§2. Hàm số lượng giác

A. Lý thuyết

Khái niệm:
Hàm số $f(x)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi x thuộc D ta có $\begin{cases} x-T \in D; x+T \in D \\ f(x+T)=f(x) \end{cases}$

Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn.

1. Hàm số $y=\sin x$ và hàm số $y=\cos x$

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y=\sin x$.

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với côsin (cos) của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số côsin**, kí hiệu là $y=\cos x$.

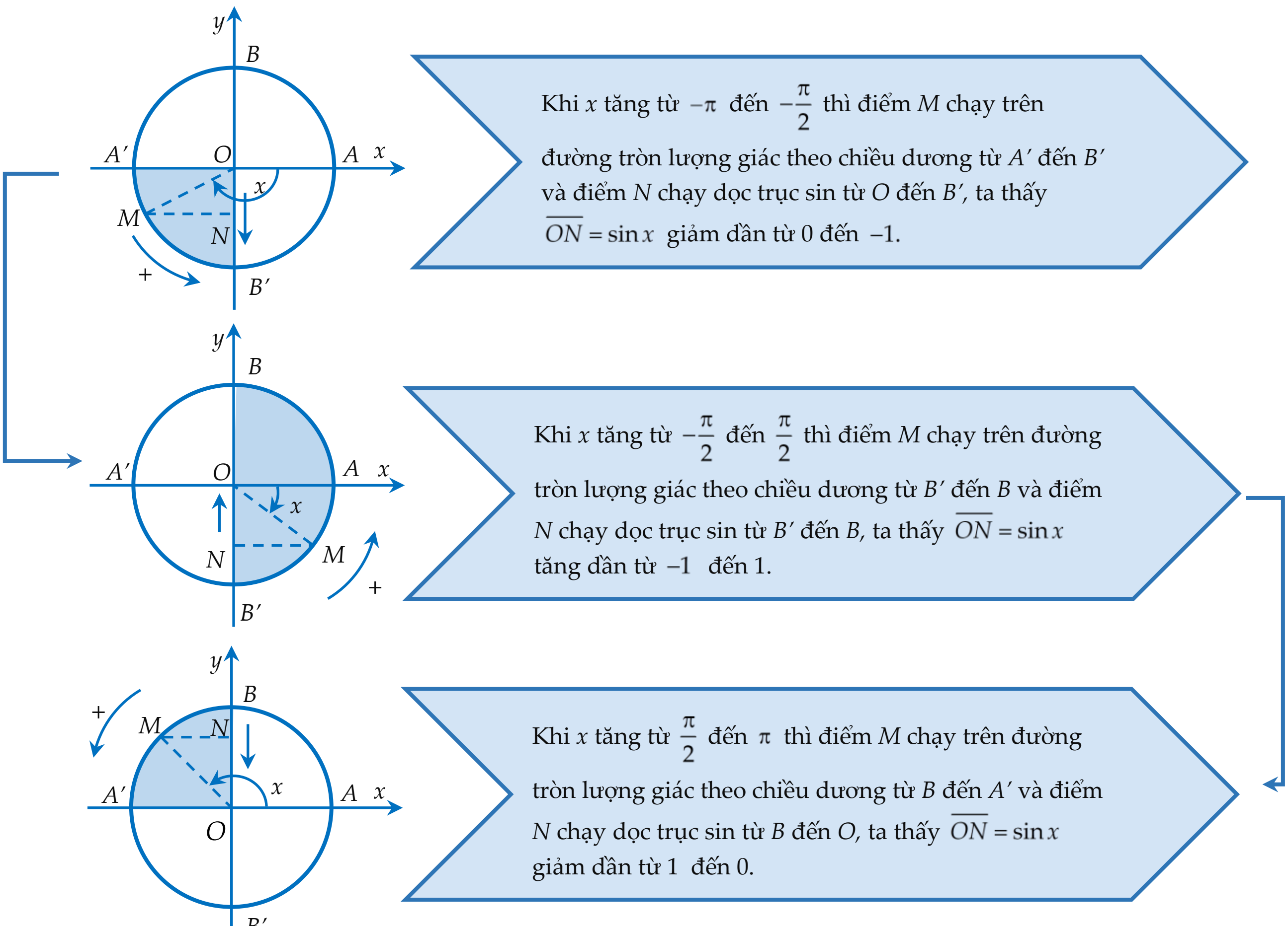
Tập xác định của các hàm số $y=\sin x$; $y=\cos x$ là $\mathbb{R}$.

a) Hàm số $y=\sin x$

Nhận xét: Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ do hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng và $-\sin x=\sin(-x)$.

Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Sự biến thiên: Sự biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y = sin x	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

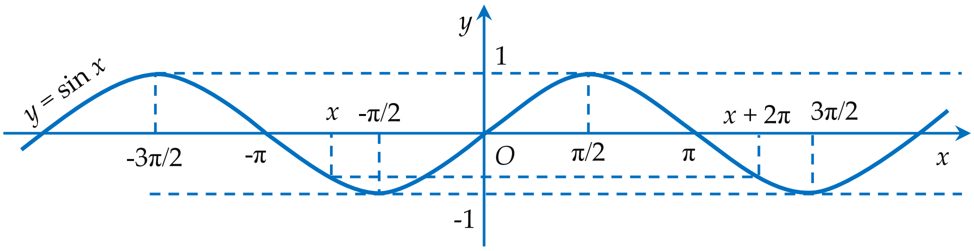
STUDY TIP

Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$

Tương tự ta suy ra được hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}.$

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0;\pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ *O*, ta được đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$, cuối cùng, tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài 2π; 4π,...



Hình 1.5

GHI NHỚ

Hàm số $y=\sin x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}.$

b) Hàm số $y=\cos x$

STUDY TIP

Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi),k\in\mathbb{Z}$

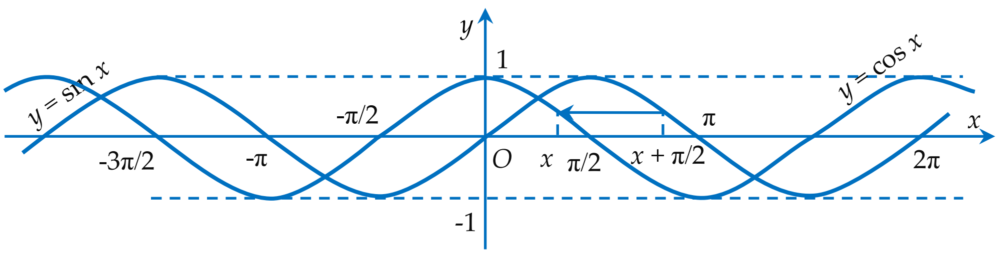
Tương tự ta suy ra được hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi),k\in\mathbb{Z}.$

Ta thấy $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y=\cos x$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\cos x$ trên $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$y=\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

Đồ thị hàm số $y=\cos x$:



Hình 1.6

GHI NHỚ

Hàm số $y=\cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số chẵn.
- Đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi), k\in\mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y=a\sin(\omega x+b)+c, (a, b, c, \omega\in\mathbb{R}, a\omega\neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

$$a\sin(\omega(x+T)+b)+c=a\sin(\omega x+b)+c,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\omega x+b+\omega T)=\sin(\omega x+b),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

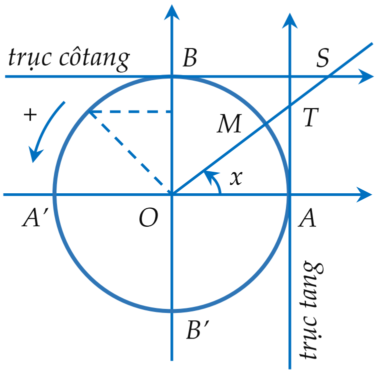
$$\Leftrightarrow \omega T=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow T=k\frac{2\pi}{\omega},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y=a\cos(\omega x+b)+c, (a, b, c, \omega\in\mathbb{R}, a\omega\neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12

2. Hàm số $y=\tan x$ và hàm số $y=\cot x$



Hình 1.7

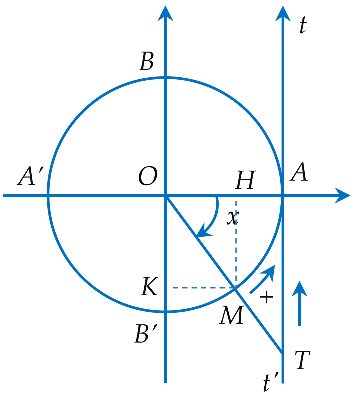
Với $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_1$ với số thực $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y=\tan x$. Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là D_1.

Với $D_2=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x\in D_2$ với số thực $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số côtang**, kí hiệu là $y=\cot x$. Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là D_2.

Nhận xét: - Hai hàm số $y=\tan x$ và $y=\cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π.

a) Hàm số $y=\tan x$



Hình 1.8

Giải thích $\tan x=\overline{AT}$ vì $\tan x=\frac{\overline{MH}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AT}}{1}=\overline{AT}$

Sự biến thiên: Khi cho $x=(OA,OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang At sao cho $\overline{AT}=\tan x$ chạy dọc theo At, nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x=0$).

Nhận xét:

Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

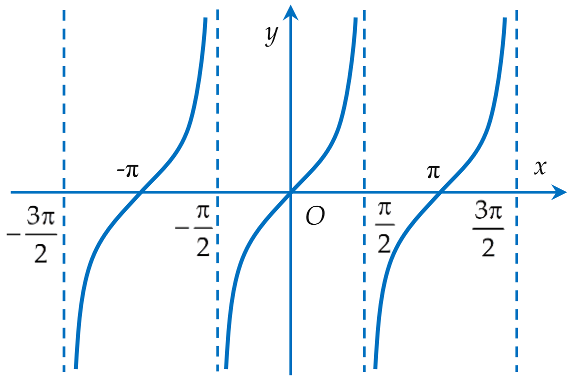
Đồ thị của hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

STUDY TIP

Hàm số $y=\tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm một đường tiệm cận (xem đồ thị hình bên).

Đồ thị hàm số

Nhận xét: Do hàm số $y=\tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, cuối cùng, tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.



Hình 1.9

GHI NHỚ

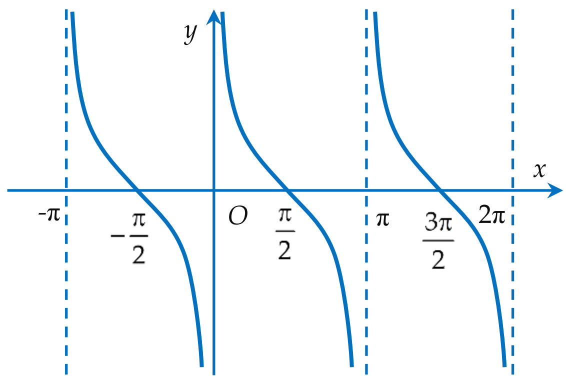
Hàm số $y=\tan x$:

- Có tập xác định: $D_1=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.
- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm một đường tiệm cận.

b) Hàm số $y=\cot x$

Hàm số $y=\cot x$ xác định trên $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y=\tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y=\cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y=\cot x$:

- Có tập xác định: $D_2=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π.
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi;\pi+k\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.
- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm một đường tiệm cận.