset a disposizione é limitata. Questa prevede di scegliere uno degli n sotto-dataset a disposizione per la costruzione del modello e usare i restanti $n-1$ per il testing, dopodiché ripetere la procedura n volte scegliendo sempre un sotto-dataset diverso per la costruzione del modello. Ciascuna iterazione della procedura avrà una sua accuratezza; l'accuratezza complessiva viene calcolata come media di tutte le n accuratezze cosí ottenute ³.

Nel caso in cui la dimensione del dataset a disposizione sia estremamente limitata, é possibile adottare un approccio chiamato **leave-one-out cross-validation**, o **LOOCV**. L'approccio é di fatto un n -fold cross-validation dove la dimensione del test set é unitaria, ovvero se il dataset é composto da n elementi, il sotto-dataset utilizzato per la costruzione del modello ha dimensione $n-1$ mentre quello utilizzato per il testing ha dimensione 1. L'operazione viene ripetuta n volte e si ricava l'accuratezza a partire dalla media delle n accuratezze parziali.

Idealmente, occorre assumere che la distribuzione dei dati utilizzati come modello e quella dei dati usati come test siano simili, altrimenti il modello costruito mediante allenamento non sará in grado di predire correttamente i dati futuri. Allo stesso tempo, i dati utilizzati per costruire il modello non devono essere usati anche per testarlo, altrimenti si avrebbe certamente che il modello fa predizioni corrette ma semplicemente perché il modello viene testato su sé stesso.

L'accuratezza é solo una delle possibili misurazioni per valutare le prestazioni del modello. Talvolta, si ha invece interesse a conoscere la grandezza di una classe: la classe di interesse é chiamata **classe positiva**, mentre tutte le altre sono dette **classi negative**. Un membro della classe positiva prende il nome di **esempio positivo**, mentre un membro della classe negativa prende il nome di **esempio negativo**. A partire da questa definizione viene costruita una **matrice di confusione**:

	Classificato come positivo	Classificato come negativo
Effettivamente positivo	TP (True Positive): il numero di esempi positivi classificati correttamente	FN (False Negative): il numero di esempi positivi classificati erroneamente
Effettivamente negativo	FP (False Positive): il numero di esempi negativi classificati erroneamente	TN (True Negative): il numero di esempi negativi classificati correttamente

A partire dai quattro valori tabellati nella matrice sono definite due metriche, **precision** p e **recall** r :

$$p = \frac{TP}{TP + FP} = \frac{\text{Esempi positivi classificati correttamente}}{\text{Esempi classificati positivi}}$$

$$r = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{\text{Esempi positivi classificati correttamente}}{\text{Esempi effettivamente positivi}}$$

p rappresenta quanto bene il modello é in grado di classificare i dati correttamente, mentre r rappresenta quanto il modello é in grado di "coprire" i dati (quanto poco tralascia gli esempi positivi, anche a costo di commettere un errore). Per comoditá, é possibile combinare le due metriche in una sola, chiamata **F₁-value** (o **F₁-score**), che non é altro che la loro media armonica:

$$F_1 = \left(\frac{p^{-1} + r^{-1}}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{p^{-1} + r^{-1}} = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{r}} = \frac{2pr}{p + r}$$

Questa metrica é di particolare interesse perché la media armonica di due valori tende ad essere vicina al piú piccolo dei due. Inoltre, dato che p e q compaiono sia al numeratore che al denominatore, il valore di F_1 é grande solamente se sia p che q sono a loro volta grandi.

3. In genere, sono comuni partizionamenti in 5 (5-fold cross-validation) o in 10 (10-fold cross validation) sotto-dataset.

4.4 K-nearest neighbour

Non tutte le tecniche di supervised learning atte a risolvere problemi di classificazione necessitano di costruire un modello. Infatti, non é nemmeno necessaria una fase di training. Fra queste tecniche figura **K-nearest neighbour (kNN)**, che permette di classificare un dataset con il solo requisito di avere a disposizione una metrica per definire una distanza fra gli elementi di un dataset.

Si assuma di avere a disposizione un dataset D già parzialmente classificato. Dato un numero fissato di vicini k , l'algoritmo é il seguente:

1. Preso un elemento $d \in D$, non classificato, si calcoli la distanza fra d e tutti gli altri elementi di D ;
2. Si costruisca l'insieme $P \subseteq D$ formato dai k elementi di D che hanno la piú piccola distanza da d ;
3. Sia c la classe che figura piú spesso fra gli elementi di P . All'elemento d viene assegnata la classe c ;
4. Se esiste ancora almeno un elemento $d' \in D$ non classificato, l'algoritmo riparte considerando d' . Altrimenti, l'algoritmo termina.

L'idea dell'algoritmo é di stimare $P(c \mid d)$, ovvero la probabilità che la classificazione corretta sia scegliere la classe c dato l'individuo d , con $absP / k$, ovvero il rapporto fra il numero di vicini di d con piú rappresentanti ed il numero totale di vicini di d . Essendo P un insieme estratto dai k vicini di d , il valore $absP / k$ é certamente compreso fra 0 e 1, ed é quindi un valore di probabilità.

Il valore di k viene in genere scelto in maniera empirica, operando ad esempio un k -fold cross validation ed osservando quale valore di k rende i risultati migliori. É preferibile scegliere un numero dispari come valore di k , perché in questo modo é piú raro che possa verificarsi una situazione di conflitto, ovvero dove ci sono piú classi fra i vicini di d con lo stesso numero di elementi. Nel caso in cui si verifichi un conflitto nel classificare d , di fatto é possibile assegnare a d una classe qualsiasi fra tutte quelle con pari rappresentanti fra i vicini di d .

Per quanto riguarda la nozione di distanza, la metrica concettualmente piú semplice é la **distanza di Minkowski**, ovvero una generalizzazione della distanza "classica" (distanza euclidea) a p dimensioni. Dato un dataset D dove ciascun elemento $d \in D$ ha p attributi, sia \mathbf{d}_q l'elemento sul quale l'algoritmo kNN sta operando. La distanza di Minkowski fra \mathbf{d}_q ed un altro elemento $\mathbf{d}_j \in D$ é indicata con $L^p(\mathbf{d}_q, \mathbf{d}_j)$, ed é data da:

$$L^p(\mathbf{d}_q, \mathbf{d}_j) = \left(\sum_i (|\mathbf{d}_{q,i} - \mathbf{d}_{j,i}|)^p \right)^{1/p}$$

Dove $\mathbf{d}_{j,i}$ indica l' i -esimo attributo dell'elemento \mathbf{d}_j .

Si noti come la distanza di Minkowski é influenzata da tutti gli attributi in maniera equa; in altri termini, tutti gli attributi hanno lo stesso peso. Vi sono però situazioni in cui é preferibile che un attributo sia piú o meno rilevante di altri nel calcolo della distanza; in questo caso, conviene utilizzare una metrica che assegni un peso agli attributi e non ne conti solamente il valore.

Una approccio alternativo é offerto dalla **normalizzazione**. Per ciascun attributo i viene calcolata la media μ_i e la deviazione standard σ_i , ed al posto di $x_{i,j}$ se ne usa la versione normalizzata, ovvero $(x_{i,j} - \mu_i) / \sigma_i$.

Non dovendo costruire alcun modello, il tempo di esecuzione per la fase di addestramento dell'algoritmo k-nearest neighbour é, tecnicamente, nullo. Lo stesso non si può dire per il suo utilizzo: dato che per ciascun elemento dell'esempio occorre calcolare la distanza fra questo e tutti gli altri elementi, il tempo di esecuzione della fase di inferenza é, nella migliore delle ipotesi, lineare nella dimensione del dataset.

Si noti come l'esistenza di una distanza per un dominio non sia una condizione scontata. Talvolta la costruzione di una distanza non é proprio possibile. Inoltre, il semplice fatto che due elementi di un dataset abbiano una distanza piccola fra di loro non implica necessariamente che appartengano alla stessa classe. Per questo motivo, kNN ha una applicabilità piú limitata rispetto, ad esempio, agli alberi di decisione, che richiedono molte meno assunzioni. Inoltre, quando il numero di dimensioni é grande, diventa molto difficile trovare dei punti che siano vicini fra di loro.

Nonostante questo, le prestazioni di kNN sono comunque molto competitive, addirittura superando, in certe situazioni, algoritmi molto piú elaborati.

4.5 Metodi ensemble

Fino ad ora sono stati considerati metodi di apprendimento che costruiscono un'ipotesi sulla base della quale vengono fatte delle predizioni. Alcune ipotesi hanno ottima precision che e bassa recall (tutti i positivi sono effettivamente positivi, ma alcuni vengono tralasciati), mentre altre hanno ottima recall e bassa precision (non tralascia alcun caso ma parte dei positivi sono falsi positivi). L'idea dei **metodi ensemble** é di costruire una collezione di ipotesi h_1, h_2, \dots, h_n , detta **ensemble**, e combinare le loro predizioni.

Questo può venire fatto calcolando la media sulle predizioni di ciascuna, scegliendone una di volta in volta o con un "ulteriore livello" di machine learning, che analizza le ipotesi e apprende quali ipotesi tendono ad essere migliori. Ciascuna ipotesi prende il nome di **modello base**, mentre la loro combinazione **modello ensemble**.

I metodi ensemble permettono di ridurre il bias. Lo spazio di ipotesi di un modello base potrebbe essere troppo restrittivo, imponendo un forte bias; un modello ensemble combina piú modelli base, pertanto é piú flessibile e piú espressivo di un singolo modello. Inoltre, i metodi ensemble permettono di ridurre la varianza, perché una parte dello spazio di ipotesi non catturata da un modello base può essere catturata da un altro modello base.

Si noti come sia del tutto irrealistico assumere che le ipotesi siano fra loro indipendenti, dato che condividono sia gli stessi dati che le stesse assunzioni. Per questo motivo, se un errore é presente nella maggior parte dei modelli base, questo sarà presente anche nel modello ensemble. Inoltre, per costruire un modello ensemble é necessario costruire n modelli base, e se il costo in termini di prestazione per la costruzione di un singolo modello é proibitiva quello per la costruzione di n modelli lo é ancor di piu.

4.5.1 Bagging

Il **Bagging** (contrazione di **Bootstrap AGGregatING**) é un metodo ensemble che prevede di generare K training set distinti a partire dal dataset originale D operando $|D|$ estrazioni con reimmissione sullo stesso D . Ovvero, vengono costruiti K dataset scegliendo casualmente un elemento di D per $|D|$ volte, con la possibilità che venga scelto più volte uno stesso elemento.

Per ciascuno dei K dataset viene poi costruita un'ipotesi, ottenendo K ipotesi distinte. Quando é necessario testare un nuovo input, questo viene valutato su tutte le ipotesi ed il giudizio finale é ottenuto combinando i risultati di tutte queste. Per un problema di classificazione, questo di fatto significa scegliere il risultato su cui la maggior parte delle ipotesi concordano.

Il bagging può essere applicato a qualsiasi classe di ipotesi, ma é particolarmente efficiente nei modelli **instabili** (come gli alberi di decisione), ovvero i modelli dove una piccola variazione nel training set comporta una variazione consistente nel modello. Nei modelli **stabili** (come k-nearest neighbour), il bagging può addirittura generare un ensemble di ipotesi con una performance peggiore dei singoli modelli base.

4.5.2 Boosting

Il **Boosting** é la tecnica di ensemble learning più popolare. Dato un dataset D , questo viene esteso aggiungendo a ciascun j -esimo elemento un peso w_j , che indica quanto tale elemento deve essere rilevante nel training dell'ipotesi. Un dataset i cui elementi hanno associato un peso é detto **dataset pesato**.

Inizialmente, a tutti gli elementi di D é associato un peso pari ad 1. Viene costruita una prima ipotesi h_1 usando un certo algoritmo di apprendimento; questa inevitabilmente classificherá incorrettamente una parte (idealmente piccola) del dataset. A tali dati viene incrementato il peso e viene costruita una nuova ipotesi sul dataset cosí modificato. Il procedimento viene ripetuto per k volte, con k fissato, generando k ipotesi. I valori di D difficili da classificare aumenteranno costantemente di peso fino a quando l'algoritmo non sarà costretto a prendere in considerazione tali valori e generare un'ipotesi che la classifichi correttamente.

Il modello ensemble cosí costruito classifica i dati sulla base dei voti dei modelli base, come nel bagging, ma in questo caso i voti sono pesati: alle ipotesi che hanno performato meglio sui rispettivi training set vengono dati più voti. Indicando con z_i il peso assegnato a ciascuna ipotesi, il risultato finale é dato da:

$$h(x) = \sum_{i=1}^K z_i h_i(x)$$

L'idea alla base del boosting é implementata in diversi algoritmi. Fra questi, ADABOOST é quello in genere utilizzato quando i modelli base sono alberi di decisione. ADABOOST possiede una importante proprietà: se l'algoritmo di apprendimento che costruisce l'ipotesi é un **algoritmo di apprendimento debole**, ovvero che l'algoritmo restituisce una ipotesi la cui accuratezza sul training set é leggermente migliore dello scegliere a caso, allora il modello ensemble restituito da ADABOOST classifica i dati perfettamente se il numero di modelli base é sufficientemente grande. Sia dato un insieme di m esempi $\langle (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \rangle$, con etichette $y_i \in Y = \{1, \dots, k\}$. Fissato un numero di iterazioni T , l'algoritmo é il seguente:

1. Si inizializzi $D_1(i) = 1 / m$ per ciascun i ;
2. Si inizializzi t ad 1;
3. Si costruisca un modello base h_t a partire dal training set D_t invocando un algoritmo di apprendimento debole;
4. Si calcoli ϵ_t , l'errore commesso da h_t su D_t :

$$\epsilon_t = \sum_{h_t(x_i) \neq y_i} D_t(i)$$

5. Se $\epsilon_t > 0.5$, allora viene impostato $T = t-1$ e si salta immediatamente all'ultimo punto;
6. Sia $\beta_t = \epsilon_t / (1 - \epsilon_t)$;
7. Si costruisca il dataset $D_{t+1}(i)$ da utilizzare per l'iterazione successiva:

$$D_{t+1}(i) = \frac{D_t(i)}{Z_t} \times \begin{cases} \beta_t & \text{se } h_t(x_i) = y_i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove Z_t é una costante di normalizzazione scelta di modo che D_{t+1} sia ancora una distribuzione;

8. Se $t < T$, si pone $t = t + 1$ e l'algoritmo riprende dal punto 3. Altrimenti, il modello ensemble é cosí costruito:

$$h_{\text{fin}}(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} \left(\sum_{h_t(x)=y} \log\left(\frac{1}{\beta_t}\right) \right)$$

4.6 Percettrone

Deep Learning é una ampia famiglia di tecniche per il machine learning dove le ipotesi prendono la forma di complessi circuiti algebrici fra loro interconnessi. Il termine "deep" si riferisce al fatto che i circuiti sono in genere organizzati in strati detti **layer**, il che significa che i percorsi computazionali dagli input agli output sono costituiti da diversi step.

Il deep learning ha origini nella modellazione matematica dei neuroni del cervello umano sotto forma di circuiti elettrici. Per questo motivo, le reti allenate mediante metodi di deep learning sono spesso anche chiamate **reti neurali (neural network)**.

L'esempio di rete neurale piú semplice (e storicamente piú datata) é il **percettrone**, una rete neurale in grado di risolvere il problema di classificazione binaria. Questo opera su un input \mathbf{x} , il quale possiede k features, e determina se tale input appartiene ad una certa classe (é un esempio positivo) oppure se non vi appartiene (é un esempio negativo). Matematicamente, un perceptron é costituito da tre elementi:

- Una funzione $f(\mathbf{x})$, che restituisce un vettore k -dimensionale. Ciascuna componente di tale vettore é un numero intero (positivo o negativo) che rappresenta il valore che ha \mathbf{x} rispetto a tale feature;
- Un vettore k -dimensionale \mathbf{w} , dove ciascuna sua componente é un numero intero che rappresenta il peso da assegnare a ciascuna feature, ovvero quanto quella feature é "rilevante" nel computo della classificazione dell'input;
- Una funzione $\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$, che restituisce il responso del perceptron.

L'output del perceptron é un esclusivamente +1 oppure -1. Nel primo caso, significa che l'input appartiene alla classe, mentre nel secondo caso che non vi appartiene. Tale output é cosí calcolato:

$$\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) = \text{sign}(w_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots w_k f_k(\mathbf{x}))$$

Si noti come la sommatoria nella formula non sia altro che il prodotto scalare fra il vettore k -dimensionale dei pesi \mathbf{w} ed il prodotto k -dimensionale delle features $f(\mathbf{x})$. Pertanto, la formula ha anche una interpretazione geometrica: il valore di $\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ sará positivo quando l'angolo formato dai vettori \mathbf{w} e $f(\mathbf{x})$ é acuto, mentre sará negativo se questo é ottuso.

Sia la funzione $f(\mathbf{x})$ che l'input \mathbf{x} stesso possono essere considerate note, ma lo stesso non si può dire di \mathbf{w} . Ovvero, quanto ciascuna feature debba essere "rilevante" agli occhi del perceptron non é necessariamente una informazione nota a priori. É possibile costruire un perceptron in grado di generare \mathbf{w} a partire dai dati che gli vengono forniti. Per farlo, si assuma di avere a disposizione n input $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ per i quali già é nota la loro classificazione, sia questa rispettivamente $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$. Questo training set può essere costruito utilizzando una qualsiasi tecnica di training (holdout set, k-fold cross validation, ecc ...).

Sia il vettore \mathbf{w} k -dimensionale inizialmente nullo (tutte le sue componenti hanno valore 0). Ciascun input \mathbf{x}_i viene classificato sulla base di \mathbf{w} : se il risultato fornito dal perceptron coincide con la vera classificazione, ovvero se $\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) = y_i^*$, non viene fatto nulla; se invece la classificazione restituita dal perceptron non é corretta, \mathbf{w} viene modificato di modo che, se si tenta di riclassificare \mathbf{x} , il perceptron fornisce la risposta corretta. Nello specifico, \mathbf{w} viene sostituito con:

$$\mathbf{w} + \left(\sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) \text{ se } y_i^* = +1 \qquad \mathbf{w} - \left(\sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) \text{ se } y_i^* = -1$$

Il motivo per cui questa sostituzione corregge la classificazione va cercata nell'interpretazione geometrica della sommatoria prima citata. Infatti, operando tale sostituzione si garantisce di ottenere un vettore risultante che ha la direzione opposta del precedente, e quindi il risultato $\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ viene cambiato di segno.

Si noti però come un vettore \mathbf{w} cosí costruito sará sempre un vettore che passa per l'origine, e questo limita di molto le capacità del perceptron. Per fare in modo che \mathbf{w} si discosti dall'origine é necessario introdurre un **bias**, ovvero una quantità che ne modifica il valore ma che non ha alcuna correlazione con i valori delle features del dataset in esame. Indicando tale valore con b , si modifica la funzione del perceptron come:

$$\text{out}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \text{sign}\left(b + \sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) = \text{sign}(b + w_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots w_k f_k(\mathbf{x}))$$

Di conseguenza, per correggere il valore di \mathbf{w} durante la sua costruzione sulla base dei dati, viene usata l'espressione:

$$\mathbf{w} + b + \left(\sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) \text{ se } y_i^* = +1 \qquad \mathbf{w} - b - \left(\sum_{i=1}^k w_i \cdot f_i(\mathbf{x})\right) \text{ se } y_i^* = -1$$

Il perceptron é un esempio di **classificatore lineare**, ovvero un classificatore che discrimina gli input sulla base di una combinazione lineare. Nello specifico, il perceptron costruisce una retta nell'iperpiano k -dimensionale che lo partiziona in due regioni: una che contiene tutti gli elementi positivi ed una che contiene tutti gli elementi negativi. Un dataset per il quale esiste (almeno) una retta avente questa caratteristica é detto **linearmente separabile**, e non tutti i dataset possiedono questa proprietà.

Teorema di convergenza del percettrone. Se un dataset D é linearmente separabile, allora é garantito che un percettrone, compiendo un numero finito di errori, sia in grado di classificarlo.

É possibile estendere il percettrone per permettergli di classificare un dataset in piú classi, fintanto che il loro numero é noto a priori. Si assuma pertanto di avere un dataset i cui elementi sono da suddividere in m classi, enumerate a partire da 1. Un percettrone di questo tipo non ha un solo vettore w , ma bensí m vettori w_1, w_2, \dots, w_m .

Indicando con b il bias, con k il numero di features e con y' il numero che identifica la classe, si ha:

$$y' = \operatorname{argmax}_y \left(b + \sum_{i=1}^k w_{y,i} \cdot f_i(x) \right) = \operatorname{argmax}_y (b + w_{y,1}f_1(x) + \dots w_{y,k}f_k(x))$$

Ovvero, la classe a cui viene assegnato x é quella che massimizza la somma fra il bias ed il prodotto scalare fra il vettore dei pesi di tale classe e $f(x)$.

Per costruire i vettori dei pesi w_y , a partire dai dati, si procede come é stato fatto per il percettrone a singola classe, con la differenza che in questo caso occorre correggere i valori di ciascun vettore. Si assuma di avere a disposizione n input x_1, x_2, \dots, x_n per i quali già é nota la classe a cui appartengono, siano queste rispettivamente $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$. A partire da m vettori w_1, \dots, w_m tutti inizialmente nulli, si cerca di classificare ciascun input x_i sulla base di tali vettori. Sia y_i' il risultato del percettrone: se questa coincide con la vera classe a cui x_i appartiene, ovvero se $y_i' = y_i^*$, non viene fatto nulla; se invece la classificazione restituita dal percettrone non é corretta, ciascun vettore w_j viene modificato di modo che, se si tenta di riclassificare x , il percettrone fornisce la risposta corretta. Nello specifico:

$$w_j + b + \left(\sum_{i=1}^k w_{i,j} \cdot f_i(x) \right) \text{ per la classe } y_i^* \qquad w_j - b - \left(\sum_{i=1}^k w_{i,j} \cdot f_i(x) \right) \text{ per tutte le altre}$$

Si noti inoltre come, dato un dataset linearmente separabile, possa esistere piú di una retta in grado di partizionarlo. Fra queste, quella da considerarsi migliore é quella che ha la massima distanza dagli elementi del dataset piú "esterni", ovvero quelli che si trovano piú vicino alla partizione opposta. L'algoritmo per la costruzione di un vettore dei pesi non garantisce di trovare la retta migliore, restituendone invece una qualsiasi (per quanto comunque corretta).

Per avere la garanzia di ottenere sempre la retta migliore, é possibile rifarsi ad un algoritmo chiamato **MIRA (Margin Infused Relaxed Algorithm)**, che non é altro che un affinamento dell'algoritmo di generazione dei vettori w . MIRA introduce una costante τ che modifica le componenti dei vettori w in maniera abbastanza incisiva da correggere la classificazione dell'input ma al contempo abbastanza conservativa da non far discostare troppo la direzione di w :

$$w_j + b + \tau \left(\sum_{i=1}^k w_{i,j} \cdot f_i(x) \right) \text{ per la classe } y_i^* \qquad w_j - b - \tau \left(\sum_{i=1}^k w_{i,j} \cdot f_i(x) \right) \text{ per tutte le altre}$$

Questa costante viene ricavata a partire da:

$$\tau = \min_w \frac{1}{2} \sum_y (\|w_y - w_{y'}\|)^2$$

4.7 Clustering basato su partizioni: K-means

Sia D un dataset costituito da n elementi x_1, x_2, \dots, x_n , dove ciascun elemento $x_i = x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,r}$ é una r -upla nello spazio $X \subseteq \mathbb{R}^r$. La dicitura $x_{i,j}$ indica il j -esimo attributo dell' i -esimo elemento di X .

L'algoritmo **k-means** partiziona il dataset fornito in k cluster: il valore di k deve venire specificato da chi fa uso dell'algoritmo. Ciascun cluster ha un baricento, chiamato **centroide**; si noti come il centroide non sia necessariamente un elemento del dataset. L'algoritmo é presentato di seguito:

1. Sia scelga un valore k ;
2. Si scelgano k elementi qualsiasi a partire dal dataset (detti **seed**): questi saranno i centroidi iniziali dei k cluster;
3. Per ciascun elemento del dataset che non é un centroide, si calcoli la distanza fra tale elemento e tutti i centroidi. L'elemento viene assegnato alla partizione il cui centroide ha la piú piccola distanza da questo. La distanza fra un elemento x_i ed un centroide m_j é data dalla consueta formula:

$$\operatorname{dist}(x_i, m_j) = \|x_i - m_j\| = ((x_{i,1} - m_{j,1})^2 + (x_{i,2} - m_{j,2})^2 + \dots + (x_{i,r} - m_{j,r})^2)^{1/2}$$

4. Si ricalcolino i centroidi sulla base dell'assegnazione ai cluster cosí effettuata. Naturalmente, nello spazio euclideo, la media di un cluster é data dalla media aritmetica dei suoi valori:

$$\mathbf{m}_j = \frac{1}{|C_j|} \sum_{\mathbf{x}_i \in C_j} \mathbf{x}_i$$

5. Se é stato raggiunto un criterio di terminazione, l'algoritmo termina. Altrimenti, si riprende dal punto 3.

I criteri di terminazione sono molteplici. Un criterio molto semplice consiste nel fissare un certo ϵ e valutare di quanto si discosta il nuovo valore dei centroidi (calcolato al punto 4) dal valore precedente: se questo scostamento é inferiore ad ϵ , l'algoritmo termina. Oppure, similmente, terminare l'algoritmo se il numero di elementi che vengono spostati di cluster alla fine della corrente iterazione é inferiore ad ϵ .

Approcci piú raffinati prevedono di definire dei parametri oggettivi sulla qualità dei cluster, e terminare l'algoritmo quando tale qualità raggiunge un valore accettabile. Idealmente, un cluster é considerabile un buon cluster quando ha sia una alta **coesione intra-cluster**, ovvero quando é un **cluster compatto** che una alta **coesione inter-cluster**, ovvero quando é un **cluster isolato**. Un cluster si dice compatto quando é piccola la distanza che hanno tutti i punti del cluster dal loro centroide, mentre si dice isolato quando é grande la distanza di ogni punto da tutti i punti dei cluster diversi dal proprio.

Siano C_j é il j -esimo cluster, \mathbf{m}_j il centroide del cluster C_j e $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)$ la distanza fra il punto \mathbf{x} ed il centroide \mathbf{m}_j . **Sum of Squared Error**, o **SSE** (*Somma degli Errori Quadratici*), é una possibile metrica che indica la compattezza di un cluster:

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^k \sum_{\mathbf{x} \in C_j} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{m}_j)^2$$

Per quanto riguarda quanto un cluster é isolato, si consideri un elemento \mathbf{x}_i , che é stato assegnato al cluster C_I . Sia $A(\mathbf{x}_i)$ il valore del centroide del cluster a cui \mathbf{x}_i appartiene, e sia invece $B(\mathbf{x}_i)$ la minima distanza media fra \mathbf{x}_i e tutti i punti di D che non si trovano in C_I . Il cluster che ha tale distanza é detto **neighbouring cluster**, perché é il cluster in cui sarebbe piú ragionevole inserire \mathbf{x}_i ad eccezione di C_I , essendo quello a questo piú vicino.

$$A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{m}_I = \frac{1}{|C_I|} \sum_{\mathbf{x}_j \in C_I} \mathbf{x}_j \qquad B(\mathbf{x}_i) = \min_{J \neq I} \frac{1}{|C_J|} \sum_{\mathbf{x}_j \in C_J} \text{dist}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$$

$A(\mathbf{x}_i)$ é una misura di quanto un elemento del dataset é vicino al centroide del cluster a cui appartiene, mentre $B(\mathbf{x}_i)$ é una misura di quanto un elemento del cluster é dissimile dagli elementi degli altri cluster. Pertanto, \mathbf{x}_i si trova in un cluster adatto se $A(\mathbf{x}_i)$ é un valore piccolo mentre $B(\mathbf{x}_i)$ é un valore grande.

Prende il nome di **Silhouette** associata a i la quantità $S(\mathbf{x}_i)$ cosí calcolata:

$$S(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 - A(\mathbf{x}_i) / B(\mathbf{x}_i) & \text{se } A(\mathbf{x}_i) < B(\mathbf{x}_i) \\ 0 & \text{se } A(\mathbf{x}_i) = B(\mathbf{x}_i) \\ B(\mathbf{x}_i) / A(\mathbf{x}_i) - 1 & \text{se } A(\mathbf{x}_i) > B(\mathbf{x}_i) \end{cases}$$

É facile verificare che $S(\mathbf{x}_i)$ é un valore strettamente compreso fra -1 e 1. Affinché $S(\mathbf{x}_i)$ sia vicino ad 1, $A(\mathbf{x}_i)$ deve essere un valore piccolo e $B(\mathbf{x}_i)$ deve essere un valore grande, pertanto se $S(\mathbf{x}_i) \approx 1$ allora \mathbf{x}_i é stato ben classificato. Se invece $S(\mathbf{x}_i) \approx -1$, allora $A(\mathbf{x}_i)$ é grande e $B(\mathbf{x}_i)$ é piccolo, e quindi la classificazione é scadente. Se invece $S(\mathbf{x}_i) \approx 0$, allora $A(\mathbf{x}_i) \approx B(\mathbf{x}_i)$, e quindi l'elemento \mathbf{x}_i potrebbe indifferentemente appartenere al suo cluster o al neighbouring cluster.

K-means é indubbiamente molto semplice sia da comprendere che da implementare, ma é applicabile solamente a dataset con determinate caratteristiche. Innanzitutto, é applicabile solamente a dataset i cui elementi hanno esclusivamente attributi con valori numerici; se non lo sono, occorre preprocessare i dati per convertire gli attributi categoriali in attributi numerici equivalenti, e la semantica non può essere sempre mantenuta. Inoltre, k-means é applicabile ai soli dataset sui quali é possibile definire sia una distanza che una media fra i suoi elementi.

Inoltre, l'algoritmo é efficiente, dato che il suo tempo di esecuzione é $O(tkn)$, dove k é il numero di cluster, t é il numero di iterazioni e n é il numero di elementi del dataset; essendo k fissato e t (generalmente) piccolo, il tempo di esecuzione di k-means é quasi-lineare.

K-means é una tecnica di **clustering partizionale**, ovvero dove tutto il dataset viene preso in esame a prescindere da quanto sia rumoroso. Questo semplifica l'algoritmo, perché di per sé non compie alcun preprocessing sul dataset utilizzandolo subito, ma questo comporta che i cluster generati da k-means siano molto influenzati sia dalla scelta dei seed (cambiare i seed genera dei cluster diversi anche a partire dallo stesso dataset), sia dagli **outlier**, i dati isolati molto distanti dal resto degli elementi del dataset.

Dato che ogni elemento ha lo stesso peso nel computo della distanza dai centroidi, la presenza degli outlier destabilizza notevolmente il modo in cui i cluster vengono costruiti. Il problema può essere mitigato operando anomaly detection sul dataset, prima di operare k-means, di modo da individuare quanti piú outlier possibili ed eliminarli. Oppure, in particolar modo se il dataset é molto grande e gli outlier non sono (o si assume che non siano) molti, é possibile estrarne un sottoinsieme mediante random sampling ed applicare k-means su questo, di modo da ridurre il piú possibile l'eventualità che il sottoinsieme contenga un outlier.

Infine, il raggruppamento di piú elementi sulla base di una distanza genera dei cluster che sono necessariamente delle iper-ellissi r -dimensionali con il centroide al loro centro. Tuttavia, non tutti i dataset si adattano a venire partizionati in iper-ellissi (o in generale a cluster che sono insiemi convessi), ed in questo caso k-means non sarà mai in grado di fornire dei cluster che ben partizionano tale dataset.

Nonostante tutti i difetti sopra citati, k-means (e le sue varianti) rimane comunque l'algoritmo piú utilizzato per risolvere il problema del clustering grazie alla sua semplicità ed alla sua efficienza. Inoltre, non sembrano esserci prove che un algoritmo di clustering sia migliore degli altri a prescindere dal dataset: in genere, le loro performance dipendono dalla forma del dataset e dal tipo dei loro attributi.

ID	X	Y
1	35.19	12.189
2	26.288	41.718
3	0.376	15.506
4	26.116	3.963
5	25.893	31.515

ID	X	Y
6	23.606	15.402
7	28.026	15.47
8	26.36	34.488
9	23.013	36.213
10	27.819	41.867

ID	X	Y
11	39.634	42.23
12	35.477	35.104
13	25.768	5.967
14	-0.684	21.105
15	3.387	17.81

ID	X	Y
16	32.986	3.412
17	34.258	9.931
18	6.313	29.426
19	33.899	37.535
20	4.718	12.125

Per quanto sia possibile definire metriche oggettive per valutare la qualità dei singoli cluster (SSE, silhouette, ecc ...), valutare la qualità del clustering nel suo complesso è un problema non banale, dato che una ground truth con cui testare il modello è generalmente assente. Infatti, a differenza della classificazione, non sono noti quali sono effettivamente i cluster, pertanto non vi è modo di compararli con i cluster indotti da k-means.

In alcuni contesti, della ground truth per un problema di clustering esiste, ma spesso si tratta di informazioni che si trovano al di fuori del dataset. In questo caso, è possibile valutare la qualità del clustering come fosse un problema di classificazione. L'idea è quella di trattare ciascun cluster come fosse una classe in un problema di classificazione, costruire sulla base di queste una matrice di confusione ed a sua volta calcolare a partire da questa le statistiche di sorta (precision, F-score, ecc ...).

Come già anticipato, molto spesso il clustering figura nella fase esplorativa della risoluzione di un problema più complesso. Pertanto, un possibile modo per valutare la qualità del clustering è farlo in maniera indiretta sulla base della qualità del risultato finale: se questa è buona, allora il clustering che è stato fatto a monte del procedimento deve essere stato buono a sua volta.

4.8 Clustering basato su densità: DBSCAN

Il **clustering basato su densità** prevede di costruire dei cluster a partire da un dataset sulla base di come questi sono aggregati. I cluster sono regioni di spazio densamente popolate, separate da spazio poco popolato, di forma del tutto arbitraria.

Sia p un punto n -dimensionale e siano ϵ e MinPts due numeri strettamente positivi fissati. A partire da una data nozione di distanza, si definisce ϵ -**neighbourhood** (o ϵ -**vicinato**) l'insieme $N_\epsilon(p)$ costituito da tutti i punti q che distano meno o pari a ϵ da p :

$$N_\epsilon(p) = \{q \mid d(p, q) \leq \epsilon\}$$

Si dice che un punto p ha una densità alta se $N_\epsilon(p)$ contiene almeno MinPts punti. Sulla base di MinPts è possibile classificare i punti di un insieme in tre categorie:

- Se un punto ha più punti di MinPts nel suo ϵ -vicinato, è detto **core point**. Un core point è un punto che verrà scelto come centroide di un cluster;
- Se un punto ha meno punti di MinPts nel suo ϵ -vicinato ma si trova nell' ϵ -vicinato di un core point, è detto **border point**;
- Se un punto non è né un core point né un border point, è detto **noise point**. Un noise point è considerato rumore, un punto "non interessante" che verrà escluso dal clustering.

Un punto q è detto **direttamente raggiungibile** a partire da p se p è un core point e q si trova nell' ϵ -vicinato di p . Se un punto r è direttamente raggiungibile a partire da q e q è direttamente raggiungibile a partire da un punto p allora si dice che r è **indirettamente raggiungibile** a partire da p (a prescindere che r sia direttamente raggiungibile da p o meno). Si noti come la raggiungibilità, sia diretta che indiretta, non è una proprietà necessariamente simmetrica.

Un algoritmo di clustering basato su densità molto semplice è **DBSCAN**. Dato un dataset D e fissati due valori strettamente positivi ϵ e MinPts, a ciascun elemento p di D è possibile associare un tipo: not visited, visited oppure noise. L'algoritmo è presentato di seguito:

```
DBSCAN(D, ε, MinPts)
  C ← nuovo cluster
  foreach p ∈ D do
    if p.type = "not visited" then
      p.type ← "visited"
      NeighbourOfP ← REGION-QUERY(p, ε)
      if (|NeighbourOfP| < MinPts) then
        p.type ← "noise"
      else
        C ← nuovo cluster
        EXPAND-CLUSTER(p, NeighbourOfP, C, ε, MinPts)
```

```
EXPAND-CLUSTER(p, NeighbourOfP, C, ε, MinPts)
  C ← C ∪ {p}
  foreach q ∈ NeighbourOfP do
    if (q.type = "not visited") then
      q.type ← "visited"
      NeighbourOfQ ← REGION-QUERY(q, ε)
      if (|NeighbourOfQ| ≥ MinPts) then
        NeighbourOfP ← NeighbourOfP ∪ NeighbourOfQ
  if (q non è membro di alcun cluster) then
    C ← C ∪ {q}
```

```
REGION-QUERY(p, ε)
  return tutti i punti nell'ε-vicinato di q, compreso p stesso
```

Quando DBSCAN viene invocato, viene inizializzato un cluster C , dopodiché viene iterativamente esaminato ogni elemento p del dataset D di tipo `not visited`. All'elemento p viene innanzitutto cambiato tipo in `visited`, dopodiché viene costruito l' ϵ -vicinato di tale elemento. Se tale insieme contiene meno elementi di `MinPts`, allora quel punto è certamente un noise point. Questo perché da una parte è troppo isolato per essere un core point, ma d'altra parte non è stato ancora visitato, e quindi non si trova nell' ϵ -vicinato di nessun altro punto, pertanto non può nemmeno essere un border point.

Se l' ϵ -vicinato di p ha invece abbastanza elementi, allora tale punto deve essere un core point, e viene a tal scopo chiamata la procedura `EXPAND-CLUSTER`. Questa innanzitutto aggiunge p al cluster, dopodiché osserva tutti i punti q che si trovano nell' ϵ -vicinato di p . Se q è di tipo `not visited`, viene cambiato il loro tipo in `visited` e si osserva l' ϵ -vicinato di q a sua volta. Se l' ϵ -vicinato di q contiene più elementi dell' ϵ -vicinato di p , i due insiemi vengono uniti, perché gli elementi dell' ϵ -vicinato di q sono indirettamente raggiungibili a partire da p . Se q non appartiene ad alcun cluster, allora viene aggiunto al cluster in esame.

I valori di ϵ e di `MinPts` devono essere scelti con cura, dato che influenzano di molto il clustering che ne risulta. Un valore di ϵ o di `MinPts` troppo piccolo potrebbe indurre un clustering dove quasi tutti i punti sono considerati noise point, e quindi dove quasi nessun punto viene effettivamente preso in considerazione. Un valore di ϵ o di `MinPts` troppo grande potrebbe indurre un clustering dove quasi tutti i punti sono inclusi nello stesso cluster. I valori dei parametri devono essere ricavati a partire dai dati stessi.

Come regola pratica, `MinPts` deve essere almeno pari al numero di attributi degli oggetti più uno. Più nello specifico, una scelta sicura per `MinPts` è il doppio del numero degli attributi, ma per dataset particolarmente grandi e/o rumorosi un valore maggiore si rivela essere una scelta migliore.

Si noti come si scegliesse `MinPts` = 1, tutti i punti verrebbero identificati come core point, pertanto il clustering non avrebbe alcun senso.

Il valore di ϵ può essere stimato costruendo un **k-distance plot**: fissato k come `MinPts` meno uno, lungo l'asse delle ascisse si riportano gli oggetti ordinati in ordine crescente per distanza dal loro k -esimo vicino, mentre sull'asse delle ordinate la distanza stessa. In genere, una curva costruita sulla base di questi dati ha inizialmente un andamento stabile per poi avere una crescita rapida: il valore di ϵ è scelto il punto della curva in cui si ha tale variazione di pendenza.

A differenza di altri algoritmi di clustering, come ad esempio K-means, DBSCAN ha una tolleranza al rumore nettamente superiore, ed è inoltre in grado di generare cluster di forma arbitraria (non solo insiemi convessi). Tuttavia, è molto sensibile al modo in cui i parametri ϵ e `MinPts` vengono fissati. Inoltre, mentre K-means è un algoritmo con tempo di esecuzione lineare nel numero degli elementi, DBSCAN è quadratico, perché un'implementazione (naive) dell'algoritmo richiede di calcolare la distanza da ogni elemento ad ogni altro elemento.