B. Các dạng toán điển hình

Dạng 1 Bài tập về phép biến đổi tương đương

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $x+\sqrt{x+2}\le 2+\sqrt{x+2}$ là:

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\{2\}$. **C.** $[-2;2]$. **D.** $\varnothing$.

STUDY TIP
Cần lưu ý đến điều kiện xác định khi giải bất phương trình chứa căn thức.

Lời giải

Điều kiện: $x+2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -2$.

Ta có: $x+\sqrt{x+2}\le 2+\sqrt{x+2}\Rightarrow x\le 2$.

(*Lưu ý:* Ta nói $x\le 2$ là hệ quả của bất phương trình $x+\sqrt{x+2}\le 2+\sqrt{x+2}$)

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $-2\le x\le 2$.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+3>0$?

A. $(x+3)\sqrt{x+4}>0$. **B.** $x+3+\sqrt{1-x}>\sqrt{1-x}$.

C. $(x-5)^2(x+3)>0$. **D.** $x^2(x+3)>0$.

Lời giải

STUDY TIP
Trong nhiều trường hợp, phải giải bất phương trình thì mới khẳng định được phép biến đổi có tương đương hay không.

Ta có: $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$.

Với A: $(x+3)\sqrt{x+4}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x+4>0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\x>-3\end{cases}\Leftrightarrow x>-3$.

Vậy bất phương trình $(x+3)\sqrt{x+4}>0$ và bất phương trình $x+3>0$ có cùng tập nghiệm, do đó tương đương với nhau. A là đáp án đúng.

Giải thích thêm:

* $x+3+\sqrt{1-x}>\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\ge 0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\x>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<x\le 1$.

Vậy bất phương trình $x+3+\sqrt{1-x}>\sqrt{1-x}$ và bất phương trình $x+3>0$ không có cùng tập nghiệm. Do đó chúng không tương đương với nhau.

* $(x-5)^2(x+3)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 5\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 5\\x>-3\end{cases}$.

Tương tự suy ra C không phải là đáp án đúng.

* $x^2(x+3)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 0\\x>-3\end{cases}$.

Do đó D cũng không phải là đáp án đúng.

Đáp án A.

Dạng 2 Giải bất phương trình, hệ bất phương trình

Ví dụ 3: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x-2018}>\sqrt{2018-x}$?

A. $S=\{2018\}$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=(-\infty;2018)$. **D.** $S=(2018;+\infty)$.

Lời giải

STUDY TIP
Cần lưu ý đến điều kiện xác định khi giải bất phương trình.

Điều kiện: $\begin{cases} x-2018\ge 0 \\ 2018-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2018 \\ x\le 2018 \end{cases} \Leftrightarrow x=2018$.

Dễ thấy $x=2018$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Vậy $S=\varnothing$.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Cho bất phương trình $x^2(x-1)(x^2-4)\le (x-1)(x^2-4)(4x-4)$ có tập nghiệm S. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. S có 3 nghiệm nguyên không âm.

B. S có 1 nghiệm duy nhất.

C. Số $x_0=1$ là phần tử có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất của S.

D. S chứa khoảng $(3;4)$.

LƯU Ý
Lời giải sai: Bất phương trình tương đương với $x^2\le 4x-4 \Leftrightarrow (x-2)^2\le 0$ $\Leftrightarrow x=2$.

Lời giải

$x^2(x-1)(x^2-4)\le (x-1)(x^2-4)(4x-4) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4)(x^2-4x+4)\le 0$.

Ta có $(x-1)(x^2-4)(x^2-4x+4)=0$ có các nghiệm $x=1$ (bội 1), $x=2$ (bội 3) và $x=-2$ (bội 1). Xét dấu vế trái:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
VT		–	0	+	0	–	0	+	

Vậy $S=(-\infty;-2]\cup[1;2]$. Do đó C là đáp án đúng.

Đáp án C.

STUDY TIP
Không được tùy tiện chia 2 vế của bất phương trình cho một biểu thức khi chưa xác định được dấu của biểu thức đó.

Ví dụ 5: Gọi M, m lần lượt là nghiệm nguyên lớn nhất và nhỏ nhất của bất phương trình $\dfrac{x^2-x-10}{x^2+2x-3}\ge 2$. Tính $M+m$.

A. -5. **B.** -4. **C.** -3. **D.** -2.

LƯU Ý
Lời giải sai: Bất phương trình tương đương với $x^2-x-10\ge 2x^2+4x-6$
$\Leftrightarrow x^2+5x+4\le 0$
$\Leftrightarrow x\in[-4;-1]$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2x-3\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$ và $x\ne -3$.

$\dfrac{x^2-x-10}{x^2+2x-3}\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-10}{x^2+2x-3}-2\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-5x-4}{x^2+2x-3}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x-3}\le 0$.

Bảng xét dấu vế trái:

x	$-\infty$		-4		-3		-1		1		$+\infty$
VT		+	0	–	‖	+	0	–	‖	+	

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in[-4;-3)\cup[-1;1)$.

Do đó $M=0$ và $m=-4 \Rightarrow M+m=-4$.

Đáp án B.

STUDY TIP
Không được tùy tiện quy đồng khử mẫu khi giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Ví dụ 6: Bất phương trình $4x^2+4x-5\le |2x+1|$ có tập nghiệm $S=[a;b]\ (a<b)$. Tính a^2+b^2.

A. $a^2+b^2=\dfrac{17}{4}$. **B.** $a^2+b^2=\dfrac{5}{2}$. **C.** $a^2+b^2=\dfrac{5}{4}$. **D.** $a^2+b^2=5$.

Lời giải

$$|2x+1| \ge 4x^2+4x-5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+1 \ge 4x^2+4x-5 & (1) \\ 2x+1 \le -4x^2-4x+5 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow 4x^2+2x-6 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le x \le 1.$

$(2) \Leftrightarrow 4x^2+6x-4 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le \frac{1}{2}.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left[-\frac{3}{2};1\right] \cup \left[-2;\frac{1}{2}\right]=[-2;1].$

Do đó $a^2+b^2=5.$

Đáp án D.

Ví dụ 7: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}+2x \ge 3$ là nửa khoảng $[a;+\infty)$. Tìm $[a]$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

STUDY TIP
Phần nguyên của một số thực x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, kí hiệu $[x]$. Ví dụ:
$[2,5]=2;\ [-2,5]=-3.$

$$\sqrt{x^2-4x+5}+2x \ge 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5} \ge 3-2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 3-2x \le 0 \\ x^2-4x+5 \ge 0 \end{cases} & (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} 3-2x > 0 \\ x^2-4x+5 \ge (3-2x)^2 \end{cases} & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}.$$

$$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ 3x^2-8x+4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \le x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le x < \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=\left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right)=\left[\frac{2}{3};+\infty\right).$$

Từ đó ta có $a=\frac{2}{3} \Rightarrow [a]=0.$

Đáp án A.

Ví dụ 8: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-7x+6<0 \\ |x^2-4x| \le 0 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

STUDY TIP
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D. Khi đó $|f(x)| \ge 0,\ \forall x \in D.$

* $x^2-7x+6<0 \Leftrightarrow 1<x<6$ (*).

* $|x^2-4x| \le 0 \Leftrightarrow |x^2-4x|=0$ (do $|x^2-4x| \ge 0\ \forall x$)

$\Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$, trong hai giá trị này của x chỉ có giá trị $x=4$ thỏa mãn (*).

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Đáp án B.

Dạng 3 Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất chứa tham số

Ví dụ 9: Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $m^2(x-1)+x-3<0$ nghiệm đúng $\forall x\in[-5;2]$ là:

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$m^2(x-1)+x-3<0 \Leftrightarrow (m^2+1)x-m^2-3<0$.

Đặt $f(x)=(m^2+1)x-m^2-3$.

$$f(x)<0\ \forall x\in[-5;2] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-5)<0 \\ f(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2-8<0 \\ m^2-1<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6m^2+8>0 \\ m^2<1 \end{cases} \Leftrightarrow |m|<1 \Leftrightarrow -1<m<1.$$

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán, đó là giá trị $m=0$.

Đáp án B.

STUDY TIP

$f(x)=ax+b<0\ \forall x\in[\alpha;\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)<0 \\ f(\beta)<0 \end{cases}$.

Ví dụ 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6)<-3 \\ \dfrac{5x+m}{2}>7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m\le -11$. **B.** $m\ge -11$. **C.** $m<-11$. **D.** $m>-11$.

Lời giải

* $3(x-6)<-3 \Leftrightarrow x-6<-1 \Leftrightarrow x<5$.

* $\dfrac{5x+m}{2}>7 \Leftrightarrow 5x+m>14 \Leftrightarrow x>\dfrac{14-m}{5}$.

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{14-m}{5}<5 \Leftrightarrow 14-m<25 \Leftrightarrow m>-11.$$

Đáp án D.

LƯU Ý

Hệ bất phương trình trong Ví dụ 10 vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{14-m}{5}\ge 5 \Leftrightarrow m\le -11$.

Dạng 4 Tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai chứa tham số

Ví dụ 11: Cho bất phương trình $f(x)=3x^2+2(2m-1)x+m+4\le 0$, trong đó m là tham số, $m\in\mathbb{Z}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của m để bất phương trình vô nghiệm?

A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Bất phương trình $f(x)\le 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'<0$

$\Leftrightarrow 4m^2-7m-11<0 \Leftrightarrow -1<m<\dfrac{11}{4}$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{0;1;2\}$.

Đáp án C.

Ví dụ 12: Cho bất phương trình $f(x)=mx^2+(2m-1)x+m+1<0$ (m là tham số). Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để bất phương trình có nghiệm. S chứa khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Ta tìm điều kiện của m để bất phương trình $f(x)<0$ vô nghiệm.

- TH1: $m=0$. Khi đó $f(x)=-x+1<0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy với $m=0$ thì bất phương trình $f(x)<0$ có nghiệm.

- TH2: $m\neq 0$. Khi đó bất phương trình $f(x)<0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1-8m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\geq\dfrac{1}{8}\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{8}.$$

Vậy $m\geq\frac{1}{8}$ thì bất phương trình $f(x)<0$ vô nghiệm.

Suy ra với $m<\frac{1}{8}$ thì bất phương trình $f(x)<0$ có nghiệm $\Rightarrow S=\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$.

Vậy S chứa khoảng $(-1;0)$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Phương pháp "tìm phần bù": Thay vì tìm m để bất phương trình $f(x)<0$ có nghiệm, ta tìm m để bất phương trình $f(x)<0$ vô nghiệm.

Ví dụ 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(-2;2)$.

C. $m\in[-2;2]$. **D.** $m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=-x^2+2x-5$ có $\Delta'<0$, $a<0$ nên $f(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0\Leftrightarrow x^2-mx+1>0$.

$\Rightarrow$ Bất phương trình $\dfrac{-x^2+2x-5}{x^2-mx+1}\leq 0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-mx+1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta=m^2-4<0\Leftrightarrow m^2<4\Leftrightarrow -2<m<2$.

Đáp án B.

LƯU Ý

Việc xác định chính xác dấu của tử thức $-x^2+2x-5$ giúp ta có được lời giải đơn giản cho bài toán này.

Dạng 5 Biện luận về nghiệm của phương trình bậc hai

Ví dụ 14: Cho phương trình $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$. Biết tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình vô nghiệm là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

A. $b-a=8$. **B.** $b-a=6$. **C.** $b-a=-8$. **D.** $b-a=-6$.

Lời giải

* TH1: $m+2=0\Leftrightarrow m=-2$. Phương trình đã cho trở thành: $6x+4=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$.

* TH2: $m+2\neq 0\Leftrightarrow m\neq -2$. Khi đó phương trình đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1;7)$.

Vậy với $m \in (-1;7)$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Do đó $b - a = 7 - (-1) = 8$.

Đáp án A.

LƯU Ý

Khi phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0$ có hệ số a chứa tham số ta cần phải chú ý đến trường hợp $a = 0$.

Ví dụ 15: Gọi m_0 là giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để phương trình $-2x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 5m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu. Khi đó số ước nguyên dương của m_0 là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -2(m^2 - 5m + 6) < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

Vậy $m_0 = 1$. Do đó m_0 có 1 ước nguyên dương.

Đáp án A.

STUDY TIP

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

Ví dụ 16: Cho phương trình $x^2 + 2(m-1)x + 4m + 8 = 0$. Biết tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tìm độ dài của đoạn $[a; b]$ trên trục số.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6

Lời giải

Phương trình đã cho có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ -2(m-1) > 0 \\ 4m + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty) \\ m < 1 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-2; -1).$$

Vậy đoạn $[a; b]$ có độ dài là $-1 - (-2) = 1$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Độ dài của đoạn $[a; b]$ trên trục số là $b - a$.

Lưu ý:

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $S = \dfrac{-b}{a}$, $P = \dfrac{c}{a}$.

+ Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$;

+ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$ $(\Leftrightarrow ac < 0)$.