II. Một số bài toán sử dụng tính chất hình học phẳng

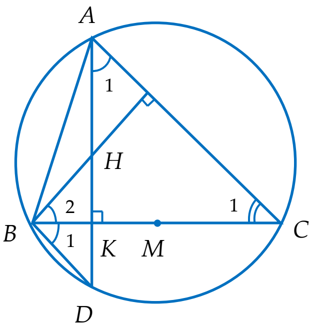
Bài toán 1: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I có H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm, D là giao điểm của AH và (C).

Chứng minh rằng:

a) D đối xứng với H qua BC.

b) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (M là trung điểm của BC).

c) $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$ (G, H, I thẳng hàng – đường thẳng Euler).



Chứng minh:

a) Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{DC}$)

$\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$ (cùng phụ với $\widehat{C_1}$)

$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \Delta BHD$ cân tại B, mà $BC \perp HD$

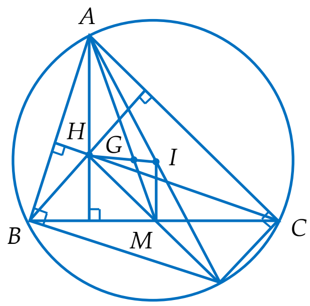
$\Rightarrow H$ đối xứng với D qua BC (đpcm)

b) Gọi $A' = AI \cap (C)$

$\Rightarrow BH // A'C$ (cùng vuông góc với AC)

$CH // A'B$ (cùng vuông góc với AB)

$\Rightarrow BHCA'$ là hình bình hành



Mà M là trung diểm của $BC \Rightarrow M$ là trung điểm của HA'

$\Rightarrow MI$ là đường trung bình trong $\Delta AHA' \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ (đpcm)

c) G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (1)

Xét $\Delta AHA'$ có AM là đường trung tuyến mà $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ theo (1)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\Delta AHA'$ mà HI là đường trung tuyến trong $\Delta AHA'$

$\Rightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$ (đpcm)

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC có đỉnh $A(-1;-3); H(1;-1)$ và $I(2;-2)$ lần lượt là trực tâm và tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Tìm phát biểu sai?

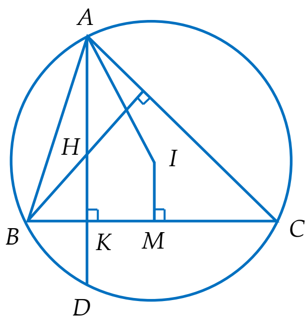
A. Tọa độ trung điểm của BC là $M(3;-1)$.

B. Chân đường cao của ΔABC hạ từ A là $K(2;0)$.

C. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

D. Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là $G\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải



+ Gọi $M(x;y)$ mà $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2(x-2) \\ 2 = 2(y+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3;-1) \Rightarrow$ A đúng.

+ Gọi D là giao điểm thứ 2 của AH với đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC

(C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $IA = \sqrt{10} \Rightarrow (C): (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10$

$AH: x - y - 2 = 0$.

Xét hệ $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=10\\ x-y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow D(3;1)$ do $A(-1;-3)$

Mà K là trung điểm của $HD \Rightarrow K(2;0) \Rightarrow$ B đúng.

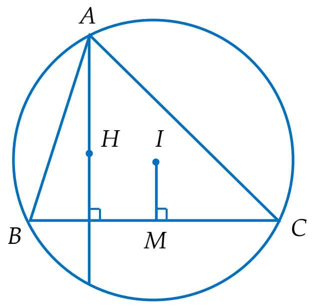
+ Ta có: $\overrightarrow{HG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HI} \Rightarrow \begin{cases}x_G-1=\frac{2}{3}(2-1)\\ y_G+1=\frac{2}{3}(-2+1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_G=\frac{5}{3}\\ y_G=-\frac{5}{3}\end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow$ D đúng.

Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2;0)$, biết $C(a;b)$ với $a>0$. Khi đó giá trị $a+b$ là:

A. $1+\sqrt{65}$. **B.** $1-\sqrt{65}$. **C.** $5+\sqrt{65}$. **D.** $5-\sqrt{65}$.

Lời giải



+ Ta có $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ với $M(x;y)$ là trung điểm BC

$\Rightarrow \begin{cases}0=2(x+2)\\ 6=2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases} \Rightarrow M(-2;3)$

+ BC đi qua $M(-2;3)$ và vuông góc với $MI \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(0;-3)$

$\Rightarrow BC: y=3$

+ Gọi $C\in BC \Rightarrow C(t;3)$ ($t>0$ tham số)

Mà $CI=AI \Rightarrow CI=\sqrt{74} \Rightarrow (t+2)^2+3^2=74$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-2+\sqrt{65}\ (t/m)\\ t=-2-\sqrt{65}\ (l)\end{array}\right. \Rightarrow C\left(-2+\sqrt{65};3\right) \Rightarrow a+b=1+\sqrt{65}$

Đáp án A.

Lưu ý: Yêu cầu bài toán tìm tọa độ C nên ta sẽ viết phương trình đường thẳng qua C, rồi tham số hóa C theo đường thẳng tìm được (ở đây là đường thẳng BC). Dựa vào giả thiết lập phương trình với ẩn là tham số của C, suy ra kết quả.

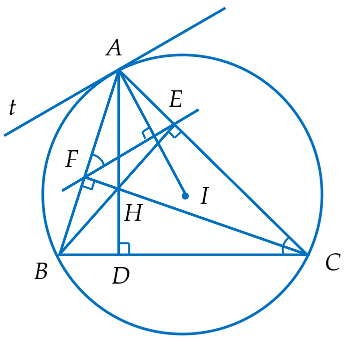
Bài toán 2: Cho ΔABC, E, F, D lần lượt là chân đường cao hạ từ B, C, A; I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, H là trực tâm.

Chứng minh rằng:

a) $AI\perp EF, BI\perp FD$ và $CI\perp DE$.

b) DH là phân giác của $\widehat{EDF}$. Từ đó suy ra H là tâm của đường tròn nội tiếp ΔDEF.

Chứng minh:

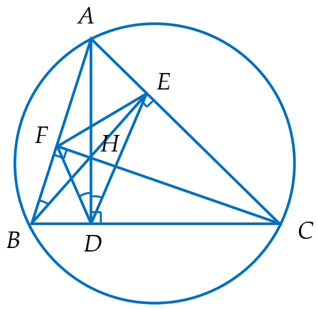


a) Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (C) ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow At\perp AI$

Có $\widehat{tAB}=\widehat{ACB}$ (1) (góc tạo bởi tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$)

Lại có $\widehat{BEC}=\widehat{BFC}=90^\circ \Rightarrow BFEC$ nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{ECB}=\widehat{EFA}$ (2) (cùng bù với $\widehat{EFB}$)



Từ (1) và (2) có $\widehat{tAB} = \widehat{EFA} \Rightarrow At // EF$ (góc so le) $\Rightarrow EF \perp AI\left(At \perp AI\right) \Rightarrow$ đpcm.

b) Ta có tứ giác $BFHD$ nội tiếp (F, D nhìn BH dưới một góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HBF}$ (3) (cùng chắn cung $\overparen{FH}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFHD$)

Tứ giác $AEDB$ nội tiếp (E, D cùng nhìn AB dưới một góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{EBA} = \widehat{EDA}$ (4) (cùng chắn cung $\overparen{AE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDB$)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{EDA} \Rightarrow HD$ là đường phân giác của góc $\widehat{EDF}$

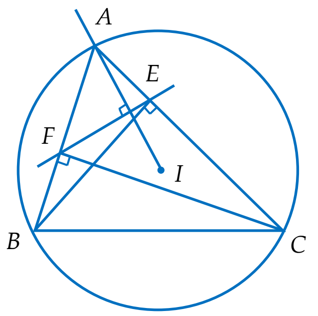
Tương tự HE, HF lần lượt là phân giác của góc $\widehat{FED}$ và $\widehat{EFD}$

$\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔEFD

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=25$ ngoại tiếp ΔABC có tọa độ chân đường cao hạ từ B và C lần lượt là $E(0;2)$ và $F(1;2)$. Khi đó tọa độ đỉnh $A(a;b)$ với $b<0$ thì a^2-2b là:

A. -9. **B.** 9. **C.** -11. **D.** 11.

Lời giải



Tâm đường tròn (C) nội tiếp ΔABC là $I(1;1)$, bán kính $R=5$

Vì $AI \perp EF \Rightarrow AI$ qua $I(1;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{EF}=(1;0) \Rightarrow AI: x=1$

Mà $A=(C)\cap AI \Rightarrow$ Tọa độ A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=25 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} (l) \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} (t/m) \end{array}\right. \Rightarrow A(1;-4) \Rightarrow a^2-2b=1+8=9$$

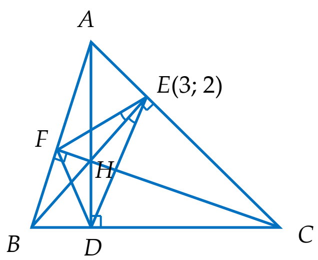
Đáp án B.

Lưu ý: Ta có thể tìm tọa độ điểm A bằng cách tham số hóa A theo AI rồi tính $AI=R \Leftrightarrow AI=5 \Rightarrow$ tọa độ A.

Ví dụ 2: Cho $\Delta ABC, D(3;-1); E(3;2); F(-1;2)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C. Khi đó đường thẳng AC có phương trình là:

A. $x-y-1=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $x-y+5=0$. **D.** $x+y-5=0$.

Lời giải



STUDY TIPS

2 đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau thì vuông góc với nhau.

+ Ta có BE là phân giác của góc $\widehat{DEF}$ (tính chất)

$ED: x-3=0$

$EF: y-2=0$

$\Rightarrow$ Đường phân giác tạo bởi ED và EF là:

$$|x-3|=|y-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-1=0\ (\Delta_1) \\ x+y-5=0\ (\Delta_2) \end{array}\right.$$

+ Xét vị trí tương đối của D và F với Δ_1 được:

$[3-(-1)-1](-1-2-1)=-12<0$

$\Rightarrow D, F$ nằm về hai phía của $\Delta_1 \Rightarrow \Delta_1$ là đường BE

Mà $AC \perp BE \Rightarrow AC$ là đường $\Delta_2: x+y-5=0$

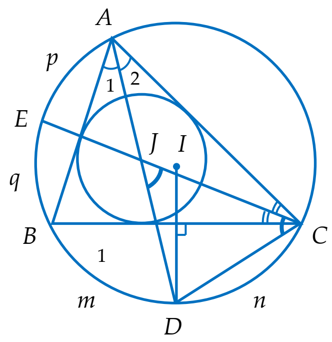
Đáp án D.

Bài toán 3: Cho ΔABC có I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp, gọi D là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp ΔABC với đường thẳng AJ. Chứng minh rằng:

a) $DI \perp BC$.

b) D là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔJBC.

Chứng minh:



a) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{DmB} = \overset{\frown}{DnC}$ (1)

$\Rightarrow D$ nằm chính giữa cung $BC \Rightarrow DI \perp BC$ (tính chất bán kính dây cung)

b) Gọi E là giao điểm thứ 2 của CJ với đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow \overset{\frown}{ApE} = \overset{\frown}{BqE}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overset{\frown}{DmB} + \overset{\frown}{BqE} = \overset{\frown}{DnC} + \overset{\frown}{ApE} \Rightarrow \overset{\frown}{DBE} = \overset{\frown}{CnD} + \overset{\frown}{ApE}$

$\Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{CJD} \Rightarrow \Delta DJC$ cân tại D

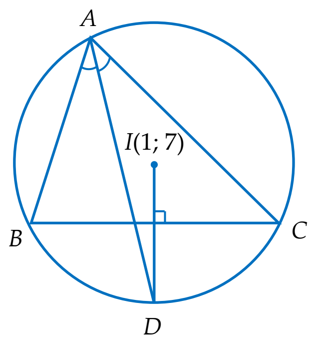
$\Rightarrow DC = DJ$ mà $DC = DB$ $(\widehat{A_1} = \widehat{A_2})$

$\Rightarrow DC = DJ = DB \Rightarrow D$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCJB

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(-3;4)$, đường phân giác trong góc A là $d: x+y-1=0$; tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1;7)$. Khi đó hệ số góc của đường thẳng BC là:

A. $k = \frac{3}{4}$. **B.** $k = -\frac{4}{3}$. **C.** $k = -\frac{3}{4}$. **D.** $k = \frac{4}{3}$.

Lời giải



Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(1;7)$ và bán kính $R = AI = 5$

$\Rightarrow (C): (x-1)^2 + (y-7)^2 = 5$

Gọi D là giao điểm thứ hai của $d: x+y-1=0$ và (C)

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm D thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x+y-1=0 \\ (x-1)^2+(y-7)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow D(-2;3)$

Tọa độ $D(-3;4) \equiv A$ (loại)

$I(1;7), D(-2;3) \Rightarrow \overrightarrow{DI} = (3;4)$. $BC \perp DI \Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của BC là $\overrightarrow{DI} = (3;4)$

$\Rightarrow$ Vectơ chỉ phương của BC là $\vec{u} = (4;-3)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k = -\frac{3}{4}$.

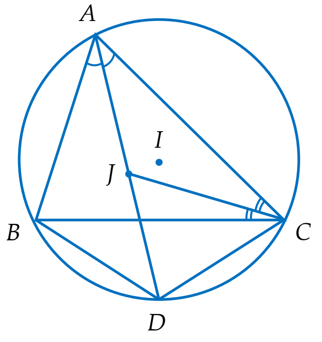
Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có $A(2;3); I(6;6), J(4;5)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Khi đó phương trình đường thẳng BC là:

A. $3x+4y-42=0$. **B.** $3x-4y-42=0$.

C. $3x+4y+42=0$. **D.** $3x-4y+42=0$.

Lời giải



Đường tròn (C_1) ngoại tiếp ΔABC có $\begin{cases} I(6;6) \\ R = IA = 5 \end{cases} \Rightarrow (C_1):(x-6)^2+(y-6)^2=25$

$AJ: x-y+1=0$ (qua A, J)

Gọi D là giao điểm của (C_1) với $AJ \Rightarrow$ Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ (x-6)^2+(y-6)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow D(2;3) \equiv A \ (l) \\ \begin{cases} x=9 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow D(9;10) \quad (t/m) \end{array}\right.$$

Mà $DJ = BD = DC$ (tính chất)

$\Rightarrow BC$ nằm trên đường tròn (C_2) có tâm $D(9;10)$ bán kính $R = DJ = 5\sqrt{2}$

$\Rightarrow (C_2):(x-9)^2+(y-10)^2=50$

$\Rightarrow$ Tọa độ B,C thỏa mãn hệ: $\begin{cases} (x-6)^2+(y-6)^2=25 \quad (1) \\ (x-9)^2+(y-10)^2=50 \ (2) \end{cases}$

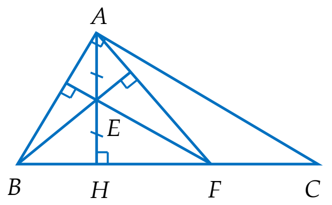
Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow 3x+4y-42=0$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng $BC: 3x+4y-42=0$

Đáp án A.

Bài toán 4:

Tính chất 1: Cho ΔABC vuông tại A; F, E lần lượt là trung điểm HC, HA (H là chân đường cao hạ từ A). Khi đó $BE \perp AF$.



Chứng minh:

Ta có: $FE // AC$ (đường trung bình trong ΔHAC)

$\Rightarrow EF \perp AB$ (vì $AB \perp AC$)

Lại có $AE \perp BC \Rightarrow \Delta ABF$ có E là trực tâm $\Rightarrow BE \perp AF$ (đpcm)

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A, H là chân đường cao hạ từ A của ΔABC. F là trung điểm của HC, biết $A(-1;2); H(3;-4); F(3;-5)$. Khi đó đường trung tuyến hạ từ đỉnh B của ΔABH có phương trình là: $ax+by+11=0$ thì $a+b$ là:

A. –3. **B.** 3. **C.** 11. **D.** –11.

Lời giải

Gọi E là trung điểm của $AH \Rightarrow E(1;-1) \Rightarrow$ đường cần tìm là BE

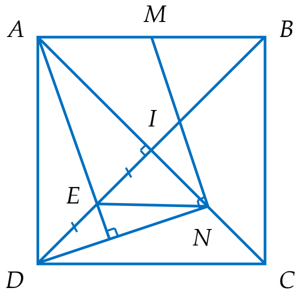
Dựa vào tính chất 1 $\Rightarrow BE \perp AF \Rightarrow BE$ qua $E(1;-1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AF} = (4;-7)$ $\Rightarrow BE: -4x+7y+11=0 \Rightarrow a+b=-4+7=3$

Đáp án B.

Tính chất 2: Cho hình vuông $ABCD$ tâm I. M, N lần lượt là trung điểm của AB, IC. Khi đó $MN \perp ND$.

Chứng minh:

Gọi E là trung điểm của $DI \Rightarrow NE // DC \Rightarrow NE \perp AD$ (chứng minh tương tự với tính chất 1)



$\Rightarrow E$ là trực tâm $\Delta ADN \Rightarrow AE \perp DN$ (1)

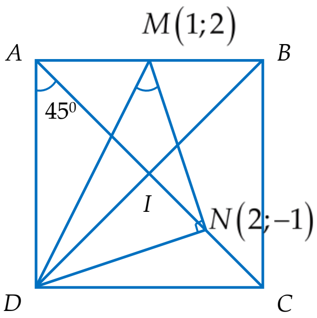
Lại có $\begin{cases} NE = \frac{1}{2}DC \\ NE // DC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NE // AM \\ NE = AM \end{cases} \Rightarrow AMNE$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN // AE$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow MN \perp DN$ (đpcm)

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB, N là một điểm thuộc AC sao cho $AN = 3NC$. Tính diện tích tam giác DMN biết $M(1;2), N(2;-1)$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** 5.



Giải:

Theo tính chất 2 $\Rightarrow MN \perp DN \Rightarrow$ Tứ giác $AMND$ nội tiếp

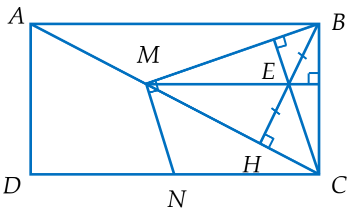
$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{DMN}$ (cùng chắn cung DN)

Mà $\widehat{ADN} = 45° \Rightarrow \widehat{DMN} = 45° \Rightarrow \Delta DMN$ vuông cân tại N

$\Rightarrow S_{\Delta DMN} = \frac{1}{2}DN.MN = \frac{1}{2}MN^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10}\right)^2 = 5$

Đáp án D.

Tính chất 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$, H là hình chiếu của B lên AC. M,N lần lượt là trung điểm của AH, DC. Khi đó $BM \perp MN$.



Chứng minh:

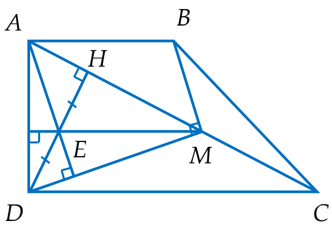
Gọi E là trung điểm của BH, theo tính chất 1 ta có: $CE \perp BM$

$ME // AB$ và $ME = \frac{1}{2}AB$ (là đường trung bình trong ΔHBA)

$\Rightarrow ME // NC$ và $ME = NC \Rightarrow MECN$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN // EC$ mà $EC \perp BM \Rightarrow MN \perp BM$ (đpcm)

Tính chất 4: Hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D; $AB = \frac{1}{2}CD$. H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC, M là trung điểm của HC. Khi đó $BM \perp DM$.



Chứng minh:

Gọi E là trung điểm của HD, theo tính chất 1 ta có: $AE \perp DM$

Ta có $EM // DC$ và $EM = \frac{1}{2}DC \Rightarrow AEMB$ là hình bình hành

$\Rightarrow AE // BM \Rightarrow BM \perp DM$ (đpcm)

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $H\left(-\frac{6}{5};\frac{7}{5}\right)$ là chân đường cao hạ từ A lên BD, trung điểm BC là $M(-1;0)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ A của ΔADH là: $7x + y - 3 = 0$. Tọa độ đỉnh $D(a;b)$. Khi đó:

A. $a + b = 3$. **B.** $a + b = -1$. **C.** $a + b = 1$. **D.** $a + b = -3$.

Lời giải