CHỦ ĐỀ: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN.

QUAN HỆ SONG SONG

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. CHUẨN KIẾN THỨC

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Các tính chất thừa nhận.

- Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .

- Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

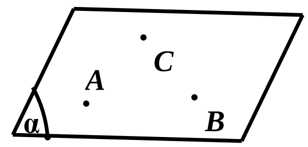
2. Cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

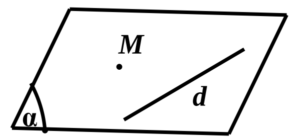
Các kí hiệu:

(ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (h1)



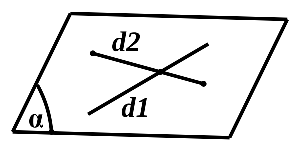
(h1)

- (M, d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)



(h2)

- (d_1, d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h3)



(h3)

3. Hình chóp và hình tứ diện.

3.1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α).

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp , kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy , các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên…

3.2. Hình Tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác $ABC, ABD,$ ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

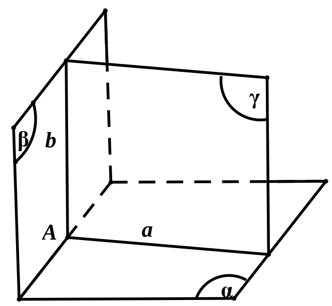
B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Bài toán 01: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG.

Phương pháp:Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.

Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau :

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của (α) và (β).



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD)

A.SC

B.SB

C.SO trong đó $O = AC \cap BD$

D. $\{S\}$

b) (SAC) và (MBD)

A.SM

B.MB

C.OM trong đó $O = AC \cap BD$

D.SD

c) (MBC) và (SAD)

A.SM

B.FM trong đó $F = BC \cap AD$

C.SO trong $O = AC \cap BD$

D.SD

d) (SAB) và (SCD)

A.SE trong đó $E = AB \cap CD$	**B.**FM trong đó $F = BC \cap AD$
C.SO trong $O = AC \cap BD$	**D.**SD

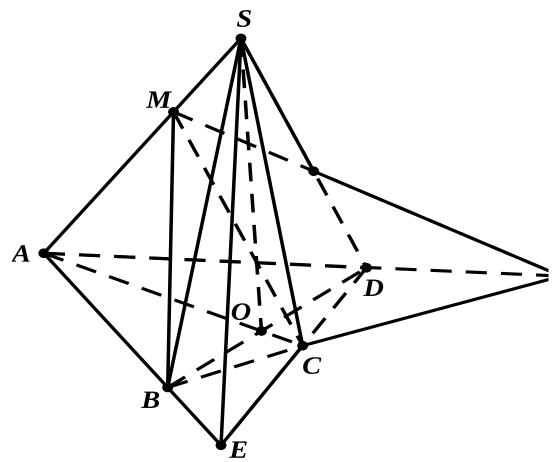
Lời giải:

a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.



b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$

.

c) Trong $(ABCD)$ gọi

$F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có

$SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC).

A. PC trong đó $P = DC \cap AN$, $N = DO \cap BC$

B. PC trong đó $P = DM \cap AN$, $N = DA \cap BC$

C. PC trong đó $P = DM \cap AB$, $N = DO \cap BC$

D.PC trong đó $P = DM \cap AN$, $N = DO \cap BC$

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABD).

A.DR trong đó $R = CM \cap AQ$, $Q = CA \cap BD$

B. DR trong đó $R = CB \cap AQ$, $Q = CO \cap BD$

C. DR trong đó $R = CM \cap AQ$, $Q = CO \cap BA$

D. DR trong đó $R = CM \cap AQ$, $Q = CO \cap BD$

c) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

A.FG trong đó $F = IJ \cap CD$, $G = KM \cap AE, K = BE \cap IA, E = BO \cap CD$

B. FG trong đó $F = IA \cap CD$, $G = KM \cap AE, K = BA \cap IJ, E = BO \cap CD$

C. FG trong đó $F = IJ \cap CD$, $G = KM \cap AE, K = BA \cap IJ, E = BO \cap CD$

D. FG trong đó $F = IJ \cap CD$, $G = KM \cap AE, K = BE \cap IJ, E = BO \cap CD$

Lời giải:

a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi $P = DM \cap AN$

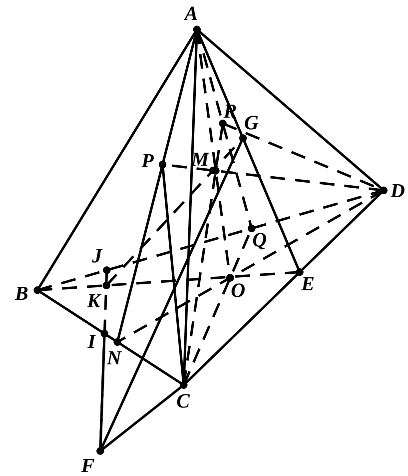
$$\Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$$

Lại có

$C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$

.



b)Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$$

D là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

c) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$; trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Có $\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$, $\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD)$. Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

Bài toán 02: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG – BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Phương pháp:

- Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.
- Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường đường thẳng còn lại.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA,SB và SC lấy các điểm D,E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A.Ba điểm B, J,K thẳng hàng

B. Ba điểm I,J,K thẳng hàng

C. Ba điểm I,J,K không thẳng hàng

D.Ba điểm $I,J,$C thẳng hàng

<u>Lời giải:</u>

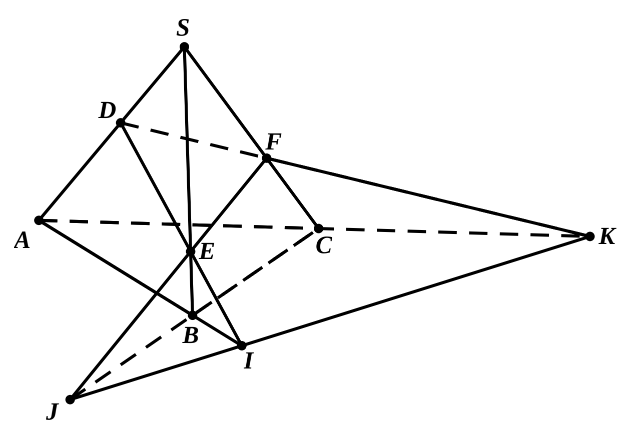
Ta có

$I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).Tương tự $J = EF \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2) $K = DF \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3) Từ (1),(2) và (3) ta có I,J,K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD, SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Bốn điểm S, I, J, G thẳng hàng.

B. Bốn điểm S, I, J, G không thẳng hàng.

C. Ba điểm P, I, J thẳng hàng.

D. Bốn điểm I, J, Q thẳng hàng.

b) Giả sử $K = AN \cap DM, L = BQ \cap EP$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

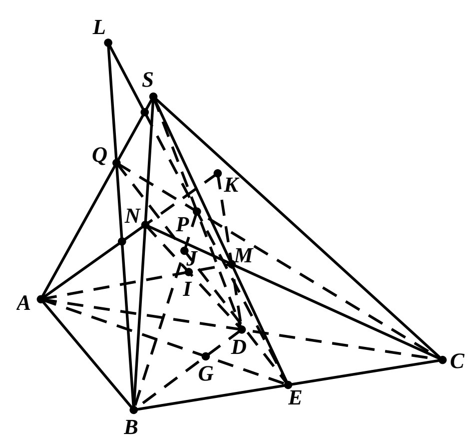
A. Ba điểm S, K, L thẳng hàng.

B. Ba điểm S, K, L không thẳng hàng

C. Ba điểm B, K, L thẳng hàng

D. Ba điểm C, K, L thẳng hàng

<u>Lời giải:</u>



a) Ta có $S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)

$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SBD) \\ I \in (SAE) \end{cases} \quad (3)$$

$$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tưng ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào đúng?

A. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

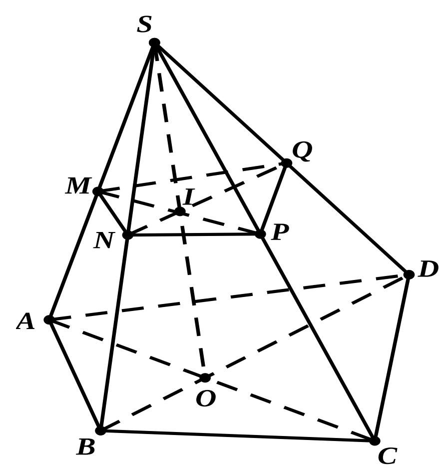
B. Các đường thẳng MP, NQ, SO chéo nhau.

C. Các đường thẳng MP, NQ, SO song song.

D. Các đường thẳng MP, NQ, SO trùng nhau.

<u>Lời giải:</u>

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.



Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I .

Ví dụ 4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng a. Trong (P) lấy hai điểm A, B nhưng không thuộc a và S là một điểm không thuộc (P). Các đường thẳng SA, SB cắt (Q) tương ứng tại các điểm C, D. Gọi E là giao điểm của AB và a. Khẳng định nào đúng?

A. AB, CD và a đồng qui.

B. AB, CD và a chéo nhau.

C. AB, CD và a song song nhau.

D. AB, CD và a trùng nhau

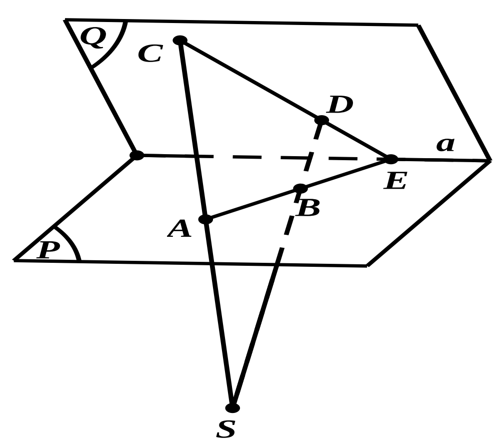
Lời giải:

Trước tiên ta có $S \notin AB$ vì ngược lại thì $S \in AB \subset (P) \Rightarrow S \in (P)$

(mâu thuẫn giả thiết) do đó S, A, B không thẳng hàng, vì vậy ta có mặt phẳng (SAB).

Do $C = SA \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} C \in SA \subset (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C \in (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases} \quad (1)$



Tương tự $D = SB \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} D \in SB \subset (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D \in (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $CD = (SAB) \cap (Q)$.

Mà

$E = AB \cap a \Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in (SAB) \\ E \in (Q) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in CD$.

Vậy AB, CD và a đồng qui đồng qui tại E.

Bài toán 03: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

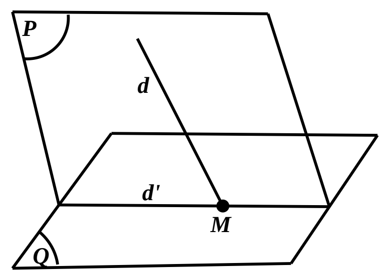
Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M, khi đó

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$



Trường hợp 2. Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d

Bước 2: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$

Bước 3: Trong (Q) gọi $M = d \cap \Delta$ thì M chính là giao điểm của $d \cap (P)$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

A.Điểm H, trong đó $E = AB \cap CD$, $H = SA \cap EM$

B. Điểm N, trong đó $E = AB \cap CD$, $N = SB \cap EM$

C. Điểm F, trong đó $E = AB \cap CD$, $F = SC \cap EM$

D. Điểm T, trong đó $E = AB \cap CD$, $T = SD \cap EM$

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

A. Điểm H**,** trong đó $I = AC \cap BD$, $H = MA \cap SI$

B. Điểm F**,** trong đó $I = AC \cap BD$, $F = MD \cap SI$

C. Điểm K**,** trong đó $I = AC \cap BD$, $K = MC \cap SI$

D. Điểm V**,** trong đó $I = AC \cap BD$, $V = MB \cap SI$

<u>Lời giải:</u>

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

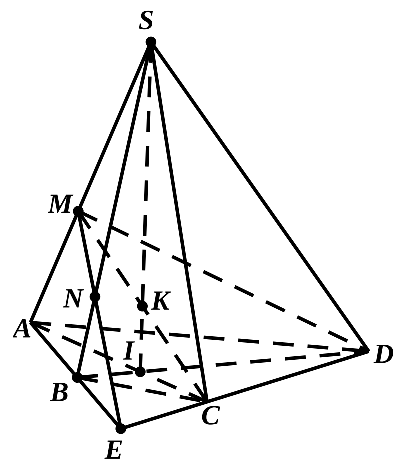
Trong (SAB) gọi.

Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và $N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên $K = MC \cap (SBD)$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

A.Điểm K, trong đó $K = IJ \cap SD$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$

B. Điểm H, trong đó $H = IJ \cap SA$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$

C. Điểm V, trong đó $V = IJ \cap SB$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$

D. Điểm P, trong đó $P = IJ \cap SC$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$

<u>Lời giải:</u>

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

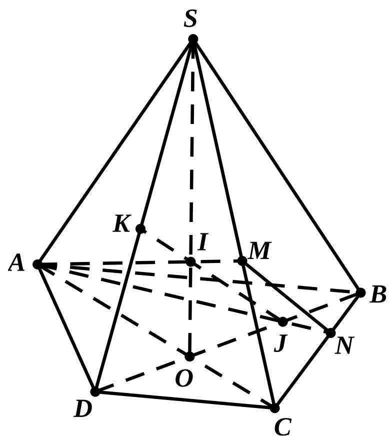
Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$

$\Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$.

Vậy $K = SD \cap (AMN)$



Bài toán 04: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG VỚI HÌNH CHÓP.

Phương pháp:

Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp)

Trong phần này chúng ta chỉ xét thiết diện của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

A. Tam giác

B. Tứ giác

C.Hình thang

D.Hình bình hành

b) Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác

B. Tứ giác

C.Hình thang

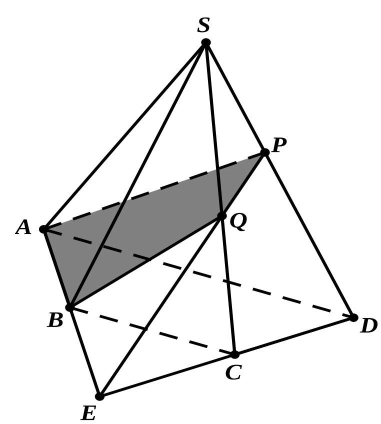
D.Hình bình hành

<u>Lời giải:</u>

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E=AB\cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q=SC\cap EP$.

Ta có $E\in AB$ nên $EP\subset(ABP)\Rightarrow Q\in(ABP)$, do đó $Q=SC\cap(ABP)$.



Thiết diện là tứ giác $ABQP$.

b)Trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng $\left(SAD\right)$ gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng $\left(SCD\right)$ gọi $K = SC \cap PG$.

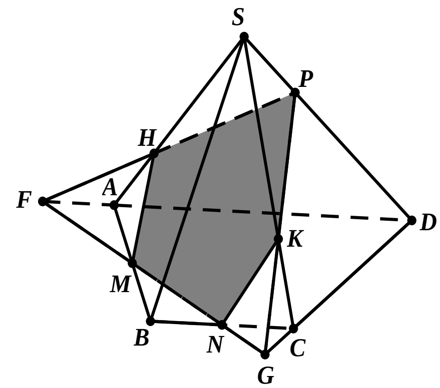
Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in \left(MNP\right)$,

$\Rightarrow FP \subset \left(MNP\right) \Rightarrow H \in \left(MNP\right)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in \left(MNP\right) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap \left(MNP\right)$

Tương tự $K = SC \cap \left(MNP\right)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P là ba điểm trên các cạnh AD,CD,SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác

B. Tứ giác

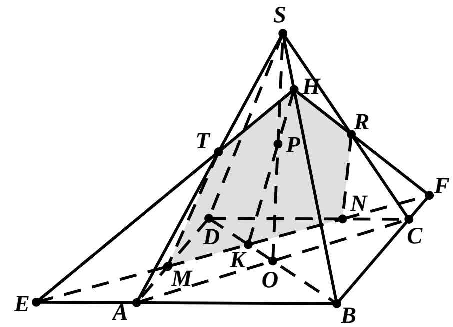
C.Hình thang

D.Hình bình hành

<u>Lời giải:</u>

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, K, F lần lượt là giao điểm của MN với DA, DB, DC.

Trong mặt phẳng $\left(SDB\right)$ gọi $H = KP \cap SB$



Trong mặt phẳng $\left(SAB\right)$ gọi $T = EH \cap SA$

Trong mặt phẳng $\left(SBC\right)$ gọi $R = FH \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset \left(MNP\right)$,

$\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset \left(MNP\right) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap \left(MNP\right)$.

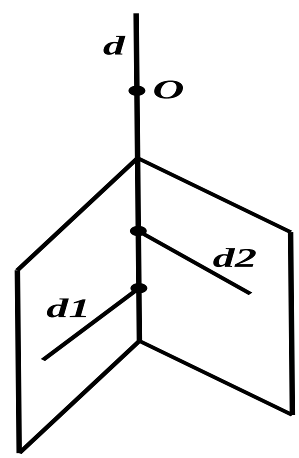
Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap \left(MNP\right)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.

Bài toán 05: DỰNG ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ CẮT HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp:

Để dựng đường thẳng d đi qua O và cắt d_1, d_2 ta dựng giao tuyến của hai mặt phẳng $mp\left(O, d_1\right)$ và $mp\left(O, d_2\right)$, khi đó $d = mp\left(O, d_1\right) \cap mp\left(O, d_2\right)$.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, O là điểm huộc miền trong tam giác BCD, M là một điểm trên cạnh AB.

a) Dựng đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.

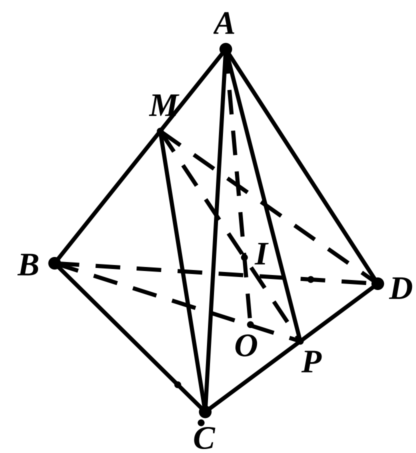
b) Gọi N là mộtđiểm trên cạnh BC sao cho ON không song song với BD. Dựng đường thẳng đi qua N cắt AO và DM.

Lời giải:

a) Trong (BCD) gọi $P = BO \cap CD$

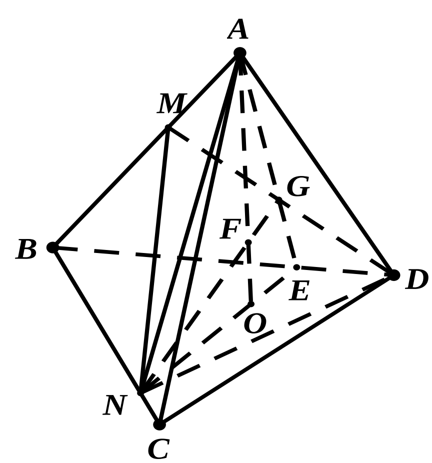
Trong (ABN) gọi $I = PM \cap AO$

Đường thẳng MP chính là đường thẳng đi qua M cắt cả AO và CD.



b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $E = NO \cap BD$

Trong (ABD) gọi $G = MD \cap AE$, trong (NAE) gọi $F = AO \cap NG$, thì NG chính là đường thẳng đi qua N cắt cả AO và DM.



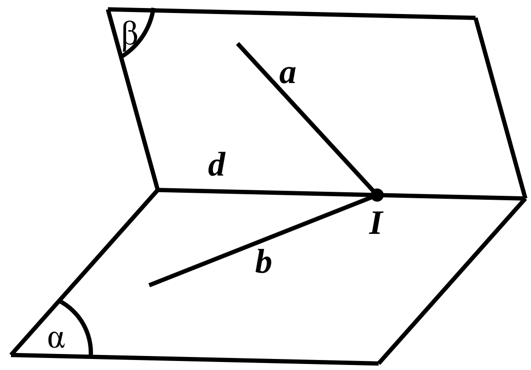
Bài toán 06: TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG VÀ BÀI TOÁN CHỨNG MINH GIAO TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM CỐ ĐỊNH.

Phương pháp:

Để tìm tập hợp giao điểm I của hai đường thẳng thay đổi a,b ta chọn hai mặt phẳng cố định (α) và (β) cắt nhau lần lượt chứa a,b, khi đó $I = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} I \in a \subset (\alpha) \\ I \in b \subset (\beta) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in d = (\alpha) \cap (\beta)$

Vậy điểm I thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).



Để chứng minh đường thẳng d đi qua một điểm cố định ta thực hiện theo các bước sau

- Chọn một điểm cố định J thuộc hai mặt phẳng (δ) và (γ)
- Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng (δ) và (γ), khi đó d đi qua điểm cố định J.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB. Một mặt phẳng (P) quay quanh AB cắt các cạnh SC,SD tại các điểm tương ứng E,F.

a) Tìm tập hợp giao điểm I của AF và BE.

A. $I \in SV$, trong đó $V = AE \cap BC$

B. $I \in ST$, trong đó $T = AD \cap BF$

C. $I \in SH$, trong đó $H = AD \cap BC$

D. $I \in SZ$, trong đó $H = AE \cap BF$

b) Tìm tập hợp giao điểm J của AE và BF.

A. $J \in SO$, trong đó $SO = (SAC) \cap (SBD)$

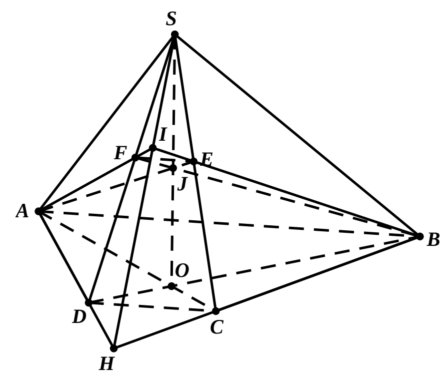
B. $J \in SA$

C. $J \in SB$

D. $J \in SO$, trong đó $SO = (SAF) \cap (SBE)$

Lời giải:

a) ***Phần thuận:***



Ta có $I = AF \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in AF \\ I \in BE \end{cases}$,

$\begin{cases} AF \subset (SAD) \\ BE \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi

$H = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} H \in AD \\ H \in BC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in (SAD) \\ H \in (SBC) \end{cases}$.

$\Rightarrow SH = (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow I \in SH$.

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến D và I chạy đến H.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và I chạy đến S.

Phần đảo:

Lấy điểm I bất kì thuộc đoạn SH, trong (SAH) gọi $F = SD \cap AI$, trong (SBH) gọi $E = SH \cap BI$ khi đó $(ABEF)$ là mặt phẳng quay quanh AB cắt các cạnh SC, SD tại E, F và I là giao điểm của AF và BE.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn SH.

b) Ta có $J = AE \cap BF \Rightarrow \begin{cases} J \in AE \\ J \in BF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (SBD)$ Nhưng $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên $J \in SO$.

Khi E chạy đến chạy đến C thì F chạy đến D và J chạy đến O.

Khi E chạy đến S thì F chạy đến S và J chạy đến S.

Lập luận tương tự trên ta có tập hợp điểm J là đoạn SO.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABDC$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC sao cho $\dfrac{AM}{AB} \neq \dfrac{AN}{AC}$. Một mặt phẳng (P) thay đổi luôn chứa MN, cắt các cạnh CD và BD lần lượt tại E và F.

a) Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm tập hợp giao điểm I của ME và NF.

A. $I \in OD$ trong đó, $O = AM \cap BN$

B. $I \in OD$ trong đó, $O = CM \cap BA$

C. $I \in OD$ trong đó, $O = CB \cap BA$

D. $I \in OD$ trong đó, $O = CM \cap BN$

c) Tìm tập hợp giao điểm J của MF và NE.

A. đường thẳng AB trừ các điểm trong của đoạn AB

B. đường thẳng AC trừ các điểm trong của đoạn AC

C. đường thẳng BD trừ các điểm trong của đoạn BD

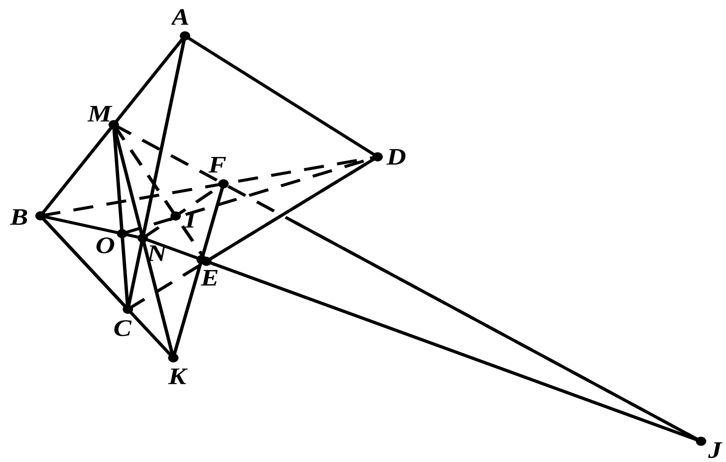
D. đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD

Lời giải:

a) Trong (ABC) gọi $K = MN \cap BC$ thì K cố định và $\begin{cases} K \in MN \\ K \in BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K \in (MNP) \\ K \in (BCD) \end{cases}$

Lại có $EF = (P) \cap (BCD) \Rightarrow K \in EF$

Vậy EF luôn đi qua điểm K cố định



b) ***Phần thuận:***

Trong (P) gọi

$I = ME \cap NF \Rightarrow \begin{cases} I \in ME \subset (MCD) \\ I \in NF \subset (NBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MCD) \cap (NBD)$.

Gọi

$O = CM \cap BN \Rightarrow OD = (MCD) \cap (NBD) \Rightarrow I \in OD$

Giới hạn:

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và I chạy đến O

Khi Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Phần đảo:

Gọi I là điểm bất kì trên đoạn OD, trong (MCD) gọi $E = MI \cap CD$, trong (NBD) gọi $F = NI \cap BD$ suy ra $(MNEF)$ là mặt phẳng quay quanh MN cắt các cạnh DB, DC tại các điểm E, F và $I = ME \cap NF$.

Vậy tập hợp điểm I là đoạn OD.

c) Gọi $J = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} J \in MF \subset (ADB) \\ J \in NE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ADB) \cap (ACD)$.

Mà $AD = (ADC) \cap (ADB)$.

Khi E chạy đến C thì F chạy đến B và J chạy đến A

Khi Khi E chạy đến D thì F chạy đến D và I chạy đến D

Từ đó ta có tập hợp điểm J là đường thẳng AD trừ các điểm trong của đoạn AD.

CÁC BÀI TOÁN TỰ LUẬN LUYỆN TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD)

b) Gọi E, F là các điểm lần lượt trên các cạnh AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DEF).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là tứ giác $ABCD$, AB cắt CD tại E, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABD, N một điểm thuộc miền trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (BCD) và (AMN).

b) (ABC) và (DMN).

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 3PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (MNP).

5. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là các điểm lần lượt trên các cạnh SC, BC.

a) Tìm giao điểm của AM với (SBD).

b) Tìm giao điểm của SD với (SMN).

6. Trong mặt phẳng (α) cho hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại O, A, B là hai điểm nằm ngoài (α) sao cho AB cắt (α) với (α). Một mặt phẳng (β) quay quanh AB cắt d và d' lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi $I = AM \cap BN$, chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi $J = AN \cap BM$, chứng minh J thuộc một đường thẳng cố định.

d) Chứng minh IJ đi qua một điểm cố định.

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh $DE = DC$.

b) Xác định giao điểm F của đương thẳng AD với (IJK) và chứng minh $FA = 2FD$.

c) Chứng minh $FK \parallel AB$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của AM với (SBD). Tính $\dfrac{EM}{EA}$.

b) Tìm giao điểm F của SD với (MAB) và chứng minh F là trung điểm của SD.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I, C, D thẳng hàng và $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của AD với (MOG). Tính $\dfrac{JD}{JA}$.

c) Tìm giao điểm K của SA với (MOG). Tính $\dfrac{KS}{KA}$.

10. Cho mặt phẳng (α) xác định bởi hai đường thẳng a,b cắt nhau ở O và c là đường thẳng cắt (α) tại I $(I \neq O)$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và $mp(O,c)$

b) Gọi M là một điểm trên c và không trùng với I. Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M,a) và (M,b) và chứng minh Δ luôn nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di động trên c.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB và SC.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AMN)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN).

12. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I,J lần lượt là các điểm cố định trên các cạnh SA và SC (IJ không song song với AC).

Một mặt phẳng (α) quay quanh IJ cắt SB tại M và cắt SD tại N.

a) Chứng minh các đường thẳng MN, IJ, SO đồng qui

b) Giả sử $AD \cap BC = E, IN \cap JM = F$. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c) Gọi $P = IN \cap AD, Q = JM \cap BC$. Chứng minh đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (α) di động.

13. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh AB, BC, CS lấy các điểm M, N, P sao cho MN và AC không song song với nhau.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

b) Gỉa sử $I = MP \cap NQ$, chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P chạy trên cạnh SC.

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là một điểm trên cạnh SD sao cho $SM=\frac{1}{3}SD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng BM với (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến d của (SBC) và (AMN). Chứng minh d luôn đi qua một điểm cố định.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Xác định thiết diện của hình chóp với (MNG).

15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA,SB,SC tương ứng tại các điểm A',B',C'. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Tìm giao điểm D' của (α) với SD.

b) Chứng minh $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I,J là hai điểm trên các cạnh AD và SB.

a) Tìm giao các điểm K,L của các đường thẳng IJ và DJ với (SAC).

b) Giả sử $O=AD\cap BC, M=OJ\cap SC$. Chứng minh A,K,L,M thẳng hàng.

17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD, $AB=2CD$. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với $JS>JC$. Gọi (α) là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt các cạnh SD,SB tại M,N. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

18. Cho tứ diện $ADCD$ thỏa mãn điều kiện $AB.CD=AC.BD=AD.CB$. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua mỗi đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng qui tại một điểm.

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. a) Ta có M,N lần lượt là điểm chung của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD) nên $(MBC)\cap(NAD)=MN$.

b) Gọi $I = BM \cap DE \Rightarrow \begin{cases} I \in BM \subset (BCM) \\ I \in DE \subset (DEF) \end{cases} \Rightarrow I \in (BCM) \cap (DEF)$.

Tương tự, gọi $J = CM \cap DF$ thì $\Rightarrow J \in (BCM) \cap (DEF)$.

Do đó $IJ = (BCM) \cap (DEF)$.

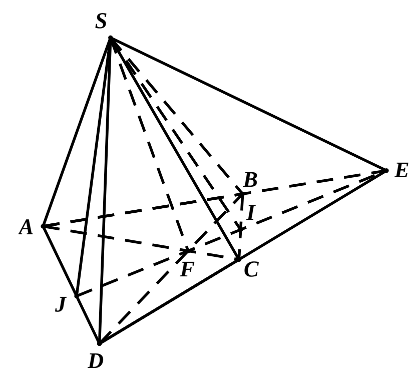
2.

a)Ta có $(SAB) \cap (SCD) = SE$,
$(SAC) \cap (SBD) = SF$.

b) Gọi I, J lần lượt là giao

điểm của EF với BC, AD thì

$(SEF) \cap (SAD) = SJ$, $(SEF) \cap (SBC) = SI$.

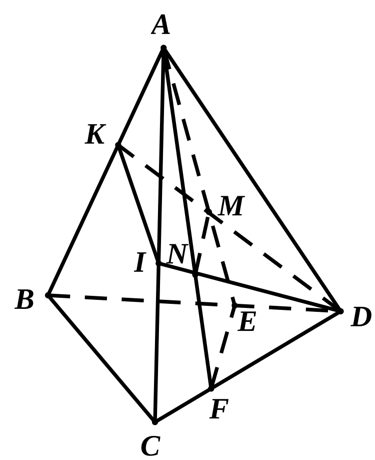


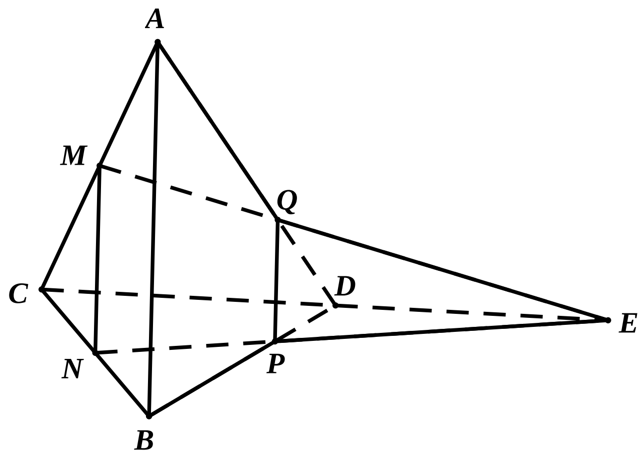
3.

a) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của
AM, AN với BD và CD thì
$EF = (AMN) \cap (BCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là giao điểm của
DN, DM với AC và AB thì

$EF = (DMN) \cap (ABC)$.





4.

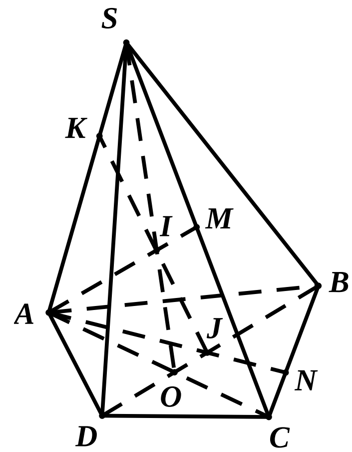
a) Trong (BCD) gọi $E = CD \cap NP$ thì

$$\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP \subset (MNP) \end{cases}$$

$\Rightarrow E = CD \cap (MNP)$.

b) Trong (ACD) gọi $Q = AD \cap ME$ thì ta có $(MNP) \cap (ABD) = PQ$

5.



a) Trong $\left(ABCD\right)$ gọi $O = AC \cap BD$, trong $\left(SAC\right)$ gọi $I = AM \cap SO$

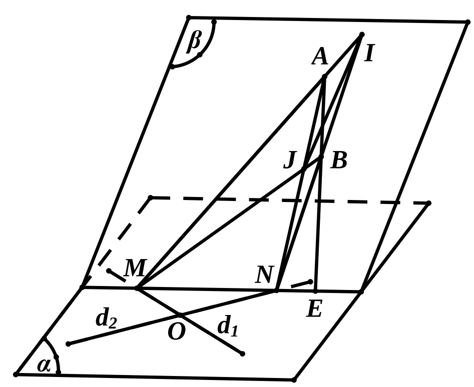
$$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset \left(SBD\right) \end{cases} \Rightarrow I = AM \cap \left(SBC\right).$$

b) Trong $\left(ABCD\right)$ gọi $J = AN \cap BD$, kéo dài IJ cắt SD tại K.

Ta có

$$\begin{cases} K \in SD \\ K \in IJ \subset \left(AMN\right) \end{cases} \Rightarrow K = SD \cap \left(AMN\right).$$

6. a) Gọi $E = AB \cap (\alpha)$ thì E cố định và



$$\begin{cases} E \in AB \subset (\beta) \\ E \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow E \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \ (1)$$

Tương tự

$$\begin{cases} M = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta) (2).$$

$$\begin{cases} N = d_1 \cap (\beta) \\ d_1 \subset (\alpha) \end{cases}$$

$\Rightarrow N \in \Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ (3). Từ $(1),(2),(3)$ suy ra M, N, E thẳng hàng hay MN đi qua điểm E cố định.

b) Ta có $I = AM \cap BN \Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset mp\left(A, d_1\right) \\ I \in BN \subset mp\left(B, d_2\right) \end{cases} \Rightarrow I \in \Delta' = mp\left(A, d_1\right) \cap mp\left(B, d_2\right)$

rõ ràng $mp\left(A,d_1\right),mp\left(B,d_2\right)$ là các mặt phẳng cố định nên Δ' cố định.

Vậy I luôn thuộc đường thẳng cố định Δ'.

c) Lập luận tương tự câu b) ta có $J\in\Delta''=mp\left(A,d_2\right)\cap mp\left(B,d_1\right)$.

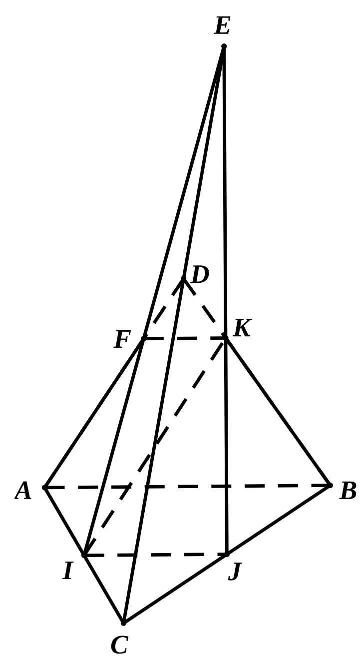
d) Gọi $\left(\delta\right)$ là mặt phẳng xác định bởi Δ',Δ'' thì $\left(\delta\right)$ cố định

Gọi $F=AB\cap\left(\delta\right)$. Gọi $K=AB\cap\left(\delta\right)\Rightarrow K$ cố định

Dễ thấy I,J là điểm chung của các mặt phẳng $\left(A,d_1\right),\left(B,d_2\right)$ và $\left(A,d_2\right),\left(B,d_1\right)$ nên I,J thuộc $mp\left(\Delta',\Delta''\right)$. Vậy I,J,K thẳng hàng do đó IJ đi qua điểm K cố định.

7. a) Trong $\left(BCD\right)$ gọi $E=JK\cap CD\Rightarrow\begin{cases}E\in CD\\E\in\left(IJK\right)\end{cases}$

$\Rightarrow E=CD\cap\left(IJK\right)$.



Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác BCD đối với cát tuyến EKJ ta có $\frac{KD}{KB}.\frac{JB}{JC}.\frac{EC}{ED}=1$ mà $\frac{KD}{KB}=\frac{1}{2},\frac{JB}{JC}=1$, do đó $\frac{EC}{ED}=2$. Hay $DE=DC$.

b) Trong $\left(ACD\right)$ gọi $F=AD\cap IE\Rightarrow\begin{cases}F\in AD\\F\in IE\subset\left(IJK\right)\end{cases}$

$F=AD\cap\left(IJK\right)$.

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác ACD đối với cát tuyến EFI ta có

$\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}.\frac{IA}{IC}=1$, mà $\frac{EC}{ED}=2$ (câu a)

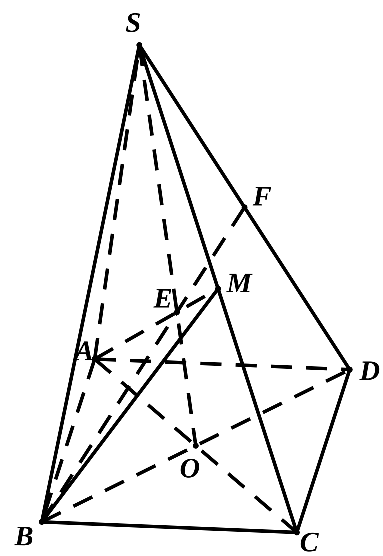
$\frac{IA}{IC}=1$ suy ra $\frac{FD}{FA}=\frac{1}{2}\Rightarrow FA=2FD$.

c) Do $\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{1}{2},\dfrac{KD}{KB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{KD}{KB}\Rightarrow FK\parallel AB$.

8. a) Gọi $O=AC\cap BD$, trong $\left(SAC\right)$ gọi

$$E=AM\cap SO\Rightarrow\begin{cases}E\in AM\\ E\in SO\subset\left(SBD\right)\end{cases}$$

$\Rightarrow E=AM\cap\left(SBD\right)$.



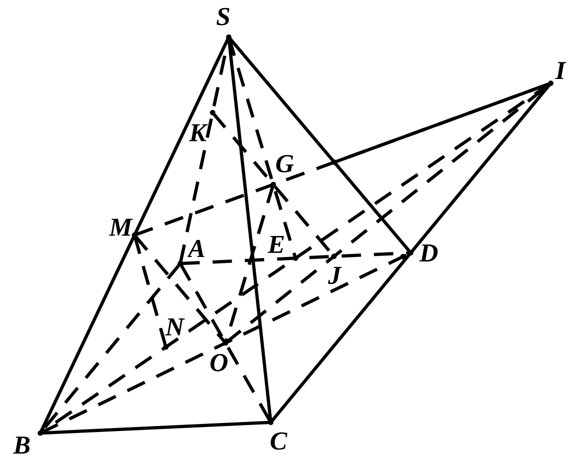
Do O,M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên E là trọng tâm của tam giác SAC do đó $\dfrac{EM}{EA}=\dfrac{1}{2}$.

b) Trong $\left(SBD\right)$ gọi

$$F=BE\cap SD\Rightarrow\begin{cases}F\in SD\\ F\in BE\subset\left(ABM\right)\end{cases}\Rightarrow F=SD\cap\left(ABM\right)$$

.

Vì SO là trung tuyến của tam giác SBD và $\dfrac{SE}{SO}=\dfrac{2}{3}$(do E là trọng tâm của tam giác SAC) nên E là trọng tâm của tam giác SBD, do đó F là trung điểm của SD.



9. a) Gọi E là trung điểm của AD và

$$I = MG \cap BE \Rightarrow \begin{cases} I \in MG \\ I \in BE \subset (ABCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = GM \cap (ABCD).$$

Gọi N là trung điểm của BE thì

$MN \parallel= \dfrac{1}{2}SE$.

Ta có $\dfrac{IG}{IM} = \dfrac{GE}{MN} = \dfrac{\frac{1}{3}SE}{\frac{1}{2}SE} = \dfrac{2}{3}$, mà IM là trung tuyến của ΔSBI nên G là trọng tâm của $\Delta SBI \Rightarrow E$ là trung điểm của BI, do đó $ABDI$ là hình bình hành $DI \parallel AB$, mặt khác $CD \parallel AB$. Vậy I, C, D thẳng hàng, hay $I \in CD$ và $IC = 2ID$.

b)

Trong $(ABCD)$ gọi $J = AD \cap OI$ thì J chính là giao điểm của AD với (OMG).

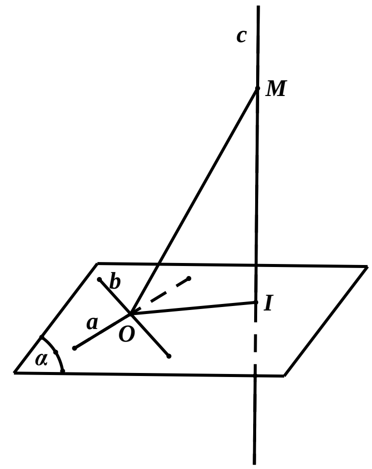
Dễ thấy rằng J là trọng tâm của tam giác IAC nên $\dfrac{JA}{JD} = 2$.

c) Trong (SAD) gọi $K = JG \cap SA$ thì K là giao điểm của (OMG) với SA

Ta có J là trọng tâm tam giác IBD nên $\dfrac{EJ}{ED} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{EG}{ES} \Rightarrow JG \parallel SD$ từ đó ta có

$\dfrac{KS}{KA} = \dfrac{JD}{JA} = \dfrac{1}{2}$.

10.



a) Ta có $I = c \cap (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} I \in c \subset mp(O,c) \\ I \in (\alpha) \end{cases}$

Lại có

$O \in (\alpha) \cap mp(O,c) \Rightarrow OI = (\alpha) \cap mp(O,c)$.

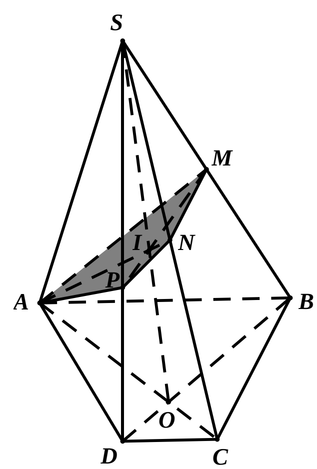
b) Do $O = a \cap b \Rightarrow \begin{cases} O \in a \subset mp(M,a) \\ O \in b \subset mp(M,b) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in mp(M,a) \cap mp(M,b)$.

Vậy $OM = mp(M,a) \cap mp(M,b)$, rõ ràng $OM \subset mp(O,c)$ cố định.

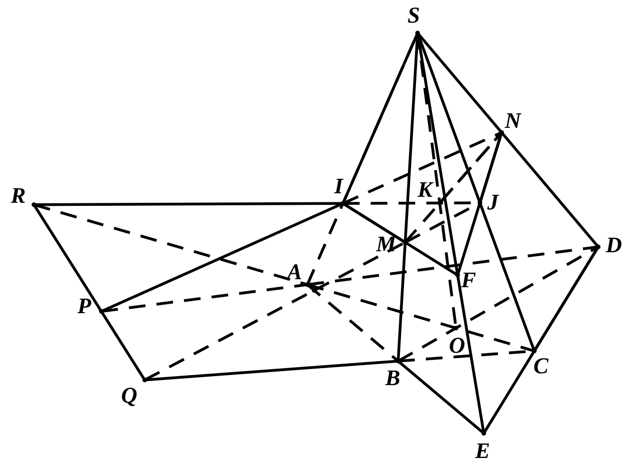
11. a) Gọi $O = AC \cap BD$, trong (SAC) gọi $I = SO \cap AN$, trong (SBD) gọi $P = MI \cap SD$ thì $P = SD \cap (AMN)$.

b) Thiết diện là tứ giác $AMNP$.



12. a) Trong (α) gọi $K = IJ \cap MN$

Ta chứng minh S, O, K thẳng hàng.



Thật vậy $K = IJ \cap MN \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \subset (SAC) \\ K \in MN \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$.

Mà $SO = (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow K \in SO$ Vậy SO, IJ, MN đồng qiu tại K.

b) Ta có $E = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$

Tương tự $F \in (SAB) \cap (SCD)$, do đó S, E, F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên chứng thẳng hàng.

c) Do IJ không song song với AC nên trong (SAC) gọi $R = IJ \cap AC$ thì R cố định.

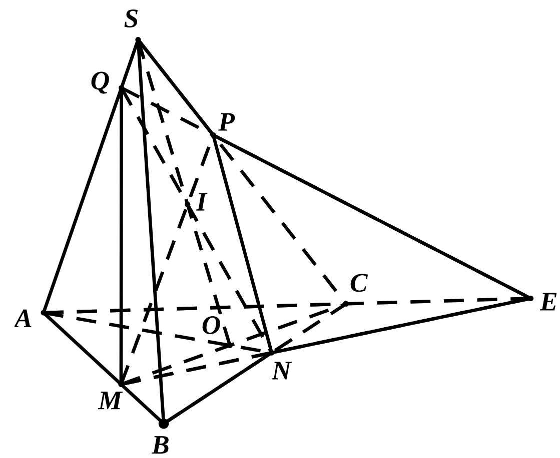
Dễ thấy $PQ = (ABCD) \cap (\alpha)$.

$R = IJ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} R \in IJ \\ R \in AC \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in (\alpha) \\ R \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow R \in PQ$.

Vậy PQ luôn đi qua điểm R cố định khi (α) thay đổi.

13. a) Trong (ABC) gọi $E = MN \cap AC$, trong (SAC) gọi $Q = EP \cap SA$, thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



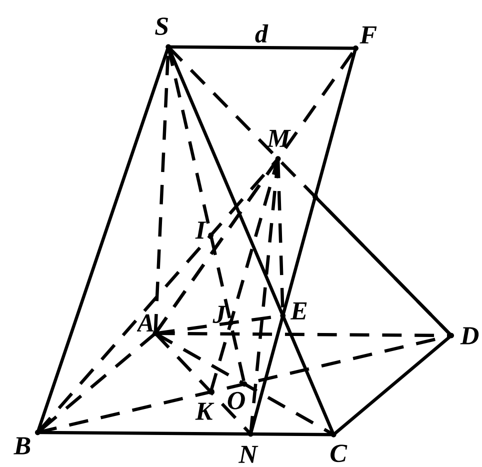
b) Vì $I = MP \cap NQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in MP \subset (SMC) \\ I \in NQ \subset (SAN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \in (SAN) \cap (SMC)$$

Mặt khác gọi $O = AN \cap CM$ thì O cố định nên $SO = (SCM) \cap (SAN)$ cố định. Vậy I thuộc đường thẳng SO cố định.

14. a) Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap BM$



thì $\begin{cases} I \in BM \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

$$\Rightarrow I = BM \cap (SAC).$$

b) Gọi $K = AN \cap BD$, $J = SO \cap KM$,

$E = AJ \cap SC$.

Do $J \in KM \subset (AMN) \Rightarrow AJ \subset (AMN)$

$$\Rightarrow E \in (AMN)$$

$\Rightarrow E \in (SBC) \cap (AMN)$.

Từ đó ta có $NE = (AMN) \cap (SBC)$.

Gọi $d = (SAD) \cap (SBC)$ thì d cố định.

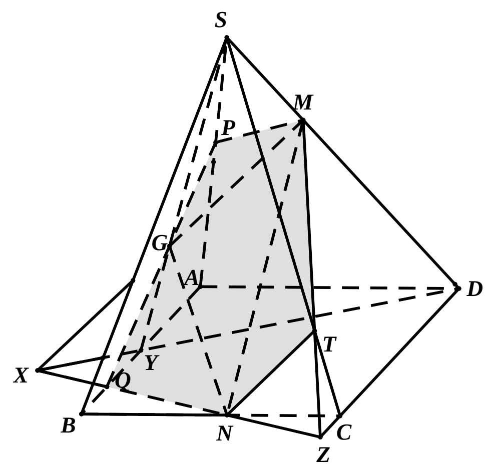
Trong (SAD) gọi $F = AM \cap d$ thì F cố định.

Do $F \in d \subset (SBC) \Rightarrow F \in (SBC)$.

Vậy N, E, F là điểm chung của hai mặt phẳng (AMN) và (SBC) nên chúng thẳng hàng, hay NE đi qua điểm F cố định.

c) Gọi Y là trung điểm của AB và $X = DY \cap MG$. Trong $(ABCD)$ gọi $O = NX \cap AB$ và $Z = NX \cap CD$, trong (SCD) gọi $T = MZ \cap SC$

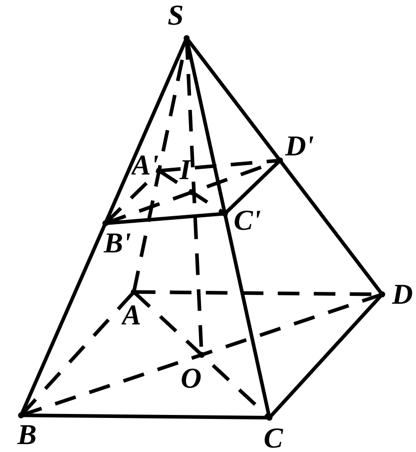
trong (SAB) gọi $P = QG \cap SA$. Thiết diện là ngũ giác $MPQNT$.



15.

a) Trong (SAC) gọi $I = SO \cap A'C'$, vì

$I \in SO \subset BD \Rightarrow I \in (SBD)$.



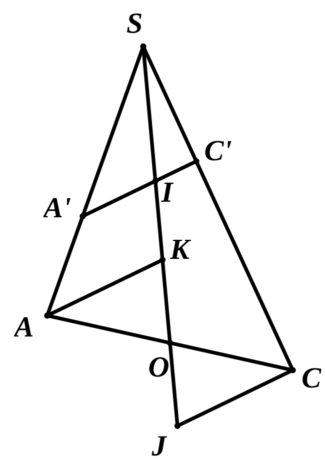
Trong (SBD) gọi $D' = B'I \cap SD$

$\Rightarrow \begin{cases} D' \in SD \\ D' \in B'I \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow D' = SD \cap (\alpha)$.

‘

b) Kẻ $AK \parallel A'C', K \in SO$ và $CJ' \parallel A'C', J \in SO$

.



Ta có $\dfrac{SA}{SA'} = \dfrac{SK}{SI}$.

Và $\dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SJ}{SI} \Rightarrow \dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SO}{SI} + \dfrac{SK}{SI}$

$= \dfrac{SO + SJ}{SI} = \dfrac{(SO - OK) + (SO + OJ)}{SI} = \dfrac{2SO}{SI} \quad (1)$

(do $AK \parallel CJ \Rightarrow \dfrac{OK}{OJ} = \dfrac{OA}{OC} = 1 \Rightarrow OK = OJ$)

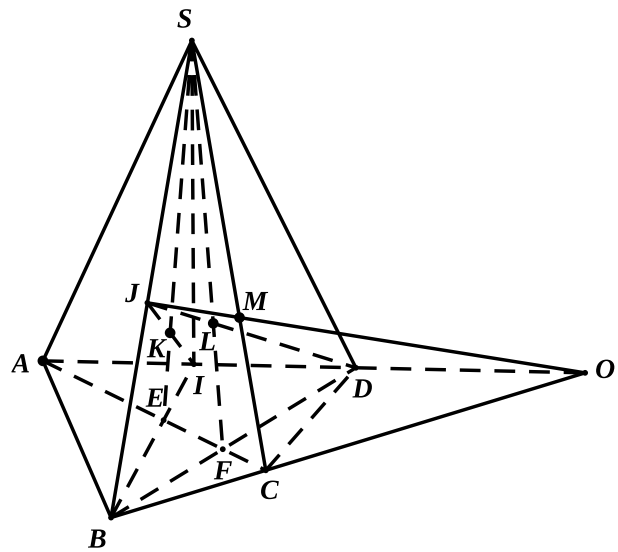
Tương tự ta cũng tính được

$\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{2SO}{SI} \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$

(đpcm)

16. a) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap BI$



$\Rightarrow E \in BI \subset (SBI)$. Trong (SBI) gọi

$K = IJ \cap SE \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

Trong $(ABCD)$ gọi $F = AC \cap BD$

$\Rightarrow F \in BD \subset (SBD)$.

Trong (SBD) gọi

$L = SF \cap DJ \Rightarrow \begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

b) Dễ thấy $A, K, L, M \in (SAC)$ (1).

Mặt khác

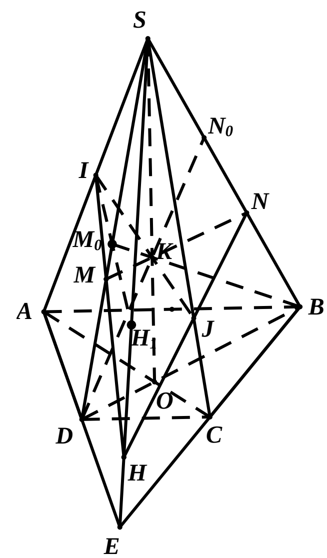
$K \in IJ \subset (AOJ)$,

$L \in DJ \subset (AOJ)$, $M \in OJ \subset (AOJ)$

nên $A, K, L, M \in (AOJ)$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra A, K, L, M cùng thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (AOJ) nên chúng thuộc giao tuyến của hai mawth phẳng (SAC) và (AOJ), hay A, K, L, M thẳng hàng.

17. Gọi $O = AC \cap BD$, $K = IJ \cap SO$ thì SO, MN, IJ đồng quy tại K



Gọi

$$H = MI \cap NJ \Rightarrow \begin{cases} H \in MI \subset (SAB) \\ H \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$$

.

Gọi $E = AD \cap BC \Rightarrow SE = (SAD) \cap (SBC)$.Vậy $H \in SE$.

Gới hạn

Gọi $M_0 = BK \cap SD$ và $N_0 = DK \cap SB$

Khi $M \to M_0$ thì $N \to B$

Khi $N \to N_0$ thì $M \to D$

Vậy để (α) cắt các cạnh SB, SD thì M thuộc đoạn DM_0 và N thuộc đoạn BN_0.

Gọi $H_1 = IM_0 \cap SE$ thì quỹ tích điểm H là tia H_1x chứa E.

(Bạn đọc tự làm phần đảo).

18. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD và $E = AI \cap CD$.

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC}$ (1). Mặt khác từ giả thiết

$AB.CD = AC.BD \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AE$ là đường phân giác của góc A trong tam giác ACD. Nghĩa là tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ACD thuộc AE. Do AI và BJ cùng thuộc (ABE) nên chúng cắt nhau tại O. Vậy bốn đường thẳng nối các đỉnh với tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đôi một cắt nhau và chúng không đồng phẳng nên phải đồng quy.