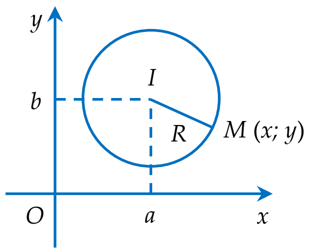
§2. Phương trình đường tròn

A. Lý thuyết

1. Phương trình đường tròn



+ Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$; bán kính R

$\Rightarrow \forall M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow IM=R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R\Leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$ (1)

Phương trình (1) được gọi là phương trình (dạng chính tắc) của đường tròn $C(I;R)$

+ Từ (1) $\Rightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$ (*)

Đặt $a^2+b^2-R^2=c\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-2ax-2by+c=0}$ (2)

$\Rightarrow$ Phương trình (2) với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn tâm $I(a;b)$; bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

STUDY TIP

+ Đường tròn (C): tâm $I(a;b)$, bán kính R có phương trình (dạnh chính tắc):

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

+ Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình (dạng tổng quát) đường tròn (C) tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình đường tròn?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$. **B.** $x^2+y^2-4x-6y-1=0$.

C. $x^2+2y^2-4x-6y-1=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x-6y+1=0$.

Lời giải

- Phương án A: Dạng phương trình (1), là đường tròn (C) tâm $I(2;1)$; bán kính $R=1$.

- Phương án B: Dạng phương trình (2), có $a^2+b^2-c=2^2+3^2+1>0\Rightarrow$ là đường tròn.

- Phương án C: Không đưa được về dạng phương trình (1) và (2) nên không phải là phương trình đường tròn.

- Phương án D: PT $\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-3y+\frac{1}{2}=0$ là đường tròn tâm $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

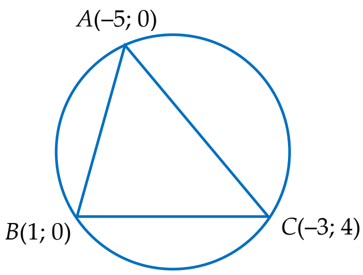
Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm $A(-5;0);B(1;0);C(-3;4)$ là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2=\sqrt{10}$. **B.** $(x-2)^2+(y+1)^2=10$.

C. $x^2+y^2-4x+2y-5=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-2y-5=0$.

Lời giải



Cách 1: Gọi tâm của đường tròn là $I(a;b)$

$\Rightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} (-5-a)^2+b^2=(1-a)^2+b^2 \\ (-5-a)^2+b^2=(-3-a)^2+(4-b)^2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$

$\Rightarrow I(-2;1)$; bán kính $R=IA=\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ Đường tròn (C) có phương trình:

$$(x+2)^2+(y-1)^2=10 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-2y-5=0$$

STUDY TIP
Muốn viết phương trình đường tròn ta tìm 2 yếu tố: tâm $I(a;b)$ và bán kính R
$\Rightarrow$ Phương trình:
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

<u>**Cách 2:**</u>

Gọi phương trình $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \ (a^2+b^2-c>0)$

Đường tròn (C) qua A, B, C $\Rightarrow \begin{cases}(-5)^2+0^2-2a.(-5)-2b.0+c=0\\ 1^2+0^2-2.a.1-2.b.0+c=0\\ (-3)^2+4^2-2a.(-3)-2b.4+c=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}10a+c=-25\\ 2a-c=1\\ 6a-8b+c=-25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=1\\ c=-5\end{cases} \Rightarrow (C): x^2+y^2+4x-2y-5=0a$$

Đáp án D.

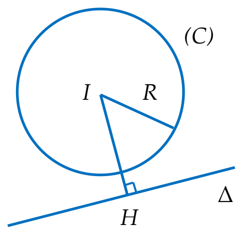
<u>**Lưu ý:**</u>

+ Bạn có thể tìm tâm (C) bằng cách tìm giao điểm của 2 đường trung trực của tam giác ΔABC.

+ Đối với các phương án trong ví dụ này bạn có thể thử A, B, C vào các phương trình để tìm được phương trình đúng.

2. Vị trí tương đối của một đường thẳng với đường tròn, tiếp tuyến của đường tròn

a. Vị trí tương đối



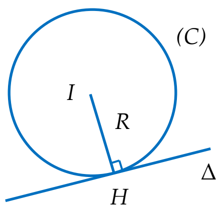
TH1: $d(I;\Delta)>R$

Cho đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$

<u>**Cách 1:**</u> Xét $d(I;\Delta)=\dfrac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

+ Nếu $d(I;\Delta)>R$ $\Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung.

+ Nếu $d(I;\Delta)=R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại H (H là hình chiếu của I lên Δ).

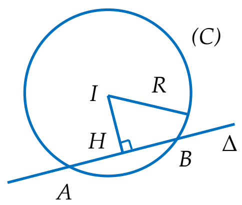


TH2: $d(I;\Delta)=R$

Khi này ta nói Δ là tiếp tuyến của (C) với H là tiếp điểm.

+ Nếu $d(I;\Delta)<R \Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt (AB là một dây cung của đường tròn).

<u>**Cách 2:**</u> Xét hệ $\begin{cases}\Delta\\ (C)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Ax+By+C=0\\ (x-a)^2+(y-b)^2=R^2\end{cases}$ (1)



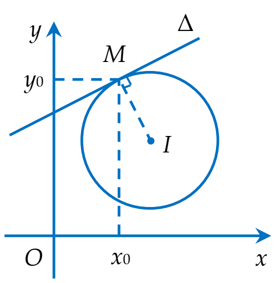
TH3: $d(I;\Delta)<R$

+ Nếu hệ (1) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (C) không có điểm chung.

+ Nếu (1) có 1 nghiệm $(x_0;y_0) \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) tại $H(x_0;y_0)$.

+ Nếu (1) có 2 nghiệm $\Rightarrow \Delta$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b. Tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$



Tiếp tuyến Δ tại $M(x_0;y_0)$ của (C) là đường thẳng qua $M(x_0;y_0)$ và vuông góc với MI $\Rightarrow$ Có VTPT $\vec{n}=\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-b)$

$\Rightarrow$ Phương trình Δ: $\boxed{(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0}$ (3)

$\Rightarrow$ (3) là phương trình tiếp tuyến của (C) tại M.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(3;-2)$ của (C) là $d: x+by+c=0$. Khi đó giá trị $b+c$ là:

A. $b+c=-2$. **B.** $b+c=-3$. **C.** $b+c=-6$. **D.** $b+c=-5$.

Lời giải

STUDY TIP
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0;y_0)$ là:
$(x_0-a)(x-x_0)$
$+(y_0-b)(y-y_0)=0$

(C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=2$

$IM=\sqrt{2^2+0^2}=2=R\Rightarrow M\in(C)$

Tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng Δ qua $M(3;-2)$ và có VTPT $\overrightarrow{IM}=(2;0)$

$$\Rightarrow \Delta: 2(x-3)+0(y+2)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow b+c=-3$$

Đáp án B.

Lưu ý: Bạn có thể áp dụng trực tiếp công thức (3) sẽ nhanh hơn:

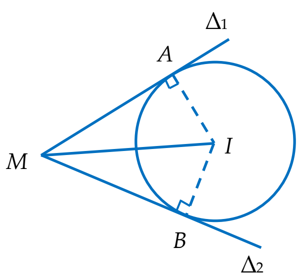
$(C):(x-1)^2+(y+2)^2=4;\ M(3;-2)$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến tại M của đường tròn (C) là:

$$(3-1)(x-3)+[-2-(-2)][y-(-2)]=0 \Leftrightarrow x-3=0$$

c. Tiếp tuyến của đường tròn (C) qua điểm M nằm ngoài đường tròn

Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R và điểm M thỏa mãn $IM>R$



Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Khi đó khoảng cách từ điểm $N(2;3)$ đến đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C) là:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Cách 1:

STUDY TIP
$IM>R\Rightarrow$ qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

+ (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+1^2+2}=2$

$IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R\Rightarrow$ Qua M có 2 tiếp tuyến đến (C)

+ Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ là VTPT của đường thẳng Δ qua $M(3;5)$

$\Rightarrow \Delta: a(x-3)+b(y-5)=0 \Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$

+ Δ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3b^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{-4a}{3} \end{array}\right.$$

STUDY TIP
Bài toán viết phương trình tiếp tuyến của $C(I;R)$ biết tiếp tuyến đi qua M là bài toán viết phương trình đường thẳng qua M và cách I một khoảng không đổi R.

- Với $b=0$ chọn $a=1 \Rightarrow \vec{n}=(1;0)\Rightarrow \Delta_1: 1(x-3)+0(y-5)=0 \Leftrightarrow x-3=0$

- Với $b=\dfrac{-4a}{3}$ chọn $a=3\Rightarrow b=-4\Rightarrow \vec{n}=(3;-4)\Rightarrow \Delta_2: 3x-4y+11=0$

$$\Rightarrow d(N;\Delta_1)=\frac{|2-3|}{\sqrt{1^2+0^2}}=1;\quad d(N;\Delta_2)=\frac{|3.2-4.3+11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

Cách 2:

+ Δ qua $M(3;5)$ có hệ số góc k: $y=k(x-3)+5 \Leftrightarrow kx-y+5-3k=0$

+ Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|k-1+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến là $\Delta_1: y=\dfrac{3}{4}(x-3)+5 \Leftrightarrow 3x-4y+11=0 \Rightarrow d(N;\Delta_1)=1$

Tiếp tuyến còn lại là đường thẳng $\Delta_2: x-3=0$

Thật vậy: $d(I;\Delta_2)=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}}=2=R \Rightarrow d(N;\Delta_2)=1$

Đáp án A.

STUDY TIP
Qua điểm M nằm ngoài đường tròn (C) luôn có 2 tiếp tuyến đến C .

Tổng quát: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn qua $M(x_0;y_0)$

- **Bước 1:** Viết phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc k:
$$\Delta: y=k(x-x_0)+y_0$$
- **Bước 2:** Buộc Δ tiếp xúc với $(C) \Rightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow f(k)=0$

$\Rightarrow$ 2 giá trị k tương ứng với 2 tiếp tuyến Δ_1 và Δ_2

(Nếu từ phương trình trên chỉ tìm được 1 tiếp tuyến thì tiếp tuyến thứ 2 là đường thẳng $\Delta_2: x-x_0=0$)

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C_m): x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6+m=0$. Số giá trị nguyên để (C_m) không phải là phương trình đường tròn là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

(C_m) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow m^2+\left[2(m-2)\right]^2-6-m>0$

$$\Leftrightarrow 5m^2-17m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{17+\sqrt{89}}{10} \\ m<\dfrac{17-\sqrt{89}}{10}\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{17-\sqrt{89}}{10} \le m \le \dfrac{17+\sqrt{89}}{10} \Rightarrow$ Có 2 giá trị nguyên thỏa mãn.

Đáp án C.

STUDY TIP
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ không phải là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c\le 0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn:
$$(C_m): x^2+y^2+2mx-4(m+1)y-1=0.$$
Khi đó tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi là:

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn.
C. một parabol. **D.** một điểm cố định.

Lời giải

Ta có: $m^2+\left[2(m+1)\right]^2+1>0\,\forall m \Rightarrow (C_m)$ là đường tròn với $\forall m$

Gọi tâm của (C_m) là $I(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x=-m & (1) \\ y=2(m+1) & (2)\end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow m=-x$ thế vào (2) $\Rightarrow y=2(-x+1) \Rightarrow y=-2x+2$ (3)

$I(x;y)$ thỏa mãn phương trình (3) với $\forall m \Rightarrow$ Tập hợp I là đường thẳng (3).

STUDY TIP
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

Đáp án A.

Lưu ý: Phương pháp tìm tập hợp tâm của đường tròn $\left(C_m\right)$

- **Bước 1:** Tìm điều kiện của m để $\left(C_m\right)$ là đường tròn $\Rightarrow$ Điều kiện (*)

- **Bước 2:** Gọi tâm là $I\left(x;y\right) \Rightarrow \begin{cases} x = f(m) & (1) \\ y = h(m) & (2) \end{cases}$

Rút m từ 1 phương trình thế vào phương trình còn lại $\Rightarrow f\left(x;y\right) = 0$

- **Bước 3:** Đối chiếu điều kiện (*)

Kết luận: Tập hợp là đường $\begin{cases} f\left(x;y\right) = 0 \\ t/m\ (*) \end{cases}$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, số điểm cố định mà đường tròn $\left(C_m\right): x^2 + y^2 - 2mx - 4\left(m+1\right)y - 1 = 0$ luôn đi qua khi m thay đổi là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

STUDY TIP

+) $ax + b = 0 \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

+) $ax^2 + bx + c = 0 \forall x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Giả sử điểm cố định mà $\left(C_m\right)$ luôn đi qua là $A\left(a;b\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình $a^2 + b^2 - 2am - 4b\left(m+1\right) - 1 = 0$ đúng với $\forall m$

$\Leftrightarrow \left(-2a - 4b\right)m + \left(a^2 + b^2 - 4b - 1\right) = 0$ đúng với $\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 - 4b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 5b^2 - 4b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \dfrac{-2}{5} \\ b = \dfrac{-1}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm cố định mà đường tròn $\left(C_m\right)$ luôn đi qua khi m thay đổi.

Đáp án C.

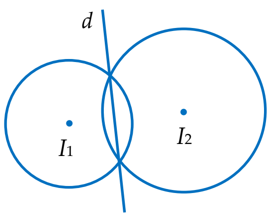
Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho 2 đường tròn:

$$\left(C_1\right): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \text{ và } \left(C_2\right): \left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 16.$$

Đường thẳng đi qua giao điểm của 2 đường tròn là:

A. $3x + 2y + 1 = 0.$ **B.** $3x + 2y - 1 = 0.$

C. $2x + 3y - 5 = 0.$ **D.** $2x - 3y - 5 = 0.$



Lời giải

STUDY TIP

$\left(I_1;R_1\right)$ cắt $\left(I_2;R_2\right)$

$\Rightarrow \left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < R_1 + R_2$

$\left(C_1\right)$ có tâm $I_1\left(1;-2\right)$, bán kính $R_1 = 3$

$\left(C_2\right)$ có tâm $I_2\left(-1;1\right)$, bán kính $R_2 = 4$

$\Rightarrow \left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Rightarrow \left(C_1\right)$ cắt $\left(C_2\right)$

Gọi điểm $M\left(x;y\right)$ thuộc đường thẳng cần tìm

$\Rightarrow$ Tọa độ M thỏa mãn hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ \left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) – (2) $\Rightarrow -4x+6y+10=0 \Leftrightarrow 2x-3y-5=0$ (3)

Nhận thấy $M(x;y)$ luôn thỏa mãn phương trình (3)

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn là: $2x-3y-5=0$

Đáp án D.

Lưu ý: Bạn có thể giải bài này bằng cách giải hệ $\begin{cases}(C_1)\\(C_2)\end{cases} \Rightarrow$ 2 giao điểm A và B và viết phương trình đường thẳng qua AB. Tuy nhiên cách này sẽ dài hơn đặc biệt là nếu tọa độ A và B lẻ nên không phù hợp khi làm bài trắc nghiệm.

STUDY TIP

Cho đường tròn $(C_1),(C_2)$ cắt nhau và luôn luôn có phương trình $f(x;y)=0$ và $g(x;y)=0$. Khi đó phương trình đường thẳng qua giao điểm của $(C_1),(C_2)$ là:

$f(x;y)-g(x;y)=0$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2=1$. Đường tròn (C) đi qua giao điểm $(C_1),(C_2)$ và $A(1;2)$ có tâm là $I(m;n)$. Khi đó giá trị $m+n$ là:

A. 3. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{-4}{3}$.

Lời giải

Phương trình đường tròn (C) qua giao điểm của (C_1) và (C_2) có dạng:

$$a\left(x^2+y^2-2x+4y-4\right)+b\left(x^2+y^2-1\right)=0 \text{ (*) } (a+b\neq 0)$$

Đường tròn này qua $A(1;2)$

$\Rightarrow a\left(1^2+2^2-2+8-4\right)+b\left(1^2+2^2-1\right)=0 \Leftrightarrow 7a+4b=0$

Chọn $a=1 \Rightarrow b=\frac{-7}{4} \Rightarrow (C): x^2+y^2-2x+4y-4-\frac{-7}{4}\left(x^2+y^2-1\right)=0$

$(C): \frac{-3}{4}x^2-\frac{3}{4}y^2-2x+4y-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}y+3=0$

$\Rightarrow (C)$ có tâm $I\left(\frac{-4}{3};\frac{8}{3}\right)$, bán kính $R=\sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-3}=\frac{\sqrt{53}}{3}$

$\Rightarrow m+n=\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$

Đáp án B.

STUDY TIP

Phương trình chùm đường tròn qua giao điểm của 2 đường tròn $(C_1): f(x;y)=0$ và $(C_2): g(x;y)=0$ là:

$f(x;y)+g(x;y)=0$

Lưu ý:

+ Bạn có thể giải trực tiếp bằng cách tìm giao điểm của (C_1) và (C_2) là B và C rồi tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (bạn đọc tự giải).

+ Phương pháp trên thường sử dụng trong các bài toán viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của 2 đường tròn và thỏa mãn một điều kiện nào đó.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua $A(3;1); B(5;5)$ và tâm nằm trên trục hoành có chu vi là:

A. 100. **B.** 100π. **C.** $2\sqrt{50}\pi$. **D.** $2\sqrt{50}$.

Lời giải

Gọi đường tròn cần tìm là (C) có tâm $I\in Ox \Rightarrow I(a;0)$

Đường tròn qua $A,B \Rightarrow IA=IB \Leftrightarrow a=10 \Rightarrow I(10;0)$

$\Rightarrow$ Bán kính $R=IA=\sqrt{(10-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{50}$

$\Rightarrow$ Chu vi là: $C=2\pi R=2\sqrt{50}\pi$

STUDY TIP

Cho $C(I;R)$: + Chu vi: $2\pi R$

+ Diện tích: πR^2

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc đường thẳng d và thỏa mãn điều kiện (*)

- Bước 1: Tham số hóa tâm I theo d
- Bước 2: Áp dụng điều kiện (*) $\Rightarrow$ tham số
- Bước 3: Thay lại rồi suy ra kết quả.