Indice

1. Introduzione

1.1. Cos'é la fisica?

Come tutte le altre scienze, la fisica è una scienza basata su osservazioni sperimentali e misure quantitative. L'obiettivo principale della fisica è quello di determinare poche leggi fondamentali che governano i fenomeni naturali, ed usarle nello sviluppo di teorie che siano in grado di predire in anticipo i risultati di esperimenti successivi. Le leggi fondamentali sono espresse nei linguaggio della matematica, lo strumento che fa da ponte fra teoria ed esperimento. Quando c'è disaccordo tra le predizioni di una teoria ed i risultati sperimentali è necessario modificare la teoria, o formularne una nuove finché il disaccordo scompaia. Esistono una moltitudine di sottoinsiemi della fisica, che si occupano di studiare la natura da diversi punti di vista: la termodinamica studia il comportamento dei corpi in relazione ai cambiamenti della temperatura, la fisica nucleare studia le microscopiche particelle che costituiscono la materia, la meccanica studia la velocitá dei corpi e la loro posizione nello spazio, ecc.

In genere, non é possibile osservare un fenomeno interagendovi direttamente. Per questo motivo, é preferibile approcciarvi costruendo un **modello** di un sistema fisico correlato a quel fenomeno. Per esempio, dal momento che sono troppo piccoli, non è possibile interagire direttamente con gli atomi. Viene creato allora un modello dell'atomo nella familiare rappresentazione come un sistema formato da un nucleo e da uno o piú elettroni esterni al nucleo. Una volta che le componenti fisiche del modello sono state fissate, siamo in grado di predirne il comportamento sulla base delle interazioni interne al sistema e con l'ambiente esterno al sistema. Un modello puó essere quindi pensato come una rappresentazione semplificata del sistema in cui il fenomeno si trova, dal quale vengono eliminate tutte le caratteristiche superflue che non sono necessarie ai fini dell'analisi in questione.

1.2. Grandezze fondamentali

Per descrivere i fenomeni naturali è necessario **misurare** i vari aspetti che li caratterizzano. Ogni **misura** è associata ad una **grandezza fisica**: le leggi della fisica sono espresse da relazioni matematiche fra le grandezze fisiche.

Se si vuole comunicare i risultati di una misura a qualcuno che voglia riprodurla è necessario definire una "unità campione" comune, che sia valida per entrambe le parti. Una qualunque unità campione deve essere facilmente disponibile e deve possedere una qualche proprietà che permetta una misura affidabile e riproducibile. Lo stesso campione, utilizzato da misuratori diversi per effettuare la stessa misura in un posto qualunque dell'Universo, deve dare sempre lo stesso risultato in ogni occasione. Inoltre, i campioni non devono cambiare o deformarsi nel tempo.

I campioni utilizzati nella fisica sono stati standardizzati dalla comunitá scientifica, e continuano a venire rifiniti per essere il piú precisi possibile. Questi campioni nella fisica sono chiamati **unitá di misura**. Esistono differenti insiemi di unitá di misura, ma quello piú importante ed adottato é il **Sistema Internazionale** (abbreviato **SI**), costituito da sette unitá di misura **fontamentali** che vengono fra loro combinate per generare unitá di misura composite. Le unitá fondamentali del SI sono le seguenti:

Grandezza	Unitá di misura	Simbolo
Lunghezza	Metro	m
Massa	Chilogrammo	kg
Tempo	Secondo	s
Temperatura	Kelvin	K
Corrente elettrica	Ampere	A
Quantitá di materia	Mole	mol
Intensitá luminosa	Candela	cd

Il modo in cui il campionamento delle unitá di misura viene effettuato é variegato. Ad esempio:

- Il metro é fissato alla distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo di 1299792458s. Questo sia perché la luce ha sempre la stessa velocitá, sia perché la luce é uguale a sé stessa dovunque nell'Universo;
- Il chilogrammo é fissato come la massa di un lega metallica tenuta sotto strettissime condizioni di sicurezza;

- Il secondo é fissato come 9192631770 volte il periodo delle vibrazioni di un atomo di cesio-133, grazie all'alta precisione degli orologi atomici.

Oltre alle unitá SI di base, vengono anche usati i loro multipli e sottomultipli. Per comoditá, vengono usati solamente i multipli e sottomultipli delle decine di ordini di grandezza, e vengono chiamate anteponendo alle unitá di base dei prefissi, quali:

Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{-24}	yocto	y
10^{-21}	zepto	z
10^{-18}	atto	a
10^{-15}	femto	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	milli	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d

Potenza	Prefisso	Abbreviazione
10^{3}	kilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y

Le grandezze scientifiche possono essere suddivise in due grandi macrocategorie: le **grandezze scalari** e le **grandezze vettoriali**. Le prime sono definite soltanto da un valore numerico, mentre le seconde sono definite da un vettore orientato e dal suo modulo. Una seconda distinzione (non mutualmente esclusiva con la precedente) é quella tra le **grandezze quantizzate** e le **grandezze continue**. Una grandezza quantizzata é una grandezza che puó assumere solo valori multipli di una unitá elementare detta **quanto**, mentre una grandezza continua é una grandezza che puó assumere ogni valore reale possibile.

In fisica i valori delle misurazioni sono in genere espressi in una notazione particolare, detta **notazione scientifica**. Per riscrivere un valore nella notazione scientifica occorre dividerlo per una potenza di dieci tale che il numero sia ridotto ad una sola cifra non decimale, per poi moltiplicarlo per la potenza stessa. Questa notazione é molto efficiente perché nella fisica é molto frequente che sia necessario riportare dei valori con moltissime cifre, e la notazione scientifica permette di esprimere un valore in maniera compatta senza perderne in accuratezza.

Esercizio 1.2.1: Convertire le seguenti grandezze in notazione scientifica: 0.0086m, 725555s, 0.00000000069kg.

Soluzione:

$$0.0086\text{m} = 8.6 \times 10^{-3}\text{m} \qquad 725555\text{s} = 7.255555 \times 10^{6}\text{s} \qquad 0.00000000069\text{kg} = 6.9 \times 10^{-10}\text{kg}$$

□

1.3. Errore di misurazione

Quando si effettua una misurazione, non ci si puó aspettare di ottenere un risultato che corrisponda perfettamente alla realtá, dato che sia i sensi che gli strumenti di misurazione hanno una portata limitata. Un modo semplice per delimitare l'ampiezza della certezza di una misurazione é effettuarne piú di una e farne la media: in altre parole, farne una **stima**. In fisica, una stima é ritenuta valida se é dello stesso **ordine di grandezza** del risultato atteso.

L'ordine di grandezza di una misurazione si ottiene come segue: se la parte non decimale del numero é minore di $\sqrt{10}$, allora l'ordine di grandezza equivale alla potenza di dieci per la quale questa é moltiplicato, se invece é superiore a $\sqrt{10}$ allora l'ordine di grandezza é la potenza di dieci che lo moltiplica piú uno. Per indicare che due valori hanno lo stesso ordine di grandezza si utilizza il simbolo $\sim$.

Quando si effettuano una serie di misurazioni ripetute, le cifre che compaiono nella stessa posizione in tutte le misurazioni sono dette **cifre significative**. In altre parole, le cifre significative di una misurazione sono le cifre su cui si é sufficientemente certi che siano *esatte*.

Quando delle operazioni matematiche vengono applicate a delle grandezze, bisogna tenere conto di quali cifre significative avrá il risultato. Come regola pratica é possibile assumere che il risultato di una operazione abbia numero di cifre significative pari a quelle dell'operando che ne ha di meno. Nel caso in cui il numero di cifre significative debba essere ridotto, é possibile arrotondare in questo modo: l'ultima cifra che si conserva va aumentata di 1 se la cifra successiva, che si scarta, è maggiore o uguale di 5, mentre rimane uguale se la cifra scartata è minore di 5. Dato che in un lungo calcolo si pué incorrere in una moltitudine di «rifiniture» delle cifre significative, una tecnica utile per evitare di accumulare errori è quella di attendere il risultato finale prima di arrotondare. Limitando l'approssimazione delle cifre significative ad un solo passaggio si é certi di accumulare il minor numero di errori possibile.

É possibile esprimere matematicamente quanto é accurata una misurazione mediante i concetti di **errore assoluto** e **errore relativo**. L'errore assoluto e_A é la semi-differenza tra la massima e la minima tra le misurazioni che sono state effettuate, mentre l'errore relativo e_R é il rapporto tra l'errore assoluto e la media matematica delle misurazioni effettuate. L'errore assoluto quantifica l'intervallo entro al quale i valori delle misurazioni sono da considerarsi accettabili, mentre l'errore relativo rappresenta lo scarto tra il valore ricavato dalla misurazione e il valore *reale*. L'errore relativo puó essere moltiplicato per 100% per ottenere l'**errore relativo percentuale** e_{Rp} che rappresenta, in percentuale, quanto la misurazione si avvicina al valore *reale*.

$$e_A = \frac{n_{\max} - n_{\min}}{2} \qquad e_R = \frac{e_A}{n_{\text{avg}}} \qquad e_{Rp} = e_R \cdot 100\%$$

Esercizio 1.3.1: Nel determinare la lunghezza di una scrivania, sono state effettuate cinque misurazioni, ottenendo i cinque valori seguenti:

2.5561m	2.5505m	2.5597m	2.5523m	2.5549m

Quali sono le cifre significative? Qual'é la misurazione media? Quali sono errore assoluto, errore relativo e errore relativo percentuale?

Soluzione: Le cifre significative sono le prime tre, perché compaiono in tutte e cinque le misurazioni. La misurazione media é data da:

$$\frac{2.5561\text{m} + 2.5505\text{m} + 2.5597\text{m}2.5523\text{m} + 2.5549\text{m}}{5} = 2.5547\text{m}$$

Errore assoluto, relativo e relativo percentuale sono dati da:

$$e_A = \frac{(2.5597 - 2.5505)\text{m}}{2} = 0.0046\text{m} \qquad e_R = \frac{0.0046\text{m}}{2.5547\text{m}} = 0.0018 \qquad e_{Rp} = 0.0018 * 100\% = 0.18\%$$

La misurazione media puó quindi essere scritta piú accuratamente come $2.5547\text{m} \pm 0.0046\text{m}$. □

2. Cinematica

2.1. Moto unidimensionale

Il modello piú semplice per descrivere un moto é quello **unidimensionale**, ovvero di un punto materiale che si muove lungo una linea retta. Il punto al centro della retta indica il punto zero, detto **origine**. La direzione positiva della retta é quella in cui le coordinate della posizione del punto aumentano, mentre quella negativa é quella in cui le coordinate diminuiscono. Il segno piú e meno indica in quale delle due direzioni il punto si trova; il segno piú viene in genere sottinteso.

La **posizione** é una quantitá $\vec{x}(t)$ in funzione del tempo, un vettore che ha punto iniziale nell'origine e punto finale nella coordinata che corrisponde a dove si trova il punto materiale nel dato istante di tempo.

Lo **spostamento** $\Delta\vec{x}$ é il vettore differenza fra una posizione di partenza $\vec{x}(t)$ ed una posizione di arrivo $\vec{x}(t_0)$. Una differenza di tempo Δt é la differenza tra un tempo finale t ed un tempo iniziale t_0. É pertanto possibile scrivere:

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0)$$

Si indica invece con **distanza** la lunghezza complessiva che é stata percorsa dal punto materiale. Questa non é una quantitá vettoriale, bensí uno scalare, ed é sempre positiva, mentre lo spostamento puó essere sia positivo che negativo.

Esercizio 2.1.1: Un punto materiale si muove in linea retta a partire dall'origine e da un tempo iniziale $t_0 = 0$. Dopo un certo tempo t_1 si trova a L metri dall'origine; dopo un ulteriore tempo t_2 si trova di nuovo nell'origine. Calcolare spostamento e distanza al tempo $t_1 + t_2$.

Soluzione: $\Delta t = t_1 + t_2 - t_0 = t_1 + t_2 - 0 = t_1 + t_2$.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(\Delta t + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2 + t_0) - \vec{x}(t_0) = \vec{x}(t_1 + t_2) - \vec{x}(0) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

$$d(\Delta t + t_0) = \parallel L + L \parallel = 2L$$

□

La rapiditá con cui uno spostamento é compiuto é inversamente proporzionale al tempo impiegato. Ovvero, se uno stesso spostamento viene compiuto in meno tempo, la rapiditá di tale spostamento é piú alta. La **velocitá media** fornisce una prima informazione su quanto rapidamente avvenga lo spostamento di un corpo, da una situazione di partenza ad una di arrivo:

$$\vec{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$$

Essendo la velocitá media un rapporto tra un vettore ed uno scalare, é anch'essa un vettore. Inoltre, essendo il tempo una quantitá non negativa, il segno della velocitá media é necessariamente lo stesso dello spostamento.

É possibile associare una velocitá anche alla distanza, chiamata **velocitá scalare media**. Tale grandezza é data dal rapporto fra la distanza percorsa in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo di tempo stesso.

$$\vec{s}_{\text{media}} = \frac{d(x)}{\Delta t} = [\mathrm{m\,s^{-1}}]$$

Cosí come la distanza, anche la velocitá scalare media é (come da nome) uno scalare, ed é sempre positiva.

La velocitá media non é ancora sufficiente a descrivere il concetto di rapiditá dello spostamento, perché non é in grado di descrivere cosa accade istante per istante, ma soltanto ció che accade in due istanti (partenza e arrivo); tutto ció che avviene nel mezzo é perduto.

Per ottenere questa forma di velocitá é possibile calcolare la velocitá media in un lasso di tempo sempre piú piccolo. L'idea é che se é possibile calcolare la velocitá media in un lasso di tempo infinitesimo, si avrebbe la conoscenza della velocitá istante di tempo per istante di tempo, ovvero una **velocitá istantanea**[1]:

$$\vec{v}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\text{media}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t)[\mathrm{m\,s^{-1}}]$$

Si noti infatti come l'espressione nel penultimo termine dell'uguaglianza corrisponda perfettamente alla definizione di derivata. Inoltre, riportando la funzione posizione-tempo su un piano cartesiano, é evidente come la velocitá istantanea non sia altro che un vettore lungo la tangente in quel punto.

[1] In realtá, questa é una semplificazione. Infatti, non é davvero possibile considerare un istante di tempo infinitesimo, perché al di sotto di una certa scala diventa impossibile osservare lo scorrere del tempo. Pertanto, si dovrebbe parlare di «lasso di tempo arbitrariamente piccolo» piú che infinitesimo.

Esercizio 2.1.2: Un punto materiale si sta muovendo; la sua posizione é nota in ogni istante a partire dall'equazione $x(t) = -4t + 2t^2$. Si vuole calcolare:

- Il suo spostamento tra gli istanti $t = 0\text{s}$ e $t = 1\text{s}$;
- Il suo spostamento tra gli istanti $t = 1\text{s}$ e $t = 3\text{s}$;
- La sua velocitá media tra gli istanti $t = 0\text{s}$ e $t = 1\text{s}$;
- La sua velocitá media tra gli istanti $t = 1\text{s}$ e $t = 3\text{s}$;
- La sua velocitá istantanea in $t = 2.5\text{s}$.

Soluzione:

$$\Delta x = x(1) - x(0) = (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)\text{m} - (-4 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2)\text{m} = (-4 + 2)\text{m} - (0 + 0)\text{m} = -2\text{m}$$

$$\Delta x = x(3) - x(1) = (-4 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2)\text{m} - (-4 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2)\text{m} = (-12 + 18)\text{m} - (-4 + 2)\text{m} = 8\text{m}$$

$$v_{\text{media}} = \frac{x(1) - x(0)}{1\text{s} - 0\text{s}} = \frac{-2\text{m}}{1\text{s}} = -2\text{m}\,\text{s}^{-1} \qquad v_{\text{media}} = \frac{x(3) - x(1)}{3\text{s} - 1\text{s}} = \frac{8\text{m}}{2\text{s}} = 4\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

$$v(2.5) = \frac{d}{dt}x(2.5) = \frac{d}{dt}_{t=2.5} - 4t + 2t^2 = -4 + 4 \cdot 2.5 = 6\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

□

Oltre alla variazione della posizione in funzione del tempo, potrebbe essere d'interesse a conoscere la variazione della velocitá in funzione del tempo. Tale variazione é descritta dall'**accelerazione media**:

$$\vec{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} [\text{m}\,\text{s}^{-2}]$$

Cosí come per la velocitá, é possibile definire una **accelerazione istantanea**:

$$\vec{a}_{\text{istantanea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt}\vec{x}(t) [\text{m}\,\text{s}^{-2}]$$

La velocitá istantanea e l'accelerazione istantanea sono le quantitá che vengono indicate come «velocitá» e «accelerazione» in senso stretto. Pertanto, se non specificato diversamente, si tende ad indicare la velocitá e l'accelerazione istantanea semplicemente con «velocitá» e «accelerazione».

In genere, l'accelerazione é nota (per altri mezzi) cosí come lo é il tempo, mentre non lo é la velocitá. Per tale motivo, é ragionevole esplicitare la formula rispetto alla velocitá. Questo comporta di invertire una derivata, ovvero calcolare un integrale:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\vec{v}(t') = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) \qquad \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\vec{x}(t') = \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)$$

Una espressione di questo tipo necessita peró di descrivere interamente la funzione con cui varia l'accelerazione. Questo puó essere fatto solamente se la funzione accelerazione é una funzione nota.

Esercizio 2.1.3: Un punto materiale si sta muovendo; la sua posizione é nota in ogni istante a partire dall'equazione $v(t) = 40t - 5t^2$. Qual'é l'accelerazione media tra gli istanti $t = 0\text{s}$ e $t = 2\text{s}$? Qual'é l'accelerazione istantanea al tempo $t = 2\text{s}$?

Soluzione:

$$a_{\text{media}} = \frac{v(2) - v(0)}{(2-0)\text{s}} = \frac{(40 - 5 \cdot 2^2)\text{m s}^{-1} - (40 - 5 \cdot 0^2)\text{m s}^{-1}}{2\text{s}} = \frac{20\text{m s}^{-1} - 40\text{m s}^{-1}}{2\text{s}} = -10\text{m s}^{-2}$$

$$a(2) = \frac{d}{dt}v(2) = \frac{d}{dt}_{t=2} 40t - 5t^2 = 40 - 5 \cdot 2(2) = 20\text{m s}^{-2}$$

□

2.1.1. Caso di studio: moto uniformemente accelerato

Il moto unidimensionale piú semplice da esaminare é il **moto uniformemente accelerato**, in cui la funzione accelerazione é una funzione costante. In altri termini, $\vec{a}(t) = \vec{a}$ per qualsiasi istante di tempo t. Recuperando la formula, si ha:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt' = \vec{a}\int_{t_0}^{t} dt' = \vec{a} \cdot (t - t_0) = \vec{a}t - \vec{a}t_0$$

É poi possibile fare lo stesso rispetto alla posizione, sostituendo nell'espressione della velocitá la formula appena ricavata:

$$\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0) + \vec{a}t - \vec{a}t_0 dt' = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0)dt' + \int_{t_0}^{t} \vec{a}tdt' - \int_{t_0}^{t} \vec{a}t_0 dt' =$$

$$\vec{v}(t_0)\int_{t_0}^{t} dt' + \vec{a}\int_{t_0}^{t} tdt' - \vec{a}\int_{t_0}^{t} t_0 dt' = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a}\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \vec{a}\left(\frac{1}{2}t_0^2\right) = \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Riassumendo le due formule trovate ed esplicitando rispetto a $\vec{x}(t)$ e $\vec{v}(t)$ si ottiene:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0) \qquad \vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Esercizio 2.1.1.1: Un aereo sta effettuando un atterraggio: tocca terra con una velocitá di 64m s^{-2} per poi rallentare con decelerazione costante fino a fermarsi. Quanto vale questa decelerazione se per fermarsi l'aereo impiega 2s? Qual'é la sua posizione dopo essersi fermato? Si assuma $t_0 = 0\text{s}$ e $x(t_0) = 0\text{m}$.

Soluzione: Se l'aereo sta rallentando con accelerazione (negativa) costante, sono valide le leggi del moto uniformemente accelerato. Il fatto che si sia fermato indica che la sua velocitá dopo 2s é nulla. La velocitá con cui l'aereo tocca terra é la velocitá con cui inizia il suo moto a decelerazione costante. Tale decelerazione é quindi:

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{v(2) - v(0)}{2\text{s} - 0\text{s}} = \frac{(0 - 64)\text{m s}^{-1}}{2\text{s}} = -32\text{m s}^{-2}$$

La sua posizione dopo essersi fermato é data da:

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(2) = x(0) + v(0) \cdot 2\text{s} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2\text{s} =$$

$$= 0\text{m} + 64\text{m s}^{-1} \cdot 2\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-32)\text{m s}^{-2} \cdot 4s^2 = 64\text{m}$$

□

2.1.2. Caso di studio: moto in caduta libera

Un esempio specifico di moto uniformemente accelerato é il **moto in caduta libera**. Questo é tipo di moto che descrive i corpi lasciati liberi di subire l'effetto della forza di gravitá del pianeta Terra. Tale accelerazione é indipendente da qualsiasi caratteristica del corpo che compie il moto, come la sua massa o la sua forma (Il motivo per cui questo non sempre avviene é perché la forma di un corpo subisce l'attrito dell'aria).

Tale accelerazione varia a seconda dell'altitudine: piú ci si trova vicino al livello del mare e piú é intensa. Tuttavia, per le applicazioni pratiche il suo valore é approssimativamente costante, ed é pari a $\pm 9.8\text{m s}^{-2}$.

Esercizio 2.1.2.1: Una palla viene lanciata verso l'alto con velocitá 20m s^{-1}, che ricade poi verso il basso toccando il suolo. Si assuma $t_0 = 0\text{s}$ e $x(t_0) = 0\text{m}$.

- Quanto tempo impiega la palla a raggiungere il punto di massima altezza?
- Qual'é la massima altezza che la palla riesce a raggiungere?
- Qual'é la posizione della palla al tempo $t = 5\text{s}$?
- Qual'é la velocitá della palla al tempo $t = 5\text{s}$?

Soluzione: Il punto di massima altezza é quello dove la palla é ferma a mezz'aria. Si noti come l'accelerazione del corpo in caduta libera sia negativa.

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow 0 = v(0) - g \cdot (t - 0) \Rightarrow t = \frac{v(0)}{g} = \frac{20\text{m s}^{-1}}{9.8\text{m s}^{-2}} = 2.04\text{s}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 = x(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0\text{m} + 20\text{m s}^{-1} \cdot 2.04\text{s} - \frac{1}{2}9.8\text{m s}^{-2}(2.04)^2\text{s}^2 = 20.4\text{m}$$

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow v(5) = v(0) - g \cdot (5 - 0) = 20\text{m s}^{-1} - 9.8\text{m s}^{-2} \cdot (5\text{s} - 0\text{s}) = -29\text{m s}^{-1}$$

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x(5) = x(0) + v(0) \cdot 5 - \frac{1}{2}g \cdot 5^2 = 0\text{m} + 20\text{m s}^{-1} \cdot 5\text{s} - \frac{1}{2}9.8\text{m s}^{-2}5^2\text{s}^2 = -22.5\text{m}$$

□

2.2. Moto bidimensionale

Per analizzare un moto in due dimensioni, non é sufficiente considerare posizioni, velocitá e accelerazioni esclusivamente in termini del loro valore assoluto e del loro segno. Diventa pertanto necessario associarvi un vettore, il cui modulo rappresenta il valore in sé associato alla quantitá e la direzione rappresenta come questo si orienta nello spazio bidimensionale.

Un punto materiale che si muove in due dimensioni puó essere decomposto come somma di un moto unidimensionale in orizzontale ed un moto unidimensionale in verticale. É allora possibile descrivere una posizione in due dimensioni $\vec{r}$ in un certo tempo fissato t_0 come una somma vettoriale:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{x}(t_0) + \vec{y}(t_0) = \hat{i}x(t_0) + \hat{j}y(t_0)$$

Essendo le due direzioni completamente indipendenti, per costruire dei vettori velocitá é sufficiente calcolare separatamente velocitá per ciascuna direzione ed operare una somma vettoriale:

$$v_x(t) = \cos(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad v_y(t) = \sin(\theta)v(t) = \frac{d}{dt}y(t) \qquad \vec{v}(t) = \hat{i}v_x(t) + \hat{j}v_y(t)$$

Lo stesso puó essere fatto per l'accelerazione:

$$a_x(t) = \cos(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt}x(t) \qquad a_y(t) = \sin(\theta)a(t) = \frac{d^2}{dt}y(t) \qquad \vec{a}(t) = \hat{i}a_x(t) + \hat{j}a_y(t)$$

Si assuma che sia l'accelerazione rispetto alla componente orizzontale che quella rispetto alla componente verticale siano costanti. Diventa allora possibile scrivere delle leggi orarie per la posizione rispetto ad entrambe le componenti:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x(t - t_0)^2 \qquad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a_y(t - t_0)^2$$

2.2.1. Caso di studio: moto parabolico

Il **moto parabolico** é il moto bidimensionale a cui obbedisce un oggetto che si muove nello spazio unicamente sottoposto all'attrazione gravitazionale.

Un corpo di questo tipo si muove lungo la direzione orizzontale con accelerazione costante pari a 0, mentre si muove lungo la direzione verticale con accelerazione costante pari a $-g$, essendo influenzato dalla gravitá della Terra (il segno meno é dovuto al fatto che la gravitá va dall'alto al basso). Fintanto che la distanza percorsa é sensibilmente piú piccola del raggio terreste, é possibile approssimare la Terra come un piano ed é quindi giustificato considerare l'accelerazione di gravitá uniforme ovunque. Un moto di questo tipo puó quindi essere descritto lungo le due direzioni come:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \qquad y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Il nome moto parabolico viene dal fatto che risolvendo la prima equazione rispetto a $(t - t_0)$ e sostituendo nella seconda, si ottiene l'equazione di una parabola:

$$\begin{gathered}
y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{v_x(t_0)}\right)^2 = \\
y(t_0) + \frac{\sin(\theta)\cancel{v(t_0)}[x(t) - x(t_0)]}{\cos(\theta)\cancel{v(t_0)}} - \frac{g[x^2(t) + x^2(t_0) - 2x(t)x(t_0)]}{2(\cos(\theta)v(t_0))^2} = \\
y(t_0) + \tan(\theta)[x(t) - x(t_0)] - \frac{gx^2(t) + gx^2(t_0) - 2gx(t)x(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} = \\
y(t_0) + \tan(\theta)x(t) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)} + \frac{\cancel{2}gx(t)x(t_0)}{\cancel{2}\cos^2(\theta)v^2(t_0)} = \\
\underbrace{\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)}_{A}x^2(t) + \underbrace{\left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)}_{B}x(t) + \underbrace{y(t_0) - \tan(\theta)x(t_0) - \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}}_{C}
\end{gathered}$$

Dove A, B e C sono costituite da valori noti.

A partire da tale equazione é possibile calcolare il range orizzontale, ovvero la posizione in cui il corpo si trova orizzontalmente alla stessa altezza di quando il corpo é stato lanciato. Per farlo é sufficiente imporre $y(t) = y(t_0)$; dato che le due quantitá si trovano da parti opposte dell'equazione, le due si elidono, ottenendo:

$$\left(\frac{-g}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)x^2(t) + \left(\tan(\theta) + \frac{gx(t_0)}{\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right)x(t) - \left(\tan(\theta)x(t_0) + \frac{gx^2(t_0)}{2\cos^2(\theta)v^2(t_0)}\right) = 0$$

Esercizio 2.2.1.1: Un saltatore in lungo spicca un balzo in avanti con un angolo $\theta = \frac{\pi}{9}$rad rispetto al terreno ed una velocitá di $11 \mathrm{m\,s^{-1}}$. Quale sará la lunghezza del salto? Quale sará l'altezza massima? Si assuma $t_0 = 0$s, $x(0) = 0$m e $y(0) = 0$m.

Soluzione: Imponendo come asse x il terreno, la distanza da terra é nulla nell'istante iniziale e nell'istante in cui viene percorsa la massima distanza.

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow y(t) = y(0) + v_y(0)(t - 0) - \frac{1}{2}g(t - 0)^2 \Rightarrow$$

$$0 = 0 + v(0)\sin(\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = t\left(v(0)\sin(\theta) - \frac{1}{2}gt\right) \Rightarrow t = \frac{2v(0)\sin(\theta)}{g}$$

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) \Rightarrow x\left(\frac{2v(0)\sin(\theta)}{g}\right) = x(0) + v(0)\cos(\theta)\left(\frac{2v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right) =$$

$$0 + \frac{2v^2(0)\sin(\theta)\cos(\theta)}{g} = \frac{v^2(0)\sin(2\theta)}{g} = \frac{\left(11\text{m s}^{-1}\right)^2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{9}\text{rad}\right)}{9.8\text{m s}^{-2}} \approx 7.94\text{m}$$

Il punto di massima altezza é quello in cui la velocitá lungo y é nulla:

$$v_y(t) = v_y(t_0) - g \cdot (t - t_0) \Rightarrow 0 = v(0)\sin(\theta) - g \cdot (t - 0) \Rightarrow t = \frac{v(0)\sin(\theta)}{g}$$

$$y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \Rightarrow$$

$$y\left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g}\right) = y(0) + \sin(\theta)v(0)\left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v(0)\sin(\theta)}{g} - 0\right)^2 =$$

$$\frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{g} - \frac{1}{2}\left(\frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{g}\right) = \frac{v^2(0)\sin^2(\theta)}{2g} = \frac{\left(11\text{m s}^{-1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{9}\text{rad}\right)}{2 \cdot 9.8\text{m s}^{-2}} \approx 0.722\text{m}$$

□

2.3. Moto circolare

Una classe di moti bidimensionali di particolare interesse é quella dove la traiettoria descritta dal punto materiale é una circonferenza. Un moto di questo tipo prende il nome di **moto circolare**.

Imponendo un sistema di assi cartesiani al centro di tale circonferenza, la posizione in ogni momento del punto materiale é data dal vettore che unisce il centro con un punto lungo tale circonferenza, che per definizione é un raggio, ed é quindi di modulo costante nel tempo. Tale vettore forma un angolo θ con l'asse orizzontale, ed é pertanto possibile scomporre la posizione di un punto $\vec{p}(t)$ nelle due componenti:

$$\vec{p}(t) = \begin{cases} \vec{p_x}(t) = |\vec{r}|\cos(\theta(t)) \\ \vec{p_y}(t) = |\vec{r}|\sin(\theta(t)) \end{cases}$$

La posizione di un punto materiale che si muove di moto circolare puó anche essere determinata dalla lunghezza dell'arco di circonferenza che ha per estremi il punto in questione ed il punto di coordinate $(|\vec{r}|, 0)$. Le due descrizioni sono equivalenti, perché l'arco di circonferenza $x(t)$ descritto dal punto all'istante t ed il modulo del vettore $\vec{p}(t)$ che congiunge il punto con il centro della circonferenza sono legati da un rapporto:

Essendo $|r|$ una costante, $x(t)$ e $\theta(t)$ sono proporzionali.

La velocitá di un punto materiale che si muove di moto circolare puó essere definita anche come variazione istantanea (in istanti di tempo infinitesimi) dell'angolo θ formato dal vettore posizione con l'asse orizzontale. Tale velocitá prende il nome di **velocitá angolare**.

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\theta(t)\left[\text{rad s}^{-1}\right]$$

La velocitá in senso stretto (la velocitá istantanea) rimane comunque definita come la variazione istantanea della posizione del punto materiale. Per quanto appena stabilito, tale velocitá puó anche essere espressa come prodotto fra la velocitá angolare ed il raggio del cerchio descritto dal punto materiale:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \begin{cases} \frac{d}{dt}(|r|\cos(\theta(t))) \\ \frac{d}{dt}(|r|\sin(\theta(t))) \end{cases} = \begin{cases} |r| \ \frac{d}{dt}\cos(\theta(t)) \\ |r| \ \frac{d}{dt}\sin(\theta(t)) \end{cases} = \begin{cases} -|r|\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \\ |r|\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) \end{cases} = \begin{cases} -|r|\sin(\theta(t))\omega(t) \\ |r|\cos(\theta(t))\omega(t) \end{cases}$$

Il punto materiale potrebbe avere anche una accelerazione rispetto alla velocitá angolare, ovvero potrebbe percorrere sezioni di circonferenza di uguale lunghezza in tempi diversi. Tale accelerazione prende il nome di **accelerazione angolare** $\alpha(t)$, ed in analogia con l'accelerazione in senso stretto é data dalla derivata seconda dell'angolo descritto dal vettore posizione del punto materiale in funzione del tempo.

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d^2}{dt}\theta(t)$$

L'accelerazione in senso stretto é quindi data da:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = |r| \ \frac{d^2}{dt}\theta(t) = \begin{cases} |r| \ \frac{d}{dt}(-\sin(\theta(t))\omega(t)) \\ |r| \ \frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))\omega(t)) \end{cases} =$$

$$\begin{cases} -|r| \ \left((\cos(\theta(t))\omega(t))\omega(t) + \sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\omega(t)\right) \\ -|r| \ \left((\sin(\theta(t))\omega(t))\omega(t) - \cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\omega(t)\right) \end{cases} = \begin{cases} -|r| \ (\cos(\theta(t))\omega^2(t) + \sin(\theta(t))\alpha(t)) \\ -|r| \ (\sin(\theta(t))\omega^2(t) - \cos(\theta(t))\alpha(t)) \end{cases}$$

In genere, l'accelerazione é nota (per altri mezzi) cosí come lo é il tempo, mentre non lo é la velocitá. Per tale motivo, é ragionevole esplicitare la formula rispetto alla velocitá. Questo comporta di invertire una derivata, ovvero calcolare un integrale:

Come é stato fatto per il moto unidimensionale, é possibile esplicitare le formula per l'accelerazione angolare rispetto alla velocitá angolare calcolando un integrale:

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\omega(t') = \omega(t) - \omega(t_0) \qquad \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\theta(t') = \theta(t) - \theta(t_0)$$

2.3.1. Caso di studio: moto circolare uniforme

Il **moto circolare uniforme** é un moto circolare dove oltre al modulo del vettore posizione anche la velocitá angolare é costante nel tempo. Naturalmente, essendo la velocitá proporzionale alla velocitá angolare, anche la velocitá sará costante in modulo nel tempo.

In questa particolare situazione, il numero di rivoluzioni che il punto compie é necessariamente costante, pertanto per descrivere il suo moto é sufficiente conoscere il tempo che il punto materiale impiega per compiere un giro completo. Il numero di rivoluzioni che un punto materiale compie in un secondo prende il nome di **frequenza**, mentre il tempo necessario per compiere un giro completo prende il nome di **periodo**:

$$\nu = \frac{\text{numero di giri}}{1\text{s}}[\text{Hz}] \qquad T = \frac{1}{\nu}[\text{s}]$$

Diventa pertanto possibile esprimere la velocitá e la velocitá angolare in termini di frequenza e periodo:

$$\omega(t) = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad v(t) = v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

Sebbene il moto abbia una velocitá costante in modulo, la sua direzione varia costantemente, pertanto il vettore velocitá (ovvero, se si considera sia la direzione del moto che il suo modulo) non é costante. É quindi possibile associare a questo moto una accelerazione, derivando la velocitá. Il verso di questo vettore accelerazione punta sempre verso il centro, pertanto prende il nome di **accelerazione centripeta**.

Per ricavare il modulo, é possibile approcciare il problema descrivendo il moto usando come sistema di riferimento un sistema di assi rotanti, dove il primo versore $\hat{u}_r$ si trova sulla retta che congiuge il punto con il centro del cerchio descritto mentre il secondo versore $\hat{u}_\theta$ é a questo perpendicolare.

Il sistema di riferimento cosí descritto cambia la direzione dei suoi versori in ogni istante di tempo, ma ha il vantaggio di avere il vettore velocitá sempre parallela al versore $\hat{u}_r$ e sempre perpendicolare al versore $\hat{u}_\theta$ mentre il vettore spostamento é sempre parallelo al versore $\hat{u}_\theta$ e sempre perpendicolare al vettore $\hat{u}_r$. É allora possibile scrivere:

$$\vec{v} = \hat{u}_\theta v \qquad \vec{r} = \hat{u}_r r$$

Il versore $\hat{u}_\theta$ puó essere scomposto lungo due componenti, una orizzontale ed una verticale, rispetto ad un secondo sistema di riferimento centrato nel centro del cerchio. In ogni istante di tempo, il versore descrive un diverso angolo θ con l'orizzontale, pertanto le due componenti sono dipendenti dal tempo. É pertanto possibile decomporre il vettore come:

$$\hat{u}_\theta = \hat{\imath} u_\theta^x(t) + \hat{\jmath} u_\theta^y(t) = \hat{\imath} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) + \hat{\jmath} \cdot 1 \cdot \cos\left(\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)(t)\right) = \hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \hat{\imath}\sin(\theta(t))$$

Dove il fattore 1 deriva dal fatto che $\hat{u}_\theta$ é un versore e ha quindi modulo 1. La quantitá $\frac{\pi}{2}$ deriva invece dal fatto che l'angolo che si sta considerando é quello formato dal versore $\hat{u}_r$, che é perpendicolare a quello formato da $\hat{u}_\theta$, ed é quindi «spostato» di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Derivando la velocitá rispetto al tempo, si ha il modulo dell'accelerazione centripeta:

$$|a| = \left|\frac{d}{dt}\vec{v}\right| = \left|\frac{d}{dt}\hat{u}_\theta v\right| = v\left|\frac{d}{dt}\hat{u}_\theta\right| = v\left|\frac{d}{dt}\left(\hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \hat{\imath}\sin(\theta(t))\right)\right| = v\left|\frac{d}{dt}\hat{\jmath}\cos(\theta(t)) - \frac{d}{dt}\hat{\imath}\sin(\theta(t))\right| =$$

$$v\left|-\hat{\jmath}\sin(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t) - \hat{\imath}\cos(\theta(t))\frac{d}{dt}\theta(t)\right| = v\left|\hat{\jmath}\sin(\theta(t))\omega + \hat{\imath}\cos(\theta(t))\omega\right| = v\omega\left|\hat{\jmath}\sin(\theta(t)) + \hat{\imath}\cos(\theta(t))\right| =$$

$$v\omega\sqrt{\sin^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))} = v\omega \cdot 1 = \omega r \cdot \omega = \omega^2 r$$

Che é anch'essa costante, dato che nella sua espressione non vi é una dipendenza dal tempo.

Esercizio 2.3.1.1: Il moto di rivoluzione di un pianeta attorno alla sua stella puó essere approssimato ad un moto circolare uniforme[2]. Sapendo che la Terra dista circa 1.496×10^{11}m dal Sole, qual'é il valore della velocitá angolare che ha la Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole? E quello dell'accelerazione centripeta?

Soluzione: La Terra impiega (circa) 1 anno a compiere una rivoluzione completa attorno al Sole, ed é pertanto questo il periodo del moto in esame:

$$1 \text{ anno} = 365 \text{ giorni} = 8760 \text{ ore} = 525600 \text{ minuti} = 31536000\text{s}$$

Noto il periodo, é possibile calcolare la velocitá angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3.15 \times 10^7\text{s}} = 2.00 \times 10^{-7}\text{rad s}^{-1}$$

Nota la velocitá angolare, é possibile calcolare l'accelerazione centripeta:

$$a = \omega^2 r = \left(2.00 \times 10^{-7}\text{rad s}^{-1}\right)^2 \cdot 1.496 \times 10^{11}\text{m} = 5.93 \times 10^{-3}\text{rad s}^{-2}$$

□

Un modo alternativo per derivare l'accelerazione centripeta é quello di osservare la formula dell'accelerazione per un moto circolare. Essendo il moto rettilineo uniforme privo di accelerazione angolare e dalla velocitá (angolare) costante, sostituendovi $\alpha(t) = 0$ e $\omega(t) = \omega$ si ha:

[2] Questo é vero solamente se il pianeta in questione si trova sufficientemente vicino alla stella. Piú é lontano, piú l'orbita che descrive si fa ellittica.

$$\begin{cases} -|r| \ (\cos(\theta(t))\omega^2(t) + \sin(\theta(t)) \cdot 0) \\ -|r| \ (\sin(\theta(t))\omega^2(t) - \cos(\theta(t)) \cdot 0) \end{cases} = \begin{cases} -|r| \cos(\theta(t))\omega^2 \\ -|r| \sin(\theta(t))\omega^2 \end{cases} = \sqrt{\left(-|r| \cos(\theta(t))\omega^2\right)^2 + \left(-|r| \sin(\theta(t))\omega^2\right)^2} =$$

$$\sqrt{(|r|^2 \cos^2(\theta(t))\omega^4) + (|r|^2 \sin^2(\theta(t))\omega^4)} = \sqrt{(|r|^2 \ \omega^4)(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t)))} = \sqrt{(|r|^2 \ \omega^4) \cdot 1} = |r| \ \omega^2$$

2.3.2. Caso di studio: moto armonico

La proiezione di un moto circolare uniforme lungo un asse viene detta **moto armonico**. Di fatto, ciascuna delle due componenti dimensionali di un moto circolare uniforme, se presa singolarmente, descrive un moto armonico.

$$\vec{p_x}(t) = |\vec{r}| \cos(\theta(t)) \qquad \vec{p_y}(t) = |\vec{r}| \sin(\theta(t)))$$

Per semplicitá, si consideri un moto lungo la componente x, e si introduca uno sfasamento ϕ di modo che non vi sia differenza fra seno e coseno (essendo l'una la traslazione dell'altra).

$$x(t) = r \cos(\omega t + \phi)$$

r viene detta **ampiezza**, ed indica l'altezza massima che la traiettoria descritta dal punto riesce a raggiungere. ϕ viene detta **fase iniziale** ed indica l'altezza al tempo iniziale. ω viene detta **frequenza angolare**.

Il tempo che un punto materiale impiega per percorrere un giro completo in un moto circolare uniforme corrisponde al tempo che un punto materiale impiega per passare da un punto ad una certa altezza ad un punto con la medesima altezza in un moto armonico. Ricordando che la formula per il calcolo della velocitá angolare di un moto circolare uniforme é $\omega = 2\pi/T$, il periodo $T = 2\pi/\omega$ viene detto **periodo di oscillazione** per il moto armonico.

2.3.3. Caso di studio: moto circolare uniformemente accelerato

Il **moto circolare uniformemente accelerato** é un moto circolare in cui l'accelerazione angolare é costante. In questo caso, é effettivamente possibile risolvere l'integrale in maniera semplice:

$$\omega(t) - \omega(t_0) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \alpha dt' = \alpha \int_{t_0}^{t} dt' = \alpha \cdot (t - t_0) = \alpha t - \alpha t_0$$

Da cui si ha:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(t')dt' = \int_{t_0}^{t} \omega(t_0) + \alpha t - \alpha t_0 dt' = \int_{t_0}^{t} \omega(t_0)dt' + \int_{t_0}^{t} \alpha t dt' - \int_{t_0}^{t} \alpha t_0 dt' =$$

$$\omega(t_0) \int_{t_0}^{t} dt' + \alpha \int_{t_0}^{t} t dt' - \alpha \int_{t_0}^{t} t_0 dt' = \omega(t_0)(t - t_0) + \alpha\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}t_0^2\right) = \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Ovvero:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha(t - t_0) \qquad \theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

Che corrisponde al risultato trovato per il moto uniformemente accelerato in una dimensione.

2.4. Moti relativi e sistemi inerziali

Siano A e B due sistemi di riferimento, dove uno dei due si sta muovendo rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme. Se si osserva la situazione dal punto di vista di A, il sistema di riferimento A é fermo mentre B si sta muovendo di moto rettilineo uniforme con velocitá v rispetto a questo. Se si osserva la situazione dal punto di vista di B, il sistema di riferimento B é fermo mentre A si sta muovendo di moto rettilineo uniforme con velocitá $-v$ rispetto a questo. Entrambe le esperienze sono equamente valide.

Questo sta a significare che non esiste alcun modo di determinare in senso «assoluto» se un sistema di riferimento é fermo oppure in moto rettilineo uniforme, ma é possibile farlo solamente rispetto ad un secondo sistema di riferimento. Questa osservazione prende il nome di **principio di relativitá**. Sistemi di riferimento che sono fermi l'uno rispetto all'altro o in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro si dicono **inerziali**. In altre parole, il principio di relatività sancisce che non esistono sistemi di riferimento «universalmente» inerziali: si è sempre inerziali rispetto ad un altro sistema.

Le descrizioni compiute da piú sistemi di riferimento inerziali del moto di uno stesso punto materiale possono essere messe in relazione fra di loro. Siano A e B due sistemi di riferimento con origine coincidente, e sia P un punto materiale. Si osservi la situazione dal punto di vista di A, e si supponga che B si stia muovendo di moto rettilineo uniforme rispetto a questo con velocitá $\vec{v}_{BA}$. Entrambi i sistemi di riferimento osserveranno P muoversi, ma non necessariamente alla stessa velocitá e non necessariamente compiendo la stessa traiettoria.

In questo scenario vi sono tre vettori posizione, $\vec{r}_{BA}(t)$, $\vec{r}_{PA}(t)$ e $\vec{v}_{PB}(t)$. Questi indicano, rispettivamente: la posizione di P rispetto ad A, la posizione di P rispetto a B e la posizione di B rispetto ad A. Tali vettori cambiano di direzione e/o di modulo in ogni istante, da cui la dipendenza dal tempo. Il vettore $\vec{r}_{BA}(t)$ ha origine nell'origine di A e punto di applicazione nell'origine di B, mentre $\vec{r}_{PB}(t)$ ha origine nell'origine di B e punto di applicazione in P. Essendo il punto di applicazione del primo coincidente con l'origine del secondo, la loro somma avrá origine nell'origine di A e punto di applicazione in P, ma questo vettore é precisamente $\vec{r}_{PA}(t)$. In altre parole, i reciproci vettori posizione sono componibili semplicemente per somma:

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{BA}(t) + \vec{r}_{PB}(t)$$

Essendo poi la velocitá la derivata della posizione, si osserva che anche questa puó essere composta per somma:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{PA}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{BA}(t) + \vec{r}_{PB}(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{r}_{PA}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_{BA}(t) + \frac{d}{dt}\vec{r}_{PB}(t) \Rightarrow \vec{v}_{PA}(t) = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}(t)$$

Derivando ulteriormente l'espressione, si ottiene che l'accelerazione di P non dipende dal sistema di riferimento, dato che $\vec{v}_{BA}$ é una costante.

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{PA}(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB}(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{v}_{PA}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{BA} + \frac{d}{dt}\vec{v}_{PB}(t) \Rightarrow \vec{a}_{PA}(t) = \vec{a}_{PB}(t)$$

3. Meccanica

3.1. Leggi di Newton

La cinematica descrive la legge oraria di un corpo se é nota la sua accelerazione. Tuttavia, non fornisce informazioni su come ricavarla. Una accelerazione é definita a partire dal risultato di interazioni sul corpo che la subisce chiamate **forze**.

Il fatto che le forze possano annullarsi a vicenda necessita che queste debbano essere una quantità vettoriale. Due forze si annullano se hanno la medesima direzione ed il medesimo modulo, ma verso opposto.

Le forze permettono di dare una migliore definizione di sistema di riferimento inerziale. Infatti, un sistema di questo tipo è un sistema in cui sono valide le cosiddette **Leggi di Newton**:

1. Un oggetto su cui agisce una forza totale nulla non modifica il proprio stato di moto. Ovvero, un oggetto che subisce una forza complessivamente nulla o rimane fermo o si muove di muovo rettilineo uniforme;
2. **Legge di inerzia**: la somma totale di tutte le forze che agiscono su un corpo è direttamente proporzionale alla sua accelerazione. La costante di proporzionalità che le lega, diversa per ciascun corpo, prende il nome di **massa inerziale**:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

3. **Principio di azione-reazione**: se un corpo A imprime una forza su un corpo B, il corpo B imprime una forza su A con ugual modulo e direzione, ma verso opposto:

$$\vec{F}_{A \text{ su } B} = -\vec{F}_{B \text{ su } A}$$

   In altre parole, non è possibile avere una forza «a vuoto».

Se la massa di un corpo aumenta, la forza (totale) necessaria ad indurgli la stessa accelerazione aumenta. Viceversa, se la massa diminuisce, serve una forza minore per indurre la stessa acceelerazione. La massa è quindi la misura della «resistenza» di un corpo ad accelerare.

Le Leggi non specificano cosa *esattamente* siano le forze, perchè le trattano da un punto di vista strettamente matematico. è però possibile darne una descrizione ontologica dividendole in due grandi categorie: **fondamentali** e **non fondamentali** (o **emergenti**). Le forze fondamentali sono quelle che interessano i costituenti fondamentali della materia, quindi atomi, protoni, elettroni e quark. Nello specifico, in natura sono state osservate solamente quattro forze fondamentali:

1. **Forza elettromagnetica**;
2. **Forza di gravità**;
3. **Interazione nucleare debole**;
4. **Interazione nucleare forte**.

Le forze emergenti sono quelle che nascono dall'applicazione di una o più forze fondamentali, ma che dal punto di vista macroscopico è più comodo considerare come forze in sè. Esempi di forze emergenti sono:

1. La **forza di attrito**, che è forza elettromagnetica di due corpi a contatto;
2. La **tensione** di una fune, che è forza elettromagnetica fra gli atomi del tirante e gli atomi della fune;
3. La **forza elastica** di una molla, che è forza elettromagnetica degli atomi della molla che cercano di ritornare nella posizione iniziale.

Naturalmente, in un sistema di riferimento non inerziale le Leggi di Newton non sono valide. In particolare, possono presentarsi situazioni in cui un corpo può variare di accelerazione senza che sia una forza a farlo. Ci si chiede allora quali siano le leggi che governano il moto nei sistemi di riferimento non inerziali.

A tal proposito, si ricordi come l'accelerazione osservata in un sistema di riferimento è data dalla somma fra l'accelerazione nel secondo sistema e l'accelerazione fra un sistema di riferimento e l'altro. Moltiplicando per la massa m:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{1,2} \Rightarrow m\vec{a}_1 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2}$$

Si supponga che il primo sistema di riferimento sia inerziale. Allora vale la seconda legge di Newton, e quindi non vi sono forze in gioco, e non essendovi forze in gioco il prodotto fra massa e accelerazione è nullo. Ma allora:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2} \Rightarrow 0 = m\vec{a}_2 + m\vec{a}_{1,2} \Rightarrow \cancel{m}\vec{a}_2 = -\cancel{m}\vec{a}_{1,2} \Rightarrow \vec{a}_2 = -\vec{a}_{1,2}$$

Ovvero, l'accelerazione del secondo sistema è pari all'accelerazione con cui il secondo sistema si muove, ma di segno opposto.

Di fatto, anche sistemi di riferimento non inerziali possono essere approcciati con il «linguaggio» delle leggi di Newton, a patto di considerare la quantità $-m\vec{a}_{1,2}$ come una forza (anche se di fatto non lo è). Tale quantità viene anche chiamata **forza apparente**: il nome «apparente» non sta ad indicare che tale quantità non esiste, ma indica invece che tale quantità si comporta come una forza nonostante non lo sia.