

Chủ đề X

Vấn đề cần nắm:

1. Phương trình đường thẳng
2. Phương trình đường tròn
3. Phương trình Elip
4. Một số bài toán cực trị
5. Một số bài toán sử dụng tính chất hình học

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Trong chủ đề này chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tọa độ để giải các bài toán liên quan đến đường thẳng, đường tròn, đường elip trong mặt phẳng.

Đây là chủ đề lớn và quan trọng trong chương trình THPT và chắc chắn sẽ có trong đề thi THPT quốc gia các năm tới. Vì vậy để đạt được kết quả tốt chúng ta phải học và nắm chắc hệ thống lý thuyết, các dạng bài tập cơ bản, điển hình, từ đó áp dụng để giải các bài toán tổng hợp khó hơn.

Chủ đề này cũng là nền tảng cơ bản ban đầu để mở rộng ra chủ đề “Phương pháp tọa độ trong không gian” sẽ học ở lớp 12.



§1. Phương trình đường thẳng

A. Lý thuyết

1. Vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương và hệ số góc của đường thẳng

a. Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng d được gọi là **vectơ pháp tuyến** (VTPT) của đường thẳng d .

b. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là **vectơ chỉ phương** (VTCP) của đường thẳng d .

c. Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u} = (a; b)$ với $a \neq 0$ thì có hệ số góc là $k = \frac{b}{a}$.

Nhân xét:

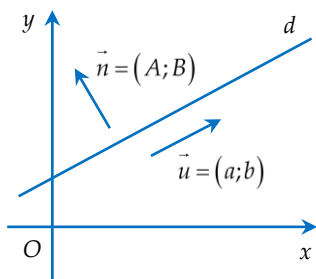
+ Nếu \vec{n} là VTPT của đường thẳng d thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ là VTPT của đường thẳng d .

+ Nếu \vec{u} là VTCP của đường thẳng d thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ là VTCP của đường thẳng d .

(một đường thẳng có vô số VTPT và VTCP)

+ Nếu VTPT của d là $\vec{n} = (A; B) \Rightarrow d$ có VTCP là $\vec{u} = (-B; A)$ (hoặc $\vec{u} = (B; -A)$) và ngược lại.

+ Nếu đường thẳng d có hệ số góc là k thì có VTCP là $\vec{u} = (1; k)$.



STUDY TIP

- + Nếu $\vec{n} = (A; B)$ là VTPT của $d \Rightarrow \vec{u} = (-B; A)$ là VTCP của d
- + Đường thẳng d có hệ số góc $k \Rightarrow$ có VTCP: $\vec{u} = (1; k)$

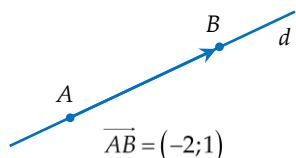
Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d qua $A(1; 2)$ và $B(-1; 3)$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- VTPT của d là $\vec{n} = (1; 2)$.
- VTCP của d là $\vec{u} = (2; -1)$.
- Hệ số góc của đường thẳng d là 2.
- Hệ số góc của đường thẳng d là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{AB} = (-2; 1)$

\Rightarrow Hệ số góc của đường thẳng d là $k = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ C sai.



Đáp án C.

STUDY TIP

Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ có phương trình tổng quát là:
 $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$

2. Phương trình đường thẳng

a. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng d qua

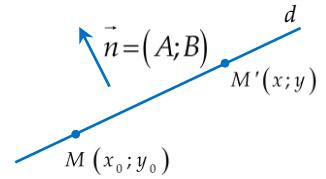
$M(x_0; y_0)$ và có VTPT là $\vec{n} = (A; B)$

$\Rightarrow \forall M'(x; y) \in d$, ta có $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

+ Phương trình (1) gọi là phương trình đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B)$.

+ Phương trình $Ax + By + C = 0 (A^2 + B^2 > 0)$ biểu thị một đường thẳng có VTPT là $\vec{n} = (A; B)$ và VTCP $\vec{u} = (-B; A)$.



Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $M(1; 2)$ và có hệ số góc $k = -2$ là

- A. $2x - y = 0$. B. $2x + y - 4 = 0$. C. $2x + y = 0$. D. $2x + y + 4 = 0$.

Lời giải

Cách 1:

+ Đường thẳng d có hệ số góc $k = -2 \Rightarrow$ VTCP $\vec{u} = (1; -2) \Rightarrow$ VTPT $\vec{n} = (2; 1)$

+ Đường thẳng d qua $M(1; 2)$ và có VTPT $\vec{n} = (2; 1)$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng d là: $2(x - 1) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$

Cách 2:

+ Bước 1: Kiểm tra đường thẳng qua $M(1; 2)$, loại phương án C, D.

+ Bước 2: Kiểm tra phương án A: $d: 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow$ hệ số góc $k = 2$ (loại)

Vậy đáp án B đúng.

Đáp án B.

b. Phương trình tham số của đường thẳng

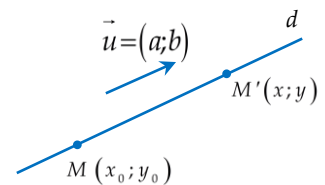
Cho đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (a; b)$

$\Rightarrow \forall M'(x; y) \in d \Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ và \vec{u} cùng phương

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} = t\vec{u}$ (t là tham số)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

\Rightarrow Phương trình (2) gọi là phương trình tham số của đường thẳng d .



Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy , phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(2; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$. B. $3x - 4y - 18 = 0$. C. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$.

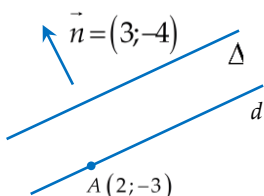
Lời giải

Đường thẳng $d \parallel \Delta \Rightarrow$ nhận VTPT của Δ là $\vec{n} = (3; -4)$ làm VTPT

\Rightarrow nhận $\vec{u} = (4; 3)$ làm VTCP $\Rightarrow d$ đi qua $A(2; -3)$ và nhận $\vec{u} = (4; 3)$ làm VTCP

STUDY TIP

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)$ làm VTCP có dạng:
 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$



STUDY TIP

Đường thẳng Δ có phương trình $Ax + By + C = 0$

\Rightarrow VTPT của Δ là $\vec{n} = (A; B)$.

\Rightarrow Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$.

Đáp án A.

Lưu ý:

+ Đối với Ví dụ 3 ta có thể loại ngay phương án C và B, do không phải là phương trình tham số (dạng khác của đường thẳng d).

+ Đường thẳng ở phương án D thì không đi qua A, suy ra chọn đáp án A.

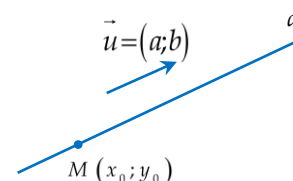
c. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)$ làm VTCP có phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

Với $a, b \neq 0$ thì hệ phương trình (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x - x_0}{a} \\ t = \frac{y - y_0}{b} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}} \quad (3)$$



\Rightarrow Phương trình (3) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d .

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy , phương trình chính tắc của đường thẳng qua $A(-1; -2)$ và $B(0; 3)$ là:

A. $5(x + 1) - 1(y + 2) = 0$.

B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.

C. $\frac{x + 1}{1} = \frac{y + 2}{5}$.

D. $\frac{x}{1} = \frac{y + 2}{5}$.

Lời giải

Đường thẳng AB đi qua $A(-1; -2)$ và có VTCP $\vec{AB} = (1; 5)$

\Rightarrow Phương trình chính tắc của d là: $\frac{x + 1}{1} = \frac{y + 2}{5}$.

Đáp án C.

Lưu ý: Phương trình ở phương án A và B không phải dạng chính tắc của đường thẳng AB .

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy , phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ với $(x_B - x_A)(y_B - y_A) \neq 0$ không phải là phương trình nào sau đây?

A. $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

B. $\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$.

C. $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

D. $\frac{x - x_B}{x_B - x_A} = \frac{y - y_B}{y_B - y_A}$.

Lời giải

Nhận thấy ở phương án A, VTCP của AB là $\vec{u} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ không cùng phương với $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow$ mâu thuẫn \Rightarrow phương án A không phải là phương trình chính tắc của đường thẳng AB .

Đáp án A.

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$ là:

$B(x_B; y_B)$ là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

với $(x_B - x_A)(y_B - y_A) \neq 0$

Nhận xét: + Phương án B: AB đi qua B và có VTCP là \overrightarrow{BA}
 + Phương án C: AB đi qua A và có VTCP là \overrightarrow{AB}
 + Phương án D: AB đi qua B và có VTCP là \overrightarrow{AB}
 \Rightarrow Cả 3 phương án B, C, D đều đúng.

d. Phương trình đường thẳng theo hệ số góc

+ Cho đường thẳng d qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k

Khi đó d có VTCP là $\vec{u} = (1; k) \Rightarrow d$ có VTPT là $\vec{n} = (k; -1)$

\Rightarrow Phương trình đường thẳng $d: k(x - x_0) - 1(y - y_0) = 0$

$$\Leftrightarrow y = k(x - x_0) + y_0 \quad (4)$$

\Rightarrow Phương trình (4) gọi là phương trình đường thẳng d theo hệ số góc k .

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d qua $A(-1; 2)$ và song song với $\Delta: y = 5x + 2$ có phương trình là

- A. $y = 5x - 3$. B. $y = 3x + 5$. C. $y = -7x - 5$. D. $y = 5x + 7$.

Lời giải

Đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ và có hệ số góc là $k = 5$

$$\Rightarrow d: y = 5[x - (-1)] + 2 \Leftrightarrow y = 5x + 7.$$

Đáp án D.

e. Phương trình đường thẳng dạng đoạn chắn

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ với $a, b \neq 0$ là

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Leftrightarrow -\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

\Rightarrow Phương trình (5) gọi là phương trình đường thẳng theo dạng đoạn chắn qua A và B .

Ví dụ 7: Đường thẳng d qua $M(2; 4)$ cắt $Ox; Oy$ lần lượt tại A, B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình là

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$. B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$. C. $2x - y = 0$. D. $y = ax + 2$.

Lời giải

$A \in Ox \Rightarrow A(a; 0); B \in Oy \Rightarrow B(0; b)$

$$M(2; 4) \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+0}{2} = 2 \\ \frac{0+b}{2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(4; 0) \\ B(0; 8) \end{cases} \Rightarrow AB: \frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$$

Đáp án B.

Ví dụ 8: Trong mặt phẳng Oxy , phương trình đường thẳng Δ qua $M(1; 4)$ cắt các tia $Ox; Oy$ lần lượt tại 2 điểm A, B sao cho diện tích ΔOAB đạt GTNN là: $ax + by + 8 = 0$. Khi đó $a + b$ đạt giá trị là

- A. 5. B. -5. C. 3. D. -3.

Lời giải

STUDY TIP

+ Đường thẳng $d: y = ax + b$ có hệ số góc là a .
 + 2 đường thẳng song song thì cùng hệ số góc (có hệ số góc bằng nhau - lớp 9)

STUDY TIP

Phương trình đường thẳng dạng đoạn chắn qua $A(a; 0) \in Ox; B(0; b) \in Oy$ ($a, b \neq 0$) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

STUDY TIP

Cho $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$, trung điểm AB là: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

STUDY TIP

Cho $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow x + y \geq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

$$+ \text{Gọi } A(a;0); B(0;b); a, b > 0 \text{ (do } \Delta \text{ cắt các tia } Ox; Oy) \Rightarrow AB: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$+ AB \text{ qua } M(1;4) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{4}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq 4 \Leftrightarrow ab \geq 16$$

$$+ S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| = \frac{1}{2} ab \geq \frac{1}{2} \cdot 16$$

$$\Rightarrow \min S_{OAB} = 8 \text{ khi } \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{4}{b} \\ \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB: \frac{x}{2} + \frac{y}{8} = 1 \Leftrightarrow 8x + 2y - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 8 = 0 \Rightarrow a + b = 5.$$

Đáp án A.

3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

a. Cách 1:

Cho 2 đường thẳng $\begin{cases} \Delta: Ax + By + C = 0 \\ \Delta': A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ khi đó:

+ Nếu $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \Rightarrow \Delta$ và Δ' cắt nhau.

+ Nếu $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Rightarrow \Delta$ và Δ' song song với nhau.

+ Nếu $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \Rightarrow \Delta$ và Δ' trùng nhau.

b. Cách 2:

Xét hệ gồm phương trình 2 đường thẳng $\begin{cases} \Delta: Ax + By + C = 0 \\ \Delta': A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ (I), khi đó:

+ Nếu hệ (I) có 1 nghiệm $(x_0; y_0) \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = M(x_0; y_0)$

+ Nếu hệ (I) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$

+ Nếu hệ (I) có vô số nghiệm $\Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng Oxy , cho các đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1}$;

$d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}; d_3: -x + 2y + 5 = 0$. Khi đó ta có

A. $d_1 // d_2$.

B. $d_2 \equiv d_3$.

C. $d_2 // d_3$.

D. $d_1 \equiv d_3$.

Lời giải

$$+ d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x+1 = 2(y-2) \Leftrightarrow x-2y+5=0 \quad (1)$$

$$+ d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow x-1 = 2y-6 \Leftrightarrow x-2y+5=0 \quad (2)$$

$$+ d_3: x-2y-5=0 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d_1 \equiv d_2$, loại phương án A.

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow d_2 // d_3, \text{ loại B.}$$

Vậy ta chọn đáp án C.

STUDY TIP

Nên đưa các đường thẳng về phương trình tổng quát trước khi xét vị trí tương đối.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng Oxy , cho 2 đường thẳng $d_1: 2x - m = 0$ và $d_2: mx - y + 3 = 0$ với m là tham số, biết tập hợp giao điểm của d_1 và d_2 là một parabol. Khi đó tọa độ đỉnh của parabol đó là

- A. $I(1;3)$. B. $I(0;3)$. C. $I(0;0)$. D. $I(2;3)$.

Lời giải

+ Xét hệ $\begin{cases} 2x - m = 0 & (1) \\ mx - y + 3 = 0 & (2) \end{cases} (*)$ có $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - m \cdot 0 = -2$

$\Rightarrow D \neq 0 \Rightarrow$ Hệ có 1 nghiệm $\Rightarrow d_1$ luôn cắt d_2 tại 1 điểm

+ Gọi giao điểm của d_1 và d_2 là $M(x;y)$ thỏa mãn hệ (*)

Từ phương trình (1) $\Rightarrow m = 2x$ thế vào phương trình (2)

$\Rightarrow 2x \cdot x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x^2 + 3 \quad (3)$

Tọa độ M thỏa mãn phương trình (3) \Rightarrow Tập hợp điểm M là $(P): y = 2x^2 + 3$

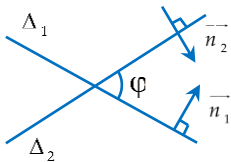
$\Rightarrow I(0;3)$.

Đáp án B.

STUDY TIP

$(D): y = ax^2 + bx + c$

$(a \neq 0)$ có đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$



STUDY TIP

+ $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$

+ Nếu $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2)$

$\Rightarrow 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$

4. Góc giữa hai đường thẳng

a. Cho Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành 4 góc:

+ Nếu Δ_1 không vuông góc với Δ_2 thì góc nhọn trong 4 góc đó được gọi là góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) < 90^\circ$.

+ Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2$ thì góc giữa chúng là 90° .

+ Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ (hoặc $\Delta_1 \equiv \Delta_2$) góc giữa chúng là 0° .

b. Cho 2 đường thẳng $\Delta_1: Ax + By + C = 0$ có VTPT $\vec{n}_1 = (A; B)$

$\Delta_2: A'x + B'y + C' = 0$ có VTPT $\vec{n}_2 = (A'; B')$

Gọi α là góc giữa Δ_1 và Δ_2

$\Rightarrow \varphi = (\Delta_1, \Delta_2) \Rightarrow \cos \varphi = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{A'^2 + B'^2}} \quad (6)$

Chú ý:

+ Nếu $\varphi = (\Delta_1, \Delta_2) \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 90^\circ$

+ $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$

+ Nếu $\Delta_1: y = k_1x + m_1; \Delta_2: y = k_2x + m_2 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng Oxy , cho $d_1: x - 2y + 5 = 0$ và $d_2: 3x - y + 1 = 0$, góc giữa d_1 và d_2 là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

+ VTPT của d_1 và d_2 lần lượt là $\vec{n}_1 = (1; -2); \vec{n}_2 = (3; -1)$

+ Gọi φ là góc giữa Δ_1, Δ_2 . Khi đó:

$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Đáp án B.

