Ví dụ 1: Giá trị $\cos\frac{29\pi}{3}$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{-1}{2}$.

Lời giải

$$\cos\frac{29\pi}{3}=\cos\left(\frac{30\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

Đáp án B.

Ví dụ 2: Cho $\tan\alpha=2$. Giá trị của $\cot\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** –2.

Lời giải

Ta có: $\tan\alpha=2\Rightarrow\tan(\pi+\alpha)=2$

$$\Rightarrow\cot\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{2}+\pi+\alpha\right)=-\tan(\pi+\alpha)=-2$$

Lưu ý: Có thể dùng máy tính bằng cách ấn SHIFT tan $(\tan^{-1})$ 2 =, ta được góc α, sau đó tính biểu thức bằng cách nhập vào màn hình $\frac{1}{\tan\left(\text{Ans}+\frac{3\pi}{2}\right)}$ ta được kết quả như trên (để chế độ Radian).

Đáp án D.

Ví dụ 3: Giá trị của biểu thức: $B=\tan10^\circ.\tan20^\circ.\tan30^\circ.....\tan80^\circ$ là:

A. 1. **B.** –1. **C.** 8. **D.** –8.

Lời giải

$B=\tan10^\circ.\tan20^\circ.\tan30^\circ.....\tan80^\circ=\cot80^\circ.\cot70^\circ.\cot60^\circ.....\cot10^\circ$

$\Rightarrow B^2=(\tan10^\circ.\cot10^\circ)(\tan20^\circ.\cot20^\circ)...(\tan80^\circ.\cot80^\circ)=1.1....1.=1$

Mặt khác $B>0$ do $\tan10^\circ,\tan20^\circ,\tan30^\circ,.....,\tan80^\circ$ đều lớn hơn 0 $\Rightarrow B=1$

Đáp án A.

Ví dụ 4: Cho ΔABC. Khi đó đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $\sin B=\sin(A+C)$. **B.** $\cos(B-C)=-\cos(A+2C)$.

C. $\cos\frac{-3A+B+C}{2}=-\sin2A$. **D.** $\tan\frac{A+B-2C}{2}=\cot\frac{3C}{2}$.

Lời giải

Vì $A+B+C=\pi$ nên $\sin B=\sin(A+C)$

Vì $A+B+C=\pi$ nên $(A+2C)+(B-C)=\pi\Rightarrow\cos(B-C)=-\cos(A+2C)$

Vì $\frac{-3A+B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-3A+B+C}{2}\right)$ (phụ chéo)

$=\sin\frac{A+B+C+3A-B-C}{2}=\sin2A$

Vậy C sai.

Đáp án C.

IV. Công thức lượng giác

1. Công thức cộng

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \qquad \cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b \qquad \cot(a-b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot b-\cot a}$$

Ví dụ 1: Giá trị của biểu thức $A=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Đáp án A.

Ví dụ 2: Cho $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Khi đó giá trị biểu thức $B=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{-\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{-2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

Khi đó $B=\sin\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\cos\alpha\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)=0-\frac{1}{3}.\sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}}{3}$

Đáp án B.

STUDY TIP
Có thể dùng máy tính tìm ra giá trị góc α thỏa mãn yêu cầu đề bài và tìm giá trị của biểu thức đã cho.

Ví dụ 3: Biểu thức $A=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha$ không thể nhận giá trị nào sau đây?

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** -2.

Lời giải

$$A=\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\left(\sin\alpha.\frac{1}{2}+\cos\alpha.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2\left(\sin\alpha.\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha.\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\Rightarrow -2\le A\le 2\ (\forall\alpha)$

Đáp án C.

STUDY TIP
Công thức biến đổi:
$a\sin\alpha+b\cos\alpha$
$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$
$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\right)$
(với $\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)
$=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(\alpha+\beta)$

Ví dụ 4: Cho ΔABC, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào không đúng?

A. $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

B. $\dfrac{\tan^2 A-\tan^2 B}{1-\tan^2 A\tan^2 B}=-\tan(A-B)\tan C.$

C. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1.$

D. $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}.$

Lời giải

STUDY TIP
Ta có thể thử A, B, C là bộ ba số bất kì thỏa mãn $A+B+C=\pi$ và A, B, C không là các góc có giá trị đặc biệt vào từng đẳng thức và rút ra kết luận.

+ $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{B+C}{2}\right)=\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}-\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

+ $\dfrac{\tan^2 A-\tan^2 B}{1-\tan^2 A\tan^2 B}=\tan(A+B)\tan(A-B)$

$$=-\tan(A-B)\tan(\pi-A-B)=-\tan(A-B)\tan C$$

+ $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A$

Có $\cot C=\cot(\pi-A-B)=-\cot(A+B)=\dfrac{1-\cot A\cot B}{\cot A+\cot B}$

$\Rightarrow \cot A\cot B+\cot C(\cot A+\cot B)=\cot A\cot B+1-\cot A\cot B$

Vậy D sai.

Đáp án D.

2. Công thức nhân đôi

$\sin 2a=2\sin a\cos a$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

$\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

Hệ quả:

** Công thức hạ bậc:*

$\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$

$\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

$\cot^2 x=\dfrac{1+\cos 2a}{1-\cos 2a}$

** Công thức nhân ba:*

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

** Công thức chia đôi* (tính theo $\tan\dfrac{a}{2}$):

Đặt $\tan\dfrac{a}{2}=t\Rightarrow \tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}; t^2=\dfrac{1-\cos a}{1+\cos a}\Rightarrow \cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$

Ví dụ 1: Cho $\sin\alpha=\dfrac{-5}{13}; \pi\le\alpha\le\dfrac{3\pi}{2}$. Khi đó giá trị biểu thức $\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\tan 2\alpha$ gần nhất với giá trị nào?

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

STUDY TIP
Có thể dùng máy tính dò kết quả góc α và dùng quan hệ giữa các cung lượng giác đặc biệt để thỏa mãn yêu cầu đề bài và tính ra kết quả.

Vì $\sin\alpha = \frac{-5}{13}$; α thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos\alpha < 0$.

Vậy $\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{5^2}{13^2}} = \frac{-12}{13} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{5}{12}$

Có: $\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \tan 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right) + \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \approx 1,508$

Đáp án D.

Ví dụ 2: Đơn giản biểu thức $A = \cos x.\cos 2x.\cos 4x....\cos 2^n x$ ta được kết quả là:

A. $\frac{\sin nx}{n\sin x}$. **B.** $\frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$. **C.** $\frac{\sin(n+2)x}{(n+2)\sin x}$. **D.** $\cos 2^{n+1}x$.

Lời giải

Có $A.\sin x = \sin x.\cos x.\cos 2x.....\cos 2^n x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x....\cos 2^n x$

$= \frac{1}{2^2}\sin 2^2 x\cos 2^2 x...\cos 2^n x = \frac{1}{2^n}\sin 2^n x\cos 2^n x$

$\Rightarrow A = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}$

Đáp án B.

Ví dụ 3: Cho $\cot\frac{\pi}{14} = a$. Khi đó giá trị biểu thức $K = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}$ là:

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$.

C. $\frac{4a\left(a^2-1\right)\left(3a^2-1\right)}{\left(a^2+1\right)^3}$. **D.** $\frac{\left(a^2+1\right)^3}{4a\left(a^2-1\right)\left(3a^2-1\right)}$.

Lời giải

Ta có:

$$\tan\frac{\pi}{14} = \frac{1}{a} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{7} = \frac{\frac{2}{a}}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{2a}{a^2+1} = \sin\frac{6\pi}{7};\ \cos\frac{\pi}{7} = \frac{1-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{2\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} = \frac{4a\left(a^2-1\right)}{\left(a^2+1\right)^2}$$

$$\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\frac{3\pi}{7} = 3\sin\frac{\pi}{7} - 4\sin^3\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7} - 4\sin^3\frac{\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{7}.\cos^2\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$$

Khi đó:

$$K = \sin\frac{2\pi}{7}\left(2\cos\frac{\pi}{7}+1\right) = \frac{4a\left(a^2-1\right)}{\left(a^2+1\right)^2}.\frac{2a^2-2+a^2+1}{a^2+1} = \frac{4a\left(a^2-1\right)\left(3a^2-1\right)}{\left(a^2+1\right)^3}$$

Đáp án C.

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \qquad \cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

Ví dụ 1: Biểu thức thu gọn của biểu thức $A=\dfrac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}$ là:

A. $\sin 3a$. **B.** $\cos 3a$. **C.** $\tan 3a$. **D.** $1-\tan 3a$.

Lời giải

$$A=\frac{\sin a+\sin 3a+\sin 5a}{\cos a+\cos 3a+\cos 5a}=\frac{(\sin a+\sin 5a)+\sin 3a}{(\cos a+\cos 5a)+\cos 3a}$$

$$=\frac{2\sin 3a\cos 2a+\sin 3a}{2\cos 3a\cos 2a+\cos 3a}=\frac{\sin 3a(2\cos 2a+1)}{\cos 3a(2\cos 2a+1)}=\tan 3a$$

Đáp án C.

Ví dụ 2: Biểu thức nào sau đây phụ thuộc vào biến x?

A. $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

B. $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

C. $\cos^2 x+\cos^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

D. $\sin^2 x+\sin^2\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x-\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Lời giải

+) $\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$

$$=\sin x+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\left(2\cos\frac{2\pi}{3}+1\right)=0$$

+) $\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\frac{\cos 2x+1}{2}+\frac{\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)+1}{2}+\frac{\cos\left(2x+\frac{8\pi}{3}\right)+1}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{8\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[2\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{3}{2}$

+) $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

$=2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$

Đáp án D.

Ví dụ 3: Giá trị của tổng $S=\frac{1}{\cos a\cos 2a}+\frac{1}{\cos 2a\cos 3a}+...+\frac{1}{\cos(na)\cos\left[(n+1)a\right]}$

khi $a=\frac{\pi}{n+1}$ là:

A. $\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$. **B.** $\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{n}}$. **C.** $-1-\cos\frac{\pi}{n+1}$. **D.** $-1-\cos\frac{\pi}{n}$.

Lời giải

Ta có:

$S.\sin a=\frac{\sin(2a-a)}{\cos a.\cos 2a}+\frac{\sin(3a-2a)}{\cos 2a.\cos 3a}+...+\frac{\sin\left[(n+1)a-na\right]}{\cos(na)\cos\left[(n+1)a\right]}$

$=\tan 2a-\tan a+\tan 3a-\tan 2a+...+\tan a(n+1)-\tan(na)$

$=\tan(n+1)a-\tan a=\tan\pi-\tan a=-\tan a$

$\Rightarrow S=\frac{-\tan a}{\sin a}=\frac{-1}{\cos a}=\frac{-1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}$

Đáp án A.