

Câu 1. (2,5 điểm)

Giải các phương trình và bất phương trình:

a) $|3x - 2| = 1$.

b) $\sqrt{3 - x} = x - 1$.

c) $\frac{1}{1 - x} \geq 4$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - (m + 2)x + m - 2$ ẩn x , với m là tham số.

a) Giải bất phương trình $f(x) > 0$ khi $m = -1$.

b) Tìm m để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên \mathbb{R} đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos \alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(7;2)$, $B(0;-4)$, $C(3;0)$.

a) Viết phương trình đường thẳng BC .

b) Viết phương trình đường tròn (T) tâm A và tiếp xúc với BC .

c) Tìm điểm M trên đường tròn (T) sao cho $MB^2 - MC^2 = 53$.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} + \frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} + \frac{c^4 + a^4}{c^6 + a^6} \leq \frac{3}{4}.$$

----- HẾT -----

Câu	Đáp án	Điểm
1.a.	Giải phương trình $ 3x - 2 = 1$.	1,0
	$ 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 1 \\ 3x - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$	1,0
1.b.	Giải phương trình $\sqrt{3 - x} = x - 1$.	1,0
	$\sqrt{3 - x} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3 - x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$	0,5
1.c.	Giải bất phương trình $\frac{1}{1 - x} \geq 4$.	0,5
	$\frac{1}{1 - x} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - x} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 3}{1 - x} \geq 0$	0,25
	Từ bảng xét dấu suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{3}{4} \leq x < 1$.	0,25
	<u>Lưu ý:</u> Học sinh cũng có thể trình bày như sau $\frac{1}{1 - x} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0 \\ 1 \geq 4(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq x < 1$	
2.a.	Giải bất phương trình $f(x) > 0$ khi $m = -1$.	1,0
	Với $m = -1$ thì bất phương trình $f(x) > 0$ trở thành $2x^2 - x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > \frac{3}{2}$.	1,0
2.b.	Tìm m để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên \mathbb{R} đạt lớn nhất.	1,0
	Ta có $f(x) = 2x^2 - (m + 2)x + m - 2 = 2\left(x - \frac{m + 2}{4}\right)^2 + \frac{-m^2 + 4m - 20}{8}$ nên $f(x) \geq \frac{-m^2 + 4m - 20}{8}, \forall x \in \mathbb{R}$. Trên \mathbb{R} tam thức $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-m^2 + 4m - 20}{8}$, đạt được khi $x = \frac{m + 2}{4}$.	0,5
	Biến đổi: $\frac{-m^2 + 4m - 20}{8} = -2 - \frac{1}{8}(m - 2)^2 \leq -2$. Do đó $\frac{-m^2 + 4m - 20}{8}$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m = -2$. Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.	0,5
3.	Tính $\cos \alpha, \cos 2\alpha, \tan 2\alpha$.	1,5
	Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.	0,25

	Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.	0,25
	Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.	0,5
	$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$.	0,5
4.a.	Viết phương trình đường thẳng BC .	1,0
	Đường thẳng BC có phương trình $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1 \Leftrightarrow 4x - 3y - 12 = 0$.	1,0
4.b.	Viết phương trình đường tròn (T) tâm A và tiếp xúc với BC .	1,0
	Bán kính của đường tròn (T) là $r = d(A, BC) = \frac{ 4 \cdot 7 - 3 \cdot 2 - 12 }{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$.	0,5
	Đường tròn (T) có phương trình $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 4$.	0,5
4.c.	Tìm điểm M trên đường tròn (T) sao cho $MB^2 - MC^2 = 53$.	1,0
	Gọi $M(x; y)$ thì $MB^2 - MC^2 = 53 \Leftrightarrow x^2 + (y + 4)^2 - (x - 3)^2 - y^2 = 53$ $\Leftrightarrow 3x + 4y - 23 = 0$.	0,5
	Tọa độ của điểm M thỏa mãn $\begin{cases} 3x + 4y - 23 = 0 \\ (x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{23 - 3x}{4} \\ (x - 7)^2 + \left(\frac{23 - 3x}{4} - 2\right)^2 = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 314x + 945 = 0 \\ y = \frac{23 - 3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{189}{25} \\ y = \frac{2}{25} \end{cases}.$ Vậy $M(5; 2)$ hoặc $M\left(\frac{189}{25}; \frac{2}{25}\right)$.	0,5
5.	Chứng minh rằng $\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} + \frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} + \frac{c^4 + a^4}{c^6 + a^6} \leq \frac{3}{4}$. (1)	1,0
	Gọi ABC là tam giác có diện tích $S = \sqrt{3}$ và các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Từ $(a - b)(a^5 - b^5) \geq 0$ suy ra $a^6 + b^6 \geq ab(a^4 + b^4)$, dẫn tới $\frac{a^4 + b^4}{a^6 + b^6} \leq \frac{1}{ab} = \frac{\sin C}{ab \sin C} = \frac{\sin C}{2S} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin C$.	0,25
	Tương tự $\frac{b^4 + c^4}{b^6 + c^6} \leq \frac{1}{bc} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin A$, $\frac{c^4 + a^4}{c^6 + a^6} \leq \frac{1}{ca} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin B$. Bất đẳng thức (1) trở thành $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2).	0,25
	Ta có $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \sin \frac{A+B}{2}$, $\sin C + \sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{3C + \pi}{6} \cos \frac{3C - \pi}{6} \leq 2 \sin \frac{3C + \pi}{6}$,	0,25

<p>nên $\sin A + \sin B + \sin C + \sin \frac{\pi}{3} \leq 2 \sin \frac{3C + \pi}{6} + 2 \sin \frac{A + B}{2} =$</p> $= 4 \sin \frac{3(A + B + C) + \pi}{12} \cos \frac{3(C - A - B) + \pi}{12} \leq 4 \sin \frac{3(A + B + C) + \pi}{12} = 4 \sin \frac{\pi}{3}.$ <p>Do đó $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Bất đẳng thức (2) được chứng minh.</p> <p>Đẳng thức ở (2) xảy ra khi ABC là tam giác đều. Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức ở (1) xảy ra khi $a = b = c = 2$.</p>	0,25
--	------

Chú ý:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Câu làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được tính điểm tối đa.
- Với các cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho Câu hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.
- Điểm toàn Câu là tổng số điểm của các phần đã chấm, không làm tròn điểm.