B. Các dạng toán điển hình

Trong phần này, chúng ta cùng tìm hiểu một số ví dụ điển hình minh họa cho từng phương pháp nêu trên.

Dạng 1 — Sử dụng biến đổi tương đương hoặc các bất đẳng thức đã biết

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $m = 11$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

Cách 1: (*Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng*)

Giá trị của m ở phương án C là nhỏ nhất nên ta kiểm tra phương án này trước.

Xét phương trình $x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 11x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 7x + 11) = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0;2]$.

Vậy $m = -2$.

Cách 2: (*Biến đổi tương đương, đánh giá dựa vào kết quả đã biết*)

Ta có $y = (x^3 - 7x^2 + 10x) + x - 2 = x(x-2)(x-5) + x - 2$.

Do $x \in [0;2]$ nên $x(x-2)(x-5) \ge 0; x - 2 \ge -2$. Suy ra $y \ge -2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0 \in [0;2]$. Vậy $m = -2$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Ngoài hai cách giải như bên, ví dụ này còn có thể giải được nhờ công cụ đạo hàm mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Giải tích 12. Cách giải dựa vào đạo hàm không chỉ giúp ta tìm được giá trị nhỏ nhất mà còn tìm được cả giá trị lớn nhất của hàm số không những trên đoạn $[0;2]$ mà còn cả trên một đoạn bất kỳ.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\max\limits_{[0;2]} f(x) = -2$. **B.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = -\dfrac{50}{27}$. **C.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 1$. **D.** $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 0$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} y = \dfrac{67}{27}$. **B.** $\max\limits_{[1;3]} y = -2$. **C.** $\max\limits_{[1;3]} y = -7$. **D.** $\max\limits_{[1;3]} y = -4$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ trên đoạn $[0;4]$.

A. $\min\limits_{[0;4]} y = -18$. **B.** $\min\limits_{[0;4]} y = 2$. **C.** $\min\limits_{[0;4]} y = -25$. **D.** $\min\limits_{[0;4]} y = -34$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 2x + 3\sqrt{9 - x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

A. -6. **B.** -9. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $-3 \le x \le 3$.

Cách 1: (*Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng*)

- *Kiểm tra phương án B:*

Xét phương trình $2x + 3\sqrt{9 - x^2} = -9 \Leftrightarrow 3\sqrt{9 - x^2} = -9 - 2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 - 2x \ge 0 \\ 9(9 - x^2) = (-9 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\dfrac{9}{2} \\ 9(9 - x^2) = (-9 - 2x)^2 \end{cases}$ (điều này không thể xảy ra vì $-3 \le x \le 3$).

- *Kiểm tra phương án A:*

Xét phương trình $2x + 3\sqrt{9 - x^2} = -6 \Leftrightarrow 3\sqrt{9 - x^2} = -6 - 2x$

STUDY TIP
Ngoài hai cách giải như bên, ví dụ này còn có thể giải được nhờ công cụ đạo hàm mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Giải tích 12. Cách giải dựa vào đạo hàm không chỉ giúp ta tìm được giá trị nhỏ nhất mà còn tìm được cả giá trị lớn nhất của hàm số không những trên đoạn $[-3;3]$ mà còn cả trên một đoạn bất kỳ thuộc $[-3;3]$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6-2x \ge 0 \\ 9(9-x^2) = (-6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -3 \\ 9(9-x^2) = (2x+6)^2 \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu thì $x = -3$. Thay vào phương trình thấy thỏa mãn. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -6.

Cách 2: (*Đánh giá dựa vào kết quả đã biết*)

Với mọi $x \in [-3;3]$, ta có $y = 2x + 3\sqrt{9-x^2} \ge 2x \ge 2.(-3) = -6$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = -3 \\ 9-x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -6.

Đáp án A.

Nhận xét:

1. *Chúng ta cũng có thể tìm được giá trị lớn nhất của hàm số dựa vào bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki. Cụ thể như sau:*

Ta có $y^2 = \left(2.x + 3.\sqrt{9-x^2}\right)^2 \le (2^2+3^2)(x^2+9-x^2) = 9.13 \Rightarrow -3\sqrt{13} \le y \le 3\sqrt{13}$.

$$y = 3\sqrt{13} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} y = \frac{6\sqrt{13}}{13}$.

2. *Bằng kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất nói trêm, bạn đọc cũng có thể tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:*

$$y = 2x - 3\sqrt{9-x^2};\ y = 3x - 5\sqrt{16-x^2}.$$

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 18.

Lời giải

Ta có $|x^3 - 3x^2 + 2| \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn khi $x = 1 \in [-2;2]$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 0.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Biết rằng biểu thức $M = \sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $x \in [a;b]$. Giá trị của $2a+3b$ bằng:

A. 11. **B.** 29. **C.** 40. **D.** 49.

Lời giải

Với $x \ge 4$ thì $x-3-2\sqrt{x-4} = \left(\sqrt{x-4}-1\right)^2$ và $x-6\sqrt{x-4}+5 = \left(\sqrt{x-4}-3\right)^2$ nên biểu thức M xác định khi $x \ge 4$.

Ta có $M = \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-3\right)^2} = \left|\sqrt{x-4}-1\right| + \left|3-\sqrt{x-4}\right| \ge 2$.

$M = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-4}-1\right)\left(3-\sqrt{x-4}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{x-4} \le 3 \Leftrightarrow 5 \le x \le 13$.

Vậy, biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi và chỉ khi $x \in [5;13]$.

Do đó $a = 5; b = 13 \Rightarrow 2a+3b = 49$.

Đáp án D.

Ví dụ 5: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A=2x+3y-2z$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m+3M=18$. **B.** $3m+M=18$.

C. $m+3M=\dfrac{41}{2}$. **D.** $3m+M=\dfrac{35}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=4-3z\\3x+4y=6+3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-3z\\y=3z\end{cases}.$$

$\Rightarrow A=4+z$

Vì x,y,z không âm nên $0\le z\le\dfrac{2}{3}$ và $4\le A\le\dfrac{14}{3},\forall z\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$.

$A=4\Leftrightarrow(x;y;z)=(2;0;0)$ và $A=\dfrac{14}{3}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(0;2;\dfrac{2}{3}\right)$.

Vậy $M=\dfrac{14}{3}$ và $m=4$.

Đáp án A.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Biết rằng biểu thức $A=2x+3y-2z$ đạt giá trị lớn nhất khi $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)$. Tính giá trị của biểu thức $S=24x_0+6y_0+2019z_0$.

A. $S=48$. **B.** $S=1390$. **C.** $S=1358$. **D.** $S=66$.

Câu 2: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Số giá nguyên của biểu thức $A=2x+3y-2z$ là:

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Số giá trị nguyên của biểu thức $E=x^2+y^2+2x+y-3z+3$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 4: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của biểu thức $E=x^2+y^2+2x+y-3z+3$. Tính tổng bình phương các phần tử của tập hợp S.

A. 415. **B.** 451. **C.** 366. **D.** 2025.

Câu 5: Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $\begin{cases}2x+y+3z=4\\3x+4y-3z=6\end{cases}$. Biết rằng biểu thức $E=x^2+y^2+2x+y-3z+3$ nhận giá trị là số nguyên tố p khi $(x;y;z)=(x_1;y_1;z_1)$ hoặc $(x;y;z)=(x_2;y_2;z_2)$. Giá trị của biểu thức $T=p+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(9;10)$. **B.** $(10;11)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(8;9)$.

Ví dụ 6: Cho x,y là hai số thực biến thiên và m là tham số. Biết rằng biểu thức $F=(x-2y+1)^2+(2x+my+5)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{p}{q}$, trong đó p,q là các số nguyên dương và phân số $\frac{p}{q}$ tối giản. Giá trị của p^2+q^2+pqm bằng

A. -74. **B.** 286. **C.** 1606. **D.** -194.

Lời giải

Ta có $F\ge 0,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra (tức là $F=0$) khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases}x-2y+1=0\\2x+my+5=0\end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow m\ne -4$.

Nhưng do F đạt giá trị nhỏ nhất là một số dương nên $m=-4$.

Khi $m=-4$ thì $F=(x-2y+1)^2+(2x-4y+5)^2=5\left(x-2y+\frac{11}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\ge\frac{9}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x-2y+\frac{11}{5}=0\Leftrightarrow 5x-10y+11=0$.

Vậy, với $m=-4$ thì $\min F=\frac{9}{5}$. Suy ra $p=9$ và $q=5$.

Do đó $p^2+q^2+pqm=9^2+5^2+9.5.(-4)=-74$.

Đáp án A.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Cho x,y là hai số thực biến thiên và m là tham số. Tìm giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=(x-2y+1)^2+(2x+my+5)^2$ là một số dương.

A. $m=4$. **B.** $m=-10$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=10$.

Câu 2: Cho x,y là hai số thực biến thiên và m là tham số. Biết rằng biểu thức $F=(x-2y+1)^2+(2x+my+5)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là số dương khi x,y thỏa mãn điều kiện $ax+by+c=0$. Tỷ số $\frac{a+b}{c}$ nhận giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 3: Cho x,y là hai số thực biến thiên và m là tham số. Biết rằng biểu thức $F=(x-2y+1)^2+(2x+my+5)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là một số dương khi x,y thỏa mãn điều kiện $10x-ay+b=0$. Giá trị của $P=a+2b+3m$ bằng:

A. 12. **B.** 30. **C.** 36. **D.** 52.

Câu 4: Cho x,y là hai số thực biến thiên và m là tham số. Biết rằng biểu thức $E=|x-2y+1|+|2x+my+5|$ đạt giá trị nhỏ nhất là một số dương E_0. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $E_0\in[0;1]$. **B.** $E_0\in[1;2]$. **C.** $E_0\in[2;3]$. **D.** $E_0\in[3;4]$.

Dạng 2 Sử dụng bất đẳng thức Cô-si

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

A. $m=\frac{17}{4}$. **B.** $m=10$. **C.** $m=5$. **D.** $m=3$.

Lời giải

STUDY TIP

1. Cách 2 trong lời giải ở bên dựa vào định nghĩa giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một tập hợp mà cụ thể là dựa vào điều kiện tồn tại giá trị của biến để đẳng thức xảy ra. Nếu kiểm tra $m=3$ không đúng thì kiểm tra đến những giá trị tiếp theo là $m=\frac{17}{4};m=5;m=10$ cho đến khi tìm được phương án đúng.

2. Đối với trường hợp tìm giá trị lớn nhất thì chúng ta kiểm tra từ giá trị lớn nhất đến giá trị nhỏ nhất trong bốn giá trị cho trước đến khi tìm được phương án đúng.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $y = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}} = 3$.

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. Vậy $m = 3$.

Cách 2: (*Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng*)

Trong 4 giá trị cho trong các phương án thì $m = 3$ là giá trị nhỏ nhất nên ta kiểm tra giá trị này trước.

Ta có $x^2 + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Đáp án D.

Nhận xét:

1. Trong ví dụ này nếu thay giả thiết $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$ thành giả thiết $x \in \left(\frac{1}{2};2\right)$ thì cách giải cũng không có gì thay đổi vì điểm rơi $x = 1$ vẫn thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

2. Nếu thay giả thiết $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$ thành $x \in \left[\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right]$ hoặc $x \in [2;6]$ chẳng hạn thì kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cô-si cũng cần điều chỉnh (do điểm rơi thay đổi).

- Nếu $x \in \left[\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right]$ thì $x^2 \in \left[\frac{1}{25};\frac{16}{25}\right]$ và $\frac{2}{x} \in \left[\frac{5}{2};10\right]$. Do đó ta cần biến đổi như sau:

$$y = \left(x^2 + \frac{64}{125x} + \frac{64}{125x}\right) + \frac{122}{125x} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{64}{125x}.\frac{64}{125x}} + \frac{122}{125x} \geq \frac{157}{50}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{4}{5}$.

- Nếu $x \in [2;6]$ thì $x^2 \in [4;36]$ và $\frac{2}{x} \in \left[\frac{1}{3};1\right]$. Do đó ta cần biến đổi như sau:

$$y = \frac{7}{8}x^2 + \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{7}{8}.2^2 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^2.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}} = 5.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là:

A. 4. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$ là:

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{36}$. **C.** $3\sqrt[3]{3}$. **D.** $3\sqrt[3]{18}$.

Câu 3. Hàm số $f(x) = 3x^2 + \frac{8}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ khi:

A. $x=1$. **B.** $x=3$. **C.** $x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $x = \frac{2}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 4x + \frac{3}{(x+1)^2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt[3]{6}$. **C.** $3\sqrt[3]{6}-4$. **D.** $4\sqrt{3}-4$.

Câu 5. Hàm số $f(x) = 3x + \frac{2}{(2x+1)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ khi:

A. $x=0$. **B.** $x = \frac{2-\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}}$. **C.** $x = \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3}}$. **D.** $x = \sqrt{3}$.

Dạng 3 Sử dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki

Ví dụ 1: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Khi đó, giá trị của $M - m$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2} - 2$. **D.** $2\sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Điều kiện $-2 \le x \le 2$.

+) Với mọi $x \in [-2;2]$, ta có $y \ge x \ge -2$; $y = -2 \Leftrightarrow x = -2$ (TMĐK) $\Rightarrow m = -2$.

+) Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có

$$y^2 = \left(1.x + 1.\sqrt{4 - x^2}\right)^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(x^2 + 4 - x^2\right) = 8.$$

Suy ra $y \le 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{1} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (TMĐK).

Do đó $M = 2\sqrt{2}$. Vậy $M - m = 2\sqrt{2} + 2$.

Đáp án D.

Ví dụ 2: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{3 - 2x}$. Tổng bình phương của M và m bằng

A. $\frac{25}{3}$. **B.** $\frac{35}{6}$. **C.** $\frac{25}{6}$. **D.** $\frac{35}{3}$.

Lời giải

- Điều kiện: $\frac{2}{3} \le x \le \frac{3}{2}$. Với điều kiện này thì $y \ge 0$.

- Với mọi $x \in \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$, ta có

$$y^2 = x + 1 + 2\sqrt{(3x - 2)(3 - 2x)} = \frac{1}{3}(3x - 2) + 2\sqrt{(3x - 2)(3 - 2x)} + \frac{5}{3} \ge \frac{5}{3}.$$

Suy ra $y \ge \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$; $y = \frac{\sqrt{15}}{3} \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (TMĐK).

- Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có

$$y^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{2x - \frac{4}{3}} + 1.\sqrt{3 - 2x}\right)^2 \le \left(\frac{3}{2} + 1\right)\left(2x - \frac{4}{3} + 3 - 2x\right) = \frac{25}{6}.$$

Suy ra $y \le \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$; $y = \frac{5\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow \frac{2x - \frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{3 - 2x}{1} \Leftrightarrow x = \frac{7}{6} \in \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$ (TMĐK).

Vậy $M = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ và $m = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Suy ra $M^2 + m^2 = \frac{35}{6}$.

Đáp án B.

Nhận xét: *Khi tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3x-2} + \sqrt{3-2x}$ thì chúng ta hoàn toàn giải được các bài toán sau đây:*

1. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{3-2x} = m$ có nghiệm.*

2. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{3-2x} \ge m$ có nghiệm.*

3. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{3-2x} \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right]$.*

Ví dụ 3: Cho x,y là các số thực thay đổi và thỏa mãn $36x^2+16y^2=9$. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của biểu thức $P=y-2x+5$ là

A. $m=\dfrac{55}{16}$ và $M=\dfrac{105}{16}$. **B.** $m=\dfrac{15}{4}$ và $M=\dfrac{25}{4}$.

C. $m=-\dfrac{5}{4}$ và $M=\dfrac{45}{4}$. **D.** $m=\dfrac{5}{4}$ và $M=\dfrac{35}{4}$.

Lời giải

<u>Cách 1:</u> (*Áp dụng bất đẳng thức Bu-ni-a-cốp-xki*)

Áp dụng bất đẳng thức Bu-ni-a-cốp-xki, ta có

$$(-2x+y)^2=\left(-\frac{1}{3}.6x+\frac{1}{4}.4y\right)^2\le\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right).\left(36x^2+16y^2\right)=\frac{25}{16}.$$

Do đó $|-2x+y|\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le-2x+y\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{15}{4}\le-2x+y+5\le\frac{25}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{4}.6x=-\frac{1}{3}.4y\\ 36x^2+16y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)\in\left\{\left(\frac{2}{5};-\frac{9}{20}\right);\left(-\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)\right\}$.

Vậy, $m=\frac{15}{4};M=\frac{25}{4}$.

<u>Cách 2:</u> (*Sử dụng kiến thức hình học*)

Đặt $X=6x;Y=4y$. Từ giả thiết suy ra $X^2+Y^2=9$.

Từ cách đặt và $P=y-2x+5$, ta có $4X-3Y+12P-60=0$.

Xét trong hệ trục tọa độ OXY, thì phương trình $X^2+Y^2=9$ là phương trình đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=3$, còn $4X-3Y+12P-60=0$ là phương trình đường thẳng Δ.

Do tồn tại x,y nên cũng tồn tại X,Y. Suy ra Δ và (C) phải có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R\Leftrightarrow\frac{|12P-60|}{5}\le3\Leftrightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}.$$

Vậy, $m=\frac{15}{4};M=\frac{25}{4}$.

Cách 3: (*Sử dụng điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình*)

Ta có $P=y-2x+5\Leftrightarrow y=2x+P-5$.

Thay $y=2x+P-5$ vào giả thiết, ta được $36x^2+16(2x+P-5)^2=9$

$$\Leftrightarrow100x^2+64(P-5)x+16(P-5)^2-9=0.$$

Do tồn tại x,y nên phương trình trên phải có nghiệm

$$\Leftrightarrow\Delta'=32^2.(P-5)^2-100.\left[16(P-5)^2-9\right]\ge0$$

$$\Leftrightarrow(P-5)^2\le\frac{25}{16}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le P-5\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}.$$

Vậy, $m=\frac{15}{4};M=\frac{25}{4}$.

Đáp án B.

Ví dụ 4: Xét các số thực x,y,z thỏa mãn hệ thức $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. Gọi S là tập giá trị của biểu thức $F=|2x+y-2z-4|$. Tập hợp S có bao nhiêu số nguyên dương?

A. 0. **B.** 23. **C.** 25. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $2(x+2)+(y-3)-2(z-4)=2x+y-2z+9$. Do vậy áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có

$$|2x+y-2z+9|\le\sqrt{\left(2^2+1^2+(-2)^2\right).\left[(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\right]}=12.$$

Suy ra $-12\le 2x+y-2z+9\le 12 \Leftrightarrow -25\le 2x+y-2z-4\le -1$

$\Rightarrow 1\le|2x+y-2z-4|\le 25\Leftrightarrow 1\le F\le 25$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}\\(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x;y;z)=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{13}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ hoặc $(x;y;z)=\left(-\dfrac{14}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{20}{3}\right)$.

Suy ra $S=[1;25]$ và S có 25 số nguyên dương.

Đáp án C.

Dạng 4 Sử dụng kiến thức hình học

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $f(x)=\sqrt{(x-3)^2+2^2}+\sqrt{(7-x)^2+3^2}$ nên hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Xét hai vectơ $\vec{a}=(x-3;2)$ và $\vec{b}=(7-x;3)$ thì $f(x)=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{41}$.

Do $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$ nên $f(x)\ge\sqrt{41}$.

Đẳng thức xảy ra, khi và chỉ khi $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\begin{cases}3(x-3)=2(7-x)\\(x-3)(7-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{23}{5}$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\sqrt{41}$.

Đáp án B.

STUDY TIP
Khi học về phương trình, chúng ta cũng có thể gặp một hình thức khác của dạng toán này. Đó là, giải phương trình:
$\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}=\sqrt{41}$

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ là:

A. một số hữu tỷ nhỏ hơn 8. **B.** một số vô tỷ lớn hơn 6.
C. một số vô tỷ nhỏ hơn 5. **D.** một số nguyên lớn hơn 8.

Câu 2. Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm:

A. thuộc khoảng $(1;3)$. **B.** thuộc khoảng $(3;5)$.
C. thuộc khoảng $(5;7)$. **D.** thuộc khoảng $(0;1)$.

Câu 3. Biết rằng hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x=\dfrac{m}{n}$, trong đó m,n là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Giá trị của $2m-5n$ bằng:

A. 1. **B.** 9. **C.** 21. **D.** -3.

Cũng từ bài toán trên cùng với cách giải của nó, chúng ta có thể phát triển bài toán thành các bài toán sau đây:

Câu 1. Cho hai số thực bất kỳ x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-6x+4y+13}+\sqrt{x^2+y^2-14x-6y+58}.$$

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x,y)=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}$.

A. 5. **B.** 7. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x,y)=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}+|x|+|y|$.

A. 5. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x-y-3=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$K=\sqrt{x^2+y^2-10x+4y+29}+\sqrt{x^2+y^2-20x-2y+101}.$$

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{82}$. **C.** $2\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{34}$.

Ví dụ 2: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2-8x+6y+16=0$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $F=x^2+y^2$.

A. $M=8$ và $m=2$. **B.** $M=2\sqrt{2}$ và $m=\sqrt{2}$.
C. $M=64$ và $m=4$. **D.** $M=16$ và $m=4$.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2-8x+6y+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2+(y+3)^2=9\ (*)$.

Xét trong mặt phẳng tọa độ Oxy, thì $(*)$ là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(4;-3)$, bán kính $R=3$.

Gọi $P(x;y)$ là điểm tùy ý thuộc đường tròn (C). Khi đó $F=OP^2$.

Ta có $OI=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5>R=3$ nên O nằm ngoài (C).

Với mọi điểm $P\in(C)$, ta có $OI-R\le OP\le OI+R\Rightarrow 2\le OP\le 8$.

Suy ra $M=8^2=64$ và $m=2^2=4$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Trong lời giải này, chúng ta không cần phải chỉ ra tọa độ của điểm P để đẳng thức xảy ra vì ở phần kiến thức cần biết chúng ta đã chỉ ra sự tồn tại và cách xác định điểm P rồi. Nếu câu hỏi có liên quan đến điều kiện để đẳng thức xảy ra thì chúng ta cần phải chỉ ra tọa độ của P. Ta có:

$OP=2\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow P\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$;

$OP=8\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\frac{8}{5}\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow P\left(\frac{32}{5};-\frac{24}{5}\right)$.

Đến đây thì bạn đọc có thể tự đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức F và điều kiện để đạt được giá trị đó.

<u>**Nhận xét:**</u> *Khi học về Số phức (Giải tích 12), chúng ta có thể bắt gặp bài toán này dưới một hình thức khác. Khi đó đòi hỏi chúng ta phải hiểu được bản chất của vấn đề và biết quy lại về quen để giải quyết vấn đề một cách nhanh gọn. Chẳng hạn như những câu hỏi dưới đây:*

Câu 1: Xét các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4+3i|=3$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Môđun lớn nhất của số phức z là:

A. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{\sqrt{15(14-6\sqrt{5})}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{15(14+6\sqrt{5})}}{5}$. **D.** $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

Câu 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$. Tính $S=M^2+m^2$.

A. $S=34$. **B.** $S=82$. **C.** $S=68$. **D.** $S=36$.

Ví dụ 3: Gọi $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x-my=2-4m\\mx+y=3m+1\end{cases}$, với m là tham số. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $L=x^2+y^2-2x$, khi m thay đổi.

A. $\frac{29-\sqrt{85}}{2}$. **B.** $11+\sqrt{85}$. **C.** $10+\sqrt{85}$. **D.** $\frac{29+\sqrt{85}}{2}$.

Lời giải

Cách 1: (*Lời giải đại số*)

Ta có $L=(x-1)^2+y^2-1$ và $\begin{cases} x-my=2-4m \\ mx+y=3m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)-my=1-4m \\ m(x-1)+y=2m+1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left[(x-1)-my\right]^2+\left[m(x-1)+y\right]^2=(1-4m)^2+(2m+1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=20-\dfrac{4m+18}{m^2+1} \Rightarrow L=19-\dfrac{2(2m+9)}{m^2+1}$.

Sử dụng phương pháp miền giá trị, ta có: $\dfrac{9-\sqrt{85}}{2} \le \dfrac{2m+9}{m^2+1} \le \dfrac{9+\sqrt{85}}{2}$.

$\Rightarrow 10-\sqrt{85} \le L \le 10+\sqrt{85}$. Do đó, giá trị lớn nhất của L là $10+\sqrt{85}$.

Cách 2: (*Lời giải hình học*)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai đường thẳng

$$d_1: x-my=2-4m \text{ và } d_2: mx+y=3m+1.$$

Nhận thấy d_1 luôn đi qua điểm cố định $A(2;4)$, d_2 luôn đi qua điểm cố định $B(3;1)$ và d_1, d_2 vuông góc với nhau.

Điểm $M(x;y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 thì M thuộc đường tròn (C) đường kính AB có tâm $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{5}{2}\right)$, bán kính $R=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

$L=(x-1)^2+y^2-1=JM^2-1$, với $J(1;0)$. Có $IJ=\dfrac{\sqrt{34}}{2}>R$ nên J nằm ngoài (C).

Với mọi $M\in(C)$ thì $IJ-R\le JM\le IJ+R \Rightarrow \dfrac{\sqrt{34}-\sqrt{10}}{2} \le JM \le \dfrac{\sqrt{34}+\sqrt{10}}{2}$

$\Leftrightarrow 11-\sqrt{85} \le JM^2 \le 11+\sqrt{85} \Leftrightarrow 10-\sqrt{85} \le JM^2-1 \le 10+\sqrt{85}$.

Do đó, giá trị lớn nhất của L là $10+\sqrt{85}$.

Đáp án C.

Ví dụ 4: Xét các số thực x,y thỏa mãn

$$\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-8x-14y+65}=6\sqrt{2}.$$

Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $T=x^2+y^2-2x+2y+2$. Tính $P=m+M$.

A. $P=86$. **B.** $P=\dfrac{171}{2}$. **C.** $P=123$. **D.** $P=\dfrac{123}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-8x-14y+65}=6\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(4-x)^2+(7-y)^2}=6\sqrt{2}$ $(*)$.

Xét hai vecto $\vec{u}=(x+2;y-1)$ và $\vec{v}=(4-x;7-y)$.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=(6;6) \Rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$.

Do vậy, $(*)$ trở thành $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng

STUDY TIP
Nếu chúng ta chỉ tập trung biến đổi đại số điều kiện đã cho thì bài toán trở nên dài dòng và phức tạp. Dấu hiệu để chúng ta có thể nhận dạng sử dụng hình học để giải là biểu thức dưới căn bậc hai viết được dưới dạng tổng bình phương của hai số. Qua lời giải bên, bạn đọc tự đề xuất những câu hỏi trắc nghiệm liên quan đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và điều kiện để đạt được các giá trị đó.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(7-y)=(y-1)(4-x)\\(x+2)(4-x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=x+3\\-2\le x\le 4\end{cases}.$$

Khi $y=x+3$ thì $x^2+y^2-2x+2y+2=2x^2+6x+17$.

Xét hàm số $f(x)=2x^2+6x+17$ trên đoạn $[-2;4]$.

Ta có $-\dfrac{6}{2.2}=-\dfrac{3}{2}\in[-2;4]$ và $f(-2)=13; f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{2}; f(4)=73$.

Suy ra $\min\limits_{[-2;4]} f(x)=\dfrac{25}{2}; \max\limits_{[-2;4]} f(x)=73$.

Do đó $m=\dfrac{25}{2}; M=73$ và $m+M=\dfrac{171}{2}$.

Đáp án B.

Nhận xét: *Khi học về Số phức (Giải tích 12), chúng ta có thể bắt gặp dạng toán này dưới một hình thức khác. Khi đó đòi hỏi chúng ta phải hiểu được bản chất của vấn đề và biết quy lạ về quen để giải quyết vấn đề một cách nhanh gọn. Chẳng hạn như những câu hỏi dưới đây.*

Câu 1: Xét các số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$.
B. $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.
C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$.
D. $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Câu 2: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-2+i|+|z+1-i|=\sqrt{13}$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z+2-i|$.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **C.** $m=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. **D.** $m=\dfrac{1}{13}$.

Ví dụ 5: Cho các số thực x,y thay đổi và luôn thỏa mãn hệ thức

$$\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{x^2+y^2-6x-8y+25}=10.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-1)^2+(y-2)^2$.

A. $\dfrac{17}{2}$. **B.** 34. **C.** 40. **D.** 17.

Lời giải

Hệ thức đã cho được viết lại thành $\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=10$.

Xét các điểm $M(x;y), A(-1;0), B(3;4)$ và $I(1;2)$. Khi đó, hệ thức đã cho trở thành $MA+MB=10$, còn biểu thức $P=IM^2$.

Dễ thấy I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Do đó $IM^2=\dfrac{MA^2+MB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}$

$$\Rightarrow IM^2\ge\left(\frac{MA+MB}{2}\right)^2-8=17\Rightarrow P\ge 17.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MA=MB=5$ (khi đó MAB là tam giác cân tại M và có $AB=4\sqrt{2}$ có nghĩa là tồn tại M).

Đáp án D.