

## §4. Một số dạng bài toán điển hình

### I. Một số bài toán về giải tam giác

**Ví dụ 1:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $A(-2;3)$ , phương trình đường trung tuyến từ  $B, C$  lần lượt là  $d_1: 2x + 7y - 30 = 0$  và  $d_2: 7x + 5y - 14 = 0$ . Phương trình đường thẳng  $AB$  có dạng  $ax + by + c = 0$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $Q = a + bc$  bằng:

A. 34.

B. 32.

C. -22.

D. 44.

**Lời giải**

$$+ A(-2;3) \notin d_1; d_2$$

+ Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + 7y = 30 \\ 7x + 5y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4}{3} \\ y = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{-4}{3}; \frac{14}{3}\right)$$

$$+ B \in d_1 \Rightarrow B\left(b; \frac{-2b+30}{7}\right); C \in d_2 \Rightarrow C\left(\frac{14-5c}{7}; c\right)$$

$$+ \text{Ta có: } \begin{cases} -2 + b + \frac{14-5c}{7} = -4 \\ \frac{-2b+30}{7} + 3 + c = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow B(1;4); C(-3;7)$$

$$+ AB: \begin{cases} \text{qua } A(-2;3) \\ \text{qua } B(1;4) \end{cases} \Rightarrow AB: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow x - 3y + 11 = 0$$

$$\text{Khi đó: } a = 1; b = -3; c = 11 \Rightarrow Q = 1 + (-3) \cdot 11 = -32.$$

**Đáp án B.**

**Ví dụ 2:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có  $M(-2;1)$  là trung điểm  $AB$ . Đường trung tuyến và đường cao qua  $A$  lần lượt là  $d_1: x + y - 7 = 0$  và  $d_2: 5x + 3y - 29 = 0$ . Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng  $AC$ ?

A.  $P(3;2)$ .

B.  $Q(-2;7)$ .

C.  $R(2018;2017)$ .

D.  $S(1056;1055)$ .

**Lời giải**

$$+ A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(4;3)$$

$$+ M(-2;1) \text{ trung điểm } AB \Rightarrow B(-8;-1)$$

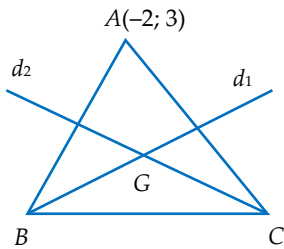
$$+ BC \perp d_2 \Rightarrow BC: -3x + 5y + c = 0$$

$$\text{Mà } B(-8;-1) \in BC \Rightarrow C = -19 \Rightarrow BC: -3x + 5y - 19 = 0$$

$$+ I = d_1 \cap BC \Rightarrow I(2;5) \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow C(12;11)$$

$$+ AC: \begin{cases} \text{qua } A(4;3) \\ \text{qua } C(12;11) \end{cases} \Rightarrow AC: \frac{x-4}{8} = \frac{y-3}{8} \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$$

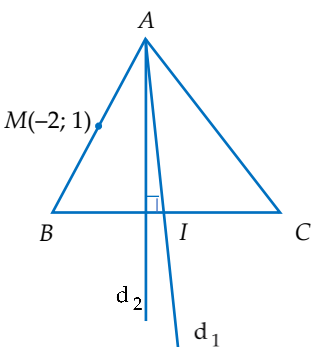
**Đáp án B.**



#### STUDY TIP

$G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases}$$



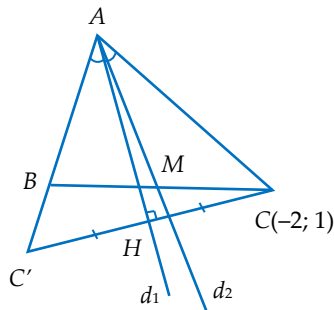
#### STUDY TIP

$$\Delta \perp d: Ax + By + C = 0 \\ \Rightarrow \Delta: Bx - Ay + C' = 0$$

**Ví dụ 3:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có  $C(-2;1)$ . Đường phân giác góc  $A$  và đường trung tuyến  $AM$  lần lượt là  $d_1: 2x + y - 1 = 0$  và  $d_2: x + y - 2 = 0$ . Tìm tọa độ điểm  $B$ .

- A.  $B\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$ .      B.  $B\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .      C.  $B\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .      D.  $B\left(\frac{-4}{3}; \frac{13}{3}\right)$ .

**Lời giải**



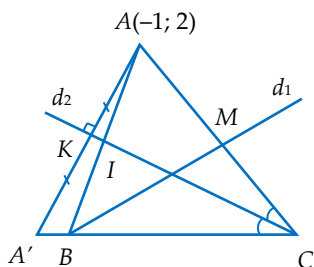
$$\begin{aligned}
 &+ A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A(-1;3) \\
 &+ C' \text{ đối xứng với } C \text{ qua } d_1 \\
 &+ CC' \begin{cases} \text{qua } C(-2;1) \\ \perp d_1: 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow CC': -x + 2y - 4 = 0 \\
 &+ H = d_1 \cap CC' \Rightarrow H\left(\frac{-2}{5}; \frac{9}{5}\right) \text{ là trung điểm } CC' \Rightarrow C'\left(\frac{6}{5}; \frac{13}{5}\right) \\
 &+ AB: \begin{cases} \text{qua } A(-1;3) \\ \text{qua } C'\left(\frac{6}{5}; \frac{13}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow AB: 2x + 11y - 31 = 0 \\
 &+ B \in AB \Rightarrow B\left(\frac{31 - 11b}{2}; b\right) \\
 &M \in d_2 \Rightarrow M(m; 2 - m) \\
 &+ M \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{31 - 11b}{2} - 2 = 2m \\ b + 1 = 4 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{3} \\ m = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)
 \end{aligned}$$

**Đáp án A.**

**Ví dụ 4:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có  $A(-1;2)$  đường trung tuyến  $BM$  và phân giác trong  $CI$  có phương trình lần lượt là:  $d_1: x - y + 2 = 0$  và  $d_2: 2x + y - 3 = 0$ . Tọa độ điểm  $B(a; -b)$ . Tính  $P = a + b$ .

- A.  $\frac{31}{6}$ .      B.  $-2$ .      C.  $-\frac{31}{6}$ .      D.  $2$ .

**Lời giải**



$$\begin{aligned}
 &+ A' \text{ đối xứng với } A \text{ qua } d_2, AA' \cap d_2 = K \\
 &+ AA' \begin{cases} \text{qua } A(-1;2) \\ \perp d_2: 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AA': -x + 2y - 5 = 0 \\
 &+ K = AA' \cap d_2 \Rightarrow K\left(\frac{1}{5}; \frac{13}{5}\right) \Rightarrow A'\left(\frac{7}{5}; \frac{16}{5}\right) \\
 &+ M \in d_1 \Rightarrow M(a; a + 2) \\
 &C \in d_2 \Rightarrow C(b; 3 - 2b) \\
 &M \text{ là trung điểm } AC \text{ có: } \begin{cases} 2a - b = -1 \\ 2a + 4 - 3 + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{6} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{-1}{6}; \frac{11}{6}\right) \\ C\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

**STUDY TIP**

Nếu đề bài cho đường phân giác, ta sẽ lấy điểm đối xứng qua đường phân giác.

$$+ BC \begin{cases} \text{qua } A' \left( \frac{7}{5}; \frac{16}{5} \right) \\ \text{qua } C \left( \frac{2}{3}; \frac{5}{3} \right) \end{cases} \Rightarrow BC: 23x - 11y + 3 = 0$$

$$+ B = BC \cap d_1 \Rightarrow B \left( \frac{19}{12}; \frac{43}{12} \right) \Rightarrow a = \frac{19}{12}; b = \frac{-43}{12} \Rightarrow P = -2$$

Đáp án B.

**Ví dụ 5:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , có  $A(2; -1)$ . Đường phân giác trong góc  $B$  và  $C$  có phương trình lần lượt là  $d_1: x - 2y + 1 = 0$  và  $d_2: x + y + 3 = 0$ . Phương trình đường thẳng đi qua  $B$  và song song với  $AC$  là đường thẳng:

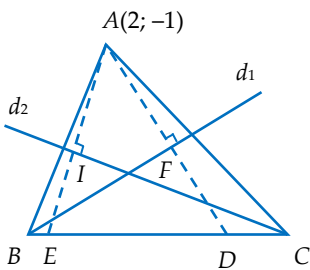
A.  $-4x + y - \frac{9}{7} = 0$ .

B.  $-4x + y + \frac{9}{7} = 0$ .

C.  $7x - 28y + 9 = 0$ .

D.  $x - 4y + 9 = 0$ .

Lời giải



$$+ D \text{ đối xứng với } A \text{ qua } d_1: F = AD \cap d_1$$

$$+ E \text{ đối xứng với } A \text{ qua } d_2: I = AE \cap d_2$$

$$+ AD \begin{cases} \text{qua } A(2; -1) \\ \perp d_1: x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow AD: 2x + y - 3 = 0$$

$$F = AD \cap d_1 \Rightarrow P(1; 1) \text{ là trung điểm } AD \Rightarrow D(0; 3)$$

$$+ AE \begin{cases} \text{qua } A(2; -1) \\ \perp d_2: x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AE: -x + y + 3 = 0$$

$$I = AE \cap d_2 \Rightarrow I(0; -3) \text{ là trung điểm } AE \Rightarrow E(-2; -5)$$

$$+ BC \begin{cases} \text{qua } D(0; 3) \\ \text{qua } E(-2; -5) \end{cases} \Rightarrow BC: 4x - y + 3 = 0$$

$$B = BC \cap d_1 \Rightarrow B \left( \frac{-5}{7}; \frac{1}{7} \right); C = d_2 \cap BC \Rightarrow C \left( \frac{-6}{5}; \frac{-9}{5} \right)$$

$$+ AC \begin{cases} \text{qua } A(2; -1) \\ \text{qua } C \left( \frac{-6}{5}; \frac{-9}{5} \right) \end{cases} \Rightarrow AC: x - 4y - 6 = 0$$

$$+ \Delta // AC \Rightarrow \Delta: x - 4y + c = 0 \quad (c \neq -6)$$

$$B \left( \frac{-5}{7}; \frac{1}{7} \right) \in \Delta \Rightarrow c = \frac{9}{7} \quad (t/m) \Rightarrow \Delta: 7x - 28y + 9 = 0$$

Đáp án C.

**Ví dụ 6:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $\Delta ABC$  có  $A \in d: 2x - 5y + 7 = 0$ ;  $BC // d$ , đường cao  $BH$  có phương trình  $d_1: x - 2y + 1 = 0$ .  $M(-2; 1)$  là trung điểm  $AC$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của  $\Delta ABC$ .

A.  $(13; 11)$ .

B.  $\left( \frac{50}{9}; \frac{11}{3} \right)$ .

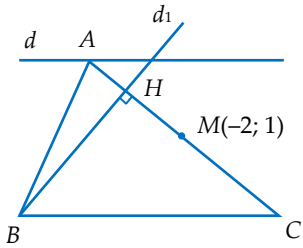
C.  $\left( 13; \frac{11}{3} \right)$ .

D.  $\left( \frac{13}{3}; \frac{11}{3} \right)$ .

Lời giải

#### STUDY TIP

$$\Delta // d: Ax + By + C = 0 \\ \Rightarrow \Delta: Ax + By + C' = 0 \quad (C \neq C')$$



$$+ AC \begin{cases} \perp BH \\ \text{qua } M(-2;1) \end{cases} \Rightarrow AC: 2x + y + 3 = 0$$

$$+ A = AC \cap d \Rightarrow A\left(\frac{-11}{6}; \frac{2}{3}\right)$$

$$+ M \text{ là trung điểm } AC \Rightarrow C\left(\frac{-13}{6}; \frac{4}{3}\right)$$

$$+ BC \begin{cases} // d: 2x - 5y + 7 = 0 \\ \text{qua } C\left(\frac{-13}{6}; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow BC: 2x - 5y + 11 = 0$$

$$+ B = BC \cap BH \Rightarrow B(17; 9)$$

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC \text{ là } G\left(\frac{13}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

Đáp án D.

**Ví dụ 7:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $\triangle ABC$  có phương trình cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt là  $d_1: 8x + 5y - 15 = 0$ ;  $d_2: 2x - 5y - 3 = 0$ . Trung điểm của  $BC$  là  $M(6; 1)$ . Đỉnh  $C$  và đỉnh  $B$  thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. I và IV.

B. I và II.

C. IV và I.

D. II và III.

Lời giải

$$+ A = d_1 \cap d_2 \Rightarrow A\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{25}\right)$$

$$+ \text{Gọi } P \text{ là trung điểm } AB. \text{ Ta có: } MP \begin{cases} // AC \\ \text{qua } M(6;1) \end{cases} \Rightarrow MP: 2x - 5y - 7 = 0$$

$$+ P = MP \cap d_1 \Rightarrow P\left(\frac{11}{5}; \frac{-13}{25}\right) \Rightarrow B\left(\frac{13}{5}; \frac{-29}{25}\right) \Rightarrow C\left(\frac{47}{5}; \frac{79}{25}\right).$$

$\Rightarrow B$  thuộc cung phần tư thứ IV và  $C$  thuộc cung phần tư thứ nhất.

Đáp án A.

**Ví dụ 8:** Trong mặt phẳng, tam giác  $\triangle ABC$  có phương trình cạnh  $AB: 3x - y + 4 = 0$ ;  $AC: x + y - 8 = 0$ . Hai đường cao có phương trình lần lượt là  $d_1: x + 3y - 8 = 0$ ;  $d_2: 6x + y - 13 = 0$ . Phương trình đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $BC$  là:

A.  $-x + 6y + 8 = 0$ .

B.  $6x + y - \frac{220}{17} = 0$ .

C.  $102x + 17y + 220 = 0$ .

D.  $-x + 6y + \frac{220}{17} = 0$ .

Lời giải

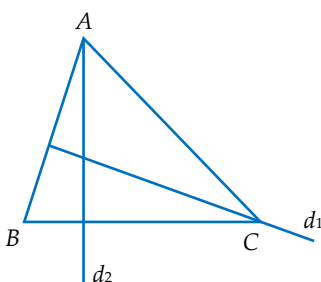
$$+ A = AB \cap AC \Rightarrow A(1; 7)$$

$$+ d_1 \perp AB \Rightarrow d_1 \text{ là đường cao xuất phát từ } C \text{ của } \triangle ABC$$

$$A \in d_2 \Rightarrow d_2 \text{ là đường cao xuất phát từ } A \text{ của } \triangle ABC$$

$$+ C = d_1 \cap AC \Rightarrow C(8; 0)$$

$$+ BC \begin{cases} \text{qua } C(8; 0) \\ \perp d_2: 6x + y - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow BC: -x + 6y + 8 = 0$$



$$+ B = BC \cap AB \Rightarrow B\left(\frac{-32}{17}; \frac{-28}{17}\right)$$

$$+ \Delta \perp BC: -x + 6y + 8 = 0 \Rightarrow \Delta: 6x + y + c = 0$$

$$B\left(\frac{-32}{17}; \frac{-28}{17}\right) \in \Delta \Rightarrow c = \frac{220}{17} \Rightarrow \Delta: 6x + y + \frac{220}{17} = 0 \Rightarrow \Delta: 102x + 17y + 220 = 0$$

**Đáp án C.**

**Lưu ý:** Cần nhận ra được 2 đường thẳng  $d_1, d_2$  là những đường cao nào của  $\Delta ABC$ .

**Ví dụ 9:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có phương trình cạnh  $AB, AC, BC$  lần lượt là:  $2x - 3y + 1 = 0$ ;  $x + y - 3 = 0$  và  $x - y + 4 = 0$ .  $H$  là chân đường cao hạ từ  $C$ . Điểm  $H$  thuộc cung phần tư thứ mấy?

A. IV.

B. III.

C. II.

D. I.

**Lời giải**

$$+ C = AC \cap BC \Rightarrow C\left(\frac{-1}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

$$+ CH \begin{cases} \text{qua } C\left(\frac{-1}{2}; \frac{7}{2}\right) \\ \perp AB: 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow CH: 3x + 2y - \frac{11}{2} = 0$$

$$+ H = CH \cap AB \Rightarrow H\left(\frac{29}{26}; \frac{14}{13}\right) \Rightarrow H \text{ thuộc cung phần tư thứ I.}$$

**Đáp án D.**

**Ví dụ 10:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G(-4; -2)$ , phương trình cạnh  $AB: 2x + y + 3 = 0$ ; phương trình cạnh  $AC: 4x - y + 9 = 0$ . Tìm tung độ lớn nhất trong 3 điểm  $A, B, C$ .

A. -2.

B. 1.

C. -13.

D. 6.

**Lời giải**

$$+ A = AB \cap AC \Rightarrow A(-2; 1)$$

$$+ C \in AC: 4x - y + 9 = 0 \Rightarrow C(c; 4c + 9)$$

$$+ B \in AB: 2x + y + 3 = 0 \Rightarrow B(b; -3 - 2b)$$

$$+ G(-4; -2) \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} -2 + b + c = -12 \\ 1 - 3 - 2b + 4c + 9 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{-9}{2} \\ c = \frac{-11}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{-9}{2}; 6\right); C\left(\frac{-11}{2}; -13\right)$$

**Đáp án D.**

**Ví dụ 11:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ ,  $\Delta ABC$  cân tại  $A(3; 1)$ .  $B, C \in d: x - 7y + 54 = 0$ . Xác định hoành độ lớn nhất của điểm  $B$  biết  $S_{\Delta ABC} = 10$ .

A.  $\frac{17}{5}$ .

B.  $\frac{41}{5}$ .

C.  $\frac{3}{5}$ .

D.  $\frac{39}{5}$ .

**Lời giải**

