

Indice

1. Cinematica	2
1.1. Punto materiale unidimensionale	2
1.2. Punto materiale bidimensionale	4

1. Cinematica

1.1. Punto materiale unidimensionale

Il modello piú semplice per descrivere un moto é quello **unidimensionale**, ovvero di un punto materiale che si muove lungo una linea retta. Il punto al centro della retta indica il punto zero, detto **origine**. La direzione positiva della retta é quella in cui le coordinate della posizione del punto aumentano, mentre quella negativa é quella in cui le coordinate diminuiscono. Il segno piú e meno indica in quale delle due direzioni il punto si trova; il segno piú viene in genere sottinteso.

La **posizione** é una quantità $\vec{x}(t)$ in funzione del tempo, un vettore che ha punto iniziale nell'origine e punto finale nella coordinata che corrisponde a dove si trova il punto materiale nel dato istante di tempo.

Lo **spostamento** $\Delta\vec{x}$ é il vettore differenza fra una posizione di partenza $\vec{x}(t)$ ed una posizione di arrivo $\vec{x}(t_0)$. Una differenza di tempo Δt é la differenza tra un tempo finale t ed un tempo iniziale t_0 . É pertanto possibile scrivere:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0)$$

Si indica invece con **distanza** la lunghezza complessiva che é stata percorsa dal punto materiale. Questa non é una quantità vettoriale, bensí uno scalare, ed é sempre positiva, mentre lo spostamento può essere sia positivo che negativo.

Esercizio 1.1.1: Un punto materiale si muove in linea retta a partire dall'origine e da un tempo iniziale $t_0 = 0$. Dopo un certo tempo t_1 si trova a L metri dall'origine; dopo un ulteriore tempo t_2 si trova di nuovo nell'origine. Calcolare spostamento e distanza al tempo $t_1 + t_2$.

Soluzione: $\Delta t = t_1 + t_2 - t_0 = t_1 + t_2 - 0 = t_1 + t_2$.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2 + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2) - \vec{x}(0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

$$d(\Delta t + t_0) = \| L + L \| = 2L$$

□

La rapidità con cui uno spostamento é compiuto é inversamente proporzionale al tempo impiegato. Ovvero, se uno stesso spostamento viene compiuto in meno tempo, la rapidità di tale spostamento é piú alta. La **velocità media** fornisce una prima informazione su quanto rapidamente avvenga lo spostamento di un corpo, da una situazione di partenza ad una di arrivo:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} [\text{m s}^{-1}]$$

Essendo la velocità media un rapporto tra un vettore ed uno scalare, é anch'essa un vettore. Inoltre, essendo il tempo una quantità non negativa, il segno della velocità media é necessariamente lo stesso dello spostamento. É possibile associare una velocità anche alla distanza, chiamata **velocità scalare media**. Tale grandezza é data dal rapporto fra la distanza percorsa in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

$$\vec{s}_{\text{media}} = \frac{d(x)}{\Delta t} = [\text{m s}^{-1}]$$

Cosí come la distanza, anche la velocità scalare media é (come da nome) uno scalare, ed é sempre positiva.

La velocità media non é ancora sufficiente a descrivere il concetto di rapidità dello spostamento, perché non é in grado di descrivere cosa accade istante per istante, ma soltanto ciò che accade in due istanti (partenza e arrivo); tutto ciò che avviene nel mezzo é perduto.

Per ottenere questa forma di velocità è possibile calcolare la velocità media in un lasso di tempo sempre più piccolo. L'idea è che se è possibile calcolare la velocità media in un lasso di tempo infinitesimo, si avrebbe la conoscenza della velocità istante di tempo per istante di tempo, ovvero una **velocità istantanea**¹:

$$\vec{v}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{\text{media}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) [\text{m s}^{-1}]$$

Si noti infatti come l'espressione nel penultimo termine dell'uguaglianza corrisponda perfettamente alla definizione di derivata. Inoltre, riportando la funzione posizione-tempo su un piano cartesiano, è evidente come la velocità istantanea non sia altro che un vettore lungo la tangente in quel punto.

Oltre alla variazione della posizione in funzione del tempo, potrebbe essere d'interesse a conoscere la variazione della velocità in funzione del tempo. Tale variazione è descritta dall'**accelerazione media**:

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} [\text{m s}^{-2}]$$

Così come per la velocità, è possibile definire una **accelerazione istantanea**:

$$\vec{a}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) [\text{m s}^{-2}]$$

La velocità istantanea e l'accelerazione istantanea sono le quantità che vengono indicate come “velocità” e “accelerazione” in senso stretto. Pertanto, se non specificato diversamente, si tende ad indicare la velocità e l'accelerazione istantanea semplicemente con “velocità” e “accelerazione”.

In genere, l'accelerazione è nota (per altri mezzi) così come lo è il tempo, mentre non lo è la velocità. Per tale motivo, è ragionevole esplicitare la formula rispetto alla velocità. Questo comporta di invertire una derivata, ovvero calcolare un integrale:

$$\int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \vec{v}(t') dt' = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) \qquad \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \vec{x}(t') dt' = \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$$

Una espressione di questo tipo necessita però di descrivere interamente la funzione con cui varia l'accelerazione. Questo può essere fatto solamente se la funzione accelerazione è una funzione nota.

Il caso più semplice da esaminare si ha quando l'accelerazione non cambia mai, ovvero quando la funzione accelerazione è una funzione costante. In altri termini, $\vec{a}(t) = \vec{a}$ per qualsiasi istante di tempo t . Recuperando la formula, si ha:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' = \int_{t_0}^t \vec{a} dt' = \vec{a} \int_{t_0}^t dt' = \vec{a} \cdot (t - t_0) = \vec{a}t - \vec{a}t_0$$

È poi possibile fare lo stesso rispetto alla posizione, sostituendo nell'espressione della velocità la formula appena ricavata:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \int_{t_0}^t \vec{v}(t_0) + \vec{a}t - \vec{a}t_0 dt' = \int_{t_0}^t \vec{v}(t_0) dt' + \int_{t_0}^t \vec{a}t dt' - \int_{t_0}^t \vec{a}t_0 dt' = \\ &= \vec{v}(t_0) \int_{t_0}^t dt' + \vec{a} \int_{t_0}^t t dt' - \vec{a} \int_{t_0}^t t_0 dt' = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) - \vec{a} \left(\frac{1}{2} t_0^2 \right) = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Riassumendo le due formule trovate ed esplicitando rispetto a $\vec{x}(t)$ e $\vec{v}(t)$ si ottiene la legge oraria per un punto materiale con accelerazione costante. Tale tipo di moto viene anche detto **moto uniformemente accelerato**:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0) \qquad \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2$$

Un esempio di moto uniformemente accelerato è il **moto in caduta libera**. Questo è tipo di moto che descrive i corpi lasciati liberi di subire l'effetto della forza di gravità del pianeta Terra. Tale accelerazione è indipendente da

¹In realtà, questa è una semplificazione. Infatti, non è davvero possibile considerare un istante di tempo infinitesimo, perché al di sotto di una certa scala diventa impossibile osservare lo scorrere del tempo. Pertanto, si dovrebbe parlare di “lasso di tempo arbitrariamente piccolo” più che infinitesimo.

qualsiasi caratteristica del corpo che compie il moto, come la sua massa o la sua forma (Il motivo per cui questo non sempre avviene è perché la forma di un corpo subisce l'attrito dell'aria).
Tale accelerazione varia a seconda dell'altitudine: più ci si trova vicino al livello del mare e più è intensa. Tuttavia, per le applicazioni pratiche il suo valore è approssimativamente costante, ed è pari a $\pm 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

1.2. Punto materiale bidimensionale

Per analizzare un moto in due dimensioni, non è sufficiente considerare posizioni, velocità e accelerazioni esclusivamente in termini del loro valore assoluto e del loro segno. Diventa pertanto necessario associarvi un vettore, il cui modulo rappresenta il valore in sé associato alla quantità e la direzione rappresenta come questo si orienta nello spazio bidimensionale.

Un punto materiale che si muove in due dimensioni può essere decomposto come somma di un moto unidimensionale in orizzontale ed un moto unidimensionale in verticale. È allora possibile descrivere una posizione in due dimensioni \vec{r} in un certo tempo fissato t_0 come una somma vettoriale:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{x}(t_0) + \vec{y}(t_0) = \hat{i}x(t_0) + \hat{j}y(t_0)$$

Essendo le due direzioni completamente indipendenti, per costruire dei vettori velocità è sufficiente calcolare separatamente velocità per ciascuna direzione ed operare una somma vettoriale:

$$v_x(t) = \cos(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad v_y(t) = \sin(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}y(t) \quad \vec{v}(t) = \hat{i}v_x(t) + \hat{j}v_y(t)$$

Lo stesso può essere fatto per l'accelerazione:

$$a_x(t) = \cos(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) \quad a_y(t) = \sin(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) \quad \vec{a}(t) = \hat{i}a_x(t) + \hat{j}a_y(t)$$

Si assuma che sia l'accelerazione rispetto alla componente orizzontale che quella rispetto alla componente verticale siano costanti. Diventa allora possibile scrivere delle leggi orarie per la posizione rispetto ad entrambe le componenti:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \quad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2$$

Un caso di studio particolarmente interessante è quello del **moto parabolico**, ovvero di un oggetto che si muove nello spazio unicamente sottoposto all'attrazione gravitazionale.

Un corpo di questo tipo si muove lungo la direzione orizzontale con accelerazione costante pari a 0, mentre si muove lungo la direzione verticale con accelerazione costante pari a $-g$, essendo influenzato dalla gravità della Terra (il segno meno è dovuto al fatto che la gravità va dall'alto al basso). Fintanto che la distanza percorsa è sensibilmente più piccola del raggio terrestre, è possibile approssimare la Terra come un piano ed è quindi giustificato considerare l'accelerazione di gravità uniforme ovunque. Un moto di questo tipo può quindi essere descritto lungo le due direzioni come:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \quad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Il nome moto parabolico viene dal fatto che risolvendo la prima equazione rispetto a $(t - t_0)$ e sostituendo nella seconda, si ottiene l'equazione di una parabola:

$$\begin{aligned}
y(t) &= y(t_0) + v_y(t_0) \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)} \right)^2 = \\
y(t_0) + \frac{\cancel{\sin(\theta)v(t_0)}[x(t) - x(t_0)]}{\cancel{\cos(\theta)v(t_0)}} - \frac{g[x^2(t) + x^2(t_0) - 2x(t)x(t_0)]}{2(\cancel{\cos(\theta)v(t_0)})^2} &= \\
y(t_0) + \tan(\theta)[x(t) - x(t_0)] - \frac{gx^2(t) + gx^2(t_0) - 2gx(t)x(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} &= \\
y(t_0) + \tan(\theta)x(t) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} + \frac{2gx(t)x(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} &= \\
\underbrace{\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} \right) x^2(t)}_A + \underbrace{\left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)} \right) x(t)}_B + \underbrace{y(t_0) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}}_C &=
\end{aligned}$$

Dove A , B e C sono costituite da valori noti.

A partire da tale equazione è possibile calcolare il range orizzontale, ovvero la posizione in cui il corpo si trova orizzontalmente alla stessa altezza di quando il corpo è stato lanciato. Per farlo è sufficiente imporre $y(t) = y(t_0)$; dato che le due quantità si trovano da parti opposte dell'equazione, le due si elidono, ottenendo:

$$\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} \right) x^2(t) + \left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)} \right) x(t) - \left(\tan(\theta)x(t_0) + \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} \right) = 0$$

Un'altro caso di studio di moto in due dimensioni è il **moto circolare uniforme**, un moto in cui un corpo materiale si muove descrivendo una traiettoria circolare la cui velocità è costante in modulo.

In questa particolare situazione, il numero di rivoluzioni che il punto compie è necessariamente costante, pertanto per descrivere il suo moto è sufficiente conoscere il tempo che il punto materiale impiega per compiere un giro completo. Il numero di rivoluzioni che un punto materiale compie in un secondo prende il nome di **frequenza**, mentre il tempo necessario per compiere un giro completo prende il nome di **periodo**:

$$\nu = \frac{\text{numero di giri}}{1\text{s}} [\text{Hz}] \qquad T = \frac{1}{\nu} [\text{s}]$$

Viene poi definita **velocità angolare**. La velocità in senso stretto (la velocità istantanea) è quindi il prodotto fra la velocità angolare ed il raggio del cerchio descritto dalla traiettoria del corpo.

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} [\text{rad s}^{-1}] \qquad v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r [\text{m s}^{-1}]$$

Come di consueto, il vettore velocità è dato dalla derivata della posizione, pertanto tale vettore è una tangente al cerchio descritto dal punto materiale.

Sebbene il moto abbia una velocità costante in modulo, la sua direzione varia costantemente, pertanto il vettore velocità (ovvero, se si considera sia la direzione del moto che il suo modulo) non è costante. È quindi possibile associare a questo moto una accelerazione, derivando la velocità. Il verso di questo vettore accelerazione punta sempre verso il centro, pertanto prende il nome di **accelerazione centripeta**.

Per ricavare il modulo, è possibile approssciare il problema descrivendo il moto usando come sistema di riferimento un sistema di assi rotanti, dove il primo versore \hat{u}_r si trova sulla retta che congiunge il punto con il centro del cerchio descritto mentre il secondo versore \hat{u}_θ è a questo perpendicolare.

Il sistema di riferimento così descritto cambia la direzione dei suoi versori in ogni istante di tempo, ma ha il vantaggio di avere il vettore velocità sempre parallela al versore \hat{u}_r e sempre perpendicolare al versore \hat{u}_θ mentre il vettore spostamento è sempre parallelo al versore \hat{u}_θ e sempre perpendicolare al vettore \hat{u}_r . È allora possibile scrivere:

$$\vec{v} = \hat{u}_\theta v \qquad \vec{r} = \hat{u}_r r$$

Il versore \hat{u}_θ può essere scomposto lungo due componenti, una orizzontale ed una verticale, rispetto ad un secondo sistema di riferimento centrato nel centro del cerchio. In ogni istante di tempo, il versore descrive un diverso angolo θ con l'orizzontale, pertanto le due componenti sono dipendenti dal tempo. È pertanto possibile decomporre il vettore come:

$$\hat{u}_\theta = \hat{i}u_\theta^x(t) + \hat{j}u_\theta^y(t) = \hat{i} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) + \hat{j} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) = \hat{j} \cos(\theta(t)) - \hat{i} \sin(\theta(t))$$

Dove il fattore 1 deriva dal fatto che \hat{u}_θ è un versore e ha quindi modulo 1. La quantità $\frac{\pi}{2}$ deriva invece dal fatto che l'angolo che si sta considerando è quello formato dal versore \hat{u}_r , che è perpendicolare a quello formato da \hat{u}_θ , ed è quindi "spostato" di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Derivando la velocità rispetto al tempo, si ha il modulo dell'accelerazione centripeta:

$$\begin{aligned} |a| &= \left| \frac{d}{dt} \vec{v} \right| = \left| \frac{d}{dt} \hat{u}_\theta v \right| = v \left| \frac{d}{dt} \hat{u}_\theta \right| = v \left| \frac{d}{dt} (\hat{j} \cos(\theta(t)) - \hat{i} \sin(\theta(t))) \right| = v \left| \frac{d}{dt} \hat{j} \cos(\theta(t)) - \frac{d}{dt} \hat{i} \sin(\theta(t)) \right| = \\ &= v \left| -\hat{j} \sin(\theta(t)) \frac{d}{dt} \theta(t) - \hat{i} \cos(\theta(t)) \frac{d}{dt} \theta(t) \right| = v \left| \hat{j} \sin(\theta(t)) \omega + \hat{i} \cos(\theta(t)) \omega \right| = v \omega \left| \hat{j} \sin(\theta(t)) + \hat{i} \cos(\theta(t)) \right| = \\ &= v \omega \sqrt{\sin^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))} = v \omega \cdot 1 = \omega r \cdot \omega = \omega^2 r \end{aligned}$$

Che è anch'essa costante, dato che nella sua espressione non vi è una dipendenza dal tempo.

Esercizio 1.2.1: Il moto di rivoluzione di un pianeta attorno alla sua stella può essere approssimato ad un moto circolare uniforme². Sapendo che la Terra dista circa 1.496×10^{11} m dal Sole, qual'è il valore della velocità angolare che ha la Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole? E quello dell'accelerazione centripeta?

Soluzione: La Terra impiega (circa) 1 anno a compiere una rivoluzione completa attorno al Sole, ed è pertanto questo il periodo del moto in esame:

$$1 \text{ anno} = 365 \text{ giorni} = 8760 \text{ ore} = 525600 \text{ minuti} = 31536000 \text{ s}$$

Noto il periodo, è possibile calcolare la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7 \text{ s}} = 2.00 \times 10^{-7} \text{ rad s}^{-1}$$

Nota la velocità angolare, è possibile calcolare l'accelerazione centripeta:

$$a = \omega^2 r = (2.00 \times 10^{-7} \text{ rad s}^{-1})^2 \cdot 1.496 \times 10^{11} \text{ m} = 5.93 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-2}$$

□

²Questo è vero solamente se il pianeta in questione si trova sufficientemente vicino alla stella. Più è lontano, più l'orbita che descrive si fa ellittica.