

## §2. Hàm số bậc nhất

### A. Lý thuyết

1. Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng  $y = ax + b$ , trong đó  $a, b$  là các hệ số,  $a \neq 0$ .

\* **Tập xác định:**  $D = \mathbb{R}$ .

\* **Chiều biến thiên:** Hàm số  $y = ax + b$

- Đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$  nếu  $a > 0$ ;

- Nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$  nếu  $a < 0$ .

\* **Đồ thị:** Đồ thị của hàm số  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) là một đường thẳng gọi là đường thẳng  $y = ax + b$ . Đường thẳng này có hệ số góc bằng  $a$  và:

- Không song song và không trùng với các trục tọa độ;

- Cắt trục tung tại điểm  $B(0; b)$  và cắt trục hoành tại điểm  $A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$ .

2. Cho hai đường thẳng  $(d): y = ax + b$  và  $(d'): y = a'x + b'$ , ta có:

-  $(d)$  song song với  $(d')$  khi và chỉ khi  $a = a'$  và  $b \neq b'$ .

-  $(d)$  trùng với  $(d')$  khi và chỉ khi  $a = a'$  và  $b = b'$ .

-  $(d)$  cắt  $(d')$  khi và chỉ khi  $a \neq a'$ .

### B. Các dạng toán điển hình

#### Dạng 1

#### Chiều biến thiên của hàm số bậc nhất

**Ví dụ 1:** Cho các hàm số sau:

$$y = 2x + 3; y = 1 - 0,3x; y = (1 - \sqrt{2})(x - 1) + 1; y = \frac{2x + 5}{3} - \frac{x}{2}; y = \frac{1}{2} - \frac{3 + x}{5}.$$

Trong các hàm số trên, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

#### Lời giải

Hàm số  $y = 2x + 3$  có hệ số góc  $a = 2 > 0$  nên đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = 1 - 0,3x$  có hệ số góc  $a = -0,3 < 0$  nên nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = (1 - \sqrt{2})(x - 1) + 1$  có hệ số góc  $a = 1 - \sqrt{2} < 0$  nên nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = \frac{2x + 5}{3} - \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{x}{6} + \frac{5}{6}$  có hệ số góc  $a = \frac{1}{6} > 0$  nên đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Hàm số  $y = \frac{1}{2} - \frac{3 + x}{5}$  có hệ số góc  $a = -\frac{1}{5} < 0$  nên nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Vậy có tất cả 2 hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Đáp án B.**

**Ví dụ 2:** Hàm số  $y = \frac{5 - 3x}{5 - 3m}$  ( $m$  là tham số) nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi:

A.  $m \geq \frac{5}{3}$ .

B.  $m > \frac{5}{3}$ .

C.  $m \leq \frac{5}{3}$ .

D.  $m < \frac{5}{3}$ .

#### STUDY TIP

Chiều biến thiên của hàm số bậc nhất phụ thuộc vào dấu của hệ số  $a$ .

#### STUDY TIP

Nếu biểu thức của hàm số có nhiều số hạng chứa  $x$  thì ta cần phải rút gọn về dạng  $y = ax + b$  rồi mới xét sự biến thiên.

Lời giải

**Cách 1:** Hàm số  $y = \frac{5-3x}{5-3m}$  có hệ số góc  $a = \frac{-3}{5-3m}$ . Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\frac{-3}{5-3m} < 0 \Leftrightarrow 5-3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{3}$ . D là đáp án đúng.

**Cách 2:** Rõ ràng  $m$  phải khác  $\frac{5}{3}$ . Với  $m = 1 < \frac{5}{3}$ , hàm số có dạng  $y = \frac{5-3x}{2}$  có hệ số góc  $a = \frac{-3}{2} < 0$  nên nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Từ đó suy ra đáp án đúng là D.

Đáp án D.

Dạng 2

Vị trí tương đối, sự tương giao giữa các đường thẳng

**Ví dụ 3:** Cho các đường thẳng sau:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1; y = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + 3; y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2;$$

$$y = \sqrt{2}x - 2; y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1 \text{ và } y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\right).$$

Trong các đường thẳng trên, có bao nhiêu cặp đường thẳng song song?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Ta có  $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 2; y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 3\right) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{\sqrt{2}}x + 3$ .

Từ đó ta thấy có 2 cặp đường thẳng song song, đó là:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 \text{ và } y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1; y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2 \text{ và } y = \sqrt{2}x - 2.$$

Đáp án C.

**Ví dụ 4:** Cho hai đường thẳng  $(d): y = (m^2 - 3m)x + 3$  và  $(d'): y = -2x + m + 1$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để hai đường thẳng song song với nhau?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải

$$(d) \parallel (d') \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 - 3m = -2 \\ 3 \neq m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy có 1 giá trị của tham số  $m$  để hai đường thẳng song song với nhau.

Đáp án B.

**Ví dụ 5:** Cho đường thẳng  $(d): y = ax + b$ . Tìm  $4a + b$ , biết  $(d)$  cắt đường thẳng  $y = 2x + 5$  tại điểm có hoành độ bằng  $-2$  và cắt đường thẳng  $y = -3x + 4$  tại điểm có tung độ bằng  $-2$ .

A.  $4a + b = \frac{-7}{2}$ .

B.  $4a + b = \frac{7}{2}$ .

C.  $4a + b = \frac{-5}{2}$ .

D.  $4a + b = \frac{5}{2}$ .

Lời giải

$$x = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (d) \text{ đi qua điểm } A(-2; 1);$$

$$y = -2 \Rightarrow -3x + 4 = -2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (d) \text{ đi qua điểm } B(2; -2).$$

STUDY TIP

Điểm  $A$  là giao điểm của hai đường thẳng  $d$  và  $d' \Leftrightarrow$  tọa độ của  $A$  thỏa mãn phương trình của cả  $d$  và  $d'$

Từ đó ta có hệ  $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow 4a + b = \frac{-7}{2}.$

Đáp án A.

**Ví dụ 6:** Cho hai đường thẳng  $(d): y = x + 1$  và  $(d'): y = -x + 3$  cắt nhau tại  $C$  và cắt  $Ox$  theo thứ tự tại các điểm  $A$  và  $B$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $S = 8$ . B.  $S = 6$ . C.  $S = 4$ . D.  $S = 2$ .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(d')$ :  $x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 1$ .

Với  $x = 1$  thì  $y = 1 + 1 = 2$ . Ta có  $C = (1; 2)$ .

Dễ thấy  $A = (-1; 0)$  và  $B = (3; 0)$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ .

Đáp án C.

**Ví dụ 7:** Cho số nguyên dương  $m$ . Biết ba đường thẳng  $y = \frac{2x + m}{3}$ ,  $y = x + \frac{5}{2}$  và  $y = 4x - 2$  đồng quy. Tìm số ước nguyên dương của  $m$ .

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng  $y = x + \frac{5}{2}$  và

$y = 4x - 2$ :  $x + \frac{5}{2} = 4x - 2$ . Giải phương trình tìm được  $x = \frac{3}{2}$ .

Suy ra ba đường thẳng đã cho đồng quy tại điểm  $I\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ .

Đường thẳng  $y = \frac{2x + m}{3}$  đi qua điểm  $I\left(\frac{3}{2}; 4\right) \Leftrightarrow \frac{2 \cdot \frac{3}{2} + m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 9$ .

Vậy  $m$  có 3 ước nguyên dương.

Đáp án D.

### Dạng 3

### Điểm cố định của họ đường thẳng

**Ví dụ 8:** Cho đường thẳng  $(d): y = (m - 1)x + 2m - 3$ , trong đó  $m$  là tham số. Gọi  $M$  là điểm cố định mà  $(d)$  luôn đi qua với mọi  $m$ . Tính  $OM$ .

- A.  $OM = \sqrt{5}$ . B.  $OM = 2$ . C.  $OM = 1$ . D.  $OM = \sqrt{10}$ .

Lời giải

**Cách 1:** Giả sử  $M = (x_0; y_0)$ ;  $(d)$  luôn đi qua  $M$  với mọi  $m$  khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} y_0 &= (m - 1)x_0 + 2m - 3 \quad \forall m \Leftrightarrow (x_0 + 2)m = y_0 + x_0 + 3 \quad \forall m \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ y_0 + x_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

#### STUDY TIP

Ba đường thẳng  $d_1, d_2, d_3$  đồng quy  $\Leftrightarrow d_1, d_2, d_3$  cùng đi qua một điểm  $\Leftrightarrow d_1$  đi qua giao điểm của  $d_2$  và  $d_3$

#### STUDY TIP

Phương trình  $am = b$  thỏa mãn với mọi  $m \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $a = b = 0$ .

**STUDY TIP**

Với  $M = (x_0; y_0)$  thì  
 $OM = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

**Dạng 4**

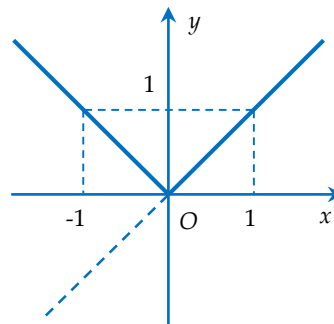
**Hàm số  $y = |ax + b|$**

**Ví dụ 9:** Vẽ đồ thị hàm số  $y = |x|$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Từ đó ta có đồ thị hàm số là đường nét liền gấp khúc như trong hình dưới đây.



**\* Tổng quát:**

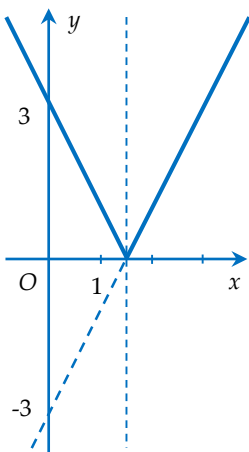
Xét hàm số  $y = |ax + b|$  ( $a \neq 0$ ).

$$\text{Ta có } y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } ax + b \geq 0 \\ -(ax + b) & \text{khi } ax + b < 0 \end{cases}.$$

Cách vẽ đồ thị hàm số  $y = |ax + b|$  ( $a \neq 0$ ):

- Vẽ đường thẳng  $y = ax + b$ ;
- Lấy đối xứng phần nằm dưới trục hoành của đường thẳng  $y = ax + b$  qua trục hoành rồi xóa phần nằm dưới trục hoành đó đi.

Ví dụ ta có đồ thị của hàm số  $y = |2x - 3|$  là đường nét liền gấp khúc như trong hình bên.



**\* Nhận xét:** Hàm số  $y = |ax + b|$  ( $a \neq 0$ ):

- Có đồ thị là một đường gấp khúc, đối xứng qua đường thẳng  $x = -\frac{b}{a}$  và cắt trục

hoành tại điểm  $I\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ ;

- Nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ , đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ .

Đặc biệt, hàm số  $y = |x|$  là một hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung, nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ , đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

**STUDY TIP**

Đồ thị hàm số  $y = |ax + b|$  ( $a \neq 0$ ) luôn có hình dạng là một chữ V với đáy nhọn (điểm thấp nhất) thuộc trục hoành (giá trị nhỏ nhất luôn bằng 0).

**Ví dụ 10:** Hàm số  $y = |-x-3| + |2x+1| + |x+1|$  đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

A.  $(-\infty; +\infty)$ .

B.  $(-3; +\infty)$ .

C.  $(-1; +\infty)$ .

D.  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Lời giải**

Ta có  $y = |-x-3| + |2x+1| + |x+1| = |x+3| + |2x+1| + |x+1|$ . Lại có:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{khi } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{khi } x < -3 \end{cases}; |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}; |2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \geq -1/2 \\ -2x-1 & \text{khi } x < -1/2 \end{cases}.$$

Từ đó ta có bảng sau:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$ x+3 $	$-x-3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$	$x+3$
$ x+1 $	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$ 2x+1 $	$-2x-1$	$-2x-1$	$-2x-1$	$2x+1$	$2x+1$
$y$	$-4x-5$	$-2x+1$	$3$	$4x+5$	

Từ bảng trên suy ra hàm số đã cho đồng biến trong khoảng  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Lưu ý:** Có thể dùng máy tính cầm tay (chức năng TABLE) để tìm khoảng đồng biến của hàm số (xem lại Bài 1 – Đại cương về hàm số).

**Đáp án D.**