§3. Phương trình bậc hai và quy về bậc hai

A. Lý thuyết

1. Giải biện luận phương trình: $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$

Ta có: $\Delta=b^2-4ac$.

+ $\Delta<0$: phương trình vô nghiệm.
+ $\Delta=0$: phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$.
+ $\Delta>0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Định lí Vi-et

Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thì $\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

Nếu hai số x,y mà $\begin{cases}x+y=S\\ x.y=P\end{cases}$ thì x,y là nghiệm của phương trình $t^2-St+P=0$ (với $S^2\geq 4P$).

STUDY TIP

Trong trường hợp phương trình có 2 nghiệm trái dấu ta không cần điều kiện $\Delta>0$ vì $\dfrac{c}{a}<0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm.

3. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}<0$

4. Phương trình có 2 nghiệm dương $0<x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$

5. Phương trình có 2 nghiệm âm $x_1<x_2<0\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta>0\\ P>0\\ S<0\end{cases}$

B. Các dạng toán điển hình

Dạng 1

Xác định tham số biện luận số nghiệm của phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-10;10\right]$ để phương trình $x^2-x+m=0$ vô nghiệm?

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 20.

Lời giải

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\Delta=1-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Vì $m\in\left[-10;10\right],m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\right\}$, có 10 phần tử thỏa mãn.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Phương trình $\left(m-2\right)x^2+2x-1=0$ có nghiệm kép khi:

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=2\end{array}\right.$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi: $\begin{cases} m-2\neq 0 \\ \Delta' = m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $mx^2+6=4x+3m$ có nghiệm duy nhất.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m=0$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 0$.

STUDY TIP
Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm duy nhất xảy ra ở 1 trong 2 trường hợp sau:
+ TH1: $a=0$, phương trình $bx+c=0$ có nghiệm duy nhất.
+ TH2: $a\neq 0, \Delta=0$ hoặc $\Delta'=0$.

Lời giải

Viết lại phương trình: $mx^2-4x+(6-3m)=0$

- Với $m=0$: Khi đó phương trình có dạng $-4x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ là nghiệm.

- Với $m\neq 0$: Ta có $\Delta'=(-2)^2-m(6-3m)=3m^2-6m+4=3(m-1)^2+1>0\ \forall m$.

Khi đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt khi $m\neq 0$.

Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Phương trình $(m-1)x^2+6x-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khi:

A. $m>-8$. **B.** $m>-\frac{5}{4}$.

C. $m>-8$ và $m\neq 1$. **D.** $m>-\frac{5}{4}$ và $m\neq 1$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi:

$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m>-8 \end{cases}$

Đáp án C.

Dạng 2 Dấu của nghiệm phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} \Delta\geq 0 \\ P>0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ S<0 \end{cases}$

STUDY TIP
ĐK để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu:
$\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta>0$.

Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là $x_1; x_2$.

Do $x_1; x_2$ cùng dấu nên $x_1.x_2>0$ hay $P>0$.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Phương trình $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0. \\ S>0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0. \\ S<0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \end{cases}$.

STUDY TIP
ĐK để phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt:
$\begin{cases}\Delta>0\\P>0\\S<0\end{cases}$

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2<0\\x_1.x_2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S<0\\P>0\end{cases}$$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Phương trình $ax^2+bx+c=0\left(a\neq0\right)$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases}\Delta>0\\S<0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\Delta>0\\S>0\end{cases}$. **C.** $P<0$. **D.** $P>0$.

Lời giải

Giả sử phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì $x_1.x_2<0\Rightarrow P<0$.

Khi đó $P=\frac{c}{a}<0\Rightarrow a,c$ trái dấu nên phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C.

Ví dụ 4: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $\left[-2;6\right]$ để phương trình $x^2+4mx+m^2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng:

A. -3. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 21.

STUDY TIP
ĐK để phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt:
$\begin{cases}\Delta>0\\P>0\\S<0\end{cases}$

Lời giải

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi:

$$\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m^2>0\\-4m>0\\m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\m<0\end{cases}\Rightarrow S=\left\{-2;-1\right\}$$

Vậy tổng các phần tử của S là -3.

Đáp án A.

Ví dụ 5: Phương trình $\left(m-1\right)x^2+3x-1=0$ có hai nghiệm trái dấu khi:

A. $m>1$. **B.** $m<1$. **C.** $m\geq1$. **D.** $m\leq1$.

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi: $\begin{cases}a\neq0\\P<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1\neq0\\\frac{-1}{m-1}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq1\\m>1\end{cases}\Leftrightarrow m>1$

Đáp án A.

Ví dụ 6: Tìm điều kiện của m để phương trình $x^2-\left(2m-1\right)x+m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1>x_2>1$.

A. $m>2$. **B.** $m>\frac{3}{2}$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq1$.

Lời giải

Trước hết phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi:

$\Delta=\left(2m-1\right)^2-4\left(m^2-m\right)>0\Leftrightarrow4m^2-4m+1-4m^2+4m>0\Leftrightarrow1>0$ luôn đúng

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1 \\ x_1x_2=m^2-m \end{cases}$

Để $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1>x_2>1 \Rightarrow x_1-1>x_2-1>0$

STUDY TIP
$x_1>x_2>1 \Leftrightarrow x_1-1>x_2-1>0$ ta đi so sánh hai số với nhau.

$\Rightarrow$ Điều kiện: $\begin{cases} (x_1-1)(x_2-1)>0 \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2-2>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-(2m-1)+1>0 \\ 2m-1-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-2)>0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1>0 \\ m-2>0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m-1<0 \\ m-2<0 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>2$$

Đáp án A.

Ví dụ 7: Tìm điều kiện của m để phương trình $x^2-(2m-1)x+m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1<2<x_2$.

A. $m<2$. **B.** $m>3$. **C.** $2<m<3$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Lời giải

STUDY TIP
Việc so sánh x_1, x_2 với 2 số ta đưa về so sánh 2 số x_1-2 và x_2-2 với số 0.

Trước hết phương trình đã cho phải có 2 nghiệm $\Rightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow 1>0$ thỏa mãn $\forall m$.

Để $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1<2<x_2 \Leftrightarrow x_1-2<0<x_2-2$ ta đi so sánh hai số (x_1-2) và (x_2-2) với số 0.

Vậy điều kiện là: $(x_1-2)(x_2-2)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-1 \\ x_1.x_2=m^2-m \end{cases}$

$\Rightarrow m^2-m-2(2m-1)+4<0 \Leftrightarrow m^2-5m+6<0$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m-3)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-2<0 \\ m-3>0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-2>0 \\ m-3<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2<m<3$$

Đáp án C.

Dạng 3 Định lí Vi-et và những bài toán về phương trình bậc hai

Ví dụ 1: Giả sử phương trình $x^2-3x-m=0$ (m là tham số) có hai nghiệm là $x_1;x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P=x_1{}^2(1-x_2)+x_2{}^2(1-x_1)$ theo m.

A. $P=-m+9$. **B.** $P=5m+9$. **C.** $P=m+9$. **D.** $P=-5m+9$.

Lời giải

STUDY TIP
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

Ta có: $P=x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_1)$

$=x_1^2-x_1^2x_2+x_2^2-x_1x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2(x_1+x_2)$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1.x_2=-m\end{cases}$ thay vào P ta được:

$P=3^2-2(-m)-(-m).3=5m+9$.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Giả sử phương trình $2x^2-4ax-1=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=|x_1-x_2|$.

A. $T=\dfrac{4a^2+2}{3}$. **B.** $T=\sqrt{4a^2+2}$. **C.** $T=\dfrac{\sqrt{a^2+8}}{2}$. **D.** $T=\dfrac{\sqrt{a^2+8}}{4}$.

Lời giải

STUDY TIP
$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$

Vì a và c trái dấu nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Theo định lí Vi-et ta có:

$\begin{cases}x_1+x_2=2a\\x_1.x_2=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$ và $T^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4a^2-4\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4a^2+2>0$

$\Rightarrow T=\sqrt{4a^2+2}>0$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(2m+1)x+m^2+1=0$. Tìm giá trị nguyên của m sao cho biểu thức $P=\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ có giá trị nguyên.

A. $m=-2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

STUDY TIP
Trong lời giải bên ta nhân 2 vế của P ở đẳng thức (1) với 4 để $(2m-1)$ luôn là số nguyên với m nguyên.

Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4m^2-4=4m-3$

Để phương trình có hai nghiệm thì $\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{4}$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+1\\x_1x_2=m^2+1\end{cases}$

Khi đó $P=\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{m^2+1}{2m+1}=\dfrac{2m-1}{4}+\dfrac{5}{4(2m+1)}=\dfrac{1}{4}\left(2m-1+\dfrac{5}{2m+1}\right)$ (1)

$\Rightarrow 4P=2m-1+\dfrac{5}{2m+1}$; $m\ge\dfrac{3}{4}\Rightarrow 2m+1\ge\dfrac{5}{2}$

$P\in\mathbb{Z}$ thì $2m+1$ là ước của 5 $\Rightarrow 2m+1=5\Rightarrow m=2$

Thử lại với $m=2\Rightarrow P=1$ thỏa mãn.

Đáp án D.

Ví dụ 4: Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2+2mx+m^2-2=0$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=|2x_1x_2+x_1+x_2-4|$.

A. $P_{\max}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $P_{\max}=2$. **C.** $P_{\max}=\dfrac{25}{4}$. **D.** $P_{\max}=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = m^2 - 2(m^2-2) = -m^2+4$

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta' = 4 - m^2 \ge 0 \Leftrightarrow m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$

STUDY TIP

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1x_2 = \dfrac{m^2-2}{2} \end{cases}$

Khi đó: $P = \left|2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4\right| = \left|m^2 - 2 + (-m) - 4\right|$

$= \left|m^2 - m - 6\right| = \left|(m-2)(m-3)\right| = -(m-2)(m-3)$

$= -m^2 + m + 6 = -\left(m - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{4} \le \dfrac{25}{4}$

Do $-2 \le m \le 2 \Rightarrow P_{\max} = \dfrac{25}{4}$ khi $m = \dfrac{1}{2} \in [-2;2]$.

Đáp án C.

Ví dụ 5: Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Tìm m để biểu thức $P = \dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2+1)}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \dfrac{1}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\Delta = (m-2)^2 \ge 0\ \forall m$.

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm.

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = m-1 \end{cases}$

$\Rightarrow P = \dfrac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1x_2+1)} = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$ (1)

$\Rightarrow P - 1 = \dfrac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \dfrac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = \dfrac{-(m-1)^2}{m^2+2} \le 0\ \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P \le 1$

Vậy $P_{\max} = 1$ khi $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

STUDY TIP

Lời giải bên ta đã trừ hai vế của (1) cho số 1 đưa về hằng đẳng thức $(m-1)^2$ để đánh giá dễ dàng hơn.

Đáp án B.

Dạng 4 Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình bậc hai thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 1: Giả sử phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Khi đó hệ thức nào sau đây là điều kiện để phương trình có một nghiệm bằng k lần nghiệm còn lại?

A. $(k+1)^2ac + kb^2 = 0$. **B.** $(k+1)^2ac - kb^2 = 0$.

C. $(k-1)^2ac - kb^2 = 0$. **D.** $(k-1)^2ac + kb^2 = 0$.

Lời giải

Theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

STUDY TIP
Phương trình bậc hai có nghiệm này bằng k lần nghiệm kia thì $\left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right.$

Khi đó: $P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = x_1x_2 - k\left(x_1{}^2 + x_2{}^2\right) + k^2x_1x_2$

$= x_1x_2 - k\left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right] + k^2x_1x_2 = \dfrac{c}{a} - k\left[\dfrac{b^2}{a^2} - 2\dfrac{c}{a}\right] + k^2\dfrac{c}{a} = \dfrac{(k+1)^2 ac - kb^2}{a^2}$

Nếu $(k+1)^2 ac - kb^2 = 0$ thì một trong hai thừa số của P là $\left[\begin{array}{l} x_1 - kx_2 = 0 \\ x_2 - kx_1 = 0 \end{array}\right.$ hay nghiệm này bằng k lần nghiệm kia.

Đáp án B.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.

A. $m = -6$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m < 5$.

Lời giải

STUDY TIP
PT: $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thì:
$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(m-2) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 3 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$

$\Rightarrow 4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2 \Leftrightarrow 4.\dfrac{2(m-1)}{m+1} = 7.\dfrac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow 8m - 8 = 7m - 14 \Leftrightarrow m = -6$

Đáp án A.

Ví dụ 3: Cho hai phương trình $x^2 + ax + bc = 0$ (1) và $x^2 + bx + ca = 0$ (2). Giả sử a, b, c là ba số khác nhau từng đôi một và $c \neq 0$ nếu phương trình (1) và phương trình (2) có đúng một nghiệm chung thì nghiệm khác của hai phương trình trên là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x^2 + cx - ab = 0$. **B.** $x^2 + cx + ab = 0$.

C. $x^2 - cx + ab = 0$. **D.** $x^2 - cx - ab = 0$.

Lời giải

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 khi đó: $\begin{cases} x_0{}^2 + ax_0 + bc = 0 \\ x_0{}^2 + bx_0 + ca = 0 \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai đẳng thức trên ta có: $(a-b)(x_0 - c) = 0 \Leftrightarrow x_0 = c$ (vì $a \neq b$)

Phương trình (1) có nghiệm $x_1; x_0$ nên ta có: $\begin{cases} x_0 + x_1 = -a \\ x_0x_1 = bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b;\ x_0 = c \\ c = -a - b \end{cases}$

Phương trình (2) có nghiệm $x_0; x_2$ nên ta có: $\begin{cases} x_0 + x_2 = -b \\ x_0x_2 = ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = a;\ x_0 = c \\ c = -a - b \end{cases}$

Vậy ta được $\begin{cases} x_1+x_2=a+b=-c \\ x_1x_2=ab \end{cases}$

Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2+cx+ab=0$ (3)

Và phương trình (3) có $\Delta=c^2-4ab=(-a-b)^2-4ab=(a-b)^2>0\ \forall a\neq b$

Đáp án B.

Dạng 5 Các phương trình quy về bậc hai

Phương pháp:

1. $ax^4+bx^2+c=0$: Đặt $t=x^2, t\geq 0$.
2. $a.\left[P(x)\right]^2+b.P(x)+c=0$: Đặt $t=P(x)$.
3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e,\ a+d=b+c$: Đặt $t=(x+a)(x+d)$.
4. $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$: Chia cho $x^2\neq 0$, đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$.
5. $(x+a)^4+(x+b)^4+c=0$: Đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}$.
6. $a.f(x)+b.\sqrt{f(x)}+c=0$: Đặt $t=\sqrt{f(x)}$.
7. $a.f(x)+b.g(x)=c\sqrt{f(x).g(x)}$

+ Xét $g(x)=0$.

+ Với $g(x)\neq 0$, chia hai vế cho $g(x)$ ta có phương trình: $a.\dfrac{f(x)}{g(x)}+b=\pm c\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$.

Đặt $\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=t$.

STUDY TIP
Phương trình: $(x+a)^4+(x+b)^4+c=0$ nếu đặt $t=x+\dfrac{a+b}{2}$ thì phương trình thu được luôn là phương trình bậc 4 trùng phương.

Ví dụ 1: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $(x-1)^4+(x+3)^4=256$.

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Đặt $y=\dfrac{-1+3}{2}+x$ hay $y=x+1 \Rightarrow x=y-1$, ta có phương trình:

$(y-2)^4+(y+2)^4=256 \Leftrightarrow 2y^4+48y^2-224=0$

Đặt $y^2=t\geq 0$, phương trình trở thành: $2t^2+48t-224=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=-28\ (l) \end{array}\right.$

Với $t=4 \Rightarrow y^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow$ Tổng các nghiệm là $-3+1=-2$.

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$. Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2+3t+2=0$. **B.** $t^2-3t+2=0$. **C.** $t^2-3t-2=0$. **D.** $t^2-t+2=0$.

Lời giải

Với $x=0$ không là nghiệm.

$x\neq 0$ chia 2 vế cho x^2 ta được phương trình:

$$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

STUDY TIP
$t=x+\frac{1}{x}$ thì $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ ta có phương trình:

$$t^2-2-3t+4=0\Leftrightarrow t^2-3t+2=0$$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3.$$

A. $\frac{-5}{2}$.   **B.** 5.   **C.** –5.   **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

STUDY TIP
Trong phương trình ta nhóm $(x+1)(x+4)$ và $(x+2)(x+3)$ để sau khi nhân ra ta được những biểu thức giống nhau là (x^2+5x)

Phương trình $\Leftrightarrow(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=3\Leftrightarrow(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=3$

Đặt: $x^2+5x=y$ ta có phương trình:

$(y+4)(y+6)=3\Leftrightarrow y^2+10y+21=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3\\y=-7\end{array}\right.$

+ Với $y=-3\Rightarrow x^2+5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\\x_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$.

+ Với $y=-7\Rightarrow x^2+5x+7=0$ vô nghiệm.

Vậy tổng $x_1+x_2=-5$.

Đáp án C.

Ví dụ 4: Phương trình $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.   **B.** 2.   **C.** 3.   **D.** 4.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x^2+11}=t, t\ge 0$ ta có phương trình:

$x^2+11+\sqrt{x^2+11}-11-31=0$ trở thành $t^2+t-42=0$ có nghiệm $t=6$

$\sqrt{x^2+11}=6\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=\pm 5$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Đáp án B.

Ví dụ 5: Tính tổng các nghiệm của phương trình: $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

A. 3.   **B.** –3.   **C.** $\frac{3}{2}$.   **D.** $\frac{-3}{2}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $\left[\begin{array}{l}x\le -3\\x\ge 0\end{array}\right.$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$-x^2-3x+10-3\sqrt{x^2+3x}=0\Leftrightarrow x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x}-10=0$

Đặt $\sqrt{x^2+3x}=t, t\ge 0$ ta có phương trình: $t^2+3t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-5\ (l)\\t=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm bằng -3.

Đáp án B.

Ví dụ 6: Số nghiệm của phương trình: $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$ là:

A. vô nghiệm. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

ĐKXĐ: $x<-1$ hoặc $x>0$

Đặt $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=t, t>0$ ta có phương trình:

$\dfrac{1}{t^2}-2t-3=0 \Leftrightarrow -2t^3-3t^2+1=0 \Leftrightarrow (t+1)(2t^2+t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (l) \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Với $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4x+4=x \Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{3}$ (TMĐK)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Đáp án B.

Ví dụ 7: Cho phương trình: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}; t\ge 0$ ta có phương trình nào sau đây?

A. $t^2-5t+2=0.$ **B.** $t^2+5t+2=0.$

C. $2t^2-5t+2=0.$ **D.** $2t^2-5t-2=0.$

Lời giải

STUDY TIP
$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

Để ý $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ nên ta tách: $2(x^2+2)=a(x+1)+b(x^2-x+1)$ bằng cách đồng nhất hệ số và ta được: $2(x^2+2)=2(x+1)+2(x^2-x+1)$

Điều kiện: $x\ge -1$

Ta có: $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1} \Leftrightarrow 2(x+1)+2(x^2-x+1)=5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$

Chia hai vế cho $x^2-x+1>0$ ta được: $2.\dfrac{x+1}{x^2-x+1}+2=5\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x+1}}$ ta có phương trình: $2t^2-5t+2=0$

Đáp án C.

Ví dụ 8: Cho phương trình: $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(x+3)(6-x)}=3$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2-2t-1=0.$ **B.** $t^2-2t+3=0.$ **C.** $2t^2-t-1=0.$ **D.** $t^2-2t-3=0.$

Lời giải

ĐKXĐ: $-3\le x\le 6$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x} \Rightarrow t^2=9+2\sqrt{(x+3)(6-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(6-x)} = \dfrac{t^2-9}{2}$ thay vào phương trình đã cho ta có:

$t - \dfrac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow 2t - t^2 + 9 = 6 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

Đáp án D.

Ví dụ 9: Cho phương trình: $\sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6} + 2\sqrt{49x^2+7x-42} = 181 - 14x$ và $t = \sqrt{7x+7} + \sqrt{7x-6}$, khi đó t nhận giá trị nào sau đây?

A. 19. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 27.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \ge \dfrac{6}{7}$

Ta có: $\sqrt{49x^2+7x-42} = \sqrt{(7x+7)(7x-6)}$

Khi đó: $t^2 = 14x + 1 + 2\sqrt{49x^2+7x-42} \Rightarrow t^2 - 1 = 14x + 2\sqrt{49x^2+7x-42}$

Thay vào phương trình đã cho ta có:

$t + t^2 - 1 = 181 \Leftrightarrow t^2 + t - 182 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -14 \ (l) \\ t = 13 \end{array}\right.$

Đáp án B.

Ví dụ 10: Cho phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = n$. Tìm tất cả các giá trị của n để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $n \in \left[2\sqrt{2}-2; 2\right]$. **B.** $n \ge 2$.

C. $n \le 2$. **D.** $n \le 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

ĐKXĐ: $-1 \le x \le 3$.

Đặt: $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{-x^2+2x+3}$

Xét $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ trên $[-1;3] \Rightarrow 2 \le t \le 2\sqrt{2}$

Khi đó: $\sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{-x^2+2x+3} = \dfrac{t^2-4}{2}$ phương trình đã cho trở thành:

$t - \dfrac{t^2-4}{2} = n$

$\Leftrightarrow 2t - t^2 + 4 = 2n \Leftrightarrow t^2 - 2t + 2n - 4 = 0$ có $\Delta' = 5 - 2n$.

Nếu $\Delta' = 5 - 2n \ge 0 \Rightarrow n \le \dfrac{5}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 + \sqrt{5-2n} \\ t_2 = 1 - \sqrt{5-2n} \end{array}\right.$

- Với $t_2 = 1 - \sqrt{5-2n}$ (không thỏa mãn).

- Với $t_1 = 1 + \sqrt{5-2n}$ (thỏa mãn) thì: $2 \le 1 + \sqrt{5-2n} \le 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \le n \le 2$

Đáp án A.

STUDY TIP

Phương trình:

$t^2 - 2t + 2n - 4 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 2t - 4 = -2n$

Lập bảng biến thiên cho hàm số $g(t) = t^2 - 2t - 4$ ta cũng tìm được n.

Ví dụ 11: Cho phương trình: $mx^4 - 2(m-3)x^2 + 4m = 0$ (1). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-3 < m < 1$. **B.** $\begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \ne 0 \end{cases}$. **C.** $-3 < m < 0$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Đặt $x^2 = t, t \ge 0$ ta có phương trình: $mt^2 - 2(m-3)t + 4m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ (m-3)^2 - 4m^2 > 0 \\ \dfrac{2(m-3)}{m} > 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -3(m-1)(m+3) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ -3 < m < 1 \Leftrightarrow -3 < m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Đáp án C.

Ví dụ 12: Tìm m để phương trình: $2x^2 - 2mx + 1 = 3\sqrt{2x^3 + x}$ có hai nghiệm thực phân biệt. Khi đó có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0;20]$ thỏa mãn.

A. 10. **B.** 11. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \ge 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 2mx = 2x^2 + 1 - 3\sqrt{2x^3 + x}$

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm.

Với $x \ne 0$, phương trình $\Leftrightarrow 2m = 2x + \dfrac{1}{x} - 3\sqrt{2x + \dfrac{1}{x}}$

Đặt $t = \sqrt{2x + \dfrac{1}{x}}$, $t \ge \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$ ta có phương trình: $m = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}t$

Vì mỗi $t > \sqrt[4]{8}$ thì có 2 nghiệm x nên bài toán trở thành tìm m để phương trình $m = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}t$ có một nghiệm lớn hơn $\sqrt[4]{8}$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{3}{2}t$

Bảng biến thiên:

t	$\sqrt[4]{8}$		$+\infty$
$g(t)$		$\nearrow$	$+\infty$
	$\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8} - 3\sqrt[4]{8}\right)$		

Vì $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{8} - 3\sqrt[4]{8}\right) \approx -1{,}1$ nên $m \in \{-1;0;1;2;...\}$

Vì $m \in [0;20]$ nên có 21 giá trị của m thỏa mãn.

Đáp án C.

STUDY TIP

Bảng biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$