HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. Tóm tắt lý thuyết

1) Hàm số liên tục tại một điểm

- ✓ Hàm số liên tục: Giả sử hàm số *y=f(x)* xác định trên (a;b) và $x_0 \in (a;b)$.
  Hàm số *f(x)* liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- ✓ Hàm số không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại x_0

2) Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn:

- ✓ Hàm số *y=f(x)* xác định trên khoảng (a;b). *f(x)* liên tục trên khoảng (a;b) khi và chỉ khi *f(x)* liên tục tại mọi điểm thuộc (a;b).
- ✓ Hàm số *y=f(x)* xác định trên khoảng [a;b]. *f(x)* liên tục trên khoảng [a;b] khi và chỉ khi *f(x)* liên tục trên khoảng (a;b) và
  $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Chú ý:

- ✓ +,-,*,/ các hàm liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.
- ✓ Hàm sơ cấp: đa thức, phân thức, lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

3) Tính chất của hàm số liên tục

- ✓ **Định lí:** Hàm số *f(x)* liên tục trên [a;b] và $f(a) \neq f(b) \Rightarrow \forall M$ nằm giữa *f(a), f(b),* $\exists c \in (a;b): f(c) = M$
- ✓ **Hệ quả:** Hàm số *f(x)* liên tục trên [a;b] và $f(a).f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b): f(c) = 0$

Nhận xét:

- ✓ Dùng hệ quả để chứng minh phương trình *f(x)=0* có ít nhất nghiệm trên (a;b).
- ✓ Đồ thị hàm số liên tục là đường liền nét

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, khoảng, đoạn

Phương pháp :

Phương pháp 1:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_o} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$

Phương pháp 2:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_o^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_o^-} f\left(x\right)$

Sử dụng thêm các phương pháp khử dạng vô định đã học ở phần trước.

<u>Bài tập mẫu 1</u>: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & ,x\neq -1\\ 2 & ,x=-1\end{cases}$

trên tập xác định của hàm số.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & ,x\neq -1\\ 2 & ,x=-1\end{cases}$:

- Tập xác định D = R \ {1}
- Với $x\notin\{-1;1\}$ hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$ xác định nên liên tục.
- Xét tại x = 1 $\notin$ D nên hàm số không liên tục tại x = 1
- Xét tại x = –1

$$\lim_{x\to -2} f\left(x\right)=\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x-1}=-1\neq f\left(-1\right)=2$$

Nên hàm số không liên tục tại x = –1

<u>Bài tập mẫu 2</u>: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & khi\ x>3\\ 2x+1 & khi\ x\leq 3\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- Hàm số liên tục với mọi $x\neq 3$.
- Tại x = 3, ta có:

  + $f(3)=7$

  + $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x+1)=7$

  + $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3^+}(x-2)=1$

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục tại x = 3.

Vậy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$, $(3;+\infty)$.

<u>Bài tập mẫu 3</u>: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ 3 & khi\ x\ =-2\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- Khi $x\neq -2$ ta có $f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2}=x+1$

  Từ đây suy ra: *f*(*x*) liên tục tại $\forall x\neq -2$

- Tại $x=-2$ ta có: $f(-2)=3,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x+1)=-1\Rightarrow f(-2)\neq \lim\limits_{x\to -2} f(x)$

  Từ đây suy ra: *f(x)* không liên tục tại *x* = –2.

Vậy hàm số *f(x)* liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2),\ (-2;+\infty)$.

<u>Bài tập mẫu 4</u>: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$.

a) Xét tính liên tục của hàm số khi *m* = 3

b) Với giá trị nào của *m* thì *f(x)* liên tục tại *x* = 2 ?

Hướng dẫn giải

Ta có tập xác định của hàm số là D = R

a. Khi *m* = 3 ta có

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}, khi\, x\neq 2\\ 3 \quad\quad\quad\quad\quad, khi\, x=2\end{cases}=\begin{cases}x+1, & khi\, x\neq 2\\ 3 \quad\;, & khi\, x=2\end{cases}$$

Từ đây suy ra: *f(x)* liên tục tại mọi $x \neq 2$.

b. Tại x = 2 ta có: *f*(2) = 3; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ $\Rightarrow$ *f(x)* liên tục tại x = 2.

Vậy với m = 3 hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Bài tập mẫu 5: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2} & khi\; x\neq -2\\ 3 & khi\; x=-2\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- Tập xác định: D = R.
- Tại $x\neq -2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2}=x+1 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x \neq -2$.
- Tại x = –2 ta có $f(-2)=3,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x+1)=-1\neq f(-2)$

Từ đây suy ra: $f(x)$ không liên tục tại x = –2.

Bài tập mẫu 6: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\;\; x>2\\ 2x-20 & khi\;\; x\leq 2\end{cases}$$ tại điểm x = 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(2) = -16$

Mặt khác: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -16 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left[-(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\right] = -16 \end{cases}$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$

<u>Bài tập mẫu 7</u>: Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3x-2}{2x-4} & khi\ x \neq 2 \\ \dfrac{3}{2} & khi\ x = 2 \end{cases}$$

Tại điểm $x = 2$

Hướng dẫn giải

Ta có: Tập xác định D = R.

Tính được $f(2) = \dfrac{3}{2}$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x-2}{2x-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(2x+1)}{2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+1}{2} = \dfrac{5}{2}$

Kết luận hàm số không liên tục tại $x = 2$.

<u>Bài tập mẫu 8:</u> Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3x+1}{2x-2} & khi\ x \neq 1 \\ 2 & khi\ x = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = 2$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x-1)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Kết luận hàm số liên tục tại $x = 1$

Bài tập mẫu 9: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x8 - 2x - 1}{x-1} & khi\ x > 1 \\ 2x + 3 & khi\ x \le 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = 5$ (1)

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x8 - 2x - 1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1) = 4$ (2)

Hơn nữa: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+3) = 5$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra hàm số không liên tục tại $x = 1$

Bài tập mẫu 10: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-2)}{x8 - 3x + 2} & khi\ x \ne 2 \\ 2 & khi\ x = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x-1} = 2$ (1)

Mặt khác: $f(2) = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $f(x)$ liên tục tại $x = 2$

<u>Bài tập mẫu 11:</u> Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x9 - x8 + 2x - 2}{x - 1} & khi\ x \neq 1 \\ 4 & khi\ x = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+2) = 3$

Mặt khác: $f(1) = 4$

Từ đây suy ra: hàm số không liên tục tại $x = 1$

<u>Bài tập mẫu 12</u>: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & khi\ \ x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x8 - 3x} & khi\ \ x > 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^-}\left(x+1\right) = f\left(1\right) = 2$

Mặt khác: $\lim_{x\to 1+} f\left(x\right) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 3x} = -\dfrac{1}{2}$

$f(x)$ không liên tục tại $x = 1$

Bài tập mẫu 13: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & khi \ x \neq 2 \\ 1 & khi \ x = 2 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(2-x)}{(2-x)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1$

Mặt khác: f(2) =1

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$

Bài tập mẫu 14: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & khi \ x > 3 \\ 2x+1 & khi \ x \leq 3 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (2x+1) = f(3) = 7$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} (x-2) = 1$

Từ đây suy ra:

Hàm số không liên tục tại $x = 3$, hay nói cách khác hàm số bị gián đoạn tại $x = 3$

Bài tập mẫu 15: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x=5$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & khi\ x\neq 5\\ 3 & khi\ x=5\end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(\sqrt{2x-1}+3\right)}{2(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2}=3$$

Mặt khác: $f(5)=3\Rightarrow \lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$

Từ đây suy ra: hàm số liên tục tại x = 5

Bài tập mẫu 16: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm x = 3:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-3}{x^2-9} & khi\ \ x<3\\ \dfrac{1}{\sqrt{12x}} & khi\ \ x\geq 3\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

Mặt khác: $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\dfrac{1}{\sqrt{12x}}=\dfrac{1}{6}=f(3)$

Từ đây suy ra: $f(x)$ liên tục tại x = 3

Dạng 2: Xác định tham số để hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

Phương pháp :

Phương pháp 1:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_o} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$

Phương pháp 2:

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục tại $x=x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_o^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_o^-} f\left(x\right)$

Sử dụng thêm các phương pháp khử dạng vô định đã học ở phần trước.

<u>Bài tập mẫu 1</u>: Cho hàm số f(x) = $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 2m+1 & khi\ x=1\end{cases}$.

Xác định *m* để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Khi $x\neq 1$ ta có $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$

Từ đây suy ra: *f(x)* liên tục $\forall\, x\neq 1$.

Khi *x* = 1, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2m+1\\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1$$

$$\Leftrightarrow\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\Leftrightarrow 2m+1=3\Leftrightarrow m=1$$

Vậy: *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ khi *m* = 1.

Bài tập mẫu 2: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi\ x>2\\ ax+\dfrac{1}{4} & khi\ x\le 2\end{cases}$.

Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: • $f(2)=2a+\dfrac{1}{4}$

Mặt khác: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax+\dfrac{1}{4}\right)=2a+\dfrac{1}{4}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}+2\sqrt[3]{(3x-2)}+4\right)}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Từ đây suy ra: Hàm số liên tục tại $x = 2$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 2a+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a=0$$

Bài tập mẫu 3: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x>1\\ 3ax & khi\ x\le 1\end{cases}$.

Xác định giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: • $f(1)=3a$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3ax=3a$

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 3a = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{6}$

Bài tập mẫu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & khi\ x \neq -\dfrac{1}{2} \\ A & khi\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có biến đổi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & khi\ x \neq -\dfrac{1}{2} \\ A & khi\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & khi\ x \neq -\dfrac{1}{2} \\ A & khi\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tại $x = -\dfrac{1}{2}$ ta có: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = A$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x+1} = 2$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow A = 2$

Bài tập mẫu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & khi\ x < 1 \\ ax+1 & khi\ x \geq 1 \end{cases}$.

Hãy tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1)=a+1$

Mặt khác: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = a+1 = f(1) \end{cases}$

Hàm số: $f(x)$ liên tục tại x = 1 ⇔ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+1=2 \Leftrightarrow a=1$

Bài tập mẫu 6: Tìm a để hàm số liên tục tại x = 1.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & khi\ x \neq 1 \\ 3x+a & khi\ x = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a}$

Nếu a = –3 thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{3} = 1 > 0$ và $f(1)=0$

Nên hàm số không liên tục tại x = 1

Nếu $a \neq$ –3 thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a} = 0$, nhưng $f(1)=3+a\neq 0$

Nên hàm só không liên tục tại x = 1.

Vậy không có giá trị nào của a để hàm số liên tục tại x = 1.

Bài tập mẫu 7: Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x = -1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & khi\ \ x<-1\\ mx+2 & khi\ \ x\geq -1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(-1)=-m+2$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-1)=-2$

Lại có: $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(mx+2)=-m+2$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow -m+2=-2 \Leftrightarrow m=4$

Bài tập mẫu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+x & khi\ x<1\\ ax+1 & khi\ x\geq 1\end{cases}$.

Hãy tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1)=a+1$

Mặt khác: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+1=f(1)\end{cases}$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+1=2\Leftrightarrow a=1$

Vậy khi $a=1$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.

Bài tập mẫu 9: Tìm giá trị của tham số a để hàm số:

$f(x)=\begin{cases}5x^2-6x+7 & khi\ x\ge 2\\ ax^2+3a & khi\ x<2\end{cases}$ liên tục tại x = 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=15=f(2)$

Mặt khác: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+3a)=7a$

Hàm số: $f(x)$ liên tục tại x = 2 ⇔ $7a=15 \Leftrightarrow a=\dfrac{15}{7}$

Bài tập mẫu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & khi\ \ x\ne 5\\ A & khi\ \ x=5\end{cases}$.

Tìm A để hàm số đã cho liên tục tại x = 5.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(5)$ = A

Mặt khác: $\lim_{x\to 5} f(x)=\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)=10$

Hàm số liên tục tại x = 5 ⇔ $\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$

Vậy với A = 10 thì hàm số liên tục tại x = 5.

Bài tập mẫu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-18}{x-3} & khi\ x\neq 3\\ a+x & khi\ x=3\end{cases}$. Tìm giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=3$.

Hướng dẫn giải

. Ta có: $f(3) = a+3$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+6)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+6)=9$

Hàm số f(x) liên tục tại x = 3 ⇔ a + 3 = 9 ⇔ a = 6

Bài tập mẫu 12: Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm x = 1:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m & khi\ x=1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = m$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x=1$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại x = 1 ⇔ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=1$

Bài tập mẫu 13: Tìm a để hàm số sau liên tục tại điểm x = 0:

$$f(x)=\begin{cases}x+2a & khi\ x<0\\ x^2+x+1 & khi\ x\geq 0\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$

Mặt khác: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2a) = 2a$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Bài tập mẫu 14: Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} & khi\ x \neq -1 \\ a+1 & khi\ x = -1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(-1) = a + 1$

Mặt khác: $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-2) = -3$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a+1 = -3 \Leftrightarrow a = -4$

Bài tập mẫu 15: Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & khi\ x \neq 1 \\ m & khi\ x = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = m$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$

Theo định lý ta có: $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow m = 3$

<u>Bài tập mẫu 16:</u> Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2} & khi\ x \neq 2 \\ 4-a & khi\ x = 2 \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-5) = -3$$

Mặt khác: $f(2) = 4 - a$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4-a=-3 \Leftrightarrow a = 7$

Kết luận với $a = 7$ thì hàm số liên tục tại $x = 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

<u>Bài tập 1</u>: Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Hàm số có giới hạn tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

B. Hàm số có giới hạn trái tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

C. Hàm số có giới hạn phải tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

D. Hàm số có giới hạn trái và phải tại điểm $x = a$ thì liên tục tại $x = a$.

ĐÁP ÁN: A

Bài tập 2: Cho một hàm số $f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì hàm số liên tục trên $(a; b)$.

B. Nếu hàm số liên tục trên $(a; b)$ thì $f(a)f(b) < 0$.

C. Nếu hàm số liên tục trên $(a; b)$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

D. Cả ba khẳng định trên đều sai.

ĐÁP ÁN: C

Bài tập 3: Cho một hàm số $f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b], f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

B. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

C. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a; b)$

D. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có ngiệm trong khoảng $(a; b)$.

ĐÁP ÁN: D

Bài tập 4: Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Khẳng định nào đúng:

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

ĐÁP ÁN: D

Bài tập 5: Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

ĐÁP ÁN: A

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x} & x<1, x\neq 0\\ 0 & x=0\\ \sqrt{x} & x\geq 1\end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc đoạn $[0;1]$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.

ĐÁP ÁN: B

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+8}{4x+8} & x\neq -2\\ 3 & x=-2\end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -2$.

D. Hàm số chỉ liên tục tại điểm $x = -2$.

ĐÁP ÁN: B

<u>Bài tập 8</u>: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x+2}{x-2} & x \geq 2 \\ 3x-5 & x < 2 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số chỉ liên tục tại điểm $x = 2$.

B. Hàm số chỉ liên tục trái tại $x = 2$.

C. Hàm số chỉ liên tục phải tại $x = 2$.

D. Hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

ĐÁP ÁN: D

<u>Bài tập 9</u>: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sai:

A. Hàm số liên tục phải tại điểm $x = 1$.

B. Hàm số liên tục trái tại điểm $x = 1$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

ĐÁP ÁN: C

<u>Bài tập 10</u>: Trong các hàm sau, hàm nào không liên tục trên khoảng $(-1; 1)$:

A. $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $f(x) = \sqrt{8-2x^2}$ D. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

ĐÁP ÁN: D

Bài tập 11: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x = 0$:

A. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ B. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

C. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$ D. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$

ĐÁP ÁN: B

Bài tập 12: Hàm số nào sau đây liên tục tại $x = 1$:

A. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ B. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

C. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ D. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

ĐÁP ÁN: B

Bài tập 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sai:

A. Hàm số liên tục phải tại điểm $x = 0$.

B. Hàm số liên tục trái tại điểm $x = 0$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$.

ĐÁP ÁN: C

Bài tập 14: Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq -1 \\ x + a & x < -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu a bằng:

A. 1 B. -1 C. -2 D. 2

ĐÁP ÁN: B

Bài tập 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & x\neq\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & x=\sqrt{2}\end{cases}$. Khẳng định nào sai:

A. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=\sqrt{2}$.

B. Hàm số liên tục trên khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;\sqrt{2})$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

ĐÁP ÁN: A

Bài tập 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{(x-2)^2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$. Khẳng định nào sai:

A. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=2$.

B. Hàm số liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

ĐÁP ÁN: D

Bài tập 17: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & x\neq 1\\ m^2 & x=1\end{cases}$ liên tục trên $(0;+\infty)$ nếu m bằng:

A. $\frac{\pm 1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{-1}{2}$ D. Đáp án khác

ĐÁP ÁN: A

Bài tập 18: Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x-2}{x-2} & x\neq 2\\ m & x=2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu m bằng:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

ĐÁP ÁN: C

<u>Bài tập 19</u>: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x\cos x & x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & 0 \le x < 1 \\ x^3 & x \ge 1 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

C. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

ĐÁP ÁN: C

<u>Bài tập 20</u>: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4+x}{x^2+x} & x \ne 0, x \ne -1 \\ 3 & x = -1 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng:

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash[-1;0]$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

ĐÁP ÁN: B

<u>Bài tập 21</u>: Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + b & x \le -1 \\ x + a & x > -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu:

A. $a = b - 2$ B. $a = b + 2$

C. $a = 2 - b$ D. $a = -2 - b$

ĐÁP ÁN: A

Bài tập 22: Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & x < 2 \\ mx + m + 1 & x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu m bằng:

A. 6 B. -6 C. $\frac{-1}{6}$ D. $\frac{1}{6}$

ĐÁP ÁN: C

Bài tập 23: Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x \geq 2 \\ 3x - 1 & x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nếu a bằng:

A. 0 B. 3 C. -1 D. 7

ĐÁP ÁN: A