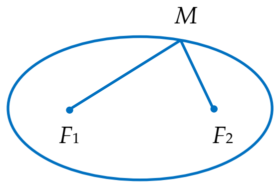
§3. Phương trình đường elip

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa



$MF_1 + MF_2 = 2a$

Elip là tập hợp tất cả những điểm thuộc mặt phẳng và tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F_1, F_2 luôn là một số dương không đổi $2a$.

Khi đó:

+ F_1, F_2 gọi là tiêu điểm của elip.

+ $F_1F_2 = 2c\left(0 < c < a\right)$ gọi là tiêu cự của elip.

+ Tỉ số $e = \dfrac{c}{a} < 1$ gọi là tâm sai.

STUDY TIP

+ Cho F_1, F_2 cố định, a không đổi. Tập hợp M thỏa mãn:

$$MF_1 + MF_2 = 2a > 0$$

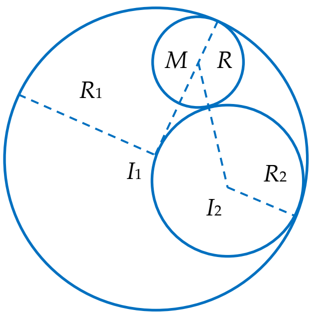
là đường elip.

+ $\left(E\right) = \left\{M \setminus MF_1 + MF_2 = 2a\right\}$

Ví dụ 1: Cho 2 đường tròn $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ thỏa mãn $\left(C_2\right)$ qua tâm $\left(C_1\right)$. Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc ngoài với $\left(C_2\right)$ và tiếp xúc trong với $\left(C_1\right)$ là:

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn.
C. một đường parabol. **D.** một đường elip.

Lời giải



+ Gọi đường tròn tiếp xúc ngoài với $\left(C_2\right)$ và tiếp xúc trong với $\left(C_1\right)$ là $\left(C_m\right)$ có tâm M và bán kính là R.

$\left(C_1\right)$ có tâm I_1 và bán kính R_1.

$\left(C_2\right)$ có tâm I_2 và bán kính R_2.

+ Do $\left(C_m\right)$ tiếp xúc trong với $\left(C_1\right) \Rightarrow MI_1 = R_1 - R$

$\left(C_m\right)$ tiếp xúc ngoài với $\left(C_2\right) \Rightarrow MI_2 = R_2 + R$

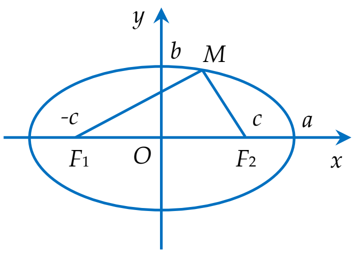
$\Rightarrow MI_1 + MI_2 = R_1 + R_2$ (*)

Do $\left(C_1\right), \left(C_2\right)$ cố định nên I_1, I_2 cố định và $R_1 + R_2 = 2a > 0$ là số không đổi nên từ (*) $\Rightarrow$ Tổng khoảng cách từ M đến 2 điểm cố định I_1, I_2 là một số dương không đổi $2a = R_1 + R_2$

$\Rightarrow$ Tập hợp M là một đường elip (tiêu điểm I_1, I_2).

Đáp án D.

2. Phương trình elip



+ Trong mặt phẳng Oxy, cho $F_1\left(-c;0\right), F_2\left(c;0\right)$ và độ dài không đổi $2a$ với $a > c > 0$ $\forall M\left(x;y\right)$ thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ ta được:

$$\begin{cases} MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \\ MF_2 = a - \dfrac{cx}{a} \end{cases} \quad (1)$$ gọi là bán kính qua tiêu điểm của M.

+ Từ $MF_1 = a + \dfrac{cx}{a} \Rightarrow \sqrt{\left(x+c\right)^2 + y^2} = a + \dfrac{cx}{a} \Leftrightarrow \left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = \left(a^2 - c^2\right)a^2$

Đặt $b^2 = a^2 - c^2 > 0 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ (2)

STUDY TIP
Phương trình chính tắc của elip $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$. Tiêu điểm là $F_1(-c;0); F_2(c;0)$

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của elip có:

+ Tiêu điểm $F_1(-c;0); F_2(c;0)$

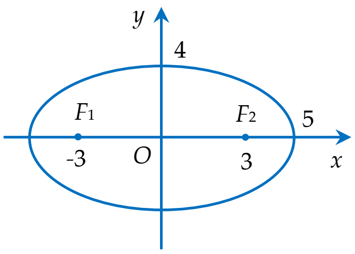
+ Tiêu cự $F_1F_2=c_1c_2$

+ Tâm sai $e=\frac{c}{a}$

Lưu ý: (1) được chứng minh trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 nâng cao.

Ví dụ 2: Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Một tiêu điểm của (E) có tọa độ là:

A. $F_1(3;0)$. **B.** $F_1(0;-3)$. **C.** $F_1(-3;0)$. **D.** $F_1(0;5)$.



Lời giải

Ta có: $c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow c=3 \Rightarrow F_1(-3;0)$

Đáp án C.

Ví dụ 3: Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Có bao nhiêu điểm $M\in(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Gọi $M(x;y)\in(E)$.

Ta có $a=5; b=4; c=3 \Rightarrow MF_1=a+\frac{cx}{a}=5+\frac{3x}{5}$; $MF_2=a-\frac{cx}{a}=5-\frac{3x}{5}$

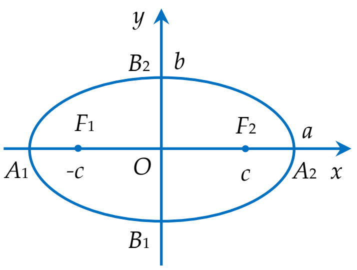
$$MF_1=2MF_2 \Leftrightarrow 5+\frac{3x}{5}=2\left(5-\frac{3x}{5}\right) \Rightarrow x=\frac{25}{9} \Rightarrow \frac{\left(\frac{25}{9}\right)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y=\pm\frac{8\sqrt{14}}{9}$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn.

Đáp án C.

3. Dạng của elip

- Tính đối xứng:



$$\text{Cho } (E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow M_1(x_0;y_0)\in(E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{(\pm x_0)^2}{a^2}+\frac{(\pm y_0)^2}{b^2}=1$$

$\Rightarrow M_2(-x_0;y_0)$, $M_3(x_0;-y_0)$ và $M_4(-x_0;-y_0)$ cũng thuộc (E)

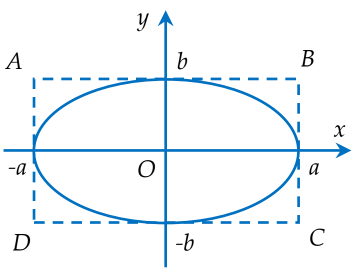
(E) đối xứng qua hai trục tọa độ và gốc tọa độ bởi vậy để chứng minh một tính chất bất kỳ của (E) ta có quyền giả sử x,y là các số không âm.

- Giao điểm với các trục:

$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cắt Ox tại $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ và cắt Oy tại $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$

$\Rightarrow A_1A_2=2a$ là trục lớn của (E)

$B_1B_2=2b$ là trục nhỏ của (E)



- Hình chữ nhật cơ sở là hình chữ nhật $ABCD$ với $A(-a;b), B(a;b), C(a;-b)$, $D(-a;-b)$

$\Rightarrow$ Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $S_{ABCD}=2a.2b=4ab$.

Ví dụ 4: (E) có một tiêu điểm là $F(-2;0)$ và một đỉnh $A(5;0)$ có phương trình là:

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$ **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1.$ **C.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1.$ **D.** $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1.$

STUDY TIP

Phương pháp viết phương trình elip:

Bước 1: Gọi $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$ (1)

Bước 2: Từ giả thiết suy ra hai phương trình:

$$\begin{cases} f(a,b,c)=0 \\ g(a,b,c)=0 \end{cases} \quad (2)$$

Bước 3: Giải hệ:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases} \Rightarrow (E)$$

(Mục tiêu là từ giả thiết ta tìm ra a và b)

Lời giải

Gọi elip cần tìm là $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$

Tiêu điểm $F(-2;0)\Rightarrow c=2$

Đỉnh $A(5;0)\Rightarrow a=5$

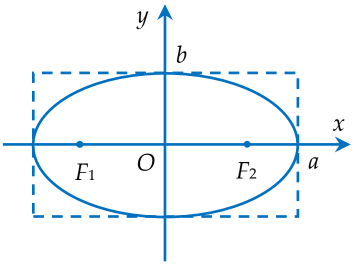
Có $b^2=a^2-c^2=25-4=21 \Rightarrow (E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=0$

Đáp án B.

Lưu ý: Với bài này bạn có thể giải bằng cách thử từng phương án tìm tiêu điểm và đỉnh rồi kiểm tra lại giả thiết và kết luận.

Ví dụ 5: Elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ biết (E) có tâm sai là $\frac{\sqrt{5}}{3}$; hình chữ nhật cơ sở có chu vi là 20. Khi đó giá trị $a+2b$ là:

A. 35. **B.** -5. **C.** 7. **D.** 8.



STUDY TIP

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là $2(2a+2b)$.

Lời giải

Ta có $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a,b,c>0 \\ b^2=a^2-c^2 \end{cases}$ (1)

Tâm sai của (E) là $\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{3}a$ (2)

Chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20 $\Rightarrow 2.(2a+2b)=20\Leftrightarrow a+b=5\Rightarrow b=5-a$ (3)

Thế $(2),(3)$ vào $(1)\Rightarrow(5-a)^2=a^2-\frac{5}{9}a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=15 \end{array}\right.$

- Với $a=3\Rightarrow b=2$ thỏa mãn $\Rightarrow a+2b=7$ (đáp án C).
- Với $a=15\Rightarrow b=-10$ (loại) do $a,b,c>0$.

Đáp án C.

4. Vị trí tương đối của một điểm với (E), của một đường thẳng với (E)

a. Vị trí tương đối của một điểm với (E)

Cho $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$ và điểm $M(x_0,y_0)$

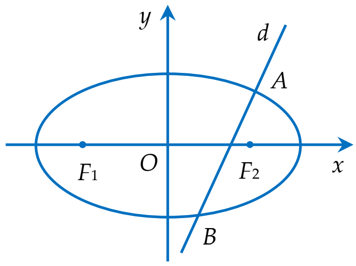
Xét biểu thức $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}=T$

+ Nếu $T>1\Rightarrow M$ nằm ngoài (E)

+ Nếu $T=1\Rightarrow M$ nằm trên (E) (hay $M\in(E)$)

+ Nếu $T<1\Rightarrow M$ nằm trong (E)

b. Vị trí tương đối của đường thẳng với (E)



Cho $(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0$ và đường thẳng $\Delta: Ax+By+C=0$

Xét hệ $\begin{cases} Ax+By+C=0 & (1) \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 & (2) \end{cases}$

Rút y từ (1) thế vào $(2) \Rightarrow A_1x^2+B_1x+C_1=0$ (3)

+ Nếu (3) vô nghiệm $\Rightarrow \Delta$ và (E) không có điểm chung.

+ Nếu (3) có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta$ và (E) tiếp xúc với nhau.

+ Nếu (3) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta$ và (E) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 6: Cho $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ và đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m-1)x+2y-1=0.$ Số giá trị m nguyên để đường tròn (C_m) có tâm nằm hoàn toàn trong (E) là:

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

(C) có tâm là $I(m-1;-1)$. Tâm I nằm trong (E)

$\Rightarrow \frac{(m-1)^2}{25}+\frac{(-1)^2}{9}<1 \Leftrightarrow (m-1)^2<\frac{8}{9}.25 \Leftrightarrow 1-\frac{10\sqrt{2}}{3}<m<1+\frac{10\sqrt{2}}{3}$

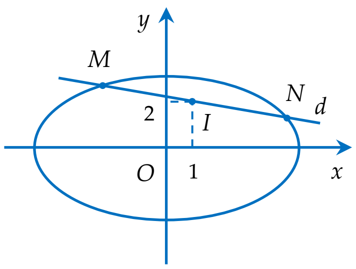
$\Rightarrow$ Có 9 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Đáp án C.

Ví dụ 7: Cho $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và điểm $I(1;2)$ đường thẳng d đi qua I cắt (E) tại hai điểm M,N sao cho I là trung điểm của MN có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b)$. Khi đó giá trị $\frac{b}{a}$ là:

A. $\frac{32}{9}$. **B.** Không tồn tại. **C.** $-\frac{9}{32}$. **D.** $\frac{9}{32}$.

Lời giải



Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow \frac{b}{a}=k$ là hệ số góc của đường thẳng d

$\Rightarrow d$ qua I và có hệ số góc $k \Rightarrow d: y=k(x-1)+2$ (1)

Tọa độ M,N là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=k(x-1)+2 & (1) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Thế (1) vào (2) $\Rightarrow 9x^2+16\left[k(x-1)+2\right]^2=144$

$\Leftrightarrow (16k^2+9)x^2+16(4k-2k^2)x+16k^2-64k-80=0$ (3)

Nhận thấy qua I luôn có đường thẳng cắt (E) tại hai điểm phân biệt. (3) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $\forall k$ là hoành độ của M,N

Mà M,N,I thẳng hàng (cùng thuộc d) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN

$\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=x_I \Leftrightarrow \frac{-16(4k-2k^2)}{2(16k^2+9)}=1 \Leftrightarrow k=-\frac{9}{32}$

Đáp án C.

B. Các dạng toán điển hình

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, elip (E) có tiêu cự bằng 12 và tâm sai $e=\frac{3}{5}$. Cho các mệnh đề sau:

(1) (E) có tiêu điểm $F_1(-8;0)$ và $F_2(8;0)$.

(2) (E) có độ dài trục nhỏ bằng 16.

(3) (E) có đỉnh $A_2(-10;0)$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào sai?

A. (1) và (2). **B.** (2) và (3). **C.** (1), (2) và (3) **D.** (1) và (3).

STUDY TIPS

Cho $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a,b,c>0: b^2=a^2-c^2$

1. $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ là tiêu điểm; $F_1F_2=2c$ là tiêu cự.

2. $A_1(-a;0); A_2(a;0)$; $B_1(0;-b); B_2(0;b)$ là 4 đỉnh của (E)

$A_1A_2=2a$ là độ dài trục lớn;

$B_1B_2=2b$ là độ dài trục bé

3. Tâm sai $e=\frac{c}{a}<1$; phương trình đường chuẩn $x=\pm\frac{a}{e}$

4. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $2\frac{a}{e}$

5. Diện tích hình chữ nhật cơ sở: $S=2a.2b=4ab$

Lời giải

(E) có tiêu cự bằng 12 $\Rightarrow 2c=12\Rightarrow c=6$

Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=10\Rightarrow b=8$

Vậy mệnh đề (1), (3) là mệnh đề sai.

Đáp án D.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, elip $(E):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$. Tìm khẳng định đúng?

A. (E) có đỉnh $A_1(9;0)$ và $B_1(0;-7)$.

B. (E) có độ dài trục bé bằng $4\sqrt{2}$

C. (E) có độ dài trục lớn bằng 18.

D. (E) có diện tích hình chữ nhật cơ sở bằng 63.

Lời giải

$(E):\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1\Rightarrow a=9;\ b=7\ \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=4\sqrt{2}$

Độ dài trục lớn là $2.a=18$.

Đáp án C.

Ví dụ 3: Tìm phương trình chính tắc của elip có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. **B.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$. **C.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. **D.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$.

Lời giải

Gọi phương trình chính tắc của elip $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad (a,b>0)$

Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\ (1)$

Hình chữ nhật cơ sở có chu vi bằng 20 $\Rightarrow 2(2a+2b)=20\quad (2)$

Có $c^2=a^2-b^2\quad (3)$

Từ $(1)(2)(3)\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\\ c=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow (E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

STUDY TIPS

Chu vi hình chữ nhật cơ sở: $2(2a+2b)$