ĐẶNG VIỆT ĐÔNG - NGỌC HUYỀN LB – ĐỖ THỊ THUÝ NGỌC – PHẠM TUẤN NGHỊ
NGUYỄN TRƯỜNG SƠN – NGUYỄN TIÊN TIẾN – CHÂU VĂN ĐIỆP

CÔNG PHÁ TOÁN 2

CUỐN SÁCH GIÚP EM TỰ TIN HƠN TRONG KỲ THI THPT QUỐC GIA

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (043) 9728806; Tổng biên tập: (04) 397 15011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập xuất bản: ĐINH QUỐC THẮNG
Biên tập chuyên ngành: NGUYỄN THỊ HUỆ

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

Trình bày bìa: NGUYỄN SƠN TÙNG

Sửa bản in: LƯƠNG VĂN THÙY – NGUYỄN THỊ CHIÊN – TĂNG HẢI TUÂN

Đối tác liên kết:
CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP
Địa chỉ: 101 Nguyễn Ngọc Nại, phường Khương Mai, quận Thanh Xuân, Hà Nội

SÁCH LIÊN KẾT

CÔNG PHÁ TOÁN 2

Mã số: 1L – 510 PT2017
In 2000 cuốn, khổ 19 x 27cm tại Công ty TNHH Trần Công
Địa chỉ: Số 12, ngách 155/176 đường Trường Chinh, Phương Liệt, Thanh Xuân, Hà Nội
Số xác nhận ĐKXB: 2825 – 2017/CXB,IPH/9- 289/ĐHQGHN, ngày 25/08/2017
Quyết định xuất bản số: LK-TN/ QĐ – NXBĐHQGHN, ngày 25/08/2017
In xong và nộp lưu chiểu năm 2017.

LỜI MỞ ĐẦU

Quý thầy cô, quý phụ huynh và các em học sinh đang cầm trên tay cuốn CÔNG PHÁ TOÁN 2. Đây là cuốn thứ hai trong bộ sách gồm ba tập do Lovebook phát hành nhằm giúp các em học sinh chinh phục toàn bộ kiến thức Toán học từ lớp 10 đến lớp 12, từ đó "công phá" thành công kì thi THPT Quốc gia.

Kì thi THPT Quốc gia đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo đổi mới cách thức tổ chức từ năm 2017, và sẽ được duy trì ổn định trong nhiều năm tiếp theo. Với cách thức tổ chức mới này, học sinh sẽ làm bài thi môn Toán theo hình thức trắc nghiệm khách quan, đề thi gồm 50 câu hỏi với thời gian làm bài 90 phút. Năm 2017, nội dung thi nằm trong Chương trình lớp 12 THPT; năm 2018, nội dung thi nằm trong Chương trình lớp 11 và lớp 12 THPT; từ năm 2019 trở đi, nội dung thi nằm trong Chương trình cấp THPT.

Nhằm đáp ứng nhu cầu của đông đảo các em học sinh, các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh về một bộ sách hệ thống toàn bộ kiến thức và phương pháp giải toán THPT, đặc biệt theo hình thức trắc nghiệm khách quan, Lovebook đã cho ra đời bộ sách Công phá Toán gồm ba tập: Tập 1 viết cho chương trình lớp 10, tập 2 viết cho chương trình lớp 11 và tập 3 viết cho chương trình lớp 12 (tập 3 đã xuất bản).

Tiếp theo tập 3, ở tập 2 này, các chủ đề được chúng tôi viết theo một cách thức nhất quán, đó là: Từ hệ thống lí thuyết đến ví dụ minh họa, cuối cùng là hệ thống bài tập vận dụng. Hệ thống lí thuyết được trình bày đầy đủ nhưng cô đọng và đặc biệt là hệ thống ví dụ minh họa và bài tập vận dụng được thiết kế theo hình thức trắc nghiệm khách quan với lời giải chi tiết, dễ hiểu. Ở mỗi ví dụ, bài tập, chúng tôi đều cố gắng trình bày lời giải theo hai hướng: tự luận và trắc nghiệm. Lời giải theo hướng tự luận giúp các em hiểu sâu sắc bản chất vấn đề, lời giải theo hướng trắc nghiệm đưa ra các làm nhanh nhất, giúp các em có thể tiết kiệm được thời gian làm bài, đặc biệt với sự trợ giúp của máy tính cầm tay. Những sai lầm thường gặp, những cách làm hay, những mở rộng, bổ sung, nhận xét, lưu ý ... đều được chúng tôi trình bày trong từng nội dung lí thuyết cũng như bài tập.

Công phá toán giúp học sinh được những gì?

Cũng giống như Công Phá Toán 3 (lớp 12), cuốn sách Công Phá Toán 2 này cũng sẽ giúp các em học sinh giải quyết được những vấn đề sau:

Thứ nhất, cuốn sách giúp các em học sinh hệ thống lại toàn bộ phương pháp, tư duy giải toán cần thiết trong chương trình lớp 11. Đặc biệt, chúng tôi rất chú trọng tới những vấn đề mà học sinh thường hay nhầm lẫn.

Thứ hai, cuốn sách giúp các em học sinh nắm được toàn bộ những vấn đề hay nhất, cần thiết nhất trong chương trình Toán lớp 11, hướng tới kì thi THPT quốc gia. Chúng tôi chủ động đề xuất rất nhiều dạng toán Trắc Nghiệm lớp 11 mới.

Thứ ba, cuốn sách giúp các em học sinh nắm được những kĩ năng xử lý casio cần thiết trong việc học toán lớp 11. Tuy nhiên ở cuốn Công phá toán này, tất cả kĩ năng MTCT đều gắn chặt với tư duy giải Toán, không chỉ đơn thuần là các thao tác bấm máy thông thường.

Thứ tư, cuốn sách tích hợp hệ thống gửi tài liệu qua Mail, để học sinh có thể khai thác triệt để cuốn sách. Ngoài gửi qua Mail đáp án chi tiết 10 đề tự luyện theo trình tự thời gian, chúng tôi còn gửi thêm 1 số tài liệu hay, liên quan tới nội dung cuốn sách khi sưu tầm được để các em học sinh thêm một lần nữa khai thác triệt để giá trị của sách. Đây cũng là một cách để đảm bảo quyền lợi cho các em, quý độc giả sử dụng sách chính hãng.

Chính vì những đặc điểm trên, chúng tôi rất mong các em học sinh, quý độc giả hãy thường xuyên trao đổi, liên hệ với chúng tôi để chúng tôi có cơ hội được phục vụ quý vị tốt nhất.

Mặc dù đã có nhiều nỗ lực, cùng với một mong muốn thiết tha mang đến cho quý độc giả một tài liệu tham khảo bổ ích, song đây là lần đầu tiên nhóm chúng tôi cùng nhau làm dự án sách nên không thể tránh khỏi những sự thiếu sót, những sự thiếu đồng nhất trong văn phong viết của sách cũng như hình thức của sách. Vì vậy, chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý từ các em học sinh và quý độc giả trên toàn quốc thông qua các kênh liên lạc sau:

- Email: lovebook.vn@gmail.com
- Facebook: facebook.com/lovebookcaretoan
- Group: facebook.com/groups/nhasachlovebook (hoặc facebook.com/groups/ngochuyenfamily/)

Chúng tôi vô cùng cảm tạ! Chúc quý độc giả sẽ có những giây phút thật sự thú vị, bổ ích khi đọc cuốn sách này! Chúc các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh lớp 12 năm học 2017-2018, đạt được kết quả thi THPT Quốc gia cao nhất, đỗ vào ngôi trường Đại học, Cao đẳng mà mình hằng mơ ước!

Trân trọng

Nhóm Toán Lovebook 2018

LỜI TRI ÂN

Để có thể hoàn thiện cuốn sách, chúng tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ của thầy cô, người thân và các em học sinh yêu quý. Lời cảm ơn đầu tiên chúng tôi muốn gửi tới những người thân yêu trong gia đình chúng tôi. Họ luôn là những hậu phương vững chắc trong mọi khó khăn, thử thách mà chúng tôi phải đối mặt trong cuộc đời. Tiếp đến, chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn đặc biệt tới các quý thầy cô giáo tổ Toán – Tin, trường THPT Nho Quan A: Thầy Quách Đức Hiển – chuyên môn Toán, Hiệu trưởng nhà trường, thầy Đinh Văn Diện, thầy Nguyễn Văn Luân, thầy Nguyễn Trần Thắng, cô Nguyễn Thị Bích Thuỷ, cô Tô Thị Uyên, cô Trần Thị Hưng, cô Mai Thị Doan. Sau khi chúng tôi hoàn thiện bản thảo và kiểm soát nội bộ xong, chúng tôi đã gặp rất nhiều khó khăn trong việc tìm một đội ngũ tin tưởng và sẵn lòng đọc lại toàn bộ bản thảo. Thật may mắn thay, thầy Hiển cùng các thầy cô trong tổ Toán – Tin THPT Nho Quan A đã đồng ý giúp đỡ. Không chỉ dừng lại ở mức rà soát lỗi của bản thảo, thầy cô cũng đã giúp chúng tôi rất nhiều ý tưởng mới để hoàn thiện cuốn sách hơn. Chúng tôi tin tưởng chắc chắn rằng với sự lãnh đạo tài tình của thầy Hiển, cùng với sự tâm huyết, hết lòng vì trường, quê hương của các thầy cô tổ Toán – Tin, trường THPT Nho Quan A sẽ còn phát triển nhiều hơn nữa.

Lời cảm ơn tiếp theo, chúng tôi muốn được gửi tới thầy Hà Ngọc Dương – Giáo viên Toán, phó Hiệu trưởng THPT Yên Mô A, Ninh Bình, cô Nguyễn Thị Nhung – Giáo viên Toán, trường THPT Tạ Uyên, Ninh Bình. Mặc dù vào đầu năm học bận trăm công nghìn việc nhưng hai thầy cô cũng đã rất nhiệt tình đọc soát giúp chúng tôi trong giai đoạn cuối trước khi bàn giao bản thảo cho NXB. Chúng tôi mong thầy cô luôn khoẻ mạnh và có những sự thăng tiến cao hơn trong công việc.

Tiếp theo, chúng tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn tới em Bùi Thị Hạnh, Phạm Thị Hương Thảo, Nguyễn Trung Hiếu cùng tập thể lớp 12A, khoá 2015 – 2018 đã giúp chúng tôi có cái nhìn thực tế hơn về mức độ khó dễ của các bài toán và sự tối ưu ở mỗi lời giải đưa ra. Những thắc mắc của các em luôn là những gợi ý rất đáng giá giúp chúng tôi hoàn thiện cách diễn đạt lời giải, phương pháp hơn. Hãy luôn nỗ lực, luôn tìm tòi học hỏi như vậy các em nhé.

Cuối cùng, chúng tôi xin được gửi lời cảm ơn tới toàn thể các thành viên thường trực trong nhà sách Lovebook. Họ đã rất nhiệt tình biên tập lại toàn bộ nội dung bản thảo một cách cẩn thận và đẹp nhất. Đặc biệt chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới bạn Lương Văn Thùy (Giám đốc) và bạn Nguyễn Thị Thu Hương (phòng biên tập). Hai bạn là những thành viên mà chúng tôi làm việc cùng thường xuyên nhất trong nhà sách. Hai bạn đã hướng dẫn chúng tôi từng chi tiết nhỏ nhất trong việc soạn thảo và trình bày. Tận đáy lòng, chúng tôi rất

mong Lovebook có thể triển khai chương trình hỗ trợ thêm nhiều giáo viên, sinh viên sư phạm trong việc biên soạn tài liệu và các kĩ năng trình bày hơn nữa, qua đó có thêm nhiều những cuốn sách hay cho học sinh tham khảo. Và chúng tôi cũng luôn tin tưởng chắc chắn rằng nếu duy trì được sự nhiệt huyết, tận tâm như bây giờ, nhà sách Lovebook sẽ còn phát triển mạnh mẽ hơn rất nhiều.

LỜI TRI ÂN ĐẶC BIỆT

Chúng tôi muốn dành riêng mục này để gửi lời cảm ơn chân thành và yêu thương nhất tới toàn thể các em học sinh đã và đang đành tình cảm cho bộ sách Công Phá Toán THPT, khởi điểm là cuốn Công Phá Toán 3. Sự tin tưởng và quan tâm của các em dành cho cuốn Công Phá Toán đầu tiên phát hành năm vừa rồi chính là một liều thuốc bổ, một động lực to lớn cho chúng tôi hoàn thiện được cuốn Công Phá Toán 2 này. Và xa hơn, sự quan tâm, tình cảm của các em dành cho Công Phá Toán 3 vừa rồi còn giúp chúng tôi tự tin hơn rất nhiều khi bắt tay triển khai cuốn Công Phá Toán 1 (lớp 1) (ra mắt tháng 12 tới).

Tận đáy lòng, chúng tôi mong các em học sinh - độc giả Công Phá Toán luôn tràn đầy năng lượng để vượt qua mọi gian nan, thử thách của cuộc sống. Đối với các em 99ers, chúng tôi mong các em hãy tiếp tục phát huy tinh thần **BON** (The Best or Nothing) trên quãng đường ở giảng đường đại học sắp tới. Không quan trọng các em học trường gì, ngành gì, chỉ cần luôn nỗ lực, cố gắng mỗi ngày trôi qua, chúng tôi tin một ngày không xa, các em sẽ trở thành những người thành công và cống hiến nhiều cho xã hội. Còn đối với các em học sinh ít tuổi hơn, chúng tôi hy vọng các em sẽ luôn ghì chặt mục tiêu, ước mơ chinh phục ngôi trường Đại học của mình. Bất luận, đang học lớp 10 hay 11 hay 12 thì chúng tôi luôn mong các em hãy tập trung học tập một cách nghiêm túc nhất, kỉ luật nhất. Sắp tới, hãy bước chân vào giảng đường Đại học một cách tự hào nhất và hãnh diện nhất các em nhé!

Một lần nữa, nhóm Toán Lovebook xin cảm ơn tất cả!

HƯỚNG DẪN CÁCH SỬ DỤNG SÁCH

Trước khi đưa ra các hướng sử dụng sách Công Phá Toán 2 hiệu quả, chúng tôi xin được nhắc lại tổng thể nội dung cuốn sách. Cuốn sách chúng tôi viết được chia thành 3 phần chính như sau:

- Hệ thống lý thuyết, kiến thức cần thiết ở mỗi chủ đề.
- Hệ thống tư duy, phương pháp giải các dạng toán thông qua các ví dụ cụ thể.
- Hệ thống các bài tập rèn luyện theo từng dạng bài, từng chuyên đề.

Cách học như thế nào cho hiệu quả?

Để sử dụng cuốn sách hiệu quả, các em nên có một kế hoạch cụ thể. Khi có kế hoạch cụ thể thì chúng ta mới đo lường được hiệu quả sử dụng sách. Ngoài ra, các em cũng nên chuẩn bị một bộ sách giáo khoa Toán bên cạnh để tra cứu khi cần thiết. Ở đây, chúng tôi xin phép được chia học sinh thành 3 đối tượng sử dụng sách:

Đối tượng 1: Mới bắt đầu học chương trình lớp 11 (các em chuẩn bị lên lớp 11)

Trong trường hợp này, cách duy nhất chúng tôi khuyên là các em nên học theo trình tự đã được sắp xếp ở trong sách, cứ lần lượt học: Đầu tiên đọc kĩ lý thuyết, phương pháp, tiếp theo đọc vào ví dụ minh họa và cuối cùng là luyện tập các bài tập rèn luyện. Tuy nhiên khi đọc lý thuyết hay phương pháp mà vẫn mơ màng, các em có thể bỏ qua, đọc tiếp vào phần Ví dụ minh họa. Trong một số trường hợp, thông qua lời giải và phân tích ở phần Ví dụ minh họa sẽ giúp các em hiểu ra và nắm vững phần lý thuyết, phương pháp hơn. Sau khi kết thúc mỗi chủ đề, các em bấm thời gian 90 phút để hoàn thiện các bài kiểm tra.

Đối tượng 2: Học xong chương trình lớp 11 (hoặc chuẩn bị thi THPT quốc gia)

Các em xem phần nào còn yếu, chưa chắc chắn thì đánh dấu lại, xem kĩ phần ví dụ minh họa. Sau khi xem xong các em luyện hết mọi bài trong phần Bài tập rèn luyện. Trong quá trình làm bài tập rèn luyện, nhớ đối chiếu ngược trở lại phần lý thuyết và ví dụ minh họa để khắc sâu kiến thức. Ngoài ra, các em cũng có thể làm ngay phần bài tập rèn luyện ở cuối mỗi chủ đề trước khi đọc kĩ nội dung. Việc nắm bắt xem mình đang ở mức độ nào trong các chủ đề trước khi đọc sẽ giúp các em có những định hướng, điều chỉnh tốc độc đọc sách hợp lí hơn. Sau khi nghiền ngẫm thật kĩ các chủ đề và làm nhuần nhuyễn 11 bài kiểm tra chủ đề, nhớ luyện kĩ thêm 25 đề trong "Bộ đề tinh tuý 2018" để vận dụng kiến thức trong đề thi thực tế hiệu quả hơn, tối ưu hơn.

Đối tượng 3: Các em xuất sắc hẳn

Đối với các em có mức học giỏi trở lên thì chỉ cần tập trung 2 việc chính. Thứ nhất, các em chỉ cần lưu ý đặc biệt tới các phần STUDY TIP và hệ thống bài tập rèn luyện. Những bài đã quá quen thuộc rồi thì có thể bỏ qua. Ngoài ra, riêng đối với các em học sinh thuộc đối tượng 2 và đối tượng 3, các em nên tham khảo thêm các bài toán lớp 11 trong 25 đề trong "Bộ đề tinh tuý 2018" để củng cố thật chắc kiến thức lớp 11. Các bài tập lớp 11 trong "Bộ đề tinh tuý 2018" được chọn lọc rất kĩ nên việc luyện tập trong cuốn sách này sẽ giúp các em củng cố chắc chắn hơn những gì đã học ở Công Phá Toán 2.

Không quan trọng điểm xuất phát của các em như thế nào, chỉ cần các em thực sự tập trung đọc một cách nghiêm túc cuốn sách này và các cuốn sách Giáo Khoa bổ trợ cùng nữa, chúng tôi tin tưởng chắc chắn rằng, các em sẽ phá vỡ giới hạn của bản thân và dành kết quả cao trong kì thi THPT Quốc gia.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo (Tổng Chủ biên), Vũ Tuấn (Chủ biên), Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên, *Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

2. Vũ Tuấn (Chủ biên), Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên, *Bài tập Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

3. Đoàn Quỳnh (Tổng Chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng, *Đại số và Giải tích nâng cao 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

4. Đoàn Quỳnh, Phạm Khắc Ban, Văn Như Cương, Nguyễn Đăng Phất, Lê Bá Khánh Trình, *Tài liệu chuyên toán hình học 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam 2011.

5. Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đoàn Quỳnh, Ngô Xuân Sơn, Đặng Hùng Thắng, Lưu Xuân Tình, *Bài tập Đại số và Giải tích nâng cao 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

6. Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu chuyên Toán Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011.

7. Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu chuyên Toán Bài tập Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010.

8. Trần Phương, *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn Toán* (*Hàm số*), Nhà xuất bản Hà Nội, 2007.

9. V.A.KRETSMAR, *Bài tập Đại số sơ cấp tập II* (Người dịch: Vũ Dương Thụy, Nguyễn Duy Thuận), Nhà xuất bản Giáo dục, 1976.

10. Trần Đức Huyên, Trần Lưu Thịnh, Đặng Phương Thảo, *Giải bài tập và câu hỏi trắc nghiệm Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

11. Nguyễn Hải Châu (Chủ biên), Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang, *Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 11*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2007.

12. Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Những vấn đề chung về đổi mới giáo dục Trung học phổ thông môn Toán*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

13. Trần Phương, Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán (*Phương trình lượng giác*), Nhà xuất bản ĐHQGHN.

14. Phan Huy Khải, Trần Hữu Nam, Phan Doãn Thoại, *Bài tập chọn lọc hình học 11*

15. Nguyễn Anh Trường, Nguyễn Tấn Siêng, *Chuyên đề giải toán hình học không gian,* Nhà xuất bản Tổng hợp TP Hồ Chí Minh

16. Nhóm Cự Môn, *Bài giảng chuyên sâu toán THPT Đại số và Giải tích 11*, Nhà xuất bản Hà Nội 2011.

17. Nhóm Cự Môn, *Bài giảng chuyên sâu toán THPT Hình học 11*, Nhà xuất bản Hà Nội 2011.

18. Trần Anh Dũng, Nguyễn Thành Dũng, *Bài tập trắc nghiệm Hình học 11,* Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

19. Nguyễn Tất Thu, *Giải toán theo chuyên đề trọng điểm Hình Học 11,* Nhà xuất bản ĐHQGHN.

20. Nguyễn Hải Châu (Chủ biên), Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang, *Câu hỏi và bài tập trắc nghiệm Toán 11,* Nhà xuất bản Hà Nội 2007.

21. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Nhà xuất bản Giáo dục.

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 15

Góc lượng giác và công thức lượng giác 15

Hàm số lượng giác 17

A. Lý thuyết 17

B. Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác 22

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 49

Phương trình lượng giác 63

Bài tập rèn luyện kỹ năng 94

CHỦ ĐỀ 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT 107

Quy tắc đếm 107

Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp 107

A. Lý thuyết 107

B. Các dạng toán về phép đếm 110

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 116

Nhị thức Newton 124

A. Lý thuyết 124

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton 125

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 135

Xác suất 142

A. Lý thuyết 142

B. Các dạng toán về xác suất 144

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 152

CHỦ ĐỀ 3: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN 159

Phương pháp quy nạp toán học 159

A. Lý thuyết 159

B. Các bài toán điển hình 159

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 163

Dãy số 166

A. Lý thuyết 166

B. Các bài toán điển hình 168

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 173

Cấp số cộng 179

A. Lý thuyết 179

B. Các dạng toán về cấp số cộng 181

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 186

Cấp số nhân 191

A. Lý thuyết 191

B. Các dạng toán về cấp số nhân 194

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 199

CHỦ ĐỀ 4: GIỚI HẠN 204

Giới hạn dãy số 204

A. Lý thuyết 204

B. Các dạng toán về giới hạn dãy số 206

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 222

Giới hạn của hàm số 231

A. Lý thuyết 231

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số 234

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 258

Hàm số liên tục 269

A. Lý thuyết 269

B. Các dạng toán về hàm số liên tục 270

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 277

CHỦ ĐỀ 5: ĐẠO HÀM 280

Khái niệm đạo hàm 280

A. Lý thuyết 280

B. Các dạng toán tính đạo hàm bằng định nghĩa 280

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 286

Các quy tắc tính đạo hàm 289

A. Lý thuyết 289

B. Các dạng toán về quy tắc tính đạo hàm 289

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 299

Vi phân. Đạo hàm cấp cao 306

A. Lý thuyết 306
B. Các dạng toán về vi phân và đạo hàm cấp cao 307
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 316
Tiếp tuyến với đồ thị hàm số 321
A. Lý thuyết 321
B. Các dạng toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm số 321
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 325
CHỦ ĐỀ 6: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG 329
Phép biến hình 329
Phép tịnh tiến 329
A. Lý thuyết 329
B. Các dạng toán về phép tịnh tiến 330
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 337
Đọc thêm: Phép đối xứng trục – Phép đối xứng tâm 343
A. Lý thuyết 343
B. Các dạng toán về đối xứng trục, đối xứng tâm 344
Phép quay 351
A. Lý thuyết 351
B. Các dạng toán về phép quay 352
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 358
Phép dời hình và hai hình bằng nhau 363
A. Lý thuyết 363
B. Các dạng toán về phép dời hình 363
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 366
Phép vị tự 369
A. Lý thuyết 369
B. Các dạng toán về phép vị tự 370
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 374
hép đồng dạng 378
A. Lý thuyết 378
B. Các dạng toán về phép đồng dạng 378
C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 381

CHỦ ĐỀ 7: ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG 384

Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 384

A. Lý thuyết 384

B. Các dạng toán về đường thẳng và mặt phẳng 387

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 391

Đường thẳng song song với đường thẳng 403

A. Lý thuyết 403

B. Các dạng toán về đường thẳng song song với đường thẳng 404

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 409

Đường thẳng song song với mặt phẳng 417

A. Lý thuyết 417

B. Các dạng toán về đường thẳng song song với mặt phẳng 418

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 422

Mặt phẳng song song với mặt phẳng 431

A. Lý thuyết 431

B. Các dạng toán về mặt phẳng song song với mặt phẳng 433

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 438

CHỦ ĐỀ 8: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC 446

Vectơ trong không gian 446

A. Lý thuyết 446

B. Các bài toán về vectơ trong không gian 447

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 451

Góc giữa hai đường thẳng. Hai đường thẳng vuông góc 455

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 458

Hai mặt phẳng vuông góc. Góc giữa hai mặt phẳng 462

Bài tập rèn luyện kỹ năng tính góc trong không gian 467

Khoảng cách 474

A. Lý thuyết 474

B. Các bài toán về khoảng cách 476

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng 487

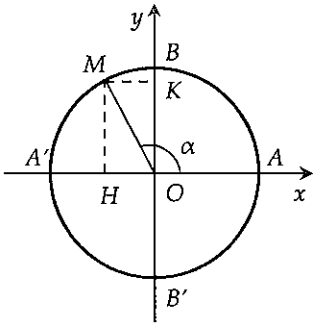
Bài tập ôn tập chủ đề 8 493

TRA CỨU THUẬT NGỮ 508

CHỦ ĐỀ 1:
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Góc lượng giác và công thức lượng giác

1. Giá trị lượng giác của cung α



Hình 1.1

Trên đường tròn lượng giác (hình 1.1) cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM}=\alpha$:

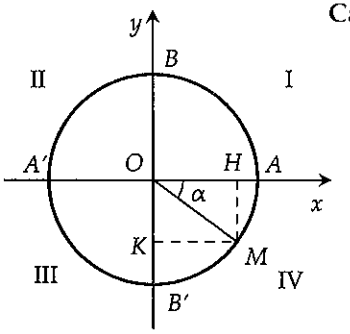
Gọi $M(x;y)$ với tung độ của M là $y=\overline{OK}$, hoành độ của M là $x=\overline{OH}$ thì ta có:

$\sin\alpha=\overline{OK}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\overline{OH}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};(\cos\alpha\neq 0)$ $\qquad$ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},(\sin\alpha\neq 0)$

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α.

Các hệ quả cần nắm vững



Hình 1.2

1. Các giá trị $\sin\alpha$; $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$. Và ta có:

$\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha,\forall k\in\mathbb{Z}$;

$\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha,\forall k\in\mathbb{Z}$.

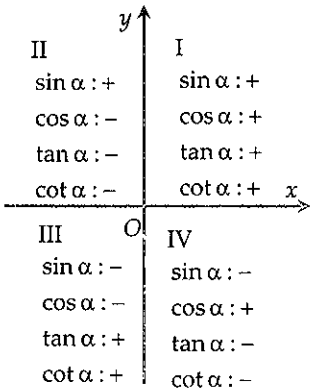
2. $-1\le\sin\alpha\le 1$; $-1\le\cos\alpha\le 1$.

3. $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

4. $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha\neq k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Dấu của các giá trị lượng giác của cung α phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM}=\alpha$ trên đường tròn lượng giác (hình 1.2).

Ta có bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:



Hình 1.3

Góc phần tư / Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–
$\tan\alpha$	+	–	+	–

Ở hình 1.3 là một cách nhớ khác để xác định dấu của các giá trị lượng giác.

2. Công thức lượng giác

Công thức cơ bản

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cot^2 x+1=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Cung đối nhau

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

$\tan(-x)=-\tan x$

Công thức cộng

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

Cung bù nhau

$\sin x=\sin(\pi-x)$

$\cos x=-\cos(x-\pi)$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\tan x = \tan(x - \pi)$$

Công thức đặc biệt

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

STUDY TIP

Ở đây từ các công thức góc nhân đôi, góc nhân ba ta có thể suy ra công thức góc chia đôi, chia ba mà không cần nhớ nhiều công thức.

Góc nhân đôi

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Góc chia đôi

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Góc nhân ba

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

Góc chia ba

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

Biến đổi tích thành tổng

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$$

Biến đổi tổng thành tích

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

STUDY TIP

Từ bảng giá trị lượng giác các cung đặc biệt ở bên ta thấy một quy luật như sau để độc giả có thể nhớ các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Các giá trị ở tử số tăng dần từ $\sqrt{0}$ đến $\sqrt{4}$. Ngược lại đối với giá trị cos, tử số giảm dần từ $\sqrt{4}$ về $\sqrt{0}$.

3. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

α (độ)	0	30°	45°	60°	90°	180°
α (radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định	0

Hàm số lượng giác

A. Lý thuyết

Khái niệm:
Hàm số $f(x)$ xác định trên D gọi là hàm tuần hoàn nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi x thuộc D ta có $\begin{cases} x-T \in D; x+T \in D \\ f(x+T)=f(x) \end{cases}$
Số dương T nhỏ nhất (nếu có) thỏa mãn tính chất trên gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn.

1. Hàm số $y=\sin x$ và hàm số $y=\cos x$

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y=\sin x$.
> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với côsin (cos) của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số côsin**, kí hiệu là $y=\cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y=\sin x$; $y=\cos x$ là $\mathbb{R}$.

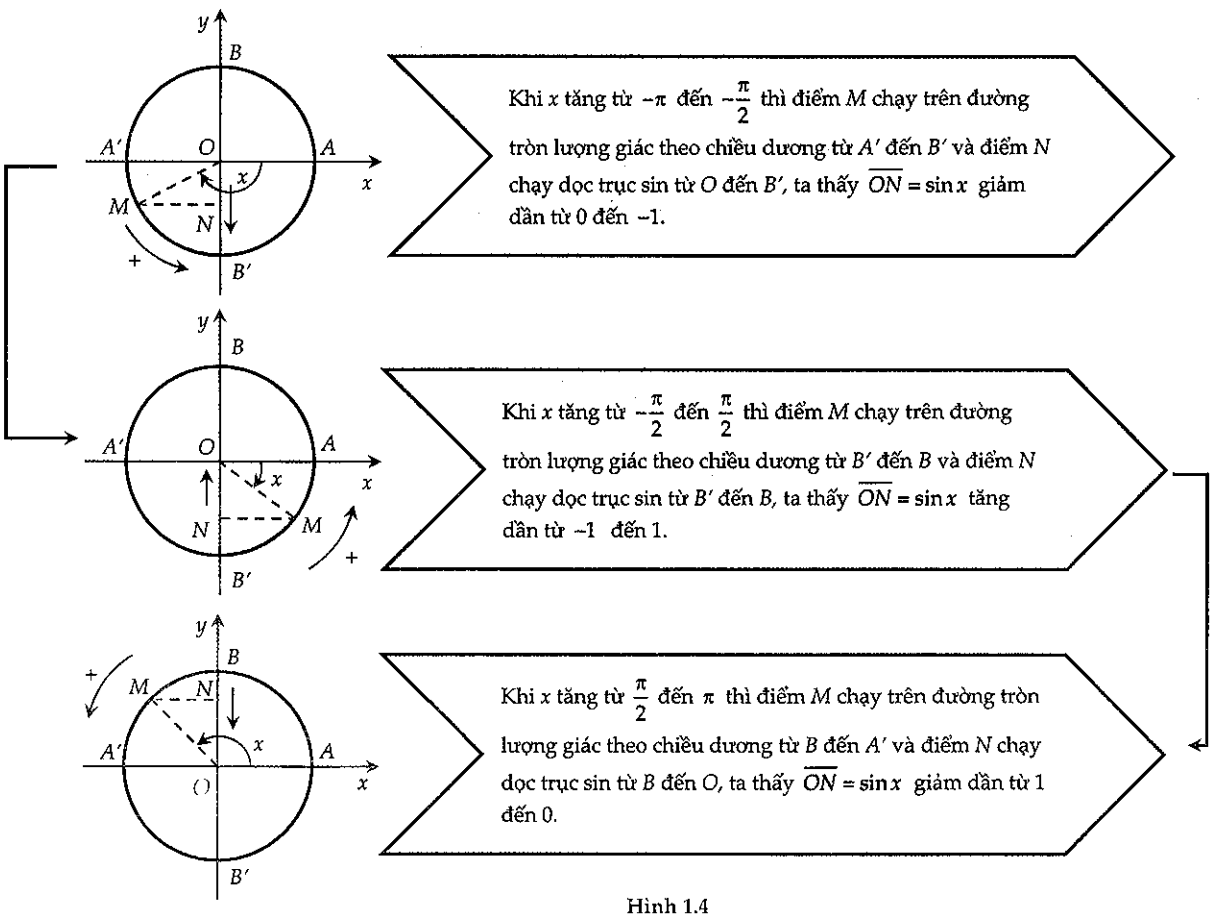
a) Hàm số $y=\sin x$

Nhận xét: Hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ do hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng và $-\sin x=\sin(-x)$.

Hàm số $y=\sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

Sự biến thiên:

Sự biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ được biểu thị trong sơ đồ (hình 1.4) phía dưới:



Hình 1.4

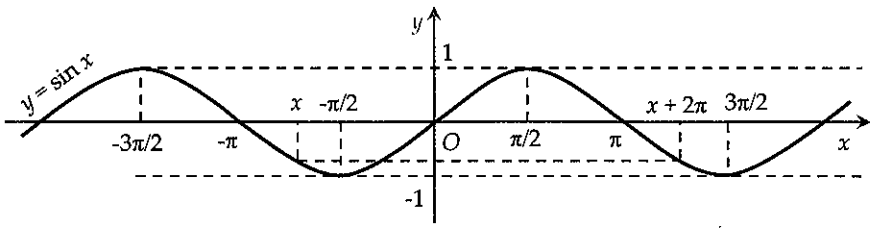
Bảng biến thiên:

Từ đây ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y=\sin x$	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

Đồ thị hàm số:

Nhận xét: Do hàm số $y=\sin x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0;\pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$, cuối cùng, tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành ta được các đoạn có độ dài 2π; 4π,...



Hình 1.5

STUDY TIP

Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$

Tương tự ta suy ra được hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y=\sin x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số lẻ.
- Đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- Có đồ thị là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y=\cos x$

Ta thấy $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=\sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y=\cos x$.

STUDY TIP

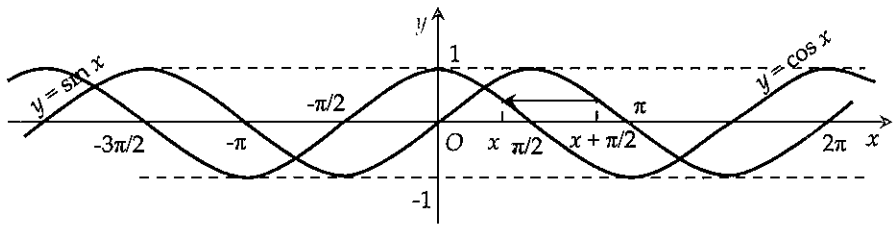
Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$. Do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi), k\in\mathbb{Z}$

Tương tự ta suy ra được hàm số $y=\cos x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi), k\in\mathbb{Z}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\cos x$ trên $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$y=\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

Đồ thị hàm số $y=\cos x$:



Hình 1.6

GHI NHỚ

Hàm số $y=\cos x$:

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Có tập giá trị là $[-1;1]$.
- Là hàm số chẵn.
- Đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Là một đường hình sin.
- Tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi), k\in\mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi), k\in\mathbb{Z}$.

Đọc thêm

Hàm số $y=a\sin(\omega x+b)+c, (a, b, c, \omega\in\mathbb{R}, a\omega\neq 0)$ là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ vì:

$$a\sin(\omega(x+T)+b)+c=a\sin(\omega x+b)+c,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\omega x+b+\omega T)=\sin(\omega x+b),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

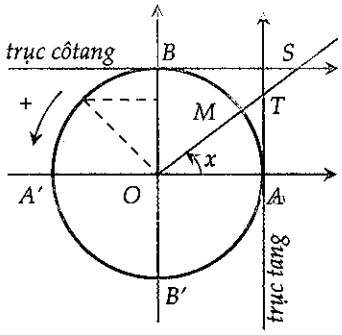
$$\Leftrightarrow \omega T=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow T=k\frac{2\pi}{\omega},\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Tương tự hàm số $y=a\cos(\omega x+b)+c, (a, b, c, \omega\in\mathbb{R}, a\omega\neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

Ứng dụng thực tiễn: Dao động điều hòa trong môn Vật lý chương trình 12.

2. Hàm số $y = \tan x$ và hàm số $y = \cot x$



Hình 1.7

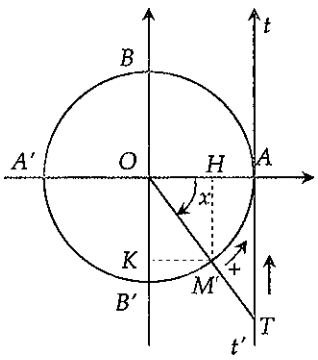
Với $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang kí hiệu là $y = \tan x$. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là D_1.

Với $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$, quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D_2$ với số thực $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang kí hiệu là $y = \cot x$. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là D_2.

Nhận xét: - Hai hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là hai hàm số lẻ.

- Hai hàm số này là hai hàm số tuần hoàn với chu kì π.

a) Hàm số $y = \tan x$



Hình 1.8

Giải thích $\tan x = \overline{AT}$ vì

$$\tan x = \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$$

Sự biến thiên: Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang At sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At, nên $\tan x$ tăng từ $-\infty$ đến $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x = 0$).

Nhận xét:

Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

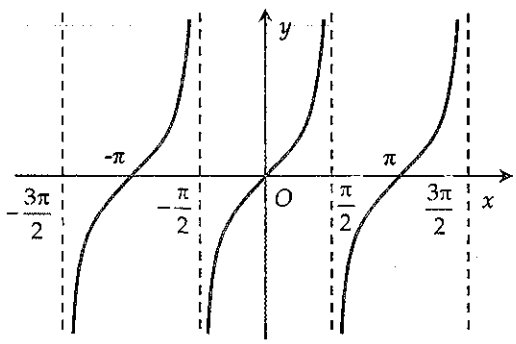
Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số

Nhận xét: Do hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì π nên khi vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R}$ ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc tọa độ O, ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, cuối cùng, tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành.

STUDY TIP

Hàm số $y = \tan x$ nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận (xem đồ thị hình bên).



Hình 1.9

GHI NHỚ

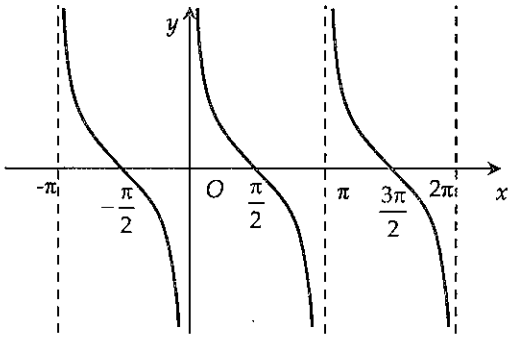
Hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định: $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π. - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.
- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

b) Hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π.

Tương tự khảo sát như đối với hàm số $y = \tan x$ ở trên thì ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = \cot x$ như sau:



Hình 1.10

GHI NHỚ

Hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định: $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$ - Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π. - Có tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

B. Các dạng toán liên quan đến hàm số lượng giác

Dạng 1 Bài toán tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Cách 1	*Cách 2*
Tìm tập D của x để $f(x)$ có nghĩa, tức là tìm $D=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in\mathbb{R}\}$.	Tìm tập E của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus E$.

STUDY TIP

Ở phần này chúng ta cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$.
2. Hàm số $y=\tan x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
3. Hàm số $y=\cot x$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

CHÚ Ý

A. Với hàm số $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì ta có:

1. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, điều kiện: * $f_1(x)$ có nghĩa

   * $f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x)\neq 0$.
2. $f(x)=\sqrt[2m]{f_1(x)},(m\in\mathbb{Z})$, điều kiện: * $f_1(x)$ có nghĩa và $f_1(x)\geq 0$.
3. $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt[2m]{f_2(x)}};(m\in\mathbb{Z})$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa và $f_2(x)>0$.

B. Hàm số $y=\sin x; y=\cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, như vậy

$y=\sin[u(x)]; y=\cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

* $y=\tan[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

* $y=\cot[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x)\neq k\pi; k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{2\cos x-1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi,\frac{5\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Hàm số đã cho xác định khi

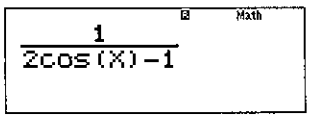
$$2\cos x-1\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq\cos\frac{\pi}{3}\\ \cos x\neq\cos\frac{5\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{3}+k2\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}.$$

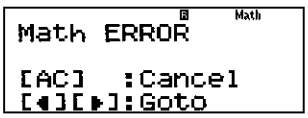
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị của hàm số $y=\dfrac{1}{2\cos x-1}$ tại $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{5\pi}{3}$ ta thấy hàm số đều không xác định, từ đây ta chọn A.

STUDY TIP

Đối với hàm côsin, trong một chu kỳ tuần hoàn của hàm số $[0,2\pi]$ tồn tại hai góc có số đo là $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$ cùng thoả mãn $\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$ chính vì thế ta kết luận được điều kiện như vậy. Từ đây bạn đọc có thể đưa ra lập luận cho sin, tan, cot, từ đó đưa ra tổng kết ban đầu cho giải phương trình lượng giác cơ bản chúng ta sẽ được học trong các bài tiếp theo.

Cách bấm như sau:





Nhập vào màn hình $\frac{1}{2\cos(X)-1}$:

Ấn CALC gán $X=\frac{\pi}{3}$ thì máy báo lỗi, tương tự với trường hợp $X=\frac{5\pi}{3}$. Từ đây suy ra hàm số không xác định tại $x=\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 2: Tập xác định của hàm số $y=\frac{\cot x}{\sin x-1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi; k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi

+ $\cot x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x\neq 0$

+ $\sin x-1\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z}.$$

STUDY TIP

Trong bài toán này, nhiều độc giả có thể chỉ sử dụng điều kiện để hàm phân thức xác định ($\sin x-1\neq 0$) chứ không chú ý điều kiện để hàm $\cot x$ xác định, sẽ bị thiếu điều kiện và chọn D là sai.

Ví dụ 3: Tập hợp $\mathbb{R}\setminus\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ không phải là tập xác định của hàm số nào?

A. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$. **B.** $y=\frac{1-\cos x}{2\sin x}$. **C.** $y=\frac{1+\cos x}{\sin 2x}$. **D.** $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$.

Đáp án C

Lời giải

Phân tích: Với các bài toán dạng này nếu ta để ý một chút thì sẽ thấy hàm $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nên ta chỉ xét mẫu số, ở đây có đến ba phương án có mẫu số có chứa $\sin x$ như nhau đó là A; D và B. Do đó ta chọn luôn được đáp án C.

$$\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x\neq\sin 0\\ \sin 2x\neq\sin\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x\neq k2\pi\\ 2x\neq\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

$$\sin x\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x\neq\sin 0\\ \sin x\neq\sin\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\neq k2\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Trong ví dụ trên ta có thể gộp hai họ nghiệm $k2\pi$ và $\pi+k2\pi$ thành $k\pi$ dựa theo lý thuyết sau:

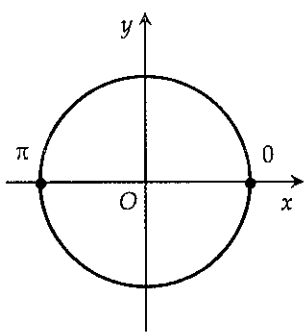
Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác.

* $x=\alpha+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi một điểm trên đường tròn lượng giác.

* $x=\alpha+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua O trên đường tròn lượng giác.

* $x=\alpha+\frac{k2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ được biểu diễn bởi ba điểm cách đều nhau, tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.

* $x=\alpha+\frac{k2\pi}{n}, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$ được biểu diễn bởi n điểm cách đều nhau, tạo thành n đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.



Hình 1.11

Giải thích cách gộp nghiệm ở ví dụ 3 ta có:

Trên hình 1.11 hai chấm tròn đen là điểm biểu diễn hai nghiệm ta tìm được ở ví dụ 3. Từ đây nếu gộp nghiệm lại thì ta sẽ có $x=0+\frac{k2\pi}{2}=k\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIP
Ở đây nhiều độc giả nhầm lẫn, thấy hàm số sin và chọn luôn C là sai. Cần chú ý đến điều kiện để $\frac{1}{x}$ xác định.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sin\frac{1}{x}+2x$.

A. $D=[-2;2]$. B. $D=[-1;1]\setminus\{0\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Đáp án D.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\sin\frac{1}{x}$ xác định $\Leftrightarrow x\neq 0$.

STUDY TIP
Trong bài này, ta cần thêm kiến thức về tập xác định của hàm lũy thừa ở lớp 12: Tập xác định của hàm số $y=x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α.
* Với α nguyên dương thì tập xác định là $\mathbb{R}$.
* Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
* Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

Ví dụ 5: Tập xác định của hàm số $y=2016\tan^{2017}2x$ là:

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $y=2016\tan^{2017}2x=2016.(\tan 2x)^{2017}$

2017 là một số nguyên dương, do vậy hàm số đã cho xác định khi $\tan 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

Tương tự ta có thể chọn ngay đáp án cho ví dụ 6.

Ví dụ 6: Tập xác định của hàm số $y=2016\cot^{2017}2x$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án B.

Lời giải

Tương tự như ví dụ 5, ta có hàm số xác định khi $\cot 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 7: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án B.

STUDY TIP
Với các bài toán chứa căn thức ta chú ý các hệ số tự do để áp dụng các bất đẳng thức cơ bản như
$-1\le\sin x;\cos x\le 1,...$

Lời giải

Hàm số $y=\sqrt{1-\cos 2017x}$ xác định khi $1-\cos 2017x\ge 0$.

Mặt khác ta có $-1\le\cos 2017x\le 1$ nên $1-\cos 2017x\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tương tự ta có bài toán sau:

Ví dụ 8: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2}{\sqrt{2-\sin 6x}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $\sin 6x<2\Leftrightarrow 2-\sin 6x>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Một dạng khác của bài toán liên quan đến tìm tập xác định của hàm lượng giác như sau:

Ví dụ 9: Để tìm tập xác định của hàm số $y=\tan x+\cos x$, một học sinh đã giải theo các bước sau:

Bước 1: Điều kiện để hàm số có nghĩa là $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$

Bước 2: $\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases};(k\in\mathbb{Z})$.

Bước 3: Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài giải của bạn đó đã đúng chưa? Nếu **sai**, thì **sai** bắt đầu từ bước nào?

A. Bài giải đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Đáp án B.

Lời giải

Nhận thấy hàm số đã cho xác định khi $\tan x$ xác định (do $\cos x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.)

Do vậy hàm số xác định khi $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ 10: Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x+1}}$ xác định khi và chỉ khi

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $x\in\mathbb{R}$.

C. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

D. $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow\sin x+1>0\Leftrightarrow\sin x>-1\Leftrightarrow\sin x\neq-1$

(do $\sin x\geq-1,\forall x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Sau đây là dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm số lượng giác.

Một số cơ sở lý thuyết sử dụng

Với $S \subset D_f$ (là tập xác định của hàm số $f(x)$) thì

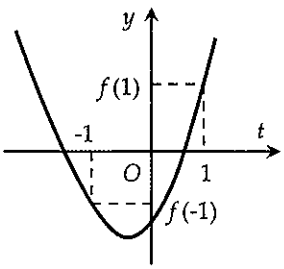
* $f(x) \le m, \forall x \in S \Leftrightarrow \max\limits_S f(x) \le m$
* $f(x) \ge m, \forall x \in S \Leftrightarrow \min\limits_S f(x) \ge m$
* $\exists x_0 \in S, f(x_0) \le m \Leftrightarrow \min\limits_S f(x) \le m$
* $\exists x_0 \in S, f(x_0) \ge m \Leftrightarrow \max\limits_S f(x) \ge m$

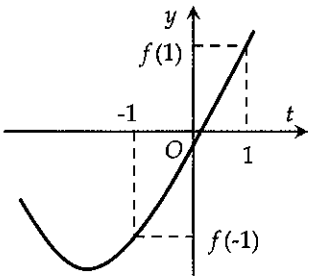
Ví dụ 1: Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cos x}$. Tất cả các giá trị của của m để hàm số trên xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

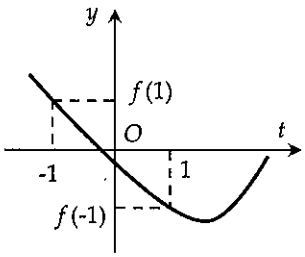
A. $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$ B. $0 \le m \le \frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2} \le m \le 0$ D. $m \le \frac{1}{2}$

Đáp án A.

Lời giải







Xét hàm số

$$g(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 - m.\sin 2x$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - m \sin 2x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m \sin 2x$$

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow t \in [-1;1]$

Hàm số $h(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 - mt + 1 \ge 0, \forall t \in [-1;1]$$
$$\Leftrightarrow t^2 + 2mt - 2 \le 0, \forall t \in [-1;1]$$

Đặt $f(t) = t^2 + 2mt - 2$ trên $[-1;1]$

Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị ở bên.

Ta thấy $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1)$ hoặc $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1)$

$ycbt \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt - 2 \le 0, \forall t \in [-1;1] \Leftrightarrow \max\limits_{[-1;1]} f(t) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) \le 0 \\ f(-1) \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 + 2m \le 0 \\ -1 - 2m \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$$

Chú ý

Với các bài toán dạng này ta cần chia 3 trường hợp để tìm đủ các giá trị của m.

Ở bài toán bên trong TH3 đã áp dụng quy tắc xét dấu tam thức bậc hai "trong trái ngoài cùng". Tức là trong khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a, còn ngoài khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{3x}{\sqrt{2\sin^2 x - m\sin x + 1}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ B. $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

C. $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$ D. $m \in \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2\sin^2 x - m\sin x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [-1;1]$

Lúc này ta đi tìm điều kiện của m để $f(t) = 2t^2 - mt + 1 > 0, \forall t \in [-1;1]$

Ta có $\Delta_t = m^2 - 8$

TH1: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$. Khi đó $f(t) > 0, \forall t$ (thỏa mãn).

TH2: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2\sqrt{2} \\ m = 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ (thử lại thì cả hai trường hợp đều không thỏa mãn).

TH3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ khi đó tam thức $f(t) = 2t^2 - mt + 1$ có hai nghiệm phân biệt $t_1; t_2$ $(t_1 < t_2)$.

Để $f(t) > 0; \forall t \in [-1;1]$ thì $\left[\begin{array}{l} t_1 \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{m - \sqrt{m^2 - 8}}{4} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \le m - 4 (VN) \\ t_2 \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{m + \sqrt{m^2 - 8}}{4} \le -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8} \le -m - 4 (VN) \end{array}\right.$

Vậy $m \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Dạng 2 Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp chung:

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

a. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

b. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

STUDY TIP

Để kết luận $f(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ thì ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao cho $\begin{cases} f(-x_0) \ne f(x_0) \\ f(-x_0) \ne -f(x_0) \end{cases}$ hoặc chỉ ra tập xác định của $f(x)$ không phải là tập đối xứng.

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

* Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

* Nếu D không phải tập đối xứng (tức $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

* Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì ta kết luận hàm số là hàm số chẵn.

* Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.

* Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R}$.
2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R}$.
3. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Ví dụ 1: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = -2\cos x$. B. $y = -2\sin x$. C. $y = 2\sin(-x)$. D. $y = \sin x - \cos x$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Với các kiến thức về tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác cơ bản ta có thể chọn luôn A.

Xét A: Do tập xác định là $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

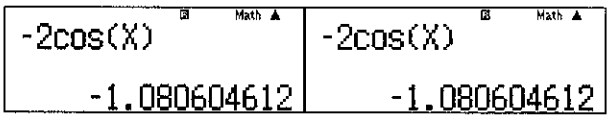
Ta có $f(-x) = -2\cos(-x) = -2\cos x = f(x)$. Vậy hàm số $y = -2\cos x$ là hàm số chẵn.

***Cách 2:* Sử dụng máy tính cầm tay.**

Ta có thể thử từng phương án bằng máy tính cầm tay, sử dụng CALC để thử trường hợp x và $-x$.

STUDY TIP
Khi sử dụng máy tính cầm tay ta nên chú ý cả tập xác định của hàm số xem có phải là tập đối xứng không.

Với A: Nhập vào màn hình hàm số sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải) đều đưa kết quả giống nhau. Vì $f(x)=f(-x)\Rightarrow$ ta chọn luôn A.



Ví dụ 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=\dfrac{\sin 2x}{2\cos x-3}$ thì $y=f(x)$ là

A. hàm số chẵn. B. hàm số lẻ.
C. không chẵn không lẻ. D. vừa chẵn vừa lẻ.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

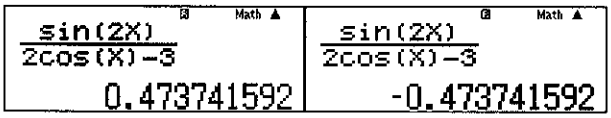
Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f(-x)=\dfrac{\sin(-2x)}{2.\cos(-x)-3}=\dfrac{-\sin(2x)}{2\cos x-3}=-f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

STUDY TIP
Trong bài toán này, tập xác định là $D=\mathbb{R}$ bởi $2\cos x-3<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay

Nhập biểu thức của hàm số vào màn hình sử dụng CALC với trường hợp $x=1$ (hình bên trái) và trường hợp $x=-1$ (hình bên phải), ta thấy $f(1)=-f(-1)\Rightarrow$ hàm số đã cho là hàm số lẻ.



Ví dụ 3: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, ta được $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ .
C. Không chẵn không lẻ. D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2x-\sin 2x)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2x-\cos 2x)=0$

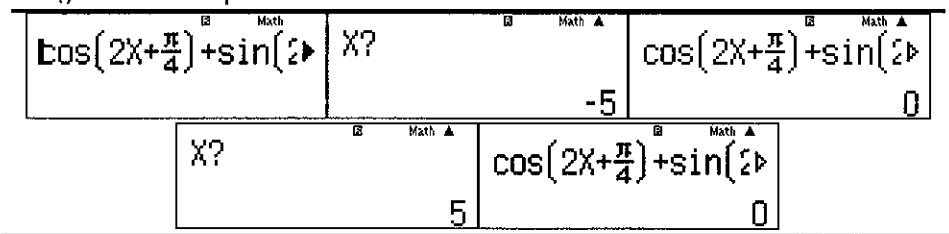
Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $y=0$ vừa thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, vừa thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ, nên đây là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

STUDY TIP
Hàm số $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ, vừa là hàm hằng.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Tương tự các bài trên ta nhập hàm số và sử dụng CALC để thử thì thấy cả hai trường hợp đều ra kết quả là 0. Mà $y=0$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hmf số lẻ, vừa là hàm hằng nên ta chọn D.



Ví dụ 4: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ và $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây là đúng về tính chẵn lẻ của hai hàm số này?

A. Hai hàm số $f(x);g(x)$ là hai hàm số lẻ.

B. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn; hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ; hàm số $g(x)$ là hàm số không chẵn không lẻ.

D. Cả hai hàm số $f(x);g(x)$ đều là hàm số không chẵn không lẻ.

Đáp án D.

STUDY TIP

Khi xét tính chẵn lẻ của hàm số ta cần chú ý xét tập xác định đầu tiên để giải quyết bài toán một cách chính xác.

Lời giải

a. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x-3}+3\sin^2 x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Ta có $x=-3\in D$ nhưng $-x=3\neq D$ nên D không có tính đối xứng. Do đó ta kết luận hàm số $f(x)$ không chẵn không lẻ.

b. Xét hàm số $g(x)=\sin\sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D_2=[1;+\infty)$. Dễ thấy D_2 không phải là tập đối xứng nên ta kết luận hàm số $g(x)$ không chẵn không lẻ.

Từ đây ta chọn D.

Tiếp theo ta đến với một ví dụ khác:

Ví dụ 4: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\sin^{2007}x+\cos nx$, với $n\in\mathbb{Z}$. Hàm số $y=f(x)$ là:

A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ.

C. Không chẵn không lẻ. D. Vừa chẵn vừa lẻ.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=\sin^{2007}(-x)+\cos(-nx)=-\sin^{2007}x+\cos nx\neq\pm f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm không chẵn không lẻ.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sin^{2004n}x+2004}{\cos x}$, với $n\in\mathbb{Z}$. Xét các phát biểu sau:

1. Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}$.
2. Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.
3. Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
4. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.
5. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
6. Hàm số đã cho là hàm số không chẵn không lẻ.

Số phát biểu đúng trong sáu phát biểu trên là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Vậy phát biểu 1 sai.

Ở đây ta chú ý: các phát biểu 2; 3; 4; 5; 6 để xác định tính đúng sai ta chỉ cần đi xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

Ta có tập xác định của hàm số trên là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng.

$$f(-x) = \frac{\sin^{2004n}(-x) + 2004}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2004n} x + 2004}{\cos x} = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Suy ra đồ thị hàm số đã cho đối xứng qua trục Oy. Vậy chỉ có phát biểu 2 và 3 là phát biểu đúng. Từ đây ta chọn B.

STUDY TIP
Đồ thị hàm số lẻ thì đối xứng qua tâm O.
Đồ thị hàm số chẵn thì đối xứng qua trục Oy.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = |x|.\sin x$. Phát biểu nào sau đây là đúng về hàm số đã cho?

A. Hàm số đã cho có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. Đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số đã cho có trục đối xứng.

D. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1;1]$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên tập $D = \mathbb{R}$ nên ta loại A.

Tiếp theo để xét tính đối xứng của đồ thị hàm số thì ta xét tính chẵn lẻ của hàm số đã cho.

$f(-x) = |-x|.\sin(-x) = -|x|.\sin x = -f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ, đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ. Vậy ta chọn **B.**

STUDY TIP
Với bài toán này ta nên xét B và C trước thay vì xét lần lượt A; B; C; D

Ví dụ 7: Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m\sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

A. $m > 0$ **B.** $m < -1$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = 2$

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = 3m\sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m\sin 4x + \cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì

$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m\sin 4x + \cos 2x = -3m\sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D.$

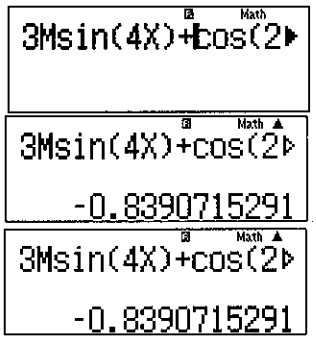
$\Leftrightarrow 6m\sin 4x = 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m = 0.$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Với bài toán này ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để thử các giá trị.

Với A và C, ta thử một trường hợp sẽ loại được trường hợp còn lại, tương tự với B và D. Ở đây ta sử dụng CALC để thử tại giá trị x và $-x$.

Ví dụ: Nhập vào màn hình như hình bên. Ấn CALC để gán các giá trị cho m. Ta thử với $m = 0$ thì ấn [0] [=]



Chọn x bất kì, sau đó làm lại lần nữa và gán x cho $-x$ ban đầu và so sánh (ở đây ta thử với $x = 5$ và tại -5.)

Ta thấy $f(x) = f(-x)$. Vậy C đúng. Ta chọn luôn C và loại các phương án còn lại.

Dạng 3 Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Phương pháp chung:

Ở phần lý thuyết, với các hàm số lượng giác cơ bản, ta đã biết rằng:

1. Hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.}$

* Nghịch biến trên các khoảng $\boxed{\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi,\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.}$

2. Hàm số $y=\cos x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\boxed{(-\pi+k2\pi;k2\pi),\ k\in\mathbb{Z}.}$

* Nghịch biến trên các khoảng $\boxed{(k2\pi;\pi+k2\pi),\ k\in\mathbb{Z}.}$

3. Hàm số $y=\tan x$ đồng biến trên các khoảng $\boxed{\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.}$

4. Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên các khoảng $\boxed{(k\pi;\pi+k\pi),\ k\in\mathbb{Z}.}$

Với các hàm số lượng giác phức tạp, để xét tính đơn điệu của nó ta sử dụng định nghĩa:

Ví dụ 1: Xét hàm số $y=\sin x$ trên đoạn $[-\pi;0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

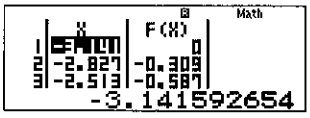
C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

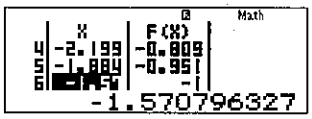
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: Từ lý thuyết về các hàm số lượng giác cơ bản ở trên ta có hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

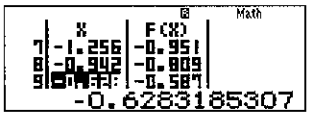


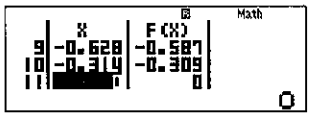


***Cách 2:* Sử dụng máy tính cầm tay.**

Do ở đề bài phần các phương án A; B; C; D chỉ xuất hiện hai khoảng đó là $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn MODE 7. Máy hiện $f(X)$? thì ta nhập sinX





START? Nhập $-\pi$; END? Nhập 0. STEP? Nhập $\frac{\pi}{10}$. Lúc này từ bảng giá trị của hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Ví dụ 2: Xét hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng $(-\pi;0)$ và $(0;\pi)$.

Đáp án B.

Lời giải

Theo lý thuyết ta có hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi+k2\pi;k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi;\pi+k2\pi)$. Từ đây ta có với $k=0$ thì hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi;0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Tiếp theo ta đến với hàm số $y=\tan nx;(n\in\mathbb{Z})$,... Ta có ví dụ 3:

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y=\tan 2x$ trên một chu kì tuần hoàn. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp án A.

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Hàm số $y=\tan 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, dựa vào các phương án A; B; C; D thì ta sẽ xét tính đơn điệu của hàm số trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.

Dựa theo kết quả khảo sát hàm số $y=\tan x$ ở phần lý thuyết ta có thể suy ra với hàm số $y=\tan 2x$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

STUDY TIP

Ở đây ta không chọn C vì hàm số không liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, hàm số bị gián đoạn tại $x=\frac{\pi}{4}$ (tức không xác định tại $x=\frac{\pi}{4}$) nên không thể kết luận được như C.

Ví dụ 4: Xét sự biến thiên của hàm số $y=1-\sin x$ trên một chu kì tuần hoàn của nó. Trong các kết luận sau, kết luận nào **sai**?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án D.

Lời giải

Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ 2π, và kết hợp với các phương án đề bài thì ta sẽ xét sự biến thiên của hàm số trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ta có hàm số $y=\sin x$:

* Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

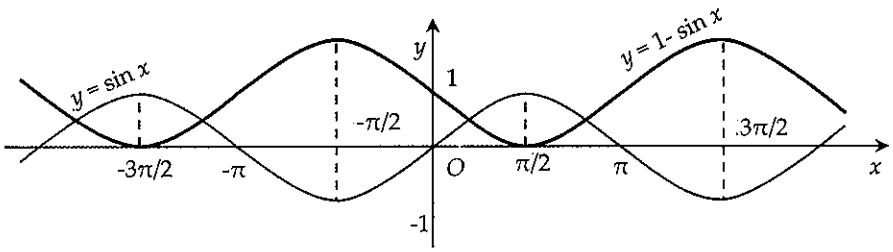
* Nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Từ đây ta suy ra hàm số $y=1-\sin x$:

* Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

* Đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. Từ đây ta chọn D.

Dưới đây ta có đồ thị của hàm số $y=1-\sin x$ và đồ thị hàm số $y=\sin x$ trên $\mathbb{R}$.



Hình 1.14

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\sin x-\cos x$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số đã cho có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Từ đây ta có thể loại phương án C, do tập giá trị của hàm số là $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$.

Ta có: * Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

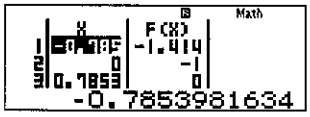
* Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$. Từ đây ta chọn **A.**

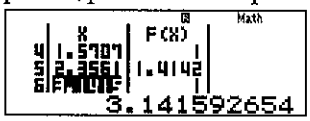
***Cách 2:* Sử dụng máy tính cầm tay**

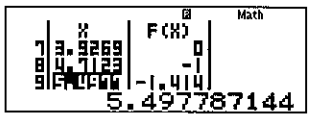
Tương tự như ở ví dụ 1 ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay chức năng MODE 7: TABLE để giải bài toán.

Ấn MODE 7. Máy hiện $f(X)$? thì ta nhập $f(x)=\sin(X)-\cos(X)$.

Chọn START; END; STEP phù hợp ta sẽ có kết quả như hình dưới:







Từ bảng các giá trị của hàm số $f(x)$ trên ta thấy khi x chạy từ $-\frac{\pi}{4}\approx-0,785$ đến $\frac{3\pi}{4}\approx 2,3561$ thì giá trị của hàm số tăng dần, tức hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$.

Phân tích thêm: Khi x chạy từ $\frac{3\pi}{4}$ đến $\frac{7\pi}{4}\approx 5,49778$ thì giá trị của hàm số giảm dần, tức hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right)$.

STUDY TIP

Ta chú ý ở đây có $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$ nên ta có thể suy ra Step phù hợp. Trong bài gán Step $=\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 6: Chọn câu đúng:

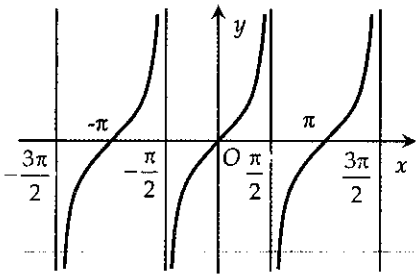
A. Hàm số $y=\tan x$ luôn luôn tăng.

B. Hàm số $y=\tan x$ luôn luôn tăng trong từng khoảng xác định.

C. Hàm số $y=\tan x$ tăng trong các khoảng $(\pi+k2\pi;\ 2\pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y=\tan x$ tăng trong các khoảng $(k2\pi;\ \pi+k2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Đáp án B.



Lời giải

Với A ta thấy phát hàm số $y=\tan x$ không xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tồn tại các điểm làm cho hàm số bị gián đoạn nên hàm số không thể luôn tăng.

Với B ta thấy B đúng vì hàm số $\tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Từ đây ta loại C; D.

Ví dụ 7: Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ giảm.

(II) $\forall x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y = \frac{1}{\cos x}$ giảm.

Mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên là

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng. **C.** Cả 2 sai. **D.** Cả 2 đúng.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1:

Như bài toán xét xem hàm số tăng hay giảm. Ta lấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Lúc này ta có $f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{\sin x_2} - \frac{1}{\sin x_1} = \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2}$

Ta thấy $x_1 < x_2 \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \sin x_1 - \sin x_2 > 0$

$0 > \sin x_1 > \sin x_2 \Rightarrow \frac{\sin x_1 - \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Vậy $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm tăng.

Tương tự ta có $y = \frac{1}{\cos x}$ là hàm giảm. Vậy I sai, II đúng.

Cách 2:

Sử dụng lệnh TABLE để xét xem hàm số tăng hay giảm trên máy tính.

Với hàm $\frac{1}{\sin x}$ ta nhập MODE 7: TABLE (MODE 7)

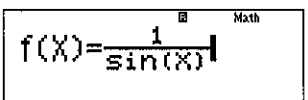
Nhập hàm $f(x)$ như hình bên: [▭] 1 ▼ sin ALPHA)) =

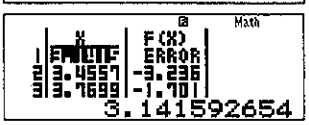
START? π. Nhập: SHIFT ×10ˣ =

END? $\frac{3\pi}{2}$. (Nhập: [▭] 3 SHIFT ×10ˣ ▼ 2 =)

STEP? $\frac{\pi}{10}$. (Nhập [▭] SHIFT ×10ˣ ▼ 1 0 =). Ta thấy bảng liệt kê các giá trị của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ như hình bên. Ta thấy giá trị của hàm số tăng dần khi x chạy từ π đến $\frac{3\pi}{2}$. Nên ta kết luận trên $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ tăng.

Tương tự với II và kết luận.





STUDY TIP

Ta suy diễn đồ thị hàm $y = |f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ từ đó ta suy ra khoảng đơn điệu của hàm số $y = |f(x)|$.

- Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục Ox qua Ox.

Hợp hai phần trên ta được đồ thị hàm $y = |f(x)|$.

Ví dụ 8: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $y = |\tan x|$ đồng biến trong $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

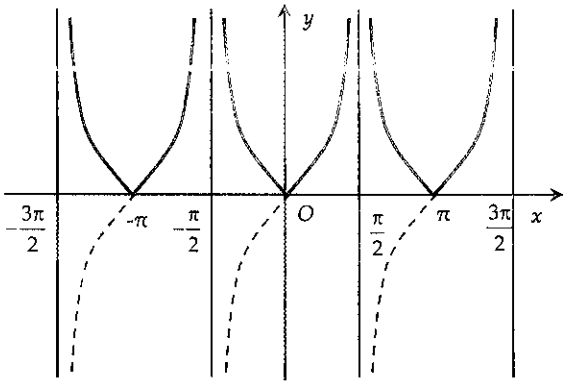
B. $y = |\tan x|$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $y = |\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. $y = |\tan x|$ luôn nghịch biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đáp án B.

Lời giải



STUDY TIP

Với bài toán này ta có thể không suy diễn đồ thị mà làm theo hướng tư duy sau:

- Với A: $y=|\tan x|$ không xác định tại $x=\pm\frac{\pi}{2}$ nên không thể đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

- Từ B suy ra C; D sai.

Ta được đồ thị như hình trên. Ta thấy hàm số $y=|\tan x|$ nghịch biến trên $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ và đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Nên ta loại A và D.

Với B ta có $f(-x)=|\tan(-x)|=|\tan x|=f(x)\Rightarrow$ hàm số $y=|\tan x|$ là hàm số chẵn.

Với C ta thấy đồ thị hàm số đã cho không đối xứng qua gốc tọa độ, từ đây ta chọn B.

Dạng 4 Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác

* Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền $D\subset\mathbb{R}$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\le M,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$$

2. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu

$$\begin{cases} f(x)\ge m,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$$

Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác.
2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa sin và cos.
3. Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.
4. Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016.$$

A. $\min y=1;\max y=4033.$ B. $\min y=-1;\max y=4033.$

C. $\min y=1;\max y=4022.$ D. $\min y=-1;\max y=4022.$

Đáp án B.

Phân tích

Ta có các bước để giải quyết bài toán như sau:

Bước 1: Chỉ ra $f(x)\le M,\ \forall x\in D.$

Bước 2: Chỉ ra $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M.$

Kết luận: $\max\limits_D f(x)=M.$

Tương tự với tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $-1\le\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)\le 1,\ \forall\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow -2017\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)\le 2017,\ \forall\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow -1\le 2017\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016\le 4033,\ \forall\in\mathbb{R}.$

Ta có $y=-1$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=-1;$ $y=4033$ khi $\cos\left(8x+\frac{10\pi}{2017}\right)=1.$

Vậy $\min y=-1;\max y=4033.$

***Cách 2:* Sử dụng máy tính cầm tay.**

Trong bốn phương án chỉ có hai giá trị max là $4022;4033.$

Chỉ có hai giá trị min là $1;-1.$

STUDY TIP

Với bài toán trên ta chỉ đơn giản sử dụng tính bị chặn đơn giản của hàm số lượng giác. Với $k\in\mathbb{Z}$ ta có

$-1\le\sin^{2k+1}[f(x)]\le 1$

$-1\le\cos^{2k+1}[f(x)]\le 1$

$|\sin[f(x)]|\le 1;$

$|\cos[f(x)]|\le 1$

$0\le\sin^{2k}[f(x)]\le 1$

$0\le\cos^{2k}[f(x)]\le 1.$

STUDY TIP

Khi bài toán không yêu cầu tìm min, max trên tập cụ thể nào thì ta hiểu rằng tìm GTLN, GTNN trên tập xác định.

STUDY TIP
Trong bài toán ta chọn thử hai giá trị trên vì 4033 là giá trị lớn hơn và -1 là giá trị nhỏ hơn nên ta thử trước. Nếu phương trình không có nghiệm thì sẽ là trường hợp còn lại.

Lúc này ta sử dụng chức năng SHIFT CALC (SHIFT SOLVE) để thử giá trị:

Ví dụ ta nhập vào màn hình $2017\cos\left(8X+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=4033$ ta thấy phương trình có nghiệm.

Tương tự nhập $2017\cos\left(8X+\frac{10\pi}{2017}\right)+2016=-1$ thấy phương trình có nghiệm.

Trường hợp thử max là 4033 Trường hợp thử min là -1

Từ đây ta chọn B.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1.$$

A. $\min y=0;\max y=4.$ B. $\min y=1-\sqrt{3};\max y=3+\sqrt{3}.$

C. $\min y=-4;\max y=0.$ D. $\min y=-1+\sqrt{3};\max y=3+\sqrt{3}.$

Đáp án A.

Lời giải

Để sử dụng tính bị chặn của hàm số ở trong **STUDY TIP** ta đưa ra ở trên, ta sẽ đưa $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$ về theo $\sin u(x)$ hoặc $\cos u(x)$.

Ta có

$$y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=2\cos^2 x-1-\sqrt{3}\sin 2x+2$$

$$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2\ \ (*)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+2\ =2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2$$

STUDY TIP
Ở dòng thức tư bước biến đổi ta sử dụng công thức lượng giác cộng.

Mặt khác $-1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow -2\le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le 2,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0\le 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0\le y\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ta có bài toán tổng quát:

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a\sin u+b\cos u$ trên $\mathbb{R}$. Với $a;b\in\mathbb{R};a^2+b^2>0$.

Lời giải tổng quát

$$y=a\sin u+b\cos u\Rightarrow y=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u\right)\sqrt{a^2+b^2}.$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1\Rightarrow\exists\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin u.\cos\alpha+\cos u.\sin\alpha\right)\Rightarrow y=\sqrt{a^2+b^2}.\sin(u+\alpha)$$

Vì $-1\le\sin(u+\alpha)\le 1\Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2}\le y\le\sqrt{a^2+b^2}$

Ngoài ra ta có thể mở rộng bài toán như sau:

STUDY TIP
Ngoài cách nhớ công thức ở bài toán tổng quát phía bên phải ta có thể nhớ theo điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất theo sin và cos như sau:
Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=a.\sin[f(x)]+b\cos[f(x)]+c.$
$a.\sin[f(x)]+b\cos[f(x)]+c-y=0$ điều kiện có nghiệm $a^2+b^2\ge(c-y)^2$. Từ đây ta tìm được min, max của y.

$y = a.\sin\left[f(x)\right] + b\cos\left[f(x)\right] + c$. Ta có $-\sqrt{a^2+b^2}+c \le y \le \sqrt{a^2+b^2}+c$.

Từ bài toán tổng quát trên ta có thể giải quyết nhanh bài toán ví dụ 2 từ dòng $(*)$ như sau: Ta có $-\sqrt{1+3}+2 \le y \le \sqrt{1+3}+2 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x}$.

A. $\min y = -\dfrac{2}{3}; \max y = 2$.

B. $\min y = \dfrac{2}{3}; \max y = 2$.

C. $\min y = \dfrac{1}{2}; \max y = \dfrac{3}{2}$.

D. $\min y = -\dfrac{1}{2}; \max y = \dfrac{3}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP

Nếu hàm số có dạng $y = \dfrac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}$ ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về dạng phương trình trong STUDY TIP ở BTTQ phía trên, và tiếp tục lời giải.

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2\cos x + 3 = 2y + y\cos x$

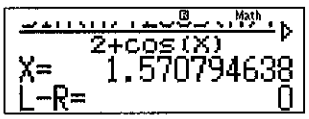
$\Leftrightarrow \sin x + (2-y)\cos x + 3 - 2y = 0$

Ta sử dụng điều kiện ở **STUDY TIP** trong bài tổng quát trên.

Ta có $1^2 + (2-y)^2 \ge (3-2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \le 0$

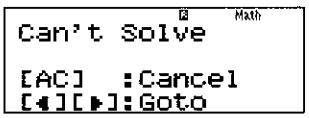
$\Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le y \le 2$.

Cách 2: **Sử dụng máy tính cầm tay**



Trường hợp thử max là 2

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE : $\dfrac{\sin x + 2\cos x + 3}{2+\cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A; B; C; D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \dfrac{3}{2}$.



Trường hợp thử min là $-\dfrac{2}{3}$

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\dfrac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

Ví dụ 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$.

A. $\min y = -1; \max y = 1$.

B. $\min y = 0; \max y = 1$.

C. $\min y = -1; \max y = 0$.

D. $\min y = 0; \max y$ không tồn tại.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

Nhiều độc giả không lưu ý đổi dấu của bpt thứ hai của hệ khi nhân các vế với –1 dẫn đến chọn đáp án sai.

Cách 1: Ta có $\begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ 0 \le \sqrt{\cos x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \sqrt[4]{\sin x} \le 1 \\ -1 \le -\sqrt{\cos x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le y \le 1$.

Vậy khi $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

và $\min y = -1$ khi $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Cách 2: **Sử dụng máy tính cầm tay**

Tương tự các ví dụ trên.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\cot^4 a+\cot^4 b+2\tan^2 a.\tan^2 b+2.$$

A. $\min y=2.$ B. $\min y=6.$

C. $\min y=4.$ D. không tồn tại GTNN của hàm số.

Đáp án B.

Lời giải

$$P=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\cot^2 a.\cot^2 b+2\tan^2 a.\tan^2 b+2$$

$$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2.\left(\cot^2 a.\cot^2 b+\tan^2 a.\tan^2 b-2\right)+6$$

$$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2.\left(\cot^2 a.\cot^2 b+\tan^2 a.\tan^2 b-2.\cot a.\cot b.\tan a.\tan b\right)+6$$

$$=\left(\cot^2 a-\cot^2 b\right)^2+2\left(\cot a.\cot b-\tan a\tan b\right)^2+6\ge 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\cot^2 a=\cot^2 b\\ \cot a.\cot b=\tan a.\tan b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cot^2 a=1\\ \cot^2 b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow a=b=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$

STUDY TIP

Với các bài toán tìm GTLN-GTNN của hàm lượng giác ta có thể đưa về dạng $y=A^2(x)+B\ge B.$

Nhưng cần lưu ý xem dấu bằng có xảy ra hay không.

Tiếp theo ta có ví dụ 6 là một câu hỏi khác cho ví dụ 2 như sau

Ví dụ 6: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x.\cos x+1$ trên đoạn $\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$ lần lượt là

A. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$ B. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=2.$

C. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=4.$ D. $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$

Đáp án D.

Lời giải

Từ ví dụ 2 ta có $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$. Đặt $u=2x+\dfrac{\pi}{3}.$

Từ đề bài ta xét $x\in\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]\Rightarrow u\in\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Ta lập BBT của hàm số $y=2\cos u+2$ trên $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{2}\right].$

u	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$2\cos u+2$	3	↘	0	↗	2

Từ BBT ta thấy $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]} f(u)=0$ khi $u=\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}.$

$\max\limits_{\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]} f(u)=3$ khi $u=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=0.$

Hay $\min\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=0;\max\limits_{\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]} y=3.$

STUDY TIP

Với các bài toán tìm min, max của hàm số lượng giác trên một đoạn ta thường phải xét nhanh BBT để giải quyết bài toán. Ở chương trình 11 ta chưa học đạo hàm nên chưa giải quyết được bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số sử dụng đạo hàm. Sau khi học xong đạo hàm ta sẽ giải quyết bài toán này nhanh chóng hơn.

Ví dụ 7: Tìm giá nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sin^2 x-\sin x+2$.

A. $\min y=\frac{7}{4};\max y=4$. B. $\min y=\frac{7}{4},\max y=2$.

C. $\min y=-1,\max y=1$. D. $\min y=\frac{1}{2},\max y=2$.

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $\sin x=u,u\in[-1;1]$.

Xét hàm số $y=u^2-u+2$ trên $[-1;1]$.

Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\in[-1;1]$. Từ đây ta có BBT

u	-1		$\frac{1}{2}$		1
y	4	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	2

Ta kết luận $\min\limits_{[-1;1]} f(u)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$ và $\max\limits_{[-1;1]} f(u)=4\Leftrightarrow u=-1$

Hay $\min y=\frac{7}{4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ và $\max y=4\Leftrightarrow \sin x=-1$.

Ngoài các phương pháp giải bài toán tìm GTLN – GTNN của hàm số lượng giác ta rút ra được từ các ví dụ trên ta còn có phương pháp sử dụng bất đẳng thức cơ bản. Phương pháp này được coi là một phương pháp khó vì đòi hỏi tính sáng tạo và kỹ thuật trong việc sử dụng bất đẳng thức.

Một số bất đẳng thức ta thường dùng:

1. Bất đẳng thức AM – GM

a. Với 2 số:

Cho *a; b* là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

b. Với *n* số:

Cho $x_1;x_2;...;x_n$ là các số dương, $n\in\mathbb{N}^*$ ta có $\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thức Bunyakovsky dạng thông thường

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai bộ số

* Với hai bộ số $(a_1;a_2;...;a_n)$ và $(b_1;b_2;...;b_n)$ ta có:

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+...+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$

STUDY TIP

Ta có thể sử dụng tính chất của tam thức bậc hai để giải các bài toán tìm min max hàm lượng giác như sau:

Cho hàm số $y=ax^2+bx+c,(a\ne0)$.

* Nếu $a<0$ thì $ax^2+bx+c\le-\frac{\Delta}{4a}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu $a>0$ thì $ax^2+bx+c\ge-\frac{\Delta}{4a}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu hàm số đã cho là hàm bậc hai mà điều kiện không phải $\forall x\in\mathbb{R}$ thì ta phải lập BBT để tìm min, max.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu một số b_i nào đó $(i=1,2,3,...)$ bằng 0 thì a_i tương ứng bằng 0.

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge 4abcd$

Ví dụ 8: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x}$.

A. $1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $1+\sqrt{5}$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sin^2 x} \Leftrightarrow y=\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 4 số

$1;1;\sqrt{1+\frac{1}{2}.\cos^2 x};\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có

$$1.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x}+1.\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}\le\sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{1+\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x}$$

$$=\sqrt{2}.\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}.1}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

Hay $y\le\frac{\sqrt{22}}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $1+\frac{1}{2}\cos^2 x=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky bởi ở trong căn lần lượt có $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$. Ta cân bằng hệ số của $\sin^2 x$ và $\cos^2 x$ để áp dụng tính chất $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, áp dụng Bunyakovsky thì VP sẽ là hằng số, từ đó giải quyết được bài toán.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

C. $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{2}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y=\frac{4}{3}$ khi $x=\frac{\pi}{3}$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta thấy $2-\cos x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $1+\cos x>0, \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $\frac{1}{2-\cos x}$ và $\frac{1}{1+\cos x}$ là hai số dương. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số dương ta có $\frac{1}{2-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}$

Mặt khác tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}\le\frac{2-\cos x+1+\cos x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y\ge\frac{2}{\sqrt{(2-\cos x)(1+\cos x)}}\ge\frac{4}{3}$$

STUDY TIP

Trong bài toán ta có thể nhanh chóng nhận ra sử dụng bất đẳng thức AM – GM bởi vì ta thấy mẫu số của hai phân thức cộng lại sẽ ra hằng số, nên ở đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM – GM.

Ta có thể giải quyết bài toán theo hướng khác đó là sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu.

Với x, y là hai số thực dương ta có:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y$.

Vậy $\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{2}\right)} y = \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ (vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$).

Cách 2: Để ý đề bài hỏi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Trên đây là hai ví dụ sử dụng bất đẳng thức tìm GTLN, GTNN của hàm số lượng giác mà không có liên hệ cho trước. Ví dụ 10 dưới đây là một ví dụ khó hơn về sử dụng bất đẳng thức kết hợp với lượng giác để giải quyết.

Ví dụ 10*: Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y=\sqrt{1+\tan x.\tan y}+\sqrt{1+\tan y.\tan z}+\sqrt{1+\tan z.\tan x}$$

A. $y_{max}=1+2\sqrt{2}$ **B.** $y_{max}=3\sqrt{3}$ **C.** $y_{max}=\sqrt{3}$ **D.** $y_{max}=2\sqrt{3}$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $x+y+z=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-z \Rightarrow \tan(x+y)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}=\frac{1}{\tan z}$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z=1-\tan x.\tan y$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan z+\tan y.\tan z+\tan x.\tan y=1$

Ta thấy $\tan x.\tan z$; $\tan y.\tan z$; $\tan x.\tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề cho dưới căn thức, tương tự như ví dụ 8, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có

$1.\sqrt{1+\tan x.\tan y}+1.\sqrt{1+\tan y.\tan z}+1.\sqrt{1+\tan z.\tan x}\le$

$\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{1.\tan x.\tan z+1+\tan y.\tan z+1+\tan x.\tan y}=$

$=\sqrt{3}\sqrt{3+(\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x)}=2\sqrt{3}$

Vậy $y_{max}=2\sqrt{3}$.

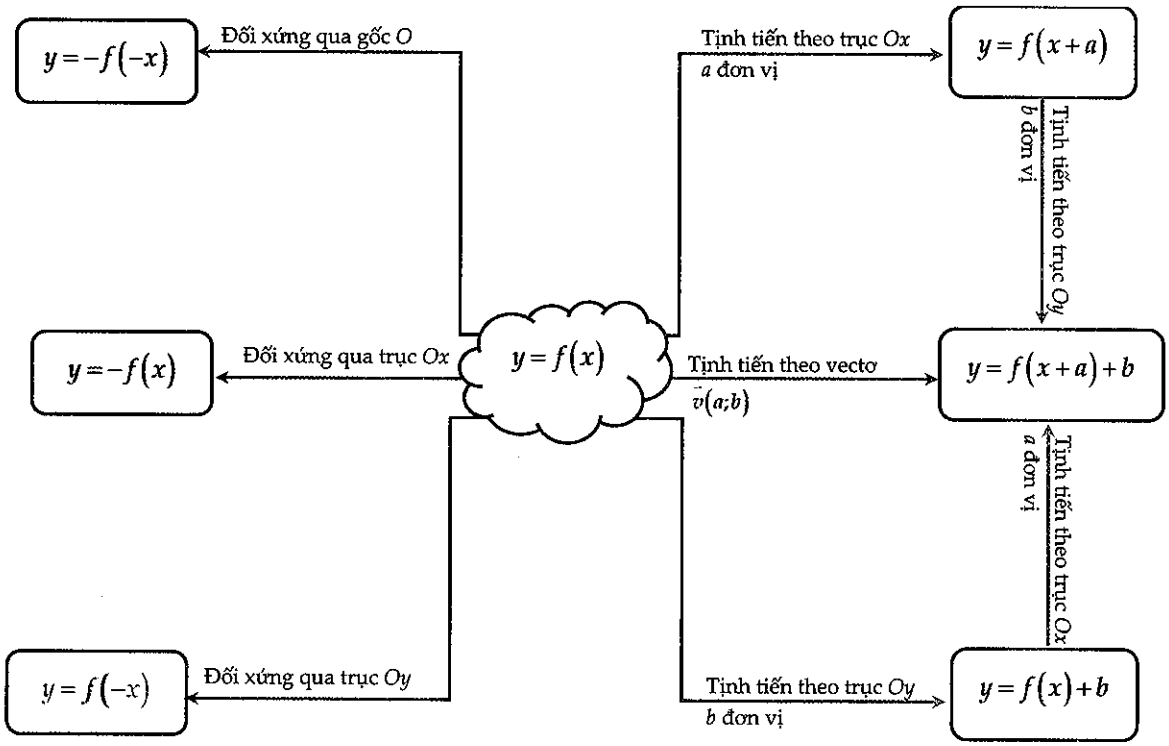
Đọc thêm

Dạng 5 Dạng đồ thị của hàm số lượng giác

Các kiến thức cơ bản về dạng đồ thị của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần 1: Lý thuyết cơ bản:

Sau đây ta bổ sung thêm một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản:



Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa trị tuyệt đối:

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy diễn:

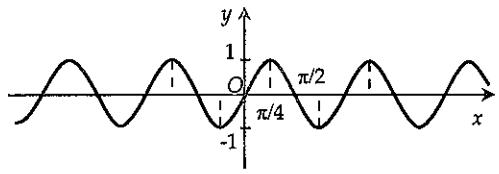
Đồ thị hàm số $y=\lvert f(x)\rvert$ gồm	* Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=f(x)$. * Đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.
Đồ thị hàm số $y=f(\lvert x\rvert)$ gồm	* Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm bên phải trục Oy. * Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.
Đồ thị hàm số $y=\lvert u(x)\rvert.v(x)$ với $f(x)=u(x).v(x)$ gồm	* Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên miền thỏa mãn $u(x)\geq 0$. * Đối xứng phần đồ thị $y=f(x)$ trên miền $u(x)<0$ qua trục hoành.

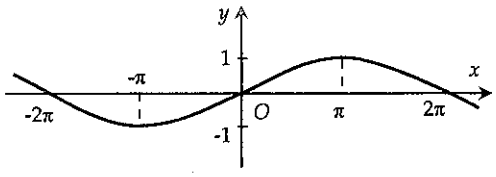
Ở phần lý thuyết có đưa ra phần đọc thêm về hàm số $y = a\sin(\omega x + b) + c$ với $a; b; c; \omega \in \mathbb{R}; a\omega \neq 0$.

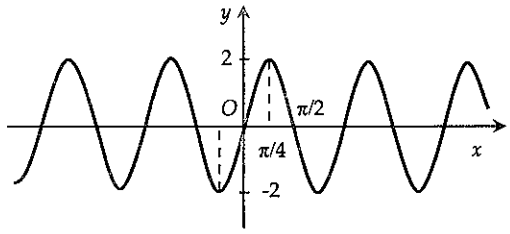
> Hàm số $y = a\sin(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó là một đường hình sin.
>
> Tương tự hàm số $y = a\cos(\omega x + b) + c, (a, b, c, \omega \in \mathbb{R}, a\omega \neq 0)$ cũng là một hàm tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$ và đồ thị của nó cũng là một đường hình sin.

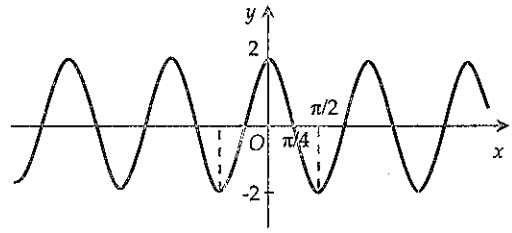
Ta có ví dụ sau:

Ví dụ 1: Hình nào dưới đây biểu diễn đồ thị hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$?

A.


B.


C.


D.


Đáp án C

Lời giải

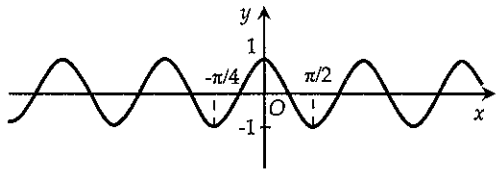
Ta thấy $-2 \leq 2\sin 2x \leq 2$ nên ta có thể loại A và B.

Tiếp theo với C và D ta có:

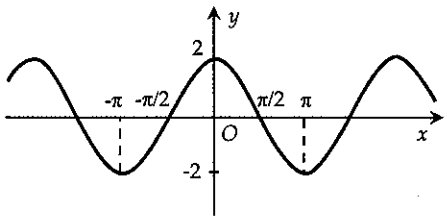
Từ phần lý thuyết ở trên ta có hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Ta thấy với $x = 0$ thì $y = 0$ nên đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ. Từ đây ta chọn đáp án C.

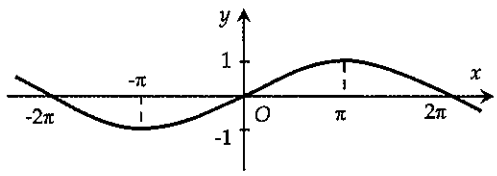
Ví dụ 2: Hình vẽ nào sau đây biểu diễn đồ thị hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$?



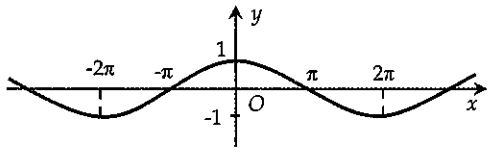
A.



B.



C.



D.

Đáp án D.

Lời giải

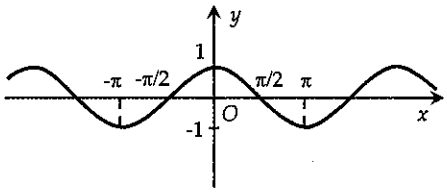
Ta thấy $-1\le\cos\frac{x}{2}\le 1$ nên ta loại B.

Tiếp theo ta có hàm số $y=\cos\frac{\pi}{2}$ có chu kì tuần hoàn là $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

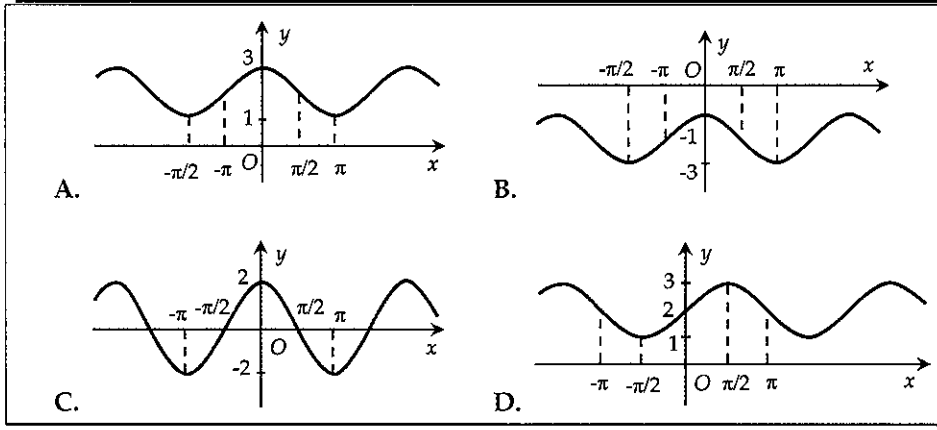
Ta thấy với $x=0$ thì $y=\cos\frac{x}{2}=\cos 0=1$ nên ta chọn D.

Trên đây là ví dụ về hai hàm số tương tự như nhau, tiếp theo ta đến với một dạng khác.

Ví dụ 3: Cho đồ thị hàm số $y=\cos x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y=\cos x+2$?

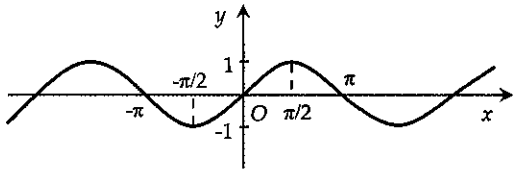


Đáp án A.

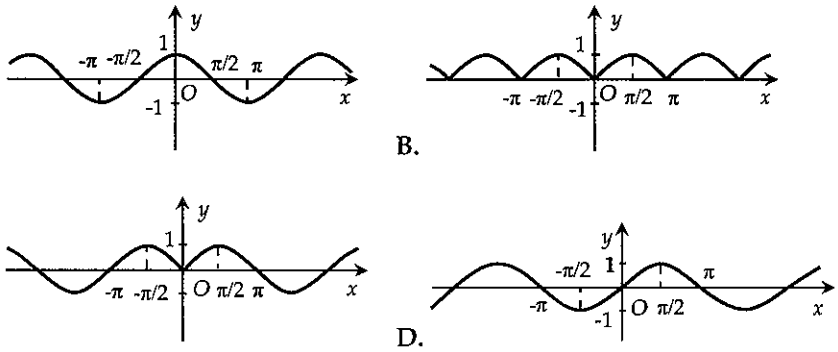
Lời giải

Ta thực hiện phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \cos x$ theo trục Oy lên trên 2 đơn vị (xem lại sơ đồ biến đổi đồ thị cơ bản ở bên trên).

Ví dụ 4: Cho đồ thị hàm số $y = \sin x$ như hình vẽ:



Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y = \sin|x|$?



Đáp án C

Lời giải

Suy diễn đồ thị hàm số $y = \sin|x|$ từ đồ thị hàm số $y = \sin x$

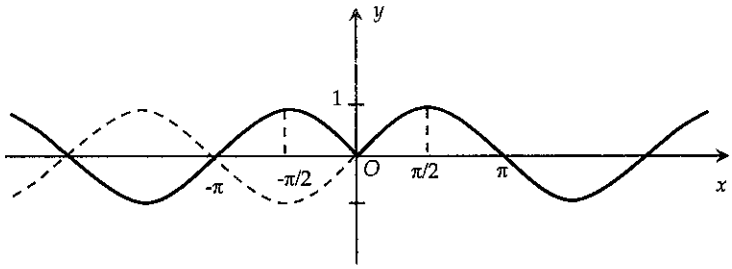
* Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm bên phải trục Oy.

* Lấy đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy.

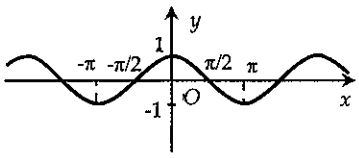
Dưới đây là đồ thị ta thu được sau khi thực hiện các bước suy diễn ở trên. Phần đồ thị nét đứt là phần bỏ đi của đồ thị hàm số $y = \sin x$.

STUDY TIP

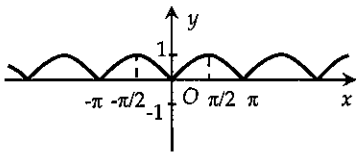
Ngoài ra ở bài toán này, ta có thể áp dụng tính chất hàm chẵn lẻ mà tôi đã cung cấp ở phần xét tính chẵn lẻ của hàm số phía trước. Hàm số $y = \sin|x|$ là hàm số chẵn có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Nhìn các phương án A; B; C; D chỉ có phương án D là không có đồ thị đối xứng qua trục Oy. Tiếp theo ta tìm tập giá trị của một số điểm đặc biệt và chọn được C.



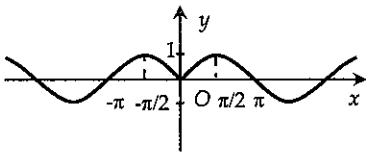
Ví dụ 5: Hình nào sau đây là đồ thị hàm số $y=|\sin x|$?



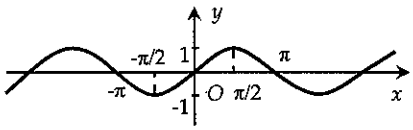
A.



B.



C.



D.

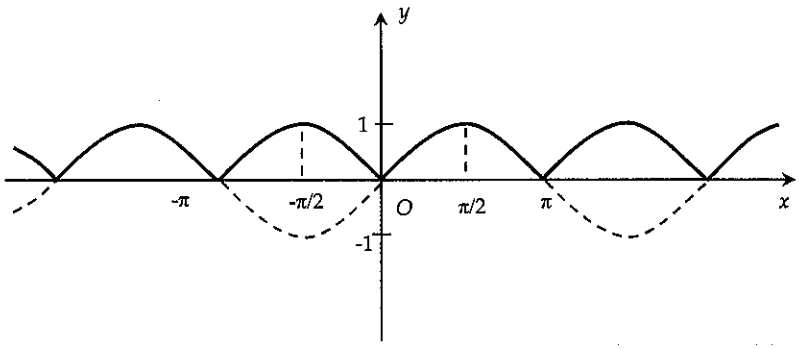
Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Suy diễn đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ từ đồ thị hàm số $y=\sin x$:

* Giữ nguyên phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y=\sin x$.

* Lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=\sin x$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Cách 2: Ta thấy $|\sin x|\geq 0, \forall x$ nên đồ thị hàm số $y=|\sin x|$ hoàn toàn nằm trên trục Ox. Từ đây ta chọn **B.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. B. $D=\{\pi+k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. D. $D=\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\sin 5x+\tan 2x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}(k+1)\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 3: Tập xác định D của hàm số

$y=\tan x-\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 5: Xét bốn mệnh đề sau

(1) Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(2) Hàm số $y=\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(3) Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

(4) Hàm số $y=\cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Số mệnh đề đúng là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y=\cos\sqrt{x}$ là

A. $D=[0;2\pi]$. B. $D=[0;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 8: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=3\tan x+2\cot x+x.$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}$.

Câu 9: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\frac{1}{\sin^2 x-\cos^2 x}.$$

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 10: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\frac{2017\tan 2x}{\sin^2 x-\cos^2 x}.$$

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{4}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 12: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sin x}{\cos x-\sin x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{4}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\sin 2x+1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 14: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\frac{\tan x}{\sqrt{15-14\cos 13x}}.$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\frac{\cot 2x}{\sqrt{2017-2016\sin 2015x}}.$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

B. $D=\mathbb{R}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\sqrt{\frac{20+19\cos 18x}{1-\sin x}}.$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. B. $D=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 17: Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=2\cos\sqrt{x}$. B. $y=\frac{\tan 2x}{\sin^2 x+1}$.

C. $y=\cos\frac{1}{x}$. D. $y=\sqrt{\frac{\sin 2x+3}{\cos 4x+5}}$.

Câu 18: Hàm số nào sau đây có tập xác định **khác** với các hàm số còn lại?

A. $y=\tan x$. B. $y=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}$.

C. $y=\frac{\tan 2017x+2018}{\cos x}$. D. $y=\sqrt{\frac{1}{1-\sin^2 x}}$.

Câu 19: Hàm số $y=\sqrt{\cos x-1}+1-\cos^2 x$ chỉ xác định khi

A. $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. B. $x=0$.

C. $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. D. $x=k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 20: Hàm số $y=\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$ có tập xác định là:

A. $\varnothing$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\left[\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ \frac{\pi}{3}+k2\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}$.

D. $\left[\frac{5\pi}{6}+k2\pi;\ \frac{13\pi}{6}+k2\pi\right],\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 21: Chọn khẳng định đúng:

A. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in\mathbb{Z}$.

B. Hàm số $y=\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $[k2\pi;\pi+k2\pi], k\in\mathbb{Z}$.

C. Hàm số $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$ có tập xác định là các đoạn $\left[k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right], k\in\mathbb{Z}$.

D. Hàm số $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ có tập xác định là $\left(k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

Câu 22: Xét hai mệnh đề:

(I): Các hàm số $y=\frac{1}{\sin x}$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{x|x=k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

(II): Các hàm số $y=\frac{1}{\cos x}$ và $y=\tan x$ có chung tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Nhận xét nào sau đây là đúng:

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$ với $0\le x\le 2\pi$. Tập xác định của hàm số là

A. $[0;\pi]$. B. $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. C. $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. D. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{\tan x+1}{\tan x-1},(0<x<\pi)$.

Tập xác định

A. $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

C. $(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. D. $(0;\pi)\setminus\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=3\tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=2\cot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}$. Hãy chỉ ra khoảng mà hàm số không xác định $(k\in\mathbb{Z})$.

A. $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$

C. $\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$ D. $\left(\pi+k2\pi;\frac{3\pi}{2}k2\pi\right)$

Câu 28: Xét hai câu sau:

(I) Hàm $y=\sin x$ và $y=\cos x$ có chung tập xác định là $\mathbb{R}$.

(II) Hàm $y=\tan x$ và $y=\cot x$ có chung tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\left\{\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\cup\left\{x\middle|x=k\pi\right\}\right\}, k\in\mathbb{Z}$.

Chọn phương án đúng.

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 29: Tập xác định của hàm số

$$\frac{\cos 3x}{\cos x.\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)} \text{ là}$$

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3};\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{5\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 30: Tập xác định của hàm số

$$f(x)=\frac{5\sin 2x+3}{12\sin x}+\frac{\sqrt{\cos^2 x}+5}{\cos x} \text{ là}$$

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 31: Tập xác định của hàm số $\frac{1-\cos x}{2\sin x+1}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\frac{7\pi}{6}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{7\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 32: Tập xác định của hàm số $\sqrt{\frac{5-3\cos 2x}{\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|}}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ B. $D=\mathbb{R}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$ D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 33: Tập xác định của hàm số:

$$y=\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \text{ là}$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi,k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k2\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Câu 34: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\sqrt{2+\sin x}-\frac{1}{\tan^2 x-1}$$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 35: Hàm số $y=\frac{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)}{\cot^2 x+1}$ có tập xác định là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2},k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\pi,k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Câu 36: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=-2\cos x$. B. $y=-2\sin x$.

C. $y=2\sin(-x)$. D. $y=\sin x-\cos x$.

Câu 37: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y=-2\cos x$. B. $y=-2\sin x$.

C. $y=-2\sin^2 x+2$. D. $y=-2\cos x+2$.

Câu 38: Hàm số $y=\sin x.\cos^2 x+\tan x$ là

A. hàm số chẵn. B. hàm số lẻ.

C. vừa chẵn vừa lẻ. D. không chẵn không lẻ.

Câu 39: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$ ta kết luận hàm số đã cho là

A. hàm số chẵn. B. hàm số lẻ.

C. vừa chẵn vừa lẻ. D. không chẵn không lẻ.

Câu 40: Xét các câu sau:

I. Hàm số $y=\sin x\sqrt{\sin x}$ là hàm số lẻ.

II. Hàm số $y=\cos x\sqrt{\sin x}$ là hàm số chẵn.

III. Hàm số $y=\sin x\sqrt{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Trong các câu trên, câu nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Chỉ (III). D. Cả 3 câu.

Câu 41: Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm lẻ:

A. $y=\sqrt{\sin x}$. B. $y=\sin^2 x$.

C. $y=\dfrac{\cot x}{\cos x}$. D. $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 42: Hàm số $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin^3 x}$ có tính chất nào sau đây?

A. Hàm chẵn. B. Hàm lẻ.

C. Không chẵn, không lẻ. D. Tập xác định $\mathbb{R}$.

Câu 43: Hãy chỉ ra hàm số không có tính chẵn lẻ:

A. $y=\sin x+\tan x$. B. $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $y=\tan x+\dfrac{1}{\sin x}$. D. $y=\cos^4-\sin^4 x$.

Câu 44: Hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. B. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $y=\dfrac{1}{\sin^{2013} x}$. D. $y=\sqrt{1-\sin 2012x}$.

Câu 45: Hàm số nào có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng?

A. $y=\sin 2017x$ B. $y=\sqrt{\cos x}$.

C. $y=\dfrac{1}{\sin x}$. D. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

Câu 46: Hãy chỉ ra hàm số nào là hàm số chẵn:

A. $y=\sin^{2016} x.\cos x$ B. $y=\sin x\cos 6x$.

C. $y=\dfrac{\cot x}{\tan^2 x+1}$. D. $y=\cos x\sin^3 x$.

Câu 47: Xét hai mệnh đề:

(I) Hàm số $y=f(x)=\tan x+\cot x$ là hàm số lẻ.

(II) Hàm số $y=g(x)=\tan x-\cot x$ là hàm số lẻ.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng.

C. Cả 2 sai. D. Cả 2 đúng.

Câu 48: Xét hai mệnh đề:

(I) Hàm số $y=f(x)=\tan x+\cos x$ là hàm số lẻ.

(II) Hàm số $y=g(x)=\tan x+\sin x$ là hàm số lẻ.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I) sai. B. Chỉ (II) sai.

C. Cả 2 sai. D. Không có mệnh đề sai.

Câu 49: Hàm số $y=1-\sin^2 x$ là

A. Hàm số lẻ. B. Hàm số không tuần hoàn.

C. Hàm số chẵn. D. Hàm số chẵn không lẻ.

Câu 50: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=\sin 2x$. B. $y=x.\cos x$.

C. $y=\cos x.\cot x$. D. $y=\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 51: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y=\sin|x|$ B. $y=x^2.\sin x$.

C. $y=\dfrac{x}{\cos x}$. D. $y=x+\sin x$.

Câu 52: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y=\dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x$ B. $y=2\cos 2x$

C. $y=\dfrac{x}{\sin x}$ D. $y=1+\tan x$

Câu 53: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $y=|\sin x|$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

B. $y=\cos x$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

C. $y=|\tan x|$ có đồ thị đối xứng qua trục Oy.

D. $y=\cot x$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 54: Cho hàm số $y=\sqrt{\cos x}$ xét trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Là hàm không chẵn không lẻ.

B. Là hàm lẻ.

C. Là hàm chẵn.

D. Có đồ thị đối xứng qua trục hoành.

Câu 55: Tìm kết luận sai:

A. Hàm số $y=x.\sin^3 x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y=\cos x^3+\sin x^3$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 56: Nhận xét nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{2\sin x+3\cot x}$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

B. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{\sin x+\tan x}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

C. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sin^{2008n}x+2009}{\cos x},(n\in\mathbb{Z})$ nhận trục Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số $\sin^{2009}x+\cos nx,(n\in\mathbb{Z})$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 57: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có trục đối xứng.

A. $y=\dfrac{\cos^{2008n}x+2003}{2012\sin x}$. B. $y=\tan x+\cot x$.

C. $y=\dfrac{\cos x}{6x^6+4x^4+2x^2+15}$. D. $y=\dfrac{1}{2\sin x-1}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2 x}{\sin 4x}$. Hàm số trên là hàm số

A. Hàm số lẻ.

B. Hàm số không tuần hoàn.

C. Hàm số chẵn.

D. Hàm số không chẵn không lẻ.

Câu 59: Hàm số $y=\cos 2x.\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ là

A. Hàm số lẻ. B. Hàm số không tuần hoàn.

C. Hàm số chẵn. D. Hàm số không chẵn không lẻ.

Câu 60: Xác định tính chẵn lẻ của hàm số

$$y=1+2x^2-\cos 3x.$$

A. Hàm số lẻ. B. Hàm số không tuần hoàn.

C. Hàm số chẵn. D. Hàm số chẵn không lẻ.

Dạng 3: Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Câu 61: Trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y=\sin x-\cos x$ là hàm số:

A. Đồng biến. B. Nghịch biến.

C. Không đổi. D. Vừa đồng biến, vừa nghịch biến.

Câu 62: Hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây $(k\in\mathbb{Z})$?

A. $(k2\pi;\pi+k2\pi)$. B. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.

C. $\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right)$. D. $\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

Câu 63: Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến trên khoảng $(k\in\mathbb{Z})$:

A. $\left(k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ B. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k\pi\right)$

C. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ D. $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$

Câu 64: Xét hai mệnh đề sau:

(I) $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}$ giảm.

(II) $\forall x\in\left(\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right)$: Hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ giảm.

Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên

A. Chỉ (I) B. Chỉ (II)

C. Cả 2 sai. D. Cả 2 đúng.

Câu 65: Cho hàm số

$$y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x$$

Kết luận nào sau đây là đúng về sự biến thiên của hàm số đã cho?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;\pi)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

Câu 66: Với $k\in\mathbb{Z}$, kết luận nào sau đây về hàm số $y=\tan 2x$ là sai?

A. Hàm số $y=\tan 2x$ tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{2}$.

B. Hàm số $y=\tan 2x$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y=\tan 2x$ nhận mỗi đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ là một đường tiệm cận.

D. Hàm số $y=\tan 2x$ là hàm số lẻ.

Câu 67: Để hàm số $y=\sin x+\cos x$ tăng, ta chọn x thuộc khoảng nào?

A. $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi;\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\right)$ B. $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$

C. $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ D. $(\pi+k2\pi;2\pi+k2\pi)$

Câu 68: Xét hai mệnh đề sau:

(I) Với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hàm $y=\tan^2 x$ là hàm tăng.

(II) Với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hàm $y=\sin^2 x$ là hàm tăng.

Phương án nào trong các phương án sau đây là phương án đúng?

A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng

C. Cả hai đều sai. D. Cả hai đều đúng.

Câu 69: Hãy chọn câu sai: Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right), k\in\mathbb{Z}$ thì

A. Hàm số $y=\sin x$ là hàm số nghịch biến.

B. Hàm số $y=\cos x$ là hàm số nghịch biến.

C. Hàm số $y=\tan x$ là hàm số đồng biến.

D. Hàm số $y=\cot x$ là hàm số đồng biến.

Câu 70: Bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)=\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ là:

A.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	-1	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-1

B.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	1

C.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2	↘	-2

D.

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
y	2	↘	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

Câu 71: Cho hàm số $y=\cos\frac{x}{2}$. Bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-\pi;\pi]$ là:

A.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

B.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

C.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0

D.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
y	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm lượng giác.

Câu 72: Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=4\cos\sqrt{x}$ là:

A. 0 và 4. B. -4 và 4.

C. 0 và 1. D. -1 và 1.

Câu 73: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2$ là

A. 0 và $\sqrt{2}-1$. B. -1 và $\sqrt{2}-1$.

C. -2 và -1 . D. -1 và 1.

Câu 74: Cho hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị lớn nhất của hàm số đó là:

A. -1. B. 0. C. 1. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 75: Giá trị lớn nhất của hàm số $\sin^6 x+\cos^6 x$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 76: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+1}{\cos x+2}$ là:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. 0.

Câu 77: Giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$$ là

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{11}$ C. 2 D. $\frac{9}{11}$

Câu 78: Giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=3-\frac{1}{5}\sin^2 x.\cos^2 x \text{ là}$$

A. $\frac{59}{20}$ B. $\frac{14}{5}$ C. 3 D. $\frac{29}{10}$

Câu 79: Giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=4\sin x+2\cos x \text{ là}$$

A. $2\sqrt{5}$ B. $-2\sqrt{5}$ C. 0 D. 20

Câu 80: Hàm số $y=4\sin x-4\cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. -1 B. -4 C. $\frac{-5}{4}$ D. -5

Câu 81: Hàm số $y=3\cot^2 2x-\frac{\sqrt{3}\left(1-\tan^2 x\right)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. 0 B. $3-2\sqrt{3}$ C. $2-2\sqrt{2}$ D. -1

Câu 82: Hàm số $y=2\cos x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $5-2\sqrt{2}$ B. $5+2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$

Câu 83: Tổng của giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x \text{ là}$$

A. $\frac{9}{8}$ B. $\frac{5}{4}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

Câu 84: Giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sin x\sqrt{\cos x}+\cos x\sqrt{\sin x} \text{ là}$$

A. 0 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt[4]{2}$ D. $\sqrt{6}$

Câu 85: Giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{\cos^2 x+7\sin^2 x}+\sqrt{\sin^2 x+7\cos^2 x} \text{ là}$$

A. $1+\sqrt{7}$ B. $-1+\sqrt{7}$ C. 4 D. $\sqrt{14}$

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

Câu 1: Đáp án A.

Hàm số đã cho xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \sin 0 \\ \sin x \neq \sin \pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k2\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

- Nếu giải đến đây ta có thể dễ dàng loại B; C; D vì:
  * Với C thì thiếu $x \neq \pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
  * Với B; D thì không thỏa mãn.
  * Với A. Ta kết hợp gộp nghiệm như ở phần lí thuyết thì ta được $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2: Đáp án B.

Ở đây $\sin 5x$ xác định với mọi số thực x.

Nên ta đi tìm điều kiện cho $\tan 2x$ xác định

$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 3: Đáp án B.

Hàm số đã cho xác định khi

$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4: Đáp án D.

Hàm số đã cho xác định khi

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy hàm số đã cho có tập xác định

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 5: Đáp án B.

Mệnh đề (1) và (2) là mệnh đề đúng.

Mệnh đề (3) và (4) sai.

Sửa lại như sau cho đúng:

(3) Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(4) Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi | k \in \mathbb{Z} \}$.

Câu 6: Đáp án B.

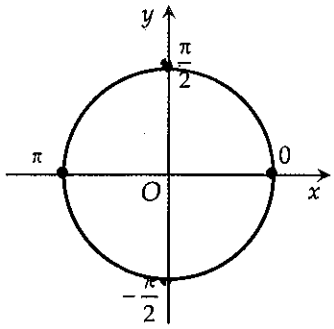
Hàm số đã cho xác định khi $x \geq 0$.

Câu 7: Đáp án D.

Hàm số xác định khi

$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Ta có các điểm biểu diễn nghiệm trên trên đường tròn lượng giác (giải thích cách gộp nghiệm)



4 điểm cách đều nhau trên đường tròn lượng giác nên ta có thể gộp nghiệm thành $0 + \frac{k2\pi}{4} = \frac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

Câu 8: Đáp án B.

Tương tự như Câu 7 hàm số xác định khi

$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 9: Đáp án D.

Hàm số xác định khi $\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 10: Đáp án D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 11: Đáp án A.

Cách 1: Hàm số đã cho xác định khi $\sin x + \cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cách 2:

$\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\cos x \Leftrightarrow \tan x \neq -1$

$\Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

Câu 12: Đáp án D.

Hàm số đã cho xác định khi $\cos x - \sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \neq \sin x \Leftrightarrow \cos x \neq \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} - x + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 13: Đáp án B.

Ta có $\sin 2x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin 2x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 14: Đáp án C.

Ta có $\cos 13x \le 1 < \frac{15}{14} \Rightarrow 15 - 14\cos 13x > 0.$

Vậy hàm số đã cho xác định khi $\tan x$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 15: Đáp án D.

Tương tự như Câu 14, hàm số đã cho xác định khi $\cot 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \ne k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 16: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases} \frac{20 + 19\cos 18x}{1 - \sin x} \ge 0 \\ 1 - \sin x \ne 0 \end{cases}$

Mà $20 + 19\cos 18x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho xác định khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x \ne 1 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 17: Đáp án D.

<u>*Với A:*</u> Hàm số xác định khi $x \ge 0$.

<u>*Với B:*</u> Hàm số xác định khi $\tan 2x$ xác định $\Leftrightarrow 2x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

<u>*Với C:*</u> Hàm số xác định khi $x \ne 0$.

Vậy ta chọn D vì các phương án trên không có phương án nào thỏa mãn hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Kiểm tra lại:

<u>*Với D:*</u> $\frac{\sin 2x + 3}{\cos 4x + 5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 18: Đáp án C.

<u>*Với A:*</u> Hàm số xác định khi $\cos x \ne 0$.

<u>*Với B:*</u> Hàm số xác định khi $\cos x \ne 0$.

<u>*Với C:*</u> Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos 2017x \ne 0 \end{cases}$

Từ đây ta chọn C. Do khác với A và B.

Câu 19: Đáp án D.

Hàm số đã cho xác định khi $\cos x - 1 \ge 0$

Mà $\cos x - 1 \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$, do vậy để hàm số xác định thì $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Câu 20: Đáp án B.

<u>*Cách 1:*</u> Hàm số đã cho xác định khi

$\begin{cases} 1 - \sin 2x \ge 0 \\ 1 + \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le \sin 2x \le 1$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

<u>*Cách 2:*</u> $y = |\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x|$. Tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 21: Đáp án C.

<u>*Với A:*</u> Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định khi $\sin x \ge 0 \Leftrightarrow k2\pi \le x \le \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy A sai.

<u>*Với B:*</u> Hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ xác định khi

$\cos x \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

<u>*Với C:*</u> Hàm số $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}$ xác định khi

$\begin{cases} \sin x \ge 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow k2\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy C đúng, ta chọn C.

Câu 22: Đáp án D.

Ta thấy cả hai hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ và $y = \cot x$ đều xác định khi $\sin x \ne 0$.

Tương tự thì hai hàm số ở mệnh đề II thì hai hàm số đều xác định khi $\cos x \ne 0$.

Câu 23: Đáp án C.

Hàm số xác định khi

$\begin{cases} x \in [0; 2\pi] \\ \sin x \ge 0 \\ \cos x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2\pi \\ 0 \le x \le \pi \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

Câu 24: Đáp án D.

Hàm số xác định khi

$\begin{cases} 0 < x < \pi \\ \cos x \ne 0 \\ \tan x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \pi \\ x \ne \frac{\pi}{2} \\ x \ne \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}.$

Câu 25: Đáp án C.

Hàm số xác định khi

$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \ne 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 26: Đáp án A.

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \ne 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \ne \pi + k\pi \Leftrightarrow x \ne \frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Câu 27: Đáp án B.

Hàm số đã cho xác định khi

$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \tan x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \ne -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ chứa $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ nên hàm số không xác định trong khoảng này.

Câu 28: Đáp án A.

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{x \middle| x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, suy ra (II) sai.

Câu 29: Đáp án A.

Hàm số đã cho xác định khi

$\cos 3x.\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \ne 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{5\pi}{6}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.$$

Câu 30: Đáp án B.

Hàm số $f(x)=\frac{5\sin 2x+3}{12\sin x}+\frac{\sqrt{\cos^2 x}+5}{\cos x}$ khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 31: Đáp án A.

ĐK: $2\sin x+1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x \neq \frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{cases}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \frac{7\pi}{6}+k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 32: Đáp án A.

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $5-3\cos 2x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $\left|1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq 0$.

Hàm số đã cho xác định khi $\Leftrightarrow 1+\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) \neq -1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 33: Đáp án B.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1+\cos x \geq 0$

và $1-\cos x \geq 0 \Rightarrow \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \geq 0$

Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \\ 1-\cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{6} \neq k\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi, k2\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 34: Đáp án A.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $2+\sin x \geq 0, \forall x$.

Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\sin x \geq 0 \\ \tan^2 x-1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq \pm 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 35: Đáp án D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cot^2 x+1 \neq 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3}+2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm lượng giác

Câu 36: Đáp án A.

Với A: TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2\cos(-x)=-2\cos x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 37: Đáp án B.

Với A: Ta có $-2\cos(-x)=-2\cos x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Với B: Ta có:

$-2\sin(-x)=-2.(-\sin x)=2\sin x=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Vậy ta chọn B.

Câu 38: Đáp án B.

Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vậy với $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Ta có

$f(-x)=\sin(-x).\cos^2(-x)+\tan(-x)$

$=-\sin x.\cos^2 x-\tan x=-f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. Đáp án B.

Câu 39: Đáp án A.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

là tập đối xứng.

Ta có

$$f(-x)=\frac{1+\sin^2(-2x)}{1+\cos(-3x)}=\frac{1+(\sin(-2x))^2}{1+\cos(-3x)}=\frac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 40: Đáp án C.

Ta loại I và II do khi $\sin x > 0$ thì

$\sin(-x)=-\sin x<0$, do đó $\sqrt{-\sin x}$ không tồn tại.

Với III: Hàm số xác định khi $\cos x \geq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định của hàm số là tập đối xứng.

Do vậy ta xét

$f(-x)=\sin(-x).\sqrt{\cos(-x)}=-\sin x.\sqrt{\cos x}=-f(x)$.

Vậy III đúng.

Câu 41: Đáp án C.

Với A: Tương tự như Câu 26, thì ta loại A.

Với B: Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\sin^2(-x)=(-\sin x)^2=\sin^2 x$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Với C: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\frac{\cot(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\cot x}{\cos x}=-f(x)$. Vậy hàm số ở phương án C là hàm số lẻ.

Câu 42: Đáp án A.

Ta loại D vì để hàm số đã cho xác định thì $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số không thể là $\mathbb{R}$.

Ta có thể nhanh chóng kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Do $f(-x)=\frac{\tan(-2x)}{\sin^3(-x)}=\frac{-\tan 2x}{-\sin^3 x}=\frac{\tan 2x}{\sin^3 x}=f(x)$.

Câu 43: Đáp án B.

Ta thấy các hàm số ở phương án A; C là các hàm số lẻ, còn ở phương án D là hàm số chẵn. Do vậy ta chọn B.

Thật vậy

$\sqrt{2}\sin\left(-x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Câu 44: Đáp án C.

Hàm số lẻ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, do đó ta đi tìm hàm số lẻ trong bốn hàm số đã cho.

Với bài toán này ta đi tìm hàm số là hàm số lẻ.

Với các bạn tinh ý thì ta có thể chọn luôn C.

Lý giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$ là tập đối xứng.

$f(-x)=\frac{1}{\sin^{2013}(-x)}=\frac{-1}{\sin^{2013}x}=-f(x)$. Vậy hàm số ở phương án C là hàm số lẻ có đồ thị hàm số đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 45: Đáp án B.

Hàm số chẵn có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng do đó ta đi tìm ta đi tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho.

Hàm số ở D loại vì lí do tương tự câu 26.

Hàm số A và C là hàm số lẻ. Do vậy ta chọn B.

Câu 46: Đáp án A.

Với A: TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=(\sin(-x))^{2016}.\cos(-x)=\sin^{2016}x.\cos x$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Các hàm số ở B; C; D đều là hàm số lẻ.

Câu 47: Đáp án D.

(I) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có

$f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-f(x)$

Vậy I đúng.

(II) Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có

$f(-x)=\tan(-x)-\cot(-x)=-\tan x+\cot x=-f(x)$

Vậy II đúng.

Câu 48: Đáp án A.

- Với (I) ta có $f(-x)=\tan(-x)+\cos(-x)$

$=-\tan x+\cos x\neq -f(x)\neq f(x)$

Vậy hàm số ở (I) không phải hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.

- Với (II) ta có $f(-x)=\tan(-x)+\sin(-x)$

$=-\tan x-\sin x=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Vậy ta chọn A.

Câu 49: Đáp án C.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(-x)=1-\sin^2(-x)=1-(-\sin x)^2$

$=1-\sin^2 x=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 50: Đáp án D.

Dễ thấy hàm số $y=\sin 2x$ là hàm số lẻ.

Với B ta có $f(-x)=(-x).\cos(-x)=-x.\cos x=-f(x)$.

Vậy hàm số ở B là hàm số lẻ.

Với C ta có TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$ là tập đối xứng.

$f(-x)=\cos(-x).\cot(-x)=\cos x.(-\cot x)=-f(x)$.

Vậy hàm số ở C là hàm số lẻ. Vậy ta chọn D.

Câu 51: Đáp án A.

Ta chọn luôn A vì ở phần ví dụ ta có đưa ra hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn trên D.

Câu 52: Đáp án A.

Với A: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có

$f(-x)=\frac{1}{2}\sin(-x).\cos(-2x)=-\frac{1}{2}\sin x.\cos 2x=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 53: Đáp án A.

Ta thấy hàm số ở phương án A là hàm số chẵn thì có đồ thị đối xứng qua trục tung, chứ không phải đối xứng qua gốc tọa độ.

Câu 54: Đáp án C.

Tập $D=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\sqrt{\cos(-x)}=\sqrt{\cos x}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 55: Đáp án B.

Với A: Ta có $f(-x)=(-x).\sin^3(-x)=x.\sin^3 x=f(x)$.

Vậy A đúng.

Với B: Tập xác định D là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\sin(-x).\cos(-x)}{\tan(-x)+\cot(-x)}=\dfrac{-\sin x.\cos x}{-(\tan x+\cot x)}$

$=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. Vậy B sai.

Câu 56: Đáp án D.

Với A: Tập xác định của hàm số đã cho là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)-\tan(-x)}{2.\sin(-x)+3\cot(-x)}$

$=\dfrac{-\sin x+\tan x}{-2\sin x-3\cot x}=\dfrac{\sin x-\tan x}{2\sin x+3\cot x}=f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng. Vậy A đúng.

Với B: Ta có

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sin(-x)+\tan(-x)}=\frac{x^2}{-\sin x-\tan x}=-f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng. Vậy B đúng.

Với C: Ta có

$$f(-x)=\frac{\sin^{2008n}(-x)+2009}{\cos(-x)}=\frac{\sin^{2008n}x+2009}{\cos x}=f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng. Vậy C đúng.

Từ đây ta chọn D.

Câu 57: Đáp án C.

Bài toán trở thành tìm hàm số chẵn trong bốn hàm số đã cho phần phương án.

Với A: Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos^{2008n}(-x)+2003}{2012\sin(-x)}$

$=\dfrac{\cos^{2008n}x+2003}{-2012\sin x}=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ, loại.

Với B: Ta có $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)$

$=-\tan x-\cot x=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ, loại.

Với C: Ta có $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{6(-x)^6+4(-x)^4+2(-x)^2+15}$

$=\dfrac{\cos x}{6x^6+4x^4+2x^2+15}=f(x)$. Vậy ta chọn C.

Câu 58: Đáp án A.

Vì $\cos x+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó điều kiện là

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{k\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow$ Tập xác định D là tập đối xứng.

Ta có $f(-x)=\dfrac{\sqrt{\cos(-x)+2}+\cot^2(-x)}{\sin(-4x)}$

$=-\dfrac{\sqrt{\cos x+2}+\cot^2 x}{\sin 4x}=-f(x)$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 59: Đáp án D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Ta có $f(-x)=\cos(-2x).\sin\left(-x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\cos 2x.\sin\left(-x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Ta thấy $\begin{cases}f(-x)\neq f(x)\\ f(-x)\neq -f(x)\end{cases}$

Vậy hàm số đã cho không chẵn không lẻ.

Câu 60: Đáp án C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

$f(-x)=1+2.(-x)^2-\cos 3(-x)=1+2x^2-\cos 3x=f(x)$

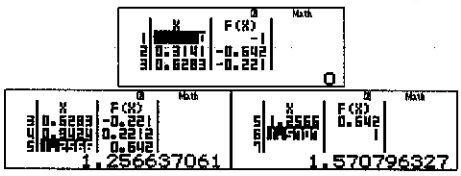
$\Rightarrow$ Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Dạng 3: Xét tính đơn điệu của hàm số lượng giác.

Câu 61: Đáp án A.

Cách 1: Ta thấy trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm $f(x)=\sin x$ đồng biến và hàm $g(x)=-\cos x$ hàm $y=-\cos x$ đồng biến $\Rightarrow$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ hàm số $y=\sin x-\cos x$ đồng biến.

Cách 2: Sử dụng máy tính. Dùng TABLE ta xác định được hàm số $y=\sin x-\cos x$ tăng trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$



Câu 62: Đáp án C.

Ta thấy hàm số $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

Do hàm số $y=\sin x$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến khi

$\frac{\pi}{2}+k2\pi<2x<\frac{3\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Vậy hàm số $y=\sin 2x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{3\pi}{4}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}.$

Câu 63: Đáp án A.

Hàm số $y=\cos 2x$ nghịch biến khi

$k2\pi<2x<\pi+k2\pi \Leftrightarrow k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Câu 64: Đáp án B.

$\forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm $y=\sin x$ giảm và

$\sin x<0, \forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, suy ra hàm $y=\frac{1}{\sin x}$ tăng:

Câu (I) sai. $\forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$: Hàm $y=\cos x$ tăng và

$\cos x<0, \forall x\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, suy ra hàm $y=\frac{1}{\cos x}$ giảm:

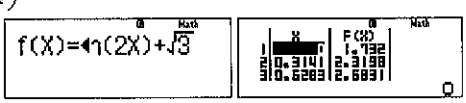
Câu (II) đúng.

Câu 65: Đáp án A.

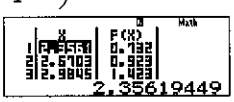
Ta có $y=4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin 2x$

$=2\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{3}\right)-\sin 2x=\sin 2x+\sqrt{3}$

Xét sự biến thiên của hàm số $y=\sin 2x+\sqrt{3}$, ta sử dụng TABLE để xét các mệnh đề. Ta thấy với A. Trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì giá trị của hàm số luôn tăng (hình dưới)



Tương tự trên $\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)$ thì giá trị của hàm số cũng luôn tăng (hình bên)



Câu 66: Đáp án B.

Ta thấy hàm số $y=\tan x$ luôn đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\tan 2x$ luôn đồng biến khi

$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Vậy B sai.

Câu 67: Đáp án A.

Ta có $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Để hàm số $y=\sin x+\cos x$ tăng thì

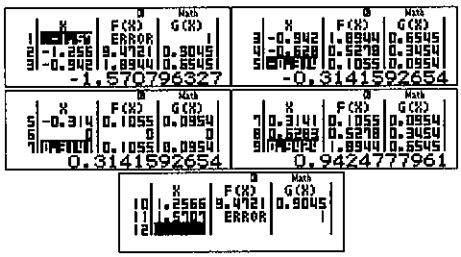
$-\frac{\pi}{2}+k2\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}+k2\pi<x<\frac{\pi}{4}+k2\pi; k\in\mathbb{Z}$

Câu 68: Đáp án C.

Bài toán có hai hàm số mà cùng xét trên một khoảng nên ta sẽ sử dụng chức năng TABLE cho hai hàm

Ấn MODE 7: Nhập $f(x)$ là hàm $\tan^2 x$. Nhập $g(x)$ là hàm $\sin^2 x$ thì ta có kết quả màn hình hiển thị như sau:



Ta thấy cả hai hàm số đều không là hàm tăng trên cả khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vì khi x chạy từ $-\frac{\pi}{2}$ đến 0 thì giá trị của hai hàm số đều giảm.

Khi x chạy từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ thì giá trị của hai hàm số đều tăng, vậy cả hai mệnh đề đều sai.

Câu 69: Đáp án D.

D sai. Thật vậy, với $\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, ta có:

$\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow \cot\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}>-1=\cot\frac{3\pi}{4}$

Câu 70: Đáp án A.

Ta có thể loại phương án B; C; D luôn do tại $f(0)=\cos 0=1$ và $f(\pi)=\cos 2\pi=1$. Các bảng biến thiên B; C; D đều không thỏa mãn.

Câu 71: Đáp án C.

Tương tự như câu 70 thì ta có thể loại A và B do $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tiếp theo xét giá trị hàm số tại hai điểm đầu mút thì ta loại được D.

Dạng 4: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm lượng giác.

Câu 72: Đáp án B.

Tập xác định $D=[0;+\infty)$

Ta có $-1\le\cos\sqrt{x}\le 1, \forall x\in D.$ $\Leftrightarrow -4\le y\le 4$

Vậy $\min\limits_D y=-4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=-1.$

$\max\limits_D y=4\Leftrightarrow\cos\sqrt{x}=1$

Câu 73: Đáp án C.

Ta có $y=\sqrt{1-\cos^2 x}-2=\sqrt{\sin^2 x}-2=|\sin x|-2$

$0\le|\sin x|\le 1\Leftrightarrow -2\le y\le -1$

Câu 74: Đáp án C.

Ta có $-1 \le \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

Câu 75: Đáp án B

Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$

$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\left(1 - 2\sin^2 2x\right)$

$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Ta có $\cos 4x \le 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\cos 4x = 1$.

Câu 76: Đáp án D.

Cách 1: Tương tự như phần lý thuyết đã giới thiệu thì ta thấy $\cos x + 2 > 0, \forall x$

Vậy $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow \sin x + 1 = y\left(\cos x + 2\right)$

$\Leftrightarrow \sin x - y\cos x + 1 - 2y = 0$

Ta có $1^2 + \left(-y\right)^2 \ge \left(1 - 2y\right)^2 \Leftrightarrow y^2 + 1 \ge 4y^2 - 4y + 1$

$\Leftrightarrow 3y^2 - 4y \le 0 \Leftrightarrow 0 \le y \le \frac{4}{3}$

Vậy $\min y = 0$.

Cách 2: Ta có $\begin{cases} \sin x + 1 \ge 0 \\ \cos x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y \ge 0$

$\Rightarrow \min y = 0$ khi $\sin x = -1$.

Câu 77: Đáp án C.

Ta có $2\cos x - \sin x + 4 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$

$\Leftrightarrow 2y\cos x - y\sin x + 4y = \cos x + 2\sin x + 3$

$\Leftrightarrow \left(2y - 1\right)\cos x - \left(y + 2\right)\sin x + 4y - 3 = 0$

Ta có $\left(2y - 1\right)^2 + \left(y + 2\right)^2 \ge \left(4y - 3\right)^2$

$\Leftrightarrow 5y^2 + 5 \ge 16y^2 - 24y + 9$

$\Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{11} \le y \le 2$.

Vậy GTLN của hàm số đã cho là 2.

Câu 78: Đáp án A.

Ta có

$f\left(x\right) = 3 - \frac{1}{5}\sin^2 x.\cos^2 x = 3 - \frac{1}{20}.\left(2\sin x.\cos x\right)^2$

$= 3 - \frac{1}{20}.\sin^2 2x \le 3 - \frac{1}{20} = \frac{59}{20}$

Vậy GTNN của hàm số là $\frac{59}{20}$.

Câu 79: Đáp án B.

Ta có $4^2 + 2^2 \ge y^2 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \le y \le 2\sqrt{5}$

Câu 80: Đáp án D

Ta có $y = 4\left(\sin x - \left(1 - \sin^2 x\right)\right)$

$= 4.\left(\sin^2 x + \sin x - 1\right) = 4.\left(\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \ge -5$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \min y = -5$

Câu 81: Đáp án D.

Ta có $\cot 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2\tan x}$. Từ đây suy ra

$y = 3\cot^2 2x - \frac{2\sqrt{3}\left(1 - \tan^2 x\right)}{2\tan x}$

$= 3\cot^2 2x - 2\sqrt{3}\cot 2x = \left(\sqrt{3}\cot 2x - 1\right)^2 - 1 \ge -1, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $\min y = -1 \Leftrightarrow \cot 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 82: Đáp án C.

Ta có $y = 2\cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow y = 2\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow y = 2\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\sin x + \cos x\right)$

$\Leftrightarrow y = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$

Ta có $y^2 \le \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Leftrightarrow y^2 \le 5 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \le y \le \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

Vậy GTLN của hàm số là $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.

Câu 83: Đáp án A.

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x\cos x$

$\Leftrightarrow y = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin x\cos x$

$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2}.\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2}\left[\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow y = \frac{9}{8} - \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin 2x = \frac{1}{2}$

Câu 84: Đáp án A.

Ta có

$\sin x\sqrt{\cos x} + \cos x\sqrt{\sin x} \ge 2\sqrt{\sin x\cos x\sqrt{\sin x\cos x}}$

$\Leftrightarrow y \ge 2.\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x\sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}} \ge 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

Câu 85: Đáp án C.

Ta có

$y^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left(\cos^2 x + 7\sin^2 x + \sin^2 x + 7\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow y^2 \le 2\left(1 + 7\right) = 16 \Rightarrow y \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $y = 4$.

Phương trình lượng giác

I. Công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản

STUDY TIP
Không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và radian cho một công thức về nghiệm phương trình lượng giác.

a) $\sin f(x)=\sin g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)+k2\pi\\ f(x)=\pi-g(x)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

b) $\cos f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)+k2\pi\\ f(x)=-g(x)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

c) $\tan f(x)=\tan g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

d) $\cot f(x)=\cot g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào nhận $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$ là nghiệm?

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$. B. $\cos x=\sin 2x$.

C. $\cos 4x=-\cos 6x$. D. $\tan 2x=-\tan\frac{\pi}{4}$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP
$(-\sin f(x))=\sin(-f(x))$
$(-\tan f(x))=\tan(-f(x))$
$(-\cot f(x))=\cot(-f(x))$
$(-\cos f(x))=\cos(\pi-f(x))$

A. $\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{4}-2x+k2\pi\\ 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+k\frac{2\pi}{5}\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

B. $\cos x=\sin 2x\Leftrightarrow\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ x=-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{2}-k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Lưu ý
Bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi dùng máy tính để thử nghiệm và kết luận. phần này sẽ được trình bày kỹ hơn trong cuốn Công phá kỹ thuật giải toán CASIO.

C. $\cos 4x=-\cos 6x\Leftrightarrow\cos 4x=\cos(\pi-6x)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=\pi-6x+k2\pi\\ 4x=-(\pi-6x)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}-k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

D. $\tan 2x=-\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\tan 2x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

So sánh ta được đáp án là B.

Ví dụ 2: Phương trình $\sin 2x=-\sin\frac{\pi}{3}$ có nghiệm dạng $x=\alpha+k\pi$ và $x=\beta+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})\left(-\frac{\pi}{4}<\alpha;\beta<\frac{3\pi}{4}\right)$ Khi đó tích α.β bằng:

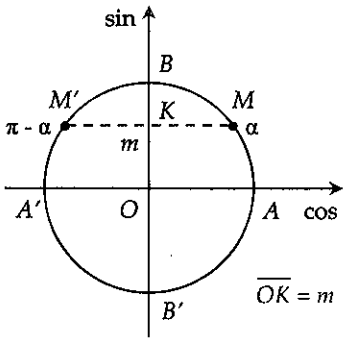
A. $-\frac{\pi^2}{9}$. B. $-\frac{\pi}{9}$. C. $-\frac{4\pi^2}{9}$. D. $\frac{\pi^2}{9}$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $\sin 2x = -\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Rightarrow \alpha.\beta = -\frac{\pi^2}{9}$$



STUDY TIP

+ $\arcsin m$ là cung thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ mà có sin bằng m.

+ Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \le 1$.

II. Phương trình lượng giác cơ bản

Dạng: $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$, $\cot x = m$ $(m \in \mathbb{R})$

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Nếu $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (1) vô nghiệm do $|\sin x| \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $|m| \le 1$:

+ Xác định α sao cho $m = \sin\alpha$

Vậy phương trình $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$ (đọc là ac – sin – m). Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau đây, phương trình nào có tập nghiệm là $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ và $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$?

A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$. B. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: A. $\sin x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ vô nghiệm do $\frac{2}{\sqrt{2}} > 1$.

B. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ (vì $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

C. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

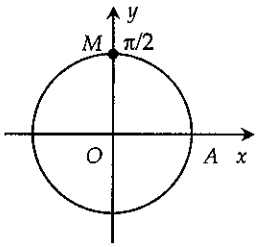
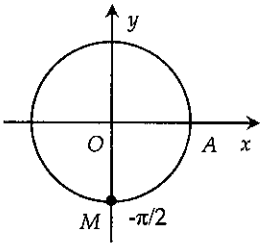
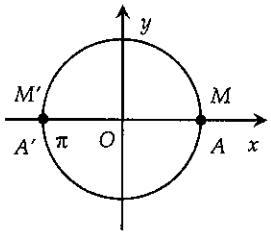
D. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

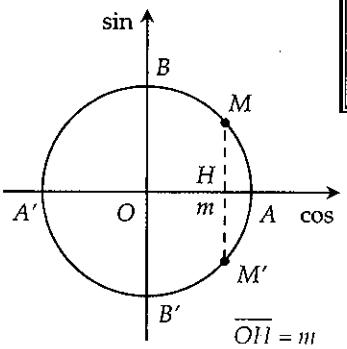
Vậy phương án đúng là C.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ta có $\sin\left(-\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\sin\left(\frac{4\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt:

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\sin x = 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	 sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
+ $\sin x = -1$ $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	 sđ $\overset{\frown}{AM} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$
+ $\sin x = 0$ $\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	sđ $\overset{\frown}{AM} = k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM'} = (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = (2k+1)\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ 



sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$

sđ $\overset{\frown}{AM'} = -\alpha + k2\pi$

STUDY TIP

+ $\arccos m$ là cung thuộc $[0;\pi]$ mà có cos bằng m.

+ Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \le 1$.

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Nếu $|m| > 1 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm (do $|\cos x| \le 1\ \forall x \in \mathbb{R}$)

- Nếu $|m| \le 1$:

+ Xác định α sao cho $\cos\alpha = m$

Vậy phương trình $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

+ Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 \le \alpha \le \pi \\ \cos\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos m$ (đọc là ac – cos – m).

Khi đó $\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 1: Phương trình nào trong các phương trình sau có 2 nghiệm thuộc $(0°;\ 180°)$?

A. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos(x + 50°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos(2x + 30°) = \frac{1}{2}$.

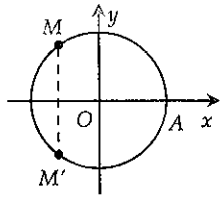
D. $\cos x = -\frac{4}{3}$.

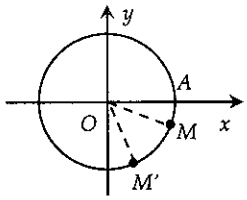
Đáp án C.

Lời giải

A. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos 135^\circ \Leftrightarrow x = \pm 135^\circ + k360^\circ$

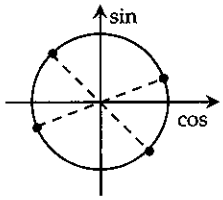
chỉ có một nghiệm $\in (0^\circ;\ 180^\circ)$





B. $\cos(x + 50^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x + 50^\circ) = \cos 30^\circ$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -20^\circ + k360^\circ \\ x = -80^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nào thuộc $(0^\circ;\ 180^\circ)$



C. $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = \cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 30^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x + 30^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k180^\circ \\ x = -45^\circ + k180^\circ \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm thuộc $(0^\circ;\ 180^\circ)$.

D. $\cos x = -\frac{4}{3}$ vô nghiệm do $-\frac{4}{3} < -1$.

Ví dụ 2: Chọn đáp án **sai:**

Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi.\ k \in \mathbb{Z}$

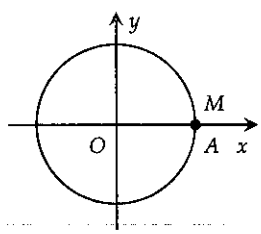
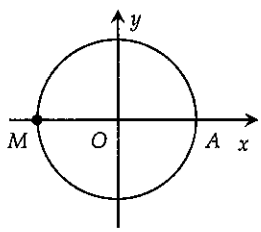
D. $x = \pm 150^\circ + k360^\circ;\ k \in \mathbb{Z}$

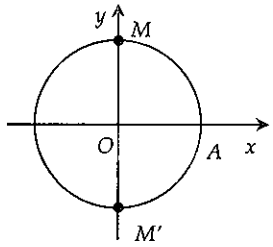
Đáp án A.

Lời giải

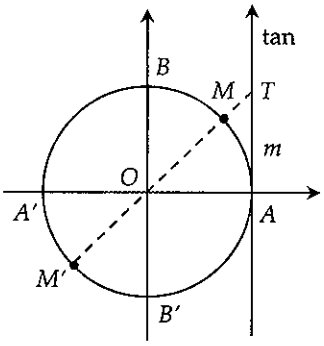
Dễ dàng kiểm tra trên đường tròn lượng giác $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đặc biệt:

Phương trình	Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác
+ $\cos x = 1$ $\Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$M \equiv A$ $\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{AM} = 0 + k2\pi = k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ 
+ $\cos x = -1$ $\Leftrightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	sđ $\overset{\frown}{AM} = \pi + k2\pi$ $= (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ 

+ $\cos x = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ sđ $\overset{\frown}{AM'} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ Để ý: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ 

3. Phương trình $\tan x = m, \cot x = m$



$\overline{AT} = m$

a) Phương trình $\tan x = m$

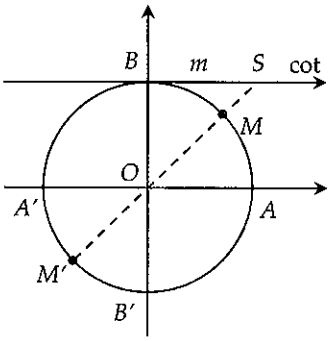
Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

- Ta xác định α sao cho $m = \tan\alpha$

Khi đó phương trình $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

- Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arctan m$ (đọc là ac – tan – m).

Khi đó phương trình $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$



$\overline{BS} = m$

b) Phương trình $\cot x = m$

Điều kiện: $x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

- Ta xác định α sao cho $m = \cot\alpha$

Khi đó phương trình $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

- Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot\alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} m$ (đọc là ac – cotang – m).

Khi đó phương trình $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

STUDY TIP

Phương trình $\tan x = m$
$\cot x = m$
luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Trong các nghiệm dương bé nhất của các phương trình sau, phương trình nào có họ nghiệm nhỏ nhất?

A. $\tan 2x = 1$. B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. C. $\cot x = 0$. D. $\cot x = -\sqrt{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

A. $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$ (với $k = 0$ nên nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{8}$)

B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{7\pi}{12}$.

C. $\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{2}$.

D. $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Chọn $k = 1 \Rightarrow$ Nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $x = \frac{\pi}{8}$ nên ta chọn đáp án A.

Ví dụ 2: Phương trình $\tan(3x - 15°) = \sqrt{3}$ có các nghiệm là:

A. $x = 60° + k180°$. B. $x = 75° + k180°$.

C. $x = 75° + k60°$. D. $x = 25° + k60°$.

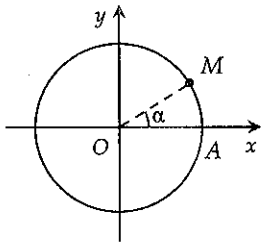
Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $\tan(3x - 15°) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 15°) = \tan 60°$

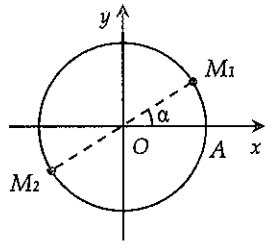
$\Leftrightarrow 3x - 15° = 60° + k180° \Leftrightarrow x = 25° + k60° \ (k \in \mathbb{Z})$

Kỹ năng biểu diễn và tổng hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác



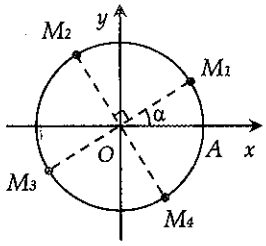
1 điểm trên đường tròn lượng giác

$x = \alpha + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

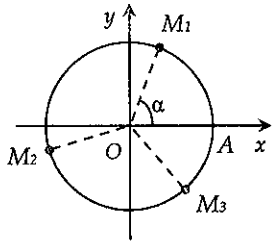


2 điểm đối xứng qua gốc O

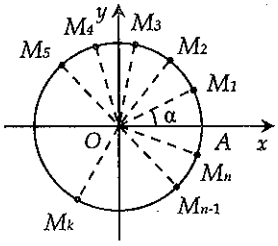
$x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$



4 điểm cách đều: $x = \alpha + k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}$



3 điểm cách đều: $x = \alpha + k\frac{2\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$



n điểm cách đều: $x = \alpha + k\frac{2\pi}{n};\ k \in \mathbb{Z}$

III. Một số phương trình lượng giác thường gặp

Dạng 1 Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

STUDY TIP

Dạng:

$a\sin f(x)+b=0$

$a\cos f(x)+b=0$

$a\tan f(x)+b=0$

$a\cot f(x)+b=0$

Có dạng $at+b=0$ với $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

t là một hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

$at+b=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{b}{a}$ (đây là phương trình lượng giác cơ bản đã học)

Ví dụ 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào có 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$?

A. $\sqrt{3}\sin x-2=0$. B. $2\cos x+1=0$.

C. $\sqrt{3}\tan x+1=0$. D. $\sqrt{2}\sin x-1=0$.

Đáp án D.

Lời giải

A. $\sqrt{3}\sin x-2=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ vô nghiệm. (loại phương án A)

B. $2\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

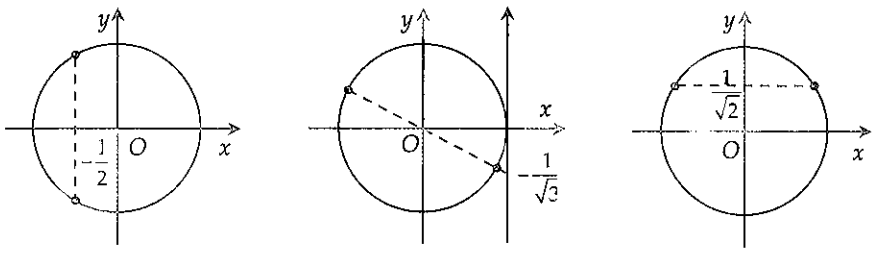
C. $\sqrt{3}\tan x+1=0\Leftrightarrow \tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Có 1 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

D. $\sqrt{2}\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Có 2 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Lưu ý: Để giải nhanh các bạn có thể biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi so sánh để đưa ra đáp án một cách dễ dàng.



B. $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ C. $\tan x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

STUDY TIP

Một số phương trình phải qua một vài bước biến đổi đưa về phương trình bậc nhất với một hàm số lượng giác.

Ví dụ 2: Tổng hai nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$ là:

A. $\dfrac{5\pi}{6}$. B. $\dfrac{\pi}{2}$. C. $\dfrac{7\pi}{6}$. D. $\dfrac{\pi}{6}$.

Đáp án B.

STUDY TIP

$\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$

$\sin^6 a+\cos^6 a=1-\frac{3}{4}\sin^2 2a$

$1+\sin 2a=(\sin a+\cos a)^2$

$1-\sin 2a=(\sin a-\cos a)^2$

Lời giải

Ta có: $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$=1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5+3\cos 4x}{8}$

$\Rightarrow \frac{5+3\cos 4x}{8}=\frac{7}{16}\Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\4x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Có 2 nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1=\frac{\pi}{6}$ và $x_2=\frac{\pi}{3}$

Vậy $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

Dạng 2 Phương trình bậc hai (hoặc phương trình đưa về phương trình bậc hai) đối với một hàm số lượng giác

STUDY TIP

Dạng:

$a\sin^2 f(x)+b\sin f(x)+c=0$

$a\cos^2 f(x)+b\cos f(x)+c=0$

$a\tan^2 f(x)+b\tan f(x)+c=0$

$a\cot^2 f(x)+b\cot f(x)+c=0$

Có dạng: $at^2+bt+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$

t là một hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

- ***Bước 1:*** Đặt ẩn phụ, tìm điều kiện của ẩn phụ.
- ***Bước 2:*** Giải phương trình ẩn phụ.
- ***Bước 3:*** Từ nghiệm tìm được đưa về phương trình lượng giác cơ bản.

STUDY TIP

Một số công thức hay sử dụng:

$\sin^2 a=1-\cos^2 a$

$\cos^2 a=1-\sin^2 a$

$\frac{1}{\cos^2 a}=1+\tan^2 a$

$\frac{1}{\sin^2 a}=1+\cot^2 a$

$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$

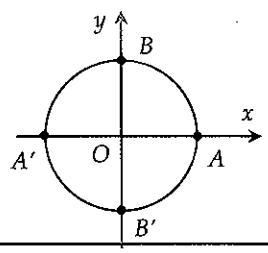
$\cos 2a=2\cos^2 a-1$

$\cos 2a=1-2\sin^2 a$

Ví dụ 1: Các điểm A,A',B,B' được biểu diễn trên đường tròn lượng giác thì các nghiệm của phương trình $\sin^2 x+4\sin x+3=0$ là:

A. sđ $\overset{\frown}{AB}$ B. sđ AA'.

C. sđ $\overset{\frown}{AB'}$ D. sđ $\overset{\frown}{AB}$ và sđ $\overset{\frown}{AB'}$.



Đáp án C.

Lời giải

Đặt $\sin x=t\Rightarrow t=[-1;1]\ \forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $\sin^2 x+4\sin x+3=0\Leftrightarrow t^2+4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-3\ (loai)\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là sđ $\overset{\frown}{AB'}$.

Lưu ý

Bạn có thể nhẩm nghiệm nhanh để được:

$\sin^2 x+4\sin x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\\sin x=-3\ (VN)\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ kết quả.

Ví dụ 2: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}$ là:

A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $-\frac{5\pi}{6}$. C. $-\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{2\pi}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

+ Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+\cot^2 x\right) = 3\cot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cot^2 x - 3\cot x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x = 0\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{2}$.

STUDY TIP
+ $\cot x$ tồn tại thì không phải xét $\sin x \neq 0$.
+ $\tan x$ tồn tại thì không phải xét $\cos x \neq 0$.

Ví dụ 3: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$ của phương trình $\sin^4\dfrac{x}{2} + \cos^4\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin x$ là:

A. 207046π. B. 206403π. C. 205761π. D. 204603π.

Đáp án B.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2}\right)^2 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin x$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x = 1 - 2\sin x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 4 \ (\text{VN})\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$0 < x < 2018 \Leftrightarrow 0 < k\pi < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \dfrac{2018}{\pi} \Rightarrow k \in \{1,2,3...,642\}$

Vậy tổng các nghiệm cần tìm là:

$S = \pi + 2\pi + 3\pi + ... + 642\pi = \pi(1+2+3+...+642) = \dfrac{642(642+1)}{2}\pi = 206403\pi$.

STUDY TIP
$1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Lưu ý

Bạn có thể sử dụng máy tính nhập như sau:

$$\sum_{X=1}^{642} \pi X$$

Dạng 3 Phương trình bậc nhất đối với $\sin x, \cos x$

Có dạng $a\sin x + b\cos x = c$ (1) trong đó $\begin{cases} a,b,c \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$

Phương pháp giải: Chia cả 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha \end{cases}$ (vì luôn có $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$)

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (2) (đây là phương trình lượng giác cơ bản)

STUDY TIP
$\sin x\cos\alpha \pm \cos x\sin\alpha = \sin(x \pm \alpha)$
$\cos x\cos\alpha \pm \sin x\sin\alpha = \cos(x \mp \alpha)$

Nhận xét:

STUDY TIP

Với $a^2+b^2\neq 0$ thì:

+ PT $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$

+ Nếu $a=0$ hoặc $b=0$ đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

+ Phương trình $\sin(x+\alpha)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ có nghiệm khi:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\leq 1\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2+b^2}\leq 1\Leftrightarrow a^2+b^2\geq c^2$$

+ Bạn có thể đặt $\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha\\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha\end{cases}$

$$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \cos x.\cos\alpha+\sin x.\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Việc đặt thế nào thì tùy từng bài để được lời giải hợp lý nhất.

Ví dụ 1: Phương trình $m\sin x-\cos x=1$ với m là tham số vô nghiệm khi:

A. $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m=0$.

Đáp án C.

Lời giải

+ Ta đi tìm m để phương trình $m\sin x-\cos x=1$ có nghiệm rồi lấy phần bù.

+ Ta có: Phương trình $m\sin x-\cos x=1$ (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow m^2+(-1)^2\geq 1^2\Leftrightarrow m^2\geq 0\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $\forall m\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ phương trình $m\sin x-\cos x=1$ vô nghiệm khi $m\in\varnothing$.

STUDY TIP

$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin x\pm\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\sqrt{3}\sin x\pm\cos x=2\sin\left(x\pm\dfrac{\pi}{6}\right)$

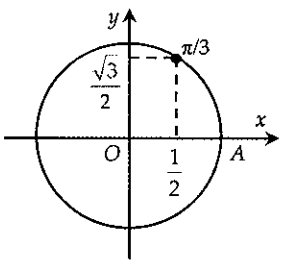
Ví dụ 2: Nghiệm của phương trình $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Đáp án A.

Lời giải



Có $\begin{cases}\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\dfrac{1}{2}$ (chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$)

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Ví dụ 3: Gọi a, b lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\dfrac{\cos x-\sin 2x}{2\cos^2 x-\sin x-1}=\sqrt{3}$, ta có:

A. $a.b=0$. **B.** $a.b=\dfrac{11\pi^2}{6}$. **C.** $a.b=-\dfrac{11\pi^2}{6}$. **D.** $a.b=-\dfrac{\pi^2}{36}$.

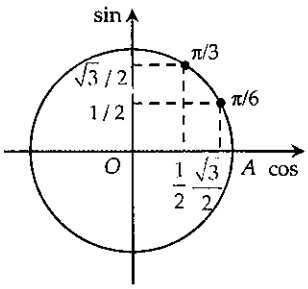
Đáp án C.

Lời giải

+ Điều kiện: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -1 \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(2\cos^2 x - 1 - \sin x\right)$



$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(\cos 2x - \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ (chia hai vế cho 2)

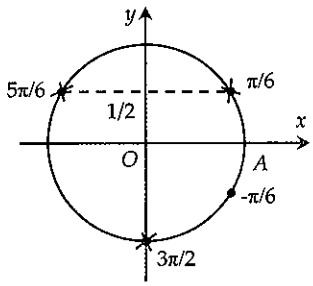
$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}.\sin x + \sin\dfrac{\pi}{6}.\cos x = \cos\dfrac{\pi}{3}.\sin 2x + \sin\dfrac{\pi}{3}.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{6} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{6} = \pi - 2x - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + (2k+1)\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ Phương trình có các nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{6} - k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Chọn $k = 1 \Rightarrow a = \dfrac{11\pi}{6}$; $k = 0 \Rightarrow b = -\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow a.b = -\dfrac{11\pi^2}{36}$.

STUDY TIP

Đối với phương trình chứa điều kiện $\neq \mathbb{R}$ thì phải biểu diễn điều kiện và nghiệm trên cùng một đường tròn lượng giác để so sánh.

Ví dụ 4: Phương trình $3\sin 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x + 4\sin^3 3x$ có số nghiệm trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Đáp án D.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 9x + \sqrt{3}\cos 9x = 2\cos x \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 9x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{6}\sin 9x + \cos\dfrac{\pi}{6}\cos 9x = \cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(9x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \dfrac{\pi}{6} = x + k2\pi \\ 9x - \dfrac{\pi}{6} = -x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{48} + k\dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{60} + k\dfrac{\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

STUDY TIP

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

Mẹo nhớ:

Sin 3 – 4

Cos 4 – 3

- *TH1:* $x=\frac{\pi}{48}+k\frac{\pi}{4}$. Chọn $k=\{0;1\}\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{48};\frac{13\pi}{48}\right\}\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

- *TH2:* $x=\frac{\pi}{60}+k\frac{\pi}{5}$. Chọn $k=\{0;1;2\}\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{60};\frac{13\pi}{60};\frac{5\pi}{12}\right\}\subset\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Vậy phương trình có 5 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Dạng 4 Phương trình đẳng cấp

Là phương trình dạng $f(\sin x;\cos x)=0$ trong đó lũy thừa của $\sin x$ và $\cos x$ cùng bậc chẵn hoặc lẻ.

STUDY TIP

- PT $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d$ là phương trình đẳng cấp bậc 2.
- Số thực $d=d(\sin^2 x+\cos^2 x)$ có thể hiểu là một biểu thức bậc 2 với $\sin x;\cos x$.

Phương pháp giải:

- ***Bước 1:*** Xét $\cos x=0\Rightarrow$ Kết luận nghiệm.
- ***Bước 2:*** Xét $\cos x\neq 0$, ta chia 2 vế của phương trình cho $\cos^n x$ (n là bậc cao nhất) đưa về phương trình bậc cao của $\tan x$.

Ví dụ 1: Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=2$ (1) là:

A. $x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

B. $x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Đáp án C.

Lời giải

STUDY TIP

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

+ Với $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$. Thay vào phương trình (1) $\Leftrightarrow 2=2$ luôn đúng

$\Rightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ là nghiệm của (1).

+ Với $\cos x\neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

$(1)\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2.\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x-5\tan x-1=2(1+\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow\tan x=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Kết luận: Nghiệm của phương trình (1) là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{3}{5}\right)+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

Lưu ý:

- Khi nhìn các phương án trả lời của bài này bạn phải chia 2 vế cho $\cos^2 x\neq 0$ để đưa về phương trình bậc 2 theo $\tan x$.
- Tuy nhiên đối với các phương án trả lời có nghiệm biểu diễn dạng khác. Bạn đọc có thể giải theo các cách sau:

+ Xét $\sin x=0$ không thỏa mãn phương trình (1)

+ Với $\sin x\neq 0$, chia cả 2 vế cho $\sin^2 x$ đưa về phương trình bậc 2 theo $\cot x$.

- Hoặc dùng công thức hạ bậc để đưa về phương trình bậc nhất với sin và cos:

(1) $\Leftrightarrow 2.\frac{1-\cos 2x}{2}-5.\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=2$

$\Leftrightarrow 5\sin 2x+3\cos 2x=-3$ (đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$; $\cos 2x$ đã học trong phần trước)

- Hoặc (1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$ (đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)

Ví dụ 2: Tổng 2 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất của phương trình:

$4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$ bằng:

A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $-\frac{5\pi}{2}$. C. $-\frac{5\pi}{4}$. D. $-\pi$.

Đáp án B.

Lời giải

- ***TH1:*** $\cos x=0\Leftrightarrow \sin^2 x=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.$

+ Với $\sin x=1\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 3=0$ (vô nghiệm)

+ Với $\sin x=-1\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 5=0$ (vô nghiệm)

Vậy $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.

- ***TH2:*** Với $\cos x\neq 0$, chia 2 vế cho $\cos^3 x$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow 4.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}=0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x-\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\left(1+\tan^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan^2 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x-1\right)\left(3\tan^2 x+2\tan x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x-1=0\\ 3\tan^2 x+2\tan x+1=0\ (\text{VN})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

- Với $k=-1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$

- Với $k=-2\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{3\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}=-\frac{5\pi}{2}$.

Nhận xét: Đây là phương trình cùng bậc lẻ do có biến đổi sau:

$4\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$

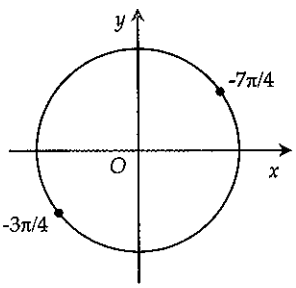
$\Leftrightarrow 4\sin^3 x-\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\cos x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$

là phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với $\sin x;\cos x$.

STUDY TIP

Có thể sử dụng đường tròn lượng giác để xác định nghiệm âm lớn nhất.



STUDY TIP

Cách biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

+ Đuôi $k2\pi$ có 1 điểm.

+ Đuôi $\frac{k2\pi}{2}=k\pi$ có 2 điểm.

+ Đuôi $\frac{k2\pi}{3}$ có 3 điểm.

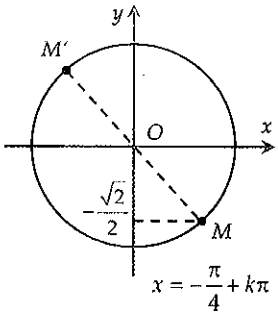
+ Đuôi $\frac{k2\pi}{4}=k\frac{\pi}{2}$ có 4 điểm.

+ Đuôi $\frac{k2\pi}{n}$ có n điểm

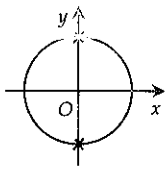
Ví dụ 3: Phương trình $1+3\tan x=2\sin 2x$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp án B.



Lời giải



+ Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \# \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

+ Phương trình $\Leftrightarrow 1+3\frac{\sin x}{\cos x}=4\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$ (*)

Đến đây ta thấy phương trình (*) có cùng bậc lẻ bậc cao nhất là 3, ta chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}+3\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=4\tan x$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x-2\tan x+1)=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ (TMĐK)

$\Rightarrow$ Số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 2.

Lưu ý

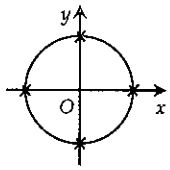
Ở đây ta có thể từ phương trình đầu chia ngay cho $\cos^2 x$ sẽ nhanh hơn. Tuy nhiên nó sẽ không tự nhiên bởi bạn chưa nhận ra được dạng quen thuộc của bài toán.

Ví dụ 4: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ở cung phần tư thứ I và thứ III của đường tròn lượng giác là:

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Đáp án B.

Lời giải



+ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2} \ (k\in\mathbb{Z})$

+ Phương trình $\Leftrightarrow 8\sin^2 x\cos x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ (cùng bậc lẻ)

Chia 2 vế cho $\cos^3 x\neq 0$ (do điều kiện)

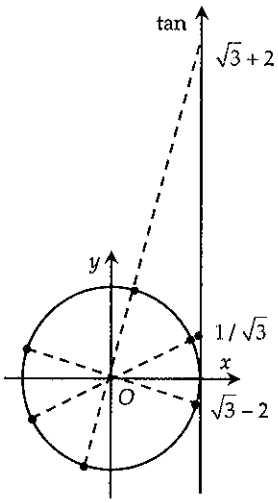
Phương trình $\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)$

$\Leftrightarrow 8\tan^2 x=\sqrt{3}\tan x(1+\tan^2 x)+(1+\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x-7\tan^2 x+\sqrt{3}\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \left(\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}\tan^2 x-6\tan x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \tan x=\sqrt{3}+2\\ \tan x=\sqrt{3}-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\arctan(\sqrt{3}+2)+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\\ x=\arctan(\sqrt{3}-2)+k\pi\end{array}\right.$$



Dựa vào việc biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác (hình bên), ta thấy số điểm biểu diễn nghiệm cần tìm là 4 $\Rightarrow$ Đáp án B.

Ví dụ 5: Các nghiệm của phương trình $\tan x+\cot x=2\sin 2x+\cos 2x$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

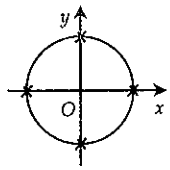
B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\text{arccot}\frac{1}{2}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\arctan\frac{1}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Đáp án A.

Lời giải



+ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

+ Phương trình $\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow\sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x.\cos x.\sin 2x+\sin x.\cos x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow 1=\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$ (*) (đây là phương trình đẳng cấp bậc 2)

Chia 2 vế cho $\sin^2 2x\neq 0$ (do điều kiện) ta được:

Phương trình (*) $\Leftrightarrow\frac{1}{\sin^2 2x}=1+\frac{1}{2}\cot 2x$

$\Leftrightarrow 1+\cot^2 2x=1+\frac{1}{2}\cot 2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cot 2x=0\\ \cot 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=\text{arccot}\frac{1}{2}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$ (TMĐK)

Nhận xét:

- Với $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 2x\neq 0$ nên ta chia luôn 2 vế cho $\sin^2 2x$ để khỏi phải chia 2 trường hợp, bài giải sẽ ngắn gọn hơn.
- Khi giải mà kết quả nghiệm có $\text{arccot}\,a$ thì nên chia 2 vế cho $\sin^2 x\neq 0$ và nếu kết quả nghiệm có $\arctan a$ thì nên chia 2 vế cho $\cos^2 x\neq 0$.

Dạng 5 Phương trình đối xứng với $\sin x$ và $\cos x$

Dạng: $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x=c$ (1) trong đó $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a.b\neq 0\end{cases}$

STUDY TIP

$\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$

Phương pháp giải:

+ Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ (vì $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1;1]\ \forall x\in\mathbb{R}$)

+ $t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow at+b.\dfrac{t^2-1}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 ẩn t)

Ví dụ 1: Phương trình $\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Đáp án C.

Lời giải

$\sin x+\cos x-1=2\sin x\cos x$ (1)

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\ \forall x\in\mathbb{R}$

$t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

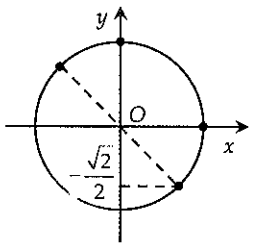
$\Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow t-1=2.\dfrac{t^2-1}{2}\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$ (TMĐK)

- Với $t=0\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=1\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Kết luận: Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=k2\pi\\x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$



$\Rightarrow$ Có 4 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

STUDY TIP
Có bao nhiêu điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác các nghiệm của phương trình thì phương trình đó có bấy nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Chú ý: Với phương trình $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x=c$ (2)

+ Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\ \forall x\in\mathbb{R}$

+ $t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$

$\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow at+b.\dfrac{1-t^2}{2}=c$ (là phương trình bậc 2 ẩn t)

Một số sách gọi phương trình này là phản đối xứng đối với $\sin x$, $\cos x$.

Ví dụ 2: Phương trình $1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp án B.

STUDY TIP

Dạng: $a(\sin x-\cos x)+$
$+b\sin x\cos x+c=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x$,
$t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$
$\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$t^2=1-\sin 2x\Rightarrow \sin 2x=1-t^2$

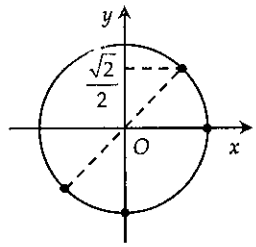
$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow 1+t-\left(1-t^2\right)=0\Leftrightarrow t^2+t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-1\end{array}\right.$ (TMĐK)

- Với $t=0\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\x-\dfrac{\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=k2\pi\\x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$



$\Rightarrow$ Có 2 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là $x=0$ và $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Cách 2: Nhận thấy phương trình có $\sin x-\cos x$ và $1-\sin 2x$ có nhân tử chung là $\sin x-\cos x$ nên ta có:

STUDY TIP

$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$
$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$

$1+\sin x-\cos x-\sin 2x=0$
$\Leftrightarrow \sin x-\cos x+1-\sin 2x=0$
$\Leftrightarrow \sin x-\cos x+(\sin x-\cos x)^2=0$
$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\1+\sin x-\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\1+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\x=k2\pi\\x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Lưu ý

Với ví dụ 1, ta cũng có thể giải được cách này.

Ví dụ 3: Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ trên $(0;2\pi)$ là:

A. π. B. 2π. C. 3π. D. 4π.

Đáp án C.

Lời giải

$\sin x\cos x+\left|\cos x+\sin x\right|=1$ (3)

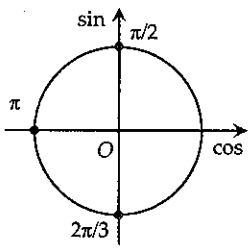
Đặt $t=\left|\cos x+\sin x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow \dfrac{t^2-1}{2} + t = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \ \ (loai) \end{array}\right.$

- Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\left|\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$



$\Rightarrow$ Có 3 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x = \dfrac{\pi}{2}$; $x = \pi$ và $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Tổng 3 nghiệm trên là $\dfrac{\pi}{2} + \pi + \dfrac{3\pi}{2} = 3\pi$.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình:

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - m = 0 \text{ có nghiệm.}$$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Đáp án C.

Lời giải

$\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - m = 0 \Leftrightarrow \sin 2x + \sin x - \cos x - m = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \forall x \in \mathbb{R}$

$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

Ta đi tìm m để phương trình $1 - t^2 + t - m = 0$ có nghiệm $t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow m = -t^2 + t + 1$ (*) có nghiệm $t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Xét $f(t) = -t^2 + t + 1$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\dfrac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f(t)$	$-1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{4}$	$\searrow$	$-1+\sqrt{2}$

$\Rightarrow -1 - \sqrt{2} \le f(t) \le \dfrac{5}{4} \ \forall t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) $\Leftrightarrow m = f(t)$ có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

STUDY TIP

Bảng biến thiên:

+ $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$-\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$-\infty$

+ $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

$\Leftrightarrow m\in\left[-1-\sqrt{2};\frac{5}{4}\right]$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2,-1,0,1\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn.

Ví dụ 5: Phương trình $\cos^3x+\sin^3x=\cos 2x$ có tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất là:

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{4}$. **C.** $\frac{7\pi}{2}$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

+) $\cos^3x+\sin^3x$
$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$

+) $\cos 2x=(\cos x+\sin x)$
$\times(\cos x-\sin x)$

+) $1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2$

Ba biểu thức cùng có nhân tử là $(\sin x+\cos x)$

$\cos^3x+\sin^3x=\cos 2x$

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos^2x-\sin x\cos x+\sin^2x)=\cos^2x-\sin^2x$

$\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (1)\\ 1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

- Giải (1) $\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

- Giải (2) $\Leftrightarrow 1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

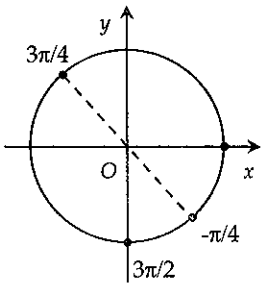
Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện: $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

$\Rightarrow(2)\Leftrightarrow 1-\frac{1-t^2}{2}+t=0\ \Leftrightarrow t^2+2t+1=0\Leftrightarrow t=-1$ (TMĐK)

$\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$



Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác $\Rightarrow$ Nghiệm âm lớn nhất là $x_1=-\frac{\pi}{4}$ và nghiệm dương bé nhất là $x_2=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

IV. Một số phương trình lượng giác không mẫu mực

STUDY TIP

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

Ví dụ 1: ***Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích***

Phương trình $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ có số điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

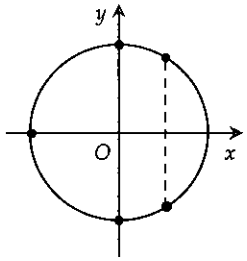
Đáp án D.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(\cos 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x+2\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x+\cos x)=0 \Leftrightarrow 4\cos x.\cos\frac{3x}{2}.\cos\frac{x}{2}=0$



$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$$

Dựa vào điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác $\Rightarrow$ Có 5 điểm.

STUDY TIP

Phương trình (1) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình (2) nếu tập nghiệm của phương trình (1) chứa tập nghiệm của phương trình (2)

Ví dụ 2: ***Phương trình sử dụng công thức hạ bậc***

Phương trình $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ không phải là phương trình hệ quả của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. B. $\cos x=0$. C. $\sin 9x=0$. D. $\cos 2x=0$.

Đáp án D.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow(\cos 12x+\cos 10x)-(\cos 8x+\cos 6x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x-2\cos 7x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0$

$\Leftrightarrow -4\cos x\sin 9x\sin 2x=0$

$$\Leftrightarrow -8\cos^2 x.\sin x.\sin 9x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=0\\ \sin 9x=0\end{array}\right.$$

STUDY TIP

$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin 2a$

$\Rightarrow\cos 2x=0$ không phải là phương trình hệ quả.

Chú ý: Bạn đọc có thể giải các phương trình đơn giản ở các phương án rồi thay vào phương trình ban đầu để kiểm tra.

Ví dụ 3: ***Sử dụng công thức tích thành tổng***

Cho phương trình $\cos x\cos 5x=\cos 2x\cos 4x$. Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là:

A. 3. B. 4. C. 6. D. 8.

Đáp án C.

Lời giải

STUDY TIP

$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos(x-5x)+\cos(x+5x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(2x-4x)+\cos(2x+4x)\right]$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 6x=\cos 2x+\cos 6x$

$\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=2x+k2\pi\\4x=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=k\frac{\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{3}=k\frac{2\pi}{6}\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy số điểm biểu diễn nghiệm là 6.

Ví dụ 4: ***Sử dụng công thức nhân ba***

Phương trình $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;14]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Đáp án B.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4\left(2\cos^2 x-1\right)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Mà $x\in[0;14]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le 14 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le\frac{14}{\pi}-\frac{1}{2} \Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc $[0;14]$.

STUDY TIP

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

Ví dụ 5: ***Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt***

Phương trình $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Đáp án B.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right]-3\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\pi\right]=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos(-2x)-3\sin(-x)=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x-1-2\sin x=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\\sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

+ Xét $x=k\pi\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)\Rightarrow k\in\{1,2\}\Rightarrow x=\pi;\ x=2\pi.$

+ Xét $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)\Rightarrow k\in\{1\}\Rightarrow x=\frac{13\pi}{6}$.

+ Xét $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\in\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)\Rightarrow k\in\{0,1\}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{6};\ x=\frac{17\pi}{6}$.

Vậy phương trình có 5 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$.

Ví dụ 6: ***Hạ bậc cao***

Cho các phương trình sau: (1) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x$

(2) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$

(3) $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{97}{128}$

(4) $\sin^8 2x+\cos^8 2x=\frac{1}{8}$

Phương trình không tương đương với một trong các phương trình còn lại là:

A.(1). B.(2). C.(3). D.(4).

Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $\sin^8 x+\cos^8 x=\left(\sin^2 x\right)^4+\left(\cos^2 x\right)^4$

$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^4+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left[\left(1-\cos 2x\right)^4+\left(1+\cos 2x\right)^4\right]$

Đặt $\cos 2x=t$; $t\in[-1;1]\Rightarrow\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{16}\left[\left(1-t\right)^4+\left(1+t\right)^4\right]$

$=\frac{1}{16}\left(t^4-4t^3+6t^2-4t+1+t^4+4t^3+6t^2+4t+1\right)$

$=\frac{1}{16}\left(2t^4+12t^2+2\right)=\frac{1}{16}\left(2\cos^4 2x+12\cos^2 2x+2\right)$

STUDY TIP

+) $\sin^8 x+\cos^8 x$

$=\frac{1}{16}\left(2\cos^4 2x+12\cos^2 2x+2\right)$

+) $\left(t+1\right)^4+\left(t-1\right)^4$

$=2t^4+12t^2+2$

- Giải (1) $\Leftrightarrow\frac{1}{16}\left(2\cos^4 2x+12\cos^2 2x+2\right)=\frac{17}{16}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 2x-5\cos^2 2x+2=0\ \Leftrightarrow\boxed{\cos^2 2x=\frac{1}{2}}$

- Giải (2) $\Leftrightarrow\frac{1}{16}\left(2\cos^4 2x+12\cos^2 2x+2\right)=\frac{17}{32}$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x+24\cos^2 2x-13=0\ \Leftrightarrow\boxed{\cos^2 2x=\frac{1}{2}}$

- Giải (3) $\Leftrightarrow\frac{1}{16}\left(2\cos^4 2x+12\cos^2 2x+2\right)=\frac{97}{128}$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 2x-12\cos^2 2x-\frac{81}{8}=0\ \Leftrightarrow\boxed{\cos^2 2x=\frac{3}{4}}$

- Giải (4) $\Leftrightarrow\frac{1}{16}\left(2\cos^4 4x+12\cos^2 4x+2\right)=\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x+12\cos^2 4x=0\Leftrightarrow\cos^2 4x=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{\cos^2 2x=\frac{1}{2}}$

Vậy phương trình (3) không tương đương với các phương trình còn lại.

Ví dụ 7: ***Biểu diễn tổng của các đại lượng không âm***

Phương trình $\cos 2x-\cos 6x+4\left(3\sin x-4\sin^3 x+1\right)=0$ có phương trình tương đương là:

A. $\cos x=0$. B. $\sin 3x+1=0$.

C. $\cos x\left(\sin 3x+1\right)=0$. D. $\sin x-1=0$.

Lưu ý

Có thể thử các nghiệm trong các đáp án vào phương trình đã cho nếu thỏa mãn thì 2 phương trình tương đương.

STUDY TIP

$\begin{cases}A\ge 0\\B\ge 0\end{cases}\Rightarrow A+B=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$

Đáp án D.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\left(1-2\sin^2 3x\right)+4\left(\sin 3x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin^2 3x+4\sin 3x+2=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+2\left(\sin 3x+1\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin 3x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.\\ -4\sin^3 x+3\sin x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow \sin x-1=0.$

Ví dụ 8: ***Đặt ẩn phụ - công thức nhân ba***

Phương trình $\sin\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)$ có tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ là:

A. $\frac{9\pi}{5}$. B. $\frac{9\pi}{15}$. C. $\frac{10\pi}{3}$. D. $\frac{10\pi}{6}$.

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Rightarrow \frac{3x}{2}=\frac{9\pi}{10}-3t$

$\Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{9\pi}{10}-3t\right)$

$\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\pi-3t\right)\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\sin 3t$

$\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow \sin t\left(1-4\sin^2 t\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \sin^2 t=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi & \Rightarrow x=\frac{3\pi}{5}\in\left[0;2\pi\right]\\ x=\frac{14\pi}{15}-k2\pi & \Rightarrow x=\frac{14\pi}{15}\in\left[0;2\pi\right]\\ x=\frac{4\pi}{15}-k2\pi & \Rightarrow x=\frac{4\pi}{15}\in\left[0;2\pi\right]\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm trên $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình là: $\frac{3\pi}{5}+\frac{14\pi}{15}+\frac{4\pi}{15}=\frac{9\pi}{5}$.

Ví dụ 9: ***Đặt ẩn phụ không hoàn toàn***

Phương trình $\sin^4\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}(\sin x+3)+\sin x+2=0$ có các nghiệm là:

A. $x=k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **B.** $x=k\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

C. $x=(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$ **D.** $x=k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}.$

Đáp án C.

Lời giải

STUDY TIP

Nếu $\begin{cases}f(x)\ge a\\ g(x)\le a\end{cases}$ thì

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a\\ g(x)=a\end{cases}$

Đặt $\sin^2\frac{x}{2}=t\ \Rightarrow t\in[0;1]\forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $\Leftrightarrow t^2-(\sin x+3)t+\sin x+2=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=1 & (1)\\ t=\sin x+2 & (2)\end{array}\right.$

- Với $t=1\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1\ \Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{2}=1\Leftrightarrow\cos x=-1$

$\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=\sin x+2\Leftrightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$

Ta có: $\begin{cases}\sin^2\frac{x}{2}\le 1\\ \sin x+2\ge 1\end{cases}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\frac{x}{2}=1\\ \sin x+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-1\\ \sin x=-1\end{cases}$ (vô nghiệm)

STUDY TIP

$a\sin x+b\cos x=c$

có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

Kết luận: Vậy nghiệm của phương trình là $x=(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$

Nhận xét:

+ Với phương trình này hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp đưa về dạng tích $A.B=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\ B=0\end{array}\right.$.

+ Với phương trình $\sin^2\frac{x}{2}=\sin x+2$ (2), có thể giải cách khác như sau:

(2) $\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{2}=\sin x+2\Leftrightarrow 2\sin x+\cos x=-3$, phương trình này vô nghiệm do $2^2+1^2<(-3)^2$.

Ví dụ 10: ***Phương pháp đánh giá***

Với phương trình $3\cos 4x+(\cos 2x-\sin x)^2=7$ (*) thì:

A. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 1 nghiệm.

B. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 2 nghiệm.

C. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 3 nghiệm.

D. trên đoạn $[0;2\pi]$ phương trình có 4 nghiệm.

Đáp án A.

Lời giải

+ Ta có: $3\cos 4x\le 3$

STUDY TIP

(1) $\cos 2x - \sin x = 2$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x + 2$

mà $\begin{cases} \cos 2x \le 1 \\ \sin x + 2 \ge 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (1) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x + 2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

(2) $\cos 2x - \sin x = -2$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x - 2$

mà $\begin{cases} \cos 2x \ge -1 \\ \sin x - 2 \le -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ (2) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x - 2 = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

Lưu ý

Đối với phương trình (1) và (2) ta có thể giải ngay bằng cách đưa về phương trình bậc 2 đối với $\sin x$ bằng cách sử dụng công thức $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Tuy nhiên một số phương trình không đưa về được như vậy.

Ví dụ: $\sin x + \sin 5x = 2$ (bạn đọc tự giải).

+ $(\cos 2x - \sin x)^2 = |\cos 2x - \sin x|^2 \le (|\cos 2x| + |\sin x|)^2 \le 2^2$

$\Rightarrow (\cos 2x - \sin x)^2 \le 4 \Rightarrow 3\cos 4x + (\cos 2x - \sin x)^2 \le 7$

Phương trình (*) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos 4x = 3 \\ (\cos 2x - \sin x)^2 = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x - \sin x = 2 \ (1) \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x - \sin x = -2 \ (2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \ (\text{I}) \\ \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \ (\text{II}) \end{array}\right.$$

- Giải (I): $\begin{cases} 2\cos^2 2x - 1 = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x = 1 \\ \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Giải (II): $\begin{cases} \cos^2 2x = 1 \\ \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình ban đầu có 1 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Chú ý: Có thể giải phương trình này bằng cách đưa về phương trình bậc 4 đối với $\sin x$ sẽ tự nhiên hơn. Tuy nhiên với ví dụ này tôi muốn minh họa thêm cho các bạn một phương pháp giải khác để linh hoạt khi làm bài.

Ví dụ 11: ***Phương pháp hàm số***

Phương trình $\sqrt{\sin^2 x + 1} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{\cos^2 x + 1}$ (*) có tổng tất cả các nghiệm trong $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải

STUDY TIP

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ thì $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ ta có:

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

+ Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ ta có:

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

+ Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} = \cos x - \sin x + \sqrt{\cos^2 + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x + 1} + \sin x = \sqrt{\cos^2 x + 1} + \cos x$ (1)

+ Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} + t$ trên $(0;1)$

Với $\forall t_1, t_2 \in (0;1)$ và $t_1 \ne t_2$ ta xét biểu thức:

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\sqrt{t_1^2 + 1} + t_1 - \sqrt{t_2^2 + 1} - t_2}{t_1 - t_2}$$

$$=\frac{t_1^2-t_2^2}{\left(\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}\right)\left(t_1-t_2\right)}+\frac{t_1-t_2}{t_1-t_2}=\frac{t_1+t_2}{\sqrt{t_1^2+1}+\sqrt{t_2^2+1}}+1>0$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x=\cos x$

$\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Vậy phương trình (*) có 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là $\frac{\pi}{4}$.

Lưu ý: Đối với việc chứng minh hàm số đồng biến trên $(a;b)$ của hàm số $y=f(x)$, $\begin{cases}\forall x_1,x_2\in(a;b)\\ x_1\neq x_2\end{cases}$, xét tỉ số $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=m$

+ Nếu $m>0$ $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $m<0$ $\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(a;b)$.

+ Nếu $m=0$ $\Rightarrow$ Hàm số không đổi trên $(a;b)$.

V. Một số phương trình lượng giác đưa về dạng tích

Ví dụ 1: Phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là;

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Đáp án C.

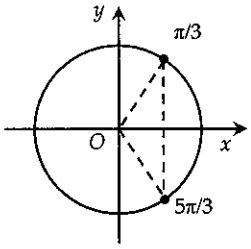
Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)-2(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-2)(1-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-2=0\\ 1-2\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=2\ (\text{VN})\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$



Vậy phương trình có 2 nghiệm trên $(0;2\pi)$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{5\pi}{3}$.

Ví dụ 2: Phương trình $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ có các nghiệm dạng $x_1=a+k2\pi;\ x_2=b+k2\pi;\ x_3=c+k2\pi;\ x_4=d+k2\pi$. Với $0<a,\ b,\ c,\ d<2\pi$ thì $a+b+c+d$ là:

A. 0. **B.** $\frac{7\pi}{2}$. **C.** $\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\sin x+\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2+(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+1+\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

STUDY TIP

$1\pm\sin 2x=(\sin x\pm\cos x)^2$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$1\pm\tan x=\frac{\cos x\pm\sin x}{\cos x}$

$1\pm\cot x=\frac{\sin x\pm\cos x}{\sin x}$

$\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\pm\cos x$

là các biểu thức chứa cùng nhân tử $(\sin x\pm\cos x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=k\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Nghiệm trên biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta viết lại các nghiệm phương trình là: $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{7\pi}{4}+k2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \vee x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow a+b+c+d=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{9\pi}{2}$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình:

$\cos^3 2x-\cos^2 2x-a\sin^2 x=0$ có nghiệm $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \cos^3 2x-\cos^2 2x-a.\frac{1-\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x-2\cos^2 2x+a\cos 2x-a=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 2x-1\right)\left(2\cos^2 2x+a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x=1 & (1) \\ \cos^2 2x=\frac{-a}{2} & (2) \end{array}\right.$$

- Giải (1) $\Rightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, các nghiệm này không thuộc $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

- Giải (2) có $x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow 2x=\left(0;\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}<\cos 2x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\cos^2 2x<1$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{-a}{2}<1 \Leftrightarrow -2<a<-\frac{1}{2}$

Vậy có 1 giá trị nguyên của a là -1.

Ví dụ 4: Phương trình $\left(2\sin x+1\right)\left(4\cos 4x+2\sin x\right)+4\cos^2 x=3$ nhận các giá trị $x=\frac{1}{4}\arccos m+k\frac{\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ làm nghiệm thì giá trị m là:

A. $m=\frac{1}{4}$. **B.** $m=-\frac{1}{4}$. **C.** $m=\frac{1}{16}$. **D.** $m=-\frac{1}{16}$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP
$\cos^2 x=\left(1-\sin x\right)\left(1+\sin x\right)$
$\sin^2 x=\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2\sin x+1\right)\left(4\cos 4x+2\sin x\right)+4\left(1-\sin^2 x\right)-3=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x+1\right)\left(4\cos 4x+2\sin x\right)+\left(1+2\sin x\right)\left(1-2\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x+1\right)\left(4\cos 4x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos 4x=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $m=-\dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 5: Phương trình $\sin 2x+2\cos x=\cos 2x-\sin x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

B. $\sin 2x=0$.

C. $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$.

D. $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đáp án C.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x=-2\sin^2 x-\sin x+1$

$$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x+2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

STUDY TIP

Phương trình $at^2+bt+c=0$ $(a\neq 0)$ có 2 nghiệm t_1 và t_2 thì $at^2+bt+c=a(t-t_1)(t-t_2)$

Lưu ý

Bài này độc giả có thể giải từng phương trình ở các phương án rồi thay nghiệm vào phương trình ba đầu đi đến kết quả.

VI. Một số phương trình lượng giác chứa điều kiện

Ví dụ 1: Phương trình $\frac{\sin 5x}{5\sin x}=1$ có số nghiệm là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

Khi giải phương trình lượng giác chứa điều kiện ta nên biểu diễn điều kiện và nghiệm về cùng một biểu thức lượng giác.

Điều kiện: $\sin x\neq 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 5x-5\sin x=0 \Leftrightarrow \sin 5x-\sin x-4\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\sin 2x-4\sin x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x.2\sin x\cos x-4\sin x=0$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\left(\cos 3x.\cos x-1\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0 \quad (l)\\ \frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 4x\right)-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\cos^2 2x-1-2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-\frac{3}{2}\ (\text{VN})\end{array}\right.$$

Với $\cos 2x=1 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow \sin x=0$ (loại vì không TMĐK)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2: Phương trình $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi$ và $x=\beta+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$, $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ thì $\alpha.\beta$ bằng:

A. $\frac{\pi^2}{12}$. B. $-\frac{\pi^2}{12}$. C. $\frac{7\pi}{12}$. D. $\frac{\pi^2}{12^2}$.

Đáp án A.

Lời giải

Lưu ý

Ở đây ta đã đưa điều kiện từ $\sin x\neq 0$ về $\cos x\neq \pm 1$ để dễ so sánh với nghiệm.

Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq \pm 1$

Phương trình $\Leftrightarrow 3\cos^2 x+2\sqrt{2}\sin^4 x=2\cos x.\sin^2 x+3\sqrt{2}\cos x.\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 3\cos x\left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)-2\sin^2 x\left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)\left(3\cos x-2\sin^2 x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0 \quad (1)\\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

- Giải (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\sqrt{2}\ (\text{VN})\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

- Giải (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-2\ (\text{VN})\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy $\alpha=\frac{\pi}{4};\ \beta=\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha.\beta=\frac{\pi^2}{12}$.

Ví dụ 3: Phương trình $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$ có tổng các nghiệm trên $\left(0;\pi\right)$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. π.

Đáp án D.

Lời giải

STUDY TIP
$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$
$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Lưu ý

+ Đối với điều kiện ta đưa hết về $\sin x$ do khi giải xong ta nhận thấy đưa được về phương trình bậc cao đối với $\sin x$.
+ Một số bài toán rất khó đưa điều kiện và nghiệm về cùng một biểu thức lượng giác, khi đó ta phải biểu diễn điều kiện và nghiệm trên đường tròn lượng giác để kết luận. Vấn đề này sẽ được minh họa ở các ví dụ tiếp theo.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{2\sin x.\cos x} = \dfrac{2}{4\sin x.\cos x.\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x - \sin x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \ (l) \\ 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \ (l) \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow$ Có 2 nghiệm trên $\left(0;\pi\right)$ là $x = \dfrac{\pi}{6}$ và $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên $\left(0;\pi\right)$ là $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5\pi}{6} = \pi$.

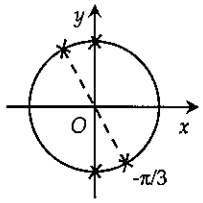
Ví dụ 4: Phương trình $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên $\left(0;3\pi\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP
Biểu diễn điều kiện và nghiệm trên đường tròn lượng giác rồi kết luận.



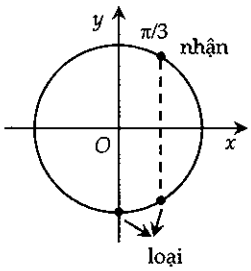
Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3} \end{cases} (*)$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x - 1\right)\left(\sin x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$



Kết hợp điều kiện (*) $\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Vậy có 2 nghiệm thuộc $\left(0;3\pi\right)$ là $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \dfrac{7\pi}{3}$.

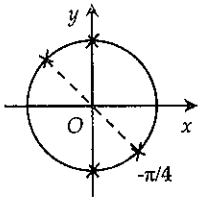
Ví dụ 5: Phương trình $\dfrac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \beta + k2\pi$ với $\alpha \neq \beta$; $-\pi < \alpha, \beta < \pi$; $k \in \mathbb{Z}$ thì $\alpha^2 + \beta^2$ là:

A. $\dfrac{\pi^2}{36}$. **B.** $\dfrac{35\pi^2}{36}$. **C.** $\dfrac{13\pi^2}{18}$. **D.** $\dfrac{15\pi^2}{18}$.

Đáp án C.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \tan x \neq -1\end{cases}$



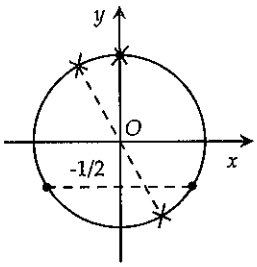
STUDY TIP

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\left(1+\sin x+\cos 2x\right)\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1+\sin x+1-2\sin^2 x\right)\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=1$$

$$\Rightarrow 2+\sin x-2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$



Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2=\frac{\pi^2}{36}+\frac{25\pi^2}{36}=\frac{26\pi^2}{36}=\frac{13\pi^2}{18}.$$

Ví dụ 6: Phương trình $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$ (1) có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Đáp án B.

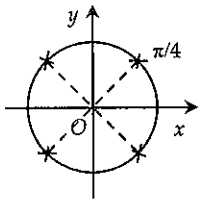
Lời giải

Lưu ý

Ở bài này ta có thể gộp điều kiện thành

$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}-k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}-k\pi\\ x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$



Ta có:

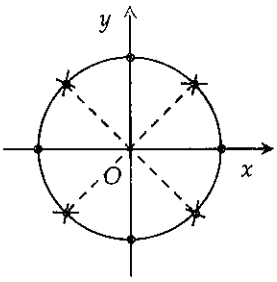
STUDY TIP

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan x}.\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan x}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}.\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=1$$

$$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 4x=1 \Leftrightarrow \sin 4x=0 \Leftrightarrow 4x=k\pi \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$$



Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình (1) là $x=n\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbb{Z})$.

Vậy số điểm biểu diễn cần tìm là 4.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1: Phương trình $\sin(x+10^\circ)=\frac{1}{2}$ với $0^\circ<x<180^\circ$ có nghiệm là:

A. $x=30^\circ$ và $x=150^\circ$. B. $x=20^\circ$ và $x=140^\circ$.
C. $x=40^\circ$ và $x=160^\circ$. D. $x=30^\circ$ và $x=140^\circ$.

Câu 2: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ với $0\le x\le 2\pi$ là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3: Phương trình $\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=m-2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[1;3]$. B. $m\in[-1;1]$.
C. $m\in\mathbb{R}$. D. $m\in(1;3)$.

Câu 4: Phương trình $\tan(3x+60^\circ)=m^2$ có nghiệm khi:

A. $m\in[-1;1]$. B. $m\in[0;1]$.
C. $m\in\mathbb{R}$. D. $m\in\varnothing$.

Câu 5: Phương trình $\tan(x-1)=2$ có nghiệm là:

A. $x=-1+\arctan 2+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
B. $x=1+\arctan 2+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
C. $x=\arctan 2+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
D. $x=1+\arctan 2+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 6: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan x=1$ trên khoảng $(0;10)$ là:

A. $\frac{15\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{7\pi}{2}$. D. 8π.

Câu 7: Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $\cos x=0$?

A. $\sin x=1$. B. $\sin x=-1$.
C. $\tan x=0$. D. $\cot x=0$.

Câu 8: Phương trình $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$ có các nghiệm dạng $x=\alpha+k2\pi$ và $x=-\beta+k2\pi\ (0\le\alpha,\beta\le\pi)$. Khi đó $\alpha+\beta$ bằng:

A. 0. B. $-\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $-\frac{2\pi}{3}$.

Câu 9: Phương trình $\cos 2x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $(0;\ 10\pi)$?

A. 14. B. 15. C. 16. D. 17.

Câu 10: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cot x=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $x=-\frac{2\pi}{3}$. B. $x=-\frac{\pi}{3}$.
C. $x=-\frac{4\pi}{3}$. D. $x=0$.

Câu 11: Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

A. $\tan x=99$. B. $\cot 2018x=2017$.
C. $\sin 2x=-\frac{3}{4}$. D. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12: Số nghiệm phương trình $2\sin x-\sqrt{3}=0$ trên $[0;2\pi]$ là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 13: Phương trình $m\tan x-\sqrt{3}=0$ có nghiệm khi:

A. $m\ne 0$. B. $m\in\mathbb{R}$.
C. $-1\le\frac{\sqrt{3}}{m}\le 1$. D. $-1<\frac{\sqrt{3}}{m}<1$.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2\cos^2 x+m-1=0$ có nghiệm?

A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 15: Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x+20^\circ)-1=0$ trên $(0;180^\circ)$ là:

A. 210°. B. 200°. C. 170°. D. 140°.

Câu 16: Phương trình $\sin x-3\cos x=0$ có nghiệm dạng $x=\operatorname{arccot} m+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$ thì giá trị m là:

A. $m=\frac{1}{3}$. B. $m=3$. C. $m=-3$. D. $m=-\frac{1}{3}$.

Câu 17: Tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất của phương trình $2\sin^2 x+7\sin x-4=0$ là:

A. π. B. $\frac{4\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 18: Tập nghiệm của phương trình $\frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$ là:

A. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
C. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 19: Nghiệm của phương trình $2\tan^2 x+\frac{3}{\cos x}=-3$ là:

A. $x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. B. $x = (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k3\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20: Phương trình $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$ có bao nhiêu điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác?

A. 3. B. 4. C. 8. D. 6.

Câu 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin^2 x + (m^2 - 3)\sin x + m^2 - 4 = 0$ có 2 nghiệm thuộc $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. 1. B. 2. C. Vô số. D. Không có m.

Câu 22: Giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ là $m \in [a;b)$ thì $a+b$ là:

A. 0. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 23: Phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

có tổng 2 nghiệm âm lớn nhất liên tiếp là:

A. $-\frac{3\pi}{2}$. B. $-\pi$. C. $-\frac{\pi}{2}$. D. $-\frac{5\pi}{2}$.

Câu 24: Phương trình:

$$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x\cos x - m + 2 = 0$$

có nghiệm khi $m \in [a;b]$ thì $a.b$ bằng:

A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{75}{16}$. D. $\frac{15}{4}$.

Câu 25: Phương trình $\tan x + 2\cot x - 3 = 0$ có các nghiệm dạng $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ và $x = \arctan m + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ thì:

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -2$.

Câu 26: Cho các phương trình sau:

(1) $2\sin x - \sqrt{5} = 0$.

(2) $\sin^2 2x + 5\cos 2x - 7 = 0$.

(3) $\sin^8 3x + \cos^8 3x = \frac{5}{4}$.

Trong các phương trình trên, phương trình nào vô nghiệm?

A. Chỉ phương trình (1) vô nghiệm.

B. Chỉ phương trình (2) vô nghiệm.

C. Chỉ phương trình (3) vô nghiệm.

D. Cả 3 phương trình vô nghiệm.

Phương trình bậc nhất đối với sin x, cos x

Câu 27: Phương trình $\sin x + m\cos x = \sqrt{10}$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le -3 \end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$. D. $-3 \le m \le 3$.

Câu 28: Phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ có các nghiệm dạng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \beta + k2\pi$ với $-\pi < \alpha, \beta < \pi$ thì $\alpha.\beta$ là:

A. $-\frac{\pi^2}{6}$. B. $-\frac{\pi^2}{2}$. C. $-\frac{\pi^2}{12}$. D. $\frac{\pi^2}{12}$.

Câu 29: Phương trình $\cos 2x + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x)$ có các nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{2} - k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$. B. $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$. D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Câu 30: Phương trình:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

có tổng 2 nghiệm dương nhỏ nhất liên tiếp là:

A. $\frac{\pi}{42}$. B. $\frac{13\pi}{42}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 31: Phương trình $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ có nghiệm dương nhỏ nhất là a, nghiệm âm lớn nhất là b thì $a+b$ là:

A. π. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $-\frac{\pi}{3}$.

Phương trình đẳng cấp bậc 2

Câu 32: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 33: Cho phương trình:

$$2\cos^2 x + 5\sin x\cos x + 6\sin^2 x - m - 1 = 0 \quad (1)$$

Số các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình (1) có nghiệm là:

A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 34: Phương trình $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$ tương đương với phương trình:

A. $\tan x = -1$. B. $\sin x - \cos x = 0$.

C. $2\cos^2 x - 1 = 0$. D. $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$.

Câu 35: Phương trình $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 36: Số giá trị nguyên của m để phương trình $2\sin^2 x-\sin x\cos x-m\cos^2 x=1$ có nghiệm trên $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực

Câu 37: Phương trình $\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 2x=0$ có số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-m-1=0$ có nghiệm?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 39: Cho phương trình $\cot x-\tan x=\sin x+\cos x$. Khi đặt $t=\sin x-\cos x$ thì:

A. $t=1-\sqrt{2}$. B. $t=\sqrt{2}-1$.

C. $t=0$. D. $t=-1-\sqrt{2}$.

Câu 40: Phương trình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm khi:

A. $\left[\begin{array}{l}t\ge 2\\ t\le 2\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}t>2\\ t<2\end{array}\right.$. C. $\forall t\in\mathbb{R}$. D. $t\in[-2;2]$.

Câu 41: Cho phương trình:

$$3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0\ (1).$$

Đặt $\tan x+\cot x=t$ với $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ thì phương trình (1) tương đương với phương trình:

A. $3t^2+4t+2=0$. B. $-3t^2+4t-4=0$.

C. $3t^2+4t-4=0$. D. $3t^2-4t-4=0$.

Một số phương trình lượng giác khác

Câu 42: Phương trình $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$ có các nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos m+k2\pi$. Giá trị của m là:

A. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$. B. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{16}$.

C. $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{17}}{8}$. D. $m=\dfrac{\pm1+\sqrt{17}}{16}$.

Câu 43: Số điểm biểu diễn nghiệm của phương trình $\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 44: Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(2\pi;3\pi)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 45: Phương trình $\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\sin^3 4x$ có bao nhiêu nghiệm trên $[0;2\pi]$?

A. 1. B. 24. C. 12. D. 2.

Câu 46: Phương trình:

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$$

có tích các nghiệm trên $(-\pi;0)$ là:

A. $-\dfrac{\pi^2}{8}$. B. $\dfrac{\pi^2}{8}$. C. $\dfrac{5\pi^4}{72}$. D. $-\dfrac{\pi^3}{32}$.

Câu 47: Phương trình $\sin 5x.\cos 3x=\sin 7x.\cos 5x$ có tập nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. B. $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\dfrac{\pi}{10}\\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$. D. $\left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{5}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Câu 48: Phương trình:

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$$

có tổng 3 nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là:

A. $-\dfrac{\pi}{2}$. B. $-\dfrac{5\pi}{8}$. C. $-\dfrac{3\pi}{8}$. D. $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Câu 49: Số nghiệm của phương trình: $\sin^8 x-\cos^8 x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ trên $[0;2\pi]$ là:

A. 0. B. Vô số. C. 2. D. 4.

Câu 50: Phương trình:

$$\tan^2 x+2\sin^2 x-2\tan x-2\sqrt{2}\sin x+2=0$$

có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 51: Phương trình $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 52: Phương trình $\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x$ có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$. B. $S=\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. $S=\left\{\pm\dfrac{3\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$. D. $S=\left\{\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 53: Phương trình $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$ có các nghiệm là:

A. $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. B. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. D. $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 54: Phương trình $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $(0;2\pi)$?

A. 2. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 55: Phương trình $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$ đưa về phương trình tích được phương trình tương đương là:

A. $\cos 4x(1-\sin 3x)=0$. B. $2\cos 4x(1-\sin 3x)=0$.

C. $\cos 4x(1+\sin 3x)=0$. D. $\cos 2x(1+\sin 3x)=0$.

Câu 56: Phương trình $2\sin(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$ là phương trình hệ quả của phương trình:

A. $\cos 2x=0$. B. $2\cos x-1=0$.

C. $\sin 2x+1=0$. D. $\sin 2x-1=0$.

Câu 57: Phương trình $6\sin x-2\cos^3 x=\frac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$ có số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là:

A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 58: Phương trình $\sin 4x=\tan x$ có nghiệm dạng $x=k\pi$ và $x=\pm m\arccos n+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ thì $m+n$ là:

A. $m+n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $m+n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $m+n=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. D. $m+n=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59: Phương trình $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[1;70]$?

A. 32. B. 33. C. 34. D. 35.

Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 60: Phương trình $(2\sin x+1)(\sin x-m)=0$ (m là tham số) có nghiệm trên $(0;\pi)$ khi:

A. $\forall m\in\mathbb{R}$. B. $m\in\varnothing$.

C. $m\in(0;1]$. D. $m\in(0;1)$.

Câu 61: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm lớn hơn -10 của m để PT $(2\cos x-1)(2\cos 2x+2\cos x-m)=3-4\sin^2 x$ có 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$?

A. 7. B. 6. C. 2. D. 3.

Câu 62: Các giá trị của $m\in[a;b]$ để phương trình $\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ có nghệm thì:

A. $a+b=2$. B. $a+b=12$. C. $a.b=-8$. D. $a.b=8$.

Câu 63: Cho phương trình: $m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$. Số các giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 10 để phương trình có nghiệm là:

A. 8. B. 9. C. 10. D. 7.

Câu 64: Phương trình $\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$ có nghiệm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ khi tất cả các giá trị thỏa mãn:

A. $m\notin\varnothing$. B. $m\in\mathbb{R}$.

C. $m\in[-1;1]$. D. $m\in(-1;1)$.

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m nhỏ hơn 2018 để phương trình $\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$ có nghiệm?

A. 2000. B. 2001. C. 2010. D. 2011.

Hướng dẫn giải chi tiết

Phương trình lượng giác cơ bản

Câu 1: Đáp án B.

$\sin(x+10^\circ)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x+10^\circ)=\sin 30^\circ$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+10^\circ=30^\circ+k360^\circ \\ x+10^\circ=150^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20^\circ+k360^\circ \\ x=140^\circ+k360^\circ \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

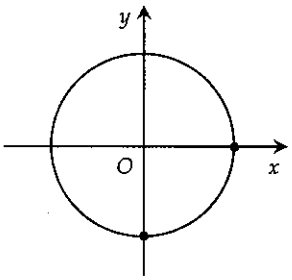
Mà $x\in(0^\circ;\ 180^\circ) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=20^\circ \\ x=140^\circ \end{array}\right.$.

Câu 2: Đáp án C.

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn trên đường tròn lượng giác:



Vậy có 2 nghiệm thuộc $[0;2\pi]$

Câu 3: Đáp án A.

Phương trình $\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=m-2$ có nghiệm khi $|m-2|\le 1 \Leftrightarrow -1\le m-2\le 1 \Leftrightarrow 1\le m\le 3$.

Câu 4: Đáp án C.

Phương trình $\tan(x+60^\circ)=m^2$ có nghiệm khi $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: Đáp án B.

Phương trình $\tan(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=\arctan 2+k\pi$

$\Leftrightarrow x=1+\arctan 2+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 6: Đáp án A.

$\tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ mà $x\in(0;10)$

$\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{4}+k\pi<10 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{10}{\pi}-\frac{1}{4}$

Mà $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{0;1;2\}$

$\Rightarrow$ 3 nghiệm $\in(0;10)$ là $x_1=\frac{\pi}{4};\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi$

và $x_3=\frac{\pi}{4}+2\pi \Rightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{15\pi}{4}$.

Câu 7: Đáp án D.

Ta có: $\cot x=0 \Leftrightarrow \cos x=0$.

Câu 8: Đáp án D.

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

Vậy $\begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=-\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$.

Câu 9: Đáp án B.

$\cos 2x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

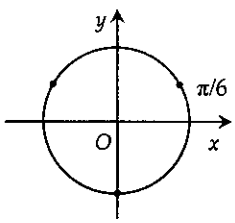
$\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left[\pi-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$

(chú ý gộp nghiệm trên đường tròn lượng giác)



Ta có: $0<x<10\pi \Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}<10\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{59}{4}$

mà $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{0;1;...;14\}$.

Vậy có 15 giá trị $k \Rightarrow$ Có 15 nghiệm $\in(0;10\pi)$.

Câu 10: Đáp án A.

$\cot x=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cot x=\cot\left(\pi-\frac{x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=\pi-\frac{x}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=(k+1)\frac{2\pi}{3}$ với $k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm âm lớn nhất là $x=-\frac{2\pi}{3}$.

Câu 11: Đáp án D.

Vì $\frac{2\pi}{3}>1$.

Một số phương trình lượng giác thường gặp

Câu 12: Đáp án B.

$$2\sin x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$ là $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\frac{2\pi}{3}$.

Câu 13: Đáp án A.

+ Với $m=0$: Phương trình $\Leftrightarrow -\sqrt{3}=0$ (vô nghiệm)
$\Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

+ Với $m\neq 0$: Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{m}$ xác định với mọi giá trị $\frac{\sqrt{3}}{m}\in\mathbb{R}$.

Câu 14: Đáp án C.

$2\cos^2 x+m-1=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1-m}{2}$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le\frac{1-m}{2}\le 1$

$\Leftrightarrow 0\le 1-m\le 2 \Leftrightarrow -1\le -m\le 1 \Leftrightarrow -1\le m\le 1$

Vậy có 3 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 15: Đáp án D.

$2\sin\left(x+20^\circ\right)-1=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+20^\circ\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+20^\circ\right)=\sin 30^\circ$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+20^\circ=30^\circ+k360^\circ \\ x+20^\circ=150^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10^\circ+k360^\circ \\ x=130^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy tổng các nghiệm trên $\left(0;180^\circ\right)$ là:

$$10^\circ+130^\circ=140^\circ.$$

Câu 16: Đáp án B.

$\sin x-3\cos x=0 \Leftrightarrow 3\cos x=\sin x$

$\Leftrightarrow \cot x=3 \Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}3+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

Vậy $m=3$.

Câu 17: Đáp án A.

$2\sin^2 x+7\sin x-4=0$

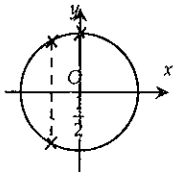
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{1}{2} \\ \sin x=-4 \text{ (VN)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vật tổng 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là:

$$\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi.$$

Câu 18: Đáp án C.

$\frac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$



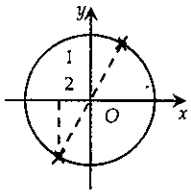
Điều kiện: $\begin{cases} \cos x\neq -\frac{1}{2} \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Kết hợp điều kiện

$\Rightarrow$ Nghiệm của phương trình là:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.



Câu 19: Đáp án B.

Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Ta có: $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\frac{3}{\cos x}=-3$

$\Leftrightarrow 2.\frac{1}{\cos^2 x}+3.\frac{1}{\cos x}+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\cos x}=-1 \\ \frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \text{ (TM)} \\ \cos x=-2 \ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Câu 20: Đáp án C.

$\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)=\frac{13}{8}\cos^2 2x$

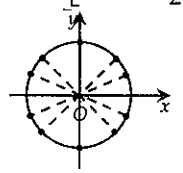
$\Leftrightarrow \cos 2x\left[\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\sin^2 x\cos^2 x\right]=\frac{13}{8}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{13}{8}\cos^2 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ 1-\frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right)-\frac{13}{8}\cos 2x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ 2\cos^2 2x-13\cos 2x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \cos 2x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

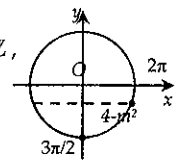


Câu 21: Đáp án D.s

$\sin^2 x+\left(m^2-3\right)\sin x+m^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1 \\ \sin x=4-m^2 \end{array}\right.$

- Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$,

có 1 nghiệm $x=\frac{3\pi}{2}\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.



- Phương trình có 2 nghiệm $\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

$\Leftrightarrow \sin x=m^2-4$ có 1 nghiệm $\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ khác $\frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -1 < 4 - m^2 < 0 \Leftrightarrow -5 < -m^2 < -4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} < m < -2 \end{array}\right.$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn.

Câu 22: Đáp án B.

$\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m+1)\cos x + m = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right.$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in [-1;0)$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ không có nghiệm thỏa mãn $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -1 \le m < 0 \Rightarrow a + b = -1.$

Câu 23: Đáp án D.

$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

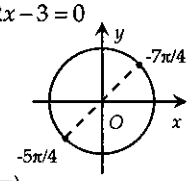
$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - \cos 4x + \sin 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x - (1 - 2\sin^2 2x) + \sin 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = -2 \text{ (VN)} \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right.$



$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy tổng 2 nghiệm âm lớn nhất là:

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{10\pi}{4} = -\frac{5\pi}{2}.$$

Câu 24: Đáp án C.

$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin x\cos x - m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4m = -3\sin^2 2x + 6\sin 2x + 12$ (*)

Xét $f(t) = -3t^2 + 6t + 12$ trên $[-1;1]$

t	-1	1
$f(t)$	3 ↗	15

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3 \le 4m \le 15 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le m \le \frac{15}{4}$

Vậy $a.b = \frac{75}{16}$.

Câu 25: Đáp án B.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x + \frac{2}{\tan x} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan 2 + k\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy $m = 2$.

Câu 26: Đáp án D.

Phương trình bậc nhất đối với sin x, cos x

Câu 27: Đáp án A.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + m^2 \ge 10$

$\Leftrightarrow m^2 \ge 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 3 \\ m \le -3 \end{array}\right.$.

Câu 28: Đáp án C.

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \alpha.\beta = \frac{-\pi}{6}.\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{12}.$

Câu 29: Đáp án A.

$\cos 2x + \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -(\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = -\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = -2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{2} - k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

Câu 30: Đáp án C.

$\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

$\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x)\sin x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x + \cos x.\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\sin 3x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 3x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 3x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = -3x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ 2 nghiệm dương liên tiếp nhỏ nhất là

$x_1 = \frac{\pi}{42}$ và $x_2 = \frac{13\pi}{42} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{42} + \frac{13\pi}{42} = \frac{\pi}{3}$.

Câu 31: Đáp án C.

$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos x$

$\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{\pi}{2}$.

Nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{6}$.

Vậy $a + b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Phương trình đẳng cấp bậc 2

Câu 32: Đáp án D.

$\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$ (1)

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = -1$

- Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = -1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 = -1$ (vô lý)

$\Rightarrow \cos x = 0$ không thỏa mãn (1)

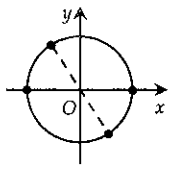
- Với $\cos x \neq 0$ chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta được:

(1) $\Leftrightarrow \tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x - 1 = -1\left(1 + \tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$



Vậy số điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác là 4.

Câu 33: Đáp án C.

$2\cos^2 x + 5\sin x\cos x + 6\sin^2 x - m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5\sin x\cos x + 6.\frac{1 - \cos 2x}{2} = m$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \frac{5}{2}\sin 2x + 3 - 3\cos 2x = m$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\sin 2x - 2\cos 2x = m - 3$

Phương trình này có nghiệm

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (-2)^2 \geq (m-3)^2$

$\Leftrightarrow (m-3)^2 \leq \frac{41}{4} \Leftrightarrow |m-3| \leq \frac{\sqrt{41}}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{41}}{2} \leq m - 3 \leq \frac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{41}}{2} + 3 \leq m \leq \frac{\sqrt{41}}{2} + 3$

mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$

Vậy có 7 giá trị m thỏa mãn.

Câu 34: Đáp án B.

Phương trình $\sin x + \cos x - 4\sin^3 x = 0$ (*)

- Với $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$

+ Với $\sin x = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 - 4 = 0$ (vô lý)

+ Với $\sin x = -1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -1 + 4 = 0$ (vô lý)

- Với $\cos x \neq 0$ chia 2 vế cho $\cos^3 x$ ta được:

(*) $\Leftrightarrow \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 1 + \tan^2 x - 4\tan^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$

Câu 35: Đáp án B.

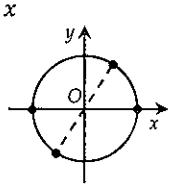
Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Chia 2 vế cho $\cos x \neq 0$ ta được:

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 = 1 + \tan^2 x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$



Vậy số nghiệm trên $(0;2\pi)$ là 3.

Câu 36: Đáp án C.

$2\sin^2 x - \sin x\cos x - m\cos^2 x = 1$ (1)

Trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos x \neq 0$

Chia 2 vế cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

(1) $\Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x - m = \tan^2 x + 1$

$\Leftrightarrow m = \tan^2 x - \tan x - 1$

Đặt $\tan x = t \Rightarrow t \in [-1;1] \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

$\Rightarrow$ Yêu cầu bài toán tìm m để phương trình:

$m = f(t) = t^2 - t - 1$ có nghiệm trên $[-1;1]$

t	-1		$\frac{1}{2}$		1
$f(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[-\frac{5}{4};1\right]$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Phương trình đối xứng và các phương trình lượng giác không mẫu mực

Câu 37: Đáp án C.

$\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 2x=0$ (1)

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+2\sqrt{2}\sin x\cos x=0$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow 2\sin x\cos x=t^2-1$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow t+\sqrt{2}\left(t^2-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ t=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

- Với $t=-\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy có 3 điểm biểu diễn các nghiệm.

Câu 38: Đáp án D.

$\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-m-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sin x-\cos x-m-1=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$2\sin x\cos x=-t^2+1$

Phương trình $\Leftrightarrow -t^2+1+t-m-1=0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình $m=-t^2+t$ (*) có nghiệm trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

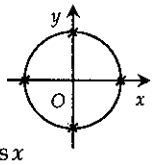
Xét hàm số $f(t)=-t^2+t$ trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

t	$-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$-t^2+t$	$-\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{2}-2$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow m\in\left[-\sqrt{2}-2;\frac{1}{4}\right]$

Vậy các giá trị $m\in\{-3;-2;-1;0\}$ thỏa mãn.

Câu 39: Đáp án A.



Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x\cos x+\sin x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\ (1)\\ \sin x\cos x+\sin x-\cos x=0\ (2)\end{array}\right.$$

- Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

- Giải (2): Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ và $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

$$\Rightarrow (2)\Leftrightarrow\frac{1-t^2}{2}+t=0\Leftrightarrow t^2-2t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1-\sqrt{2}\ (TM)\\ t=1+\sqrt{2}\ (l)\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Vậy $t=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40: Đáp án B.

Cách 1: Điều kiện để phương trình $\tan x+\cot x=t$ có nghiệm:

Do $\tan x$ và $\cot x$ luôn cùng dấu ta có:

$|t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+|\cot x|\geq 2\sqrt{|\tan x\cot x|}=2$

$\Rightarrow t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Cách 2: Phương trình $\Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=t\ (\tan x\neq 0)$

$\Leftrightarrow \tan^2 x-t\tan x+1=0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ 0^2-t.0+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow t^2-4.1\geq 0\Leftrightarrow t^2\geq 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\geq 2\\ t\leq -2\end{array}\right..$$

Câu 41: Đáp án C.

$3\tan^2 x+4\tan x+4\cot x+3\cot^2 x+2=0$

$\Leftrightarrow 4\left(\tan x+\cot x\right)+3\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+2=0$

$\Leftrightarrow 4t+3\left(t^2-2\right)+2=0$

$\Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0.$

Một số phương trình lượng giác khác

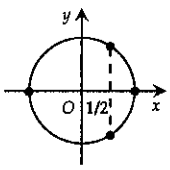
Câu 42: Đáp án A.

$$\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$$
$$\Leftrightarrow (\cos 5x+\cos x)+(\cos 5x+\cos 3x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+2\cos 4x\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow (4\cos^3 x-3\cos x)\cos 2x+\cos 4x\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x-3)\cos 2x+\cos 4x\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x-2-1)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left[(2\cos 2x-1)\cos 2x+2\cos^2 2x-1\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 2x-\cos 2x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $m=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}$.

Câu 43: Đáp án C.

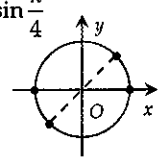
$$\sin 3x-\sin x+\sin 2x=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\sin x\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$



Vậy có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 44: Đáp án A.

$$\sin^4 x+\cos^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)\right]^2=1$$
$$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$$
$$\Leftrightarrow 1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=1$$
$$\Leftrightarrow 3-2\cos 2x-2\sin 2x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$



Vậy phương trình có 1 nghiệm thuộc $(2\pi;3\pi)$.

Câu 45: Đáp án B.

$$\cos^3 x.\sin 3x+\sin^3 x.\cos 3x=\sin^3 4x$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos 3x+3\cos x}{4}.\sin 3x+\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}.\cos 3x=\sin^3 4x$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}(\sin 3x.\cos x+\sin x.\cos 3x)=\sin^3 4x$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin(3x+x)=\sin^3 4x$$
$$\Leftrightarrow 3\sin 4x-4\sin^3 4x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin 12x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{12}\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có 24 nghiệm trên $[0;2\pi]$.

Câu 46: Đáp án B.

$$\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x.\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)-\sin x.\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\cos 2x+\cos x)-\sin x(\cos x-\cos 2x)=1$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)+(1-\sin^2 x)-\sin x\cos x=1$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)-\sin x(\sin x+\cos x)=0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1-2\sin^2 x-\sin x)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\sin^2 x+\sin x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

$\Rightarrow$ Có 2 nghiệm thuộc $(-\pi;0)$ là $-\dfrac{\pi}{4}$ và $-\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tích 2 nghiệm là $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Câu 47: Đáp án A.

$$\sin 5x.\cos 3x=\sin 7x.\cos 5x$$
$$\Leftrightarrow \sin 8x+\sin 2x=\sin 12x+\sin 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin 8x=\sin 12x$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}12x=8x+k2\pi\\ 12x=\pi-8x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{20}+k\dfrac{\pi}{10}\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Câu 48: Đáp án D.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\pi\\ x\neq\dfrac{3\pi}{2}+k\pi\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$

Ta có: + $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}-\pi\right)$

$=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

+ $\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$

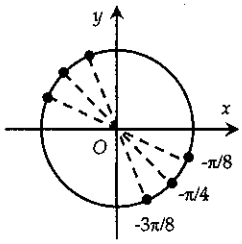
Phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{\sin x\cos x}+2\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin x\cos x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ x=\frac{5\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.$



Vậy phương trình có tổng nghiệm âm liên tiếp lớn nhất là $-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}=-\frac{3\pi}{4}$.

Câu 49: Đáp án A.

Ta có $\begin{cases}\sin^8 x\le 1\\ -\cos^8 x\le 0\end{cases}\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \sin^8 x-\cos^8 x\le 1$ mà $\frac{2}{\sqrt{3}}>1$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

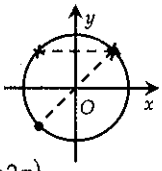
Câu 50: Đáp án A.

$\tan^2 x+2\sin^2 x-2\tan x-2\sqrt{2}\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow (\tan^2 x-2\tan x+1)+(2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)^2+(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\tan x=1\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$



Vậy phương trình có 1 nghiệm trên $(0;2\pi)$.

Câu 51: Đáp án C.

Đặt $t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{3\pi}{10}-t\Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{9\pi}{10}-3t$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{9\pi}{10}-3t\right)$

$\Leftrightarrow \sin t=\frac{1}{2}\sin(\pi-3t)\Leftrightarrow 2\sin t=\sin 3t$

$\Leftrightarrow 2\sin t=3\sin t-4\sin^3 t\Leftrightarrow \sin t(2\cos 2t-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos 2t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=k\pi\\ t=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{5}-k2\pi\\ x=\frac{14\pi}{5}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})\\ x=\frac{4\pi}{5}+k2\pi\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm thuộc $(0;2\pi)$.

Câu 52: Đáp án B.

$\sqrt{2}(\sin x-2\cos x)=2-\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x=2-2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x-2+\sqrt{2}\cos x(\sqrt{2}\sin x-2)=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\sin x-2)(\sqrt{2}\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{2}\ (\text{VN})\\ \cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Câu 53: Đáp án B.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\\ \tan x\ne -1\end{cases}$

PT $\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\sin x(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x(\cos x-\sin x)+\sin x(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x-\sin x=\sin x\cos x(\cos x-\sin x)+\sin^2 x(\sin x-\cos x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1-\sin x\cos x+\sin^2 x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 1-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\ (\text{TMĐK})\\ \sin 2x+\cos 2x=3\ (\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

Câu 54: Đáp án B.

Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\ne 0\Leftrightarrow \cos 2x\ne\pm 1$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\sin 2=\frac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+4\sin^2 2x=2$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\ (l)\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $(0;2\pi)$.

Câu 55: Đáp án C.

$2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 1 + \sin 7x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x + 2\cos 4x.\sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x(1+\sin 3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ 1+\sin 3x = 0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án C.

Câu 56: Đáp án D.

$2\sin x(1+\cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x(1+2\cos^2 x - 1) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

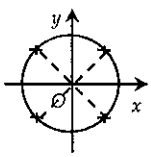
$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)\sin 2x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x + 1 = 0\\ \sin 2x - 1 = 0\end{array}\right.$

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 57: Đáp án A.



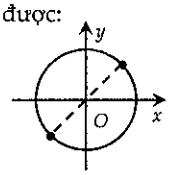
Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin x - \cos^3 x - 5\sin x\cos^2 x = 0$ (*)

- Với $\cos x = 0$: không thỏa mãn phương trình (*)

- Với $\cos x \neq 0$: chia 2 vế cho $\cos^3 x$ ta được:



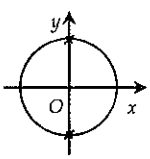
(*) $\Leftrightarrow 3\tan x(1+\tan^2 x) - 1 - 5\tan x = 0$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - 2\tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

Câu 58: Đáp án A.



Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x.\cos x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x.\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos^2 x.\cos 2x - \sin x = 0$

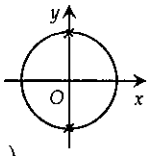
$\Leftrightarrow (4\cos^2 x.\cos 2x - 1)\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 2x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\ \cos 2x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ (VN)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow m + n = \frac{1}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 59: Đáp án B.

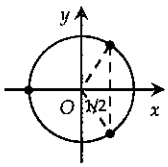


Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

PT $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - (1+\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + k2\pi\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$



Mà $x \in [1;70] \Leftrightarrow 1 \leq \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \leq 70$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2\pi} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{105}{\pi} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow k \in \{0;1;2;...;32\}$.

Vậy phương trình có 33 nghiệm trên $[1;70]$.

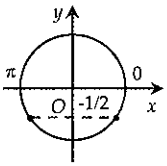
Phương trình lượng giác chứa tham số

Câu 60: Đáp án C.

$(2\sin x + 1)(\sin x - m) = 0$ (*) có nghiệm thuộc $(0;\pi)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x = -\frac{1}{2} & (1)\\ \sin x = m & (2)\end{array}\right.$

Giải (1) $\Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$



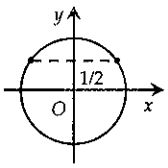
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Phương trình (1)không có nghiệm nào thuộc $(0;\pi)$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm $\in (0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin x = m$ có nghiệm $\in (0;\pi) \Leftrightarrow m \in (0;1]$.

Chú ý: Độc giả có thể giải cách khác như sau:



Có $\sin x \in (0;1] \forall x \in (0;\pi)$

$\Rightarrow \sin x = m$ có nghiệm

$\Leftrightarrow m \in (0;1]$.

Câu 61: Đáp án A.

PT $(2\cos x - 1)(2\cos 2x + 2\cos x - m) = 3 - 4\sin^2 x$ có đúng 2 nghiệm $\in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x-2+2\cos x-m)=(2\cos x-1)(2\cos x+1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(4\cos^2 x-3-m)=0$

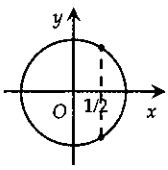
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\4\cos^2 x-3-m=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x=\frac{1}{2} & (1)\\ \cos^2 x=\frac{m+3}{4} & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x=\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm thuộc $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc pt (2) $\Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\frac{m+3}{4}>1\\ \frac{m+3}{4}<0\\ \frac{m+3}{4}=\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-3.\\ m=-2\end{array}\right.$$



Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Chú ý: $\cos^2 x\in[0;1]\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 62: Đáp án C.

$\cos 2x+\sin^2 x+3\cos x-m=5$ (*)

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1+1-\cos^2 x+3\cos x-m-5=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+3\cos x=m+5$

Đặt $\cos x=t\in[-1;1]$, phương trình $\Leftrightarrow t^2+3t=m+5$

Bảng biến thiên:

t	-1		1
t^2+3t	-2	$\nearrow$	4

$\Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le m+5\le 4$

$\Leftrightarrow -7\le m\le -1$. Vậy $a+b=-8$

Câu 63: Đáp án B.

$m\sin x+(m+1)\cos x=\frac{m}{\cos x}$ (*)

Điều kiện: $\cos x\ne 0$

+ (*) $\Leftrightarrow m\sin x\cos x+(m+1)\cos^2 x=m$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2}\sin 2x+\frac{m+1}{2}(1+\cos 2x)=m$

$\Leftrightarrow m\sin 2x+(m+1)\cos 2x=m-1$ (1)

+ Với $\cos x=0 \Rightarrow \begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x=0\\ \cos 2x=2\cos^2 x-1=-1\end{cases}$ thì

(1) $\Rightarrow -m-1=m-1\Leftrightarrow m=0$

+ Từ $m=0\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \cos x=0$ loại do điều kiện $\Rightarrow m=0$ phương trình (*) vô nghiệm

+ với $m\ne 0$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm khi (1) $\Leftrightarrow m^2+(m+1)^2\ge(m-1)^2$

$\Leftrightarrow m^2+4m\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m\ge 0\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -4\\ m>0\end{array}\right.$

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 64: Đáp án B.

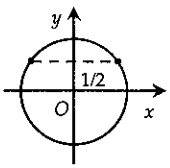
$\cos 2x+(2m+1)\sin x-m-1=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+2m\sin x+\sin x-m-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x(m-\sin x)-(m-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-m)(1-2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=\frac{1}{2} & (1)\\ \sin x=m & (2)\end{array}\right.$



Giải (1): $\sin x=\frac{1}{2}$ luôn có 2 nghiệm $\in\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$\Rightarrow \forall m$ phương trình có nghiệm.

Câu 65: Đáp án D.

$\frac{3}{\sin^2 x}+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$

$\Leftrightarrow 3(1+\cot^2 x)+3\tan^2 x+\tan x+\cot x=m$

$\Leftrightarrow 3(\tan^2 x+\cot^2 x)+\tan x+\cot x+3-m=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow t^2-2=\tan^2 x+\cot^2 x$

$\Rightarrow |t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+|\cot x|\ge 2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}t\ge 2\\ t\le -2\end{array}\right.\Rightarrow$ Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình $3(t^2-2)+t+3-m=0$ có nghiệm $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ $\Leftrightarrow m=3t^2+t-3$ có nghiệm $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{6}$		2	$+\infty$
$3t^2+t-3$	$+\infty$	7	$\searrow$		$\nearrow$	11	$+\infty$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge 7$

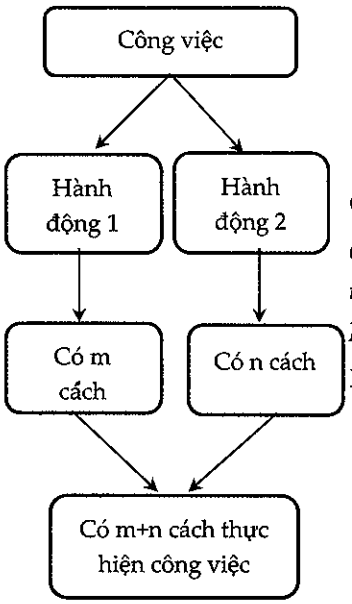
Vậy có 2011 giá trị của m nhỏ hơn 2018.

CHỦ ĐỀ 2: TỔ HỢP – XÁC SUẤT

A. Lý thuyết

Quy tắc đếm

1. Quy tắc cộng



> Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m+n$ cách thực hiện.

Chú ý: *Số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là: $|X|$ hoặc $n(X)$.*

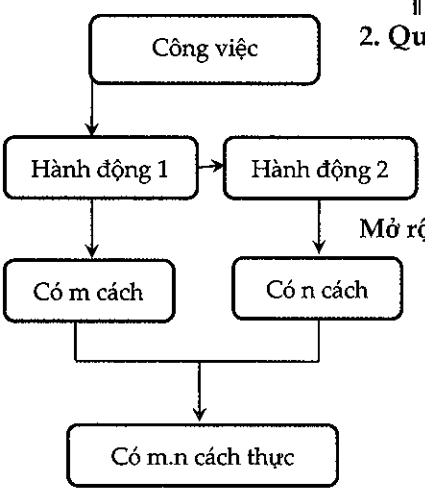
Quy tắc cộng được phát biểu ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau:

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$.

Mở rộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện,..., hành động A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các hành động trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1+m_2+...+m_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân



> Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Mở rộng

Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, ứng với mỗi cách thực hiện hành động A_1 có m_2 cách thực hiện hành động A_2,..., có m_k cách thực hiện hành động A_k thì công việc đó có $m_1.m_2...m_k$ cách hoàn thành.

Hoán vị - chỉnh hợp – tổ hợp

1. Hoán vị

> Cho tập hợp A có n phần tử ($n\geq 1$).
> Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó.
> Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử được kí hiệu là P_n.

STUDY TIP
Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp. Chẳng hạn, hai hoán vị *abc* và *acb* của ba phần tử *a, b, c* là khác nhau.

Định lý 1

$P_n = n.(n-1)...2.1 = n!$ với P_n là số các hoán vị.

Chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A là một công việc gồm n công đoạn.

Công đoạn 1: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất: n cách.

Công đoạn 2: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai: $(n-1)$ cách.

...

Công đoạn thứ *i*: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $(n-i+1)$ cách.

...

Công đoạn thứ *n*: chọn phần tử xếp vào vị trí thứ n có 1 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $P_n = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị.

2. Chỉnh hợp

> Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.
>
> Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

STUDY TIP

Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp A có n phần tử là một chỉnh hợp chập n của A.

$P = A_n^n$

Định lý 2

$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ với A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.

Chứng minh

Việc thiết lập một chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là một công việc gồm k công đoạn.

Công đoạn 1: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất có n cách thực hiện.

Công đoạn 2: Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai có $n-1$ cách thực hiện.

...

Sau khi thực hiện xong $i-1$ công đoạn (chọn $i-1$ phần tử của A vào các vị trí thứ 1, 2,..., $i-1$), công đoạn thứ i tiếp theo là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ i có $n-i+1$ cách thực hiện.

Công đoạn cuối, công đoạn k có $n-k+1$ cách thực hiện.

Theo quy tắc nhân thì có $n(n-1)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử.

3. Tổ hợp

> Giả sử tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.
>
> Số các tổ hợp chập k của tập hợp có n phần tử có kí hiệu là C_n^k.

STUDY TIP

Số k trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện $1 \leq k \leq n$. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

Định lý 3

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chứng minh

Ta có mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Vậy

$A_n^k = k!C_n^k \Leftrightarrow C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

QUY ƯỚC

$0! = 1$

$C_n^0 = A_n^0 = 1.$

Định lý 4 (hai tính chất cơ bản của số C_n^k)

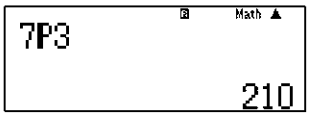
a. Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

b. Hằng đẳng thức Pascal

Cho số nguyên dương n và số nguyên dương k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$



Đọc thêm

Trên máy tính cầm tay có chức năng tính tổ hợp, chỉnh hợp như sau:

Với tổ hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT ÷ (**nCr**)

Ví dụ ta muốn tính C_{12}^{5} ta ấn 1 2 SHIFT ÷ (**nCr**) 5 =

Với chỉnh hợp ta nhấn tổ hợp phím SHIFT × (**nPr**)

Ví dụ ta muốn tính A_{7}^{3} ta nhấn tổ hợp phím 7 SHIFT × (**nPr**) 3 =

B. Các dạng toán về phép đếm

Một số lưu ý cần sử dụng khi giải bài toán đếm:

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

> ***Bước 1:*** *Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$).*
>
> ***Bước 2:*** *Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các phương án $A_1; A_2; ...; A_n$.*
>
> ***Bước 3:*** *Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + ... + x_n$.*

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

> ***Bước 1:*** *Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$ hoàn thành).*
>
> ***Bước 2:*** *Đếm số cách chọn $x_1; x_2; ...; x_n$ trong các công đoạn $A_1; A_2; ...; A_n$.*
>
> ***Bước 3:*** *Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.x_3...x_n$*

Ví dụ 1: Một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra:

a. một học sinh đi dự trại hè của trường.

b. một học sinh nam và một học sinh nữ dự trại hè của trường.

Số cách chọn trong mỗi trường hợp a và b lần lượt là

A. 45 và 500 **B.** 500 và 45 **C.** 25 và 500 **D.** 500 và 25

Đáp án A

Lời giải

a. **Bước 1:** Với bài toán a thì ta thấy cô giáo có thể có hai phương án để chọn học sinh đi thi:

Bước 2: Đếm số cách chọn.

* ***Phương án 1:*** chọn 1 học sinh nam đi dự trại hè của trường thì có 25 cách chọn.

* ***Phương án 2:*** chọn học sinh nữ đi dự trại hè của trường thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc cộng.

Vậy có $20 + 25 = 45$ cách chọn.

b. **Bước 1:** Với bài toán b thì ta thấy công việc là chọn một học sinh nam và một học sinh nữ. Do vậy ta có 2 công đoạn.

Bước 2: Đếm số cách chọn trong các công đoạn.

* ***Công đoạn 1:*** Chọn 1 học sinh nam trong số 25 học sinh nam thì có 25 cách chọn.

* ***Công đoạn 2:*** Chọn 1 học sinh nữ trong số 20 học sinh nữ thì có 20 cách chọn.

Bước 3: Áp dụng quy tắc nhân.

Vậy ta có $25.20 = 500$ cách chọn.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 1 giúp ta củng cố và định hình các bước để giải quyết bài toán đếm sử dụng quy tắc cộng; quy tắc nhân.

Chú ý:

* Quy tắc cộng: Áp dụng khi công việc có nhiều phương án giải quyết.

* Quy tắc nhân: Áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn.

Ví dụ 2: Trên giá sách có 10 quyển sách Văn Lovebook khác nhau, 8 quyển sách Toán Lovebook khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn nhau?

A. 80 B. 60 C. 48 D. 188

Đáp án D.

Lời giải

Theo quy tắc nhân ta có:

$10.8=80$ cách chọn một quyển Văn Lovebook và một quyển toán Lovebook khác nhau.

$10.6=60$ cách chọn một quyển sách Văn Lovebook và 1 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau.

$8.6=48$ cách chọn 1 quyển sách Toán Lovebook và 1 quyển sách Tiếng Anh Lovebook khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn 2 quyển sách khác môn là

$$80+60+48=188 \text{ cách.}$$

STUDY TIP

Ta thấy bài toán ở ví dụ 2 là sự kết hợp của cả quy tắc cộng và quy tắc nhân khi bài toán vừa cần chia trường hợp vừa cần lựa chọn theo bước.

Ví dụ 3: Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ *I* và *O*). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5 B. 576.10^6 C. 33384960 D. 4968.10^5

Đáp án A.

Lời giải

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5=5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

STUDY TIP

Cách để phân biệt bài toán sử dụng quy tắc cộng hay quy tắc nhân là phân biệt xem công việc cần làm có thể chia trường hợp hay phải làm theo từng bước.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách xếp 7 bạn học sinh *A, B, C, D, E, F, G* vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho hai bạn *B* và *F* ngồi ở hai đầu ghế?

A. 720 cách B. 5040 cách C. 240 cách D. 120 cách

Đáp án C.

Phân tích

Ta thấy ở đây bài toán xuất hiện hai đối tượng.

Đối tượng 1: Hai bạn *B* và *F* (hai đối tượng này có tính chất riêng)

Đối tượng 2: Các bạn còn lại có thể thay đổi vị trí cho nhau.

Bước 1: Ta sẽ sử dụng tính chất riêng của hai bạn *B* và *F* trước. Hai bạn này chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.

Bước 2: Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.

Vậy ta có $2!.5!=240$ cách xếp.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng hoán vị của *n* phần tử, ta dựa trên dấu hiệu

a. Tất cả *n* phần tử đều có mặt.

b. Mỗi phần tử chỉ xuất hiện 1 lần.

c. Có sự phân biệt thứ tự giữa các phần tử.

d. Số cách xếp *n* phần tử là số hoán vị của *n* phần tử đó $P_n=n!$.

Ví dụ 5: Một nhóm 9 người gồm ba đàn ông, bốn phụ nữ và hai đứa trẻ đi xem phim. Hỏi có bao nhiêu cách xếp họ ngồi trên một hàng ghế sao cho mỗi đứa trẻ ngồi giữa hai người phụ nữ và không có hai người đàn ông nào ngồi cạnh nhau?

A. 288 B. 864 C. 24 D. 576

Đáp án B

Lời giải

Kí hiệu T là ghế đàn ông ngồi, N là ghế cho phụ nữ ngồi, C là ghế cho trẻ con ngồi. Ta có các phương án sau:

PA1: *TNCNTNCNT*

PA2: *TNTNCNCNT*

PA3: *TNCNCNTNT*

Xét phương án 1: Ba vị trí ghế cho đàn ông có $3!$ cách.

Bốn vị trí ghế cho phụ nữ có thể có $4!$ cách.

Hai vị trí ghế trẻ con ngồi có thể có $2!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.4!.2! = 288$ cách.

Lập luận tương tự cho phương án 2 và phương án 3.

Theo quy tắc cộng thì ta có $288 + 288 + 288 = 864$ cách.

STUDY TIP

Với các bài toán gồm có ít phần tử và vừa cần chia trường hợp vừa thực hiện theo bước thì ta cần chia rõ trường hợp trước, lần lượt thực hiện từng trường hợp (sử dụng quy tắc nhân từng bước) sau đó mới áp dụng quy tắc cộng để cộng số cách trong các trường hợp với nhau.

Ví dụ 6: Một chồng sách gồm có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lý, 5 quyển sách Hóa học. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang trên giá sách sao cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau, 3 quyển Vật lý đứng cạnh nhau?

A. 1 cách. B. 5040 cách. C. 725760 cách. D. 144 cách.

Đáp án C.

Lời giải

Bước 1: Do đề bài cho 4 quyển sách Toán đứng cạnh nhau nên ta sẽ coi như "buộc" các quyển sách Toán lại với nhau thì số cách xếp cho "buộc" Toán này là $4!$ cách.

Bước 2: Tương tự ta cũng "buộc" 3 quyển sách Lý lại với nhau, thì số cách xếp cho "buộc" Lý này là $3!$ cách.

Bước 3: Lúc này ta sẽ đi xếp vị trí cho 7 phần tử trong đó có:

+ 1 "buộc" Toán.

+ 1 "buộc" Lý.

+ 5 quyển Hóa.

Thì sẽ có $7!$ cách xếp.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $7!.4!.3! = 725760$ cách xếp.

STUDY TIP

Với các dạng bài tập yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử đứng cạnh nhau thì ta sẽ "buộc" các phần tử này thành một nhóm và coi như 1 phần tử.

Ví dụ 7: Một câu lạc bộ Phụ nữ của phường Khương Mai có 39 hội viên. Phường Khương Mai có tổ chức một hội thảo cần chọn ra 9 người xếp vào 9 vị trí lễ tân khác nhau ở cổng chào, 12 người vào 12 vị trí khác nhau ở ghế khách mời. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các hội viên để đi tham gia các vị trí trong hội thảo theo đúng quy định?

A. $A_{39}^{9}.A_{39}^{12}$ B. $C_{39}^{9}.C_{30}^{12}$ C. $C_{39}^{9}.C_{39}^{12}$ D. $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$

Đáp án D

Phân tích

Bài toán sử dụng quy tắc nhân khi ta phải thực hiện hai bước:

Bước 1: Chọn 9 người vào vị trí lễ tân.

Bước 2: Chọn 12 người vào vị trí khách mời.

Dấu hiệu nhận biết sử dụng chỉnh hợp ở phần **STUDY TIP** bên cạnh.

STUDY TIP

Để nhận dạng một bài toán đếm có sử dụng chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta cần có các dấu hiệu

a. Phải chọn k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Có sự phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử có phân biệt thứ tự từ n phần tử là A_n^k cách.

Lời giải

Bước 1: Chọn người vào vị trí lễ tân.

Do ở đây được sắp thứ tự nên ta sẽ sử dụng chỉnh hợp. Số cách chọn ra 9 người xếp vào vị trí lễ tân là A_{39}^{9} cách.

Bước 2: Chọn người vào vị trí khách mời. Số cách chọn là 12 thành viên trong số các thành viên còn lại để xếp vào ghế khách mời là A_{30}^{12} cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì số cách chọn các hội viên để đi dự hội thảo theo đúng quy định là $A_{39}^{9}.A_{30}^{12}$ cách.

Ví dụ 8: Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

A. 30240 cách **B.** 720 cách **C.** 362880 cách **D.** 1440 cách.

Đáp án A.

STUDY TIP

Khi bài toán yêu cầu xếp hai hoặc nhiều phần tử không đứng cạnh nhau. Chúng ta có thể tạo ra các "vách ngăn" các phần tử này trước khi xếp chúng.

Lời giải

Cách 1: Trước hết, xếp 6 học sinh thành một hàng có $6!$ cách.

Lúc này giữa hai học sinh bất kì sẽ tạo nên một vách ngăn và 6 học sinh sẽ tạo nên 7 vị trí có thể xếp các thầy vào đó tính cả hai vị trí ở hai đầu hàng (hình minh họa bên). 7 vị trí dấu nhân chính là 7 vách ngăn được tạo ra.

+ Do đề yêu cầu 2 thầy giáo không đứng cạnh nhau nên ta xếp 2 thầy giáo vào 2 trong 7 vị trí vách ngăn được tạo ra có A_7^2 cách.

Theo quy tắc nhân ta có tất cả $6!.A_7^2 = 30240$ cách xếp.

Cách 2: - Có $8!$ cách xếp 8 người.

- Buộc hai giáo viên lại với nhau thì có $2!$ cách buộc.

Khi đó có $2.7!$ cách xếp. Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8! - 2.7! = 30240$ cách xếp.

Ví dụ 9: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn một bó hồng gồm 7 bông, hỏi có bao nhiêu cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ?

A. 10 cách. **B.** 20 cách. **C.** 120 cách. **D.** 150 cách.

Đáp án D.

STUDY TIP

Để nhận dạng bài toán sử dụng tổ hợp chập k của n phần tử, ta dựa trên dấu hiệu:

a. Phải chọn ra k phần tử từ n phần tử cho trước.

b. Không phân biệt thứ tự giữa k phần tử được chọn.

c. Số cách chọn k phần tử không phân biệt thứ tự từ n phần tử đã cho là C_n^k cách.

Phân tích

Ta thấy do chỉ chọn 7 bông hồng mà có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ nên chỉ có ba trường hợp sau:

TH1: Chọn được 3 bông hồng vàng và 4 bông hồng đỏ.

TH2: Chọn được 4 bông hồng vàng và 3 bông hồng đỏ.

TH3: Chọn được 3 bông hồng vàng, 3 bông hồng đỏ và 1 bông hồng trắng.

Lời giải

TH1: Số cách chọn 3 bông hồng vàng là C_5^3 cách.

Số cách chọn 4 bông hồng đỏ là C_4^4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $C_5^3.C_4^4 = 10$ cách

TH2: Tương tự TH1 thì ta có $C_5^4.C_4^3 = 20$ cách.

TH3: Tương tự thì có $C_5^3.C_4^3.C_3^1 = 120$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng thì có $10 + 20 + 120 = 150$ cách.

Từ các bài toán trên ta rút ra được quy luật phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp như sau:

* Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ với nhau bởi công thức:

$$A_n^k = k!.C_n^k$$

* Chỉnh hợp: có thứ tự Tổ hợp: không có thứ tự.

* Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử thì sử dụng chỉnh hợp. Ngược lại thì sử dụng tổ hợp.

* Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \le n$):

+ Không thứ tự: C_n^k

+ Có thứ tự: A_n^k

Ví dụ 10: Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

A. 120 **B.** 90 **C.** 270 **D.** 255

Đáp án D.

Lời giải

Số cách chọn ra 4 học sinh bất kì từ 12 học sinh là $C_{12}^4 = 495$ cách.

Số cách chọn ra 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

***TH1:** Lớp A có hai học sinh, các lớp B, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Chọn 2 học sinh trong 5 học sinh lớp A có C_5^2 cách.

Chọn 1 học sinh trong 4 học sinh lớp B có C_4^1 cách.

Chọn 1 học sinh trong 3 học sinh lớp C có C_3^1 cách.

Suy ra số cách chọn là $C_5^2.C_4^1.C_3^1 = 120$ cách.

* **TH2:** Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^2.C_3^1 = 90$ cách.

* **TH3:** Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp có 1 học sinh:

Tương tự ta có số cách chọn là $C_5^1.C_4^1.C_3^2 = 60$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là

$$120 + 90 + 60 = 270 \text{ cách.}$$

Số cách chọn ra 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên là

$$495 - 270 = 225 \text{ cách.}$$

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, làm trực tiếp sẽ khó trong việc xác định các trường hợp hoặc các bước thì ta nên làm theo hướng gián tiếp như bài toán ở ví dụ 9.

Ta sử dụng cách làm gián tiếp khi bài toán giải bằng cách trực tiếp gặp khó khăn do xảy ra quá nhiều trường hợp, chúng ta tìm cách gián tiếp bằng cách xét bài toán đối.

Ví dụ 11: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần?

A. 6720 số **B.** 40320 số **C.** 5880 số **D.** 840 số

Đáp án C.

Lời giải

Giả sử các số tự nhiên gồm 8 chữ số tương ứng với 8 ô.

Do chữ số 1 có mặt 3 lần nên ta sẽ coi như tìm số các số thỏa mãn đề bài được tạo nên từ 8 số 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5.

Số hoán vị của 8 số 0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5 trong 8 ô trên là $8!$

Mặt khác chữ số 1 lặp lại 3 lần nên số cách xếp là $\frac{8!}{3!}$ kể cả trường hợp số 0 đứng đầu.

Xét trường hợp ô thứ nhất là chữ số 0, thì số cách xếp là $\frac{7!}{3!}$

STUDY TIP

Bài toán bên cạnh là một dấu hiệu của hoán vị lặp. Để biết thêm về hoán vị lặp thì ta sẽ nghiên cứu ở phần đọc thêm.

ĐỌC THÊM: Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, ..., a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2,.., n_k phần tử a_k $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1, n_2, ..., n_k)$ của k phần tử. Số các hoán vị lặp dạng như trên là

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k!}$$

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\frac{8!}{3!}-\frac{7!}{3!}=5880$ số.

Ví dụ 12: Cho 8 bạn học sinh *A, B, C, D, E, F, G, H*. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 bạn đó ngồi xung quanh 1 bàn tròn có 8 ghế?

A. 40320 cách. **B.** 5040 cách. **C.** 720 cách. **D.** 40319 cách.

Đáp án B

Lời giải

Ta thấy ở đây xếp các vị trí theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn.

Ta chọn cố định vị trí của *A*, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $7!=5040$ cách.

ĐỌC THÊM

Hoán vị vòng quanh: Cho tập *A* gồm *n* phần tử. Một cách sắp xếp *n* phần tử của tập *A* thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của *n* phần tử. Số các hoán vị vòng quanh của *n* phần tử là

$$Q_n=(n-1)!$$

Ví dụ 13: Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí và 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh *A, B, C, D, E* mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong ba loại sách trên đều còn ít nhất một cuốn.

A. 204 **B.** 24480 **C.** 720 **D.** 2520

Đáp án B.

Lời giải

Ta thấy với bài toán này nếu làm trực tiếp thì sẽ khá khó, nên ta sẽ làm theo cách gián tiếp. Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

TH1: Môn Toán hết sách:

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong số 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5=120$ cách.

Vậy có $6.120=720$ cách

TH2: Môn Lí hết sách:

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong số 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5=120$

Vậy có $21.120=2520$ cách chọn sách.

TH3: Môn Hóa hết sách: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 quyển bất kì trong số 10 quyển sách đó và tặng cho 5 em học sinh là $C_{10}^5.A_5^5=252.A_5^5=30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240-720-2520-2520=24480$ cách.

STUDY TIP

Ở đây có nhiều độc giả không xét đến công đoạn sau khi chọn sách còn công đoạn tặng sách nữa. Do các bạn *A, B, C, D, E* là khác nhau nên mỗi cách tặng sách các môn cho các bạn là khác nhau, nên ta phải xét thêm công đoạn đó.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Trong một lớp có 17 bạn nam và 11 bạn nữ.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra hai bạn, trong đó có một bạn nam và một bạn nữ?

b) Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bạn làm lớp trưởng?

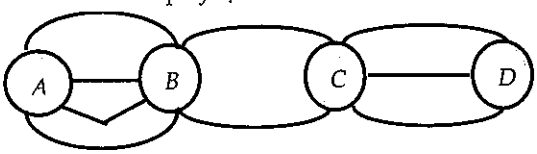
A. a. 187 cách và b. 28 cách

B. a. 28 cách và b. 187 cách.

C. a. 17 cách và b. 11 cách.

D. a. 11 cách và b. 17 cách.

Câu 2: Các thành phố *A, B, C, D* được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ *A* đến *D* rồi quay lại *B*.



A. 576 **B.** 24 **C.** 144 **D.** 432

Câu 3: Một lớp học có 25 học sinh khá môn Toán, 24 học sinh khá môn Ngữ Văn, 10 học sinh khá cả môn Toán và môn Ngữ Văn và 3 học sinh không khá cả Toán và Ngữ Văn. Hỏi lớp học đó có bao nhiêu học sinh?

A. 39 **B.** 42 **C.** 62 **D.** 52

Câu 4: Trong kì thi tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty cổ phần Giáo dục trực tuyến VEDU, ở khối A có 51 thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 73 thí sinh đạt điểm giỏi môn Vật lí, 64 thí sinh đạt điểm giỏi môn Hóa học, 32 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Toán và Vật lý, 45 thí sinh đạt điểm giỏi cả hai môn Vật lí và Hóa học, 21 thí sinh đạt điểm giỏi cả môn Toán và môn Hóa học và 10 thí sinh đạt điểm giỏi cả ba môn Toán, Vật lí, Hóa học. Có 767 thí sinh mà cả ba môn đều không có điểm giỏi. Hỏi có bao nhiêu thí sinh tham dự tuyển nhân viên chuyên môn cho công ty?

A. 867 **B.** 776 **C.** 264 **D.** 767

Câu 5: Người ta phỏng vấn 100 người về ba bộ phim *A, B, C* đang chiếu thì thu được kết quả như sau

Bộ phim *A*: có 28 người đã xem.

Bộ phim *B*: có 26 người đã xem.

Bộ phim *C*: có 14 người đã xem.

Có 8 người đã xem hai bộ phim *A* và *B*.

Có 4 người đã xem hai bộ phim *B* và *C*.

Có 3 người đã xem hai bộ phim *A* và *C*.

Có 2 người đã xem cả ba bộ phim *A; B* và *C*.

Số người không xem bất cứ phim nào trong cả ba bộ phim *A, B, C*.

A. 55 **B.** 45 **C.** 32 **D.** 51

Câu 6: Một đội văn nghệ chuẩn bị được 2 vở kịch, 3 điệu múa và 6 bài hát. Tại hội diễn, mỗi đội chỉ được trình diễn một vở kịch, 1 điệu múa và 1 bài hát. Hỏi đội văn nghệ trên có bao nhiêu cách chọn chương trình diễn, biết chất lượng các vở kịch, điệu múa, bài hát là như nhau?

A. 11 **B.** 36 **C.** 25 **D.** 18

Câu 7: Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi đen khác nhau xếp thành một dãy sao cho hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau.

A. 3251404800 **B.** 1625702400

C. 72 **D.** 36

Câu 8: Sắp xếp 5 học sinh học lớp *A* và 5 học sinh học lớp *B* vào hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy 5 ghế sao cho 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp. Khi đó số cách xếp là

A. 460000 **B.** 460500 **C.** 460800 **D.** 460900

Câu 9: Có 20 cặp vợ chồng tham dự chương trình Gameshow truyền hình thực tế. Có bao nhiêu cách chọn ra 2 cặp đôi sao cho 2 cặp đó là hai đôi vợ chồng?

A. 380 **B.** 116280 **C.** 90 **D.** 5040

Câu 10: Cho tập $A = \{2;5\}$. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 10 chữ số sao cho không có chữ số 2 nào đứng cạnh nhau?

A. 144 số **B.** 143 số **C.** 1024 số **D.** 512 số.

Câu 11 : Có 6 học sinh và 3 thầy giáo *A, B, C*. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 9 người đó ngồi trên một hàng ngang có 9 ghế sao cho mỗi thầy giáo ngồi giữa 2 học sinh?

A. 43200 **B.** 720 **C.** 60 **D.** 4320

Câu 12: Trong một tổ học sinh có 5 em gái và 10 em trai. Thùy là một trong 5 em gái và Thiện là một trong 10 em trai đó. Thầy chủ nhiệm chọn một nhóm 5 bạn tham gia buổi văn nghệ tới. Hỏi thầy chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy hoặc Thiện không được chọn.

A. 286 **B.** 3003 **C.** 2717 **D.** 1287

Câu 13: Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang sao cho giữa hai em nữ bất kì đều không có một em nam nào?

A. 241920 **B.** 30240 **C.** 5040 **D.** 840

Câu 14: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau và tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

A. 720 số. **B.** 504 số. **C.** 936 số. **D.** 1440 số.

Câu 15: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Biết rằng số tam giác có đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$ gấp 20 lần so với số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1;A_2;...;A_{2n}$. Vậy giá trị của n là

A. $n=10$ B. $n=12$ C. $n=8$ D. $n=14$

Câu 16: Giả sử ta dùng 5 màu để tô màu cho 3 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là:

A. $\frac{5!}{2!}$. B. 5×3. C. $\frac{5!}{3!2!}$. D. 5^3.

Câu 17: Ông bà An cùng 6 đứa con đang lên máy bay theo một hàng dọc. Có bao nhiêu cách xếp hàng khác nhau nếu ông An và bà An đứng ở đầu hoặc cuối hàng?

A. 720. B. 1440. C. 20160. D. 40320.

Câu 18: Có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu đó có thể lập bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu khác nhau, sao cho mỗi đề phải có 3 loại (khó, trung bình, dễ) và số câu dễ không ít hơn 2?

A. 142506 B. 56875 C. 10500 D. 22750

Câu 19: Biển đăng kí xe ô tô có 6 chữ số và hai chữ cái trong số 26 chữ cái (không dùng các chữ I và O). Chữ số đầu tiên khác 0. Hỏi số ô tô được đăng kí nhiều nhất có thể là bao nhiêu?

A. 5184.10^5 B. 576.10^6

C. 33384960 D. 4968.10^5

Câu 20: Một bộ ghép hình gồm các miếng gỗ. Mỗi miếng gỗ được đặc trưng bởi 4 tiêu chuẩn: chất liệu, màu sắc, hình dạng và kích cỡ. Biết rằng có hai chất liệu (gỗ, nhựa); có 4 màu (xanh, đỏ, lam, vàng); có 4 hình dạng (hình tròn, vuông, tam giác, lục giác) và 3 kích cỡ (nhỏ, vừa, lớn). Xét miếng gỗ "nhựa, đỏ, hình tròn, vừa". Hỏi có bao nhiêu miếng gỗ khác miếng gỗ trên ở đúng hai tiêu chuẩn?

A. 29 B. 39 C. 48 D. 56

Câu 21: Có 5 bi đỏ và 5 bi trắng có kích thước đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các bi này thành 1 hàng dài sao cho hai bi cùng màu không được nằm kề nhau?

A. 28800 B. 86400 C. 43200 D. 720

Câu 22: Cho $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ có thể lập bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một từ X sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải có mặt chữ số 1.

A. 2280 B. 840 C. 1440 D. 2520

Câu 23: Một hộp bi có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Có bao nhiêu cách để lấy 4 viên bi từ hộp sao cho trong 4 viên bi lấy được số bi đỏ lớn hơn số bi vàng?

A. 125 B. 275 C. 150 D. 270

Câu 24: Cho hai đường thẳng song song $d_1;d_2$. Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm vừa nói ở trên?

A. $C_{10}^2C_{15}^1$ B. $C_{10}^1C_{15}^2$

C. $C_{10}^2C_{15}^1+C_{10}^1C_{15}^2$ D. $C_{10}^2C_{15}^1C_{10}^1C_{15}^2$

Câu 25: Từ các chữ số của tập $A=\{1;2;3;4;5;6;7\}$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số trong đó chữ số 2 xuất hiện đúng ba lần, các chữ số còn lại đôi một khác nhau.

A. 31203 B. 12600 C. 181440 D. 36

Câu 26: Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vectơ mà có điểm đầu và điểm cuối thuộc 2010 điểm đã cho.

A. 4040100 vectơ B. 4038090 vectơ

C. 2021055 vectơ D. 2019045 vectơ

Câu 27: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt $(n\ge2)$. Biết rằng có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Vậy n có giá trị là

A. 20 B. 21 C. 30 D. 32

Câu 28*: Trong mặt phẳng cho n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và trong tất cả các đường thẳng nối hai điểm bất kì không có hai đường thẳng nào song song, trùng nhau hoặc vuông góc. Qua mỗi điểm vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại. Số giao điểm của các đường thẳng vuông góc giao nhau nhiều nhất là bao nhiêu?

A. $2C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$

B. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$

C. $3C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-2\left[nC^2_{n-1}-1+5C^3_n\right]$

D. $C^2_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}-\left[n\left(C^2_{n-1}-1\right)+5C^3_n\right]$

Câu 29: Một bữa tiệc bàn tròn của các câu lạc bộ trong trường Đại học Sư Phạm Hà Nội trong đó có 3 thành viên từ câu lạc bộ Máu Sư Phạm, 5 thành viên từ câu

lạc bộ Truyền thông và 7 thành viên từ câu lạc bộ Kỹ năng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên sao cho những người cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau.

A. 7257600 B. 7293732
B. 3174012 D. 1418746

Câu 30: Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu.

A. 560 B. 310 C. 3014 D. 319

Câu 31: Xếp 6 người (trong đó có 1 cặp vợ chồng) ngồi quanh bàn tròn có 6 cái ghế không ghi số sao cho cặp vợ chồng ngồi cạnh nhau. Số cách xếp là:

A. 240 B. 48 C. 120 D. 24

Câu 32: Một dãy ghế dài có 10 ghế. Xếp một cặp vợ chồng ngồi vào 2 trong 10 ghế sao cho người vợ ngồi bên phải người chồng (không bắt buộc ngồi gần nhau). Số cách xếp là:

A. 45 B. 50 C. 55 D. 90

Câu 33: Một đoàn tàu có bốn toa đỗ ở sân ga. Có bốn hành khách bước lên tàu. Số trường hợp có thể xảy ra về cách chọn toa của bốn khách là

A. 24 B. 256 C. 232 D. 1

Câu 34: Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh và 15 viên bi vàng. Các viên bi có cùng kích cỡ. Số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

A. 146611080 B. 38955840
C. 897127 D. 107655240

Câu 35: Một bộ bài có 52 lá, có 4 loại: cơ, rô, chuồn, bích mỗi loại có 13 lá. Muốn lấy ra 8 lá bài phải có đúng 1 lá cơ, đúng 3 lá rô và không quá 2 lá bích. Hỏi có mấy cách chọn?

A. 39102206 B. 22620312
C. 36443836 D. 16481894

Câu 36: Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau.

A. 900 B. 9000 C. 90000 D. 27216

Câu 37: Một lớp có n học sinh ($n > 3$).Thầy chủ nhiệm cần chọn ra một nhóm và cần cử ra một học sinh làm nhóm trưởng. Số học sinh trong mỗi nhóm phải lớn hơn 1 và nhỏ hơn n. Gọi T là số cách chọn, lúc này

A. $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$ B. $T = n\left(2^{n-1} - 1\right)$

C. $T = n2^{n-1}$ D. $T = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

Câu 38: Trong một căn phòng có 36 người trong đó có 25 người họ Nguyễn, 11 người họ Trần. Trong số những người họ Nguyễn có 8 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 9 người còn lại (gồm 4 nam và 5 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Trong 11 người họ Trần, có 3 cặp là anh em ruột (anh trai và em gái), 5 người còn lại (gồm 2 nam và 3 nữ) không có quan hệ họ hàng với nhau. Chọn ngẫu nhiên 2 người.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính?

A. 156 B. 30 C. 186 D. 126

b) Có bao nhiêu cách chọn hai người sao cho không có cặp anh em ruột nào?

A. 619 B. 630 C. 11 D. 25

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

a) Bước 1: Chọn bạn nam có 17 cách

Bước 2: Chọn bạn nữ có 11 cách

Theo quy tắc nhân ta có $17.11 = 187$ cách

b) Số cách để chọn ra 1 bạn nam làm lớp trưởng là 17.

Số cách để chọn ra 1 bạn nữ làm lớp trưởng là 11.

Vậy có $11 + 17 = 28$ cách.

Câu 2: Đáp án C.

Đi từ A đến D có $4.2.3 = 24$ cách.

Đi từ D về B có $3.2 = 6$ cách.

Vậy đi từ A đến D rồi quay lại B có $6.24 = 144$ cách.

Câu 3: Đáp án B.

Gọi A là tập các học sinh khá môn Toán, B là tập các học sinh khá môn Ngữ Văn. Theo đề ta có

$|A| = 25; |B| = 24;$ và $|A \cap B| = 10.$

Theo quy tắc tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn bất kì ta có

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 24 - 10 = 39$

Vậy lớp học có $39 + 3 = 42$ học sinh.

Câu 4: Đáp án A

Kí hiệu A, B, C tương ứng là tập hợp các thí sinh đạt điểm giỏi môn Toán, Vật lý và Hóa học.

$|A| = 51; |B| = 73; |C| = 64; |A \cap B| = 32;$

$|B \cap C| = 45; |A \cap C| = 21; |A \cap B \cap C| = 10$

Lúc này ta có $A \cup B \cup C$ là tập hợp các học sinh đạt điểm giỏi ở ít nhất một trong ba môn là Toán, Vật lý, Hóa học. Ta có

$|A \cup B \cup C|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

$= 51 + 73 + 64 - 32 - 45 - 21 + 10 = 100.$

Vậy số thí sinh dự tuyển vào công ty VEDU là $100 + 767 = 867$.

Câu 5: Đáp án B.

Theo quy tắc tính số phần tử của ba tập hợp hữu hạn bất kì, ta có số người xem ít nhất một bộ phim là

$28 + 26 + 14 - 8 - 4 - 3 + 2 = 55$ người.

Vậy số người không xem bất cứ bộ phim nào là $100 - 55 = 45$ người.

Câu 6: Đáp án B.

Chọn 1 vở kịch có 2 cách.

Chọn 1 điệu múa có 3 cách.

Chọn 1 bài hát có 6 cách.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $2.3.6 = 36$ cách.

Câu 7: Đáp án A.

Nhận xét: Bài toán là sự kết hợp giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Do hai viên bi cùng màu không được ở cạnh nhau nên ta có trường hợp sau:

Phương án 1: Các bi đỏ ở vị trí lẻ

Có 8 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 1.

Có 7 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 3.

...

Có 1 cách chọn bi đỏ ở vị trí số 15.

Suy ra có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi đỏ.

Tương tự có $8.7.6...3.2.1$ cách xếp 8 bi xanh.

Vậy có $(8.7...3.2.1)^2$ cách xếp.

Phương án 2: Các bi đỏ ở vị trí chẵn ta cũng có cách xếp tương tự.

Vậy theo quy tắc cộng ta có $(8!)^2 + (8!)^2 = 3251404800.$

Câu 8: Đáp án C.

Cách 1:

Bước 1: Học sinh đầu tiên, giả sử đó là học sinh lớp A có 10 cách chọn ghế.

Bước 2: Có 5 cách chọn ra một học sinh lớp B ngồi vào ghế đối diện.

Bước 3: Có 8 cách chọn ra một học sinh lớp A vào ghế tiếp theo.

Bước 4: Có 4 cách chọn ra học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 5: Có 6 cách chọn ra học sinh lớp A.

Bước 6: Có 3 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 7: Có 4 cách chọn học sinh lớp A vào ghế tiếp.

Bước 8: Có 2 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Bước 9: Có 2 cách chọn học sinh lớp A vào ghế kế tiếp.

Bước 10: Có 1 cách chọn học sinh lớp B vào ghế đối diện.

Theo quy tắc nhân thì có

$$10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = (5!)^2.2^5 = 460800 \text{ cách.}$$

Cách 2:

Vì 2 học sinh ngồi đối diện nhau thì khác lớp nên mỗi cặp ghế đối diện nhau sẽ được xếp bởi 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B.

Số cách xếp 5 học sinh lớp A vào 5 cặp ghế là $5!$ cách.

Số cách xếp 5 học sinh lớp B vào 5 cặp ghế là $5!$ cách.

Số cách xếp chỗ ở mỗi cặp ghế là 2 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $(5!)^2.2^5 = 460800$ cách.

Câu 9: Đáp án A.

Bước 1: Có 20 cách chọn người đàn ông đầu tiên.

Bước 2: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Bước 3: Có 19 cách chọn người đàn ông tiếp theo.

Bước 4: Sau đó chỉ có 1 cách chọn vợ của anh ta.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $20.1.19.1 = 380$ cách.

Câu 10: Đáp án A.

TH1: Số có 10 chữ số 5: chỉ có 1 số duy nhất.

TH2: Số có 9 chữ số 5 và 1 chữ số 2.

Xếp 9 số 5 thành hàng có 1 cách. Khi đó tạo nên 10 "vách ngăn" để xếp số 2.

Xếp số 2 có C_{10}^1 cách. Vậy có C_{10}^1 số.

TH3: Số có 8 chữ số 5 và 2 chữ số 2.

Tương tự sử dụng phương pháp tạo vách ngăn như TH1 thì tìm được C_9^2 số.

TH4: Số có 7 chữ số 5 và 3 chữ số 2: có C_8^3 số.

TH5: Số có 6 chữ số 5 và 4 chữ số 2: có C_7^4 số.

TH6: Có 5 chữ số 5 và 5 chữ số 2: có C_6^5 số.

Vậy theo quy tắc cộng thì có

$1 + C_{10}^1 + C_9^2 + C_8^3 + C_7^4 + C_6^5 = 144$ số.

Câu 11: Đáp án A

Ta sử dụng phương pháp tạo "vách ngăn" được giới thiệu ở phần lí thuyết.

Bước 1: Xếp vị trí cho 6 học sinh có $6!$ cách.

Bước 2: Do đề yêu cầu mỗi thầy giáo ngồi giữa hai học sinh nên ta chỉ tính 5 vách ngăn được tạo ra giữa 6 học sinh. Số cách xếp 3 thầy giáo vào 5 vị trí là A_5^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $6!.A_5^3 = 43200$ cách.

Câu 12: Đáp án C

Do ở đây việc tìm trực tiếp sẽ có nhiều trường hợp nên ta sẽ giải bài toán bằng cách gián tiếp. Ta sẽ đi tìm bài toán đối.

Ta đi tìm số cách chọn ra 5 bạn mà trong đó có cả hai bạn Thùy và Thiện.

Bước 1: Chọn nhóm 3 em trong 13 em, trừ Thùy và Thiện thì có $C_{13}^3 = 286$ cách.

Bước 2: Ghép 2 em Thùy và Thiện có 1 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có 286 cách chọn 5 em trong đó cả Thùy hoặc Thiện đều được chọn.

- Chọn 5 em bất kì trong số 15 em có $C_{15}^5 = 3003$ cách.

Vậy theo yêu cầu đề bài thì có tất cả $3003 - 286 = 2717$ cách chọn mà trong đó có ít nhất một trong hai em Thùy và Thiện không được chọn.

Câu 13: Đáp án A.

Do ở đây xuất hiện dấu hiệu của phương pháp "buộc" phần tử đó là các phần tử được xếp cạnh nhau nên ta áp dụng như sau:

Bước 1: Buộc 3 em nữ thành một buộc thì số cách đổi vị trí các em nữ trong buộc đó là $3!$ cách.

Bước 2: Sau khi buộc 3 em nữ thì ta chỉ còn 8 phần tử. Số cách xếp 8 phần tử này là $8!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $3!.8! = 241920$ cách.

Câu 14: Đáp án D.

Gọi $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ là số cần lập.

Theo giả thiết $a_3 + a_4 + a_5 = 8$.

Suy ra $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$ hoặc $a_3; a_4; a_5 \in \{1;3;4\}$

TH1: $a_3; a_4; a_5 \in \{1;2;5\}$

Có $3!$ cách chọn $\overline{a_3a_4a_5}$

Xếp $a_1; a_2; a_6$ có A_6^3 cách.

Vậy theo quy tắc nhân thì có $3!.A_6^3 = 720$ số.

TH2: Tương tự ta cũng tìm được 720 số.

Vậy có tất cả $720 + 720 = 1440$ số.

Câu 15: Đáp án C.

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ là C_{2n}^3.

Ứng với hai đường chéo đi qua tâm của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ cho tương ứng một hình chữ nhật có 4 đỉnh là 4 điểm trong $2n$ điểm $A_1; A_2; ...; A_{2n}$ và ngược lại mỗi hình chữ nhật như vậy sẽ cho ra 2 đường chéo đi qua tâm O của đa giác.

Mà số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều $2n$ đỉnh là n nên số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong $2n$ điểm là C_n^2.

Theo đề bài ta có

$$C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = \frac{20n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 16: Đáp án C.

Số cách chọn ra 3 màu trong 5 màu mà không có màu nào trùng nhau là $C_5^3 = \frac{5!}{3!.2!}$

Câu 17: Đáp án B.

Bước 1: Xếp chỗ cho hai ông bà An có 2 cách.

Bước 2: Xếp chỗ cho 6 người con có $6!$ cách.

Theo quy tắc nhân thì có $2.6! = 1440$ cách.

Câu 18: Đáp án B.

Xét các trường hợp:

TH1: Đề gồm 2 câu dễ, 2 câu khó, 1 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^2C_{10}^1 = 10500$ đề.

TH2: Đề gồm 2 câu dễ, 1 câu khó và 2 câu trung bình thì có $C_{15}^2C_5^1C_{10}^2 = 23625$ đề.

TH3: Đề gồm 3 câu dễ, 1 câu khó và 1 câu trung bình thì có $C_{15}^3C_5^1C_{10}^1 = 22750$ đề.

Theo quy tắc cộng thì có

$10500 + 23625 + 22750 = 56875$ đề.

Câu 19: Đáp án A.

Theo quy tắc nhân ta thực hiện từng bước.

Chữ cái đầu tiên có 24 cách chọn.

Chữ cái tiếp theo cũng có 24 cách chọn.

Chữ số đầu tiên có 9 cách chọn.

Chữ số thứ hai có 10 cách chọn.

Chữ số thứ ba có 10 cách chọn.

Chữ số thứ tư có 10 cách chọn.

Chữ số thứ năm có 10 cách chọn.

Chữ số thứ sáu có 10 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân ta có $24.24.9.10^5 = 5184.10^5$ là số ô tô nhiều nhất có thể đăng kí.

Câu 20: Đáp án A.

Có $C_4^2 = 6$ cách chọn 2 trong 4 tiêu chuẩn.

Với hai tiêu chuẩn: "chất liệu, cỡ" thì có $1.2 = 2$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, màu" có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "chất liệu, dạng" có $1.3 = 3$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, dạng" có $2.3 = 6$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Với hai tiêu chuẩn "cỡ, màu" có $3.3 = 9$ miếng khác ở đúng tiêu chuẩn này.

Tóm lại có $2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29$ miếng.

Câu 21: Đáp án A.

Ta thấy điều kiện xếp là hai bi cùng màu không nằm cạnh nhau nên ta phải xếp xen kẽ các viên bi.

Có 2 cách chọn viên bi đầu tiên (có thể là đỏ hoặc trắng)

Mỗi cách chọn đó có $5!$ cách xếp 5 bi đỏ và có $5!$ cách xếp bi 5 trắng.

Vậy có $2.5!.5! = 28800$ cách xếp.

Nhiều bạn có lời giải sai như sau: Ở đây ta sẽ áp dụng quy tắc "vách ngăn" để giải quyết bài toán.

Số cách xếp 5 bi đỏ là $5!$ cách.

5 bi đỏ sẽ tạo ra 6 vách ngăn để xếp 5 bi trắng vào. Số cách xếp 5 bi trắng là A_6^5 cách.

Vậy số cách xếp các viên bi là $5!.A_6^5 = 86400$. Từ đây chọn B là sai. Do nếu theo quy tắc vách ngăn ở đây có 6 vách mà có 5 bi, tức là có thể sẽ có vách ngăn để trống khiến cho 2 viên bi cùng màu cạnh nhau.

Câu 22: Đáp án A.

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng $\overline{abcde}$

TH1: Nếu $a = 1$ khi đó có $A_7^4 = 840$ cách chọn 4 chữ số xếp vào *b, c, d, e*.

TH2: Nếu $a \neq 1$, khi đó

Có 6 cách chọn *a*.

Có 2 cách xếp chữ số 1 vào số cần tạo ở vị trí *b* hoặc vị trí *c*.

Các chữ số còn lại trong số cần tạo có A_6^3 cách chọn.

Như vậy trường hợp này có $2.6.A_6^3 = 1440$ số.

Vậy có tất cả $840 + 1440 = 2280$ số.

Chú ý: Nhiều độc giả quên mất $a \neq 0$ nên tính cả $a = 0$ dẫn đến ra D là sai.

Câu 23: Đáp án B

Các trường hợp lấy được 4 bi trong đó số bi đỏ lớn hơn số bi vàng như sau:

*** TH1:** Số bi lấy được không có bi vàng:

- Lấy 4 bi đỏ: Có C_5^4 cách.
- Lấy 1 bi đỏ, 3 bi xanh có $C_5^1.C_4^3$ cách.
- Lấy 2 bi đỏ, 2 bi xanh có $C_5^2.C_4^2$ cách.
- Lấy 3 bi đỏ, 1 bi xanh có $C_5^3.C_4^1$ cách.

***TH2:** 4 bi lấy được có đúng 1 bi vàng.

- Lấy được 2 bi đỏ, 1 bi vàng, 1 bi xanh có $C_5^2.C_3^1.C_4^1$ cách.
- Lấy được 3 bi đỏ, 1 bi vàng có $C_5^3.C_3^1$ cách.

Vậy số cách là

$$C_5^4 + C_5^1.C_4^3 + C_5^2.C_4^2 + C_5^3.C_4^1 + C_5^2.C_3^1.C_4^1 + C_5^3.C_3^1 = 275.$$

Câu 24: Đáp án C.

Ta có 2 trường hợp:

TH1: Tam giác gồm hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc d_2

- Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2

Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1

Theo quy tắc nhân thì có $C_{10}^2.C_{15}^1$ tam giác.

TH2: Gồm 1 đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2

Tương tự ta tìm được $C_{10}^1.C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn.

Vậy theo quy tắc cộng thì có tất cả $C_{10}^2.C_{15}^1 + C_{10}^1C_{15}^2$ tam giác.

Câu 25: Đáp án B.

Có C_7^3 cách để xếp 3 chữ số 2.

Khi đó có A_6^4 cách xếp 4 chữ số còn lại.

Vậy có $C_7^3.A_6^4 = 12600$ số.

Câu 26: Đáp án A.

Cách 1: Chú ý: *Bài toán không nói vectơ có khác vectơ không nên ta vẫn xét cả vectơ không ở đây. Và 2 điểm khác nhau tạo nên 2 vectơ có điểm đầu và điểm cuối hoán vị cho nhau cho nên ở đây việc chọn vectơ sẽ sử dụng chỉnh hợp chứ không phải tổ hợp.*

TH1: Có 2010 vectơ không được tạo thành.

TH2: Các vectơ khác vectơ không:

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010, nên số vectơ cần tìm là A_{2010}^2

Theo quy tắc cộng thì có $A_{2010}^2 + 2010 = 4040100$ vectơ tạo thành.

Cách 2: Có 2010 cách chọn điểm đầu.

Có 2010 cách chọn điểm cuối.

$\Rightarrow$ Có $2010^2 = 4040100$ vectơ

Câu 27: Đáp án A.

Tương tự Câu 24 ta có số tam giác được tạo thành theo n là $C_{10}^1 C_n^2 + C_{10}^2 C_n^1 = 2800$

$$\Leftrightarrow 10\frac{n(n-1)}{2} + 45n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow n = 20.$$

Câu 28: Đáp án D.

* Gọi n điểm đã cho là $A_1, A_2, ..., A_n$. Xét một điểm cố định, khi đó có C_{n-1}^2 đường thẳng được xác định bởi 2 trong $n-1$ điểm còn lại nên sẽ có C_{n-1}^2 đường thẳng vuông góc đi qua điểm cố định đó.

* Do đó có tất cả $nC_{n-1}^2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên có $C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2$ giao điểm (tính cả những giao điểm trùng nhau).

* Ta chia các điểm trùng nhau thành 3 loại

- Qua một điểm có $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ đường thẳng vuông góc nên ta phải trừ đi $n\left(C_{n-1}^2 - 1\right)$ điểm.

- Qua 3 điểm A_1, A_2, A_3 cuả 1 tam giác có 3 đường thẳng cùng vuông góc với A_4A_5 và 3 đường thẳng này song song với nhau nên ta mất 3 giao điểm, do đó trong TH này ta phải loại đi $3C_n^3$

- Trong mỗi tam giác thì ba đường cao chỉ có một giao điểm, nên ta mất 2 điểm cho mỗi tam giác, do đó trường hợp này ta phải trừ đi $2C_n^3$

Vậy số giao điểm nhiều nhất có được là

$$C_{\frac{n(n-1)(n-2)}{2}}^2 - \left[n\left(C_{n-1}^2 - 1\right) + 5C_n^3\right].$$

Câu 29: Đáp án A.

Do các thành viên cùng câu lạc bộ thì ngồi cạnh nhau nên ta sẽ sử dụng phương pháp "buộc" các phần tử để giải quyết bài toán.

Lúc này ta có 3 phần tử đó là 3 câu lạc bộ. Theo công thức hoán vị vòng quanh được giới thiệu ở phần ví dụ thì ta có $2!$ cách xếp 3 câu lạc bộ vào bàn tròn.

Với mỗi cách xếp thì có:

$3!$ cách xếp các thành viên CLB Máu Sư phạm.

$5!$ cách xếp các thành viên CLB Truyền thông.

$7!$ cách xếp các thành viên CLB Kỹ năng.

Vậy theo quy tắc nhân thì có tất cả

$$2!.3!.5!.7! = 7257600 \text{ cách xếp.}$$

Câu 30: Đáp án A.

Cách 1: Số cách lấy 3 bông hồng bất kì: $C_{25}^3 = 2300$

Số cách lấy 3 bông hông chỉ có một màu:

$$C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3 = 211$$

Số cách lấy 3 bông hồng có đúng hai màu:

$$C_{15}^3 + C_{17}^3 + C_{18}^3 - 2\left(C_7^3 + C_8^3 + C_{10}^3\right) = 1529.$$

Vậy số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2300 - 211 - 1529 = 560$.

Cách 2: Có 7 cách chọn bông hồng màu đỏ.

Có 8 cách chọn bông hồng vàng.

Có 10 cách chọn bông hồng trắng.

$\Rightarrow$ Có $7.8.10 = 560$ cách.

Câu 31: Đáp án B.

Áp dụng quy tắc "buộc" các phần tử ta có $2!$ cách xếp 2 vợ chồng.

Sau khi "buộc" hai vợ chồng lại thì ta có tất cả 5 phần tử. Theo công thức hoán vị vòng quanh thì số cách xếp 5 phần tử quanh bàn tròn là $4!$

Vậy theo quy tắc nhân thì có $2!.4! = 48$.

Câu 32: Đáp án A.

Ta lần lượt đánh số các ghế từ 1 đến 10.

- Nếu người chồng ở vị trí số 1 thì có 9 cách xếp người vợ.

- Nếu người chồng ở vị trí số 2 thì có 8 cách xếp người vợ.

...

- Nếu người chồng ở vị trí số 9 thì có 1 cách xếp người vợ.

Vậy có tất cả $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ cách.

Câu 33: Đáp án B

Chọn toa cho vị khách thứ nhất có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ hai có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ ba có 4 cách.

Chọn toa cho vị khách thứ tư có 4 cách.

Theo quy tắc nhân thì có $4^4 = 256$ cách chọn toa cho bốn khách.

Câu 34: Đáp án D.

Bước 1: Chọn bi

- Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

- Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $C_{45}^5 - C_{35}^5$ cách.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$

Theo quy tắc nhân thì có $5!.\left(C_{45}^5 - C_{35}^5\right) = 107655240$.

Câu 35: Đáp án A.

Xét các trường hợp sau:

- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô, 2 lá bích và 2 lá chuồn thì có $C_{13}^1 C_{13}^3 C_{13}^2 C_{13}^2 = 22620312$ cách lấy.
- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô, 1 lá bích và 3 lá chuồn thì có $C_{13}^1 C_{13}^3 C_{13}^1 C_{13}^3 = 13823524$ cách lấy.
- Lấy được 1 lá cơ, 3 lá rô và 4 lá chuồn thì có $C_{13}^1 C_{13}^3 C_{13}^4 = 2658370$ cách lấy.

Theo quy tắc cộng thì có tất cả

$22620312 + 13823524 + 2658370 = 39102206$ cách lấy.

Câu 36: Đáp án A.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcab}$.

Có 9 cách chọn *a*.

Có 10 cách chọn *b*.

Có 10 cách chọn *c*.

Vậy có tất cả $9.10.10 = 900$ số.

Câu 37: Đáp án A.

Gọi A_k là phương án: Chọn nhóm có *k* học sinh và chỉ định nhóm trưởng của nhóm.

Thầy chủ nhiệm có các phương án $A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}$.

Ta tính xem A_k có bao nhiêu cách thực hiện.

Phương án A_k có hai công đoạn:

- Công đoạn 1: Chọn *k* học sinh có C_n^k cách chọn.
- Công đoạn 2: Chỉ định nhóm trưởng: có *k* cách chọn.

Theo quy tắc nhân thì phương án A_k có kC_n^k cách thực hiện.

Vậy theo quy tắc cộng thì $T = \sum_{k=2}^{n-1} kC_n^k$.

Câu 38:

a) Đáp án C.

* Có $8 + 4 = 12$ nam họ Nguyễn và có $8 + 5 = 13$ nữ họ Nguyễn. Vậy có $12.13 = 156$ cặp cùng họ Nguyễn mà khác giới tính.

* Tương tự có $5.6 = 30$ cách chọn cặp cùng họ Trần mà khác giới tính.

Vậy có $156 + 30 = 186$ cách chọn hai người cùng họ và khác giới tính.

b) Đáp án A.

Ta có $8 + 3 = 11$ cặp anh em trong đó có 8 cặp họ Nguyễn và 3 cặp họ Trần.

Chọn bất kì 2 người trong số 36 người thì có $C_{36}^2 = 630$ cách chọn.

Vậy có tất cả $630 - 11 = 619$ cách chọn các cặp sao cho không có cặp anh em nào.

Nhị thức Newton

A. Lý thuyết

1. Công thức nhị thức Newton

Khai triển $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau:

Định lý 1

Với a, b là các số thực và n là số nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n.\quad(1)$$

Quy ước $a^0=b^0=1$

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton).

Hệ quả

Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$.

Với $a=1;b=-1$, ta có $0=C^{n0}-C_n^1+...+(-1)^kC_n^k+...+(-1)^nC_n^n$

Các dạng khai triển cơ bản nhị thức Newton

$$(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+...+C_n^kx^{n-k}+...+C_n^{n-1}x+C_n^n$$

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$(x-1)^n=C_n^0x_n-C_n^1x+C_n^2x^2-...+(-1)^kC_n^kx^k+...+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nC_n^nx^n$$

$$C_n^k=C_n^{n-k}$$

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n>1)$$

$$k.C_n^k=\frac{k.n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

2. Tam giác Pascal.

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 2 1

$n=3$ 1 3 3 1

$n=4$ 1 4 6 4 1

$n=5$ 1 6 10 10 5 1

Tam giác Pascal được thiết lập theo quy luật sau

- Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng hứ nhất ghi hai số 1.
- Nếu biết hàng thứ n $(n\ge1)$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp thoe được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Nhận xét: Xét hàng thứ nhất, ta có:

$1=C_1^0,\ 1=C_1^1.$

Ở hàng thứ hai, ta có

$1=C_2^0,\ 2=C_2^1,\ 1=C_2^2.$

Ở hàng thứ ba, ta có

$1=C_3^0,\ 3=C_3^1,\ 3=C_3^2,\ 1=C_3^3.$

STUDY TIP

Trong biểu thức ở VP của công thức (1)

a) Số các hạng tử là $n+1$.

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

c) Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

STUDY TIP

Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pascal là dãy gồm $n+1$ số $C_n^0,C_n^1,C_n^2,...,C_n^{n-1},C_n^n$.

B. Các dạng toán sử dụng công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Dạng 1 Xác định điều kiện của số hạng thỏa mãn yêu cầu cho trước

Phương pháp chung:

- Xác định số hạng tổng quát của khai triển $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thức $k+1$).
- Từ T_{k+1} kết hợp với yêu cầu bài toán ta thiết lập một phương trình (thông thường theo biến k).
- Giải phương trình để tìm kết quả.

Ví dụ 1: Trong khai triển $\left(a^2 - \frac{1}{b}\right)^7$, số hạng thứ năm là

A. $-35a^6b^{-4}$ B. $35a^6b^{-4}$ C. $-21a^4b^{-5}$ D. $21a^4b^{-5}$

Đáp án B.

Lời giải

Theo công thức tổng quát ở lý thuyết thì ta có số hạng thứ 5 là

$C_7^4\left(a^2\right)^3\left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 35a^6b^{-4}$.

Ví dụ 2: Trong khai triển $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10}, (x>0)$ số hạng không chứa x sau khi khai triển là

A. 4354560 B. 13440 C. 60466176 D. 20736

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(2.x^{\frac{1}{3}} - 3.x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$

Từ lý thuyết ở trên ta có số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là

$C_{10}^k.2^{10-k}.3^k.x^{\frac{10-k}{3}}.x^{-\frac{k}{2}} = C_{10}^k.2^{10-k}.3^k.x^{\frac{20-5k}{6}}$

Theo yêu cầu đề bài ta có $20-5k=0 \Leftrightarrow k=4$. Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{10}^4.2^6.3^4 = 210.256.81 = 4354560$.

STUDY TIP

Trong các bài toán tìm số hạng trong khi khai triển các nhị thức, ta chú ý các công thức sau

$\left(x^m\right)^n = x^{m.n}, x^m x^n = x^{m+n}$

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Cho bài toán:

Cho nhị thức $P = \left[a(x) + b(x)\right]^n$ tìm số hạng chứa x^α (không chứa x khi $\alpha = 0$) trong khai triển đa thức P.

- Giải phương trình tổ hợp hoặc sử dụng phép tính tổng để tìm n (nếu giả thuyết chưa cho n)
- Số hạng tổng quát trong khai triển $T_{k+1} = g(n,k).x^{f(n,k)}$
- Theo đề thì $f(n,k) = \alpha \Rightarrow k = k_0$. Thay $k = k_0$ vào $g(n,k)$ thì ta có số hạng cần tìm.

Ví dụ 3: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1}=C_n^3$. Số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $P=\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^n$ với $x\neq 0$ là

A. $-\frac{35}{16}$ **B.** $-\frac{16}{35}$ **C.** $-\frac{35}{16}x^5$ **D.** $-\frac{16}{35}x^5$

Đáp án C.

STUDY TIP
Chú ý phân biệt giữa hệ số và số hạng.

STUDY TIP
Với $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{g(k)}$; số hạng chứa x^α tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k.
* Nếu $k\in\mathbb{N};k\le n$ thì hệ số phải tìm là a_k.
* Nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$ thì trong khai triển không có số hạng chứa x^α, hệ số phải tìm bằng 0.

Lời giải

Điều kiện $n\in\mathbb{N};n\ge 3$.

Ta có

$$5C_n^{n-1}=C_n^3\Leftrightarrow\frac{5.n!}{1!.(n-1)!}=\frac{n!}{3!.(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)}=\frac{1}{6.(n-3)!}\Leftrightarrow n^2-3n-28=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=7(TM)\\n=-4(l)\end{array}\right.$$

Với $n=7$ ta có $P=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}\right)^7$

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{7-k}}.C_7^kx^{14-3k}$

Suy ra $14-3k=5\Leftrightarrow k=3$

Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4=-\frac{35}{16}x^5$

Ví dụ 4: Trong khai triển biểu thức $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^9$ số hạng nguyên có giá trị lớn nhất là

A. 8 **B.** 4536 **C.** 4528 **D.** 4520

Đáp án B.

Lời giải

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{3}\right)^{9-k}\left(\sqrt[3]{2}\right)^k$

Ta thấy bậc hai của căn thức là 2 và 3 là hai số nguyên tố, do đó để T_{k+1} là một số nguyên thì $\begin{cases}k\in\mathbb{N}\\0\le k\le 9\\(9-k)\vdots 2\\k\vdots 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\Rightarrow T_4=C_9^3\left(\sqrt{3}\right)^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=4536\\k=9\Rightarrow T_{10}=C_9^9\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt[3]{2}\right)^9=8\end{array}\right.$

Vậy trong khai triển có hai số hạng nguyên là $T_4=4536$ và $T_{10}=8$

Ví dụ 5: Tìm hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển đa thức

$$P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a_{13}.$$

A. 366080 **B.** 329472 **C.** 292864 **D.** 419648

Đáp án A.

Lời giải

Ta có số hạng tổng quát sau khi khai triển nhị thức $(2x+1)^{13}$ là $a_n=C_{13}^n.2^{13-n}$.

$\Rightarrow a_{n-1}=C_{13}^{n-1}.2^{14-n},(n=1,2,3,...,13)$

Xét bất phương trình với ẩn số n ta có

$a_{n-1}\le a_n\Leftrightarrow C_{13}^{n-1}.2^{14-n}\le C_{13}^n.2^{13-n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2.13!}{(n-1)!(14-n)!} \le \frac{13!}{n!(13-n)!} \Leftrightarrow \frac{2}{14-n} \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \le \frac{14}{3} \notin \mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{n-1} \le a_n$ đúng với $n \in \{1,2,3,4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Ta được $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ và $a_4 > a_5 > a_6 > ... > a_{13}$

Từ đây ta có hệ số có giá trị lớn nhất trong khai triển nhị thức là

$$a_4 = C_{13}^4.2^9 = 366080.$$

STUDY TIP

Phương pháp tìm hệ số lớn nhất trong khai triển

+ Áp dụng khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

+ Xác định số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k$ suy ra hệ số tổng quát là một dãy số theo a_k

+ Xét tính tăng giảm của a_k từ đó tìm được k tương ứng. Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển.

Phương pháp giải:

Giả sử sau khi khai triển ta được đa thức: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Xét các khả năng sau:

1. Nếu $a_k > 0\ \forall k$ (trường hợp $a_k < 0\ \forall k$ tương tự)

Ta xét bất phương trình $a_k \le a_{k+1}$, thông thường giải ra ta được nghiệm $k \le k_0 \in \mathbb{N}$. Do k nguyên nên $k = 0,1,...,k_0$. Từ đó suy ra bất phương trình $a_k > a_{k+1}$ có nghiệm $k > k_0$.

Chú ý rằng trong các bài toán về nhị thức Newton thì phương trình $a_k = a_{k+1}$ là bậc nhất theo k nên có nhiều nhất một nghiệm, và nếu có thì nghiệm đó là $k = k_0$. Như vậy có hai khả năng xảy ra:

Nếu $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ thì ta có: $a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n$

Khi đó ta tìm được hai hệ số lớn nhất là $a_{k_0} = a_{k_0+1}$

Nếu phương trình $a_k = a_{k+1}$ vô nghiệm thì ta có:

$$a_0 < a_1 < ... < a_{k_0-1} < a_{k_0} > a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > ... > a_n.$$

Khi đó ta có a_{k_0} là hệ số lớn nhất trong khai triển của nhị thức.

2. Nếu $a_{2k} > 0\ \forall k$ và $a_{2k+1} < 0\ \forall k$ (trường hợp $a_{2k} < 0\ \forall k$ và $a_{2k+1} > 0\ \forall k$ tương tự) thì khi đó bài toán trở thành tìm số lớn nhất trong các số a_{2k}. Ta cũng xét bất phương trình $a_{2k} \le a_{2k+2}$ rồi làm tương tự như phần 1.

Đọc thêm

Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton

Bài toán: Khai triển tam thức Newton sau $(a+b+c)^n$

Lời giải tổng quát

Bước 1: Viết tam giác Pascal đến dòng thứ n, để có được hệ số của nhị thức Newton $(b+c)^n$.

Bước 2: Ở các đầu dòng ta viết các đơn thức là khai triển nhị thức Newton $(a+1)^n$

Bước 3: Nhân lần lượt các đơn thức ở đầu dòng mỗi cột với các đơn thức còn lại trên mỗi dòng đó rồi cộng các kết quả lại, ta thu được kết quả khai triển.

Cụ thể ta có ở dưới đây

$1a^n$ 1

$C_n^1a^{n-1}$ $1b$ $1c$

$C_n^2a^{n-2}$ $1b^2$ $2bc$ $1c^2$

$C_n^3a^{n-3}$ $1b^3$ $3b^2c$ $3bc^2$ $1c^3$

$\dots$

$1a^0$ $1b^n$ $C_n^1b^{n-1}c$ $\dots$ $C_n^{n-1}bc^{n-1}$ $1c^n$

STUDY TIP

Sau khi khai triển $(a+b+c)^n$ Với $0\le p\le q\le n$ số hạng thứ $p+1$ trong khai triển là $T_p=C_n^pC_p^qa^{n-p}b^{p-q}c^q$

Sau khi cộng lại ta được

$$(a+b+c)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^pa^{n-p}.\left(\sum_{q=0}^{p}C_p^qb^{p-q}c^q\right)=\sum_{0\le q\le p\le n}C_n^pC_p^qa^{n-p}b^{p-q}c^q$$

Ví dụ 5: Hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $P(x)=(3x^2+x+1)^{10}$ là

A. 1695 **B.** 1485 **C.** 405 **D.** 360

Đáp án A.

Lời giải

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát trong khi khai triển $P(x)$ là

Ta có $T_p=C_{10}^pC_p^q(3x^2)^{10-p}(x)^{p-q}1^q$

$=C_{10}^pC_p^q3^{10-p}.x^{p-q+20-2p}$

Theo đề bài thì $p-q+20-2p=4\Leftrightarrow 20-(p+q)=4\Leftrightarrow p+q=16$

Do $0\le p\le q\le 10$ nên $(p;q)\in\{(8;8),(9;7),(10;6)\}$

Vậy hệ số của x^4 trong khai triển $P(x)=(3x^2+x+1)^{10}$ là

$$C_{10}^8C_8^8.3^{10-8}+C_{10}^9C_9^73^{10-9}+C_{10}^{10}C_{10}^6.3^{10-10}=1695.$$

STUDY TIP

Chú ý khi ra nhiều trường hợp của $(p;q)$ thì ta cộng hệ số các trường hợp với nhau để có kết quả.

Ví dụ 6: Tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển thành đa thức của $(x+x^2+x^3)^{10}$.

A. 135 **B.** 45 **C.** $135x^{13}$ **D.** $45x^{13}$

Đáp án C

Lời giải

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát trong khi khai triển $(x+x^2+x^3)^{10}$ là

$$T_p=C_{10}^pC_p^q(x)^{10-p}(x^2)^{p-q}(x^3)^q=C_{10}^pC_p^qx^{10+p+q}$$

Theo đề bài thì ta tìm số hạng chứa x^{13} trong khai triển nên

$$10+p+q=13\Leftrightarrow p+q=3$$

Mà $0\le q\le p\le 10$ nên $(p;q)\in\{(2;1);(3;0)\}$.

Vậy hệ số của x^{13} trong khai triển là $C_{10}^2C_2^1+C_{10}^3C_3^0=210$.

Dạng 2 Các bài toán về công thức tổ hợp và nhị thức Newton

Một số công thức thường dùng trong các bài tập dạng này như sau:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}, (n>1)$

$k.C_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \quad (*)$ $\qquad$ $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$ $\qquad$ $2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}$

$2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}$

STUDY TIP

Ngoài ra từ công thức $(*)$ ta mở rộng được công thức

$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$

$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$

Ví dụ 1: Cho $n;k \in \mathbb{N}^*, k \le n$ trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai?**

A. $C_n^k = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ $\qquad$ B. $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

C. $C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ D. $nC_n^k = kC_{n-1}^{k-1}$

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Giải theo phương pháp tự luận

Với A: Ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$

Từ A ta suy ra $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, từ đây ta có luôn D sai. Ta chọn D.

Đọc thêm: Chứng minh B; C.

Với B: $\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{n!}{(k+1)(n-k)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Với C: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^{n-k}$

STUDY TIP

Đẳng thức ở phương án A là một đẳng thức quan trọng trong các bài toán về công thức tổ hợp. Ta có hai hệ quả cũng quan trọng như sau:

Với mọi $n;k \in \mathbb{N}^*, 2 \le k \le n$

* **Hệ quả 1:** ta có

$(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-2}^{k-2}$

* **Hệ quả 2:** ta có

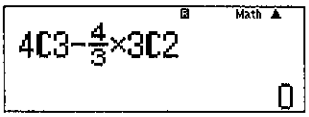
$k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$

Cách 2: Sử dụng máy tính để thử

Với các bài toán xét đẳng thức đúng thì ta có thể sử dụng máy tính để thử.

Ta thử với từng trường hợp, thử với cặp số cụ thể.

Ví dụ với A ta thử ngay với $k=3; n=4$ ta thấy đẳng thức này đúng, suy ra A đúng, từ đây suy ra D sai.



Ví dụ 2: Cho $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$. Số các số n thỏa mãn là

A. 10 số. $\qquad$ B. 9 số $\qquad$ C. 8 số $\qquad$ D. 7 số

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $n \ge 3$

Ta có $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3 \Leftrightarrow 6n - 6 \ge C_n^2$ (do $C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^2$)

$\Leftrightarrow 6n - 6 \ge \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le n \le 12.$

Ví dụ 3: Cho $S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15}$. Tính S.

A. $S = 2^{15}$ $\qquad$ B. $S = 2^{14}$ $\qquad$ C. $S = 3^{15}$ $\qquad$ D. $S = 3^{14}$

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng đẳng thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta được:

$S = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^{10} + ... + C_{15}^{15} = C_{15}^7 + C_{15}^6 + C_{15}^5 + ... + C_{15}^0$

STUDY TIP
Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

$$\Rightarrow 2S=\left(C_{15}^{8}+C_{15}^{9}+C_{15}^{10}+...+C_{15}^{15}\right)+\left(C_{15}^{7}+C_{15}^{6}+C_{15}^{5}+...+C_{15}^{0}\right)=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}=2^{15}$$

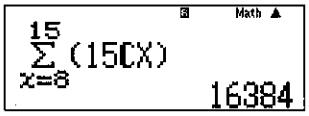
$$\Rightarrow S=2^{14}$$

Vậy $S=C_{15}^{8}+C_{15}^{9}+C_{15}^{10}+...+C_{15}^{15}=2^{14}$

***Cách 2:* Sử dụng máy tính Casio.**

Do bài toán này, tổng bé và số các số hạng trong tổng ít nên ta có thể sử dụng lệnh tổng trong máy tính Casio bằng cách bấm SHIFT log▪□ ($\sum_{\square}^{\square}$)

Ta nhập SHIFT log▪□ 1 5 SHIFT ÷ ALPHA) ▼ 8 ▲ 1 5 =



Với các bài toán tính tổng ở trên ta cần chú ý kỹ thuật sử dụng các đẳng thức cơ bản sau:

$C_n^k=C_n^{n-k}$, $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$ và các hệ quả: $\begin{cases}k(k-1)C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}\\ k^2C_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}\end{cases}$

Đẳng thức Pascal: $C_m^k=C_{m-1}^k+C_{m-1}^{k-1}$

$$\begin{cases}C_m^0+C_m^1+C_m^2+...+C_m^{m-1}+C_m^m=(1+1)^m=2^m\\ C_m^0-C_m^1+C_m^2-...+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}+(-1)^mC_m^m=(-1+1)^m=0\end{cases}$$

Xét $m=2n$: $\begin{cases}C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=2^{2n}\\ C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-...-C_{2n}^{2n-1}+C_{2n}^{2n}=0\end{cases}$

Cộng vế theo vế, trừ vế theo vế, ta được kết quả sau:

$C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$

Xét $m=2n+1$, hoàn toàn tương tự, ta được:

$C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^4+...+C_{2n+1}^{2n}=C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+C_{2n+1}^5+...+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{2n}$

Ví dụ 4*: Trong các đẳng thức sau đẳng thức nào **sai**?

A. $S_1=1C_n^1+2C_n^2+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=n2^{n-1}$

B. $S_2=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$

C. $S_3=1^2C_n^1+2^2C_n^2+...+(n-1)^2C_n^{n-1}+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

D. $S_4=\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^n-1)$

Đáp án D

Lời giải

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của các đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa ra cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng thử được.

Tôi xin giới thiệu cách chứng minh cụ thể như sau

Với A : Ta sẽ dùng đẳng thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_1=1C_n^1+2C_n^2+...+(n-1)C_n^{n-1}+nC_n^n=\sum_{k=1}^{n}kC_n^k$

$$=\sum_{k=1}^{n}nC_{n-1}^{k-1}=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+...+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}\right)=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}$$

Vậy A đúng.

Với B : Ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k=(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$.

Khi đó ta có: $S_2=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-1)nC_n^n=\sum_{k=2}^{n}(k-1)kC_n^k=\sum_{k=2}^{n}(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$

$$=(n-1)n\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+...+C_{n-2}^{n-3}+C_{n-2}^{n-2}\right)=(n-1)n2^{n-2}$$

STUDY TIP
* Các số hạng của S_1 có dạng kC_n^k nên ta dùng đẳng thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$
* Các số hạng của S_2 có dạng $(k-1)kC_n^k$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $(k-1)kC_n^k=(n-1)nC_{n-2}^{k-2}$

Vậy B đúng.

Với C : Ta có $k^2C_n^k=(n-1)nC_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$.

Khi đó ta có: $S_3=1^2C_n^1+2^2C_n^2+...+(n-1)^2C_n^{n-1}+n^2C_n^n$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k=\sum_{k=1}^{n}\left[(n-1)nC_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}\right]$$

$$=(n-1)n\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+...+C_{n-2}^{n-3}+C_{n-2}^{n-2}\right)+n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+...+C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$=(n-1)n2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$$

Vậy C đúng.

Từ đây ta chọn D.

Đọc thêm tính tổng S_4: Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta sẽ dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

Khi đó ta có: $S_4=\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^{n-1}}{n}+\frac{C_n^n}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+...+C_{n+1}^n+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-C_{n+1}^0\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

STUDY TIP

* Các số hạng của S_3 có dạng $k^2C_n^k$ nên ta dùng đẳng thức $k^2C_n^k=(n-1)nC_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$.
* Các số hạng của S_4 có dạng $\frac{C_n^k}{k+1}$ nên ta dùng đẳng thức $\frac{C_n^k}{n+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

Ví dụ 5 : Một học sinh giải bài toán

"Rút gọn biểu thức $S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^kC_n^k$ với $k\le n;n>1$."

Như sau

Bước 1: Ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k+1}=C_n^{k+1}$

$$S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^nC_n^k$$

$$=C_n^0-\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)+\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\right)-\left(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3\right)+...+(-1)^k\left(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k\right)$$

Bước 2: Mở dấu ngoặc ta có

$$S_k=C_n^0-C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-C_{n-1}^2-C_{n-1}^3+...+(-1)^k.C_{n-1}^{k-1}+(-1)^kC_{n-1}^k.$$

Bước 3: Vậy với mọi k thì $S_k=(-1)^kC_{n-1}^k$.

Kết luận nào sau đây là đúng :

A. Lời giải trên sai từ bước 1. **B.** Lời giải trên sai từ bước 2.

C. Lời giải trên sai ở bước 3. **D.** Lời giải trên đúng.

Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy lời giải trên sai khi đã không xét hai trường hợp $k<n$; hoặc $k=n$.

Vì nếu $k=n$ thì không tồn tại C_{n-1}^k.

Rất nhiều học sinh mắc sai lầm khi giải như trên, hoặc sai lầm khi giải như sau:

$$S_k=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+...+(-1)^kC_n^k=(1-1)^n=0.$$

Ta có lời giải đúng như sau :

TH1 : Với $k<n$, ta áp dụng công thức $C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k+1}=C_n^{k+1}$ ta có:

STUDY TIP

* Trong các bài toán mà các số k, n tổng quát ta cần lưu ý phân rõ trường hợp $k<n$ và $k=n$.

$$S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^k$$
$$= C_n^0 - \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1\right) + \left(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2\right) - \left(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3\right) + ... + (-1)^k \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k\right)$$
$$= C_n^0 - C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 + ... + (-1)^k.C_{n-1}^{k-1} + (-1)^k C_{n-1}^k.$$

Vậy $S_k = (-1)^k C_{n-1}^k$ khi $k<n$.

TH2 : Với $k=n$, thì $S_k = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0$.

Ví dụ 6: Tính tổng $S = 1.C_{2018}^1 + 2.C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + ... + 2018.C_{2018}^{2018}$

A. 2018.2^{2017} **B.** 2017.2^{2018} **C.** 2018.2^{2018} **D.** 2017.2^{2017}

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

Với các bài toán tính tổng thường sử dụng công thức $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Cách 1: Xét số hạng tổng quát

$$k.C_{2018}^k = k.\frac{2018!}{k!.\ 2018-k\ !} = k.\frac{2018.2017!}{k.\ k-1\ !\ 2018-k\ !} = 2018.C_{2017}^{k-1}$$

Cho k chạy từ 1 đến 2018 ta được:

$$S = 2018\ C_{2017}^0 + C_{2017}^1 + ... + C_{2017}^{2017} = 2018.2^{2017}$$

Cách 2: Khi các em học đạo hàm ở cuối chương trình 11 ta sẽ nghiên cứu ở chương đạo hàm. Khi đó ta xét hàm số

$$f\ x\ = 1+x^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + ... + C_{2018}^{2018} x^{2018}$$
$$\Rightarrow f'\ x\ = 2018\ 1+x^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + ... + 2018C_{2018}^{2018}$$
$$\Rightarrow f'\ 1\ = 2018.2^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + ... + 2018C_{2018}^{2018}$$
$$\Rightarrow 2018.2^{2017} = S \Rightarrow \text{ ta chọn A.}$$

Ví dụ 7: Tính tổng $S = C_{2017}^0 + \frac{1}{2}C_{2017}^1 + \frac{1}{3}C_{2017}^2 + ... + \frac{1}{2018}C_{2017}^{2017}$

A. $\frac{2^{2017}-1}{2017}$ **B.** $\frac{2^{2018}-1}{2018}$ **C.** $\frac{2^{2018}-1}{2017}$ **D.** $\frac{2^{2017}-1}{2018}$

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Xét số hạng tổng quát $\frac{1}{k+1}.C_{2017}^k$ ta có

$$\frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{k+1}\frac{2017!}{k!\ 2017-k\ !} = \frac{1}{2018}.\frac{2018!}{k+1\ !\ 2017-k\ !} = \frac{1}{2018}.C_{2018}^{k+1}$$

Vậy $\frac{1}{k+1}C_{2017}^k = \frac{1}{2018}C_{2018}^{k+1}$, cho k chạy từ 0 đến 2017 thì ta được

$$S = \frac{1}{2018}\left[C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + C_{2018}^2 + ... + C_{2018}^{2018}\right] - \frac{C_{2018}^0}{2018} = \frac{1}{2018}.2^{2018} - \frac{1}{2018} = \frac{2^{2018}-1}{2018}.$$

Cách 2: Sử dụng tích phân (các em sẽ học ở chương trình 12).

Xét $f\ x\ = 1+x^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + ... + C_{2017}^{2017} x^{2017}$

$$\Rightarrow \int_0^1 1+x^{2017}\,dx = \int_0^1 \left[C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + ... + C_{2017}^{2017} x^{2017}\right]dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^{2018}}{2018}\Big|_0^1 = \left[C_{2017}^0 x + \frac{1}{2}C_{2017}^1 x^2 + \frac{1}{3}C_{2017}^2 x^3 + ... + \frac{1}{2018}C_{2017}^{2017} x^{2018}\right]\Big|_0^1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{2^{2018}-1}{2018} = S$. Chọn **B**.

Ví dụ 8*(đọc thêm): Cho hai đẳng thức sau với $n > 1; n \in \mathbb{N}$

$S_1 = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1)C_n^n = 0,\ (1)$

$S_2 = C_n^0 + \dfrac{1}{2n}C_n^1 + \dfrac{1}{3}C_n^2 + ... + \dfrac{1}{n+1}C_n^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1},\ (2)$

Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng.

A. (1) đúng, (2) sai. **B.** (1) sai, (2) đúng.

C. Cả hai đều sai. **D.** Cả hai đều đúng.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể sử dụng máy tính để thử trường hợp riêng của các đẳng thức trên, tôi xin phép không đưa ra cách làm cụ thể vì độc giả có thể dễ dàng thử được.

Dưới đây tôi xin giới thiệu hai phương pháp tính tổng sử dụng đạo hàm và tích phân ta học ở cuối chương trình 11 và đầu chương trình 12.

Ta có giải thích cụ thể như sau :

*** Với S_1 :**

Ta khai triển đa thức $P(x) = x(1+x)^n$

$P(x) = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + ... + C_n^n x^{n+1}$, nên

$P'(x) = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + ... + (n+1)C_n^n x^n;$

$P'(-1) = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1)C_n^n = S_1$

Mặt khác $P'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \Rightarrow P'(-1) = 0.$

Vậy $S_1 = 0.$

*** Với S_2 :**

Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$, ta có:

$P(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n.$

Suy ra $\int_0^1 P(x)dx = C_n^0 + \dfrac{1}{2}C_n^1 + \dfrac{1}{3}C_n^2 + ... + \dfrac{1}{n+1}C_n^n = S_2$

Do đó $S_2 = \int_0^1 (1+x)^n dx = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

STUDY TIP

Có thể tính tổng

$S_1 = C_n^0 + 2aC_n^1 + ... + (n+1)a^n C_n^n$

$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2 C_{2n}^2 + ... + (2n+1)a^{2n} C_{2n}^{2n}$

$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3 C_{2n}^3 + 6a^4 C_n^4 + ... + 2n.a^{2n-1}.C_{2n}^{2n-1}$

khi xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng

$2S_2 = Q'(a) + Q'(-a);$

$2S_3 = Q'(a) - Q'(-a).$

STUDY TIP

Có thể tính tổng

$S = (b-a)C_n^0 + \dfrac{b^2-a^2}{2}C_n^1 + \dfrac{b^3-a^3}{3}C_n^2 + ... + \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$

khi xét đa thức $P(x) = (1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S = \int_a^b P(x)dx.$

Ta thường gặp bài toán với một trong hai cận của tích phân là 0 và 1, hoặc -1.

Trong một số trường hợp ta phải xét đa thức $P(x) = x^k(1+x)^n$ với $k = 1, 2, ...$

Dạng 3 Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp

Ví dụ 1 : Cho phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$. Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình trên, lúc này ta có

A. $x_0 \in (10;13)$ **B.** $x_0 \in (12;14)$ **C.** $x_0 \in (10;12)$ **D.** $x_0 \in (14;16)$

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho có dạng

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879$$

$\Leftrightarrow x = 12$ (sử dụng lệnh SHIFT SOLVE trên máy tính).

STUDY TIP

Khi sử dụng lệnh SHIFT SOLVE ta nên rút gọn phương trình về đa thức, không nên để dạng phân thức vì máy tính ưu tiên xử lý các dạng phương trình không chứa phân thức trước.

```
X×(X-1)×(X-2)+X▷
X=                12
L-R=               0
```

Ví dụ 2: Bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}.C_x^3 + 10$ có tập nghiệm là

A. $S = [3;5]$ **B.** $S = [3;4]$ **C.** $S = \{3;4;5\}$. **D.** $S = \{3;4\}$.

Đáp án D.

Lời giải

Điều kiện $x \ge 3; x \in \mathbb{N}$.

Ta có $bpt \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{2x!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!.(x-3)!} + 10$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - x^2 + x \le x^2 - 3x + 2 + 10$

$\Leftrightarrow 3x \le 12 \Leftrightarrow x \le 4.$

Kết hợp với điều kiện xác đinh ta có $3 \le x \le 4$. Vậy $S = \{3;4\}$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ 3: Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số sau $C_{23}^0; C_{23}^1; ...; C_{23}^{13}$ có giá trị là

A. 2451570 **B.** 3848222 **C.** 836418 **D.** 1307527

Đáp án D.

Lời giải

Giả sửa ba số $C_{23}^n; C_{23}^{n+1}; C_{23}^{n+2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $2C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+2}$

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{23}^n + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+1} + C_{23}^{n+2}$

$\Leftrightarrow 4C_{23}^{n+1} = C_{25}^{n+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{4.23!}{(n+1)!(22-n)!} = \frac{25!}{(n+2)!(23-n)!}$$

$$\Rightarrow (n+2)(23-n) = 150 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8\ (TM) \\ n = 13\ (l) \end{array}\right.$$

Vậy $C_{23}^8 + C_{23}^9 + C_{23}^{10} = 2451570$.

STUDY TIP

Một số tình huống thường gặp thi lập phương trình tổ hợp là:

* Ba số a,b,c lập thành cấp số cộng (hoặc cấp số nhân) khi và chỉ khi $2b = a + c$ (hoặc $b^2 = ac$).

* Cho tập hợp A có n phần tử, số tập con của A gồm x phần tử bằng k lần số tập con của A gồm y phần tử, tương ứng với phương trình $C_n^x = kC_n^y$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Trong khai triển nhị thức Newton $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, số hạng có số mũ a và b bằng nhau là

A. C_{21}^{12} B. $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$ C. $C_{21}^{9}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$ D. C_{21}^{9}

Câu 2: Khi khai triển nhị thức Newton $G(x)=(ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Lúc này giá trị của a và n là

A. $a=3;n=8$ B. $a=4;n=6$

C. $a=2;n=12$ D. $a=3;n=7$

Câu 3: Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $(x+1)^{10}$ là

A. $C_{10}^{5}x^5$ B. $C_{10}^{6}x^5$ C. 252 D. 210

Câu 4: Hệ số của số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(\frac{4}{x}-3x^3\right)^{15}$ là

A. $3^6C_{15}^{9}x^9$ B. $3^6 2^{18}C_{15}^{9}x^9$

C. $3^6C_{15}^{9}$ D. $3^6 2^{18}C_{15}^{9}$

Câu 5: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ là

A. $2^6C_{20}^{6}$ B. 2^8 C. $2^8C_{20}^{8}$ D. 2^6

Câu 6: Số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

A. 1951 B. 1950 C. 3150 D. -360

Câu 7: Số hạng chứa x^8 trong khai triển $(x^3-x^2-1)^8$ là

A. $168x^8$ B. 168 C. $238x^8$ D. 238

Câu 8: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^3=13n$.

A. C_{10}^{6} B. C_{10}^{5} C. C_{10}^{10} D. C_{10}^{3}

Câu 9: Giả sử có khai triển

$$(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

Tìm a_5 biết $a_0+a_1+a_2=71$.

A. $672x^5$ B. -672 C. $-672x^5$ D. 672

Câu 10: Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức $(x+2)^n$ biết n là số nguyên dương thỏa mãn $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^nC_n^n=2048$.

A. $22x^{10}$ B. $123x^{10}$ C. 123 D. 22

Câu 11: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n$ biết $n\ge 2$ là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n$.

A. 73789 B. 73788 C. 72864 D. 56232

Câu 12: Cho khai triển:

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+...+a_{2n}x^{2n}, n\ge 2$$

với $a_0,a_1,a_2,...,a_{2n}$ là các hệ số.

Tính tổng $S=a_0+a_1+...+a_{2n}$ biết $\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}$.

A. $S=3^{10}$ B. $S=3^{12}$ C. $S=2^{10}$ D. $S=2^{12}$

Câu 13: Số lớn nhất trong các số $C_{16}^0;C_{16}^1;C_{16}^2;...;C_{16}^{15};C_{16}^{16}$ là

A. C_{16}^{7} B. C_{16}^{6} C. C_{16}^{9} D. C_{16}^{8}

Câu 14: Hệ số lớn nhất trong khai triển $(x+2)^{10}$ là

A. C_{10}^{5} B. 128 C. 15360 D. C_{10}^{3}

Câu 15: Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^2-3C_n^{n-1}=11n$. Xét khai triển

$$P(x)=(x+2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n.$$

Hệ số lớn nhất của $P(x)$ là

A. $C_{15}^{5}.2^{11}$ B. $C_{15}^{5}2^{10}$ C. 252 D. 129024

Câu 16: Giả sử

$$P(x)=(2x+1)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

thỏa mãn $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+...+\frac{a_n}{2^n}=2^{12}$. Hệ số lớn nhất trong các hệ số $\{a_0,a_1,a_2,...,a_n\}$ là

A. 126720 B. 495 C. 256 D. 591360

Câu 17: Cho khai triển:

$(x+2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. Tìm tất cả các giá trị của n để $\max\{a_0;a_1;a_2;...;a_n\}=a_{10}$.

A. $\{29;30;31;32\}$ B. 12

C. $\{12;13;14;15\}$ D. 16

Câu 18: Cho n là một số nguyên dương. Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n sao cho $a_{3n-3}=26n$.

A. $n=10$. B. $n=3$. C. $n=4$. D. $n=5$.

Câu 19: Khi khai triển nhị thức Newton $G(x)=(ax+1)^n$ thì ta thấy trong đó xuất hiện hai số hạng $24x$ và $252x^2$. Tìm a và n.

A. $a=3;n=8$ B. $a=2;n=7$

C. $a=4;n=9$ D. $a=5;n=10$

Câu 20: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\frac{C_n^1}{2}-\frac{2C_n^2}{2^2}+\frac{3C_n^3}{2^3}-...+-1^{n-2}\frac{n-1\ C_n^{n-1}}{2^{n-1}}+-1^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}=\frac{1}{32}$$

A. $n=10$ B. $n=9$ C. $n=8$ D. $n=7$

Câu 21: Cho $S=1.2.3+2.3.4+3.4.5+...+1)(n+2)$

Kết quả biểu diễn S theo n là

A. $S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

B. $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

C. $S=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

D. $S=n(n+1)(n+2)(n+3)$

Câu 22: Tính tổng

$S=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ theo n ta được

A. $S=2^{n-1}-1$ B. $S=2^n-1$

C. $S=2^{n-1}$ D. $S=2^n$

Câu 23: Tìm n sao cho

$$C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+...+2^nC_n^n=243.$$

Giá trị của n thỏa mãn là

A. $n=7$ B. $n=3$. C. $n=5$. D. 4.

Câu 24: Tính tổng

$$S=\frac{1}{2!2017!}+\frac{1}{4!2015!}+\frac{1}{6!2013!}+...+\frac{1}{2016!3!}+\frac{1}{2018!}$$

A. $S=\frac{2^{2018}-1}{2017!}$ B. $S=\frac{2^{2018}-1}{2017}$

C. $S=\frac{2^{2018}}{2017!}$ D. $S=\frac{2^{2018}}{2017}$

Câu 25: Cho số nguyên $n\geq 3$. Giả sử ta có khai triển :

$$(x-1)^{2n}+x(x+1)^{2n-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}.$$

Biết rằng $T=a_0+a_2+...+a_{2n}=768$. Tính a_5.

A. $126x^5$ B. $-126x^5$ C. 126 D. -126

Câu 26: Tìm n sao cho $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=2048$.

A. $n=8$ B. $n=6$ C. $n=7$ D. $n=9$

Câu 27: Cho khai triển

$$(1+2x)^{2014}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2014}x^{2014}.$$

Khi đó tổng $S=a_1+3^2a_3+...+3^{2010}a_{2011}+3^{2012}a_{2013}$ có giá trị bằng

A. $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{6}$ B. $\frac{7^{2014}-5^{2014}}{2}$

C. $\frac{7^{2014}}{6}$ D. $\frac{5^{2014}}{2}$

Câu 28: Tính $S=C_{100}^0-5C_{100}^1+5^2C_{100}^2-...+5^{100}C_{100}^{100}$

A. 6^{100} B. 4^{100} C. 2^{300} D. 3^{200}

Câu 29: Câu nào sau đây sai?

A. $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$.

B. $0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+(-1)^nC_n^n$.

C. $1=C_n^0-2C_n^1+4C_n^2-...+(-2)^nC_n^n$.

D. $3^n=C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n$.

Câu 30: Khai triển $(2x+y)^5$ ta được kết quả là

A. $32x^5+16x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3+2xy^4+y^5$

B. $32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

C. $2x^5+10x^4y+20x^3y^2+20x^2y^3+10xy^4+y^5$

D. $32x^5+10000x^4y+8000x^3y^2+400x^2y^3+10xy^4+y^5$

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21}$$

$$=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}\left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}\right)^{k}\left(b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{6}}\right)^{21-k}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}a^{\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}}b^{-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}}$$

Hệ số của số hạng có số mũ của a và b bằng nhau ứng với: $\frac{k}{3}-\frac{21-k}{6}=-\frac{k}{6}+\frac{21-k}{2}\Leftrightarrow k=12$

Vậy số hạng cần tìm là $C_{21}^{12}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}$.

Câu 2: Đáp án A.

Ta có: $G(x)=(ax+1)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}(ax)^{k}=\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}a^{k}x^{k}$

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases}C_{n}^{1}ax=24x\\C_{n}^{2}a^{2}x^{2}=252x^{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{n(n-1)}{2}a^{2}=252\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}n^{2}a^{2}=576\\\frac{n(n-1)}{2}a^{2}=252\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\\frac{2n^{2}}{n(n-1)}=\frac{16}{7}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=24\\14n=16(n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=8\\a=3\end{cases}$$

Vậy $a=3,n=8$ là các số cần tìm.

Câu 3 : Đáp án C.

Số hạng tổng quát sau khi khai triển $T_{k+1}=C_{10}^{k}x^{k}$

Số hạng chứa x^{5} trong khai triển là $C_{10}^{5}x^{5}$.

Đề bài hỏi hệ số nên ta chọn C.

Câu 4: Đáp án D.

Ta có

$$\left(\frac{4}{x}-3x^{3}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}\left(\frac{4}{x}\right)^{k}\left(-3x^{3}\right)^{15-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{15}(-3)^{15-k}4^{k}C_{15}^{k}x^{45-4k}$$

Số hạng chứa x^{9} tương ứng với $45-4k=9\Leftrightarrow k=9$ nên hệ số của x^{9} trong khai triển trên là $(-3)^{6}4^{9}C_{15}^{9}=3^{6}4^{9}C_{15}^{9}$.

Câu 5: Đáp án C.

Ta có

$$\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}C_{20}^{k}\left(2\sqrt{x}\right)^{k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{20-k}=\sum_{k=0}^{20}2^{k}C_{20}^{k}x^{\frac{5k-40}{6}}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với $\frac{5k-40}{6}=0\Leftrightarrow k=8$.

Do vậy số hạng đó là: $2^{8}C_{20}^{8}$.

Câu 6: Đáp án A.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau:

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^{2}+\frac{1}{x}-1\right)^{10}$ là

$$T_{p}=C_{10}^{p}C_{p}^{q}\left(x^{2}\right)^{10-p}\left(\frac{1}{x}\right)^{p-q}.(-1)^{q}=C_{10}^{p}C_{p}^{q}(-1)^{p}x^{20+q-3p}$$

Số hạng không chứa x trong khai triển

$\Rightarrow 20+q-3p=0\Leftrightarrow 3p-q=20$

Mà $0\le q\le p\le n$ và $p;q;n\in\mathbb{N}$ nên

$(p;q)\in\{(7;1),(8;4),(9;7),(10;10)\}$

Lúc này số hạng không chứa x trong khai triển là

$(-1)^{1}C_{10}^{7}C_{7}^{1}+(-1)^{4}C_{10}^{8}C_{8}^{4}+(-1)^{10}C_{10}^{10}C_{10}^{10}+(-1)^{7}C_{10}^{9}C_{9}^{7}=1951$

Câu 7: Đáp án C.

Từ lý thuyết ta có công thức tổng quát như sau:

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(x^{3}-x^{2}-1\right)^{8}$ là

$$T_{p}=C_{8}^{p}C_{p}^{q}\left(x^{3}\right)^{8-p}\left(-x^{2}\right)^{p-q}(-1)^{q}=C_{8}^{p}C_{p}^{q}x^{24-3p}.x^{2p-2q}.(-1)^{p}$$

Ta có $24-3p+2p-2q=8\Leftrightarrow 24-p-2q=8$

$\Leftrightarrow p+2q=16$

Suy ra $(p;q)\in\{(8;4),(6;5)\}$

Lúc này hệ số của x^{8} khi khai triển là

$C_{8}^{8}C_{8}^{4}(-1)^{8}+C_{8}^{6}C_{6}^{5}(-1)^{6}=238.$

Câu 8: Đáp án A.

Theo giả thiết ta có:

$$C_{n}^{1}+C_{n}^{3}=13n\Leftrightarrow n+\frac{n!}{3!(n-3)!}=13n$$

$$\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=13n$$

$$\Leftrightarrow n\left(n^{2}-3n-70\right)=0\Leftrightarrow n=10$$

Khi đó ta có: $\left(x^{2}+\frac{1}{x^{3}}\right)^{n}=\left(x^{2}+\frac{1}{x^{3}}\right)^{10}$

$$=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}\left(x^{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{x^{3}}\right)^{10-k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{5k-30}$$

Số hạng không chứa x tương ứng với

$5k-30=0\Leftrightarrow k=6$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển đã cho là

$C_{10}^{6}=210$

Câu 9 : Đáp án B.

Ta cần biết công thức công quát của a_k để thay vào điều kiện $a_0+a_1+a_2=71$, rồi sau đó giải ra để tìm n.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=(1-2x)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2x)^k=\sum_{k=0}^{n}(-2)^kC_n^kx^k.$$

Do đó: $a_k=(-2)^kC_n^k, \forall k\in\{0,1,2,...,n\}$.

Khi đó theo giả thiết ta có:

$$71=a_0+a_1+a_2=(-2)^0C_n^0+(-2)^1C_n^1+(-2)^2C_n^2$$
$$=1-2n+2n(n-1)\Leftrightarrow n^2-2n-35\Leftrightarrow n=7.$$

Như vậy $a_5=(-2)^5C_7^5=-672$.

Câu 10 : Đáp án D.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-...+(-1)^nC_n^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^{n-k}C_n^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k3^{n-k}=(-1+3)^n=2^n$$

Do đó $2^n=2048=2^{11}\Leftrightarrow n=11$

Như vậy ta có: $(x+2)^n=(x+2)^{11}=\sum_{k=0}^{11}C_{11}^kx^k2^{11-k}$, suy ra hệ số của x^{10} ứng với $k=10$ và đó là số $C_{11}^{10}.2=22$

Câu 11 : Đáp án A.

Ta có: $A_n^2-C_{n+1}^{n-2}=14-14n$

$$\Leftrightarrow n(n-1)-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=14-14n$$
$$\Leftrightarrow(n-1)\left[n-\frac{n(n+1)}{6}+14\right]=0$$
$$\Leftrightarrow(n-1)(n^2-5n-84)=0\Leftrightarrow n=12 \text{ vì } n\ge 2$$

Lúc này ta có $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^n=\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{12}$

Từ công thức hệ số tổng quát tam thức Newton ta có

Với $0\le q\le p\le 12$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ là

$$T_p=C_{12}^pC_p^q1^{10-p}x^{p-q}.\left(\frac{1}{x}\right)^q=C_{12}^pC_p^qx^{p-q-q}=C_{12}^pC_p^qx^{p-2q}$$

Ta có $p-2q=0\Leftrightarrow p=2q$. Kết hợp với điều kiện ở trên ta có

$$(p;q)\in\{(0;0),(2;1),(4;2),(6;3),(8;4),(10;5),(12;6)\}$$

Suy ra số hạng không chứa x là

$$C_{12}^0C_0^0+C_{12}^2C_2^1+C_{12}^4C_4^2+C_{12}^6C_6^3+C_{12}^8C_8^4+C_{12}^{10}C_{10}^5+C_{12}^{12}C_{12}^6$$
$$=73789$$

Câu 12: Đáp án A.

Theo giả thiết ta có:

$$P(x)=(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+...+a_{2n}x^{2n}$$

Thay $x=1$ ta được $S=a_0+a_1+...+a_{2n}=P(1)=3^n$.

Như vậy ta chỉ cần xác định được n.

Với $0\le q\le p\le n$ thì số hạng tổng quát khi khai triển tam thức $(1+x+x^2)^n$ là

$$T_p=C_n^pC_p^q.1^{n-p}.x^{p-q}(x^2)^q=C_n^pC_p^qx^{p+q}.$$

Hệ số của x^3 ứng với

$$\begin{cases}p+q=3\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow(p;q)\in\{(3;0),(2;1)\}.$$

Suy ra $a_3=C_n^3C_3^0+C_n^2C_2^1=C_n^3+2C_n^2$.

Hệ số của x^4 ứng với

$$\begin{cases}p+q=4\\0\le q\le p\le n\end{cases}\Rightarrow(p;q)\in\{(4;0),(3;1),(2;2)\}.$$

Suy ra $a_4=C_n^4C_4^0+C_n^3C_3^1+C_n^2C_2^2=C_n^4+3C_n^3+C_n^2$

$$\frac{a_3}{14}=\frac{a_4}{41}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{n(n-1)(n+4)}{6}$$
$$=\frac{1}{41}\left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{14}\frac{(n+4)}{3}=\frac{1}{41}\left(\frac{n^2-5n+6}{12}+n-1\right)$$
$$\Leftrightarrow 7n^2-33n-370=0\Leftrightarrow n=10.$$

Vậy $S=a_0+a_1+...+a_{2n}=3^{10}$.

Câu 13: Đáp án D.

Vì $C_n^k=C_n^{n-k}$ nên ta có:

$\{C_{16}^0,C_{16}^1,...,C_{16}^8\}=\{C_{16}^{16},C_{16}^{15},...,C_{16}^8\}$, suy ra ta chỉ cần tìm số lớn nhất trong các số C_{16}^0, $C_{16}^1,...,C_{16}^7$, C_{16}^8. Bằng tính toán trực tiếp, ta có:

$C_{16}^0=1$, $C_{16}^1=16$, $C_{16}^2=120$, $C_{16}^3=560$, $C_{16}^4=1820$, $C_{16}^5=4368$, $C_{16}^6=8008$, $C_{16}^7=11440$, $C_{16}^8=12870$

Như vậy $C_{16}^0<C_{16}^1<C_{16}^2<...<C_{16}^7<C_{16}^8$

Do đó: $C_{16}^8=\max\{C_{16}^0, C_{16}^1,...,C_{16}^{15}, C_{16}^{16}\}$

Câu 14: Đáp án C.

Ta có $a_k=2^{10-k}C_{10}^k$ với $k=0,1,2...,10$. Bài toán tương đương với tìm $k\in\{0,1,...,9,10\}$ sao cho a_k lớn nhất.

Xét bất phương trình sau:

$$a_k\le a_{k+1}\Leftrightarrow 2^{10-k}C_{10}^k\le 2^{9-k}C_{10}^{k+1}$$
$$\Leftrightarrow 2\frac{10!}{k!(10-k)!}\le\frac{10!}{(k+1)!(9-k)!}$$
$$\Leftrightarrow 2(k+1)\le 10-k$$
$$\Leftrightarrow k\le\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow k\in\{0,1,2\}$$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \ \forall k \in \{0,1,2\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{8}{3} \notin \mathbb{N} \\ a_k > a_{k+1} \ \forall k \in \{3,4,...,10\} \end{cases}$

Do vậy $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > ... > a_{10}$ hay a_3 là hệ số lớn nhất cần tìm. Vậy $a_3 = 2^7 C_{10}^3 = 15360$.

Câu 15: Đáp án B.

$A_n^2 - 3C_n^{n-1} = 11n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} - 3n = 11n$

$\Leftrightarrow n(n-1) = 14n \Leftrightarrow n = 15$

$(x+2)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k 2^{15-k} \Rightarrow a_k = C_{15}^k 2^{15-k}$

Xét bất phương trình:

$a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{15}^k 2^{15-k} \le C_{15}^{k+1} 2^{14-k}$

$\Leftrightarrow 2\dfrac{15!}{k!(15-k)!} \le \dfrac{15!}{(k+1)!(14-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{15-k} \le \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k \le \dfrac{13}{3}$, vì $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Từ đây ta có : $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \ \forall k \in \{0,1,2,3,4\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{3} \notin \mathbb{N} \\ a_k > a_{k+1} \ \forall k \in \{5,6,...,15\} \end{cases}$

Do đó ta có:

$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 > a_6 > a_7 > a_8 > ... > a_{15}$

Vậy $a_5 = max\{a_i \mid i = \overline{0,15}\} = C_{15}^5 2^{10}$

Câu 16 : Đáp án A.

$2^{12} = a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{2^2} + ... + \dfrac{a_n}{2^n}$

$= a_0 + a_1\left(\dfrac{1}{2}\right) + a_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + a_n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$= P\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(1 + 2.\dfrac{1}{2}\right)^n = 2^n$

$\Rightarrow n = 12.$

$(2x+1)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (2x)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k, \forall k = \overline{0,12}$

$a_k \le a_{k+1} \Leftrightarrow C_{12}^k 2^k \le C_{12}^{k+1} 2^{k+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{12!}{k!(12-k)!} \le 2\dfrac{12!}{(k+1)!(11-k)!} \Leftrightarrow \dfrac{1}{12-k} \le \dfrac{2}{k+1}$

$\Leftrightarrow k \le \dfrac{23}{3}$ mà $k \in \mathbb{N}$ nên $k \in \{0,1,2,...,7\}$

Từ đây ta có: $\begin{cases} a_k \le a_{k+1} \ \forall k \in \{0,1,...,7\} \\ a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{23}{3} \notin \mathbb{N} \\ a_k > a_{k+1} \ \forall k \in \{8,9,10,11\} \end{cases}$

Do đó ta có: $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$ và $a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}$

Vậy $a_8 = max\{a_i \mid i = \overline{0,12}\} = C_{12}^8 2^8$.

Câu 17: Đáp án A.

Giả sử n là số nguyên dương sao cho $max\{a_0, a_1, ..., a_n\} = a_{10}$.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x) = (x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} x^k$

$\Rightarrow a_k = C_n^k 2^{n-k}, \forall k = \overline{0,n}$

Ta có:

$a_{10} = max\{a_0, a_1, ..., a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 \le a_{10} \\ a_{10} \ge a_{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^9 2^{n-9} \le C_n^{10} 2^{n-10} \\ C_n^{11} 2^{n-11} \le C_n^{10} 2^{n-10} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{n-9} \le \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{1}{11} \le \dfrac{2}{n-10} \end{cases} \Leftrightarrow 29 \le n \le 32 \Leftrightarrow n \in \{29, 30, 31, 32\}$.

Các phép biến đổi trên là tương đương nên ta không cần phải thử lại các giá trị trên.

Vậy $n \in \{29, 30, 31, 32\}$ là tất cả các giá trị thỏa mãn bài toán (thử lại ta thấy thỏa mãn).

Câu 18: Đáp án D.

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$(x^2+1)^n (x+2)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} C_n^k x^k 2^{n-i}\right)$

$= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} C_n^i x^i\right)$

Số hạng chứa x^{3n-3} tương ứng với cặp (k,i) thỏa mãn:

$\begin{cases} 2k + i = 3n - 3 \\ 0 \le k, i \le n \end{cases}$

$\Rightarrow (k,i) \in \{(n, n-3); (n-1, n-1)\}$

Do đó hệ số của x^{3n-3} là

$a_{3n-3} = C_n^n.2^3 C_n^{n-3} + C_n^{n-1}.2^1 C_n^{n-1} = 8C_n^3 + 2n^2$

$8C_n^3 + 2n^2 = 26n$

$\Leftrightarrow 8\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} + 2n^2 = 26n$

$\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow n = 5$

Vậy $n = 5$.

Câu 19: Đáp án A.

Ta có: $G(x) = (ax+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^k$

Từ giả thiết ta có:

$\begin{cases} C_n^1 ax = 24x \\ C_n^2 a^2 x^2 = 252x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} a^2 = 252 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2a^2 = 576 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}a^2 = 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ \dfrac{2n^2}{n(n-1)} = \dfrac{16}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} na = 24 \\ 14n = 16(n-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 8 \\ a = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 3$, $n = 8$ là các số cần tìm.

Câu 20: Đáp án C.

Các số hạng của tổng vế trái có dạng:

$$(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k} = (-1)^{k-1}\frac{nC_{n-1}^{k-1}}{2^k} = \frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Do đó ta có:

$$\frac{C_n^1}{2} - \frac{2C_n^2}{2^2} + \frac{3C_n^3}{2^3} - ... + (-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_n^{n-1}}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1}\frac{nC_n^n}{2^n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{kC_n^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{2}C_{n-1}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{n-1} = \frac{n}{2^n}$$

Như vậy ta cần tìm số nguyên dương n thỏa mãn:

$$\frac{n}{2^n} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 21: Đáp án A.

Cách 1: Ta có

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$
$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1}$$
$$C_{n-2}^k = C_{n-3}^k + C_{n-3}^{k-1}$$
$$.....$$
$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}$$
$$C_k^k = C_{k-1}^k + C_{k-1}^{k-1}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$ $(*)$

Ta có:

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n+1)(n+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{(k-1)!} = 6\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!} = 6\sum_{k=1}^{n}C_{k+2}^3$$

$$= 6\left(C_3^3 + C_4^3 + ... + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3\right)$$

Áp dụng câu $(*)$ với $k = 4$, thay n bởi $n+3$ ta được:

$$C_3^3 + C_4^3 + ... + C_{n+1}^3 + C_{n+2}^3 = C_{n+3}^4$$

Vậy $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n+1)(n+2)$

$$= 6C_{n+3}^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Cách 2: Với bài toán này ta có thể dùng máy tính để thử trường hợp riêng.

Câu 22: Đáp án D.

Xét khai triển:

$$(a+b)^n = C_n^0b^n + C_n^1a^1b^{n-1} + C_n^2a^2b^{n-2} + ... + C_n^{n-1}a^{n-1}b^1 + C_n^na^n$$

Chọn $a = b = 1$ ta được: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Câu 23: Đáp án C.

Xét khai triển:

$$(a+b)^n$$
$$= C_n^0b^n + C_n^1a^1b^{n-1} + ... + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + C_n^{n-1}a^{n-1}b^1 + C_n^na^n$$

Chọn $a = 2, b = 1$ ta được:

$$3^n = (2+1)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n = 243 \Rightarrow n = 5$$

Câu 24 Đáp án A.

Các số hạng của S có dạng:

$$\frac{1}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}\frac{2019!}{(2k)!(2019-2k)!} = \frac{1}{2019!}C_{2019}^{2k}$$

Do đó: $\Rightarrow 2019!S = C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2016} + C_{2019}^{2018}$

Nhận thấy C_{2019}^{2k} là hệ số của x^{2k} trong khai triển $(x+1)^{2019}$.

Vì vậy xét $P(x) = (x+1)^{2019}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x+1)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1x + C_{2019}^2x^2 + ... + C_{2019}^{2019}x^{2019}$$

Từ đó ta có:

$$P(1) = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + ... + C_{2019}^{2018} + C_{2019}^{2019}$$

$$P(-1) = C_{2019}^0 - C_{2019}^1 + C_{2019}^2 - ... + C_{2019}^{2018} - C_{2019}^{2019}$$

Suy ra:

$$2019!S + 1 = C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + ... + C_{2019}^{2018}$$

$$= \frac{P(1) + P(-1)}{2} = 2^{2018}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{2^{2018} - 1}{2019!}$$

Câu 25: Đáp án D.

Theo giả thiết ta có: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$.

Khi đó: $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$ và

$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{2n}$

Suy ra:

$$T = a_0 + a_2 + ... + a_{2n} = \frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{2^{2n-1} + 2^{2n}}{2} = 3.2^{2n-2}$$

$$\Rightarrow 768 = 3.2^{2n-2} \Leftrightarrow n = 5$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$P(x) = (x-1)^{2n} + x(x+1)^{2n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^kx^k(-1)^{2n-k} + x\sum_{k=0}^{2n-1}C_{2n-1}^kx^k$$

$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k (-1)^k + \sum_{k=1}^{2n} C_{2n-1}^{k-1} x^k$

$= 1 + \sum_{k=1}^{2n} \left(C_{2n}^k (-1)^k + C_{2n-1}^{k-1} \right) x^k$

$= 1 + \sum_{k=1}^{10} \left(C_{10}^k (-1)^k + C_9^{k-1} \right) x^k$

Vậy $a_5 = C_{10}^5 (-1)^5 + C_9^4 = -126$.

Câu 26: Đáp án B.

Xét khai triển:

$(a+b)^{2n}$

$= C_{2n}^0 b^{2n} + C_{2n}^1 a^1 b^{2n-1} + ... + C_{2n}^{2n-1} a^{2n-2} b^1 + C_{2n}^{2n} a^{2n}$

Chọn $a = b = 1$ ta được:

$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Chọn $a = 1, b = -1$ ta được:

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Trừ hai đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} \right) = 2.2048 = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$

Câu 27: Đáp án A.

Nhận thấy rằng:

$3S = 3a_1 + 3^3 a_3 + ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013}$

Lần lượt thay các giá trị $x = 3, x = -3$ vào khai triển đã cho, ta được:

$P(3) = 7^{2014} = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + ... + 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

$P(-3) = 5^{2014} = a_0 - 3a_1 + 3^2 a_2 - ... - 3^{2013} a_{2013} + 3^{2014} a_{2014}$

Trừ hai đẳng thức này vế theo vế ta được:

$2\left(3a_1 + 3^3 a_3 + ... + 3^{2011} a_{2011} + 3^{2013} a_{2013} \right) = 7^{2014} - 5^{2014}$

$\Leftrightarrow 3S = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{2} \Leftrightarrow S = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Vậy $a_1 + 3^2 a_3 + ... + 3^{2010} a_{2011} + 3^{2012} a_{2013} = \dfrac{7^{2014} - 5^{2014}}{6}$

Câu 28: Đáp án B.

Nhận thấy rằng $(-5)^k C_{100}^k$ là hệ số của x^k trong khai triển của $(1-5x)^{100}$.

Vì thế xét: $P(x) = (1-5x)^{100}$, theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$P(x) = (1-5x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 5x + C_{100}^2 (5x)^2 - ... + C_{100}^{100} (5x)^{100}$

Thay $x = 1$ vào ta được:

$C_{100}^0 - 5C_{100}^1 + 5^2 C_{100}^2 - ... + 5^{100} C_{100}^{100} = 4^{100}$.

Chú ý: Ta cũng có thể xét khai triển $(5x+1)^{100}$ rồi sau đó thay $x = -1$ vào.

Câu 29: Đáp án C.

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$.

Cho $x = 1$ thì A đúng.

Cho $x = -1$ thì B đúng.

Cho $x = 2$ thì D đúng.

Cho $x = -2$ thì $(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - ... + (-2)^n C_n^n$.

Vậy C sai.

Câu 30: Đáp án B.

$(2x+y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 y +$

$+10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5(2x) y^4 + y^5$

$= 32x^5 + 80x^4 y + 80x^3 y^2 + 40x^2 y^3 + 10xy^4 + y^5$.

Xác suất

A. Lý thuyết

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

a) Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

b) Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω.

Ví dụ

Khi tung một đồng xu có 2 mặt, ta hoàn toàn không biết trước được kết quả của nó, tuy nhiên ta lại biết chắc chắn rằng đồng xu rơi xuống sẽ ở một trong 2 trạng thái: sấp (S) hoặc ngửa (N).

Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{S; N\}$

2. Biến cố

a. Một biến cố A (còn gọi là sự kiện A) liên quan tới phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của nó còn tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho biến cố A xảy ra được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

b. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu bởi Ω_A. Để đơn giản, ta có thể dùng chính chữ A để kí hiệu tập hợp các kết quả thuận lợi cho A.

Khi đó ta cũng nói biến cố A được mô tả bởi tập A.

c. Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

d. Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$ và được kí hiệu là $\varnothing$.

Các phép toán trên biến cố

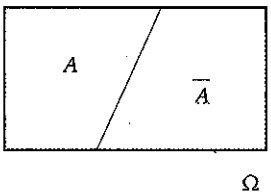
* Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$

Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:

* Tập $A \cup B$ được gọi là hợp của các biến cố A và B.

* Tập $A \cap B$ được gọi là giao của các biến cố A và B.

* Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B xung khắc.



Bảng ngôn đọc ngôn ngữ biến cố.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \in \Omega$	A là biến cố
$A = \varnothing$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố: "A hoặc B"
$C = A \cap B$	C là biến cố: "A và B"
$A \cap B = \varnothing$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau

3. Xác suất của biến cố

Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Giả sử phép thử T có một số hữu hạn kết quả có thể đồng khả năng. Khi đó xác suất của một biến cố A liên qua tới T là tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho A và số kết quả có thể.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Trong cuộc sống khi nói về biến cố, ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hóa các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hoặc bằng 1 gọi là xác suất của biến cố.

STUDY TIP
Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta suy ra:
$0 \le P(A) \le 1$;
$P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$
Chú ý: Các kí hiệu $n(\Omega); n(A)$ được hiểu tương đương với $|\Omega|$ và $|\Omega_A|$ là số phần tử của không gian mẫu và của tập hợp thuận lợi cho biến cố A.

Từ định nghĩa cổ điển về xác suất ta có các bước để tính xác suất của một biến cố như sau:

Bước 1: Xác định không gian mẫu Ω rồi tính số phần tử của Ω, tức là đếm số kết quả có thể của phép thử T.
Bước 2: Xác định tập con A mô tả biến cố A rồi tính số phần tử của A, tức là đếm số kết quả thuận lợi cho A.
Bước 3: Lấy kết quả của bước 2 chia cho bước 1.

Nhận xét: *Việc tính số các kết quả có thể (bước 1) thường dễ dàng hơn nhiều so với việc tính số kết quả thuận lợi cho A (bước 2). Để giải quyết tốt các bài toán xác suất ta cần nắm chắc phần tổ hợp phía trước.*

4. Quy tắc cộng xác suất

a) Quy tắc cộng xác suất

* Nếu hai biến cố A, B xung khắc nhau thì
$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$
* Nếu $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ là k biến cố đôi một xung khắc với nhau thì
$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_k)$$

STUDY TIP
Vì $A \cup \overline{A}=\Omega$ và $A \cap \overline{A}=\varnothing$ nên theo công thức cộng xác suất thì
$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$

b) Công thức tính xác suất biến cố đối

Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ của biến cố A là
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Dưới đây là một ví dụ để ta hiểu rõ hơn về quy tắc cộng.

Ví dụ 1: Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên bi. Xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu là

A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{12}$

Đáp án A.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Chọn được hai viên bi xanh"
B là biến cố "Chọn được hai viên bi đỏ"
C là biến cố "Chọn được hai viên bi vàng".
Khi đó biến cố "Chọn được hai viên bi cùng màu" là biến cố $A \cup B \cup C$. Do A, B, C đôi một xung khắc với nhau nên theo quy tắc cộng ta có
$$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C).$$
Ta có $P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{6}{36}; P(B)=\frac{C_3^2}{C_9^2}=\frac{3}{36}; P(C)=\frac{C_2^2}{C_9^2}=\frac{1}{36}$.
Vậy $P(A \cup B \cup C)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

5. Quy tắc nhân xác suất

Biến cố giao	Biến cố độc lập
Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B đều xảy ra" kí hiệu là AB được gọi là giao của hai biến cố A và B.	Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, A_3, ...A_k$. Biến cố: "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, A_3, ...A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2...A_k$ được gọi là giao của k biến cố đó.	Một cách tổng quát, cho k biến cố $A_1, A_2, A_3, ...A_k$. Chúng được gọi là độc lập với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của một nhóm bất kì trong các biến cố trên không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

Chú ý

* Nếu A và B độc lập thì ta cũng có A và $\overline{B}$ độc lập, $\overline{A}$ và B độc lập; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập. Do đó nếu A, B độc lập thì ta còn có đẳng thức

$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$

$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

* Nếu một trong các đẳng thức trên bị vi phạm thì hai biến cố A và B không độc lập với nhau.

Quy tắc nhân xác suất:

* Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

* Một cách tổng quát, nếu k biến cố $A_1, A_2, A_3, ...A_k$ là độc lập thì

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k).$$

Ví dụ 2: Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Ta có biến cố A: "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm." Lúc này giá trị của $P(A)$ là

A. $\frac{25}{36}$ B. $\frac{11}{36}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{15}{36}$

Đáp án B

Lời giải

Gọi $A_i\ (i = 1;2)$ là biến cố: "Con súc sắc thứ i ra mặt 6 chấm"

$\Rightarrow$ A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập và ta có $\begin{cases} P(A_1) = \frac{1}{6} \\ P(A_2) = \frac{1}{6} \end{cases}$

Thay vì tính $P(A)$ ta đi tính $P(\overline{A})$. Ta có $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$.

Theo đẳng thức ở phần chú ý ta có:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

Vậy $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

B. Các dạng toán về xác suất

Dạng 1 Sử dụng định nghĩa cổ điển về xác suất – quy về bài toán đếm

Bài toán 1: Bài toán tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng cách tính trực tiếp số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Phần lớn các bài toán xác suất đều có thể quy về 2 bài toán đếm:
* Đếm số phần tử của tập thuận lợi với biến cố.
* Đếm số phần tử của không gian mẫu Ω.
Các bước làm bài đã được trình bày rõ ở lý thuyết trước.

Phương pháp chung

Trong bài toán này, việc xác định số phần tử thuận lợi cho biến cố cần tìm sẽ dễ dàng xác định (có thể liệt kê các phương án, có thể tính được các cách chọn ngắn gọn).

Bước 1: Tìm số phần tử của không gian mẫu.

Bước 2: Đếm số phần tử thuận lợi cho biến cố A cần tìm.

Bước 3: Tính xác suất $P\ A = \frac{m\ A}{n\ \Omega}$.

Ví dụ 1: Gieo ngẫu nhiên hai con xúc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm" là

A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{25}{36}$ D. $\frac{15}{36}$

Đáp án A.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Có ít nhất một con xúc sắc xuất hiện mặt một chấm".

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Do mỗi xúc sắc có thể xảy ra 6 trường hợp nên số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Ta có các trường hợp sau:

$\{(1;1);(1;2);(1;3);(1;4);(1;5);(1;6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 11$

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$

Ví dụ 2: Một tổ học sinh gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.

A. $\frac{3}{56}$ B. $\frac{27}{84}$ C. $\frac{53}{56}$ D. $\frac{19}{28}$

Đáp án B.

Lời giải

Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3.

Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em còn lại đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3.

Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách.

Vậy $|\Omega| = C_9^3 C_6^3.1 = 1680$.

Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A.

Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách.

Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2.C_4^2.1$ cách khác nhau.

Suy ra $|\Omega_A| = 3!.C_6^2 C_4^2.1 = 540$.

Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.

STUDY TIP

Bài toán ở ví dụ 2 liên quan chặt chẽ với phép đếm. Ta cần nắm chắc phần quy tắc cộng, quy tắc nhân để giải quyết các bài toán tính xác suất theo phương pháp cổ điển.

Ví dụ 3: Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn 6 viên bi một cách ngẫu nhiên rồi cộng các số trên 6 viên bi được rút ra với nhau. Xác suất để kết quả thu được là số lẻ là

A. $\frac{226}{462}$ B. $\frac{118}{231}$ C. $\frac{115}{231}$ D. $\frac{103}{231}$

Đáp án B.

Lời giải

Bước 1: Tính số phần tử không gian mẫu.

Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong 11 viên bi thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{11}^6 = 462$

STUDY TIP
Giải thích thực tế: Ta có thể đưa ra các trường hợpn hư vậy là vì ta có:
Để có được tổng là số lẻ thì ta phải có:
lẻ + chẵn = lẻ.
TH1: 5 số chẵn cộng lại với nhau sẽ ra số chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.
TH2: 3 lẻ = (1 lẻ + 1 lẻ) + 1 lẻ =1 chẵn + 1 lẻ =1 lẻ.
3 số chẵn cộng lại với nhau ra chẵn. Do đó cộng với 1 lẻ thì ra số lẻ.
...
$\Rightarrow$ số viên bi mang số lẻ phải là số lẻ.

Bước 2: Tính số phần tử thuận lợi cho biến cố.

Gọi A là biến cố "chọn 6 viên bi cộng các số trên 6 viên bi đó thu được số lẻ".

Trong 11 viên bi có 6 viên bi mang số lẻ đó là $\{1;3;5;7;9;11\}$ và 5 viên bi mang số chẵn đó là $\{2;4;6;8;10\}$.

* **Trường hợp 1:** 1 viên bi mang số lẻ và 5 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 1 là $C_6^1.C_5^5$ cách.

* **Trường hợp 2:** 3 viên bi mang số lẻ và 3 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 2 là $C_6^3.C_5^3$ cách.

* **Trường hợp 3:** 5 viên bi mang số lẻ và 1 viên bi mang số chẵn.

Số cách chọn trong trường hợp 3 là $C_6^5.C_5^1$

Suy ra $n(A)=C_6^1C_5^5+C_6^3C_5^3+C_6^5C_5^1=6+200+30=236.$

Bước 3: Tính xác suất.

Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{236}{462}=\dfrac{118}{231}.$

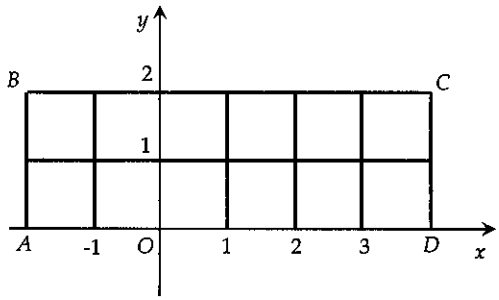
Ví dụ 4: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho $A(-2;0)$, $B(-2;2)$, $C(4;2)$, $D(4;0)$. Chọn ngẫu nhiên một điểm có tọa độ $(x;y)$; (với x, y là các số nguyên) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các điểm nằm trên cạnh).
Gọi A là biến cố: "x, y đều chia hết cho 2". Xác suất của biến cố A là

A. $\dfrac{7}{21}$ **B.** $\dfrac{13}{21}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{8}{21}$

Đáp án D.

Lời giải

STUDY TIP
Với các bài toán có miền giới hạn nhỏ, ta nên liệt kê các phần tử ra tránh sử dụng miền sẽ nhầm lẫn số phần tử.



Ta có $\Omega=\{(x;y),-2\le x\le 4,0\le y\le 2\}$, với $x,y\in\mathbb{Z}$.

Vậy $x\in\ -2;-1;0;1;2;3;4$ và $y\in\ 0;1;2$

Suy ra $n(\Omega)=7.3=21$ (mỗi điểm là một giao điểm trên hình).

Ta có A: "x, y đều chia hết cho 2". Nên ta có $A=\{(x;y):x\in\{-2;0;2;4\};y\in\{0;2\}\}$

Theo quy tắc nhân ta có $n\ A\ =4.2=8\ \Rightarrow n(A)=8\Rightarrow P(A)=\dfrac{8}{21}.$

Ví dụ 5: Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư và 4 chiếc phong bì thư đã để sẵn địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư bỏ đúng địa chỉ là

A. $\dfrac{5}{8}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{3}{8}$ **D.** $\dfrac{1}{3}$

Đáp án A.

Lời giải

Gọi 4 lá thư lần lượt là A, B, C, D và 4 phong bì thư có địa chỉ đúng với các lá thư trên lần lượt là 1; 2; 3; 4.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=4!=24$.

Gọi X là biến cố: "Có ít nhất 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ"

Ta có các trường hợp sau:

* **TH1:** Cả 4 lá thư đều bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có một trường hợp duy nhất.

* **TH2:** Có đúng 2 lá thư bỏ đúng địa chỉ: Có 6 trường hợp xảy ra đó là: $A1-B2-C4-D3; A1-B4-C3-D2; A4-B2-C3-D1;\ A1-B3-C2-D4;$ $A3-B2-C1-D4;$ hoặc $A2-B1-C3-D4$.

* **TH3:** Có đúng 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ: Chỉ có lá thư A bỏ đúng địa chỉ thì có 2 trường hợp $A1-B3-C4-D2,\ A1-B4-C2-D3$.

Tương tự với lá thư B có 2 trường hợp.

Lá thư C chỉ có đúng 2 trường hợp.

Lá thư D chỉ có đúng 2 trường hợp.

Suy ra có 8 trường hợp chỉ có 1 lá thư đúng địa chỉ.

Vậy số phần tử của biến cố X là $n(X)=1+6+8=15$. Vậy $P(X)=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

STUDY TIP

Giải thích thực tế: có nhiều độc giả sẽ thêm trường hợp có 3 lá thư bỏ đúng địa chỉ, tuy nhiên như vậy là lặp lại trường hợp 4 lá thư bỏ đúng địa chỉ. Do nếu 3 lá thư đúng địa chỉ rồi thì lá thư cuối cùng cũng nghiễm nhiên đúng địa chỉ và trùng với TH1.

Ví dụ 6: Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự ra khỏi hộp). Xác suất để trong ba viên bi đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{418}{455}$ **C.** $\frac{1}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Đáp án D.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong 15 viên bi thì số cách chọn là $n\ \Omega\ =C_{15}^{3}=455$

Gọi A là biến cố " trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ". Các trường hợp thuận lợi cho biến cố A là:

* **Trường hợp 1:** Lấy được 1 bi đỏ và 2 bi xanh, số cách lấy là $C_8^1C_7^2$

* **Trường hợp 2:** Lấy được 2 bi đỏ và 1 bi xanh, số cách lấy là $C_8^2C_7^1$

* **Trường hợp 3:** Lấy được 3 bi đều đỏ, số cách lấy là C_8^3

Số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n\ A\ =C_8^1C_7^2+C_8^2C_7^1+C_8^3=420$

Vậy $P\ A\ =\frac{n\ A}{n\ \Omega}=\frac{420}{455}=\frac{12}{13}$

Bài toán 2: Tính xác suất sử dụng định nghĩa cổ điển bằng phương pháp gián tiếp.

Trong nhiều bài toán tính xác suất, việc tính số phần tử thuận lợi cho biến cố A trở nên khó khăn do có quá nhiều trường hợp, thì ta đi tìm số phần tử thuận lợi cho biến cố đối của biến cố A. Sau đó lấy số phần tử không gian mẫu trừ đi kết quả vừa tìm được thì ta có số phần tử thuận lợi cho biến cố A.

Ta sẽ sử dụng bài toán ở ví dụ 6 như sau:

Ví dụ 7: Một hộp đựng 15 viên bi, trong đó có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự ra khỏi hộp). Xác suất để trong ba viên bi đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{418}{455}$ **C.** $\frac{1}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Đáp án D.

Lời giải

STUDY TIP
Dấu hiệu nhận biết các bài toán thực tế chọn đồ vật mà sử dụng cách tính gián tiếp đó là câu hỏi xuất hiện từ "có ít nhất..." thì thường ta sẽ giải quyết theo cách gián tiếp đó là tìm số cách chọn sao cho "không xuất hiện ...". Ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn ở ví dụ 8.

Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong 15 viên bi thì số cách chọn là $n\ \Omega = C_{15}^3 = 455$

Gọi biến cố Gọi A là biến cố " trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên màu đỏ" thì $\overline{A}$ là biến cố "cả ba viên bi lấy ra đều không có màu đỏ" (tức là lấy ra cả ba viên bi đều xanh).

Số cách chọn ra 3 viên bi mà 3 viên đó đều màu xanh là $C_7^3 = 35 \Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = 35$.

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 viên bi mà trong đó có ít nhất một viên bi màu đỏ là $455 - 35 = 420$ cách $\Rightarrow n(A) = 420$.

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{420}{455} = \dfrac{12}{13}$.

Ví dụ 8: Một hộp quà đựng 15 dây buộc tóc có cùng chất liệu, cùng kiểu dáng nhưng khác nhau về màu sắc. Cụ thể trong hộp quà có 8 dây xanh, 5 dây đỏ và 3 dây vàng. Bạn An được chọn ngẫu nhiên 6 dây từ hộp làm phần thưởng cho mình. Xác suất để trong 6 dây bạn An chọn có ít nhất một dây màu vàng và không quá 4 dây màu đỏ.

A. $\dfrac{8005}{8008}$ B. $\dfrac{11}{14}$ C. $\dfrac{6289}{8008}$ D. $\dfrac{1719}{8008}$

Đáp án C.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 6 dây trong 16 dây thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{16}^6 = 8008$ cách.

Gọi A là biến cố " 6 dây chọn được có ít nhất 1 dây vàng và không quá 4 dây đỏ"

Do nếu tính trực tiếp sẽ có quá nhiều trường hợp, và từ STUDY TIP ở ví dụ 7, ta sẽ sử dụng biến cố đối để giải quyết bài toán:

Trường hợp 1: Không có dây nào màu vàng thì số cách chọn là C_{13}^6 cách.

Trường hợp 2: Có 5 dây màu đỏ và 1 dây màu vàng thì số cách chọn là $C_5^5 C_3^1$ cách.

Vậy số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = C_{16}^6 - \left(C_{13}^6 + C_5^5 C_3^1\right) = 6289$ cách.

Như vậy, xác suất cần tìm là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{6289}{8008}$.

Ví dụ 9: Một trường THPT có 18 học sinh giỏi toàn diện, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Chọn ngẫu nhiên 8 học sinh từ 18 học sinh nói trên đi tham dự trại hè. Xác suất để mỗi khối có ít nhất một học sinh được chọn là

A. $\dfrac{212}{221}$ B. $\dfrac{9}{221}$ C. $\dfrac{59}{1326}$ D. $\dfrac{1267}{1326}$

Đáp án D.

Lời giải

Chọn 8 học sinh bất kì trong 18 học sinh thì số cách chọn là $n(\Omega) = C_{18}^8$ cách.

Tương tự với dấu hiệu mà STUDY TIP đưa ra thì ta tìm số trường hợp thuận lợi cho biến cố đối của biến cố cần tìm.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 10, có C_{13}^8 cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 11, có C_{12}^8 cách.

Chọn 8 học sinh mà không có khối 12, có C_{11}^8 cách.

Gọi A là biến cố "8 học sinh được chọn, mỗi khối có ít nhất 1 học sinh". Số trường hợp thuận lợi cho A là $n(A)=C_{18}^8-\left(C_{13}^8+C_{12}^8+C_{11}^8\right)=41811$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{41811}{C_{18}^8}=\dfrac{1267}{1326}$.

Ví dụ 10: Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số 1,3,5,7,9. Xác suất để tìm được số không bắt đầu bởi 135 là

A. $\dfrac{5}{6}$ B. $\dfrac{1}{60}$ C. $\dfrac{59}{60}$ D. $\dfrac{1}{6}$

Đáp án C.

Lời giải

Ta có số các số có 5 chữ số khác nhau từ các số 1, 3, 5, 7, 9 là 5.4.3.2.1=120 số $\Rightarrow |\Omega|=120$

Gọi A là biến cố: "Số tìm được không bắt đầu bởi 135"

Thì biến cố $\overline{A}$ là biến cố: "Số tìm được bắt đầu bởi 135"

Buộc các số 135 lại thì ta còn 3 phần tử. Số các số tạo thành thỏa mãn số 135 đứng đầu là $1.2.1=2$ cách $\Rightarrow n\ A\ =120-2=118$ cách

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{118}{120}=\dfrac{59}{60}$.

STUDY TIP

Phương pháp "buộc" các phần tử được giới thiệu kĩ ở phần quy tắc đếm, được áp dụng khi các phần tử có điều kiện đứng liền kề nhau.

Dạng 2 Sử dụng quy tắc tính xác suất

Bước 1: Xác định biến cố của các xác suất, có thể gọi tên các biến cố A; B; C; D để dễ biểu diễn.

Bước 2: Tìm mối quan hệ giữa các biến cố vừa đặt tên, biểu diễn biến cố trung gian và quan trọng nhất là biến cố đề bài đang yêu cầu tính xác suất thông qua các biến cố ở bước 1.

Bước 3: Sử dụng các mối quan hệ vừa xác định ở bước 2 để chọn công thức cộng hay công thức nhân phù hợp.

Ví dụ 11: Một chiếc ô tô với hai động cơ độc lập đều đang gặp trục trặc kĩ thuật. Xác suất động cơ thứ nhất bị hỏng giữa đường vận chuyển là 0,5; xác suất động cơ thứ hai bị hỏng giữa đường là 0,4. Biết rằng xe chỉ không thể chạy được nữa khi hai động cơ bị hỏng. Xác suất để xe tải đi được đến đích là

A. 0,2 B. 0,8 C. 0,9 D. 0,1

Đáp án B.

Lời giải

Gọi A là biến cố "Động cơ 1 bị hỏng"; B là biến cố "Động cơ 2 bị hỏng"

$\Rightarrow A.B$ là biến cố "cả 2 động cơ đều hỏng" $\Leftrightarrow$ "Xe không chạy được nữa".

Lại thấy hai động cơ hoạt động độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập.

$\Rightarrow$Áp dụng quy tắc nhân xác suất ta có, xác suất để xe tải phải dừng lại giữa chừng là $0,5.0,4=0,2$.

$\Rightarrow$ Xác suất để xe đến được đích là $1-0,2=0,8$.

STUDY TIP

Các bài toán không nói số lượng của bất kì đối tượng nào mà chỉ cho các giá trị xác suất thì ta bắt buộc phải sử dụng công thức cộng hoặc nhân xác suất. Ở đây hai động cơ hoạt động độc lập nên A và B là hai biến cố độc lập, do vậy ta áp dụng công thức nhân xác suất.

Ví dụ 12: Túi I chứa 3 bi trắng, 7 bi đỏ, 15 bi xanh. Túi II chứa 10 bi trắng, 6 bi đỏ, 9 bi xanh. Từ mỗi túi lấy ngẫu nhiên 1 bi. Xác suất để hai bi lấy từ hai túi cùng màu với nhau là

A. $\frac{207}{625}$ B. $\frac{72}{625}$ C. $\frac{418}{625}$ D. $\frac{553}{625}$

Đáp án A.

Lời giải

Gọi $A_t; A_d; A_x$ lần lượt là biến cố bi được rút từ túi I là trắng, đỏ, xanh.

Tương tự, $B_t; B_d; B_x$ lần lượt là biến cố bi được rút từ túi II là trắng, đỏ, xanh.

Các biến cố $A_t; A_d; A_x$ độc lập với các biến cố $B_t; B_d; B_x$.

Vậy xác suất để 2 bi được rút cùng màu là:

$$P(A_tB_t \cup A_dB_d \cup A_xB_x) = P(A_tB_t) + P(A_dB_d) + P(A_xB_x)$$

$$= P(A_t)P(B_t) + P(A_d)P(B_d) + P(A_x)P(B_x)$$

$$= \frac{3}{25}.\frac{10}{25} + \frac{7}{25}.\frac{6}{25} + \frac{15}{25}.\frac{9}{25} = \frac{207}{625}.$$

STUDY TIP

Nhận thấy bài toán bên là bài toán sử dụng cả hai công thức tính là công thức cộng và công thức nhân xác suất. Bài toán sử dụng công thức cộng xác suất vì các biến cố $A_tB_t; A_dB_d; A_xB_x$ lần lượt là các biến cố đôi một xung khắc (do biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra). Trong khi đó các biến cố A_t và B_t; A_d và B_d; A_x và B_x lần lượt là các cặp biến cố độc lập (việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến biến cố kia) nên sử dụng công thức nhân xác suất.

Ví dụ 13: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn.

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{16}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Đáp án D

Lời giải

Đặt A là biến cố " Lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt chấm chẵn";

B là biến cố "Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt chấm có chẵn";

C là biến cố " Tổng số chấm trong hai lần gieo là số chẵn".

Ta có $C = A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ta thấy $A \cap B; \overline{A} \cap \overline{B}$ là hai biến cố xung khắc nên

$$P\left[A \cap B \cup \overline{A} \cap \overline{B}\right] = P\ A \cap B + P\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Vì $A; B$ là hai biến cố độc lập nên theo STUDY TIP ở trên thì

$$P\ A \cap B = P\ A\ .P\ B = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$P\ \overline{A} \cap \overline{B} = P\ \overline{A}\ .P\ \overline{B} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P\ C = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

STUDY TIP

Ở đây $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ vì tổng hai chấm xuất hiện ở hai lần gieo là chẵn có nghĩa là có 2 trường hợp:

* **TH1:** Hai lần gieo đều được số chẵn $A \cap B$.
* **TH2:** Hai lần gieo đều được số lẻ $\overline{A} \cap \overline{B}$.

STUDY TIP

Ta có $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ bởi xúc sắc có số mặt chẵn và số mặt lẻ bằng nhau, do vậy ta dễ dàng có xác suất là $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 14: Ba xạ thủ A, B, C độc lập với nhau cùng nổ súng vào một mục tiêu. Xác suất bắn trúng của A, B, C tương ứng là 0,4;0,5 và 0,7. Xác suất để có ít nhất một trong ba người bắn trúng là

A. 0,09 B. 0,91 C. 0,36 D. 0,06

Đáp án B.

Lời giải

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố "A bắn trúng"; "B bắn trúng"; "C bắn trúng".

$A; B; C$ là ba biến cố độc lập. Do $A; B; C$ là các biến cố đôi một độc lập nên:

Xác suất để cả ba người đều bắn trượt là

STUDY TIP

Nhắc lại chú ý phần lý thuyết nhân xác suất, tôi có đưa ra:

Nếu $A; B$ là hai biến cố độc lập thì: $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

Và bài toán ở ví dụ 9 này là bài toán mở rộng của chú ý đó đối với ba biến cố đôi một độc lập.

$P\left(\overline{A}\overline{B}\overline{C}\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{C}\right)=\left(1-0,4\right)\left(1-0,5\right)\left(1-0,7\right)=0,09$

Vậy xác suất để có ít nhất một trong ba người bắn trúng là $1-0,09=0,91$.

Ví dụ 15: Một xạ thủ bắn bia. Biết rằng xác suất bắn trúng vòng 10 là $0,2$; vòng 9 là $0,25$ và vòng 8 là $0,15$. Nếu trúng vòng *k* thì được *k* điểm. Giả sử xạ thủ đó bắn ba phát súng một cách độc lập. Xạ thủ đạt loại giỏi nếu anh ta đạt ít nhất 28 điểm. Xác suất để xạ thủ này đạt loại giỏi là

A. 0,0935 **B.** 0,0755 **C.** 0,0365 **D.** 0,0855

Đáp án A.

STUDY TIP

Ở các phần tính xác suất biến cố *B; C; D* ta có các trường hợp như vậy bởi vì thứ tự trúng vòng của 3 lần bắn khác nhau là các trường hợp khác nhau. Nhiều độc giả không tính các trường hợp đó dẫn đến chọn C là sai.

Lời giải

Gọi *H* là biến cố: "Xạ thủ bắn đạt loại giỏi." *A; B; C; D* là các biến cố sau:

A: "ba viên trúng vòng 10"

B: "hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 9"

C: "một viên trúng vòng 10 và hai viên trúng vòng 9"

D: "hai viên trúng vòng 10 và một viên trúng vòng 8"

Các biến cố *A; B; C; D* là các biến cố xung khắc từng đôi một và

$$H=A\cup B\cup C\cup D.$$

Suy ra theo quy tắc cộng mở rộng ta có $P\left(H\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)+P\left(D\right)$

Mặt khác $P\left(A\right)=0,2.0,2.0,2=0,008$.

$P\left(B\right)=0,2.0,2.0,25+0,2.0,25.0,2+0,25.0,2.0,2=0,03$.

$P\left(C\right)=0,2.0,25.0,25+0,25.0,2.0,25+0,25.0,25.0,2=0,0375$.

$P\left(D\right)=0,2.0,2.0,15+0,2.0,15.0,2+0,15.0,2.0,2=0,018$.

Do đó $P\left(H\right)=0,008+0,03+0,0375+0,018=0,0935$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tung một viên xúc sắc cân đối, tìm xác suất để số chấm xuất hiện nhỏ hơn 4.

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{36}$ D. $\frac{1}{216}$

Câu 2: Một lớp học có 100 học sinh, trong đó 40 học sinh giỏi ngoại ngữ, 30 học sinh giỏi tin học và 20 học sinh giỏi cả ngoại ngữ lẫn tin học. Học sinh nào giỏi ít nhất một trong hai môn sẽ được thêm điểm trong kết quả học tập của học kỳ. Chọn ngẫu nhiên một trong các học sinh trong lớp, xác suất để học sinh đó được tăng điểm là

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 3: Một hộp bóng đèn có 12 bóng trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng, xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt là

A. $\frac{21}{44}$ B. $\frac{7}{44}$ C. $\frac{7}{11}$ D. $\frac{4}{11}$

Câu 4: Trong một hộp gồm có 8 viên bi xanh và 6 viên bi trắng, chọn ngẫu nhiên 5 viên bi. Xác suất để 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng là

A. $\frac{970}{1001}$ B. $\frac{139}{143}$ C. $\frac{31}{1001}$ D. $\frac{4}{143}$

Câu 5: Một lớp có 25 học sinh, trong đó có 15 em học khá môn Toán, 16 em học khá môn Văn. Biết rằng mỗi học sinh trong lớp đều khá ít nhất một trong hai môn trên. Xác suất để chọn được 3 em học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn.

A. $\frac{21}{575}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 6: Gieo hai con xúc sắc cân đối đồng chất. Xác suất để tổng hai mặt xuất hiện bằng 7 là

A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{6}{7}$

Câu 7: Một lớp gồm 20 học sinh trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn. Giáo viên chủ nhiệm chọn ra 2 em. Xác suất để 2 em đó là học sinh giỏi là

A. $\frac{11}{20}$ B. $\frac{169}{190}$ C. $\frac{21}{190}$ D. $\frac{9}{20}$

Câu 8: Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ 1, 3, 5, 7, 9. Xác suất để viết được số bắt đầu bởi 19 là

A. $\frac{59}{60}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{19}{20}$ D. $\frac{1}{20}$

Câu 9: Cho tập $A=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Xác suất để lập được số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho số đó chia hết cho 5 và các chữ số 1, 2, 3 luôn có mặt cạnh nhau là

A. $\frac{11}{420}$ B. $\frac{11}{360}$ C. $\frac{349}{360}$ D. $\frac{409}{420}$

Câu 10: Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Xác suất để 4 bạn đó có ít nhất một nam và 1 nữ là

A. $\frac{15475}{18278}$ B. $\frac{2803}{18278}$ C. $\frac{11}{360}$ D. $\frac{349}{360}$

Câu 11: Một trường có 50 em học sinh giỏi trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất trong 3 em ấy không có cặp anh em sinh đôi.

A. $\frac{9}{1225}$ B. $\frac{1216}{1225}$ C. $\frac{12}{1225}$ D. $\frac{1213}{1225}$

Câu 12: Một hội nghị bàn tròn có phái đoàn các nước: Mỹ có 5 người, Nga có 5 người, Anh có 4 người, Pháp có 6 người, Đức có 4 người. Xếp ngẫu nhiên các đại biểu vào bàn tròn. Xác suất sao cho các người quốc tịch ngồi cùng nhau là

A. $\frac{6}{23!}$ B. $\frac{4!}{24!}$

C. $\frac{4!.5!.5!4!.6!.4!}{24!}$ D. $\frac{23!-6}{23!}$

Câu 13: Nam tung một đồng xu cân đối 5 lần liên tiếp. Xác suất xảy ra để Nam tung cả 5 lần đồng xu đếp sấp là

A. 0,5 B. 0,03125 C. 0,25 D. 0,125

Câu 14: Ba xạ thủ bắn vào một mục tiêu một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là $0,6;0,7;0,8$. Xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng là

A. 0,188 B. 0,024 C. 0,976 D. 0,812

Câu 15: Trong dịp nghỉ lễ $30-04$ và $01-05$ thì một nhóm các em thiếu niên tham gia trò chơi "Ném vòng cổ chai lấy thưởng". Mỗi em được ném 3 vòng. Xác suất ném vào cổ chai lần đầu là 0,75. Nếu ném trượt lần đầu thì xác suất ném vào cổ chai lần thứ hai là 0,6. Nếu ném trượt cả hai lần ném đầu tiên thì xác suất ném vòng vào cổ chai ở lần thứ ba (lần cuối) là 0,3. Chọn ngẫu nhiên một em trong nhóm chơi. Xác suất để em đó ném vòng vào đúng cổ chai là

A. 0,18 B. 0,03 C. 0,75 D. 0,81

Câu 16: Gieo 3 đồng xu cùng một lúc. Gọi A là biến cố "Có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt ngửa". Xác suất của biến cố A là

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 17: Gieo 3 con xúc sắc, kết quả là một bộ thứ tự $(x;y;z)$; với x, y, z lần lượt là số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc sắc. Xác suất để $x+y+z<16$ là

A. $\frac{5}{108}$ B. $\frac{23}{24}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{103}{108}$.

Câu 18: Gieo hai con xúc sắc cân đối, đồng chất. Xác suất để gieo được hai mặt xúc sắc có tổng của hai số lớn hơn 9 là

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{5}{36}$ D. $\frac{31}{36}$

Câu 19: Gieo đồng thời hai còn xúc sắc cân đối, đồng chất, một con màu đỏ và một con màu đen. Xác suất của biến cố *A:* "Số chấm trên con xanh nhiều hơn trên con đỏ 2 đơn vị."

A. $\frac{32}{36}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{5}{36}$ D. $\frac{9}{36}$

Câu 20: Viết 6 chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 lên 6 mảnh bìa như nhau. Rút ngẫu nhiên ra 3 tấm bìa và xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang. Xác suất sao cho 3 tấm bìa đó xếp thành số có 3 chữ số là

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{7}{40}$ D. $\frac{33}{40}$

Câu 21: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau lập từ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Chọn ngẫu nhiên 2 số từ tập S. Xác suất để tích hai số chọn được là một số chẵn là

A. $\frac{41}{42}$ B. $\frac{1}{42}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 22: Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là $1;2;3;4;5;6;7;8(kg)$. Chọn ngẫu nhiên 3 quả trong số đó. Xác suất để trọng lượng 3 quả không nhỏ hơn 10 *kg* là

A. $\frac{3}{28}$ B. $\frac{25}{28}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

Câu 23: Trong một hộp đựng 20 viên bi trong đó có 12 viên bi đỏ khác nhau và 8 viên bi xanh khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra 7 viên bi. Xác suất để 7 viên bi được chọn ra không quá 2 viên bi đỏ là

A. $\frac{84}{1615}$ B. $\frac{101}{1938}$ C. $\frac{1882}{1983}$ D. $\frac{1531}{1615}$

Câu 24: Có 10 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm chia hết cho 10 là

A. $\frac{634}{667}$ B. $\frac{33}{667}$ C. $\frac{568}{667}$ D. $\frac{99}{667}$

Câu 25: Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Hỏi phải rút bao nhiêu thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 phải lớn hơn $\frac{5}{6}$.

A. 6 B. 7 C. 5 D. 4

Câu 26: Năm đoạn thẳng có độ dài $1cm;3cm;5cm;7cm;9cm$. Lấy ngẫu nhiên ba đoạn thẳng trong năm đoạn thẳng trên. Xác suất để ba đoạn thẳng lấy ra có thể tạo thành 1 tam giác là

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $\frac{3}{5}$

Câu 27: Người ta sử dụng 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Vật lý, 7 cuốn Hóa học (các cuốn sách cùng loại thì giống nhau) để làm giải thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh được 2 cuốn sách khá loại. Trong số 9 học sinh có 2 bạn X và Y. Xác suất để hai bạn đó có giải thưởng giống nhau là

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{5}{18}$ D. $\frac{13}{18}$

Câu 28: Xếp ngẫu nhiên 5 bạn nam và 3 bạn nữ vào một bàn tròn. Xác suất để không có ba bạn nữ nào ngồi cạnh nhau là

A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{2}{7}$ C. $\frac{1}{84}$ D. $\frac{5}{84}$

Câu 29: Đạt và Phong tham gia chơi một trò chơi đối kháng, thỏa thuận rằng ai thắng 5 ván trước là thắng chung cuộc và được hưởng toàn bộ số tiền thưởng của chương trình (không có ván nào hòa). Tuy nhiên khi Đạt thắng được 4 ván và Phong thắng được 2 ván rồi thì xảy ra sự cố kĩ thuật và chương trình buộc phải dừng lại. Biết rằng giới chuyên môn đánh giá Phong và Đạt ngang tài ngang sức. Hỏi phải chia số tiền thưởng như thế nào là hợp lí (dựa trên quan điểm tiền thưởng tỉ lệ thuận với xác suất thắng cuộc của mỗi người).

A. Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $4:3$.

B. Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $1:7$.

C. Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $7:1$.

D. Tỉ lệ chia số tiền cho Đạt và Phong là $3:4$.

Câu 30: An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn, người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất An thắng chung cuộc.

A. 0,064 B. 0,1152 C. 0,13824 D. 0,31744

Câu 31*: Một đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu có 3 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một thí sinh chọn ngẫu nhiên các phương án trả lời, hỏi xác suất thí sinh có được điểm nào là cao nhất? Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 1 điểm, trả lời sai không bị trừ điểm.

A. điểm 3 B. điểm 4 C. điểm 5 D. điểm 6

Câu 32: Một xạ thủ bắn từ khoảng cách xa 100m có xác suất bắn trúng đích là:

- Tâm 10 điểm: 0,5.
- Vòng 9 điểm: 0,25.
- Vòng 8 điểm: 0,1.
- Vòng 7 điểm: 0,1.
- Ngoài vòng 7 điểm: 0,05.

Tính xác suất để sau 3 lần bắn xạ thủ đó được 27 điểm.

A. 0,15 B. 0,75

C. 0,165625 D. 0,8375

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

Gọi A là biến cố "Số chấm xuất hiện nhỏ hơn 4". Số chấm nhỏ hơn 4 dễ thấy chỉ có thể là 1, 2 hoặc 3.

Gọi A_i là biến cố: "Số chấm xuất hiện là i" $\left(i=\overline{1,3}\right)$.

Có thể thấy rằng các biến cố này đôi một xung khắc.

Do viên xúc sắc là cân đối nên xác suất được chia đều ra cho 6 mặt, mỗi mặt có xác suất là $\frac{1}{6} \Rightarrow P\left(A_i\right)=\frac{1}{6}$

Ta có: $P(A)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Đáp án B.

Gọi A là biến cố "học sinh chọn được tăng điểm"

B là biến cố "học sinh chọn học giỏi ngoại ngữ"

C là biến cố "học sinh chọn học giỏi tin học".

Thì $A=B\cup C$ và BC là biến cố: "học sinh chọn được học giỏi cả ngoại ngữ lẫn tin học".

Ta có:

$$P(A)=P(B)+P(C)-P(BC)=\frac{30}{100}+\frac{40}{100}-\frac{20}{100}=0,5.$$

Câu 3: Đáp án C.

Gọi A: "Lấy được ít nhất 2 bóng tốt"

Không gian mẫu: Lấy ngẫu nhiên 3 quả bóng thì số cách lấy là $n(\Omega)=C_{12}^3=220$.

TH1: Lấy 3 bóng trong đó có 2 bóng tốt và 1 bóng xấu thì số cách chọn là $C_7^2.C_5^1=105$ cách.

TH2: Lấy 3 bóng đều tốt thì số cách lấy là $C_7^3=35$ cách.

$\Rightarrow n(A)=105+35=140$.

Vậy $P(A)=\frac{140}{220}=\frac{7}{11}$.

Câu 4: Đáp án A.

* Số cách chọn ra 5 viên bi từ 14 viên bi là $C_{14}^5=2002$.

$\Rightarrow n(\Omega)=2002$.

Gọi A: "Trong 5 viên bi được chọn có cả bi xanh và bi trắng."

* Số cách chọn 5 viên bi toàn bi xanh là $C_8^5=56$ cách.

* Số cách chọn ra 5 viên bi toàn bi trắng là $C_6^5=6$ cách.

$\Rightarrow n\left(\overline{A}\right)=56+6=62$.

$\Rightarrow P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{62}{2002}=\frac{970}{1001}$.

Câu 5: Đáp án A.

Gọi X là tập hợp học khá môn Toán, Y là tập hợp những em học khá môn Văn.

$\Rightarrow$ Tập hợp những em học khá cả Toán lẫn Văn là $X\cap Y$.

$\Rightarrow X\cap Y=15+16-25=6$ học sinh.

Gọi A: "Chọn được 3 em học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn."

Ta có $n(\Omega)=C_{25}^3=2300$.

Số học sinh học khá môn Toán nhưng không khá môn Văn là $\left|X\setminus\left(X\cap Y\right)\right|=15-6=9$.

$\Rightarrow n(A)=C_9^3=84$.

$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{84}{2300}=\frac{21}{575}$.

Câu 6: Đáp án B.

Con xúc sắc thứ nhất có thể xảy ra 6 kết quả, con thứ hai cũng vậy nên tổng số kết quả có thể xảy ra là $|\Omega|=6.6=36$.

Gọi A: "Tổng hai mặt xuất hiện bằng 7."

Dùng phép liệt kê ta có

$7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$.

$\Rightarrow \Omega_A=\{(1;6),(2;5),(3;4),(4;3),(5;2),(6;1)\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Câu 7: Đáp án C.

Gọi X là tập các học sinh giỏi Toán, Y là tập hợp các học sinh giỏi Văn.

$\Rightarrow X\cap Y$ là tập hợp các học sinh giỏi cả 2 môn và $X\cup Y$ là tập hợp những học sinh giỏi một trong 2 môn (tập hợp các học sinh giỏi).

Theo quy tắc cộng tổng quát ta có

$|X\cup Y|=|X|+|Y|-|X\cap Y|=5+6-4=7$.

Gọi A là biến cố "Chọn được 2 em là học sinh giỏi".

$\Rightarrow |\Omega|=C_{20}^2=190$ và $|\Omega_A|=C_7^2=21 \Rightarrow P(A)=\frac{21}{190}$.

Câu 8: Đáp án D.

Đặt 19 là một số a. Ta có số các số có các chữ số khác nhau tạo thành từ a, 3, 5, 7 với a là số đứng đầu là $1.3.2.1=6$ số $\Rightarrow |\Omega_B|=96 \Rightarrow$ xác suất là $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$.

Câu 9: Đáp án B.

Số các số có 5 chữ số khác nhau lập được từ tập A là $6.6.5.4.3=2160$ số $\Rightarrow |\Omega|=2160$.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ ta có e=0 hoặc e=5 (do số đó phải chia hết cho 5). Khi đó ta xét các trường hợp

a) $e = 0$. Chọn vị trí cho 3 số 1, 2, 3 $\Rightarrow$ có 2 cách chọn, ngoài ra trong 3 số 1, 2, 3 còn có 3!=6 hoán vị trong đó. Cuối cùng ta chọn số còn lại có 3 cách chọn. Vậy số các số thuộc trường hợp này là 2.6.3=36 số

b) $e = 5$, các số 1, 2, 3 thuộc b, c, d $\Rightarrow$ có 3!.2=12 số thỏa (do a khác 0 nên chỉ có 2 cách chọn)

c) $e = 5$, các số 1, 2, 3 thuộc a, b, c $\Rightarrow$ có 3!.3=18 số thỏa mãn

Số các số thỏa yêu cầu là 36+12+18=66 số $\Rightarrow |\Omega_A| = 66$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{66}{2160} = \frac{11}{360}$.

Câu 10: Đáp án A.

Gọi A là biến cố " Chọn 4 em có ít nhất một nam và một nữ".

Số cách chọn 4 bạn bất kì vào ban cán sự lớp là C_{40}^4 cách

Số cách chọn 4 bạn nam vào ban cán sự lớp là C_{25}^4 cách.

Số cách chọn 4 bạn nữ vào ban cán sự lớp là C_{15}^4 cách.

Vậy số cách chọn ban cán sự lớp có mặt cả nam lẫn nữ là $C_{40}^4 - C_{25}^4 - C_{15}^4 \Rightarrow |\Omega_B| = 77375$

Vậy xác suất cần tìm là $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{77375}{91390} = \frac{15475}{18278}$.

Câu 11: Đáp án D.

Số cách chọn ra 3 học sinh mà không có điều kiện gì là C_{50}^3 cách $\Rightarrow |\Omega| = C_{50}^3$

Ta sẽ loại trừ các trường hợp có 1 cặp anh em sinh đôi. Đầu tiên ta chọn 1 cặp sinh đôi, có 4 cách chọn. Sau đó chọn 1 học sinh còn lại từ 48 học sinh, có 48 cách chọn. Vậy số cách chọn 3 em học sinh thỏa yêu cầu đề bài là C_{50}^3-4.48=19408 cách $\Rightarrow |\Omega_A| = 19408$

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{19408}{C_{50}^3} = \frac{1213}{1225}$.

Câu 12: Đáp án A.

Số cách xếp 24 người vào bàn là 23! $\Rightarrow |\Omega| = 23!$ (do ở đây là hoán vị vòng quanh).

Gộp các thành viên cùng quốc tịch vào cùng nhóm, trước tiên ta tính số cách xếp mọi người trong các nhóm đó.

Theo nguyên tắc buộc các phần tử, ta "buộc" thành bốn phần tử lớn là Mỹ, Nga, Anh Pháp.

Lúc này bài toán trở thành xếp 4 phần tử vào 4 ghế trên bàn tròn.

Cố định nhóm Mỹ, có 3 cách xếp chỗ cho nhóm Nga, 2 cách xếp chỗ cho nhóm Anh, 1 cách xếp chỗ cho nhóm Pháp.

Vậy có $3! = 6$ cách xếp.

Vậy xác suất để xếp sao cho các vị cùng quốc tịch ngồi cạnh nhau là $\frac{6}{23!}$.

Câu 13: Đáp án B.

Vì đồng xu là cân đối nên xác suất sấp – ngửa của mỗi lần tung là như nhau và bằng 0,5.

Xác suất để 5 lần tung đồng xu đều xấp là:

$$0,5^5 = 0,03125.$$

Câu 14: Đáp án C.

Gọi A_j là biến cố: "Xạ thủ thứ j bắn trúng".

Với $j = \overline{1,3}$.

$\Rightarrow P(\overline{A_1}) = 1 - 0,6 = 0,4; P(\overline{A_2}) = 1 - 0,7 = 0,3;$

$P(\overline{A_3}) = 1 - 0,8 = 0,2.$

Gọi A là biến cố: "có ít nhất một xạ thủ bắn trúng" thì

$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0,4.0,3.0,2 = 0,024.$

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,024 = 0,976.$

Câu 15: Đáp án D.

Gọi K là biến cố "Ném được vòng vào cổ chai", A_1 là biến cố ném được vòng vào cổ chai lần đầu, A_2 là biến cố ném được vòng vào cổ chai lần thứ hai, A_3 là biến cố ném vòng vào cổ chai lần thứ ba.

$\Rightarrow P(K) = P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2) + P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)$

$= P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$

$= 0,75 + 0,25.0,6 + 0,25.0,4.0,3 = 0,81.$

Câu 16: Đáp án C.

Mỗi đồng xu có hai khả năng: ngửa hoặc sấp. Do đó số phần thử của không gian mẫu khi hieo 3 đồng xu là $|\Omega| = 2^3 = 8$.

Ta có biến cố đối của A là $\overline{A}$: "Không có đồng xu nào xuất hiện mặt ngửa" $\Leftrightarrow$ "Cả ba đồng xu đều xuất hiện mặt sấp".

Khi đó $\Omega_{\overline{A}} = \{(S;S;S)\} \Rightarrow |\Omega_{\overline{A}}| = 1$.

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Câu 17: Đáp án D.

Nhận xét: Do con xúc sắc chỉ có 6 mặt và để ý rằng $3.6 = 18$ là giá trị tối đa của tổng $x+y+z$. Và 18

không lớn hơn 16 là bao nhiêu nên ta sẽ sử dùng phương pháp tính phần bù.

Số các bộ thứ tự $(x;y;z)$ với $x;\ y;\ z$ là số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1 và nhỏ hơn hoặc bằng 6 là $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Xét các bộ thứ tự $(x;y;z)$ có tổng $x+y+z \geq 16$. Ta có

$16 = 5+5+6 = 5+6+5 = 6+5+5 = 6+6+4 = 6+4+6$
$= 4+6+6$.

$17 = 5+6+6 = 6+5+6 = 6+6+5$

$18 = 6+6+6$

Như vậy có tổng cộng 10 bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x+y+z \geq 16$.

Số bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $x+y+z < 16$ là

$$216 - 10 = 206.$$

Xác suất cần tính là $P = \frac{206}{216} = \frac{103}{108}$.

Câu 18: Đáp án A.

Không gian mẫu $|\Omega| = 6.6 = 36$.

Gọi A là biến cố: "tổng của hai số lớn hơn 9"

$\Rightarrow A = \{(6;4),(4;6),(5;5),(6;5),(5;6),(6;6)\}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Câu 19: Đáp án B.

Vì hai con xúc sắc có cùng 6 mặt nên số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = 6.6 = 36$

Gọi $(x;y)$ là số chấm xuất hiện lần lượt trên mặt xanh và mặt đỏ.

Khi đó $\Omega_A = \{(3;1);(4;2);(5;3);(6;4)\} \Rightarrow |\Omega_A| = 4$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Câu 20: Đáp án A.

Số cách chọn 3 tấm bìa trong 6 tấm bìa và xếp thành một hàng ngang là $|\Omega| = A_6^3 = 120$.

Số cách xếp 3 tấm bìa để không có được số có ba chữ số tức là vị trí đầu tiên là chữ số 0 là A_5^2

Số cách xếp 3 tấm bìa để tạo được số có 3 chữ số là $A_6^3 - A_5^2 = 100$.

Vậy xác suất cần tìm là $P = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$.

Câu 21: Đáp án D.

Ta có điều kiện chủ chốt "tích hai số được chọn là một số chẵn" $\Leftrightarrow$ Tồn tại ít nhất một trong hai số được chọn là chẵn.

Gọi $\overline{ab}$ là số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số đã cho

Số cách chọn a: 6 cách

Số cách chọn b: 6 cách

$\Rightarrow$ Số các số có 2 chữ số khác nhau tạo được là: $6.6 = 36$ số

$\Rightarrow$ S có 36 phần tử

Số cách lấy ngẫu nhiên 2 số từ tập S: $C_{36}^2 = 630$ cách

Gọi biến cố A: "Tích hai số được chọn là một số chẵn"

Gọi biến cố $\overline{A}$: " Tích hai số được chọn là một số lẻ"

Số các số lẻ trong S: 3.5=15 (3 cách chọn chữ số hàng đơn vị là lẻ, 5 cách chọn chữ số hàng chục khác 0).

Số cách lấy ngẫu nhiên 2 số lẻ trong 15 số lẻ: $C_{15}^2 = 105$ cách

$\Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{|\Omega_{\overline{A}}|}{|\Omega|} = \frac{105}{630} = \frac{1}{6}$

Vậy: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Câu 22: Đáp án D.

Chọn ba quả cân có: $|\Omega| = C_8^3 = 56$ cách

Chọn ba quả cân có tổng trọng lượng nhỏ hơn hoặc bằng 9,có các trường hợp sau:

TH1: Trong các quả được lấy ra không có quả cân trọng lượng 1 (kg) .

Ta có $2+3+4 = 9$ là tổng trọng lượng nhỏ nhất có thể. Do đó trong trường hợp này chỉ có đúng 1 cách chọn.

TH2: Trong các quả được lấy ra có quả cân trọng lượng 1kg. Khi đó ta có:

$1+2+3 = 6;\ 1+2+4 = 7;\ 1+2+5 = 8$;

$1+2+6 = 9;\ 1+3+4 = 8;\ 1+3+5 = 9$

Trường hợp này ta có 6 cách chọn.

Vậy số cách chọn thỏa mãn ycbt là $56 - 1 - 6 = 49$.

Xác suất cần tính là: $\frac{49}{56} = \frac{7}{8}$.

Câu 23: Đáp án B.

Số cách lấy ra tuỳ ý 7 viên bi trong 20 viên bi đã cho là: $|\Omega| = C_{20}^7 = 77520$.

Để chọn ra không quá 2 viên bi đỏ từ 7 viên lấy ra là:

Lấy ra được 0 viên bi đỏ, 7 viên bi xanh: $C_8^7 = 8$ (cách).

– Lấy ra được 1 viên bi đỏ, 6 viên bi xanh: $C_{12}^1.C_8^6 = 336$ (cách).

– Lấy ra được 2 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh: $C_{12}^2.C_8^5 = 3696$ (cách).

Vậy xác suất để 7 viên bi chọn ra không quá 2 viên bi đỏ là: $\frac{8+336+3696}{77520} = \frac{101}{1938}$.

Câu 24: Đáp án D.

Gọi biến cố A: "Lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10"

Số cách lấy ngẫu nhiên 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ: C_{30}^{10} cách $\Rightarrow |\Omega| = C_{30}^{10}$

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số lẻ, 15 tấm thẻ mang số chẵn, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10 (chú ý là các thẻ có số chia hết cho 10 đề là chẵn)

Số cách chọn 5 tấm thẻ mang số lẻ: $C_{15}^{5} = 3003$ cách

Số cách chọn 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10: $C_3^1 = 3$ cách

Số cách chọn 4 tấm thẻ mang số chẵn không chia hết cho 10: $C_{12}^4 = 495$ cách

Số cách lấy 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10: $3003.3.495 = 4459455$ cách

$\Rightarrow |\Omega_A| = 4459455$

Vậy: $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{4459455}{C_{30}^{10}} = \dfrac{99}{667}$.

Câu 25: Đáp án A.

Trong 9 thẻ đã cho có hai thẻ ghi số chia hết cho 4 (các thẻ ghi số 4 và 8), 7 thẻ còn lại có ghi số không chia hết cho 4.

Giả sử rút $x\left(1 \le x \le 9; x \in \mathbb{N}\right)$, số cách chọn x từ 9 thẻ trong hộp là C_9^x, số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^x$.

Gọi A là biến cố: "Trong số x thẻ rút ra có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4"

Số cách chọn tương ứng với biến cố $|\overline{A}|$ là $|\overline{A}| = C_7^x$.

Ta có $P(\overline{A}) = \dfrac{C_7^x}{C_9^x} \Rightarrow P(A) = 1 - \dfrac{C_7^x}{C_9^x}$

Do đó $P(A) > \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{C_7^x}{C_9^x} > \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - 17x + 60 < 0$

$\Rightarrow 5 < x < 12 \Rightarrow 6 \le x \le 9$

Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 6. Vậy số thẻ ít nhất phải rút là 6.

Câu 26: Đáp án A.

Phân tích: Cần nhớ lại kiến thức cơ bản về bất đẳng thức tam giác

Ba đoạn thẳng với chiều dài a, b, c sẽ có thể là 3 cạnh của một tam giác khi và chỉ khi: $\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$

Lời giải:

Số phần tử của không gian mẫu là $C_5^3 = 10$

Gọi A là biến cố " lấy ba đoạn thẳng lấy ra lập thành 1 tam giác"

Các khả năng chọn được ba đoạn thẳng lập thành 1 tam giác là $\{3,5,7\};\{3,5,9\};\{5,7,9\}$

Số trường hợp thuận lợi của biến cố A là 3.

Suy ra xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{3}{10}$.

Câu 27: Đáp án C.

Gọi A là biến cố: "Avà B có giải thưởng giống nhau."

Vì mỗi học sinh nhận được 2 cuốn sách khác loại, nên giả sử có a học sinh nhận sách (Toán và Lí); b học sinh nhận sách (Lí và Hóa) và $5-a$ học sinh nhận sách (Toán và Hóa) $\Rightarrow \begin{cases} 5-a = 7-b \\ 6-a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

Do đó, có 2 học sinh nhận sách (Toán và Lí); 3 học sinh nhận sách (Toán và Hóa) và 4 học sinh nhận sách (Lí và Hóa).

Số phần tử của không gian mẫu là $|\Omega| = C_9^2.C_7^3.C_4^4 = 1260$

<u>TH1:</u> X và Y nhận sách (Toán, Lí), số khả năng là $C_7^3.C_4^4 = 35$

<u>TH2:</u> X và Y nhận sách (Toán, Hóa), số khả năng là $C_7^1C_6^2.C_4^4 = 105$

<u>TH3:</u> X và Y nhận sách (Lí, Hóa), số khả năng là $C_7^2.C_5^3.C_2^2 = 210$

$\Rightarrow |\Omega_A| = 25 + 105 + 210 = 350$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \dfrac{5}{18}$

Câu 28: Đáp án B.

Theo công thức hoán vị vòng quanh ta có: $|\Omega| = 7!$

Để xếp các bạn nữ không ngồi cạnh nhau, trước hết ta xếp các bạn nam vào bàn tròn: có 4! cách, giữa 5 bạn nam đó ta sẽ có được 5 ngăn (do ở đây là bàn tròn)

Xếp chỉnh hợp 3 bạn nữ vào 5 ngăn đó, có A_5^3 cách.

Vậy xác suất xảy ra là $P = \dfrac{4!.A_5^3}{7!} = \dfrac{2}{7}$.

Câu 29 : Đáp án C.

Phân tích: Đề bài cho các điều kiện khá dài dòng, ta cần đưa chúng về dạng ngắn gọn dễ hiểu hơn.

+) "Biết rằng giới chuyên môn đánh giá Phong và Đạt ngang tài ngang sức": xác suất để Phong và Đạt thắng trong một ván là như nhau và bằng 0,5.

+) "Khi Đạt thắng được 4 ván và Phong thắng được 2 ván rồi": nghĩa là Đạt chỉ cần thắng 1 ván nữa là được 5 ván, còn Phong phải thắng 3 ván nữa mới đạt được.

Lời giải:

Để xác định xác suất thắng chung cuộc của Đạt và Phong ta tiếp tục chơi thêm các ván "giả tưởng". Để Phong có thể thắng chung cuộc thì anh phải thắng Đạt 3 ván liên tiếp (vì Đạt chỉ còn 1 ván nữa là thắng).

Như vậy xác suất thắng cuộc của Phong là:

$$P(P)=0,5^3=\frac{1}{8}.$$

⇒ Xác suất thắng cuộc của Đạt là $P(Đ)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

⇒ Tỉ lệ chia tiền phù hợp là: $\frac{7}{8}:\frac{1}{8}=7:1$

Câu 30: Đáp án D.

Phân tích: Bài này điểm mấu chốt là phải liệt kê được các trường hợp mà An thắng Bình chung cuộc. Ví dụ: Séc 1: An thắng; Séc 2: An thắng; Séc 3: Bình thắng; Séc 4: An thắng

⇒ An thắng chung cuộc.

Lưu ý là ta phải tính cả thứ tự các séc An thắc hoặc thua. Như ở ví dụ trên thì An thua ở séc thứ 3.

Lời giải:

Giả sử số séc trong trận đấu giữa An và Bình là x. Dễ dàng nhận thấy $3\le x\le 5$.

Ta xét các trường hợp:

TH1: Trận đấu có 3 séc ⇒ An thắng cả 3 séc.

Xác suất thắng trong trường hợp này là:

$$P_1=0,4\ .0,4\ .0,4=0,064$$

TH2: Trận đấu có 4 séc ⇒ An thua 1 trong 3 séc: 1;2 hoặc 3 và thắng séc thứ 4.

Số cách chọn 1 séc để An thua là: C_3^1

(chú ý xác suất để An thua trong một séc là 0.6)

$$\Rightarrow P_2=C_3^1.0,4^3.0,6=0,1152$$

TH3: Trận đấu có 5 séc ⇒ An thua 2 séc và thắng ở séc thứ 5.

Số cách chọn 2 trong 4 séc đầu để An thua là: C_4^2 cách.

$$\Rightarrow P_3=C_4^2.0,4^3.0,6^2=0,13824$$

Như vậy xác suất để An thắng chung cuộc là :

$$P=P_1+P_2+P_3=0,31744$$

Nhận xét: *Trong bài này các bạn rất dễ mắc sai lầm sau: ở trường hợp 3 lại tính số cách chọn 2 ván An thua là C_5^2 mà không để ý rằng séc thứ 5 chắc chắn phải là An thắng.*

Câu 31: Đáp án A.

Phân tích: Với một bài yêu cầu tìm giá trị lớn nhất như thế này thì cách mà ta nghĩ đến đầu tiên là đặt ẩn (là số điểm) rồi sau đó tính biểu thức cần tính (xác suất đạt được số điểm) theo ẩn đó, việc còn lại là xử lí biểu thức.

Lời giải:

Gọi x là số điểm bạn đó đạt được $(0\le x\le 10)(x\in\mathbb{N})$

⇒bạn đó trả lời đúng x câu và sai $10-x$ câu.

+) Xác suất mỗi câu bạn đó đúng là $\frac{1}{3}$; sai là $\frac{2}{3}$.

+) Có C_{10}^x cách chọn ra x câu đúng.

Do đó xác suất được x điểm là:

$$P(x)=C_{10}^x.\left(\frac{1}{3}\right)^x.\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}=\frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{10-x}}{x!(10-x)!}$$

Do $P(x)$ là lớn nhất nên $\begin{cases}P_x\ge P_{x+1}\\P_x\ge P_{x-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{10-x}}{x!(10-x)!}\ge\frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{9-x}}{(x+1)!(9-x)!}\\\frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{10-x}}{x!(10-x)!}\ge\frac{10!}{3^{10}}.\frac{2^{11-x}}{(x-1)!(11-x)!}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+1}{10-x}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2(x+1)\ge 10-x\Leftrightarrow x\ge\frac{8}{3}\\\frac{x}{11-x}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x\le 11\Leftrightarrow x\le\frac{11}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{3}\le x\le\frac{11}{3}$$

Mà $x\in\mathbb{N}$ nên $x=3$

Vậy xác suất bạn đó đạt điểm 3 là lớn nhất.

Câu 32: Đáp án C.

Ta có $27=10+10+7=10+9+8=9+9+9$

Với bộ $(10;10;7)$ có 3 cách xáo trộn điểm các lần bắn.

Với bộ $(10;9;8)$ có 6 cách xáo trộn điểm các lần bắn.

Với bộ $(9;9;9)$ có 1 cách xáo trộn điểm các lần bắn.

Do đó, xác suất để sau 3 lần bắn xạ thủ được đúng 27 điểm là:

$$P=3.0,5^2.0,1+6.0,5.0,25.0,1+0,25^3=0,165625$$

CHỦ ĐỀ 3: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Phương pháp quy nạp toán học

A. Lý thuyết

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số nguyên dương n là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì có thể làm như sau:

- ***Bước 1:*** Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n=1$.
- ***Bước 2:*** Giả thiết rằng mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n=k\geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp). Bằng kiến thức đã biết và giả thiết quy nạp, chứng minh rằng mệnh đề đó cũng đúng với $n=k+1$.

B. Các bài toán điển hình

Ví dụ 1: Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$. B. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$.

C. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D. $S=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học rằng mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có đẳng thức: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- *Bước 1:* Với $n=1$ thì vế trái bằng $1^2=1$, vế phải bằng $\dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}=1$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

- *Bước 2:* Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\geq 1$, nghĩa là ta có

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Mà $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Suy ra $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Do đó đẳng thức đúng với $n=k+1$. Suy ra có điều phải chứng minh.

Vậy phương án đúng là C.

Cách 2: Kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

STUDY TIP

Ngoài kết quả nêu trong ví dụ 1, chúng ta có thể đề cập đến các kết quả tương tự như sau:

1) $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2) $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3) $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

4) $1^5+2^5+...+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

5) $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

+ Với $n=1$ thì $S=1^2=1$ (loại được các phương án B và D);

+ Với $n=2$ thì $S=1^2+2^2=5$ (loại được phương án A).

Vậy phương án đúng là **C.**

Nhận xét: *Từ ví dụ 1 và các bài tập ở phần nhận xét, ta thấy bậc ở vế trái nhỏ hơn bậc ở vế phải là 1 đơn vị. Lưu ý điều này để có thể tính được tổng dạng lũy thừa dựa vào phương pháp hệ số bất định. Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1: Với mỗi số nguyên dương n, đặt $S=1^2+2^2+...+n^2$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. $S=\frac{1}{6}\left(2n^3+3n^2+n\right)$. **B.** $S=\frac{1}{6}\left[(n+1)^3-(n+1)\right]+\frac{1}{6}\left[n^3-n\right]$.

C. $S=\frac{1}{6}\left[2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\right]$. **D.** $S=\frac{n(n^2+1)(2n+1)}{6}$.

Câu 2: Với mỗi số nguyên dương n, ta có $1^2+2^2+...+n^2=an^3+bn^2+cn$, trong đó a,b,c là các hằng số. Tính giá trị của biểu thức $M=ab^2+bc^2+ca^2$.

A. $M=25$. **B.** $M=\frac{25}{216}$. **C.** $M=\frac{25}{6}$. **D.** $M=23$.

Câu 3: Tìm tất cả các số nguyên dương n để $1^2+2^2+...+n^2>2017$.

A. $n\ge 18$. **B.** $n\ge 20$. **C.** $n\ge 17$. **D.** $n\ge 19$.

Câu 4: Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $1^2+2^2+...+n^2<2018$.

A. $S=153$. **B.** $S=171$. **C.** $S=136$. **D.** $S=190$.

Ví dụ 2: Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $T_n=\sqrt{3}$. **B.** $T_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $T_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $T_n=\sqrt{5}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta chứng minh $T_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$ bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

- *Bước 1:* Với $n=1$ thì vế trái bằng $\sqrt{2}$, còn vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{2^{1+1}}=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n=1$.

- *Bước 2:* Giả sử đẳng thức đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là $T_k=2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$.

Ta phải chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh

$$T_{k+1}=2\cos\frac{\pi}{2^{(k+1)+1}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Thật vậy, vì $T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}$ nên theo giả thiết quy nạp ta có

$$T_{k+1}=\sqrt{2+T_k}=\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}.$$

Mặt khác, $1+\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=1+\cos\left(2.\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}$ nên $T_{k+1}=\sqrt{2.2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$.

Vậy phương án đúng là **B.**

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ 2, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi dưới đây:*

STUDY TIP

Ngoài cách làm như bên, ta có thể làm theo cách sau: Kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $T_1=\sqrt{2}$ (loại ngay được phương án A, C và D).

Câu 1: Đặt $T_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn). Tìm n để $T_n=2\sin\frac{511\pi}{1024}$.

A. $n=10$. **B.** $n=9$. **C.** $n=11$. **D.** $n=8$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2}$ và $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là

A. $u_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **B.** $u_n=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **C.** $u_n=\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **D.** $u_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Ví dụ 3: Đặt $S_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n=\frac{n+1}{2(2n+1)}$. **B.** $S_n=\frac{3n-1}{4n+2}$. **C.** $S_n=\frac{n}{2n+1}$. **D.** $S_n=\frac{n+2}{6n+3}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Rút gọn biểu thức S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện.

Với mọi số nguyên dương k, ta có $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$.

Do đó $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy phương án đúng là **C.**

Cách 2: Kiểm tra tính đúng – sai của các phương án dựa vào một số giá trị cụ thể của n.

+ Với $n=1$ thì $S_1=\frac{1}{1.3}=\frac{1}{3}$ (chưa loại được phương án nào);

+ Với $n=2$ thì $S_2=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}=\frac{2}{5}$ (loại ngay được các phương án A, B và D).

Vậy phương án đúng là **C.**

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta hoàn toàn trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Câu 1: Với $n\in\mathbb{N}^*$, biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{cn+1}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^3+c^4$.

A. $P=17$. **B.** $P=10$. **C.** $P=9$. **D.** $P=19$.

Câu 2: Với $n\in\mathbb{N}^*$, biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an+b}{4n+c}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

A. $T=40$. **B.** $T=4$. **C.** $T=32$. **D.** $T=16$.

Câu 3: Biết rằng $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{an^2+bn+c}{(2n+1)^2}$, trong đó $n\in\mathbb{N}^*$ và a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $F=(a+b)^{a+c}$.

A. $F=9$. **B.** $F=6$. **C.** $F=8$. **D.** $F=27$.

Câu 4: Tính tổng S của tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất phương trình

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{17}{35}.$$

A. $S=153$. B. $S=136$. C. $S=272$. D. $S=306$.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^{n+1}>n^2+3n$.

A. $n\geq 3$. B. $n\geq 5$. C. $n\geq 6$. D. $n\geq 4$.

Đáp án D.

Lời giải

Kiểm tra tính đúng – sai của bất đẳng thức với các trường hợp $n=1,2,3,4$, ta dự đoán được $2^{n+1}>n^2+3n$, với $n\geq 4$. Ta chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

- *Bước 1*: Với $n=4$ thì vế trái bằng $2^{4+1}=2^5=32$, còn vế phải bằng $4^2+3.4=28$. Do $32>28$ nên bất đẳng thức đúng với $n=4$.

- *Bước 2*: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k\geq 4$, nghĩa là $2^{k+1}>k^2+3k$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n=k+1$, tức là phải chứng minh $2^{(k+1)+1}>(k+1)^2+3(k+1)$ hay $2^{k+2}>k^2+5k+4$.

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có $2^{k+1}>k^2+3k$.

Suy ra $2.2^{k+1}>2(k^2+3k)$ hay $2^{k+2}>2k^2+6k$.

Mặt khác $2k^2+6k-(k^2+5k+4)=k^2+k-4\geq 4^2+4-4=16$, với mọi $k\geq 4$.

Do đó $2^{k+2}>2(k^2+3k)>k^2+5k+4$ hay bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy phương án đúng là D.

STUDY TIP

Dựa vào kết quả ví dụ 4, ta có thể đề xuất bài toán sau: Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho:

$2^{n+1}>n^2+3n, \forall n\geq p, n\in\mathbb{N}^*$.

A. $p=3$. B. $p=5$.

C. $p=4$. D. $p=7$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Tổng S các góc trong của một đa giác lồi n cạnh, $n \geq 3$, là

A. $S = n.180^0$. B. $S = (n-2).180^0$.

C. $S = (n-1).180^0$. D. $S = (n-3).180^0$.

Câu 2: Với $n \in \mathbb{N}^*$, hãy rút gọn biểu thức

$$S = 1.4 + 2.7 + 3.10 + ... + n(3n+1).$$

A. $S = n(n+1)^2$. B. $S = n(n+2)^2$.

C. $S = n(n+1)$. D. $S = 2n(n+1)$.

Câu 3: Kí hiệu $k! = k(k-1)...2.1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $S_n = 1.1! + 2.2! + ... + n.n!$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $S_n = 2.n!$. B. $S_n = (n+1)! - 1$.

C. $S_n = (n+1)!$. D. $S_n = (n+1)! + 1$.

Câu 4: Với $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (2n)^2$ và

$$M_n = 2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2.$$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{T_n}{M_n} = \frac{4n+1}{2n+2}$. B. $\frac{T_n}{M_n} = \frac{4n+1}{2n+1}$.

C. $\frac{T_n}{M_n} = \frac{8n+2}{n+1}$. D. $\frac{T_n}{M_n} = \frac{2n+1}{n+1}$.

Câu 5: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $2^n > 2n+1$ với mọi số nguyên $n \geq p$.

A. $p = 5$. B. $p = 3$. C. $p = 4$. D. $p = 2$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2^n > n^2$.

A. $n \geq 5$. B. $n = 1$ hoặc $n \geq 6$.

C. $n \geq 7$. D. $n = 1$ hoặc $n \geq 5$.

Câu 7: Với mọi số nguyên dương n, ta có $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{an+b}{cn+4}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = ab^2 + bc^2 + ca^2$.

A. $T = 3$. B. $T = 6$. C. $T = 43$. D. $T = 42$.

Câu 8: Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{an+2}{bn}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = 5$. B. $P = 9$. C. $P = 20$. D. $P = 36$.

Câu 9: Biết rằng

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tính giá trị của biểu thức $M = a + b + c + d + e$.

A. $M = 4$. B. $M = 1$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{1}{2}$.

Câu 10: Biết rằng với mọi số nguyên dương n ta có $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = a_1n^3 + b_1n^2 + c_1n + d_1$ và $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1) = a_2n^3 + b_2n^2 + c_2n + d_2$.

Tính $T = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$.

A. $T = 2$. B. $T = 1$. C. $T = \frac{4}{3}$. D. $T = \frac{2}{3}$.

Câu 11: Đặt $S_k = 1^k + 2^k + ... + n^k$, trong đó n,k là số nguyên dương. Xét các mệnh đề sau:

$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; S_3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$ và

$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề nói trên là

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 12: Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta xét các mệnh đề: P: "$7^n + 5$ chia hết cho 2"; Q: "$7^n + 5$ chia hết cho 3" và R: "$7^n + 5$ chia hết cho 6". Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 13: Xét bài toán: *"Kiểm nghiệm với số nguyên dương n bất đẳng thức $n! \geq 2^{n-1}$"*. Một học sinh đã trình bày lời giải bài toán này với các bước như sau:

Bước 1: Với $n = 1$, ta có $n! = 1! = 1$ và $2^{n-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ đúng.

Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là ta có $k! \geq 2^{k-1}$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nghĩa là phải chứng minh $(k+1)! \geq 2^k$.

Bước 3: Ta có $(k+1)! = (k+1).k! \geq 2.2^{k-1} = 2^k$. Vậy $n! \geq 2^{n-1}$ với mọi số nguyên dương n.

Chứng minh trên đúng hay sai, nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng. B. Sai từ bước 2.

C. Sai từ bước 1. D. Sai từ bước 3.

Câu 14: Biết rằng

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{an^2 + bn}{cn^2 + dn + 16},$$

trong đó a,b,c,d và n là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = (a+c)(b+d)$.

A. $T = 75$. B. $T = 364$. C. $T = 300$. D. $T = 256$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B.

Cách 1: Từ tổng các góc trong tam giác bằng 180^0 và tổng các góc trong tứ giác bằng 360^0, chúng ta dự đoán được $S=(n-2).180^0$.

Cách 2: Thử với những trường hợp đã biết để kiểm nghiệm tính đúng – sai của từ công thức. Cụ thể là với $n=3$ thì $S=180^0$ (loại luôn được các phương án A, C, và D); với $n=4$ thì $S=360^0$ (kiểm nghiệm phương án B thêm một lần nữa).

Câu 2: Đáp án A.

Để chọn được S đúng, chúng ta có thể dựa vào một trong ba cách sau đây:

Cách 1: Kiểm tra tính đúng – sai của từng phương án với những giá trị của n.

Với $n=1$ thì $S=1.4=4$ (loại ngay được phương án B và C); với $n=2$ thì $S=1.4+2.7=18$ (loại được phương án D).

Cách 2: Bằng cách tính S trong các trường hợp $n=1,S=4;n=2,S=18;n=3,S=48$ ta dự đoán được công thức tính $S=n(n+1)^2$.

Cách 3: Ta tính S dựa vào các tổng đã biết kết quả như $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ và

$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ta có $S=3(1^2+2^2+...+n^2)+(1+2+...+n)=n(n+1)^2$.

Câu 3: Đáp án B.

Chúng ta có thể lựa chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $S_1=1.1!=1$ (loại ngay được các phương án A, C, D).

Cách 2: Rút gọn S_n dựa vào việc phân tích phần tử đại diện $k.k!$ và phương pháp khử liên tiếp. Cụ thể là $k.k!=(k+1-1).k!=(k+1).k!-k!$

$=(k+1)!-k!$. Suy ra

$S_n=(2!-1!)+(3!-2!)+...+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1.$

Câu 4: Đáp án A.

Chúng ta có thể lựa chọn phương án đúng dựa vào một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Kiểm nghiệm từng phương án đối với những giá trị cụ thể của n.

Với $n=1$ thì $T_1=1^2+2^2=5;M_1=2^2=4$ nên $\frac{T_1}{M_1}=\frac{5}{4}$ (loại ngay được các phương án B, C, D).

Cách 2: Chúng ta tính T_n,M_n dựa vào những tổng đã biết kết quả. Cụ thể dựa vào ví dụ 1:

$T_n=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$; $M_n=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

Suy ra $\frac{T_n}{M_n}=\frac{4n+1}{2n+2}$.

Câu 5: Đáp án B.

Dễ thấy $p=2$ thì bất đẳng thức $2^p>2p+1$ là sai nên loại ngay phương án D.

Xét với $p=3$ ta thấy $2^p>2p+1$ là bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $2^n>2n+1$ với mọi $n\geq 3$. Vậy $p=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

Câu 6: Đáp án D.

Kiểm tra với $n=1$ thấy bất đẳng thức đúng nên loại ngay được các phương án A và C.

Kiểm tra với $n=5$ thấy bất đẳng thức đúng. Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $2^n>n^2,\forall n\geq 5$.

Câu 7: Đáp án B.

Cách 1:

Với chú ý $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$, chúng ta có $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+...+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3n}{2(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$.

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có

$a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Cách 2: Cho $n=1,n=2,n=3$ ta được

$\frac{a+b}{c+4}=\frac{1}{10};\frac{2a+b}{2c+4}=\frac{1}{8};\frac{3a+b}{3c+4}=\frac{3}{22}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a=1,b=0,c=6$.

Suy ra $T=ab^2+bc^2+ca^2=6$.

Câu 8: Đáp án C.

Cách 1: Bằng cách phân tích số hạng đại diện, ta có $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$. Suy ra $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}....\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{2n+2}{4n}$.

Đối chiếu với đẳng thức đã cho ta có $a=2,b=4$.

Suy ra $P = a^2 + b^2 = 20$.

Cách 2: Cho $n = 2, n = 3$ ta được $\frac{a+1}{b} = \frac{3}{4}; \frac{3a+2}{3b} = \frac{2}{3}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $a = 2, b = 4$.

Suy ra $P = a^2 + b^2 = 20$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách 1: Sử dụng kết quả đã biết

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}.$$

So sánh các hệ số, ta được $a = \frac{1}{4}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{4}; d = e = 0$.

Suy ra $M = a + b + c + d + e = 1$.

Cách 2: Cho $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, n = 5$ ta được hệ gồm 5 phương trình 5 ẩn a, b, c, d, e. Giải hệ phương trình đó ta tìm được $a = \frac{1}{4}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{4}; d = e = 0$.

Suy ra $M = a + b + c + d + e = 1$.

Câu 10: Đáp án C.

Cách 1: Sử dụng các tổng lũy thừa bậc 1 và bậc 2 ta có

+) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1)$

$= (1^2 + 2^2 + ... + n^2) + (1 + 2 + ... + n) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n.$

Suy ra $a_1 = \frac{1}{3}; b_1 = 1; c_1 = \frac{2}{3}; d_1 = 0$.

+) $1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n-1)$

$= 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - (1 + 2 + ... + n) = n^3 + n^2.$

Suy ra $a_2 = b_2 = 1; c_2 = d_2 = 0$.

Do đó $T = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = \frac{4}{3}$.

Cách 2: Cho $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ và sử dụng phương pháp hệ số bất định ta cũng tìm được

$$a_1 = \frac{1}{3}; b_1 = 1; c_1 = \frac{2}{3}; d_1 = 0;\ a_2 = b_2 = 1; c_2 = d_2 = 0.$$

Do đó $T = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = \frac{4}{3}$.

Câu 11: Đáp án D.

Bằng các kết quả đã biết ở ví dụ 1, chúng ta thấy ngay được chỉ có $S_3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$ là sai.

Câu 12: Đáp án A.

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $7^n + 5$ chia hết cho 6.

Thật vậy: Với $n = 1$ thì $7^1 + 5 = 12 \vdots 6$.

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $7^k + 5$ chia hết cho 6.

Ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh $7^{k+1} + 5$ chia hết cho 6.

Ta có $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) - 30$.

Theo giả thiết quy nạp thì $7^k + 5$ chia hết cho 6 nên $7^{k+1} + 5 = 7(7^k + 5) - 30$ cũng chia hết cho 6.

Vậy $7^n + 5$ chia hết cho 6 với mọi $n \geq 1$. Do đó các mệnh đề P và Q cũng đúng.

Câu 13: Đáp án A.

Câu 14: Đáp án C.

Phân tích phần tử đại diện, ta có

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right].$$

Suy ra $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2 + 3n}{4n^2 + 12n + 8}$

$= \frac{2n^2 + 6n}{8n^2 + 24n + 16}.$

Đối chiếu hệ số, ta được $a = 2; b = 6; c = 8; d = 24$.

Suy ra $T = (a + c)(b + d) = 300$.

Dãy số

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay còn gọi tắt là dãy số).

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, ..., u_n, ...$, trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n).

Số hạng u_1 gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng tổng quát (số hạng thứ n) của dãy số.

2. Các cách cho một dãy số

Người ta thường cho một dãy số bằng một trong các cách dưới đây:

- **Cách 1:** Cho dãy số bằng công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ 1: Cho dãy số (x_n) với $x_n = \frac{n}{3^{n+1}}$.

Dãy số cho bằng cách này có ưu điểm là chúng ta có thể xác định được ngay số hạng bất kì của dãy số. Chẳng hạng, $x_{10} = \frac{10}{3^{11}} = \frac{10}{177147}$.

- **Cách 2:** Cho dãy số bằng phương pháp truy hồi.

Ví dụ 2: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n - 7, \forall n \geq 1$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (b_n) xác định bởi $\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 3 \\ b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$.

Với cách này, ta có thể xác định được ngay mối liên hệ giữa các số hạng hoặc nhóm các số hạng của dãy số thông qua hệ thức truy hồi. Tuy nhiên, để tính được số hạng bất kỳ của dãy số thì chúng ta cần phải tính được các số hạng trước đó hoặc phải tìm được công thức tính số hạng tổng quát của dãy số.

- **Cách 3:** Cho dãy số bằng phương pháp mô tả hoặc diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) gồm các số nguyên tố.

Ví dụ 5: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4. Trên cạnh BC, ta lấy điểm A_1 sao cho $CA_1 = 1$. Gọi B_1 là hình chiếu của A_1 trên CA, C_1 là hình chiếu của B_1 trên AB, A_2 là hình chiếu của C_1 trên BC, B_2 là hình chiếu của A_2 trên CA, ... và cứ tiếp tục như thế. Xét dãy số (u_n) với $u_n = CA_n$.

3. Dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số hằng

Dãy số (u_n) được là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được là dãy số hằng (hoặc dãy số không đổi) nếu ta có $u_{n+1} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6: a) Dãy số (x_n) với $x_n = n^2 - 2n + 3$ là một dãy số tăng.

Chứng minh: Ta có $x_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 = n^2 + 2$.

Suy ra $x_{n+1}-x_n=(n^2+2)-(n^2-2n+3)=2n-1>0,\forall n\ge 1$ hay $x_{n+1}>x_n,\forall n\ge 1$.

Vậy (x_n) là một dãy số tăng.

b) Dãy số (y_n) với $y_n=\frac{n+2}{5^n}$ là một dãy số giảm.

Chứng minh: *Cách 1*: Ta có $y_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{5^{n+1}}=\frac{n+3}{5^{n+1}}$.

Suy ra $y_{n+1}-y_n=\frac{n+3}{5^{n+1}}-\frac{n+2}{5^n}=-\frac{4n+7}{5^{n+1}}<0,\forall n\ge 1$ hay $y_{n+1}<y_n,\forall n\ge 1$.

Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

Cách 2: Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta có $y_n>0$ nên ta có thể xét tỷ số $\frac{y_{n+1}}{y_n}$.

Ta có $y_{n+1}=\frac{(n+1)+2}{5^{n+1}}=\frac{n+3}{5^{n+1}}$ nên $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{n+3}{5(n+2)}<1,\forall n\ge 1$ hay $y_{n+1}<y_n,\forall n\ge 1$.

Vậy (y_n) là một dãy số giảm.

c) Dãy số (z_n) với $z_n=(-1)^n$ không phải là một dãy số tăng cũng không phải là một dãy số giảm vì $z_{n+1}-z_n=(-1)^{n+1}-(-1)^n=-2.(-1)^n$ không xác định được dương hay âm. Đây là dãy số đan dấu.

STUDY TIP

Để chứng minh dãy số (u_n) là dãy số giảm hoặc dãy số tăng, chúng ta thường sử dụng một trong hai hướng sau đây:

(1): Lập hiệu $\Delta u_n=u_{n+1}-u_n$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $\Delta u_n>0$ (dãy số tăng) hoặc $\Delta u_n<0$ (dãy số giảm).

(2): Nếu $u_n>0,\forall n\ge 1$ thì ta có thể lập tỷ số $T_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Sử dụng các biến đổi đại số và các kết quả đã biết để chỉ ra $T_n>1$ (dãy số tăng) hoặc $T_n<1$ (dãy số giảm).

4. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn trên*** nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn dưới*** nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n\ge m,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Dãy số (u_n) được gọi là ***bị chặn*** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M,m sao cho $m\le u_n\le M,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

STUDY TIP

1) Nếu (u_n) là dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

2) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì bị chặn dưới bởi u_1.

Ví dụ 7: a) Dãy số (a_n) với $a_n=2017\sin\frac{(3n-1)\pi}{4}$ là một dãy số bị chặn vì

$$-2017\le a_n\le 2017,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

b) Dãy số (b_n) với $b_n=\frac{2n+3}{3n+2}$ là một dãy số bị chặn vì $\frac{2}{3}<b_n\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Dãy số (c_n), với $c_n=(3n-2).7^{n+1}$, bị chặn dưới vì $c_n\ge 49,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) Dãy số (d_n), với $d_n=\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}$ (có n dấu căn), bị chặn trên vì $d_n<3,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

B. Các bài toán điển hình

Ví dụ 1: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $a_{n+6} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $a_{n+9} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $a_{n+12} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $a_{n+15} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án C.

Lời giải

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ Ta có $a_{n+6} = 2017\sin\frac{(n+6)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+6)\pi}{3} = -2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

+ Ta có $a_{n+9} = 2017\sin\frac{(n+9)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+9)\pi}{3} = 2017\cos\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

+ Ta có $a_{n+12} = 2017\sin\frac{(n+12)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+12)\pi}{3} = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3} = a_n$.

+ Ta có $a_{n+15} = 2017\sin\frac{(n+15)\pi}{2} + 2018\cos\frac{(n+15)\pi}{3} = -2017\cos\frac{n\pi}{2} - 2018\cos\frac{n\pi}{3} \neq a_n$.

Vậy phương án đúng là **C.**

Nhận xét: *Từ kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời được các câu hỏi trắc nghiệm sau đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_n = 2017\sin\frac{n\pi}{2} + 2018\cos\frac{n\pi}{3}$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây:

Câu 1: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất để $a_{n+p} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $p = 6$. **B.** $p = 18$. **C.** $p = 12$. **D.** $p = 24$.

Câu 2: Số hạng thứ 2017 của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. 3026. **B.** $2017 + 1009\sqrt{3}$. **C.** $1009\sqrt{3} - 2017$. **D.** -3026.

Ví dụ 2: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng thứ 2018 của dãy số (a_n) có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $a_{2018} = 2$. **B.** $a_{2018} = 1$. **C.** $a_{2018} = 0$. **D.** $a_{2018} = 5$.

Đáp án A.

Lời giải

Nhận thấy, dãy số trên là dãy số cho bởi công thức truy hồi.

Ta có $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 0; a_4 = 1; a_5 = 2$ và $a_6 = 0$.

Từ đây chúng ta có dự đoán $a_{n+3} = a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta khẳng định dự đoán đó là đúng bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy:

Với $n = 1$ thì $a_1 = 1$ và $a_4 = 1$ nên $a_4 = a_{1+3} = a_1$. Vậy đẳng thức đúng với $n = 1$.

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là $a_{k+3} = a_k$.

Ta phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta phải chứng minh hệ thức $a_{k+4} = a_{k+1}$.

STUDY TIP

Để xác định được số hạng bất kỳ của dãy số cho bởi công thức truy hồi, ta cần phải xác định 1 trong 2 yếu tố sau:

- Tất cả các số hạng trước đó của dãy số (trong trường hợp này không khả thi)
- Công thức số hạng tổng quát của dãy số (chỉ ra công thức phụ thuộc vào n hoặc chỉ ra dãy số có tính chất đặc biệt nào đó).

Thật vậy, ta có $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_{k+3}^2 + \frac{5}{2}a_{k+3} + 1$ (theo hệ thức truy hồi).

Theo giả thiết quy nạp thì $a_{k+3} = a_k$ nên $a_{k+4} = -\frac{3}{2}a_k^2 + \frac{5}{2}a_k + 1 = a_{k+1}$.

Vậy đẳng thức đúng với $n = k+1$. Suy ra $a_{n+3} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ kết quả ở phần trên, ta có: nếu $m \equiv p(\bmod 3)$ thì $a_m = a_p$.

Ta có $2018 \equiv 2(\bmod 3)$ nên $a_{2018} = a_2 = 2$.

Vậy phương án đúng là **A.**

Nhận xét: *Việc chứng minh được hệ thức $a_{n+3} = a_n, \forall n \geq 1$ giúp chúng ta giải quyết được bài toán tính tổng hoặc xác định được số hạng tùy ý của dãy số. Vì vậy, việc phát hiện ra tính chất đặc biệt của một dãy số sẽ giúp chúng ta giải quyết các yêu cầu liên quan đến dãy số một cách thuận lợi và dễ dàng hơn. Chúng ta cùng kiểm nghiệm qua các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây nhé:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n^2 + \frac{5}{2}a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 1: Tính tổng S của 6 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n).

A. $S = 0$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 5$.

Câu 2: Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất sao cho $a_{n+p} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

A. $p = 9$. **B.** $p = 2$. **C.** $p = 6$. **D.** $p = 3$.

Câu 3: Tính tổng S của 2018 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n).

A. $S = 2016$. **B.** $S = 2019$. **C.** $S = 2017$. **D.** $S = 2018$.

Câu 4: Tính tổng bình phương của 2018 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n).

A. 3360. **B.** 3361. **C.** 3364. **D.** 3365.

Ví dụ 3: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = \sqrt{2}$. **B.** $a_n = \sqrt{2n-1}$. **C.** $a_n = \sqrt{3n-2}$. **D.** $a_n = \sqrt{n}$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $a_2 = \sqrt{1 + a_1^2} = \sqrt{2}; a_3 = \sqrt{1 + a_2^2} = \sqrt{3}; a_4 = \sqrt{1 + a_3^2} = \sqrt{4}; a_5 = \sqrt{1 + a_4^2} = \sqrt{5}$.

Từ 5 số hạng đầu của dãy số (a_n) ta dự đoán được $a_n = \sqrt{n}$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được $a_n = \sqrt{n}$.

Vậy phương án đúng là **D.**

Nhận xét: *Với kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi trắc nghiệm dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi dưới đây.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $S_n = \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + ... + \frac{1}{a_{n-1} + a_n}, n \geq 2$ ta được

A. $S_n = \sqrt{n} + 1$. **B.** $S_n = \sqrt{n} - 1$. **C.** $S_n = \frac{n}{1 + \sqrt{n}}$. **D.** $S_n = \frac{n}{\sqrt{n} - 1}$.

Câu 2: Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

STUDY TIP

Ngoài cách làm bên, ta có thể kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng thông qua việc xác định một vài số hạng đầu của dãy số.

+ Với $a_1 = 1$ thì loại ngay được phương án A.

+ Ta có $a_2 = \sqrt{2}$ thì loại ngay được các phương án B và C.

A. Dãy số (a_n) là dãy số giảm. B. Dãy số (a_n) không phải là dãy số giảm.

C. Dãy số (a_n) là dãy số tăng. D. Dãy số (a_n) không phải là dãy số tăng.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $S_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.

A. $S_n = n(n-1)$. **B.** $S_n = n(n+1)$. **C.** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. **D.** $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ví dụ 4: Cho dãy số (a_n) có tổng của n số hạng đầu tiên bằng $S_n = n^3$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

B. (a_n) là dãy số giảm và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

C. (a_n) là dãy số tăng và $a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

D. (a_n) là dãy số giảm và $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = S_n = n^3$ và $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = S_{n-1} = (n-1)^3$.

Suy ra $a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = 3n^2 - 3n + 1$.

Ta có $a_n = 3n^2 - 3n + 1$ và $a_{n-1} = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = 3n^2 - 9n + 7$.

Do đó $a_n - a_{n-1} = (3n^2 - 3n + 1) - (3n^2 - 9n + 7) = 6(n-1) \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $n - 1 = 0$ hay $n = 1$. Suy ra dãy số (a_n) là dãy số tăng.

Vậy phương án đúng là **A.**

Ví dụ 5: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng thứ 15 của dãy số (a_n).

A. $a_{15} = 28697809$. **B.** $a_{15} = 28697814$.

C. $a_{15} = 9565933$. **D.** $a_{15} = 86093437$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$ và $a_{n+1} = qa_n + d$, với mọi $n \geq 1$.

- Nếu $q \neq 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là

$$a_n = a.q^{n-1} + \frac{d(1-q^{n-1})}{1-q}.$$

- Nếu $q = 1$ thì số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là

$$a_n = a + (n-1)d.$$

Lời giải

Chúng ta đi tìm công thức xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

Đặt $b_n = a_n + 5$. Khi đó $b_{n+1} = a_{n+1} + 5$.

Từ hệ thức truy hồi $a_{n+1} = 3a_n + 10$ suy ra $b_{n+1} - 5 = 3(b_n - 5) + 10 \Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n$.

Như vậy, ta có $b_1 = a_1 + 5 = 6$ và $b_{n+1} = 3b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1; b_4 = 3b_3 = 3^3 b_1$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $b_n = 3^{n-1} b_1 = 2.3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_n = 2.3^n - 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $a_{15} = 28697809$.

Vậy phương án đúng là **A.**

Nhận xét: *Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 3a_n + 10, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 1: Số hạng thứ ba, thứ năm và thứ bảy của dãy số (a_n) lần lượt là

A. 13;49;157. **B.** 49;481;4369. **C.** 49;157;1453. **D.** 49;1453;4369.

Câu 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

A. $a_n = 2.3^n - 5$. **B.** $a_n = 2.3^{n+1} - 5$. **C.** $a_n = 2.3^{n-1} - 5$. **D.** $a_n = 2.3^n + 5$.

Câu 3: Số 2324522929 có là số hạng của dãy số (a_n) không, nếu có thì nó là số hạng thứ bao nhiêu?

A. Không. **B.** Có, 18. **C.** Có, 19. **D.** Có, 20.

Câu 4: (a_n) là một dãy số

A. giảm và bị chặn trên. **B.** tăng và bị chặn trên.
C. tăng và bị chặn dưới. **D.** giảm và bị chặn dưới.

Ví dụ 6: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5$, $a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Số hạng thứ 14 của dãy số là số hạng nào?

A. 3164070. **B.** 9516786. **C.** 1050594. **D.** 9615090.

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$, $a_2 = b$ và $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$, với mọi $n \geq 1$, trong đó phương trình $t^2 - \alpha t - \beta = 0$ có hai nghiệm phân biệt là t_1 và t_2. Khi đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = m_1.t_1^{n-1} + m_2.t_2^{n-1}$, trong đó m_1, m_2 thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = a \\ m_1 t_1 + m_2 t_2 = b \end{cases}.$$

Đáp án A.

Lời giải

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có $b_1 = a_2 + 2a_1 = 10$ và $b_{n+1} = 3b_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (b_n), ta có $b_2 = 3b_1; b_3 = 3b_2 = 3^2 b_1; b_4 = 3b_3 = 3^3 b_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng

$$b_n = 3^{n-1} b_1 = 10.3^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

+ Ta có $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n), \forall n \geq 1$.

Do đó ta có $c_1 = a_2 - 3a_1 = -15$ và $c_{n+1} = -2c_n, \forall n \geq 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (c_n), ta có $c_2 = -2c_1; c_3 = (-2)^2 c_1; c_4 = (-2)^3 c_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng:

$$c_n = (-2)^{n-1} c_1 = -15.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

+ Từ các kết quả trên, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{n+1} + 2a_n = 10.3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = -15.(-2)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}.$$

Do đó số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Suy ra $a_{14} = 3164070$. Vậy phương án đúng là **A.**

Nhận xét: *Với kết quả trong ví dụ này, chúng ta có thể trả lời các câu hỏi trắc nghiệm khách quan dưới đây:*

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 0$ và $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n, \forall n \geq 1$. Hãy chọn phương án trả lời đúng trong mỗi câu hỏi sau đây.

Câu 1: Tính số hạng thứ năm của dãy số (a_n).

A. $a_5 = 210$. **B.** $a_5 = 66$. **C.** $a_5 = 36$. **D.** $a_5 = 360$.

Câu 2: Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là

A. $a_n = 2.3^{n-1} + 3.(-2)^{n-1}$.

B. $a_n = 2.3^n + 3.(-2)^n$.

C. $a_n = 2.3^{n-1} - 3.2^{n-1}$.

D. $a_n = 2.3^n - 3.2^n$.

Ví dụ 7: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = -3$ và $a_{n+1} = a_n + n^2 - 3n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số 1391 là số hạng thứ mấy của dãy số đã cho?

A. 18. B. 17. C. 20. D. 19.

Đáp án A.

Lời giải

Từ hệ thức truy hồi của dãy số (a_n) ta có

$$a_n = a_1 + \left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] - 3\left[1 + 2 + ... + (n-1)\right] + 4(n-1) \Leftrightarrow a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}.$$

Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (a_n) là $a_n = \frac{n^3 - 6n^2 + 17n - 21}{3}$.

Giải phương trình $a_n = 1391$ ta được $n = 18$.

Vậy phương án đúng là **A.**

STUDY TIP

Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = a$ và $a_{n+1} = a_n + f(n), \forall n \geq 1$. Số hạng tổng quát của dãy số (a_n) được tính theo công thức:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Ví dụ 8: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1), \forall n \geq 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (a_n) là một dãy số giảm và bị chặn.

B. (a_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

C. (a_n) là một dãy số giảm và không bị chặn dưới.

D. (a_n) là một dãy số tăng và không bị chặn trên.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $a_1 = 2 > a_2 = \frac{3}{2} > a_3 = \frac{5}{4}$. Do đó ta loại được các phương án B và D.

+ Ta có $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + 1)$ nên $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = ... = \frac{1}{2^{n-1}}(a_2 - a_1) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 1$ nên (a_n) là dãy số giảm.

+ Vì (a_n) là một dãy số giảm nên dãy số này bị chặn trên bởi $a_1 = 2$.

Ta có $\frac{1}{2}(1 - a_n) = a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n > 1, \forall n \geq 1$.

Vậy phương án đúng là **A.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1: Cho dãy số (x_n) có $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+5}$. B. $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

C. $x_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$. D. $x_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+1}$.

Câu 2: Cho dãy số (y_n) xác định bởi

$$y_n = \sin^2\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{2n\pi}{3}.$$

Bốn số hạng đầu của dãy số đó là

A. $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. B. $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$.

C. $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$. D. $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = y_2 = 1$ và $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho là

A. 1,1,2,4,7. B. 2,3,5,8,11.

C. 1,2,3,5,8. D. 1,1,2,3,5.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = -1$ và $u_n = 2n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $u_{11} = 2^{10}.11!$. B. $u_{11} = -2^{10}.11!$.

C. $u_{11} = 2^{10}.11^{10}$. D. $u_{11} = -2^{10}.11^{10}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

A. 1274,5. B. 2548,5. C. 5096,5. D. 2550,5.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n)?

A. 8. B. 6. C. 5. D. 7.

Câu 7: Cho dãy số (a_n) có $a_n = -n^2 + 4n + 11, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. 14. B. 15. C. 13. D. 12.

Câu 8: Cho dãy số (a_n) có $a_n = \frac{n}{n^2+100}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hạng lớn nhất của dãy số (a_n).

A. $\frac{1}{20}$. B. $\frac{1}{30}$. C. $\frac{1}{25}$. D. $\frac{1}{21}$.

Câu 9: Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_1 = 2$ và $y_{n+1} = 2y_n + n^2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tổng S_4 của 4 số hạng đầu tiên của dãy số là

A. $S_4 = 20$. B. $S_4 = 10$. C. $S_4 = 30$. D. $S_4 = 14$.

Câu 10: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 5$ và $x_{n+1} = x_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Số hạng tổng quát của dãy số (x_n) là

A. $x_n = \frac{n^2 - n + 10}{2}$. B. $x_n = \frac{5n^2 - 5n}{2}$.

C. $x_n = \frac{n^2 + n + 10}{2}$. D. $x_n = \frac{n^2 + 3n + 12}{2}$.

Câu 11: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{2}{3}$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x_{100} = \frac{2}{39999}$. B. $x_{100} = \frac{39999}{2}$.

C. $x_{100} = \frac{2}{40001}$. D. $x_{100} = \frac{2}{40803}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số

Câu 12: Trong các dãy số dưới đây dãy số nào là dãy số tăng?

A. Dãy (a_n), với $a_n = (-1)^{n+1}.\sin\frac{\pi}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = (-1)^{2n}.(5^n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \frac{1}{n + \sqrt{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = \frac{n}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 13: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

A. Dãy (a_n), với $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

B. Dãy (b_n), với $b_n = \frac{n^2+1}{n}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n = \frac{1}{n^3+1}$.

D. Dãy (d_n), với $d_n = 3.2^n$.

Câu 14: Cho dãy số (x_n) với $x_n = \frac{an+4}{n+2}$. Dãy số (x_n) là dãy số tăng khi

A. $a=2$. B. $a>2$. C. $a<2$. D. $a>1$.

Câu 15: Cho hai dãy số (x_n) với $x_n=\frac{(n+1)!}{2^n}$ và (y_n) với $y_n=n+\sin^2(n+1)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số giảm.

B. (x_n) là dãy số giảm, (y_n) là dãy số tăng.

C. (x_n) là dãy số tăng, (y_n) là dãy số giảm.

D. (x_n) là dãy số tăng, (y_n) là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số

Câu 16: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\frac{3n-1}{3n+7}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Dãy (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy (u_n) bị chặn trên và bị chặn dưới.

D. Dãy (u_n) không bị chặn.

Câu 17: Trong các dãy số sau dãy số nào là dãy bị chặn?

A. Dãy (a_n), với $a_n=\sqrt{n^2+16},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

B. Dãy (b_n), với $b_n=n+\frac{1}{2n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

C. Dãy (c_n), với $c_n=2^n+3,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

D. Dãy (d_n), với $d_n=\frac{n}{n^2+4},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 18: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn trên?

A. Dãy (a_n), với $a_n=3n+1$.

B. Dãy (b_n), với $b_n=\frac{1}{n(2n+1)}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n=3.2^{n+1}$.

D. Dãy (d_n), với $d_n=(-2)^n$.

Câu 19: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới?

A. Dãy (x_n), với $x_n=(-1)^n.(n^2+2n+3)$.

B. Dãy (y_n), với $y_n=-(n^2+6n)$.

C. Dãy (z_n), với $z_n=\frac{2018^n}{2017^{n+1}}$.

D. Dãy (w_n), với $w_n=(-2017)^n$.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số

Câu 20: Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_n=2.3^n-5.2^n,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $x_{n+2}=5x_{n+1}-6x_n$. B. $x_{n+2}=6x_{n+1}-5x_n$.

C. $x_{n+2}+5x_{n+1}-6x_n=0$. D. $x_{n+2}+6x_{n+1}-5x_n=0$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) với $u_n=3^n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{u_1+u_9}{2}=u_5$.

B. $\frac{u_2.u_4}{2}=u_3$.

C. $1+u_1+u_2+...+u_{100}=\frac{u_{100}-1}{2}$.

D. $u_1u_2...u_{100}=u_{5050}$.

Câu 22: Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_n=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}.$$

Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $a_{n+12}=a_n,\forall n\geq 1$. B. $a_{n+8}=a_n,\forall n\geq 1$.

C. $a_{n+9}=a_n,\forall n\geq 1$. D. $a_{n+4}=a_n,\forall n\geq 1$.

Câu 23: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=1$ và

$$a_{n+1}=-\frac{3}{2}a_n^2+\frac{5}{2}a_n+1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $a_{2018}=a_2$. B. $a_{2018}=a_1$.

C. $a_{2018}=a_3$. D. $a_{2018}=a_4$.

Câu 24: Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=1,a_2=2$ và $a_{n+2}=\sqrt{3}a_{n+1}-a_n,\forall n\geq 1$. Tìm số nguyên dương p nhỏ nhất sao cho $a_{n+p}=a_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

A. $p=9$. B. $p=12$. C. $p=24$. D. $p=18$.

Câu 25: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. Dãy số (a_n) xác định bởi $a_1=1$ và $a_{n+1}=\frac{2018}{a_n+2017},\forall n\in\mathbb{N}^*$ là một dãy số không đổi.

B. Dãy số (b_n), với $b_n=\tan(2n+1)\frac{\pi}{4}$, có tính chất $b_{n+2}=b_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n=\tan(n\pi)+1$, là một dãy số bị chặn.

D. Dãy số (d_n), với $d_n=\cos(n\pi)$, là một dãy số giảm.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_n = 2u_{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, có tính chất

A. là dãy số tăng và bị chặn dưới.

B. là dãy số giảm và bị chặn trên.

C. là dãy số giảm và bị chặn dưới.

D. là dãy số tăng và bị chặn trên.

Câu 27: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}, \forall n \geq 1.$$

Tổng $S_{2018} = u_1^2 + u_2^2 + ... + u_{2018}^2$ là

A. $S_{2018} = 2015^2$. **B.** $S_{2018} = 2018^2$.

C. $S_{2018} = 2017^2$. **D.** $S_{2018} = 2016^2$.

Câu 28: Cho dãy số (z_n) xác định bởi

$$z_n = \sin\frac{n\pi}{2} + 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong các số hạng của dãy số (z_n). Tính giá trị của biểu thức $T = M^2 + m^2$.

A. $T = 13$. **B.** $T = 5$. **C.** $T = 18$. **D.** $T = 7$.

Câu 29: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}, n \geq 1.$$

$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n < \frac{2017}{2018}$ khi n có giá trị nguyên dương lớn nhất là

A. 2017. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2014.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập về xác định số hạng của dãy số

Câu 1: Đáp án C.

Ta có $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$ nên

$$x_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

Câu 2: Đáp án A.

Ta có $y_1 = \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{3} = 0; y_2 = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (loại phương án B và D) và $y_3 = \sin^2\frac{3\pi}{4} + \cos 2\pi = \frac{3}{2}$ (loại phương án D).

Câu 3: Đáp án D.

Ta có $y_3 = 2; y_4 = 3$ (nên loại các phương án còn lại).

Câu 4: Đáp án B.

Ta có $u_2 = 2^2.u_1; u_3 = 6u_2 = 2^2.2.3u_1; u_4 = 8u_3 = 2^3.2.3.4u_1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $u_n = 2^{n-1}.n!.u_1 = -2^{n-1}.n!$.

Do đó $u_{11} = -2^{10}.11!$.

Câu 5: Đáp án D.

Ta có $u_n = \frac{1}{2} + 2(1+2+...+n) = \frac{1}{2} + n(n+1)$.

Suy ra $u_{50} = \frac{1}{2} + 50.51 = 2550,5$.

Câu 6: Đáp án D.

Giải phương trình $\frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15}$ ta được $n = 7$.

Câu 7: Đáp án B.

Ta có $a_n = -(n-2)^2 + 15 \le 15, \forall n \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng 15.

Câu 8: Đáp án A.

Ta có $a_n = \frac{n}{n^2+100} \le \frac{n}{2\sqrt{n^2.100}} = \frac{1}{20}$.

Dấu bằng xảy ra khi $n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10$.

Vậy số hạng lớn nhất của dãy số là số hạng bằng $\frac{1}{20}$.

Câu 9: Đáp án A.

Ta tính được $y_2 = 2; y_3 = 4; y_4 = 12$ nên $S_4 = 20$.

Câu 10: Đáp án A.

Cách 1: Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Ta có $x_n = x_1 + (1+2+..+n-1)$

$\Leftrightarrow x_n = 5 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n+10}{2}$.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

- Phương án A: $x_{n+1} = \frac{(n+1)^2 - (n+1) + 10}{2}$

$= \frac{n^2+n+10}{2} = \frac{n^2-n+10}{2} + n = x_n + n.$

Cách 3: Với $n = 1$ thì $x_1 = 5$ (loại được các phương án B, C, D).

Câu 11: Đáp án A.

Ta có $x_n > 0, \forall n \ge 1$ và $\frac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{x_n}, \forall n \ge 1$.

Suy ra $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_1} + 4(1+2+..+n-1) + 2(n-1)$

$= \frac{3}{2} + 2n(n-1) + 2(n-1) = \frac{4n^2-1}{2}$.

Suy ra $x_n = \frac{2}{4n^2-1}$. Do đó $x_{100} = \frac{2}{39999}$.

Dạng 2: Bài tập về xét tính tăng, giảm của dãy số

Câu 12: Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là dãy đan dấu nên không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Với dãy (b_n), ta có $b_n = 5^n + 1$ (do $(-1)^{2n} = 1$).

Vì $b_{n+1} = 5^{n+1} + 1 = 5.5^n + 1 > b_n, \forall n \ge 1$ nên (b_n) là một dãy số tăng.

- Dãy số (c_n) là một dãy số giảm vì

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1+\sqrt{n+2}} < \frac{1}{n+\sqrt{n+1}} = c_n, \forall n \ge 1.$$

- Dãy số (d_n) là dãy số giảm vì

$$d_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2} < \frac{n}{n^2+1} = d_n, \forall n \ge 1.$$

Câu 13: Đáp án C.

- Dãy số (a_n) là dãy số đan dấu nên nó không phải là dãy số tăng cũng không phải là dãy số giảm.
- Dãy số (b_n) là một dãy số tăng vì

$$b_n = n + \frac{1}{n} < n + 1 + \frac{1}{n+1} = b_{n+1}, \forall n \ge 1.$$

- Dãy số (c_n) là dãy số giảm vì

$$c_n = \frac{1}{n^3+1} > \frac{1}{(n+1)^3+1} = c_{n+1}, \forall n \ge 1.$$

- Dãy số (d_n) là một dãy số tăng vì

$$d_n = 3.2^n < 3.2^{n+1} = d_{n+1}, \forall n \ge 1.$$

Câu 14: Đáp án B.

Ta có $x_{n+1}=\frac{a(n+1)+4}{n+3}$. Xét hiệu

$x_{n+1}-x_n=\frac{a(n+1)+4}{n+3}-\frac{an+4}{n+2}=\frac{2a-4}{(n+2)(n+3)}$.

(x_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi $x_{n+1}-x_n>0,\forall n\ge 1$

$\Leftrightarrow 2a-4>0\Leftrightarrow a>2$.

Câu 15: Đáp án D.

Ta có $x_n>0,\forall n\ge 1$ và $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+2}{2}>1,\forall n\ge 1$ nên (x_n) là dãy số tăng.

Ta có $y_{n+1}-y_n=\sin^2(n+1)+1-\sin^2 n>0,\forall n\ge 1$ nên (y_n) cũng là dãy số tăng.

Dạng 3: Bài tập về xét tính bị chặn của dãy số

Câu 16: Đáp án C.

Ta có $u_n=1-\frac{8}{3n+7}<1-\frac{8}{3n+10}=u_{n+1},\forall n\ge 1$ nên (u_n) là một dãy số tăng. Suy ra nó bị chặn dưới bởi $u_1=\frac{1}{5}$. Lại do $u_n=1-\frac{8}{3n+7}<1,\forall n\ge 1$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 17: Đáp án D.

- Dãy số (a_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì

$$a_n=\sqrt{n^2+16}\ge\sqrt{17},\forall n\ge 1.$$

- Dãy số (b_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì

$$b_n=n+\frac{1}{2n}>2\sqrt{n.\frac{1}{2n}}=\sqrt{2},\forall n\ge 1.$$

- Dãy số (c_n) là dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới vì

$$c_n=2^n+3\ge 5,\forall n\ge 1.$$

- Dãy số (d_n) là dãy bị chặn vì $0<d_n\le\frac{1}{4},\forall n\ge 1$.

(do $0<\frac{n}{n^2+4}\le\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$).

Câu 18: Đáp án B.

- Dãy số (a_n) là một dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi $u_1=4$.
- Dãy số (b_n) có $0<b_n<1,\forall n\ge 1$ nên dãy số (b_n) là dãy số bị chặn.
- Dãy số (c_n) là một dãy số tăng và chỉ bị chặn dưới bởi $c_1=12$.
- Dãy số (d_n) là dãy số đan dấu và $d_{2n}=(-2)^{2n}=4^n$ lớn tùy ý khi n đủ lớn, còn $d_{2n+1}=(-2)^{2n+1}=-2.4^n$ nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Câu 19: Đáp án C.

- Dãy số (x_n) là dãy đan dấu và x_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, x_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.
- Dãy số (y_n) là dãy số giảm và y_n nhỏ tùy ý khi n lớn tùy ý.
- Dãy số (z_n) là một dãy số tăng nên nó bị chặn dưới bởi $z_1=\frac{2018}{2017^2}$.
- Dãy số (w_n) là dãy đan dấu và w_{2n} lớn tùy ý khi n đủ lớn, w_{2n+1} nhỏ tùy ý khi n đủ lớn.

Dạng 4: Bài tập về tính chất của dãy số

Câu 20: Đáp án A.

Ta có $x_{n+2}=2.3^{n+2}-5.2^{n+2}=18.3^n-20.2^n$;

$x_{n+1}=2.3^{n+1}-5.2^{n+1}=6.3^n-10.2^n$.

- *Phương án A*: $x_{n+2}-5x_{n+1}+6x_n=0$.
- *Phương án B*: $x_{n+2}-6x_{n+1}+5x_n=-8.3^n+15.2^n\ne 0$.
- *Phương án C*: $x_{n+2}+5x_{n+1}-6x_n=36.3^n-40.2^n\ne 0$.
- *Phương án D*: $x_{n+2}+6x_{n+1}-5x_n=44.3^n-55.2^n\ne 0$.

Câu 21: Đáp án D.

- *Phương án A*: $\frac{u_1+u_9}{2}=\frac{3+3^9}{2}\ne 3^5=u_5$.
- *Phương án B*: $\frac{u_2.u_4}{2}=\frac{3^6}{2}\ne 3^3=u_3$.
- *Phương án C*: $1+u_1+u_2+...+u_{100}>u_{100}>\frac{u_{100}-1}{2}$.
- *Phương án D*: $u_1u_2...u_{100}=3^{1+2+...+100}=3^{5050}=u_{5050}$.

Câu 22: Đáp án C.

- *Phương án A*: $a_{n+12}=2017\cos\frac{[3(n+12)+1]\pi}{6}$

$=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+6\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n,\forall n\ge 1.$

- *Phương án B*: $a_{n+8}=2017\cos\frac{[3(n+8)+1]\pi}{6}$

$=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+4\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n,\forall n\ge 1.$

- *Phương án C*: $a_{n+9}=2017\cos\frac{[3(n+9)+1]\pi}{6}$

$=2017\cos\left(\frac{(3n+4)\pi}{6}+4\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+4)\pi}{6}\ne a_n.$

- *Phương án D*: $a_{n+4}=2017\cos\frac{[3(n+4)+1]\pi}{6}$

$=2017\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{6}+2\pi\right)=2017\cos\frac{(3n+1)\pi}{6}=a_n,\forall n\ge 1.$

Lưu ý: *Quan sát vào các chỉ số dưới của số hạng tổng quát, ta thấy ở phương án C có sự khác biệt so với ba phương án còn lại nên ta có thể kiểm tra ngay phương án C trước.*

Câu 23: Đáp án A.

Sáu số hạng đầu tiên của dãy số là $1;2;0;1;2;0$.

Từ đây ta dự đoán $a_{n+3}=a_n,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được rằng $a_{n+3}=a_n,\forall n\ge 1$.

Mặt khác $2018=3.672+2$ nên $a_{2018}=a_2$.

Câu 24: Đáp án B.

Trước hết ta kiểm tra phương án với p nhỏ nhất.

Viết 10 số hạng đầu tiên của dãy số (a_n):

$a_1=1;a_2=2;a_3=2\sqrt{3}-1;a_4=4-\sqrt{3};a_5=2\sqrt{3}-2;$

$a_6=2-\sqrt{3};a_7=-1;a_8=-2;a_9=1-2\sqrt{3};a_{10}=\sqrt{3}-4.$

Dễ dàng thấy $a_{10}=\sqrt{3}-4\ne 1=a_1$ nên phương án A là sai.

Cách 1: Ta viết thêm 4 số hạng nữa của dãy số (a_n) ta được:

$a_1=1;a_2=2;a_3=2\sqrt{3}-1;a_4=4-\sqrt{3};a_5=2\sqrt{3}-2;$

$a_6=2-\sqrt{3};a_7=-1;a_8=-2;a_9=1-2\sqrt{3};a_{10}=\sqrt{3}-4;$

$a_{11}=2-2\sqrt{3};a_{12}=\sqrt{3}-2;a_{13}=1;a_{14}=2.$

Từ đây ra dự đoán được $a_{n+12}=a_n,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được $a_{n+12}=a_n,\forall n\ge 1$. Vậy số nguyên dương cần tìm là $p=12$.

Cách 2: Sau khi viết được 10 số hạng đầu tiên của dãy số, chúng ta có thể dự đoán được $a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1$.

Như vậy, 6 là số nguyên dương nhỏ nhất để

$$a_{n+6}=-a_n,\forall n\ge 1.$$

Do đó $a_{n+12}=a_{(n+6)+6}=-a_{n+6}=a_n,\forall n\ge 1$.

Suy ra số cần tìm là $p=12$.

Câu 25: Đáp án D.

- *Phương án A*: Ta có $a_1=1,a_2=\dfrac{2018}{1+2017}=1,a_3=1$. Từ đây ta dự đoán $a_n=1,\forall n\ge 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, chúng ta chứng minh được rằng $a_n=1,\forall n\ge 1$. Suy ra (a_n) là dãy số không đổi. Do đó phương án A là đúng.

- *Phương án B*: Ta có $b_{n+2}=\tan\left[2(n+2)+1\right]\dfrac{\pi}{4}$

$=\tan\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{4}+\pi\right]=\tan(2n+1)\dfrac{\pi}{4}=a_n,\forall n\ge 1.$

Vậy $b_{n+2}=b_n,\forall n\ge 1$. Do đó phương án B là đúng.

- *Phương án C*: Ta có $c_n=1,\forall n\ge 1$ nên dãy số (c_n) là dãy số không đổi.

Suy ra (c_n) là dãy số bị chặn. Do đó phương án C là đúng.

- *Phương án D*: Ta có

$$d_{2n}=\cos(2n\pi)=1=\cos(4n\pi)=d_{4n}.$$

Suy ra khẳng định (d_n) là một dãy số giảm là khẳng định sai.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2}(u_n-u_{n-1})=...=\dfrac{1}{2^{n-1}}(u_2-u_1)$.

Từ đó, tính được $u_n=1+\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Do $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{2^{n-1}}=-\dfrac{1}{2^n}<0,\forall n\ge 1$ nên (u_n) là dãy số giảm.

Ta có $1<u_n=1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\le 2,\forall n\ge 1$ nên dãy số (u_n) là dãy bị chặn. Suy ra phương án đúng là C.

Câu 27: Đáp án B.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có

$$u_{n+1}^2=u_n^2+2,\forall n\ge 1.$$

Suy ra $u_n^2=u_1^2+2(n-1)=2n-1$.

Do đó $S_n=u_1^2+u_2^2+...+u_n^2=2(1+2+...+n)-n$

$=n(n+1)-n=n^2$. Vậy $S_{2018}=2018^2$.

Câu 28: Đáp án A.

Dựa vào chu kỳ của hàm số $y=\sin x;y=\cos x$, ta có

$$z_{n+12}=z_n,\forall n\ge 1.$$

Do đó tập hợp các phần tử của dãy số là

$$S=\{z_1;z_2;...;z_{12}\}=\{-3;-2;-1;0;2\}.$$

Suy ra $M=2;m=-3$. Do đó $T=13$.

Câu 29: Đáp án C.

Dễ chỉ ra được $u_n>0,\forall n\ge 1$.

Từ hệ thức truy hồi của dãy số, ta có

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+2n+2,\forall n\ge 1.$$

Suy ra $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{u_1}+2(1+2+...+n-1)+2(n-1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{u_n}=2+n(n-1)+2(n-1)=n^2+n\Rightarrow u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Do đó $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1},\forall n\ge 1$.

Vậy, $S_n=u_1+u_2+...+u_n=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

Vì $S_n<\dfrac{2017}{2018}$ nên $\dfrac{n}{n+1}<\dfrac{2017}{2018}\Rightarrow n<2017$.

Suy ra số nguyên dương lớn nhất để $S_n<\dfrac{2017}{2018}$ là $n=2016$. Vì vậy, phương án đúng là C.

Cấp số cộng

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số không đổi d được gọi là ***công sai*** của cấp số cộng.

*Đặc biệt, khi $d=0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

STUDY TIP

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chứng minh $u_{n+1}-u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n.

Nhận xét: *Từ định nghĩa, ta có:*

1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d, ta có công thức truy hồi

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+d, n\in\mathbb{N}^*.}\ (1)$$

2) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số tăng khi và chỉ khi công sai $d>0$.

3) Cấp số cộng (u_n) là một dãy số giảm khi và chỉ khi công sai $d<0$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số cộng:

$$-2,1,4,7,10,13,16,19.$$

Lời giải:

Vì $1=-2+3$; $4=1+3$; $7=4+3$; $10=7+3$;

$13=10+3$; $16=13+3$; $19=16+3$

nên theo định nghĩa cấp số cộng, dãy số $-2,1,4,7,10,13,16,19$ là một cấp số cộng với công sai $d=3$.

Ví dụ 2: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

a) Dãy số (a_n), với $a_n=4n-3$;

b) Dãy số (b_n), với $b_n=\dfrac{2-3n}{4}$;

c) Dãy số (c_n), với $c_n=2018^n$;

d) Dãy số (d_n), với $d_n=n^2$.

Lời giải:

a) Ta có $a_{n+1}=4(n+1)-3=4n+1$ nên $a_{n+1}-a_n=(4n+1)-(4n-3)=4, \forall n\ge 1$.

Do đó (a_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $a_1=4.1-3=1$ và công sai $d=4$.

b) Ta có $b_{n+1}=\dfrac{2-3(n+1)}{4}=\dfrac{-1-3n}{4}$ nên $b_{n+1}-b_n=\dfrac{-1-3n}{4}-\dfrac{2-3n}{4}=-\dfrac{3}{4}, \forall n\ge 1$.

Suy ra (b_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $b_1=\dfrac{2-3.1}{4}=-\dfrac{1}{4}$ và công sai $d=-\dfrac{3}{4}$.

c) Ta có $c_{n+1}=2018^{n+1}$ nên $c_{n+1}=c_n=2018^{n+1}-2018^n=2017.2018^n$ (phụ thuộc vào giá trị của n). Suy ra (c_n) không phải là một cấp số cộng.

d) Ta có $d_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$ nên $d_{n+1}-d_n=2n+1$ (phụ thuộc vào giá trị của n). Do đó (d_n) không phải là một cấp số cộng.

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có 7 số hạng với số hạng đầu $u_1 = \frac{2}{3}$ và công sai $d = -\frac{4}{3}$. Viết dạng khai triển của cấp số cộng đó.

Lời giải:

Ta có $u_2 = u_1 + d = -\frac{2}{3}$; $u_3 = u_2 + d = -2$; $u_4 = u_3 + d = -\frac{10}{3}$;

$u_5 = u_4 + d = -\frac{14}{3}$; $u_6 = u_5 + d = -6$; $u_7 = u_6 + d = -\frac{22}{3}$.

Vậy dạng khai triển của cấp số cộng (u_n) là: $\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -2; -\frac{10}{3}; -\frac{14}{3}; -6; -\frac{22}{3}$.

2. Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Định lý 1

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2.} \quad (2)$$

STUDY TIP

Từ kết quả của định lý 1, ta rút ra nhận xét sau:

Cho cấp số cộng (u_n), biết hai số hạng u_p và u_q thì số hạng đầu và công sai được tính theo công thức sau:

(1): $d = \frac{u_p - u_q}{p - q}$;

(2): $u_1 = u_p - (p-1)d$.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 2$ và $d = -5$.

a) Tìm u_{20}.

b) Số -2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

Lời giải:

a) Ta có $u_{20} = u_1 + (20-1)d = 2 + 19.(-5) = -93$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n = u_1 + (n-1)d = 7 - 5n$.

Vì $u_n = -2018$ nên $7 - 5n = -2018 \Leftrightarrow n = 405$.

Do $n = 405$ là số nguyên dương nên số -2018 là số hạng thứ 405 của cấp số cộng đã cho.

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Định lý 2

Trong một cấp số cộng (u_n), mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

STUDY TIP

Một cách tổng quát, ta có: nếu (u_n) là một cấp số cộng thì $u_p = \frac{u_{p-k} + u_{p+k}}{2}, 1 \leq k < p$.

Ví dụ 5:

a) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{99} = 101$ và $u_{101} = 99$. Tính u_{100}.

b) Cho cấp số cộng $-2, x, 6, y$. Tính giá trị của biểu thức $P = x^2 + y^2$.

Lời giải:

a) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $u_{100} = \frac{u_{99} + u_{101}}{2}$ nên $u_{100} = 100$.

b) Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x = \frac{(-2)+6}{2} = 2$ và $6 = \frac{x+y}{2}$.

Vì $x = 2$ nên $y = 10$. Vậy, $P = x^2 + y^2 = 2^2 + 10^2 = 104$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Định lý 3

Cho cấp số cộng (u_n). Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó:

$$S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2} \ (4) \text{ hoặc } S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d. \ (5)$$

STUDY TIP

1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu và số hạng thứ n của cấp số cộng.

2) Để tính được S_n, thì công thức (5) được sử trong mọi trường hợp. Cụ thể là, chúng ta cần tìm được số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

3) Các bài toán về cấp số cộng thường đề cập đến 5 đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n. Chúng ta cần biết 3 đại lượng trong 5 đại lượng là có thể tìm được 2 đại lượng còn lại. Tuy nhiên, theo các công tính u_n, S_n thì các bài toán về cấp số cộng sẽ quy về việc tính 3 đại lượng u_1, d, n.

Ví dụ 6: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và $d = 3$.

a) Tính tổng của 25 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

b) Biết $S_n = 6095374$, tìm n.

Lời giải:

Ta có $S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -2n + \frac{3(n^2-n)}{2} = \frac{n(3n-7)}{2}$.

a) Ta có $S_{25} = \frac{25(3.25-7)}{2} = 850$.

b) Vì $S_n = 6095374$ nên $\frac{n(3n-7)}{2} = 6095374 \Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 12190748 = 0$

Giải phương trình bậc hai trên với n nguyên dương, ta tìm được $n = 2017$.

B. Các dạng toán về cấp số cộng

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. Dãy số (a_n), với $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$ và $b_{n+1} = 2b_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = (2n-3)^2 - 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = 1$ và $d_{n+1} = \frac{2018}{d_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án C.

STUDY TIP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chứng minh $u_{n+1} - u_n$ là một hằng số với mọi số nguyên dương n.

2) Để chỉ ra dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng, chúng ta cần phải chỉ ra ba số hạng liên tiếp u_k, u_{k+1}, u_{k+2} của dãy số không lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $2, 4, 8$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $4 - 2 = 2 \neq 4 = 8 - 4$.

- *Phương án B*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $1, 3, 7$.

Ba số này không lập thành cấp số cộng vì $3 - 1 \neq 7 - 3$.

- *Phương án C*: Ta có $c_n = 9 - 12n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $c_{n+1} - c_n = -12, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (c_n) là một cấp số cộng.

- *Phương án D*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số là $1, 1009, \frac{1009}{505}$. Ba số này không lập thành cấp số cộng.

Vậy phương án đúng là C.

Ví dụ 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tính số hạng u_{17}.

A. $u_{17} = 242$. B. $u_{17} = 235$. C. $u_{17} = 11$. D. $u_{17} = 4$.

Đáp án C.

Lời giải:

Ta có công sai của cấp số cộng là $d=\frac{u_3-u_{15}}{3-15}=\frac{84}{-12}=-7$.

Suy ra $u_{17}=u_1+(17-1)d=11$. Vậy phương án đúng là C.

STUDY TIP
Với việc biết được số hạng đầu và công sai của một cấp số cộng, chúng ta hoàn toàn xác định được các yếu tố còn lại của một cấp số cộng như số hạng tổng quát, thứ tự của số hạng và tổng của n số hạng đầu tiên. Tham khảo các bài tập bên.

Nhận xét: Cụ thể, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Số 11 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đã cho?

A. 17. B. 16. C. 18. D. 19.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n).

A. $u_n=130-7n$. B. $u_n=116+7n$. C. $u_n=123-7n$. D. $u_n=123+7n$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{2017}=14487102,5$. B. $S_{2017}=-13983861$.

C. $S_{2017}=-13990920,5$. D. $S_{2017}=14480043$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Biết rằng tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng 18, tìm n.

A. $n=34$. B. $n=35$. C. $n=36$. D. $n=37$.

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1+2u_5=0$ và $S_4=14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1=8,d=3$. B. $u_1=-8,d=3$. C. $u_1=-8,d=-3$. D. $u_1=8,d=-3$.

Đáp án D.

Lời giải:

Ta có $u_1+2u_5=0\Leftrightarrow u_1+2(u_1+4d)=0\Leftrightarrow 3u_1+8d=0$.

$$S_4=14\Leftrightarrow\frac{4(2u_1+3d)}{2}=14\Leftrightarrow 2u_1+3d=7.$$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}3u_1+8d=0\\2u_1+3d=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=8\\d=-3\end{cases}$.

Vậy phương án đúng là D.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $u_{m+k}+u_{n-k}=u_m+u_n$, với $k<m,k<n$.

B. $u_{m-k}+u_{m+k}=2u_m$, với $k<m$.

C. $u_m=u_k+(m-k)d$, với $k<m$.

D. $u_{3n}=u_{2n}+u_{n+1}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*: Ta có $u_{m+k}+u_{n-k}=u_1+(m+k-1)d+u_1+(n-k-1)d$

$=u_1+(m-1)d+u_1+(n-1)d=u_m+u_n$. Do đó A là phương án đúng.

+ *Phương án B*: Ta có $u_{m+k}+u_{m-k}=u_1+(m+k-1)d+u_1+(m-k-1)d$

$=2[u_1+(m-1)d]=2u_m$. Do đó B là phương án đúng.

+ *Phương án C*: Ta có $u_m=u_1+(m-1)d=u_1+(k-1)d+(m-k)d=u_k+(m-k)d$.

STUDY TIP
Qua ví dụ này, chúng ta lưu ý một số tính chất của cấp số cộng như:
1) $u_{m+k}+u_{n-k}=u_m+u_n,k<m,n$.
2) $u_{m-k}+u_{m+k}=2u_m,k<m$.
3) $u_m=u_k+(m-k)d,k<m$.

Do đó C là phương án đúng.

+ *Phương án D*: Ta có $u_{2n}+u_{n+1}=u_1+(2n-1)d+u_1+nd$

$=u_1+(3n-1)d+u_1=u_{3n}+u_1\neq u_{3n}$. Vậy D là phương án sai.

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=321$ và $u_{n+1}=u_n-3,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tính tổng S của 125 số hạng đầu tiên của dãy số đó.

A. $S=16875$. **B.** $S=63375$. **C.** $S=63562,5$. **D.** $16687,5$.

Đáp án A.

Lời giải:

Từ công thức truy hồi của dãy số (u_n), ta có (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=-3$.

Do đó tổng của 125 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là:

$$S=\frac{125.\left[2u_1+(125-1)d\right]}{2}=16875.$$

Vậy phương án đúng là **A.**

Ví dụ 6: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S_{100}=-14650$. **B.** $S_{100}=-14400$. **C.** $S_{100}=-14250$. **D.** $S_{100}=-15450$.

Đáp án C.

Lời giải:

Đặt $a=u_1$ thì $u_2^2+u_3^2+u_4^2=(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2$

$$=3a^2-36a+126=3(a-6)^2+18\geq 18,\forall a.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0\Leftrightarrow a=6$. Suy ra $u_1=6$.

Ta có $S_{100}=\dfrac{100.\left[2u_1+(100-1)d\right]}{2}=-14250$. Vậy phương án đúng là **C.**

Nhận xét: *Từ kết quả của bài tập này, chúng ta có đề xuất các câu hỏi sau đây:*

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 2017 của cấp số cộng đó.

A. $u_{2017}=-6042$. **B.** $u_{2017}=-6045$. **C.** $u_{2017}=-6044$. **D.** $u_{2017}=-6054$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số -2019 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng đã cho?

A. 676. **B.** 675. **C.** 672. **D.** 674.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng.

A. $u_n=9-3n$. **B.** $u_n=6-3n$. **C.** $u_n=5-3n$. **D.** $u_n=-3n-3$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=m$ và công sai $d=-3$, trong đó m là tham số. Tìm giá trị nhỏ nhất $\min F$ của biểu thức $F=u_2^2+u_3^2+u_4^2$.

A. $\min F=18$. **B.** $\min F=6$. **C.** $\min F=99$. **D.** $\min F=117$.

Ví dụ 7: Cho cấp số cộng $3,8,13,...$ Tính tổng $S=3+8+13+...+2018$.

A. $S=408422$. **B.** $S=408242$. **C.** $407231,5$. **D.** $409252,5$.

Đáp án B.

Lời giải:

Cấp số cộng $3,8,13,...$ có số hạng đầu $a_1=3$ và công sai $d=5$.

Suy ra 2018 là số hạng thứ $\frac{2018-3}{5}+1=404$ của cấp số cộng.

Do đó $S=S_{404}=\frac{404.(3+2018)}{2}=408242$. Vậy B là phương án đúng.

Nhận xét: *Từ kết quả của bài tập này, chúng ta có thể giải quyết được các câu hỏi sau đây:*

Câu 1: Cho cấp số cộng $3,8,13,...$ Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

A. 402. **B.** 403. **C.** 404. **D.** 405.

Câu 2: Cho cấp số cộng $3,8,13,...,x,...$ Tìm x, biết $3+8+13+...+x=408242$.

A. $x=2017$. **B.** $x=2016$. **C.** $x=2019$. **D.** $x=2018$.

Câu 3: Cần viết thêm vào giữa hai số 3 và 2018 bao nhiêu số hạng để thu được một cấp số cộng hữu hạn có tổng các số hạng bằng 408242?

A. 402. **B.** 403. **C.** 405. **D.** 404.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=3, u_k=2018$ và $S_k=408242$. Số hạng thứ 2018 của cấp số cộng là số nào dưới đây?

A. 10088. **B.** 10093. **C.** 10083. **D.** 10098.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0$.

A. $m=0$. **B.** $m=\frac{17+\sqrt{265}}{12}$. **C.** $m=\frac{17-\sqrt{265}}{12}$. **D.** $m=1$.

Đáp án D.

Lời giải:

Cách 1: *Giải bài toán như cách giải tự luận.*

- *Điều kiện cần*: Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 lập thành một cấp số cộng.

Theo định lý Vi-et đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1+x_2+x_3=3m$.

Vì x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$. Suy ra $3x_2=3m\Leftrightarrow x_2=m$.

Thay $x_2=m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3-3m.m^2+2m(m-4).m+9m^2-m=0\Leftrightarrow m^2-m=0\Leftrightarrow m=0 \text{ hoặc } m=1.$$

- *Điều kiện đủ*:

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải là giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=1;x=-2;x=4$.

Ba nghiệm $-2,1,4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: *Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.*

Trước hết ta kiểm tra các phương án A và D (vì m nguyên).

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0\Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải là giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x=1;x=-2;x=4$.

Ba nghiệm $-2,1,4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

STUDY TIP

Phương trình bậc ba $ax^3+bx^2+cx+d=0,(a\neq 0)$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $x=-\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình. Giải điều kiện cần này ta có hệ thức liên hệ giữa các hệ số của phương trình là

$$2b^3-9abc+27a^2d=0.$$

Trong thực hành giải toán, chúng ta cũng chỉ cần ghi nhớ điều kiện cần là: $x=-\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 9: Biết rằng tồn tại hai giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^4-10x^2+2m^2+7m=0$, tính tổng lập phương của hai giá trị đó.

A. $-\frac{343}{8}$. **B.** $\frac{721}{8}$. **C.** $-\frac{721}{8}$. **D.** $\frac{343}{8}$.

Đáp án C.

Lời giải:

STUDY TIP
Phương trình bậc bốn trùng phương
$ax^4+bx^2+c=0,\ (a\neq 0)$
có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là
$9b^2-100a.c=0.$

+ Đặt $t=x^2, t\geq 0$. Khi đó ta có phương trình $t^2-10t+2m^2+7m=0\ (*)$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=5^2-(2m^2+7m)>0\\ 2m^2+7m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<2m^2+7m<25$

(do tổng hai nghiệm bằng $10>0$ nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt là $t_1, t_2, (t_1<t_2)$.

Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi

$$-\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_2}\right)=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1.$$

Theo định lý Vi-ét ta có $t_1+t_2=10, t_1t_2=2m^2+7m$.

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases}t_2=9t_1\\ t_1+t_2=10\\ t_1t_2=2m^2+7m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t_1=1\\ t_2=9\\ 2m^2+7m=9\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$.

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện nên đều nhận được.

Do đó $1^3+\left(-\dfrac{9}{2}\right)^3=-\dfrac{721}{8}$.

Suy ra phương án đúng là **C.**

Ví dụ 10: Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn ký hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

A. 7700000 đồng. **B.** 15400000 đồng.

C. 8000000 đồng. **D.** 7400000 đồng.

Đáp án A.

Lời giải:

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n, trong đó $1\leq n\leq 20$.

Theo giả thiết, ta có $u_1=100000$ và $u_{n+1}=u_n+30000, 1\leq n\leq 19$.

Ta có (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=100000$ và công sai $d=30000$.

Tổng số tiền gia đình thanh toán cho cơ sở khoan giếng bằng tổng các số hạng của cấp số cộng (u_n). Suy ra số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là $S_{20}=u_1+u_2+...+u_{20}=\dfrac{20.\left[2u_1+(20-1)d\right]}{2}=7700000$ (đồng).

Vậy phương án đúng là **A.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $-3,1,5,9,14$. B. $5,2,-1,-4,-7$.

C. $\frac{5}{3},1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-3$. D. $-\frac{7}{2},-\frac{5}{2},-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$.

Câu 2: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** là cấp số cộng?

A. Dãy số (a_n), với $a_n=3n-5$.

B. Dãy số (b_n), với $b_n=\sqrt{3}-\sqrt{5}n$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n=n^2-n$.

D. Dãy số (d_n), với $d_n=2017\cot\frac{(4n-1)\pi}{2}+2018$.

Câu 3: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện: Ba số $\frac{1}{x+y},\frac{1}{y+z},\frac{1}{z+x}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Ba số x^2,y^2,z^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

B. Ba số y^2,z^2,x^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

C. Ba số y^2,x^2,z^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

D. Ba số z^2,y^2,x^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công sai của cấp số cộng

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $u_3=-2$ và $u_{n+1}=u_n+3,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

A. $u_n=3n-11$. B. $u_n=3n-8$.

C. $u_n=2n-8$. D. $u_n=n-5$.

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2=2017$ và $u_5=1945$. Tính u_{2018}.

A. $u_{2018}=-46367$. B. $u_{2018}=50449$.

C. $u_{2018}=-46391$. D. $u_{2018}=50473$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (x_n) có $S_n=3n^2-2n$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đó.

A. $u_1=2;d=7$. B. $u_1=1;d=6$.

C. $u_1=1;d=-6$. D. $u_1=2;d=6$.

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $S_n=7n-2n^2$. Tính giá trị của biểu thức $P=u_3^2+u_5^2+u_7^2$.

A. $P=491$. B. $P=419$.

C. $P=1089$. D. $P=803$.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases}u_3+u_5=5\\u_3.u_5=6\end{cases}$. Tìm số hạng đầu của cấp số cộng.

A. $u_1=1$ hoặc $u_1=4$. B. $u_1=1$ hoặc $u_1=-4$.

C. $u_1=-1$ hoặc $u_1=4$. D. $u_1=-1$ hoặc $u_1=1$.

Câu 9: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=2$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 2018 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng (u_n)?

A. 1012. B. 1011. C. 1014. D. 1013.

Câu 10: Cho cấp số cộng $6,x,-2,y$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x=2;y=5$. B. $x=4;y=6$.

C. $x=2;y=-6$. D. $x=4;y=-6$.

Câu 11: Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Sáu số hạng cần viết thêm là

A. $6,9,12,15,18,21$. B. $21,18,15,12,9,6$.

C. $\frac{13}{2},10,\frac{27}{2},17,\frac{41}{2},24$. D. $\frac{16}{3},\frac{23}{3},\frac{37}{3},\frac{44}{3},\frac{58}{3},\frac{65}{3}$.

Câu 12: Cho hai cấp số cộng

$$(x_n):4,7,10,\ldots \text{ và } (y_n):1,6,11,\ldots$$

Hỏi trong 2017 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung?

A. 404. B. 403. C. 672. D. 673.

Câu 13: Cho cấp số cộng $1,7,13,\ldots,x$ thỏa mãn điều kiện $1+7+13+\ldots+x=280$. Tính giá trị của x.

A. $x=53$. B. $x=55$. C. $x=57$. D. $x=59$.

Câu 14: Biết rằng tồn tại các giá trị của $x\in[0;2\pi]$ để ba số $1+\sin x,\sin^2 x,1+\sin 3x$ lập thành một cấp số cộng, tính tổng S các giá trị đó của x.

A. $S=5\pi$. B. $S=3\pi$. C. $S=\frac{7\pi}{2}$. D. $S=\frac{23\pi}{6}$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Câu 15: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4=-3$ và tổng của 9 số hạng đầu tiên là $S_9=45$. Cấp số cộng trên có

A. $S_{10}=92$. B. $S_{20}=980$.

C. $S_3=-56$. D. $S_{16}=526$.

Câu 16: Cho cấp số cộng (x_n) có $x_3+x_{13}=80$. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

A. $S_{15}=600$. B. $S_{15}=800$. C. $S_{15}=570$. D. $S_{15}=630$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng

Câu 17: Cho cấp số cộng (u_n). Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $(n-p)u_m+(p-m)u_n+(m-n)u_p=0$.

B. $(m-n)u_m+(n-p)u_n+(p-m)u_p=0$.

C. $(m-p)u_m+(n-m)u_n+(p-n)u_p=0$.

D. $(p-n)u_m+(m-p)u_n+(m-n)u_p=0$.

Câu 18: Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành một cấp số cộng. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Ba số a,b,c lập thành một cấp số cộng.

B. Ba số $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ lập thành một cấp số cộng.

C. Ba số a^2,b^2,c^2 lập thành một cấp số cộng.

D. Ba số $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ lập thành một cấp số cộng.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4-10x^2+m=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m=16$. B. $m=9$. C. $m=24$. D. $m=21$.

Câu 20: Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

A. $\frac{1312}{81}$. B. $\frac{1024}{81}$. C. $\frac{32}{9}$. D. $\frac{1600}{81}$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3-3x^2-x+m^2-1=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

A. $m=\pm16$. B. $m=-2$. C. $m=2$. D. $m=\pm2$.

Câu 22: Biết rằng tồn tại đúng ba giá trị m_1,m_2,m_3 của tham số m để phương trình

$$x^3-9x^2+23x+m^3-4m^2+m-9=0$$

có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, tính giá trị của biểu thức $P=m_1^3+m_2^3+m_3^3$.

A. $P=34$. B. $P=36$. C. $P=64$. D. $P=-34$.

Câu 23: Mặt sàn tầng một của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao $18cm$. Ký hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân. Viết công thức để tìm độ cao h_n.

A. $h_n=0,18n+0,32(m)$. B. $h_n=0,18n+0,5(m)$.

C. $h_n=0,5n+0,18(m)$. D. $h_n=0,5n-0,32(m)$.

Câu 24: Người ta trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ... Hỏi trồng được bao nhiêu hàng cây theo cách này?

A. 77 hàng. B. 76 hàng. C. 78 hàng. D. 79 hàng.

Câu 25: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông. Người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô vuông đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt dẻ nhiều hơn ô đầu tiên là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt dẻ nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô cuối cùng. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta đã phải sử dụng hết 25450 hạt dẻ. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô?

A. 98 ô. B. 100 ô. C. 102 ô. D. 104 ô.

Câu 26: Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kỹ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là 13,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 500.000 đồng mỗi quý. Tính tổng số tiền lương một kỹ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty.

A. 198 triệu đồng. B. 195 triệu đồng.

C. 228 triệu đồng. D. 114 triệu đồng.

Câu 27: Trên tia Ox lấy các điểm $A_1,A_2,...,A_n,...$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, $OA_n=n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính $OA_n,n=1,2,...$ Kí hiệu u_1 là diện tích nửa đường tròn đường kính OA_1 và với mỗi $n\ge2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1}, nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) không phải là một cấp số cộng.

B. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{4}$.

C. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{8}$.

D. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=\frac{\pi}{2}$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị (C) của hàm số $y=3x-2$. Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $d:x-n=0$. Xét dãy số (u_n), với u_n là tung độ của điểm A_n. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=-2$.

B. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$.

C. Dãy số (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=1$.

D. Dãy số (u_n) không là cấp số cộng.

Câu 29: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=-3$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lấy các điểm $A_1,A_2,...$ sao cho với mỗi số nguyên dương n, điểm A_n có tọa độ là (n,u_n). Biết rằng khi đó tất cả các điểm $A_1,A_2,...,A_n,...$ cùng nằm trên một đường thẳng. Hãy viết phương trình của đường thẳng đó.

A. $y=-3x+5$. B. $y=-3x+2$.

C. $y=2x-3$. D. $y=2x-5$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số cộng

Câu 1: Đáp án B.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

- *Phương án A*: $1-(-3)=5-1=9-5=4\neq 14-9=5$.

- *Phương án B*: $2-5=-1-2=-4-(-1)=-7-(-4)=-3$.

Vậy dãy số ở phương án B là cấp số cộng.

Câu 2: Đáp án C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

- *Phương án A*: Ta có $a_{n+1}-a_n=3,\forall n\geq 1$ nên (a_n) là cấp số cộng.

- *Phương án B*: $b_{n+1}-b_n=-\sqrt{5},\forall n\geq 1$ nên (b_n) là cấp số cộng.

- *Phương án C*: $c_{n+1}-c_n=2n,\forall n\geq 1$ nên (c_n) không là cấp số cộng.

- *Phương án D*: $d_n=2018,\forall n\geq 1$ (do $\cot\frac{(4n-1)\pi}{2}=0$) nên (d_n) là cấp số cộng.

Câu 3: Đáp án C.

Theo giả thiết, ta có

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z+x}=\frac{2}{y+z}\Rightarrow (y+z)(2x+y+z)=2(x+y)(x+z)$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2=2x^2.$$

Suy ra y^2,x^2,z^2 hoặc z^2,x^2,y^2 lập thành một cấp số cộng. Do đó phương án đúng là C.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công sai của cấp số cộng

Câu 4: Đáp án A.

Ta có (u_n) là cấp số cộng có công sai $d=3$ nên số hạng đầu là $u_1=u_3-2d=-8$.

Suy ra số hạng tổng quát là $u_n=3n-11$.

Câu 5: Đáp án A.

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases}u_1+d=2017\\u_1+4d=1945\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2041\\d=-24\end{cases}.$$

Suy ra $u_{2018}=u_1+2017.d=-46367$.

Câu 6: Đáp án B.

Ta có $u_1=S_1=1$ và $u_1+u_2=S_2=8$. Suy ra $u_2=7$.

Vậy $d=u_2-u_1=6$.

Câu 7: Đáp án A.

Ta có $u_n=S_n-S_{n-1}=9-4n$.

Suy ra $u_3=-3;u_5=-11;u_7=-19$. Do đó $P=491$.

Câu 8: Đáp án A.

Ta có $\begin{cases}u_3+u_5=5\\u_3.u_5=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_3=2\\u_5=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u_3=3\\u_5=2\end{cases}$.

+) Giải điều kiện $\begin{cases}u_3=2\\u_5=3\end{cases}$, ta được $u_1=1$.

+) Giải điều kiện $\begin{cases}u_3=3\\u_5=2\end{cases}$, ta được $u_1=4$.

Câu 9: Đáp án A.

Ta có $u_2^2+u_3^2+u_4^2=3u_1^2+24u_1+56=3(u_1+4)^2+8\geq 8$.

Dấu bằng xảy ra khi $u_1+4=0\Leftrightarrow u_1=-4$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng là $u_n=2n-6$.

Nếu $u_n=2018$ thì $2n-6=2018\Leftrightarrow n=1012$.

Vậy, 2018 là số hạng thứ 1012 của cấp số cộng.

Câu 10: Đáp án C.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có

$$\begin{cases}2x=6+(-2)\\2.(-2)=x+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-6\end{cases}.$$

Câu 11: Đáp án A.

Theo giả thiết, ta có $u_1=3,u_8=24$.

Suy ra $3+7d=24\Leftrightarrow d=3$.

Vậy 6 số cần viết thêm là $6,9,12,15,18,21$.

Câu 12: Đáp án B.

Ta có $x_n=4+(n-1).3=3n+1,1\leq n\leq 2017$,

$y_m=1+(m-1).5=5m-4,1\leq m\leq 2017$.

Để một số là số hạng chung của cả hai cấp số cộng thì ta phải có $3n+1=5m-4\Leftrightarrow 3n=5(m-1)$.

Suy ra $n\vdots 5$, tức là $n=5t$ và $m=3t+1\left(t\in\mathbb{N}^*\right)$.

Lại do $1\leq n\leq 2017$ nên $1\leq t\leq 403$.

Ứng với 403 giá trị của t, ta tìm được 403 số hạng chung.

Vậy trong 2017 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số cộng đã cho có đúng 403 số hạng chung.

Câu 13: Đáp án B.

Cấp số cộng $1,7,13,...,x$ có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=6$ nên số hạng tổng quát là $u_n=6n-5$.

Giả sử $x=u_n=6n-5$. Khi đó

$$1+7+13+...+x=\frac{n(6n-4)}{2}=3n^2-2n.$$

Theo giả thiết, ta có

$$3n^2-2n=280\Rightarrow n=10\Rightarrow x=u_{10}=55.$$

Câu 14: Đáp án A.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có

$1+\sin x+1+\sin 3x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2+4\sin x-4\sin^3 x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x+1)(\sin^2 x-1)=0 \Leftrightarrow (2\sin x+1)\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$ hoặc $\cos x=0$.

+) $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$.

+) $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Với nghiệm $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\frac{11\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được $x=\frac{7\pi}{6}$. Với nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ và $x\in[0;2\pi]$, ta tìm được nghiệm $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$.

Do đó $S=\frac{11\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=5\pi$.

Dạng 3: Bài tập về tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Câu 15: Đáp án B.

Ta có $u_4=-3 \Leftrightarrow u_1+3d=-3$.

$S_9=45 \Leftrightarrow \frac{9[2u_1+8d]}{2}=45 \Leftrightarrow u_1+4d=5$.

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}u_1+3d=-3\\u_1+4d=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=-27\\d=8\end{cases}$.

Ta có $S_{10}=\frac{10.[2u_1+9d]}{2}=90; S_{20}=\frac{20.[2u_1+19d]}{2}=980$.

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 16: Đáp án A.

Ta có $x_3+x_{13}=80 \Leftrightarrow (x_1+2d)+(x_{15}-2d)=80$

$\Leftrightarrow x_1+x_{15}=80 \Rightarrow S_{15}=\frac{15(x_1+x_{15})}{2}=600$.

Dang 4: Bài tập liên quan đến tính chất của cấp số cộng

Câu 17: Đáp án A.

Kiểm tra từng phương án cho đến khi tìm được phương án đúng.

Ta có $u_m=u_1+(m-1)d; u_n=u_1+(n-1)d; u_p=u_1+(p-1)d$.

- *Phương án A*: Ta có $(n-p)u_m+(p-m)u_n+(m-n)u_p$

$=(n-p)[u_1+(m-1)d]+(p-m)[u_1+(n-1)d]$
$+(m-n)[u_1+(p-1)d]=0$.

Vậy đáp án là A.

Câu 18: Đáp án A.

Theo giả thiết, ta có $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{c}+2\sqrt{b})=2(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\Leftrightarrow a+c=2b$.

Suy ra ba số a,b,c hoặc c,b,a lập thành một cấp số cộng. Do đó đáp án là A.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cấp số cộng

Câu 19: Đáp án B.

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2=100ac$ hay $9.10^2=100.1.m \Leftrightarrow m=9$.

Với $m=9$ thì phương trình đã cho trở thành

$$x^4-10x^2+9=0 \Leftrightarrow x=\pm1; x=\pm3.$$

Bốn số $-3,-1,1,3$ lập thành một cấp số cộng nên $m=9$ là giá trị cần tìm.

Câu 20: Đáp án A.

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điều kiện cần là $9b^2=100ac$ hay $9.(2m+2)^2=100.1.(2m+1) \Leftrightarrow 9m^2-32m-16=0$

$\Leftrightarrow m=4$ hoặc $m=-\frac{4}{9}$.

Với $m=4$, ta có phương trình $x^4-10x^2+9=0$. Phương trình này có 4 nghiệm là $-3,-1,1,3$ lập thành cấp số cộng.

Với $m=-\frac{4}{9}$, ta có phương trình $9x^4-10x^2+1=0$.

Phương trình này có 4 nghiệm là $-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1$ lập thành cấp số cộng.

Vậy $m=4, m=-\frac{4}{9}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do đó $4^2+\left(-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{1312}{81}$.

Suy ra A là phương án đúng.

Câu 21: Đáp án D.

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là: $-\frac{b}{3a}=-\frac{-3}{3}=1$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $1^3-3.1^2-1+m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm2$.

Với $m=\pm2$, ta có phương trình $x^3-3x^2-x+3=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=-1, x=1, x=3.$

Ba số $-1,1,3$ lập thành cấp số cộng.

Vậy các giá trị cần tìm là $m=\pm 2$. Do đó D là phương án đúng.

Câu 22: Đáp án A.

Áp dụng kết quả ở phần lý thuyết, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là: $-\frac{b}{3a}=-\frac{-9}{3}=3$ là nghiệm của phương trình.

Suy ra $3^3-9.3^2+23.3+m^3-4m^2+m-9=0$

$\Leftrightarrow m^3-4m^2+m+6=0 \Leftrightarrow m=-1, m=2, m=3.$

Với $m=-1, m=2, m=3$ thì $m^3-4m^2+m+6=0$ nên $m^3-4m^2+m-9=-15$.

Do vậy, với $m=-1, m=2, m=3$, ta có phương trình

$x^3-9x^2+23x-15=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-6x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=1, x=3, x=5.$

Ba số $1,3,5$ lập thành một cấp số cộng.

Vậy $m=-1, m=2, m=3$ là các giá trị cần tìm.

Do đó $(-1)^3+2^3+3^3=34.$

Câu 23: Đáp án A.

Ký hiệu h_n là độ cao của bậc thứ n so với mặt sân. Khi đó, ta có $h_{n+1}=h_n+0,18$ (mét), trong đó $h_1=0,5$ (mét). Dãy số (h_n) lập thành một cấp số cộng có $h_1=0,5$ và công sai $d=0,18$. Suy ra số hạng tổng quát của cấp số cộng này là

$$h_n=0,5+(n-1).0,18=0,18.n+0,32 \text{ (mét)}.$$

Câu 24: Đáp án A.

Giả sử trồng được n hàng. Khi đó tổng số cây được trồng là $S=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Theo giả thiết, ta có

$$\frac{n(n+1)}{2}=3003 \Leftrightarrow n^2+n-6006=0 \Rightarrow n=77.$$

Câu 25: Đáp án B.

Kí hiệu u_n là số hạt dẻ ở ô thứ n.

Khi đó, ta có $u_1=7$ và $u_{n+1}=u_n+5, n\ge 1.$

Dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1=7$ và công sai $d=5$ nên có $S_n=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}=\frac{5n^2+9n}{2}.$

Theo giả thiết, ta có $\frac{5n^2+9n}{2}=25450$

$\Leftrightarrow 5n^2+9n-50900=0 \Rightarrow n=100.$

Suy ra bàn cờ có 100 ô. Do đó B là đáp án đúng.

Câu 26: Đáp án B.

Kí hiệu u_n là mức lương của quý thứ n làm việc cho công ty. Khi đó $u_1=13,5$ và $u_{n+1}=u_n+0,5, n\ge 1.$

Dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=13,5$ và công sai $d=0,5$.

Một năm có 4 quý nên 3 năm có tổng cộng là 12 quý. Số tiền lương sau 3 năm bằng tổng số tiền lương của 12 quý và bằng tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n). Vậy, tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty của kỹ sư là

$$S_{12}=\frac{12.[2.13,5+11.0,5]}{2}=195 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 27: Đáp án B.

Bán kính đường tròn đường kính OA_n là $r_n=\frac{n}{2}$.

Diện tích nửa đường tròn đường kính OA_n là

$$s_n=\frac{1}{2}.\pi.\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2\pi}{8}.$$

Suy ra $u_n=s_n-s_{n-1}=\frac{\pi}{8}\left[n^2-(n-1)^2\right]=\frac{(2n-1)\pi}{8}, n\ge 2.$

Ta có $u_1=\frac{1}{2}.\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}.$

Do $u_{n+1}-u_n=\frac{\pi}{4}, \forall n\ge 1$ nên (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=\frac{\pi}{4}$. Suy ra B là phương án đúng.

Câu 28: Đáp án B.

Ta có $A_n(n;u_n)$, trong đó $u_n=3n-2$.

Do $u_{n+1}-u_n=3, \forall n\ge 1$ nên (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d=3$. Suy ra B là phương án đúng.

Câu 29: Đáp án A.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) là

$$u_n=u_1+(n-1)d=-3n+5.$$

Nhận thấy tọa độ của các điểm A_n đều thỏa mãn phương trình $y=-3x+5$ nên phương trình đường thẳng đi qua các điểm $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ là $y=-3x+5$. Suy ra A là phương án đúng.

Cấp số nhân

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó nhân với một số không đổi q.

Số không đổi q được gọi là ***công bội*** của cấp số nhân.

Đặc biệt:

1) *Khi $q=1$ thì cấp số nhân là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng đều bằng nhau).*

2) *Khi $q=0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1,0,0,0,...,0,...$*

3) *Khi $u_1=0$ thì với mọi q, cấp số nhân có dạng $0,0,0,...,0,...$*

Nhận xét:

Từ định nghĩa, ta có:

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi

$$\boxed{u_{n+1}=u_n.q, n\in\mathbb{N}^*.}\ (1)$$

STUDY TIP

1) Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi q sao cho $u_{n+1}=u_n.q, \forall n\geq 1$.

2) Trong trường hợp $u_n\neq 0, \forall n\geq 1$, để chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ là một số không đổi với mọi số nguyên dương n.

3) Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng dãy số hữu hạn sau là một cấp số nhân.

$$-3,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27},-\frac{1}{81}.$$

Lời giải:

Ta có $-1=-3.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}=-1.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}$;

$-\frac{1}{27}=-\frac{1}{9}.\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{81}=-\frac{1}{27}.\frac{1}{3}$.

Theo định nghĩa cấp số nhân, dãy số $-3,-1,-\frac{1}{3},-\frac{1}{9},-\frac{1}{27},-\frac{1}{81}$ là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng -3 và công bội $q=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n=n^2$; b) Dãy số (y_n), với $y_n=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-3}$;

c) Dãy số (z_n), với $z_n=\frac{2}{n}$; d) Dãy số (w_n), với $w_n=\frac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Lời giải:

a) **Cách 1:** Ba số hạng đầu của dãy số (x_n) là $1,4,9$.

Vì $4=1.4; 9\neq 4.4$ nên dãy số (x_n) không phải là cấp số nhân.

Cách 2: Ta có $x_{n+1}=(n+1)^2$ nên $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}=1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi). Do đó, (x_n) không phải là cấp số nhân.

b) Ta có $y_{n+1}=\left(\sqrt{5}\right)^{2(n+1)-3}=\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}$ nên $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ (là số không đổi). Do đó, (y_n) là một cấp số nhân với công bội $q=5$.

c) Ta có $z_{n+1}=\frac{2}{n+1}$ nên $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{n}{n+1}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi). Do đó, (z_n) không phải là một cấp số nhân.

d) Ba số hạng đầu của dãy số (w_n) là $\frac{4}{9},\frac{10}{27},\frac{28}{81}$.

Vì $\frac{10}{27}=\frac{4}{9}.\frac{5}{6}$ còn $\frac{28}{81}\neq\frac{10}{27}.\frac{5}{6}$ nên $\frac{4}{9},\frac{10}{27},\frac{28}{81}$ không lập thành một cấp số nhân. Suy ra dãy số (w_n) không phải là một cấp số nhân.

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1=-1$ và công bội $q=-3$. Viết 6 số hạng đầu tiên của cấp số nhân và tính tổng của 6 số hạng đó.

Lời giải:

Ta có $u_2=u_1.q=(-1).(-3)=3$; $u_3=u_2.q=3.(-3)=-9$;

$u_4=u_3.q=(-9).(-3)=27$; $u_5=u_4.q=27.(-3)=-81$;

$u_6=u_5.q=(-81).(-3)=243$.

Tổng của 6 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là

$$S=-1+3+(-9)+27+(-81)+243=182.$$

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

Định lý 1

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức

$$\boxed{u_n=u_1.q^{n-1},\forall n\geq 2.}\ (2)$$

STUDY TIP

Từ tính chất này, chúng ta có thể rút ra được kết quả sau:

Cho (u_n) là một cấp số nhân với các số hạng khác 0. Khi đó, ta có:

1) $u_m=u_k.q^{m-k}, k<m.$

2) $q^{m-k}=\frac{u_m}{u_k}, k<m.$

Ví dụ 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$ và công bội $q=2$.

a) Tìm u_7.

b) Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đã cho.

Lời giải:

a) Ta có $u_7=u_1.q^{7-1}=3.2^6=192$.

b) Số hạng tổng quát của cấp số nhân là $u_n=u_1.q^{n-1}=3.2^{n-1}$.

Vì $u_n=12288$ nên $3.2^{n-1}=12288\Leftrightarrow 2^{n-1}=4096\Leftrightarrow 2^{n-1}=2^{12}\Leftrightarrow n=13$.

Do $n=13$ là số nguyên dương nên 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân.

Ví dụ 5: Cho cấp số nhân (x_n) có $x_3=18$ và $x_7=1458$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

Lời giải:

Gọi q là công bội của cấp số nhân (x_n).

Ta có $\begin{cases}x_3=18\\x_7=1458\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1q^2=18\\x_1q^6=1458\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1q^2=18\\x_1q^2.q^4=1458\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\q^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2\\q=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=2\\q=-3\end{cases}$.

+ Với $x_1=2$ và $q=3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n=x_1.q^{n-1}=2.3^{n-1}$.

+ Với $x_1=2$ và $q=-3$, ta có số hạng tổng quát là $x_n=x_1.q^{n-1}=2.(-3)^{n-1}$.

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

Định lý 2

Trong một cấp số nhân (u_n), bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

STUDY TIP
Một cách tổng quát, ta có: nếu (u_n) là một cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k}.u_{m+k}, k < m$.

Ví dụ 6: a) Cho cấp số nhân (a_n) có $a_7 = 4$ và $a_9 = 12$. Tính a_8.

b) Cho cấp số nhân $3, x, 12, y$. Tính giá trị của biểu thức $F = x^3 + y^3$.

Lời giải:

a) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $a_8^2 = a_7.a_9 = 4.12 = 48$.

Suy ra $a_8 = 4\sqrt{3}$ hoặc $a_8 = -4\sqrt{3}$.

b) Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x^2 = 3.12 = 36$ và $xy = 12^2 = 144$.

Giải ra ta được $x = 6; y = 24$ hoặc $x = -6; y = -24$.

+ Với $x = 6; y = 24$ thì $F = 6^3 + 24^3 = 14040$.

+ Với $x = -6; y = -24$ thì $F = (-6)^3 + (-24)^3 = -14040$.

Vậy, $F = 14040$ hoặc $F = -14040$.

4. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Định lý 3

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Khi đó:

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} \ (4) \text{ hoặc } S_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}. \ (5)$$

STUDY TIP
1) Chúng ta thường sử dụng công thức (4) để tính S_n khi biết số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.
2) Công thức (5) được sử để tính S_n trong trường hợp biết các số hạng u_1, u_{n+1} và công bội q của cấp số nhân.

Ví dụ 7: a) Tính tổng $S = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{12}$.

b) Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Tìm k, biết $S_k = 189$.

Lời giải:

a) Ta có dãy số $1, 10, 10^2, ..., 10^{12}$ lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 10$. Cấp số nhân này có 13 số hạng. Do đó

$$S = S_{13} = \frac{u_1(1-q^{13})}{1-q} = \frac{1.(1-10^{13})}{1-10} = \frac{1}{9}(10^{13} - 1).$$

b) Ta có $S_k = \dfrac{u_1(1-q^k)}{1-q} = \dfrac{3.(1-2^k)}{1-2} = 3(2^k - 1)$.

Theo giả thiết, ta có $3(2^k - 1) = 189 \Leftrightarrow 2^k = 2^6 \Leftrightarrow k = 6$.

B. Các dạng toán về cấp số nhân

Ví dụ 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (a_n), với $a_n = (-1)^n.3^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$ và $b_{n+1} = b_n + \frac{2017}{2018}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n), với $c_n = n.5^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = 3$ và $d_{n+1} = d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đáp án B.

Lời giải:

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A*: Ba số hạng đầu tiên của dãy số (a_n) là $-8, 28, -80$.

Vì $\frac{28}{-8} \neq \frac{-80}{28}$ nên ba số $-8, 28, -80$ không lập thành cấp số nhân. Do đó (a_n) không phải là cấp số nhân.

+ *Phương án B*: Ta có $b_{n+1} = \frac{4035}{2018}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (b_n) là cấp số nhân.

+ *Phương án C*: Ta có $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{25(n+1)}{n}$ (phụ thuộc vào n, không phải là số không đổi). Do đó (c_n) không phải là cấp số nhân.

+ *Phương án D*: Ba số hạng đầu của dãy số (d_n) là $3, 9, 81$. Nhận thấy ba số này không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không là cấp số nhân.

Ví dụ 2: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng thứ năm của cấp số nhân đã cho.

A. $a_5 = -24$. **B.** $a_5 = 48$. **C.** $a_5 = -48$. **D.** $a_5 = 24$.

Đáp án B.

Lời giải:

Công bội của cấp số nhân là $q = \frac{a_2}{a_1} = -2$.

Suy ra $a_5 = a_1.q^4 = 3.(-2)^4 = 48$. Vậy phương án đúng là **B.**

Nhận xét: *Với dữ kiện của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

Câu 1: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3.(-2)^n$. **B.** $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n = 3.2^{n-1}$. **D.** $u_n = 3.2^n$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Tính tổng S của 50 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2^{50} - 1$. **B.** $S = 2^{51} - 1$. **C.** $S = 1 - 2^{50}$. **D.** $S = 1 - 2^{51}$.

Câu 3: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 3$ và $a_2 = -6$. Biết rằng $S_k = -16383$, tính a_k.

A. $a_k = -24576$. **B.** $a_k = 24576$. **C.** $a_k = -49152$. **D.** $a_k = 49152$.

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân (x_n) có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases}$. Tìm x_1 và công bội q.

A. $x_1 = 1, q = 2$. B. $x_1 = -1, q = 2$.

C. $x_1 = -1, q = -2$. D. $x_1 = 1, q = -2$.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 10 \\ x_3 - x_5 + x_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2(1 - q^2 + q^3) = 10 \\ x_2 q(1 - q^2 + q^3) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$.

Suy ra $x_1 = \dfrac{x_2}{q} = 1$. Vậy phương án đúng là A.

Ví dụ 4: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó.

A. $u_1 = 6, q = 5$. B. $u_1 = 5, q = 4$.

C. $u_1 = 4, q = 5$. D. $u_1 = 5, q = 6$.

Đáp án C.

Lời giải:

Ta có $u_1 = S_1 = 5 - 1 = 4$ và $u_2 = S_2 - S_1 = (5^2 - 1) - (5^1 - 1) = 20$.

Suy ra $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 5$. Vậy phương án đúng là C.

Ví dụ 5: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_{13} = 24576$. B. $u_{13} = 12288$. C. $u_{13} = 49152$. D. $u_{13} = 3072$.

Đáp án B.

Lời giải:

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

Ta có $15u_1 - 4u_2 + u_3 = 45 - 12q + 3q^2 = 3(q-2)^2 + 33 \geq 33, \forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $q = 2$.

Suy ra $u_{13} = u_1.q^{12} = 3.2^{12} = 12288$. Vậy phương án đúng là B.

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau:*

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng tổng quát của cấp số nhân đó là

A. $u_n = 3.2^{n-1}$. B. $u_n = 3.2^n - 1$. C. $u_n = 3.(-2)^{n-1}$. D. $u_n = 3.4^{n-1}$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số 12288 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

A. 13. B. 12. C. 14. D. 15.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

A. $S_{15} = 737235$. B. $S_{15} = -2949075$.

C. $S_{15} = 1474515$. D. $S_{15} = 2949075$.

STUDY TIP

1) Định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba:
Nếu phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

2) Trong thực hành giải toán, chúng ta sử dụng kết quả này kết hợp với giả thiết của bài toán để tìm ra nghiệm của phương trình hoặc xác định được mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình.

Trường hợp nếu $-\dfrac{d}{a}$ là hằng số thì điều kiện cần để phương trình bậc ba nói trên có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ là nghiệm của phương trình bậc ba đó.

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $15u_1 - 4u_2 + u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng $S_k - 5898195$, tìm k.

A. $k = 16$. **B.** $k = 18$. **C.** $k = 19$. **D.** $k = 17$.

Ví dụ 6: Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là $125cm^3$ và diện tích toàn phần là $175cm^2$. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

A. $30cm$. **B.** $28cm$. **C.** $31cm$. **D.** $17,5cm$.

Đáp án D.

Lời giải:

Vì ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân nên ta có thể gọi ba kích thước đó là $\frac{a}{q}, a, aq$.

Thể tích của khối hình hộp chữ nhật là $V = \frac{a}{q}.a.aq = a^3 = 125 \Rightarrow a = 5$.

Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là

$$S_{tp} = 2\left(\frac{a}{q}.a + a.aq + aq.\frac{a}{q}\right) = 2a^2\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right).$$

Theo giả thiết, ta có $50\left(1 + q + \frac{1}{q}\right) = 175 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$.

Với $q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$ thì kích thước của hình hộp chữ nhật là $2,5cm; 5cm; 10cm$.

Suy ra tổng của ba kích thước này là $2,5cm + 5cm + 10cm = 17,5cm$.

Vậy phương án đúng là **D.**

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

A. $m = -7$. **B.** $m = 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 7$. **D.** $m = 1$ hoặc $m = -7$.

Đáp án D.

Lời giải:

+ *Điều kiện cần*: Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1x_2x_3 = 8$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1x_3 = x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$.

Thay $x_2 = 2$ vào phương trình đã cho, ta được $m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 1; m = -7$.

+ *Điều kiện đủ*: Với $m = 1$ và $m = -7$ thì $m^2 + 6m = 7$ nên ta có phương trình

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0.$$

Giải phương trình này, ta được các nghiệm là $1, 2, 4$. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Vậy, $m = 1$ và $m = -7$ là các giá trị cần tìm. Do đó phương án đúng là **D.**

Nhận xét: *Từ kết quả của ví dụ này, chúng ta có thể đề xuất các câu hỏi sau đây:*

STUDY TIP

Ta có thể chỉ ra nghiệm x_2 bằng cách khác:

Theo định lý Vi-ét thì

$x_1 + x_2 + x_3 = 7;$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2(m^2 + 6m)$

$x_1x_2x_3 = 8$

Theo tính chất của cấp số nhân thì $x_1x_3 = x_2^2$.

Suy ra

$2(m^2 + 6m)$

$= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

$= x_2(x_1 + x_2 + x_3)$

Mà $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ nên

$x_2 = \frac{2(m^2 + 6m)}{7}$.

Thay vào $x_1x_2x_3 = 8$ ta được

$\frac{8(m^2 + 6m)^3}{7^3} = 8$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0$

Câu 1: Biết rằng tồn tại đúng hai giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2(m^2+6m)x-8=0$, tính tổng bình phương của hai giá trị đó.

A. 48. B. 64. C. 36. D. 50.

Câu 2: Biết rằng tồn tại giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3-7x^2+2(m^2+6m)x-8=0$, tính tổng bình phương ba số hạng của cấp số nhân đó.

A. 49. B. 21. D. 14. D. 13.

Ví dụ 8: Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có bao nhiêu mét khối gỗ?

A. $4.10^5.(0,04)^5$. B. $4.10^5.(1,4)^5$. C. $4.10^5.(1,04)^4$. D. $4.(10,4)^5$.

Đáp án D.

Lời giải:

Đặt $u_0=4.10^5$ và $r=4\%=0,04$.

Gọi u_n là trữ lượng gỗ của khu rừng sau năm thứ n.

Khi đó ta có $u_{n+1}=u_n+u_n.r=u_n.(1+r), n\in\mathbb{N}$.

Suy ra (u_n) là cấp số nhân với số hạng đầu u_0 và công bội $q=1+r$.

Do đó số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n) là $u_n=u_0.(1+r)^n$.

sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có:

$$u_n=u_1q^4=u_0q^5=4.10^5.(1+0,01)^5=4.(10,4)^5 \text{ mét khối gỗ.}$$

Vậy phương án đúng là **D.**

Ví dụ 9: Bài toán *"lãi kép"*.

Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Giả sử trong khoảng thời gian gửi người gửi không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được gần với số tiền nào trong các số tiền dưới đây?

A. 196715000 đồng. B. 196716000 đồng.

C. 183845000 đồng. D. 183846000 đồng.

Đáp án A.

Lời giải:

Đặt $M_0=10^8$ (đồng) và $r=7\%=0,07$.

Gọi M_n là số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được sau n năm.

Theo giả thiết, ta có $M_{n+1}=M_n+M_n.r=M_n.(1+r), \forall n\geq 1$.

Do đó dãy số (M_n) là cấp số nhân với số hạng đầu M_0 và công bội $q=1+r$.

Suy ra $M_n=M_0.(1+r)^n$.

Vì vậy, sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà người gửi nhận được là

$$M_{10}=M_0.(1+r)^{10}=10^8.(1,07)^{10}\approx 196715000.$$

Vậy phương án đúng là **A.**

STUDY TIP

Giả sử cần gửi số tiền M_0 vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, với lãi suất $a\%=r$ một kỳ hạn (1 tháng, 3 tháng, 6 tháng, 9 tháng, 12 tháng, ...). Chúng ta thường đặt ra hai vấn đề sau đây:

1) Tính tổng số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được sau n kỳ hạn. Lúc này chúng ta sử dụng công thức:

$$M_n=M_0.(1+r)^n.$$

2) Cần gửi ít nhất bao nhiêu kỳ hạn để có tổng số tiền cả vốn lẫn lãi là M? Lúc này chúng ta sử dụng công thức:

$$n=\left[\log\left(\frac{M}{M_0}\right):\log(1+r)\right]+1.$$

Ví dụ 10: Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất 0,58% một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

A. 34 tháng. **B.** 32 tháng. **C.** 31 tháng. **D.** 30 tháng.

Đáp án B.

Lời giải:

Theo ví dụ 9, thì sau n tháng gửi tiết kiệm, ta có

$$M_n = M_0.(1+r)^n, \text{ trong đó } M_0 = 15.10^7, r = 0,0058.$$

Do đó $M_n = 15.10^7.(1,0058)^n$.

Cách 1: Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A*: $M_{34} = 15.10^7.(1,0058)^{34} \approx 182594000$ (đồng).

+ *Phương án B*: $M_{32} = 15.10^7.(1,0058)^{32} \approx 180494000$ (đồng).

+ *Phương án C*: $M_{31} = 15.10^7.(1,0058)^{31} \approx 179453000$ (đồng).

Vậy, phương án đúng là **B.** (không cần kiểm tra phương án D vì ở phương án D số tháng ít hơn ở phương án C nên số tiền sẽ ít hơn nữa).

Cách 2: Theo giả thiết, ta có $M_n = 18.10^7$ (đồng).

Do đó, ta có $18.10^7 = 15.10^7.(1,0058)^n \Leftrightarrow (1,0058)^n = \frac{6}{5}$.

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được $n \approx \log\left(\frac{6}{5}\right) : \log(1,0058)$ hay $n \approx 31,526$.

Do đó $n = 32$. Vậy phương án đúng là **B.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân

Câu 1: Dãy số nào dưới đây **không** là cấp số nhân?

A. $-1,-\frac{1}{5},-\frac{1}{25},-\frac{1}{125}$. B. $-\frac{1}{8},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1$.

C. $\sqrt[4]{2},2\sqrt[4]{2},4\sqrt[4]{2},8\sqrt[4]{2}$. D. $1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27}$.

Câu 2: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (u_n), với $u_n = 7-3n$.

B. Dãy số (v_n), với $v_n = 7-3^n$.

C. Dãy số (w_n), với $w_n = 7.3^n$.

D. Dãy số (t_n), với $t_n = \frac{7}{3n}$.

Câu 3: Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau, hãy chọn dãy số là cấp số nhân.

A. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2^n.u_n \end{cases}$.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân

Câu 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}, \forall n \ge 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số.

A. $u_n = 3.4^{-n}$. B. $u_n = 3.4^{1-n}$.

C. $u_n = 3.4^{n-1}$. D. $u_n = 3.4^{-n-1}$.

Câu 5: Cho cấp số nhân (x_n) có $x_2 = -3$ và $x_4 = -27$. Tính số hạng đầu x_1 và công bội q của cấp số nhân.

A. $x_1 = -1, q = -3$ hoặc $x_1 = 1, q = 3$.

B. $x_1 = -1, q = 3$ hoặc $x_1 = 1, q = -3$.

C. $x_1 = 3, q = -1$ hoặc $x_1 = -3, q = 1$.

D. $x_1 = 3, q = 1$ hoặc $x_1 = -3, q = -1$.

Câu 6: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_3 = 8$ và $a_5 = 32$. Tìm số hạng thứ mười của cấp số nhân đó.

A. $a_{10} = \pm 1024$. B. $a_{10} = \pm 512$.

C. $a_{10} = 1024$. D. $a_{10} = -1024$.

Câu 7: Cho cấp số nhân $x, 12, y, 192$. Tìm x và y.

A. $x = 3, y = 48$ hoặc $x = 4, y = 36$.

B. $x = -3, y = -48$ hoặc $x = 2, y = 72$.

C. $x = 3, y = 48$ hoặc $x = -3, y = -48$.

D. $x = 3, y = -48$ hoặc $x = -3, y = 48$.

Câu 8: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5, q = 3$ và $S_n = 200$, tìm n và u_n.

A. $n = 5$ và $u_n = 405$. B. $n = 6$ và $u_n = 1215$.

C. $n = 7$ và $u_n = 3645$. D. $n = 4$ và $u_n = 135$.

Câu 9: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 2$ và biểu thức $20a_1 - 10a_2 + a_3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

A. $a_7 = 156250$. B. $a_7 = 31250$.

C. $a_7 = 2000000$. D. $a_7 = 39062$.

Câu 10: Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc nhỏ nhất bằng $\frac{1}{9}$ số đo của góc nhỏ thứ ba. Hãy tính số đo của các góc trong tứ giác đó.

A. $5^0, 15^0, 45^0, 225^0$. B. $9^0, 27^0, 81^0, 243^0$.

C. $7^0, 21^0, 63^0, 269^0$. D. $8^0, 32^0, 72^0, 248^0$.

Câu 11: Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân.

A. $u_1 = 2, q = -3$. B. $u_1 = 2, q = 3$.

C. $u_1 = -2, q = 3$. D. $u_1 = -2, q = -3$.

Câu 12: Cho cấp số nhân (a_n) có $a_1 = 7, a_6 = 224$ và $S_k = 3577$. Tính giá trị của biểu thức $T = (k+1)a_k$.

A. $T = 17920$. B. $T = 8064$.

C. $T = 39424$. D. $T = 86016$.

Dạng 3: Bài tập về tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Câu 13: Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm S_5.

A. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{181}{16}$. B. $S_5 = 121$ hoặc $S_5 = \frac{35}{16}$.

C. $S_5 = 144$ hoặc $S_5 = \frac{185}{16}$. D. $S_5 = 141$ hoặc $S_5 = \frac{183}{16}$.

Câu 14: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 8$ và biểu thức $4u_3 + 2u_2 - 15u_1$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính S_{10}.

A. $S_{10} = \frac{2(4^{11}+1)}{5.4^9}$. B. $S_{10} = \frac{2(4^{10}-1)}{5.4^8}$.

C. $S_{10} = \frac{2^{10}-1}{3.2^6}$. D. $S_{10} = \frac{2^{11}-1}{3.2^7}$.

Câu 15: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$, công bội dương và biểu thức $u_4 + \frac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = u_{11} + u_{12} + ... + u_{20}$.

A. $S = 2046$. B. $S = 2097150$.

C. $S = 2095104$. D. $S = 1047552$.

Câu 16: Cho cấp số nhân (u_n) có $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$.

Tính S_{21}.

A. $S_{21} = \frac{1}{2}(3^{21} + 1)$. B. $S_{21} = 3^{21} - 1$.

C. $S_{21} = 1 - 3^{21}$. D. $S_{21} = -\frac{1}{2}(3^{21} + 1)$.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - (3m+1)x^2 + (5m+4)x - 8 = 0$.

A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Câu 18: Biết rằng tồn tại hai giá trị m_1 và m_2 để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:

$$2x^3 + 2(m^2 + 2m - 1)x^2 - 7(m^2 + 2m - 2)x - 54 = 0.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = m_1^3 + m_2^3$.

A. $P = -56$. B. $P = 8$. C. $P = 56$. D. $P = -8$.

Câu 19: Một cửa hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

A. 120. B. 121. C. 122. D. 200.

Câu 20: Một người đem 100 triệu đồng đi gửi tiết kiệm với kỳ hạn 6 tháng, mỗi tháng lãi suất là $0,7\%$ số tiền mà người đó có. Hỏi sau khi hết kỳ hạn, người đó được lĩnh về bao nhiêu tiền?

A. $10^8.(0,007)^5$ (đồng). B. $10^8.(1,007)^5$ (đồng).

C. $10^8.(0,007)^6$ (đồng). D. $10^8.(1,007)^6$ (đồng).

Câu 21: Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1,2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn người thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

A. 10320 nghìn người. B. 3000 nghìn người.

C. 2227 nghìn người. D. 2300 nghìn người.

Câu 22: Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

A. 1024.10^{12} tế bào. B. 256.10^{12} tế bào.

C. 512.10^{12} tế bào. D. 512.10^{13} tế bào.

Câu 23: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288\,m^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6\,m^2$. B. $12\,m^2$. C. $24\,m^2$. D. $3\,m^2$.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng

Câu 24: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào là sai?

A. Dãy số (a_n), với $a_1 = 3$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, \forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

B. Dãy số (b_n), với $b_1 = 1$ và $b_{n+1}(2b_n^2 + 1) = 3, \forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

C. Dãy số (c_n), với $c_1 = 2$ và $c_{n+1} = 3c_n^2 - 10, \forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

D. Dãy số (d_n), với $d_1 = -3$ và $d_{n+1} = 2d_n^2 - 15, \forall n \geq 1$, vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân.

Câu 25: Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời, các số $x + \frac{5}{3}$, $y - 1, 2x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

A. $x = -3, y = -1$ hoặc $x = \frac{3}{8}, y = \frac{1}{8}$.

B. $x = 3, y = 1$ hoặc $x = -\frac{3}{8}, y = -\frac{1}{8}$.

C. $x = 24, y = 8$ hoặc $x = -3, y = -1$.

D. $x = -24, y = -8$ hoặc $x = 3, y = 1$.

Câu 26: Ba số x, y, z lập thành một cấp số cộng và có tổng bằng 21. Nếu lần lượt thêm các số 2;3;9 vào ba số đó (theo thứ tự của cấp số cộng) thì được ba số lập thành một cấp số nhân. Tính $F = x^2 + y^2 + z^2$.

A. $F = 389$ hoặc $F = 395$.

B. $F = 395$ hoặc $F = 179$.

C. $F = 389$ hoặc $F = 179$.

D. $F = 441$ hoặc $F = 357$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập về nhận dạng cấp số nhân

Câu 1: Đáp án B.

Các dãy số trong các phương án A, C và D đảm bảo về dấu còn dãy số trong phương án B thì 3 số hạng đầu âm còn số hạng thứ tư là dương nên dãy số trong phương án B không phải là cấp số nhân.

Câu 2: Đáp án C.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

+ *Phương án A*: Ba số hạng đầu của dãy số là $4,1,-2$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (u_n) không phải là cấp số nhân.

+ Phương án B: Ba số hạng đầu của dãy số là $4,-2,-20$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (v_n) không phải là cấp số nhân.

+ *Phương án C*: Ta có $w_{n+1}=7.3^{n+1}=3w_n,\forall n\ge 1$ nên dãy số (w_n) là một cấp số nhân.

+ *Phương án D*: Ba số hạng đầu của dãy số là $\frac{7}{3},\frac{7}{6},\frac{7}{9}$ không lập thành cấp số nhân nên dãy số (t_n) không phải là cấp số nhân.

Câu 3: Đáp án B.

Cách kiểm tra như câu 2.

Dạng 2: Bài tập về xác định số hạng và công bội của cấp số nhân

Câu 4: Đáp án B.

Ta có $u_{n+1}=\frac{u_n}{4}=\frac{1}{4}.u_n$ nên (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát là

$$u_n=u_1.q^{n-1}=3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=3.4^{1-n}.$$

Vậy phương án đúng là B.

Câu 5: Đáp án B.

Ta có $\begin{cases}x_2=-3\\x_4=-27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1q=-3\\x_1q^3=-27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\q=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x_1=1\\q=-3\end{cases}$.

Do đó B là phương án đúng.

Câu 6: Đáp án A.

Ta có $\begin{cases}a_3=8\\a_5=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1q^2=8\\a_1q^4=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a_1=2\\q=-2\end{cases}$.

Với $a_1=2,q=2$ thì $a_{10}=a_1q^9=1024$.

Với $a_1=2,q=-2$ thì $a_{10}=a_1q^9=-1024$.

Vậy, $a_{10}=\pm 1024$. Suy ra A là phương án đúng.

Câu 7: Đáp án C.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có

$$y^2=12.192=2304\Rightarrow y=\pm 48.$$

Cũng theo tính chất của cấp số nhân, ta có

$$xy=12^2=144.$$

Với $y=48$ thì $x=3$; với $y=-48$ thì $x=-3$.

Vậy phương án đúng là C.

Câu 8: Đáp án D.

Ta có $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$ nên theo giả thiết, ta có

$$5.\frac{1-3^n}{1-3}=200\Leftrightarrow 3^n=81\Leftrightarrow n=4.$$

Suy ra $u_4=u_1.q^3=135$. Vậy đáp án là D.

Câu 9: Đáp án B.

Gọi q là công bội của cấp số nhân (a_n).

Ta có $20a_1-10a_2+a_3=2(q^2-10q+20)$

$=2(q-5)^2-10\ge -10,\forall q.$

Dấu bằng xảy ra khi $q=5$.

Suy ra $a_7=a_1.q^6=2.5^6=31250$.

Vậy phương án đúng là B.

Câu 10: Đáp án B.

Cách 1: Kiểm tra các dãy số trong mỗi phương án có thỏa mãn yêu cầu của bài toán không.

+ *Phương án A*: Các góc $5^0,15^0,45^0,225^0$ không lập thành cấp số nhân vì

$$15^0=3.5^0;45^0=3.15^0;225^0\ne 3.45^0.$$

+ *Phương án B*: Các góc $9^0,27^0,81^0,243^0$ lập thành cấp số nhân và $9^0+27^0+81^0+243^0=360^0$. Hơn nữa, $9^0=\frac{1}{9}.81^0$ nên B là phương án đúng.

+ *Phương án C và D*: Kiểm tra như phương án A.

Cách 2: Gọi các góc của tứ giác là a,aq,aq^2,aq^3, trong đó $q>1$.

Theo giả thiết, ta có $a=\frac{1}{9}.aq^2$ nên $q=3$.

Suy ra các góc của tứ giác là $a,3a,9a,27a$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^0 nên ta có

$$a+3a+9a+27a=360^0\Leftrightarrow a=9^0.$$

Do đó, phương án đúng là B (vì trong ba phương án còn lại không có phương án nào có góc 9^0).

Câu 11: Đáp án A.

Ta có $u_4+u_6=-540\Leftrightarrow(u_3+u_5)q=-540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$.

Lại có $u_3+u_5=180 \Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180$.

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 12: Đáp án A.

Ta có $a_6=224 \Leftrightarrow a_1q^5=224 \Rightarrow q=2$ (do $a_1=7$).

Do $S_k=\dfrac{a_1\left(1-q^k\right)}{1-q}=7\left(2^k-1\right)$ nên $S_k=3577$

$\Leftrightarrow 7\left(2^k-1\right)=3577 \Leftrightarrow 2^k=2^9 \Leftrightarrow k=9$.

Suy ra $T=10.a_9=10.a_1q^8=17920$.

Vậy phương án đúng là A.

Dạng 3: Bài tập về tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Câu 13: Đáp án A.

Ta có $u_3=S_3-S_2=9 \Rightarrow u_1q^2=9 \Rightarrow u_1=\dfrac{9}{q^2}$.

Vì $S_2=4$ nên $u_1+u_1q=4$. Do đó $\dfrac{9}{q^2}+\dfrac{9}{q}=4$

$\Leftrightarrow 4q^2-9q-9=0 \Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=-\dfrac{3}{4}$.

+ Với $q=3$ thì $u_1=1, u_6=u_1q^5=243$.

Suy ra $S_5=\dfrac{u_1-u_6}{1-q}=\dfrac{1-243}{1-3}=121$.

+ Với $q=-\dfrac{3}{4}$ thì $u_1=16, u_6=-\dfrac{243}{64}$.

Suy ra $S_5=\dfrac{u_1-u_6}{1-q}=\dfrac{181}{16}$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 14: Đáp án B.

Gọi q là công bội của cấp số nhân. Khi đó

$4u_3+2u_2-15u_1=2\left(4q+1\right)^2-122 \geq -122, \forall q$.

Dấu bằng xảy ra khi $4q+1=0 \Leftrightarrow q=-\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $S_{10}=u_1.\dfrac{1-q^{10}}{1-q}=8.\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{10}}{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}=\dfrac{2\left(4^{10}-1\right)}{5.4^8}$.

Vậy phương án đúng là B.

Câu 15: Đáp án C.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, $q>0$.

Ta có $u_4+\dfrac{1024}{u_7}=2q^3+\dfrac{512}{q^6}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$2q^3+\frac{512}{q^6}=q^3+q^3+\frac{512}{q^6} \geq 3\sqrt[3]{q^3.q^3.\frac{512}{q^6}}=24.$$

Suy ra $u_4+\dfrac{1024}{u_7}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 24 khi

$$q^3=\frac{512}{q^6} \Leftrightarrow q=2.$$

Ta có $S_{10}=\dfrac{u_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=2^{11}-2; S_{20}=\dfrac{u_1\left(1-q^{20}\right)}{1-q}=2^{21}-2$.

Do đó $S=S_{20}-S_{10}=2095104$. Vậy phương án đúng là C.

Câu 16: Đáp án A.

Ta có $u_4+u_6=-540 \Leftrightarrow \left(u_3+u_5\right)q=-540$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ, ta tìm được $q=-3$. Lại có $u_3+u_5=180 \Leftrightarrow u_1\left(q^2+q^4\right)=180$.

Vì $q=-3$ nên $u_1=2$. Suy ra $S_{21}=\dfrac{u_1\left(1-q^{21}\right)}{1-q}=\dfrac{1}{2}\left(3^{21}+1\right)$.

Vậy phương án đúng là A.

Dạng 4: Bài tập liên quan đến cấp số nhân

Câu 17: Đáp án B.

Cách 1: Ta có $-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{-8}{1}=8$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{8}=2$ là nghiệm của phương trình.

Thay $x=2$ vào phương trình đã cho, ta được

$$4-2m=0 \Leftrightarrow m=2.$$

Với $m=2$, ta có phương trình $x^3-7x^2+14x-8=0$ $\Leftrightarrow x=1; x=2; x=4$.

Ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân nên $m=2$ là giá trị cần tìm. Vậy, B là phương án đúng.

Cách 2: Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án đúng.

Câu 18: Đáp án A.

Ta có $-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{-54}{2}=27$.

Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân là $x=\sqrt[3]{27}=3$ phải là nghiệm của phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow m^2+2m-8=0 \Leftrightarrow m=2; m=-4.$$

Vì giả thiết cho biết tồn tại đúng hai giá trị của tham số m nên $m=2$ và $m=-4$ là các giá trị thỏa mãn.

Suy ra $P=2^3+\left(-4\right)^3=-56$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 19: Đáp án B.

Sau lần tăng giá thứ nhất thì giá của mặt hàng A là

$$M_1=100+100.10\%=110.$$

Sau lần tăng giá thứ hai thì giá của mặt hàng A là

$$M_2=110+110.10\%=121.$$

Suy ra phương án đúng là B.

Câu 20: Đáp án D.

Số tiền ban đầu là $M_0 = 10^8$ (đồng).

Đặt $r = 0,7\% = 0,007$.

Số tiền sau tháng thứ nhất là

$$M_1 = M_0 + M_0 r = M_0(1+r).$$

Số tiền sau tháng thứ hai là

$$M_2 = M_1 + M_1 r = M_0(1+r)^2.$$

Lập luận tương tự, ta có số tiền sau tháng thứ sáu là

$$M_6 = M_0(1+r)^6.$$

Do đó $M_6 = 10^8.(1,007)^6$.

Câu 21: Đáp án C.

Đặt $P_0 = 2000000 = 2.10^7$ và $r = 1,2\% = 0,012$.

Gọi P_n là số dân của tỉnh M sau n năm nữa.

Ta có $P_{n+1} = P_n + P_n.r = P_n(1+r)$.

Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu P_0 và công bội $q = 1+r$.

Do đó số dân của tỉnh M sau 10 năm nữa là

$$P_9 = M_0.(1+r)^9 = 2.10^7.(1,012)^{10} \approx 2227000.$$

Câu 22: Đáp án C.

Lúc đầu có 10^{12} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{12}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 3 giờ sẽ có 9 lần phân chia tế bào. Ta có u_{10} là số tế bào nhận được sau 3 giờ. Vậy, số tế bào nhận được sau 3 giờ là

$$u_{10} = u_1.q^9 = 512.10^{12}.$$

Vậy phương án đúng là C.

Câu 23: Đáp án A.

Gọi u_0 là diện tích đế tháp và u_n là diện tích bề mặt trên của tầng thứ n, với $1 \le n \le 11$. Theo giả thiết, ta có $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n, 0 \le n \le 10$.

Dãy số (u_n) lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_0 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Diện tích mặt trên cùng của tháp là

$$u_{11} = u_0.q^{11} = 12288.\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 6m^2.$$

Do vậy, phương án đúng là A.

Dạng 5: Bài tập liên quan đến cả cấp số nhân và cấp số cộng

Câu 24: Đáp án D.

Kiểm tra từng phương án đến khi tìm được phương án sai.

+ *Phương án A*: Ta có $a_2 = 3; a_3 = 3; \ldots$ Bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta chứng minh được rằng $a_n = 3, \forall n \ge 1$. Do đó (a_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ *Phương án B*: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $b_n = 1, \forall n \ge 1$. Do đó (b_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ *Phương án C*: Tương tự như phương án A, chúng ta chỉ ra được $c_n = 2, \forall n \ge 1$. Do đó (c_n) là dãy số không đổi. Suy ra nó vừa là cấp số cộng (công sai bằng 0) vừa là cấp số nhân (công bội bằng 1).

+ *Phương án D*: Ta có $d_1 = -3, d_2 = 3, d_3 = 3$. Ba số hạng này không lập thành cấp số cộng cũng không lập thành cấp số nhân nên dãy số (d_n) không phải là cấp số cộng và cũng không phải là cấp số nhân.

Do đó phương án D là sai.

Câu 25: Đáp án A.

+ Ba số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ lập thành cấp số cộng nên $(x+6y)+(8x+y) = 2(5x+2y) \Leftrightarrow x = 3y$.

+ Ba số $x+\frac{5}{3}, y-1, 2x-3y$ lập thành một cấp số nhân nên $\left(x+\frac{5}{3}\right)(2x-3y) = (y-1)^2$.

Thay $x = 3y$ vào ta được $8y^2 + 7y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = -1$ hoặc $y = \frac{1}{8}$.

Với $y = -1$ thì $x = -3$; với $y = \frac{1}{8}$ thì $x = \frac{3}{8}$.

Vậy phương án đúng là A.

Câu 26: Đáp án C.

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$.

Kết hợp với giả thiết $x + y + z = 21$, ta suy ra $3y = 21$ hay $y = 7$.

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x = y - d = 7 - d$ và $z = y + d = 7 + d$.

Sau khi thêm các số $2; 3; 9$ vào ba số x, y, z ta được ba số là $x+2, y+3, z+9$ hay $9-d, 10, 16+d$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có

$$(9-d).(16+d) = 10^2 \text{ hay } d^2 + 7d - 44 = 0.$$

Giải phương trình ta được $d = -11$ hoặc $d = 4$.

Với $d = -11$, cấp số cộng là $18, 7, -4$. Lúc này $F = 389$.

Với $d = 4$, cấp số cộng là $3, 7, 11$. Lúc này $F = 179$.

Vậy phương án đúng là C.

CHỦ ĐỀ 4: GIỚI HẠN

Giới hạn dãy số

A. Lý thuyết

I. Dãy số có giới hạn 0

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:
a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$
b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.
c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy có giới hạn 0

Định lí 4.1.

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).
Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP
Định lí 4.1 thường được sử dụng để chứng minh một dãy số có giới hạn là 0.

Định lí 4.2.

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt: $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

STUDY TIP
Cách ghi nhớ các kết quả bên như sau: Khi tử số không đổi, mẫu số càng lớn (dần đến dương vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về 0).

II. Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.
Kí hiệu: $\lim u_n = L$.
Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

a) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$, có giới hạn là c.
b) $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ trên trục số thực từ điểm u_n đến L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi n tăng thì các điểm u_n "chụm lại" quanh điểm L.
c) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3.

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó
a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.
b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4.

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó
a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$. b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim(u_n.v_n) = L.M$. d) $\lim(c.u_n) = cL$.

e) $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

III. Dãy số có giới hạn vô cực

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim\sqrt{n} = +\infty$. b) $\lim\sqrt[3]{n} = +\infty$.

c) $\lim n^k = +\infty$ với k là một số nguyên dương cho trước.

Trường hợp đặc biệt: $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn. Do đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

STUDY TIP

Ta có thể diễn giải "nôm na" định lí 4.5 như sau cho dễ nhớ: Khi tử số không đổi, mẫu số có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về 0).

Định lí 4.5.

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

STUDY TIP

Vì $-\infty$ và $+\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

STUDY TIP

Ở cả ba quy tắc, về dấu, tương tự như quy tắc về dấu của phép nhân hoặc phép chia hai số.

Để cho dễ nhớ, ta diễn giải các quy tắc một cách "nôm na" như sau:

- **Quy tắc 1:** Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 2:** Tích của đại lượng vô cùng lớn với một đại lượng khác 0 là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 3:** Khi tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0, mẫu thức càng nhỏ (dần về 0) thì phân thức càng lớn (dần về vô cực).

B. Các dạng toán về giới hạn dãy số

Dạng 1

Tính giới hạn dãy số cho bởi công thức

Ví dụ 1: $\lim(n^3 - 2n + 1)$ bằng:

A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

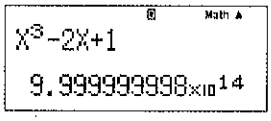
Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $n^3 - 2n + 1 = n^3\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^3 = +\infty$ và $\lim\left(1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = 1 > 0$ nên theo quy tắc 2,

$$\lim(n^3 - 2n + 1) = +\infty.$$



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị của biểu thức $n^3 - 2n + 1$ tại một giá trị lớn của n (do $n \to +\infty$) như sau: Nhập vào màn hình biểu thức $X^3 - 2X + 1$. Bấm CALC. Máy hỏi X? Nhập 10^5, ấn =. Máy hiện kết quả như hình bên. Ta thấy kết quả tính toán với $X = 10^5$ là một số dương rất lớn. Do đó chọn D.

Ví dụ 2: $\lim\left(5n-n^2+1\right)$ bằng:

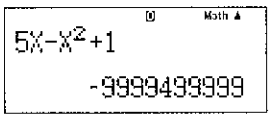
A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 5. D. -1.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $5n-n^2+1=n^2\left(-1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(-1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=-1<0$ nên $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ (theo quy tắc 2).



Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=10^5$ là một số âm rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng $-\infty$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng đa thức (bậc lớn hơn 0) của n.

- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số dương thì $\lim u_n=+\infty$.
- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số âm thì $\lim u_n=-\infty$.

Tổng quát: Cho k là một số nguyên dương.

a) $\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0\right)=+\infty$ nếu $a_k>0$.

b) $\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0\right)=-\infty$ nếu $a_k<0$.

Chẳng hạn: $\lim\left(n^3-2n+1\right)=+\infty$ vì $a_3=1>0$; $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ vì $a_2=-1<0$.

Ví dụ 3: $\lim u_n$, với $u_n=\frac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

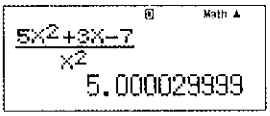
A. 0. B. 5. C. 3. D. -7.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\lim u_n=\lim\left(\frac{5n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{7}{n^2}\right)=\lim\left(5+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)=5.$$



Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Đây không phải là giá trị chính xác của giới hạn cần tìm, mà chỉ là giá trị gần đúng của một số hạng với n khá lớn, trong khi n dần ra vô cực. Tuy nhiên kết quả này cũng giúp ta lựa chọn được đáp án đúng, đó là đáp án B.

Một số dòng máy hiện kết quả dạng phân số, chẳng hạn $\frac{1500044}{300007}$. Do $\frac{15}{3}=5$ nên chọn đáp án B.

Ví dụ 4: $\lim u_n$, với $u_n=\frac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}$ bằng:

A. -3. B. 1. C. 2. D. 0.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được: $u_n=\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}}$.

Vì $\lim\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)=2$ và $\lim\left(1-\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}\right)=1\neq 0$ nên

$$\lim\frac{2n^3-3n^2+n+5}{n^3-n^2+7}=\frac{2}{1}=2.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 5: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}$ bằng:

A. 1. B. 0. C. $+\infty$. D. $\dfrac{1}{3}$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Chia tử và mẫu của phân thức cho n^4 (n^4 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được

$$\lim u_n = \lim \frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 6: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$, bằng:

A. $\dfrac{3}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. 1.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho n^2 (n^2 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong <u>*mẫu thức*</u>) ta được $u_n = \dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n} = \dfrac{3n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}$.

Vậy $\lim u_n = \lim(3n) = +\infty$.

Cách 2: Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{3n^3+2n-1}{2n^2-n} = \lim \dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$ (Chia cả tử và mẫu cho n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong <u>*phân thức*</u>).

Vì $\lim\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right) = 3 > 0$, $\lim\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 3: Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim\left(n.\dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}}\right)$.

Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \dfrac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{3}{2} > 0$ nên theo quy tắc 2, $\lim u_n = +\infty$.

Rõ ràng là làm theo cách 1 (chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của n trong <u>mẫu thức</u>) thì ít phải lập luận hơn cách 2 và cách 3.

Cách 4: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Tổng quát:

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{a_i n^i + a_{i-1}n^{i-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \ldots + b_1 n + b_0}$, trong đó $a_i, b_k \neq 0$ (dạng phân thức với tử số và mẫu số là các đa thức của n).

a) Nếu $i > k$ (bậc tử lớn hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = +\infty$ nếu $a_i b_k > 0$, $\lim u_n = -\infty$ nếu $a_i b_k < 0$.

b) Nếu $i = k$ (bậc tử bằng bậc mẫu) thì $\lim u_n = \frac{a_i}{b_k}$.

c) Nếu $i < k$ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng phân thức của n.

- Nếu bậc tử cao hơn bậc mẫu thì (u_n) có giới hạn vô cực.
- Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì $\lim u_n$ bằng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử chia cho hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu.
- Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 7: $\lim \frac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. 2.

Đáp án A.

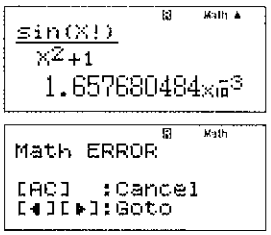
Lời giải

Ta có $\left|\frac{\sin(n!)}{n^2+1}\right| \le \frac{1}{n^2+1}$ mà $\lim \frac{1}{n^2+1} = 0$ nên chọn đáp ánA.

Lưu ý: Sử dụng MTCT. Với $X = 11$, máy cho kết quả như hình bên.

Với $X \ge 12$, máy báo lỗi do việc tính toán vượt quá khả năng của máy.

Do đó với bài toán này, MTCT sẽ cho kết quả chỉ mang tính tham khảo.



Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được rằng:

a) $\lim \frac{\sin^k(u_n)}{v_n} = 0$; b) $\lim \frac{\cos^k(u_n)}{v_n} = 0$.

Trong đó $\lim v_n = \pm\infty$, k nguyên dương.

Chẳng hạn:

$$\lim \frac{\left(\sin\frac{n\pi}{5}\right)^2}{\sqrt{n^3+2n+1}} = 0;\ \lim \frac{\cos^3(3n+1)\pi}{2^n} = 0;\ \lim \frac{\cos\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{n^2-5n^3+n+1}} = 0 \ \ldots$$

Lưu ý

Khi sử dụng MTCT, với các bài toán liên quan đến lượng giác, trước khi tính toán, ta cần chọn chế độ Rad (radian) hoặc Deg (degree) cho phù hợp với đề bài.

Ví dụ 8: $\lim \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng:

A. -1. B. 1. C. $+\infty$. D. 0.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n.n} = \frac{1}{n^2}$ mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ nên suy ra $\lim \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Nhận xét

Dãy $((-1)^n)$ không có giới hạn nhưng mọi dãy $\left(\frac{(-1)^n}{v_n}\right)$, trong đó $\lim v_n = \pm\infty$ thì có giới hạn bằng 0.

Ví dụ 9: Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3} - n\right)$.

A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = +\infty$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$$

$$=\lim\frac{\left(n^2-2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 10: $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=\lim n\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)$.

Vì $\lim n=+\infty$, $\lim\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)=1-\sqrt[3]{8}=1-2=-1<0$ nên

$$\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT như các ví dụ trên.

Ví dụ 11: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $n^2-n\sqrt{4n+1}=n^2\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2,

$$\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=+\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Tổng quát:

Xét dãy số

$$u_n=\sqrt[r]{a_in^i+a_{i-1}n^{i-1}+...+a_1n+a_0}-\sqrt[s]{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+...+b_1n+b_0},$$

trong đó $a_i,b_k>0$.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i}=\sqrt[s]{b_k}$ và $\frac{i}{r}=\frac{k}{s}$: Giới hạn là hữu hạn.

+ Nếu hai căn cùng bậc: Nhân chia với biểu thức liên hợp.

+ Nếu hai căn không cùng bậc: Thêm bớt với $\sqrt[r]{a_in^i}$ rồi nhân chia với biểu thức liên hợp.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i}\neq\sqrt[s]{b_k}$ hoặc $\frac{i}{r}\neq\frac{k}{s}$: Đưa lũy thừa bậc cao nhất của n ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp này u_n sẽ có giới hạn vô cực.

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ ba:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Hai biểu thức $a-b$ và $a+b$ được gọi là biểu thức liên hợp của nhau.

Ví dụ: $\sqrt{n^2-2n+3}-n$ và $\sqrt{n^2-2n+3}+n$ là hai biểu thức liên hợp của nhau.

a) Ở bước 3 ta đã chia cả tử và mẫu cho n. Lưu ý là $n=\sqrt{n^2}$.

b) Ta có $\sqrt{n^2-2n+3}-n$

$=n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}-1\right)$

Vì $\lim n=+\infty$ và

$\lim\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\right)=0$

nên không áp dụng được quy tắc 2 như trong ví dụ trước đó.

Trong chương trình lớp 12, các em sẽ được học về căn bậc s (s nguyên dương) và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Người ta định nghĩa rằng $a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}$, trong đó a là số thực dương, r là số nguyên và s là số nguyên dương, $s\geq 2$. Các tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ tương tự lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{n}=n^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{n^2}=n^{\frac{2}{3}}$ ...

Chẳng hạn:

a) Với $u_n=\sqrt{n^2-2n+3}-n=\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2}$: nhân chia với biểu thức liên hợp của $\sqrt{n^2-2n+3}-n$ là $\sqrt{n^2-2n+3}+n$. Dãy số có giới hạn hữu hạn bằng -1.

b) Với $u_n=n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}=\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}$: Đưa n^3 ra ngoài dấu căn. Giới hạn của (u_n) bằng $-\infty$.

c) Với $u_n=n^2-n\sqrt{4n+1}=n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{4n+1}\right)$: Đưa n^2 ra ngoài dấu căn. Giới hạn của (u_n) bằng $+\infty$.

Ví dụ 12: $\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$ bằng:

A. -1. B. 1. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp (bậc ba) của $n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}$.

$$\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)=\lim\frac{n^3-\left(n^3+3n^2+1\right)}{\left(n^2+n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2+1\right)^2}\right)}$$

$$=\lim\frac{-3n^2-1}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}\right)}=\lim\frac{-3-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}}$$

$$=\frac{-3}{1+1+1}=-1.$$

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ bảy: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Hai biểu thức $a-b$ và a^2+ab+b^2 cũng được gọi là hai biểu thức liên hợp (bậc ba) của nhau.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 13: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}=\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$

$$=\frac{\left(n^2+n+1\right)-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}+\frac{n^3-\left(n^3+3n+2\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+3n+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n+2\right)^2}}$$

$$=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}-\frac{3n+2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+3n+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+3n+2\right)^2}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}-\frac{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)^2}}.$$

Lưu ý

Phân tích như bên, ta thấy giới hạn cần tìm là hữu hạn. Tuy nhiên trong các đáp án có hai đáp án là hữu hạn. Bằng MTCT, ta thấy đáp án cần tìm là A. Nếu giải chi tiết, ta phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Tuy nhiên u_n có dạng hiệu của căn thức bậc hai và căn thức bậc ba. Do đó nếu để nguyên như đầu bài thì không có biểu thức liên hợp phù hợp. Ta thêm bớt với $\sqrt{n^2}=n$ rồi nhân chia với biểu thức liên hợp như bên.

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)=\frac{1}{1+1}-\frac{0}{1+1+1}=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 14: $\lim\left(5^n-2^n\right)$ bằng:

A. $-\infty$. B. 3. C. $+\infty$. D. $\frac{5}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $5^n-2^n=5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$.

Vì $\lim 5^n=+\infty$ và $\lim\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Ví dụ 15: $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng:

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 3. D. -5.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có $3.2^{n+1}-5.3^n+7n=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)$.

Vì $\lim 3^n=+\infty$ và $\lim\left(-5+6.\left(\frac{2}{3}\right)^n+7.\frac{n}{3^n}\right)=-5<0$ nên

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=-\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Tổng quát: Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_k,q_1,q_2,...,q_k,b_0,b_1,b_2,...,b_i$ trong đó $q_j=\max\{q_1,q_2,...,q_k\}>1$

a) $\lim\left(a_1q_1^n+a_2q_2^n+...+a_kq_k^n+b_in^i+b_{i-1}n^{i-1}+...+b_1n+b_0\right)=+\infty$ nếu $a_j>0$.

b) $\lim\left(a_1q_1^n+a_2q_2^n+...+a_kq_k^n+b_in^i+b_{i-1}n^{i-1}+...+b_1n+b_0\right)=-\infty$ nếu $a_j<0$.

Chẳng hạn:

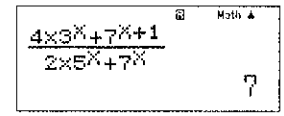
$\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$ vì $a_1=1>0$; $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=-\infty$ vì $a_2=-5<0$.

Ví dụ 16: $\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng:

A. 1. B. 7. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{7}{5}$.

Đáp án B.

Lời giải



Cách 1: Ta có $\lim \frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim \frac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=\frac{4.0+7}{2.0+1}=\frac{7}{1}=7$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như hình bên.

Bấm CALC. Máy hỏi X? Nhập 100, ấn =. Máy hiện kết quả bằng 7.

Lưu ý

Khi sử dụng MTCT, nếu nhập giá trị X quá lớn, máy sẽ báo lỗi do giá trị của $a^X, a>1$ tăng rất nhanh khi X tăng, nên vượt quá khả năng tính toán của máy. Khi đó cần thử lại các giá trị khác của X. Như vậy với các bài toán có chứa $a^n, a>1$ ta không nên tính với n quá lớn.

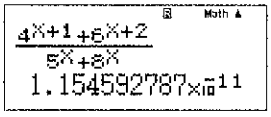
Ví dụ 17: $\lim \frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ bằng:

A. 0. B. $\frac{6}{8}$. C. 36. D. $\frac{4}{5}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim \frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim \frac{4.\left(\frac{4}{8}\right)^n+36.\left(\frac{6}{8}\right)^n}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}=\frac{4.0+36.0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$.



Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=100$ là một số dương rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng 0.

Ví dụ 18: $\lim \frac{2^n-3^n}{2^n+1}$ bằng:

A. $-\frac{3}{2}$. B. 0. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

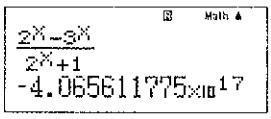
Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho 2^n ta được $\frac{2^n-3^n}{2^n+1}=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Vậy $\lim \frac{2^n-3^n}{2^n+1}=\lim\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)=-\infty$.

Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho 3^n ta được $\frac{2^n-3^n}{2^n+1}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

Mà $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-1<0$, $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=0$ và $\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n>0$ với mọi n

nên theo quy tắc 3, $\lim \frac{2^n-3^n}{2^n+1}=-\infty$.



Cách 3: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=100$ là một số âm rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng $-\infty$.

Lưu ý: Bạn đọc hãy tự tổng kết và rút kinh nghiệm cho mình thông qua ba ví dụ trên về dãy có số hạng tổng quát dạng phân thức có chứa a^n.

Dạng 2 Tính giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi

Ví dụ 19: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n \geq 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

A. -1. B. 2. C. 4. D. $\dfrac{2}{3}$.

Đáp án B.

STUDY TIP
Nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim u_{n+1} = L$

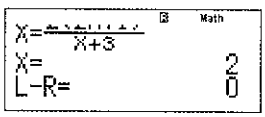
Lời giải

Cách 1: Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n. Đặt $\lim u_n = L \geq 0$. Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ hay $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$

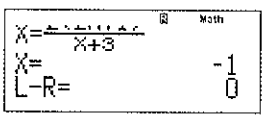
$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow L = 2$ hoặc $L = -1$ (loại). Vậy $\lim u_n = 2$.

Trong ví dụ này ta đã áp dụng tính chất "nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim u_{n+1} = L$

Lưu ý: Để giải phương trình $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$ ta có thể sử dụng chức năng SOLVE của MTCT (Chức năng SOLVE là chức năng tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng phương pháp chia đôi). Ta làm như sau:



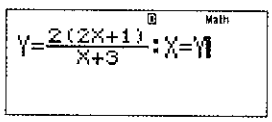
Nhập vào màn hình $X = \dfrac{2(2X+1)}{X+3}$; Bấm SHIFT CALC (tức SOLVE); Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{1}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như hình bên.



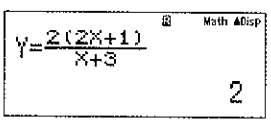
$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Lại ấn phím $\boxed{=}$. Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{0}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như bên.

$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Tuy nhiên ta chỉ nhận nghiệm không âm. Vậy $L = 2$. (Ta chỉ tìm ra hai nghiệm thì dừng lại vì dễ thấy phương trình hệ quả là phương trình bậc hai.)

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên.



Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X? nhập 1 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số. Giới hạn đó bằng 2.



Ví dụ 20: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ với mọi $n \geq 1$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = -1$. C. $\lim u_n = \sqrt{2}$. D. $\lim u_n = -\sqrt{2}$.

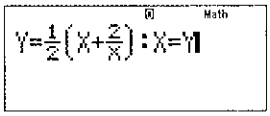
Đáp án C.

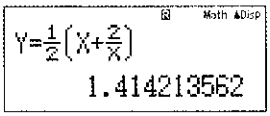
Lời giải

Cách 1: Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n. Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L \geq 0$.

Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ hay $L = \dfrac{1}{2}\left(L + \dfrac{2}{L}\right) \Rightarrow L = \dfrac{2}{L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$

(loại trường hợp $L=-\sqrt{2}$). Vậy $\lim u_n=\sqrt{2}$.





Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên.

Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X? nhập 1 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số.

Trong bốn đáp án đã cho, bằng phương pháp loại trừ, ta thấy chỉ có đáp án C là phù hợp với kết quả tính toán trên máy tính ($\sqrt{2}\approx 1,41423562$).

Ví dụ 21: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=2u_n+\frac{1}{2}$ với mọi $n\geq 1$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có $\lim u_{n+1}=2\lim u_n+\frac{1}{2}\Rightarrow L=2L+\frac{1}{2}\Rightarrow L=-\frac{1}{2}$.

Đến đây liệu đã có thể kết luận được $\lim u_n=-\frac{1}{2}$ không? Câu trả lời là không!

Vì không khó để chứng minh được rằng $u_n>0$ với mọi n. Do đó nếu dãy số có giới hạn là L thì $L\geq 0$. Từ đó suy ra dãy không có giới hạn hữu hạn mà trong bốn đáp án chỉ có đáp án C là vô cực.

Vậy chọn đáp án **C**.

Ta xét hai cách giải sau:

Cách 1: Đặt $v_n=u_n+\frac{1}{2}$. Ta có $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{1}{2}=2u_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\left(u_n+\frac{1}{2}\right)=2v_n$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân có $v_1=\frac{3}{2}$ và $q=2$. Vậy $v_n=\frac{3}{2}.2^{n-1}=3.2^{n-2}$.

Do đó $\lim v_n=\lim 3.2^{n-2}=+\infty$. Suy ra $\lim u_n=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp) tương tự như ví dụ trên.

Phân tích: Câu hỏi đặt ra là tại sao lại đặt $v_n=u_n+\frac{1}{2}$ để thu được kết quả dãy (v_n) là một cấp số nhân? Ta có kết quả tổng quát sau.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=a$, $u_{n+1}=ru_n+s$ với mọi $n\geq 1$, trong đó r và s là các hằng số, $r\neq 1$, $s\neq 0$. Khi đó dãy số (v_n) với $v_n=u_n+\frac{s}{r-1}$ là một cấp số nhân có công bội r.

Thật vậy, ta có: $v_{n+1}=u_{n+1}+\frac{s}{r-1}=ru_n+s+\frac{s}{r-1}=ru_n+\frac{sr}{r-1}=r\left(u_n+\frac{s}{r-1}\right)=rv_n$.

(Nếu $r=1$ thì (u_n) là một cấp số cộng, nếu $s=0$ thì (u_n) là một cấp số nhân).

Như vậy, nếu dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=a$, $u_{n+1}=ru_n+s$ với mọi $n\geq 1$, trong đó r và s là các hằng số, $r\neq 1$, $s\neq 0$, sẽ có giới hạn vô cực nếu $|r|>1$, có giới hạn hữu hạn nếu $|r|<1$.

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số u_n có giới hạn hữu hạn hay không. Các đáp án có đáp án hữu hạn, có đáp án vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

STUDY TIP

$u_{n+1}=ru_n+s$

Đặt $v_n=u_n+\frac{s}{r-1}$

STUDY TIP

$u_1=a$, $u_{n+1}=ru_n+s$

$|r|>1$: (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu $r>1$, (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu $r<-1$.

$|r|<1$: (u_n) có giới hạn hữu hạn bằng $\frac{s}{1-r}$.

Ví dụ 22: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 0. B. 1. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số u_n có giới hạn hữu hạn hay không. Các đáp án có đáp án hữu hạn, có đáp án vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

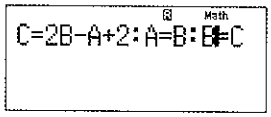
Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có $2\lim u_n = 2\lim u_n - \lim u_{n-1} + \lim 2 \Rightarrow L = 2L - L + 2 \Rightarrow 0 = 2$, vô lí.

Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ($-\infty$ và $+\infty$), vậy chưa thể chọn được đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau:

Cách 1: Ta có $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 4, u_4 = 9, u_5 = 16$. Dự đoán $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2 = [(n+1)-1]^2$.

Vậy $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $\lim u_n = \lim (n-1)^2 = +\infty$.



Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như hình bên.

Bấm CALC. Máy hỏi B? nhập 1 rồi ấn phím =, máy hỏi A? nhập 0 rồi ấn phím = liên tiếp. Ta thấy giá trị của C ngày một tăng lên. Vậy chọn đáp án giới hạn của dãy số là $+\infty$.

Dạng 3 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Ví dụ 23: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515...$ (chu kì 15). a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{m}{n}$, trong đó m và n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

A. $m+n=104$. B. $m+n=312$. C. $m+n=38$. D. $m+n=114$.

Đáp án A.

Lời giải

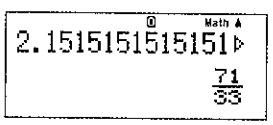
Cách 1: Ta có $a = 2,151515... = 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$

Vì $\frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{100}$ và công bội $q = \frac{1}{100}$ nên $a = 2 + \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 2 + \frac{15}{99} = \frac{213}{99} = \frac{71}{33}$.

Vậy $m = 71, n = 33$. Do đó $m + n = 71 + 33 = 104$.

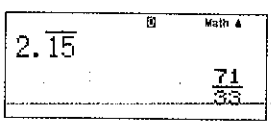
Cách 2: Đặt $b = 0,151515... \Rightarrow 100b = 15 + b \Rightarrow 99b = 15 \Rightarrow b = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$.

Vậy $a = 2 + b = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$. Do đó $m = 71, n = 33 \Rightarrow m + n = 71 + 33 = 104$.



Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số 2,151515151515151515 (nhiều bộ số 15, cho tràn màn hình) rồi bấm phím =. Máy hiển thị kết quả như hình bên.

Có nghĩa là $2,(15) = \frac{71}{33}$. Vậy $m = 71, n = 33$. Do đó $m + n = 71 + 33 = 104$.



Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm 2 . ALPHA √ 1 5 =. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Có nghĩa là $2,(15) = \frac{71}{33}$. Do đó $m + n = 71 + 33 = 104$.

Ví dụ 24: Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,32111... được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a và b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

A. $a-b=611$. B. $a-b=-611$.

C. $a-b=27901$. D. $a-b=-27901$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

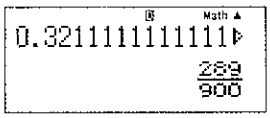
$$0,32111=\frac{32}{100}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...=\frac{32}{100}+\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{32}{100}+\frac{1}{900}=\frac{289}{900}.$$

Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

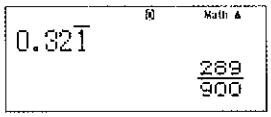
Cách 2: Đặt $x=0,32111...\Rightarrow 100x=32,111...$. Đặt $y=0,111...$ thì $100x=32+y$.

Ta có $y=0,111...\Rightarrow 10y=1+y\Rightarrow 9y=1\Rightarrow y=\frac{1}{9}$.

Vậy $100x=32+\frac{1}{9}=\frac{289}{9}\Rightarrow x=\frac{289}{900}\Rightarrow a=289, b=900\Rightarrow a-b=289-900=-611$.



Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số 0,32111111111111111111 (nhiều số 1, cho tràn màn hình) rồi bấm phím $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.



Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{0}\boxed{.}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{ALPHA}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{1}\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Tổng quát:

Xét số thập phân vô hạn tuần hoàn

$a=\overline{x_1x_2...x_m,y_1y_2...y_nz_1z_2...z_kz_1z_2...z_kz_1z_2...z_k...}$.

Khi đó $a=\overline{x_1x_2...x_m}+\frac{\overline{y_1y_2...y_n}}{\underbrace{10...0}_{n}}+\frac{\overline{z_1z_2...z_k}}{\underbrace{99...9}_{k}\underbrace{0...0}_{n}}$.

Chẳng hạn: $2,151515...=2+\frac{15}{99}$; $0,32111...=\frac{32}{100}+\frac{1}{900}$.

Dạng 4 Tìm giới hạn của dãy số mà số hạng tổng quát là tổng *n* số hạng đầu tiên của một dãy số khác

Ví dụ 25: Tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ bằng:

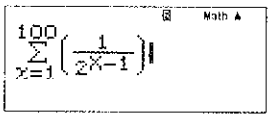
A. 1. B. 2. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

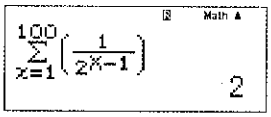
Đáp án B.

Lời giải:

Cách 1: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=\frac{1}{2}$.

Do đó $S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.





Cách 2: Sử dụng MTCT. Sử dụng chức năng tính tổng. Nhập vào màn hình như hình bên. Bấm phím $\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả bằng 2.

Lưu ý: Ở bài này, ta phải nhập số hạng tổng quát bằng $\frac{1}{2^{X-1}}$, vì $u_1 = 1 = \frac{1}{2^{1-1}}$.

Nếu nhập số hạng tổng quát bằng $\frac{1}{2^X}$ thì kết quả sẽ bằng 1 và là kết quả sai.

Mặt khác nếu cho X chạy từ 1 đến 10^3 thì máy sẽ báo lỗi do khối lượng tính toán quá lớn, vượt khả năng của máy.

Trong trường hợp đó ta quay lại điều chỉnh biên độ của X cho không quá lớn thì máy sẽ báo kết quả như trên.

Ví dụ 26: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

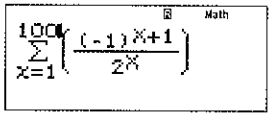
Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$.

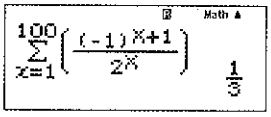
Cách 1: u_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó $u_n = \frac{1}{2}.\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra $\lim u_n = \lim \frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{3}$.

Cách 2: $\lim u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + ...$.

Vậy $\lim u_n$ bằng tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{2}$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó $\lim u_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$.





Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như hình bên.

Ấn phím $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả bằng $\frac{1}{3}$.

Do đó chọn đáp án A.

Nhận xét: Rõ ràng, nếu thuộc công thức, thì bài toán này giải thông thường sẽ nhanh hơn việc giải bằng MTCT!

Khi sử dụng MTCT, với những bài toán tính tổng có chứa lũy thừa a^n không nên tính với n quá lớn, nếu không máy sẽ báo lỗi do vượt quá khả năng tính toán của máy.

Ví dụ 27: $\lim\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Đáp án C.

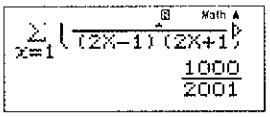
Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\lim\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.



Nhập vào màn hình biểu thức $\sum_{X=1}^{1000}\left(\frac{1}{(2X-1)\times(2X+1)}\right)$, bấm dấu $\boxed{=}$.

Máy hiển thị kết quả như hình bên.

Vậy chọn đáp án C.

Tổng quát: Ta có

$$\lim\left(\frac{1}{k(k+d)}+\frac{1}{(k+d)(k+2d)}+...+\frac{1}{(k+(n-1)d)(k+nd)}\right)=\frac{1}{d.k}.$$

Chẳng hạn như trong ví dụ trên thì $k=1$ và $d=2$. Do đó giới hạn là $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$.

NHỚ

Kinh nghiệm cho thấy, nhiều bạn hay quên mất d khi tính toán giới hạn của dãy có dạng như bên.

Ví dụ 28: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+2+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n=0$. **B.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n=1$.

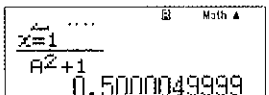
D. Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n\to+\infty$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\Rightarrow\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

Do đó $\lim u_n=\lim\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{1}{2}$.



Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^5 cho biến A. Nhập vào màn hình biểu thức $\frac{\sum_{X=1}^{A}(X)}{A^2+1}$, bấm dấu $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án **B.**

Lưu ý: Tổng $1+2+3+...+n$ trong ví dụ trên là một tổng quen thuộc. Đó chính là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$. Do đó nếu không thuộc công thức $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, ta có thể sử dụng công thức tính tổng của một cấp số cộng để tính tổng đó.

Để làm tốt các dạng bài tập như trên, các em cần nhớ công thức tính tổng của một cấp số cộng, một cấp số nhân và một số tổng quen thuộc, chẳng hạn:

a) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

b) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

STUDY TIP

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng:

$$S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2};$$

$$S_n=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}.$$

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân:

$$S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ví dụ 29: $\lim \frac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}$ bằng:

A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{5}{6}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) với $u_1=1$, $u_n=4n-3$ và công bội $d=4$.

Do đó $1+5+9+...+4n-3=\frac{n(1+4n-3)}{2}=\frac{n(4n-2)}{2}$.

Tương tự ta có: $2+7+12+...+5n-3=\frac{n(2+5n-3)}{2}=\frac{n(5n-1)}{2}$.

Vậy $\lim \frac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}=\lim \frac{n(4n-2)}{n(5n-1)}=\frac{4}{5}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình $\frac{\sum_{X=1}^{1000}(4X-3)}{\sum_{X=1}^{1000}(5X-3)}$, bấm phím $\boxed{=}$, ta thấy kết quả bằng $\frac{3998}{4999}$ ($\approx \frac{4}{5}$). Vậy chọn đáp án A.

STUDY TIP

Nếu tử thức là tổng của $n+i$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai d, mẫu thức là tổng của $n+k$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai d' thì phân thức có giới hạn là $\frac{d}{d'}$ $(i,k\in\mathbb{Z})$.

Ví dụ 30: $\lim \frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ bằng:

A. $+\infty$. B. 3. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $q=3$.

Do đó $3+3^2+3^3+...+3^n=3.\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$.

Mẫu thức là tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_1=1$ và $q=2$. Do đó $1+2+2^2+...+2^n=2.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2(2^{n+1}-1)$.

Vậy $\lim \frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}=\lim \frac{3}{4}.\frac{3^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{3}{4}\lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=+\infty$.

Cách 2: Nhập vào màn hình $\frac{\sum_{X=1}^{20}3^X}{\sum_{X=1}^{21}2^{X-1}}$, bấm phím $\boxed{=}$, ta thấy kết quả hiển thị trên màn hình là 2493,943736.

Do đó chọn đáp án A.

STUDY TIP

Nếu tử thức là tổng của $n+i$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q>1$, mẫu thức là tổng của $n+k$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q'>1$ thì:

- Phân thức có giới hạn là $+\infty$ nếu $q>q'$;
- Phân thức có giới hạn là 0 nếu $q<q'$.

Bổ sung: (*Định lí kẹp*)

Xét ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n). Giả sử với mọi n ta có $u_n \le v_n \le w_n$. Khi đó nếu $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L$.

Ví dụ 31: $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\right)$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $+\infty$.

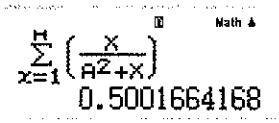
Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\frac{1+2+...+n}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n} \le \frac{1+2+...+n}{n^2+1}$.

Mà $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2+n} = \lim\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \frac{1}{2}$; $\lim\frac{1+2+...+n}{n^2+1} = \lim\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$.



Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^3 cho A. Nhập vào màn hình $\sum_{X=1}^{A}\frac{X}{A^2+X}$, bấm phím $\boxed{=}$, kết quả hiển thị như hình bên. Vậy chọn đáp án **B.**

Ta thấy rằng, trong trường hợp không thuộc công thức, sử dụng máy tính cầm tay là một giải pháp hiệu quả. Tuy nhiên nếu rèn luyện nhiều, cọ xát nhiều dạng bài tập, thì có thể sử dụng MTCT sẽ cho kết quả chậm hơn là tính toán thông thường!

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài tập lí thuyết

Câu 1: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$. B. $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.

C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$. D. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$. B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$.

C. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$. D. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7: Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$. B. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$.

C. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$. D. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8: Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{3}$. B. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \frac{1}{5}$.

C. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$. D. $\lim \frac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

Dạng 2: Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức

Câu 9: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. B. $(\cos n)$. C. $((-1)^n)$. D. $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Câu 10: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. B. $((0,99)^n)$.

C. $((-0,99)^n)$. D. $((1,02)^n)$.

Câu 11: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = -1$.

D. Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 12: Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2 - n^3)$. B. $\lim(n^2 - 4n^3)$.

C. $\lim(3n^2 - n)$. D. $\lim(3n^3 - n^4)$.

Câu 13: $\lim \frac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 14: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \frac{n^2 + 3n^3 + 2}{n^2 + n}$. B. $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$.

C. $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. D. $\lim \frac{n^2 - n + 1}{1 - 2n}$.

Câu 15: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim\left(1 + \frac{n^2 \sin 3n}{n^3 + 1}\right)$. B. $\lim \frac{2^n - \cos 5n}{2^n}$.

C. $\lim \frac{n^2 + \sin^2 3n}{n^2 + 5}$. D. $\lim \frac{3^n + \cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 16: Để tính $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}\right)$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)=\lim\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Bước 2:

$$\lim\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Bước 3: Ta có $\lim n=+\infty;\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=0$.

Bước 4: Vậy $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}\right)=0$.

Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 17: $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 18: $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: $\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 20: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)n$. **B.** $\lim\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right)$. **D.** $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$.

Câu 21: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?

A. $\lim\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}$. **B.** $\lim\left(\sqrt[3]{1+n^3}-n\right)$.

C. $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$. **D.** $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$.

Câu 22: Biết $\lim\frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $m.n=10$. **B.** $m.n=14$.

C. $m.n=15$. **D.** $m.n=21$.

Câu 23: Tìm $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{3}$.

Dạng 3: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Câu 24: Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},...$ có tổng là một phân số tối giản $\frac{m}{n}$. Tính $m+2n$.

A. $m+2n=8$. **B.** $m+2n=7$.

C. $m+2n=4$. **D.** $m+2n=5$.

Câu 25: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,27323232...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{m}{n}$ (m,n nguyên dương). Hỏi m gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

Câu 26: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu của cấp số nhân đó là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 27: Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\frac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là

A. $S=\left\{\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$.

C. $S=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **D.** $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 28: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

Dạng 4: Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi

Câu 29: Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=a$ và $u_{n+1}=1+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$, $2u_{n+1}=u_n+1$ với mọi $n\ge 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n=-\infty$. B. $\lim S_n=+\infty$.

C. $\lim S_n=1$. D. $\lim S_n=-1$.

Câu 31: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$, $u_2=2$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=\frac{1}{4}$, $u_{n+1}=u_n^2+\frac{u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=\frac{1}{4}$. B. $\lim u_n=0$.

C. $\lim u_n=\frac{1}{2}$. D. $\lim u_n=+\infty$.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$ và $u_{n+1}=u_n+2n+1$. Khi đó $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng

A. $+\infty$. B. 0. C. 1. D. 2.

Dạng 5: Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số

Câu 34: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a\le b$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n=a$. B. $\lim u_n=b$.

C. $\lim u_n=\frac{a+2b}{3}$. D. $\lim u_n=\frac{2a+b}{3}$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n-m}{5n+2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kì.

B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.

C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.

D. không tồn tại số m.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là

A. -4. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2n^2+n}-a\sqrt{2n^2-n}$ có giới hạn hữu hạn.

A. $a\in\mathbb{R}$. B. $a\in(-\infty;1)$.

C. $a\in(1;+\infty)$. D. $a=1$.

Câu 38: Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a,b để $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=2$.

A. $a+b=2$. B. $a-b=2$. C. $a+b=4$. D. $a-b=4$.

Câu 39: Tìm số thực a để $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2}=2$.

A. $a=10$. B. $a=100$. C. $a=14$. D. $a=144$.

Câu 40: Tìm số thực a để $\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=6$.

A. $a=2$. B. $a=4$. C. $a=6$. D. $a=8$.

Câu 41: Tìm các số thực a và b sao cho:

$$\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0.$$

A. $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$. B. $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$. C. $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$. D. $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$.

Dạng 6: Tìm giới hạn của dãy số mà số hạng tổng quát là tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số khác

Câu 42: $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 43: $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng

A. 0. B. 1. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 44: Tìm $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$ ta được:

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. 2.

Câu 45: $\lim\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. B. $+\infty$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 46: Cho dãy số (u_n). Biết $\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n\ge 1$. Tìm $\lim\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k$.

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. $+\infty$.

Câu 47: $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. B. $\frac{17}{100}$. C. $\frac{17}{200}$. D. $\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Trong đáp án cho các bài tập dưới đây, có nhiều bài tôi chỉ nêu việc áp dụng các kết quả đã trình bày ở phần lí thuyết và ví dụ. Lời giải đầy đủ hoặc việc sử dụng MTCT xin dành lại cho độc giả.

Dạng 1: Bài tập lí thuyết

Câu 1: Đáp án A.

Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn 0.

Câu 2: Đáp án B.

Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn $+\infty$.

Câu 3: Đáp án C.

Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

Câu 4: Đáp án D.

Xem lại định lí 4.2.

Câu 5: Đáp án A.

Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn $+\infty$.

Câu 6: Đáp án A.

Nếu $q=1$ thì $\lim q^n=\lim 1^n=\lim 1=1\neq 0$.

Câu 7: Đáp án C.

Ta có $\lim\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{3\lim u_n-1}{\lim u_n+1}=\dfrac{3.3-1}{3+1}=\dfrac{8}{4}=2$.

Câu 8: Đáp án C.

Ta có $\dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5}=\dfrac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_n^2}}{3+\dfrac{5}{u_n^2}}$.

Vì $\lim u_n=+\infty$ nên $\lim\dfrac{1}{u_n}=0$, $\lim\dfrac{1}{u_n^2}=0$.

Vậy $\lim\dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5}=\dfrac{0+0}{3+0}=\dfrac{0}{3}=0$.

Dạng 2: Bài tập tính giới hạn dãy số cho bởi công thức

Câu 9: Đáp án D.

Ta có $\lim s_n=\lim\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Vậy chọn đáp án D.

Bổ sung:

a) Ta chứng minh dãy số $(\sin n)$ không có giới hạn.

Thật vậy, vì $|\sin n|\le 1$ nên nếu dãy số $(\sin n)$ có giới hạn thì giới hạn đó là hữu hạn.

Giả sử $\lim\sin n=L$. Suy ra $\lim\sin(n+2)=L$

$\Rightarrow 0=\lim\left[\sin(n+2)-\sin n\right]=2\sin 1.\lim\cos(n+1)$

$\Rightarrow \lim\cos(n+1)=0\Rightarrow \lim\cos n=0;\lim\cos(n+2)=0$

$\Rightarrow 0=\lim\left[\cos(n+2)-\cos n\right]=-2\sin 1\sin(n+1)$

$\Rightarrow \sin(n+1)=0$. Vậy ta có

$1=\lim\left(\sin^2(n+1)+\cos^2(n+1)\right)=0+0=0$, vô lí.

Suy ra ĐPCM.

b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số $(\cos n)$ không có giới hạn.

c) Ta chứng minh dãy số $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng lên, các điểm $(-1)^n$ không chụm lại quanh bất kì một điểm L nào. Từ đó ta có ĐPCM.

Câu 10: Đáp án D.

Vì $1,02>1$ nên $\lim(1,02)^n=+\infty$.

(Các dãy số còn lại đều có $|q|<1$ nên đều có giới hạn bằng 0)

Câu 11: Đáp án A.

Vì $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$ nên $\lim|u_n-1|=0$. Suy ra $\lim u_n=1$.

Câu 12: Đáp án C.

Vì $3n^2-n$ có $a_2=3>0$ nên $\lim(3n^2-n)=+\infty$.

(Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng $-\infty$.)

Câu 13: Đáp án B.

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng 3 nên dãy có giới hạn hữu hạn.

Hệ số của n^3 trên tử bằng $2^2.1=4$, hệ số của n^3 dưới mẫu bằng $1.2=2$ nên giới hạn là $\dfrac{4}{2}=2$.

Câu 14: Đáp án A.

Phân thức $\dfrac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$ có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng $+\infty$.

(Phân thức $\dfrac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$ có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\dfrac{1}{2}$; Phân thức $\dfrac{2n^2-3n}{n^3+3n}$ có bậc tử thấp hơn bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng 0; Phân thức $\dfrac{n^2-n+1}{1-2n}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới

mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\infty$.)

Câu 15: Đáp án D.

+ $\left|\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right| \le \frac{n^2}{n^3+1}$ mà $\lim\frac{n^2}{n^3+1}=0$

nên $\lim\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}=0$. Do đó $\lim\left(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\cos 5n}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$ mà $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên $\lim\frac{\cos 5n}{2^n}=0$.

Do đó $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{2^n}=\lim\left(1-\frac{\cos 5n}{2^n}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right| \le \frac{1}{n^2+5}$ mà $\lim\frac{1}{n^2+5}=0$

nên $\lim\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}=0$.

Do đó $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}=\lim\left(\frac{n^2}{n^2+5}+\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right)=1$.

+ Vậy ba giới hạn đầu đều bằng 1 nên đáp án chắc chắn là D.

($\left|\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right| \le \frac{1}{3^{n+1}}$ mà $\lim\frac{1}{3^{n+1}}=0$ nên $\lim\frac{\cos n}{3^{n+1}}=0$.

Do đó $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}=\lim\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}+\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$.)

Câu 16: Đáp án D.

Vì $\lim n=+\infty; \lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=0$ nên không thể áp dụng quy tắc 2. Do đó Nam đã sai ở bước 4. (Quy tắc 2 áp dụng khi $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=L\ne 0$)

Câu 17: Đáp án D.

Vì hai căn thức $\sqrt{3n-1}$ và $\sqrt{2n-1}$ đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của n lại khác nhau nên suy ra giới hạn cần tìm bằng $+\infty$ (do $3>2$).

Thật vậy, ta có:

$$\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right).$$

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

nên $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=+\infty$.

Hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT kể kiểm tra kết quả trên.

Câu 18: Đáp án B.

Ta thấy tử thức có "bậc" bằng 1, mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của n trên tử thức bằng 1, hệ số của n dưới mẫu thức bằng 3 nên giới hạn cần tìm bằng $\frac{1}{3}$.

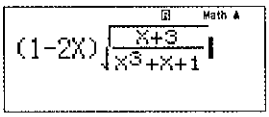
Thật vậy, ta có:

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}$$

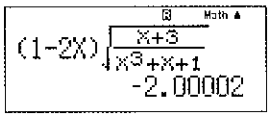
hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT kể kiểm tra kết quả trên.

Câu 19: Đáp án B.

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau:



Bấm CALC, máy hỏi X? nhập 10^5 rồi bấm phím =, máy hiển thị kết quả như sau



Do đó chọn đáp án B.

Lời giải chính xác:

$$\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}=\lim\left(\frac{1}{n}-2\right)\sqrt{\frac{n^3+3n^2}{n^3+n+1}}$$

$=-2.1=-2$.

Hoặc

$$\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}=\lim\frac{1-2n}{n}\sqrt{\frac{n+3}{n+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$=-2.1=-2$.

Câu 20: Đáp án D.

Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án là D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$$

$$=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 21: Đáp án C.

Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều là hữu hạn. Vậy đáp án là C.

Lưu ý: $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác:

Ta có: $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1}$.

Vì $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=1$, $\lim\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1=0$ và $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}>0\ \forall n$ nên $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=+\infty$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 22: Đáp án B.

Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian.

Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có "bậc" bằng 1. Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới hạn vô cực. Do đó ta chia tử và mẫu cho n để được

$$\lim\frac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\lim\frac{\sqrt{1-\frac{4}{n}}-\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-1}=\frac{-1}{\sqrt{3}-1}$$

Ta có $\frac{-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\frac{6-\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}$. Vậy $m=7$ và $n=2$ nên $m.n=7.2=14$.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có $\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n.3^{n+1}-5.2^n}=\frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$.

Từ đó dễ thấy $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=\frac{1}{3}$.

Thật vậy, $\frac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^n-2.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}{3-5.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

Từ đó suy ra $\lim\frac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}=\frac{1}{3}$.

Dạng 3: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Câu 24: Đáp án A.

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có $u_1=1$ và $q=-\frac{1}{2}$.

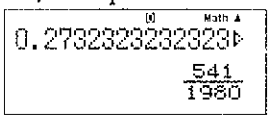
Do đó tổng của cấp số nhân đó là $S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$.

Suy ra $m=2$ và $n=3$. Vậy $m+2n=2+2.3=8$.

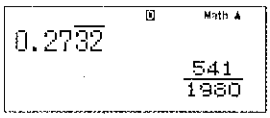
Câu 25: Đáp án A.

Ta có $0,27323232...=\frac{27}{100}+\frac{32}{9900}=\frac{541}{1980}$.

Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau:



hoặc



Vậy $m=541$, do đó chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có $\frac{u_1}{1-q}=2\Rightarrow u_1=2(1-q)$ (1).

Lại có $u_1+u_2+u_3=\frac{9}{4}\Rightarrow u_1.\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được:

$2(1-q).\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}\Rightarrow 1-q^3=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$.

Vậy $u_1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$.

Câu 27: Đáp án A.

$2x+1+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}$.

Vì $|x|<1$ nên $1-x+x^2-x^3+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=-x$.

Do đó ta có:

$3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{1+x}=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow 12x^2+7x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}$ (t/m $|x|<1$).

Câu 28: Đáp án C.

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng a $\Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ $\Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Do đó tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, tam

giác $A_2B_2C_2$ có diện tích $S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{3}{4}$, tam giác $A_3B_3C_3$ có diện tích $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\left(\frac{3}{4}\right)^2$, ... , tam giác $A_nB_nC_n$ có diện tích $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn có $q=\frac{3}{4}$.

Vậy $S_1+S_2+...+S_n+...=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}a^2$.

Vậy chọn đáp án C.

Dạng 4: Tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi

Câu 29: Đáp án D.

Ta thấy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là L. Ta có $L=1+\frac{L}{2}\Rightarrow L=2$.

Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ $(r=\frac{1}{2}, s=1)$.

Câu 30: Đáp án B.

Cách 1: Ta có $2u_{n+1}=u_n+1\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$.

Đặt $v_n=u_n-1$.

Khi đó $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n). Ta có:

$$T_n=v_1\frac{1-q^n}{1-q}=v_1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Suy ra $S_n=T_n+n=2v_1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+n$.

Vậy $\lim S_n=+\infty$.

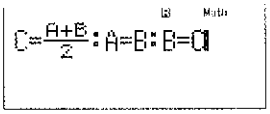
Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình:

$A=A+X:Y=\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}:X=Y$.

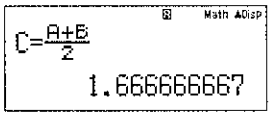
Bấm CALC, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? nhập 0, bấm = liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

Câu 31: Đáp án C.

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình:



Bấm CALC, máy hỏi A? nhập 1, máy hỏi B? nhập 2, máy hỏi C? nhập 0, bấm = liên tiếp cho tới khi giá trị của C không đổi.



Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn 1,(6) ta được $1,666666666\approx\frac{5}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a\leq b$. Người ta chứng minh được rằng $\lim u_n=\frac{a+2b}{3}$.

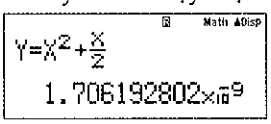
Câu 32: Đáp án B.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L. Khi đó ta có

$$L=L^2+\frac{L}{2}\Rightarrow 2L^2+L=2L\Rightarrow 2L^2=L\Rightarrow\left[\begin{array}{l}L=0\\L=\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L=0$ hay $L=\frac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0. Vậy chọn đáp án B.



Câu 33: Đáp án C.

Cách 1: Ta có:

$u_1=1^2$; $u_2=1+2.1+1=2^2$; $u_3=2^2+2.2+1=9=3^2$,...

Dự đoán $u_n=n^2$. Khi đó $u_{n+1}=u_n+2n+1=(n+1)^2$.

Vậy $u_n=n^2$ với mọi $n\geq 1$.

Suy ra $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{(n+1)^2}{n^2}=1$.

Do đó chọn đáp án C.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình:

$Y=X+2A+1:\frac{Y}{X}:X=Y:A=A+1$.

Bấm CALC, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập 1, bấm phím = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\frac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1. Vậy chọn đáp ánC.

Nhận xét: Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

Dạng 5: Tìm giới hạn của dãy số có chứa tham số

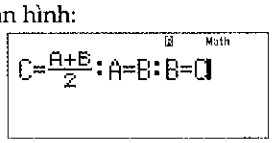
Câu 34: Đáp án C.

Đây là một bài toán chứa tham số.

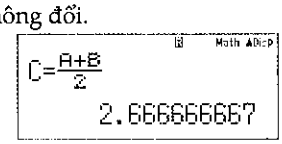
Vì là bài toán dạng trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn, cho $a=2$ và $b=3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3}=\frac{8}{3},\frac{2a+b}{3}=\frac{7}{3}$ và $a,b,\frac{a+2b}{3},\frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình:



Bấm CALC, máy hỏi A? nhập 2, máy hỏi B? nhập 3, máy hỏi C? nhập 0, bấm = liên tiếp cho tới khi giá trị của C không đổi.



Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,(6) ta được $2,(6)\approx\frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$. Do đó chọn đáp ánC.

Bổ sung: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a$, $u_2=b$, $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ với mọi $n\ge 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a\le b$.

a) Chứng minh rằng dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{|x_2-x_1|}{2^n}$ $\forall n\ge 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ $\forall n\ge 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Việc chứng minh bài toán trên xin dành lại cho độc giả.

Câu 35: Đáp án A.

Dễ thấy $\lim u_n=\lim\frac{3n-m}{5n+1}=\frac{3}{5}$ với mọi m.

Câu 36: Đáp án B.

Dễ thấy với $a=2$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{2n^2+5}=2$.

Thật vậy:

Nếu $a=0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{5}=+\infty$.

Nếu $a\ne 0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n=2$ thì $\frac{4}{a}=2\Leftrightarrow a=2$.

Câu 37: Đáp án D.

Từ kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ, ta thấy để (u_n) có giới hạn hữu hạn thì $a=1$.

Câu 38: Đáp án D.

Từ kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có:

$$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}=\frac{(a-b)n+2}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+bn+3}}$$

$$=\frac{a-b+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=\frac{a-b}{2}$.

Do đó để $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=2$ thì

$$\frac{a-b}{2}=2\Leftrightarrow a-b=4.$$

Câu 39: Đáp án B.

Ta có $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2}=\frac{a}{\sqrt{5}}$

Do đó ta phải có $\sqrt{a}=10\Leftrightarrow a=100$.

Câu 40: Đáp án C.

$\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=6\Leftrightarrow 6-a=\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)$

Ta có $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=0$. Do đó $6-a=0\Leftrightarrow a=6$.

Câu 41: Đáp án A.

$\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0\Leftrightarrow b=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$.

Để $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)$ hữu hạn thì $a>0$ (xem lại

phần Ví dụ). Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=0$. Vậy $b=0$.

Do đó đáp án là A.

Dạng 6: Tìm giới hạn của dãy số mà số hạng tổng quát là tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số khác

Câu 42: Đáp án A.

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}$ do tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 1, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 2.

Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

$$\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\lim\frac{1+2+3+...+n}{2(1+2+3+...+n)}=\frac{1}{2}.$$

Câu 43: Đáp án A.

Ta thấy tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 2, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 5. Mà $2<5$ nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là 0.

Câu 44: Đáp án B.

Ta có :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times...\times\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\times\frac{2.4}{3^2}\times\frac{3.5}{4^2}\times...\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Câu 45: Đáp án A.

Sử dụng định lí kẹp:

Ta có $\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}\le\frac{n!}{1^2\times2^2\times...\times n^2}$

$$=\frac{n!}{(1\times2\times...\times n)^2}=\frac{n!}{(n!)^2}=\frac{1}{n!}.$$

Mà $\lim\frac{1}{n!}=0$ nên suy ra

$$\lim\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}=0.$$

Câu 46: Đáp án B.

Ta có

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{3(n+1)^2+9(n+1)}{2}-\frac{3n^2+9n}{2}$$

$$=3n+6=3(n+1)+3.$$

Suy ra $u_n=3n+3$.

Vậy $\lim\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lim\frac{3n^2+9n}{2n(3n+3)}=\frac{3}{2.3}=\frac{1}{2}$.

Câu 47: Đáp án C.

Ta có $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}$.

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}-1}{2.5^{k+2}}=\frac{3}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k-\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$=\frac{3}{50}.\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1}{50}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{17}{200}.$$

Vậy chọn đáp án C.

Giới hạn của hàm số

A. Lý thuyết

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên)

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b$, $x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0$, $x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Định lí 1

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L.$$

Nhận xét

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.
- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

STUDY TIP

$x\to x_0^+$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

$x\to x_0^-$ nghĩa là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=+\infty$.

LƯU Ý

Các định nghĩa

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=[0;+\infty)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm 0 mà $f(x)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f(x)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số $g(x)=\sqrt{1-x}$, tại điểm $x_0=1$, ta chỉ xét giới hạn bên trái.

d) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

LƯU Ý

Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x_n)=+\infty$.

LƯU Ý

Các định nghĩa

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$ (c là hằng số).

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$, nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$, nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left[-f(x)\right]=-\infty$

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=LM$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[cf(x)\right]=cL$ với c là một hằng số.

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ ($M\neq 0$).

STUDY TIP

Giới hạn hữu hạn

Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|L|$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$.

c) Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Lưu ý

Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x \to x_0$, $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Tuy nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_0$.

STUDY TIP
Giới hạn của tích hai hàm số
- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích)

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)g(x)\right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP
Giới hạn của thương hai hàm số
Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:
- Mẫu thức càng tăng (dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).
- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).
- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		−	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$).

VI. Các dạng vô định: Gồm $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ và $\infty - \infty$.

B. Các dạng toán về giới hạn hàm số

Dạng 1

Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc

Phương pháp:

- Xác định đúng dạng bài toán: giới hạn tại một điểm hay giới hạn tại vô cực? giới hạn xác định hay vô định?
- Với giới hạn hàm số tại một điểm ta cần lưu ý: Cho $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Với giới hạn hàm số tại vô cực ta "xử lí" tương tự như giới hạn dãy số.
- Với giới hạn xác định, ta áp dụng trực tiếp định nghĩa giới hạn hàm số, các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc về giới hạn vô cực.

STUDY TIP
Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to x_0$
- Chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thỏa mãn: a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $a_n\to x_0$; $b_n\to x_0$.
- Chứng minh $\lim f(a_n)\neq\lim f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong hai giới hạn này không tồn tại.
- Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại.

TH $x\to x_0^{\pm}$ hoặc $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

Ví dụ 1: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=1$. B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=-1$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x=0$. D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại.

Đáp án D.

Lời giải

Xét dãy số (x_n) với $x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $x_n\to+\infty$ và $\lim\sin x_n=\lim\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$. (1)

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

Ta có $y_n\to+\infty$ và $\lim\sin y_n=\lim\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=-1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Cách 1 (sử dụng định nghĩa):

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n>0$, $x_n\neq3$ và $x_n\to3$ khi $n\to+\infty$. Ta có $\lim f(x_n)=\lim\frac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}}=\frac{3^2+1}{2\sqrt{3}}=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2 (sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):

Theo Định lí 1 ta có:

STUDY TIP
Giới hạn tại một điểm
Nếu $f(x)$ xác định tại x_0 và tồn tại một khoảng $(a;b)$ thuộc tập xác định của $f(x)$ chứa x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- Việc sử dụng hay không sử dụng MTCT để tính $f(x_0)$ tùy thuộc vào mức độ phức tạp của $f(x_0)$ và khả năng tính toán của độc giả.

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to3}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to3}\left(2\sqrt{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to3}x^2+\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}2.\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to3}x.\lim\limits_{x\to3}x+\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}2.\sqrt{\lim\limits_{x\to3}x}}$$

$$=\frac{3.3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

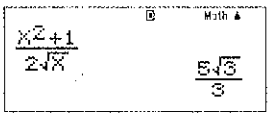
Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

Cách 3:

Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên $(0;+\infty)$ chứa điểm $x_0=3$ nên

$$\lim_{x\to3} f(x)=f(3)=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó sử dụng MTCT ta làm như cách 4 dưới đây.



Cách 4: Nhập biểu thức của $f(x)$ vào màn hình. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án **C.**

> **Ví dụ 3:** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây?
>
> **A.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=5$.
>
> **C.** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to3$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $3\in(2;+\infty)$.

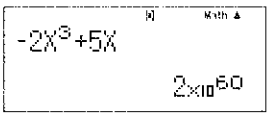
Cách 1: $\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)=\frac{3+2}{3-2}=5$.

Cách 2: Nhập biểu thức của hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ vào màn hình MTCT. Bấm phím $\boxed{\text{CALC}}$, máy hỏi X? nhập 3 $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình bên. Vậy $\lim\limits_{x\to3}\frac{x+2}{x-2}=5$.

> **Ví dụ 4:** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:
>
> **A.** -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải



Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị của $f(x)=-2x^3+5x$ tại một điểm có giá trị âm rất nhỏ (do ta đang xét giới hạn của hàm số khi $x\to-\infty$), chẳng hạn tại -10^{20}. Máy hiển thị kết quả như hình bên.

Đó là một giá trị dương rất lớn. Vậy chọn đáp án C, tức $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=+\infty$.

Cách 2: Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\frac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\frac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$. Do đó chọn C.

Lưu ý

- Để hiểu tại sao $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2$ xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.
- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi x dần tới vô cực, nhưng là khi $x\to-\infty$. Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi $n\to+\infty$. Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.

Lưu ý: Có thể dễ dàng chứng minh được kết quả sau:

Cho hàm số $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$ ($a_k\neq0$) là một đa thức bậc k.

x		k	a_k	Giới hạn của $f(x)$
$x\to+\infty$		Tùy ý	$a_k>0$	$+\infty$
			$a_k<0$	$-\infty$
$x\to-\infty$	k chẵn		$a_k>0$	$+\infty$
			$a_k<0$	$-\infty$
	k lẻ		$a_k>0$	$-\infty$
			$a_k<0$	$+\infty$

Thật vậy, ta có $f(x)=x^k\left(a_k+\dfrac{a_{k-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{k-1}}+\dfrac{a_0}{x^k}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_k+\dfrac{a_{k-1}}{x}+...+\dfrac{a_1}{x^{k-1}}+\dfrac{a_0}{x^k}\right)=a_k$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$ với k tùy ý, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$ nếu k chẵn, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=-\infty$ nếu k lẻ nên ta dễ dàng suy ra bảng kết quả trên.

STUDY TIP

Giới hạn tại vô cực của hàm đa thức là vô cực, chỉ phụ thuộc vào số hạng chứa lũy thừa bậc cao nhất

- Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào **hệ số** của lũy thừa bậc cao nhất. (Giống với giới hạn của dãy số dạng đa thức)
- Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào **bậc và hệ số** của lũy thừa bậc cao nhất.

Ví dụ 5: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 3. D. 2.

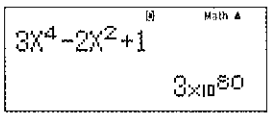
Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$ ($x\to-\infty$, k chẵn và $a_k>0$). Thật vậy, ta có: $3x^4-2x^2+1=x^4\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)=3>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x)=3x^4-2x^2+1$ tại $x=-10^{20}$, ta được kết quả như hình bên. Kết quả là một số dương rất lớn. Do đó chọn đáp án A.



Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau: Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn vô cực tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

STUDY TIP

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|=+\infty$.

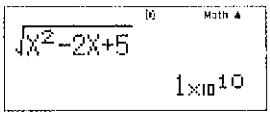
Khi $x\to-\infty$ thì $x<0$.

Với $x<0$ ta có $\sqrt{x^2}=-x$.

Cần đặc biệt lưu ý các điều trên khi tính giới hạn tại $-\infty$ của hàm chứa căn thức.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.



Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để tính giá trị của $f(x)$ tại một giá trị âm rất nhỏ của x, chẳng hạn tại $x=-10^{20}$ ta được kết quả như hình bên. Kết quả này là một số dương rất lớn. Do đó ta chọn đáp án B. (Dễ thấy kết quả hiển thị trên máy tính như trên chỉ là kết quả gần đúng do khả năng tính toán hạn chế của MTCT. Tuy nhiên kết quả đó cũng giúp ta lựa chọn được đáp án chính xác.)

Lưu ý

- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).
- Có thể thấy như sau: Vì

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$$

mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty$.

Ví dụ 7: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 3.

Đáp án A.

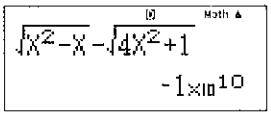
Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án A.

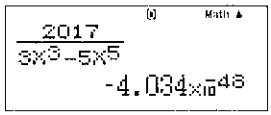
Ví dụ 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

A. $\frac{2017}{3}$. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Đó là một kết quả rất gần 0. Do đó chọn đáp án D.

STUDY TIP

Khi hàm số không xác định tại x_0 thì ta thử áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng $L.\infty;\frac{L}{\infty};\frac{L}{0}$. Lưu ý cách xác định dấu của giới hạn.

- Dạng $\frac{L}{\infty}$: Giới hạn là 0.
- Dạng $L.\infty$ và $\frac{L}{0}$: Giới hạn là vô cực.

Ví dụ 9: Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$ là:

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 3. D. $\frac{7}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $(-\infty;+\infty)\setminus\{2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$, $x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to2^+}(3x-7)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo Quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị của $f(x)$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi

Math Error (do $f(x)$ không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị của $f(x)$ tại $x=2+10^{-10}$ (tức 2,0000000001) là một giá trị của x lớn hơn 2 và rất gần 2. Kết quả như hình bên. Kết quả là một số âm rất nhỏ.

Do đó chọn đáp án B.

STUDY TIP

$x \to x_0^+$ nghĩa là $x \to x_0$ và $x > x_0$.

$x \to x_0^-$ nghĩa là $x \to x_0$ và $x < x_0$.

Nếu $x \to x_0^+$ thì tính giá trị hàm số tại $x = x_0 + 10^{-k}$.

Nếu $x \to x_0^-$ thì tính giá trị hàm số tại $x = x_0 - 10^{-k}$.

Trong đó k là một số nguyên dương.

Ví dụ 10: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$,

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2,

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy?

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Bước 4

Đáp án B.

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g(x)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g(x)<0$ với mọi $x\in(1;2)$.

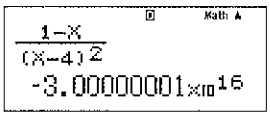
Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ta kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

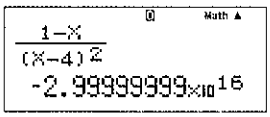
Ví dụ 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$ bằng:

A. 0. B. -3. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Đáp án C.

Lời giải





Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 4}(1-x)=-3<0$; $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq 4$ nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$. Vậy chọn đáp án C.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=4{,}00000001$ hoặc tại $x=3{,}99999999$ ta được các kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ khi } x\geq 1\\ x^2-3 \text{ khi } x<1\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$. B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=7$. D. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=7$.

STUDY TIP

Cần xác định đúng biểu thức của $f(x)$ khi $x\to x_0^+$ và khi $x\to x_0^-$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5.1+2=7$. Vì chỉ có một đáp án đúng nên chọn đáp án D.

Giải thích thêm: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3\right)=1^2-3=-2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ không tồn tại.

Các đáp án A, B, C đều sai.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} \text{ khi } x\ge 3 & (1)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} \text{ khi } x<3. & (2)\end{cases}$

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$?

A. 19. B. 1.

C. -1. D. Không có số nào thỏa mãn.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3^2-5}=2$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2-m}{x+2}$ khi $x<3$ (m là tham số, $m>0$).

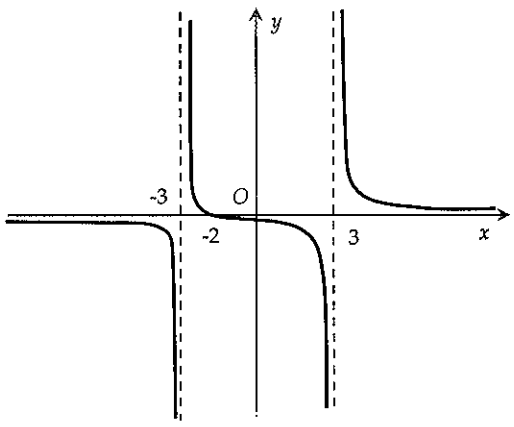
Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-m}{x+2}=\dfrac{3^2-m}{3+2}=\dfrac{9-m}{5}$.

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 3$ thì

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-} f(x)\Leftrightarrow \frac{9-m}{5}=2\Leftrightarrow m=-1.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\sqrt{X^2-5}$ khi $X=3$ được kết quả bằng 2. Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{X^2-A}{X+2}$ khi $X=3$ và A lần lượt nhận các giá trị bằng 19, 1 và -1. Ta thấy khi $A=-1$ thì biểu thức nhận giá trị bằng 2. Vậy chọn đáp án C.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Quan sát đồ thị và cho biết trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. C. $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$. D. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

Đáp án C.

Lời giải

Khi $x\to -3^+$, đồ thị hàm số là một đường cong đi lên từ phải qua trái. Do đó $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$. Tương tự vậy ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.

Do đó đáp án là C.

Dạng 2 Tìm giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$

1. Bài toán:

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc căn thức.

Phương pháp giải (tự luận)

- Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, vì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ nên $f(x)$ và $g(x)$ cùng có nghiệm $x=x_0$. Do đó ta phân tích được $f(x)=(x-x_0)A(x)$ và $g(x)=(x-x_0)B(x)$. Khi đó ta có: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$ và công việc còn lại là đi tính $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$.

- Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

STUDY TIP

Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp các định lí về giới hạn hữu hạn hay các quy tắc về giới hạn vô cực đã biết thì ta gọi đó là các dạng vô định.

Kí hiệu các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ và $\infty-\infty$.

Để tính giới hạn dạng vô định ta phải biến đổi biểu thức của hàm số về dạng áp dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *"khử dạng vô định"*.

Ví dụ 1: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ bằng:

A. 1. B. 4. C. –2. D. –4.

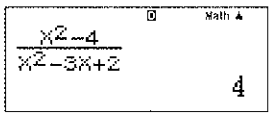
Đáp án B.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=0$ nên đây là giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$. Ta thấy x^2-4 và x^2-3x+2 đều triệt tiêu tại $x=2$ nên $x=2$ là nghiệm của x^2-4 và x^2-3x+2. Từ đó ta có cách giải như sau.

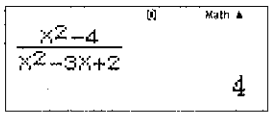
Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=\frac{2+2}{2-1}=4$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ tại $x=2$ ta thấy máy báo lỗi Math Error (do hàm số không xác định tại $x=2$). Quay lại tính giá trị hàm số tại 2,0000000001 ta được kết quả như sau:



Lại quay lại tính giá trị hàm số tại 1,9999999999 ta được kết quả như sau:



STUDY TIP

Phân tích đa thức thành nhân tử

- Áp dụng các Hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Khi đã biết $f(x)$ có nghiệm $x=x_0$, ta sử dụng lược đồ Hooc-ne hoặc chia $f(x)$ cho $x-x_0$ được thương $A(x)$. Khi đó $f(x)=(x-x_0)A(x)$.
- Áp dụng kết quả: Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Tổng quát: Nếu PT $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0=0$ có các nghiệm thực $x_1,x_2,...,x_m$ thì $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0=a_k(x-x_1)...(x-x_m)A(x)$, trong đó $A(x)$ là đa thức bậc $k-m$. Tuy nhiên, trong thực tế, ta dùng kết quả này khi có đủ k nghiệm thực, tức $m=k$. Trường hợp ngược lại nên dùng lược đồ Hooc-ne. (Với PT bậc hai, bậc ba có thể dùng MTCT để tìm nghiệm)

Ví dụ 2: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1}$ $(m,n\in\mathbb{N}^*)$, ta được kết quả:

A. $+\infty$. B. $m-n$. C. m. D. 1.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1 : Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1} - \dfrac{x^n-1}{x-1}\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right) = m$. Tương tự $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} = n$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m - x^n}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^m-1}{x-1} - \dfrac{x^n-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} - \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1} = m-n$.

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, chẳng hạn $m=3$ và $n=7$. Sử dụng MTCT tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1}$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^7}{x-1} = -4$. Vậy đáp án đúng là B.

STUDY TIP

$x^m - 1 = (x-1)\times\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1} = m$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1} = m-n$

Ví dụ 3: Chọn khẳng định đúng

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = 0$. B. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = +\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = -\infty$. D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2} = \dfrac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(x^3-3x+2\right)} = \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)^2(x+2)}$

$= \dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)} = +\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)(x+2)}$ không tồn tại.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại. Vậy chọn đáp án D.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ tại $x=1$ ta thấy máy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=1,0000001$ và tại $x=0,9999999$ ta được kết quả như bên. Hai kết quả trên một là số dương rất lớn, một là số âm rất nhỏ. Do đó có thể kết luận $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^3-3x+2}$ không tồn tại.

Nhận xét: Nếu chỉ tính giá trị biểu thức tại một điểm thì rất dễ chọn đáp án sai.

VD3: Vì $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-3x+2\right)=0$

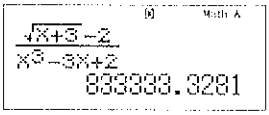
nên đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$.

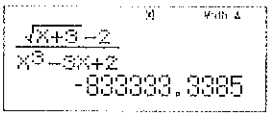
Tuy nhiên ta chưa thể phân tích ngay $\sqrt{x+3}-2$ thành nhân tử mà phải nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp của $\sqrt{x+3}-2$ là $\sqrt{x+3}+2$. Từ đó ta có lời giải như cách 1.

Nhận xét

- Ở đây ta đã chuyển dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ về dạng xác định $\dfrac{L}{0}$

- Dùng máy tính cầm tay tìm nghiệm của phương trình $x^3-3x+2=0$ ta được $x_1=1$ $x_2=-2$. Như vậy phải có một nghiệm là nghiệm kép do là phương trình bậc ba. Trong trường hợp này, theo Tip trên đã nêu, ta nên dùng lược đồ Hooc-ne để phân tích đa thức x^3-3x+2 thành nhân tử.





$\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

nên đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$.

Ta chưa thể phân tích $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}$ thành nhân tử. $f(x)$ lại là hiệu của hai căn thức không cùng bậc. Ta để ý thấy $\sqrt{2x-1}$ và $\sqrt[3]{3x-2}$ đều đạt giá trị bằng 1 tại $x=1$ nên ta biến đổi như sau

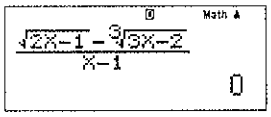
$f(x)=\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{3x-2}\right)$

rồi tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp.

STUDY TIP

Cho $f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-\sqrt[3]{B(x)}}{x-x_0}$ (chứa hai căn khác bậc) trong đó $A(x_0)=B(x_0)=m$ thì ta biến đổi như sau:

$f(x)=\frac{\sqrt{A(x)}-m+m-\sqrt[3]{B(x)}}{x-x_0}$



Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}+\frac{1-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$

$$=\frac{2x-2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)(x-1)}+\frac{3-3x}{\left(1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)(x-1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}-\frac{3}{1+\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}}\right]=0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ tại $x=1$ thấy báo lỗi Math Error. Quay lại tính giá trị biểu thức tại $x=0.99999999$ và tại $x=1.00000001$ ta đều được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B tức là $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}=0$.

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to1}t=0$ và

$$\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-(2t+1)}{t^2}+\frac{(2t+1)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

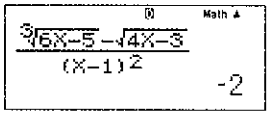
$$=\frac{6t+1-\left(8t^3+12t^2+6t+1\right)}{t^2\left[\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+(2t+1)^2\right]}+\frac{\left(4t^2+4t+1\right)-(4t+1)}{t^2\left(2t+1+\sqrt{4t+1}\right)}$$

$$=\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+2t+1}+\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+2t+1}+\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}\right)$

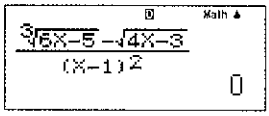
Mà $\lim\limits_{t\to0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(6t+1)^2}+(2t+1).\sqrt[3]{6t+1}+2t+1}=\frac{-12}{3}=-4$; $\lim\limits_{t\to0}\frac{4}{2t+1+\sqrt{4t+1}}=\frac{4}{2}=2$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=-4+2=-2$.



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ tại $x=0.9999999$ và tại $x=1,0000001$ ta đều được kết quả như hình bên.

Do đó chọn đáp án **B.**



Lưu ý:

- Trong cách thứ 2, nếu tính giá trị biểu thức tại $x=0,999999999$ hoặc tại $x=1,000000001$ thì ta được kết quả như hình bên do vượt qua giới hạn tính toán của máy. Do đó nếu không thử lại với các giá trị lớn hơn thì có thể ta sẽ chọn đáp án A.

- Ở bài này có nhiều vấn đề cần phân tích thêm. Nếu làm như ví dụ 4 thì ta sẽ biến đổi $\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-1}{(x-1)^2}+\dfrac{1-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}$ rồi nhân liên hợp để thu được $\dfrac{\sqrt[3]{6x-5}-\sqrt{4x-3}}{(x-1)^2}=\dfrac{6\left(1+\sqrt{4x-3}\right)-4\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(6x-5)^2}+\sqrt[3]{6x-5}+1\right)\left(1+\sqrt{4x-3}\right)}$.

STUDY TIP

Trong nhiều bài toán, không nên chỉ tính giá trị hàm số tại một điểm mà nên tính tại một số điểm từ lớn đến nhỏ và từ cả hai phía trái, phải của x_0.

Ta thấy giới hạn mới thu được vẫn còn là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên vẫn tiếp tục phải khử dạng vô định. Mà việc khử này sẽ phức tạp do biểu thức mới thu được khá cồng kềnh. Để giải quyết khó khăn đó ta thấy trong lời giải trình bày ở trên, ta tiến hành đổi biến để cho mẫu gọn lại và không thêm bớt 1 trên tử thức mà thêm bớt với nhị thức $2t+1$. Vậy cơ sở nào để tìm ra nhị thức đó?

Ta mong muốn sau khi thêm bớt tử thức với một lượng $A(t)$ nào đó rồi tách ra thành hai phân thức để nhân liên hợp thì trên tử thức xuất hiện nhân tử t^2 để giản ước với t^2 dưới mẫu

$$\frac{\sqrt[3]{6t+1}-\sqrt{4t+1}}{t^2}=\frac{\sqrt[3]{6t+1}-A(t)}{t^2}+\frac{A(t)-\sqrt{4t+1}}{t^2}.$$

Vậy ta phải có $A^2(t)-(4t+1)=kt^2\Rightarrow A^2(t)=kt^2+4t+1\Rightarrow k=4$

và $A^2(t)=(2t+1)^2\Rightarrow A(t)=2t+1$.

- Ở nhiều bài tính giới hạn, ta thấy việc sử dụng MTCT là nhanh hơn giải thông thường. Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyến nghị độc giả nên nắm vững phương pháp giải thông thường (theo hình thức tự luận), vì nhiều bài tập không chỉ đơn thuần là tính giới hạn mà người ra đề có thể hỏi bằng nhiều hình thức khác nhau, đặc biệt có nhiều cách ra đề hạn chế việc sử dụng MTCT để tìm ra đáp án.

Ví dụ 6: Giới hạn của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ khi $x\to 1$ bằng

A. $\dfrac{-a}{3}$. B. $\dfrac{a}{3}$. C. $\dfrac{-a-2}{3}$. D. $\dfrac{2-a}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP
- Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có một nghiệm bằng 1.
- Nếu đa thức có tổng các hệ số của các lũy thừa bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các lũy thừa bậc lẻ thì đa thức có một nghiệm bằng -1.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-a-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-a-1}{x^2+x+1}=\dfrac{-a}{3}$.

Cách 2: (Đặc biệt hóa để sử dụng MTCT) Cho a một giá trị bất kì, chẳng hạn $a=1$, thì $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$. Dùng MTCT ta tìm được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\dfrac{-1}{3}=\dfrac{-a}{3}$.

Vậy chọn đáp án **A.**

Giải thích: Phương trình $x^2-(a+2)x+a+1=0$ có tổng các hệ số bằng 0 nên có một nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại bằng $a+1$. Do đó ta phân tích được $x^2-(a+2)x+a+1=(x-1)(x-a-1)$.

Ví dụ 7: Giả sử $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=L$. Hệ số a bằng bao nhiêu để $L=3$?

A. -6. **B.** 6. **C.** -12. **D.** 12

Đáp án D.

STUDY TIP
Một trong các kĩ thuật giải bài toán trắc nghiệm là thử lần lượt các đáp án và chọn ra đáp án thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{2\left(\sqrt{1+ax}+1\right)}=\dfrac{a}{4}$.

Vậy $L=\dfrac{a}{4}$. Do đó $L=3\Leftrightarrow\dfrac{a}{4}=3\Leftrightarrow a=12$. Đáp án đúng là **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ lần lượt với a bằng -6, 6, -12, 12.

Ta thấy với $a=12$ thì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{2x}$ bằng 3. Vậy chọn đáp án **D.**

2. Các bài toán liên quan đến giới hạn đặc biệt

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

Trong sách giáo khoa đại số và giải tích 11 có nêu một giới hạn đặc biệt dạng $\frac{0}{0}$ đó là $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng kết quả này.

Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}$ bằng

A. a. B. b. C. $\frac{a}{b}$. D. $\frac{b}{a}$.

Đáp án C.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin A(x)}{A(x)}=1$, với điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}.\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}$.

Đổi biến $t=bx$ ta thấy khi $x\to 0$ thì $t\to 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

Lưu ý

Khi sử dụng MTCT để tính toán với các hàm số lượng giác, phải chuyển về chế độ Radian.

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2, b=3$.

Sử dụng MTCT tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$ ta được kết quả bằng $\frac{2}{3}$, tức là bằng $\frac{a}{b}$.

Vậy chọn C.

Ví dụ 9: Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng

A. $\frac{2}{a^2}$. B. $\frac{2}{a}$. C. $2a^2$. D. $2a$.

Đáp án A.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^k A(x)}{A^k(x)}=1$, với điều kiện $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{ax}{2}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{ax}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{ax}{2}}.\frac{2}{a^2}\right]=\frac{2}{a^2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{ax}{2}}{\sin\frac{ax}{2}}\right)^2=\frac{2}{a^2}.1^2=\frac{2}{a^2}.$$

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=2$ (không nên lấy $a=1$, vì khi đó giá trị của $\frac{2}{a^2}$ và $\frac{2}{a}$ là bằng nhau, giá trị của $2a^2$ và $2a$ cũng bằng nhau). Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}$ ta được kết quả bằng $\frac{1}{2}$, tức là bằng $\frac{2}{a^2}$. Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ 10: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ bằng

A. $\tan a$. B. $\cot a$. C. $\sin a$. D. $\cos a$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{2.\dfrac{x-a}{2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}.\cos\dfrac{x+a}{2}\right)$.

Mà $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=1$ (xem STUDY TIP trên), $\lim\limits_{x\to a}\cos\dfrac{x+a}{2}=\cos a$.

Vậy suy ra $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$. Do đó chọn đáp án **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ (ứng với $a=1$). So sánh kết quả với tan1, cot1, sin1, cos1 ta được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}=\cos 1$. Vậy chọn đáp án **D.**

3. Đọc thêm

Ngoài giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, sách giáo khoa giải tích 12 nâng cao, chương II, ∀5 còn giới thiệu thêm các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Ví dụ 11: Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\dfrac{5}{3}$. Tích ab có thể nhận giá trị bằng số nào trong các số dưới đây?

A. 15. **B.** 60. **C.** 240. **D.** Cả ba đáp án trên.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{ax}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{a}{b}\right)=1.1.\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}$.

Vậy để $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\dfrac{5}{3}$ thì $\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{3}$. Vì a và b là các số nguyên dương nên suy ra $a=5k, b=3k$ với k nguyên dương. Do đó $ab=15k^2$.

+ $15k^2=15\Leftrightarrow k^2=1\Rightarrow k=1\Rightarrow ab=15$.

+ $15k^2=60\Leftrightarrow k^2=4\Rightarrow k=2\Rightarrow ab=60$.

+ $15k^2=240\Leftrightarrow k^2=16\Rightarrow k=4\Rightarrow ab=240$.

Vậy cả ba đáp án A, B, C đều đúng. Do đó chọn đáp án **D.**

[redacted]

Nếu sử dụng MTCT để giải bài này thì sẽ phải thử rất nhiều trường hợp.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}$, trong đó k là một số nguyên dương. Tìm tất cả các giá trị của k để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0.

A. $k\in\mathbb{Z}, k>3$. **B.** $k\in\mathbb{Z}, 0<k<3$.

C. $k\in\mathbb{Z}, k\geq 3$. **D.** $k\in\mathbb{Z}, 0<k\leq 3$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}.\dfrac{1}{x^{k-3}}\right)$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-1}{x^3}=1$ nên để $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0 thì hàm số $g(x)=\dfrac{1}{x^{k-3}}$ phải có giới hạn hữu hạn khi x dần tới 0. Muốn vậy thì

$k-3\le 0 \Leftrightarrow k\le 3$. Vì k nguyên dương nên đáp án là **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tìm giới hạn khi $k=3$, ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^3}=1$.

Vậy ta chỉ xét đáp án C hoặc D. Chẳng hạn với đáp án C, ta sử dụng MTCT tìm giới hạn khi $k=4$. Ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)-1}{x^4}=-\infty$. Do đó loại đáp án C. Vậy đáp án đúng là **D.**

*** Trong chương trình lớp 12 sẽ được học khái niệm căn bậc n.

Định nghĩa

> Cho số thực b và số nguyên dương n ($n\ge 2$). Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n=b$.

Với n lẻ và $b\in\mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của b, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$.

Với n chẵn và:

+ $b<0$: Không tồn tại căn bậc n của b.

+ $b=0$: Có một căn bậc n của b là số 0.

+ $b>0$: Có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

Sau đây ta xét một vài ví dụ liên quan đến căn bậc n.

STUDY TIP

$a=\sqrt[n]{b}\Rightarrow a^n=b$

- Mọi số thực đều có căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ.
- Chỉ có số không âm mới có căn bậc chẵn.

Số 0 có một căn bậc chẵn là 0.

Các số dương có hai căn bậc chẵn đối nhau.

> **Ví dụ 13:** Cho a là một số thực khác 0 và n là một số nguyên dương, $n\ge 2$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.
>
> **A.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{n}{a}$.
>
> **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{1}{a}$.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$

Cách 1: Sử dụng MTCT tìm giới hạn với $n=5$ và $a=3$, ta được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}=\dfrac{3}{5}$. Vậy đáp án đúng là **A.**

Cách 2: Đổi biến đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow t^n=1+ax\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$.

Ta có khi $x\to 0$ thì $t\to 1$ và

$$\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=a\frac{t-1}{t^n-1}=a\frac{t-1}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1\right)}=\frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1}.$$

Mà $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+...+t+1}=\dfrac{a}{n}$ nên suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$. Vậy chọn **A.**

STUDY TIP

$a^n-b^n=(a-b)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

$a^n-1=(a-1)\times\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)$

> **Ví dụ 14:** Biết $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a và b là các số nguyên dương. Tổng $a+b$ bằng
>
> **A.** 137. **B.** 138. **C.** 139. **D.** 140.

Đáp án C.

Lời giải

Với những bài dạng này, sẽ khó sử dụng MTCT để tìm ra đáp án đúng.

Đặt $t=x-8$. Suy ra $x=t+8$, $\lim\limits_{x\to 8} t=0$ và

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{\sqrt{t+9}-\sqrt[3]{t+27}}{\sqrt[4]{t+16}-2}=\frac{3\sqrt{1+\frac{t}{9}}-3\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}}{\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}}=g(t)$$

STUDY TIP
Quy tắc L'Hôpital
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$,
trong đó $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$,
$x_0\in(a;b)$,
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$
(hoặc
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$)
và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại.

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\lim\limits_{t\to 0}g(t)$. Áp dụng Ví dụ 13 ta có

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\frac{t}{9}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{9}}{2}=\frac{1}{18};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{t}{27}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{27}}{3}=\frac{1}{81};\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{t}{16}}-1}{t}=\frac{\frac{1}{16}}{4}=\frac{1}{64}.$$

Vậy $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{1}{18}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{64}}=\frac{112}{27}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+19}}{\sqrt[4]{x+8}-2}=\frac{112}{27}$. Vậy $a=112, b=27$ và $a+b=139$.

*** Tính giới hạn vô định dạng $\frac{0}{0}$ bằng đạo hàm (Quy tắc L'Hôpital).

Trước khi đọc phần này xin đọc chương Đạo hàm trong chương trình lớp 11.

Ví dụ 15: Ta xét lại Ví dụ 9 đã nêu ở phần trên.

Cho số thực a khác 0. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}$ bằng:

A. $\frac{2}{a^2}$. B. $\frac{2}{a}$. C. $2a^2$. D. $2a$.

Đáp án A.

Lời giải

Ngoài hai lời giải đã nêu ở phần trên, ta còn một cách áp dụng Quy tắc L'Hôpital như sau: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{a\sin ax}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{a^2\cos ax}=\frac{2}{a^2}$.

STUDY TIP
Có thể áp dụng Quy tắc L'Hôpital nhiều lần để tính giới hạn.

Ở đây ta đã áp dụng Quy tắc L'Hôpital hai lần. Cách sử dụng Quy tắc L'Hôpital rất hữu dụng khi giải các bài toán trắc nghiệm. Tuy nhiên không áp dụng Quy tắc này cho các bài toán tự luận do Quy tắc L'Hôpital không được trình bày trong Chương trình Toán THPT.

Đề nghị: Độc giả hãy vận dụng quy tắc L'Hôpital để giải lại các ví dụ đã nêu ở dạng 2 này.

Dạng 3 Tìm giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Bài toán: Tính $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u(x)}{v(x)}$ khi $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\infty$.

Phương pháp:

- Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong ***mẫu thức*** hoặc chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong ***phân thức*** hoặc phân tích tử và mẫu thành tích chứa

nhân tử x^n rồi giản ước.

- Nếu $u(x)$ hay $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x.

STUDY TIP

Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong ***mẫu thức*** sẽ cần ***ít*** bước lập luận hơn là chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x trong cả ***phân thức.***

Lưu ý:

- Khi $x \to +\infty$ thì ta xử lí giống như với giới hạn dãy số.

- Khi $x \to -\infty$ ta cần lưu ý khi đưa x^{2k} ra ngoài dấu căn bậc chẵn: Với $x<0$ thì:

+ $\sqrt{x^{2k}} = |x^k| = x^k$ nếu k chẵn.

+ $\sqrt{x^{2k}} = |x^k| = -x^k$ nếu k lẻ.

+ Trường hợp hay gặp là $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

- Từ giới hạn dãy số ta có kết quả sau:

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$, trong đó $a_n, b_m \neq 0$.

a) Nếu $n > m > 0$ (bậc tử lớn hơn bậc mẫu) thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ là vô cực:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\infty} x^{n-m}.$$

b) Nếu $n = m > 0$ (bậc tử bằng bậc mẫu) thì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

c) Nếu $0 < n < m$ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) thì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(Ở đây kí hiệu $x \to \infty$ tức là $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$)

Ví dụ 1: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Hàm số $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu (tử bậc 1, mẫu "bậc" $\dfrac{1}{2}$) nên $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Vậy chọn đáp án B.

Cách 2: Dùng MTCT tính lần lượt các giới hạn, bắt đầu từ A. Đến B, ta tính được $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = +\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án đúng là đáp án B.

STUDY TIP

Khi giải bài toán trắc nghiệm, với giới hạn của phân thức tại vô cực, ta chủ yếu quan tâm đến bậc của tử và mẫu mà không cần thiết phải rút gọn phân thức.

Giải thích thêm:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2-1} = 0$ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu);

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9} = \dfrac{3}{1} = 3$ (bậc tử bằng bậc mẫu);

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3} = \dfrac{1.(-2)^5}{1} = (-2)^5$ (bậc tử bằng bậc mẫu).

+ Trên đây là lời giải nhanh dựa vào các kết quả đã biết, phục vụ cho việc làm

bài tập dạng trắc nghiệm. Nếu là bài tập dạng tự luận thì các em cần trình bày chi tiết theo phương pháp đã nêu ở trên. Riêng A và B, ta giải tự luận như sau:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{5})=+\infty.$$

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

STUDY TIP

k	a	$\lim\limits_{x\to-\infty} ax^k$
Chẵn	+	$+\infty$
	−	$-\infty$
Lẻ	+	$-\infty$
	−	$+\infty$

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Bổ sung: Nếu là bài toán tự luận "Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}$ " thì ta có hai cách giải như sau:

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3+\frac{1}{x}\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x}-2\right)=-2<0$ nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-2}=-\infty$.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}$. Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}\right)=0$ và $\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}<0$ với mọi $x<0$ nên theo Quy tắc 2,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x+1}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}-\frac{2}{x^2}}=-\infty.$$

Ví dụ 3: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã nêu ở trên thì

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3+7}{2x^3-3x^2+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-3x^2-x^3}{4x^2+1}=\frac{-1}{4}\lim\limits_{x\to-\infty}x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=3\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^6}{1+x-5x^2}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn.

Khi đến C thấy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x^4+5}{x-x^3+1}=-\infty$ nên dừng lại và chọn đáp án C.

Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ bằng

A. 2. B. -2. C. 1. D. -1.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2$. Vậy chọn đáp án B.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Đáp án B.

Lời giải

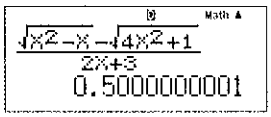
Cách 1: Theo Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty$.

Ta đưa x^2 ra ngoài căn rồi chia cả tử và mẫu cho x. Cụ thể như sau:

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{-\sqrt{1}+\sqrt{4}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Vậy đáp án đúng là B.



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Vậy chọn đáp án B.

Cách 3: Ta có thể giải bài này bằng phương pháp loại trừ như sau:

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ nên giới hạn cần tìm phải mang dấu dương. Mặt khác "bậc" tử và bậc mẫu bằng nhau (do $\sqrt{x^2}=|x|$) nên giới hạn cần tìm là hữu hạn.

Do đó chọn đáp án B.

Ví dụ 6: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a và b là các số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của tích ab bằng

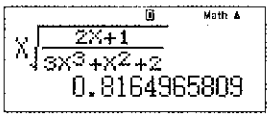
A. 6. B. 12. C. 18. D. 24.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\dfrac{\sqrt{a}}{b} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Dễ dàng suy ra giá trị nhỏ nhất của ab là 18.



Chú ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x = 10^{10}$ thì ta thu được kết quả như hình bên. Do đó, nếu không có kiến thức về giới hạn hàm số, rất khó để tìm ra được đáp án đúng nếu chỉ dùng MTCT. Ngược lại, nếu có kiến thức vững vàng, bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án, thậm chí là trong chớp mắt! Vì vậy, tôi xin nhắc lại, tôi khuyến nghị bạn đọc nên học cách giải bài tập theo kiểu tự luận một cách căn cơ để có thể sẵn sàng đối mặt với các bài toán "chống MTCT".

Dạng 4 Dạng vô định $0.\infty$

Bài toán: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)v(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$.

Phương pháp:

- Ta có thể biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)v(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{\dfrac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\lim\limits_{x\to\infty}\left[u(x)v(x)\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{v(x)}{\dfrac{1}{u(x)}}$ để đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ra ngoài dấu căn, quy đồng mẫu thức ... là đưa được về dạng quen thuộc.

Ví dụ 1: Giới hạn $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)$ bằng

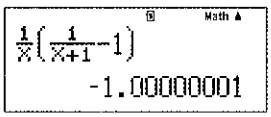
A. 0. B. -1. C. 1. D. $-\infty$.

Đáp án B.

Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty; \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=0$ nên chưa thể áp dụng các định lí và quy tắc để tính giới hạn.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-(x+1)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-1}{x+1} = -1$.



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $-0,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án B, tức $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1}-1\right)=-1$.

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ bằng

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 1.

Đáp án C.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0;\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=+\infty$ nên chưa thể áp dụng các định lí và quy tắc để tính giới hạn.

Lời giải

Cách 1: Với mọi $x>2$ ta có $(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{(x-2)^2x}{(x-2)(x+2)}}=\sqrt{\dfrac{(x-2)x}{x+2}}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{(x-2)x}{x+2}}=\sqrt{\dfrac{0.2}{4}}=0$. Vậy chọn đáp án C.

Cách 3: Sử dụng MTCT.

Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x^3+x+2}}$ bằng

A. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. C. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. D. $-\sqrt{2}$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Ta chỉ quan tâm đến lũy thừa bậc cao nhất là x^3. Hệ số của x^2 trong $(x+1)^2$ là 1^2 do $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Hệ số của x trong $2x+1$ là 2 nên hệ số của x^3 trên tử là $1^2.2$. Ở đây không nhất thiết phải khai triển tích thành đa thức để tìm hệ số của x^3.

Phân tích: Ví dụ tương tự đã được nghiên cứu trong phần dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$.

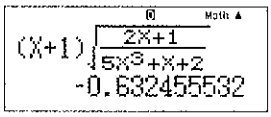
Tuy nhiên vì $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)=-\infty;\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x^3+x+2}}=0$ nên ví dụ này cũng có thể coi như thuộc dạng $0.\infty$.

Lời giải

Cách 1: Với mọi $x<-1$ ta có $x+1<0$ nên $x+1=-\sqrt{(x+1)^2}$. Do đó

$$\lim\limits_{x\to -\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{5x^3+x+2}}=-\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{\dfrac{(x+1)^2(2x+1)}{5x^3+x+2}}=-\sqrt{\dfrac{1^2.2}{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy chọn đáp án B.



Cách 2: Sử dụng MTCT. Tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. So sánh với các đáp án A, B, C, D ta chọn đáp án đúng là B (do $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}\approx -0,632455532$).

Ví dụ 4: Giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

A. bằng 0. B. bằng 1. C. là $+\infty$. D. không tồn tại.

Đáp án B.

STUDY TIP

Ở Ví dụ 4 ta đã chuyển dạng $0.\infty$ thành dạng $\dfrac{0}{0}$ do ta liên tưởng đến giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ nên $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$. Ta có dạng $0.\infty$. Lời giải như sau.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Đặt $t=\dfrac{1}{x}$ thì $\lim\limits_{x\to +\infty}t=0$ và $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (lưu ý chuyển máy về chế độ Radian).

Ví dụ 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

A. bằng 1. **B.** bằng 0. **C.** bằng $-\infty$. **D.** không tồn tại.

Đáp án A.

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=-\infty$

Lưu ý để tránh nhầm lẫn giữa hai giới hạn này.

Phân tích: Vì $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$ nên ta có dạng $0.\infty$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $x=\frac{\pi}{2}-t$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}t=0$ và $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=t\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

$=t\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\frac{t}{\sin t}\cos t$. Do đó $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t}{\sin t}\cos t=1$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Dạng 5 Dạng vô định $\infty-\infty$

Bài toán: Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-v(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$ hoặc tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)+v(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=-\infty$.

Phương pháp: Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc quy đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

Ví dụ 1: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1:

Phân tích: Ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ nên bài này thuộc dạng vô định $\infty-\infty$. Tương tự như giới hạn dãy số, ta nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ví dụ 2: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

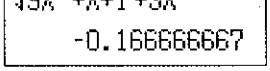
Đáp án D.

Lời giải

Cách 1:

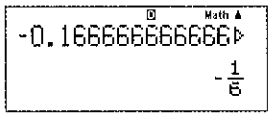
Phân tích: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x)=-\infty$ nên bài này thuộc dạng vô

định $\infty-\infty$ (mặc dù biểu thức của hàm số lấy giới hạn có dạng tổng!). Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp. Lời giải cụ thể như sau.



Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+x+1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{-x\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-3}=\dfrac{1}{-3-3}=-\dfrac{1}{6}$. Vậy chọn đáp án **D.**



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Sử dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $-0,1(6)=-\dfrac{1}{6}$ (xem lại phần giới hạn dãy số). Vậy chọn đáp án **D.**

Ví dụ 3: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$ bằng

A. $\dfrac{13}{24}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $-\dfrac{13}{24}$. **D.** $-\dfrac{7}{12}$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Phân tích:

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+3x}=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=+\infty$ nên đây là dạng vô định $\infty-\infty$.

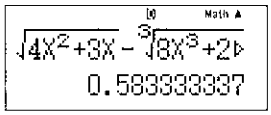
Tuy nhiên vì là hiệu của hai căn thức không cùng bậc nên ta chưa thể nhân chia với biểu thức liên hợp luôn được. Nhận thấy với $x>0$ thì $\sqrt{4x^2}=\sqrt{8x^3}=2x$ nên ta thêm bớt với $2x$ rồi nhân chia liên hợp.

Với $x>0:\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}=\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)+\left(2x-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

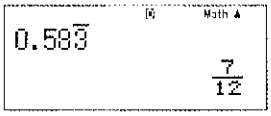
$$=\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}+2x}-\frac{2x^2+1}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}+\sqrt[3]{\left(8x^3+2x^2+1\right)^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2+1}\right)$

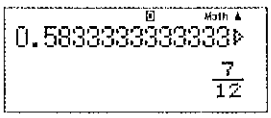


$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}-\frac{2+\frac{1}{x^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}\right)=\frac{3}{2+2}-\frac{2}{4+4+4}=\frac{7}{12}.$$



Do đó chọn **D.**

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=10^{10}$ ta được kết quả như hình bên. Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của một số thập phân vô hạn tuần hoàn ta được $0,58(3)=\dfrac{7}{12}$. Do đó chọn đáp án **D.**



Lưu ý: Ta xem lại một Ví dụ đã trình bày ở dạng 1 như sau:

Ví dụ 4: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 3.

Chú ý quan trọng

Cũng là $\infty-\infty$ nhưng khi nào là xác định, khi nào là vô định? Khi nào phải nhân chia liên hợp, khi nào thì đưa x^n ra ngoài căn rồi đặt nhân tử chung như Ví dụ 4? Để có câu trả lời mời quý độc giả hãy đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn.

Phân tích: Ví dụ này cũng thuộc dạng $\infty-\infty$ nhưng lại không phải là dạng vô định. Bằng các định lí và quy tắc, ta tính được giới hạn hàm số mà không cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta xem lời giải chi tiết dưới đây.

Lời giải

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Ví dụ 5: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Với các kết quả đã biết phần giới hạn dãy số có chứa căn, ta thấy ngay đáp án là D. Thật vậy:

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+4x+3}=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+x+1}=+\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-3x\right)=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x+2x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=-\infty$

do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty;\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2}\right)=1-\sqrt{2}<0$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=-\frac{3}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT để tìm lần lượt các giới hạn.

Ví dụ 6: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ bằng

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. -3. D. -2.

Đáp án B.

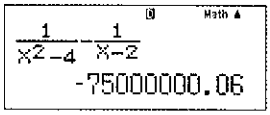
Lời giải

Cách 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x^2-4}=+\infty;\lim\limits_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ nên ta có dạng $\infty-\infty$.

Theo phương pháp đã nêu từ đầu, ta đi quy đồng mẫu số các phân thức.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x-1}{x+2}=\frac{-3}{4}<0$, $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x-1}{(x-2)(x+2)}=-\infty$. Do đó chọn **B.**



Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=2,00000001$ ta được kết quả như hình bên. Do đó chọn đáp án **B**, tức là $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=-\infty$.

Ví dụ 7: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}\right)$ là hữu hạn.

A. $a-4b=0$. **B.** $a-3b=0$. **C.** $a-2b=0$. **D.** $a-b=0$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{a}{(x-2)(x-4)}-\frac{b}{(x-2)(x-3)}$

$=\frac{a(x-3)-b(x-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{g(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0;\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)=-1;\lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2;\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a$.

Do đó nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\neq 0\Leftrightarrow 2b-a\neq 0\Leftrightarrow a-2b\neq 0$ thì giới hạn cần tìm là vô cực theo Quy tắc 2.

Từ đó chọn được đáp án đúng là **C.**

(Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=2b-a=0$ thì

$$\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}=\frac{bx-2b}{(x-2)(x-3)(x-4)}=\frac{b}{(x-3)(x-4)}$$

và do đó $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{a}{x^2-6x+8}-\frac{b}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{b}{(x-3)(x-4)}=\frac{b}{2}$.)

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, lấy các giá trị cụ thể của a và b, thay vào hàm số rồi tính giới hạn.

Từ đó chọn được đáp án là **C.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài tập tính giới hạn bằng cách sử dụng định nghĩa, định lí, quy tắc

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để $B>7$ với $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+m^2-2m\right)$.

A. $m<1$ hoặc $m>3$. B. $m<-1$ hoặc $m>3$.
C. $-1<m<3$. D. $1<m<3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & khi\ x<1\\ \sqrt{2x-2} & khi\ x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ bằng

A. 0. B. 2.
C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào có giới hạn tại điểm $x=1$?

A. $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$. B. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
C. $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. D. $t(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$. B. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=-1$.
C. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=1$. D. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)$.
C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)$.

Câu 6: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)$.
B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)$.
C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)$.
D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)$.

Câu 7: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}$. B. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}$.
C. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}$. D. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}$.

Câu 8: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$. B. $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x-6\right)^2}$.
C. $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$. D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(2x-1)}{x^4+x+1}$.

Câu 9: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}$.
B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}$.
C. $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}$.
D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^5+2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $f(x)=mx+\sqrt{9x^2-3x+1}$ có giới hạn hữu hạn khi $x\to+\infty$.

A. $m=-3$. B. $m\ne-3$. C. $m\ge 0$. D. $m<0$.

Dạng 2: Giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$

A. bằng 3. B. bằng -3. C. bằng 0.
D. không tồn tại.

Câu 12: Cho a là một số thực khác 0. Kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$ bằng

A. $3a^3$. B. $2a^3$. C. a^3. D. $4a^3$.

Câu 13: Cho $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}$, m là tham số thực. Tìm m để $C=2$.

A. $m=2$. B. $m=-2$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Câu 14: Cho a và b là các số thực khác 0. Nếu $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$ thì $a+b$ bằng

A. 2. B. -4. C. -6. D. 8.

Câu 15: Cho a và b là các số thực khác 0. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}$ bằng

A. $\dfrac{a}{2b}$. B. $-\dfrac{a}{2b}$. C. $\dfrac{2a}{b}$. D. $-\dfrac{2a}{b}$.

Câu 16: Cho a,b,c là các số thực khác 0, $3b-2c\ne 0$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\frac{1}{2}.$$

A. $\frac{a}{3b-2c}=\frac{1}{10}$. B. $\frac{a}{3b-2c}=\frac{1}{6}$.

C. $\frac{a}{3b-2c}=\frac{1}{2}$. D. $\frac{a}{3b-2c}=\frac{1}{12}$.

Câu 17: Cho m và n là các số nguyên dương phân biệt. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}$ bằng

A. $m-n$. B. $n-m$. C. $\frac{1}{m-n}$. D. $\frac{1}{n-m}$.

Câu 18: Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$, bạn Bính đã trình bày lời giải như sau.

Bước 1: Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}.$$

Bước 2: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-4}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1}=\frac{5}{2}$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}=1$.

Bước 4: Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

Hỏi lời giải của bạn Bính đã mắc lỗi sai ở bước nào?

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Bước 4.

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Tổng $2m+n$ bằng

A. 68. B. 69. B. 70. D. 71.

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)\left(x^2+3x-18\right)}=\frac{m}{n}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n nguyên dương. Khi đó $3m+n$ bằng

A. 55. B. 56. C. 57. D. 58.

Câu 21: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}$ bằng

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 22: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}$. B. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

C. $\lim\limits_{x\to -3}\left|\frac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$. D. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(x^2-x-6\right)^2}{x^3+2x^2}$.

Câu 23: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào khác 0?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$. B. $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{\sqrt{\left(x^2+1\right)(3-x)}}$.

C. $\lim\limits_{x\to (-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}$. D. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Câu 24: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+11x+18}$. B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-27}{x}$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$. D. $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\frac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$.

Câu 25: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào không hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x^2+x-10}{x^3-8}$. B. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$.

C. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. D. $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x^2-9}$.

Dạng 3: Giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Câu 26: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-1}{x+1}$. B. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$.

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+3}{x^2-5x}$. D. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$.

Câu 27: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x+1)\left(3-2x-5x^3\right)}{x\left(x^3-1\right)}$.

B. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\left(x^2+1\right)\left(2x^2-x+4\right)}{x^3(3x+1)}$.

D. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}$.

Câu 28: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-2x^2+x-1}{3+x}$. B. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2+x+5}{1+2x}$.

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}$. D. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}$.

Câu 29: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. $\dfrac{2}{3}$. C. $-\dfrac{2}{3}$. D. $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 30: Cho a,b,c là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a,b,c để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5$.

A. $\dfrac{a-3b}{c}=5$. B. $\dfrac{a-3b}{c}=-5$.

C. $\dfrac{a+3b}{c}=5$. D. $\dfrac{a+3b}{c}=-5$.

Câu 31: Cho a và b là các tham số thực. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=0$, a và b thỏa mãn hệ thức nào trong các hệ thức dưới đây?

A. $a+b=9$. B. $a+b=-9$.

C. $a-b=9$. D. $a-b=-9$.

Câu 32: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}$.

Câu 33: Tìm giới hạn nhỏ nhất trong các giới hạn hữu hạn sau:

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}$.

Câu 34: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào là lớn nhất?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}$. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$. D. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Câu 35: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}$.

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}$.

Dạng 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$.

Câu 36: Cho a là một số thực dương. Giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}$

A. bằng $-\dfrac{1}{a^2}$. B. là $+\infty$.

C. là $-\infty$. D. không tồn tại.

Câu 37: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{x^3}{2x^4+x^2+1}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{3x}{x^2-1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4+x+1}}$.

Câu 38: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào là nhỏ nhất?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^3+x+2}}$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{3x-11}{x^3+1}}$.

C. $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\dfrac{x+1}{5x^3+2x+1}}$.

Câu 39: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x}}\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 40: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan 2x\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ bằng

A. 2. B. 0. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{1}{4}$.

Dạng 5: Dạng vô định $\infty-\infty$

Câu 41: Cho n là một số nguyên dương. Giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{1}{1-x}\right)$ bằng

A. $\dfrac{n}{2}$. B. $\dfrac{n-1}{2}$. C. $\dfrac{n+1}{2}$. D. $\dfrac{n+2}{2}$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\ x>1\\ mx+2 & khi\ x\le1\end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$.

A. 2. B. –1. C. 1. D. 3.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực k sao cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn.

A. $k=2$. B. $k\neq 2$. C. $k<2$. D. $k>2$.

Câu 44: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$. B. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$.

C. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)$. D. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$.

Câu 45: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+ax)=+\infty$ nếu

A. $a\geq 1$. B. $a\leq 1$. C. $a>1$. D. $a<1$.

Câu 46: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=3$ thì tổng $a+b$ bằng

A. 2. B. -6. C. 7. D. -5.

Câu 47: Cho a và b là các số thực khác 0. Biết $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=5$, số lớn hơn trong hai số a và b là số nào trong các số dưới đây?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 48: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là vô cực?

A. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)$.

B. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)$.

D. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)$.

Câu 49: Biết $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=-\frac{m}{n}$ trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Bội số chung nhỏ nhất của m và n là

A. 135. B. 136. C. 138. D. 140.

Câu 50: Cho a và b là các số nguyên dương. Biết $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\frac{7}{27}$, hỏi a và b thỏa mãn hệ thức nào dưới đây?

A. $a+2b=33$. B. $a+2b=34$.

C. $a+2b=35$. D. $a+2b=36$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập tính giới hạn bằng cách sử dụng định nghĩa, định lí, quy tắc

Câu 1: Đáp án B.

Cách 1: Ta có $B=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+m^2-2m\right)=m^2-2m+4$.

Do đó $B>7\Leftrightarrow m^2-2m+4>7\Leftrightarrow m^2-2m-3>0\Leftrightarrow$ $m<-1$ hoặc $m>3$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính B khi $m=4$ và $m=0$.

Khi $m=4$ thì $B=12>7$, do đó chỉ xét A và B.

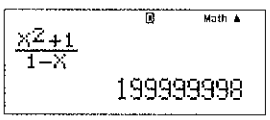
Khi $m=0$ thì $B=4<7$, do đó A sai. Vậy B đúng.

Câu 2: Đáp án D.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0$ và $1-x>0$ với mọi $x<1$ nên theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$.

Cách 2: Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}$. Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=0,99999999$ ta được kết quả



Vậy lựa chọn đáp án $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$.

Câu 3: Đáp án A.

Vì $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$, $|x-1|>0$ với mọi $x\neq 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Giải thích thêm:

+ Hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên không tồn tại giới hạn bên trái tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Hàm số $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ xác định trên khoảng $(-\infty;1)$ nên không tồn tại giới hạn bên phải tại $x=1$, do đó không tồn tại giới hạn tại $x=1$.

+ Vì $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $x-1>0$ với mọi $x>1$, $x-1<0$ với mọi $x<1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-}t(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}t(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-}t(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}t(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}t(x)$.

Câu 4: Đáp án D.

Xét dãy số (x_n) với $x_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi}$. Ta có $x_n\to 0$ và $\lim\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\cos\left[(2n+1)\pi\right]=-1$. (1)

Lại xét dãy số (y_n) với $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$. Ta có $y_n\to 0$ và $\lim\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\cos(2n\pi)=1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Câu 5: Đáp án C.

Cách 1: Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x^3-x^2+x+1\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^4+3x+1\right)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x^2-7x^3+2\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-x^5+2\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 6: Đáp án D.

Cách 1: Ta có

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)=+\infty$;

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)=+\infty$;

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1\right)=+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+4x+3}\right)=-\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $-\infty$.

Câu 7: Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\left(6-x^2\right)=-3<0$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+}(9+3x)=0$ và $9+3x>0$ với mọi $x>-3$. Vậy theo Quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{6-x^2}{9+3x}=-\infty$. Tương tự: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{1-2x}}{5+5x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5-3x^3}{(x-2)^4}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-4}{(x+1)^2}=-\infty$.

Do đó đáp án đúng là C (thật ra ta chỉ cần tính đến C là chọn được đáp án đúng).

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn bằng $+\infty$.

Câu 8: Đáp án B.

Cách 1: Các hàm số trong A, C, D đều xác định tại các điểm tính giới hạn. Do đó đáp án là B.

Thật vậy, ta tính được bằng MTCT:

$$\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{x^3+2x^2}{\left(x^2-x-6\right)^2}=+\infty.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 9: Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}\right)=\sqrt{2}-2<0$;

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\left(x^4+x\right)=0$; $x^4+x=x\left(x^3+1\right)>0$ với mọi $x<-1$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{3-x}}{x^4+x}=-\infty$.

Bổ sung:

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+2}+4x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+4\right)=-\infty$

nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{\sqrt{5x^2+x+2}+4x}=0$.

$+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-2)^3+8}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8+8}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-6x+12\right)=12$.

$+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^3-x^5+2\right)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{4x^3-x^5+2}=0$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn cho đến khi tìm được giới hạn vô cực.

Câu 10: Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT tính toán khi $m=-3$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Vậy ta chỉ xét các đáp án A và D.

Lại sử dụng MTCT tính toán khi $m=-1$ ta được kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=+\infty$. Vậy loại đáp án D.

Do đó đáp án đúng là A.

Cách 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)$.

+ Nếu $m\ge0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=+\infty$.

+ Nếu $m<0$ thì

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+m\right)$.

Ta thấy nếu $m\ne-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+m\right)\ne0$ và do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(mx+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=\infty$. Ngược lại nếu $m=-3$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x+\sqrt{9x^2-3x+1}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Vậy đáp án đúng là A.

Dạng 2: Giới hạn vô định dạng $\dfrac{0}{0}$.

Câu 11: Đáp án D.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{3(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}3=3$

và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(-3)=-3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}\ne\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ nên $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ không tồn tại.

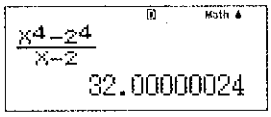
Câu 12: Đáp án D.

Cách 1:

Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\left(x^3+x^2a+xa^2+a^3\right)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left(x^3+x^2a+xa^2+a^3\right)=4a^3$.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể rồi tính giới hạn bằng MTCT. Chẳng hạn với $a=2$ ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-2^4}{x-2}=32=4.2^3$. Do đó chọn đáp án D.



Câu 13: Đáp án B.

Cách 1: $C=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-mx+m-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-m+1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-m+1}{x+1}=\dfrac{2-m}{2}$.

Vậy $C=2\Leftrightarrow\dfrac{2-m}{2}=2\Leftrightarrow2-m=4\Leftrightarrow m=-2$.

Cách 2: Thay lần lượt các giá trị của m vào rồi tìm C cho đến khi gặp kết quả $C=2$ thì dừng lại.

Câu 14: Đáp án C.

Đặt $g(x)=x^2+ax+b$. Rõ ràng là nếu $g(2)\ne0$ thì $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}$ không thể là hữu hạn (thậm chí không tồn tại). Do đó điều kiện đầu tiên là $g(2)=0\Leftrightarrow2a+b=-4$. Khi đó $g(x)=(x-2)\left(x-\dfrac{b}{2}\right)$ và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(x-\dfrac{b}{2}\right)=2-\dfrac{b}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x-2}=6$

$\Rightarrow2-\dfrac{b}{2}=6\Rightarrow b=-8\Rightarrow a=2\Rightarrow a+b=-6$.

Câu 15: Đáp án B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{x}.\dfrac{bx}{\sin bx}.\dfrac{1}{b}\right)$.

Mà $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{x}=-\dfrac{a}{2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{\sin bx}=1$

nên $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{ax+1}}{\sin bx}=-\dfrac{a}{2b}$.

Cách 2: Cho a và b các giá trị cụ thể, thay vào rồi tính giới hạn. Chẳng hạn với $a=b=1$, sử dụng

MTCT ta tính được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin x}=-\dfrac{1}{2}$. Từ đó chọn đáp án đúng là B.

Câu 16: Đáp án D.

Cách 1: $\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=a.\dfrac{\tan ax}{ax}.\dfrac{x}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin ax}{ax}.\dfrac{1}{\cos ax}\right)=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+bx}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}\right)$$

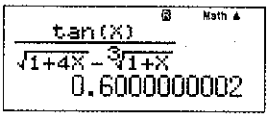
$=\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{3}=\dfrac{3b-2c}{6}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sqrt{1+bx}-\sqrt[3]{1+cx}}=\dfrac{6a}{3b-2c}$.

Do đó hệ thức liên hệ giữa a,b,c là

$$\frac{6a}{3b-2c}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{3b-2c}=\frac{1}{12}.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT. Với mỗi đáp án, chọn các giá trị cụ thể của a,b,c thỏa mãn hệ thức rồi thay vào để tính giới hạn. Nếu giới hạn tìm được bằng $\dfrac{1}{2}$ thì đó là đáp án đúng.

Chẳng hạn, với đáp án A, chọn $a=1;b=4;c=1$, sử dụng MTCT tính được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+x}}=\dfrac{3}{5}$.



Vậy A không phải là đáp án đúng.

Tương tự vậy B và C cũng không phải là đáp án đúng. Vậy đáp án đúng là D.

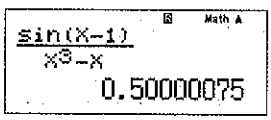
Câu 17: Đáp án C.

Cách 1: Ta có $\dfrac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}.\dfrac{x-1}{x^m-x^n}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}=m-n$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$ nên

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^m-x^n}=\frac{1}{m-n}.$$

Cách 2: Cho m và n các giá trị cụ thể, thay vào rồi sử dụng MTCT tính giới hạn. Chẳng hạn với $m=3,n=1$ ta tính được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-x}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{m-n}$.



Vậy đáp án đúng là C.

Câu 18: Đáp án A.

Vì ta chưa thể biết được các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ có hữu hạn hay không nên chưa thể viết được:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}.$$

Do đó lời giải đã mắc lỗi sai ngay ở bước đầu tiên.

Ta sửa lại như sau:

Bước 1: Ta có

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{2x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-1}{x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\right).$$

Câu 19: Đáp án A.

Ta có $\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-3x+2}$

$$=\frac{8(x-2)}{(x-2)(x-1)\left(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right)}$$

$$-\frac{x-2}{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$=\frac{8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right)}$$

$$-\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}.$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right)}=\dfrac{8}{27}$;

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}=\dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{54}$.

Vậy $m=7;n=54$ và $2m+n=68$.

Câu 20: Đáp án C.

Ta có $\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)}=\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2(x+6)}$.

Sử dụng MTCT ta tính được :

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2}=\frac{1}{6}\ ;\ \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$$

nên $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)}=\dfrac{1}{54}$. Vậy $3m+n=57$.

Giải tự luận: Đặt $t=x-3$ thì $\lim\limits_{x\to 3}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2}=\frac{\sqrt{6t+9}-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6t+9}-(t+3)}{t^2}+\frac{(t+3)-\sqrt[3]{27t+27}}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2}{t^2\left(\sqrt{6t+9}+t+3\right)}+\frac{t^3+9t^2}{t^2\left[(t+3)^2+(t+3)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}\right]}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{6t+9}+t+3}+\frac{t+9}{(t+3)^2+(t+3)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}.$$

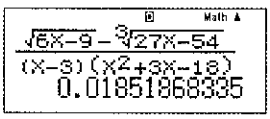
Ta có $\lim\limits_{t\to 0}\frac{-1}{\sqrt{6t+9}+t+3}=\frac{-1}{6}$;

$$\lim_{t\to 0}\frac{t+9}{(t+3)^2+(t+3)\sqrt[3]{27t+27}+\sqrt[3]{(27t+27)^2}}=\frac{1}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)^2}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+6}=\frac{1}{9}$ nên $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{6x-9}-\sqrt[3]{27x-54}}{(x-3)(x^2+3x-18)}=\frac{1}{54}$.

Lưu ý: Nếu sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=3.00000001$ và tại $x=2.99999999$ ta đều thu được kết quả bằng 0 hoặc máy báo lỗi (tùy theo loại máy). Điều này là do vượt quá khả năng tính toán của máy. Ta thay đổi tính giá trị của hàm số tại $x=2,99999$ thì được kết quả như sau



Kết quả hiển thị trên máy như vậy rất khó để ta tìm ra được giới hạn chính xác của hàm số. Tuy nhiên nếu phân tích kĩ một chút rồi biến đổi như trong lời giải trên thì ta vẫn có thể tìm ra đáp án đúng chỉ bằng MTCT.

Mặt khác, nếu giải theo kiểu tự luận, ngay từ đầu ta không biến đổi mẫu thức mà đi thêm bớt tử thức với hằng số 3 rồi tách ra để nhân liên hợp thì ta sẽ phải nhân liên hợp tiếp một lần nữa như đã phân tích trong phần Ví dụ. Mời quý độc giả đọc lại để hiểu rõ hơn vấn đề.

Câu 21: Đáp án A.

Bài tập này có dạng tương tự như bài tập trên. Bằng MTCT, không khó để tìm ra đáp án đúng là A.

Tuy nhiên nếu giải tự luận thì có một số vấn đề cần bàn. Đặt $t=x-1$ thì $x=t+1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}t=0$ và

$$\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}=\frac{\sqrt{3t+1}-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3t+1}-1}{t^2}+\frac{1-\sqrt[3]{5t+1}}{t^2}$$

$$=\frac{3t}{t^2\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}-\frac{5t}{t^2\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}.$$

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{3\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)-5\left(\sqrt{3t+1}+1\right)}{t\left(\sqrt{3t+1}+1\right)\left(1+\sqrt[3]{5t+1}+\sqrt[3]{(5t+1)^2}\right)}=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt[3]{5x-4}}{(x-1)^2}=-\infty$.

Ta thấy sau khi đổi biến cho gọn, ta thêm bớt tử với hằng số 1 rồi tách ra thành hai phân thức và nhân chia liên hợp mà không thêm bớt với đa thức. Vậy khi nào thì thêm bớt với hằng số, khi nào thì thêm bớt với đa thức? Quý độc giả hãy nghiên cứu kĩ hai bài tập trên và tự rút ra nhận xét.

Câu 22: Đáp án D.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^2-x-6)^2}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x-3)^2(x+2)^2}{x^2(x+2)}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)^2(x+2)}{x^2}=0.$$

Câu 23: Đáp án C.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+1}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{(x+1)^2}}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{|x+1|}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)}=-\lim_{x\to(-1)^-}(x+2)=-1\neq 0.$$

Câu 24: Đáp án C.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

và $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$

nên $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ không tồn tại.

Câu 25: Đáp án B.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-1}{x-3}=+\infty.$$

Dạng 3: Giới hạn vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

Câu 26: Đáp án B.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=-\infty$; + $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}=-1$;

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x^2-5x}=0$; + $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x+x^2}=2$.

Câu 27: Đáp án C.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)(3-2x-5x^3)}{x(x^3-1)}=-5$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x^2+1)(2x^2+x)}{(2x^4+x)(x+1)}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2+1)(2x^2-x+4)}{x^3(3x+1)}=\dfrac{2}{3}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^2+1)(2-x^3)}{(2x^4+x)(x+1)}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 28: Đáp án B.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x+5}{1+2x}=-\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3x^3+x^2}{5+x-2x^2}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x^4+1}{2-x-x^2}=+\infty$.

Câu 29: Đáp án C.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=\frac{-1+3}{-2-1}=-\frac{2}{3}.$$

Câu 30: Đáp án C.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax+bx\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{cx+1}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+b\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{c+\frac{1}{x}}=\frac{a+3b}{c}.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax-b\sqrt{9x^2+2}}{cx+1}=5\Leftrightarrow\dfrac{a+3b}{c}=5$.

Câu 31: Đáp án A.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(4x-5)+\frac{11}{x+2}-(ax+b)\right].$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{4x^2+3x+1}{x+2}-(ax+b)\right]=0\Rightarrow a=4;b=-5$

$\Rightarrow a-b=9$.

Câu 32: Đáp án D.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-x-1}{x^2+x+2}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1+2|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+2}{1-2x}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^5+x-11}}{2x^2+x+1}=+\infty$. + $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{1-2x}}=-\infty$.

Câu 33: Đáp án B.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3x^3-1}=-\dfrac{1}{3}$.

+ Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-x^2}{8x^2-x+3}=-\dfrac{1}{8}$. Từ đó

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-x^2}{8x^2-x+3}}=\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}=-\frac{1}{2}.$$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2-x+2}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2|x|+3}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=2$.

Câu 34: Đáp án B.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)|x|\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{x-5x^2}=\dfrac{2}{5}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-2|x|}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=1$.

Câu 35: Đáp án A.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+2x}{3-4|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+2x}{3+4x}=\dfrac{1}{4}$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)\sqrt{\dfrac{x}{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{(1-2x)^2x}{x^3-1}}=2$

(do $1-2x>0$ với mọi $x<\dfrac{1}{2}$).

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}=\dfrac{1}{2}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x^4+4x^5+2}{9x^5+5x^4+4}}=\dfrac{2}{3}$.

Dạng 4: Giới hạn vô định dạng $0.\infty$.

Câu 36: Đáp án D.

Cách 1:

Ta có $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{a-x}{ax}.\dfrac{1}{(x-a)^2}=\dfrac{-1}{ax(x-a)}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{-1}{ax(x-a)}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{-1}{ax(x-a)}=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}\neq\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}$ nên $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{(x-a)^2}$ không tồn tại.

Cách 2: Cho a một giá trị cụ thể, chẳng hạn $a=1$, thay vào hàm số rồi sử dụng MTCT để tính giới hạn. Từ đó ta tìm được đáp án đúng là **D**.

Câu 37: Đáp án C.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x^3}{2x^4+x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3(x+1)^2}{2x^4+x^2+1}}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{3x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x(x+1)^2}{x^2-1}}=+\infty$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}}=1$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)\sqrt{\frac{x}{2x^4+x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x(x^2+1)^2}{2x^4+x+1}}=+\infty$.

Câu 38: Đáp án B.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{x^3+x+2}}=-\sqrt{2}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)\sqrt{\frac{3x-11}{x^3+1}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(1-2x)^2(3x-11)}{x^3+1}}=-2\sqrt{3}$.

+ $\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-1)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x+1)(x-1)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x+1)\sqrt{x-1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=0$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-3x)\sqrt{\frac{x+1}{5x^3+2x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(2-3x)^2(x+1)}{5x^3+2x+1}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 39: Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\frac{1}{x}$ thì $x=\frac{1}{t}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ và

$x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}\right)=\frac{\sqrt{1+2t}-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}$

$=\frac{\sqrt{1+2t}-(t+1)}{t^2}+\frac{t+1-\sqrt[3]{1+3t}}{t^2}$

$=\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+t+1}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt[3]{\frac{x+3}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{-1}{\sqrt{1+2t}+t+1}+\frac{t+3}{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{1+3t}+\sqrt[3]{(1+3t)^2}}\right)$

$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{3}=\frac{1}{2}$.

Câu 40: Đáp án C.

Cách 1: Sử dụng MTCT.

Cách 2: Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x$ thì $x=\frac{\pi}{4}-t$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}t=0$ và

$\tan2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\tan t=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2t\right)\tan t$

$=\cot2t\tan t=\frac{\cos2t}{\sin2t}.\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{2t}{\sin2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos2t}{2\cos t}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{2t}{\sin2t}.\frac{\sin t}{t}.\frac{\cos2t}{2\cos t}=\frac{1}{2}$.

Dạng 5: Dạng vô định $\infty-\infty$

Câu 41: Đáp án B.

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn với một giá trị cụ thể của n rồi so sánh với các đáp án. Chẳng hạn với $n=3$ ta có $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=1$.

Cách 2: $\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}=\frac{n-(1+x+x^2+...+x^{n-1})}{1-x^n}$

$=\frac{1-x+1-x^2+...+1-x^{n-1}}{1-x^n}$

$=\frac{1+(1+x)+(1+x+x^2)+...+(1+x+x^2+...+x^{n-2})}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}$.

Do đó

$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1+2+3+...+n-1}{n}=\frac{(n-1)n}{2n}=\frac{n-1}{2}$.

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{n-1}{2}$.

Câu 42: Đáp án B.

Theo câu 1, ta có

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=1$.

Lại có $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(mx+2)=m+2$.

Để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\Leftrightarrow m+2=1\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 43: Đáp án A.

Ta có $\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}=\frac{x+1-k}{x^2-1}$.

Mà $\lim\limits_{x\to1}(x+1-k)=2-k;\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$ nên để $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)$ là hữu hạn thì điều kiện cần là $2-k=0\Leftrightarrow k=2$.

Thật vậy khi $k=2$, $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$ nên

$$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{k}{x^n-1}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow k=n$.

Câu 44: Đáp án B.

Cách 1: Sử dụng MTCT tính lần lượt các giới hạn. Đến ý B ta được giới hạn bằng -1. Vậy đáp án đúng là B.

Cách 2: Ta thấy ngay A và C là các giới hạn vô cực, B và D là dạng vô định $\infty-\infty$. Ta xét giới hạn ở ý B.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}=-1.$$

Vậy đáp án là B.

Bổ sung:

$$+\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=+\infty;+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x)=+\infty;$$

$$+\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1.$$

Câu 45: Đáp án D.

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giới hạn khi $a=1$ và khi $a=0$, ta được

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+x)=\frac{3}{2};\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}=+\infty.$$

Từ đó suy ra đáp án đúng là D.

Cách 2: $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+ax)=\lim_{x\to-\infty}x\left(a-\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)$.

Vì $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên để $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+5}+ax)=+\infty$ thì $a-1<0\Leftrightarrow a<1$.

Câu 46: Đáp án D.

Ta có $\lim_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)$.

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim_{x\to+\infty}\left(ax-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\infty$. Vậy $a=1$. Khi đó

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+bx+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-2}{x+\sqrt{x^2+bx+2}}=-\frac{b}{2}.$$

Vậy $-\frac{b}{2}=3\Leftrightarrow b=-6$. Do đó $a+b=-5$.

Câu 47: Đáp án C.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(a-\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)+b.$$

Do đó nếu $a\neq1$ thì $\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\infty$.

Vậy $a=1$. Khi đó ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2-6x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-2}{x+\sqrt{x^2-6x+2}}+b$$

$$=\frac{6}{2}+b=b+3.$$

Vậy $b+3=5\Leftrightarrow b=2$. Do đó số lớn hơn trong hai số a và b là số 2. Chọn đáp án C.

Câu 48: Đáp án C.

Cả bốn giới hạn đều có dạng $\infty-\infty$, tuy nhiên chỉ có giới hạn ở ý C, hệ số của x trong hai số hạng là khác nhau. Theo kết quả đã biết thì giới hạn ở ý C chắc chắn là $-\infty$. Do đó đáp án đúng là C. Thật vậy:

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{2x^2+x}+\sqrt{2x^2+3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{4}.$$

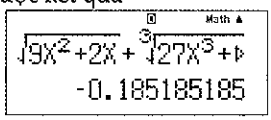
$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+1}+5x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{9+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+5\right)=-\infty.$$

$$+\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+5x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3x^2+5x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-5x}{-x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 49: Đáp án A.

Cách 1: Sử dụng MTCT tính giá trị hàm số tại $x=-10^{10}$ ta được kết quả



Áp dụng kĩ thuật tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn ta có $0,(185)=\frac{5}{27}$. Vậy $\frac{m}{n}=\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là A.

Cách 2: $\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}$

$$=\left(\sqrt{9x^2+2x}+3x\right)+\left(\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}-3x\right)$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}-3x}-\frac{4x^2+5}{\sqrt[3]{\left(27x^3+4x^2+5\right)^2}+3x\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}+9x^2}.$$

Suy ra $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x}+\sqrt[3]{27x^3+4x^2+5}\right)=\frac{2}{-6}+\frac{4}{9+9+9}=-\frac{5}{27}$.

Từ đó chọn đáp án đúng là A.

Câu 50: Đáp án B.

Tương tự như câu 49, ta có:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+\sqrt[3]{27x^3+bx^2+5}\right)=\frac{-a}{6}+\frac{b}{27}=\frac{2b-9a}{54}.$$

Do đó $2b-9a=14$. Suy ra a là số chẵn. Vậy $a+2b$ là số chẵn. Từ đó loại được đáp án A và C.

Giải hệ $\begin{cases}a+2b=34\\2b-9a=14\end{cases}$ được $a=2;b=16$.

Giải hệ $\begin{cases}a+2b=36\\2b-9a=14\end{cases}$ được $a=\frac{11}{5}$ (loại).

Vậy B là đáp án đúng.

Hàm số liên tục

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục*** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là ***gián đoạn*** tại điểm đó.

STUDY TIP
Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

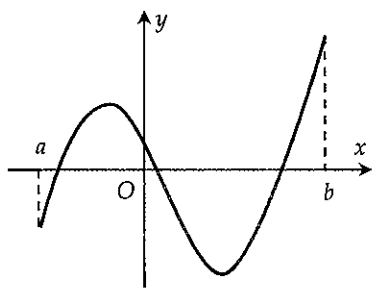
Định nghĩa 2

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

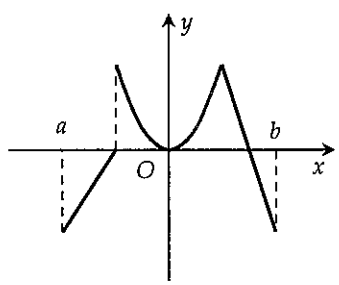
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên đoạn*** $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

STUDY TIP
Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a;b]$, $[a;b)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$ được định nghĩa một cách tương tự.



Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$.



Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$.

2. Một số định lí cơ bản

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

STUDY TIP
Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ, hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

Định lí 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

STUDY TIP
Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

STUDY TIP
Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:
- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a)f(b)<0$.

B. Các dạng toán về hàm số liên tục

Dạng 1

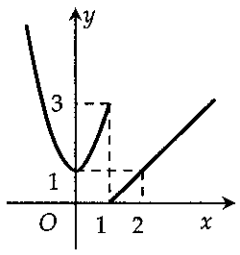
Xét tính liên tục của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f(x_0)$;
- Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Ví dụ 1: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị dưới đây **gián đoạn** tại điểm có **hoành độ** bằng bao nhiêu?



A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp án B.

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x=1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;3)$. B. $(2;3)$. C. $(-3;2)$. D. $(-3;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP
Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp $D=(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3),(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$. Vì $(2;3)\subset(-2;+\infty)$ nên đáp án đúng là **B.**

Lưu ý

Thật ra rút gọn ta được $f(x)=\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-1}$ nhưng không vì thế mà kết luận $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

CHÚ Ý

Không được rút gọn biểu thức của hàm số trước khi tìm tập xác định!

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là $D=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x\ge 5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục tại $x=7$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D=[5;+\infty)\cup\{0\}$. Theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$ và tại $x=7$. Vậy A, C, D đúng. Suy ra B sai.

Thật vậy, vì không tồn tại khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm $x=0$ mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ nên không thể xét tính liên tục của $f(x)$ tại điểm $x=0$. Do đó không thể khẳng định $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2 & \text{khi } x<-1\\ x^2-1 & \text{khi } x\ge -1.\end{cases}$ Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Đáp án C.

Lời giải

Trên $[-1;+\infty)$, $f(x)=x^2-1$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$. Vậy chọn đáp án đúng là C.

Giải thích thêm:

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+2)=-1$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-1)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ không tồn tại.

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$ nên A, D sai.

Mặt khác $f(-1)=(-1)^2-1=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)\neq f(-1)$ nên $f(x)$ không liên tục trên $(-\infty;-1]$. Do đó B sai.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2.\end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$.

(Có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3.\end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

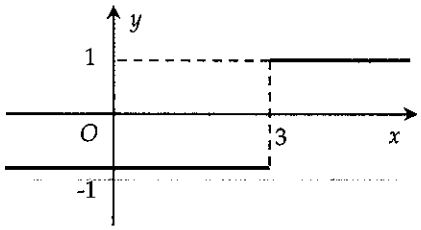
Ta có $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=1$. (Có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tham khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x\neq3$ để hiểu rõ hơn.



Ví dụ 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} \text{ khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b \text{ khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. B. $a=10b$. C. $a=b$. D. $a=2b$.

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{n}$.

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}$. Mặt khác $f(0)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}=5b\Leftrightarrow a=10b$. Vậy đáp án đúng là **B.**

Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của a và b thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn $a=5;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-1}{x}=\dfrac{5}{2}$; $f(0)=5$ nên không thỏa mãn. Với hệ thức ở đáp án B, chọn $a=10;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{10x+1}-1}{x}=5$; $f(0)=5$ nên thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Do đó đáp án là **B.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 \text{ khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} \text{ khi } x<2.\end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. B. $m=4$. C. $m=5$. D. $m=6$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3$; $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\neq 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3$; $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A đến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=3$. Do đó chọn đáp án C.

Dạng 2 Chứng minh phương trình có nghiệm

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.

Từ đó kết luận phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

C. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$, thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Đáp án D.

Lời giải

A sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^2-5$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$ và liên tục trên đó, đồng thời $f(-3).f(3)=4.4=16>0$ nhưng lại có hai nghiệm $x_1=-\sqrt{5}, x_2=\sqrt{5}$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$.

B sai. Vì thiếu điều kiện $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

C sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x<0 \\ x+2 \text{ khi } x\geq 0. \end{cases}$ Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$, có nghiệm $x=-1$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x=0\in(-3;3)$, tức là không liên tục trên $(-3;3)$.

Vậy D đúng. Thật vậy:

+ Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(a)$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(b)$.

+ Nếu $f(a)>0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số dương nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do

đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(a)<0$, do $f(a).f(b)>0$ nên suy ra $f(b)<0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số âm nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm với mọi a,b,c.

Đáp án B.

Lời giải

Dễ thấy với $a=b=c=0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$. Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

STUDY TIP
Phương trình đa thức bậc lẻ $a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+...+a_1x+a_0=0$ trong đó $a_{2n+1}\neq 0$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của $a_i, i=\overline{2n+1,0}$.

Giải thích thêm: Xét bài toán "Chứng minh rằng phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ (1) luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c". Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Ta có

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=-\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_1$ sao cho $f(x_1)<0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+ax^2+bx+c)=+\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_2$ sao cho $f(x_2)>0$.

Vậy $f(x_1)f(x_2)<0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x)$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1;x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình:

$$(m^2-3m+2)x^3-3x+1=0 \text{ có nghiệm.}$$

A. $m\in\{1;2\}$. B. $m\in\mathbb{R}$. C. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. D. $m\in\varnothing$.

Đáp án B.

Lời giải

Nếu $m^2-3m+2=0$: phương trình đã cho trở thành $-3x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Nếu $m^2-3m+2\neq 0$: theo STUDY TIP vừa nêu thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho có nghiệm. Do đó B đúng.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^4-3x^3+x-\frac{1}{8}$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

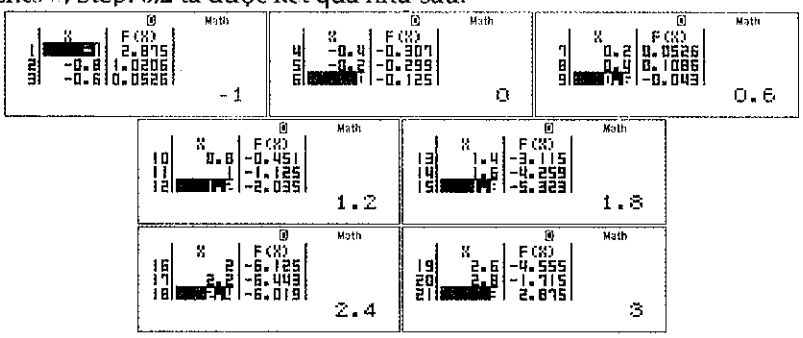
C. Phương trình (1) có đúng ba nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

D. Phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=X^4-3X^3+X-\frac{1}{8}$, Start: -1, End: 3, Step: 0,2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy giá trị của $f(x)$ tại các điểm trong khoảng $(-1;3)$ đổi dấu 4 lần. Mà phương trình bậc bốn thì có tối đa 4 nghiệm thực. Vậy phương trình (1) có đúng bốn nghiệm trên khoảng $(-1;3)$. Do đó D là đáp án đúng.

Cách 2: Sử dụng chức năng Shift Calc (Solve) của MTCT để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình trong khoảng $(-1;3)$. Tuy nhiên cách này tiềm ẩn nhiều may rủi hơn cách sử dụng chức năng Table như trên. Bạn đọc có thể tìm đọc cuốn "Công phá kĩ thuật Casio trong giải toán THPT" của tác giả Vũ Thị Ngọc Huyền và Nguyễn Ngọc Nam để hiểu hơn về các chức năng này.

STUDY TIP

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)$ đổi dấu khi x từ a qua b thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

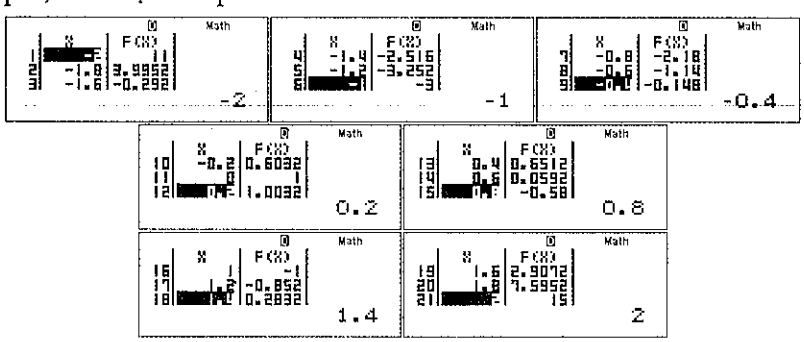
C. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Đáp án D.

Lời giải

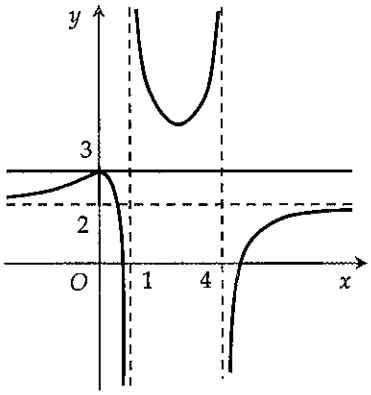
Sử dụng chức năng Table trên MTCT: $f(X)=2X^4-5X^2+X+1$, Start: -2, End: 2, Step: 0,2 ta được kết quả như sau:



Quan sát kết quả ta thấy trên khoảng $(-1;1)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm, trên khoảng $(-2;0)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm, trên khoảng $(-2;1)$ có ít nhất 3 nghiệm, trên khoảng $(0;2)$ phương trình có ít nhất 2 nghiệm. Vậy D là đáp án đúng.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số liên tục trên $(-\infty;4)$.

C. Hàm số liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số liên tục trên $(1;4)$.

Câu 2: Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6} & \text{khi } x<1.\end{cases}$$

Chọn khẳng định đúng

A. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và không liên tục tại $x=1$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

C. $f(x)$ không liên tục tại $x=6$ và liên tục tại $x=1$.

D. $f(x)$ không liên tục tại $x=6$ và tại $x=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m-3 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=0$.

A. không có giá trị nào của m thỏa mãn.

B. $m=5$. C. $m=1$. D. $m\in\{1;5\}$.

Câu 4: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số sau liên tục tại $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ a+b & \text{khi } x=0.\end{cases}$$

A. $a+b=0$. B. $2a+b=0$.

C. $3a+4b=0$. D. $3a+2b=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right) & \text{khi } x<1\\ m^3x+3-3m & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m\in\{1;2\}$. B. $m\in\{1;-2\}$.

C. $m\in\{-1;2\}$. D. $m\in\{-1;-2\}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+6}-a}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ x^3-(2b+1)x & \text{khi } x=3\end{cases}$,

trong đó a và b là các tham số thực. Biết hàm số liên tục tại $x=3$. Số nhỏ hơn trong hai số a và b là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x} & \text{khi } x>0\\ a\cos x-5 & \text{khi } x\geq 0.\end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=5$. B. $a=7$. C. $a=\dfrac{11}{2}$.

D. Không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Câu 8: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Chọn khẳng định đúng:

A. (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $(m^2-5m+4)x^5+2x^2+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$. B. $m\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $m\in(1;4)$. D. $m\in\mathbb{R}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm

$(2m^2-5m+2)(x-1)^{2017}(x^{2018}-2)+2x+3=0$.

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$. B. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $m\in\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$. D. $m\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án D.

Rõ ràng hàm số không liên tục tại $x=1$ và $x=4$. Do đó đáp án đúng là D.

Câu 2: Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=6$. Ta có

+ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$;

+ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x^2-7x+6}=-\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ không tồn tại nên hàm số không liên tục tại $x=1$. Do đó đáp án đúng là A.

Câu 3: Đáp án A.

Ta có $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^2}}{x}=\dfrac{|x|\sqrt{x^2+4}}{x}=\begin{cases}\sqrt{x^2+4} \text{ khi } x>0\\ -\sqrt{x^2+4} \text{ khi } x<0\end{cases}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to0^+}=2;\lim\limits_{x\to0^-}=-2$. (Có thể dùng MTCT để tìm các giới hạn một bên)

Vậy hàm số không có giới hạn tại $x=0$ nên không liên tục tại $x=0$. Vậy không có giá trị nào của m để hàm số liên tục tại $x=0$. Đáp án đúng là A.

Câu 4: Đáp án C.

Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{ax+1}\sqrt[3]{bx+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=a+b\Leftrightarrow 3a+4b=0.$$

Vậy C là đáp án đúng.

Nếu sử dụng MTCT, với mỗi hệ thức, ta chọn các giá trị của a và b thỏa mãn hệ thức, thay vào hàm số tính $f(0)$ và $\lim\limits_{x\to0} f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$ thì đó là hệ thức đúng.

Câu 5: Đáp án B.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Theo kết quả đã biết thì

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)=\frac{3-1}{2}=1.$$

(Có thể dùng MTCT để tìm giới hạn trên)

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(m^3x+3-3m)=m^3-3m+3=f(1)$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1\Leftrightarrow m^3-3m+3=1\Leftrightarrow m^3-3m+2=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-2$. (Sử dụng chức năng giải phương trình bậc 3 của MTCT). Vậy đáp án đúng là B.

Câu 6: Đáp án B.

$f(3)=27-3(2b+1)$.

Đặt $g(x)=\sqrt{x+6}-a$. Ta có $g(3)=3-a$.

* Ta thấy nếu $g(3)\neq0\Leftrightarrow a\neq3$ thì

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{\sqrt{x+1}-2}=\infty$$

nên hàm số không thể liên tục tại $x=3$.

* Nếu $a=3$ thì $\lim\limits_{x\to3} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}=\dfrac{2}{3}$.

Hàm số liên tục tại $x=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to3} f(x)=f(3)$

$\Leftrightarrow 27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow b=\dfrac{35}{9}$.

Vậy $a=3$ và $b=\dfrac{35}{9}$. Số nhỏ hơn là $a=3$.

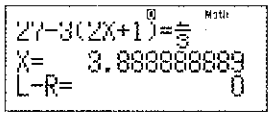
Do đó đáp án đúng là B.

Lưu ý: Để giải phương trình $27-3(2b+1)=\dfrac{2}{3}$ ta có thể làm như sau:

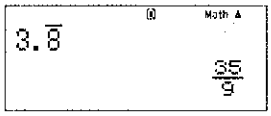
+ Nhập vào màn hình $27-3(2B+1)=\dfrac{2}{3}$.

+ Bấm SHIFT CALC (SOLVE), máy báo SOLVE FOR X nhập $\boxed{1}\boxed{=}$.

+ Máy hiển thị kết quả



+ Bấm $\boxed{3}\boxed{.}\boxed{ALPHA}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả



Vậy phương trình có nghiệm $b=\dfrac{35}{9}$.

Câu 7: Đáp án A.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(a\cos x-5)=a-5=f(0)$.

Ta có với mọi x: $\left|x\sin\dfrac{2}{x}\right|\le|x|$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\sin\dfrac{2}{x}\right)=0$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow a-5=0\Leftrightarrow a=5$.

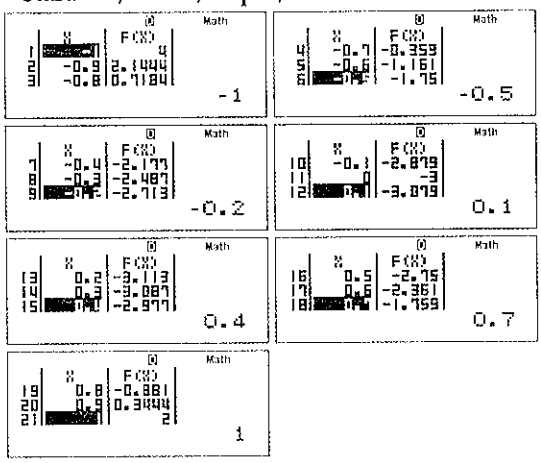
Vậy đáp án đúng là A.

Câu 8: Đáp án D.

Sử dụng chức năng TABLE của MTCT với

+ $f(X)=4X^4+2X^2-X-3$.

+ Start: -1; End: 1; Step: 0,1.



Ta thấy giá trị $f(x)$ tại các điểm đổi dấu hai lần. Suy ra $f(x)$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 9: Đáp án A.

+ Nếu $m^2-5m+4=0 \Leftrightarrow m\in\{1;4\}$ thì phương trình đã cho trở thành $2x^2+1=0$. Đây là một phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m^2-5m+4\neq 0$ thì theo kết quả đã biết, phương trình luôn có ít nhất một nghiệm.

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$.

Câu 10: Đáp án D.

+ Nếu $2m^2-5m+2=0$, phương trình đã cho trở thành $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$.

+ Nếu $2m^2-5m+2\neq 0$, phương trình đã cho là một phương trình đa thức bậc lẻ (bậc 4035) nên theo kết quả đã biết, phương trình có ít nhất một nghiệm.

+ Vậy với mọi $m\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

CHỦ ĐỀ 5: ĐẠO HÀM

Khái niệm đạo hàm

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

Vậy $\boxed{f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$.

STUDY TIP

Nếu $\Delta x=x-x_0$

$\Delta y=f(x)-f(x_0)$
$=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

thì $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to x_0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

+ Δx gọi là số gia của đối số tại điểm x_0.

+ Δy gọi là số gia của hàm số tương ứng.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

a) Đạo hàm bên trái

$$f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó $x\to x_0^-$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x<x_0$.

b) Đạo hàm bên phải

$$f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

trong đó $x\to x_0^+$ được hiểu là $x\to x_0$ và $x>x_0$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0\Leftrightarrow f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó: $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

a) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng đó.

b) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a;b]$ nếu có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm bên phải tại a, đạo hàm bên trái tại b.

STUDY TIP

- Hàm số liên tục tại điểm x_0 có thể không có đạo hàm tại điểm đó.
- Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

B. Các dạng toán tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa

Cách 1:

- Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1)

- Nếu tồn tại giới hạn (1) thì hàm số có đạo hàm tại x_0 và ngược lại thì hàm số không có đạo hàm tại x_0.

Cách 2: Tính theo số gia

- Cho x_0 một số gia Δx: $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

- Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Tính giới hạn $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm

- Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

- Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

- Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 chưa chắc $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}$. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x_0=1$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Nhân liên hợp:

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

$\sqrt{a}-b=\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$

Lời giải:

Cách 1: Xét $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2:

$\Delta y = f(\Delta x+1)-f(1)=\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{\Delta x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bạn đọc giải theo cách 1 tỏ ra đơn giản và nhanh hơn cách 2.

Ví dụ 2: Khi tính đạo hàm của hàm số $f(x)=x^2+5x-3$ tại $x_0=2$, một học sinh đã tính theo các bước sau:

Bước 1: $f(x)-f(2)=f(x)-11$.

Bước 2: $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{x^2+5x-3-11}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+7)}{x-2}=x+7$.

Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+7)=9$. Vậy $f'(2)=9$.

Tính toán trên nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Bước 1. B. Bước 2.

C. Bước 3. D. Tính toán đúng.

Đáp án D.

STUDY TIP

Phương trình bậc 2:

$ax^2+bx+c=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

$\Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)=0$

Lời giải:

Học sinh tính đạo hàm bằng định nghĩa theo cách 1 các bước đều đúng.

Ví dụ 3: Số gia của hàm số $f(x)=x^2$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$ là:

A. $(\Delta x)^2-2\Delta x-1$. **B.** $(\Delta x)^2+2\Delta x+2$. **C.** $(\Delta x)^2+2\Delta x$. **D.** $(\Delta x)^2-2\Delta x$.

Đáp án D.

Lời giải:

Với số gia Δx của đối số x tại $x_0=-1$, ta có:

$\Delta y=(-1+\Delta x)^2-1=1-2\Delta x+(\Delta x)^2-1=(\Delta x)^2-2\Delta x.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=x^2-x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là:

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x_0.\Delta x-\Delta x\right)$. **B.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1)$.

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0+1)$. **D.** $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left((\Delta x)^2+2x_0.\Delta x+\Delta x\right)$.

Đáp án B.

Lời giải:

Ta có: $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-(x_0+\Delta x)-(x_0^2-x_0)=(\Delta x)^2+2x_0.\Delta x-\Delta x$

$\Rightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x_0-1).$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. **B.** $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. **D.** $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x+x_0)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Đáp án D.

Lời giải:

- A đúng theo định nghĩa.
- B đúng vì $\Delta x=x-x_0$, $x\to x_0\Rightarrow \Delta x\to 0$.
- C đúng: Đặt $h=\Delta x=x-x_0\Rightarrow x=h+x_0$, $h\to 0$ khi $x\to x_0$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h+x_0-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Vậy D sai.

Ví dụ 6: Xét ba mệnh đề sau:

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

(3) Nếu hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba mệnh đề trên:

A. (1) và (3) đúng. B. (2) đúng.
C. (1) và (2) đúng. D. (2) và (3) đúng.

Đáp án A.

Lời giải:

Mệnh đề (2) sai vì: Xét hàm số $f(x)=|x|$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng ta có:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x=0}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x=0}=-1$$

nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

STUDY TIP
- Khi $x\to 0^+\Rightarrow x>0$ nên $|x|=x$.
- Khi $x\to 0^-\Rightarrow x<0$ nên $|x|=-x$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+|x+1|}{x}$. Tính đạo hàm của hàm số tại $x_0=-1$.

A. 2. B. 1.
C. 0. D. Không tồn tại.

Đáp án D.

Lời giải:

Hàm số liên tục tại $x_0=-1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)}=0$ (1)

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-1}{x(x+1)}=2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=-1$.

STUDY TIP
Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0\Leftrightarrow f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$

Ví dụ 8: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{4}$. B. $\dfrac{1}{16}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 2.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x>1\\ x^2 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1.
C. 2. D. $f'(1)$ không tồn tại.

Đáp án D.

Lời giải:

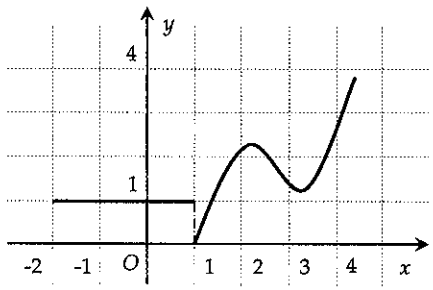
Ta có: $f(1)=1^2=1$.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(x+1)=2$$

Vì $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ nên hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại $x_0=1$.

Ví dụ 10: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây sai?



A. Hàm số có đạo hàm tại $x=0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x=1$.
C. Hàm số có đạo hàm tại $x=2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x=3$.

Đáp án B.

STUDY TIP
- Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- Hàm số không liên tục tại điểm x_0 thì không có đạo hàm tại x_0.

Lời giải:

Tại $x=1$ đồ thị hàm số bị ngắt nên hàm số không liên tục. Vì vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

Ví dụ 11: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

A. $a=-2$. **B.** $a=2$. **C.** $a=1$. **D.** $a=\frac{1}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải:

Để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x=1$.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2=f(1)=a$$

Khi đó $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{x^2-1}{x-1}-2}{x-1}=1$

Vậy $a=2$.

STUDY TIP
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Ví dụ 12: Tìm a, b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x\geq0\\ ax+b & \text{khi } x<0\end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x=0$.

A. $a=-11;\ b=11$. **B.** $a=-10;\ b=10$. **C.** $a=-12;\ b=12$. **D.** $a=-1;\ b=1$.

Đáp án D.

Lời giải:

STUDY TIP
Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
$= f(x_0)$

Trước tiên hàm số phải liên tục tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0),\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = b \Rightarrow b = 1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} a = a$

Hàm số có đạo hàm tại $x=0 \Leftrightarrow a=-1$.

Ví dụ 13: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ a\sin x + b\cos x & \text{khi } x<0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$.

A. $a=1;\ b=1$. B. $a=-1;\ b=1$. C. $a=-1;\ b=-1$. D. $a=0;\ b=1$.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có: $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+bx+1) = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(a\sin x + b\cos x) = b$

Để hàm số liên tục thì $b=1$

$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ax^2+x+1-1}{x} = 1$

STUDY TIP
Giới hạn lượng giác:
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{f(x)\to 0} \dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{a\sin x + b\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a\cos\dfrac{x}{2}\right) - \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{x}{2} = a$

Để tồn tại $f'(0) \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a=1$.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-1000)$. Tính $f'(0)$.

A. 10000! B. 1000! C. 1100! D. 1110!

Đáp án B.

Lời giải:

STUDY TIP
Hoán vị n phần tử:
$P_n = n! = 1.2...(n-1)n$

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)(x-2)...(x-1000)-0}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}(x-1)(x-2)...(x-100) = (-1)(-2)...(-1000) = 1000!$

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Số gia của hàm số $f(x)=x^3$ ứng với $x_0=2$ và $\Delta x=1$ bằng bao nhiêu?

A. -19. B. 7. C. 19. D. -7.

Câu 2: Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x)=2x(x-1)$ theo x và Δx là:

A. $4x+2\Delta x+2$. B. $4x+2(\Delta x)^2-2$.

C. $4x+2\Delta x-2$. D. $4x.\Delta x+2(\Delta x)^2+2\Delta x$.

Câu 3: Số gia của hàm số $f(x)=x^2-4x+1$ ứng với x và Δx là:

A. $\Delta x(\Delta x+2x-4)$. B. $2x+\Delta x$.

C. $\Delta x(2x-4\Delta x)$. D. $2x-4\Delta x$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định:

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$.

C. -2. D. không tồn tại.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ bởi $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. B. 1.

C. 0. D. không tồn tại.

Câu 6: Xét hai mệnh đề:

(I) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

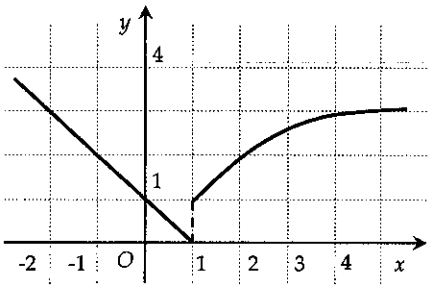
(II) $f(x)$ liên tục tại x_0 thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Cả 2 đều sai. D. Cả 2 đều đúng.

Câu 7: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Hàm số không có đạo hàm tại các điểm nào sau đây?

A. $x=0$. B. $x=1$. C. $x=2$. D. $x=3$.

Câu 8: Cho hàm số:

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 0 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Giá trị $f'(1)$ bằng:

A. 0. B. 4.

C. 5. D. không tồn tại.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ bởi $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0)=1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0=0$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Cả 2 đều đúng. D. Cả 2 đều sai.

Câu 11: Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y=\frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$.

(2) Hàm số $y=\frac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$.

Trong 2 câu trên:

A. (2) đúng. B. (1) đúng.

C. Cả (1), (2) đều đúng. D. Cả (1), (2) đều sai.

Câu 12: Cho hàm số:

$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$.

Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$.

C. $\frac{3}{4}$. D. không tồn tại.

Câu 13: Với hàm số $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{\pi}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Để tìm đạo hàm $f'(x)=0$ một học sinh lập luận qua các bước như sau:

1. $|f(x)|=|x|.\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq|x|$.

2. Khi $x\to 0$ thì $|x|\to 0$ nên $|f(x)|\to 0 \Rightarrow f(x)\to 0$.

3. Do $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ nên hàm số liên tục tại $x=0$.

4. Từ $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Rightarrow f(x)$ có đạo hàm tại $x=0$.

Lập luận trên nếu sai thì bắt đầu từ bước:

A. Bước 1. B. Bước 2. C. Bước 3. D. Bước 4.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

(1) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

(2) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Trong các mệnh đề trên:

A. Chỉ (1) đúng. B. Chỉ (2) đúng.

C. Cả (1), (2) đều đúng. D. Cả (1), (2) đều sai.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{khi } x\geq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$.

A. $a=-1$, $b=0$. B. $a=-1$, $b=1$.

C. $a=1$, $b=0$. D. $a=1$, $b=1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x>0 \\ x^2+x & \text{khi } x\leq 0 \end{cases}$.

Giá trị của $f'(0)$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 17: Xét hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là đoạn $[a;b]$ đồng thời nếu $x\to x_0\in[a;b]$ thì $f(x)\to 1$ với 3 điều kiện:

I. $f(x)$ là hàm liên tục trái và liên tục phải của x_0.

II. $f(x_0)=1$.

III. $f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Trong ba điều kiện trên, điều kiện cần và đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0 là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II.

C. Chỉ I và II. D. Chỉ II và III.

Câu 18: Xét ba hàm số:

I. $f(x)=|x|.x$

II. $g(x)=\sqrt{x}$

III. $h(x)=|x+1|x$

Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ là:

A. Chỉ I. B. Chỉ II.

C. Chỉ I và II. D. Chỉ I và III.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$

Với $x_0=2$, $\Delta x=1\Rightarrow \Delta y=19$.

Câu 2: Đáp án C.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2(x-x_0)(x+x_0)-2(x-x_0)}{x-x_0}$$

$=2x+2x_0-2=4x-2\Delta x-2$ (với $x_0=x-\Delta x$).

Câu 3: Đáp án A.

$\Delta y=f(\Delta x+x)-f(x)$

$=(\Delta x+x)^2-4(\Delta x+x)+1-(x^2-4x+1)=\Delta x(\Delta x+2x-4)$

Câu 4: Đáp án A.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Câu 5: Đáp án D.

Xét $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+3x}{(x-1)(x^2-3x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)}=\infty$.

Câu 6: Đáp án A.

(II) sai: Ví dụ: $f(x)=|x|$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nhưng $f(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

(I) đúng theo lý thuyết đã trình bày.

Câu 7: Đáp án B.

Tại $x=1$, đồ thị hàm số bị gián đoạn nên hàm số không liên tục tại đó $\Rightarrow$ Hàm số không có đạo hàm.

Câu 8: Đáp án C.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}-1}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^3-2x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Câu 9: Đáp án D.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-4)=0$

Vậy không tồn tại $f'(1)$.

Câu 10: Đáp án B.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}=+\infty.$$

Vậy (I) sai, (II) đúng.

Câu 11: Đáp án B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x+1}=0=f(0)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x(x+1)}=-1$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 12: Đáp án B.

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2.\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}.$$

Câu 13: Đáp án D.

Một hàm số liên tục tại x_0 chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó, hơn nữa $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sin\frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

Câu 14: Đáp án C.

Ta có: $-|x|\le x.\sin\frac{1}{x^2}\le |x|$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(-|x|)\le \lim_{x\to 0}\left(x.\sin\frac{1}{x^2}\right)\le \lim_{x\to 0}|x|=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}x.\sin\frac{1}{x^2}=0=f(0).$$

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

- Xét $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$.

- Lấy dãy (x_n): $x_n=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$ có:

$$\lim x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1.$$

- Lấy dãy (x_n'): $x_n'=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{6}+2n\pi}}$, tương tự ta cũng có

$$\lim_{n\to+\infty}x_n'=0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}f(x_n')=\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x^2}$ không tồn tại.

Câu 15: Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases}\lim_{x\to 1^+}f(x)=a+b=f(1)\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=1\end{cases}\Rightarrow a+b=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+bx-(a+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\left[a(x+1)+b\right]=2a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-1}{x-1}=2$$

Ta có hệ: $\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$

Câu 16: Đáp án A.

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}.\sin x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=1$$

Vậy $f'(0)=f'(0^-)=f'(0^+)=1$.

Câu 17: Đáp án C.

- $f(x)$ liên tục tại x_0 tức là $x\to x_0$ thì $f(x)\to f(x_0)$ nên I và II đúng.

- $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là điều kiện đủ để $f(x)$ liên tục tại x_0. $f(x)$ liên tục tại x_0 nhưng có thể $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 18: Đáp án B.

Ta có: $\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

Vậy $g(x)$ không có đạo hàm tại $x=0$.

Các quy tắc tính đạo hàm

A. Lý thuyết

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u=u(x)$, $v=v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

1. $(u+v)'=u'+v'$
2. $(u-v)'=u'-v'$
3. $(u.v)'=u'v+uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$

STUDY TIP
Mở rộng:
1. $(u_1 \pm u_2 \pm ... \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm ... \pm u_n'$
2. $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y=f(u(x))=f(u)$ với $u=u(x)$.

Khi đó: $\boxed{y_x'=y_u'.u_x'}$

3. Bảng công thức đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm các hàm số cấp cơ bản	Đạo hàm các hàm hợp $u=u(x)$
$(c)'=0$, c là hằng số	
$(x)'=1$	
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}=u'(1+\tan^2 u)$
$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}=-u'(1+\cot^2 u)$

STUDY TIP
Với các hàm số đã cho trong bảng được xác định và điều kiện đầy đủ.

B. Các dạng toán về quy tắc tính đạo hàm

Dạng 1 Đạo hàm của hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức và hàm hợp

Phương pháp:

- Sử dụng các quy tắc, các công thức tính đạo hàm trong phần lý thuyết.
- Nhận biết và tính đạo hàm của hàm số hợp, hàm số có nhiều biểu thức.
- Sử dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức...

Ví dụ 1: Đạo hàm của hàm số $y=-2x^5+4\sqrt{x}$ bằng biểu thức nào dưới đây?

A. $-10x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $-10x^4+\frac{4}{\sqrt{x}}$. C. $-10x^4+\frac{2}{\sqrt{x}}$. D. $-10x^4-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Đáp án C.

Lời giải:

$y' = -10x^4 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Ví dụ 2: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{a}{(x+2)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. a=−3. **B.** a=5. **C.** a=3. **D.** a=−5.

Đáp án C.

STUDY TIP

$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$

Lời giải:

$y' = \frac{(2x+1)'.(x+2)-(x+2)'.(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow a = 3$.

Ví dụ 3: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ bằng biểu thức có dạng $\frac{ax^2+bx}{(x-1)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. $a.b = -2$. **B.** $a.b = -1$. **C.** $a.b = 3$. **D.** $a.b = 4$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Với $a.a' \neq 0$:

$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}\right)' = \frac{aa'x^2+2ab'x+bb'-ac'}{(a'x+b')^2}$

Lời giải:

Cách 1: $y' = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} \Rightarrow a.b = -2$.

Cách 2: $y = x + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Ví dụ 4: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+x+3}{x^2+x-1}$ bằng biểu thức biểu có dạng $\frac{ax+b}{(x^2+x-1)^2}$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. $a+b=4$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=-10$. **D.** $a+b=-12$.

Đáp án D.

STUDY TIP

$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}$

Lời giải:

Cách 1: $y = \frac{x^2+x-1+4}{x^2+x-1} = 1 + \frac{4}{x^2+x-1}$

$\Rightarrow y' = \frac{-4(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = -\frac{8x+4}{(x^2+x-1)^2}$

Cách 2: Áp dụng $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$y' = \frac{(2x+1)(x^2+x-1)-(2x+1)(x^2+x+3)}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-8x-4}{(x^2+x-1)^2} \Rightarrow a+b=-12$

Ví dụ 5: Đạo hàm của hàm số $y = ax^2 + (a-1)x + a^3 - a^2$ (với a là hằng số) tại mọi $x \in \mathbb{R}$ là:

A. $2x+a-1$. **B.** $2ax+1-a$. **C.** $2ax+3a^2-2a+1$. **D.** $2ax+a-1$.

Đáp án D.

STUDY TIP

- Với c là hằng số thì $(c)' = 0$
- $(c.u)' = c.u'$
- $(x^n)' = n.x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải:

$y' = 2ax + a - 1$.

Ví dụ 6: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2+x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{2\sqrt{x^2+x+1}}$. Khi dó $a-b$ bằng:

A. $a-b=2$. B. $a-b=-1$. C. $a-b=1$. D. $a-b=-2$.

Đáp án C.

$$y'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\Rightarrow a-b=1.$$

Ví dụ 7: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2-x+1\right)^5$ là:

A. $4\left(x^2-x+1\right)^4\left(2x-1\right)$. B. $5\left(x^2-x+1\right)^4$.

C. $5\left(x^2-x+1\right)^4\left(2x-1\right)$. D. $\left(x^2-x+1\right)^4\left(2x-1\right)$.

STUDY TIP
Với $u=u(x)$:
- $\left(u^n\right)'=n.u'.u^{n-1},\ n\in\mathbb{N}^*$
- $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Đáp án C.

Lời giải

$$y'=5\left(x^2-x+1\right)'.\left(x^2-x+1\right)^4=5\left(2x-1\right)\left(x^2-x+1\right)^4$$

Ví dụ 8: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)\left(5-3x^2\right)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. -1 B. -2 C. 3 D. -3

STUDY TIP
$u=u(x),\ v=v(x)$
$(u.v)'=u'v+uv'$

Đáp án D.

Lời giải

$$y'=2x\left(5-3x^2\right)+\left(x^2+1\right)\left(-6x\right)=-12x^3+4x.$$

Ví dụ 9: Đạo hàm của hàm số $y=x^2\left(2x+1\right)\left(5x-3\right)$ bằng biểu thức có dạng ax^3+bx^2+cx. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 31. B. 24. C. 51 D. 34

STUDY TIP
$u=u(x),\ v=v(x),\ w=w(x)$
$\Rightarrow (u.v.w)'=u'.v.w+u.v'.w+u.v.w'$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: $y'=2x\left(2x+1\right)\left(5x-3\right)+x^2.2\left(5x-3\right)+x^2\left(2x+1\right).5=40x^3-3x^2-6x.$

Cách 2: Nhân vào rút gọn ta được: $y=10x^4-x^3-3x^2$

$\Rightarrow y'=40x^3-3x^2-6x$ nên $a+b+c=31$.

Ví dụ 10: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số) là:

A. $-\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. B. $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)^3}}$. C. $\dfrac{2a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$. D. $\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

Đáp án D.

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)}=\frac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}.$$

Ví dụ 11: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a=-4$ B. $a=-1$ C. $a=2$ D. $a=-3$

Đáp án B.

Lời giải:

STUDY TIP
$u = u(x)$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} = \frac{-\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}.\left(x^2+1\right)} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}.\left(x^2+1\right)} \Rightarrow a = -1.$$

Ví dụ 12: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x \le 1 \\ \sqrt{x-1}+3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ là:

A. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

B. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

C. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \le 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

D. $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Đáp án D.

STUDY TIP
Loại bài toán kết hợp giữa tính đạo hàm bằng công thức và tính đạo hàm bằng định nghĩa tại 1 điểm x_0.

Lời giải:

- Với $x < 1$: $f'(x) = 2x+1$

- Với $x > 1$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

- Với $x = 1$, ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = +\infty$ nên không có đạo hàm tại $x = 1$.

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

Ví dụ 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \ge 1 \end{cases}$.

A. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

B. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1. \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

C. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

D. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1. \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Đáp án B.

STUDY TIP
- Trên các khoảng xác định ta tính đạo hàm bằng quy tắc.
- Tại điểm $x = x_0$ ta xét đạo hàm bằng định nghĩa.

Lời giải:

- Với $x < 1$: $f'(x) = -x$

- Với $x > 1$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

- Với $x = 1$, ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$

$$\begin{cases} \text{Xét } \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(1)=-1$$

Vậy $f'(x)=\begin{cases} -x & \text{khi } x<1 \\ -1 & \text{khi } x=1. \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x>1 \end{cases}$

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)=(3x^2-1)^2$. Giá trị $f'(1)$ là:

A. 4. **B.** 8. **C.** –4. **D.** 24.

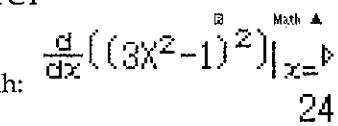
Đáp án D.

Lời giải:

Cách 1: $f'(x)=2(3x^2-1)(3x^2-1)'=12x(3x^2-1)\Rightarrow f'(1)=24.$

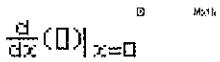
Cách 2: Sử dụng MTCT

- Nhập vào màn hình:



Nhận xét: Bằng cách 2 ta có thể tính nhanh chóng đạo hàm tại một điểm xác định $x=x_0$.

STUDY TIP
Dùng MTCT:



Tính đạo hàm của hàm số tại một điểm chỉ ra $x=x_0$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại.

Đáp án D.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\Rightarrow$ Không tồn tại $f'(1)$ vì $f(x)$ xác định với $x>1$.

Lưu ý

Với bài toán này nếu sử dụng MTCT thì kết quả là màn hình hiển thị thông báo "Math ERROR" và không tính được.

Ví dụ 16: Cho hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+1$. Tập các giá trị của x để $f'(x)<0$ là:

A. $(-1;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Đáp án A.

Lời giải:

$f'(x)=-8x^3+8x\Rightarrow f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ x>1\end{array}\right.$

STUDY TIP
Nhận biết được loại bài toán kết hợp giữa việc tính đạo hàm và giải bất phương trình.

Ví dụ 17: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. Tập các giá trị của x để $2x.f'(x)-f(x)\ge 0$ là:

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **D.** $\left[\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Đáp án A.

Lời giải:

$f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow 2x.f'(x)-f(x)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{2x.f(x)}{\sqrt{x^2+1}}-f(x)\ge 0$

STUDY TIP
+ $|x|\ge x\Rightarrow|x|+x\ge 0$
+ $\sqrt{f(x)}\le\sqrt{g(x)}$
$\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0 \\ f(x)\le g(x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x \ge \sqrt{x^2+1}$ (do $f(x) > x+\sqrt{x^2} = x+|x| \ge 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3x^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Ví dụ 18: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2\sqrt{2}x^2+8x-1$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x)=0$ là:

A. $\{-2\sqrt{2}\}$. B. $\{2;\sqrt{2}\}$. C. $\{-4\sqrt{2}\}$. D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(x)=x^2-4\sqrt{2}x+8$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$.

STUDY TIP

- Nhận biết được loại bài toán kết hợp giữa việc tính đạo hàm và giải phương trình.
- Sau khi tính được đạo hàm ta có thể thử các đáp án vào phương trình để tìm ra kết quả.

Ví dụ 19: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là:

A. $\left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}$. B. $\left\{-\dfrac{2}{3};0\right\}$. C. $\left\{0;\dfrac{3}{2}\right\}$. D. $\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}$.

Đáp án C.

Lời giải:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn)}$$

Ví dụ 20: Cho hàm số $y=\dfrac{mx^3}{3}-mx^2+(3m-1)x+1$. Tập hợp các giá trị của tham số m để $y' \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là:

A. $(-\infty;\sqrt{2}]$. B. $(-\infty;2]$. C. $(-\infty;0]$. D. $(-\infty;0)$.

Đáp án C.

Lời giải:

$y'=mx^2-2mx+3m-1$

$y' \le 0 \Leftrightarrow mx^2-2mx+3m-1 \le 0$ (1)

+ Với $m=0$ thì (1) trở thành $-1 \le 0$ nên đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m \ne 0$, khi đó (1) đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 1-2m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<0$

Vậy $m \le 0$.

STUDY TIP

Cho $f(x)=ax^2+bx+c,\ a \ne 0$

+ $f(x) \ge 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

+ $f(x) \le 0\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

Ví dụ 21: Cho hàm số $f(x)=2mx-mx^3$. Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 1$ khi và chỉ khi:

A. $m \le -1$. B. $m > -1$. C. $-1 \le m \le 1$. D. $m \ge -1$.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(x)=2m-3mx^2$

Số $x=1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) \le 1 \Leftrightarrow 2m-3m \le 1 \Leftrightarrow m \ge -1$.

Dạng 2 Đạo hàm các hàm số lượng giác

Phương pháp:

- Vận dụng các công thức đạo hàm bốn hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$ và hàm hợp của nó.
- Vận dụng phối hợp các quy tắc đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp.
- Vận dụng các phương trình lượng giác cơ bản, phương trình bậc nhất với $\sin x$ và $\cos x$, phương trình tích số ... để giải phương trình $y'=0$.

Chú ý: Biến đổi lượng giác để thu gọn các hàm số, biểu thức lượng giác.

STUDY TIP

$(\sin^n u)' = n.\sin^{n-1}u.(\sin u)'$

$(\cos^n u)' = -n.\cos^{n-1}u.(\cos u)'$

$(\tan^n u)' = n.\tan^{n-1}u.(\tan u)'$

$(\cot^n u)' = n.\cot^{n-1}u.(\cot u)'$

Ví dụ 1: Đạo hàm của hàm số $y=2\sin 3x.\cos 5x$ có biểu thức nào sau đây?

A. $30\cos 3x.\sin 5x$. B. $-8\cos 8x+2\cos 2x$.

C. $8\cos 8x-2\cos 2x$. D. $-30\cos 3x+30\sin 5x$.

Đáp án C.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $y=\sin 8x-\sin 2x \Rightarrow y'=8\cos 8x-2\cos 2x$.

Cách 2: $y'=6\cos 3x.\cos 5x-10\sin 3x.\sin 5x$

$=3\cos 8x+3\cos 2x-5\cos 2x+5\cos 8x$

$=8\cos 8x-2\cos 2x.$

Nhận xét: Nếu dùng cách 1 sử dụng công thức biến đổi từ tích sang tổng rút gọn rồi sau đó việc tính đạo hàm y' sẽ đơn giản hơn.

STUDY TIP

$\sin a.\cos b$

$=\frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

$\cos a.\cos b$

$=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

Ví dụ 2: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ có biểu thức dạng $\frac{a}{(\sin x-\cos x)^2}$. Vậy giá trị a là:

A. $a=1$. B. $a=-2$. C. $a=3$. D. $a=2$.

Đáp án B.

Lời giải:

$$y'=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$$

$\Rightarrow a=-2.$

STUDY TIP

Áp dụng quy tắc:

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

Ví dụ 3: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ là:

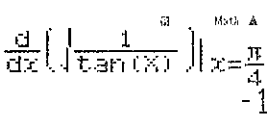
A. $\frac{-1}{\sin^2 x.\sqrt{\cot x}}$. B. $\frac{-1}{2\sin^2 x.\sqrt{\cot x}}$. C. $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}$. D. $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$.

Đáp án B.

Lời giải:

Cách 1: $y'=\frac{(\cot x)'}{2\sqrt{\cot x}}=\frac{-1}{2\sin^2 x.\sqrt{\cot x}}$.

Cách 2: Học sinh có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{\cot x}$ tại một điểm $x=\frac{\pi}{4}$ ta được kết quả -1.



Với $x=\frac{\pi}{4}$ thay vào từng đáp án ta được đáp án B.

Ví dụ 4: Đạo hàm của hàm số $y=\cos^2\left(\sin^3 x\right)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin\left(2\sin^3 x\right).\sin^2 x.\cos x$.

B. $-6\sin\left(2\sin^3 x\right).\sin^2 x.\cos x$.

C. $-7\sin\left(2\sin^3 x\right).\sin^2 x.\cos x$.

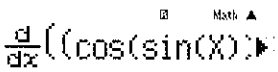
D. $-3\sin\left(2\sin^3 x\right).\sin^2 x.\cos x$.

Đáp án D.

Lời giải:

Cách 1: $y=\cos^2 u$ với $u=\sin^3 x \Rightarrow y'=-3\sin\left(2\sin^3 x\right).\sin^2 x.\cos x$.

Cách 2: Sử dụng MTCT



- Nhập biểu thức của hàm số $y=\cos^2\left(\sin^3 x\right)$ ở đơn vị radian

- Thay giá trị $x=\frac{\pi}{4}$ vào từng đáp án ta được kết quả là đáp án D.

Nhận xét: Với bài toán này việc sử dụng MTCT trở nên phức tạp hơn nhiều với việc giải tự luận thuần túy.

Ví dụ 5: Đạo hàm của hàm số $y=-\frac{\cos x}{3\sin^3 x}+\frac{4}{3}\cot x$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\cot^3 x-1$. B. $3\cot^4 x-1$. C. $\cot^4 x-1$. D. $\cot^4 x$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Học sinh cần biến đổi hàm số đã cho về dạng đơn giản hơn thì việc tính đạo hàm sẽ nhanh hơn.

Lời giải:

Ta rút gọn hàm số đã cho: $y=-\frac{1}{3}\cot x\left(1+\cot^2 x\right)+\frac{4}{3}\cot x=-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x$

$\Rightarrow y'=\cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right)-1-\cot^2 x=\cot^4 x-1$.

Ví dụ 6: Đạo hàm của hàm số $y=\tan^2 x-\cot^2 x$ là:

A. $2\frac{\tan x}{\cos^2 x}+2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$.

B. $2\frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$.

C. $2\frac{\tan x}{\sin^2 x}+2\frac{\cot x}{\cos^2 x}$.

D. $2\tan x-2\cot x$.

Đáp án A.

Lời giải:

$y'=2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-2\cot x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+2\frac{\cot x}{\sin^2 x}$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^3.\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $f'(x)=\begin{cases} x^2.\sin\frac{1}{x}-x.\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ -1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

B. $f'(x)=\begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x}-x.\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 1 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

C. $f'(x)=\begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x}+x.\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

D. $f'(x)=\begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$.

Đáp án D.

STUDY TIP
Bạn đọc nhận biết loại bài toán tính đạo hàm của hàm số có nhiều biểu thức:
- Với $x \neq x_0$ tính đạo hàm bằng công thức.
- Với $x = x_0$ tính đạo hàm bằng định nghĩa.

Lời giải:

Với $x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2.\sin\frac{1}{x} - x.\cos\frac{1}{x}$

Với $x = 0 \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

Vậy $f'(x) = \begin{cases} 3x^2.\sin\frac{1}{x} - x.\cos\frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 8: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}$ là:

A. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{3\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.
B. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{2\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.
C. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) + (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.
D. $\frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

Đáp án D.

STUDY TIP
Vận dụng giữa các quy tắc tính đạo hàm và đạo hàm của hàm số hợp:
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Lời giải:

Ta có $y = \sqrt{u}$, $u = 3\tan^2 x + \cot 2x \Rightarrow y' = \frac{3\tan x(1+\tan^2 x) - (1+\cot^2 2x)}{\sqrt{3\tan^2 x + \cot 2x}}$.

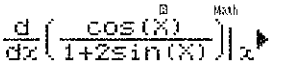
Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$. Chọn kết quả sai:

A. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}$.
B. $f'(0) = -2$.
C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.
D. $f'(\pi) = -2$.

Đáp án A.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $f'(x) = \frac{-\sin x - 2}{(1 + 2\sin x)^2}$



$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5}{8}; f'(0) = -2; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}; f'(\pi) = -2.$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong 4 biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định $f(x)$ thỏa mãn $y' = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$?

A. $x + \frac{1}{2}\cos 2x$.
B. $x - \frac{1}{2}\cos 2x$.
C. $x - \sin 2x$.
D. $x + \sin 2x$.

Đáp án A.

STUDY TIP
Bài toán ngược xác định hàm số $f(x)$ khi biết được $f'(x)$.

Lời giải:

Ta có: $y' = f'(x) + 2\cos x.\sin x = f'(x) + \sin 2x$

$y' = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x$

$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x.$

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x.\cos^2 x$. Khi đó $f'(x)$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 1.
B. 2.
C. 0.
D. –1.

Đáp án C.

STUDY TIP
Dạng bài toán hàm số có đạo hàm không phụ thuộc vào x, tức là sau khi rút gọn hàm số có dạng:
$f(x) = ax + b$ hoặc $f(x) = c$
a, b, c là hằng số.

Lời giải:

Cách 1: $f'(x) = 6\sin^5 x.\cos x - 6\cos^5 x.\sin x + 3(2\sin x.\cos^3 x - 2\cos x.\sin^3 x)$

Ta có thể rút gọn biểu thức của hàm số rồi tính đạo hàm sau.

$$=6\sin x.\cos x\left(\sin^4 x-\cos^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$
$$=6\sin x.\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\right)=0$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính đạo hàm tại điểm x bất kì ta được kết quả $f'(x)=0$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$, $g(x)=\frac{1}{4}\cos 4x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f'(x)-g'(x)=0$. B. $f(x)=g(x)+\frac{1}{4}$.

C. $2f'(x)-3g'(x)=1$. D. $3f'(x)+2g'(x)=-1$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Dùng biến đổi lượng giác thì ta được $f(x)=g(x)+\frac{3}{4}$ do 2 hàm số sai khác nhau một hằng số nên có cùng đạo hàm.

Lời giải:

Ta có:

$f'(x)=4\sin^3 x.\cos x+4\cos^3 x.(-\sin x)=4\sin x.\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=-\sin 4x$

$g'(x)=-\sin 4x$.

Vậy $f'(x)-g'(x)=0$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=\cos^2 x+\sin x$. Phương trình $y'=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$?

A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. 4 nghiệm.

Đáp án C.

STUDY TIP

Loại bài toán kết hợp giữa việc tính đạo hàm y' và giải phương trình lượng giác.

Lời giải:

$y'=2\cos x.\sin x+\cos x=\cos x(1-2\sin x)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.;(k\in\mathbb{Z})$$

Vì $x\in(0;\pi)\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của m để $y'=0$ có nghiệm.

A. $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right.$. B. $m\ge 2$. C. $-1\le m\le 3$. D. $m\le -2$.

Đáp án A.

STUDY TIP

Phương trình bậc nhất với $\sin x$ và $\cos x$:

$a\sin x+b\cos x=c$

có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

Lời giải:

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=m+2$

Điều kiện phương trình có nghiệm là: $a^2+b^2\ge c^2$

$$\Leftrightarrow(m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 3\end{array}\right..$$

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức – hữu tỉ – căn thức và hàm hợp

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $5x^2-11x-4$. B. $6x^2-18x+12$.
C. $6x^2+18x-12$. D. $6x^2-9x-12$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số:

$$y=-x^3+3mx^2+3\left(1-m^2\right)x+m^3-m^2$$

(với m là tham số) bằng:

A. $-3x^2+6mx+1-m^2$. B. $-x^2+3mx-1-3m$.
C. $3x^2-6mx-3+3m^2$. D. $-3x^2+6mx+3-3m^2$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^2\left(3+5x^2\right)$ bằng biểu thức có dạng ax^5+bx^3+cx. Khi đó $a-b+c$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)\left(x^3+2\right)\left(x^4+3\right)$ bằng biểu thức có dạng $ax^8+bx^6+cx^5+15x^4+dx^3+ex^2+gx$. Khi đó $a-b+c-d+e-g$ bằng:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ bằng biểuthức có dạng $\dfrac{a}{\left(x-1\right)^2}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $a=-2$. B. $a=-1$. C. $a=-3$. D. $a=3$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2\left(x-1\right)}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx}{2\left(x-1\right)^2}$. Khi đó $a.b$ bằng:

A. –2. B. –1. C. 4. D. 6.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-5x+2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{\left(x^2-5x+2\right)^2}$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. –1. B. 2. C. 3. D. –2.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}{\left(x^3-2\right)^2}$. Khi đó $a+b+c+d+e$ bằng:

A. –12 B. –10 C. 8 D. 5

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x-2\right)\sqrt{x^2+1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó $a.b.c$ bằng:

A. –2 B. –4 C. –6 D. –8

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^6-3x^4\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $12x^{11}-52x^9+64x^7$. B. $12x^{11}-73x^9+49x^7$.
C. $12x^{11}-62x^9+70x^7$. D. $12x^{11}-60x^9+72x^7$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{5x^2-2x+1}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$. Khi đó $T=\dfrac{a}{b}$ bằng:

A. $T=-5$ B. $T=5$ C. $T=-10$ D. $T=-10$

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2}$. B. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}}$.

C. $\dfrac{1}{4\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{4\sqrt{x-1}}$. D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng biểu thức có dạng $\dfrac{ax+b}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$. Khi đó $P=a.b$ bằng:

A. $P=1$ B. $P=-1$ C. $P=2$ D. $P=-2$

Câu 14: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2\sqrt{x^3}.\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$. B. $\dfrac{4\sqrt{x}+2x^2-3}{x\sqrt{x}.\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{x}-2x^2-2}{2x\sqrt{x}.\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$. D. $\dfrac{\sqrt{x}+2x^2+1}{2x\sqrt{x}.\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$. Giá trị $f'\left(0\right)$ là:

A. 0. B. $\dfrac{1}{2}$.
C. 1. D. không tồn tại.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1-x}{2x+1}$ thì $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ có giá trị là:

A. 0. B. 3.
C. –3. D. không tồn tại.

Câu 17: Cho $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)...(x-2017)}$ thì $f'(0)$ có giá trị bằng:

A. $\dfrac{1}{2017!}$. B. $2017!$. C. $\dfrac{-1}{2017!}$. D. $-2017!$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\ge 1 \\ 2x-1 & \text{khi } x<1 \end{cases}$. Hãy chọn đáp án sai:

A. $f'(1)=1$.

B. Hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$.

C. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

D. $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x\ge 1 \\ 2 & \text{khi } x<1 \end{cases}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$. Tập các giá trị của x để $f'(x)>0$ là:

A. $(-\infty;0)$. B. $\left[-2;\sqrt{2}\right)$. C. $(-2;2]$ D. $\left(-2;\sqrt{2}\right)$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$ là:

A. $\left(-\infty;\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$. B. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$.

C. $\left(-\infty;\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$. D. $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};+\infty\right)$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

B. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

C. $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

D. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$.

Câu 22: Cho $f(x)=x^5+x^3-2x-3$.

Tính $f'(1)+f'(-1)+4f'(0)$.

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$. Hàm số có đạo hàm $f'(x)$ bằng:

A. $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

B. $x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

C. $\dfrac{3}{2}\left(-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

D. $\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}\right)$.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y=\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}.\dfrac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. B. $2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

C. $\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\dfrac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$. D. $2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$. Đạo hàm y' bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\dfrac{3(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. B. $\dfrac{(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

C. $\dfrac{-(2x+1)^2}{(x-1)^4}$. D. $\dfrac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}$.

Câu 27: Cho hàm số:

$$y=(m-1)x^3-3(m+2)x^2-6(m+2)x+1.$$

Tập giá trị của m để $y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ là:

A. $[3;+\infty)$. B. $[1;+\infty)$.

C. $m=\varnothing$ D. $\left[4\sqrt{2};+\infty\right)$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} & \text{khi } x\ge 0 \\ x^2+ax+b & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $a=0,\ b=11$. B. $a=10,\ b=11$.

C. $a=20,\ b=21$. D. $a=0,\ b=1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=-\dfrac{mx^3}{3}+\dfrac{mx^2}{2}-(3-m)x+2$. Tìm m để $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

A. $m\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]$. B. $m\in(-\infty;3)$.

C. $m\in\left(\frac{12}{5};3\right)$. D. $m\in\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. Đạo hàm $f'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\begin{cases}-\frac{1}{x^2} \text{ khi } x<-1,\ x>1\\ 1 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$. B. $\begin{cases}\frac{2}{x^2} \text{ khi } x<-1,\ x>1\\ 1 \text{ khi } -1\le x\le 1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}\frac{1}{x^2} \text{ khi } x<-1,\ x>1\\ -1 \text{ khi } -1\le x\le 1\end{cases}$. D. $\begin{cases}-\frac{3}{x^2} \text{ khi } x<-1,\ x>1\\ 2 \text{ khi } -1<x<1\end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Hàm số $y=\cos x.\sin^2 x$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $\sin x(3\cos^2 x+1)$. B. $\sin x(3\cos^2 x-1)$.

C. $\sin x(\cos^2 x-1)$. D. $\sin x(\cos^2 x+1)$.

Câu 32: Hàm số $y=\frac{1}{2}(1+\tan x)^2$ có đạo hàm là biểu thức nào sau đây?

A. $(1+\tan x)^2$. B. $1+\tan^2 x$.

C. $(1+\tan x)(1+\tan^2 x)$. D. $1+\tan x$.

Câu 33: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. B. $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

C. $\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^3 x}$. D. $\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$. Giá trị của $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ là:

A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{8}{3}$.

Câu 35: Hàm số $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$ có $y'=\frac{ax^2+bx+c}{(\cos x+x\sin x)^2}$.

Hỏi $T=a+b+c$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 0. D. –1.

Câu 36: Cho hàm số $y=\cos 2x.\sin^2\frac{x}{2}$. Xét hai kết quả:

(I) $y'=-2\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2}+\sin x.\cos 2x$

(II) $y'=2\sin 2x.\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x.\cos 2x$

Cách nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Cả 2 đều đúng. D. Không cách nào.

Câu 37: Đạo hàm của hàm số:

$y=\cot^2(\cos x)+\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

B. $2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}\sin x+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

C. $-2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

D. $2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}\sin x+\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$.

Câu 38: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $(x\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

B. $(x\cos x+\sin x)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

C. $(x\sin x-\cos x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

D. $(x\sin x+\cos x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y=\frac{1}{|\sin x|}$ là biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-\cot x}{|\sin x|}$. B. $\frac{\cot x}{|\sin x|}$. C. $\frac{\cot x}{\sin x}$. D. $\frac{-\cot x}{\sin x}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=\sin(\cos^2 x).\cos(\sin^2 x)$. Đạo hàm $y'=a.\sin 2x.\cos(\cos 2x)$. Giá trị của a là số nguyên thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. B. $(-1;5)$. C. $(-3;2)$. D. $(4;7)$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn $f(2x)=4\cos x.f(x)-2x$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0)=0$. B. $f'(0)=1$.

C. $f'(0)=-2$. D. $f'(0)=3$.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 6 điểm.

Câu 43: Cho hàm số $y=\cot 2x$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $y'+2y^2+2=0$. B. $y'-2y^2-2=0$.

C. $y'+3y^2+5=0$. D. $y'+3y^2+7=0$.

Câu 44: Tìm số nguyên dương n sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^n.\sin\frac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

A. $n=1$. B. $n=2$. C. $n\geq 2$. D. $n=3$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+\sin 2x$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\sqrt{2}, M=\sqrt{2}$. B. $m=-1, M=1$.

C. $m=-2, M=2$. D. $m=-\sqrt{5}, M=\sqrt{5}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=-\cos x+\sin x-\cos 2x$. Phương trình $f'(x)=1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. B. $\sin x-1=0$.

C. $(\sin x-1)(\cos x-1)=0$. D. $\cos x=0$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\sin^2 x+3\cos^2 x$. Tập giá trị của hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. $[-4;4]$. B. $[-2;2]$. C. $[-1;1]$. D. $[-3;3]$.

Câu 48: Cho hàm số:

$$f(x)=2\frac{\cos^3 x}{3}+\sin^3 x-2\cos x-3\sin x.$$

Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)=0$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

A. 1 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. 6 điểm.

Câu 49: Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đạo hàm là $\sin^2 x$?

A. $y=\frac{\sin^3 x}{3}$. B. $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$.

C. $y=x-\frac{\sin^3 x}{3}$. D. $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$.

Câu 50: Hàm số nào sau đây có đạo hàm luôn bằng 0?

A. $y=1-\sin^2 x$. B. $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

C. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$. D. $y=\cos 2x$.

Câu 51: Hàm số nào sau đây có đạo hàm $y'=x.\sin x$?

A. $y=x.\cos x$. B. $y=x.\cos x-\sin x$.

C. $y=\sin x-x.\cos x$. D. $y=-\frac{1}{2}x^2.\sin x$.

Câu 52: Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x}$. Chọn câu sai:

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$. B. $f'(x)=\frac{-2\sin 2x}{3.\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. D. $3y^2.y'+2\sin 2x=0$.

Câu 53: Cho hàm số $y=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ với $x\in(0;\pi)$ có y' bằng biểu thức có dạng $a.\sin\frac{x}{8}$. Khi đó a nhận giá trị nào sau đây:

A. $\frac{1}{4}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 54: Cho hàm số $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-2\sin^2 x$. Hàm số có $f'(x)$ bằng:

A. 6. B. $2\sin 2x$. C. 0. D. $2\cos 2x$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Đạo hàm của hàm đa thức

Câu 1: Đáp án B.

$y'=6x^2-18x+12$.

Câu 2: Đáp án D.

$y'=-3x^2+6mx+3(1-m^2)$.

Câu 3: Đáp án A.

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2+1).2x.(3+5x^2)+(x^2+1)^2.10x \\ &= (4x^3+4x)(3+5x^2)+10x^5+20x^3+10x \\ &= 30x^5+52x^3+22x. \end{aligned}$$

$\Rightarrow a-b+c=0$

Câu 4: Đáp án C.

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x^3+2)(x^4+3)+3x^2(x^2+1)(x^4+3) \\ &\quad +4x^3(x^2+1)(x^3+2) \\ &= 2x(x^7+2x^4+3x^3+6)+3x^2(x^6+x^4+3x^2+3) \\ &\quad +4x^3(x^5+x^3+2x^2+2) \\ &= 9x^8+7x^6+12x^5+15x^4+8x^3+9x^2+12x \end{aligned}$$

$\Rightarrow a-b+c-d+e-g=3$

Câu 5: Đáp án C.

Câu 6: Đáp án A.

$$y'=\frac{(-2x+3)(x-1)-(-x^2+3x-3)}{2(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}.$$

Câu 7: Đáp án D.

$$y'=\frac{(6x^2+3)(x^2-5x+2)-(2x^3+3x-1)(2x-5)}{(x^2-5x+2)^2}$$

$$=\frac{-13x^2+10x+1}{(x^2-5x+2)^2}.\Rightarrow a+b+c=-2$$

Câu 8: Đáp án A.

$$y'=\frac{(-2x+2)(x^3-2)-3x^2(-x^2+2x+3)}{(x^3-2)^2}$$

$$=\frac{x^4-4x^3-9x^2+4x-4}{(x^3-2)^2}.\Rightarrow a+b+c+d+e=-12$$

Câu 9: Đáp án B.

$$y'=\sqrt{x^2+1}+(x-2).\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 10: Đáp án D.

$$y'=2(x^6-3x^4)(6x^5-12x^3)=12x^{11}-60x^9+72x^7.$$

Câu 11: Đáp án A.

$$y'=\frac{10x-2}{2\sqrt{5x^2-2x+1}}=\frac{5x-1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}.\Rightarrow T=\frac{a}{b}=-5$$

Câu 12: Đáp án C.

Nhân liên hợp ta có: $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{4\sqrt{x+1}}-\frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Câu 13: Đáp án A.

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x-1).\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=\frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

$\Rightarrow P=a.b=1$

Câu 14: Đáp án A.

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)(x-\sqrt{x})-\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{2x\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}=\frac{4\sqrt{x}-2x^2-3}{2x\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}.$$

Câu 15: Đáp án C.

Cách 1: Tính $f'(x)=\frac{9x^4+6x^3-9x^2+8x+4}{4(3x^3+2x^2+1)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$

$\Rightarrow f'(0)$ [illegible]

Cách [illegible]: Dùng MTCT ta được kết quả.

Câu 16: Đáp án D.

Câu 17: Đáp án C.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x-2)...(x-2017)-x\left[(x-1)(x-2)...(x-2017)\right]'}{\left[(x-1)(x-2)...(x-2017)\right]^2}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{(-1)(-2)...(-2017)}{\left[(-1)(-2)...(-2017)\right]^2}=-\frac{1}{2017!}.$$

Câu 18: Đáp án A.

Ta có: $f(1)=1,\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=1$

Khi $x>1: f'(x)=2x$

$x<1: f'(x)=2$

Với $x=1$, ta xét: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2(x-1)}{x-1}=2$

Vậy $f'(1)=2$.

Câu 19: Đáp án B.

Điều kiện: $x\in[-2;2]$.

$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ f'(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}>x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le x<0\\0\le x<\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow -2\le x<\sqrt{2}.$$

Câu 20: Đáp án D.

$$f'(x)=\frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}\Rightarrow f'(x)\le0\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^3+1\le0\\x\ne-1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 21: Đáp án A.

Ta có: $y=\sqrt{u}$ với $u=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

Câu 22: Đáp án A.

$f'(x)=5x^4+3x^2-2\ \Rightarrow f'(1)+f'(-1)+4f'(0)=4.$

Câu 23: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2x\ \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}.$

Câu 24: Đáp án D.

Ta có: $f'(x)=3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}\right).$$

Câu 25: Đáp án B.

Ta có: $y=u^2$ với $u=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$y'=2\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$$

$$=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=2.\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right).\frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2}.$$

Câu 26: Đáp án D.

Ta có: $y'=u^3,\ u=\dfrac{2x+1}{x-1},\ u'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{-9(2x+1)^2}{(x-1)^4}.$

Câu 27: Đáp án C.

$y'=3\left[(m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\right]$

$y'\ge 0\Leftrightarrow (m-1)x^2-2(m+2)x-2(m+2)\ge 0$ (1)

- Với $m=1$ thì (1) $\Leftrightarrow -6x-6\ge 0\Leftrightarrow x\le -1\Rightarrow m=1$ (loại)

- Với $m\ne 1\Rightarrow$ (1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\ (m+2)3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m$ vô nghiệm

Câu 28: Đáp án D.

Với $x\ne 0$ hàm số luôn có đạo hàm

Để hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải có đạo hàm tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=b\Rightarrow b=1.$

Để hàm số liên tục tại $x=0\Rightarrow b=1$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x^2+x+1}{x+1}-1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+ax+b-1}{x}=a$

$\Rightarrow a=0$. Vậy $a=0,\ b=1$.

Câu 29: Đáp án C.

$f'(x)=-mx^2+mx-(3-m)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -mx^2+mx-3+m=0$ (1)

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ 5m^2-12m>0\\ \dfrac{3-m}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{12}{5}<m<3.$

Câu 30: Đáp án A.

Lập bảng dấu ta được: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{khi } x<-1,\ x>1\\ x & \text{khi } -1\le x\le 1\end{cases}$

- Với $x<-1$ hoặc $x>1\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

- Với $-1<x<1\Rightarrow f'(x)=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=-1$ nên hàm số liên tục tại $x=-1$

Xét $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-1,\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=-1$.

Bằng cách tương tự ta cũng chỉ ra được hàm số không có đạo hàm tại $x=1$.

Vậy $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & \text{khi } x<-1,\ x>1\\ 1 & \text{khi } -1<x<1\end{cases}$.

Dạng 2: Đạo hàm các hàm số lượng giác

Câu 31: Đáp án B.

$y'=2\sin x.\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x\left(3\cos^2 x-1\right).$

Câu 32: Đáp án C.

$y'=(1+\tan x)(1+\tan x)'=(1+\tan x)(1+\tan^2 x).$

Câu 33: Đáp án B.

$$y'=\frac{-\sin^3 x-2\sin x.\cos x.\cos x}{2\sin^4 x}=-\frac{\sin^2 x+2\cos^2 x}{2\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}.$$

Câu 34: Đáp án A.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{3}.$

Câu 35: Đáp án A.

$$y'=\frac{x\sin x(\cos x+x\sin x)-x\cos x(\sin x-x\cos x)}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$$

$\Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=0$. Vậy $T=a+b+c=1$.

Câu 36: Đáp án D.

$y'=-2\sin 2x.\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x.\cos 2x.$

Câu 37: Đáp án B.

$$y'=2\cot(\cos x)\left[\cot(\cos x)\right]'+\frac{\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)'}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}$$

$$=2\cot(\cos x)\frac{1}{\sin^2(\cos x)}+\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x-\frac{\pi}{2}}}.$$

Câu 38: Đáp án A.

$$y'=\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}+\frac{\sin x-x.\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=(x.\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Câu 39: Đáp án A.

Ta có: $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y'=\dfrac{-2\sin x.\cos x}{\sin^2 x.\sqrt{\sin^2 x}}=-\dfrac{\cot x}{|\sin x|}.$

Câu 40: Đáp án C.

$y' = -2\sin x.\cos x.\cos\left(\cos^2 x\right)\cos\left(\sin^2 x\right)$

$\quad -2\sin x.\cos x.\sin\left(\cos^2 x\right).\sin\left(\sin^2 x\right)$

$= -\sin 2x.\cos\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = -\sin 2x.\cos\left(\cos 2x\right)$

$\Rightarrow a = -1.$

Câu 41: Đáp án B.

Lấy đạo hàm 2 vế ta có:

$2f'(2x) - 4\sin x.f(x) + 4\cos x.f'(x) - 2$

Thay $x = 0 \Rightarrow 2.f'(0) = 4.f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1.$

Câu 42: Đáp án B.

$$f'(x) = \frac{-\sin x.\sqrt{\cos 2x} - \cos x.\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x}$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 43: Đáp án A.

$y' = -2\left(1 + \cot^2 2x\right)$

Do đó $y' + 2y^2 + 2 = -2\left(1 + \cot^2 2x\right) + 2\cot^2 2x + 2 = 0$

Câu 44: Đáp án C.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n.\sin\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(x^{n-1}.\sin\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

Với $n = 1$ thì giới hạn (1) không tồn tại và $n \ge 2$ thì:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{n-1}.\sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

Vậy hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ khi $n \ge 2$.

Câu 45: Đáp án D.

$f'(x) = 2\sin x.\cos x + 2\cos 2x = \sin 2x + 2\cos 2x$

Đặt $t = \sin 2x + 2\cos x.$

Điều kiện phương trình có nghiệm là:

$1^2 + 2^2 \ge t^2 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \le t \le \sqrt{5}.$

Vậy $M = \sqrt{5},\ m = -\sqrt{5}.$

Câu 46: Đáp án C.

$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$

$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$

Đặt $t = \sin x + \cos x\ \left(|t| \le \sqrt{2}\right) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$

$$\Rightarrow \text{Phương trình} \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{-3}{2}\ (l) \end{array}\right.$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0.$

Câu 47: Đáp án B.

$f'(x) = -2\sin 2x \Rightarrow -2 \le f'(x) \le 2$

Vậy tập giá trị của $f'(x)$ là $[-2; 2]$.

Câu 48: Đáp án B.

$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

Vậy có 2 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 49: Đáp án D.

$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x.$

Câu 50: Đáp án C.

$y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow y' = 0\ \forall x.$

Câu 51: Đáp án C.

$y = \sin x - \cos x \Rightarrow y' = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x.$

Câu 52: Đáp án C.

$f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow f^3(x) = \cos 2x$

$\Rightarrow 3.f^2(x).f'(x) = (\cos 2x)'$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2\sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$ nên B đúng.

Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos\pi} = -1$ nên C sai.

Câu 53: Đáp án D.

Ta có: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x} = \sqrt{\cos^2\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2}$

Tương tự các biểu thức tiếp theo

$\Rightarrow y = \sqrt{\cos^2\frac{x}{8}} = \cos\frac{x}{8} \Rightarrow y' = -\frac{1}{8}\sin\frac{x}{8}.$

Câu 54: Đáp án C.

$$f'(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)$$

$$- \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin 2x$$

$$= -2\cos\frac{2\pi}{3}.\sin 2x - 2\cos\frac{4\pi}{3}\sin 2x - 2\sin 2x$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)2\sin 2x = 0.$$

Vi phân. Đạo hàm cấp cao

A. Lý thuyết

1. Vi phân của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x\in(a;b)$. Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ (hoặc $y'.\Delta x$) là vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại x ứng với số gia Δx.

Kí hiệu: $df(x)$ hoặc dy.

STUDY TIP
Với $y=x$ ta có:
$dy=(x)'.\Delta x \Leftrightarrow dx=\Delta x$.
Vậy $df(x)=f'(x).dx$

Vậy ta có: $dy=y'.\Delta x$ hoặc $df(x)=f'(x).\Delta x$

b) Ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Do $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ thì $f'(x_0)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Leftrightarrow \Delta y=f'(x_0).\Delta x$

$$\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$$

2. Đạo hàm cấp cao

a) Đạo hàm cấp hai

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Khi đó đạo hàm của hàm số $f'(x)$ nếu có, được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$.

Kí hiệu: y'' hay $f''(x)$. Viết: $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$

b) Đạo hàm cấp n

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp $n-1$ ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$). Kí hiệu $f^{(n-1)}(x)$. Nếu $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là đạo hàm cấp n của $f(x)$.

Kí hiệu: $f^{(n)}(x)$ hoặc $y^{(n)}$. Viết: $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$

STUDY TIP
Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=f(x)$ là $f'''(x)$ hoặc $f^{(3)}(x)$ hay y'''

c) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Xét một chuyển động xác định bởi phương trình $s=f(t)$ với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm.

Khi đó gia tốc tức thời (γ) của chuyển động tại thời điểm t là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(t)$ là $\gamma(t)=f''(t)$

STUDY TIP
Vận tốc tức thời tại thời điểm t là $v(t)=f'(t)$.

B. Các dạng toán về vi phân và đạo hàm cấp cao

Dạng 1 Vi phân của hàm số

Phương pháp:

- Tính vi phân của hàm số $f(x)$ tại x_0 cho trước: $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$
- Tính vi phân của hàm số $f(x)$: $df(x)=f'(x).dx$
- Dùng vi phân tính gần đúng.

Ví dụ 1: Vi phân của hàm số $f(x)=3x^2-x$ tại điểm $x=2$ ứng với $\Delta x=0,1$ là:

A. $-0,07$. B. 10. C. 1,1. D. $-0,4$.

Đáp án C.

Lời giải:

Ta có: $f'(x)=6x-1 \Rightarrow f'(2)=11 \Rightarrow df(2)=f'(2).\Delta x=11.0,1=1,1$.

Ví dụ 2: Vi phân của hàm số $f(x)=\sin 2x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x=0,01$ là:

A. $-1,1$. B. 10. C. 0,1. D. $-0,01$.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(x)=2\cos 2x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Rightarrow df\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right).\Delta x=-0,01$.

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số tại một điểm x_0 chính là tích của đạo hàm tại một điểm x_0 và số gia Δx tương ứng.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$. Biểu thức $0,01.f'(0,01)$ là số nào?

A. 9. B. -9. C. 90. D. -90.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(0,01)=-9000 \Rightarrow 0,01.f(0,01)=-90$.

Ví dụ 4: Vi phân của hàm số $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$ là:

A. $dy=\frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}dx$. B. $dy=\frac{3}{2\sqrt{\sqrt{x}}}dx$.

C. $dy=\frac{5}{4\sqrt{x}}dx$. D. $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Đáp án A.

Lời giải:

$$y'=\frac{\sqrt{x}+x.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}=\frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}=\frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}} \Rightarrow dy=\frac{3}{4\sqrt{\sqrt{x}}}dx.$$

STUDY TIP

Việc tính vi phân của hàm số $f(x)$ chính là tích của đạo hàm của hàm số $f(x)$ với dx tương ứng.

Ví dụ 5: Vi phân của hàm số $y=\frac{1}{(1+\tan x)^2}$ là:

A. $dy=\frac{2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$. B. $dy=\frac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

C. $dy=\frac{1}{\cos x(1+\tan x)^3}dx$. D. $dy=\frac{-1}{\cos^2 x(1+\tan x)^2}dx$.

Đáp án B.

Lời giải:

Ta có: $dy=\dfrac{-2(1+\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan x)^4}dx=\dfrac{-2}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 2x}$. Chọn kết quả đúng:

A. $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **B.** $df(x)=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

C. $df(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$. **D.** $df(x)=\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

STUDY TIP
Có thể sử dụng MTCT để đi tìm đạo hàm của hàm số, sau đó ta cũng được kết quả của tính vi phân.

Đáp án B.

Lời giải:

Ta có: $df(x)=\dfrac{(1+\cos^2 2x)'}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}}=\dfrac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}}dx$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x\ge 0 \\ x & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f'(0^+)=1$. **B.** $f'(0^-)=1$.

C. $df(0)=dx$. **D.** Hàm số không có vi phân tại $x=0$.

STUDY TIP
Với hàm số có nhiều biểu thức, việc tính đạo hàm ta dùng định nghĩa.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x}=1$; $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$ và $df(0)=dx$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=x+\sqrt{x^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{1+x^2}.dy-ydx=0$. **B.** $\sqrt{1+x^2}.dx-dy=0$.

C. $xdx+\sqrt{1+x^2}.dy=0$. **D.** $\sqrt{1+x^2}.dy+x.y=0$.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có: $dy=y'dx\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}$ mà $y'=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}.dy-ydx=0$.

Ví dụ 9: Dùng vi phân tính gần đúng $\sqrt[3]{26,7}$ có giá trị là:

A. 2,999. **B.** 2,98. **C.** 2,97. **D.** 2,89.

STUDY TIP
Sử dụng vi phân để tính gần đúng, ta xét hàm số $f(x)$ và chọn x_0, Δx sao cho phù hợp.

Đáp án A.

Lời giải:

Xét $f(x)=\sqrt[3]{x}$ thì $f'(x)=\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$.

Cho $x_0=27$, $\Delta x=-0,3$.

Theo công thức gần đúng: $f(x_0+\Delta x)\approx f'(x_0).\Delta x+f(x_0)$

$\Rightarrow \sqrt[3]{27,3} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}(-0,3) \approx 2,999.$

Ví dụ 10: Dùng vi phân tính gần đúng $\sin 29^0$ có giá trị là:

A. 0,4849. B. 0,5464. C. 0,4989. D. 0,4949.

Đáp án A.

Lời giải:

Xét $f(x) = \sin x$ với $29^0 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}(rad)$

Có $f'(x) = \cos x$

Chọn $x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = -\frac{\pi}{180} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849.$

Dạng 2 Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Phương pháp:

- Tính đạo hàm cấp cao: Áp dụng trực tiếp định nghĩa:

$$y'' = (y')', y''' = (y'')', \dots, y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

- Tính đạo hàm cấp n: Trước tiên ta tính các đạo hàm cấp 1, cấp 2, ... sau đó dự đoán công thức tổng quát của $f^{(n)}(x)$.

- Chứng minh đẳng thức có chứa đạo hàm: Tính đến đạo hàm cấp cao nhất có trong đẳng thức rồi thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi cho ta được kết quả.

- Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

Ví dụ 1: Tính y'', biết $y = x\sqrt{1+x^2}$.

A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. B. $y'' = \frac{2x(3+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$. D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Đáp án A.

Lời giải:

$$y' = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y'' = (y')' = \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

STUDY TIP

Sau khi tính được đạo hàm bậc nhất y' ta có thể sử dụng MTCT với chức năng: $\left(\frac{d}{dx}(...)\Big|_{x=}\right)$ để kiểm tra và tính được kết quả.

Ví dụ 2: Cho $f(2x-3)^5$. Tính $f'''(3)$.

A. 4230. B. 4320. C. 4204. D. 4132.

Đáp án B.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = 10(2x-3)^4$,

$f''(x) = 80(2x-3)^3$,

STUDY TIP

$f''(x) = [f'(x)]'$

$f'''(x) = [f''(x)]'$

$$f'''(x) = 480(2x-3)^2$$

$$\Rightarrow f'''(3) = 4320.$$

Cách khác: Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}(\square)|_{x=\square}$ nhập biểu thức đạo hàm của $f''(x)$ tại điểm $x=2$ rồi so sánh kết quả ta được đáp án B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{x}$. Tính $y^{(4)}$.

A. $y^{(4)} = \frac{-4}{x^5}$.

B. $y^{(4)} = \frac{1.2.3.4}{x^5}$.

C. $y^{(4)} = \frac{-4!}{x^5}$.

D. $y^{(4)} = \frac{-1.2.3.4}{x^6}$.

Đáp án B.

Lời giải:

$$y' = -\frac{1}{x^2},\ y' = \frac{1.2}{x^3},\ y^{(3)} = \frac{1.2.3}{x^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^4.4!}{x^{4+1}} = \frac{4!}{x^5}.$$

STUDY TIP
Tổng quát:
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$$

Ví dụ 4: Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{1}{ax+b}$, $a\neq 0$ là:

A. $y^{(n)} = \frac{2^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

B. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(x+1)^{n+1}}$.

C. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

D. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Đáp án D.

Lời giải:

$$y' = \frac{-a}{(ax+b)^2},\ y'' = \frac{2a^2}{(ax+b)^3},\ y''' = \frac{-a^3.2.3}{(ax+b)^4}$$

Dự đoán công thức: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

Nhận xét: Việc dự đoán công thức ta đã được ngay kết quả của bài toán. Tuy nhiên để hiểu rõ và chính xác hơn ta có thể chứng minh công thức tổng quát bằng phương pháp quy nạp toán học (bạn đọc tự làm).

STUDY TIP
Phương pháp quy nạp:
Ta cần chứng minh mệnh đề $P(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$
+ Kiểm tra với $n=1,2,...$
+ Giả sử mệnh đề đúng với $n=k\geq 1$, ta chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n=k+1$.

Ví dụ 5: Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ là:

A. $\frac{-6}{(x+1)^4}$.

B. $\frac{-4}{(x+1)^3}$.

C. $\frac{6}{(x+1)^3}$.

D. $\frac{-12}{(x+1)^4}$.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta phân tích $y = x + \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2},\ y'' = \frac{2}{(x+1)^3},\ y''' = \frac{-6}{(x+1)^4}.$$

Nhận xét: Với hàm phân thức bậc của tử cao hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì ta chia tách phân số và đưa về các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$.

Ví dụ 6: Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ là:

A. $y^{(4)}=\frac{7.4!}{(x-3)^5}-\frac{5.4!}{(x-2)^5}$.

B. $y^{(4)}=\frac{5.4!}{(x-3)^5}-\frac{2.4!}{(x-2)^5}$.

C. $y^{(4)}=\frac{5.4!}{(x-2)^5}-\frac{7.4!}{(x-3)^5}$.

D. $y^{(4)}=\frac{7}{(x-3)^4}-\frac{5}{(x-2)^4}$.

Đáp án A.

Lời giải:

$y=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}$. Mà $\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{(x-2)^5}=\frac{4!}{(x-2)^5}$

$\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(4)}=\frac{(-1)^4.4!}{(x-3)^5}=\frac{4!}{(x-3)^5}$

$\Rightarrow y^{(4)}=\frac{7.4!}{(x-3)^5}-\frac{5.4!}{(x-2)^5}$.

STUDY TIP

$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$

Các hằng số A, B tìm được bằng cách quy đồng và đồng nhất hệ số hai vế.

Nhận xét: Với các hàm phân thức có bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì ta cố gắng đưa mẫu số về dạng tích và phân tích phân số thành tổng, hiệu các phân số dạng $\frac{A}{ax+b}$.

Ví dụ 7: Đạo hàm cấp 3 của hàm số $y=\sin x$ là:

A. $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)$.

B. $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

C. $y^{(3)}=\sin(x+\pi)$.

D. $y^{(3)}=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$.

Đáp án D.

Lời giải:

Ta có: $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2.\frac{\pi}{2}\right)$

$y'''=\cos(x+\pi)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$

STUDY TIP

Tổng quát:

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

(với $n\ge 1, n\in\mathbb{N}^*$)

$\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n.\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

Ví dụ 8: Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y=\sin^4 x$ là:

A. $-8\cos 2x+32\cos 4x$.

B. $4\cos 2x+16\cos 4x$.

C. $8\cos 2x-12\cos 2x$.

D. $6\cos 2x-32\cos 4x$.

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có: $y=\sin^4 x=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

STUDY TIP

Đối với hàm lượng giác, khi tính đạo hàm bậc cao thì ta biến đổi hạ bậc hoặc biến đổi từ tích thành tổng để đưa về bậc nhất dạng $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$.

$\Rightarrow y' = \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x,$

$y'' = 2\cos 2x - 2\cos 4x,$

$y''' = -4\sin 2x + 8\sin 4x,$

$y^{(4)} = -8\cos 2x + 32\cos 4x.$

Ví dụ 9: Đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \sin 5x.\sin 3x$ là:

A. $y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x.$ B. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 8\cos 2x.$

C. $y^{(4)} = 1024\cos 16x + 4\cos 4x.$ D. $y^{(4)} = 2048\cos 8x - 4\cos 4x.$

STUDY TIP

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\sin x.\sin y$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có: $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) \Rightarrow y^{(4)} = -2048\cos 8x + 8\cos 2x$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Tập hợp các giá trị x để đạo hàm cấp 2 của $f(x)$ không âm là:

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Đáp án D.

Lời giải:

$f'(x) = x^2 + x - 12,\ f''(x) = 2x + 1$

Do đó $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 11: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình: $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24\ m/s^2$. B. $17\ m/s^2$. C. $14\ m/s^2$. D. $12\ m/s^2$.

STUDY TIP

Bài toán vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm bậc 2. Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t_0: $\gamma(t_0) = s''(t_0)$

Đáp án D.

Lời giải:

Gia tốc của chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$

$s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12\ m/s^2$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y^3.y'' + 1 = 0.$ B. $y^2.y'' - 1 = 0.$

C. $3y^2.y'' + 1 = 0.$ D. $2y^3.y'' + 3 = 0.$

Đáp án A.

Lời giải:

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}},\ y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$

Thay vào $y^3.y''+1=\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}.\dfrac{(-1)}{\sqrt{\left(2x-x^2\right)^3}}+1=-1+1=0$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x.\cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2y''+y=0$. B. $y''+y=0$. C. $y''-y=0$. D. $2y''-3y=0$.

Đáp án B.

Lời giải:

STUDY TIP
Với các biểu thức lượng giác phức tạp ta cần biến đổi rút gọn rồi sau đó tính đạo hàm cấp cao.

Ta có: $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Rightarrow y'=\cos x-\sin x,\ y''=-\sin x-\cos x$

$\Rightarrow y''+y=0$.

Ví dụ 14: Phương trình chuyển động của một chất điểm $s=t^3-3t^2-9t+2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

A. $10\ m/s^2$. B. $12\ m/s^2$. C. $8\ m/s^2$. D. $16\ m/s^2$.

Đáp án B.

Lời giải:

$v(t)=s'(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-6t-9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (l) \\ t=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \gamma(3)=12\ m/s^2$.

Dạng 3 Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Phương pháp:

Cách 1: Từ khai triển: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

- Lấy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở hai vế của khai triển nhị thức.
- Chọn $x=x_0$ và chọn n thích hợp.

Cách 2: Sử dụng MTCT tính thay với một vài giá trị $n=1,2,...$ và kiểm tra tính đúng sai ta đi đến việc lựa chọn đáp án.

Ví dụ 1: Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=n.2^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$.

B. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=(n+1).2^n,\ n\in\mathbb{N}$.

C. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=(n-1).2^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$.

D. $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=(n+1).2^{n+1},\ n\in\mathbb{N}$.

Đáp án A.

Lời giải:

STUDY TIP
Nếu trong biểu thức thiếu số hạng chứa C_n^0 hoặc C_n^n đồng thời các hệ số tăng hoặc giảm một đơn vị thì ta dùng đạo hàm cấp 1.

Cách 1: Xét $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+...+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f'(1)=C_n^1+2C_n^2+...+(n-1).C_n^{n-1}+n.C_n^n=n.2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT

- Chọn với $n=1$: $C_1^1=2^0=1$ (đúng)

- Chọn với $n=2$: $C_2^1+2C_2^2=2.2=4$ (đúng)

...

Từ việc thử các đáp án ta được kết quả.

Ví dụ 2: Tính tổng với $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$:

$$S=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n$$

A. $(n-1).(n-2).2^{n-2}$. **B.** $n.(n-1).2^{n-2}$.

C. $n.(n-1).2^{n-1}$. **D.** $(n-1).(n-2).2^n$.

Đáp án B.

Lời giải:

STUDY TIP
Nếu trong biểu thức thiếu 2 số hạng đầu tiên hoặc 2 số hạng cuối cùng của khai triển nhị thức đồng thời các hệ số là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp ta dùng đạo hàm cấp 2.

Cách 1: Xét hàm số $f(x)=(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

Suy ra:

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+...+(n-1)x^{n-2}.C_n^{n-1}+n.x^{n-1}.C_n^n$

$f''(x)=(n-1).n.(1+x)^{n-2}$

$=1.2.C_n^2+2.3.x.C_n^3+...+(n-2).(n-1).x^{n-3}.C_n^{n-1}+(n-1).n.x^{n-2}.C_n^n$

$f''(1)=1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+...+(n-2).(n-1).C_n^{n-1}+(n-1).n.C_n^n=n(n-1).2^{n-2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT ta thử với một vài giá trị $n\ge 2$.

- Với $n=2\Rightarrow S=1.2.C_2^2=2.1.2^1=2$ (đúng).

- Với $n=3\Rightarrow S=1.2.C_3^2+2.3.C_3^3=3.2.2=12$ (đúng).

...

So sánh, đối chiếu các đáp án ta được kết quả.

Ví dụ 3: Tính tổng: $S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$ bằng:

A. $n.2^{n-1}$. **B.** $(n+1).2^{n-1}$. **C.** $(n+2).2^{n-1}$. **D.** $(n+1).2^n$.

Đáp án C.

Lời giải:

STUDY TIP
Nếu trong khai triển nhị thức vẫn có số hạng đầu hoặc số hạng cuối và hệ số tăng thêm 1 đơn vị thì ta nhân 2 vế với x và sau đó dùng đạo hàm cấp 1.

Cách 1: Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nhân 2 vế với x ta được:

$x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+...+x^n.C_n^{n-1}+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+...+(n+1)x^n.C_n^n$

Thay $x=1$ ta được:

$S=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n=2^n+n.2^{n-1}=(n+2).2^{n-1}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (bạn đọc tự thử lại)

Ví dụ 4: Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1-2.2.C_{2n+1}^2+3.2^2.C_{2n+1}^3-4.2^3.C_{2n+1}^4+...+(2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}=2017$$

A. $n=1005$. **B.** $n=1006$. **C.** $n=1007$. **D.** $n=1008$.

Đáp án D.

Lời giải:

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1.x^1 + C_{2n+1}^2.x^2 + C_{2n+1}^3.x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}.x^{2n+1}$$

Lấy đạo hàm 2 vế theo x ta được:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2x.C_{2n+1}^2 + 3x^2.C_{2n+1}^3 + ... + (2n+1).x^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

Thay $x=-2$ vào (1) ta được:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2.C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3.C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$$

Từ yêu cầu bài toán ta có: $2n+1 = 2017 \Leftrightarrow n = 1008$.

STUDY TIP
Nhận biết được cần sử dụng đạo hàm cấp 1 và chọn giá trị $x = x_0$ dựa vào cơ số a^n với chỉ số n tăng dần.

Ví dụ 5: Tính tổng:

$$S = 100.C_{100}^0.\left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101.C_{100}^1.\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + ... - 199.C_{100}^{99}.\left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200.C_{100}^{100}.\left(\frac{1}{2}\right)^{199}$$

A. 10. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 100.

Đáp án B.

Lời giải:

Xét $f(x) = (x^2+x)^{100} = x^{100}(1+x)^{100}$

$$= x^{100}\left(C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + ... + C_{100}^{100} x^{100}\right)$$

$$= C_{100}^0.x^{100} + C_{100}^1.x^{101} + C_{100}^2.x^{102} + ... + C_{100}^{100}.x^{200}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 100(2x+1).(x^2+x)^{99}$$

$$= 100x^{99}.C_{100}^0 + 101x^{100}.C_{100}^1 + 102x^{101}.C_{100}^2 + ... + 200x^{199}.C_{100}^{100}$$

Lấy $x = -\frac{1}{2}$ ta được:

$$0 = -100\left(\frac{1}{2}\right)^{99} C_{100}^0 + 101\left(\frac{1}{2}\right)^{100} C_{100}^1 - ... - 200\left(\frac{1}{2}\right)^{199} C_{100}^{100} \Leftrightarrow S = 0.$$

STUDY TIP
Xuất phát từ nhị thức $(x^2+x)^{100}$, sau khi dùng đạo hàm cấp 1, chọn $x_0 = -\frac{1}{2}$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Vi phân của hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3$. Tính vi phân của hàm số tại $x_0 = 1$ với số gia $\Delta x = 0,01$.

A. 0,01. B. $3.(0,01)^2$. C. $(0,01)^3$. D. 0,03.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$. Vi phân của hàm số tại $x = -3$ là:

A. $dy = \frac{1}{7}dx$. B. $dy = 7dx$.

C. $dy = -\frac{1}{7}dx$. D. $dy = -7dx$.

Câu 3: Xét hàm số $x = \sin y \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$ cùng với ba đẳng thức:

(I) $\frac{dx}{dy} = \cos y$; (II) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(III) $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

Số đẳng thức đúng là:

A. Chỉ (I). B. Chỉ (III).

C. Chỉ (I) và (II). D. Chỉ (I) và (III).

Câu 4: Vi phân của hàm số $y = \cos^2 3x$ là:

A. $dy = 3\sin^2 3x dx$. B. $dy = \sin 6x dx$.

C. $dy = -3\sin 6x dx$. D. $dy = 6\sin 6x dx$.

Câu 5: Với hàm số $x^2y + y^3 = 2$ thì đạo hàm y' tại điểm $(1;1)$ bằng:

A. $-\frac{3}{2}$. B. -1. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 6: Cho hàm số $y = \sin(\sin x)$. Vi phân của hàm số là:

A. $dy = \cos(\sin x).\sin x dx$.

B. $dy = \sin(\cos x)dx$.

C. $dy = \cos(\sin x).\cos x dx$.

D. $dy = \cos(\sin x)dx$.

Câu 7: Vi phân của hàm số $y = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$ bằng:

A. $dy = \frac{dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$. B. $dy = \frac{x^2 dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$.

C. $dy = \frac{\cos x dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$. D. $dy = \frac{x^2 \sin x dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$.

Câu 8: Xét hàm số $f'(x) = x^2 - 1$. Nếu đặt $y = f(x^2)$ thì $\frac{dy}{dx}$ nhận kết quả nào sau đây?

A. $2x(x^4 - 1)$. B. $2x(x^2 - 1)$.

C. $x^4 - 1$. D. $x^2 - 1$.

Câu 9: Xét hàm số $y = x^2$. Gọi Δx, dy theo thứ tự là số gia và vi phân của hàm số y tại $x_0 = 1$ và $dx = 0,01$. Hiệu của $\Delta y - dy$ bằng:

A. 0,001. B. 0,002. C. 0,0001. D. 0,00001.

Câu 10: Xét $\cos y = \sin^2 x \left(0 < y < \frac{\pi}{2},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Đạo hàm của y tại $x = \frac{\pi}{4}$ là:

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{-2}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Vi phân của hàm số $y = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ là:

A. $dy = \frac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

B. $dy = \frac{(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

C. $dy = \frac{(3x-1)(x^2-2x+5)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

D. $dy = \frac{(x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}dx$.

Câu 12: Cho hàm số $y = -2\sqrt{1-x}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt{1-x}\,dy - dx = 0$. B. $-\sqrt{1-x}\,dx - dy = 0$.

C. $2\sqrt{1-x}\,dy + dx = 0$. D. $\sqrt{1-x}\,dy + dx = 0$.

Dạng 2: Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Câu 13: Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp hai là $6x$?

A. $y = 3x^2$. B. $y = 2x^3$. C. $y = x^3$. D. $y = x^2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng:

A. 2. B. $2\sqrt{3}$. C. $-2\sqrt{3}$. D. -2.

Câu 15: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$. Xét hai đẳng thức:

(I) $y.y' = 2x$; (II) $y^2.y'' = y'$.

Đẳng thức nào đúng?

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Cả 2 đều sai. D. Cả 2 đều đúng.

Câu 16: Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y=\frac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$ bằng:

A. $y=\frac{2\left(7x^3+15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

B. $y=\frac{2\left(7x^3-15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

C. $y=\frac{2\left(7x^3+15x^2+93x-77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

D. $y=\frac{2\left(7x^3-15x^2-93x+77\right)}{\left(x^2-2x-3\right)^3}$.

Câu 17: Hàm số $y=\sin^2 x$ có đạo hàm cấp 4 là:

A. $\cos^2 2x$. B. $-\cos^2 2x$.

C. $8\cos 2x$. D. $-8\cos 2x$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\cos x$. Khi đó $y^{(2016)}(x)$ bằng:

A. $-\cos x$. B. $\sin x$. C. $-\sin x$. D. $\cos x$.

Câu 19: Đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ là:

A. $\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$. B. $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$.

C. $\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$. D. $\frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^n}$.

Câu 20: Đạo hàm cấp 2 của hàm số:

$y=\tan x+\cot x+\sin x+\cos x$ là:

A. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x}-\frac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x+\cos x$.

B. 0.

C. $\tan^2 x-\cot^2 x+\cos x-\sin x$.

D. $\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2\cot x}{\sin^2 x}-\sin x-\cos x$.

Câu 21: Cho hàm số $y=\sin 2x$. Đẳng thức nào sau đây đúng với mọi x?

A. $y^2+\left(y'\right)^2=4$. B. $4y+y''=0$.

C. $4y-y''=0$. D. $y=y'.\tan 2x$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\cos^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y'''+y''+16y'+16y-8$ là kết quả nào?

A. 0. B. 8. C. –8. D. $16\cos 4x$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Phương trình $f^{(4)}(x)=-8$ có số nghiệm thuộc đoạn $[0;\pi]$ là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=5(x+1)^3+4(x+1)$. Tập nghiệm của phương trình $f''(x)=0$ là:

A. $[-1;2]$. B. $(-\infty;0]$. C. $\varnothing$. D. $\{-1\}$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\frac{-2x^2+3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 4 của hàm số này là:

A. $y^{(4)}=\frac{16}{(x-1)^5}$. B. $y^{(4)}=\frac{32}{(x-1)^5}$.

C. $y^{(4)}=\frac{-24}{(x-1)^5}$. D. $y^{(4)}=\frac{24}{(x-1)^5}$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x.\sin x$. Tìm hệ thức đúng:

A. $y''+y=-2\cos x$. B. $y''-y'=2\cos x$.

C. $y''+y'=2\cos x$. D. $y''+y=2\cos x$.

Câu 27: Phương trình chuyển động của một chất điểm $s=15+20t^2-8t^3$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0 là:

A. $\frac{50}{3}$ m/s. B. $\frac{10}{3}$ m/s. C. 15 m/s. D. 20 m/s.

Câu 28: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s=-t^3+9t^2+t+10$ trong đó t tính bằng giây, s tính bằng mét. Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=5\,s$. B. $t=6\,s$. C. $t=2\,s$. D. $t=3\,s$.

Câu 29: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-2t^2+4t+1$ trong đó t là giây, s là mét. Gia tốc của chuyển động khi $t=2$ là:

A. 12 m/s^2. B. 8 m/s^2. C. 7 m/s^2. D. 6 m/s^2.

Câu 30: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Gia tốc của chuyển động khi $t=4\,s$ là $\gamma=18\ m/s^2$.

B. Gia tốc của chuyển động khi $t=4\,s$ là $\gamma=9\ m/s^2$.

C. Vận tốc của chuyển động khi $t=3\,s$ là $v=12\ m/s$.

D. Vận tốc của chuyển động khi $t=3\,s$ là $v=24\ m/s$.

Dạng 3: Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp

Câu 31: Tính tổng $S = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^{n-1}.n.C_n^n$.

A. 0. B. 1. C. 10. D. 100.

Câu 32: Tính tổng:

$$S = 1.2^{999}C_{1000}^1 + 2.2^{998}C_{1000}^2 + ... + 1000.2^0C_{1000}^{1000}.$$

A. 1000.2^{999}. B. 999.3^{1000}.

C. 1000.3^{999}. D. 999.3^{999}.

Câu 33: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn:

$$1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + ... + n.C_n^n = 11264.$$

A. $n = 9$. B. $n = 10$. C. $n = 11$. D. $n = 12$.

Câu 34: Tính tổng:

$$S = 1^2.C_{2000}^1 + 2^2.C_{2000}^2 + 3^2.C_{2000}^3 + ... + 2000^2.C_{2000}^{2000}.$$

A. $2000.2001.2^{1998}$. B. $1999.2000.2^{1999}$.

C. $2000.2001.2^{1999}$. D. $2000.2001.2^{2000}$.

Câu 35: Tính tổng:

$$S = 2.1.3^0.C_{200}^2 - 3.2.3^1.C_{200}^3 + 4.3.3^2.C_{200}^4 - ... + 200.199.3^{198}.C_{200}^{200}.$$

A. $200.199.2^{199}$. B. $199.198.2^{200}$.

C. $200.199.2^{198}$. D. $199.198.2^{199}$.

Câu 36: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$$1.C_n^0 + 2.C_n^1 + 3.C_n^2 + ... + n.C_n^{n-1} + (n+1).C_n^n \le 1024(n+2)$$

A. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

B. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

C. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

D. $n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 37: Tính tổng:

$$S = 2.2^1.C_{100}^2 + 4.2^3.C_{100}^4 + 6.2^5.C_{100}^6 + ... + 100.2^{99}.C_{100}^{100}.$$

A. $50(3^{99}+1)$. B. $100(3^{98}+1)$.

C. $200(3^{99}+1)$. D. $25(3^{200}+1)$.

Câu 38: Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{2^0}C_n^1 + \frac{2}{2^1}C_n^2 + \frac{3}{2^2}C_n^3 + ... + \frac{n}{2^{n-1}}C_n^n = (n-1)\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

B. $n.3^0.C_n^n + (n-1).3^1.C_n^{n-1} + (n-2).3^2.C_n^{n-2} + ... + 1.3^{n-1}.C_n^1 = (n+1).4^{n-1}$.

C. $2C_{2n+1}^2 + 4C_{2n+1}^4 + 6C_{2n+1}^6 + ... + 2nC_{2n+1}^{2n} = (2n+1)2^{2n-1}$.

D. $1.C_{2n}^1 + 3.C_{2n}^3 + 5.C_{2n}^5 + ... + (2n-1).C_{2n}^{2n-1} = 2n.2^{2n+1}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Vi phân của hàm số

Câu 1: Đáp án D.

$dy = 3.1^2.0,01 = 0,03$.

Câu 2: Đáp án A.

Ta có: $y' = \frac{7}{(1-2x)^2} \Rightarrow y'(3) = \frac{1}{7} \Rightarrow dy = \frac{1}{7}dx$.

Câu 3: Đáp án C.

Ta có: $x = \sin y \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow dx = \cos y dy \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \cos y$

và $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (đúng).

Câu 4: Đáp án C.

$y' = 2\cos 3x(-3\sin 3x) = -3\sin 6x \Rightarrow dy = -3\sin 6x dx$.

Câu 5: Đáp án C.

$x^2y + y^3 = 2 \Rightarrow d(x^2y) + d(y^3) = 0$

$\Leftrightarrow 2xydx + x^2dy + 3y^2dy = 0$ tại điểm $(1;1)$ ta có:

$2dx + dy + 3dy = 0 \Rightarrow 4dy = -2dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} = y'(1)$.

Câu 6: Đáp án C.

$y' = \cos x.\cos(\sin x) \Rightarrow dy = \cos x.\cos(\sin x)dx$.

Câu 7: Đáp án B.

Ta có:

$$y' = \frac{(x\cos x)(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}.$$

Câu 8: Đáp án A.

Đặt $u = x^2 \Rightarrow y = f(u)$.

Từ $f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f'(u) = u^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u).\frac{du}{dx} = (u^2-1)2x = 2x(x^4-1)$.

Câu 9: Đáp án C.

Chọn $\Delta x = dx = 0,01$; $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1$

$\Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - y_0 = 0,0201$

$dy = 2.0,01 = 0,02 \Rightarrow \Delta y - dy = 0,0001$.

Câu 10: Đáp án C.

$\cos y = \sin^2 x \Rightarrow -\sin y dy = \sin 2x dx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{-\sin y} = \frac{\sin 2x}{-\sqrt{1-\cos^2 y}}$ (vì $\sin y > 0$)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin^4\frac{\pi}{4}}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 11: Đáp án A.

$$y' = \frac{(-4x-2)(x^2+x+1)^2 - (-2x^2-2x+1)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

$$= \frac{2(2x+1)(x^2+x-2)}{(x^2+x+1)^3}.$$

Lưu ý: Có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại 1 điểm $x=0$ và thử lại $x=0$ vào các đáp án ta được kết quả là **A.**

Câu 12: Đáp án A.

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ $\Rightarrow \sqrt{1-x}\,dy - dx = 0$.

Dạng 2: Tính đạo hàm cấp cao và ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Câu 13: Đáp án C.

$y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

Câu 14: Đáp án B.

$y' = -\sin 2x$, $y'' = -2\cos 2x$

$\Rightarrow y^{(3)} = 4\sin 2x \Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$.

Câu 15: Đáp án C.

Ta có:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x.x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$\Rightarrow y.y' = x$ và $y^2.y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ nên (I) và (II) sai.

Câu 16: Đáp án B.

Ta có $y' = \frac{-7x^2+10x-31}{(x^2-2x-3)^2}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2(7x^3-15x^2+93x-77)}{(x^2-2x-3)^3}.$$

Kết luận: Ta có thể sử dụng MTCT tính đạo hàm tại 1 điểm $x=0$ của y' và thử với $x=0$ vào các đáp án ta được kết quả.

Câu 17: Đáp án D.

Ta có $y' = \sin 2x$, $y'' = 2\cos 2x$, $y''' = -4\sin 2x$

$\Rightarrow y^{(4)}(x) = -8\cos 2x$.

Câu 18: Đáp án D.

Áp dụng $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y^{(2016)}(x) = \cos(x + 1008\pi) = \cos x$.

Câu 19: Đáp án C.

Áp dụng $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^n = \frac{(-1)^n.a^n.n!}{(ax+b)^{n+1}}$ ta được:

$y^{(n)} = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 20: Đáp án D.

$y' = \tan^2 x - \cot^2 x + \cos x - \sin x$

$\Rightarrow y'' = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2\cot x}{\sin^2 x} - \sin x - \cos x$.

Câu 21: Đáp án B.

$y' = 2\cos 2x$, $y'' - 4\sin 2x \Rightarrow 4y + y'' = 0$.

Câu 22: Đáp án A.

$y' = -2\sin 4x$, $y'' = -8\cos 4x$, $y''' = 32\sin 4x$

$\Rightarrow y''' + y'' + 16y' + 16y - 8 = 0$.

Câu 23: Đáp án B.

Áp dụng $\left[\cos(ax+b)\right]^n = a^n.\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 16.\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) \Rightarrow f^{(4)}(x) = -8$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Với $x \in [0;\pi] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 24: Đáp án D.

$f'(x) = 15(x+1)^2 + 4$, $f''(x) = 30(x+1)$

$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 25: Đáp án C.

$y = 2x - 1 - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(x-1)^2}$, $y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}$

$y''' = \frac{2.3}{(x-1)^4}$, $y^{(4)} = \frac{-2.3.4}{(x-1)^5} = \frac{-24}{(x-1)^5}$.

Câu 26: Đáp án D.

Ta có $y' = \sin x + x\cos x$, $y'' = 2\cos x - x\sin x$

$\Rightarrow y'' + y = 2\cos x$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có: $\gamma(t) = s''(t) = 40 - 48t$

Gia tốc: $\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow v(t) = s'(t) = 40 - 24t^2$

$\Rightarrow v\left(\frac{5}{6}\right)=40.\frac{5}{6}-24.\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{50}{3}\ m/s.$

Câu 28: Đáp án D.

$v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1=-3(t^2-6t+9)+28$

$=28-3(t-3)^2$

$\Rightarrow$ Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $(t-3)^2=0\Leftrightarrow t=3\,s.$

Câu 29: Đáp án B.

$s'(t)=3t^2-4t+4,\ s''(t)=6t-4.$

Vậy gia tốc là $\gamma(2)=s''(2)=8\ m/s^2.$

Câu 30: Đáp án A.

$s'(t)=3t^2-6t,\ s''(t)=6t-6$

$\Rightarrow s''(4)=18\ m/s^2.$

Dạng 3: Dùng đạo hàm để giải toán tổ hợp C_n^k

Câu 31: Đáp án A.

Từ nhị thức $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$ (*)

Lấy đạo hàm 2 vế:

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2x.C_n^2+3x^2.C_n^3+...+n.x^{n-1}.C_n^n$ (**)

Thay $x=-1$ ta được:

$S=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-...-(-1)^{n-1}.C_n^n=0.$

Câu 32: Đáp án C.

Từ khai triển nhị thức (*) câu 1, lấy đạo hàm bậc nhất 2 vế ta được:

$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2xC_n^2+3x^2C_n^3+...+..x^{n-1}C_n^n$

Chọn $x=2\Rightarrow S=n.3^{n-1}.$

Với $n=1000$ ta được: $S=1000.3^{999}.$

Câu 33: Đáp án C.

Xét khai triển $(1+x)^n$ sau đó lấy đạo hàm bậc nhất 2 vế và cho $x=1$ ta được:

$1.C_n^1+2.C_n^2+3.C_n^3+...+n.C_n^n=n.2^{n-1}=11264\Rightarrow n=11.$

Câu 34: Đáp án A.

Xét $S=1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+...+n^2.C_n^n$

$=1.(2-1)C_n^1+2.(3-1)C_n^2+...+n.(n+1-1)C_n^n$

$=\left[1.2.C_n^1+2.3.C_n^2+...+n(n+1)C_n^n\right]-\left(1.C_n^1+2.C_n^2+...+n.C_n^n\right)$

$=A-B$

Từ câu 3 thì $B=n.2^{n-1}.$

Xét khai triển:

$x(1+x)^n=x.C_n^0+x^2.C_n^1+x^3.C_n^2+...+x^{n+1}.C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế:

$(1+x)^n+n.x.(1+x)^{n-1}=C_n^0+2x.C_n^1+3x^2.C_n^2+...+(n+1)x^n.C_n^n$

Tiếp tục đạo hàm ta có:

$n(1+x)^{n-1}+n.(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$

$=1.2.C_n^1+2.3x.C_n^2+...+n(n+1)x^{n-1}.C_n^n$

Cho $x=1\Rightarrow A=2n.2^{n-1}+n(n-1).2^{n-2}$

$\Rightarrow S=n(n+1).2^{n-2}$

Với $n=2000\Rightarrow S=2000.2001.2^{1998}.$

Câu 35: Đáp án C.

Từ khai triển $(1-x)^{200}$ lấy đạo hàm bậc 2 hai vế sau đó thay $x=3$ ta được: $S=200.199.2^{198}.$

Câu 36: Đáp án A.

Từ Ví dụ 3 – Dạng 3 phần Lý thuyết ta có:

$1.C_n^0+2.C_n^1+3.C_n^2+...+n.C_n^{n-1}+(n+1)C_n^n=(n+2).2^{n-1}$

Theo yêu cầu bài toán $\Rightarrow(n+2).2^{n-1}\le 1024(n+2)$

$\Leftrightarrow 2^{n-1}\le 2^{10}\Leftrightarrow n\le 11,\ n\in\mathbb{N}$. Vậy chọn A.

Câu 37: Đáp án A.

Khai triển $(1+x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{100}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=2$ ta được: $S=50(3^{99}+1).$

Câu 38: Đáp án C.

Cách 1:

Khai triển $(1+x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Khai triển $(1-x)^{2n+1}$ và lấy đạo hàm cấp 1.

Cộng vế với vế và thay $x=1$ ta được kết quả là đáp án C. $(2n+1).2^{2n-1}.$

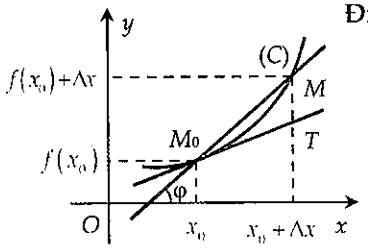
Cách 2: Thử với $n=1,2$ vào các đáp án thì ta được kết quả đáp án C đúng.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số

A. Lý thuyết

1. Tiếp tuyến của đường cong phẳng

Định nghĩa:



Nếu cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn M_0T. Khi điểm M di chuyển trên (C) và dần tới điểm M_0 thì đường thẳng M_0T được gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm M_0. Điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ được gọi là tiếp điểm.

Định lý:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)$ và (C) là đồ thị của hàm số. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại $M_0(x_0;f(x_0))$.

STUDY TIP
- Hệ số góc $k=f'(x_0)$.
- Nếu cho x_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm y_0.
- Nếu cho y_0 thì thế vào $y=f(x)$ tìm x_0.

2. Phương trình tiếp tuyến

a) Tiếp tuyến tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)\in(C)$:

$$\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0}$$

b) Tiếp tuyến biết hệ số góc

- Hệ số góc k của tiếp tuyến: $k=f'(x_0)$ (*)

Giải phương trình (*) ta tìm được hoành độ tiếp điểm x_0 và thế vào phương trình $y=f(x)$ tìm tung độ y_0.

- Khi đó phương trình tiếp tuyến: $\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$ (d)

STUDY TIP
*Tiếp tuyến $d//\Delta: y=ax+b$ $\Rightarrow k=a$.
*Tiếp tuyến $d\perp\Delta: y=ax+b$ $\Rightarrow k.a=-1$.
* $k=\tan\alpha$, với α là góc giữa d với tia Ox.

c) Tiếp tuyến đi qua một điểm

Lập phương trình tiếp tuyến d với (C) biết d đi qua $M(x_M;y_M)$.

Phương pháp:

- Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.
- Phương trình tiếp tuyến tại M_0: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ (d)
- Vì đường thẳng d đi qua M nên $y_M-y_0=f'(x_0)(x_M-x_0)$. Giải phương trình ta tìm được x_0 và y_0.

STUDY TIP
Điểm $M(x_0;y_0)$ có thể thuộc hoặc không thuộc đường cong (C).

B. Các dạng toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm số

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;3)$ là:

A. $y=-3x$. B. $y=-x+3$. C. $y=-9x+6$. D. $y=-9x-6$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2+6x$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-1;3)$ là: $y=y'(-1)(x+1)+3 \Leftrightarrow y=-3x$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{4}{x-1}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ là:

A. $y=-x+2$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=-x-3$.

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=-\frac{4}{(x-1)^2}$

$x_0=-1 \Rightarrow y_0=y(-1)=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(-1;-2)$ là: $y=y'(-1)(x+1)-2=-x-3$.

STUDY TIP
Học sinh nhận biết các bài toán loại viết phương trình tiếp tuyến tại 1 điểm:
- Cho $M_0(x_0;y_0)\in(C)$.
- Cho x_0 tìm y_0.
- Cho y_0 tìm x_0.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4+2x^2-1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến tại điểm có tung độ $y_0=2$ là:

A. $y=8x-6$ và $y=-8x-6$. **B.** $y=8x-6$ và $y=-8x+6$.

C. $y=8x-8$ và $y=-8x+8$. **D.** $y=41x-17$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4x$

$y_0=2 \Leftrightarrow x^4+2x^2-1=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;2)$ là: $y=8x-6$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-1;2)$ là: $y=-8x-6$.

STUDY TIP
Phương trình trùng phương $ax^4+bx^2+c=0, a\neq 0$:
Đặt $t=x^2, t\geq 0$
$\Rightarrow$ Giải phương trình bậc 2 $at^2+bt+c=0$.

Ví dụ 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{4x+2}{x-2}$ tại điểm $x_0=3$ có hệ số góc bằng:

A. 3. **B.** –7. **C.** –10. **D.** –3.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$y'=\frac{-10}{(x-2)^2} \Rightarrow k=y'(3)=-10.$

Ví dụ 5: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3x^2-2$ có hệ số góc $k=-9$ có phương trình là:

A. $y=-9x-11$. **B.** $y=-9x-27$. **C.** $y=-9x+43$. **D.** $y=-9x+11$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

STUDY TIP
Học sinh nhận biết được loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k: $k=f'(x_0)$.

$y' = x^2 + 6x$

$k = -9 \Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 16$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;16)$ là: $y = -9x - 11$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

A. $y = -4x - 2$ và $y = -4x + 14$.
B. $y = -4x + 21$ và $y = -4x + 14$.
C. $y = -4x + 2$ và $y = -4x + 1$.
D. $y = -4x + 12$ và $y = -4x + 14$.

Đáp án A.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y' = \frac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \frac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = -4x - 2$.
- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến: $y = -4x + 14$.

STUDY TIP
- Hai đường thẳng song song thì có cùng hệ số góc.
- Hai đường thẳng vuông góc thì tích hai hệ số góc của hai đường thẳng bằng -1.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C). Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng:

A. $\frac{8}{3}$.
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{4}{3}$.
D. $\frac{5}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Từ giả thiết $\Rightarrow y'(-1) = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-7;5)$.

A. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ và $y = -\frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$.
B. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{3}{16}x + \frac{2}{16}$.
C. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ và $y = -\frac{3}{16}x + \frac{9}{16}$.
D. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ và $y = -\frac{3}{16}x + \frac{29}{16}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $y' = -\frac{3}{(x-1)^2}$.

Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm. Do tiếp tuyến đi qua $M(-7;5)$ nên:

STUDY TIP
Học sinh cần phân biệt loại bài toán viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và viết phương trình tiếp tuyến đi qua $M(x_M;y_M)$. Dấu hiệu ban đầu: điểm $M \notin (C)$, thay tọa độ $(x_M;y_M)$ không thỏa mãn (C).

$$5=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-7-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0-1}\Leftrightarrow x_0^2-4x_0-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=5\end{array}\right.$$

Ta tìm được 2 phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ và $y=-\frac{3}{16}x+\frac{29}{16}$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=x^3+1-m(x+1)$ có đồ thị (C_m). Có bao nhiêu giá trị m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án D.

Lời giải:

(C_m) giao với Oy: $M(0;1-m)$

$y'=3x^2-m,\quad y'(0)=-m$

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại M: $y=-mx+1-m$

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến với hai trục

$\Rightarrow A\left(\frac{1-m}{m};0\right)$, $B(0;1-m)$.

- Với $m=0$ thì tiếp tuyến song song với Ox (loại)

- Với $m\neq 0$ ta có: $S_{OAB}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}.\left|\frac{1-m}{m}\right|.|1-m|=8$

$\Leftrightarrow\frac{(1-m)^2}{|m|}=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=9\pm4\sqrt{5}\\m=-7\pm4\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy có 4 giá trị của m.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=2x+1$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{11}{6}$. **D.** $m=\frac{6}{11}$.

Đáp án C.

Lời giải:

$y'=3x^2-4x+m-1$

Ta có: $y'=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+m-\frac{7}{3}\Rightarrow y'\geq m-\frac{7}{3}$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=\frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc có giá trị $k=m-\frac{7}{3}$.

Theo bài ra: $k.2=-1\Leftrightarrow\left(m-\frac{7}{3}\right).2=-1\Leftrightarrow m=\frac{11}{6}$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=0$.

A. $y=2x+1$. B. $y=2x-1$.
C. $y=x-2$. D. $y=x+2$.

Câu 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+2}$ tại điểm có tung độ $y_0=2$.

A. $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$. B. $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$.
C. $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$. D. $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$.

Câu 3: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=\sin x$, $x\in[0;2\pi]$ song song với đường thẳng $y=\frac{1}{2}x+3$ là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2+1$ tại điểm $x_0=-1$ có hệ số góc bằng:

A. 7. B. 5. C. 1. D. –1.

Câu 5: Cho hàm số $y=\frac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với trục hoành là:

A. $y=2x-4$. B. $y=3x+1$.
C. $y=-2x+4$. D. $y=2x$.

Câu 6: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+2$ vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trên hệ trục Oxy là:

A. $y=-x-2$ và $y=-x+4$.
B. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{3}}{9}$.
C. $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.
D. $y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x}$ (C) tại các giao điểm của (C) với các trục tọa độ là:

A. $y=x-1$. B. $y=x-1$ và $y=x+1$.
C. $y=-x+1$. D. $y=x+1$.

Câu 8: Cho hàm số $y=x^2-6x+5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:

A. $x=-3$. B. $y=-4$. C. $y=4$. D. $y=3$.

Câu 9: Cho hàm số $y=2-\frac{4}{x}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $y=-x+2$ là:

A. $y=x+4$. B. $y=x-2$ và $y=x+4$.
C. $y=x-2$ và $y=x+6$. D. $y=x+3$ và $y=x-1$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 11: Trên đồ thị hàm số $y=\frac{1}{x-1}$ có điểm $M(x_0;y_0)$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó x_0+y_0 bằng:

A. 3. B. $\frac{13}{3}$. C. $-\frac{1}{7}$. D. $-\frac{13}{4}$.

Câu 12: Cho đồ thị hàm số $(C): y=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y''=0$ là:

A. $y=-x-\frac{7}{3}$. B. $y=-x+\frac{7}{3}$.
D. $y=x-\frac{7}{3}$. D. $y=\frac{7}{3}x$.

Câu 13: Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+3x+5$ mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là:

A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Câu 14: Qua điểm $A(0;2)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+2$ (C)?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 15: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C). Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến với (C) và có hệ số góc nhỏ nhất?

A. $y=-3x+3$. B. $y=1$.
C. $y=-5x+7$. D. $y=-3x-3$.

Câu 16: Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Góc giữa hai tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số đã cho tại giao điểm của chúng là:

A. 60°. B. 90°. C. 45°. D. 30°.

Câu 17: Tìm m để đồ thị:

$$(C_m): y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$$

tồn tại đúng 2 điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x+2y-3=0$.

A. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$. B. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$.

C. $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{8}{3}\right)$. D. $m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến này cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=4OB$.

A. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}$.

B. $y=-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x-\frac{13}{4}$.

C. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

D. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ và $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{2}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x_0=1$ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích ΔOAB bằng $\frac{3}{2}$. Hỏi m là giá trị nguyên nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. B. $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-4;0)$. D. $(-2;2)$.

Câu 20: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-mx+m-1$ tại điểm $x_0=1$ cắt đường tròn $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$ theo cung có độ dài nhỏ nhất.

A. $m=1$ hoặc $m=2$. B. $m=1$ hoặc $m=-\frac{5}{2}$.

C. $m=-3$ hoặc $m=-1$. D. $m=-1$ hoặc $m=3$.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c, c<0$ có đồ thị (C) cắt Oy tại A và có hai điểm chung với Ox là M, N. Tiếp tuyến với đồ thị tại M đi qua A. Tìm $T=a+b+c$ biết $S_{\Delta AMN}=1$.

A. $T=-1$. B. $T=2$. C. $T=5$. D. $T=-3$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B.

$y'=\frac{2}{x+1}$; $x_0=0\Rightarrow y_0=-1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0;-1)$ là:

$y=y'(0)(x-0)-1\Leftrightarrow y=2x-1$.

Câu 2: Đáp án A.

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$; $y_0=2\Rightarrow\sqrt{x_0+2}=2\Leftrightarrow x_0=2$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;2)$ là:

$y=y'(2)(x-2)+2\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.

Câu 3: Đáp án C.

$f'(x)=\cos x$. Theo giả thiết $\Rightarrow f'(x_0)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos x_0=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Do $x_0\in[0;2\pi]\Rightarrow x_0=\frac{\pi}{3}$; $x_0=\frac{5\pi}{3}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 4: Đáp án B.

$y'=3x^2-2x\Rightarrow y'(-1)=5$.

Câu 5: Đáp án C.

Giao điểm của (C) với Ox là $A(2;0)$.

$y'=\frac{-2}{(x-3)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $A(2;0)$ là:

$y=y'(2)(x-2)+0\Leftrightarrow y=-2x+4$.

Câu 6: Đáp án C.

$y'=3x^2-2$

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $\Delta: y=x$

$\Rightarrow y'(x_0).1=-1\Leftrightarrow 3x_0^2-2=-1\Leftrightarrow x_0=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$y=-x+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18-5\sqrt{3}}{9}$ và $y=-x-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{18+5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 7: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên (C) không giao với Oy.

(C) giao với Ox tại $M(1;0)$ nên phương trình tiếp tuyến là: $y=y'(1)(x-1)=x-1$.

Câu 8: Đáp án B.

Ta có: $y'=2x-6$.

Phương trình tiếp tuyến song song với trục hoành

$\Rightarrow y'(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=3\Rightarrow y_0=4$.

Phương trình tiếp tuyến là: $y=-4$.

Câu 9: Đáp án C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $y'=\frac{4}{x^2}$.

Theo giả thiết $y'(x_0)(-1)=-1 \Leftrightarrow y'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{x_0^2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

Vậy các phương trình tiếp tuyến là $y=x-2$ và $y=x+6$.

Câu 10: Đáp án D.

$y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng $I(1;1)$.

Lấy điểm $A(x_0;y_0)\in(C)$, gọi B là điểm đối xứng với A qua I $\Rightarrow B(2-x_0;2-y_0)\in(C)$. Ta có:

+ Hệ số góc của phương trình tại A là:

$$k_A=y'(x_0)=\frac{-2}{(x_0-1)^2}.$$

+ Hệ số góc của phương trình tại B là:

$$k_B=y'(2-x_0)=\frac{-2}{(x_0-1)^2}.$$

Ta thấy $k_A=k_B$ nên có vô số cặp điểm $A,B\in(C)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Câu 11: Đáp án D.

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ là:

$$y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0-1} \quad (\Delta)$$

+ (Δ) giao với $Ox: A(2x_0-1;0)$.

+ (Δ) giao với $Oy: B\left(0;\frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA.OB \Leftrightarrow \left(\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)^2=4 \Leftrightarrow x_0=\frac{3}{4} \Rightarrow y_0=-4$.

Vậy $x_0+y_0=\frac{3}{4}-4=-\frac{13}{4}$.

Câu 12: Đáp án A.

$y'=x^2+2x,\ y''=2x+2$.

Từ giả thiết $y''(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0+2=0$

$\Leftrightarrow x_0=-1 \Rightarrow y_0=-\frac{4}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$ là:

$$y=-x-\frac{7}{3}.$$

Câu 13: Đáp án C.

$y'=3x^2+6x+3$. Gọi $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$.

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có hệ số góc là:

$k_A=3x_A^2+6x_A+3,\ k_B=3x_B^2+6x_B+3$.

Theo giả thiết: $k_A.k_B=-1$

$\Leftrightarrow (3x_A^2+6x_A+3)(3x_B^2+6x_B+3)=-1$

$\Leftrightarrow 9(x_A^2+2x_A+1)(x_B^2+2x_B+1)=9(x_A+1)^2(x_B+1)^2=-1$ (vô lý).

Vậy không tồn tại cặp điểm A, B thỏa mãn.

Câu 14: Đáp án D.

$y'=4x^3-4x$. Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2 \quad (\Delta)$

Vì Δ đi qua $A(0;2)$:

$2=(4x_0^3-4x_0)(-x_0)+x_0^4-2x_0^2+2$

$\Leftrightarrow -3x_0^4+2x_0^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}\right.$.

Ứng với 3 hoành độ x_0 ta viết được 3 phương trình tiếp tuyến với (C).

Câu 15: Đáp án A.

$y'=3x^2-6x$. Gọi $M_0(x_0;y_0)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại M_0 là:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M:

$y'(x_0)=3x_0^2-6x_0=3(x_0-1)^2-3 \Leftrightarrow y'(x_0)\ge -3$

$\Rightarrow$ Hệ số góc nhỏ nhất là -3 khi $x_0=1$

$\Rightarrow y_0=y(1)=0$ nên phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;0)$ là: $y=-3x+3$.

Câu 16: Đáp án B.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{1}{x\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=x^2 \Rightarrow x=1,\ x\ne 0$

$\Rightarrow$ Giao điểm $M\left(1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ g'(1)=\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1).g'(1)=-1$

Vậy góc giữa hai tiếp tuyến đó là $90°$.

Câu 17: Đáp án D.

$y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$

Theo bài ra $y'.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow y'=2$

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \frac{1}{2} \\ 0<m<1 \\ 0<m<\frac{2}{3} \end{cases} \text{ hay } m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right).$$

Câu 18: Đáp án A.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ là:

$$y=\frac{-x}{(x_0-1)^2}+\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2} \quad (\Delta)$$

(Δ) giao với Ox tại $A(2x_0^2-2x_0+1;0)$.

(Δ) giao với Oy tại $B\left(0;\frac{2x_0^2-2x_0+1}{(x_0-1)^2}\right)$.

$$OA=4OB\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=-1 \end{array}\right.$$

Từ đó ta được 2 phương trình tiếp tuyến là:

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \text{ và } y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}.$$

Câu 19: Đáp án A.

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=m-2\Rightarrow M(1;m-2)$

Phương trình tiếp tuyến tại M là $(\Delta): y=-3x+m+1$

(Δ) giao với Ox tại $A\left(\frac{m+1}{3};0\right)$.

(Δ) giao với Oy tại $B(0;m+1)$.

$$S_{OAB}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{|m+1|}{3}.|m+1|=3$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=2 \end{array}\right..$$

Câu 20: Đáp án B.

Với $x_0=1\Rightarrow y_0=0\Rightarrow M(1;0)$, $y'=3x^2-m$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là:

$$(3-m)x-y-3+m=0 \quad (\Delta)$$

Đường tròn tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vì $IM>R$ nên độ dài cung nhỏ nhất khi (Δ) tiếp xúc với đường tròn tức là:

$$d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow \frac{|(3-m).2-3-3+m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2+3m-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{5}{2} \end{array}\right..$$

Câu 21: Đáp án A.

Giả sử (C) cắt Ox tại $M(m;0)$, $N(n;0)$, cắt Oy tại $A(0;c)$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y=(3m^2+2am+b)(x-m) \quad (\Delta)$$

Tiếp tuyến (Δ) đi qua A nên

$3m^3+2am^2+bm+c=0$

$\Leftrightarrow 2m^3+am^2=0$ (do $m^3+am^2+bm+c=0$)

$\Leftrightarrow m=-\frac{a}{2}$.

Vì (C) cắt Ox tại 2 điểm nên (C) tiếp xúc với Ox (do tính chất đồ thị hàm bậc 3 học sinh sẽ được học rõ hơn lớp 12).

Nếu M là tiếp điểm $\Rightarrow Ox$ đi qua A (vô lý)

$\Rightarrow (C)$ tiếp xúc với Ox tại N.

Do đó $y=x^3+ax^2+bx+c=(x-n)^2(x-m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2n=-a \\ 2m.n+n^2=b \\ m.n^2=-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{a}{2},\ n=-\frac{a}{4} \\ a^3=32c \\ 5a^2=16b \end{cases} \quad (I)$$

Mặt khác $S_{\Delta AMN}=1\Leftrightarrow -c.|n-m|=2\Leftrightarrow -c.|a|=8$

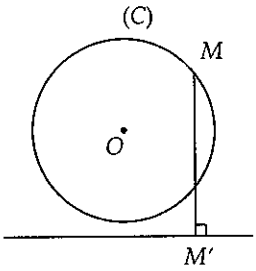
- Với $a>0\Rightarrow \begin{cases} a^3=32c \\ ac=-8 \\ 5a^2=16b \end{cases}$ (vô nghiệm)

- Với $a<0\Rightarrow \begin{cases} a^3=32c \\ ac=8 \\ 5a^2=16b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Rightarrow T=a+b+c=-1.$

CHỦ ĐỀ 6:
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

Phép biến hình



1. Định nghĩa

Phép biến hình là một quy tắc để mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy.

2. Kí hiệu và thuật ngữ

Gọi P là tập hợp các điểm trong mặt phẳng và một phép biến hình F:

$$F: P \to P$$

$$M \to M' = F(M)$$

- Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình F hay M là điểm tạo ảnh của điểm M'.
- Nếu $\mathcal{H}$ là một hình nào đó thì $\mathcal{H}'$ (gồm các điểm M' là ảnh của $M \in \mathcal{H}$) được gọi là ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép biến hình F.

STUDY TIP
Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M ta cũng được phép biến hình gọi là phép đồng nhất.

3. Tích của hai phép biến hình

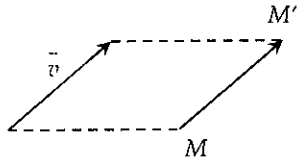
Cho hai phép biến hình F và G. Gọi M là điểm bất kì trong mặt phẳng. M' là ảnh của M qua F, M'' là ảnh của M' qua G.

Ta nói M'' là ảnh của M trong tích của hai phép biến hình F và G. Kí hiệu $G.F$

$$M'' = G(F(M))$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G.F"'] & M' \arrow[r, "G"] & M'' \end{tikzcd}$$

Phép tịnh tiến



A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

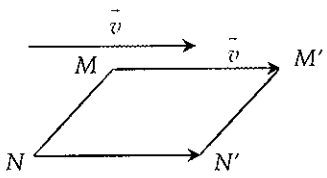
Kí hiệu: $T_{\vec{v}}$ ($\vec{v}$ là vectơ tịnh tiến)

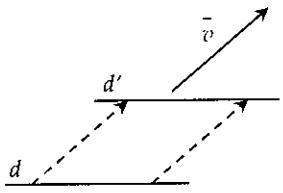
$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

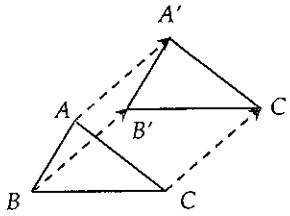
STUDY TIP
Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ gọi là phép đồng nhất
$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow M \equiv M'$

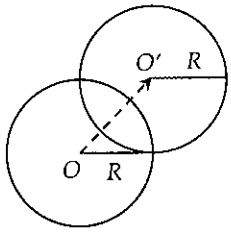
2. Tính chất:

Tính chất 1: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.





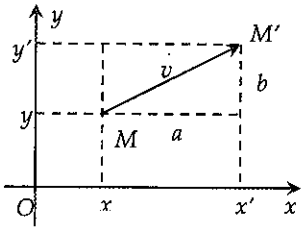




STUDY TIP
Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Tính chất 2:

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



3. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v}=(a;b), M(x;y)$. Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$: $T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')$ có biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}$

B. Các dạng toán về phép tịnh tiến

Dạng 1

Các bài toán khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép tịnh tiến

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép tịnh tiến
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép tịnh tiến
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép tịnh tiến.
- Ứng dụng phép tịnh tiến để giải các bài toán hình học khác...

STUDY TIP
Định nghĩa phép tịnh tiến:
$T_{\vec{v}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$

Ví dụ 1: Kết luận nào sau đây là **sai**?

A. $T_{\vec{u}}(A)=B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{u}$.
B. $T_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$.
C. $T_{\vec{0}}(B)=B$.
D. $T_{2\overrightarrow{AB}}(M)=N \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MN}$.

Đáp án D.

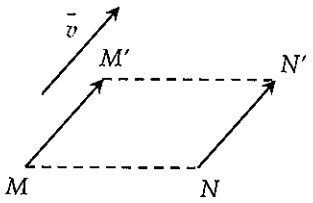
Lời giải

Ta có: $T_{2\overrightarrow{AB}}(M)=N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Ví dụ 2: Giả sử $T_{\vec{v}}(M)=M'$; $T_{\vec{v}}(N)=N'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.
B. $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$.
C. $MM'=NN'$.
D. $MNM'N'$ là hình bình hành.

Đáp án D.



Lời giải

- Theo tính chất của một phép tịnh tiến thì các đáp án A, B, C là đúng.
- $MNM'N'$ không theo thứ tự các đỉnh của hình bình hành nên D sai.

Ví dụ 3: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d_1 thành d_2.

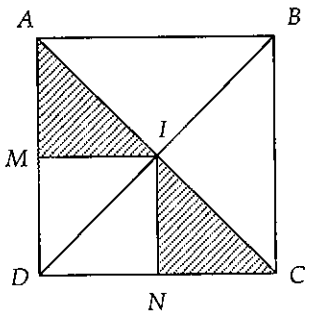
A. Không có. B. Một. C. Hai. D. Vô số.

Đáp án A.

Lời giải

Do phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên không tồn tại phép tịnh tiến nào biến d_1 thành d_2.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây biến tam giác AMI thành tam giác INC.



A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{IN}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

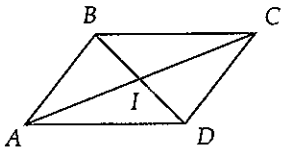
Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} \Rightarrow T_{\overrightarrow{MN}}(\Delta AMI) = \Delta INC$.

Ví dụ 5: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I. Kết luận nào sau đây là **sai**?

A. $T_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$. B. $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = A$. C. $T_{\overrightarrow{AI}}(I) = C$. D. $T_{\overrightarrow{ID}}(I) = B$.

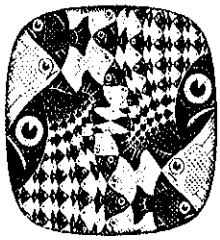


Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $T_{\overrightarrow{ID}}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{II'} = \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow I' \equiv D$. Vậy D sai.

Ví dụ 6: Trong các đối tượng: con cá (hình **A.**), con bướm (hình **B.**), con mèo (hình **C.**), con ngựa (hình **D.**), hình nào có phép tịnh tiến:



A.

B.

C.

D.

Đáp án D.

Lời giải

Trong hình D, đối tượng con ngựa này là ảnh của con ngựa kia qua một phép tịnh tiến theo một hướng xác định.

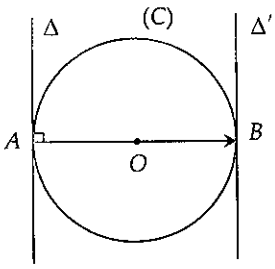
Ví dụ 7: Cho đường tròn (C) có tâm O và đường kính AB. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm A. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ biến Δ thành:

A. đường kính của đường tròn (C) song song với Δ.

B. tiếp tuyến của (C) tại điểm B.

C. tiếp tuyến của (C) song song với AB.

D. đường thẳng song song với Δ và đi qua O.



Đáp án B.

Lời giải

Theo tính chất 2 của phép tịnh tiến nên $T_{\overrightarrow{AB}}(\Delta)=\Delta' \Rightarrow \Delta'//\Delta$, Δ' là tiếp tuyến với đường tròn (C) tại điểm B.

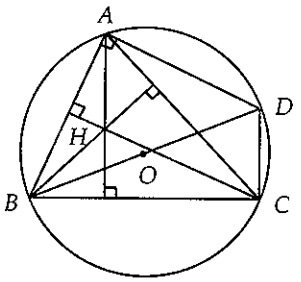
Ví dụ 8: Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn $(O;R)$ và A thay đổi trên đường tròn đó, BD là đường kính. Khi đó quỹ tích trực tâm H của ΔABC là:

A. đoạn thẳng nối từ A tới chân đường cao thuộc BC của ΔABC.

B. cung tròn của đường tròn đường kính BC.

C. đường tròn tâm O' bán kính R là ảnh của $(O;R)$ qua $T_{\overrightarrow{HA}}$.

D. đường tròn tâm O' bán kính R là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua $T_{\overrightarrow{DC}}$.



Đáp án D.

Lời giải

Kẻ đường kính $BD \Rightarrow ADCH$ là hình bình hành (vì $AD//CH$ và $AH//DC$ cùng vuông góc với một đường thẳng)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow T_{\overrightarrow{DC}}(A)=H.$

Vậy H thuộc đường tròn $(O';R)$ là ảnh của đường tròn $(O;R)$ qua $T_{\overrightarrow{DC}}$.

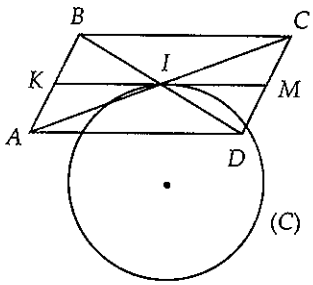
Ví dụ 9: Cho hình bình hành $ABCD$, hai điểm A, B cố định, tâm I di động trên đường tròn (C). Khi đó quỹ tích trung điểm M của cạnh DC.

A. là đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $T_{\overrightarrow{KI}}$, K là trung điểm của BC.

B. là đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $T_{\overrightarrow{KI}}$, K là trung điểm của AB.

C. là đường thẳng BD.

D. là đường tròn tâm I bán kính ID.



Đáp án B.

Lời giải

Gọi K là trung điểm của $AB \Rightarrow K$ cố định.

Ta có $T_{\overrightarrow{KI}}(I)=M \Rightarrow M \in (C')=T_{\overrightarrow{KI}}((C))$.

Dạng 2 Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép tịnh tiến bằng phương pháp toạ độ

Phương pháp:

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép tịnh tiến

- Sử dụng biểu thức tọa độ.

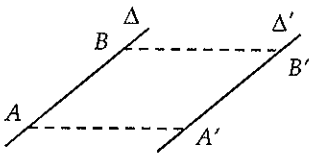
2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Cách 1: Chọn hai điểm A, B phân biệt trên Δ, xác định ảnh A', B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A', B'.

Cách 2: Áp dụng tính chất phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Cách 3: Sử dụng quỹ tích.

Với mọi điểm $M(x;y) \in \Delta : T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')$ thì $M' \in \Delta'$.



Từ biểu thức toạ độ $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$ thế x, y vào phương trình Δ ta được phương trình Δ'.

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol...)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, $T_{\vec{v}}(M) = M'(x';y')$ thì M' thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$.
- Với đường tròn áp dụng tính chất phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;-3)$. Tìm toạ độ điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-1;3)$.

A. $A'(2;-6)$. **B.** $A'(2;0)$. **C.** $A'(4;0)$. **D.** $A'(-2;0)$.

Đáp án B.

STUDY TIP
Sử dụng biểu thức tọa độ
$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $T_{\vec{v}}(A) = A'(x_{A'};y_{A'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + x_{\vec{v}} \\ y_{A'} = y_A + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(2;0)$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M'(-4;2)$, biết M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;-5)$. Tìm tọa độ điểm M.

A. $M(-3;5)$. **B.** $M(3;7)$. **C.** $M(-5;7)$. **D.** $M(-5;-3)$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $T_{\vec{v}}(M) = M'(x_{M'};y_{M'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + x_{\vec{v}} \\ y_{M'} = y_M + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_{M'} - x_{\vec{v}} \\ y_M = y_{M'} - y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-5;7)$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-5;2)$ và điểm $M'(-3;2)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$.

A. $\vec{v} = (-2;0)$. **B.** $\vec{v} = (0;2)$. **C.** $\vec{v} = (-1;0)$. **D.** $\vec{v} = (2;0)$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $T_{\vec{v}}(M) = M'(x_{M'};y_{M'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{v}} = x_{M'} - x_M \\ y_{\vec{v}} = y_{M'} - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{v}} = 2 \\ y_{\vec{v}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (2;0)$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(0;2)$, $N(-2;1)$ và vectơ $\vec{v} = (1;2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến M, N thành hai điểm M', N' tương ứng. Tính độ dài $M'N'$.

A. $M'N' = \sqrt{5}$. **B.** $M'N' = \sqrt{7}$. **C.** $M'N' = 1$. **D.** $M'N' = 3$.

Đáp án A.

STUDY TIP
Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm
$M'N' = MN$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} T_{\vec{v}}(M) = M' \\ T_{\vec{v}}(N) = N' \end{cases} \Rightarrow MN = M'N' = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC biết $A(2;4)$, $B(5;1)$, $C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ tương ứng các điểm. Tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$ là:

A. $G'(-4;-2)$. B. $G'(4;2)$. C. $G'(4;-2)$. D. $G'(-4;4)$.

Đáp án A.

STUDY TIP
Phép tịnh tiến biến trọng tâm G của ΔABC thành trọng tâm G' của ảnh $\Delta A'B'C'$

Lời giải

Ta có tọa độ trọng tâm ΔABC là $G(2;1)$, $\overrightarrow{BC}=(-6;-3)$.

$T_{\overrightarrow{BC}}(G)=G'(x_{G'};y_{G'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'}=x_G+x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_{G'}=y_G+y_{\overrightarrow{BC}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'}=-4 \\ y_{G'}=-2 \end{cases} \Rightarrow G'(-4;-2)$

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x+2y-1=0$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;-1)$.

A. $\Delta': x+2y=0$. B. $\Delta': x+2y-3=0$.

C. $\Delta': x+2y+1=0$. D. $\Delta': x+2y+2=0$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1:

Chọn $A(1;0)\in\Delta \Rightarrow T_{\vec{v}}(A)=A'(2;-1)\in\Delta'$

Chọn $B(-1;1)\in\Delta \Rightarrow T_{\vec{v}}(B)=B'(0;0)\in\Delta'$

$\Rightarrow$ Đường thẳng Δ' chính là đường thẳng $A'B'$.

Đường thẳng Δ' qua $A'(2;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2)$ có phương trình $\Delta': 1(x-2)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow x+2y=0$.

Cách 2:

$T_{\vec{v}}(\Delta)=\Delta' \Rightarrow \Delta$ và Δ' song song hoặc trùng nhau nên Δ' có dạng $x+2y+m=0$

Chọn $A(1;0)\in\Delta \Rightarrow T_{\vec{v}}(A)=A'(2;-1)\in\Delta': 2-2+m=0 \Leftrightarrow m=0$.

STUDY TIP
Hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì có hai vectơ pháp tuyến cùng phương

Cách 3: sử dụng quỹ tích.

Gọi $M(x_M;y_M)\in\Delta \Leftrightarrow x_M+2y_M-1=0$ (1)

Ta có: $T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')\in\Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x_M+1 \\ y'=y_M-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=x'-1 \\ y_M=y'-1 \end{cases}$

Thay vào (1) ta được: $(x'-1)+2(y'+1)-1=0 \Leftrightarrow x'+2y'=0 \Rightarrow \Delta': x+2y=0$.

Nhận xét: Độc giả sử dụng ***Cách 3*** tỏ ra có tính tư duy cao hơn, nhanh hơn và áp dụng cho nhiều loại hình khác nhau.

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-1=0$ qua $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(1;2)$.

A. $(x+2)^2+y^2=\sqrt{6}$. B. $(x-2)^2+y^2=6$.

C. $x^2+y^2-2x-5=0$. D. $2x^2+2y^2-8x+4=0$.

Đáp án B.

STUDY TIP

- Phương trình đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ có tâm $I(a;b)$ bán kính R.
- Phương trình đường tròn $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Lời giải

Cách 1: Theo tính chất của phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Ta có: đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$. Suy ra $T_{\vec{v}}(I)=I'(2;0)$

Vậy đường tròn (C') có tâm $I'(2;0)$, bán kính $R'=R=\sqrt{6}$ có phương trình:

$$(x-2)^2+y^2=6.$$

Cách 2: Sử dụng quỹ tích.

Gọi $M(x;y)\in(C) \Rightarrow T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-1 \\ y=y'-2 \end{cases}$$

Thế x, y vào phương trình đường tròn (C):

$$(x'-1)^2+(y'-2)^2-2(x'-1)+4(y'-2)-1=0 \Leftrightarrow (x')^2+(y')^2-4x'-2=0$$

Vậy $(C'):(x-2)^2+y^2=6$.

Ví dụ 8: Cho vectơ $\vec{v}=(a;b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị $y=f(x)=x^3+3x+1$ theo vectơ $\vec{v}$ ta nhận được đồ thị hàm số $y=g(x)=x^3-3x^2+6x-1$. Khi đó $a+b$ là:

A. 3. B. –1. C. 2. D. –3.

Đáp án A.

STUDY TIP

Đồng nhất thức của 2 đa thức $\Leftrightarrow$ các hệ số của các đa thức tương ứng bằng nhau.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $g(x)=f(x-a)+b$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2+6x-1=\left[(x-a)^3+3(x-a)+1\right]+b$$
$$=x^3-3ax^2+3(a^2+1)x-a^3-3a+1+b$$

Đồng nhất thức ta được: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$

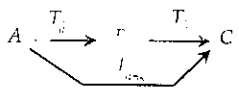
Ví dụ 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-5;2)$, $C(-1;0)$. Biết $B=T_{\vec{u}}(A)$, $C=T_{\vec{v}}(B)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ để có thể thực hiện phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến A thành C.

A. $(-6;2)$. B. $(2;-4)$. C. $(4;-2)$. D. $(4;2)$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Ta có sơ đồ tổng quát:



Lời giải

Ta có: $T_{\vec{u}}(A)=B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{u}$

$T_{\vec{v}}(B)=C \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\vec{v}$

Mà $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{u}+\vec{v}$

$T_{\vec{u}+\vec{v}}(A)=C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}=(4;-2)$

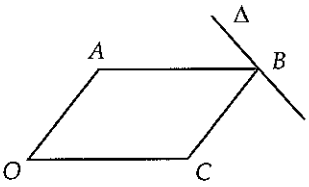
Ví dụ 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $OABC$ với điểm $A(-2;1)$, điểm B thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-y-5=0$. Tìm quỹ tích đỉnh C.

A. là đường thẳng có phương trình $2x-y-10=0$.

B. là đường thẳng có phương trình $x+2y-7=0$.

C. là đường thẳng có phương trình $2x-y+7=0$.

D. là đường tròn có phương trình $x^2+y^2-2x+y=0$.



Đáp án A.

Lời giải

Do $OABC$ là hình bình hành nên $T_{\overrightarrow{AO}}(B)=C$

Vậy quỹ tích C là đường thẳng $\Delta'=T_{\overrightarrow{AO}}(\Delta)$ ta tìm được $\Delta' // \Delta: 2x-y-10=0$.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x+y-9=0$. Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ có giá song song với Oy biến d thành d' đi qua $A(1;1)$.

A. $\vec{v}=(0;5)$. **B.** $\vec{v}=(1;-5)$. **C.** $\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{v}=(0;-5)$.

Đáp án D.

Lời giải

$\vec{v}$ có giá song song với Oy $\Rightarrow \vec{v}=(0;k)$, $k\neq 0$

Gọi $M(x;y)\in d \Rightarrow T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')\in d' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x \\ y'=y+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y'-k \end{cases}$

Thế vào phương trình d $\Rightarrow d': 3x'+y'-k-9=0$ mà d' đi qua $A(1;1)$

$\Rightarrow k=-5 \Rightarrow \vec{v}=(0;-5)$.

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d: 2x-3y+3=0$ và $d': 2x-3y-5=0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$ có phương vuông góc với d và $T_{\vec{v}}(d)=d'$.

A. $\vec{v}=\left(-\frac{6}{13};\frac{4}{13}\right)$. **B.** $\vec{v}=\left(-\frac{1}{13};\frac{2}{13}\right)$. **C.** $\vec{v}=\left(-\frac{16}{13};-\frac{24}{13}\right)$. **D.** $\vec{v}=\left(\frac{16}{13};-\frac{24}{13}\right)$.

Đáp án D.

Lời giải

Gọi $\vec{v}=(a;b)$, ta có: $T_{\vec{v}}: M(x;y)\to M'(x';y')$

$\forall M \Rightarrow M'(x';y')\in d' \Rightarrow \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$

Thế vào phương trình $d: 2x'-3y'-2a+3b+3=0$

Từ giả thiết $\Rightarrow -2a+3b+3=-5 \Leftrightarrow 2a-3b=8$ (1)

Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(3;2)$. Do $\vec{u}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=3a+2b=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2a-3b=8 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{16}{13} \\ b=\frac{24}{13} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\left(\frac{16}{13};-\frac{24}{13}\right)$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Các bài toán khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép tịnh tiến

Câu 1: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng thành chính nó?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường tròn thành chính nó?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 3: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến hình vuông thành chính nó?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 4: Phép tịnh tiến không bảo toàn yếu tố nào sau đây?

A. Khoảng cách giữa hai điểm.

B. Thứ tự 3 điểm thẳng hàng.

C. Tọa độ của điểm.

D. Diện tích.

Câu 5: Với hai điểm A, B phân biệt và $T_{\vec{v}}(A)=A'$, $T_{\vec{v}}(B)=B'$ với $\vec{v}\neq\vec{0}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'B'}=\vec{v}$. B. $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$. D. $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Câu 6: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Có bao nhiêu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}\neq\vec{0}$ biến d_1 thành d_2?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$ biến điểm A thành điểm:

A. A' đối xứng với A qua C.

B. A' đối xứng với D qua C.

C. O là giao điểm của AC và BD.

D. C.

Câu 8: Cho ΔABC có trọng tâm G. $T_{\overrightarrow{AG}}(G)=M$. Khi đó điểm M là:

A. M là trung điểm BC.

B. M trùng với A.

C. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BGCM$.

D. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BCGM$.

Câu 9: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm ảnh của ΔAOF qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. ΔABO. B. ΔBCO. C. ΔCDO. D. ΔDEO.

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I. Kết luận nào sau đây sai?

A. $T_{\overrightarrow{DC}}(A)=B$. B. $T_{\overrightarrow{CD}}(B)=A$.

C. $T_{\overrightarrow{DI}}(I)=B$. D. $T_{\overrightarrow{IA}}(I)=C$.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$ tâm I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC. Phép tịnh tiến theo vectơ nào sau đây biến ΔAMI thành ΔMDN.

A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{NI}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$, có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng AB thành đường thẳng CD và đường thẳng AD thành đường thẳng BC?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 13: Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$ là:

A. $(O')=T_{\overrightarrow{AB}}((O))$. B. $(O')=T_{\overrightarrow{AM}}((O))$.

C. $(O')=T_{\overrightarrow{BA}}((O))$. D. $(O')=T_{\overrightarrow{BM}}((O))$.

Câu 14: Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB=BC=CD=a$, $BAD=75°$ và $ADC=45°$. Khi đó độ dài AD là:

A. $a\sqrt{2+\sqrt{5}}$. B. $a\sqrt{3}$.

C. $a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. D. $a\sqrt{5}$.

Câu 15: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB=6\sqrt{3}$, $CD=12$, $A=60°$, $B=150°$, $D=90°$. Tính độ dài BC.

A. 4. B. 5. C. 6. D. 2.

Câu 16: Trên đoạn AD cố định dựng hình bình hành $ABCD$ sao cho $\frac{AC}{AD}=\frac{BD}{AB}$. Khi đó quỹ tích đỉnh C là:

A. là đường tròn tâm A, bán kính là $AB\sqrt{3}$.

B. là đường tròn tâm A, bán kính là AC.

C. là đường tròn tâm A, bán kính là AD.

D. là đường tròn tâm A, bán kính là $AD\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hai đường tròn bán kính R cắt nhau tại M, N, đường trung trực của MN cắt các đường tròn tại A và B sao cho A, B nằm cùng một phía với MN. Giá trị MN^2+AB^2 bằng bao nhiêu?

A. $2R^2$. B. $3R^2$. C. $4R^2$. D. $6R^2$.

Câu 18: Hai đường tròn bán kính R tiếp xúc ngoài với nhau tại K. Trên đường tròn này lấy điểm A, trên đường tròn kia lấy điểm B sao cho $AKB=90°$. Độ dài AB bằng bao nhiêu?

A. R. B. $\sqrt{2}R$. C. $\sqrt{3}R$. D. $2R$.

Câu 19: Từ đỉnh B của hình bình hành $ABCD$ kẻ các đường cao BK và BH của nó biết $KH=3$, $BD=5$.

Khoảng cách từ B đến trực tâm H_1 của tam giác BKH có giá trị bằng:

A. 4. B. 5. C. 6. D. 4,5.

Dạng 2: Xác định ảnh của một điểm hoặc hình qua phép tịnh tiến bằng phương pháp toạ độ

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tọa độ điểm M' là ảnh của điểm $M(1;1)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;1)$.

A. $M'(4;-2)$. B. $M'(4;2)$.

C. $M'(2;1)$. D. $M'(4;-1)$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(2;1)$ và điểm $A(4;5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào sau đây qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$?

A. $(1;6)$. B. $(2;4)$. C. $(4;7)$. D. $(6;6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(2;2)$, $B(4;6)$ và $T_{\vec{v}}(A)=B$. Khi đó tọa độ vectơ $\vec{v}$ là:

A. $(1;2)$. B. $(2;4)$. C. $(4;2)$. D. $(-2;-4)$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết điểm $M'(-3;0)$ là ảnh của điểm $M(1;-2)$ qua $T_{\vec{u}}$ và điểm $M''(2;3)$ là ảnh của M' qua $T_{\vec{v}}$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}+\vec{v}$.

A. $(1;5)$. B. $(-2;-2)$. C. $(1;-1)$. D. $(-1;5)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A', B' lần lượt là ảnh của các điểm $A(2;3)$, $B(1;1)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;1)$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{A'B'}$.

A. 2. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có các điểm $A(3;0)$, $B(-2;4)$, $C(-4;5)$. G là trọng tâm ΔABC và phép tịnh tiến theo $\vec{u}\neq\vec{0}$ biến điểm A thành điểm G. Tìm tọa độ điểm G' biết $G'=T_{\vec{u}}(G)$.

A. $G'(-5;6)$. B. $G'(5;6)$.

C. $G'(3;1)$. D. $G'(-1;3)$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+5y-1=0$ và vectơ $\vec{v}=(4;2)$. Khi đó ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ có phương trình là:

A. $x+5y-15=0$. B. $x+5y+15=0$.

C. $x+5y+6=0$. D. $-x-5y+7=0$.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(-4;2)$ và đường thẳng Δ' có phương trình $2x+y-5=0$. Hỏi Δ' là ảnh của đường thẳng Δ nào qua $T_{\vec{v}}$.

A. $\Delta: 2x+y+5=0$. B. $\Delta: 2x+y-9=0$.

C. $\Delta: 2x+y-15=0$. D. $\Delta: 2x+y-11=0$.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1-t\end{cases}$ và đường thẳng $\Delta': x+2y-1=0$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$ biết $T_{\vec{v}}(\Delta)=\Delta'$.

A. $\vec{v}=(0;-1)$. B. $\vec{v}=(0;2)$.

C. $\vec{v}=(0;1)$. D. $\vec{v}=(-1;1)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y+1=0$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(1;3)$.

A. $(C'):(x-3)^2+(y-4)^2=2$.

B. $(C'):(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

C. $(C'):(x+3)^2+(y+4)^2=4$.

D. $(C'):(x+3)^2+(y-4)^2=4$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(3;-1)$ và đường tròn $(C):(x-4)^2+y^2=16$. Ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=16$.

B. $(x+1)^2+(y+1)^2=16$.

C. $(x-7)^2+(y+1)^2=16$.

D. $(x+7)^2+(y-1)^2=16$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường cong $(C): 2x^2+4y^2=1$ và vectơ $\vec{v}=(1;-2)$. Ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là:

A. $2x^2+4y^2+4x+16y-17=0$.

B. $2x^2+4y^2-4x+16y+17=0$.

C. $2x^2+4y^2-4x-16y+17=0$.

D. $2x^2+4y^2-4x-16y-7=0$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và vectơ $\vec{v}=(2;1)$. Ảnh của (E) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là:

A. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$. B. $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. D. $\frac{x^2-2}{16}+\frac{y^2-1}{9}=1$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ trong đó:

$$\begin{cases} x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha + a \\ y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha + b \end{cases}$$

Cho hai điểm $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$, gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép biến hình F. Khi đó khoảng cách d giữa M' và N' bằng:

A. $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

B. $d=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$.

C. $d=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

D. $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$.

Câu 18: Cho $\vec{v}=(a;b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị $y=f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ theo $\vec{v}$ ta nhận đồ thị hàm số $y=g(x)=\frac{x^2}{x+1}$. Khi đó tích $a.b$ bằng:

A. 1. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{v}=(-2;1)$ và đường thẳng $d: 2x-3y+3=0$, $d_1: 2x-3y-5=0$. Tọa độ $\vec{w}=(a;b)$ có phương vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{w}}$. Khi đó $a+b$ bằng:

A. $\frac{6}{13}$. B. $\frac{16}{13}$. C. $\frac{-8}{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép biến hình F xác định như sau: Với mỗi điểm $M(x;y)$ ta có điểm $M'=F(M)$ sao cho $M'(x';y')$ thỏa mãn:

$$x'=x+2;\ y'=y-3.$$

Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;3)$.

B. F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;3)$.

C. F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(2;-3)$.

D. F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;-3)$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;6)$, $B(-1;-4)$. Gọi C, D lần lượt là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(1;5)$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $ABCD$ là hình vuông.

B. $ABCD$ là hình bình hành.

C. $ABDC$ là hình bình hành.

D. A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $y=2$ và hai điểm $A(1;3)$ và $B(3;-4)$. Lấy điểm M trên d và N trên trục hoành sao cho MN vuông góc với d và $AM+MN+NB$ nhỏ nhất. Tìm Tọa độ M, N?

A. $M\left(\frac{6}{5};2\right)$, $N\left(\frac{6}{5};0\right)$. B. $M\left(\frac{7}{5};2\right)$, $N\left(\frac{7}{5};0\right)$.

C. $M\left(\frac{8}{5};2\right)$, $N\left(\frac{8}{5};0\right)$. D. $M\left(\frac{9}{5};2\right)$, $N\left(\frac{9}{5};0\right)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Các bài toán khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép tịnh tiến

Câu 1: Đáp án D.

Khi vectơ $\vec{v}$ của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho thì sẽ có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng thành chính nó.

Câu 2: Đáp án B.

Khi $\vec{v}=\vec{0}$: Đường tròn (C) có tâm I thì $T_{\vec{v}}((C))=(C) \Leftrightarrow T_{\vec{v}}(I)=I \Leftrightarrow \vec{v}=\overrightarrow{II}=\vec{0}$ với (C) là đường tròn.

Câu 3: Đáp án B.

Khi $\vec{v}=\vec{0}$ có một phép tịnh tiến biến hình vuông thành chính nó.

Câu 4: Đáp án C.

Khi tọa độ của vectơ tịnh tiến $\vec{v}\neq\vec{0}$.

Câu 5: Đáp án B.

Ta chỉ ra được $ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

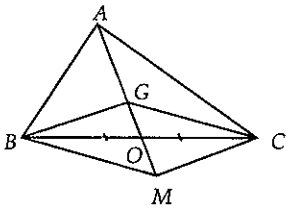
Câu 6: Đáp án D.

Chẳng hạn lấy bất kì $A\in d_1$, $B\in d_2 \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(d_1)=d_2$ nên có vô số phép tịnh tiến thỏa mãn.

Câu 7: Đáp án D.

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow T_{\overrightarrow{AC}}(A)=C$.

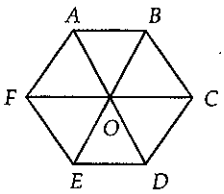
Câu 8: Đáp án C.



$T_{\overrightarrow{AG}}(G)=M\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow BGCM$ là hình bình hành.

Câu 9: Đáp án B.

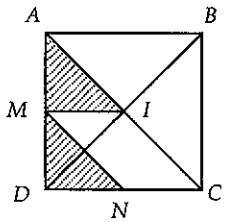


$$\begin{cases}T_{\overrightarrow{AB}}(A)=B\\T_{\overrightarrow{AB}}(O)=C\\T_{\overrightarrow{AB}}(F)=O\end{cases}\Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(\Delta AOF)=\Delta BCO.$$

Câu 10: Đáp án D.

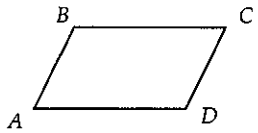
$T_{\overrightarrow{IA}}(I)=A$ nên đáp án D sai.

Câu 11: Đáp án A.



Từ hình vẽ $T_{\overrightarrow{AM}}(\Delta AMI)=\Delta MDN$.

Câu 12: Đáp án B.



Từ hình vẽ:

$T_{\overrightarrow{BC}}(AB)=CD$, với AB,CD là các đoạn thẳng

$T_{\overrightarrow{AB}}(AD)=BC$, Với AD,BC là các đoạn thẳng

nên có 1 phép tịnh tiến thỏa mãn.

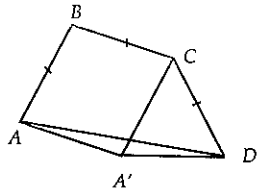
Câu 13: Đáp án A.

Ta có: $\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$.

Vậy tập hợp điểm M' là ảnh của đường tròn (O) qua $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Câu 14: Đáp án C.



Xét $T_{\overrightarrow{BC}}(A)=A'$.

Khi đó $CA'=BA=CD\Rightarrow\Delta CA'D$ cân tại C

$\Rightarrow A'CD=60^\circ\Rightarrow\Delta CA'D$ đều

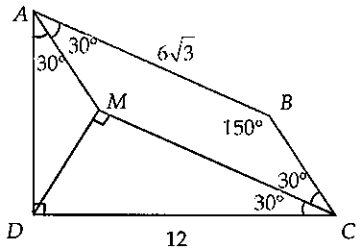
$\Rightarrow A'DA=15^\circ$ và $AA'=BC=CD=A'D=a$

$\Rightarrow AA'D=150^\circ$

Do đó: $AD^2=2A'A^2-2A'A^2.\cos AA'D=2a^2+\sqrt{3}a^2$

(áp dụng định lý cosin) $\Rightarrow AD=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Câu 15: Đáp án C.



Xét $T_{\overrightarrow{BC}}(A)=M\Rightarrow ABCM$ là hình bình hành

$\Rightarrow BCM=30^\circ\Rightarrow BCD=60^\circ$ và $MCD=30^\circ$

Ta có: $MD^2=MC^2+DC^2-2MC.DC.\cos30^\circ=36$

$\Rightarrow MD=6$

$MD=\frac{1}{2}CD$ và $MC=MD\sqrt{3}$

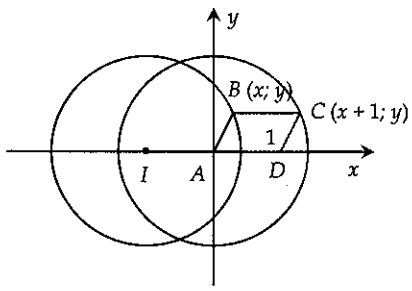
$\Rightarrow\Delta MDC$ là nửa tam giác đều

$\Rightarrow DMC=90^\circ\Rightarrow MDA=30^\circ$

Vậy $MDA=MAD=MAB=30^\circ\Rightarrow\Delta AMD$ cân tại M

$\Rightarrow BC=MA=MD=6$.

Câu 16: Đáp án D.



Chọn hệ trục về chiều dương như hình vẽ.

Cố định $D(1;0)$. Với $B(x;y)\Rightarrow C(x+1;y)$

Từ giả thiết: $AC.AB=AD.BD$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+y^2+2x)=1-2x$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+1)(x^2+y^2+2x)-x^2-y^2-2x=1-2x$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+1)(x^2+y^2+2x-1)=0$ (do $x^2+y^2+1>0$)

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=2$ (1)

Suy ra quỹ tích B là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{2}$ (I là điểm đối xứng của D qua A)

Ta có: $T_{\overrightarrow{BC}}(B)=C$

Vậy quỹ tích của C là đường tròn tâm A, bán kính $AD\sqrt{2}$.

Câu 17: Đáp án C.

Giả sử trung trực MN cắt (O_1) tại A, cắt (O_2) tại B (O_1 ở giữa A, B)

(Bạn đọc tự vẽ hình)

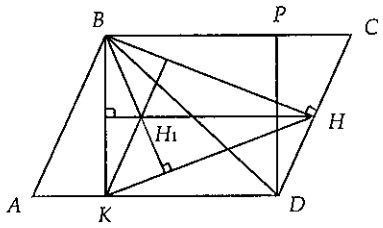
Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_2O_1}$ đường tròn (O_2) biến thành đường tròn (O_1). Vì vậy B biến thành A, M biến thành M_1, N biến thành N_1. MNN_1M_1 là hình bình hành nội tiếp nên là hình chữ nhật. Vậy $MN^2+M_1M^2=MN^2+AB^2=4R^2$.

Câu 18: Đáp án D.

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Sử dụng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{O_1O_2}$ thì K biến thành C, KA biến thành CB. Vì vậy $AB=2R$.

Câu 19: Đáp án A.



Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{KD}$ ta có:

K biến thành D

H_1 biến thành H

B biến thành P

Ta có ΔPHK vuông tại H và $KH=3$, $KP=BD=5$ nên $PH=\sqrt{25-9}=4 \Rightarrow BH_1=PH=4$.

Dạng 2: : Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép tịnh tiến bằng phương pháp toạ độ.

Câu 1: Đáp án B.

$T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=2 \end{cases} \Rightarrow M'(4;2)$.

Câu 3: Đáp án B.

Theo biểu thức tọa độ $\Rightarrow \begin{cases} x_A=x+x_{\vec{v}} \\ y_A=y+y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$.

Câu 6: Đáp án B.

Ta có: $\begin{cases} x_{\vec{v}}=x_B-x_A \\ y_{\vec{v}}=y_B-y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{v}}=2 \\ y_{\vec{v}}=4 \end{cases}$.

Câu 7: Đáp án A.

Ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{MM'}$ và $\vec{v}=\overrightarrow{M'M''}$

$\Rightarrow \vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{MM''}=(1;5)$.

Câu 8: Đáp án C.

$\begin{matrix} T_{\vec{v}}(A)=A' \\ T_{\vec{v}}(B)=B' \end{matrix} \Rightarrow A'B'=AB=\sqrt{5}$.

Câu 9: Đáp án A.

Ta tìm được $G(-1;3) \Rightarrow \vec{u}=\overrightarrow{AG}=(-4;3)$

$T_{\overrightarrow{AG}}(G)=G' \Rightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GG'} \Rightarrow G'(-5;6)$.

Câu 10: Đáp án A.

Ảnh của Δ có dạng: $x+5y+c=0$ (Δ')

Chọn $A(1;0)\in\Delta$: $T_{\vec{v}}(A)=A'(x;y)\in\Delta'$

$\Rightarrow A'(5;2)$ thế vào $\Delta': 5+10+c=0 \Rightarrow c=-15$

$\Rightarrow \Delta': x+5y-15=0$.

Câu 11: Đáp án D.

Điểm $M(x;y)\in\Delta$ biến thành $M(x';y')\in\Delta'$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y+2 \end{cases}$, thay x', y' vào $\Delta': 2x+y-11=0$.

Câu 12: Đáp án C.

Chọn $A(1;-1)\in\Delta$

Thử đáp án C $\Rightarrow T_{\vec{v}}(A)=A' \Rightarrow A'(1;0)\in\Delta'$ (thỏa mãn)

Câu 13: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=2$

Ta có tâm $I'=T_{\vec{v}}(I) \Rightarrow I'(3;4)$

$\Rightarrow (C'): (x-3)^2+(y-4)^2=4$.

Câu 14: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $I(4;0)$, bán kính $R=4$

$\Rightarrow T_{\vec{v}}(I)=I'(7;-1)$

Vậy đường tròn ảnh là $(x-7)^2+(y+1)^2=16$.

Câu 15: Đáp án B.

Sử dụng quỹ tích $M(x;y)\in(C)$:

$T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')\in(C')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'+2 \end{cases}$

Thay vào (C) ta được đáp án **B**.

Câu 16: Đáp án A.

Sử dụng quỹ tích $T_v(M) = M'(x';y')$ với mọi $M(x;y) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-2 \end{cases}$

Thế vào phương trình (E) ta được đáp án **A**.

Câu 17: Đáp án A.

Ta có: $\begin{cases} x_1' = x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha + a \\ y_1' = x_1.\sin\alpha - y_1.\cos\alpha + b \end{cases}$

$\begin{cases} x_2' = x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha + a \\ y_2' = x_2.\sin\alpha - y_2.\cos\alpha + b \end{cases}$

$\Rightarrow M'N' = \sqrt{(x_2'-x_1')^2 + (y_2'-y_1')^2}$

$= \sqrt{[(x_2-x_1)^2\cos^2\alpha + (y_2-y_1)^2\sin^2\alpha + (x_2-x_1)^2\sin^2\alpha + (y_2-y_1)^2\cos^2\alpha]}$

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$\Rightarrow d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.

Câu 18: Đáp án C.

Ta có: $g(x) = f(x-a) + b$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{(x-a)^2 - (x-a) + 1}{x-a-1} + b$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2 + (-2a+b-1)x + a^2 - ab + a - b + 1}{x-a-1}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a.b = 6.$

Câu 19: Đáp án C.

Đường thẳng d có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-3)$

$\Rightarrow \vec{w} = (2m;-3m)$

$T_{\vec{w}}(M) = M'(2m;\ 1-3m)$, với $M \in d$

$T_{\vec{w}}(d) = d' \Rightarrow d'$ có dạng $2x - 3y + \beta = 0$

Vì d' qua $M' \Rightarrow 4m - 3 + 9m + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3 - 13m$

$\Rightarrow d': 2x - 3y + 3 - 13m = 0$

Để $d_1 \equiv d' \Rightarrow 3 - 13m = -5 \Leftrightarrow m = \dfrac{8}{13}$

$\Rightarrow \vec{w} = \left(\dfrac{16}{13}; -\dfrac{24}{13}\right) \Rightarrow a + b = -\dfrac{8}{13}$.

Câu 20: Đáp án C.

Thật vậy theo biểu thức tọa độ của $T_v(M) = M'$:

$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = (2;-3)$.

Câu 21: Đáp án D.

$T_{\vec{v}}(A) = C \Rightarrow C(2;11)$

$T_{\vec{v}}(B) = D \Rightarrow D(0;1)$

$\overrightarrow{AB} = (-2;-10)$, $\overrightarrow{CD} = (-2;-10)$, $\overrightarrow{BC} = (3;15)$,

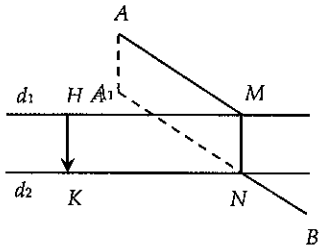
$\overrightarrow{AD} = (-1;-5) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow A, B, C, D$ thẳng hàng.

Câu 22: Đáp án B.

Cách 1: Thử các tọa độ M, N ta được kết quả $AM + MN + NB$ nhỏ nhất với $M \in d, N \in Ox$ và $MN \perp d$.

Cách 2:



Gọi $H \in d_1$, $K \in d_2$ sao cho $HK \perp d_1$.

Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{HK}$

Gọi $A_1 = T_{\overrightarrow{HK}}(A)$, $A_1B \cap d_2 = N$, $M \in d_1$ với $MN \perp d_1$

$AM + MN + NB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM + NB$ nhỏ nhất (MN không đổi)

$AM + NB = A_1N + NB \geq A_1B$

Dấu "=" xảy ra khi $N = A_1B \cap d_2$

Lấy $A_1(1;1)$, điểm N cần tìm là giao điểm của A_1B và trục hoành.

Gọi $N(x_0;0) \Rightarrow \overrightarrow{A_1N} = (x_0 - 1;-1)$, $\overrightarrow{A_1B} = (2;-5)$

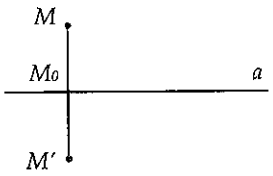
Vì $\overrightarrow{A_1N}$ và $\overrightarrow{A_1B}$ cùng phương nên $\dfrac{x_0 - 1}{2} = \dfrac{-1}{-5}$

$\Rightarrow x_0 = \dfrac{7}{5} \Rightarrow N\left(\dfrac{7}{5};0\right)$ và $M\left(\dfrac{7}{5};2\right)$.

Đọc thêm: Phép đối xứng trục. Phép đối xứng tâm

A. Lý thuyết

I. Phép đối xứng trục



STUDY TIP

$Đ_a(M) = M \Leftrightarrow M \in a$

$Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow Đ_a(M') = M$

a là trung trực của đoạn MM'

1. Định nghĩa

> Phép đối xứng qua một đường thẳng a là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng a.
> Kí hiệu: $Đ_a$ (a là trục đối xứng)

$Đ_a(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$ với M_0 là hình chiếu của M trên a.

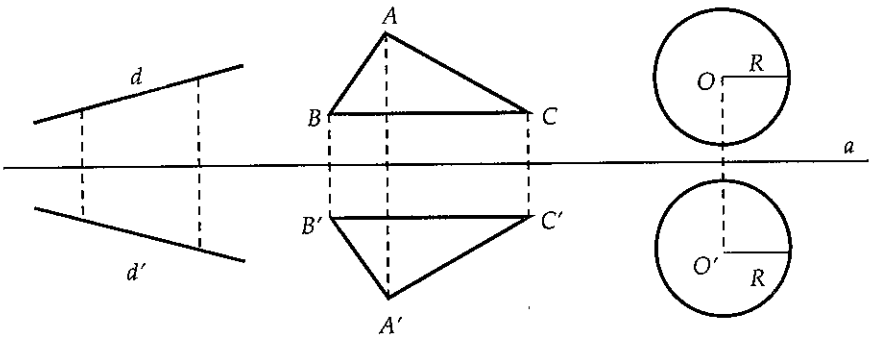
2. Tính chất

Tính chất 1: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

STUDY TIP

Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

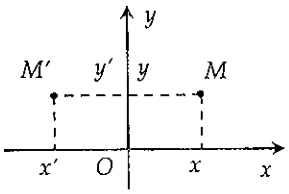


3. Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng a gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu $Đ_a$ biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathcal{H}$ được gọi là hình có trục đối xứng.

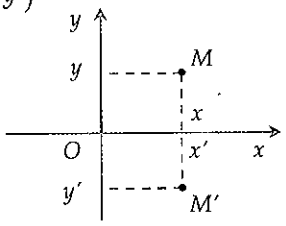
4. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy: $Đ_a : M(x;y) \to M'(x';y')$



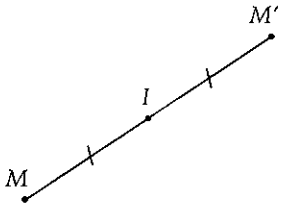
- Nếu $a \equiv Ox \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$

- Nếu $a \equiv Oy \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$



II. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa



> Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.
> Kí hiệu: $Đ_I$ (I là tâm đối xứng)

$Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

+ Nếu $M \equiv I \Rightarrow M' \equiv I$

+ Nếu $M \neq I \Rightarrow I$ là trung điểm của MM'

2. Tính chất

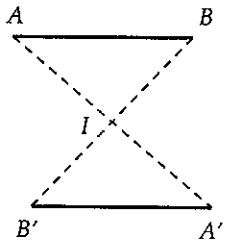
Tính chất 1: Nếu $Đ_I(M) = M'$ và $Đ_I(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra $M'N' = MN$

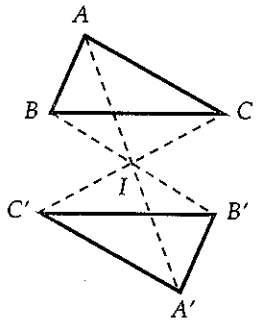
Tính chất 2: Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

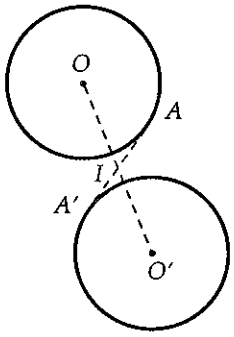
STUDY TIP

+ Phép đối xứng tâm biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

+ Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ



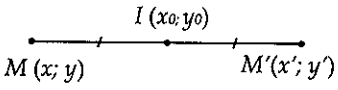




3. Tâm đối xứng của một hình

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathcal{H}$ được gọi là hình có tâm đối xứng.

4. Biểu thức tọa độ



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $I(x_0;y_0)$, gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ với

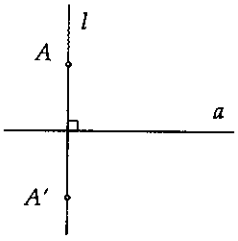
$$Đ_I(M) = M' \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

B. Các dạng toán về phép đối xứng trục, đối xứng tâm

Dạng 1 **Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép đối xứng trục và đối xứng tâm**

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép đối xứng trục, đối xứng tâm.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép đối xứng trục, đối xứng tâm.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép đối xứng trục, đối xứng tâm.
- Vận dụng phép đối xứng trục, đối xứng tâm để giải các bài toán hình học khác...



Ví dụ 1: Cho đường thẳng a. Qua phép đối xứng trục a, đường thẳng nào biến thành chính nó.

A. Các đường thẳng song song với a.

B. Các đường thẳng vuông góc với a.

C. Các đường thẳng hợp với a góc 60°.

D. Các đường thẳng hợp với a góc 30°.

Đáp án B.

Lời giải:

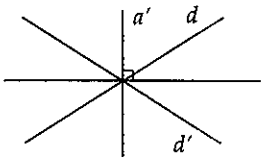
Giả sử l là đường thẳng vuông góc với a.

Lấy $A \in l$ và $Đ_a(A) = A' \Rightarrow AA' \perp a \Rightarrow A' \in l$ và ngược lại vẫn thỏa mãn

$\Rightarrow D_a(l) = l$.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng này thành đường thẳng kia?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.



Đáp án C.

Lời giải:

Có 2 phép đối xứng trục với các trục là hai đường phân giác của các tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau d và d'.

Ví dụ 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình vuông có vô số trục đối xứng.

B. Hình chữ nhật có 4 trục đối xứng.

C. Tam giác đều có vô số trục đối xứng.

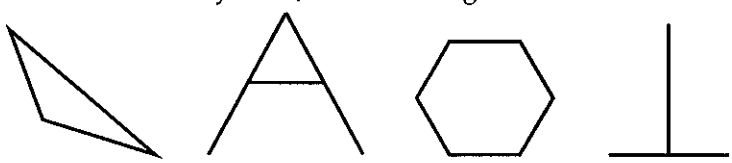
D. Tam giác cân nhưng không đều có 1 trục đối xứng.

Đáp án D.

Lời giải:

Tam giác cân nhưng không đều có một trục đối xứng là đường cao ứng với đỉnh của tam giác cân đó.

Ví dụ 4: Hình nào dưới đây có một tâm đối xứng?



A. **B.** **C.** **D.**

Đáp án C.

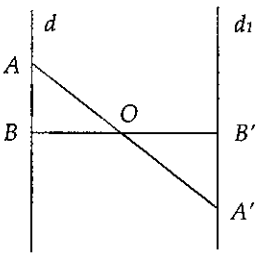
Lời giải:

Một tâm đối xứng tại giao điểm của 2 đường chéo.

Ví dụ 5: Giả sử phép đối xứng tâm O biến đường thẳng d thành d_1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d_1 cắt d. **B.** Nếu $O \notin d$ thì $d // d_1$.

C. Nếu d qua O thì d cắt d_1. **D.** d và d_1 cắt nhau tại O.



Đáp án B.

Lời giải:

Thật vậy: $A, B \in d$.

Qua phép đối xứng tâm $O \notin d$ ta được ảnh là $A', B' \in d_1$, $AB // A'B'$.

Ví dụ 6: Mệnh đề nào sau đây là sai:

A. Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau có một tâm đối xứng.

B. Hình vuông có một tâm đối xứng.

C. Hình gồm hai đường tròn bằng nhau có một tâm đối xứng.

D. Đường elip có vô số tâm đối xứng.

Đáp án D.

Lời giải:

Đường elip chỉ có một tâm đối xứng.

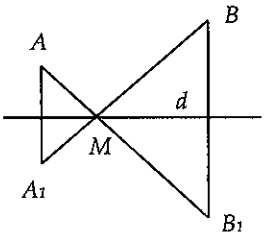
Ví dụ 7: Cho đường thẳng d và hai điểm A,B nằm cùng phía với d. Gọi A_1 đối xứng với A, B_1 đối xứng với B qua d. M là điểm trên d thỏa mãn $MA+MB$ nhỏ nhất. Chọn mệnh đề sai:

A. Góc giữa AM và d bằng góc giữa BM và d.

B. M là giao điểm của A_1B và d.

C. M là giao điểm của AB_1 và d.

D. M là giao điểm của AB và d.



Đáp án D.

Lời giải:

Với $\forall N \in d: A_1N + BN \geq A_1B$ do $A_1N = AN$, $A_1M = AM$

$\Rightarrow AN + BN = A_1N + BN \geq A_1B = A_1M + MB = AM + MB$

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv N$. Vậy $A_1B \cap d$.

Ví dụ 8: Với mọi tứ giác $ABCD$, kí hiệu S là diện tích cử tứ giác $ABCD$. Chọn mệnh đề đúng:

A. $S = \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$.

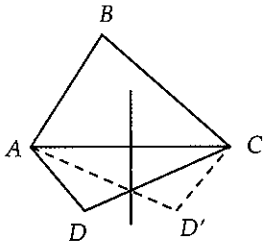
B. $S \leq \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$.

C. $S > AB.CD + BC.AD$.

D. $S \geq \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$.

Đáp án B.

Lời giải:



Sử dụng phép đối xứng trục qua đường trung trực AC $\Rightarrow S_{ABC} \leq \frac{1}{2}AB.AC$

Gọi D' đối xứng với D qua trung trực $AC \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABCD'} = S_{BAD'} + S_{BCD'}$

Do $S_{ABD'} \leq \frac{1}{2}AB.AD'$, $S_{BCD'} \leq \frac{1}{2}BC.CD'$

$\Rightarrow S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}AB.AD' + \frac{1}{2}BC.CD' = \frac{1}{2}(AB.CD + BC.AD)$

Ví dụ 9: Cho hai điểm A,B phân biệt. Gọi S_A, S_B là phép đối xứng qua A,B. Với điểm M bất kì, gọi $M_1 = S_A(M)$, $M_2 = S_B(M_1)$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M_2. Chọn mệnh đề đúng:

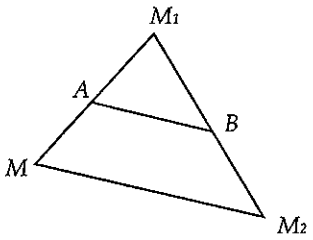
A. F không là phép dời hình.

B. F là phép đối xứng trục.

C. F là phép đối xứng tâm.

D. F là phép tịnh tiến.

Đáp án D.



Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{BM_2}$

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM_2} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1B} = 2\overrightarrow{AM_1} + 2\overrightarrow{M_1B} = 2\overrightarrow{AB}$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 10: Cho ΔABC và đường tròn tâm O. Trên đoạn AB, lấy điểm E sao cho $BE = 2AE$, F là trung điểm của AC và I là đỉnh thứ tư của hình bình

hành $AEIF$. Với mỗi điểm P trên (O) ta dựng điểm Q sao cho $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=6\overrightarrow{IQ}$. Khi đó tập hợp điểm Q khi P thay đổi là:

A. đường tròn tâm O' ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_I$.

B. đường tròn tâm O' ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_E$.

C. đường tròn tâm O' ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_F$.

D. đường tròn tâm O' ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_B$.

Đáp án A.

Lời giải:

Gọi K là điểm xác định bởi $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Mặt khác $AEIF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ nên $K\equiv I$.

Từ giả thiết $\Rightarrow 6\overrightarrow{PK}+\left(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}\right)=6\overrightarrow{IQ}\Leftrightarrow\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{IQ}$ hay $\overrightarrow{PI}=\overrightarrow{IQ}$

$\Rightarrow Đ_I(P)=Q\Rightarrow$ Khi P di động trên (O) thì Q di động trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm I.

Dạng 2 Tìm ảnh của điểm, đường qua phép đối xứng trục, đối xứng tâm bằng phương pháp tọa độ

Phương pháp:

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép đối xứng trục, đối xứng tâm.

- Sử dụng biểu thức toạ độ.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua hình qua phép đối xứng trục, đối xứng tâm.

Cách 1: Chọn hai điểm A,B phân biệt trên Δ, xác định ảnh A',B' tương ứng qua phép $Đ_a$ hoặc $Đ_I$. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A',B'.

Cách 2:

- Dựa vào vị trí tương đối của đường thẳng Δ và trục đối xứng để tìm ảnh Δ'

- Áp dụng tính chất phép đối xứng tâm biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' song song hoặc trùng với nó

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

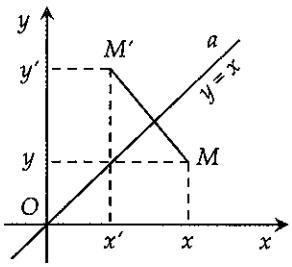
- Với mọi điểm $M(x;y)\in\Delta$ qua phép đối xứng trục hoặc đối xứng tâm sẽ biến M thành $M'(x';y')\in\Delta'$.

- Từ biểu thức toạ độ rút x,y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'.

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol...)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, qua phép đối xứng trục hoặc đối xứng tâm sẽ biến M thành $M'(x';y')$ thì M' thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$.

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép $Đ_a$ hoặc $Đ_I$ biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.



Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép biến hình $F: M(x;y) \to M'(y;x)$.

Chọn mệnh đề đúng:

A. F là phép đối xứng trục Oy.

B. F là phép đối xứng trục Ox.

C. F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

D. F là phép đối xứng với trục là đường phân giác của góc phần tư thứ hai.

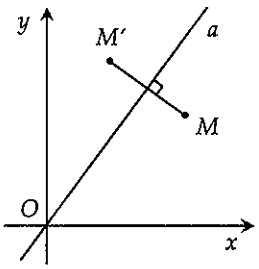
Đáp án C.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép đối xứng trục $Đ_a$ với a là đường thẳng có phương trình: $2x - y = 0$. Lấy $A(2;2)$. $Đ_a(A)$ có tọa độ bằng bao nhiêu?

A. $(-2;2)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{14}{5};\frac{2}{5}\right)$.

Đáp án C.

Lời giải:



Ta có: $Đ_a(A) = A'(x;y)$. Gọi H là trung điểm AA' $\Rightarrow H\left(\frac{x+2}{2};\frac{y+2}{2}\right)$

$\vec{n} = (2;-1)$ là vectơ pháp tuyến của a, $\overrightarrow{AA'}$ và $\vec{n}$ cùng phương và $H \in a$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x-2).1 + 2(y-2) = 0\\ 2.\frac{x+2}{2} - \frac{y+2}{2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 6\\ 2x - y = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{2}{5}\\ y = \frac{14}{5}\end{cases}.$$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-1;3)$. Tìm ảnh của A qua phép đối xứng tâm O.

A. $A'(-1;-3)$. **B.** $A'(-1;3)$. **C.** $A'(1;-3)$. **D.** $A'(1;3)$.

Đáp án C.

Lời giải:

Ta có: $Đ_O(A) = A' \Rightarrow \begin{cases}x' = 1\\ y' = -3\end{cases} \Rightarrow A'(1;-3)$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép đối xứng tâm I biến $A(1;3)$ thành $A'(5;1)$ thì I có tọa độ là:

A. $I(6;4)$. **B.** $I(4;-2)$. **C.** $I(12;8)$. **D.** $I(3;2)$.

Đáp án D.

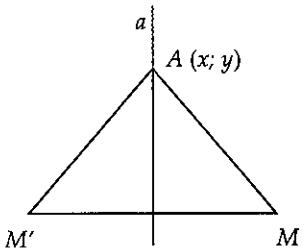
Lời giải:

Ta có: $\begin{cases}x_{A'} = 2x_I - x_A\\ y_{A'} = 2y_I - y_A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_I = 3\\ y_I = 2\end{cases}$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(1;3)$ và $M'(-1;1)$. Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành M' có trục a có phương trình:

A. $x - y + 2 = 0$. **B.** $x - y - 2 = 0$. **C.** $x + y + 2 = 0$. **D.** $x + y - 2 = 0$.

Đáp án D.



Lời giải:

Ta có a là trung trực của MM'.

Gọi $A(x;y) \in a \Leftrightarrow AM^2 = AM'^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x+y-2=0$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y-2=0$. Ảnh của d qua phép đối xứng trục tung có phương trình:

A. $x-y+2=0$. **B.** $x+y+2=0$.

C. $x+y-2=0$. **D.** $x+2y-2=0$.

Đáp án B.

Lời giải:

Lấy $M(x;y) \Rightarrow M'(-x;y)$ đối xứng với M qua Oy.

Vậy ảnh của d qua phép đối xứng trục tung là:

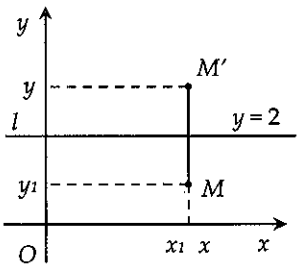
$$-x-y-2=0 \Leftrightarrow x+y+2=0.$$

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $l: y-2=0$, $d: x+2y+2=0$. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục l. Phương trình của d' là:

A. $x-2y+10=0$. **B.** $x+2y+10=0$.

C. $x-2y-10=0$. **D.** $x+2y-10=0$.

Đáp án A.



Lời giải:

Lấy $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục l là $M(x_1;y_1)$.

Với $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 4-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ y = 4-y_1 \end{cases}$

$M \in d \Leftrightarrow x+2y+2=0 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow M' \in d'$ có phương trình $x-2y+10=0$.

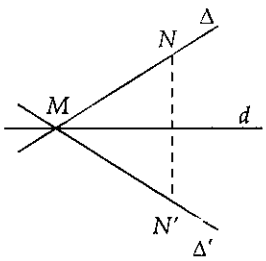
Ví dụ 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$. Tìm ảnh Δ' đối xứng với Δ qua đường thẳng $d: 3x+y-4=0$.

A. $7x-y-6=0$. **B.** $x-7y+5=0$.

C. $7x+y+6=0$. **D.** $5x-2y-6=0$.

Đáp án A.

Lời giải:



Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \Delta \cap d = M(1;1)$

Chọn $N(2;0) \in \Delta$. Gọi N' là ảnh của N qua $Đ_d$ ta tìm được $N'\left(\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{N'M} = \left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right) \Rightarrow \vec{n} = (7;-1)$ là vectơ pháp tuyến của Δ'.

Vậy phương trình đường thẳng Δ' là $7x-y-6=0$.

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ảnh của đường thẳng $d: x+2y-3=0$ qua phép đối xứng tâm $I(4;3)$ là:

A. $x+2y-17=0$. **B.** $x+2y+17=0$.

C. $x+2y-7=0$. **D.** $x+2y-15=0$.

Đáp án A.

Lời giải:

Sử dụng phương pháp quỹ tích, ta có: $Đ_I: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=8-x \\ y'=6-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-x' \\ y=6-y' \end{cases}$. Thế vào phương trình d ta có:

$8-x'+2(6-y')-3=0 \Leftrightarrow -x'-2y'+17=0 \Leftrightarrow x'+2y'-17=0$.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2-4x+5y+1=0$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua phép đối xứng trục Oy.

A. $x^2+y^2-4x-5y+1=0$. **B.** $x^2+y^2+4x+5y+1=0$.

C. $2x^2+2y^2+8x+10y-2=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-5y+1=0$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Phép đối xứng trục Oy:

$Đ_{Oy}: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$

Lời giải:

Phương pháp quỹ tích: Từ biểu thức tọa độ $Đ_{Oy}: M(x;y) \to M'(x';y') \in (C')$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=y' \end{cases} \Rightarrow (-x')^2+y'^2+4x'+5y'+1=0$

Vậy phương trình đường tròn (C') là $x^2+y^2+4x+5y+1=0$.

Ví dụ 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn

$$(C): x^2+y^2-4x-2y-4=0.$$

Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua phép đối xứng tâm $I(1;3)$.

A. $x^2+y^2-10x-16=0$. **B.** $x^2+y^2-10y-16=0$.

C. $x^2+y^2-10y+16=0$. **D.** $x^2+y^2-x-10y+9=0$.

Đáp án C.

Lời giải:

Cách 1: $Đ_I((C))=(C')$: Với mọi $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm I ta được

$M'(x';y') \in (C') \Rightarrow \begin{cases} x'=2x_I-x=2-x \\ y'=2y_I-y=6-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=6-y' \end{cases}$

Thế vào $(C) \Rightarrow (2-x')^2+(6-y')^2-4(2-x')-2(6-y')-4=0$

$\Leftrightarrow (x')^2+(y')^2-10y'+16=0$

Vậy đường tròn $(C'): x^2+y^2-10y+16=0$.

Cách 2: Đường tròn (C) có tâm $M(2;1)$, bán kính $R=3$

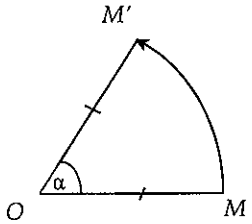
$Đ_I(M)=M' \Rightarrow M'(0;5)$

Vậy đường tròn $(C'): x^2+y^2-10y+16=0$.

Phép quay

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa



Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và $(OM', OM) = \alpha$ được gọi là phép quay tâm O góc quay α.

Kí hiệu: $Q_{(O,\alpha)}$, (O là tâm là góc quay, α là góc quay lượng giác)

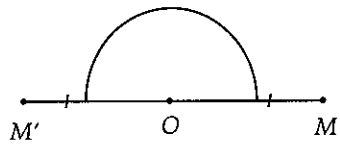
$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM', OM) = \alpha \end{cases}$$

Nhận xét:

- Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác (chiều kim đồng hồ).
- Với $k \in \mathbb{Z}$ ta luôn có:

Phép quay: $Q_{(O,\ 2k\pi)}$ là phép đồng nhất.

$Q_{(O,\ (2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm.



STUDY TIP

$\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

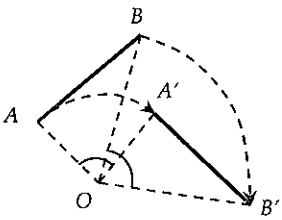
2. Tính chất

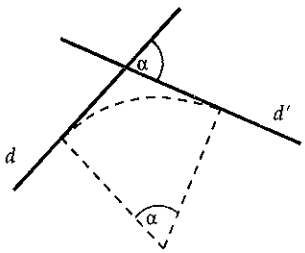
Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

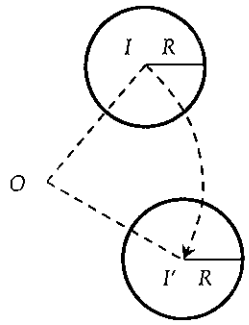
Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

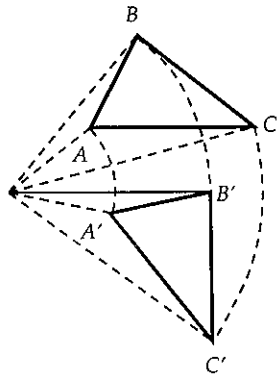
STUDY TIP

Phép quay biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự









STUDY TIP

Nếu α là đơn vị độ thì:

+ Góc $(d, d') = \alpha$ nếu $0 < \alpha < 90°$.

+ Góc $(d, d') = 180° - \alpha$ nếu $90° < \alpha < 180°$.

Nhận xét: Gọi α là góc của phép quay biến đường thẳng d thành d':

$$Q_{(O,\alpha)}(d) = d'$$

$\Rightarrow$ Góc $(d,\ d') = \alpha$ nếu $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$

Góc $(d,\ d') = \pi - \alpha$ nếu $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

3. Biểu thức tọa độ của phép quay

Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy, xét phép quay $Q_{(I,\ \varphi)}$

<u>*Trường hợp 1:*</u> Khi tâm quay I trùng với gốc tọa độ O.

Đặt $OM = r$ và góc $(Ox, OM) = \alpha \Rightarrow$ góc $(Ox, OM') = \alpha + \varphi$

STUDY TIP

- Nếu $\varphi = 90° \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

- Nếu $\varphi = -90° \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

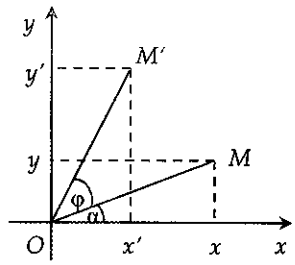
- Nếu $\varphi = 180° \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$\Rightarrow M': \begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \varphi) \\ y' = r\sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$

Hay $M': \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$ (1)

Nếu $Q_{(O,-\varphi)}: M'(x;y) \to M(x;y)$ thì:

$M: \begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$ (2)



STUDY TIP

$Q_{(I,\varphi)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow (3)$

$Q_{(I,-\varphi)}: M'(x';y') \to M(x;y) \Rightarrow (4)$

Trường hợp 2: Khi tâm quay $I(x_0;y_0)$. Ta có:

$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases}$ (3)

$\begin{cases} x - x_0 = (x' - x_0)\cos\varphi + (y' - y_0)\sin\varphi \\ y - y_0 = -(x - x_0)\sin\varphi + (y' - y_0)\cos\varphi \end{cases}$ (4)

B. Các dạng toán về phép quay

Dạng 1 Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép quay

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép quay.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép quay.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép quay.
- Các yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông...từ đó ứng dụng phép quay để giải các bài toán hình học khác...

Ví dụ 1: Giả sử $Q_{(O,\varphi)}(M) = M'$, $Q_{(O,\varphi)}(N) = N'$. Khi đó mệnh đề nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi$.
B. $MON = M'ON'$.
C. $M'N' = MN$.
D. $\Delta MON = \Delta M'ON'$.

Đáp án A.

Lời giải

$Q_{(O,\varphi)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (OM, OM') = \varphi \text{ (góc lượng giác)} \end{cases}$

Trong khi đó đáp án A: $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi$ (không là góc lượng giác)

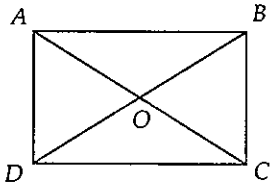
Ví dụ 2: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha \neq k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A. Không có.
B. Một.
C. Hai.
D. Vô số.

Đáp án B.

Lời giải

Khi $Q_{(O;\alpha)}(M) = M$. Khi $M \equiv O$ tâm quay.



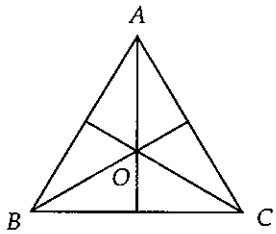
Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O, góc quay α, $0 \le \alpha \le 2\pi$, biến hình chữ nhật thành chính nó?

A. Không có. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Đáp án C.

Lời giải

Khi góc quay $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2\pi$ thì phép quay biến hình chữ nhật thành chính nó.



Ví dụ 4: Cho tam giác đều có tâm O. Phép quay tâm O, góc quay φ biến tam giác đều thành chính nó thì góc quay φ là góc nào sau đây:

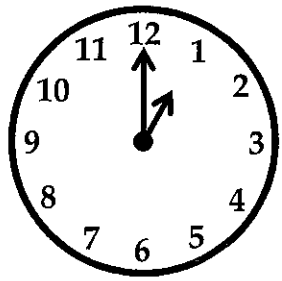
A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

$$Q_{(O,\varphi)}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (OA, OB) = \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ?



A. 360°. **B.** –360°. **C.** –180°. **D.** 720°.

Đáp án B.

Lời giải

Khi kim giờ chỉ đến một giờ đúng thì kim phút quay được đúng một vòng tức theo chiều âm và được một góc là –360°.

STUDY TIP
- Chiều dương của góc quay là chiều ngược chiều kim đồng hồ.
- Chiều âm của góc quay là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Ví dụ 6: Trong các chữ cái và số sau, dãy các chữ cái và số khi ta thực hiện phép quay tâm A, góc quay 180° thì ta được một phép đồng nhất (A là tâm đối xứng của các chữ cái hoặc số đó).

A. X, L, 6, 1, U. **B.** O, Z, V, 9, 5. **C.** X, I, O, 8, S. **D.** H, J, K, 4, 8.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $Q_{(A,180°)}(X) = X$; $Q_{(A,180°)}(I) = I$

$Q_{(A,180°)}(O) = O$; $Q_{(A,180°)}(8) = 8$

$Q_{(A,180°)}(S) = S$

STUDY TIP
Phép biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó ta được phép đồng nhất.

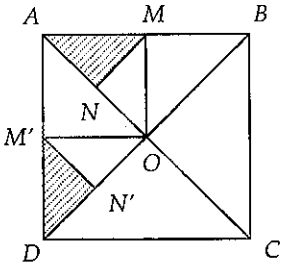
Ví dụ 7: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm OA. Tìm ảnh của ΔAMN qua phép quay tâm O góc quay 90°.

A. $\Delta BM'N'$ với M', N' lần lượt là trung điểm của BC và OB.

B. $\Delta CM'N'$ với M', N' lần lượt là trung điểm của BC và OC.

C. $\Delta DM'N'$ với M', N' lần lượt là trung điểm của DC và OD.

D. $\Delta DM'N'$ với M', N' lần lượt là trung điểm của AD và OD.



Đáp án D.

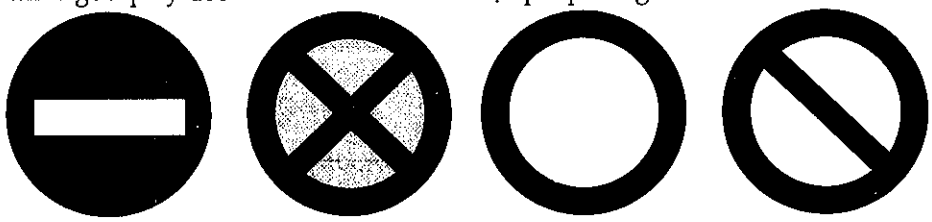
Lời giải

$Q_{(O,90^\circ)}(A) = D$

$Q_{(O,90^\circ)}(M) = M'$ là trung điểm của AD.

$Q_{(O,90^\circ)}(N) = N'$ là trung điểm của OD.

Ví dụ 8: Gọi I là tâm đối xứng của các hình A, B, C, D. Khi thực hiện phép quay tâm I góc quay 180° thì hình nào luôn được phép đồng nhất?



A. B. C. D.

STUDY TIP

Qua phép đối xứng tâm I, hình $\mathcal{H}$ biến thành chính nó thì I là tâm đối xứng của một hình.

Đáp án C.

Lời giải

Từ hình C ta có qua phép $Q_{(I,180^\circ)}$ ta luôn được một hình là chính nó.

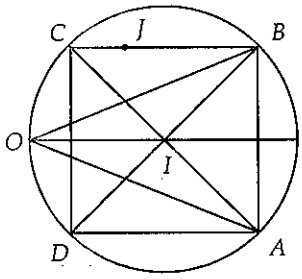
Ví dụ 9: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC, lấy $BJ = 1$. Xác định phép biến đổi $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$ (biết O là tâm quay).

A. $\overrightarrow{BJ} = Q_{(O,45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

B. $\overrightarrow{BJ} = Q_{(O,-45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

C. $\overrightarrow{BJ} = Q_{(O,135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

D. $\overrightarrow{BJ} = Q_{(O,-135^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.



Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $AI = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AI = BJ$ lại có $\left(AI, BJ\right) = 45^\circ$

$\Rightarrow BJ = Q_{(O,45^\circ)}\left(AI\right)$ tâm O là giao điểm của trung trực AB và cung chứa góc 45° đi qua A, B $\Rightarrow \overrightarrow{BJ} = Q_{(O,45^\circ)}\left(\overrightarrow{AI}\right)$.

Ví dụ 10: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d, M là điểm di động trên d. Tìm tập hợp điểm N sao cho ΔOMN đều.

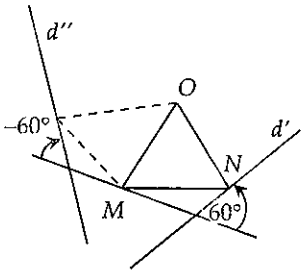
A. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$.

B. N chạy trên d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,-60^\circ)}$.

C. N chạy trên d' và d'' lần lượt là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,60^\circ)}$ và $Q_{(O,-60^\circ)}$.

D. N là ảnh của O qua phép quay $Q_{(O;60^\circ)}$.

Đáp án C.



Lời giải

ΔOMN đều $\Rightarrow OM = ON$ và $NOM = 60°$.

Vì vậy khi M chạy trên d thì N chạy trên d' là ảnh của d qua $Q_{(O,60°)}$ và N chạy trên d'' là ảnh của d qua $Q_{(O,-60°)}$.

Dạng 2 Xác định ảnh của điểm, đường qua phép quay bằng phương pháp tọa độ

Phương pháp:

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép quay.

- Sử dụng biểu thức toạ độ trong các trường hợp đã nêu.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép quay.

Cách 1: Chọn hai điểm A, B phân biệt trên Δ, xác định ảnh A', B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A', B'.

Cách 2: Áp dụng tính chất phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có góc $(\Delta, \Delta') = \alpha$ hoặc $\pi - \alpha$ (α đơn vị radian)

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

- Với mọi điểm $M(x;y) \in \Delta : Q_{(O,\alpha)}(M) = M'(x';y')$ thì $M' \in \Delta'$.

- Từ biểu thức toạ độ rút x, y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol....)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, $Q_{(O,\alpha)}(M) = M'(x';y')$ thì M' thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, qua phép quay tâm O, góc quay $90°$ biến điểm $M(-3;5)$ thành điểm nào?

A. $(3;4)$. B. $(-5;-3)$. C. $(5;-3)$. D. $(-3;-5)$.

Đáp án B.

STUDY TIP

$Q_{(O,90°)} : M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

Lời giải

Cách 1: Dùng biểu thức tọa độ $\Rightarrow M' : \begin{cases} x' = -5 \\ y' = -3 \end{cases}$

Cách 2: Vẽ biểu diễn tọa độ của điểm trên hệ trục Oxy $\Rightarrow M'(-5;3)$.

Cách 3: Ta có:

$$Q_{(O;90°)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{34} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ -3x' + 5y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -5 \\ y' = -3 \end{cases}$$

Nhận xét: Độc giả vận dụng cách 1 nhanh hơn, các cách 2 và cách 3 khá dễ hiểu nhưng dài hơn.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Hỏi điểm nào sau đây là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay $45°$?

A. $M'(0;\sqrt{2})$. **B.** $M'(\sqrt{2};0)$. **C.** $M'(0;1)$. **D.** $M'(1;-1)$.

STUDY TIP

$Q_{(O,\varphi)}: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Theo biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'(0;\sqrt{2})$.

Cách 2: $Q_{(O,45°)}: M(x;y) \to M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = 45° \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{x'^2+y'^2} \\ \cos 45° = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}.\sqrt{x'^2+y'^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'^2+y'^2 = 2 \\ x'+y' = \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải hệ trên $\Rightarrow M(0;\sqrt{2})$.

STUDY TIP

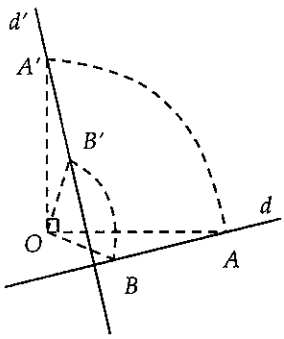
Góc giữa 2 vectơ:

$\cos\varphi = \dfrac{x.x' + y.y'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $5x - 3y + 15 = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O,90°)}$ với O là gốc tọa độ.

A. $5x - 3y + 6 = 0$. **B.** $3x + 5y + 15 = 0$.

C. $5x + y - 7 = 0$. **D.** $-3x + 5y + 7 = 0$.



Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Chọn $A(0;5) \in d$, $B(-3;0) \in d$

$Q_{(O,90°)}(A) = A'(-5;0) \in d'$

$Q_{(O,90°)}(B) = B'(0;-3) \in d'$

Đường thẳng d' là đường thẳng $A'B': 3x + 5y + 15 = 0$.

Cách 2: Vì góc quay là $90° \Rightarrow d \perp d' \Rightarrow d'$ có dạng: $3x + 5y + c = 0$

Chọn $A(0;5) \in d$ qua phép quay $Q_{(O,90°)}$ ta được $A'(-5;0) \in d' \Rightarrow c = 15$.

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

Với mọi điểm $M(x;y) \in d$ ta có $Q_{(O,90°)}(M) = M(x';y') \in d'$

Từ biểu thức toạ độ $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$ Thế x, y và phương trình đường thẳng d ta được $d': 3x + 5y + 15 = 0$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua phép quay $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$.

$Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}(I)=I'\Rightarrow I'(-2;-1)$

Đường tròn (C') có tâm $I'(-2;-1)$ và bán kính $R'=R=3$ có phương trình:

$$(x+2)^2+(y+1)^2=9.$$

Cách 2: Phương pháp quỹ tích

Ta có: $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}: M(x;y)\to M'(x';y')$ với $\forall M\in(C)\Rightarrow M'\in(C')$

Từ biểu thức tọa độ: $\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y'\\y=x'\end{cases}$

Thế vào $(C):(-y')^2+(x')^2+2y'+4x'-4=0$

$\Leftrightarrow(x')^2+(y')^2+4x'+2y'-4=0$

$\Leftrightarrow(x'+2)^2+(y'+1)^2=9.$

STUDY TIP

Phép quay biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(-2;3)$, $A'(1;5)$ và $B(5;-3)$, $B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B', ta có $x+y$ bằng:

A. –1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** –3.

Đáp án D.

Lời giải

$Q_{(I,\alpha)}(A)=A'\Rightarrow IA=IA'$ (1)

$Q_{(I,\alpha)}(B)=B'\Rightarrow IB=IB'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(-2-x)^2+(3-y)^2}=\sqrt{(1-x)^2+(5-y)^2}\\\sqrt{(5-x)^2+(-3-y)^2}=\sqrt{(7-x)^2+(-2-y)^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+4y=13\\4x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{25}{2}\\y=-\dfrac{31}{2}\end{cases}\Rightarrow x+y=-3.$

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép quay

Câu 1: Cho 2 đường thẳng bất kì d và d'. Có bao nhiêu phép quay biến đường thẳng d thành đường thẳng d'?

A. không có phép nào. B. có 1 phép duy nhất.
C. chỉ có 2 phép. D. có vô số phép.

Câu 2: Cho hình vuông tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α, $0 \le \alpha < 2\pi$ biến hình vuông thành chính nó?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 3: Gọi d' là ảnh của d qua phép quay tâm I góc quay φ (biết I không nằm trên d), đường thẳng d' song song với d khi:

A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$. B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$. C. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. D. $\varphi = -\pi$.

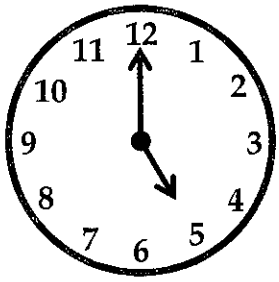
Câu 4: Cho hai đường tròn cùng bán kính (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau. Có bao nhiêu phép quay góc $90°$ biến đường tròn (O) thành (O')?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm O góc quay $120°$.

A. ΔAOB. B. ΔBOC. C. ΔDOC. D. ΔEOD.

Câu 6: Chọn 12 giờ làm mốc, khi đồng hồ chỉ năm giờ đúng thì kim giờ đã quay được một góc bao nhiêu độ?



A. $270°$. B. $-360°$. C. $-150°$. D. $135°$.

Câu 7: Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 biết $Q_{(O;-120°)}(\Delta_1) = \Delta_2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $(\Delta_1, \Delta_2) = 120°$. B. $\Delta_1 // \Delta_2$.
C. $(\Delta_1, \Delta_2) = -120°$. D. $(\Delta_1, \Delta_2) = 60°$.

Câu 8: Cho hai điểm phân biệt A, B và $Q_{(A,30°)}(B) = C$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $ABC = 30°$. B. $ABC = 90°$.
C. $ABC = 45°$. D. $ABC = 75°$.

Câu 9: Cho hai điểm phân biệt I, M và $Q_{(I,-32\pi)}(M) = N$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm của đoạn IN.
B. N là trung điểm của đoạn IM.
C. I là trung điểm của đoạn MN.
D. $M \equiv N$.

Câu 10: Cho ΔABC đều (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai?

A. $Q_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$. B. $Q_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(C) = B$.
C. $Q_{\left(A,\frac{7\pi}{3}\right)}(C) = B$. D. $Q_{\left(B,-\frac{7\pi}{3}\right)}(A) = C$.

Câu 11: Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai?

A. $Q_{(I,90°)}(\Delta IBC) = \Delta ICD$.
B. $Q_{(I,-90°)}(\Delta IBC) = \Delta IAB$.
C. $Q_{(I,180°)}(\Delta IBC) = \Delta IDA$.
D. $Q_{(I,360°)}(\Delta IBC) = \Delta IDA$.

Câu 12: Gọi I là tâm ngũ giác đều $ABCDE$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai?

A. $Q_{(I,144°)}(CD) = EA$. B. $Q_{(I,72°)}(AB) = BC$.
C. $Q_{(I,144°)}(AB) = DE$. D. $Q_{(I,72°)}(CD) = BC$.

Câu 13: Gọi I là tâm lục giác đều $ABCDEF$ (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây là sai?

A. $Q_{(I,-120°)}(\Delta IED) = \Delta IBA$.
B. $Q_{(I,-60°)}(\Delta IAB) = \Delta IBC$.
C. $Q_{(I,60°)}(AB) = BC$.
D. $Q_{(I,180°)}(\Delta ICD) = \Delta IFA$.

Câu 14: Cho hai tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Xác định dạng của tam giác $\Delta GOG'$.

A. cân. B. vuông.
C. vuông cân. D. đều.

Câu 15: Cho 3 điểm A, B, C, điểm B nằm giữa A và C. Dựng về phía đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Xác định dạng của ΔBMN.

A. cân. B. vuông.

C. vuông cân. D. đều.

Câu 16: Cho đường thẳng d và điểm O cố định không thuộc d. M là điểm di động trên d. Xác định quỹ tích điểm N sao cho ΔOMN đều.

A. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,60^\circ)}(d)$.

B. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,180^\circ)}(d)$.

C. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,120^\circ)}(d)$.

D. $N \in d'$ với $d' = Q_{(O,-120^\circ)}(d)$.

Câu 17: Cho hình vuông $ABCD$, $M \in BC$, $K \in DC$ sao cho $BAM = MAK$. Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $AD = AK - KD$. B. $AB = AM + DK$.

C. $AK = BM + KD$. D. $AM = BM + AB$.

Câu 18: Cho ΔABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông $BCIJ$, $ACMN$. Gọi O, P lần lượt là tâm đối xứng của chúng, D là trung điểm của AB. Xác định dạng của ΔDOP.

A. cân. B. vuông.

C. vuông cân. D. đều.

Dạng 2: Xác định ảnh của điểm, đường qua phép quay bằng phương pháp tọa độ

Câu 19: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,90^\circ)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. B. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. D. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,-90^\circ)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$. B. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$. D. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Câu 21: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O,\varphi)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = x\sin\varphi - y\cos\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \end{cases}$.

Câu 22: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(4;1)$. Tọa độ $A' = Q_{(O,-90^\circ)}(A)$ là:

A. $(-1;4)$. B. $(1;-4)$. C. $(4;-1)$. D. $(-4;-1)$.

Câu 23: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của $A' = Q_{(O,60^\circ)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. B. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. D. $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$.

Câu 24: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm $I(1;2)$, biết điểm $A(4;5)$. Khi đó với $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $D(x_D;y_D)$ thì $x_B.x_C.x_D$ bằng:

A. 12. B. 8. C. 16. D. 32.

Câu 25: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y+1=0$, điểm $I(1;-2)$, phép quay $Q_{(I,90^\circ)}(d) = d'$. Xác định phương trình đường thẳng d'.

A. $-x+y-2=0$. B. $x-y-1=0$.

C. $x-y+3=0$. D. $x-y-3=0$.

Câu 26: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(0;3)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O,-45^\circ)}$.

A. $A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. B. $A'\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$.

C. $A'\left(\frac{-3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. D. $A'\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm phép quay Q biến điểm $A(-1;5)$ thành điểm $A'(5;1)$.

A. $Q_{(O,-90^\circ)}(A) = A'$. B. $Q_{(O,90^\circ)}(A) = A'$.

C. $Q_{(O,180^\circ)}(A) = A'$. D. $Q_{(O,-270^\circ)}(A) = A'$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, có phép quay tâm O góc quay α biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y; \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$. Tìm α.

A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. B. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. C. $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. D. $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 29: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $I(2;1)$ và đường thẳng $d: 2x+3y+4=0$. Tìm ảnh của d qua $Q_{(I,45^\circ)}$.

A. $-x+5y-2+3\sqrt{2}=0.$

B. $-x+5y-3+10\sqrt{2}=0.$

C. $x-5y+3+\sqrt{2}=0.$

D. $-x+5y-3+11\sqrt{2}=0.$

Câu 30: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x+5=0$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua $Q_{(O,90°)}$.

A. $x^2+(y-3)^2=4.$ B. $x^2+y^2+6y-6=0.$

C. $x^2+(y+3)^2=4.$ D. $x^2+y^2+6x-5=0.$

Câu 31: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép quay tâm O góc quay $45°$ $Q_{(O,45°)}$. Tìm ảnh của đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=4$.

A. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4.$

B. $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4.$

C. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4.$

D. $x^2+y^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2=0.$

Câu 32: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, viết phương trình các cạnh AC, BC của ΔABC biết $A(1;2)$, $B(3;4)$ và $\cos A=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

A. $AC: x-y-1=0,\ BC: x-y+5=0.$

B. $AC: 3x-y-2=0,\ BC: x-2y+3=0.$

C. $AC: 3x-y-1=0,\ BC: x-2y+5=0.$

D. $AC: 3x-y-4=0,\ BC: x-2y+2=0.$

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép quay

Câu 1: Đáp án D.

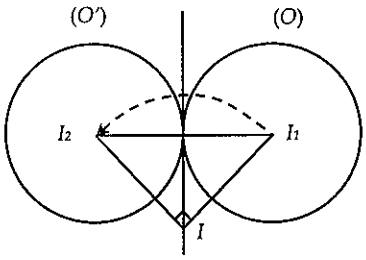
Câu 2: Đáp án D.

Thật vậy các phép quay biến hình vuông thành chính nó: $Q_{(O,0°)}$, $Q_{(O,90°)}$, $Q_{(O,180°)}$, $Q_{(O,270°)}$.

Câu 3: Đáp án D.

Khi $\varphi = -\pi$, phép quay trở thành phép đối xứng tâm $I \Rightarrow d // d'$.

Câu 4: Đáp án B.



Gọi I là tâm phép quay, I_1, I_2 là tâm các đường tròn (O) và (O'). $Q_{(I,90°)}(I_1) = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} II_1 = II_2 \\ (II_1, II_2) = 90° \end{cases}$

Vậy chỉ có 1 phép quay thỏa mãn.

Câu 5: Đáp án D.

$Q_{(0,120°)}(A) = E$

$Q_{(0,120°)}(F) = D \Rightarrow Q_{(0,120°)}(\Delta AOF) = \Delta EOD$.

$Q_{(0,120°)}(O) = O$

Câu 6: Đáp án C.

Khi kim giờ chỉ đến năm giờ đúng thì kim giờ quay được đúng $-150°$ tức theo chiều âm.

Câu 7: Đáp án D.

Vì góc quay $120°$ nên góc giữa 2 đường thẳng là: $180° - 120° = 60°$.

Câu 8: Đáp án D.

Câu 9: Đáp án D.

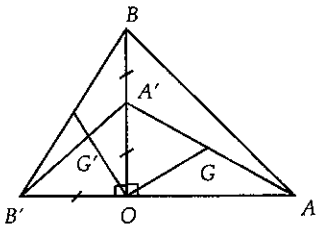
Câu 10: Đáp án C.

Câu 11: Đáp án D.

Câu 12: Đáp án C.

Câu 13: Đáp án B.

Câu 14: Đáp án C.



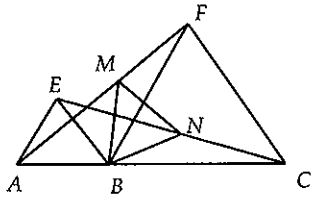
$Q_{(O,90°)}(A) = B$

$Q_{(O,90°)}(A') = B'$ $\Rightarrow Q_{(O,90°)}(\Delta OAA') = \Delta OBB'$

$\Rightarrow Q_{(O,90°)}(G) = G'$

Do đó $OG = OG'$ và $GOG' = 90°$.

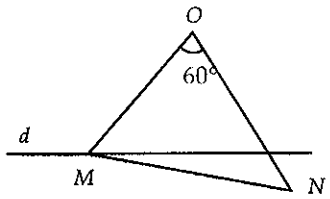
Câu 15: Đáp án D.



Phép quay tâm B góc quay $60°$ biến các điểm E, C lần lượt thành A, F, biến đoạn EC thành AF nên biến trung điểm N của EC thành trung điểm M của AF $\Rightarrow BN = BM$ và $(BN, BM) = 60°$

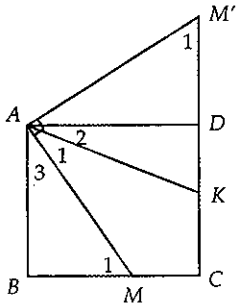
$\Rightarrow \Delta BMN$ đều.

Câu 16: Đáp án A.



Vì ΔOMN đều và O cố định $\Rightarrow N = Q_{(O,60°)}(M)$.

Câu 17: Đáp án C.



Ta có: $Q_{(A,90°)}: B \to D$; $Q_{(A,90°)}: M \to M'$

$\Rightarrow Q_{(A,90°)}: BM \to DM' \Rightarrow BM = DM'$

Vậy $BM + KD = DM' + KD$.

Cần chứng minh: M', D, K thẳng hàng và $\Delta AKM'$ cân tại K $\Rightarrow DM' + KD = KM'$

Thật vậy: $Q_{(A,90°)}(BM) = DM' \Rightarrow BM \perp DM'$

Mà $BM // AD \Rightarrow AD \perp DM' \Rightarrow ADM' = 90°$

$\Rightarrow M', D, K$ thẳng hàng

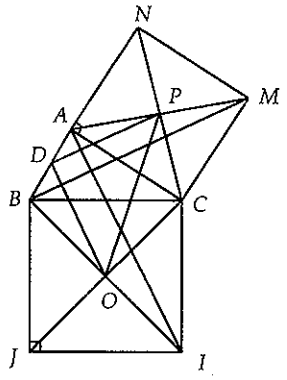
Ta có: $Q_{(A,90°)}: \Delta ABM \to \Delta ADM' \Rightarrow M_1 = M_1'$

Có $M'AK + A_1 = 90° \Rightarrow M'AK + A_3 = 90°$ (cho $A_1 = A_3$)

$\Rightarrow M'AK = M_1 \Rightarrow \Delta AKM$ cân tại K

$\Rightarrow KM' = KD + DM' = KA \Rightarrow KD + BM = AK$.

Câu 18: Đáp án C.



Ta có: $Q_{(C,90°)}: M \to A;\ B \to I$

$\Rightarrow Q_{(O,90°)}: MB \to AI \Rightarrow MB = AI$

Mà $\begin{cases} DP \,//\, BM \text{ và } DP = \dfrac{1}{2}BM \\ DO \,//\, AI \text{ và } DO = \dfrac{1}{2}AI \end{cases}$

$\Rightarrow DO = DP$ và $DO \perp DP$

$\Rightarrow \Delta DOP$ là tam giác vuông cân.

Dạng 2: Xác định ảnh của một điểm hoặc một hình qua phép quay bằng phương pháp tọa độ

Câu 19: Đáp án B.

Câu 20: Đáp án A.

Câu 21: Đáp án A.

Câu 22: Đáp án B.

Câu 23: Đáp án A.

Vận dụng biểu thức tọa độ của phép quay tâm O và góc quay φ ta được đáp án A.

Câu 24: Đáp án C.

Ta có: $Q_{(I,90°)}(A) = B \Rightarrow B(-2;5)$

I là trung điểm $AC \Rightarrow C(-2;-1)$

I là trung điểm $BD \Rightarrow D(4;-1)$

$\Rightarrow x_B.x_C.x_D = 16$.

Câu 25: Đáp án D.

Ta có: $I \in d \Rightarrow I \in d'$

Đường thẳng d' có dạng: $x - y + c = 0$

Vì d' đi qua I nên $1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3$

$\Rightarrow d': x - y - 3 = 0$.

Câu 26: Đáp án D.

Áp dụng biểu thức tọa độ $\Rightarrow A'\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có: $\begin{cases} OA = OA' = \sqrt{26} \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \end{cases} \Rightarrow Q_{(O,-90°)}(A) = A'$

(Do A nằm ở góc phần tư thứ hai, A' nằm ở góc phần tư thứ nhất).

Câu 28: Đáp án B.

Theo biểu thức tọa độ: $\begin{cases} x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \\ y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \end{cases}$

Do giá trị tọa độ M' $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Câu 29: Đáp án D.

Chọn hai điểm $M(-2;0),\ N(1;-2) \in d$

Gọi $M'(x_1;y_1)$ và $N'(x_2;y_2)$ là ảnh của M,N qua $Q_{(I,45°)}$. Áp dụng biểu thức tọa độ:

$\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' - y_0 = (y - y_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases}$

$\Rightarrow M'\left(2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2};1 - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right),\ N'\left(2 + \sqrt{2};1 - 2\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(5;1)$

Gọi $d' = Q_{(I,45°)}(d) \Rightarrow d'$ đi qua M',N' và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5;1)$

$\Rightarrow$ Phương trình d': $-x + 5y - 3 + 11\sqrt{2} = 0$.

Câu 30: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;0)$ và bán kính $R = 2$

$Q_{(O,90°)}(I) = I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -3 \end{cases}$

Phương trình đường tròn (C'): $x^2 + (y+3)^2 = 4$.

Câu 31: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = 2$

$Q_{(O,45°)}(I) = I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 1.\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = 1.\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Phương trình đường tròn: $\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$.

Câu 32: Đáp án C.

Sử dụng tính chất của phép quay tâm $I(a;b) \in d$: $Ax + By + C = 0$ thành d' có phương trình:

$(A - B\tan\varphi)(x - a) + (A\tan\varphi + B)(y - b) = 0$.

Khi đó ta được phương trình:

$AC: 3x - y - 1 = 0,\ BC: x - 2y + 5 = 0$.

Phép dời hình và hai hình bằng nhau

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nhận xét:

- Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay là những phép dời hình.
- Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

STUDY TIP

Phép dời hình F:

$$\begin{matrix} F(M)=M' \\ F(N)=N' \end{matrix} \Rightarrow M'N'=MN$$

2. Tính chất

Phép dời hình:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

c) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

STUDY TIP

a) Nếu phép dời hình $F:\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp của ΔABC thành tương ứng của $\Delta A'B'C'$.

b) Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

3. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia

B. Các bài toán về phép dời hình

Ví dụ 1: Phép biến hình nào sau đây là một phép dời hình?

A. Phép biến mọi điểm M thành điểm M' sao cho O là trung điểm MM', với O là điểm cố định cho trước.

B. Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d.

C. Phép biến mọi điểm M thành điểm O cho trước.

D. Phép biến mọi điểm M thành điểm M' là trung điểm của đoạn OM, với O là một điểm cho trước.

Đáp án A.

Lời giải

Với mọi điểm A,B tương ứng có ảnh A',B' qua phép biến hình với quy tắc O là trung điểm tương ứng $\Rightarrow AB=A'B'$ $\Rightarrow$ Đây là phép dời hình.

STUDY TIP

Một quy tắc là phép dời hình khi:

- Với mỗi một điểm M luôn tồn tại ảnh và duy nhất qua quy tắc tương ứng.
- Bảo toàn khoảng cách qua quy tắc đó.

Ví dụ 2: Xét hai phép biến hình sau:

(I) Phép biến hình $F_1: M_1(x_1;y_1) \to M_1'(-y_1;x_1)$

(II) Phép biến hình $F_2: M_2(x_2;y_2) \to M_2'(2x_2;2y_2)$

A. Chỉ phép biến hình (I).

B. Chỉ phép biến hình (II).

C. Cả hai phép biến hình (I) và (II).

D. Cả hai phép biến hình (I) và (II) đều không là phép dời hình.

Đáp án A.

Lời giải

Chọn hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N,y_N)$ bất kì.

$$\begin{matrix} F_1(M)=M'(-y_M;x_M) \\ F_1(N)=N'(-y_N;x_N) \end{matrix} \Rightarrow AB=A_1B_1=\sqrt{(x_M-x_N)^2+(y_M-y_N)^2}$$

Xét tương tự với phép biến hình F_2 không là phép dời hình.

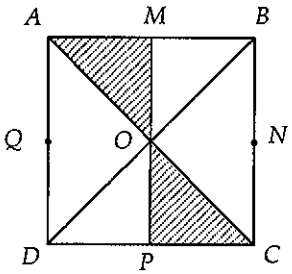
Ví dụ 3: Cho hình vuông tâm O, gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA. Phép dời hình nào sau đây biến ΔAMO thành ΔCPO?

A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AM}$.

B. Phép đối xứng trục MP.

C. Phép quay tâm A góc quay $180°$.

D. Phép quay tâm A góc quay $-180°$.



Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} Q_{(O,-180°)}(A)=C \\ Q_{(O,-180°)}(M)=P \\ Q_{(O,-180°)}(O)=O \end{cases} \Rightarrow Q_{(O,-180°)}:\Delta AMO\to\Delta CPO \Rightarrow \Delta AMO=\Delta CPO.$

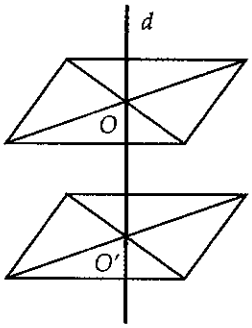
Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành. Hãy chỉ ra một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

A. Đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.

B. Đường thẳng đi qua hai đỉnh của hai hình bình hành.

C. Đường thẳng đi qua tâm của hình bình hành thứ nhất và một đỉnh của hình bình hành còn lại.

D. Đường chéo của một trong hai hình bình hành đó.



Đáp án A.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-3;2)$, $B(4;5)$, $C(-1;3)$. Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc $-90°$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(0;1)$. Khi đó tọa độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$ là:

A. $A_1(1;2)$, $B_1(-1;4)$, $C_1(3;5)$.

B. $A_1(2;-3)$, $B_1(5;-4)$, $C_1(3;-1)$.

C. $A_1(5;-4)$, $B_1(2;-3)$, $C_1(3;-1)$.

D. $A_1(2;4)$, $B_1(5;-3)$, $C_1(3;2)$.

Đáp án D.

Lời giải

$Q_{(O,-90°)}:\Delta ABC\to\Delta A'B'C' \Rightarrow A'(2;3)$, $B'(5;-4)$, $C'(3;1)$.

$T_{\vec{v}}:\Delta A'B'C'\to\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow A_1(2;4)$, $B_1(5;-3)$, $C_1(3;2)$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x+y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;1)$ và phép quay tâm O góc quay $180°$.

A. $-6x-2y-7=0$.

B. $-3x-y+8=0$.

C. $3x+y-6=0$.

D. $6x+2y-15=0$.

Đáp án B.

STUDY TIP

$Q_{(O,180^\circ)}: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

(là phép đối xứng tâm)

Lời giải

$T_v(d) = d', \quad Q_{(O,180^\circ)}(d') = d''$

$\Rightarrow d'$ có dạng: $3x + y + c = 0$

Chọn $M(0;-3) \in d \Rightarrow T_v(M) = M'(-2;-2) \in d'$

$\Rightarrow c = 8 \Rightarrow d': 3x + y + 8$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $d'': -3x - y + 8 = 0$.

Ví dụ 7: Nếu thực hiện liên tiếp hai phép quay cùng tâm $Q_{(O,\varphi_1)}$ và $Q_{(O,\varphi_2)}$ thì kết quả là:

A. một phép đồng nhất.

B. phép tịnh tiến.

C. phép quay tâm O góc quay là $\varphi_1 + \varphi_2$.

D. phép quay tâm O góc quay là $|\varphi_1 + \varphi_2|$.

Đáp án C.

STUDY TIP

Nếu phép quay tâm O là gốc tọa độ thì:

$Q_{(O,\varphi_2)} \cdot Q_{(O,\varphi_1)} = Q_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}$

Lời giải

Gọi $M' = Q_{(O,\varphi_1)}(M), \quad M'' = Q_{(O,\varphi_2)}(M')$

Ta có: $OM' = OM$, $(OM, OM') = \varphi_1$ và $OM'' = OM'$, $(OM', OM'') = \varphi_2$.

$\Rightarrow OM'' = OM$ và $(OM'', OM) = \varphi_1 + \varphi_2$ hay $Q_{(O,\varphi_1+\varphi_2)}(M) = M''$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Phép biến hình nào sau đây là một phép dời hình?

A. Phép đồng nhất.

B. Phép chiếu lên một đường thẳng d.

C. Phép biến mọi điểm M thành điểm O cho trước.

D. Phép biến mọi điểm M thành điểm là trung điểm của đoạn OM với O là điểm cho trước.

Câu 2: Phép biến hình F là phép dời hình khi và chỉ khi:

A. F biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

B. F biến đường thẳng thành chính nó.

C. F biến đường thẳng thành đường thẳng cắt nó.

D. F biến tam giác thành tam giác bằng nó.

Câu 3: Cho hai phép biến hình:

$F_1: M(x;y) \to M'(x+1;y-3)$

$F_2: M(x;y) \to M'(-y;x)$

Phép biến hình nào trong hai phép biến hình trên là phép dời hình?

A. Chỉ phép biến hình F_1.

B. Chỉ phép biến hình F_2.

C. Cả hai phép biến hình F_1 và F_2.

D. Cả hai phép biến hình F_1 và F_2 đều không là phép dời hình.

Câu 4: Cho một ngũ giác đều và một phép dời hình f. Biết rằng $f(A)=C, f(E)=B$ và $f(D)=A$. Ảnh của điểm C là:

A. A. B. B. C. C. D. E.

Câu 5: Cho hình chữ nhật và một phép dời hình F trong mặt phẳng. Biết rằng qua phép dời hình F, tam giác ABC biến thành tam giác BAD, tam giác ADC biến thành tam giác nào sau đây?

A. CBA. B. BCD. C. DAB. D. BMD.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phép biến hình F: $M(x;y) \to M'\left(\frac{1}{2}x;my\right)$. Với giá trị nào của m thì F là phép dời hình?

A. $m=2$. B. $m=-2$.

C. $m=1$. D. không tồn tại m.

Câu 7: Cho hai điểm phân biệt A, B và F là phép dời hình, biết $F(A)=A$; $F(B)=B$. Giả sử N thuộc đường thẳng AB, $N \neq A$, $N \neq B$ và $F(N)=M$. Chọn khẳng định đúng?

A. $M \equiv A$. B. $M \equiv B$.

C. $M \equiv N$. D. Các khẳng định trên đều sai.

Câu 8: Cho ΔABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{CM}$. F là phép dời hình. Gọi $F(A)=A_1$; $F(B)=B_1$; $F(C)=C_1$; $F(M)=M_1$ biết $AB=4, BC=5, CA=6$. Độ dài đoạn A_1M_1 bằng:

A. 116. B. $\sqrt{106}$. C. 57. D. 74.

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hai hình bằng nhau thì luôn phải trùng khít lên nhau.

B. Hai hình bằng nhau khi có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

C. Gọi A, B tương ứng là tập hợp điểm của hình H và H'.

D. Hai hình trùng khít lên nhau thì luôn phải bằng nhau.

Câu 10: Cho hai điểm A, B và phép dời hình F thỏa mãn: $F(A)=A$; $F(B)=B$. Gọi C là điểm không thuộc đường thẳng AB. Biết $F(C)$ và C nằm cùng phía với AB. Với mọi M bất kì chọn khẳng định đúng:

A. $F(M)$ và M đối xứng với nhau qua AB.

B. $F(M)$ và M đối xứng với nhau qua BC.

C. $F(M)=M$ với mọi M.

D. $F(M)=A$.

Câu 11: Trong mặt phẳng xét hình (H) là hình gồm hai đường tròn tâm O và tâm O' có bán kính tương ứng là R và R' (với $R>R'$). Khi đó:

A. đường nối tâm OO' sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.

B. Đường vuông góc với đường nối tâm OO' và đi qua trung điểm của OO' sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.

C. Đường nối hai điểm bất kì A, B (không trùng với OO') với A thuộc (O), B thuộc (O') sẽ chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.

D. Mỗi đường thẳng bất kì đi qua O hoặc O' chia hình (H) thành hai phần bằng nhau.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO$. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

A. Hai hình thang $AEJK$ và $FOIC$ bằng nhau.

B. Hai hình thang $BEJO$ và $FOIC$ bằng nhau.

C. Hai hình thang $AEJK$ và $DHOK$ bằng nhau.

D. Hai hình thang $BJEF$ và $ODKH$ bằng nhau.

Câu 13: Cho phép dời hình:

$$F: M(x;y) \to M'(x-3;y+1).$$

Xác định ảnh của đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-2)^2=2$ qua phép dời hình F.

A. $(x-4)^2+(y+3)^2=2$. B. $(x+2)^2+(y-1)^2=2$.

C. $(x+4)^2+(y-3)^2=2$. D. $(x-2)^2+(y+1)^2=2$.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho các phép dời hình:

$$F_1: M(x;y) \to M'(x+2;y-4)$$
$$F_2: M(x;y) \to M'(-x;-y)$$

Tìm tọa độ ảnh của điểm $A(4;-1)$ qua F_1 rồi đến F_2, nghĩa là $F_2[F_1(A)]$.

A. $(4;1)$. B. $(0;5)$. C. $(-6;5)$. D. $(6;5)$.

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là sai:

Phép biến hình thực hiện:

A. qua hai phép đối xứng trục có các trục cắt nhau là một phép quay.

B. qua hai phép tịnh tiến ta được một phép tịnh tiến.

C. qua hai phép đối xứng tâm ta được phép tịnh tiến hoặc đối xứng tâm.

D. qua hai phép quay ta luôn được một phép đồng nhất.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

Phép đồng nhất bảo toàn khoảng cách hai điểm bất kì.

Câu 2: Đáp án D.

F biến tam giác thành tam giác bằng nó tức bảo toàn khoảng cách hay độ dài các cạnh.

Câu 3: Đáp án C.

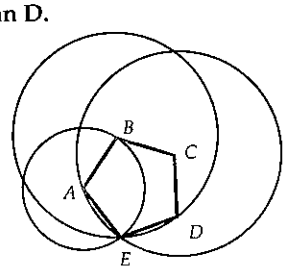
Xét hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ qua hai phép biến hình F_1 và F_2. Với phép biến hình F_1:

$A \to A(x_A+1;y_A-3)$; $B \to B'(x_B+1;y_B-3)$

$\Rightarrow AB = A'B' = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Tương tự với phép biến hình F_2 thì $AB = A'B'$ nên ta chọn đáp án C.

Câu 4: Đáp án D.



Nếu $M = f(C)$ ta có $CA = CM$ (do $f(A) = C$) (1)

$CE = MB$ (do $f(E) = B$) (2)

$CD = MA$ (do $f(D) = A$) (3)

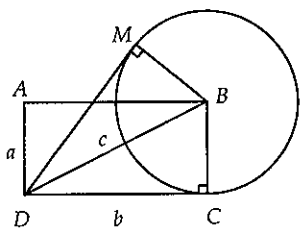
(1) $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm C bán kính CA.

(2) $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm B bán kính $CE = BE$.

(3) $\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn tâm A bán kính $CD = AE$.

Vậy $M \equiv E$.

Câu 5: Đáp án B.



Theo giả thiết: $F: \Delta ABC \to \Delta BAD$

$\Rightarrow F(A) = B;\ F(B) = A;\ F(C) = D.$

Ta xác định ảnh của D qua phép dời hình F.

Giả sử $F(D) = E$, ta có $AD = BE, BD = AE, CD = DE$

Vậy điểm E là điểm chung của ba đường tròn. Đường tròn tâm B bán kính AD, tâm A bán kính BD và tâm D bán kính b.

Vậy $E \equiv C$ hay $F(D) = C \Rightarrow \Delta ADC \to \Delta BCD$ qua F.

Câu 6: Đáp án D.

Lấy $O(0;0); A(2;2)$ ta có:

$F(O) = O;\ F(A) = A'(1;2m)$

F là phép dời hình $\Leftrightarrow OA^2 = OA'^2$

$\Leftrightarrow 8 = 1+4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{7}{4}$

Lấy điểm $B(2;1) \Rightarrow F(B) = B'(1;m)$

$OB^2 = OB'^2 \Leftrightarrow 5 = 1+m^2 \Leftrightarrow 5 = 1+\dfrac{7}{4}$ (vô lí)

$\Rightarrow OB \neq OB'$. Nên F không là phép dời hình.

Câu 7: Đáp án C.

Ta có $F(AB) = AB \Leftrightarrow F$ là phép đồng nhất $\Rightarrow M \equiv N$.

Câu 8: Đáp án B.

Theo tính chất phép dời hình $AM = A_1M_1$

$\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow AM^2 = 4AC^2 + AB^2 - 4\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}(*)$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - BC^2$, thế $(*)$ ta có:

$AM^2 = 2AC^2 - AB^2 + 2BC^2 = 72 - 16 + 50 = 106$

$\Rightarrow AM = \sqrt{106}$.

Câu 9: Đáp án A.

Ví dụ: Phép $T_{\vec{v}}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C', \vec{v} \neq \vec{0}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ và phân biệt

Câu 10: Đáp án C.

Gọi $C_1 = F(C)$ và $F(A) = A,\ F(B) = B$ nên theo tính chất phép dời hình ta có $\Delta ABC = \Delta ABC_1$

Có 2 khả năng xảy ra: C và C_1 đối xứng với nhau qua AB hoặc $C \equiv C_1$

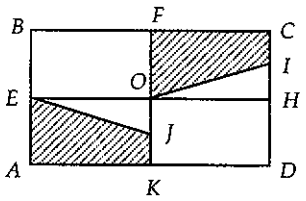
Theo giả thiết C và C_1 cùng phía so với $AB \Rightarrow C \equiv C_1$

Với mọi M ta vẽ đường thẳng qua M cắt AB, AC tại D và E.

Theo câu 7: $F(D) = D, F(E) = E \Rightarrow F(M) = M$.

Câu 11: Đáp án A.

Câu 12: Đáp án A.



Ta có hình thang $AEJK$ biến thành hình thang $FOIC$ qua hai phép dời hình là phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{EO}}$ và phép đối xứng trục $Đ_{EH}$.

Câu 13: Đáp án C.

Ta có $F: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 1 \end{cases}$

$M(x;y) \in (C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (x'+4)^2 + (y'-3)^3 = 2$

Vậy phương trình (C') là: $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 2$.

Câu 14: Đáp án C.

Ta có: $F_1: A(4;-1) \to A'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -5 \end{cases}$

$F_2: A'(6;-5) \to A''(x'';y'') \Rightarrow \begin{cases} x'' = -6 \\ y'' = 5 \end{cases}$.

Câu 15: Đáp án D.

Thật vậy xét 2 phép quay:

$Q_{(O,\alpha)}: M \to M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$

và $Q_{(I,\varphi)}: M' \to M'' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM'' \\ (IM', IM'') = \varphi \end{cases}$

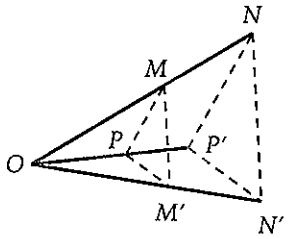
(với tâm $O \neq I$, $\alpha \neq \varphi$)

$\Rightarrow \exists M \neq M' \Rightarrow$ Không có phép đồng nhất thỏa mãn.

Phép vị tự

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa



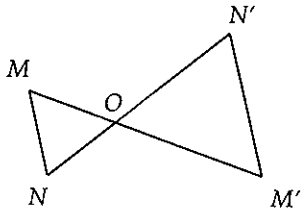
Cho điểm O cố định và số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Kí hiệu: $V_{(O,k)}$ (O là tâm vị tự, k là tỉ số vị tự)

$V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Nhận xét:

- Khi $k > 0$, M và M' nằm cùng phía đối với điểm O
- Khi $k < 0$, M và M' nằm khác phía so với điểm O
- Khi $k = -1$, M và M' đối xứng nhau qua tâm O nên $V_{(O,-1)} \to Đ_O$
- Khi $k = 1 \Rightarrow M \equiv M'$ phép vị tự $V_{(O,1)}$ trở thành phép đồng nhất



2. Tính chất

Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

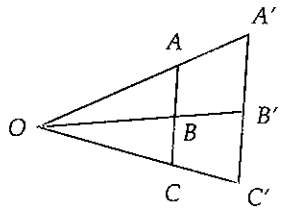
Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k:

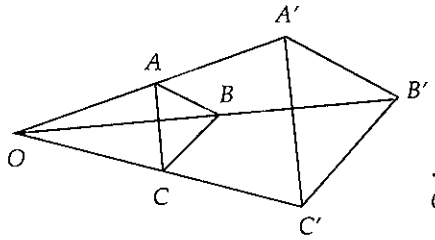
a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.

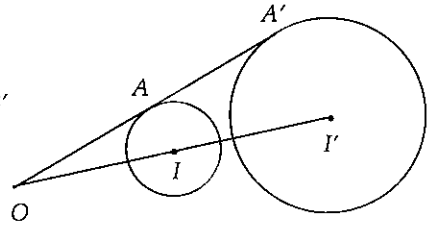
b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$.







STUDY TIP

$V_{(O,k)}: M(x;y) \to M'(x';y')$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

(với O là gốc tọa độ)

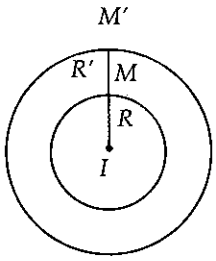
3. Biểu thức tọa độ của phép vị tự

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự $V_{(I,k)}$; $I(x_0;y_0)$

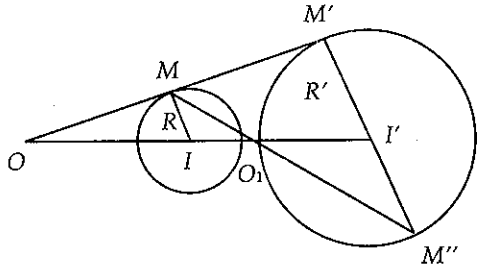
$$V_{(I,k)}: M(x;y) \to M'(x';y') \to \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Đọc thêm: Tâm vị tự của hai đường tròn

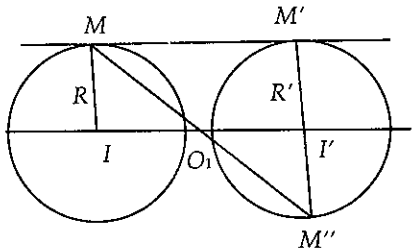
Định lý: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự như thế được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.



Hình a



Hình b



Hình c

Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$ các trường hợp:

TH1: Nếu $I \equiv I'$, thì phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I;R')$ (Hình a).

TH2: Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\frac{R'}{R}$ sẽ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$ (Hình b).

Ta gọi O là tâm vị tự ngoài, O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

TH3: Nếu I khác I' và $R = R'$ thì có một phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\frac{R'}{R} = -1$ biến đường tròn $(I;R)$ thành $(I';R')$ hay phép đối xứng tâm (Hình c).

B. Các dạng toán về phép vị tự

Dạng 1

Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép vị tự

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép vị tự.
- Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép vị tự.
- Tìm quỹ tích điểm thông qua phép vị tự.
- Các yếu tố liên quan phép vị tự là thẳng hàng, tỉ số không đổi...từ đó ứng dụng phép vị tự để giải các bài toán hình học khác...

Ví dụ 1: Cho điểm O và $k \neq 0$. Gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm O tỉ số k. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

B. $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

C. Khi $k = 1$ phép vị tư là phép đối xứng tâm.

D. $M' = V_{(O,k)} \Leftrightarrow M = V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M')$.

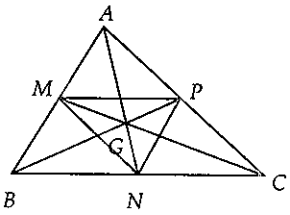
Đáp án C.

Lời giải

Khi $k=1$: phép vị tự $V_{(O,1)}(M)=M' \Leftrightarrow M\equiv M'$.

Ví dụ 2: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Phép vị tự nào sau đây biến ΔABC thành ΔNPM?

A. $V_{\left(A,-\frac{1}{2}\right)}$ B. $V_{\left(M,\frac{1}{2}\right)}$ C. $V_{(G,-2)}$ D. $V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$



Đáp án D.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}(\Delta ABC)=\Delta NPM$

Ví dụ 3: Cho hai điểm O, I. Xét phép vị tự V tâm I tỉ số $k\neq 1$ và phép tịnh tiến theo vecto $\vec{u}=(1-k)\overrightarrow{IO}$. Lấy điểm M bất kì, $M_1=V(M)$, $M_2=T(M_1)$. Phép biến hình F biến M thành M_2. Chọn mệnh đề đúng:

A. F là phép vị tự tâm O tỉ số $1-k$. B. F là phép vị tự tâm O tỉ số k.

C. F là phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{k}$. D. F là phép vị tự tâm O tỉ số $-\frac{1}{k}$.

Đáp án B.

Lời giải:

$\overrightarrow{IM_1}=k.\overrightarrow{IM}(1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{u}=(1-k)\overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{IM_2}-\overrightarrow{IM_1}=(1-k)\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM_2}=\overrightarrow{IM_1}+(1-k)\overrightarrow{IO}(2)$

Thế (1) vào (2): $\overrightarrow{IM_2}=k\overrightarrow{IM}+(1-k)\overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OM_2}=k\overrightarrow{OM}$.

Vậy F là phép vị tự tâm O tỉ số k.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có cạnh 3, 5, 7. Phép đồng dạng tỉ số $k=2$ biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ có diện tích là:

A. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$. B. $15\sqrt{3}$. C. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{15\sqrt{3}}{8}$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Công thức Hê-rông:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p=\frac{a+b+c}{2}$

Lời giải

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

Tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng

$\Rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=4 \Rightarrow S_{A'B'C'}=15\sqrt{3}$.

Ví dụ 5: Có bao nhiêu phép vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C')?

A. 3. B. 1.

C. 2. D. không xác định.

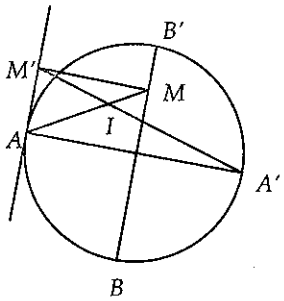
Đáp án D.

Lời giải

Không xác định vì thiếu giả thiết về phép vị tự.

Ví dụ 6: Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AA' và BB' vuông góc với nhau. M là điểm bất kì trên đường kính BB', M' là hình chiếu vuông góc của M xuống tiếp tuyến với đường tròn tại A. I là giao điểm của AM và $A'M'$. Khi đó I là ảnh của M trong phép vị tự tâm A tỉ số bao nhiêu?

A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.



Đáp án A.

Lời giải

$$\frac{AI}{AM}=\frac{MM'}{AA'}=2\Rightarrow\frac{AI}{IM+AI}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vậy I là ảnh của M qua phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$.

Dạng 2 Tìm ảnh của một điểm hoặc hình qua phép vị tự bằng phương pháp tọa độ

Phương pháp:

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép vị tự.

- Sử dụng biểu thức toạ độ của phép vị tự.

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép vị tự.

Cách 1: Chọn hai điểm A,B phân biệt trên Δ, xác định ảnh A',B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A',B'.

Cách 2: Áp dụng tính chất phép vị tự $V_{(O,k)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' song song hoặc trùng với nó.

Cách 3: Sử dụng quỹ tích

- Với mọi điểm $M(x;y)\in\Delta:V_{(O,k)}(M)=M'(x';y')$ thì $M'\in\Delta'$.

- Từ biểu thức toạ độ rút x,y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình ảnh Δ'.

3. Xác định ảnh của một hình $\mathcal{H}$ (đường tròn, elip, parabol...)

- Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm $M(x;y)$ thuộc hình $\mathcal{H}$, $V_{(O,k)}(M)=M'(x';y')$ thì M' thuộc ảnh $\mathcal{H}'$ của hình $\mathcal{H}$.

- Với đường tròn áp dụng tính chất phép vị tự biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ hoặc sử dụng quỹ tích.

STUDY TIP

Phép vị tự:

$V_{(O,-1)}:M(x;y)\to M'(x';y')$

$\Rightarrow\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases}$

(là phép đối xứng tâm O)

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(3;2)$. Ảnh của A qua phép vi tự tâm O tỉ số $k=-1$ là:

A. $(3;2)$. B. $(2;3)$. C. $(-2;-3)$. D. $(-3;-2)$.

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự: $V_{(O,-1)}(A)=A'\Rightarrow A':\begin{cases}x'=-3\\y'=-2\end{cases}$

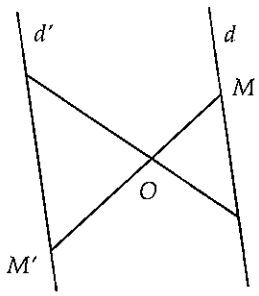
Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:5x+2y-7=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vi tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $2x+5y+14=0$. B. $5x+4y+28=0$.

C. $5x-2y-7=0$. D. $5x+2y-14=0$.

Đáp án A.

Lời giải:



Cách 1: Chọn hai điểm A, B phân biệt trên d, xác định ảnh A', B' tương ứng. Đường thẳng d' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh A', B' (học sinh tự làm)

Cách 2: Do d' song song hoặc trùng với d. Nên d' có dạng $5x+2y+c=0$.

Lấy $M(1;1)\in d$. Khi đó: $V_{(O,-2)}(M)=M'(x';y')\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=-2\overrightarrow{OM}\Rightarrow M'(-2;-2)$

Thay vào $d'\Rightarrow c=14$. Vậy $d':5x+2y+14=0$.

Cách 3: Gọi $M(x;y)\in d: V_{(O,-2)}(M)=M'(x';y')\Rightarrow \begin{cases} x'=-2x \\ y'=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}x' \\ y=-\dfrac{1}{2}y' \end{cases}$

Thế vào phương trình đường thẳng $d:-\dfrac{5}{2}x'-y'-7=0\Leftrightarrow 5x'+2y'+14=0$

Vậy $d':5x+2y+14=0$.

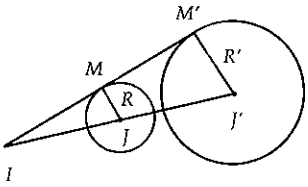
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$. Tìm ảnh (C') của (C) qua phép vị tự tâm $I(-1;2)$ tỉ số $k=3$?

A. $x^2+y^2-14x+4y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+4x-7y-5=0$.

C. $(x-7)^2+(y+2)^2=36$. **D.** $(x-7)^2+(y-2)^2=9$.

Đáp án C.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $J(1;1)$, bán kính $R=2$.

$V_{(I,3)}(J)=J'(x';y')\Rightarrow \begin{cases} x'=-1+3(1+1)=5 \\ y'=2+3(1-2)=-1 \end{cases} \Rightarrow J'(5;-1)$

$R'=3R=6\Rightarrow (C'):(x-5)^2+(y+1)^2=36$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép vị tự tâm O, tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$. Tìm ảnh (S') của đường cong $(S): y=\dfrac{2x+1}{1-x}$ qua phép vị tự trên.

A. $y=\dfrac{4x+1}{2-4x}$. **B.** $y=\dfrac{4x+1}{1-4x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+1}{1-2x}$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{1-4x}$.

Đáp án A.

Lời giải

$V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}: M(x;y)\to M'(x';y')$

$\forall M(x;y)\in(S)\Rightarrow M'(x';y')\in(S')$

$\Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x \\ y'=\dfrac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x' \\ y=2y' \end{cases}$ thế vào $(S)\Rightarrow 2y'=\dfrac{2.2x'+1}{1-2x'}\Leftrightarrow y'=\dfrac{2x'+\frac{1}{2}}{1-2x'}$

Vậy $(S'): y=\dfrac{4x+1}{2-4x}$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép vị tự

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây sai về phép vị tự:

A. Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

B. Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

D. Biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

Câu 2: Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k=20$ biến đường thẳng d thành d'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có 2 phép.

D. Có vô số phép.

Câu 3: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự biến đường thẳng d thành d'?

A. Không có phép nào.

B. Có một phép duy nhất.

C. Chỉ có 2 phép.

D. Có vô số phép.

Câu 4: Cho 2 đường thẳng song song d và d', và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành d'?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5: Cho hai đường tròn bằng nhau $(O;R)$ và $(O';R)$ với tâm O và tâm O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O;R)$ thành $(O';R)$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 6: Cho hai phép vị tự $V_{(O,k)}$ và $V_{(O',k')}$ với O và O' là hai điểm phân biệt và $k.k'=1$. Hợp của hai phép vị tự đó là phép nào sau đây?

A. Phép tịnh tiến. B. Phép đối xứng trục.

C. Phép đối xứng tâm. D. Phép quay.

Câu 7: Cho ΔABC vuông tại A, $AB=6$, $AC=8$. Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{3}{2}$ biến B thành B', biến C thành C'. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BB'C'C$ là hình thang.

B. $B'C'=12$.

C. $S_{AB'C'}=\frac{9}{4}$.

D. Chu vi $\Delta ABC=\frac{2}{3}$ chu vi $\Delta AB'C'$.

Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$. Đáy lớn $AB=8$, đáy nhỏ $CD=4$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo và J là giao điểm của hai cạnh bên. Phép biến hình $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$ là phép vị tự nào?

A. $V_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}$. B. $V_{\left(J,\frac{1}{2}\right)}$. C. $V_{\left(I,-\frac{1}{2}\right)}$. D. $V_{\left(J,-\frac{1}{2}\right)}$.

Câu 9: Cho đường tròn $(O;R)$ và một điểm A cố định trên đường tròn. BC là dây cung di động và BC có độ dài không đổi bằng $2a$ $(a<R)$. Gọi M là rtung điểm BC. Khi đó tập hợp trọng tâm G của ΔABC là:

A. $G=V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường tròn.

B. $G=V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}(M)$, tập hợp là một đường thẳng.

C. $G=V_{\left(A,\frac{1}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường tròn.

D. $G=V_{\left(B,\frac{2}{3}\right)}(M)$, tập hợp là một đường thẳng.

Câu 10: Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D. Đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại I. Tính độ dài đoạn AI.

A. $2R\sqrt{3}$. B. $R\sqrt{2}$. C. $R\sqrt{3}$. D. $R2\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc trong tại A $(R>R')$. Đường kính qua A cắt $(O;R)$ tại B và cắt $(O';R')$ tại C. Một đường thẳng di động qua A cắt $(O;R)$ tại M và cắt $(O';R')$ tại N. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. tập hợp điểm I là đường tròn:
$$(O'')=V_{\left(C,\frac{R'}{R+R'}\right)}((O;R)).$$

B. tập hợp điểm I là đường tròn:
$$(O'')=V_{\left(C,\frac{R}{R+R'}\right)}((O;R)).$$

C. tập hợp điểm I là đường tròn:
$$(O'')=V_{\left(M,\frac{R'}{R+R'}\right)}((O;R)).$$

D. tập hợp điểm I là đường tròn:
$$(O'')=V_{\left(M,\frac{R}{R+R'}\right)}((O;R)).$$

Dạng 2: Tìm ảnh của một điểm hoặc hình qua phép vị tự bằng phương pháp tọa độ

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh A' của $A(1;-3)$ qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

A. $A'(2;6)$. B. $A'(1;3)$.

C. $A'(-2;6)$. D. $A'(-2;-6)$.

Câu 13: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$. Tìm ảnh A' của A qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$ tỉ số $k=2$.

A. $A'(3;4)$. B. $A'(1;5)$.

C. $A'(-5;-1)$. D. $A'(-1;5)$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $P(-3;2)$, $Q(1;1)$, $R(2;-4)$. Gọi P', Q', R' lần lượt là ảnh của P, Q, R qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\frac{1}{3}$. Khi đó tọa độ trọng tâm của $\Delta P'Q'R'$ là:

A. $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$. B. $\left(0;\frac{1}{9}\right)$. C. $\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. D. $\left(\frac{2}{9};0\right)$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;3)$, $B(2;-1)$, $C(-1;5)$. Phép vị tự tâm A tỉ số k biến B thành C. Khi đó giá trị k là:

A. $k=-\frac{1}{2}$. B. $k=-1$. C. $k=\frac{1}{2}$. D. $k=2$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(3;1)$, $C(4;3)$. Phép vị tự tâm A tỉ số k biến B thành C. Khi đó giá trị k là:

A. $k=2$. B. $k=-1$. C. $k=1$. D. $k\in\varnothing$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:2x+y-4=0$, $I(-1;2)$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k=-2$.

A. $2x-y+4=0$. B. $-2x+y+8=0$.

C. $2x+y+8=0$. D. $x+\frac{1}{2}y+2=0$.

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d:3x-y-5=0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-\frac{2}{3}$.

A. $-3x+y-9=0$. B. $3x-y-10=0$.

C. $9x-3y+15=0$. D. $9x-3y+10=0$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d:\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ và $d':2x-y-6=0$. Phép vị tự $V_{(O,k)}(d)=d'$. Tìm k.

A. $k=\frac{3}{2}$. B. $k=-\frac{2}{3}$. C. $k=\frac{1}{3}$. D. $k=-\frac{1}{3}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm ảnh đường tròn (C') của đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=5$ qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$.

A. $(C'):(x+2)^2+(y+4)^2=10$.

B. $(C'):(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

C. $(C'):(x+2)^2+(y-4)^2=20$.

D. $(C'):(x-2)^2+(y+4)^2=20$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=5$. Tìm ảnh đường tròn (C') của (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ tỉ số $k=-2$.

A. $x^2+y^2+6x-16y+4=0$.

B. $x^2+y^2-6x+16y-4=0$.

C. $(x+3)^2+(y-8)^2=20$.

D. $(x-3)^2+(y+8)^2=20$.

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1):(x-1)^2+(y-3)^2=1$; $(C_2):(x-4)^2+(y-3)^2=4$. Tìm tâm vị tự ngoài của hai đường tròn đó.

A. $(-2;3)$. B. $(2;3)$. C. $(3;-2)$. D. $(1;-3)$.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường trong $(C):(x-3)^2+(y-3)^2=9$ và đường tròn $(C'):(x-10)^2+(y-7)^2=4$. Tìm tâm vị tự trong của phép vị tự biến (C) thành (C').

A. $\left(\frac{36}{5};\frac{27}{5}\right)$. B. $\left(\frac{13}{2};5\right)$.

C. $\left(\frac{32}{5};\frac{24}{5}\right)$. D. $\left(5;\frac{13}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng của phép vị tự

Câu 1: Đáp án D.

Câu 2: Đáp án D.

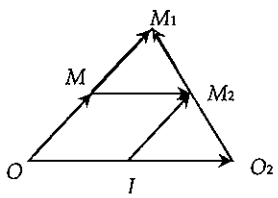
Câu 3: Đáp án A.

Theo tính chất, phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau, không có trường hợp cắt nhau d và d'.

Câu 4: Đáp án B.

Câu 5: Đáp án B.

Câu 6: Đáp án A.



Lấy điểm M bất kì:

$V_{(O,k)}(M)=M_1$ và $V_{(O',k')}(M_1)=M_2$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM_1}=k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{O'M_2}=k'\overrightarrow{O'M_1}$.

Khi đó phép hợp thành $F(M)=M_2$. Gọi I là ảnh của O qua phép $V_{(O',k')}$ $\Rightarrow \overrightarrow{O'I}=k'\overrightarrow{O'O}$.

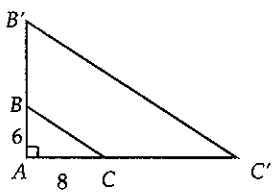
Khi đó $\overrightarrow{IM_2}=k'\overrightarrow{OM_1}=k.k'\overrightarrow{OM}$

Do $k.k'=1$ $\Rightarrow \overrightarrow{IM_2}=\overrightarrow{OM}$ nên:

$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'I}=(1-k')\overrightarrow{OO'}$

Vậy F là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1-k')\overrightarrow{OO'}$.

Câu 7: Đáp án B.

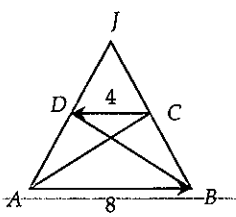


$V_{\left(A,\frac{3}{2}\right)}(B)=B' \Rightarrow AB'=\frac{3}{2}AB=9$

$V_{\left(A,\frac{3}{2}\right)}(C)=C' \Rightarrow AC'=\frac{3}{2}AC=12$

$\Rightarrow B'C'=\sqrt{9^2+12^2}=15.$

Câu 8: Đáp án C.



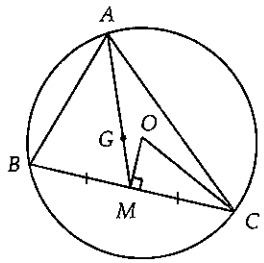
Ta có: $\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$

$V_{\left(I,-\frac{1}{2}\right)}(A)=C \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$

$V_{\left(I,-\frac{1}{2}\right)}(B)=D \Leftrightarrow \overrightarrow{ID}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 9: Đáp án A.



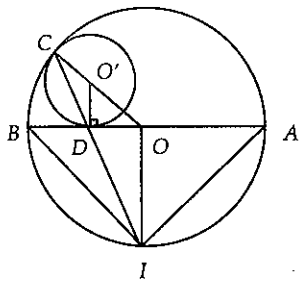
Ta có: $OM \perp BC \Rightarrow OM=\sqrt{R^2-a^2}$

$\Rightarrow M \in \left(O;\sqrt{R^2-a^2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow G=V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}(M)$.

Khi M di động trên đường tròn $\left(O;\sqrt{R^2-a^2}\right)$ thì G chạy trên đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$.

Câu 10: Đáp án B.



Ta có: $V_{\left(C,\frac{R'}{R}\right)}(O)=O' \Rightarrow CO'=\frac{R'}{R}CO$ (1)

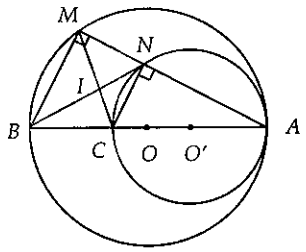
$V_{\left(C,\frac{R'}{R}\right)}(I)=D \Rightarrow CD=\frac{R'}{R}CI$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{CD'}{CD}=\frac{CO}{CI} \Rightarrow OI \,//\, O'D \Rightarrow OI \perp AB$

$\Rightarrow I$ là điểm chính giữa cung AB

$\Rightarrow AI=BI=\frac{AB}{\sqrt{2}}=R\sqrt{2}.$

Câu 11: Đáp án A.



Ta dự đoán $V_{\left(C,\frac{CI}{CM}\right)}(M)=I$ mà M nằm trên đường tròn (O) $\Rightarrow I$ nằm trên đường tròn $(O_1)=V_{\left(C,\frac{CI}{CM}\right)}(O)$

Ta cần chứng minh $\frac{CI}{CM}$ theo R và R'

Ta có $\frac{CM}{CI}=\frac{CI+IM}{CI}=1+\frac{IM}{CI}$

Mà $\frac{IM}{CI}=\frac{IB}{IN}=\frac{BM}{CN}=\frac{AB}{AC}=\frac{R}{R'}\Rightarrow\frac{CI}{CM}=\frac{R'}{R+R'}$

$\Rightarrow V_{\left(C,\frac{R'}{R+R'}\right)}(M)=I.$

Dạng 2: Tìm ảnh của điểm, đường qua phép vị tự bằng phương pháp tọa độ

Câu 12: Đáp án C.

$V_{(O,-2)}(A)=A'\Leftrightarrow\overrightarrow{OA'}=-2\overrightarrow{OA}\Rightarrow A'(-2;6).$

Câu 13: Đáp án D.

$V_{(I,2)}(A)=A'\Leftrightarrow\overrightarrow{IA'}=2\overrightarrow{IA}\Leftrightarrow\begin{cases}x'-3=4\\y'+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=-1\\y'=6\end{cases}$

$\Rightarrow A'(-1;5).$

Câu 14: Đáp án B.

$V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(P)=P',\ V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(Q)=Q',\ V_{\left(O,-\frac{1}{3}\right)}(R)=R'\Rightarrow$ Tọa độ các điểm $P'\left(1;-\frac{2}{3}\right),\ Q'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right),\ R'\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

Nên tọa độ trọng tâm $\Delta P'Q'R'$ là $\left(0;\frac{1}{9}\right)$.

Câu 15: Đáp án A.

Giả sử $V_{(A,k)}(B)=C\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=2k\\2=k.(-4)\end{cases}\Rightarrow k=-\frac{1}{2}.$

Câu 16: Đáp án D.

Giả sử $V_{(A,k)}(B)=C\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5=k.4\\1=-k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{5}{4}\\k=-1\end{cases}\Rightarrow$ không thỏa mãn $\Rightarrow k\in\varnothing.$

Câu 17: Đáp án C.

$V_{(I,-2)}(d)=d'\Rightarrow d\,//\,d'$ nên d' có dạng $2x+y+c=0.$

Chọn điểm $M(2;0)\in d\Rightarrow V_{(I,-2)}(M)=M'(x';y')\in d'$

$\Rightarrow\begin{cases}x'=5\\y'=-2\end{cases}$ thế vào $d':10-2+c=0\Rightarrow c=8.$

Vậy $d':2x+y+8=0.$

Câu 18: Đáp án D.

Giải tương tự câu 6 $\Rightarrow d':9x-3y+10=0.$

Câu 19: Đáp án A.

$d:2x-y-4=0\Rightarrow d\,//\,d'$

Chọn $M(2;0)\in d\Rightarrow V_{(O,k)}(M)=M'(x';y')\Rightarrow\begin{cases}x'=2k\\y'=0\end{cases}$

Do $M'\in d'\Rightarrow 2.2k-0-6=0\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}.$

Câu 20: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$

$\Rightarrow V_{(O,-2)}(I)=I'(x';y')\Rightarrow\begin{cases}x'=-2\\y'=4\end{cases}\Rightarrow I'(-2;4)$

Bán kính $R'=|k|.R=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Đường tròn $(C'):(x+2)^2+(y-4)^2=20.$

Câu 21: Đáp án C.

Đường tròn (C) có tâm $I(8;-1)$:

$V_{(I,-2)}(J)=J'_{(x';y')}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ'}=-2\overrightarrow{IJ}$

$\Rightarrow\begin{cases}x'=-3\\y'=8\end{cases}\Rightarrow J'(-3;8)$, bán kính $R'=|k|.R=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ Phương trình $(C'):(x+3)^2+(y-8)^2=20.$

Câu 22: Đáp án A.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;3)$ và bán kính $R_1=1$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(4;3)$ và bán kính $R_2=2$

Gọi I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự:

$V_{(I,k)}((C_1))=(C_2)$

$\Rightarrow V_{(I,k)}(I_1)=I_2,\ k=\frac{R_2}{R_1}=2\Leftrightarrow\overrightarrow{II_2}=2\overrightarrow{II_1}\Rightarrow I(-2;3)$

Câu 23: Đáp án A.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;3)$ bán kính $R=3$

Đường tròn (C') có tâm $I'(10;7)$ bán kính $R'=2$

$\Rightarrow I\neq I',\ R\neq R'\Rightarrow$ tỉ số vị tự $k=-\frac{2}{3}$

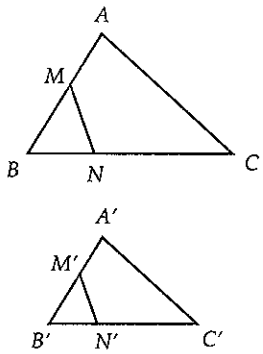
$V_{(O_1,k)}(I)=I'\Leftrightarrow\overrightarrow{O_1I'}=k\overrightarrow{O_1I}$ với $O_1(x;y)$ là tâm vị tự trong $\Leftrightarrow\begin{cases}x-10=-\frac{2}{3}(x-3)\\y-7=-\frac{2}{3}(y-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{36}{5}\\y=\frac{27}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow O_1\left(\frac{36}{5};\frac{27}{5}\right).$

Phép đồng dạng

A. Lí thuyết

1. Định nghĩa



Một phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k $(k>0)$ nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = k.MN$.

Nhận xét:

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k=1$.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì ta được một phép đồng dạng.

STUDY TIP

a) Nếu một phép đồng dạng biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp của ΔABC thành tương ứng của $\Delta A'B'C'$.

b) Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, cạnh thành cạnh.

2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa chúng.

b) Biến một đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến một đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $k.R$.

3. Hình đồng dạng

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. Các bài toán về phép đồng dạng

Ví dụ 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng.

B. Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.

C. Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.

D. Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

Đáp án D.

Lời giải

Với hai hình chữ nhật bất kì ta chọn từng cặp cạnh tương ứng khi đó tỉ lệ giữa chúng chưa chắc đã bằng nhau

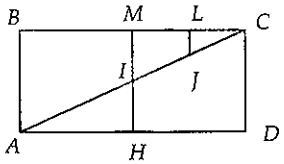
$\Rightarrow$ Không tồn tại phép đồng dạng biến hình chữ nhật này thành hình chữ nhật kia.

Ví dụ 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm là I. Gọi H, k, L, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC, IC. Tứ giác $IHDC$ đồng dạng với tứ giác nào sau đây?

A. $JLKI$. B. $ILJH$. C. $JLBA$. D. $ALJH$.

Đáp án A.

Lời giải



Tứ giác $IHDC$ là hình thang vuông.

Ta thấy $IHDC$ đồng dạng với $JLKI$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép dời hình.

B. Phép đồng dạng tỉ số $k=-1$ là phép đối xứng tâm.

C. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép tịnh tiến.

D. Phép đồng dạng tỉ số $k=1$ là phép vị tự tỉ số $k=1$.

Đáp án A.

Lời giải

Khi $k=1$ phép đồng dạng bảo toàn khoảng cách nên là phép dời hình.

Ví dụ 4: Cho ΔABC có đường cao AH, H ở trên đoạn BC. Biết $AH=4$, $HB=2$, $HC=8$. Phép đồng dạng F biến ΔHBA thành ΔHAC. F được hình thành bởi hai phép biến hình nào?

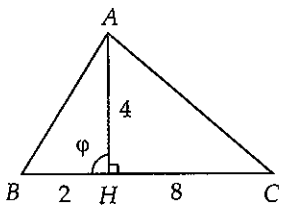
A. Phép đối xứng tâm H và phép vị tự tâm H tỉ số $k=\frac{1}{2}$.

B. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$ và phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$.

C. Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép quay tâm H góc quay là góc (HB, HA).

D. Phép vị tự tâm H tỉ số $k=2$ và phép đối xứng trục.

Đáp án C.



Lời giải

Ta có $V_{(H,2)}$ và $Q_{(H,\varphi)}$ với $\varphi=(HB,HA)$ biến B thành A và A thành C, vậy F là phép đồng dạng hợp thành của $V_{(H,2)}$ và $Q_{(H,\varphi)}$ biến ΔHBA thành ΔHAC.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay $-90°$ sẽ biến điểm M thành điểm nào sau đây?

A. $(2;-1)$. B. $(2;1)$. C. $(-1;2)$. D. $(1;2)$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $V_{\left(O;\frac{1}{2}\right)}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow M'(1;2)$

$Q_{(O,-90°)}(M')=M''(x'';y'') \Rightarrow \begin{cases} x''=y'=2 \\ y''=-x=-1 \end{cases} \Rightarrow M''(2;-1)$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y=0$ thỏa mãn phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép đối xứng trục Oy sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $-2x-y=0$. B. $2x+y=0$.

C. $4x-y=0$. D. $2x+y-2=0$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $V_{(O,-2)}(d)=d' \Rightarrow d'//d$

$\Rightarrow d'$ có dạng: $2x-y+c=0$

Chọn $N(1;2)\in d: V_{(O,-2)}(N)=N'(-2;-4)\in d' \Rightarrow -4+4+c=0 \Rightarrow c=0$

+ phương trình đường thẳng $d': 2x-y=0$.

Qua phép đối xứng trục Oy: $Đ_{oy}(d')=d''$

Suy ra phương trình ảnh d'' cần tìm là: $-2x-y=0$

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay $90°$ sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Đáp án D.

Lời giải:

Gọi $V_{\left(O,\frac{1}{2}\right)}((C))=(C')$ nên đường tròn (C') có tâm $I'(1;1)$ và bán kính $R'=1$.

Ta lại có $Q_{(O,90°)}((C'))=(C'')$ có bán kính $R''=1$ và tâm $I''(x'';y'')$ được xác định: $\begin{cases} x''=-y'=-1 \\ y''=x'=1 \end{cases} \Rightarrow I''(-1;1)$

Vậy phương trình đường tròn (C'') là: $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phép dời hình là phép đồng dạng, tỉ số $k=-1$.

B. Phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng với tỉ số $-k$.

C. Phép vị tự tỉ số $k \neq 0$ là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

D. Phép đồng dạng là phép dời hình với $k \neq 0$.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

I. "Mỗi phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng tỉ số k."

II. "Mỗi phép đồng dạng là một phép dời hình."

III. "Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng ta được một phép đồng dạng."

A. Chỉ I. B. Chỉ II.

C. Chỉ III. D. Cả I và III.

Câu 3: Giả sử phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử F biến trung tuyến AM của ΔABC thành đường cao A_1M_1 của $\Delta A_1B_1C_1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác đều.

B. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác cân.

C. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại B_1.

D. $\Delta A_1B_1C_1$ là tam giác vuông tại C_1.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và $AC=2AB$. Gọi Q là phép quay tâm A góc quay $\varphi=(AB,AC)$, V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, F là phép hợp thành của V và Q. F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn nào sau đây?

A. Đường tròn tâm D bán kính DB.

B. Đường tròn tâm C bán kính CA.

C. Đường tròn tâm D bán kính DC.

D. Đường tròn tâm A bán kính AC.

Câu 5: Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';2R)$ tiếp xúc ngoài nhau tại O. d là đường thẳng tiếp xúc với 2 đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k, $Đ$ là phép đối xứng qua đường thẳng d, F là phép hợp thành của $Đ_d$ và $V_{(O,k)}$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì F biến $(I;R)$ thành $(I';2R)$?

A. $k=2$. B. $k=-2$. C. $k=-\frac{1}{2}$. D. $k=\frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (điểm được đặt theo chiều kim đồng hồ). A',B',C',D' theo thứ tự là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số $k=\sqrt{2}$ và Q là phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{4}$. Phép biến hình F được xác định là hợp thành liên tiếp của phép quay và phép vị tự. Khi đó qua F ảnh của đoạn thẳng $B'D'$ là:

A. Đoạn $D'B'$. B. Đoạn $A'C'$.

C. Đoạn CA. D. Đoạn BD.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Trên cạnh AB lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Gọi G là trọng tâm ΔABD. F là phép đồng dạng biến ΔAGI thành ΔCOD. Khi đó F là hợp bởi hai phép biến hình nào?

A. Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{GD}$ và phép $V_{(B,-1)}$.

B. Phép $Q_{(G,180^\circ)}$ và phép $V_{\left(B,\frac{1}{2}\right)}$.

C. Phép $V_{\left(A,\frac{3}{2}\right)}$ và $Q_{(O,-180^\circ)}$.

D. Phép $V_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$ và $Q_{(G,-180^\circ)}$.

Câu 8: Phép đồng dạng với tỉ số k nào dưới đây thì được một hình bằng hình ban đầu?

A. 1. B. 0. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9: Phóng to một hình chữ nhật kích thước là 4 và 5 theo phép đồng dạng tỉ số $k=3$ thì được hình có diện tích là:

A. 60 đơn vị diện tích. B. 180 đơn vị diện tích.

C. 120 đơn vị diện tích. D. 20 đơn vị diện tích.

Câu 10: Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k. Chọn câu sai:

A. k là tỉ số hai trung tuyến tương ứng.

B. k là tỉ số hai đường cao tương ứng.

C. k là tỉ số hai góc tương ứng.

D. k là tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng.

Câu 11: Cho hình vuông $ABCD$, P thuộc cạnh AB, H là chân đường vuông góc hạ từ B đến PC. Phép đồng dạng biến tam giác BHC thành tam giác PHB. Khi đó ảnh của B và D lần lượt là:

A. P và Q ($Q \in BC$ và $BQ=BP$).

B. C và Q ($Q \in BC$ và $BQ=BP$).

C. H và Q. ($Q \in BC$ và $BQ=BP$).

D. P và C.

Câu 12: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Mọi phép đồng dạng đều biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

B. Mọi phép đồng dạng biến hình vuông thành hình vuông.

C. Tồn tại phép đồng dạng biến hình chữ nhật (không phải hình vuông) thành hình vuông.

D. Phép đồng dạng biến tam giác thành tam giác có cùng diện tích.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;1)$. Phép đồng dạng là hợp thành của phép vị tự tâm $I(1;3)$ tỉ số $k=2$ và phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{4}$ sẽ biến M thành điểm có tọa độ:

A. $(2;-1)$. B. $(2\sqrt{2};\sqrt{2})$.

C. $(\sqrt{2};2\sqrt{2})$. D. $(2\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Câu 14: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+2y=0$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-2)$ tỉ số $k=3$ và phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào sau đây?

A. $2x-y-6=0$. B. $x+2y-6=0$.

C. $2x-y+6=0$. D. $2x-y-3=0$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(0;1)$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(4;2)$ tỉ số $k=-3$ và phép đối xứng qua trục $d: x-2y+4=0$ sẽ biến điểm M thành điểm nào sau đây?

A. $(16;5)$. B. $(14;9)$. C. $(12;13)$. D. $(18;1)$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=4$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ và phép quay tâm O góc quay $180°$ sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn nào sau đây? (O là gốc tọa độ)

A. $x^2+y^2-4x-8y-2=0$.

B. $x^2+y^2+4x+8y+4=0$.

C. $(x+2)^2+(y+4)^2=16$.

D. $(x-2)^2+(y-4)^2=16$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Phép đồng dạng là phép thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm $I(1;-1)$ tỉ số $k=\frac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(3;4)$ sẽ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình:

A. $(x-4)^2+(y-4)^2=9$. B. $(x-4)^2+(y-4)^2=1$.

C. $(x+4)^2+(y+4)^2=1$. D. $(x-1)^2+y^2=1$.

Hướng dẫn giải chi tiết

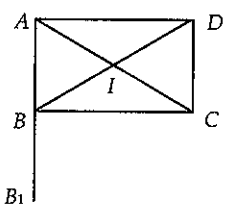
Câu 1: Đáp án C.

Câu 2: Đáp án C.

Câu 3: Đáp án B.

Theo tính chất phép đồng dạng thì A_1M_1 là đường trung tuyến của $\Delta A_1B_1C_1$, theo giả thiết A_1M_1 lại là đường cao nên $A_1B_1C_1$ là tam giác cân tại A_1. Vì vậy ΔABC cân tại A.

Câu 4: Đáp án B.

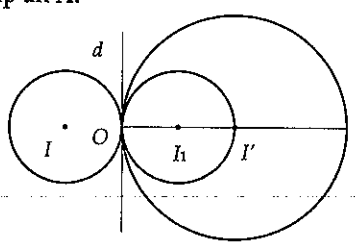


$V_{(A,2)}(B)=B_1$, $Q_{(A,\varphi)}(B_1)=C$

Qua $V_{(A,2)}$ biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn tâm B_1 bán kính B_1A.

Qua $Q_{(A,\varphi)}$ biến đường tròn B_1 bán kính B_1A thành đường tròn tâm C bán kính CA.

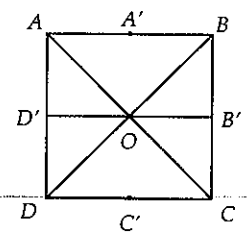
Câu 5: Đáp án A.



Ta có: $Đ_d((I))=(I_1)$; $V_{(O,2)}((I_1))=(I')$

Vậy $k=2$.

Câu 6: Đáp án C.



Ta có: $Q_{\left(O,-\frac{\pi}{4}\right)}$ biến B', D' thành B_1, D_1: $B_1D_1 = B'D'$

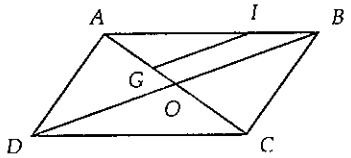
và B_1, D_1 nằm trên đường thẳng qua AC

$$V_{(O,\sqrt{2})}(B_1) = B_2,\ V_{(O,\sqrt{2})}(D_1) = D_2$$

$\Rightarrow OB_2 = \sqrt{2}OB_1,\ OD_2 = \sqrt{2}OD_1$

$\Rightarrow B_2D_2 = \sqrt{2}B_1D_1 = \sqrt{2}B'D' = AC.$

Câu 7: Đáp án C.



- Phép $V_{\left(A,\frac{3}{2}\right)}(\Delta AGI) = \Delta AOB$.

- Phép $Q_{(O,-180^\circ)}(\Delta AOB) = \Delta COD$.

Câu 8: Đáp án A.

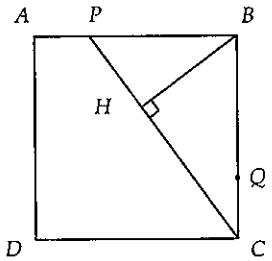
Câu 9: Đáp án B.

Qua phép đồng dạng tỉ số $k = 3$ ta được các cạnh tương ứng của hình chữ nhật là 12 và 15

$\Rightarrow$ Diện tích của hình chữ nhật ảnh là: $12.15 = 180$.

Câu 10: Đáp án C.

Câu 11: Đáp án A.



Câu 12: Đáp án B.

Câu 13: Đáp án B.

Ta có: $V_{(I,2)}(M) = M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -1 \end{cases} \Rightarrow M'(3;-1)$

$$Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}(M') = M''(x'';y'') \Rightarrow \begin{cases} x'' = 3.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ y'' = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow M''\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right).$

Câu 14: Đáp án C.

Ta có: $V_{(I,3)}(d) = d' \Rightarrow d' // d$

$\Rightarrow d'$ có dạng: $x + 2y + c = 0$.

Chọn $M(2;-1) \in d \Rightarrow V_{(I,3)}(M) = M'(x';y')$

$\Rightarrow M'(4;1) \in d' \Rightarrow 4 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

$\Rightarrow d': x + 2y - 6 = 0$

Có $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(d') = d''$.

Gọi $N'(x;y) \in d' \Rightarrow Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(N') = N''(x'';y'')$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = -y \\ y'' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y'' \\ y = -x'' \end{cases}$

Thế vào phương trình $d': y'' - 2x'' - 6 = 0$

Vậy phương trình $d'': 2x - y + 6 = 0$.

Câu 15: Đáp án C.

Ta có: $V_{(I,-3)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -3\overrightarrow{IM} \Rightarrow M'(16;5)$

$Đ_d(M') = M''(x'';y'') \Rightarrow d$ là trung trực của $M'M''$

$\Rightarrow M'M''$ có dạng: $2x + y + c = 0$ đi qua M'

$\Rightarrow c = -37 \Rightarrow M'M'': 2x + y - 37 = 0$

Gọi H là trung điểm của $M'M''$

$\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 37 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow H(14;9) \Rightarrow M''(12;13).$

Câu 16: Đáp án D.

Đường tròn (C) có tâm $J(1;2)$ bán kính $R = 2$

$V_{(O,-2)}(J) = J_1(x';y') \Rightarrow J_1(-2;-4)$ bán kính $R_1 = 2R = 4$

$\Rightarrow$ Phương trình $(C_1): (x+2)^2 + (y+4)^2 = 16.$

$Q_{(O,180^\circ)}(J_1) = J_2(x';y') \Rightarrow J_2(2;4)$

Bán kính $R_2 = R_1 = 4$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16.$$

Câu 17: Đáp án B.

Đường tròn (C) có tâm $J(1;2)$, bán kính $R = 3$

$V_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}(J) = J_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} \Rightarrow J_1(1;0)$, $R_1 = \frac{1}{3}R = 1$.

$T_{\vec{v}}(J_1) = J_2 \Rightarrow \overrightarrow{J_1J_2} = \vec{v} \Rightarrow J_2(4;4)$, bán kính $R_2 = 1$.

Vậy đường tròn ảnh qua 2 phép $V_{\left(I,\frac{1}{3}\right)}$ và $T_{\vec{v}}$ là:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1.$$

CHỦ ĐỀ 7: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

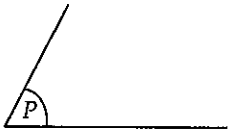
Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng

A. Lý thuyết

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc (). Ví dụ như mặt phẳng (P), (Q), (α), (β) ...



Để biểu diễn mặt phẳng, ta thường dùng hình bình hành hoặc một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.

Đường thẳng và mặt phẳng là tập hợp các điểm. Do đó:

- Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $A \in a$ và đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A.
- Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A.
- Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $a \subset (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

2. Quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian

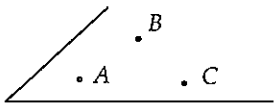
- Hình biểu diễn của một đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau thì phải được vẽ song song và bằng nhau. Trung điểm của một đoạn thẳng phải được lấy ngay tại điểm chính giữa của đoạn thẳng đó.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

3. Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

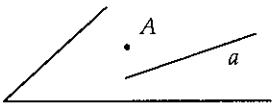
- *Tính chất 1:* Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- *Tính chất 2:* Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Như vậy, một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

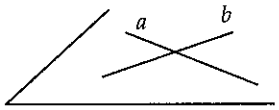
- Mặt phẳng đó đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C. Kí hiệu là $\text{mp}(ABC)$.
- Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng a và một điểm A không thuộc đường thẳng a. Kí hiệu: $\text{mp}(A,a)$.
- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a và b. Kí hiệu: $\text{mp}(a,b)$.
- Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song a, b.



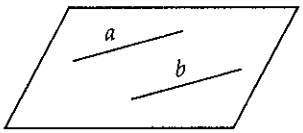
mp(ABC)



mp(A,a)



mp(a,b)



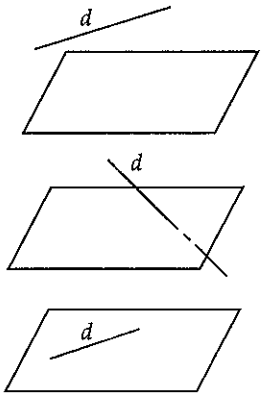
Nhận xét

Nếu có một số điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói rằng các điểm đó đồng phẳng. Tính chất 2 cho thấy rằng ba điểm bất kì thì luôn luôn đồng phẳng. Nhưng đối với bốn điểm, tính chất 3 cho thấy rằng điều tương tự không phải bao giờ cũng đúng.

- *Tính chất 3:* Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.
- *Tính chất 4:* Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.
- *Tính chất 5:* Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- *Tính chất 6:* Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

3. Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

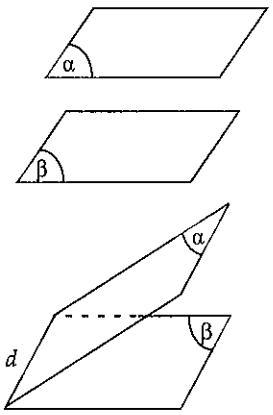
a) Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng



Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), kí hiệu là $d//(\alpha)$.
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có đúng một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm A, ta kí hiệu $d\cap(\alpha)=\{A\}$.
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có nhiều hơn một điểm chung. Trường hợp này ta nói đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $d\subset(\alpha)$.

b) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng



Cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

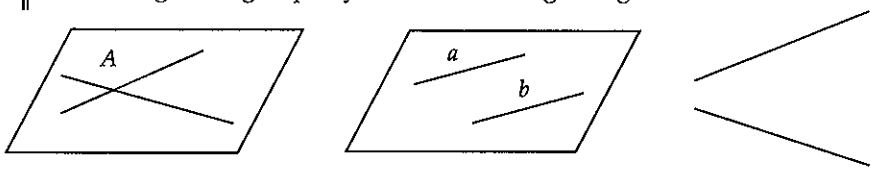
- Hai mặt phẳng (α) và (β) không có điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, kí hiệu $(\alpha)//(\beta)$.
- Hai mặt phẳng (α) và (β) có ít nhất một điểm chung. Trong trường hợp này ta nói các mặt phẳng (α) và (β) có phần chung là một đường thẳng, giả sử đường thẳng đó là d, ta kí hiệu $(\alpha)\cap(\beta)=d$.

Đường thẳng d được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng. Như vậy, việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương ứng với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng phân biệt đó. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm phân biệt cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một đường thẳng.

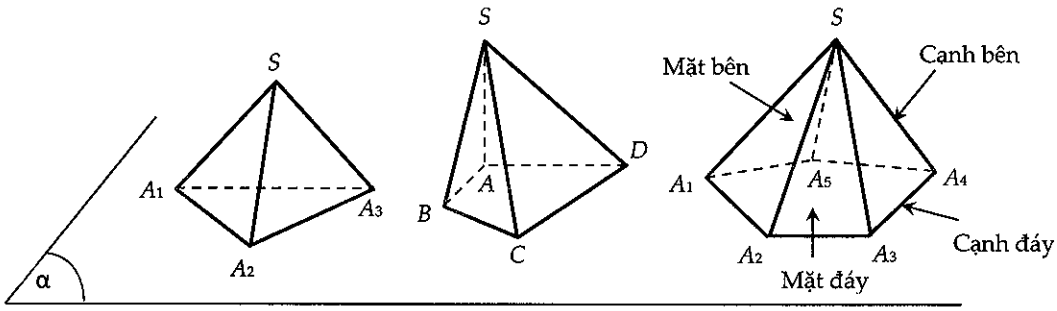
c) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó a và b hoặc cắt nhau tại một điểm hoặc song song với nhau.
- Các đường thẳng a và b không cùng nằm trong bất kì một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta nói các đường thẳng a và b chéo nhau.



4. Hình chóp và hình tứ diện



a) Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Lưu ý

Hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhau là hình chóp đa giác đều.

- Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là mặt đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là các mặt bên, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các cạnh đáy của hình chóp.
- Cách gọi tên: Hình chóp + tên đa giác.
- Ví dụ: hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác,...

b) Tứ diện

Tứ diện $ABCD$ là hình được lập thành từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Các điểm A, B, C, D là các đỉnh của tứ diện, các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC được gọi là các mặt của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D và các đoạn thẳng AB, BC, CA, DC, BD, DA được gọi là các cạnh của tứ diện. Trong đó các cặp cạnh AB và CD, AC và DB, AD và BC thường được gọi là các cặp cạnh đối của tứ diện.

Nhận xét

Khác với hình chóp tam giác khi một đỉnh đã được chọn trước và ba điểm còn lại lập thành đáy hình chóp, trong tứ diện mỗi một trong bốn điểm đã cho đều là đỉnh và ba điểm còn lại lập thành mặt đối của đỉnh đó.

B. Các dạng bài toán về đường thẳng và mặt phẳng

Dạng 1

Xác định giao tuyến giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) ta tiến hành đi tìm hai điểm thuộc cả hai mặt phẳng (α) và (β).

Lưu ý:

Một điểm chung của hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ thường tìm được bằng cách: chọn một mặt phẳng (γ) sao cho các giao tuyến Δ_1,Δ_2 của $(\alpha),(\beta)$ với (γ) có thể dựng được ngay. Giao điểm I của Δ_1,Δ_2 (trong (γ)) là điểm chung cần tìm.

+ Ta thường chứng minh ba điểm thẳng hàng bằng cách chứng minh ba điểm đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

+ Ta cũng có thể chứng minh ba đường thẳng đồng quy bằng cách:

> ***Cách 1:*** Hai trong ba đường thẳng ấy cắt nhau và lần lượt nằm trong hai mặt phẳng nhận đường thẳng thứ ba làm giao tuyến.
>
> ***Cách 2:*** Tìm một đoạn thẳng AB trên một đường thẳng nào đó. Chứng minh hai đường thẳng còn lại chia đoạn AB theo cùng một tỉ số đại số.

Dạng 2

Xác định giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng (α).

Phương pháp:

+ Nếu phát hiện ra một đường thẳng d trong mặt phẳng (α) cắt Δ tại I thì I chính là giao điểm của Δ với mặt phẳng (α).

+ Nếu chưa phát hiện ra đường thẳng d thì ta dựng d bằng cách: chọn một mặt phẳng (γ) chứa Δ sao cho giao tuyến của (γ) và (α) có thể dựng được ngay, giao tuyến đó chính là đường thẳng d cần tìm.

Hai định lí quan trọng thường dùng:

> *Định lí Ceva:* Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P khác A, B, C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$.
>
> *Định lí Menelaus:* Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P khác A, B, C và theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

Dạng 3

Bài toán dựng thiết diện

Cho trước khối đa diện T và mặt phẳng (α). Nếu (α) có điểm chung với T thì (α) sẽ cắt một số mặt của T theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng (α) giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là mặt cắt (còn gọi là thiết diện) giữa T và (α).

Chú ý:

> + Đỉnh của thiết diện là giao điểm của (α) với các cạnh của T. Cạnh của thiết diện là các đoạn giao tuyến của của (α) với các mặt của T. Do đó thực chất của việc dựng thiết diện là bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng.

+ Do mỗi cạnh của thiết diện chính là đoạn giao tuyến của mặt phẳng (α) với một mặt của T. Do đó số cạnh nhiều nhất mà thiết diện có thể có chính là số mặt của T.

- Đối với hình chóp tam giác (hoặc tứ diện), thiết diện của nó cắt bởi mặt phẳng (α) chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác (ở đây ta quy ước không xét các trường hợp suy biến khi thiết diện là một mặt hoặc một cạnh của hình chóp).

- Đối với hình chóp tứ giác, thiết diện của nó chỉ có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác.

Các bài toán liên quan tới thiết diện gồm các dạng:

+ Dựng thiết diện.

+ Xác định hình dạng thiết diện.

+ Tính diện tích thiết diện.

+ Tính tỉ số thể tích hai phần do thiết diện phân chia khối thể tích đã cho (sẽ được trình bày trong Công phá toán tập 3).

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua 3 điểm M, N, B.

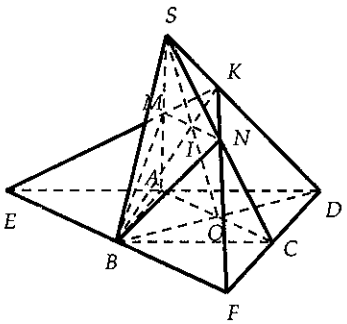
a) Tìm các giao tuyến của (P) và (SAB); (P) và (SBC).

b) Tìm giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (P) và giao điểm K của đường thẳng SD với mặt phẳng (P).

c) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SDC). Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (BMN).

d) Xác định các giao điểm E, F của các đường thẳng DA, DC với (P). Chứng minh rằng E, B, F thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $M \in SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow M \in (SAB)$ (1)

Lại có $M \in (BMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M \in (SAB) \cap (BMN)$ (3)

Ta có: $B \in (SAB) \cap (BMN)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $BM = (SAB) \cap (BMN)$.

Tương tự ta cũng suy ra $BN = (SBC) \cap (BMN)$.

b) Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của SO với MN.

Ta có: $I \in MN, MN \subset (BMN) \Rightarrow I \in (BMN) \Rightarrow I$ là giao điểm của SO với (BMN)

Trong mặt phẳng (SBD) gọi K là giao điểm của BI với SD. Ta có:

$K \in BI, BI \subset (BMN) \Rightarrow K \in (BMN)$. Suy ra K chính là giao điểm SD với (BMN).

c) Ta có: $\begin{cases} K \in (BMN) \\ K \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BMN) \cap (SAD)$.

Ta lại có: $M \in (BMN) \cap (SAD)$. Do đó: $MK = (BMN) \cap (SAD)$.

Tương tự ta có: $NK = (BMN) \cap (SDC)$.

Như vậy tứ giác $BMKN$ là thiết diện của hình chóp $SABCD$ cắt bởi mp(BMN).

d) Trong mặt phẳng (SAD), gọi $\{E\} = MK \cap AD$. Ta có $MK \subset (BMN)$ nên $E \in (BMN)$. Vậy E chính là giao điểm của AD với (BMN).

Trong mặt phẳng (SDC) gọi $\{F\} = NK \cap CD$.

Ta có $NK \subset (BMN)$ nên $F \in (BMN)$.

Vậy F chính là giao điểm của DC với (BMN).

Ta có: $\begin{cases} F \in (BMN) \\ F \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (BMN) \cap (ABCD)$,

$\begin{cases} E \in (BMN) \\ E \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (BMN) \cap (ABCD)$, $\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (ABCD)$.

Suy ra ba điểm B, E, F cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (BMN) và $(ABCD)$. Do đó ba điểm B, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MN không song song với AC. M, N, P, Q đồng phẳng khi:

A. $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ **B.** $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$

C. $\frac{BM}{AM}.\frac{CN}{BN}.\frac{DP}{CP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ **D.** $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{DP}{CP}.\frac{AQ}{DQ} = 1$

Đáp án A.

Lời giải

+ Giả sử M, N, P, Q cùng thuộc mặt phẳng (α).

Nếu MN cắt AC tại K thì K là điểm chung của các mặt phẳng $(\alpha), (ABC)$, (ADC) nên PQ cũng đi qua K.

Áp dụng định lí Menelaus cho các tam giác ABC, ADC ta được:

$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CK}{AK} = 1$; $\frac{AK}{CK}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1 \Rightarrow \frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$.

Nhận xét:

+ Trường hợp MN song song với AC thì ví dụ trên vẫn đúng.

+ Liệu trường hợp ngược lại, có $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ}{AQ} = 1$ thì M, N, P, Q có đồng phẳng không?

Câu trả lời là trường hợp ngược là ví dụ vẫn đúng. Ta sẽ cùng chứng minh nhé:

Trong mặt phẳng (ACD), KO cắt AD tại Q' thì các điểm M, N, P, Q' đồng phẳng.

Theo ví dụ 2 ta có: $\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{DP}.\frac{DQ'}{AQ'} = 1 \Rightarrow \frac{DQ'}{AQ'} = \frac{DQ}{AQ} \Rightarrow Q \equiv Q'$. Ví dụ được chứng minh.

+ Ví dụ này có thể mở rộng đối với các điểm M, N, P, Q bất kì trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA như sau:

M, N, P, Q đồng phẳng khi và chỉ khi $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}.\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}}.\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = 1$ (khẳng định này đôi khi còn được gọi là định lí Menelaus mở rộng trong không gian).

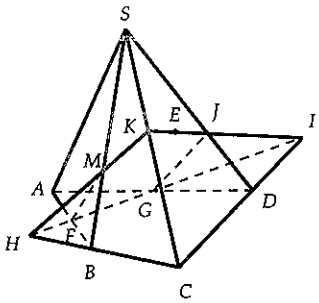
Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ và E là điểm thuộc mặt bên (SCD). F, G lần lượt là trung điểm của AB, AD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG) là:

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Ngũ giác **D.** Lục giác

Đáp án C.

Lời giải

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I, H lần lượt là giao điểm của FG với BC, CD.



Trong mặt phẳng (SCD), gọi K, J lần lượt là giao điểm của IE với SC, SD.

Trong mặt phẳng (SBC), gọi M là giao điểm của KH với SB.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=FG;\ (EFG)\cap(SAD)=GJ\\(EFG)\cap(SCD)=JK;\ (EFG)\cap(SBC)=KM\\(EFG)\cap(SAB)=MF\end{cases}$

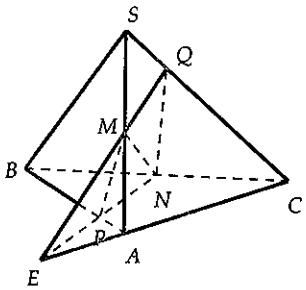
Vậy ngũ giác $KMFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$. Gọi Q là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SQ}{SC}$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC), gọi $E=NP\cap AC$.

Khi đó Q chính là giao điểm của SC với EM.

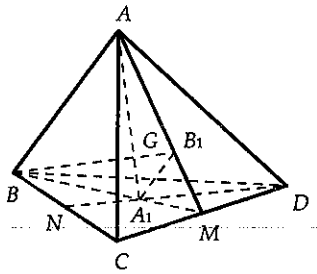
Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác ABC ta có: $\frac{AP}{PB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{CE}{EA}=2$

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SAC ta có:

$$\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}.\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow\frac{SQ}{QC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A_1,B_1,C_1,D_1 tương ứng là trọng tâm cảu các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có: $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD. Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có:

$\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow A_1B_1 // AB$ và $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$.

Trong mặt phẳng (AMB), gọi G là giao điểm của BB_1, AA_1.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{A_1G}{GA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4}$ (1)

Tương tự ta có: $\begin{cases}G'=CC_1\cap AA_1,\ \frac{AG'}{AA_1}=\frac{3}{4}\\G''=DD_1\cap AA_1,\ \frac{AG''}{AA_1}=\frac{3}{4}\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra G, G', G'' trùng nhau, tức là AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 đồng quy tại điểm G và ta có: $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$.

Lưu ý

Điểm G được gọi là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Bài tập tương tự: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, E, F, K, H tương ứng là các trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC. Chứng minh rằng IJ, EF, KH đồng quy tại một điểm và điểm đồng quy chính là trọng tâm G của tứ diện $ABCD$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

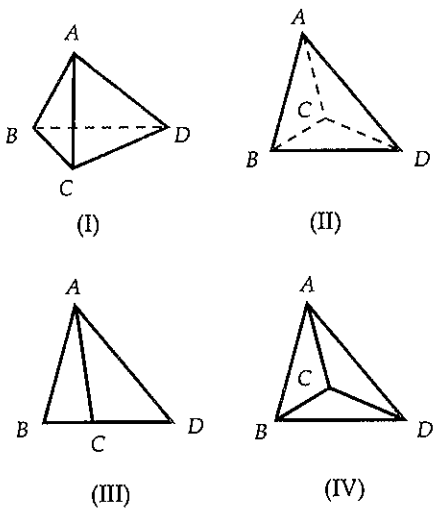
A. Dùng nét đứt để biểu diễn cho đường bị che khuất

B. Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng

C. Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

D. Hình biểu diễn của hai đường cắt nhau có thể là hai đường song song nhau.

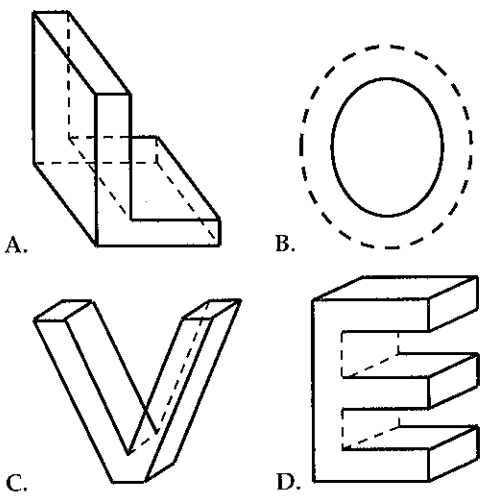
Câu 2: Trong các hình vẽ sau hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện? (Chọn câu đúng nhất)



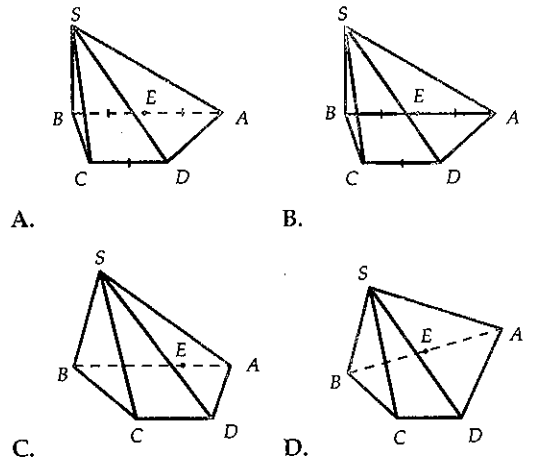
A. (I), (II). B. (I), (II), (III), (IV).

C. (I), (II), (III). D. (I).

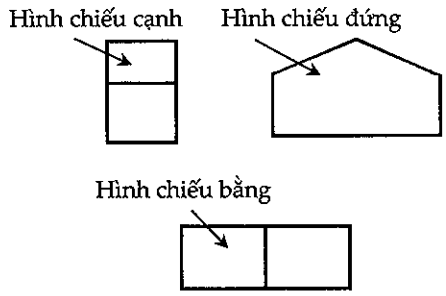
Câu 3: Hình nào sau đây vẽ đúng quy tắc?



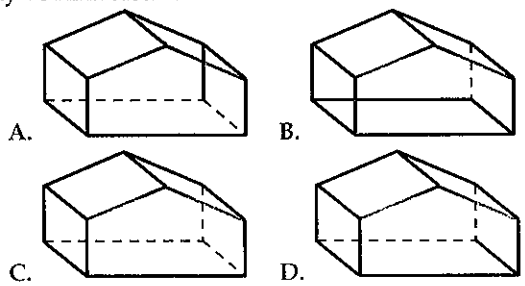
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB gấp đôi đáy nhỏ CD, E là trung điểm của đoạn AB. Hình vẽ nào sau đây vẽ đúng quy tắc?



Câu 5: Một hình không gian có hình chiếu đứng (nhìn từ trước vào (có thể nhìn từ sau) để từ hình 3D chuyển sang hình 2D), hình chiếu bằng (nhìn từ trên xuống (có thể nhìn từ dưới lên)), hình chiếu cạnh (từ từ trái sang (có thể nhìn từ phải sang)) lần lượt được thể hiện như sau:



Hãy vẽ hình biểu diễn của hình đó?



Câu 6: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Qua ba điểm xác định một và chỉ một mặt phẳng

B. Qua ba điểm phân biệt xác định một và chỉ một mặt phẳng

C. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định hai mặt phẳng phân biệt.

D. Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.

Câu 7: Xét các mệnh đề sau đây:

(I) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

(II) Có một và chỉ một mặt thẳng đi qua ba điểm phân biệt.

(III) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

(IV) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có duy nhất một điểm chung khác nữa.

Số mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên là:

A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 8: Cho n điểm phân biệt trong không gian ($n \geq 4$). Biết rằng bốn điểm bất kì trong n điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tất cả n điểm cùng thuộc một mặt phẳng.

B. Có đúng $n-1$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.

C. Có đúng $n-2$ điểm thuộc cùng một mặt phẳng.

D. Không tồn tại mặt phẳng nào chứa tất cả n điểm.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có đúng hai mặt phẳng cắt nhau theo một đường thẳng cho trước.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng cùng chứa hai cạnh của một tam giác thì trùng nhau.

D. Có đúng hai mặt phẳng phân biệt đi qua ba điểm phân biệt.

Câu 10: Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Có bao nhiêu mặt phẳng qua S và hai trong số bốn điểm A, B, C, D?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 11: Cho năm điểm A, B, C, D, E phân biệt trong đó không có 4 điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm đã cho?

A. 6. B. 10. C. 60. D. 8.

Câu 12: Cho n ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$) đường thẳng phân biệt đồng quy tại O trong đó không có ba đường thẳng nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua hai trong số n đường thẳng trên?

A. $\frac{n!}{2(n-2)!}$. B. $\frac{n!}{(n-2)!}$. C. $\frac{n!}{2}$. D. $n!$.

Câu 13: Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng nằm trong (α). Gọi A là một điểm thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc đường thẳng b và P là một điểm nằm ngoài (α). Khẳng định nào sau đây đúng:

A. PA và b chéo nhau. B. PA và b song song.

C. PA và b cắt nhau. D. PA và b trùng nhau.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$, I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. AJ, BI song song. B. AJ, BI trùng nhau.

C. AJ, BI cắt nhau D. AJ, BI chéo nhau.

Câu 15: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song với CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$, O là giao điểm của AC và BD. Cặp đường thẳng nào sau đây cắt nhau:

A. SO và AD. B. MN và SO.

C. MN và SC. D. SA và BC.

Câu 16: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I. Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây:

A. (ACD). B. (BCD). C. (CMN). D. (ABD).

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Khi đó BC và MN là hai đường thẳng:

A. chéo nhau. B. có hai điểm chung.

C. song song. D. cắt nhau.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC, N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. O là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Mặt phẳng (OMN) đi qua giao điểm của hai đường thẳng MN và CD.

B. Mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng AB.

C. Mặt phẳng (OMN) đi qua điểm A.

D. Mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng CD.

Câu 19: Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì

A. Cùng thuộc một đường tròn

B. Cùng thuộc một đường thẳng

C. Cùng thuộc một elip

D. Tạo thành một tam giác

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ (AB là đáy lớn, CD là đáy nhỏ). Khẳng định nào sau đây là sai:

A. Hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên.

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là SK trong đó K là một điểm thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO trong đó O là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI trong đó I là giao điểm của AD và BC.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác (AB không song song với CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$, O là giao điểm của AC và BD. Giả sử đường thẳng d là giao tuyến của (SAB) và (SCD). Nhận xét nào sau đây là sai:

A. d cắt CD. B. d cắt MN. C. d cắt AB. D. d cắt SO.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($BC // AD$). Mặt phẳng (P) di động chứa đường

thẳng AB và cắt các đoạn SC, SD lần lượt tại E, F. Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng CD và cắt SA, SB lần lượt tại G, H. I là giao điểm của AE, BF; J là giao điểm của CG, DH. Xét các mệnh đề sau:

(1) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

(2) Đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

(3) Đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm AB, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$, G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Tính độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) của hình chóp $ABCD$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{19}}{15}a$ B. $\frac{a\sqrt{141}}{30}$

C. $\frac{a\sqrt{34+15\sqrt{3}}}{15}$ D. $\frac{a\sqrt{34-15\sqrt{3}}}{15}$

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$, E nằm trên đoạn BC sao cho $BC = 3EC$, F là điểm nằm trên BD sao cho $CD = 3DF$. Gọi G là giao điểm của BF và DE. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACG) và (ABD) là:

A. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -4\overrightarrow{HD}$.

B. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$.

C. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = 4\overrightarrow{HD}$.

D. AH trong đó H thuộc BD sao cho $\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$.

Câu 25: Cho tứ diện $SABC$ có $AB = c, BC = a, AC = b$. AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBE) và (SCF) là:

A. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$.

B. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = -\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$.

C. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{a}{b+c}\overrightarrow{ID}$.

D. SI trong đó I thuộc AD sao cho $\overrightarrow{AI} = \frac{-a}{b+c}\overrightarrow{ID}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\frac{SH}{SC}$?

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm của SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{SR}{SB}$?

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 28: Cho tứ diện $SABC$, E, F lần lượt thuộc đoạn AC, AB. Gọi K là giao điểm của BE và CF. Gọi D là giao điểm của (SAK) với BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF} \ge 6$ B. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF} \le 6$

C. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF} > 6$ D. $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF} < 6$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$, D, M lần lượt là trung điểm của BC, AD. Gọi E là giao điểm của (SBM) với AC, F là giao điểm của (SCM) với AB. Tính $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}$?

A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm E, F, G, H. Gọi $I = AC \cap BD$, $J = EG \cap SI$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$ B. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG} \ge 2\frac{SI}{SJ}$

C. $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH} \ge 2\frac{SI}{SJ}$ D. $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG} > \frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}$

Câu 31: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB, AD sao cho $\frac{BM}{MA}=\frac{2}{3}, \frac{NC}{BN}=\frac{1}{2}$. Gọi P là điểm trên cạnh SD sao cho $\frac{PD}{PS}=\frac{1}{5}$. J là giao điểm của SO với (MNP). Tính $\frac{SJ}{SO}$?

A. $\frac{10}{11}$. B. $\frac{1}{11}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$. E là điểm thuộc đoạn AB sao cho $EA = 2EB$. F, G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC} = 5\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{GC} = -5\overrightarrow{GB}$. H, I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC} = -5\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{ID} = 5\overrightarrow{IC}$, J thuộc tia đối của tia DA sao cho D là trung điểm của AJ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn điểm E, F, H, J đồng phẳng

B. Bốn điểm E, F, I, J đồng phẳng

C. Bốn điểm E, G, H, J đồng phẳng

D. Bốn điểm E, G, I, J đồng phẳng

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$, E, U là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $\overrightarrow{EA}=-2\overrightarrow{EB}$, $5\overrightarrow{UA}=4\overrightarrow{UB}$. F, G là các điểm thuộc đường thẳng BC sao cho $\overrightarrow{FC}=5\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GB}$. H, I là các điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HD}$, $\overrightarrow{ID}=5\overrightarrow{IC}$. J, K là các điểm nằm trên đường thẳng DA sao cho $\overrightarrow{JA}=2\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{KD}=5\overrightarrow{KA}$. Bốn điểm nào dưới đây lập nên một tứ diện?

A. E, F, H, J B. E, G, I, K
C. U, G, H, J D. U, F, I, K

Câu 34: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC).

a) Thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác B. Tứ giác C. Ngũ giác D. Lục giác

b) Gọi Q là giao điểm của (MNP) với AD, I là giao điểm của MN với PQ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S_{MPNQ}=2S_{MPN}$ B. $S_{MPNQ}=2S_{MPQ}$
C. $S_{MPNQ}=4S_{MPI}$ D. $S_{MPNQ}=4S_{PIN}$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, CD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là:

A. Tam giác B. Tứ giác C. Ngũ giác D. Lục giác

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là trung điểm của cạnh SA, F, G là các điểm thuộc cạnh SC, AB (F không là trung điểm của SC). Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác B. Tứ giác C. Ngũ giác D. Lục giác

Câu 37: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$ với đáy là đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n\geq 3, n\in N$). Trên tia đối của tia A_1S lấy điểm B_1, B_2, B_n là các điểm nằm trên cạnh SA_2, SA_n. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$ là:

A. Đa giác $n-2$ cạnh B. Đa giác $n-1$ cạnh
C. Đa giác n cạnh D. Đa giác $n+1$ cạnh

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là điểm thuộc cạnh bên SD sao cho $SD=3SE$. F là trọng tâm tam giác SAB, G là điểm thay đổi trên cạnh BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác B. Tứ giác C. Ngũ giác D. Lục giác

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, E là một điểm thuộc mặt bên (SCD). F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và SB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) có thể là:

A. Tam giác, tứ giác. B. Tứ giác, ngũ giác.
C. Tam giác, ngũ giác. D. Ngũ giác.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$, E là trung điểm của SB, F thuộc SC sao cho $3\overrightarrow{SF}=2\overrightarrow{SC}$, G là một điểm thuộc miền trong tam giác SAD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tứ giác. B. Tứ giác, ngũ giác.
C. Tam giác, ngũ giác. D. Ngũ giác.

Câu 41: Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP=2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi (MNP) là:

A. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. B. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$.
C. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$. D. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$.

Câu 42: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Trên tia đối của các tia CB, DA lần lượt lấy điểm E, F sao cho $CE=a$, $DF=a$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MEF) là:

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{18}$. B. $S=\dfrac{a^2}{3}$.
C. $S=\dfrac{a^2}{6}$. D. $S=\dfrac{a^2\sqrt{33}}{9}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SC. Gọi Q là giao điểm của SD với (MNP). Tính $\dfrac{SQ}{SD}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với (MNP). Tính $\dfrac{SH}{SC}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 45: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Trên đường thẳng DS lấy điểm P sao cho D là trung điểm của SP. Gọi R là giao điểm của SB với mặt phẳng (MNP). Tính $\dfrac{SR}{SB}$?

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{4}$. C. $\dfrac{3}{4}$. D. $\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án D.

Câu 2: Đáp án B.

Câu 3: Đáp án A.

Câu 4: Đáp án A.

Theo quy tắc vẽ hình, các đoạn thẳng song song được vẽ bằng các đoạn thẳng song song nên đáp án D bị loại. Trung điểm được vẽ ở chính giữa đoạn nên ý C bị loại. Nét khuất được vẽ bởi nét đứt đoạn, nên với góc nhìn này với đáp án B thì hoặc *AB* đứt đoạn hoặc *SC, SD* đứt đoạn. Do đó chỉ có đáp án A đúng.

Câu 5: Đáp án C.

Hình A, B, D sai khi vẽ các đường không nhìn thấy bằng nét liền.

Câu 6: Đáp án D.

- Đáp án A, B sai, các em có thể lấy ví dụ ba điểm A, B, C phân biệt, thẳng hàng, thì có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm đó.
- Đáp án C sai, vì theo tính chất thừa nhận, ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng đi qua.

Câu 7: Đáp án B.

Theo các tính chất thừa nhận, ta nhận thấy (I), (II), (III) đúng và nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa. Điều đó đồng nghĩa với nhận xét (IV) là sai. Như vậy có 1 quy tắc sai.

Câu 8: Đáp án A.

- Nếu *n* điểm đã cho cùng thuộc một đường thẳng thì hiển nhiên *n* điểm thuộc cùng một mặt phẳng. Do đó loại được đáp án B, C, D.
- Nếu *n* điểm đã cho không cùng thuộc một đường thẳng thì trong chúng phải có ba điểm không thẳng hàng. Khi đó ba điểm này xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mặt phẳng (P). Lấy một điểm trong $n-3$ điểm còn lại thì theo giả thiết điểm đó phải thuộc mặt phẳng (P). Suy ra tất cả các điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 9: Đáp án C.

Một đường thẳng cho trước có vô số mặt phẳng đi qua.

Hai mặt phẳng đã có một điểm chung thì có vô số điểm chung khác nữa. Còn có trường hợp hai mặt phẳng không có điểm chung nào.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.

Như vậy ta chọn ý C.

Câu 10: Đáp án D.

Số cách chọn hai trong bốn điểm *A, B, C, D* là $C_4^2 = 6$.

Vậy có 6 mặt phẳng đi qua *S* và hai trong bốn điểm *A, B, C, D*.

Câu 11: Đáp án B.

Chọn ba trong năm điểm trên sẽ tạo nên một mặt phẳng. Do đó, số mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm trên là $C_5^3 = 10$.

Câu 12: Đáp án A.

Hai đường thẳng phân biệt cắt nhau tại *O* xác định một mặt phẳng. Nên số các mặt phẳng chứa hai trong *n* đường thẳng trên là $C_n^2 = \frac{n!}{2(n-2)!}$.

Câu 13: Đáp án A.

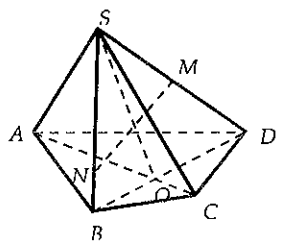
Dễ thấy *PA, b* không trùng nhau.

Giả sử *PA, b* không chéo nhau, khi đó *PA, b* hoặc song song hoặc cắt nhau. Lúc đó, theo cách xác định một mặt phẳng, ta thấy *PA, b* cùng thuộc một mặt phẳng (β). Các mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ đều chứa đường thẳng *b* và đi qua điểm *A* ở ngoài *b* nên hai mặt phẳng (α), (β) trùng nhau. Suy ra điểm *P* phải thuộc mặt phẳng (α) (vô lí). Như vậy *PA, b* chéo nhau.

Câu 14: Đáp án D

Giả sử *AJ, BI* đồng phẳng, suy ra *AI, BJ* đồng phẳng do đó *A, B, C, D* cùng thuộc một mặt phẳng (vô lí). Do đó *AJ, BI* không đồng phẳng, do đó *AJ, BI* chéo nhau. Chọn đáp án D.

Câu 15: Đáp án B.



Giả sử *SO* và *AD* cắt nhau. Khi đó *SO* và *AD* đồng phẳng, suy ra *S* thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ (vô lí). Đáp án A bị loại.

Giả sử *MN* cắt *SC*. Khi đó *MN* và *SC* đồng phẳng, suy ra *C* thuộc mặt phẳng (SBD) (vô lí). Do đó đáp án C bị loại.

Giả sử *SA* cắt *BC*. Khi đó *SA, BC* đồng phẳng, suy ra *S* thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ (vô lí). Đáp án D bị loại.

MN, SO cùng nằm trong mặt phẳng (SBD), không song song và trùng nhau.

Câu 16: Đáp án A.

Do I là giao điểm của MN và BD nên I thuộc các mặt phẳng chứa BD và các mặt phẳng chứa MN. Do đó I thuộc (BCD), (CMN), (ABD).

Giả sử I thuộc (ACD) khi đó B thuộc (ACD) vô lí.

Câu 17: Đáp án A.

Giả sử MN và BC đồng phẳng. Do D, A lần lượt thuộc đường thẳng MC, NB nên D, A cũng thuộc mặt phẳng đó. Như vậy A, B, C, D đồng phẳng (vô lí). Như vậy đáp án B, C, D không thỏa mãn.

Câu 18: Đáp án A.

Gọi I là giao điểm của MN và CD. Khi đó I thuộc (OMN). Vậy đáp án A đúng.

Giả sử (OMN) chứa đường thẳng AB. Khi đó O, B cùng thuộc mặt phẳng (AMN). Suy ra O, B cùng thuộc mặt phẳng (ACD) (vô lí). Đáp án B không thỏa mãn.

Giả sử (MNO) đi qua điểm A. Do D, C lần lượt thuộc các đường thẳng AN, AM nên D, C thuộc mặt phẳng (AMN). Như vậy hai mặt phẳng (ODC) và (AMN) trùng nhau. Suy ra B thuộc mặt phẳng (ACD) vô lí. Vậy đáp án C bị lại.

Tương tự ta cũng dễ dàng suy ra đáp án D bị loại.

Câu 19: Đáp án B.

Giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt là một đường thẳng, nên ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt sẽ nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt.

Câu 20: Đáp án B.

Hiển nhiên hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên nên đáp án A đúng.

Ta thấy giao tuyến của (SAB) và $(ABCD)$ là AB, K là điểm thuộc cả hai mặt phẳng do đó K thuộc AB. Tương tự ta cũng chứng minh được K thuộc CD. Như vậy K thuộc cả hai đường thẳng AB và CD (vô lí do AB và CD song song). Do vậy, đáp án B sai.

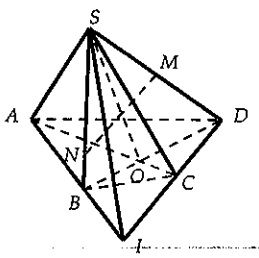
O thuộc AC nên O thuộc mặt phẳng (SAC).

O thuộc BD nên O thuộc mặt phẳng (SBD).

Do đó SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Tương tự ta cũng dễ thấy SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Như vậy đáp án C, D đúng.

Câu 21: Đáp án B.



Gọi I là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$$

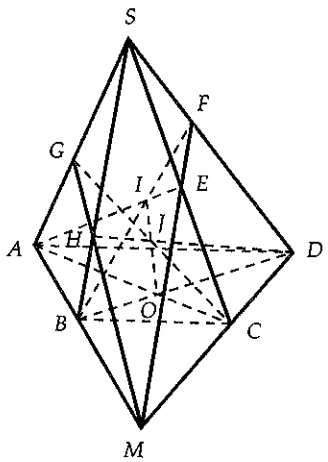
Lại có $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Do đó: $SI = (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow d \equiv SI$.

Vậy d cắt AB, CD và SO.

Giả sử d cắt MN. Khi đó M thuộc mặt phẳng (SAB). Suy ra D thuộc (SAB) vô lí. Vậy d không cắt MN. Đáp án B sai.

Câu 22: Đáp án D.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của AB và CD, O là giao điểm của AC và BD. Khi đó M, O cố định.

Như vậy: E, F, M cùng nằm trên hai mặt phẳng (P) và (SCD), do đó ba điểm M, E, F thẳng hàng. Vậy các đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định M.

Tương tự ta có G, M, H cùng nằm trên hai mặt phẳng (Q) và (SAB) do đó, G, H, M thẳng hàng. Vậy các đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định M.

Do $\begin{cases} I \in AE \subset (SAC) \\ I \in BF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

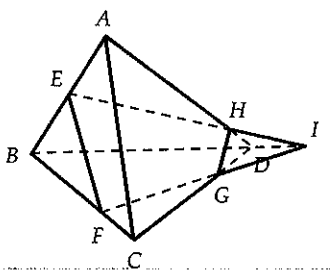
Tương tự ta cũng có:

$J \in (SAC) \cap (SBD)$, $O \in (SAC) \cap (SBD)$

Do đó ba điểm I, J, O thẳng hàng. Vậy IJ luôn đi qua điểm cố định O.

Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 23: Đáp án A.



Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của FG với BD. Trong mặt phẳng (ADB), gọi H là giao điểm của IE với AD.

Khi đó đoạn HG chính là đoạn giao tuyến của mặt (EFG) với mặt (ACD) của hình chóp $ABCD$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác BCD với ba điểm I, G, F thẳng hàng ta có:

$$\frac{ID}{IB}.\frac{FB}{FC}.\frac{GC}{GD}=1\Rightarrow\frac{ID}{IB}=\frac{1}{4}$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABD với ba điểm I, H, E thẳng hàng ta có:

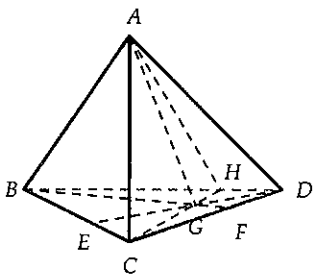
$$\frac{HD}{HA}.\frac{EA}{EB}.\frac{IB}{ID}=1\Rightarrow\frac{HD}{HA}=\frac{1}{4}\Rightarrow HD=\frac{a}{5}$$

Áp dụng định lí cosin vào tam giác HDG ta có:

$$HG^2=HD^2+DG^2-2DH.DG.\cos 60^0$$

$$=\frac{a^2}{25}+\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{15}=\frac{19a^2}{225}\Rightarrow HG=\frac{\sqrt{19}}{15}a$$

Câu 24: Đáp án C.



Trong (BCD), gọi H là giao điểm của CG và BD.

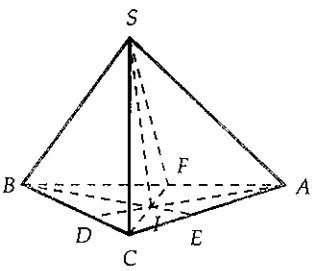
Dễ thấy H thuộc đoạn BD nên $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{HD}$ cùng hướng. Do đó đáp án A, D bị loại.

Áp dụng định lí Ceva trong tam giác BCD với BF, DE, CH đồng quy ta có:

$$\frac{EB}{EC}.\frac{FC}{FD}.\frac{HD}{HB}=1\Rightarrow 2.2.\frac{HD}{HB}=1\Rightarrow\frac{HD}{HB}=\frac{1}{4}\Rightarrow BH=4DH$$

Do $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{HD}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BH}=4\overrightarrow{HD}$.

Câu 25: Đáp án A.



Do I thuộc đoạn AD nên $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{ID}$ cùng hướng. Do đó B, D bị loại.

AD là phân giác trong của tam giác ABC nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow BD=\frac{ac}{b+c}.$$

Ta có: BI là phân giác trong của tam giác ABD nên theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{IA}{ID}=\frac{BA}{BD}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow IA=\frac{b+c}{a}ID$$

Do đó: $\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a}\overrightarrow{ID}$.

Câu 26: Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO. Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 27: Đáp án D.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN$, $O=AC\cap BD$.

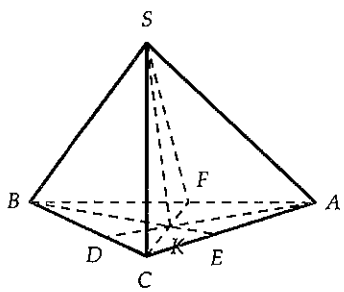
Dễ thấy R chính là giao điểm của IP với SB.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SBD ta có:

$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{5}$$

Câu 28: Đáp án A.



Nếu K trùng với trọng tâm G thì $\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}=6$.

Do đó C, D bị loại.

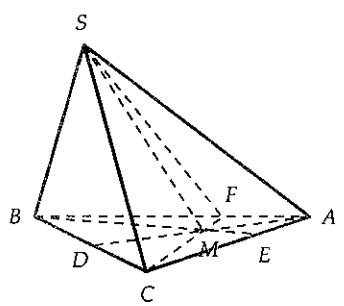
Ta có: $\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}=\frac{S_{KBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{KAB}}{S_{ABC}}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\frac{DK}{DA}+\frac{EK}{EB}+\frac{FK}{FC}\right)\left(\frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\right)\geq 9$$

$$\Rightarrow\frac{DA}{DK}+\frac{EB}{EK}+\frac{FC}{FK}\geq 9\Rightarrow\frac{AK}{KD}+\frac{BK}{KE}+\frac{CK}{KF}\geq 6.$$

Câu 29: Đáp án A.



Ta có:

$$\frac{BM}{ME}=\frac{S_{ABM}}{S_{AME}}=\frac{S_{CBM}}{S_{CME}}=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AME}+S_{CME}}$$

$$=\frac{S_{ABM}+S_{CBM}}{S_{AMC}}=\frac{BD}{CD}+\frac{BF}{FA}$$

$$\Rightarrow\frac{BF}{AF}=\frac{BM}{ME}-1=\frac{BM-ME}{ME}(1)$$

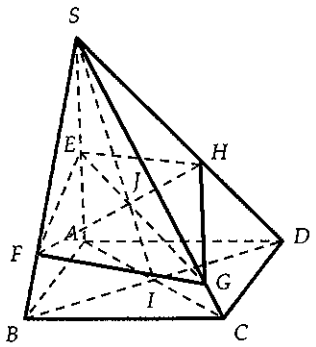
Tương tự ta cũng chứng minh được:

$$\frac{CM}{MF}=\frac{CE}{AE}+\frac{CD}{BD}\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{CM}{MF}-1=\frac{CM-MF}{MF}(2)$$

và $1=\frac{AM}{MD}=\frac{AE}{CE}+\frac{AF}{BF}(3)$

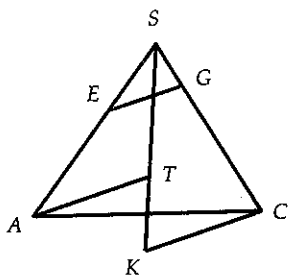
Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{MF}{CM-MF}+\frac{ME}{BM-ME}=1$.

Câu 30: Đáp án A.



Xét trường hợp đặc biệt, E, F, G, H lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Khi đó ta dễ dàng loại được đáp án D.

Dựng $AT//EG\ (T\in SI)$, $CK//EG\ (K\in SI)$.



Theo định lí Thales, ta có:

$$\frac{SA}{SE}=\frac{ST}{SJ},\frac{SC}{SG}=\frac{SK}{SJ}\text{ và }\frac{IT}{IK}=\frac{IA}{IC}=1.$$

Suy ra: $\frac{SA}{SE}+\frac{SC}{SG}=\frac{ST+SK}{SJ}=\frac{SI-IT+SI+IK}{SJ}=2\frac{SI}{SJ}$.

Như vậy, ý B bị loại.

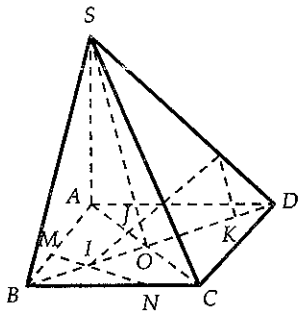
Tương tự ta chứng minh được $\frac{SB}{SF}+\frac{SD}{SH}=2\frac{SI}{SJ}$.

Từ đây ta thấy ngay ý C bị loại và đáp án A là đáp án lựa chọn.

Chú ý: Cho tam giác ABC. Gọi O là trung điểm AC, M, N là hai điểm nằm trên cạnh AB, BC. MN cắt BO tại I.

Khi đó: $\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{2BO}{BI}$.

Câu 31: Đáp án A.



Theo chú ý câu 30 ta có:

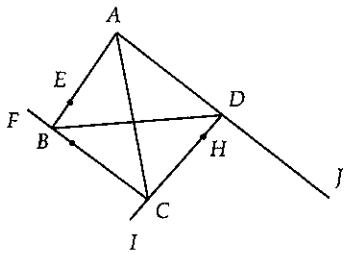
$$\frac{BA}{BM}+\frac{BC}{BN}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4\Rightarrow\frac{2BO}{BI}=4$$

$$\Rightarrow\frac{BO}{BI}=2\Rightarrow\frac{OI}{BO}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{OI}{OD}=\frac{1}{2}$$

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác SOD ta có:

$$\frac{IO}{ID}.\frac{PD}{PS}.\frac{JS}{JO}=1\Rightarrow\frac{JS}{JO}=10\Rightarrow\frac{SJ}{SO}=\frac{10}{11}$$

Câu 32: Đáp án A.



Dựa vào nhận xét ví dụ 2, ta có:

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên E, F, H, J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{2}=-\frac{1}{25}$ nên E, F, I, J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).(-5).\frac{1}{2}=-1$ nên E, G, H, J không đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\left(-\frac{1}{5}\right).\frac{1}{5}.\frac{1}{2}=\frac{1}{25}$ nên E, G, I, J không đồng phẳng.

Câu 33: Đáp án D.

Áp dụng nhận xét ví dụ 2 ta có:

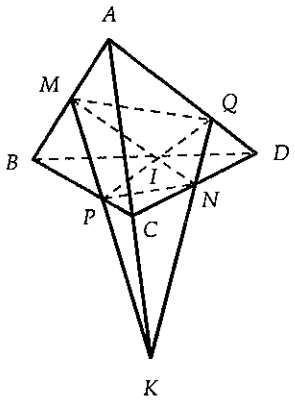
$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=-2.\frac{1}{5}.(-5).\frac{1}{2}=1$ nên bốn điểm E, F, H, J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=-2.\left(-\frac{1}{2}\right).5.\frac{1}{5}=1$ nên bốn điểm E, G, I, K đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BG}}{\overline{CG}}.\frac{\overline{CH}}{\overline{DH}}.\frac{\overline{DJ}}{\overline{AJ}}=\frac{4}{5}.\left(-\frac{1}{2}\right).(-5).\frac{1}{2}=1$ nên bốn điểm U, G, H, J đồng phẳng.

$\frac{\overline{AU}}{\overline{BU}}.\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}.\frac{\overline{CI}}{\overline{DI}}.\frac{\overline{DK}}{\overline{AK}}=\frac{4}{5}.\frac{1}{5}.5.\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$ nên bốn điểm *U, F, I, K* không đồng phẳng. Do đó bốn điểm này lập nên một tứ diện.

Câu 34: Đáp án B, A.



a) Do tứ diện *ABCD* có bốn mặt nên thiết diện không thể là ngũ giác hay lục giác. Nó chỉ có thể là tam giác hoặc tứ giác.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi *K* là giao điểm của *MP* với *AC* (*P* không phải là trung điểm đoạn *BC* nên *MP* cắt *AC*).

Trong mặt phẳng (ACD), gọi *Q* là giao điểm của *KN* với *AD*.

Do $Q\in KN\subset(MNP)$ nên *Q* là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với *AD*.

Ta có: $\begin{cases}(MNP)\cap(ABD)=MQ\\(MNP)\cap(ABC)=MP\\(MNP)\cap(BCD)=PN\\(MNP)\cap(ACD)=NQ\end{cases}$

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác *MPNQ*.

Ta chọn đáp án **B**.

b) Áp dụng Ví dụ 11, do *M, N, P, Q* đồng phẳng nên $\frac{AM}{BM}.\frac{BP}{CP}.\frac{CN}{DN}.\frac{DQ}{AQ}=1$

$\Rightarrow\frac{BP}{CP}.\frac{DQ}{AQ}=1$ (do *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, CD*). Từ đây suy ra: $\frac{BP}{CP}=\frac{AQ}{DQ}$.

Giả sử $\frac{BP}{PC}=k$. Khi đó ta suy ra: $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{PC},\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{QD}$

Suy ra: $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AQ}=-k\left(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}\right)$ (1)

Do *J* là trung điểm của *PQ*.

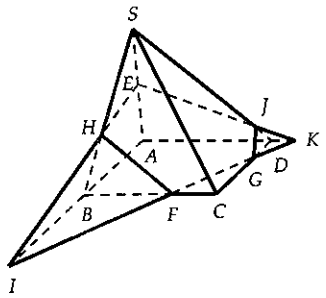
Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PJ}\\\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BP}$ (2).

Chứng minh tương tự ta cũng có: $2\overrightarrow{NJ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\overrightarrow{MJ}=-k\overrightarrow{NJ}$. Điều này dẫn đến *M, N, J* thẳng hàng. Như vậy *I* trùng *J*. Điều này suy ra $S_{MPNQ}=2S_{MPN}$.

Chọn đáp án **A**.

Câu 35: Đáp án C.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi *I, K* lần lượt là giao điểm của *FG* với *AB, AD*.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi *H* là giao điểm của *IE* với *SB*. Trong mặt phẳng (SAD), gọi *J* là giao điểm của *EK* với *SD*.

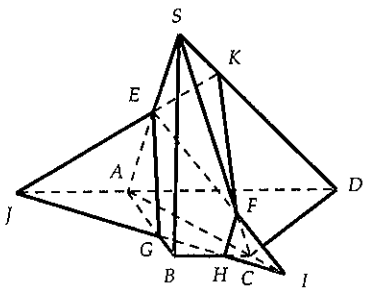
Ta có: $(EFG)\cap(ABCD)=FG$,

$(EFG)\cap(SCD)=GJ$, $(EFG)\cap(SAD)=JE$,

$(EFG)\cap(SAB)=HE$, $(EFG)\cap(SBC)=HF$

Do đó ngũ giác *EHFGJ* là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 36: Đáp án C.



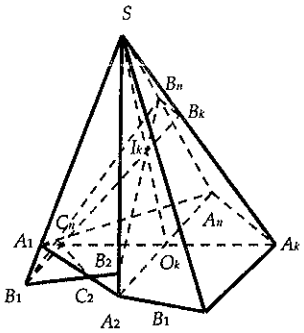
Trong mặt phẳng (SAC), gọi *I* là giao điểm của *EF* với *AC*.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi *H* và *J* lần lượt là giao điểm của *IG* với *BC* và *AB*. Trong mặt phẳng (SAD), gọi *K* là giao điểm của *JE* với *SD*.

Khi đó ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=GH\\(EFG)\cap(SAB)=GE\\(EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SCD)=KF\\(EFG)\cap(SBC)=FH\end{cases}$

Vậy ngũ giác *EKFHG* là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG).

Câu 37: Đáp án D.



Trong mặt phẳng (SA_1A_2) gọi C_2 là giao điểm của B_1B_2 với A_1A_2.

Trong mặt phẳng (SA_1A_n) gọi C_n là giao điểm của B_1B_n với A_1A_n.

Trong mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$ gọi $O_k\,(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của A_1A_k với A_2A_n.

Trong mặt phẳng (SA_2A_n), gọi $I_k\,(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SO_k với B_2B_n.

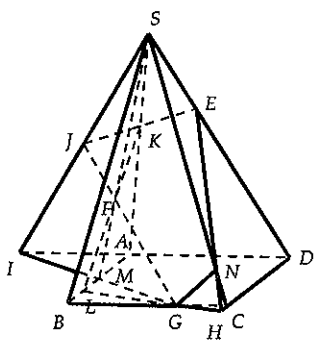
Trong mặt phẳng (SA_1A_k), gọi $B_k\,(k=3,4,...,n-1)$ là giao điểm của SA_k với B_1I_k.

Do $B_k \in B_1I_k \subset (B_1B_2B_n)$ nên B_k là giao điểm của $SA_k\,(k=3,4,...,n-1)$ với mặt phẳng $(B_1B_2B_n)$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi $(B_1B_2B_n)$ là đa giác $C_2B_2...B_nC_n$.

Câu 38: Đáp án C.

Cách 1:



Gọi M là trung điểm của AB, khi đó S, F, M thẳng hàng.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MG với AD. Khi đó: $SI=(SMG)\cap(SAD)$.

Trong mặt phẳng (SMG), gọi J là giao điểm của FG với SI. Ta thấy J thuộc FG nên J thuộc (EFG). Trong (SAD), gọi K là giao điểm của JE với SA. Trong mặt phẳng (SAB), gọi L là giao điểm của KF với AB.

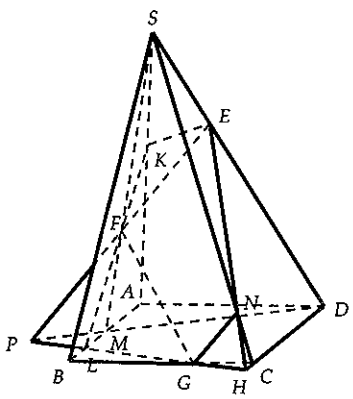
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của LG với CD. Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=LG;\ (EFG)\cap(SBC)=GN\\(EFG)\cap(SCD)=NE;\ (EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SAB)=KL\end{cases}$

Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (EFG).

Chú ý: Mấu chốt của ví dụ trên là việc dựng được điểm J là giao điểm của FG với (SAD) (thông qua việc dựng giao tuyến SI của mặt phẳng (SFG) với mặt phẳng (SAD)). Có thể dựng thiết diện trên bằng nhiều cách với việc dựng giao điểm (khác E, F, G) của một trong các đường thẳng EF, FG, hoặc GE với một mặt của hình chóp. Sau đây, tôi xin trình bày cách hai, điểm mấu chốt là xác định giao điểm của EF với mặt phẳng $(ABCD)$.

Cách 2:



Trong mặt phẳng (SMD), gọi P là giao điểm của EF với MD.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H, L là giao điểm của PG với CD, AB.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi K là giao điểm của LF với SA.

Trong mặt phẳng (SCD), gọi N là giao điểm của EH với SC.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=LG;\ (EFG)\cap(SBC)=GN\\(EFG)\cap(SCD)=NE;\ (EFG)\cap(SAD)=EK\\(EFG)\cap(SAB)=KL\end{cases}$

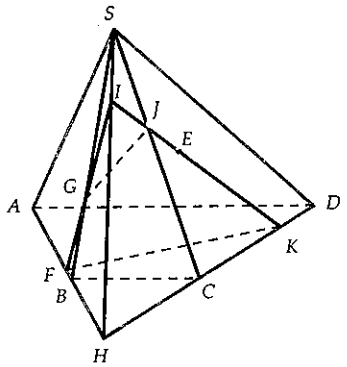
Vậy ngũ giác $LGNEK$ là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (EFG).

Câu 39: Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của AB và CD. Trong mặt phẳng (SAB), gọi I là giao điểm của FG và SH.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:



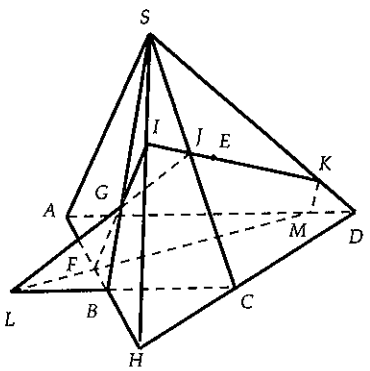
Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt đoạn CD tại K.

Ta có $J \in IE \subset (EFG)$ nên J là giao điểm của (EFG) với SC, $K \in IE \subset (EFG)$ nên K là giao điểm của (EFG) với CD.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=FK;\ (EFG)\cap(SAB)=FG\\(EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK\end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $KFGJ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2:



Trong mặt phẳng (SCD), IE cắt SC tại J và cắt SD tại K (cắt CD tại một điểm nằm ngoài đoạn CD).

Trong mặt phẳng (SBC):

Nếu GJ song song với BC thì ta có: $\frac{BG}{GS}=\frac{CJ}{JS}$. Gọi T là giao điểm của IE với CD.

Áp dụng định lí Menelaus vào các tam giác SBH và SCH ta có:

$$\frac{FB}{FH}.\frac{IH}{IS}.\frac{GS}{GB}=1=\frac{TC}{TH}.\frac{IH}{IS}.\frac{JS}{JC}\Rightarrow\frac{FB}{FH}=\frac{TC}{TH}.$$

Điều này chỉ xảy ra khi T thuộc đoạn CD (vô lí).

Do vậy GJ cắt BC, giả sử tại L.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của LF với AD.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=FM;\ (EFG)\cap(SAB)=FG\\(EFG)\cap(SBC)=GJ;\ (EFG)\cap(SCD)=JK\\(EFG)\cap(SAD)=KM\end{cases}$

$\Rightarrow$ Ngũ giác $KJGFM$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

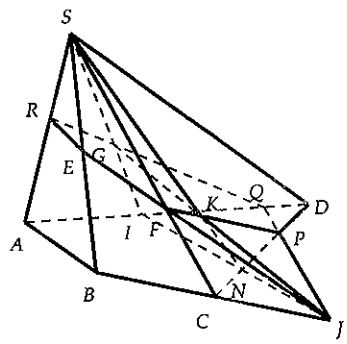
Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) hoặc là tứ giác hoặc ngũ giác.

Câu 40: Đáp án B.

Trong mặt phẳng (SBC), gọi J là giao điểm của EF với BC. Trong mặt phẳng (SAD), gọi I là giao điểm của SG với AD. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N là giao điểm của IJ với CD. Trong mặt phẳng (SIJ), gọi K là giao điểm của JG với SN.

Trong mặt phẳng (SCD), có hai khả năng xảy ra như sau:

Trường hợp 1: FK cắt đoạn CD tại P.

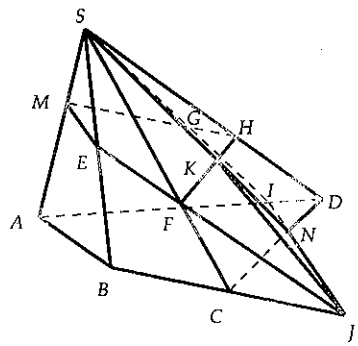


Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của JP với AD. Trong mặt phẳng (SAD), gọi R là giao điểm của QG với SA.

Ta có: $\begin{cases}(EFG)\cap(ABCD)=PQ;\ (EFG)\cap(SAD)=QR\\(EFG)\cap(SAB)=RE;\ (EFG)\cap(SBC)=EF\\(EFG)\cap(SCD)=FP\end{cases}$

Trường hợp này, ngũ giác $REFPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG).

Trường hợp 2: FK cắt SD tại H (FK không cắt đoạn CD).



Trong mặt phẳng (SAD), gọi M là giao điểm của HG với SA (HG không thể cắt đoạn AD vì giả sử ngược lại HG cắt cạnh AD tại O, khi đó JO sẽ cắt cạnh CD (vô lí vì (EFG) đã cắt cạnh SC, SD)).

Khi đó: $\begin{cases}(EFG)\cap(SCD)=FH;\ (EFG)\cap(SAD)=MH\\(EFG)\cap(SAB)=ME;\ (EFG)\cap(SBC)=EF\end{cases}$

Trường hợp này, tứ giác $MEFH$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (EFG).

Câu 41: Đáp án A.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi I là giao điểm của NP với CD.

Trong mặt phẳng (ACD), gọi Q là giao điểm của AD với MI. Suy ra Q là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP). Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác BCI ta có P là trọng tâm của tam giác, suy ra D là trung điểm của CI.

Trong tam giác ACI ta có Q là trong tâm tam giác nên $\frac{QA}{QD}=2$. Ta có $\frac{IP}{IN}=\frac{IQ}{IM}=\frac{2}{3}\Rightarrow PQ//MN$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang với đáy lớn MN.

Ta có: $AQ=4a,\ AM=3a=MN,\ PQ=2a$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAQ ta có:

$$MQ^2=AM^2+AQ^2-2AM.AQ.\cos 60^0$$
$$=16a^2+9a^2-12a^2=13a^2\Rightarrow MQ=a\sqrt{13}.$$

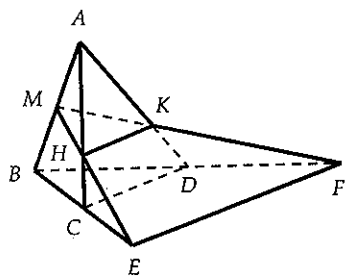
Tương tự ta cũng tính được $NP=a\sqrt{13}$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân.

Do đó:

$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{MQ^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}}{2}=\frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Câu 42: Đáp án C.



Trong mặt phẳng (ABC), gọi H là giao điểm của ME với AC. Trong mặt phẳng (ABD), gọi K là giao điểm của MF với AD.

Ta có: $\begin{cases}(MEF)\cap(ABC)=MH\\(MEF)\cap(ABD)=MK\\(MEF)\cap(ACD)=HK\end{cases}$.

Do đó tam giác MHK là thiết diện của tứ diện cắt bởi (MEF).

Dễ thấy H, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABE và ABF.

Ta có: $AH=AK=HK=\frac{2a}{3}$

Xét hai tam giác AMH và AMK có AM chung, $\widehat{MAH}=\widehat{MAK}=60^0, AH=AK=\frac{2a}{3}$ nên hai tam giác này bằng nhau. Suy ra $MH=MK$.

Vậy tam giác MHK cân tại M.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMH:

$$MH^2=AM^2+AH^2-2AM.AH.\cos 60^0$$
$$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}=\frac{13a^2}{36}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{13}}{6}$$

Gọi I là trung điểm của đoạn HK.

Ta có: $MI\perp HK$.

Suy ra: $MI^2=MH^2-HI^2=\frac{13a^2}{36}-\frac{a^2}{9}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow MI=\frac{a}{2}$.

Diện tích thiết diện MHK là:

$$S=\frac{1}{2}MI.HK=\frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{6}$$

Câu 43: Đáp án C.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của MN với DC và F là trung điểm của CD.

Dễ thấy Q chính là giao điểm của PE với SD.

Ta có $ME=BC$.

Áp dụng Thales ta có: $\frac{ND}{MF}=\frac{ED}{EF}=\frac{1}{2}\Rightarrow ED=\frac{1}{2}EF$.

Suy ra D là trung điểm của EF.

DQ là đường trung bình của tam giác EPF ta có: $\frac{DQ}{PF}=\frac{1}{2}$

PF là đường trung bình của tam giác CSD ta có: $\frac{DS}{PF}=2$.

Từ đó suy ra: $\frac{SD}{DQ}=4\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$.

Câu 44: Đáp án B.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi I là giao điểm của MN với AO.

Dễ thấy H chính là giao điểm của PO với SC.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm AO. Suy ra $\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$ và PI là đường trung bình của tam giác OSA. Do đó $IH//SA$.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{SH}{SD}=\frac{AI}{AC}=\frac{1}{4}$.

Câu 45: Đáp án D.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I=BD\cap MN$, $O=AC\cap BD$.

Dễ thấy R chính là giao điểm của IP với SB.

Do MN là đường trung bình của tam giác ABD nên I là trung điểm DO. Suy ra $\frac{DI}{IB}=\frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác SBD ta có:

$$\frac{BR}{RS}.\frac{PS}{PD}.\frac{BI}{ID}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}.2.\frac{1}{3}=1\Rightarrow\frac{BR}{RS}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{SR}{SB}=\frac{2}{5}.$$

Đường thẳng song song với đường thẳng

A. Lý thuyết

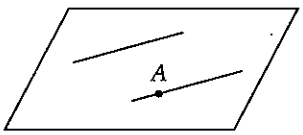
1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc song song hoặc cắt nhau. Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì ta nói hai đường thẳng đó song song song với nhau.

Định nghĩa:

> Hai đường thẳng phân biệt a, b trong không gian được gọi là song song với nhau, kí hiệu là $a // b$ nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

2. Tính chất

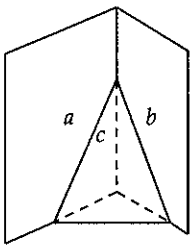


Định lí 1:

> Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm A ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a đi qua A và song song với đường thẳng d.

Chú ý:

> Định lí này cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với định lí 2 dưới đây cho ta một cách để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

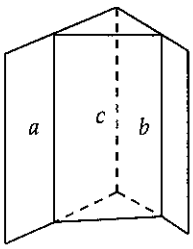


Định lí 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng):

> Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

> Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Đến đây ta có thể bổ sung một phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

> *Bước 1:* Chỉ ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.
>
> *Bước 2:* Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng
>
> *Bước 3:* Khi đó $(\alpha)\cap(\beta)=Mx//a//b$.

Định lí 3:

> Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Như vậy, cho hai đường thẳng phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} a//c \\ b//c \end{cases} \Rightarrow a//b$.

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian.

a) Định nghĩa

> Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

b) Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Bước 1: Dựng góc

- Tìm trên hình vẽ xem góc giữa hai đường thẳng đã có sẵn hay không?
- Nếu không có sẵn thì ta tiến hành:

+ Chọn một điểm O bất kì trong không gian.

+ Qua O dựng đường thẳng $a'//a$, $b'//b$. Góc nhọn hay góc vuông tạo bởi a', b' chính là góc giữa a và b.

- Lưu ý:

+ Ta thường lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng a và b.

+ Chọn O sao cho góc giữa a', b' là góc của một tam giác mà độ dài các cạnh của nó đã biết hoặc có thể tính dễ dàng.

Bước 2: Tính góc

Dùng hệ thức lượng trong tam giác: tỉ số lượng giác hay định lí cosin, sin.

Trường hợp góc giữa hai đường thẳng a, b bằng 90^0 ta nói $a \perp b$.

B. Dạng toán về đường thẳng song song với đường thẳng

Dạng 1

Chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian

Phương pháp: Để chứng minh hai đường thẳng song song trong không gian ta sẽ sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng, sau đó áp dụng các phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng như tính chất đường trung bình, định lí Thales đảo, tính chất song song của hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba...).

Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu: Chứng minh hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng:

A. CM trong đó M là trung điểm BD. **B.** AC.

C. DB. **D.** CD.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: (Đưa về cùng mặt phẳng và vận dụng các kiến thức hình học phẳng)

Gọi E là trung điểm của AB. Ta có: $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DF \end{cases}$ nên suy ra IJ và CD đồng phẳng.

Do I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD nên ta có: $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $IJ//CD$.

Cách 2: (Sử dụng tính chất bắc cầu)

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và BC. Suy ra: $MN//CD$ (1).

Do I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD nên ta có: $\frac{AI}{AN} = \frac{AJ}{AM} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $IJ//MN$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IJ//CD$.

Cách 3: (Sử dụng định lí giao tuyến của ba mặt phẳng)

Có lẽ trong ví dụ này cách này hơi dài, song chúng tôi vẫn sẽ trình bày ở đây, để các bạn có thể hiểu và vận dụng cách 3 hợp lí trong các ví dụ khác.

Dễ thấy, bốn điểm D, C, I, J đồng phẳng.

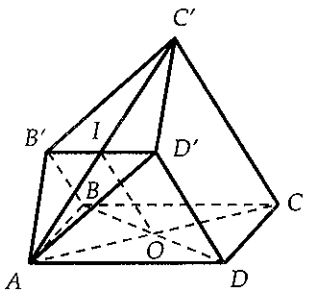
Ta có: $\begin{cases}(DCIJ)\cap(AMN)=IJ\\(DCIJ)\cap(BCD)=CD\\(AMN)\cap(BCD)=MN\\MN//CD\end{cases}\Rightarrow IJ//CD//MN$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB'=2$, $DD'=4$. Khi đó CC' bằng:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Đáp án D.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. I là trung điểm của $B'D'$.

Do Bx, Dz song song với nhau nên $BDD'B'$ là hình thang và OI là đường trung bình của hình thang đó. Suy ra $IO=\dfrac{BB'+DD'}{2}=3$.

Mặt khác IO song song với CC'(vì cùng song song với DD') nên bốn điểm C, C', O, I đồng phẳng.

Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'D')$ với (ACC') là AC'. Lại có I thuộc $(AB'D')$, I thuộc (ACC'). Do đó A, I, C' thẳng hàng. Từ đây dễ dàng suy ra, I là trung điểm đoạn AC'. Do vậy, $CC'=2OI=6$.

Nhận xét: Ta có bài toán tổng quát cho bài toán này như sau:

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D'. Khi đó $A'B'C'D'$ là hình bình hành và $AA'+CC'=BB'+DD'$.

Do đó khi biết 3 trong bốn đối tượng AA', BB', CC', DD' ta sẽ dễ dàng tính được đối tượng còn lại.

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi At, Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua A, B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (α) di động cắt At, Bx, Cy, Dz lần lượt tại A', B', C', D' sao cho $AA'+CC'+BB'+DD'=a$ (a có độ dài cho trước). Mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định I. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{2}$.

B. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{a}{4}$.

C. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=\dfrac{3a}{2}$.

D. I nằm trên đường thẳng O song song với At và $OI=a$.

Đáp án B.

Lời giải

Theo ví dụ 2, ta có: $AA'+CC'=2OI=BB'+DD'$, $AA'+CC'+BB'+DD'=a$ nên $OI=\frac{a}{4}$.

Bài tập tương tự: Cho tam giác ABC. Ở về cùng một phía của (ABC), người ta kẻ các đường thẳng song song Ax, By, Cz. Lần lượt lấy trên Ax, By, Cz điểm A', B', C'.

a) M và M' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Chứng minh rằng MM' song song với CC'.

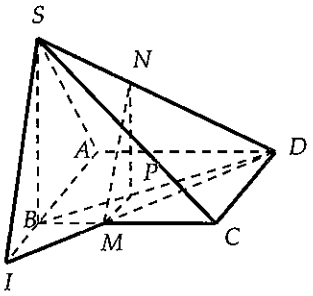
b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng GG' song song với CC'.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm M, N thứ tự thuộc các đoạn BC và SD sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{NS}{ND}=\frac{1}{2}$. Gọi I là giao điểm của MD và AB.

a) Chứng minh rằng MN // SI.

b) Qua M kẻ MP // CD (P nằm trên BD). Chứng minh rằng: NP // SB.

Lời giải



a) Ta có: BI // $CD \Rightarrow \frac{IM}{MD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2}$

Trong ΔSDI có: $\frac{SN}{ND}=\frac{IM}{MD}\left(=\frac{1}{2}\right)$. Suy ra MN // SI.

b) Ta có: MP // AB suy ra $\frac{BP}{PD}=\frac{MB}{MC}=\frac{1}{2}$.

Trong tam giác SBD ta có: $\frac{BP}{PD}=\frac{SN}{ND}=\frac{1}{2} \Rightarrow NP$ // SB.

Dạng 2 Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2). Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước

*** Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (cách 2)**

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng a và b song song, ta tìm:

+ Một điểm chung của hai mặt phẳng đó.

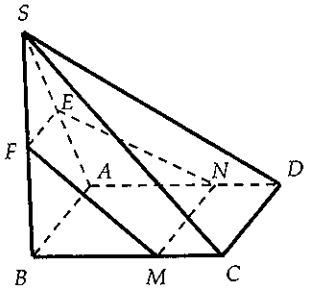
+ Giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng qua điểm chung và song song với a và b (hoặc trùng với một trong hai đường đó).

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA=SB=a$, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là điểm tùy ý trên cạnh BC (không trùng với B, C).

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SAD) và (SBC)?

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và $(ABCD)$. Từ đó suy ra giao điểm N của AD với (MEF). Chứng minh rằng $MNFE$ là hình thang cân.

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB // CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD$.

Tương tự ta có:

$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD // BC, AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy // AD // BC$.

b) Do E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB nên EF là đường trung bình của tam giác SAB. Do đó $EF // AB, EF = \frac{1}{2}AB$ (1)

Ta có: $\begin{cases} EF // AB, EF \subset (MEF), AB \subset (ABCD) \\ M \in (MEF) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (ABCD) = Mt // AB // CD$ (2)

Gọi N là giao điểm của Mt với AD. Ta có:

$\begin{cases} N \in Mt, Mt \subset (MEF) \Rightarrow N \in (MEF) \\ N \in AD \end{cases} \Rightarrow \{N\} = AD \cap (MEF)$.

Từ (1) và (2) suy ra $EF // MN, EF = \frac{AB}{2} < AB = MN$. Suy ra $MNEF$ là hình thang.

Dễ thấy $\Delta SAD = \Delta SBC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC} \Rightarrow \Delta EAN = \Delta FBM (c.g.c) \Rightarrow FM = EN$

Vậy $MNEF$ là hình thang cân.

*** Thiết diện qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng cho trước**

Được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết:

Cách 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

Cách 2: Tìm một điểm chung và phương (song song với một đường thẳng cho trước) của giao tuyến.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Đáp án D.

Lời giải

Trong mặt phẳng (BCD), gọi F là giao điểm của đường thẳng qua E, song song BC với BD.

Ta có: $\begin{cases} (MNE) \cap (ABC) = MN; \ (MNE) \cap (BCD) = EF \\ (MNE) \cap (ABD) = MF; \ (MNE) \cap (ACD) = NE \end{cases}$

Vậy tứ giác $MNEF$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNE).

Lại có $\begin{cases} (MNE) \cap (ABC) = MN \\ (MNE) \cap (BCD) = EF \\ (BCD) \cap (ABC) = BC \\ BC // MN \end{cases} \Rightarrow EF // MN$.

Suy ra tứ giác $MNEF$ là hình thang $(EF > MN)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Thiết diện của mặt phẳng (MCD) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Tam giác. B. Hình bình hành. C. Hình thang. D. Hình thoi.

Đáp án C.

Lời giải

Gọi N là trung điểm của SB. Do $MN // AB,\ AB // CD \Rightarrow MN // CD$.

Như vậy suy ra N thuộc mặt phẳng (MCD).

Ta có: $\begin{cases} (MCD)\cap(SAD) = MD \\ (MCD)\cap(SAB) = MN \\ (MCD)\cap(SBC) = NC \\ (MCD)\cap(ABCD) = CD \end{cases}$

Vậy tứ giác $MNCD$ là thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MCD).

Kết hợp với $MN // CD$, suy ra $MNCD$ là hình thang.

Dạng 3 Góc giữa hai đường thẳng

Ví dụ: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a,\ AC = BD = b,\ AD = BC = c$. Xét các khẳng định sau:

a. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{|b^2 - c^2|}{a^2}$.

b. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\dfrac{|a^2 - c^2|}{b^2}$.

c. Cosin của góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $\dfrac{b^2 - a^2}{c^2}$.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp án C.

Lời giải

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD.

Ta có: $EF // AB,\ EG // CD$, suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Ta có: $AF^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Do $\Delta ABC = \Delta DBC$ $(c.c.c)$ nên $AF = DF$.

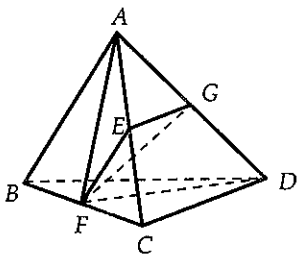
Suy ra ΔAFD cân tại F. Vậy $FG \perp AD \Rightarrow FG = \sqrt{FA^2 - AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$.

Xét tam giác EFG có: $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{EF^2 + EG^2 - FG^2}{2EF.EG} = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2}$.

Vì $0° \le (\widehat{EF,EG}) \le 90° \Rightarrow \cos(\widehat{EF,EG}) = |\cos\widehat{FEG}| = \dfrac{|b^2 - c^2|}{a^2}$.

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{|b^2 - c^2|}{a^2}$.

Tương tự ta cũng suy ra cosin của góc giữa AC và BD bằng $\dfrac{|a^2 - c^2|}{b^2}$.



Nhận xét

Từ ví dụ này, ta còn suy ra được một trong ba giá trị $a^2\cos(AB,CD)$; $b^2\cos(AC,BD)$; $c^2\cos(AD,BC)$ bằng tổng hai giá trị còn lại.

Cũng từ ví dụ này ta còn suy ra được với tứ diện đều $ABCD$ thì góc giữa các cặp cạnh đối diện luôn bằng $90°$

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tồn tại hai đường thẳng c, d song song với nhau, mỗi đường đều cắt cả a và b.

B. Không thể tồn tại hai đường thẳng c, d phân biệt mỗi đường đều cắt cả a và b.

C. Không thể tồn tại một đường thẳng cắt cả a và b.

D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 2: Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy

A. Đôi một cắt nhau.

B. Đồng quy.

C. Hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

D. Đôi một song song.

Câu 3: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) sẽ:

A. Song song với hai đường thẳng đó.

B. Song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

C. Trùng với một trong hai đường thẳng đó.

D. Cắt một trong hai đường thẳng đó.

Câu 4: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Xét hai đường thẳng p, q mà mỗi đường đều cắt cả a và b, p cắt a tại M, q cắt a tại N (M không trùng với N). Khi đó hai đường thẳng p và q:

A. Cắt nhau

B. Trùng nhau

C. Song song với nhau

D. Hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau

Câu 5: Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó:

A. Song song

B. Trùng nhau

C. Chéo nhau

D. Hoặc song song hoặc trùng nhau.

Câu 6: Giả sử (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt a, b, c. Trong đó: $a=(P)\cap(R)$, $b=(Q)\cap(R)$, $c=(P)\cap(Q)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. a và b cắt nhau hoặc song song với nhau.

B. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một cắt nhau.

C. Nếu a và b song song với nhau thì a và c không thể cắt nhau, cũng vậy, b và c không thể cắt nhau.

D. Ba giao tuyến a, b, c đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng d:

A. Đi qua S.

B. Đi qua điểm S và song song với AB.

C. Đi qua điểm S và song song với AD.

D. Đi qua điểm S và song song với AC.

Câu 8: Giả sử có ba đường thẳng a, b, c trong đó $b//a$ và $c//a$. Hãy chọn câu đúng:

A. Nếu mặt phẳng (a, b) không trùng với mặt phẳng (a, c) thì b và c chéo nhau.

B. Nếu mặt phẳng (a, b) trùng với mặt phẳng (a, c) thì ba đường thẳng a, b, c song song với nhau từng đôi một.

C. Dù cho hai mặt phẳng (a, b) và (a, c) có trùng nhau hay không, ta vẫn có $b//c$.

D. Cả ba câu trên đều sai.

Câu 9: Cho hai đường thẳng a, b. Hai đường thẳng này sẽ nằm ở một trong các trường hợp:

(1) Hai đường thẳng phân biệt trong không gian.

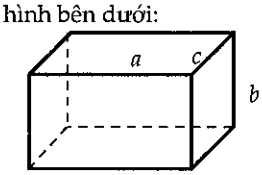
(2) Hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng.

(3) a là giao tuyến của (P) và (R), b là giao tuyến của (Q) và (R), trong đó (P), (Q), (R) là ba mặt phẳng khác nhau từng đôi một.

Tương ứng với mỗi trường hợp trên, số các khả năng có thể xảy ra giữa a và b lần lượt là:

A. 3, 2, 2. B. 3, 2, 3. C. 2, 3, 2. D. 3, 2, 1.

Câu 10: Xét hình bên dưới:



Các cạnh của hình hộp nằm trên các đường thẳng a, b, c như hình vẽ:

(1) đường thẳng a và đường thẳng b cùng nằm trên một mặt phẳng.

(2) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng a và c.

(3) Có một mặt phẳng qua hai đường thẳng b và c.

Trong ba câu trên:

A. Chỉ có (1) và (2) đúng.

B. Chỉ có (1) và (3) đúng.

C. Chỉ có (2) và (3) đúng.

D. Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn là CD. Gọi M là trung điểm của SA, N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. MN và SD cắt nhau.

B. MN và CD chéo nhau.

C. MN và SC cắt nhau.

D. MN và CD song song với nhau.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. MP, NQ chéo nhau.

B. $MN // PQ$ và $MN = PQ$.

C. $MNPQ$ là hình bình hành.

D. $MN // BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Đường thẳng nào sau đây không song song với đường thẳng MN?

A. AB. **B.** CD. **C.** PQ. **D.** SC.

Câu 14: Cho hình chóp $A.BCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Các điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. M, P, R, Q. **B.** M, R, S, N.

C. P, Q, R, S. **D.** M, P, Q, N.

Câu 15: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy AD và BC $(AD = a > BC = b)$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Gọi E là giao điểm của AM và PB, F là giao điểm của CQ và DN. Trong các mệnh đề dưới đây, có bao nhiêu mệnh đề **sai**?

(1) MN và PQ song song với nhau;

(2) EF và MN song song với nhau;

(3) $EF = \frac{2}{5}(a+b)$; (4) $EF = \frac{1}{4}(a+b)$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. K là điểm trên đoạn BD sao cho $KB = 2KD$, F là giao điểm của AD với (IJK). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (IJK) song song với đường thẳng:

A. AJ. **B.** BI. **C.** IJ. **D.** CI.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là:

A. Đường thẳng d đi qua A và $d // BC$.

B. Đường thẳng d đi qua A và $d // BD$.

C. Đường thẳng d đi qua A và $d // CD$.

D. Đường thẳng AB.

Câu 18: Cho hình chóp $SABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C'.

a) $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi bằng bao nhiêu khi M di động trong tam giác ABC?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

b) $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác:

A. Trực tâm tam giác ABC.

B. Trọng tâm tam giác ABC.

C. Tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

D. Tâm nội tiếp tam giác ABC.

Câu 19: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) di động đi qua AB và cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

A. Hình bình hành.

B. Hình thang

C. Hình thoi.

D. Tứ giác lồi có các cặp cạnh đối cắt nhau.

b) Giao điểm của hai đường thẳng AM và BN luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO.

B. Đường thẳng qua S.

C. Đường thẳng qua S, song song với AB.

D. Đường thẳng qua S, song song với AD.

c) Giao điểm của hai đường thẳng AN và BM luôn chạy trên đường thẳng cố định:

A. SO.

B. Đường thẳng qua S.

C. Đường thẳng qua S, song song với AB.

D. Đường thẳng qua S, song song với AD.

d) Tính $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK}$?

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và M là điểm nằm bên trong tam giác BCD. Đường thẳng qua M và song song với GA lần lượt cắt các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB) tại P, Q, R.

a) Khi M di động trong tam giác BCD, đại lượng $\frac{MP + MQ + MR}{GA}$ không đổi và bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

b) Xác định vị trí của M để $MP.MQ.MR$ đạt giá trị lớn nhất?

A. M là trực tâm tam giác BCD.

B. M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.

C. M là trọng tâm tam giác BCD.

D. M là tâm ngoại tiếp tam giác BCD.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều và $\widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC.

a) Giao điểm I của đường thẳng Dx với mặt phẳng (SAB) chạy trên đường thẳng:

A. Qua S và song song với AB.

B. Qua S và song song với AD.

C. SO.

D. SD.

b) Diện tích thiết diện của hình chóp $SABCD$ cắt bởi (AIC) là:

A. $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. B. $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$. D. $\frac{a^2\sqrt{7}}{16}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a) $HKNM$ là hình gì?

A. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

B. Hình thoi.

C. Hình thang cân.

D. Hình bình hành.

b) Đặt $AM = x\ (0 \le x \le a)$. Tìm x theo a để diện tích tứ giác $HKNM$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 0. B. a. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{4}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. G là trọng tâm của tam giác SAB. Thiết diện của hình chóp $SABCD$ cắt bởi (IJG) là một tứ giác. Tìm điều kiện của AB, CD để thiết diện đó là hình bình hành?

A. $AB = 3CD$. B. $AB = 2CD$.

C. $CD = 2AB$. D. $CD = 3AB$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, BD. E là một điểm trên cạnh AD (E khác A, D). Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và điểm E trên AD sao cho thiết diện của hình chóp cắt bởi (IJE) là hình thoi?

A. $AB = CD$, $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$. B. $AD = BC$, $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{ED}$.

C. $AB = CD$, $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$. D. $AD = BC$, $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{ED}$.

Câu 25: Số đo góc giữa hai đường thẳng bằng 0^0 thì hai đường thẳng đó:

A. Song song.

B. Chéo nhau.

C. Trùng nhau.

D. Trùng nhau hoặc song song.

Câu 26: Bạn Tùng Chi xác định góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian như sau:

Bước 1: Lấy điểm O bất kì. Qua O dựng đường thẳng m song song với a. Trên đường thẳng m lấy điểm A khác O.

Bước 2: Dựng đường thẳng n song song với b. Trên đường thẳng n lấy điểm B khác O.

Bước 3: Góc giữa hai đường thẳng a và b chính là góc $\widehat{AOB}$.

Hỏi bạn Tùng Chi có làm đúng không, nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Bước 1. B. Bước 2.

C. Bước 3. D. Bạn làm đúng.

Câu 27: Cho ba đường thẳng a, b, c sao cho $a // b$, $b \perp c$. Khi đó số đo góc giữa hai đường thẳng a và c bằng:

A. 90^0. B. 60^0. C. 45^0. D. 30^0.

Câu 28: Cho hình chóp $ABCD$ có các tam giác ABC, ABD đều cạnh a, E là trung điểm của CD. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AD và BC biết rằng $\widehat{AEB} = 90^\circ$.

A. 90^0. B. 60^0. C. 45^0. D. 30^0.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{SAD} = 90^0$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và DF.

A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 3a$, $SA = a\sqrt{3}$. Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và BD.

A. $\frac{8}{\sqrt{130}}$. B. $\frac{4}{\sqrt{130}}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 5$, $AC = 7$, $BD = \sqrt{57}$, $CD = 9$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng BC và AD?

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và ED?

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án D.

- Đáp án A sai. Giả sử c cắt a, b lần lượt tại A, B; d cắt a, b lần lượt tại C, D. Theo yêu cầu thì AB song song với CD. Suy ra A, B, C, D đồng phẳng, hay a, b đồng phẳng, vô lí.

- Đáp án B, C sai, chúng ta có thể dễ dàng thấy một ví dụ là tứ diện $ABCD$ có AB và CD đều cắt hai đường thẳng chéo nhau AD và BC.

Câu 2: Đáp án C.

Câu 3: Đáp án B.

Câu 4: Đáp án D.

Câu 5: Đáp án D.

Câu 6: Đáp án B.

Câu 7: Đáp án C.

Câu 8: Đáp án D.

- Đáp án A sai, vì nếu (a,b) và (a,c) không trùng nhau thì a, b, c đôi một phân biệt. Theo tính chất bắc cầu suy ra b song song với c.

- Đáp án B, C sai vì ta có thể lấy ví dụ b, c trùng nhau.

Câu 9: Đáp án B.

- Trường hợp (1) có thể xảy ra giữa hai đường thẳng a, b là chéo nhau, song song, cắt nhau.

- Trường hợp (2) có thể là song song, cắt nhau.

- Trường hợp (3) có thể là song song, cắt nhau hoặc trùng nhau.

Như vậy, tương ứng với mỗi trường hợp, số các khả năng có thể xảy ra giữa a, b là 3, 2, 3.

Câu 10: Đáp án C.

Nhìn vào hình vẽ, ta thấy a, b chéo nhau, nên không có mặt phẳng nào chứa cả a, b. Do đó (1) sai. Vậy đáp án A, B, D sai.

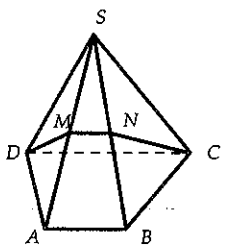
Đường thẳng a, c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (2) đúng.

Đường thẳng b và c cắt nhau, xác định duy nhất một mặt phẳng chứa cả hai đường. Đáp án (3) đúng.

Câu 11: Đáp án D.

Ta có: $\begin{cases} AB // CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (MCD) \Rightarrow MN // CD \\ MN = (SAB) \cap (MCD) \end{cases}$

Câu 12: Đáp án A.



Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $MN // BD$, $MN = \frac{1}{2}BD$.

Do P, Q lần lượt là trung điểm của CD, CB nên $PQ // BD$, $PQ = \frac{1}{2}BD$.

Suy ra $MN // PQ$, do đó M, N, P, Q đồng phẳng.

Do đó MP, NQ không thể chéo nhau.

Do vậy ta chọn đáp án A.

Câu 13: Đáp án D.

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$.

Tương tự, do PQ là đường trung bình của tam giác SCD nên $PQ // CD$.

$ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD$.

Do đó: $PQ // MN$ và $MN // CD$.

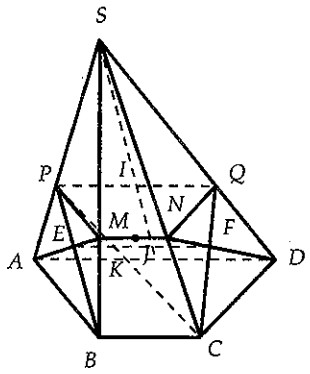
MN không song song với SC vì giả sử ngược lại thì SC và CD trùng nhau (vô lí).

Câu 14: Đáp án A.

Do M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AC, BD, AB, CD, AD, BC nên $MR // CD // SN$, $PS // AC // RQ$, $MP // BC // NQ$. Do đó M, R, S, N đồng phẳng; P, Q, R, S đồng phẳng; M, P, Q, N đồng phẳng.

M, P, R, Q không đồng phẳng vì giả sử ngược lại thì P sẽ thuộc mặt phẳng (ACD), suy ra B thuộc mặt phẳng (ACD) vô lí.

Câu 15: Đáp án B.



Ta có: $I \in (SAD)$, suy ra $I \in (SAD) \cap (BCI)$.

Do $\begin{cases} (SAD) \cap (BCI) = PQ \\ AD \subset (SAD), BC \subset (BCI) \\ AD // BC \end{cases}$ nên $PQ // AD // BC$

Ta có: $J \in (SBC)$, suy ra $I \in (SBC) \cap (ADJ)$.

Do $\begin{cases}(SBC)\cap(ADJ)=MN\\ BC\subset(SBC),\ AD\subset(ADJ)\\ AD//BC\end{cases}$ nên $MN//AD//BC$

Từ đó suy ra MN và PQ song song với nhau.

Ta có: $\begin{cases}EF=(ADNM)\cap(BCQP)\\ AD=(ADNM)\cap(ABCD)\\ BC=(ABCD)\cap(BCQP)\\ AD//BC\end{cases}$ nên $EF//AD$.

Suy ra $EF//MN$.

Gọi K là giao điểm của CP với $EF \Rightarrow EF=EK+KF$.

Do $\frac{SP}{SA}=\frac{2}{3}=\frac{SM}{SB}\Rightarrow PM//AB$.

Theo định lí Thales, ta có: $\frac{PE}{EB}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{PE}{PB}=\frac{2}{5}$.

Do EK song song với BC nên theo định lí Thales ta có:

$\frac{PE}{PB}=\frac{EK}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow EK=\frac{2}{5}b$.

Tương tự ta cũng có: $\frac{QF}{FC}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{QC}{FC}=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow\frac{PQ}{FK}=\frac{5}{3}\Rightarrow FK=\frac{3}{5}PQ=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}AD=\frac{2}{5}a$.

Từ đây suy ra $EF=\frac{2}{5}(a+b)$.

Câu 16: Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases}FK=(SAD)\cap(IJK)\\ AD\subset(SAD),IJ\subset(IJK)\\ AD//IJ.\end{cases}$ nên $FK//IJ$.

Dễ dàng chứng minh được các đường thẳng còn lại không song song với FK.

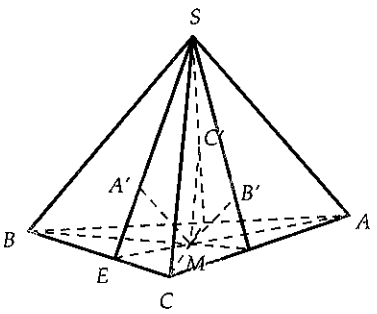
Câu 17: Đáp án C.

Do I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra IJ song song với CD.

Ta có: $\begin{cases}IJ//CD,IJ\subset(AIJ),CD\subset(ACD)\\ A\in(AIJ)\cap(ACD)\end{cases}$

$\Rightarrow(AIJ)\cap(ACD)=At//CD$

Câu 18: Đáp án C, B.



a) Do $MA'//SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có:

$$\frac{MA'}{SA}=\frac{ME}{EA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}.$$

Tương tự ta cũng chứng minh được:

$$\frac{MB'}{SB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{MC'}{SC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}.$$

Vậy $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1$.

Vậy đáp án đúng là **C.**

b) Áp dụng bất đẳng thứ Cauchy ta có:

$$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}$$

$$\Rightarrow\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le\frac{1}{27}$$

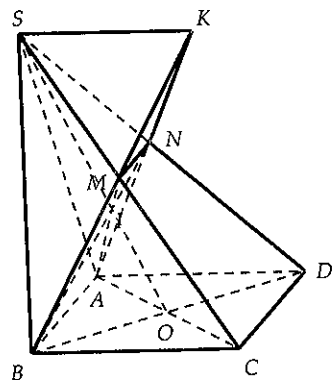
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}\Rightarrow S_{MAC}=S_{MAB}=S_{MBC}.$$

Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 19: Đáp án B, A, D, A.



a) Ta có: $\begin{cases}(ABM)\cap(SCD)=MN\\ (ABM)\cap(ABCD)=AB\\ (ABCD)\cap(SCD)=CD\\ CD//AB\end{cases}\Rightarrow MN//AB$.

Do đó $ABMN$ là hình thang.

Do $MN<AB$ nên $ABMN$ không thể là hình bình hành, hình thoi.

Vậy đáp án đúng là **B.**

b) Gọi $I=AM\cap BN\Rightarrow\begin{cases}I\in(SAC)\\ I\in(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow I\in SO=(SAC)\cap(SBD)$.

Vậy đáp án đúng là **A.**

c) Gọi $K=AN\cap BM\Rightarrow\begin{cases}I\in(SAD)\\ I\in(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$.

Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.

Vậy đáp án đúng là **D**.

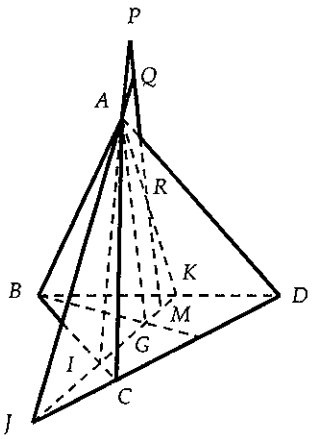
d) Do MN song song với AB nên $\frac{AB}{MN} = \frac{BM}{MK}$ (1)

Do SK song song với BC nên $\frac{CB}{SK} = \frac{MB}{MK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{MN} - \frac{BC}{SK} = 0$.

Vậy đáp án đúng là **A**.

Câu 20: Đáp án C, C.



a) Trong mặt phẳng (BCD), gọi $I = MG \cap BC$, $J = MG \cap CD$, $K = MG \cap BD$.

Qua M kẻ $Mx // GA$. Trong (AIJ): $Mx \cap AI = P$ (đây chính là giao điểm của Mx với (ABC)).

Tương tự $Mx \cap AK = R$, $Mx \cap AJ = Q$.

Ta có: $\frac{IM}{IG} = \frac{S_{MIC}}{S_{GIC}} = \frac{S_{MIB}}{S_{GIB}} = \frac{S_{MIC} + S_{MIB}}{S_{GIC} + S_{GIB}} = \frac{S_{MBC}}{S_{GBC}} = \frac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{IM}{IG} = \frac{MP}{GA}$.

Do đó: $\frac{MP}{GA} = \frac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$.

Chứng minh tương tự ta có:

$\frac{MQ}{GA} = \frac{3S_{MCD}}{S_{BCD}}$, $\frac{MR}{GA} = \frac{3S_{MBD}}{S_{BCD}} \Rightarrow \frac{MP + MQ + MR}{GA} = 3$.

Vậy đáp án đúng là **C**.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$MP.MQ.MR \le \left(\frac{MP + MQ + MR}{3}\right)^3 = GA^3.$$

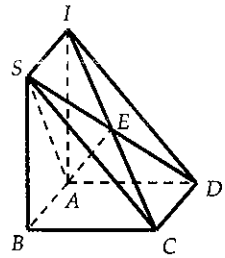
Vậy giá trị lớn nhất của $MP.MQ.MR$ bằng GA^3.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $MP = MQ = MR$.

Điều này xảy ra khi M là trọng tâm tam giác BCD.

Vậy đáp án đúng là **C**.

Câu 21: Đáp án A, A.



a) Do Dx song song với SC nên hai đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).

Lại có, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có D là điểm chung, AB song song với CD nên giao tuyến là đường thẳng đi qua S và song song với AB. Vậy I thuộc giao tuyến này.

Vậy đáp án đúng là **A**.

b) Gọi E là giao điểm của SD với IC. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AIC) là tam giác ACE.

Ta có $SIDC$ là hình bình hành nên $SI = CD$ và SI song song với CD. Suy ra $SI = Ab$ và SI song song với AB. Điều này suy ra $SIAB$ là hình bình hành. Khi đó $AI = SB = a$.

Mặt khác, $AC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác IAC có:

$CI^2 = 2(AC^2 + AI^2) - 4AE^2 = 4a^2 \Rightarrow CI = 2a$.

Ta có: $\cos\widehat{CAE} = \frac{AE^2 + AC^2 - CE^2}{2AC.AE} = \frac{\frac{a^2}{2} + 2a^2 - a^2}{2a^2} = \frac{3}{4}$

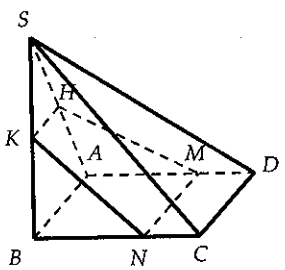
$\Rightarrow \sin\widehat{CAE} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Diện tích thiết diện là:

$$S = \frac{1}{2}AC.AE.\sin\widehat{CAE} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}.$$

Vậy đáp án đúng là **A**.

Câu 22: Đáp án C, A.



a) Ta có: $\begin{cases} KH // AB, KH \subset (HKM),\ AB \subset (ABCD) \\ M \in (HKM) \cap (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (HKM) \cap (ABCD) = MN // AB // HK$ (1)

Ta lại có: $\Delta SAD = \Delta SBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC}$.

Từ đó suy ra: $\Delta HAM = \Delta KBN (c.c.c) \Rightarrow MH = NK$ (2)

Từ (1), (2) và $KH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} < MN = a$ ta suy ra $HKNM$ là hình thang cân.

Vậy đáp án đúng là **C.**

b) Ta có: $\cos\widehat{SAD} = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = -\frac{1}{2}$

Trong tam giác HAM có:

$$MH^2 = AH^2 + AM^2 - 2AH.AM.\cos\widehat{HAM} = \frac{4x^2 + 2ax + a^2}{4}$$

Diện tích hình thang cân $HKNM$ là:

$$S = \frac{(HK + MN)\sqrt{HM^2 - \frac{(HK - MN)^2}{4}}}{2}.$$

$$= \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2} \geq \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy diện tích $HKNM$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 23: Đáp án A.

Theo giả thiết đầu bài ta suy ra $IJ // AB$.

Ta có: $\begin{cases} AB // IJ, AB \subset (SAB), IJ \subset (IJG) \\ G \in (SAB) \cap (IJG) \end{cases}$

$\Rightarrow MN // IJ // AB \ (M \in SA, N \in SB, G \in MN)$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình thang $MNJI$.

Gọi E là trung điểm đoạn AB.

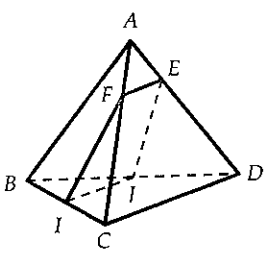
Do G là trọng tâm tam giác SAB và MN song song với AB nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$. Suy ra $MN = \frac{2}{3}AB$.

Mặt khác, ta lại có: $IJ = \frac{1}{2}(CD + AB)$.

Hình thang $MNJI$ trở thành hình bình hành khi $MN = IJ \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy thiết diện là hình bình hành khi $AB = 3CD$.

Câu 24: Đáp án A.



Ta có: $\begin{cases} IJ // CD, IJ \subset (IJE), CD \subset (ACD) \\ E \in (IJE) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (IJE) \cap (ACD) = FE // CD // IJ \ (F \in AC)$

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJE) là hình thang $IJEF$.

Để $IJEF$ là hình thoi thì trước tiên $IJEF$ phải là hình bình hành.

Khi đó: $IJ = EF \Rightarrow \frac{1}{2}CD = EF$. Suy ra EF là đường trung bình của tam giác ACD. Do đó E là trung điểm của AD, F là trung điểm AC.

Ta có: $IJ = IF \Rightarrow \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow CD = AB$.

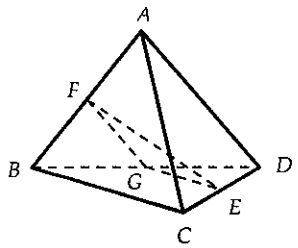
Vậy để thiết diện là hình thoi thì $AB = CD, \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{EB}$.

Câu 25: Đáp án D.

Câu 26: Đáp án C.

Câu 27: Đáp án A.

Câu 28: Đáp án B.



Theo giả thiết ta suy ra tam giác AEB vuông tại E.

Do đó: $EF = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng BD.

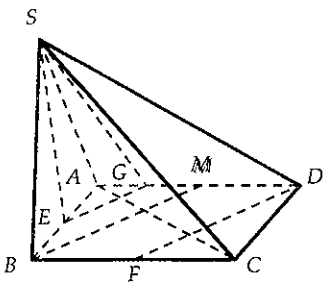
Theo tính chất đường trung bình ta có:

$\begin{cases} GE // BC \\ GE = \frac{a}{2} \end{cases}, \begin{cases} GF // AD \\ GF = \frac{a}{2} \end{cases}$

Do đó góc giữa hai đường thẳng AD và BC chính là góc giữa hai đường thẳng GE và GF.

Ta có: $EF = GE = GF = \frac{a}{2}$ nên tam giác GEF đều nên $\widehat{EGF} = 60^\circ$. Suy ra $(\widehat{AD, BC}) = 60^0$.

Câu 29: Đáp án B.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $EG // DF \ (G \in AD)$.

Do $\widehat{ASB} = 90^0$ nên tam giác ASB vuông tại S.

Suy ra $SE = \frac{1}{2}AB = a$.

Gọi M là trung điểm của đoạn AD. Dễ thấy $DMBF$ là hình bình hành. Suy ra $EG // BM$. E là trung điểm đoạn AB nên suy ra G là trung điểm đoan AM. Khi đó $AG = \frac{1}{4}AD = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác vuông AEG ta có:

$$EG = \sqrt{AE^2 + AG^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Xét tam giác vuông SAG ta có:

$$SG = \sqrt{SA^2 + AG^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $GS = GE$.

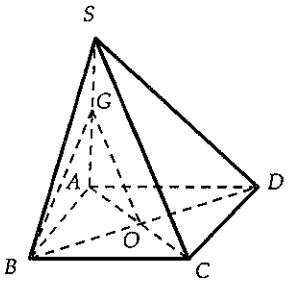
Do đó tam giác SGE cân tại G. Suy ra $\widehat{SEG}$ nhọn.

Góc giữa hai đường thẳng SE và DF là góc giữa hai đường thẳng SE và EG. Suy ra $(\widehat{SE, DF}) = \widehat{SEG}$

Xét tam giác SEG ta có:

$$\cos\widehat{SEG} = \frac{EG^2 + ES^2 - GS^2}{2EG.ES} = \frac{a^2}{2\frac{\sqrt{5}a^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 30: Đáp án A.



Do tam giác SAC vuông tại A nên:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{SA^2 + AB^2 + AD^2}$$
$$= \sqrt{3a^2 + a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13}$$

Do tam giác GAB vuông tại A nên

$$GB = \sqrt{GA^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, G là trung điểm của đoạn SA.

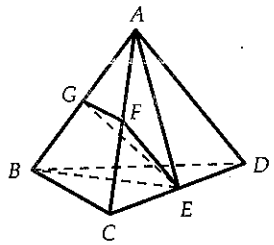
Dễ thấy $OG // SC$, $OG = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

Dễ thấy góc giữa hai đường thẳng SC và BD chính là góc giữa hai đường thẳng GO và OB. Xét tam giác OGB ta có:

$$\cos\widehat{GOB} = \frac{OG^2 + OB^2 - GB^2}{2OG.OB} = \frac{\frac{13a^2}{4} + \frac{10a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{130}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{130}}$$

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{8}{\sqrt{130}}$.

Câu 31: Đáp án D.



Đặt $AD = 2x, BC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của CD, AC, AB. Dễ thấy góc giữa hai đường thẳng BC và AD bằng góc giữa hai đường thẳng FE và FG.

Ta có: $EF = x$, $FG = y$.

Xét tam giác ACD ta có:

$$AE^2 = \frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{4x^2 + 49}{2} - \frac{81}{4} = \frac{8x^2 + 17}{4}$$

Xét tam giác BCD ta có:

$$BE^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{4y^2 + 57}{2} - \frac{81}{4} = \frac{8y^2 + 33}{4}.$$

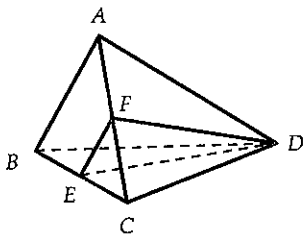
Xét tam giác AEB có:

$$EG^2 = \frac{EA^2 + EB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{\frac{8x^2 + 17}{4} + \frac{8y^2 + 33}{4}}{2} - \frac{25}{4}$$
$$= x^2 + y^2 = FE^2 + FG^2$$

Vậy tam giác EFG vuông tại F. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 90^0.

Câu 32: Đáp án B.

Theo giả thiết ta có các tam giác ABC, ABD là các tam giác đều cạnh a.



Suy ra: $BC = BD = a = AC = AD$.

Tam giác ACD vuông tại A nên

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $CD^2 = BC^2 + BD^2$ nên ΔBCD vuông tại B.

Gọi F là trung điểm của AC. Suy ra $EF // AB$ và $EF = \frac{a}{2}$. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AB, ED chính là góc giữa hai đường thẳng EF và ED.

Ta có: $DE = DF = \sqrt{BD^2 + BE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác DEF ta có:

$$\cos\widehat{DEF} = \frac{DE^2 + EF^2 - DF^2}{2DE.EF} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Vậy cosin của góc giữa hai đường thẳng AB, DE bằng $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Đường thẳng song song với mặt phẳng

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, ta đã biết rằng đối với một đường thẳng và một mặt phẳng cho trước thì đường thẳng và mặt phẳng đó hoặc không có điểm chung hoặc có đúng một điểm chung hoặc đường thẳng thuộc mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung, ta nói rằng đường thẳng và mặt phẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

Đường thẳng d và mặt phẳng (α) được gọi là song song với nhau, kí hiệu $d//(\alpha)$, nếu chúng không có điểm chung.

2. Tính chất

Định lí 1:

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α). Lúc đó d và (α) song song với nhau khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng a nằm trong (α) sao cho d và a song song với nhau.

Định lí 2:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

Hệ quả:

Nếu 2 mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Định lí 3:

Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và điểm P. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) đi qua điểm P sao cho (α) song song hoặc chứa a và song song hoặc chứa b.

Hệ quả:

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

STUDY TIP

Đây là một cách xác định mặt phẳng khá phổ biến: mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và song song với hai đường thẳng cho trước

B. Các dạng toán về đường thẳng song song với mặt phẳng

Dạng 1

Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp:

- **Cách 1:** Để chứng minh đường thẳng a song song với (α) ta chứng minh a không nằm trong (α) và song song với một đường thẳng d nào đó trong (α).

Chú ý: Đường thẳng d phải là đường thẳng đồng phẳng với a, do đó nếu trong hình không có sẵn đường thẳng nào chứa trong (α) và đồng phẳng với a thì ta cần chọn một mặt phẳng (β) nào đó chứa a và dựng giao tuyến của d của mặt phẳng (α) và sau đó chứng minh a song song với d. Có vô số mặt phẳng (β) như thế nhưng cần dựng sao cho việc dựng giao tuyến của hai mặt phẳng (β) và (α) là dễ dàng nhất.

- **Cách 2:** Muốn chứng minh đường thẳng a song song mặt phẳng (P), ta chứng minh đường thẳng a song song với đường thẳng b mà đường thẳng b song song với mặt phẳng (P) (a và (P) không có điểm chung). Có thể được viết như sau: $\begin{cases} a//b,\ a\not\subset(\alpha) \\ b//(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//(\alpha)$.

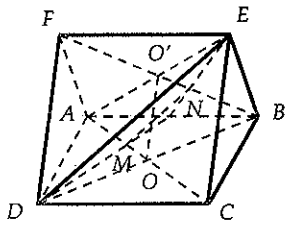
Ngoài ra, sau khi học xong bài hai mặt phẳng song song có thể vận dụng cách chứng minh sau: $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a\subset(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//(\beta)$.

Ví dụ 1: Cho 2 hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABE. Các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. $OO'//(ADF)$. **B.** $OO'//(BCE)$. **C.** $MN//(CDE)$. **D.** $ON//(CDE)$.

Đáp án D.

Lời giải



Do OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên ta có $OO'//DF$.

Ta có: $\begin{cases} OO'//DF \\ DF\subset(ADF) \\ OO'\not\subset(ADF) \end{cases} \Rightarrow OO'//(ADF)$.

Tương tự ta có: $\begin{cases} OO'//EC \\ EC\subset(BCE) \\ OO'\not\subset(BCE) \end{cases} \Rightarrow OO'//(BCE)$

Gọi I là trung điểm của AB. Khi đó ta có: $\begin{cases} \dfrac{IM}{ID}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IN}{IE}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IM}{ID}=\dfrac{IN}{IE} \Rightarrow MN//DE$

Vậy ta có: $\begin{cases} MN // DE \\ DE \subset (CDE) \\ NM \not\subset (CDE) \end{cases} \Rightarrow MN // (CDE)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của IO với CD.

Khi đó ta có: $\frac{OI}{OK} = 1 > \frac{1}{2} = \frac{NI}{NE}$. Điều này suy ra ON không song song với EK.

Như vậy ON không song song với (CDE).

Bài tập tương tự:

Câu 1: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng, có tâm lần lượt là O và O'. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $OO' // (ABCD)$. B. $OO' // (ABEF)$. C. $OO' // (BDF)$. D. $OO' // (ADF)$.

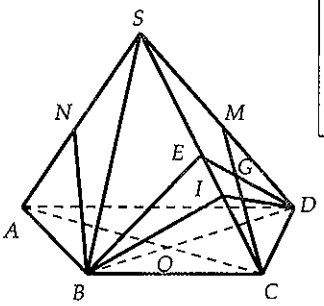
Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đoạn AC và BF lần lượt lấy hai điểm N và M sao cho $\frac{BM}{BF} = \frac{1}{3}$ và $\frac{CN}{CA} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng $MN // (CDEF)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là AD; $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Chứng minh $OG // (SBC)$.

b) Gọi M là trung điểm của SD. Chứng minh $CM // (SAB)$.

c) Gọi I là điểm nằm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA // (BID)$.



Lời giải

a) Ta có: $\frac{DG}{DE} = \frac{DO}{DB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OG // BE$. Mà $BE \subset (SBC)$, $OG \not\subset (SBC) \Rightarrow OG // (SBC)$

b) Gọi N là trung điểm SA.

Do MN là đường trung bình tam giác SAD và $AD // BC$

nên $MN // BC$, $MN = BC \left(= \frac{1}{2}AD\right)$.

Suy ra $MNBC$ là hình bình hành $\Rightarrow CM // BN$.

Mà $BN \subset (SAB), CM \not\subset (SAB) \Rightarrow CM // (SAB)$

c) Ta có: $\frac{IC}{SC} = \frac{1}{3}; \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{1}{3} = \frac{CI}{CS}$

$\Rightarrow OI // SA$.

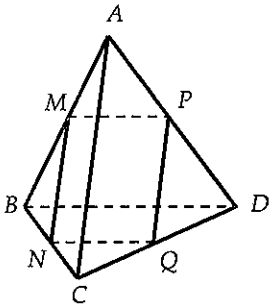
Mà $OI \subset (BID)$, $SA \not\subset (BID) \Rightarrow SA // (BID)$.

Dạng 2 Giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện song song với một đường thẳng cho trước

Phương pháp:

Sử dụng định lí: "Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a" để tìm các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp.

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm nằm trên AB $(M \neq A, B)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AC, BD. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α).



Lời giải

Ta có: $\begin{cases} AC \subset (ABC) \\ M \in (\alpha) \cap (ABC) \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN // AC \ (N \in BC) \\ AC // (\alpha) \end{cases}$ (1)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ M \in (\alpha) \cap (ABD) \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MP // BD \ (P \in AD) \\ BD \subset (ABD) \end{cases}$ (2)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ N \in (\alpha) \cap (BCD) \Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = NQ // BD \ (Q \in CD) \\ BD \subset (BCD) \end{cases}$ (3)

Dễ thấy $\begin{cases} (\alpha) \cap (ACD) = PQ \\ AC // (\alpha),\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow PQ // AC$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $MN // PQ$ (5).

Từ (2) và (3) suy ra $MQ // NP$ (6).

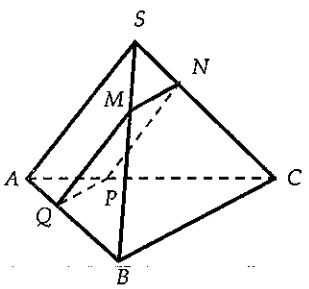
Từ (5), (6) ta suy ra tứ giác $MNQP$ là hình bình hành.

Vậy thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (α) là hình bình hành $MNQP$.

Ví dụ 2: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC = 2a$. M là một điểm trên đoạn SB mà $SM = m$ $(0 < m < 2a)$. Mặt phẳng qua M song song với SA, BC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi là:

A. $4a$. **B.** $4a - m$. **C.** $4a - 2m$. **D.** $2a + m$.

Đáp án B.



Lời giải

Dễ thấy thiết diện là hình bình hành $MNPQ$ như hình vẽ.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SM}{SB} = \frac{m}{a} \Rightarrow MN = \frac{m}{2}$$

$$\frac{QM}{SA} = \frac{BM}{BS} = \frac{2a - m}{2a} \Rightarrow QM = 2a - m$$

Chu vi thiết diện là: $2(MN + MQ) = 4a - m$.

Bài tập tương tự:

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng (α) thay đổi, song song với AB, CD cắt AC, BC, BD, AD lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của M để $MNPQ$ là hình thoi.

c) Xác định vị trí của M để diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Tam giác. B. Hình thoi.
C. Hình bình hành. D. Hình ngũ giác.

Ví dụ 3: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, P lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x\ (0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua MP, song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a) Thiết diện là hình gì?

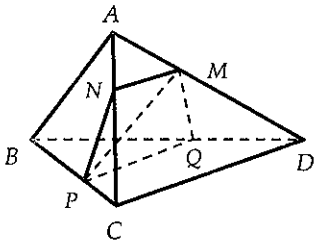
A. Hình thang cân. B. Hình bình hành.
C. Hình thoi. D. Tứ giác có các cặp cạnh đối cắt nhau.

b) Giá trị nhỏ nhất của diện tích thiết diện bằng?

A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{3}$. C. $\frac{2a^2}{3}$. D. $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

a) $\begin{cases} CD // (\alpha),\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MN // CD\ (N \in AC)$



Tương tự, $(\alpha) \cap (BCD) = PQ // CD\ (Q \in BD)$.

Khi đó: $(\alpha) \cap (ABD) = MQ$, $(\alpha) \cap (ABC) = NP$.

Tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Vì $MN // PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = CP = x, DM = a - x, MN = x, PQ = a - x$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác DMQ ta có:

$MQ^2 = DM^2 + DQ^2 - 2DM.DQ.\cos 60^0 = 3x^2 - 3ax + a^2$

$\Rightarrow MQ = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$

Tương tự ta cũng tính được $NP = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2}$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Vậy ta chọn đáp án **A.**

b) Diện tích hình thang cân $MNPQ$ là:

$$S = \frac{(MN + PQ)\sqrt{NP^2 - \frac{(MN - PQ)^2}{4}}}{2}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{8\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} \geq \frac{a^2}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a}{2}$.

Vậy ta chọn đáp án **D.**

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Hai đường thẳng cùng song song với một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó trùng nhau.

Câu 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau *a, b*. Điểm *M* không thuộc cả hai đường thẳng đã cho, khi đó:

A. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua *M* và song song với hai đường thẳng *a, b*.

B. Có duy nhất một cặp mặt phẳng đi qua *M* và song song với hai đường thẳng *a, b*.

C. Có vô số mặt phẳng đi qua *M* và song song với hai đường thẳng *a, b*.

D. Không thể có mặt phẳng nào đi qua *M* và song song với hai đường thẳng đã cho.

Câu 3: Nếu đường thẳng *d* song song với một đường thẳng *a* bất kì trong mặt phẳng (P) thì nó phải:

A. Song song với mặt phẳng (P).

B. Nằm trong mặt phẳng (P).

C. Cắt mặt phẳng (P).

D. Không cắt mặt phẳng (P).

Câu 4: Cho hai đường thẳng *a, b* song song với nhau. Hai mặt phẳng $(P),(Q)$ phân biệt tương ứng chứa *a, b*, đồng thời cắt nhau theo giao tuyến *d*. Khi đó đường thẳng *d*.

A. Chỉ song song với đường thẳng *a*.

B. Song song với cả hai đường thẳng *a* và *b*.

C. Trùng với đường thẳng *a*.

D. Hoặc song song hoặc trùng với đường thẳng *a*.

Câu 5: Đường thẳng *a* sẽ song song với mặt phẳng (P) nếu:

A. Nó không cắt mặt phẳng (P).

B. Nó không nằm trong mặt phẳng (P).

C. Nó không có điểm chung với mặt phẳng (P).

D. Nó chéo nhau với mọi đường thẳng *b* nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 6: Cho trước hai đường thẳng *a, b* chéo nhau. Khi đó:

A. Không thể có một mặt phẳng nào chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng *a* và song song với đường thẳng *b*.

C. Có đúng hai mặt phẳng chứa đường thẳng *a* và song song với đường thẳng *b*.

D. Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng *a* và song song với đường thẳng *b*.

Câu 7: Trong không gian, cho một đường thẳng *a* và một mặt phẳng (P). Số điểm chung tối đa của *a* và (P) là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 8: Cho các mệnh đề sau:

a. Nếu $a//(P)$ thì *a* song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

b. Nếu $a//(P)$ thì *a* song song với một đường thẳng nào đó nằm trong (P).

c. Nếu $a//(P)$ thì có vô số đường thẳng nằm trong (P) và song song với *a*.

d. Nếu $a//(P)$ thì có một đường thẳng *d* nào đó nằm trong (P) sao cho *a* và *d* đồng phẳng.

Số các mệnh đề đúng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 9: Cho hai đường thẳng song song *a* và *b*. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Nếu mặt phẳng (P) cắt *a* thì cũng cắt *b*.

B. Nếu mặt phẳng (P) song song với *a* thì cũng song song với *b*.

C. Nếu mặt phẳng (P) song song với *a* thì (P) hoặc song song với *b* hoặc mặt phẳng (P) chứa *b*.

D. Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *a* thì cũng có thể chứa đường thẳng *b*.

Câu 10: Trong các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng d_1 song song mặt phẳng (α)?

A. $d_1 // d_2$ và $d_2 // (\alpha)$. B. $d_1 \cap (\alpha) = \varnothing$.

C. $d_1 // d_2$ và $d_2 \subset (\alpha)$. D. $d_1 // d_2$ và $d_2 \cap (\alpha) = \varnothing$

Câu 11: Cho đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa *d* và cắt (α) theo giao tuyến *d'* thì:

A. $d' // d$ hoặc $d' \equiv d$. B. $d' // d$.

C. $d' \equiv d$. D. d' và d chéo nhau.

Câu 12: Cho hai đường thẳng *a, b* và mặt phẳng (α). Giả sử $a // b$ và $b // (\alpha)$. Có thể kết luận gì về vị trí tương đối của *a* và (α)?

A. $a // (\alpha)$. B. $a \subset (\alpha)$.

C. $a // (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$. D. Không xác định được.

Câu 13: Cho hình chóp *S.ABCD*. Gọi *A', B', C', D'* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SA, SB, SC, SD*. Một

mặt phẳng (P) thay đổi qua A' và song song với AC luôn đi qua một đường thẳng cố định là:

A. Đường thẳng $A'B'$. B. Đường thẳng $A'D'$.

C. Đường thẳng $A'C'$. D. Đường thẳng $A'B$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) đồng thời song song với AC và SB lần lượt cắt các đoạn thẳng SA, AB, BC, SC, SD và BD tại M, N, E, F, I, J. Xét các khẳng định sau:

(1) $MN // (SCD)$; (2) $EF // (SAD)$;

(3) $NF // (SAD)$; (4) $IJ // (SAB)$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác ABD, M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $MG // (BCD)$. B. $MG // (ABD)$.

C. $MG // (ACD)$. D. $MG // (ABC)$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

A. $IJ // (ABC)$.

B. $IJ // (ABD)$.

C. $IJ // (ACD)$.

D. $IJ // (AEF)$ với E, F là trung điểm của BC và BD).

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và SAD. E, F là trung điểm của AB và AD. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $IJ // (SBD)$. B. $IJ // (SEF)$.

C. $IJ // (SAB)$. D. $IJ // (SAD)$.

Câu 18: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a. Tam giác SAD đều. M là điểm trên cạnh AB không trùng với A, B. (α) là mặt phẳng qua M song song với các đường thẳng SA, BC. Mặt phẳng (α) cắt các đoạn thẳng CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a) Khẳng định nào sau đây sai?

A. $MQ // SA$. B. $MN // PQ$.

C. $NP // SD$. D. $NQ // SD$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành.

B. Hình thoi.

C. Hình thang cân.

D. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và x biết $AM = x$.

A. $\dfrac{(a^2 - x^2)\sqrt{3}}{4}$ B. $\dfrac{a^2 - x^2\sqrt{3}}{4}$

C. $4a^2 - x^2\sqrt{3}$ D. $\dfrac{a^2 - x^2\sqrt{3}}{2}$

Câu 19: Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. M là điểm di động trên cạnh SC. Mặt phẳng (α) chứa AM, song song với BD.

a) Mặt phẳng (α) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SC. Đường thẳng ấy là:

A. Đường thẳng qua A và song song BD.

B. Đường thẳng qua A và song song SB.

C. Đường thẳng qua A và song song SD.

D. Đường thẳng qua A và song song SC.

b) Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

B. Hình thang.

C. Hình bình hành.

D. Hình thoi.

c) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với SB, SD và I, J lần lượt là giao điểm của ME, MF với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} = 0$. D. $\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AJ} = \vec{0}$.

d) $\dfrac{SB}{SE} + \dfrac{SD}{SF} - \dfrac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi. Tính giá trị đó?

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. 1 D. $\dfrac{2}{3}$.

Câu 20: Cho một tứ diện và các loại đa giác:

(I) Hình thang; (II) Tam giác;

(III) Hình thoi; (IV) Hình bình hành.

Một mặt phẳng chỉ có thể cắt tứ diện theo thiết diện là:

A. (I) hay (II). B. (II) hay (IV).

C. (I), (II) hay (IV). D. Cả bốn loại trên.

Câu 21: Cho hình chóp $SABC$. Giả sử M là điểm nằm trên cạnh SB.

a) Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA, BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình gì?

A. Hình bình hành.

B. Hình thoi.

C. Hình thang.

D. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

b) Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi?

A. $SM = \dfrac{SA.SB}{BC + SA}$ B. $SM = \dfrac{SA.SB}{AC + SA}$

C. $SM = \dfrac{SA.SB}{BD + SA}$ D. $SM = \dfrac{SA.SB}{SA + SB}$

c) Xác định vị trí điểm M để thiết diện có diện tích lớn nhất?

A. $\overrightarrow{MS} = -\overrightarrow{MB}$ B. $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MB}$

C. $\overrightarrow{MS}=-3\overrightarrow{MB}$ D. $2\overrightarrow{MS}=-\overrightarrow{MB}$

Câu 22: Cho hình chóp $D.ABC$ có đáy ABC vuông tại C. Gọi E là trung điểm của cạnh CB và $CD\perp AE$. Mặt phẳng (α) di động song song với AE và CD cắt các đoạn CA, AD, BD, CB lần lượt tại M, Q, P, N.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

B. Hình thang vuông.

C. Hình bình hành

D. Hình thoi.

b) Cho $CA=CE=CD=a$ và đặt $CM=x$. Tính diện tích của tứ giác $MNPQ$ theo a, x.

A. $S=\dfrac{x\sqrt{2}(4a-x)}{4}$ B. $S=\dfrac{x\sqrt{2}(4a-3x)}{4}$

C. $S=\dfrac{x\sqrt{2}(2a-x)}{2}$ D. $S=\dfrac{x\sqrt{2}(4a-3x)}{2}$

c) Tính MC theo a để diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $MC=\dfrac{a}{2}$ B. $MC=\dfrac{2a}{3}$ C. $MC=\dfrac{a}{4}$ D. $MC=\dfrac{3a}{4}$

Câu 23: Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^0$, $AB=a$. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SB=a$ và SB và OA vuông góc với nhau. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (β) qua M song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt $x=BM$ $(0<x<a)$.

a) $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thoi.

B. Hình bình hành.

C. Hình thang vuông.

D. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

b) Tính x theo a để diện tích của tứ giác $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{a}{3}$. B. $\dfrac{2a}{3}$. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SB=SD$. Gọi M là điểm tùy ý trên đoạn AO với $AM=x$. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO, SB, AB tại N, P, Q.

a) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ?

A. Hình thoi.

B. Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật.

D. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

b) Cho $SA=a$. Tính x theo a để diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\dfrac{a.\sqrt{2}}{2}$ B. $x=\dfrac{a.\sqrt{3}}{4}$ C. $x=\dfrac{a.\sqrt{6}}{4}$ D. $x=\dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$

Câu 25: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là một điểm nằm trên đoạn đường chéo BD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) qua M và song song với AC, SB có thể là những hình gì?

A. Tam giác, tứ giác. B. Tam giác, ngũ giác.

C. Tứ giác, ngũ giác. D. Ngũ giác.

Câu 26: Cho hình chóp $SABCD$. O là một điểm nằm bên trong tam giác ACD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O và song song với AC và SD có số cạnh bằng:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 27: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn $BC=2a$, đáy nhỏ $AD=a$, $AB=b$. Mặt bên SAD là tam giác đều, (α) là mặt phẳng đi qua M trên cạnh AB, song song với SA, BC. Mp (α) cắt các cạnh CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

a) $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thoi.

B. Hình bình hành.

C. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

D. Hình thang cân.

b) Tính diện tích của $MNPQ$ theo a, b, và $x=AM$ $(0<x<b)$.

A. $\dfrac{a^2(3x+b)(b-x)\sqrt{3}}{4b^2}$. B. $\dfrac{a^2(3x+b)(b-x)\sqrt{3}}{b^2}$.

C. $\dfrac{a^2(3x+b)(b-x)\sqrt{3}}{2b^2}$. D. $\dfrac{a^2(3x+b)(b-x)}{4b^2}$.

c) Tìm x để diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất?

A. $\dfrac{b}{2}$. B. $\dfrac{b}{4}$. C. $\dfrac{b}{3}$. D. $\dfrac{2b}{3}$.

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $AC=BD=c$. Mặt phẳng (α) song song với AB và CD cắt các cạnh của tứ diện theo một thiết diện là hình thoi. Tính diện tích thiết diện?

A. $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

B. $\dfrac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$.

C. $\dfrac{1}{2}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

D. $\dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Lấy $M\in AB$, $P\in CD$ sao cho $AM=DP=\dfrac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện qua MP và song song với AC.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$. B. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{6}$. C. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{12}$. D. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

Câu 2: Đáp án A.

Câu 3: Đáp án D.

Câu 4: Đáp án D.

Câu 5: Đáp án C.

Câu 6: Đáp án B.

Câu 7: Đáp án D.

Câu 8: Đáp án C.

Câu 9: Đáp án B.

Câu 10: Đáp án B.

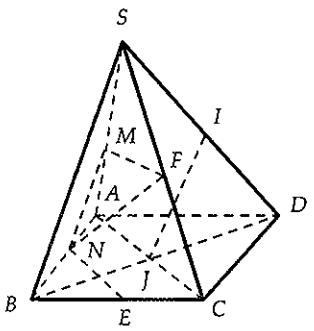
Câu 11: Đáp án B.

Câu 12: Đáp án C.

Câu 13: Đáp án C.

Do A', C' lần lượt là trung điểm của SA, SC nên $A'C'$ là đường trung bình của tam giác SAC. Do đó $A'C' // AC$. Khi đó dễ thấy $A'C' \subset (P)$.

Câu 14: Đáp án B.



Giả sử MN song song với (SCD).

Do MN là đường trung bình của tam giác ABS nên $MN // SB$. Suy ra SB nằm trong mặt (SCD) (vô lí).

Do đó MN không song song (SCD).

Tương tự ta cũng suy ra EF không song song với (SAD).

Ta có: $\begin{cases} IJ // SB \\ IJ \not\subset (SAB),\ SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ // (SAB)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi T là giao điểm của CN với AD.

Theo định lí Thales ta có: $\frac{NC}{NT} = \frac{NB}{NA} = 1$. Điều này suy ra N là trung điểm của CT. Do đó NF là đường trung bình của tam giác CTS. Suy ra $NF // ST$.

Vậy $\begin{cases} NF // ST \\ NF \not\subset (SAD),\ ST \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow NF // (SAD)$.

Câu 15: Đáp án C.

Do M thuộc các mặt phẳng $(ABC), (BCD)$ nên đáp án A, D bị loại.

Do G thuộc mặt phẳng (ABD) nên đáp án B bị loại.

Ta có: $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM // CE$ (E là trung điểm của đoạn AD. Dễ dàng suy ra đáp án C đúng.

Câu 16: Đáp án C. (Tương tự câu 17)

Câu 17: Đáp án A.

Hiển nhiên IJ cắt (SAB) và (SAD) theo thứ tự tại I, J.

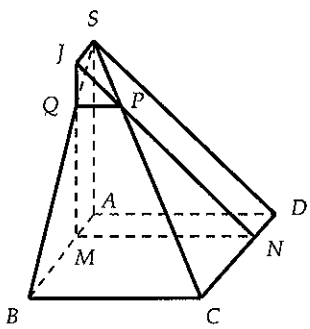
Đáp án C, D bị loại.

EF là đường trung bình của tam giác ABD nên $IJ // BD$.

Do I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD nên IJ, EF cùng nằm trong mặt phẳng (SEF) và $IJ // EF$. Đáp án B bị loại.

Dễ dàng chứng minh được $IJ // (SBD)$.

Câu 18: Đáp án D, C, A.



a) Ta có: $\begin{cases} SA // (P) \\ MP = (P) \cap (SAB) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SA // MP$

+ $\begin{cases} MN // BC \\ MN \subset (P), BC \subset (SBC) \\ PQ = (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow PQ // MN$

+ $\begin{cases} SD // (P), SD \subset (SCD) \\ NP = (P) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow NP // SD$

Như vậy NQ không song song được với SD.

Vậy ta chọn đáp án D.

b) Ta có: $\frac{NP}{SD} = \frac{CN}{CD} = \frac{BM}{BA} = \frac{QM}{SA}$.

Do tam giác SAD đều nên $NP = MQ$.

Tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} PQ // MN,\ PQ < MN \\ NP = MQ \end{cases}$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.

Vậy ta chọn đáp án C.

c) Ta có: $\frac{NP}{SD}=\frac{CN}{CD}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow NP=a-x$

$\frac{PQ}{BC}=\frac{SQ}{SA}=\frac{AM}{AB}=\frac{x}{a}\Rightarrow PQ=x$.

Diện tích tam giác $MNPQ$ là:

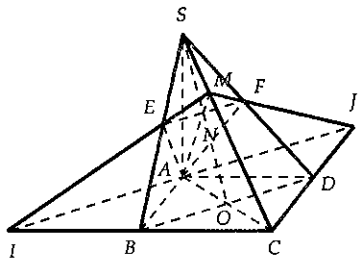
$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{MQ^2-\frac{(MN-PQ)^2}{4}}}{2}$$

$$=\frac{(a+x)\sqrt{(a-x)^2-\frac{(a-x)^2}{4}}}{2}=\frac{(a^2-x^2)\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy ta chọn đáp án A.

Nhận xét: Có thể tính diện tích MNPQ bằng cách lấy: $S_{MNPQ}=S_{JMN}-S_{JPQ}$ trong đó J là giao điểm của MQ và NP.

Câu 19: Đáp án A, A, A, C.



a) Ta có: $\begin{cases}BD//(\alpha),BD\subset(ABCD)\\A\in(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$ là đường thẳng đi qua A và song song với BD. Đường thẳng này cố định.

Vậy ta chọn đáp án A.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trong mặt phẳng (SAC), gọi N là giao điểm của SO và AM.

Ta có: $\begin{cases}BD//(\alpha),BD\subset(SBD)\\N\in(\alpha)\cap(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SBD)=Nx//BD$.

Đường thẳng Nx cắt SB, SD lần lượt tại E, F.

Khi đó: $\begin{cases}(\alpha)\cap(SAB)=SE\\(\alpha)\cap(SBC)=EM\\(\alpha)\cap(SCD)=MF\\(\alpha)\cap(SAD)=AF\end{cases}$.

Vậy thiết diện của hình chóp $SABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác.

Hiển nhiên ME và AF cắt nhau, vì giả sử ME và AF song song với nhau thì khi đó dễ dàng suy ra AF, ME sẽ song song với giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD). Suy ra AF trùng với AD, khi đó EF trùng BD vô lí.

Tương tự MF và AE cũng cắt nhau.

Vậy ta chọn đáp án A.

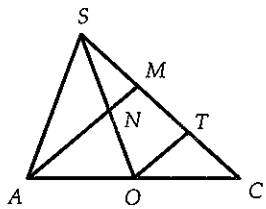
c) Do O là trung điểm BD, EF song song với BD nên suy ra N là trung điểm EF. Dễ thấy A, I, J thẳng hàng và cùng nằm trên giao tuyến d của hai mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$.

Do $\begin{cases}EF//BD,BD\subset(ABCD)\Rightarrow EF//(ABCD)\\EF\subset(\alpha)\\d=(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow EF//d$

Mặt khác, N là trung điểm của EF nên suy ra A là trung điểm của IJ.

Vậy ta chọn đáp án A.

d)



Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{SB}{SE}=\frac{SD}{SF}=\frac{SO}{SN}\Rightarrow\frac{SB}{SE}+\frac{SD}{SF}-\frac{SC}{SM}=\frac{2SO}{SN}-\frac{SC}{SM}\ (1)$$

Gọi T là trung điểm của đoạn CM thì $OT//AM$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{SO}{SN}=\frac{ST}{SM}=\frac{SM+\frac{MC}{2}}{SM}=1+\frac{MC}{2SM}.$$

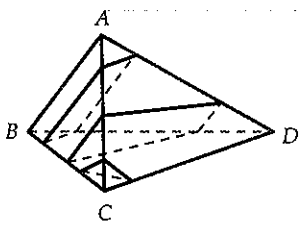
Lại có: $\frac{SC}{SM}=\frac{SM+MC}{SM}$

$$=1+\frac{MC}{SM}=1+2\left(\frac{SO}{SN}-1\right)\Rightarrow\frac{2SO}{SN}-\frac{SC}{SM}=1$$

Vậy $\frac{SB}{SE}+\frac{SD}{SF}-\frac{SC}{SM}=1$.

Vậy ta chọn đáp án C.

Câu 20: Đáp án D.



Hình vẽ trên cho thấy các vị trí của mặt phẳng cắt tứ diện theo thiết diện là hình bình hành (khi mặt phẳng song song với AB, CD), hình thang (khi mặt phẳng song song với AB), tam giác. Thiết diện còn là hình thoi.

Như vậy ta chọn đáp án D.

Câu 21: Đáp án A, A, A.

a) Vì mặt phẳng (α) qua M song song với SA, BC nên qua M vẽ MN song song với SA (N thuộc AB), MP song song với BC (P thuộc SC).

Do $MP // BC \Rightarrow MP // (ABC)$

$\Rightarrow (MNP) \cap (ABC) = NQ // BC$.

Tương tự $MN // SA \Rightarrow MN // (SAC)$

$\Rightarrow (MNP) \cap (SAC) = PQ // MN$.

Vậy tứ giác $MNQP$ là là thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) và thiết diện là hình bình hành.

Vậy ta chọn đáp án A.

b) $MNQP$ là hình thoi khi và chỉ khi $MP = MN$

Theo định lí Thales ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{MP}{BC} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow MP.SB = BC.SM \\ \dfrac{MP}{SA} = \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{MB}{SB} = \dfrac{SB - SM}{SB} \Rightarrow MP.SB = SA(SB - SM) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow BC.SM = SA(SB - SM) \Rightarrow SM = \frac{SA.SB}{BC + SA}$$

Vậy để thiết diện là hình thoi thì M nằm trên đoạn SB và $SM = \dfrac{SA.SB}{BC + SA}$.

Vậy ta chọn đáp án A.

c) Ta có $\dfrac{MP}{BC} + \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{SM}{SB} + \dfrac{MB}{SB} = 1$

$$\geq 2\sqrt{\frac{MP}{BC}.\frac{MN}{SA}} \Rightarrow MP.MN \leq \frac{BC.SA}{4}.$$

Ta có:

$$S_{MNQP} = MN.MP.\sin\widehat{MNQ} \leq \frac{BC.SA}{4}.\sin\widehat{MNQ} = \text{const}$$

(do $\widehat{MNQ}$ không đổi)

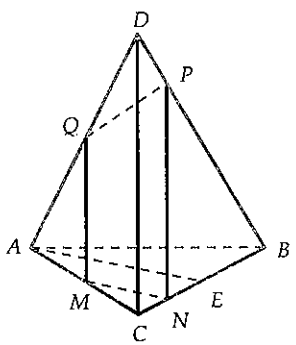
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{MP}{BC} = \frac{MN}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{MB}{SB} = \frac{1}{2}.$$

Điều này suy ra M là trung điểm SB.

Đáp án đúng là A.

Câu 22: Đáp án B, B, B.



a) $\begin{cases} CD // (\alpha),\ CD \subset (ACD) \\ MQ = (\alpha) \cap (ACD) \end{cases} \Rightarrow CD // MQ$

+ $\begin{cases} CD // (\alpha),\ CD \subset (BCD) \\ NP = (\alpha) \cap (BCD) \end{cases} \Rightarrow CD // NP$

Suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Do $\begin{cases} (DC, AE) = 90^0 \\ MN // AE,\ MQ // CD \end{cases} \Rightarrow (MN, MQ) = 90^0$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông có MN là đường cao.

Vậy ta chọn đáp án B.

b) Ta có tam giác ACE vuông cân, MN song song với AE nên suy ra tam giác MCN vuông cân. Khi đó $CM = CN = x$. Suy ra $MN = x\sqrt{2}$.

Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MQ}{CD} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow MQ = a - x.$$

$$\frac{BN}{BC} = \frac{NP}{CD} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow NP = \frac{2a - x}{2}$$

Diện tích hình thang vuông $MNPQ$ là:

$$S = \frac{(MQ + NP)MN}{2} = \frac{x\sqrt{2}(4a - 3x)}{4}$$

Vậy ta chọn đáp án B.

c) Áp dụng định lí Cauchy ta có:

$$S = \frac{3x\sqrt{2}(4a - 3x)}{12} \leq \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{3x + 4a - 3x}{2}\right)^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

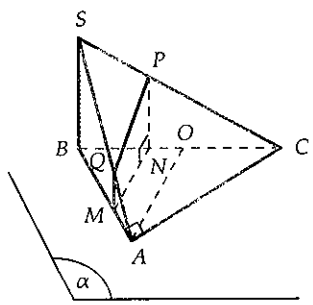
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $3x = 4a - 3x \Rightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $\max S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.

Tức là vị trí điểm M thuộc đoạn CA sao cho $CM = \dfrac{2}{3}CA$

Vậy ta chọn đáp án B.

Câu 23: Đáp án C, B.



a) Ta có: $\begin{cases} (\beta) // OA \\ OA \subset (ABC) \\ MN = (\beta) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN // OA$

$$\begin{cases}(\beta)//SB\\ SB\subset(SAB), SB\subset(SBC)\\ MQ=(\beta)\cap(SAB), NP=(\beta)\cap(SBC)\end{cases}\Rightarrow MQ//SB//NP$$

Vậy $MQ//SB//NP$.

Suy ra $MNPQ$ là hình thang

Ta có: $\begin{cases}OA\perp SB\\ MN//OA\\ MQ//NP//SB\end{cases}\Rightarrow MN\perp MQ$

Vậy $MNPQ$ là hình thang vuông, đường cao MN.

Vậy ta chọn đáp án **C**.

b) Tính diện tích của hình thang theo a và x.

Do tam giác ABC vuông tại A, O là trung điểm BC nên $AO=OB$.

Lại có $\widehat{ABC}=60^0, AB=a$ nên tam giác ABO là tam giác đều cạnh a. Mặt khác, do $MN//AO$ nên tam giác BMN đều. Suy ra $BM=BN=MN=x$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{MQ}{SB}=\frac{AM}{AB}\Rightarrow MQ=a-x$$

và $\frac{NP}{SB}=\frac{NC}{BC}\Rightarrow NP=\frac{2a-x}{2}$.

Diện tích hình thang vuông $MNPQ$ là:

$$S=\frac{(MQ+NP)MN}{2}=\frac{x(4a-3x)}{4}$$

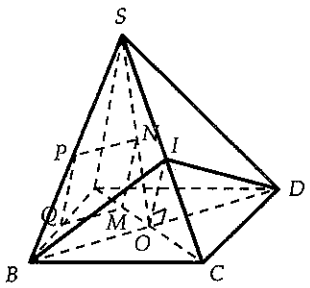
$$=\frac{1}{12}.3x(4a-3x)\le\frac{1}{12}\left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2=\frac{a^2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $3x=4a-3x\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$

Vậy $x=\frac{2a}{3}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

Vậy ta chọn đáp án **B**.

Câu 24: Đáp án C, D.



a) Gọi I là trung điểm của SC.

Dễ thấy với điều kiện $SB=SD$

thì $\Delta SBC=\Delta SDC$ $(c.c.c)$.

Suy ra $ID=IB$, hay tam giác IBD cân tại I.

Suy ra $IO\perp BD$.

Mặt khác: $SA//IO\Rightarrow AS\perp BD$

Ta có: $\begin{cases}(\alpha)//BD\\ BD\subset(ABO)\\ (\alpha)\cap(ABO)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//BD$

Tương tự: $\begin{cases}(\alpha)//BD\\ BD\subset(SBO)\\ (\alpha)\cap(SBO)=NP\end{cases}\Rightarrow NP//BD$

Từ các điều trên suy ra $MQ//NP//BD$

Mặt khác: $\begin{cases}(\alpha)//SA\\ SA\subset(SAO)\\ (\alpha)\cap(SAO)=MN\end{cases}\Rightarrow MN//SA$

Tương tự: $\begin{cases}(\alpha)//SA\\ SA\subset(SAB)\\ (\alpha)\cap(SAB)=PQ\end{cases}\Rightarrow PQ//SA$

Suy ra $MN//PQ//SA$

Các điều trên suy ra $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vậy ta chọn đáp án **C**.

b) Ta có: $S_{MNPQ}=MQ.MN$

Ta có: Tam giác AMQ là tam giác vuông tại M cân tại M nên $MQ=AM=x$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{MN}{SA}=\frac{MO}{OA}\Rightarrow MN=AS.\frac{OM}{OA}=a.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}-x}{\frac{a.\sqrt{2}}{2}}=a-x.\sqrt{2}$$

Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là:

$$S_{MNPQ}=MQ.MN=x.(a-x.\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}x.\sqrt{2}(a-x.\sqrt{2})\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x\sqrt{2}+a-x\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $x.\sqrt{2}=a-x.\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{a.\sqrt{2}}{4}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a}{2.\sqrt{2}}=\frac{a.\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $x=\frac{a.\sqrt{2}}{4}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

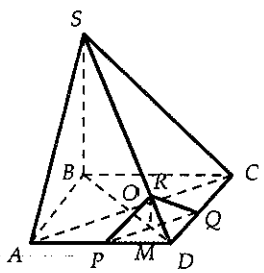
Vậy ta chọn đáp án **D**.

Câu 25: Đáp án B.

Gọi O là tâm của hình bình hành.

Xét các khả năng:

+ TH1:



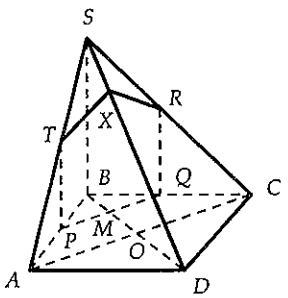
Nếu M nằm trên đoạn BO (M không trùng với B và O).

Vì mặt phẳng (α) qua M và song song với SB và AC nên trong (SBD) qua M kẻ $MX // SB$ $(X \in SD)$ và trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ đường thẳng qua M song song với AC cắt AB, BC lần lượt tại P, Q.

Do $MX // SB \Rightarrow MX // (SBC)$. Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (α) với (SBC) là đường thẳng qua Q và song song với SB cắt SC tại R. Tương tự giao tuyến của mặt phẳng (α) với (SAB) là đường thẳng qua P và song song với SB cắt SA tại T.

Từ đây, trong trường hợp này, dễ dàng có: Ngũ giác $PQRXT$ là thiết diện của hình chóp $SABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α).

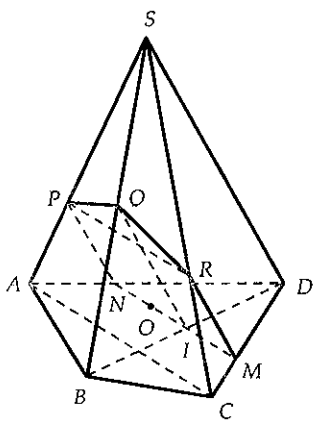
+ TH2:



Nếu M nằm trên đoạn OD (M không trùng với D, có thể trùng với O). Kẻ MR song song với SB (R nằm trên SD), trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng đường thẳng qua M song song với AC cắt AD, DC lần lượt tại P, Q.

Trong trường hợp này thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác PQR.

Câu 26: Đáp án C.



Ta có: $\begin{cases} AC // (\alpha),\ AC \subset (ABCD) \\ O \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow Ot // AC$.

Đường thẳng Ot cắt AD, DC lần lượt tại N, M.

Tương tự: $(\alpha) \cap (SAD) = NP // SD\ (P \in SA)$;

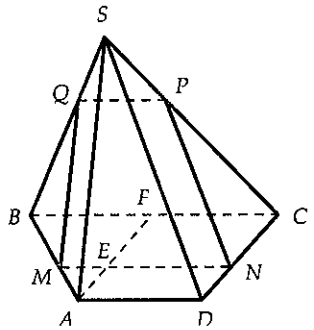
$(\alpha) \cap (SCD) = MR // SD\ (R \in SC)$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi I là giao điểm của MN và BD. Suy ra: $(\alpha) \cap (SBD) = IQ // SD\ (Q \in SB)$;

Dễ dàng suy ra: $(\alpha) \cap (SAB) = PQ$; $(\alpha) \cap (SBC) = QR$.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là ngũ giác $MNPQR$.

Câu 27: Đáp án D, A, C.



a) $\begin{cases} BC // (\alpha),\ BC \subset (ABCD),\ BC \subset (SBC) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (\alpha) \cap (SBC) = PQ \end{cases}$

$\Rightarrow MN // BC // PQ$

+ $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = MQ \\ (\alpha) // SA,\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow SA // MQ$

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{AM}{AB} = \frac{SQ}{SB} = \frac{SP}{SC}$; $\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{DN}{DC}$

$\Rightarrow NP // SD$

$\begin{cases} MQ // SA \\ MN // BC \Rightarrow MN // AD \end{cases} \Rightarrow \widehat{NMQ} = \widehat{SAD} = 60^0$

Tương tự ta chứng minh được $\widehat{MNP} = \widehat{SDA} = 60^0$

Tứ giác $MNPQ$ có $MN // PQ$, $\widehat{MNP} = \widehat{NMQ} = 60^0$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.

Vậy ta chọn đáp án D.

b) Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MQ = \frac{a(b-x)}{b}$;

$\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow PQ = \frac{2ax}{b}$

Gọi F là trung điểm của BC. Đường thẳng qua AF song song với CD cắt MN tại E. Ta có $EN = AD = a$.

Theo định lí Thales ta có:

$\frac{EM}{BF} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow EM = \frac{ax}{b} \Rightarrow MN = ME + EN = a + \frac{ax}{b}$

Diện tích hình thang cân $MNPQ$ là:

$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{QM^2-\frac{(MN-PQ)^2}{4}}}{2}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{3ax}{b}\right)\sqrt{\frac{a^2(b-x)^2}{b^2}-\frac{1}{4}\left(a-\frac{ax}{b}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{a^2(3x+b)(b-x)\sqrt{3}}{4b^2}$$

Vậy ta chọn đáp án A.

c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$S=\frac{a^2(3x+b)(3b-3x)\sqrt{3}}{12b^2}$$

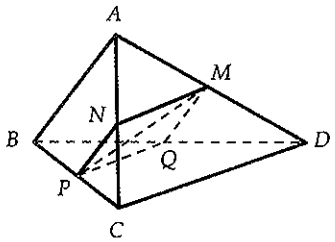
$$\le\frac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}\left(\frac{3x+b+3b-3x}{2}\right)^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=\frac{b}{3}$.

Vậy diện tích $MNPQ$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x=\frac{b}{3}$.

Vậy ta chọn đáp án C.

Câu 28: Đáp án D.



Giả sử (α) cắt các cạnh AD, AC, CB, BD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

$$\begin{cases}CD//(\alpha),\ CD\subset(ACD)\\ M\in(\alpha)\cap(ACD)\end{cases}$$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=MN//CD\ (N\in AC)$

Tương tự, $(\alpha)\cap(BCD)=PQ//CD\ (Q\in BD)$.

Khi đó:

$(\alpha)\cap(ABD)=MQ//AB,\ (\alpha)\cap(ABC)=NP//AB$.

Hình bình hành $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Theo định lí Thales ta có:

$$\frac{NP}{AB}=\frac{CN}{CA}\Rightarrow NP=\frac{a}{c}CN,\ \frac{MN}{CD}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow MN=\frac{a}{b}AN$$

Để $MNPQ$ là hình thoi thì $MN=NP\Rightarrow CN=AN$ hay N là trung điểm đoạn AC. Từ đó suy ra M, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD.

Ta có:

$$\begin{cases}DN^2=\frac{AD^2+DC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}\\ BN^2=\frac{AB^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}\end{cases}$$

$\Rightarrow DN=BN\Rightarrow NQ\perp BD$

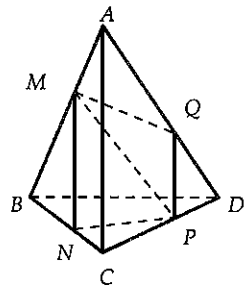
Do đó ta có:

$$NQ^2=NB^2-BQ^2=\frac{b^2+a^2}{2}-\frac{c^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{b^2+a^2-c^2}{2}$$

Tương tự tính được $MP^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$.

Vậy $S=NQ.MP=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}$.

Câu 29: Đáp án C.



Thiết diện cần tìm là hình thang $MNPQ$ $(MN//AC//PQ)$.

Suy ra $AM=NC=DQ=DP=\frac{a}{3}$, $MN=BM=\frac{2a}{3}$.

Dễ thấy $\Delta AMQ=\Delta CNP$ (c.g.c)

$\Rightarrow MQ=NP$ nên thiết diện là hình thang cân.

Áp dụng định lí hàm cosin vào ΔAMQ:

$$MQ^2=AM^2+AQ^2-2AM.AQ.\cos60^0=\frac{a^2}{3}.$$

Diện tích thiết diện là:

$$S=\frac{(MN+PQ)\sqrt{MQ^2-\frac{(MN-PQ)^2}{4}}}{2}=\frac{a^2\sqrt{11}}{12}.$$

Mặt phẳng song song với mặt phẳng

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian, ta đã biết rằng đối với hai mặt phẳng bất kì hoặc có điểm chung hoặc cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng hoặc không có điểm chung. Nếu hai mặt phẳng đó không có điểm chung, ta nói hai mặt phẳng đó song song với nhau.

Định nghĩa:

> Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau, kí hiệu là $(\alpha)//(\beta)$, nếu chúng không có điểm chung.

2. Tính chất

Định lí 1:

> Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Lúc đó (α) và (β) song song với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng (β) tồn tại hai đường thẳng a_1, a_2 cắt nhau sao cho a_1, a_2 đều song song với (α).

STUDY TIP

Định lí 2 cho ta một cách xác định một mặt phẳng khá thuận lợi. Đó là mặt phẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng cho trước.

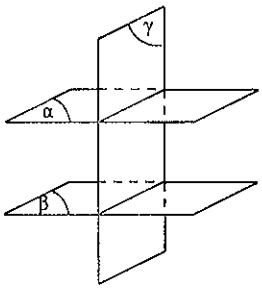
Định lí 2:

> Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Định lí 2 (bổ sung) có thể phát biểu bổ sung như sau:

> Cho một điểm P nằm ngoài mặt phẳng (α). Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua P và song song với (α). Mặt phẳng này chứa mọi đường thẳng đi qua P và song song với mặt phẳng (α).

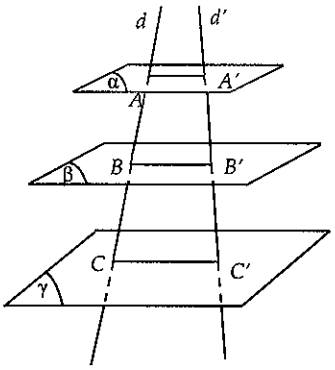
Các hệ quả:



- *Hệ quả 1:* Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua d và song song với (α).
- *Hệ quả 2:* Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu mặt phẳng (γ) cắt (α) theo một đường thẳng thì (γ) cũng cắt (β) theo một đường thẳng và các đường thẳng đó song song với nhau (hệ quả này bổ sung thêm một cách chứng minh hai đường thẳng song song với nhau trong không gian)
- *Hệ quả 3:* Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- *Hệ quả 4:* Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

3. Định lí Thales trong không gian

Định lí 3:



Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ. Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$.

Định lí Thales đảo trong không gian:

Cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau và các điểm A, B, C trên d, các điểm A', B', C' trên d' sao cho $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$. Lúc đó các đường thẳng AA', BB', CC' cùng song song với một mặt phẳng.

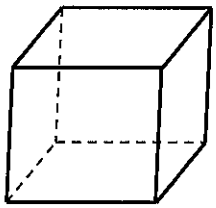
4. Hình lăng trụ, hình hộp

a) Hình lăng trụ

Hình lăng trụ $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ là hình được lập thành từ hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau sao cho các cạnh $A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1$ tương ứng song song và bằng các cạnh $B_1B_2, B_2B_3,...B_nB_1$.

- Các đa giác $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ được gọi là các mặt đáy của hình lăng trụ. Hai đa giác này bằng nhau.
- Các đoạn $A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1$ và $B_1B_2, B_2B_3,...B_nB_1$ được gọi là các cạnh đáy của hình lăng trụ.
- Các đa giác $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2,..., A_nA_1B_1B_n$ là các hình bình hành, gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Các đoạn $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,..., A_nB_n$ đều song song và bằng nhau, gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.

Nếu các mặt đáy là tam giác, tứ giác...thì hình lăng trụ tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, tứ giác...



b) Hình hộp

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp

c) Hình chóp cụt

Hình chóp cụt $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ là hình được lập thành từ hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau với các cạnh $A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1$ và $B_1B_2, B_2B_3,...B_nB_1$ tương ứng song song với nhau và $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=...=\frac{A_nA_1}{B_nB_1}=k<1$.

Lưu ý

Nếu các đáy là tam giác, tứ giác...thì hình chóp cụt tương ứng được gọi là hình chóp cụt tam giác, tứ giác...

- Đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là đáy nhỏ và đa giác $B_1B_2...B_n$ được gọi là đáy lớn của hình chóp cụt.
- Các đoạn $A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1$ và $B_1B_2, B_2B_3,...B_nB_1$ được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt.
- Các đa giác $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2,..., A_nA_1B_1B_n$ là các hình thang, gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.
- Các đoạn $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,..., A_nB_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp cụt. Các đường thẳng $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,..., A_nB_n$ đồng quy tại S.

5. Phép chiếu song song

a) Định nghĩa

Cho mặt phẳng (P) và một đường thẳng l cắt (P). Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương đường thẳng l được định nghĩa như sau:

> Với mỗi điểm A trong không gian, xét đường thẳng a đi qua A và song song hoặc trùng với đường thẳng l. Giao điểm A' của đường thẳng a với mặt phẳng (P) được gọi là ảnh của điểm A cho phép chiếu song song này.

Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng l được gọi là phương chiếu của phép chiếu song song.

Cho một hình H trong không gian. Tập hợp H' các ảnh M' của các điểm M thuộc H được gọi là ảnh của hình H qua phép chiếu song song.

b) Tính chất

Định lí:

> 1. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự đó.
> 2. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
> 3. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
> 4. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Chú ý

Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng là một điểm. Sau đây ta chỉ xét các hình chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

B. Các dạng toán về mặt phẳng song song với mặt phẳng

Dạng 1

Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P).

Phương pháp:

- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song $(P),(Q)$ với nhau, ta có các phương pháp sau:

> *Phương pháp 1:*
> + Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia.
> + Hoặc (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau theo thứ tự song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (Q).
>
> *Phương pháp 2:* Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba.
>
> *Phương pháp 3:* (*bổ sung khi học trong chương quan hệ vuông góc*)
> Chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với một đường thẳng.

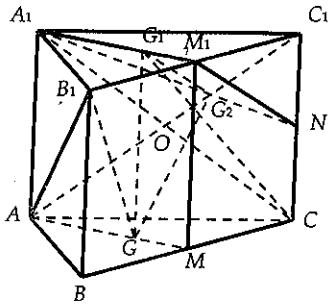
- Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh a nằm trong một mặt phẳng nào đó song song với mặt phẳng (P) hoặc dùng định lí Thales đảo trong không gian.

Ví dụ 1: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi G, G_1, G_2 tương ứng là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, ACC_1.

a) Chứng minh rằng $(AGB_1)//(A_1G_1C)$.

b) Chứng minh rằng $(GG_1G_2)//(BC_1C)$.

Lời giải



a) Gọi M và M_1 lần lượt là trung điểm của BC và B_1C_1.

Ta có $\begin{cases} MM_1 // AA_1 \\ MM_1 = AA_1 \end{cases}$, suy ra AMM_1A_1 là hình bình hành.

Do đó $A_1M_1 // AM$, $A_1M_1 = AM$ (1).

Lại có: $\begin{cases} B_1M_1 // CM \\ B_1M_1 = CM \end{cases}$, suy ra CMB_1M_1 là hình bình hành.

Do đó $CM_1 // B_1M$, $CM_1 = B_1M$ (2).

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra $(AMB_1)//(A_1M_1C)$ hay $(AGB_1)//(A_1G_1C)$.

b) Theo (1) ta suy ra $\begin{cases} M_1G_1 // MG \\ M_1G_1 = MG \end{cases}$. Do đó M_1G_1GM là hình bình hành.

Suy ra $GG_1 // MM_1$ (3).

Gọi N là trung điểm của CC_1. Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A_1B_1C_1, ACC_1$ nên $\frac{A_1G_1}{A_1M_1} = \frac{2}{3} = \frac{A_1G_2}{A_1N} \Rightarrow G_1G_2 // NM_1$ (4).

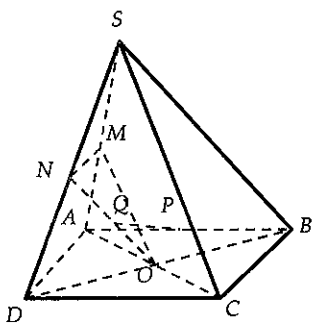
Từ (3) và (4) dễ dàng suy ra $(GG_1G_2)//(BC_1C)$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBC).

b) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh PQ song song với (SBC).

Lời giải



a) Do OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM // SC$ (1).

Lại có, ON là đường trung bình của tam giác SDB nên $ON // SB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN)//(SBC)$.

b) Ta có OP là đường trung bình của tam giác ABD nên $OP // AD$, mà $AD // MN$, suy ra $OP // MN$. Do đó P sẽ thuộc mặt phẳng (OMN). Suy ra $PQ \subset (OMN)$.

Theo ý a, ta có $(OMN)//(SBC)$ nên $PQ//(SBC)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. M, N là trung điểm của SA, CD.

a) Chứng minh: $(OMN)//(SBC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SD. J thuộc mặt $(ABCD)$ sao cho J cách đều AB, CD. Chứng minh: $IJ//(SAB)$.

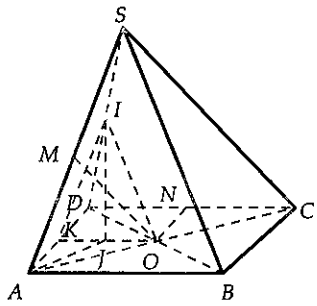
Lời giải

a) Vì O, N lần lượt là trung điểm của BD, CD nên ON là đường trung bình của $\Delta BCD \Rightarrow ON // BC$ mà ON không nằm trong (SBC), $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow ON // (SBC)$.

Lại thấy OM là đường trung bình của $\Delta SAC \Rightarrow OM // SC \Rightarrow OM // (SBC)$

Mặt khác: $ON // (SBC)$, $OM \cap ON = \{O\} \Rightarrow (OMN) // (SBC)$



b) Gọi K là giao của OJ và AD.

Ta thấy OI là đường trung bình của $\Delta SDB \Rightarrow IO // SB \Rightarrow IO // (SAB)$ (do IO không nằm trong (SAB), $SB \subset (SAB)$)

Vì J cách đều AB và CD nên $OJ // AB // CD \Rightarrow OK // AB \Rightarrow OK // (SAB)$

Ta có: $\begin{cases} OJ // (SAB) \\ OK // (SAB) \\ OJ \cap OK = \{O\} \\ OJ, OK \subset (OKJ) \end{cases}$ nên $(OJK) // (SAB)$ mà $IJ \subset (OJK) \Rightarrow IJ // (SAB)$.

Dạng 2 Giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước

Phương pháp:

Sử dụng định lí: "Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi mặt phẳng (R) cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song với nhau" để tìm các đoạn giao tuyến.

Hoặc là dùng định lí sau: $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\beta)$ để đưa về bài toán dựng thiết diện song song với một đường thẳng.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Trên đoạn AB lấy một điểm M với $AM = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC, và CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là hình gì?

A. Hình thoi. B. Hình bình hành.

C. Hình thang. D. Tứ giác có các cạnh đối cắt nhau.

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD), (SBC).

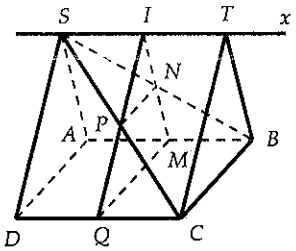
C. Đoạn ST (T là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SABT$).

D. Tia Sx bất kì.

c) Cho $\widehat{SAD} = 90°$ và $SA = a$. Tính x theo a để diện tích thiết diện bằng $\frac{3a^2}{8}$.

A. $x = \frac{2a}{3}$. B. $x = \frac{a}{4}$. C. $x = \frac{a}{3}$. D. $x = \frac{a}{2}$.

Lời giải



a) Ta có: $(\alpha)//(SAD) \Rightarrow \begin{cases}(\alpha)//SD\\(\alpha)//SA\\(\alpha)//AD\end{cases}$

$+\begin{cases}(\alpha)//SD\\SD\subset(SAD)\\(\alpha)\cap(SAD)=PQ\end{cases} \Rightarrow PQ//SD$

$+\begin{cases}(\alpha)//SA\\SA\subset(SAB)\\(\alpha)\cap(SAB)=MN\end{cases} \Rightarrow MN//SA$

$+\begin{cases}(\alpha)//AD\\AD\subset(ABCD)\\(\alpha)\cap(ABCD)=MQ\end{cases} \Rightarrow MQ//AD \quad (1)$

Vì $\begin{cases}BC//MQ\\BC\not\subset(\alpha)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)//BC$. Ta có: $\begin{cases}(\alpha)//BC\\BC\subset(SBC)\\(\alpha)\cap(SBC)=PN\end{cases} \Rightarrow PN//BC\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $MQ//PN \Rightarrow MNPQ$ là hình thang

Vậy đáp án đúng là **C.**

b) Ta có: $\begin{cases}AB//DC\\AB\subset(SAB), DC\subset(SCD)\Rightarrow Sx//AB//CD\\S\in(SAB)\cap(SCD)\end{cases}$

Mà $\begin{cases}I\in(SCD)\\I\in(SAB)\end{cases} \Rightarrow I\in(SAB)\cap(SDC)\Rightarrow I\in Sx$

Giới hạn quỹ tích: Khi $M\equiv A$ thì I trùng với S.

$M\equiv B$ thì I trùng với điểm T.

Phần đảo các bạn đọc tự chứng minh.

Ta có quỹ tích là đoạn ST.

Vậy đáp án đúng là **C.**

c) Ta có: $S_{MNPQ}=S_{IMQ}-S_{INP}=S_{SAD}-S_{INP}$

Ta có: ΔSAD vuông cân tại A. Do đó: $S_{SAD}=\frac{1}{2}.a^2$.

Do $SA=AB$ nên tam giác SAB cân tại A.

Do $MN//SA$ nên dễ dàng suy ra tam giác INS cân tại I, NMB cân tại M.

Suy ra: $NI=MI-MN=x$.

Lại có: $MI=MQ=a$ và NP song song với MQ nên tam giác INP cân tại N.

Suy ra $NI=NP=x$.

Do $\widehat{SAD}=90°$ nên $\widehat{INP}=90°$, suy ra ΔINP vuông cân tại N

Do đó : $S_{INP}=\frac{1}{2}.x^2 \Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{1}{2}.a^2-\frac{1}{2}.x^2=\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)$

Để $S_{MNPQ}=\frac{3.a^2}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)=\frac{3.a^2}{8}\Rightarrow x^2=\frac{a^2}{4}\Rightarrow x=\frac{a}{2}$.

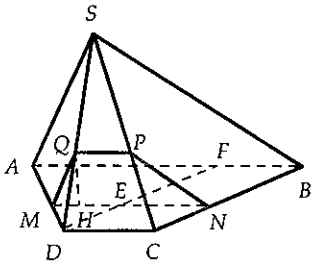
Vậy đáp án đúng là **D.**

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $AB=3a$, $AD=CD=a$. Mặt bên (SAB) là tam giác cân tại S, $SA=2a$. Mặt phẳng (α) di động và song song với (SAB) đồng thời cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Biết tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp một đường tròn bán kính r. Tính r?

A. $r=\frac{a\sqrt{7}}{6}$. **B.** $r=\frac{a\sqrt{7}}{3}$. **C.** $r=\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $r=\frac{2a\sqrt{7}}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}(\alpha)//(SAB)\\ MN=(\alpha)\cap(ABCD)\\ AB=(SAB)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow MN//AB$

Tương tự ta chứng minh được $MQ//SA, PQ//CD, NP//SB$.

Từ đó suy ra $PQ//MN$. Do đó $MNPQ$ là hình thang với $MN>PQ$.

Đặt $AM=x\ (0<x<a)$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{DM}{DA}=\frac{MQ}{SA}=\frac{DQ}{DS}=\frac{CP}{CS}=\frac{NP}{SB}\Rightarrow MQ=NP=\frac{SA.DM}{DA}=2(a-x)$.

Do vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{a}\Rightarrow PQ=x$.

Dựng đường thẳng qua D và song song với BC cắt MN, AB tại E, F.

Khi đó $NE=a$ và $\frac{ME}{AF}=\frac{MD}{AD}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow ME=2(a-x)$. Suy ra: $MN=3a-2x$.

Để $MNPQ$ ngoại tiếp một đường tròn thì $MN+PQ=MQ+NP$

$\Leftrightarrow MN+PQ=2MQ\Rightarrow 3a-2x+x=4(a-x)\Rightarrow x=\frac{a}{3}$.

Hạ đường cao QH của hình thang cân $MNPQ$.

Ta có: $QH=\sqrt{MQ^2-MH^2}=\sqrt{MQ^2-\left(\frac{MN-PQ}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$

Bán kính đường tròn nội tiếp $MNPQ$ là: $r=\frac{1}{2}QH=\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Ta xét phép chiếu song song mà các đoạn thẳng hay đường thẳng không song song hoặc trùng với phương chiếu (từ câu 1 đến câu 4).

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Phép chiếu song song bảo toàn thứ tự ba điểm thẳng hàng.

B. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

C. Hình chiếu của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

D. Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng.

Câu 2: Hình chiếu của một đoạn thẳng qua phép chiếu song song sẽ là:

A. Một điểm.

B. Một đoạn thẳng.

C. Một đoạn thẳng bằng với đoạn thẳng đã cho.

D. Một đường thẳng.

Câu 3: Một tam giác đều, mà mặt phẳng chứa tam giác không song song hoặc chứa phương chiếu, có hình chiếu là:

A. Một điểm. B. Một đoạn thẳng.

C. Một tam giác. D. Một tam giác đều.

Câu 4: Một tam giác vuông, mà mặt phẳng chứa tam giác không song song hoặc chứa phương chiếu, có hình chiếu là:

A. Một điểm. B. Một đoạn thẳng.

C. Một tam giác. D. Một tam giác vuông.

Câu 5: Qua một phép chiếu song song, một đường thẳng sẽ song song với hình chiếu của nó nếu đường thẳng đó:

A. song song với phương chiếu.

B. không song song với phương chiếu.

C. không song song với phương chiếu và không song song với mặt phẳng chiếu.

D. không song song với phương chiếu nhưng song song với mặt phẳng chiếu.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ACD. Để hình chiếu song song của G lên mặt phẳng (BCD) là trọng tâm của tam giác BCD thì phương chiếu nào sau đây thích hợp?

A. AC. B. AB. C. AD. D. AG.

Câu 7: Cho mặt phẳng (P) và một hình bình hành $ABCD$ có các cạnh đều cắt mặt phẳng (P). Xét các yếu tố sau

1. Hình bình hành; 2. Đoạn thẳng;

3. Hình thang; 4. Điểm.

Không thể chọn phương chiếu để hình chiếu song song của $ABCD$ lên mặt phẳng (P) là:

A. 1. B. 2. C. 2 , 3. D. 3, 4.

Câu 8: Cho mặt phẳng (P) và các điểm A, B, C không thuộc (P). Gọi A', B', C' phân biệt lần lượt là hình chiếu song song của A, B, C lên (P) theo phương của đường thẳng d cho trước. Xét các mệnh đề:

1. Nếu $AB//(P)$ thì $AB = A'B'$.

2. Nếu $AB = A'B'$ thì $AB//(P)$.

3. Nếu A, B, C thẳng hàng thì A', B', C' thẳng hàng.

4. Nếu A', B', C' thẳng hàng thì A, B, C thẳng hàng.

5. Nếu ABC là tam giác đều thì $A'B'C'$ là tam giác cân hoặc đều.

Các mệnh đề nào sai?

A. Chỉ 2. B. Chỉ 4 và 5.

C. Chỉ 5. D. Chỉ 2, 4 và 5.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

1. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau

3. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau

4. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau

5. Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại

6. Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại

Hãy chọn phương án trả lời đúng:

A. 1,2,6,7. B. 2,3,4,6. C. 1,3,5,7. D. 3,4,6.

Câu 10: Cho các mệnh đề:

1. Qua một điểm không thuộc hai mặt phẳng cắt nhau vẽ được duy nhất một đường thẳng song song với hai mặt phẳng đó.

2. Ba đường thẳng đôi một cắt nhau xác định một mặt phẳng

3. Qua một điểm không thuộc hai đường thẳng chéo nhau vẽ được duy nhất một mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó.

4. Ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc song song.

5. Nếu đường thẳng d song song với đường thẳng d' trong mặt phẳng (P) thì d song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P).

6. Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì cắt nhau theo hai giao tuyến song song với đường thẳng đó.

Hãy chọn các mệnh đề đúng:

A. 1, 2, 3, 4. B. 1, 3, 4, 5, 6.

C. 1, 4. D. 1, 3, 4, 5.

Câu 11: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự lần lượt tại A', B', C', D' (không đồng thời trùng với các đầu mút). $A'B'C'D'$ là hình bình hành khi và chỉ khi:

A. $(\alpha)//(ABCD)$.

B. $(\alpha),(ABCD)$ cắt nhau.

C. $(\alpha),(ABCD)$ trùng nhau.

D. (α) đi qua trung điểm các đoạn SA, SB, SC, SD.

Câu 12: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có các đáy là AD và BC. Gọi M là trọng tâm tam giác SAD, N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $NA=\frac{NC}{2}$, P là điểm thuộc đoạn CD sao cho $PD=\frac{PC}{2}$. Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $MN//(SBC)$ và $(MNP)//(SBC)$.

B. MN cắt (SBC).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (MNP) là đường thẳng song song với BC.

D. $(MNP)//(SAD)$.

Câu 13: Cho các hình bình hành $ABCD$, $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $MC=2AM$, $NF=2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $MN//DE$. B. $M_1N_1//(DEF)$.

C. $(MNM_1N_1)//(DEF)$. D. MN cắt (DEF).

Câu 14: Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ song song với nhau. Đường thẳng a, a' cắt ba mặt phẳng trên theo thứ tự A, B, C và A', B', C' (B nằm giữa AC). Cho $AB=1$, $BC=8$, $A'C'=18$. Tính $A'B'$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15: Cho tứ diện $SABC$ với các điểm M, N, P di động trên các cạnh SA, SB, SC tương ứng sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{k}, \frac{SN}{SB}=\frac{1}{k+1}, \frac{SP}{SC}=\frac{1}{k+2}$ với $k=2,3...$ Dựng cách hình bình hành $SABI$, $SBCK$, $SACT$. Các giao tuyến của (MNP) với (ABC) khi k thay đổi luôn song song với đường thẳng cố định:

A. KT. B. KI. C. IT. D. ST.

Câu 16: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P là hai điểm lần lượt di động trên cạnh AD, SC sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{PS}{PC}=x\,(x>0)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAB) cắt hình chóp $SABCD$ theo một thiết diện và cắt BD tại J.

a) Xác định x để PJ song song với mặt phẳng (SAD)?

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 3.

b. Tính x để diện tích thiết diện bằng k lần diện tích tam giác SAB (k là số thực dương cho trước, $k\le 1$)?

A. $x=\frac{1-k+\sqrt{1-k}}{k}$. B. $x=\frac{1+k+\sqrt{1-k}}{k}$.

C. $x=\frac{1+k+\sqrt{1-k}}{2k}$. D. $x=\frac{1-k+\sqrt{1-k}}{2k}$.

Câu 17: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có các cạnh đáy AB, CD ($AB=2CD$). S_0 là diện tích tam giác SAB. (α) là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AD và song song với mặt phẳng (SAB).

Đặt $\frac{DM}{DA}=x\ (0<x<1)$.

a) Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) theo S_0, x?

A. $S=xS_0$. B. $S=2xS_0$. C. $S=3xS_0$. D. $S=4xS_0$.

b) Tính x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB?

A. $x=1$. B. $x=\frac{1}{2}$. C. $x=\frac{1}{3}$. D. $x=\frac{1}{4}$.

Câu 18: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm của SB. Biết tam giác ACE đều và $AC=OD=a$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm I di động trên đoạn OD song song với (ACE) cắt các cạnh AD, CD, SC, SB, SA lần lượt tại M, N, P, Q, R. Đặt $x=DI$. Tính x theo a để diện tích đa giác $MNPQR$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 19: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi O, O' tương ứng là tâm của các tam giác đều ABC và $A'B'C'$. P là điểm trên OO' sao cho $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{6}$. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của $A'B'$ và BC. Gọi S là giao điểm của (MNP) với $A'C'$. Tính $\frac{C'S}{A'S}$?

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $B'C'$, DD'.

a) Trong các mệnh đề dưới đây, hãy chỉ ra mệnh đề sai?

A. MP, AD', BD cùng song song với một mặt phẳng.

B. $(MNP)//(AB'D')$.

C. $(MNP)//(BDC')$.

D. N, P, B, D đồng phẳng.

b) Thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Hình thang. B. Hình vuông.

C. Ngũ giác đều. D. Lục giác đều.

c) Diện tích của thiết diện trên?

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi (α) là mặt phẳng qua tâm O của mặt ABCD và song song với $B'D$, BC'.

a) Số cạnh thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (α) là:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

b) Diện tích thiết diện theo a là:

A. $\frac{7a^2\sqrt{6}}{8}$. B. $\frac{7a^2\sqrt{6}}{16}$. C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$. D. $\frac{a^2\sqrt{6}}{16}$.

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh BD, $A'C'$ lấy các điểm M, N sao cho $\frac{BM}{BD}=\frac{C'N}{C'A'}$. Đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định. Mặt phẳng cố định đó là:

A. $(AA'B'B)$. B. $(AA'D'D)$.

C. $(DD'C'C)$. D. $(BCC'B')$.

Câu 23: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$, AB, CC' sao cho $\frac{MA'}{MB'}=\frac{NB}{NA}=\frac{PC'}{PC}=\frac{1}{2}$. Tính $\frac{C'Q}{C'B'}$ trong đó Q là giao điểm của (MNP) với $B'C'$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi Q, R lần lượt là tâm các mặt bên $BCC'B'$, $CDD'C'$. Gọi M là giao điểm của cạnh CC' với mặt phẳng (AQR). Tính $\frac{MC}{MC'}$?

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B.
Câu 2: Đáp án B.
Câu 3: Đáp án C.
Câu 4: Đáp án B.
Câu 5: Đáp án D.
Câu 6: Đáp án B.

- Nếu phương chiếu là AG thì hình chiếu song song của G lên mặt phẳng (BCD) là trung điểm M của CD.

- Nếu phương chiếu là AC hay AD thì hình chiếu của G lên mặt phẳng (BCD) là một điểm trên đoạn CD.

Với phương chiếu AB thì hình chiếu G lên mặt phẳng (BCD) là trọng tâm G' của tam giác BCD.

Câu 7: Đáp án D.

- Đáp án A sai vì có thể chọn vô số phương chiếu để hình chiếu song song của $ABCD$ lên (P) là hình bình hành (theo tính chất phép chiếu).
- Đáp án B sai, nếu chọn phương chiếu trùng với một cạnh hình bình hành thì hình chiếu song song của $ABCD$ lên (P) là một đoạn thẳng.

- Đáp án C sai do có 2.
- Đáp án D đúng.

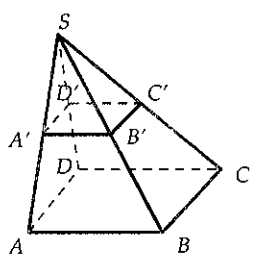
Câu 8: Đáp án D.

- Mệnh đề 1 và 3 đúng do tính chất của phép chiếu song song.
- Mệnh đề 2 sai. Nếu $ABB'A'$ là hình thang cân $(AB = A'B')$, AB cắt (P) tại O và A', B' là các điểm trên (P) thì phép chiếu song song theo phương chiếu AA' biến A thành A', B thành B'. $AB = A'B'$ nhưng AB không song song với (P).

- Mệnh đề 4 sai vì với tam giác ABC, nếu phương chiếu là phương của một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (ABC) thì A', B', C' thẳng hàng.

- Mệnh đề 5 sai vì phép chiếu song song không bảo toàn khoảng cách, độ lớn của góc.

Vậy ta chọn đáp án D.
Câu 9: Đáp án D.
Câu 10: Đáp án D.
Câu 11: Đáp án A.



Do A', B', C', D' không đồng thời nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên đáp án C bị loại.

Gọi a là đường thẳng qua S và song song với AB, b là đường thẳng qua S và song song với AD.

$A'B'C'D'$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} A'B' // C'D' \\ A'D' // B'C' \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} a = (SAB) \cap (SCD) \\ A'B' // C'D' \\ A'B' \subset (SAB),\ C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow a // A'B'$.

Suy ra $AB // A'B' \Rightarrow A'B' // (ABCD)$ (1) (trường hợp $A'B' \subset (ABCD)$ dễ dàng chứng minh không thỏa mãn)

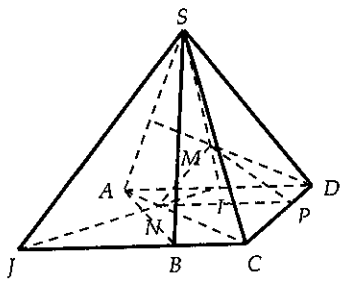
Tương tự ta có:

$\begin{cases} b = (SAD) \cap (SBC) \\ A'D' // C'B' \\ A'D' \subset (SAB),\ C'B' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow b // A'D'$

$\Rightarrow AD // A'D' \Rightarrow A'D' // (ABCD)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(\alpha) // (ABCD)$.

Câu 12: Đáp án A.



Gọi I là trung điểm của đoạn AD. Suy ra $\frac{IM}{MS} = \frac{1}{2}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi J là giao điểm của IN với BC. Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{IN}{NJ} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{MS} \Rightarrow MN // SJ$

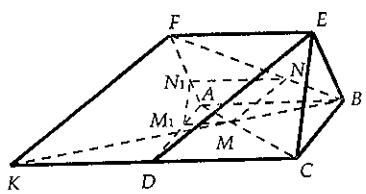
Ta có: $\begin{cases} MN // SJ,\ SJ \subset (SBC) \\ MN \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN // (SBC)$

Lại có: $\frac{PD}{PC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2} \Rightarrow PN // AD // BC$.

Ta có: $\begin{cases} PN // BC, BC \subset (SBC) \\ PN \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow PN // (SBC)$

Ta có: $\begin{cases} MN // (SBC) \\ PN // (SBC) \\ N = MN \cap PN \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (SBC)$.

Vậy ta chọn đáp án A.
Câu 13: Đáp án D.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của BM với DC.

Theo định lí Thalet ta có:

$\frac{AB}{CK}=\frac{BM}{MK}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{2}=\frac{BN}{NF}\Rightarrow MN//FK, CK=2AB$

Suy ra: D là trung điểm của CK và $\frac{BM}{MK}=\frac{NB}{NF}$

$\Rightarrow MN//FK$ (1)

Ta có: $\begin{cases}FE=AB=CD=KD\\EF//AB//CD\end{cases}$

$\Rightarrow$ $FEDK$ là hình bình hành $\Rightarrow$ $FK//ED$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ED//MN$.

Ta có: $\begin{cases}MN//DE\\DE\subset(DEF)\end{cases}\Rightarrow MN//(DEF)$

Ta có: $NN_1//AB\Rightarrow\frac{AN_1}{N_1F}=\frac{BN}{NF}=\frac{1}{2}$(3)

Tương tự: $MM_1//CD\Rightarrow\frac{AM_1}{M_1D}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{2}$(4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\frac{AN_1}{N_1F}=\frac{AM_1}{M_1D}=\frac{1}{2}\Rightarrow M_1N_1//DF$

Ta được: $\begin{cases}M_1N_1//DF\\DF\subset(DEF)\end{cases}\Rightarrow M_1N_1//(DEF)$

Ta có: $\begin{cases}MN//DE\\M_1N_1//DF\end{cases}\Rightarrow(MNN_1M_1)//(DEF)$

Câu 14: Đáp án B.

Ta có $AC=AB+BC=9$.

Áp dụng định lí Thales trong không gian ta có:

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\Rightarrow A'B'=\frac{AB.A'C'}{AC}=\frac{1.18}{9}=2$.

Câu 15: Đáp án B.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi N' là giao điểm của SB và MI. Theo định lí Thales ta có:

$\frac{SN'}{N'B}=\frac{SM}{BI}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{k}$ (do $BI=SA$)

$\Rightarrow\frac{SN'}{SN'+N'B}=\frac{1}{k+1}\Rightarrow\frac{SN'}{SB}=\frac{1}{k+1}=\frac{SN}{SB}\Rightarrow SN=SN'$.

Vì N' nằm giữa SB nên N và N' trùng nhau. Như vậy (MNP) luôn đi qua điểm cố định I. Chứng minh tương tự ta có (MNP) luôn đi qua điểm K cố định.

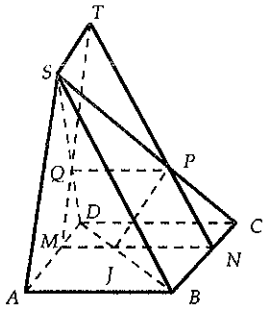
Do $SK//BC$, $SI//AB\Rightarrow(KSI)//(ABC)$

$\begin{cases}(KSI)//(ABC)\\(KSI)\cap(MNP)=KI\Rightarrow\Delta//KI\\(ABC)\cap(MNP)=\Delta\end{cases}$

Như vậy các đường giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) luôn song song với một đường thẳng cố định KI.

Câu 16: Đáp án A, A.

a) Do $(\alpha)//(SAB)\Rightarrow SA//(\alpha)$, $SB//(\alpha)$, $AB//(\alpha)$.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $MN//AB\,(N\in BC)$.

Trong mặt phẳng (SAD), dựng $MQ//SA\ (Q\in SD)$.

Trong mặt phẳng (SBC), dựng $NP'//SB\ (P'\in SC)$.

Ta có: $\frac{PS}{PC}=\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NC}=\frac{P'S}{P'C}\Rightarrow P\equiv P'$

Suy ra: $(MNPQ)//(ABCD)$

Vậy $(\alpha)\equiv(MNPQ)$ và hình thang $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi J là giao điểm của MN với BD. J chính là giao điểm của BD với (α).

Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(SAD)=MQ\\PJ\subset(\alpha)\\PJ//(SAD)\end{cases}\Rightarrow PJ//MQ$.

Kết hợp với điều kiện $MP//MJ$, ta suy ra $PQMJ$ là hình bình hành, khi đó $PQ=MJ$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\left.\begin{array}{l}\frac{PQ}{DC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}\\\frac{DM}{DA}=\frac{MJ}{AB}=\frac{PQ}{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{DM}{DA}=\frac{AM}{AD}\Rightarrow AM=DM\Rightarrow x=1$

Vậy với $x=1$ thì $PJ//(SAD)$.

Vậy đáp án đúng là A.

b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Dễ thấy d, MQ, PN đồng quy tại T.

Ta có: $S_{MNPQ}=S_{TMN}-S_{TPQ}$

Ta có $STNB$, $STNA$, $AMNB$ là các hình bình hành nên $TM=SA$, $TN=SB$, $MN=AB$.

Do đó $\Delta SAB=\Delta TMN$ $(c.c.c)\Rightarrow S_{TMN}=S_{SAB}$.

Ta có: $\frac{PQ}{MN}=\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{x+1}$ và tam giác TPQ đồng dạng với tam giác TMN.

Do đó: $S_{TPQ}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2S_{TMN}=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2S_{SAB}$

$\Rightarrow S_{SAB}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2S_{SAB}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}S_{SAB}$

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$kS_{SAB}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}S_{SAB}\Leftrightarrow k(x+1)^2=2x+1$

$\Leftrightarrow kx^2+2(k-1)x+k-1=0$ (*)

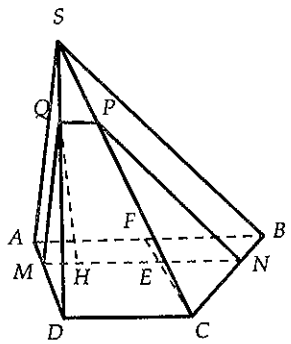
Ta có $\Delta'=1-k$.

Nếu $0<k\le 1$, pt (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-k+\sqrt{1-k}}{k}>0 \\ x=\dfrac{1-k-\sqrt{1-k}}{k}<0 \end{array}\right.$.

Vậy $x=\dfrac{1-k+\sqrt{1-k}}{k}$ thì diện tích thiết diện bằng k lần diện tích tam giác SAB.

Vậu đáp án đúng là A.

Câu 17: Đáp án A, A.



a) Ta có $(\alpha)//(SAB)\Rightarrow\begin{cases} SA//(\alpha) \\ SB//(\alpha) \\ AB//(\alpha)\end{cases}$

$\begin{cases} M\in(ABCD)\cap(\alpha) \\ AB//(\alpha)\end{cases}$

$\Rightarrow (ABCD)\cap(\alpha)=MN//AB//CD\ (N\in BC)$

Tương tự ta có:

$(SAD)\cap(\alpha)=MQ//SA\ (Q\in SD)$

$(SCD)\cap(\alpha)=PQ//AB//CD\ (P\in SC)$

$(SBC)\cap(\alpha)=PN//SB$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$, đáy là MN, PQ.

Ta có: $\begin{cases} MQ//SA \\ MN//AB\end{cases}\Rightarrow \widehat{QMN}=\widehat{SAB}=\varphi$

Ta có $S_0=\dfrac{1}{2}SA.AB.\sin\varphi\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{2S_0}{SA.AB}$.

Trong hình thang $ABCD$, dựng qua C đường thẳng song song với AD cắt MN, AB tại E, F. Ta có $ME=DC=\dfrac{1}{2}AB\Rightarrow$ F là trung điểm của đoạn AB.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\dfrac{EN}{FB}=\dfrac{CN}{CB}=\dfrac{DM}{DA}=x=\dfrac{QM}{SA}$

$\Rightarrow EN=xFB=x.\dfrac{1}{2}AB\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}AB(1+x)$

$\dfrac{PQ}{DC}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{DA}=1-x\Rightarrow PQ=(1-x)DC=(1-x).\dfrac{1}{2}AB$

Gọi H là hình chiếu của Q lên MN.

Khi đó $QH=QM.\sin\varphi=x.SA.\dfrac{2S_0}{SA.AB}=\dfrac{2xS_0}{AB}$

Diện tích hình thang $MNPQ$ là:

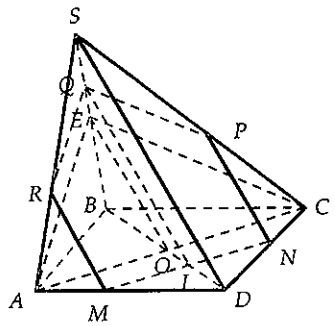
$$S=\frac{(MN+PQ).QH}{2}=xS_0$$

Vậy đáp án đúng là A.

b) Ta có: $xS_0=S_0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 18: Đáp án D.



Do OE là đường trung bình của tam giác SBD nên $OE//SD$. Ta có: $EO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow SD=a\sqrt{3}$

$(\alpha)//(EAC)\Rightarrow EA//(\alpha),\ EC//(\alpha),\ AC//(\alpha)$

$\begin{cases} SD//(\alpha) \\ (SAD)\cap(\alpha)=MR\Rightarrow NP//MR//SD//OE \\ (SDC)\cap(\alpha)=NP\end{cases}$

Tương tự ta có $MN//PR//AC$

Tam giác ACE đều, O là trung điểm AC nên $EO\perp AC\Rightarrow NP\perp MN$.

Tứ giác $MNPR$ có $\begin{cases} NP\perp MN \\ MN//PR,\ MR//NP\end{cases}$

Suy ra $MNPR$ là hình chữ nhật.

Ta có: $\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{DI}{OD}=\dfrac{x}{a}\Rightarrow MN=x$,

$\dfrac{MR}{SD}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{OI}{OD}=\dfrac{a-x}{a}\Rightarrow MR=\sqrt{3}(a-x)$

Diện tích hình chữ nhật $MNPR$ là:

$$S_{MNPR}=MN.MR=x(a-x)\sqrt{3}.$$

Hai tam giác PQR và CEA có các cạnh song song từng đôi một nên hai tam giác này đồng dạng với nhau. Lại có, tam giác CEA đều nên tam giác PQR đều.

Diện tích tam giác PQR là:

$$S_{PQR}=\frac{PR^2\sqrt{3}}{4}=\frac{MN^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Diện tích đa giác $MNPQR$ là

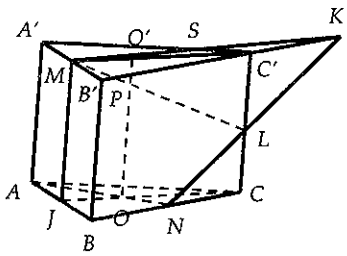
$$S_{MNPQR}=S_{PQR}+S_{MNPR}=x\sqrt{3}\left(a-\frac{3x}{4}\right)$$

$$=\sqrt{3}.\frac{3x}{4}\left(a-\frac{3x}{4}\right)\le\sqrt{3}\left(\frac{\frac{3x}{4}+a-\frac{3x}{4}}{2}\right)^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{2a}{3}$.

Vậy với $x=\frac{2a}{3}$ thì diện tích đa giác $MNPQR$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 19: Đáp án C.



Gọi J là trung điểm của AB. Do $ABB'A'$ là hình bình hành nên $MJ//BB'//CC'$, $MJ=CC'$. Suy ra $CC'MJ$ là hình bình hành.

Do O, O' là trọng tâm của các tam giác ABC, $A'B'C'$ nên ta có $C'O'=CO=\frac{2}{3}C'M$. Suy ra $CC'O'O$ là hình bình hành, nên $O'O//CC'$

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{O'P}{C'L}=\frac{MO'}{MC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow C'L=3O'P=3.\frac{1}{6}O'O=\frac{O'O}{2}=\frac{CC'}{2}$.

Vậy L là trung điểm của CC'.

Trong mặt phẳng $(BCC'B')$, gọi K là giao điểm của NL với $B'C'$.

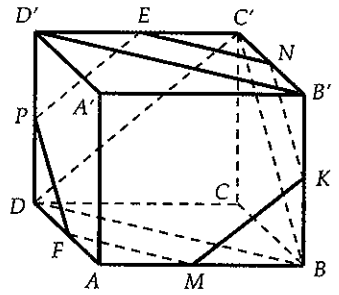
Ta có: $\frac{NC}{C'K}=\frac{LC}{LC'}=1\Rightarrow C'K=NC=\frac{1}{2}B'C'$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, gọi S là giao điểm của KM với $A'C'$. S chính là giao điểm của (MNP) với $A'C'$.

Áp dụng định lí Menelaus vào tam giác $A'B'C'$ ta có:

$\frac{SC'}{SA'}.\frac{MA'}{MB'}.\frac{KB'}{KC'}=1\Rightarrow\frac{SC'}{SA'}=\frac{1}{3}$

Câu 20: Đáp án D, D, A.



a) Ta có: $\frac{PD'}{PD}=\frac{MA}{MB}=1$ nên theo định lí đảo của định lí Thales ta có: MP, BD, AD' cùng song song với một mặt phẳng.

Ta có: $\begin{cases}B'D'//BD//(\alpha)\\AD'//(\alpha)\\AD'\subset(AB'D'),\ B'D'\subset(AB'D')\end{cases}$

$\Rightarrow(AB'D')//(\alpha)\Rightarrow MP//(AB'D')$

Tương tự $MN//(AB'D')$. Suy ra $(MNP)//(AB'D')$.

Mặt khác $\begin{cases}BD//B'D'\\BC'//AD'\end{cases}\Rightarrow(BDC')//(AB'D')$.

Vậy $(MNP)//(BDC')$.

N, P, B, D đồng phẳng thì N sẽ thuộc mặt phẳng $(BB'D'D)$, suy ra C' cũng thuộc mặt phẳng $(BB'D'D)$ (vô lí). Đáp án D là sai.

Vậy ta chọn đáp án **D.**

b) Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $C'D'$, AD, BB', ta có:

$\begin{cases}NE//B'D'\Rightarrow NE//(AB'D')\\N\in(MNP)\\(MNP)//(AB'D')\end{cases}\Rightarrow NE\subset(MNP)$

Tương tự ta cũng chứng minh được PF, MK chứa trong (MNP).

Suy ra thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNP) là lục giác $MKNEPF$.

Ta có NE là đường trung bình của tam giác $B'C'D'$ nên $NE=\frac{1}{2}B'D'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tương tự ta tính được độ dài 6 cạnh của thiết diện đều bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $NE//MF$, $EP//MK$, $PF//KN$.

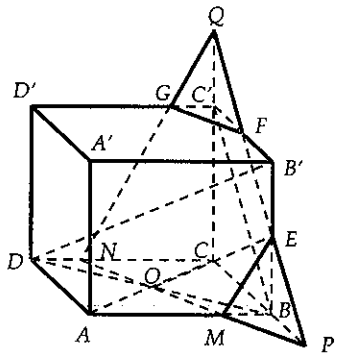
Vậy thiết diện là hình lục giác đều.

Đáp án đúng là **D.**

c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp thiết diện thì tam giác OEN là tam giác đều, suy ra diện tích thiết diện là: $S=6S_{OEN}=\frac{6NE^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 21: Đáp án C, B.



a) Trong mặt phẳng $(BDD'B')$, dựng $OE//DB'$ $(E\in BB')$.

Trong mặt phẳng $(CBB'C')$, kẻ đường thẳng qua E cắt $B'C'$, CC', CB theo thứ tự tại các điểm F, Q, P.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi M, N lần lượt là giao điểm của PO với AB, DC.

Trong mặt phẳng $(DCC'D')$, gọi G là giao điểm của QN với $D'C'$.

Dễ thấy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi (α) là ngũ giác $MNGFE$.

Vậy đáp án đúng là C.

b) Theo cách dựng ta có E là trung điểm của BB'. Do đó $B'F = BP = \frac{a}{2} = C'Q$

Suy ra: $PE = QF = EF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow PQ = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \frac{MB}{NC} = \frac{PB}{PC} = \frac{1}{3} \Rightarrow CN = \frac{3}{4}CD = \frac{3a}{4}$.

Do $\begin{cases} (ABB'A') // (DCC'D') \\ KE = (\alpha) \cap (ABB'A') \\ NG = (\alpha) \cap (DCC'D') \end{cases} \Rightarrow KE // NG$

Tương tự ta có: $MN // FG$

Do đó: $\frac{S_{PME}}{S_{PQN}} = \left(\frac{PE}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}, \frac{S_{QGF}}{S_{QNP}} = \left(\frac{QF}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Diện tích thiết diện là:

$$S_{MNGFE} = S_{PNQ} - (S_{PME} + S_{QFG}) = \frac{7}{9}S_{PNQ}.$$

Do hai tam giác vuông NCP và NCQ bằng nhau (c.g.c) nên $NQ = NP$. Vậy tam giác NPQ cân tại N. Gọi I là trung điểm của PQ.

Ta có: $PN = \sqrt{PC^2 + CN^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{5a\sqrt{5}}{4}$

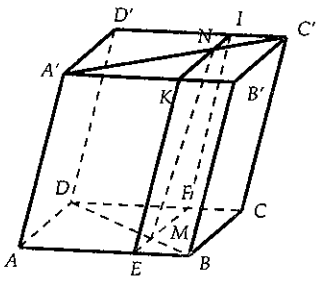
$NI = \sqrt{PN^2 - PI^2} = \sqrt{\frac{45a^2}{16} - \frac{18a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$

Diện tích NPQ bằng:

$$S_{NPQ} = \frac{1}{2}NI.PQ = \frac{9a^2\sqrt{6}}{16} \Rightarrow S_{MNGFE} = \frac{7a^2\sqrt{6}}{16}.$$

Vậy áp án đúng là B.

Câu 22: Đáp án D.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng đường thẳng qua M, song song với BC cắt AB, CD theo thứ tự tại E, F.

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, dựng đường thẳng qua N song song với $B'C'$ cắt $A'B'$, $C'D'$ theo thứ tự tại K, I. Ta có: $\frac{BM}{BD} = \frac{C'N}{C'A'} \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{C'N}{NA'}$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{B'K}{A'K} = \frac{C'N}{A'N} = \frac{MB}{MD} = \frac{BE}{EA} \Rightarrow KE // BB'$.

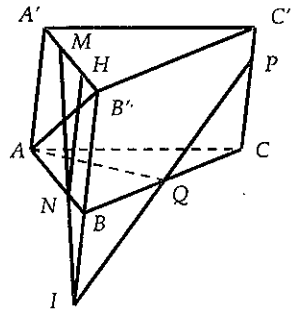
Từ đây suy ra $KE // (BCC'B')$ (1).

Theo cách dựng ta suy ra: $EF // (BCC'B')$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} (EFIK) // (BCC'B') \\ MN // (EFIK) \end{cases} \Rightarrow MN // (BCC'B')$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định, mặt phẳng đó là $(BCC'B')$.

Câu 23: Đáp án C.



Trong mặt phẳng $(ABB'A')$, gọi I là giao điểm của MN với BB'

Dễ thấy Q là giao điểm của IP với $B'C'$.

Gọi H là trung điểm của MB', suy ra HN song song với BB'. Áp dụng định lí Thales ta có:

$\frac{NH}{IB'} = \frac{MH}{MB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB' = 2NH = 2BB'$.

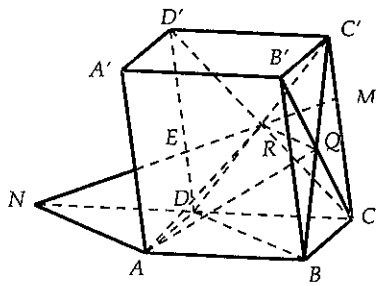
Suy ra B là trung điểm của đoạn IB'.

Do $\frac{PC'}{PC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{PC'}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{PC'}{2CC'} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{PC'}{IB'} = \frac{1}{6}$.

Áp dụng định lí Thales ta có:

$$\frac{QC'}{QB'} = \frac{PC'}{IB'} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{QC'}{B'C'} = \frac{1}{5}.$$

Câu 24: Đáp án C.



Ta có QR là đường trung bình của tam giác $C'BD$ nên QR song song với BD.

Ta có: $\begin{cases} QR // BD,\ QR \subset (AQR),\ BD \subset (ABCD) \\ A \in (AQR) \cap (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (AQR) \cap (ABCD) = AN // BD\ (N \in CD)$

Giao điểm M của cạnh CC' với (AQR) chính là giao điểm của CC' với đường thẳng NR.

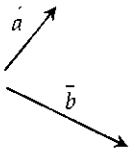
Gọi E là giao điểm của NR với DD'.

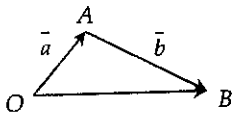
Do AN song song với BD, AB song song với DC nên $ABND$ là hình bình hành, hay $DN = DC$.

Suy ra D là trung điểm của đoạn NC. Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{ND}{NC} = \frac{DE}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MC'}{MC} = \frac{1}{2}$.

CHỦ ĐỀ 8: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Vectơ trong không gian





A. Lý thuyết

Cho các vectơ tùy ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và $k,l\in\mathbb{R}$

1. Cộng vectơ

Lấy O tùy ý trong không gian, vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ thì $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$

Quy tắc ba điểm: Cho ba điểm M, N, K bất kì thì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KN}$

2. Trừ vectơ:

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KM}$

Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

3. Tích vectơ:

Tích vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ. Kí hiệu là $k\vec{a}$

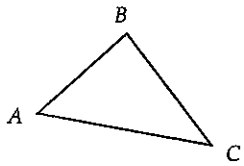
+ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$

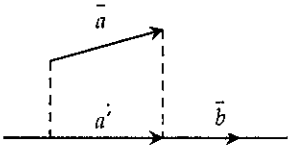
+ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$

+ $\left|k\vec{a}\right|=|k|.\left|\vec{a}\right|$

Hệ quả: Nếu I là trung điểm của A, B, O tùy ý thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

4. Tích vô hướng của hai vectơ





- Định nghĩa: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

- Hệ quả: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$

- $\vec{a}^2=\vec{a}.\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

- Với 3 điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$

- Quy tắc hình chiếu: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Gọi $\vec{a'}$ là hình chiếu vuông góc của $\vec{a}$ trên đường thẳng chứa vectơ $\vec{b}$ thì: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a'}.\vec{b}$

5. Định nghĩa

Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng.

6. Các định lí

a) Cho $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow\exists m,n\in\mathbb{R}:\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (m, n xác định duy nhất)

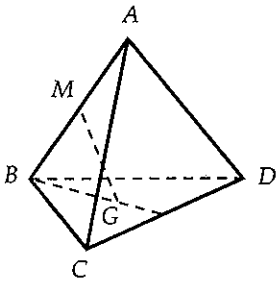
b) Nếu ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thì mọi vectơ $\vec{x}$ đều được biểu diễn dưới dạng: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+k\vec{c}$ với m, n, k xác định duy nhất.

B. Các bài toán về vectơ trong không gian

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$. M là trung điểm của AB và G là trọng tâm tam giác BCD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{MG}$ theo $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

A. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.
B. $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.
C. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$.
D. $\overrightarrow{MG}=-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{d}$.

Đáp án A.



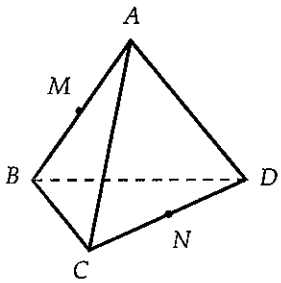
Lời giải:

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.
C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=-4\overrightarrow{NM}$.
D. $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}-4\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Đáp án D.



Lời giải:

A. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

B. Đúng vì: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\right)+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)$
$=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NC}\right)=2\overrightarrow{MN}$

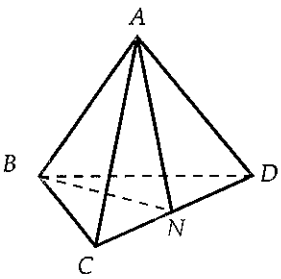
C. Đúng vì: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{BN}=2\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}\right)=-2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right)=-4\overrightarrow{NM}$

Vậy D sai.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$, có tam giác BCD đều, $AD=AC$. Giá trị của $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)$ là:

A. $\frac{1}{2}$.
B. 0.
C. $-\frac{1}{2}$.
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Gọi N là trung điểm của CD. Tam giác đều BCD nên $BN\perp CD$.

Tam giác ACD cân tại A nên $AN\perp CD$ ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=0$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $CA=BD=c$. Giá trị của $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)$ là:

A. $\frac{a^2-c^2}{b^2}$.
B. $\frac{b^2-c^2}{a^2}$.
C. $\frac{c^2-a^2}{b^2}$.
D. $\frac{a^2-b^2}{c^2}$.

Đáp án A.

Lời giải:

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$=\frac{1}{2}\left(CB^2+CD^2-BD^2\right)-\frac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(AB^2+CD^2-BD^2-CA^2\right)=\frac{1}{2}\left(2a^2-2c^2\right)=a^2-c^2$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DA}\right)=\frac{a^2-c^2}{\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{DA}\right|}=\frac{a^2-c^2}{b^2}$.

Ví dụ 5: Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

B. $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ (với S là điểm tùy ý).

C. Nếu tồn tại điểm S mà $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. khi và chỉ khi O là giao điểm của AC và BD.

Đáp án C.

Lời giải:

A. Sai vì $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow B\equiv C$ (vô lí)

B. Sai vì: Gọi O và O' theo thứ tự là trung điểm của AC và BD. Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO'}$.

Vậy $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SO'}\Leftrightarrow O\equiv O'$ điều này không đúng nếu $ABCD$ không phải là hình bình hành

C. Đúng – chứng minh như ý B.

Ví dụ 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AA', O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Cặp ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

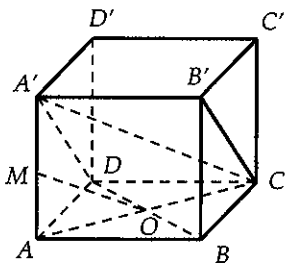
B. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

C. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{DC'}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

D. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{B'C'}$.

Đáp án A.

Lời giải:



Cách 1: Ta có $MO//A'C\Rightarrow MO//(CDA'B')$; $AB//A'B'\Rightarrow AB//(CDA'B')$, $B'C$ nằm trong mặt phẳng $(CDA'B')$ nên các vectơ $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì có giá song song hay nằm trên mặt phẳng $(CDA'B')$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C}$.

Vậy các vectơ $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C}$ đồng phẳng.

Ví dụ 7: Cho tứ diện $ABCD$. M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Bộ ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng?

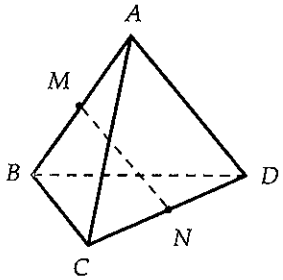
A. $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$.

C. $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{MA}$.

Đáp án C.



Lời giải:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$

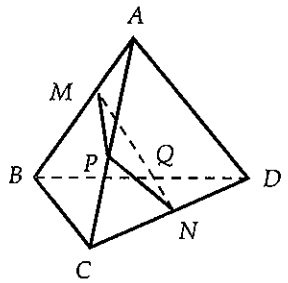
$\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 8: Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm trên đoạn AB và $MB = 2MA$. N là điểm trên đường thẳng CD mà $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$. Nếu $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng thì giá trị của k là:

A. $k = \frac{2}{3}$. **B.** $k = \frac{3}{2}$. **C.** $k = \frac{4}{3}$. **D.** $k = \frac{1}{2}$.

Đáp án A.



Lời giải:

Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với AD và BC.

(α) cắt AC tại P, BD tại Q và CD tại N. Ta có: $MP//BC//QN$ và $MQ//PN//AD$.

Các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ có giá song song hay nằm trong mặt phẳng (α) nên đồng phẳng. Ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

Vậy $k = \frac{2}{3}$.

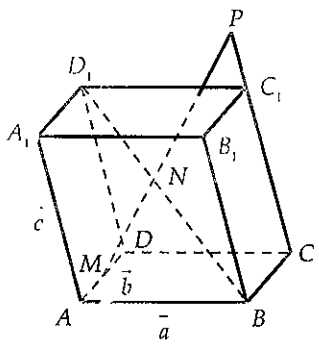
Ví dụ 9: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. M là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. N là điểm trên đường thẳng BD_1. P là điểm trên đường thẳng CC_1 sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng. Tính $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{NP}|}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Đáp án B.

STUDY TIP

Ta đi biểu thị hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP}$ theo 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Lời giải:

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ và $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BD_1}; \overrightarrow{CP} = y\overrightarrow{CC_1} = y.\vec{c}$

Ba điểm M, N, P thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN} = \alpha.\overrightarrow{NP}$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$= -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\overrightarrow{BD_1} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right)$

$= -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{a} + x\left(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = (1-x)\vec{a} + \left(x - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + x\vec{c}$ (2)

Ta lại có: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -x\overrightarrow{BD_1} + \vec{b} + y\vec{c} = -x\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) + \vec{b} + y\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP} = x\vec{a} + (1-x)\vec{b} + (y-x)\vec{c}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$\begin{cases} 1-x=\alpha x \\ x-\dfrac{1}{3}=\alpha(1-x) \\ x=\alpha(y-x) \end{cases}$. Giải hệ ta được $\alpha=\dfrac{2}{3}$, $x=\dfrac{3}{5}$, $y=\dfrac{3}{2}$.

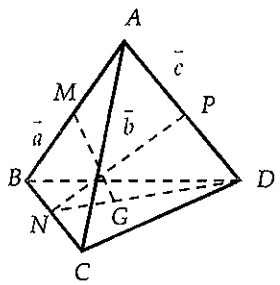
Vậy $\dfrac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{NP}|}=\dfrac{2}{3}$.

Ví dụ 10: Cho tứ diện đều *ABCD*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, CB, AD* và *G* là trọng tâm tam giác *BCD*, α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MG}$ và $\overrightarrow{PN}$. Khi đó $\cos\alpha$ có giá trị là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải:



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{AC}=\vec{b};\overrightarrow{AD}=\vec{c}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{6}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

Không mất tính tổng quát, giả sử độ dài các cạnh của tứ diện đều là 1

$\Rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=1.1.\cos 60^0=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\cos(\overrightarrow{MG},\overrightarrow{PN})=\dfrac{\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{MG}|.|\overrightarrow{PN}|}$ (*)

Ta có: $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{12}(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

$=\dfrac{1}{12}\left(-\vec{a}^2-\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}^2-2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{c}+2\vec{b}.\vec{c}-2\vec{c}^2\right)=\dfrac{1}{12}$

$|\overrightarrow{MG}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}$; $|\overrightarrow{PN}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Thay vào (*) ta được: $\cos\alpha=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp, với K là trung điểm của CC_1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

B. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $M=CD_1\cap C_1D$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

B. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

D. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Khi đó tổng của 3 góc $\left(\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}\right)+\left(\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{DD_1}\right)+\left(\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{A_1B}\right)$ là:

A. 180°. B. 290°. C. 360°. D. 315°.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đặt $\alpha=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC_1}\right)$, $\beta=\left(\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{B_1B}\right)$, $\gamma=\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1C}\right)$. Khi đó $\alpha+\beta+\gamma$ là:

A. 360°. B. 375°. C. 315°. D. 270°.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB=6$, $AD=4$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-12$. Tính $\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)^2$.

A. 76. B. 28. C. 52. D. 40.

Câu 6: Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ với m, n là các số duy nhất.

C. Ba vectơ không đồng phẳng khi có $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với vectơ $\vec{d}$ là vectơ bất kì.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$, trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ (O là điểm bất kì).

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 8: Cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai vectơ $\vec{y}$, $\vec{z}$ cùng phương.

B. Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}$, $\vec{z}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp để $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k.\overrightarrow{AC_1}$.

A. $k=4$. B. $k=1$. C. $k=0$. D. $k=2$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. D. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 11: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì ba vectơ đó đồng phẳng.

B. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ đó đồng phẳng.

C. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.

D. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{CA_1}+2\overrightarrow{C_1C}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}$. D. $\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC_1}$.

Câu 13: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$, nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, K lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{IK}=2\overrightarrow{BC}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy M, N sao cho $AM=3MD$; $BN=3NC$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

B. Các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Hãy chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M là trung điểm của AD. Chọn đẳng thức đúng:

A. $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

B. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

C. $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1C}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

D. $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=2\overrightarrow{B_1D}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi O là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Trong tất cả các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{OG}$. B. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{OG}$.

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{OG}$. D. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{OG}$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. Các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. Các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'}=-a^2$. B. $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AB'}=a^2$.

C. $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{CD'}=0$. D. $\left|\overrightarrow{AC'}\right|=a\sqrt{3}$.

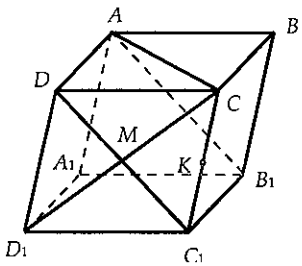
Câu 21: Trong không gian cho hai tia Ax, By chéo nhau sao cho AB vuông góc với cả hai tia đó. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên Ax và By sao cho độ dài đoạn MN luôn bằng giá trị c không đổi ($c\geq AB$). Gọi φ là góc giữa Ax và By. Giá trị lớn nhất của $AM.BN$ là:

A. $\frac{c^2-AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$. B. $\frac{c^2-AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$.

C. $\frac{c^2+AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$. D. $\frac{c^2+AB^2}{2(1+\cos\varphi)}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.



Có: $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

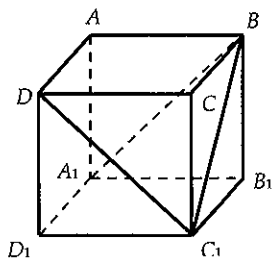
Câu 2: Đáp án B.

(Hình vẽ câu 1)

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC_1}$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}\right)=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

Câu 3: Đáp an D.



Ta có: $\left(\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}\right)=90°$

$\left(\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{DD_1}\right)=\left(\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{CC_1}\right)=135°$

$\left(\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{A_1B}\right)=\left(\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{D_1C}\right)=90°$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{CC_1}\right)+\left(\overrightarrow{C_1B},\overrightarrow{DD_1}\right)+\left(\overrightarrow{DC_1},\overrightarrow{A_1B}\right)$

$=90°+135°+90°=315°$.

Câu 4: Đáp án B.

(Sử dụng hình vẽ câu 3)

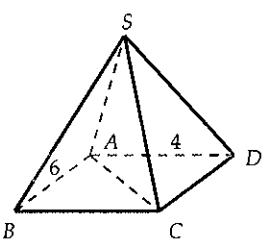
$\alpha=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DC_1}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB_1}\right)=60°$

$\beta=\left(\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{B_1B}\right)=\left(\overrightarrow{DA_1},\overrightarrow{A_1A}\right)=135°$

$\gamma=\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{C_1C}\right)=\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{A_1A}\right)=180°$

$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=60°+135°+180°=375°$.

Câu 5: Đáp án B.



$\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

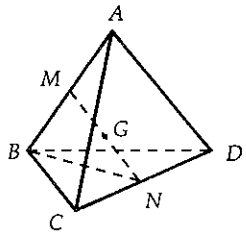
$=6^2+4^2+2.(-12)=36+16-24=28$.

Câu 6: Đáp án D.

- Phương án A: Sai vì chỉ cần giá của chúng song song hoặc nằm trên một mặt phẳng nào đó.
- Phương án B: Sai vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ phải không cùng phương.
- Phương án C sai.

Vậy ta chọn D.

Câu 7: Đáp án C.



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD

$\Rightarrow G$ là trung điểm MN $\Rightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ B đúng.

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

$=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}$

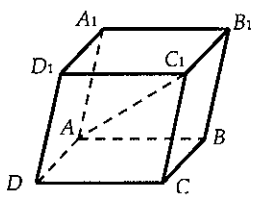
$=4\overrightarrow{OG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{OG}$ $\Rightarrow$ A đúng.

Khi $O\equiv A$ thì D đúng nên ta chọn C.

Câu 8: Đáp án B.

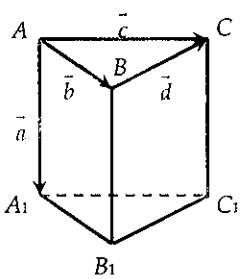
Ta thấy $\vec{y}=-2\vec{x}$ nên $\vec{x}$, $\vec{y}$ cùng phương.

Câu 9: Đáp án B.



Có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow k=1$.

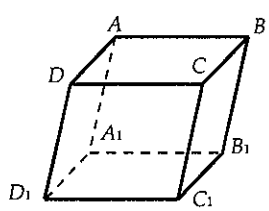
Câu 10: Đáp án C.



Ta có: $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

Câu 11: Đáp án A.

Câu 12: Đáp án C.

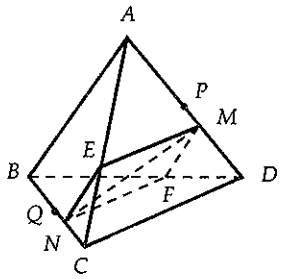


Ta có: $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{C_1A_1}$.

Câu 13: Đáp án C.

Câu 14: Đáp án C.

Câu 15: Đáp án A.



Lấy điểm E trên cạnh AC sao cho $AE=3EC$, lấy điểm F trên cạnh BD sao cho $BF=3FD$

$$\Rightarrow \begin{cases} NE \,//\, AB,\ NE=\dfrac{1}{3}AB \\ MF \,//\, AB,\ MF=\dfrac{1}{3}AB \end{cases} \Rightarrow NE \,//\, MF,\ NE=MF$$

$\Rightarrow NEMF$ là hình bình hành và 3 vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng $MFNE$ $\Rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 16: Đáp án D.

(Sử dụng hình câu 7)

- Phương án A: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$

$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{BD}\neq\vec{0} \Rightarrow$ A sai.

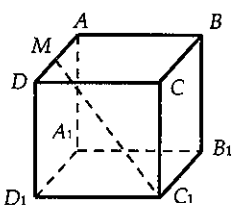
- Phương án B: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a.a.\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow$ B sai.

- Phương án C: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2=0$ (vô lý) $\Rightarrow$ C sai.

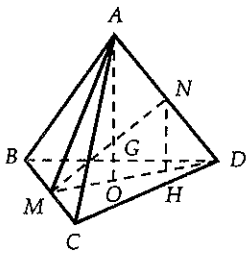
Vậy đáp án D đúng.

Câu 17: Đáp án B.



Ta có: $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{C_1C}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}$.

Câu 18: Đáp án C.



Gọi M, N là trung điểm của BC và AD

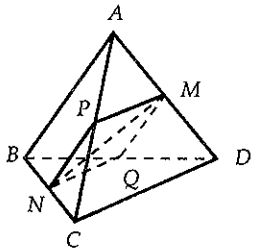
$\Rightarrow G$ là trung điểm MN

Gọi H là hình chiếu của N xuống MD

$\Rightarrow NH$ là đường trung bình của ΔAOD và OG là đường trung bình của ΔMNH

$\Rightarrow OG=\dfrac{1}{2}NH=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}AO \Rightarrow OG=\dfrac{1}{4}AO$ hay $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 19: Đáp án C.



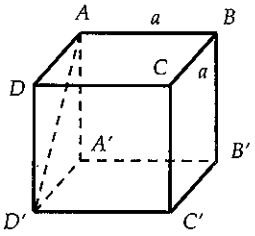
Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD

$\Rightarrow$ Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng $(MNPQ)$ nên 3 vectơ này đồng phẳng $\Rightarrow$ A đúng.

Ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng $\Rightarrow$ B đúng.

Ba vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MN}$ có giá không thể song song với một mặt phẳng nào $\Rightarrow$ C sai.

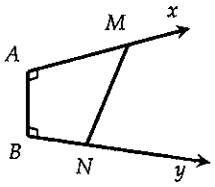
Câu 20: Đáp án A.



Xét phương án A có: $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{AA'}$

$=\left|\overrightarrow{AD'}\right|.\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\cos 45^\circ=a\sqrt{2}.a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

Câu 21: Đáp án A.



Ta có: $c^2=MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)^2$

$=AM^2+AB^2+BN^2-2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}$

$=AB^2+AM^2+BN^2-2AM.BN.\cos\varphi$

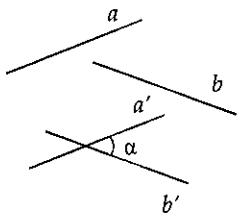
$\geq AB^2+2AM.BN.(1-\cos\varphi)$

$\Rightarrow AM.BN \leq \dfrac{c^2-AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$.

Vậy biểu thức $AM.BN$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{c^2-AB^2}{2(1-\cos\varphi)}$.

Góc giữa hai đường thẳng. Hai đường thẳng vuông góc

1. Định nghĩa



- Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b là góc nhỏ nhất trong bốn góc mà a và b cắt nhau tạo nên.
- Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng luôn là góc nhọn (hoặc vuông).

2. Phương pháp

- *Phương pháp 1:* Sử dụng định lý hàm số cosin hoặc tỉ số lượng giác.
- *Phương pháp 2:* Sử dụng tích vô hướng: Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai vectơ chỉ phương (hoặc vectơ pháp tuyến) của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức:

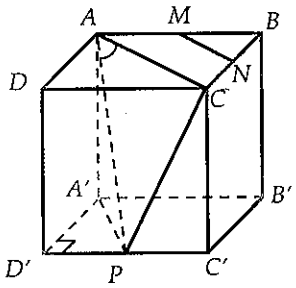
$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}.$$

Ví dụ 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Đáp án A.

Lời giải



* ***Phương pháp 1:*** Giả sử hình lập phương có cạnh bằng a và $MN // AC$ nên: $(\widehat{MN,AP}) = (\widehat{AC,AP})$. Ta tính góc $\widehat{PAC}$.

Vì $\Delta A'D'P$ vuông tại D' nên: $A'P = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\Delta AA'P$ vuông tại nên ta có: $AP = \sqrt{A'A^2 + A'P^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3a}{2}$.

$\Delta CC'P$ vuông tại C' nên: $CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ nên $AC = a\sqrt{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔACP ta có: $CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2AC.AP.\cos\widehat{CAP}$

$\Rightarrow \cos\widehat{CAP} = \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2AC.AP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos\widehat{CAP} = 45° < 90°$ nên $(\widehat{AC,AP}) = \widehat{CAP} = 45°$ hay $(\widehat{MN,AP}) = 45°$. Chọn A.

* ***Phương pháp 2:*** Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP} = \left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|.\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right) = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|}$ (*)

Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AP} = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{D'P}\right)$

$= \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{D'P} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{D'P}$

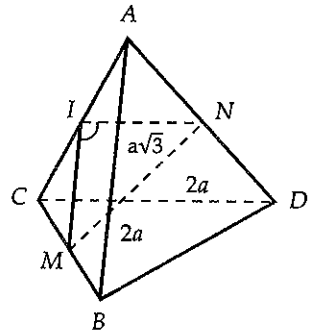
$=0+0+\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+0+\frac{a}{2}.a+0=\frac{3a^2}{4}$ (1)

$\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a}{2}=\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$ (2)

Thay (1), (2) vào (*) ta được: $\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AP}\right)=\frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{MN,AP}\right)=45°$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Biết rằng $MN=a\sqrt{3}$. Tính góc của AB và CD.

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.



Đáp án C.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm AC. Ta có: $IM=IN=a$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔIMN ta có:

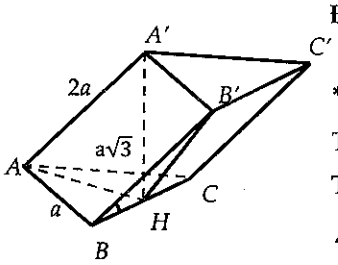
$\cos\widehat{MIN}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2IM.IN}=\frac{a^2+a^2-3a^2}{2.a.a}=\frac{-a^2}{2a^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MIN}=120°$

Vì $IM//AB$, $IN//CD\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,IN}\right)=180°-120°=60°$.

Ví dụ 3: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $AA',B'C'$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án A.



Lời giải

*** Phương pháp 1:** Gọi H là trung điểm của BC, φ là góc giữa AA' và $B'C'$.

Ta có: $AA'//BB'$, $B'C'//BC$ nên $\left(\widehat{AA',B'C'}\right)=\left(\widehat{BB',BC}\right)$.

Ta tính góc $\widehat{B'BH}$

ΔABC vuông tại A nên ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=2a$

$\Rightarrow AH=\frac{1}{2}BC=a\Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Vì $A'H\perp\left(A'B'C'\right)$ nên $\Delta A'B'H$ vuông tại A'

$\Rightarrow B'H=\sqrt{A'H^2+A'B'^2}=\sqrt{3a^2+a^2}=2a$

$\Rightarrow\cos\widehat{B'BH}=\frac{B'B^2+BH^2-B'H^2}{2B'B.BH}=\frac{4a^2+a^2-4a^2}{2.2a.a}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$. Chọn **A.**

Nếu không phải phát hiện được $\Delta A'HB'$ vuông tại A' thì chúng ta rất khó tìm được lời giải.

*** Phương pháp 2:** Ta có: $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{B'C'}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{B'C'}\right|}$

$=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA'}\right)\overrightarrow{BC}\right|}{2a.2a}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}=\frac{\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}\right|}{4a^2}$

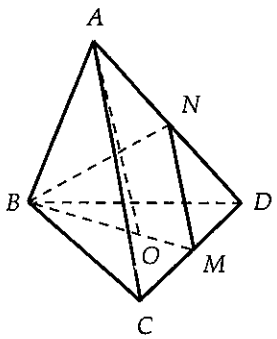
$$=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(AC^2-AB^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}\left(3a^2-a^2\right)\right|}{4a^2}=\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Gọi M là trung điểm CD. Tính cosin góc của AC và BM.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải



Cách 1: Gọi N là trung điểm AD ta có: $MN // AC$

$\Rightarrow \left(\widehat{AC,BM}\right)=\left(\widehat{MN,BM}\right)$. Ta tính góc $\widehat{BMN}$

Ta có: $BM=BN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (trung tuyến tam giác đều)

$MN=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$. Áp dụng định lý cosin cho ΔBMN ta được:

$$\cos\widehat{BMN}=\frac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM.MN}=\frac{MN}{2BM}=\frac{\sqrt{3}}{6}>0.$$

Vậy $\cos\left(\widehat{AC,BM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

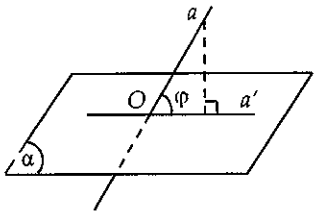
Cách 2: $\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\right)\right|}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left|a.\frac{a}{2}.\cos120^\circ-a.a.\cos120^\circ\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\left|-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right|}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Định nghĩa



- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) bằng $90°$.
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (α).

2. Phương pháp tính

Quy về góc giữa hai đường thẳng.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (SAB) và β là góc giữa AC và (SBC) Tính $\tan\alpha + \sin\beta$.

A. $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{1+\sqrt{7}}{7}$.

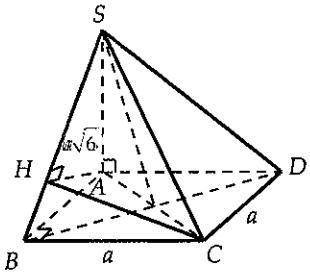
B. $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{1+\sqrt{19}}{7}$.

C. $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{21}}{7}$.

D. $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{1+\sqrt{20}}{7}$.

Đáp án C.

Lời giải



Để xác định góc giữa SC và (SAB) ta xác định hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB). Ta có:

S là hình chiếu của S trên (SAB).

B là hình chiếu của C trên (SAB) vì $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (t/c hv)} \\ BC \perp SA \quad \text{(gt)} \end{cases}$

Vậy SB là hình chiếu của SC trên $(SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{BSC}$.

ΔSBC vuông tại $B \Rightarrow \tan\widehat{BSC} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{\sqrt{SA^2+AB^2}} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{BSC} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \widehat{(SC,(SAB))}$.

Kẻ $AH \perp SB$ tại H mà $BC \perp (SAB)$ nên $AH \perp BC$.

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu của AC lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow \widehat{(AC,(SBC))} = \widehat{ACH}$.

ΔSAB vuông nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

ΔACH vuông tại $H \Rightarrow \sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \beta = \widehat{ACH} = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $\tan\alpha + \sin\beta = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{21}}{7}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh bằng a và có tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SAO).

A. $\varphi = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

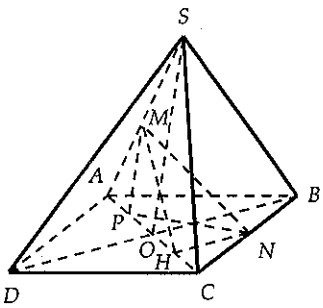
B. $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\varphi = \arcsin\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

D. $\varphi = \arcsin\frac{1}{4\sqrt{5}}$.

Đáp án A.

Lời giải



Gọi P là trung điểm $AO \Rightarrow MP$ là đường trung bình của ΔSAO

$\Rightarrow MP // SO \Rightarrow MP \perp (ABCD)$

$\Rightarrow$ Góc giữa MN và $ABCD$ bằng góc $\widehat{MNP} = 60°$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔPNC ta có:

$$NP^2 = CN^2 + CP^2 - 2CN.CP.\cos 45° = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3}{4}a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{8} - \frac{3\sqrt{2}a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{11a^2}{8} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$$

Trong tam giác vuông MNP ta có:

$MN = \frac{PN}{\cos 60°} = \sqrt{\frac{5}{2}}a$ và $PM = NP.\tan 60° = a\sqrt{\frac{15}{8}} \Rightarrow SO = 2MP = \sqrt{\frac{15}{2}}.a$.

Gọi H là trung điểm $CO \Rightarrow NH // BD \Rightarrow NH \perp AC$

Mà $NH \perp SO \Rightarrow NH \perp (SAC)$ do đó $(\widehat{MN,(SAC)}) = \widehat{NMH}$.

Ta có: $HN = \frac{1}{2}OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $MN = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}a$ (tính trên)

Vậy trong ΔMHN ta có: $\sin\widehat{NMH} = \frac{NH}{MN} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

Nếu gọi φ là góc giữa MN và (SAO) thì:

$\sin\varphi = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ hay $\varphi = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{5}}$ $\left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có a là độ dài cạnh đáy và $\widehat{CBS} = \alpha$. Gọi φ là góc giữa cạnh bên với đáy. Tính $\sin\varphi$ theo α.

A. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

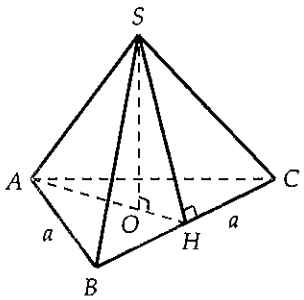
B. $\sin\varphi = \sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

C. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

D. $\sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{9 + 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Đáp án A.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, O là chân đường cao hạ từ S.

Ta có: $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔSHB vuông tại H nên ta có:

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BH}{SB}\Rightarrow SB=\frac{BH}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow SA=SB=SC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SAO ta có: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{3a^2}{9}}$

$=\sqrt{\frac{9a^2-12a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{36\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

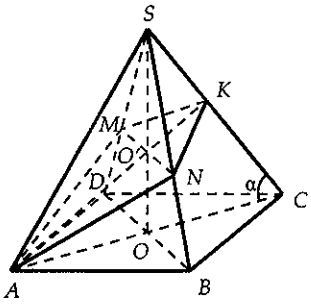
Góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{SO}{SA}=\frac{1}{3}\sqrt{9-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Thiết diện qua đỉnh A và vuông góc với cạnh bên SC có diện tích thiết diện đó bằng nửa diện tích đáy. Gọi α là góc giữa cạnh bên và đáy. Tính α.

A. $\alpha=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\alpha=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

C. $\alpha=\arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{8}$. **D.** $\alpha=\arcsin\frac{2+\sqrt{33}}{8}$.

Đáp án B.



Lời giải

Đặt cạnh đáy hình vuông $ABCD$ là $a\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Giả sử thiết diện qua A cắt SC tại K, cắt SB, SD lần lượt tại N và M.

Theo giả thiết $SC\perp(ANKM)\Rightarrow MN\perp SC$

Mặt khác: $BD\perp SC$ (vì $BD\perp(SAC)$) $\Rightarrow MN//BD\Rightarrow MN\perp(SAC)\Rightarrow MN\perp AK$

$\Rightarrow S_{ANKM}=\frac{1}{2}AK.MN$.

$\Rightarrow\widehat{SCA}=\alpha\Rightarrow AK=AC.\sin\alpha=a\sqrt{2}.\sin\alpha$

$\Rightarrow\frac{MN}{BD}=\frac{SO'}{SO}=\frac{SO-OO'}{SO}=1-\frac{OO'}{SO}$ (chú ý $\widehat{AO'O}=\widehat{ACK}=\alpha$) $(O'=MN\cap AK)$

$\Rightarrow OO'=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.\cot\alpha\Rightarrow\frac{MN}{BD}=1-\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}.\cot\alpha}{OC.\tan\alpha}=1-\frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}.\cot\alpha}{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan\alpha}=1-\cot^2\alpha$

$\Rightarrow MN=BD.(1-\cot^2\alpha)=a\sqrt{2}.(1-\cot^2\alpha)$ $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $S_{AMKN}=\frac{1}{2}.S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{1}{2}AK.MN=\frac{1}{2}a^2$

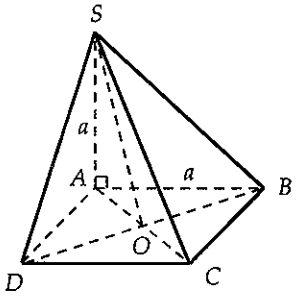
$\Leftrightarrow a\sqrt{2}\sin\alpha.a\sqrt{2}(1-\cot^2\alpha)=a^2\Leftrightarrow 2(2\sin^2\alpha-1)=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha-\sin\alpha-2=0$ $\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1+\sqrt{33}}{8}\Rightarrow\alpha=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Tính diện tích tam giác SBD theo a.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.



Đáp án C.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$ ta có: $BD \perp CA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$

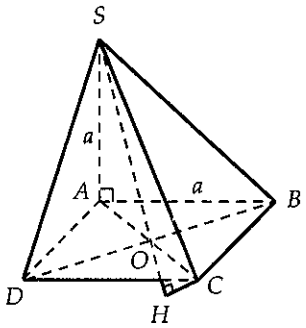
Khi đó $S_{SBD} = \frac{1}{2}SO.BD = \frac{1}{2}.\sqrt{SA^2 + AO^2}.a\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}.\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}.a\sqrt{2} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SBD).

A. $\arcsin\frac{1}{4}$. **B.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\arcsin\frac{1}{3}$. **D.** $\arcsin\frac{2}{3}$

Đáp án C.



Lời giải

Gọi H là hình chiếu của C trên SO $(O = AC \cap BD)$ (vì góc $\widehat{SOC}$ tù nên H nằm ngoài đoạn SO). Ta có: $\begin{cases} CH \perp SO \\ CH \perp BD \text{ (vì } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SBD)$

$\Rightarrow$ Góc tạo bởi SC và (SBD) là $\widehat{CSO}$.

Ta có: $\Delta SAO \backsim \Delta CHO \Rightarrow \frac{SA}{CH} = \frac{SO}{CO} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow CH = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sin\widehat{CSO} = \frac{CH}{SC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{CSO} = \arcsin\frac{1}{3}$.

Hai mặt phẳng vuông góc. Góc giữa hai mặt phẳng

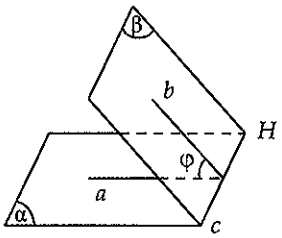
1. Định nghĩa

- Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Nếu hai mặt phẳng đó song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0.

2. Phương pháp tính góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

*** Phương pháp 1:** Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là $(\widehat{(\alpha),(\beta)})=(\widehat{a,b})$. Tính góc $(\widehat{a,b})$.

*** Phương pháp 2:**

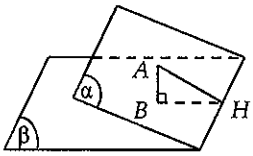


- Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).

- Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c và cùng đi qua một điểm trên c. Khi đó $(\widehat{(\alpha),(\beta)})=(\widehat{a,b})$.

+ Hay ta xác định một mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma)=a;\ (\beta)\cap(\gamma)=b \Rightarrow (\widehat{(\alpha),(\beta)})=(\widehat{a,b})$.

*** Phương pháp 3:** ***(Trường hợp đặc biệt)***

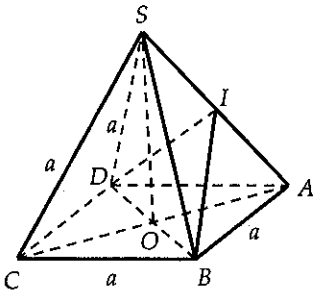


Nếu có một đoạn thẳng nối hai điểm A, B $(A\in(\alpha), B\in(\beta))$ mà $AB\perp(\beta)$ thì qua A hoặc B ta dựng đường thẳng vuông góc với giao tuyến c của hai mặt phẳng tại H. Khi đó $(\widehat{(\alpha),(\beta)})=\widehat{AHB}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA=SB=SC=SD=a$. Tính cosin góc giữa hai mp (SAB) và (SAD).

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{-1}{3}$.

Đáp án B.



Lời giải

Gọi I là trung điểm SA. Do tam giác SAD và SAB đều nên $\begin{cases} BI\perp SA \\ DI\perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng góc giữa 2 đường thẳng IB và ID.

* Ta tính góc $\widehat{BID}$: Áp dụng định lý cosin cho ΔBID ta có:

$$\cos\widehat{BID}=\frac{IB^2+ID^2-BD^2}{2IB.ID}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{3}$$

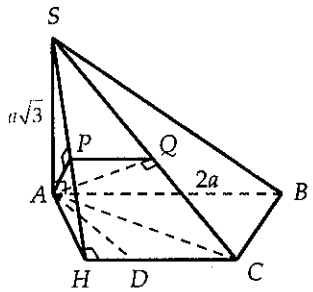
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

A. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$. B. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\arccos\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Đáp án A.

Nhận xét: Theo định nghĩa góc giữa 2 mặt phẳng ta đi xác định 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).



Lời giải:

Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$.

- Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SCD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $AH \perp CD$ tại $H \Rightarrow CD \perp (SAH)$

Trong mặt phẳng (SAH) dựng $AP \perp SH \Rightarrow CD \perp AP \Rightarrow AP \perp (SCD)$

- Dựng đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SBC).

Trong mặt phẳng (SAC) dựng $AQ \perp SC$

Lại có $AQ \perp BC$ vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ$

Vậy $AQ \perp (SBC)$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng ấy là AP và AQ.

- Ta tính góc $\widehat{PAQ}$, có $AH = \sqrt{AD^2 - HD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

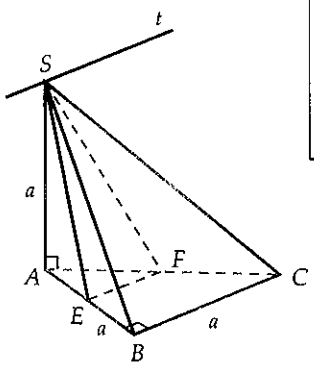
Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow AQ = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

ΔAPQ vuông tại $P \Rightarrow \cos\widehat{PAQ} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{PAQ} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với $BA = BC = a$; $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

A. $\frac{3}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{5}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. D. $\frac{3}{2\sqrt{10}}$.

Đáp án A.



Nhận xét: Giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là đường thẳng St đi qua S và song song với EF và BC nên ta xác định hai đường thẳng qua S và lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) và cùng vuông góc với St (ta đi chứng minh 2 đường thẳng đó là SE và SB)

Lời giải:

Vì $\begin{cases} EF \subset (SEF) \\ BC \subset (SBC) \\ EF // BC \end{cases} \Rightarrow$ Giao tuyến của (SEF) và (SBC) là đường thẳng qua S, song song với BC, là St.

$\begin{cases} BC \perp BA & \text{(gt)} \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ hay $St \perp SB$

Tương tự $EF \perp (SAE) \Rightarrow EF \perp SE$ mà $EF // St \Rightarrow SE \perp St$

Vậy SB và SE cùng đi qua S và cùng vuông góc với St nên góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) bằng góc giữa hai đường thẳng SB và SE.

Ta tính góc $\widehat{BSE}$.

Có $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$; $BE = \frac{a}{2}$

Theo định lý cosin ta có:

$$\cos \widehat{BSE} = \frac{SE^2 + SB^2 - BE^2}{2.SE.SB} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{BSE} = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

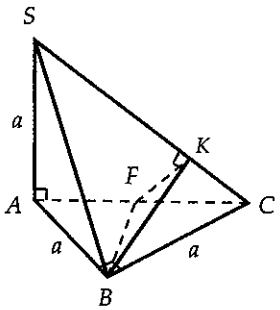
Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Đáp án C.

Nhận xét: Ta áp dụng phương pháp 3 – trường hợp đặc biệt.

Lời giải:



Ta có: $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Gọi F là trung điểm $AC \Rightarrow BF \perp (SAC)$

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC),(SBC))} = \widehat{(KB,KC)} = \widehat{BKF}$

$\Delta CFK \backsim \Delta CSA \Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \frac{FC.SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$

ΔBFK vuông tại $F \Rightarrow \tan \widehat{BKF} = \frac{FB}{FK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60° = \widehat{((SAC),(SBC))}$.

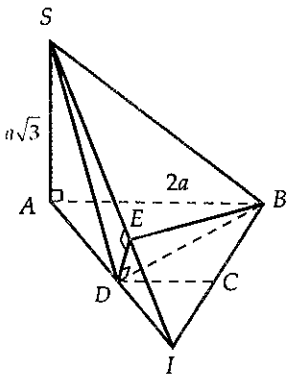
Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

A. $\sqrt{14}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Gọi $I = AD \cap BC$, $ABCD$ là nửa lục giác đều nên $AD = DC = CB = a$, $AI = IB = 2a$.



$$(SAD) \cap (SBC) = SI \Rightarrow \begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SI$$

Vì vậy theo trường hợp đặc biệt ta chỉ cần dựng $DE \perp SI$ tại $E \in SI$

Khi đó $SI \perp (BED) \Rightarrow \widehat{((SAD),(SBC))} = \widehat{(EB,ED)} = \widehat{BED}$ (vì ΔBED vuông tại D)

ΔAIB đều nên $BD = a\sqrt{3}$

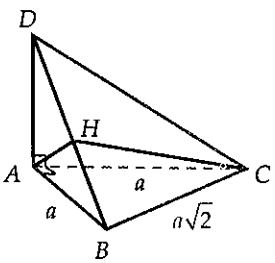
$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{7}$

Hai tam giác vuông SAI và DEI đồng dạng nên $\dfrac{DE}{SA} = \dfrac{DI}{SI} \Rightarrow DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

ΔBDE vuông tại $D \Rightarrow \tan\widehat{BED} = \dfrac{BD}{DE} = \sqrt{7}$.

Ví dụ 6: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$ trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A ta lấy một điểm D. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) trong trường hợp DBC là tam giác đều.

A. $\arccos\dfrac{1}{3}$ **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$



Đáp án B.

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

Theo công thức diện tích hình chiếu của đa giác ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta DBC}.\cos\varphi$

Mà $S_{\Delta DBC} = \dfrac{1}{2}DB.DC.\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a^2 \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DBC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

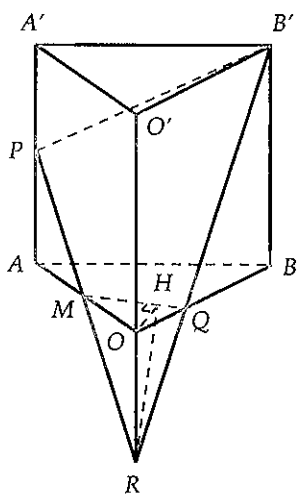
STUDY TIP

Sử dụng công thức:

$S' = S.\cos\varphi$

Ví dụ 7: Cho lăng trụ đứng $OAB.O'A'B'$ có các đáy là các tam giác vuông cân $OA = OB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh OA, AA'. Tính diện tích thiết diện khi cắt lăng trụ bởi mặt phẳng $(B'MP)$.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{5a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{6\sqrt{2}}$.



Đáp án C.

Lời giải

Gọi R là giao điểm của MP với OO', Q là giao điểm của $B'R$ với OB.

Thiết diện là tứ giác $MPB'Q$, ta có: $\dfrac{OQ}{O'B'} = \dfrac{RO}{RO'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OQ = \dfrac{a}{3}$

Tứ giác $AMQB$ là hình chiếu vuông góc của tứ giác $PMQB'$ trên mặt phẳng (OAB) nên $S_{PMQB'} = \dfrac{S_{AMQB}}{\cos\varphi}$ với φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (OAB) và $(MPB'Q)$.

Ta có: $S_{AMQB} = S_{OAB} - S_{OMQ} = \dfrac{1}{2}a^2 - \dfrac{1}{12}a^2 = \dfrac{5}{12}a^2$

Hạ $OH \perp MQ$ ta có: $\begin{cases} MQ \perp OH \\ MQ \perp OR \end{cases} \Rightarrow MQ \perp (OHR)$.

Vậy $\varphi = \widehat{OHR}$ ($\widehat{OHR}$ nhọn)

Ta có: $\cos\varphi = \cos\widehat{OHR} = \dfrac{OH}{RH} = \dfrac{OH}{\sqrt{OH^2 + OR^2}} = \dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{13}}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{13} + \dfrac{a^2}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

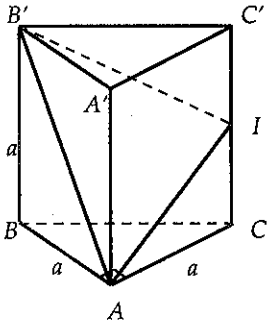
Vậy $S_{PMQB'} = \dfrac{5a^2\sqrt{15}}{12\sqrt{2}}$.

Ví dụ 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **C.** $\dfrac{10}{\sqrt{30}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$.

Đáp án B.

Lời giải



Áp dụng định lý cosin cho ΔABC ta có: $BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 120° = 3a^2$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác:

- $\Delta B'BA$ có: $B'A^2 = 2a^2$
- ΔICA có: $AI^2 = a^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5a^2}{4}$
- $\Delta B'C'I$ có: $B'I^2 = 3a^2 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4}$

Ta có: $B'A^2 + AI^2 = 2a^2 + \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta AB'I$ vuông ở A.

Ta có: $S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a^2\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ thì ta có:

$$\cos\varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng đó.

B. Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

C. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c khi b song song với c (hoặc b trùng với c).

D. Góc giữa hai đường thẳng a và b bằng góc giữa hai đường thẳng a và c thì b song song với c.

Câu 2: Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) khi a và b song song (hoặc a trùng với b).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Câu 3: Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

A. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi (Q) song song với (R) (hoặc (Q) trùng với (R)).

C. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) thì $(Q)//(R)$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều đúng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau:

A. $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\tan\alpha=1$.

C. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. D. $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét mặt phẳng $(A'BD)$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau.

B. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng nhau và phụ thuộc vào kích thước của hình lập phương.

C. Góc giữa mặt phẳng $(A'BD)$ và các mặt phẳng chứa các mặt của hình lập phương bằng α mà $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có một cạnh bên vuông góc với đáy. Xét bốn mặt phẳng chứa bốn mặt bên và mặt phẳng chứa mặt đáy. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có hai cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

B. Có ba cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

C. Có bốn cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

D. Có năm cặp mặt phẳng vuông góc với nhau.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. 45°. B. 90°. C. 120°. D. 60°.

Câu 8: Trong không gian cho 3 đường thẳng phân biệt a, b, c. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì $a//b$.

B. Nếu $a//b$ và $c\perp a$ thì $c\perp b$.

C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a//b$.

D. Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) và $c//(\alpha)$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa SB và AC.

A. 60°. B. 120°. C. 45°. D. 90°.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là:

A. 120°. B. 60°. C. 90°. D. 30°.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ là các tam giác nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. B. $\widehat{DA'C}$. C. $\widehat{BB'C}$. D. $\widehat{DAC}$.

Câu 12: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gain, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CA và BD. Khi đó góc giữa AB và CD là:

A. $\widehat{JIK}$. B. $\widehat{ABC}$. C. $\widehat{IJK}$. D. $\widehat{JKI}$.

Câu 14: Cho một hình thoi $ABCD$ cạnh a và một điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa hình thoi sao cho $SA = a$ và vuông góc với (ABC). Tính góc giữa SD và BC.

A. $60°$. B. $90°$.

C. $45°$. D. $\arctan\sqrt{2}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của BC, AD và AC. Cho $AB = 2a$, $CD = 2a\sqrt{2}$ và $MN = a\sqrt{5}$. Tính góc $\varphi = (\widehat{AB, CD})$.

A. $135°$. B. $60°$. C. $90°$. D. $45°$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, ΔABC đều cạnh a. Tính góc giữa SB và (ABC).

A. $\arctan 2$. B. $60°$. C. $45°$. D. $90°$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a.

Tính $\tan(\widehat{SC, (SAB)})$.

A. $\sqrt{\frac{3}{5}}$. B. $\sqrt{\frac{5}{3}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DCB). Tính $\cos\varphi$.

A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi β là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SDC). Tính β?

A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 21: Cho ba tia Ox, Oy, Oz trong không gian sao cho $\widehat{xOy} = 120°$, $\widehat{yOz} = 90°$, $\widehat{zOx} = 60°$. Trên ba tia ấy lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC = a$. Gọi α, β lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng (OBC) và mặt phẳng (OAC). Tính $\tan\alpha.\tan\beta$.

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. D. 1.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

A. $60°$. B. $30°$. C. $45°$. D. $90°$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Tính góc giữa hai đường thẳng IJ và BD.

A. $90°$. B. $60°$. C. $\arccos\frac{1}{3}$. D. $45°$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, BD. Biết $JK = \frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và IJ.

A. $90°$. B. $60°$. C. $45°$. D. $30°$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính góc của cặp đường thẳng MN và $C'D'$.

A. $90°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $30°$.

Câu 26: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính góc của cặp đường thẳng BD và AD'.

A. $90°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $30°$.

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$. Tính góc của cặp đường thẳng MN và AP.

A. $90°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $30°$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$. Tính góc của cặp đường thẳng $A'P$ và DN.

A. $90°$. B. $45°$. C. $60°$. D. $30°$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin của góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{8}}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin của góc tạo bởi AC và mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 31: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC cân đỉnh A, $\widehat{ABC} = \alpha$, BC' tạo với đáy ABC góc β. Gọi I là trung điểm AA', biết $\widehat{BIC} = 90°$. Tính $\tan^2\alpha + \tan^2\beta$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đường cao và đáy là tam giác ABC vuông tại B. Cho $\widehat{BSC} = 45°$, gọi $\widehat{ASB} = \alpha$. Tìm $\sin\alpha$ để góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) bằng $60°$.

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

- Đáp án A sai vì góc giữa hai đường thẳng có thể bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ chỉ phương.
- Đáp án B sai vì có thể là góc 90°.

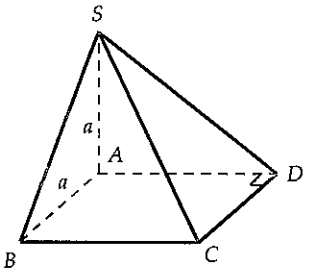
Câu 2: Đáp án B.

- Đáp án A sai khi đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng.
- Đáp án C, D: Vẽ hình thấy có vô số đường thẳng và mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 3: Đáp án B.

- Đáp án A sai vì có thể là góc vuông.
- Đáp án C sai vì chẳng hạn (Q) và (R) cắt nhau, (P) là mặt phẳng phân giác.

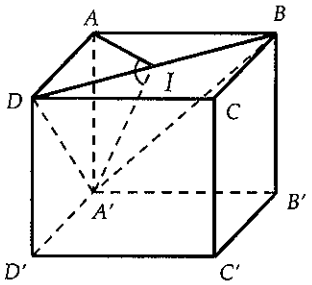
Câu 4: Đáp án B.



Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA) \Rightarrow \alpha = \widehat{SDA}$

Mà ΔSDA vuông cân tại A nên $\widehat{SDA} = 45°$.

Câu 5: Đáp án A.

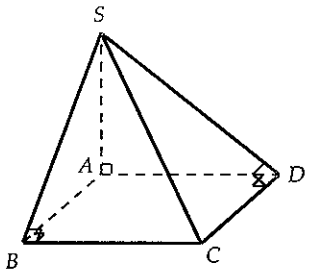


Đáp án B, C sai vì giả sử ta xác định góc giữa $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $\widehat{AIA'}$ với I là trung điểm BD và $\cos\widehat{AIA'} = \dfrac{AI^2 + A'I^2 - AA'^2}{2AI.A'I}$

$$= \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{2a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} - a^2}{\frac{2a^2\sqrt{12}}{4}} = \frac{4a^2}{2a^2\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 6: Đáp án B.



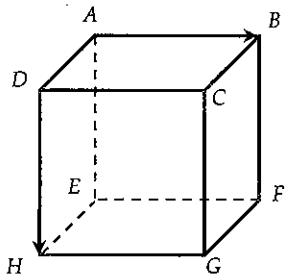
Giả sử hình chóp đó là $S.ABCD$. Ta có:

$(SAB) \perp (ABCD)$

$(SAB) \perp (SAD)$

$(SAD) \perp (ABCD)$

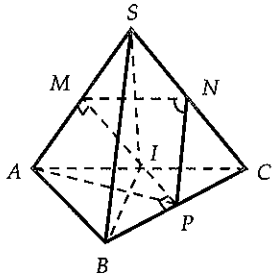
Câu 7: Đáp án B.



$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}\right) = \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right) = 90°$.

Câu 8: Đáp án B.

Câu 9: Đáp án D.



Từ giả thiết suy ra các mặt của hình chóp đều là các tam giác đều.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SC, BC.

Giả sử cạnh hình chóp đều là a thì $MN = NP = \dfrac{a}{2}$

$MP \perp SA$ vì ΔSAP cân tại P

$$PM = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN.NP} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = 0$$

$\Rightarrow (\widehat{SB, AC}) = 90°$.

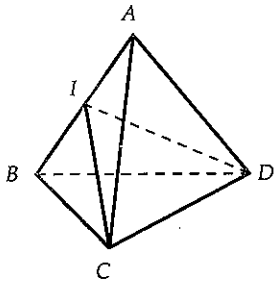
Cách 2: Lấy I là trung điểm AC ta có:

$AC \perp (SIB) \Rightarrow AC \perp SB$.

Cách 3:

$\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SB}\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA} = 0$

Câu 10: Đáp án C.

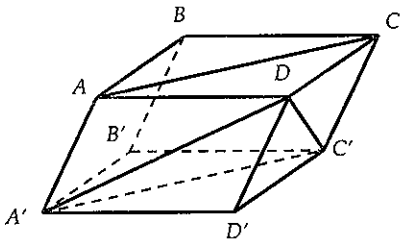


Gọi I là trung điểm của AB

$\Rightarrow AB \perp (IDC) \Rightarrow AB \perp CD.$

Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng tích vô hướng để giải quyết bài toán.

Câu 11: Đáp án B.



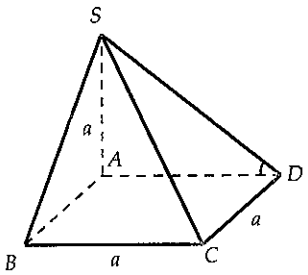
Ta có: $AC // A'C'$

$\Rightarrow (\widehat{AC,A'D}) = (\widehat{A'C',A'D}) = \widehat{DA'C'}$ (góc nhọn).

Câu 12: Đáp án A.

Câu 13: Đáp án A.

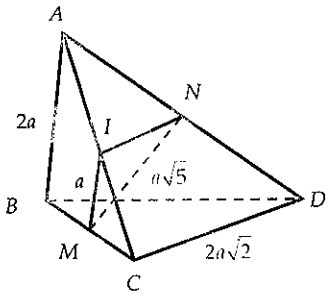
Câu 14: Đáp án C.



Ta có: $AD // BC$

$\Rightarrow (\widehat{SD,BC}) = (\widehat{SD,AD}) = \widehat{ADS} = 45°.$

Câu 15: Đáp án D.



Theo tính chất đường trung bình trong tam giác:

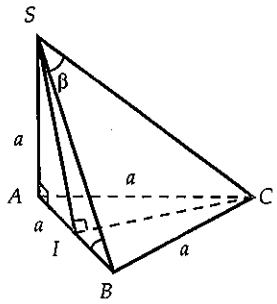
$$\begin{cases} IN // CD;\ IN = \dfrac{1}{2}CD = a\sqrt{2} \\ IM // AB;\ IM = \dfrac{1}{2}AB = a \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi = (\widehat{AB,CD}) = (\widehat{IM,IN})$

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$\cos\varphi = \left|\frac{IM^2 + IN^2 - MN^2}{2IM.IN}\right| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45°.$$

Câu 16: Đáp án C.



Ta có $SA \perp (ABC)$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \varphi = \widehat{ASB} = (\widehat{SD,AD}) = 45°.$

Câu 17: Đáp án A.

(Hình câu 16)

Gọi I là trung điểm AB.

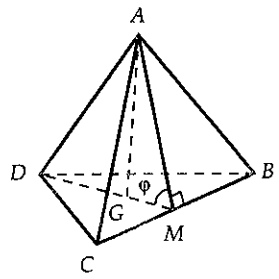
Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow \beta = \widehat{CSI} = (\widehat{SC,(SAB)})$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{CI}{SI} = \frac{CI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Câu 18: Đáp án B.



Gọi M là trung điểm CB.

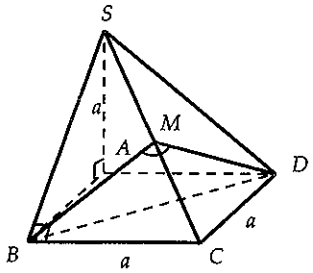
G là trọng tâm ΔBCD nên ta có $BC \perp (AGM)$

$\Rightarrow \varphi = \widehat{AMG}$

Có $DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6};\ AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{GM}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 19: Đáp án A.



Ta có giao tuyến $BC \perp (SBA) \Rightarrow \varphi = \widehat{SBA}$(góc nhọn)

Mà ΔSBA vuông cân tại A nên $\varphi = 45°$.

Câu 20: Đáp án D.

(Hình vẽ câu 19)

Hai tam giác vuông SBC và SDC nên có chung chân đường cao M kẻ từ B và D $\Rightarrow \beta = (\widehat{MB,MD})$.

Ta đi tính góc $\widehat{BMD}$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

$$\frac{1}{BM^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

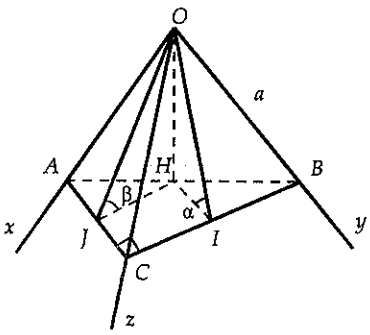
$\Rightarrow BM^2 = \frac{2a^2}{3}$. Tương tự $DM^2 = \frac{2a^2}{3}$.

Áp dụng định lý cosin cho ΔBMD ta có:

$$\cos\widehat{BMD} = \frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{2MB.MD} = \frac{\frac{4a^2}{4} - 2a^2}{2.\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \widehat{BMD} = 120° \Rightarrow \beta = 180° - 120° = 60°$ hay $\frac{\pi}{3}$.

Câu 21: Đáp án A.



ΔOAC đều $\Rightarrow AC = a$

ΔOBC vuông $\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

Áp dụng định lý cosin cho $\Delta OAB \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

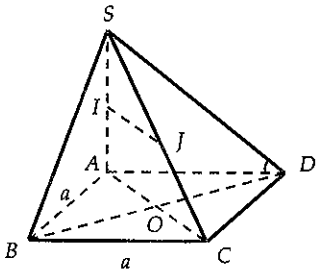
$\Rightarrow \Delta ABC$ có $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{OIH}, \beta = \widehat{OJH}$ (với I, J lần lượt là trung điểm của BC và AC)

$$\Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta = \frac{OH}{HI}.\frac{OH}{HJ} = \frac{OH^2}{HI.HJ} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 22: Đáp án A.



Vì $BC // AD$, $\widehat{SAD} = 90° \Rightarrow (\widehat{SD,BC}) = \widehat{SDA}$

$\Rightarrow \tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow (SD, BC) = 60°$.

Câu 23: Đáp án A.

(Hình vẽ câu 22)

Ta có $IJ // AC$, $(\widehat{IJ,BD}) = \widehat{AOB} = 90°$.

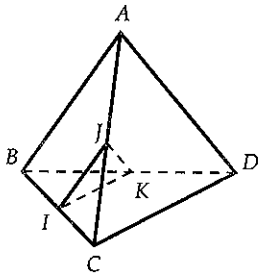
Câu 24: Đáp án A.

Đặt $AB = a$.

Ta có: $IJ = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

$IK = \frac{CD}{2} = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$;

$JK = \frac{5}{6}AB = \frac{5a}{6}$

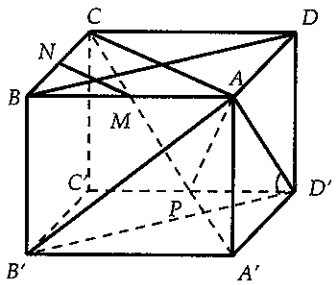


Ta có: $IJ^2 + IK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{16} = JK^2$

Vậy ΔIJK vuông tại I.

Ta có $IK // CD \Rightarrow (\widehat{AB,CD}) = \widehat{JIK} = 90°$.

Câu 25: Đáp án B.



Ta có: $AB // C'D'$

$\Rightarrow (\widehat{MN,C'D'}) = (\widehat{MN,AB}) = \widehat{BMN} = 45°$.

Câu 26: Đáp án C.

(Hình vẽ câu 25)

Có $B'D' // BD \Rightarrow (\widehat{BD,AD'}) = (\widehat{B'D',AD'}) = \widehat{AD'B'} = 60°$

vì $\Delta AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$.

Câu 27: Đáp án B.

(Hình vẽ câu 25)

$MN//AC \Rightarrow (\widehat{MN,AP}) = (\widehat{AC,AP}) = \widehat{CAP}$ (góc nhọn)

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông $CC'P$ có $CP = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

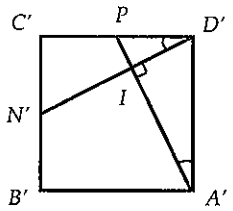
Trong tam giác vuông APA' có $AP = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý cosin cho ΔCAP ta có:

$\cos\widehat{CAP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{MN,AP}) = 45°$.

Câu 28: Đáp án A.

(Hình vẽ câu 25)



Gọi N' là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $ND//N'D' \Rightarrow (\widehat{ND,A'P}) = (\widehat{N'D',A'P})$

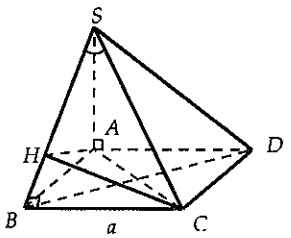
Có $\Delta N'C'D' = \Delta PD'A' \Rightarrow \widehat{C'D'N'} = \widehat{D'A'P}$

mà $\widehat{C'D'N'} + \widehat{A'D'N'} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{D'A'P} + \widehat{A'D'N'} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{DIA'} = 90°$ hay $(\widehat{DN,A'P}) = 90°$.

Câu 29: Đáp án C.



Ta có: $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(SAB) \Rightarrow (\widehat{SC,(SAB)}) = (\widehat{SC,SB}) = \widehat{CSB}$

Do ΔCSB vuông tại B nên:

$\sin\widehat{CSB} = \frac{BC}{SC} = \frac{BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Câu 30: Đáp án D.

(Hình vẽ câu 29)

Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC)$

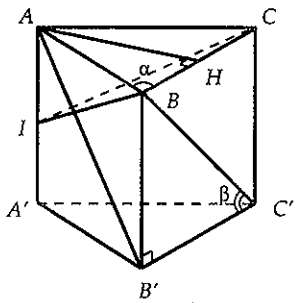
$\Rightarrow HC$ là hình chiếu của AC lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow (\widehat{AC,(SBC)}) = (\widehat{AC,HC}) = \widehat{ACH}$

ΔSAB vuông $\Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

Vì ΔAHC vuông tại $H \Rightarrow \sin\widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 31: Đáp án D.



Ta có: $\tan\beta = \frac{BB'}{B'C'}$. ΔAHB vuông tại H (H là trung điểm BC) $\Rightarrow \tan\alpha = \frac{AH}{BH} = \frac{2AH}{BC}$

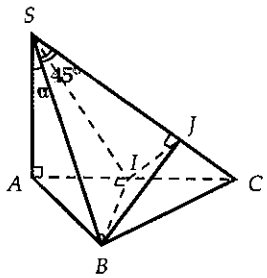
$\Rightarrow \tan^2\alpha + \tan^2\beta = \frac{4(AI^2 + AH^2)}{BC^2}$ (*)

Mà ΔAIH vuông tại A nên $AI^2 + AH^2 = IH^2$

ΔBIC vuông tại $I \Rightarrow IH = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC^2 = 4IH^2$

Thay vào (*) ta có: $\tan^2\alpha + \tan^2\beta = 1$.

Câu 32: Đáp án A.



Dựng $BJ \perp SC$ (1), $BI \perp AC \Rightarrow SA \perp BI$

$\Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (BIJ) \Rightarrow IJ \perp SC$ $\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (ASC) và (BSC) là $\varphi = \widehat{BJI}$

Do ΔBIJ vuông tại I nên $\widehat{BJI} = 60°$

$\Rightarrow BI = \frac{\sqrt{3}}{2}BJ \Rightarrow \frac{1}{BI^2} = \frac{4}{3}.\frac{1}{BJ^2}$ (3)

ΔSBC có $\widehat{BSC} = 45° \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại B

Trong ΔABC vuông tại B có:

$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{BC^2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right)$ (4)

Trong tam giác SJB vuông tại J có $\widehat{JSB} = 45°$

$\Rightarrow SB = \sqrt{2}BJ \Rightarrow \frac{1}{BJ^2} = \frac{2}{BC^2}$

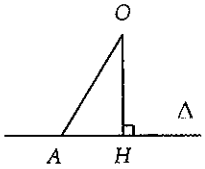
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{1}{BC^2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) = \frac{4}{3}.\frac{2}{BC^2}$

Giải phương trình ta được $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

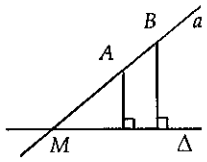
Khoảng cách

A. Lý thuyết

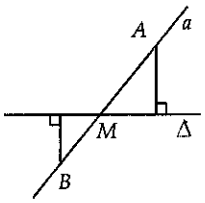
I. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng



1. Cho điểm O và đường thẳng Δ. Hạ $OH \perp \Delta$ $(H \in \Delta)$. Khi đó khoảng cách từ O tới Δ bằng độ dài đoạn OH. Kí hiệu là $d(O;\Delta)$.



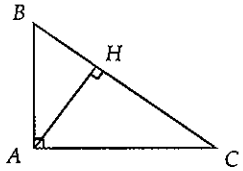
2. $d(O;\Delta) \le OA$ (với A là điểm bất kì thuộc Δ)



3. Cho hai đường thẳng a và Δ cắt nhau tại M.
Trên a lấy hai điểm A, B.

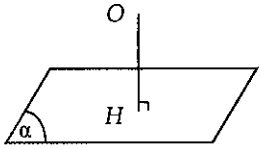
Khi đó: $\dfrac{d(A;\Delta)}{d(B;\Delta)} = \dfrac{MA}{MB}$

4. Cho ΔABC vuông tại A.
Dựng đường cao AH, khi đó ta có:
$AH = d(A;BC)$ và AH được tính theo công thức:



$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ hoặc $AH = \dfrac{AB.AC}{BC}$.

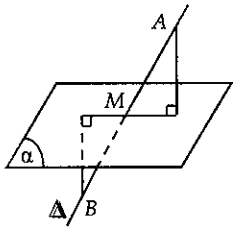
II. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng



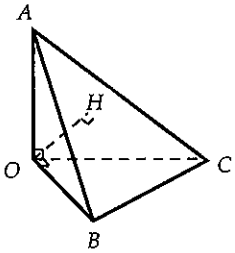
1. Định nghĩa

Cho điểm O và mặt phẳng (α). Dựng $OH \perp (\alpha)$ $(H \in (\alpha))$. Khi đó khoảng cách từ O tới (α) bằng độ dài đoạn OH và được kí hiệu là $d(O;(\alpha))$.

2. Giả sử đường thẳng Δ cắt (α) tại M.
Trên Δ lấy hai điểm A, B.

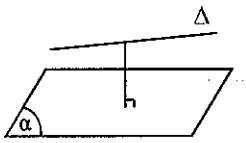


Khi đó: $\dfrac{d(A;(\alpha))}{d(B;(\alpha))} = \dfrac{AM}{BM}$.

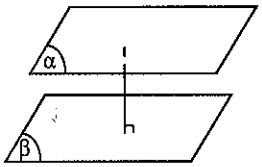


3. *(Tính chất tứ diện vuông)*
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O trên (ABC).

Khi đó $OH = d(O;(ABC))$ và $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$



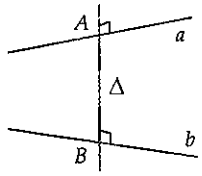
4. Cho đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách giữa Δ và (α) được định nghĩa bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc Δ tới (α).



5. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.
Khi đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (α) tới (β).

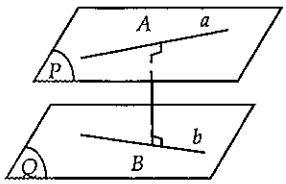
III. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó tồn tại duy nhất một đường thẳng Δ vuông góc với cả hai đường thẳng a và b và cắt cả hai đường thẳng



a và b. Δ được gọi là đường vuông góc chung của a và b. Đoạn thẳng AB được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b bằng độ dài đoạn vuông góc chung AB.



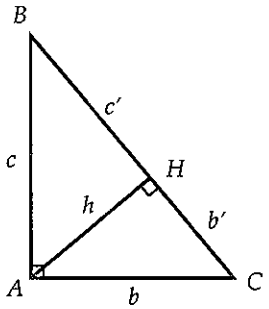
2. Nếu gọi $(P),(Q)$ là hai mặt phẳng song song với nhau và lần lượt chứa hai đường thẳng a và b chéo nhau thì $AB = d(a;(Q)) = d(b;(P)) = d((P);(Q))$.

Nhận xét:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

IV. Bổ sung kiến thức

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông



+ $a^2 = b^2 + c^2$

+ $b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$

+ $h^2 = b'.c'$

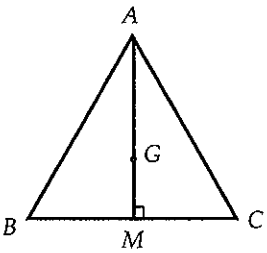
+ $a.h = b.c$

+ $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$

+ $b = a.\sin B = a.\cos C = c.\tan B = c.\cot C$

+ $c = a.\sin C = a.\cos B = b.\tan C = b.\cot B$

2. Hệ thức lượng trong tam giác đều

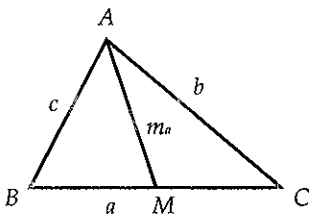


- Cho ΔABC đều cạnh a, trung tuyến AM, trọng tâm G ta có:

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

- Diện tích $S = \dfrac{1}{2}AM.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. Hệ thức lượng trong tam giác thường



- Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

- Định lý sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

- Công thức trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

- Công thức diện tích:

+ $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c$

+ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B$

+ $S = \dfrac{abc}{4R}$

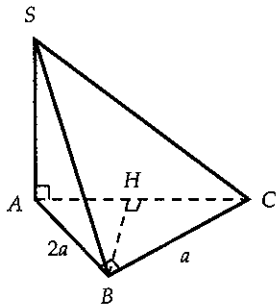
+ $S = p.r$

+ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

B. Các bài toán về khoảng cách

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ đáy là tam giác vuông tại B và $AB = 2BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABC)$. Tính $d(B;(SAC))$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.



Đáp án A.

Lời giải:

Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp SA$ vì $SA \perp (ABC)$.

Vậy $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH$ là khoảng cách từ B tới (SAC) theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

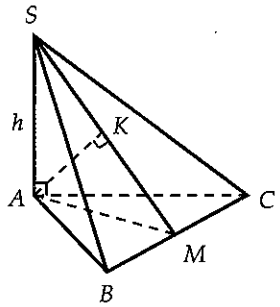
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a}{\sqrt{5}} = d(B;(SAC)).$$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC đều cạnh a. Tính $d(A;(SBC))$ biết $SA = h$.

A. $\frac{ah\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **C.** $\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}}$. **D.** $\frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2+3h^2}}$.

Đáp án C.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow BC \perp (SAM)$. Dựng $AK \perp SM$

$\Rightarrow AK \perp BC$ (vì $BC \perp (SAM)$) $\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A;(SBC))$

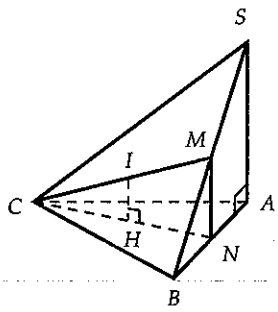
Có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ΔSAM vuông tại A

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4h^2+3a^2}{3a^2h^2}$$

$$\Rightarrow AK^2 = \frac{3a^2h^2}{3a^2+4h^2} \Rightarrow AK = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2+4h^2}} = d(A;(SBC)).$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = h$ và $SA \perp (ABC)$. Lấy điểm $M \in SB$ sao cho $SM = \frac{1}{2}MB$ (M thuộc đoạn AB). Gọi I là trung điểm của CM. Tính $d(I;(ABC))$.

A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h}{3}$. **C.** $\frac{2h}{3}$. **D.** h.



Đáp án B.

Lời giải:

Dựng $MN // SA$, $N \in AB \Rightarrow MN \perp (ABC)$

Dựng $IH \perp CN \Rightarrow IH \perp (ABC)$

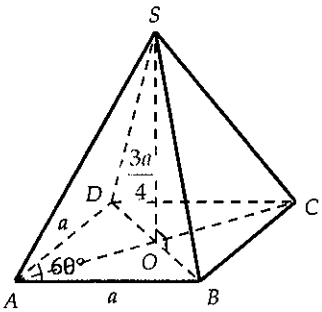
$\Rightarrow IH$ là khoảng cách từ I tới (ABC) $\Rightarrow IH = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}SA = \frac{h}{3} = d(I;(ABC))$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{BAD}=60^\circ, SO\perp(ABCD)$ và $SO=\frac{3a}{4}$. Đặt $x=d(O;(SBC)), y=d(A;(SBC))$, $z=d(AD;SB)$. Tính $x+y+z$.

A. $\frac{9a}{8}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{15a}{4}$. D. $\frac{15a}{8}$.

Đáp án D.

Lời giải:



Vì $\widehat{BAD}=60^\circ\Rightarrow\Delta BAD$ đều cạnh a

$\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}, BD=a\Rightarrow OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}; OB=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ Tứ diện $OSBC$ vuông tại O

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{\left(\frac{3a}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{16}{9a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{64}{9a^2}\Rightarrow x=\frac{3a}{8}$$

Ta có: $AC=2AO\Rightarrow d(A;(SBC))=2d(O;(SBC))=\frac{3a}{4}=y$

Vì $AD//(SBC)\Rightarrow z=d(AD;SB)=d(AD;(SBC))=d(A;(SBC))=\frac{3a}{4}$

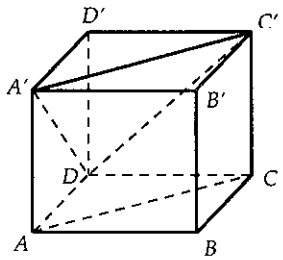
$\Rightarrow x+y+z=\frac{3a}{8}+\frac{3a}{4}+\frac{3a}{4}=\frac{15a}{8}$.

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính $d(AC;DC')$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{3}$. D. a.

Đáp án A.

Lời giải:



Vì $AC//(DA'C')$ nên $d(AC;DC')=d(AC;(DA'C'))=d(A;(DA'C'))=d(D';(DA'C'))$

Tứ diện $D'A'DC'$ vuông tại D' nên:

$$\frac{1}{d^2(D';(DA'C'))}=\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'C'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}$$

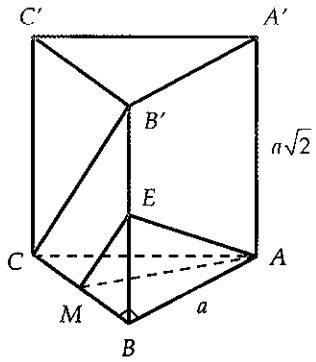
$\Rightarrow d(D';(DA'C'))=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}=d(AC;DC')$.

Ví dụ 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=BC=a$, cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $d(AM;B'C)$.

A. $a\sqrt{7}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{\sqrt{7}}{a}$. D. $\frac{a^2}{7}$.

Đáp án B.

Lời giải:



Trước hết ta đi dựng một mặt phẳng chứa đường này và song song với đường kia để chuyển về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Lấy E là trung điểm $BB' \Rightarrow ME // CB' \Rightarrow CB' // (AME)$

$\Rightarrow d(AM;B'C) = d(B'C;(AME)) = d(C;(AME)) = d(B;(AME))$

Mà tứ diện $BAME$ vuông ở B nên:

$$\frac{1}{d^2(B;(AME))} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(B;(AME)) = \frac{a}{\sqrt{7}} = d(AM;B'C).$$

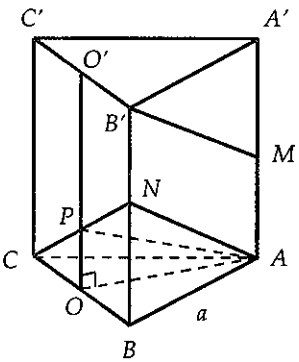
Nhận xét: Qua 2 ví dụ trên ta luôn chuyển khoảng cách về tứ diện vuông để tính.

Ví dụ 7: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB'. Tính $d = d(B'M;CN)$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Đáp án D.

Lời giải:



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$ và $P = OO' \cap CN$ vì $B'M // (CAN)$ nên $d(B'M,CN) = d(B'M,(CAN))$

$= d(B';(CAN)) = d(B;(CAN)) = 2d(O;(CAN))$ (vì $BC = 2OC$)

Tứ diện $OACP$ vuông tại $O \Rightarrow \frac{1}{d^2(O;(CAP))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OC^2}$

$$= \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(O;(CAP)) = \frac{a\sqrt{3}}{8} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Nhận xét: Ngoài việc chuyển khoảng cách giữa $B'M$ và CN ta còn dựng thêm được tứ diện vuông $OACP$ và nhờ tính chất tứ diện vuông ta tính được khoảng cách.

Ví dụ 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90°$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính $d(H;(SCD))$.

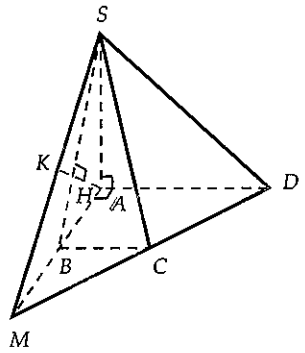
A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Đáp án C.

Lời giải:

Gọi $M = AB \cap CD$, $K = AH \cap SM$.

Vì BC là đường trung bình của $\Delta MAD \Rightarrow B$ là trung điểm AM.



Ta có: $\frac{BH}{BS}=\frac{BH.BS}{BS^2}=\frac{BA^2}{BS^2}=\frac{a^2}{3a^2}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow H$ là trọng tâm của ΔSAM

Từ đó $\frac{d(H;(SCD))}{d(A;(SCD))}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}$

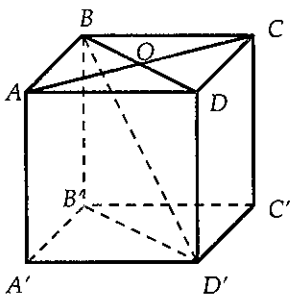
Tứ diện $ASDM$ vuông tại A nên:

$$\frac{1}{d^2(A;(SCD))}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(A;(SCD))=a \Rightarrow d(H;(SCD))=\frac{a}{3}.$$

Ví dụ 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BD'.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Đáp án A.

Lời giải:

Xét mặt phẳng $(BB'D'D)$ chứa BD' và song song với AA'.

Ta có: $\begin{cases} AO\perp BD \\ AO\perp BB' \end{cases}$ (O là tâm hình vuông $ABCD$)

$$\Rightarrow AO\perp(BB'D'D)\Rightarrow d(AA';BD')=AO=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

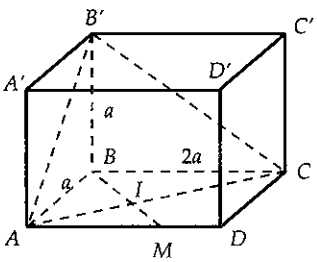
Ví dụ 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2a$, $AA'=a$. Gọi M là điểm chia đoạn AD với $\frac{AM}{MD}=3$. Đặt $x=d(AD';B'C)$, $y=d(M;(AB'C))$. Tìm $x.y$.

A. $\frac{3a^2}{2\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{5a^5}{3\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** $\frac{3a^2}{4}$.

Đáp án C.

Lời giải:

Ta có: $B'C\,//(AA'D'D)$ $\Rightarrow d(B'C;AD')=d(B'C;(AA'D'D))=B'A'=a=x$



Gọi $I=BM\cap AC$ $\Rightarrow \frac{d(M;(AB'C))}{d(B;(AB'C))}=\frac{MI}{BI}=\frac{AM}{BC}=\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow d(M;(AB'C))=\frac{3}{4}d(B;(AB'C)).$$

Tứ diện $BAB'C$ vuông tại B nên ta có:

$$\frac{1}{d^2(B;(AB'C))}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}$$

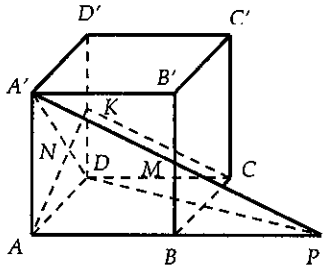
$$\Rightarrow d(B;(AB'C))=\frac{2a}{3}\Rightarrow d(M;(AB'C))=\frac{3}{4}.\frac{2a}{3}=\frac{a}{2}=y$$

Vậy $x.y=a.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Ví dụ 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm DD'. Tính $d(CK;A'D)$.

A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{4a}{3}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Gọi M là trung điểm BB'.

Ta có: $A'M // KC$ nên $d(CK;A'D)=d(CK;(A'MD))=d(K;(A'MD))$

Gọi $N=AK\cap A'D$; $P=AB\cap A'M$. Khi đó $\frac{d(K;(A'MD))}{d(A;(A'MD))}=\frac{NK}{NA}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(CK;A'D)=\frac{1}{2}d(A;(A'MD))=\frac{1}{2}d(A;(A'DP))$.

Tứ diện $AA'DP$ vuông tại A nên:

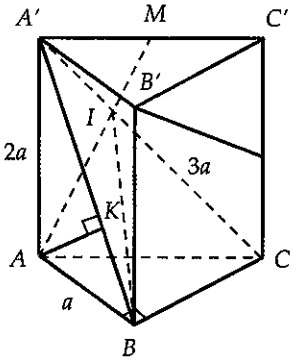
$$\frac{1}{d^2(A;(A'DP))}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AP^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{9}{4a^2}$$

$\Rightarrow d(A;(A'DP))=\frac{2a}{3}\Rightarrow d(CK;A'D)=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $AA'=2a$, $A'C=3a$. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

A. $2a\sqrt{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Ta có: $AC=\sqrt{A'C^2-A'A^2}=a\sqrt{5}$

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a$

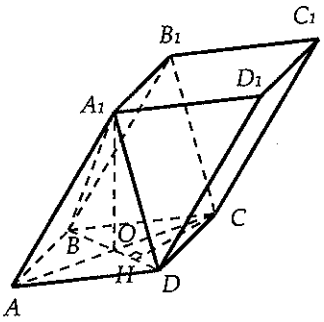
Hạ $AK\perp A'B$ $(K\in A'B)$ vì $BC\perp(ABB'A')$ nên $AK\perp BC\Rightarrow AK\perp(IBC)$

$\Rightarrow d(A;(IBC))=AK=\frac{2S_{AA'B}}{A'B}=\frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2+AB^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 13: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên $(ABCD)$ trùng vơi giao điểm của AC và BD. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Đáp án A.



Lời giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Khi đó $A_1O\perp(ABCD)$.

Ta có: $B_1C // A_1D\Rightarrow B_1C //(A_1BD)$

$\Rightarrow d(B_1;(A_1BD))=d(C;(A_1BD))$

Kẻ $CH \perp BD$ thì $CH \perp (A_1BD)$

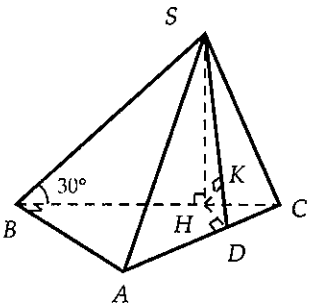
$$\Rightarrow d(B_1;(A_1BD)) = CH = \frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Tính $d(B;(SAC))$.

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. **B.** $6a\sqrt{7}$. **C.** $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $a\sqrt{7}$.

Đáp án C.

Lời giải:



Kẻ $SH \perp BC$ $(H \in BC)$ do $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

Ta có: $SH = SB.\sin 30° = a\sqrt{3}$

Kẻ $HD \perp AC$ $(D \in AC)$, kẻ $HK \perp SD$ $(K \in SD)$.

Khi đó $HK = d(H;(SAC))$

Vì $BH = SB.\cos 30° = 3a$ nên $BC = 4HC \Rightarrow d(B;(SAC)) = 4d(H;(SAC))$

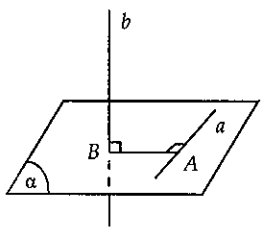
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$

$$HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = AB.\frac{HC}{AC} = \frac{3a}{5} \Rightarrow HK = \frac{SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Vậy $d(B;(SAC)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

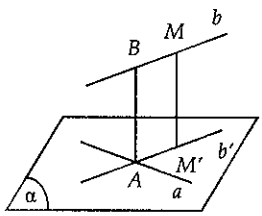
*** Chú ý 1:**

Xác định đoạn vuông góc chung, tính khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau.



TH1: Giả sử hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc với nhau: Ta dựng mp(α) chứa a và vuông góc với b tại B. Trong mặt phẳng (α) dựng $BA \perp a$ tại A. Khi đó độ dài đoạn thẳng BA là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

TH2: Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau:



- Ta dựng mp(α) chứa a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng đường thẳng $b' // b$ cắt a tại A.
- Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B khi đó đoạn thẳng AB gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

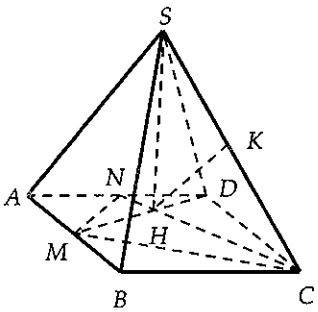
*** Chú ý 2:**

Thông thường bài toán tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau quy về tính khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng. Như TH2 nói trên thì $d(a;b) = d(b;(\alpha)) = d(M;\alpha)$.

Ví dụ 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{2\sqrt{3}a}{19}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Ta có $\Delta ADM = \Delta DCN$ nên $\widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN$

Có $DM \perp SH \Rightarrow DM \perp (SHC)$

Hạ $HK \perp SC$ tại $K \Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của DM và SC

Do đó $d(DM;SC) = HK$

Trong tam giác vuông CND ta có:

$$CH.CN = CD^2 \Rightarrow CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

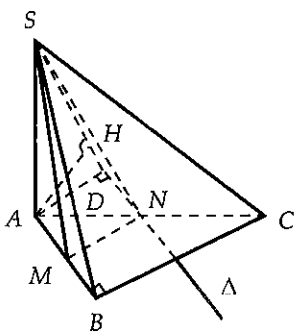
Mặt khác: $HK.SC = SH.HC$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.HC}{SC} = \frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{3a^2 + \frac{4a^2}{5}}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{\sqrt{5}.\sqrt{\frac{19a^2}{5}}} = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Ví dụ 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng đi qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{11}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Ta có (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$. Từ $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$ nên $\widehat{SBA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC)

Từ đó $\widehat{SBA} = 60°$; $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$

Kẻ đường thẳng Δ đi qua N, song song với AB.

Hạ $AD \perp \Delta (D \in \Delta) \Rightarrow AB // (SND) \Rightarrow d(AB;SN) = d(AB,(SND)) = d(A;(SND))$

Dựng $AH \perp SD$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SND) \Rightarrow d(A;(SND)) = AH$.

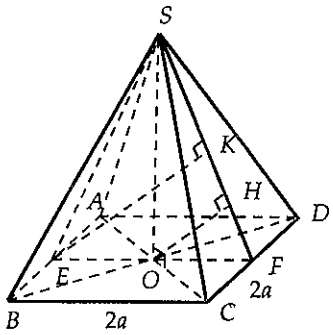
Tam giác SAD vuông tại A, có $AH \perp SD$ và $AD = \frac{BC}{2} = a$

$$\Rightarrow d(AB;SN) = AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Ví dụ 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$. Tam giác SAC cân tại S có đường cao $SO = a\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a.

Đáp án C.



Lời giải:

Tam giác SAC cân tại S có $SO \perp AC$ và $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SO \perp (ABC)$

Gọi D là điểm đối xứng với B qua O, khi đó $ABCD$ là hình vuông nên $AB // CD$

$\Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(AB;SC) = d(AB;(SCD))$

Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow d(AB;(SCD)) = d(E;(SCD))$

Gọi F là trung điểm của CD.

Kẻ $OH \perp SF (H \in SF)$ thì $OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O;(SCD)) = OH$.

Dựng $EK // OH (K \in SF) \Rightarrow EK \perp (SCD)$

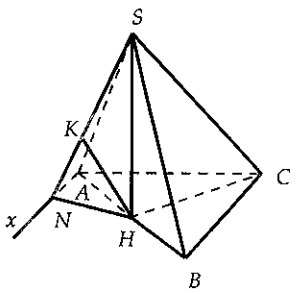
$\Rightarrow d(E;(SCD)) = EK$ và $EK = 2OH$ mà $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EK = d(AB;SC) = 2OH = a\sqrt{3}$.

Ví dụ 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$. B. $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{10}$.

Đáp án A.



Lời giải:

Ta có: $\widehat{SCH} = (\widehat{SC,(ABC)}) = 60°$.

Kẻ $Ax // BC$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

Ta có $BC // (SAN)$ và $BA = \frac{3}{2}HA$ nên $d(SA,BC) = d(B,(SAN)) = \frac{3}{2}d(H,(SAN))$.

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H,(SAN)) = HK$

$AH = \frac{2a}{3}$, $HN = AH.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$

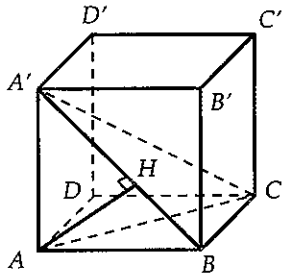
Vậy $d(SA;BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

Ví dụ 19: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Đáp án C.

Lời giải:



$\Delta A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a$ nên $AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = B'C' = \frac{a}{2}$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của $\Delta A'AB$.

Ta có $AH \perp A'B$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (A'BC)$ hay $AH \perp (BCD')$

Do đó $AH = d(A;(BCD'))$.

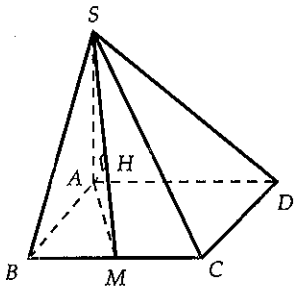
Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow d(A;(BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120°$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45°$. Tính theo a khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải:



Ta có $\widehat{BAD} = 120°, \widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AD // BC$ nên $d(D;(SBC)) = d(A;(SBC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có: $AM \perp BC$ và $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$

$\Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

Ta có: $AH = \frac{AM.\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d(D;(SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ví dụ 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30°$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Đáp án D.

Lời giải:

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABC)$.

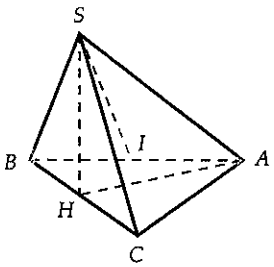
Ta có: $BC = a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC = BC.\sin 30° = \frac{a}{2}$

STUDY TIP

Nếu ta công nhận công thức tính thể tích của khối chóp mà sau này ta học ở lớp 12 thì ta còn có một cách khác để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng vì:

$V = \frac{1}{3}B.h \Rightarrow h = \frac{3V}{B}$

với B là diện tích đáy,
h là chiều cao,
V là thể tích khối chóp.



$AB = BC.\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}SH.AB.AC = \frac{a^3}{16}$.

ΔABC vuông tại A và H là trung điểm BC nên $HA = HB$ mà $SH \perp (ABC)$ $\Rightarrow SA = SB = a$.

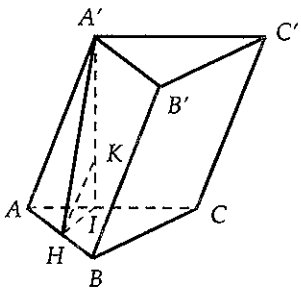
Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow SI \perp AB$. Do đó $SI = \sqrt{SB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

$\Rightarrow d(C;(SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{6V_{S.ABC}}{SI.AB} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 22: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

A. $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. B. $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$. C. $\frac{2\sqrt{13}a}{13}$. D. $\frac{5\sqrt{13}a}{26}$.

Đáp án A.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow AH \perp (ABC)$ và $\widehat{A'CH} = 60°$.

Do đó $A'H = CH.\tan\widehat{A'CH} = \frac{3a}{2}$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên AC, K là hình chiếu vuông góc của H trên $A'I$ $\Rightarrow HK = d(H;(ACC'A'))$.

Ta có $HI = AH.\sin\widehat{IAH} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{13}a}{26}$

Do đó $d(B;(ACC'A')) = 2d(H;(ACC'A')) = 2HK = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

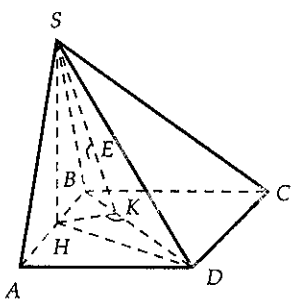
STUDY TIP

Vì $A'H \perp (ABC)$ và H là trung điểm AB nên $d(B;(ACC'A')) = 2d(H;(ACC'A'))$

Ví dụ 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Đáp án B.



Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Do đó $SH \perp HD$, ta có: $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (AH^2 + AD^2)} = a$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên BD và E là hình chiếu vuông góc của H trên SK. Ta có $BD \perp HK$ và $BD \perp SH$ $\Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HE$.

Mà $HE \perp SK$ do đó $HE \perp (SBD)$.

STUDY TIP
$d(A;(SBD))$
$=2d(H;(SBD))$

Ta có: $HK = HB.\sin\widehat{KBH} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow HE = \frac{HS.HK}{\sqrt{HS^2+HK^2}} = \frac{a}{3}$

Do đó $d(A;(SBD)) = 2d(H;(SBD)) = 2HE = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}a}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}a}{2}$.

Đáp án C.

STUDY TIP
Dựng mặt phẳng (SMB) chứa SB và song song với AC.

Lời giải:

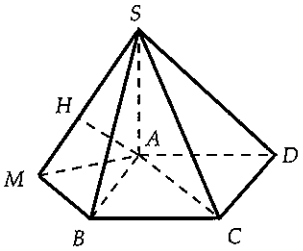
Kẻ đường thẳng d qua B và song song với AC. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên d; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có: $SA \perp BM$, $MA \perp BM$ nên $AH \perp BM \Rightarrow AH \perp (SBM)$

Do đó $d(AC;SB) = d(A;(SBM)) = AH$

ΔSAM vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{5}{2a^2}$.

Vậy $d(AC;SB) = AH = \frac{\sqrt{10}a}{5}$.



C. Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm A, B không nằm trong (P). Đặt $d_1 = d(A;(P))$ và $d_2 = d(B;(P))$. Trong các kết luận sau thì kết luận nào đúng?

A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi $AB // (P)$.

B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB cắt (P).

C. Nếu $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi đoạn thẳng AB cắt (P).

D. Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Giả sử $AB = 1, AC = 2, AD = 3$. Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng:

A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{7}{11}$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = b; AA' = c$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' là:

A. $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$. B. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{21}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. D. $\frac{\sqrt{7}}{a\sqrt{3}}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Khoảng cách từ A đến mp$(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

B. Độ dài AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ A đến mp$(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ A đến mp$(BCC'B')$ bằng $\frac{3}{2}a$.

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi A' là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (BCD). Độ dài AA' là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a; BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $AB.EG$.

A. $a^2\sqrt{3}$. B. a^2. C. $a^2\sqrt{2}$. D. $2a^2$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 3$. Góc giữa AB và CD bằng $60°$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt AC, AD và BD lần lượt tại N, P và Q. Tính diện tích $MNPQ$.

A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AB = CD = 6$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho: $MC = xBC\,(0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, AC, AD, BD tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ là:

A. 9. B. 6. C. 10. D. 12.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, $AC = AD = 4, AB = 3, BC = 5$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{12}{\sqrt{34}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{34}}$. D. $\frac{\sqrt{34}}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a, BA = BC = 2a, \widehat{ABC} = 120°$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. a. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{2}a$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. B. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. D. $\frac{3}{7}a$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$, cạnh SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = a$. Tính $d(A;(SBC))$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC đến (SBD).

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. a. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a. C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó SA, AB, BC đôi một vuông góc và $SA=AB=BC=1$. Tính khoảng cách SC.

A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 2. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có $DA=DB=DC$ và $\widehat{BCD}=60°, \widehat{ADC}=90°, \widehat{ADB}=120°$. Trong các mặt của tứ diện đó:

A. Tam giác ABD có diện tích lớn nhất.

B. Tam giác ACD có diện tích lớn nhất.

C. Tam giác BCD có diện tích lớn nhất.

D. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có hai cặp cạnh đối diện vuông góc. Cắt tứ diện đó bằng một mặt phẳng song song với một cặp cạnh đối diện còn lại của tứ diện. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Thiết diện là hình thang.

B. Thiết diện là hình bình hành.

C. Thiết diện là hình chữ nhật.

D. Thiết diên là hình vuông.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với đáy lớn $AD=2a$; $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

A. a. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Câu 23: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh OA, OB, OC. Gọi h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) thì h có giá trị là:

A. $h=\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. B. $h=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$.

C. $h=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}}$. D. $h=\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, đường chéo $AC=a$. SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm AB. Hãy tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{3a\sqrt{13}}{26}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$. D. $\frac{3a\sqrt{3}}{16}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB=AD=2a$, $CD=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm AD, hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{3a\sqrt{15}}{10}$. C. $\frac{2a\sqrt{15}}{10}$. D. $\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

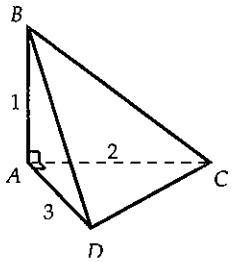
Câu 1: Đáp án D.

Câu 2: Đáp án C.

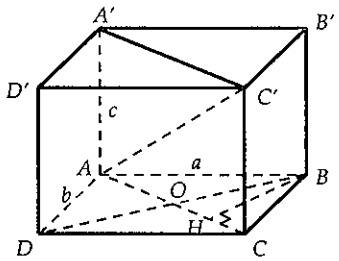
Vì

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}\Rightarrow d=\frac{6}{7}.$$



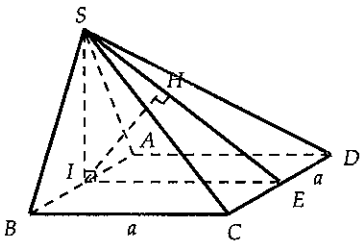
Câu 3: Đáp án B.



$$d(BB';AC')=d(BB';(AA'C'C))=d(B;(AA'C'C))=BH$$

Ta có: $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2.b^2}\Rightarrow BH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Câu 4: Đáp án C.



Gọi I là trung điểm AB, ta có $SI\perp AB$ và $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Gọi E là trung điểm CD.

Trong mặt phẳng (SIE), dựng $IH\perp SE, H\in SE$ thì $IH\perp(SCD)\Rightarrow d(I;(SCD))=IH.$

Ta có $SI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IE=a.$

Xét tam giác vuông SIE có:

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IS^2}+\frac{1}{IE^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(I;(SCD))=IH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\Rightarrow d(A;(SCD))=d(I;(SCD))=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

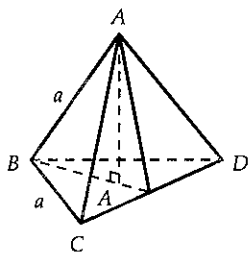
Câu 5: Đáp án B.

Câu 6: Đáp án A.

Ta có: $BA'=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$AA'=\sqrt{AB^2-BA'^2}$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



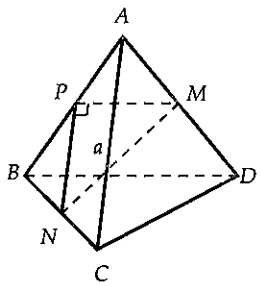
Câu 7: Đáp án D.

Lấy P là trung điểm của AB. Khi đó $PM//BD$, $PN//AC$.

Vì $AC\perp BD$

$\Rightarrow PM\perp PN$ và

$PM=\frac{3a}{2}$, $PN=\frac{a}{2}$

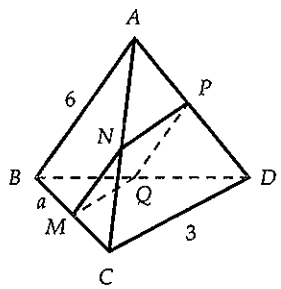


$$\Rightarrow MN=\sqrt{PM^2+PN^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Câu 8: Đáp án C.

Ta có $AB=a$, $EG=a\sqrt{2}\Rightarrow AB.EG=a^2\sqrt{2}.$

Câu 9: Đáp án B.



Giao tuyến (P) với (ABC) là $MN\,//\,AB$

Tương tự $NP\,//\,MQ\,//\,CD$

$\Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

và $(\widehat{NM,NP})=60°$

Có $\frac{MN}{AB}=\frac{MC}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{1}{3}AB=2$

$$\frac{NP}{CD}=\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow NP=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3}.3=2$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=MN.NP.\sin\widehat{MNP}=2.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Câu 10: Đáp án A.

Ta có: $\frac{MN}{AB}=\frac{CM}{CB}=x\Rightarrow MN=x.AB=6x$

$$\frac{NP}{CD}=\frac{AN}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{BC-CM}{BC}=1-\frac{CM}{BC}=1-x$$

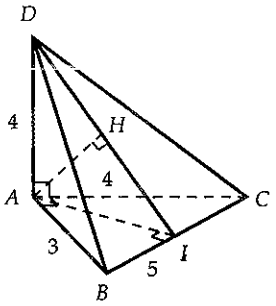
$$\Rightarrow NP=6(1-x)$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ}=36x(1-x)=9-36\left(\frac{1}{4}-x+x^2\right)$$

$$=9-36\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\le 9$$

$$\Rightarrow S_{max}=9.$$

Câu 11: Đáp án B.



Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên ΔABC vuông tại A

Cách 1: Sử dụng tính chất tam giác vuông

Dựng $AI \perp BC \Rightarrow AI.BC = AB.AC$

$$\Rightarrow AI = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5}$$

Dựng

$$AH \perp DI \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH = d(A;(BCD))$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{\frac{144}{25}} = \frac{1}{16} + \frac{25}{144} = \frac{34}{144}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{34}} = \frac{12}{\sqrt{34}}.$$

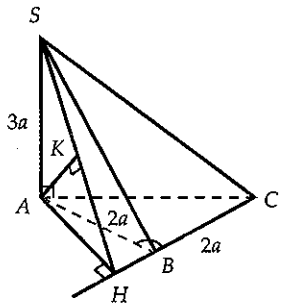
Cách 2: Vì tứ diện $ABCD$ vuông tại A nên áp dụng tính chất của tứ diện vuông ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12}{\sqrt{34}}.$$

Nhận xét: *Trong 2 cách trên thì cách 2 nhanh hơn nhiều khi sử dụng tính chất tứ diện vuông.*

Câu 12: Đáp án D.



Kẻ $AH \perp BC$ và $AK \perp SH$.

Ta có: $BC \perp AH$ và $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH)$

$$\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A;(SBC))$$

- Trong tam giác vuông BAH ta có:

$$\sin 60° = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB.\sin 60° = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

- Trong tam giác vuông SAH ta có:

$$AK = \frac{AS.AH}{SH} = \frac{3a.a\sqrt{3}}{\sqrt{9a^2 + 3a^2}} = \frac{3}{2}a$$

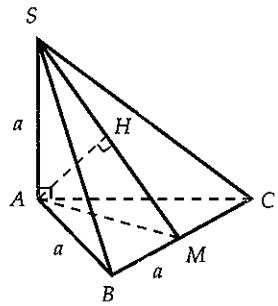
$$\Rightarrow d(A;(SBC)) = \frac{3}{2}a.$$

Nhận xét: *Trong bài này ta sử dụng tính chất tam giác vuông (ΔSAH) để tính khoảng cách $d(A;(SBC))$. Vậy có thể sử dụng tính chất của tứ diện vuông được không? Câu trả lời là được. Vì nếu lấy điểm H trên tia CB sao cho $\widehat{CAH} = 90°, \widehat{CAB} = \widehat{ACB} = 30°$ nên $\widehat{BAH} = 60°$, mặt khác $\widehat{ABH} = 60° \Rightarrow \Delta ABH$ đều $\Rightarrow AH = 2a$,*

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120°$$
$$= 4a^2 + 4a^2 - 4a^2 = 4a^2.$$

Sau đó sử dụng tính chất tứ diện vuông cho tứ diện $SAHC$ ta có: $\frac{1}{d^2(A;(SBC))} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2}$. *Tính được* $d(A;(SBC)) = \frac{3a}{2}$.

Câu 13: Đáp án A.



Gọi M là trung điểm BC.

Do ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A;(SBC))$

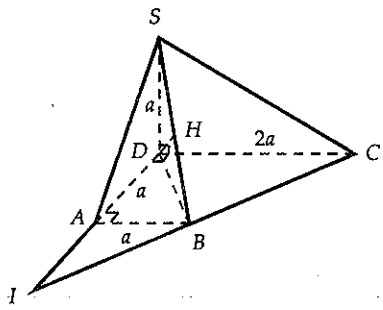
Trong tam giác vuông SAM ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng tính chất tứ diện vuông bằng cách dựng thêm điểm D thuộc tia BC sao cho $\widehat{CAD} = 90°$.

Câu 14: Đáp án C.



Kéo dài AD cắt BC tại I.

Ta có: AB là đường trung bình của ΔIDC $\Rightarrow DI = 2a$.

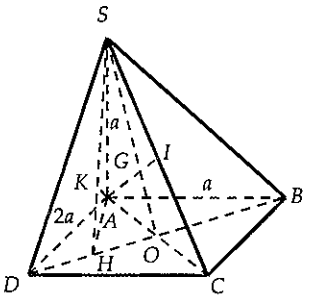
$$d\left(A;(SBC)\right) = d\left(A;(SIC)\right) = \frac{1}{2}d\left(D;(SIC)\right)$$

Áp dụng tính chất tứ diện vuông cho tứ diện SIC ta có: $\dfrac{1}{d^2\left(D;(SIC)\right)} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{6}{4a^2}$

$$\Rightarrow d\left(D;(SIC)\right) = \frac{2a}{\sqrt{6}} \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét: Ta cũng có thể sử dụng tính chất tam giác vuông bằng cách dựng $DH \perp SB$, chứng minh $DH \perp (SBC)$ và DH là khoảng cách cần tìm.

Câu 15: Đáp án B.



Kẻ $AH \perp BD$ và $AK \perp SH$.

Ta có $BD \perp AH$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAH)$

$\Rightarrow BD \perp AK$.

Ta có: $AK \perp SH$ và $BD \perp AK$ nên $AK \perp (SBD)$

$$\Delta ABD \text{ vuông} \Rightarrow AH = \frac{AD.AB}{BD} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

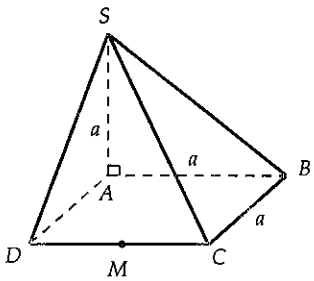
$$\Delta SAH \text{ vuông} \Rightarrow AK = \frac{SA.AH}{SH} = \frac{a.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{5}}} = \frac{2a}{3}$$

Gọi $O = AC \cap BD$, SO cắt AI tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔSAC

$$\Rightarrow \frac{d\left(I;(SBD)\right)}{d\left(A;(SBD)\right)} = \frac{GI}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(I;(SBD)\right) = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{3}.$$

Câu 16: Đáp án A.



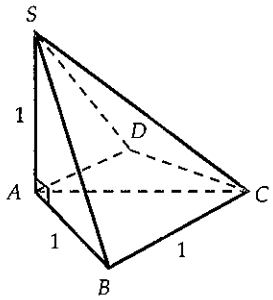
$$d(SB;CD) = d\left(CD;(SAB)\right) = d\left(C;(SAB)\right) = a.$$

Câu 17: Đáp án B.

(Hình vẽ câu 16)

$$d\left(M;(SAB)\right) = d\left(C;(SAB)\right) = a.$$

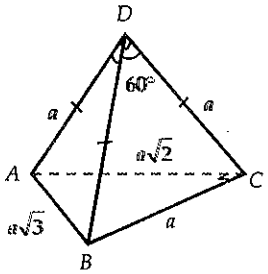
Câu 18: Đáp án B.



Ta có $\begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{2} \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3}.$$

Câu 19: Đáp án D.



Giả sử $DA = DB = DC = a$

$\Rightarrow BC = a,\ AC = a\sqrt{2},\ AB = a\sqrt{3}$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}DA.DB.\sin 120° = \frac{1}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}DB.DC.\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}DA.DC = \frac{1}{2}a^2$$

ΔABC có $AC^2 + BC^2 = AB^2$ (cùng bằng $3a^2$)

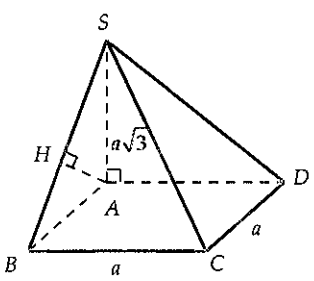
$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

So sánh 4 kết quả trên ta thấy $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ là lớn nhất nên chọn D.

Câu 20: Đáp án C.

Câu 21: Đáp án B.



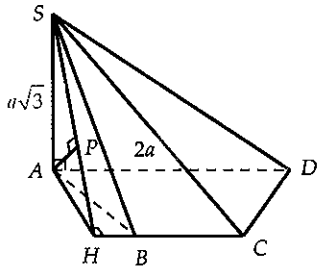
Dựng $AH \perp SB$. Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \left(\text{vì } BC \perp (SAB)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$

Áp dụng tính chất cho tam giác vuông SAB ta có:

$AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22: Đáp án C.



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $AH \perp BC$ tại H

$\Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH), dựng $AP \perp SH$

$\Rightarrow AP \perp (SBC)$ tại $P \Rightarrow d(A;SBC) = AP$

Mà $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

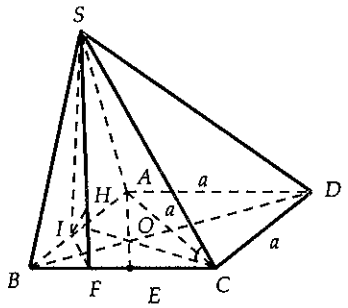
$\Rightarrow \dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow h = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Câu 24: Đáp án A.



Ta có: $SI \perp AB$, $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

Ta có $AE \perp BC$, $IF // AE \Rightarrow IF \perp BC$

$BC \perp IF$, $BC \perp SI \Rightarrow BC \perp (SIF)$

Trong mặt phẳng (SIF), dựng $IH \perp SF$ với $H \in SF$.

Ta có $IH \perp SF$, $IH \perp BC \Rightarrow IH \perp (SBC)$

Do đó $d(I;(SBC)) = IH$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là

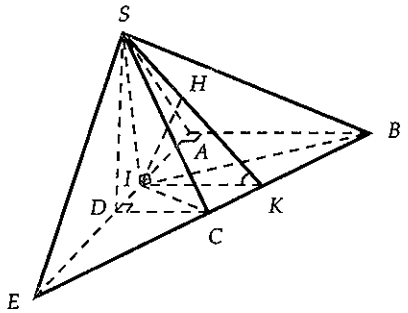
$\widehat{SCI}$ nên $\widehat{SCI} = 60°$, $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SI = CI.\tan\widehat{SCI} = \dfrac{3a}{2}$

$AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IF = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Từ đó $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IF^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{52}{9a^2} \Rightarrow IH = \dfrac{3a}{\sqrt{52}}$

$\Rightarrow d(I;(SBC)) = IH = \dfrac{3a}{\sqrt{52}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}$.

Câu 25: Đáp án D.



Ta có $\begin{cases} (SBI) \perp (ABCD) \\ (SCI) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng $IK \perp BC$, $K \in BC$.

Trong mặt phẳng (SIK), dựng $IH \perp SK$, $H \in SK$.

Từ $IH \perp (SBC) \Rightarrow d(I;(SBC)) = IH$

$S_{IBC} = S_{ABCD} - S_{DIC} - S_{ABI} = 3a^2 - \dfrac{a^2}{2} - a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$

$BC = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \dfrac{2S_{IBC}}{BC} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là $\widehat{SKI}$

nên $\widehat{SKI} = 60° \Rightarrow SI = IK.\tan\widehat{SKI} = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Ta có: $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{IS^2} + \dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{5}{27a^2} + \dfrac{5}{9a^2} = \dfrac{20}{27a^2}$

$\Rightarrow d(I;(SBC)) = IH = \dfrac{3a\sqrt{15}}{10}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AD và BC thì $E = AI \cap (SBC)$

$\Rightarrow \dfrac{d(A;(SBC))}{d(I;(SBC))} = \dfrac{EA}{EI} = \dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = \dfrac{4}{3} d(I;(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Nhận xét: Sử dụng tỉ số khoảng cách ta có thể tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng thông qua điểm khác, quan trọng là biết xuất phát từ điểm nào trước. Từ dấu hiệu $SI \perp (ABCD)$, ta chọn tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC) sau đó dựa vào tỉ số khoảng cách suy ra khoảng cách cần tìm.

Bài tập ôn tập chủ đề 8

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{MN}=k\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

A. $k=\frac{1}{2}$. B. $k=\frac{1}{3}$. C. $k=3$. D. $k=2$.

Câu 2: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng quy.

Câu 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. B. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. D. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **đúng**?

A. Nếu $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

B. Từ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

C. Vì $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Từ $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA}=-3\overrightarrow{CA}$.

Câu 5: Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véctơ đó cùng phương.

B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véctơ đó bằng véctơ $\vec{0}$.

C. Véctơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn luôn đồng phẳng với hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véctơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng

Câu 6: Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng? Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng:

A. a^2. B. $a\sqrt{2}$ C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình thang.

B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình thang thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$.

D. Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là **sai**?

A. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba véctơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

B. Vì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.

C. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

D. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ nên bốn điểm A,B,C,D cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$; $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. M là trung điểm BB'.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

D. M là trung điểm CC'.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

A. $45°$ B. $90°$ C. $120°$ D. $60°$

Câu 11: Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?

A. $60°$ B. $45°$ C. $120°$ D. $90°$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$?

A. $60°$. B. $120°$. C. $45°$. D. $90°$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?

A. $120°$. B. $60°$. C. $90°$. D. $30°$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. B. $45°$. C. $30°$. D. $60°$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. B. $\widehat{DA'C'}$. C. $\widehat{BB'D}$. D. $\widehat{BDB'}$.

Câu 16: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề đúng là?

A. Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.

B. Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

A. $120°$ B. $45°$ C. $60°$ D. $90°$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. $45°$ B. $30°$ C. $90°$ D. $60°$

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định sai?

A. Góc giữa AC và B_1D_1 bằng $90°$.

B. Góc giữa B_1D_1 và AA_1 bằng $60°$.

C. Góc giữa AD và B_1C bằng $45°$.

D. Góc giữa BD và A_1C_1 bằng $90°$.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2. C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 21: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c

B. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c

C. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ B. $60°$ C. $45°$ D. $120°$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm CD, α là góc giữa AC và BM. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\alpha = 60°$.

Câu 24: Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$ góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ B. $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

C. $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{139}$ D. $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 9$

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0 B. 60^0 C. 45^0 D. 120^0

Câu 26: Trong không gian cho ba điểm A, B, C bất kỳ, chọn đẳng thức đúng?

A. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

B. $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - 2BC^2$

D. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$

Câu 27: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

A. $a^2\sqrt{3}$ B. a^2 C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $a^2\sqrt{2}$

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ $(0 < x < 1)$. Mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu ?

A. 9. B. 11. C. 10. D. 8.

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

Câu 30: Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3;$ $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \frac{3}{8}$. B. $\alpha = 30^0$.

C. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. D. $\alpha = 60^0$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = k$

A. $k = 1$. B. $k = 2$. C. $k = 0$. D. $k = 4$.

Câu 33: Trong không gian cho tam giác ABC. Tìm M sao cho giá trị của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. M là trọng tâm tam giác ABC.

B. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. M là trực tâm tam giác ABC.

D. M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Câu 34: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 26; |\vec{b}| = 28;$ $|\vec{a} + \vec{b}| = 48$. Độ dài vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ bằng:

A. 25. B. $\sqrt{616}$. C. 9. D. $\sqrt{618}$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3;$ $\vec{a}.\vec{b} = 10$. Xét hai vectơ $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$. Chọn khẳng định đúng:

A. $\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{15}}$. B. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$.

C. $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{15}}$. D. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 36: Cho tam giác ABC có diện tích S. Tìm giá trị của k thích hợp thỏa mãn:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - 2k\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

A. $k = \frac{1}{4}$. B. $k = 0$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = 1$.

Câu 37: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?

A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$ $(a > b\sqrt{2})$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC tại điểm I nằm giữa S và C. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$. B. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$.

C. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{2b}$. D. $S = \frac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{4b}$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

B. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CBA}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B. Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. H trùng với trung điểm của AC.

B. H trùng với trực tâm tam giác ABC.

C. H trùng với trọng tâm tam giác ABC.

D. H trùng với trung điểm của BC.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 60^0 B. 75^0 C. 45^0 D. 30^0

Câu 42: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC}=120^0, \widehat{CSA}=60^0, \widehat{ASB}=90^0$, $SA=SB=SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên $mp(ABC)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. I là trung điểm của AB.

B. I là trọng tâm ΔABC.

C. I là trung điểm của AC.

D. I là trung điểm của BC.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA\perp(ABCD)$. Các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $SA\perp BD$ B. $SC\perp BD$

C. $SO\perp BD$ D. $AD\perp SC$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, O là trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là điểm tùy ý trên OH (không trùng với O và H). mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH . Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình thang cân. B. Hình thang vuông.

C. Hình bình hành. D. Tam giác vuông.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm $O, SA\perp(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BD\perp SC$.

B. $IO\perp(ABCD)$.

C. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

D. $SA=SB=SC$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và mp $(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha=30^0$. B. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\alpha=45^0$. D. $\alpha=60^0$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên tạo với đáy một góc bằng nhau. Hình chiếu H của S trên (ABC) là:

A. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

B. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. Trọng tâm tam giác ABC.

D. Giao điểm hai đường thẳng AC và BD.

Câu 49: Cho a,b,c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a // c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b//(\alpha)$ thì $a\perp b$.

C. Nếu $a // b$ và $b\perp c$ thì $c\perp a$.

D. Nếu $a\perp b, b\perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $AB\perp BC$. Số các mặt của tứ diện $S.ABC$ là tam giác vuông là:

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Gọi $AE; AF$ lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau ?

A. $SC\perp(AFB)$. B. $SC\perp(AEC)$.

C. $SC\perp(AED)$. D. $SC\perp(AEF)$.

Câu 52: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có đáy là hình thoi $\widehat{BAD}=60^0$ và $A'A=A'B=A'D$. Gọi $O=AC\cap BD$. Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ là :

A. trung điểm của AO.

B. trọng tâm ΔABD.

C. giao của hai đoạn AC và BD.

D. trọng tâm ΔBCD.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a, SA\perp(ABC), SA=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) có diện tích bằng?

A. $\frac{3a^2}{8}$. B. $\frac{3a^2}{2}$. C. $\frac{3}{4}a^2$. D. $\frac{2a^2}{3}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA\perp(ABCD)$. Biết $SA=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. 30^0. B. 60^0. C. 75^0. D. 45^0.

Câu 55: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mp $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^0$. B. $\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $\alpha = 45^0$. D. $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 56: Cho tứ diện $SABC$ thoả mãn $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mp (ABC). Đối với ΔABC ta có điểm H là:

A. Trực tâm.

B. Tâm đường tròn nội tiếp.

C. Trọng tâm.

D. Tâm đường tròn ngoại tiếp.

Câu 57: Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh $a, SA = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM = b$ $(0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng?

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. D. $\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Câu 58: Cho hai đường thẳng a, b và $mp(P)$. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a//(P)$ và $b \perp a$ thì $b//(P)$.

B. Nếu $a//(P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a//(P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b//(P)$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và mp(ABC).

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 75^0.

Câu 60: Tính chất nào sau đây không phải là tính chất của hình lăng trụ đứng?

A. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình bình hành.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật.

C. Các cạnh bên của hình lăng trụ đứng bằng nhau và song song với nhau .

D. Hai đáy của hình lăng trụ đứng có các cạnh đôi một song song và bằng nhau.

Câu 61: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mp thì song song với nhau.

C. Cho hai mp song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt mp này thì cũng vuông góc với mp kia.

D. Cho hai đường thẳng song song, mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABDC$, với đáy $ABDC$ là hình bình hành tâm $O; AD, SA, AB$ đôi một vuông góc $AD = 8, SA = 6$. (P) là mặt phẳng qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng?

A. 20. B. 16. C. 17. D. 36.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Độ dài SG là:

A. $\frac{\sqrt{9b^2+3a^2}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{b^2-3a^2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{9b^2-3a^2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{b^2+3a^2}}{3}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $b > a\sqrt{2}$. B. $b < a\sqrt{2}$. C. $a < b\sqrt{2}$. D. $a > b\sqrt{2}$.

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SAC)$. B. $CD \perp AC$.

C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp (SBD)$.

Câu 66: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, AP là đường cao của tam giác ACD. Mặt phẳng (P) qua B vuông góc với AP cắt mp(ACD) theo đoạn giao tuyến có độ dài bằng ?

A. 9 B. 6 C. 8 D. 7

Câu 67: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là góc giữa AC_1 và mp$(ABCD)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 45^0$ B. $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

C. $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\alpha = 30^0$

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua S và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ có diện tích bằng?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{a^2}{6}$ C. $\frac{a^2}{2}$ D. a^2

Câu 69: Tam giác ABC có $BC=2a$, đường cao $AD=a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A, lấy điểm S sao cho $SA=a\sqrt{2}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SB và SC. Diện tích tam giác AEF bằng?

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}a^2$ C. $\frac{1}{2}a^2$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

Câu 70: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. B. $(A'DC')$.

C. $(A'CD')$. D. $(A'B'CD)$.

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là α, khi đó $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}$. B. $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

C. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan\alpha=1$.

Câu 72: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H,K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC. Số đo góc tạo bởi SC và (BHK) là:

A. 45^0. B. 120^0. C. 90^0. D. 65^0.

Câu 73: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45^0. Tính độ dài SO.

A. $SO=a\sqrt{3}$. B. $SO=a\sqrt{2}$.

C. $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 74: Cho hình chóp $S.ABCD$ trong đó $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Trong các tam giác sau tam giác nào không phải là tam giác vuông.

A. ΔSBC. B. ΔSCD. C. ΔSAB. D. ΔSBD.

Câu 75: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O, cạnh a, hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm của đáy. Cạnh bên CC' hợp với mặt phẳng (ABC) góc $60°$. Gọi I là trung điểm của AB. Tính khoảng cách từ C đến IC'.

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{13}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Câu 76: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách từ C đến AC'.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 77: Cho hình chóp đều $SABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi O là tâm của đáy và $SO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách từ O tới SA.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng $30°$, với M là trung điểm CD. Hãy tính khoảng cách từ D đến (SBM).

A. $\frac{2a}{3}$. B. $\frac{4a}{3}$. C. $\frac{5a}{3}$. D. $\frac{a}{3}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A và $AB=2a$, $AC=2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $30°$. Tính khoảng cách từ trung điểm M của cạnh BC đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3a}{5}$.

Câu 80: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy góc $60°$. Tính khoảng cách từ đường thẳng BC đến mặt phẳng $(AB'C')$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{14}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{35}}{21}$.

Câu 81: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD}=60°$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy, gọi S là trung điểm của OO'. Tính khoảng cách từ O tới mặt phẳng (SAB). $(OO'=2a)$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. C. $\frac{a}{\sqrt{19}}$. D. $\frac{3a}{\sqrt{19}}$.

Câu 82: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên là các hình vuông cạnh a. Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, B_1C_1. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và A_1F.

A. $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{17}}{2}$. C. $\frac{a}{\sqrt{17}}$. D. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$.

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (quy tắc trung điểm)

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}\right)$

Mà $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (vì M là trung điểm AB)

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

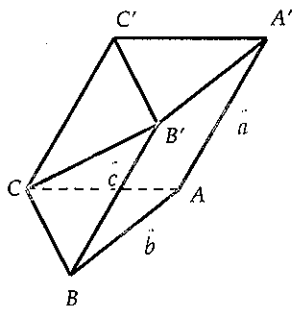
Câu 2: Đáp án B.

Theo giả thuyết $m+n+p\neq 0$ $\Rightarrow$ tồn tại ít nhất một số khác 0.

Giả sử $m\neq 0$. Từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{p}{m}\vec{c}$.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng (theo định lý về sự đồng phẳng của ba véctơ).

Câu 3: Đáp án D.

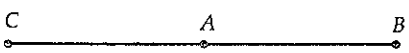


$\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}$ (qt hình bình hành)

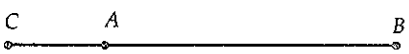
$=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BC}=-\vec{a}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$

Câu 4: Đáp án C.

A. Sai vì $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow$ A là trung điểm BC.



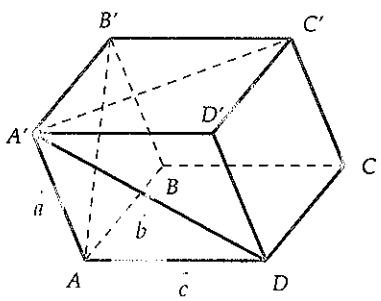
B. Sai vì $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ $\overrightarrow{CB}=-4\overrightarrow{AC}$.



C. Đúng theo định lý về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

D. Sai vì $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{CA}$ (nhân 2 vế cho -1).

Câu 5: Đáp án C.



A. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

B. Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

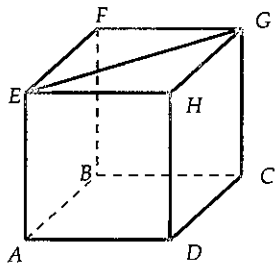
C. Sai.

D. Đúng vì $\begin{cases}\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{c}\\ \overrightarrow{AB'}=\vec{a}+\vec{b}\\ \overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}=-\vec{b}-\vec{c}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{DA'}-\overrightarrow{C'A'}$

$\Rightarrow$ 3 vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 6: Đáp án A.

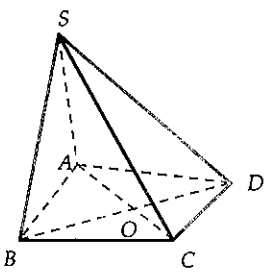


$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)$

$=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AE}+EF^2+\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FB}$

$=0+a^2+0+0+0+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EA}=a^2+0=a^2$

Câu 7: Đáp án C.



A. Đúng vì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+2\overrightarrow{SC}+2\overrightarrow{SD}=6\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Vì O,A,C và O,B,D thẳng hàng nên đặt

$\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OC};OB=m\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow (k+1)\overrightarrow{OC}+(m+1)\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Mà $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ không cùng phương nên $k=-2$ và $m=-2$ $\Rightarrow$ $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=2\Rightarrow AB//CD.$

B. Đúng. Học sinh tự biến đổi bằng cách thêm điểm O vào vế trái.

C. Sai. Vì nếu $ABCD$ là hình thang cân có 2 đáy là AD,BC thì sẽ sai.

D. Đúng. Tương tự đáp án A với $k=-1,m=-1$

$\Rightarrow O$ là trung điểm 2 đường chéo.

Câu 8: Đáp án D.

A. Đúng theo định nghĩa về sự đồng phẳng của 3 véctơ.

B. Đúng.

C. Đúng vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}$

Mà $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (vì I là trung điểm AB)

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

D. Sai vì không đúng theo định nghĩa sự đồng phẳng.

Câu 9: Đáp án A.

M là trung điểm BB'

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB'}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{B'D}+\overrightarrow{BD'}\right)$ (qt trung điểm).

Câu 10: Đáp án B.

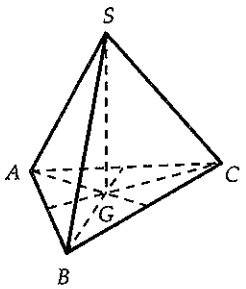
$\left.\begin{matrix}AB\perp AE\\ AE//DH\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp DH\Rightarrow\left(\widehat{AB,DH}\right)=90^\circ$

Câu 11: Đáp án D.

Ta có: $OO'//DD'$ mà $DD'\perp AB$

nên $OO'\perp AB\Rightarrow\left(\widehat{OO',AB}\right)=90^\circ$

Câu 12: Đáp án D.



Ta có: $\Delta SAB=\Delta SBC=\Delta SCA\ (c-g-c)$

$\Rightarrow AB=BC=CA$.

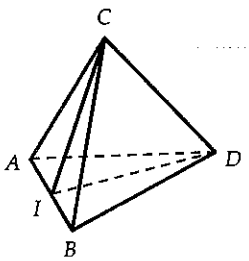
Do đó tam giác ABC đều. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S trùng với G hay $SG\perp(ABC)$.

Ta có: $\begin{cases}AC\perp BG\\ AC\perp SG\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBG)\Rightarrow AC\perp SB$.

Vậy góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 90^0.

Câu 13: Đáp án C.

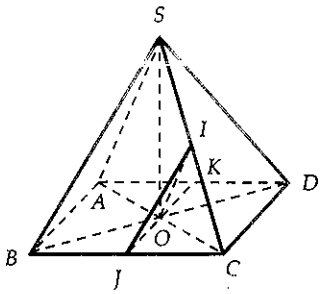


Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều nên $\begin{cases}CI\perp AB\\ DI\perp AB\end{cases}$.

Suy ra $AB\perp(CID)\Rightarrow AB\perp CD\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=90^\circ$.

Câu 14: Đáp án D.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Ta có: $OJ//CD$.

Nên góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ.

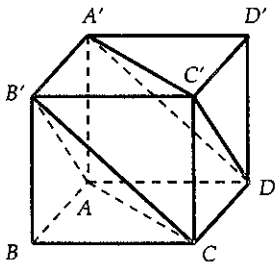
Xét tam giác IOJ có:

$IJ=\frac{1}{2}SB=\frac{a}{2}, OJ=\frac{1}{2}CD=\frac{a}{2}, IO=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.

Nên tam giác IOJ đều.

Vậy góc giữa IJ và CD bằng góc giữa IJ và OJ bằng góc $\widehat{IJO}=60^\circ$.

Câu 15: Đáp án B.

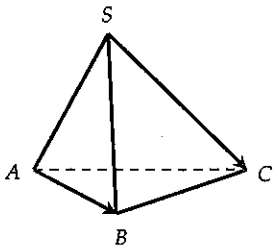


Ta có: $AC//A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $A'D$ bằng góc nhọn $\widehat{DA'C'}$ (vì tam giác $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn).

Câu 16: Đáp án A.

Theo lý thuyết.

Câu 17: Đáp án D.



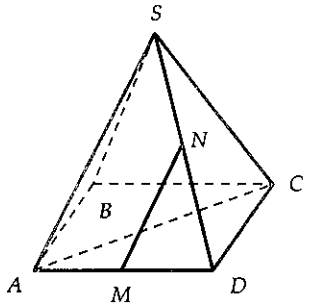
Ta có: $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}\right)=\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$=SC.SB\cos\widehat{BSC}-SC.SA.\cos\widehat{ASC}=0$

Vì $SA=SB=SC$ và $\widehat{BSC}=\widehat{ASC}$

Do đó: $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=90^0$

Câu 18: Đáp án C.



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

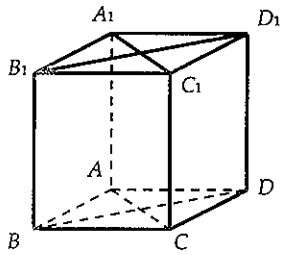
$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90^\circ$

$\Rightarrow \left(\widehat{MN, SC}\right) = 90^\circ$

Câu 19: Đáp án B.



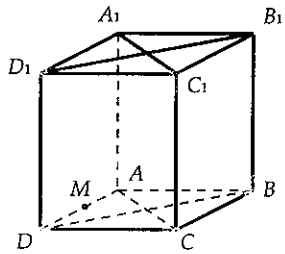
Ta có: $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}.\overrightarrow{BC} = 0$

(vì $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BA}\right) = 90^0$ và $\left(\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$)

Do đó: $\left(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{B_1D_1}\right) = 90^0 \Rightarrow \left(\widehat{AA_1, B_1D_1}\right) = 90^\circ$

Câu 20: Đáp án A.



Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$

$= -a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

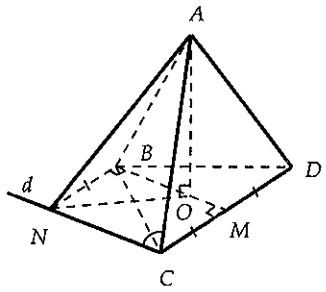
Câu 21: Đáp án C.

Câu 22: Đáp án C.

Ta có: $EG // AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^\circ$

Câu 23: Đáp án C.



Gọi O là trọng tâm của $\Delta BCD \Rightarrow AO \perp (BCD)$

Trên đường thẳng d qua C và song song BM lấy điểm N sao cho $BMCN$ là hình chữ nhật, từ đó suy ra: $\left(\widehat{AC, BM}\right) = \left(\widehat{AC, CN}\right) = \widehat{ACN} = \alpha$

Có: $CN = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ và $BN = CM = \frac{a}{2}$

$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \left(\frac{2}{3}BM\right)^2 = \frac{2}{3}a^2$

$ON^2 = BN^2 + BO^2 = \frac{7}{12}a^2$; $AN = \sqrt{AO^2 + ON^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

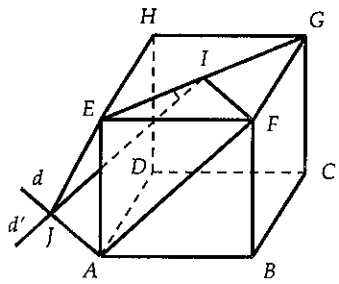
$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{AC^2 + CN^2 - AN^2}{2AC.CN} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 24: Đáp án D.

Ta có: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 19$

$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{19}$.

Câu 25: Đáp án B.



Đặt cạnh của hình lập phương trên là a

Gọi I là giao trung điểm EG

Qua A kẻ đường thẳng $d // FI$

Qua I kẻ đường thẳng $d' // FA$

Suy ra d cắt d' tại J.

Từ đó suy ra $\left(\widehat{EG, AF}\right) = \widehat{EIJ} = \alpha$

$IJ = AF = 2EI = 2FI = 2AJ = a\sqrt{2}$

$EJ^2 = AE^2 + AJ^2 = \frac{3}{2}a^2$

$\cos\alpha = \left|\frac{EI^2 + IJ^2 - EJ^2}{2.EI.IJ}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Cách 2: Ta có: $AC // EG \Rightarrow (AF; EG) = (AF; AC)$.

Mà ΔAFC đều (vì $AF = AC = FC = a\sqrt{2}$)

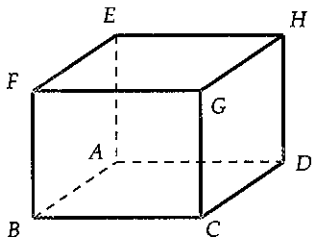
Suy ra: $\widehat{FAC} = 60^0$.

Câu 26: Đáp án A.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(AB, AC)$

$= AB^2 + AC^2 - 2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Câu 27: Đáp án B.

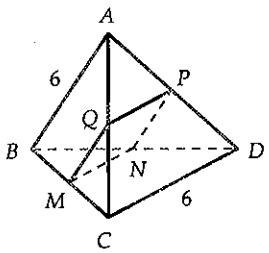


Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AB^2} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a^2$

Câu 28: Đáp án A.



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases}$

$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC} = 1 - x$

$\Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

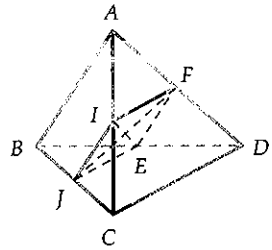
$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x$

$= 36.x.(1-x) \le 36\left(\dfrac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 29: Đáp án D



Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$ mà $AB = CD$ nên $IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi.

Suy ra $(\widehat{IE, JF}) = 90°$.

Câu 30: Đáp án D.

Theo nhận xét phần hai đường thẳng vuông góc trong SGK thì đáp án D đúng.

Câu 31: Đáp án A.

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{3}{8}$.

Câu 32: Đáp án C.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

$= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{CB}\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = 0.$

Câu 33: Đáp án A.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ cố định và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$P = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Vậy $P_{\min} = GA^2 + GB^2 + GC^2$ với $M \equiv G$ là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 34: Đáp án B.

$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} = 2\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2\right) - \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$

$= 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right) - \left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = 2\left(26^2 + 28^2\right) - 48^2 = 616$

$\Rightarrow \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{616}$.

Câu 35: Đáp án D.

Ta có: $\vec{x}.\vec{y} = \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \left(\vec{a}\right)^2 + 2\left(\vec{b}\right)^2 - 3\vec{a}.\vec{b} = 4$

$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\left(\vec{x}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{a}\right)^2 + 4\left(\vec{b}\right)^2 - 4\vec{a}.\vec{b}} = 2\sqrt{3}$

$|\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y})^2} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{(\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 2\vec{a}.\vec{b}} = \sqrt{5}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|} = \frac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

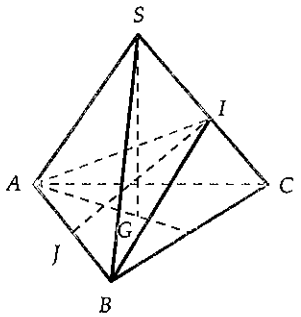
Câu 36: Đáp án C.

$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2\sin^2 A}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2(1-\cos^2 A)} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

Câu 37: Đáp án A.

Câu 38: Đáp án A.



Kẻ $AI \perp SC \Rightarrow (AIB) \perp SC$. Thiết diện là tam giác AIB.

Ta có $AI = AC\sin\widehat{ACS} = a\sqrt{1-\cos^2 ACS}$

$= a\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-b^2}{2ab}\right)^2} = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$

Gọi J là trung điểm của AB. Dễ thấy tam giác AIB cân tại I, suy ra $IJ \perp AB$.

$IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Do đó: $S = \frac{1}{2}AB.IJ = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

Câu 39: Đáp án B.

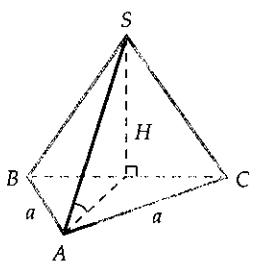
Câu 40: Đáp án A.

+ Ta có tam giác ABC vuông tại B nên trung điểm H của AC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC $\Rightarrow d \perp (ABC)$ tại H.

+ Mặt khác: $SA = SB = SC$ nên điểm $S \in d$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$

Câu 41: Đáp án C.



Do H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên $SH \perp (ABC)$

Vậy AH là hình chiếu của SH lên mp (ABC)

$\Rightarrow (SA;(ABC)) = (SA;AH) = SAH$

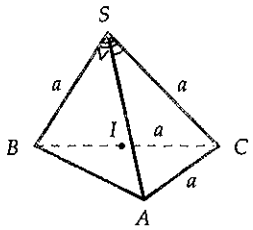
Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AH$

Mà $\Delta ABC = \Delta SBC \Rightarrow SH = AH$. Vậy tam giác SAH vuông cân tại H $\Rightarrow$ $\widehat{SAH} = 45^0$.

Câu 42: Đáp án B.

Câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

Câu 43: Đáp án D.



Gọi $SA = SB = SC = a$

Ta có : ΔSAC đều $\Rightarrow AC = SA = a$

ΔSAB vuông cân tại S $\Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

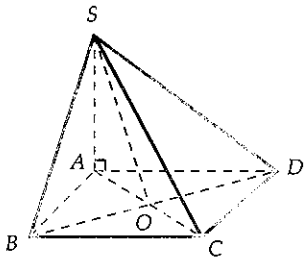
$BC = \sqrt{SB^2 + SC^2 - 2SB.SC.\cos BSC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Gọi I là trung điểm của BC thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là trục của tam giác ABC thì d đi qua I và $d \perp (ABC)$

Mặt khác: $SA = SB = SC$ nên $S \in d$. Vậy $SI \perp (ABC)$ nên I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Câu 44: Đáp án D.

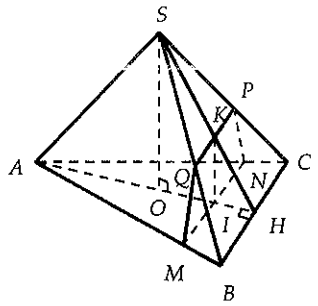


Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên $BD \perp AC$, mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$ hay $BD \perp SC, BD \perp SO$

AD không vuông góc SC.

Câu 45: Đáp án A.



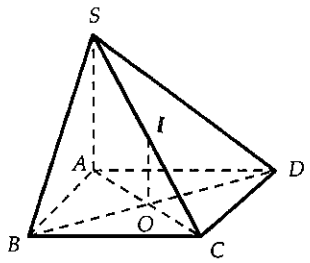
Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên (P) song song với SO.

Suy ra (P) cắt (SAH) theo giao tuyến là đường thẳng qua I và song song với SO cắt SH tại K

Từ giả thiết suy ra (P) song song BC, do đó (P) sẽ cắt $(ABC),(SBC)$ lần lượt là các đường thẳng qua I và K song song với BC cắt AB, AC, SB,SC lần lượt tại M,N,Q,P. Do đó thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra I là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ, lại có các tam giác ABC đều và tam giác SBC cân tại S suy ra IK vuông góc với MN và PQ dó đó $MNPQ$ là hình thang cân.

Câu 46: Đáp án D.



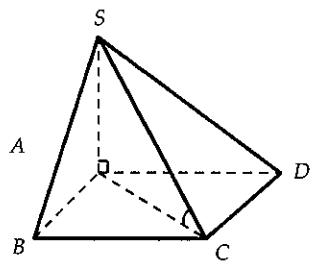
Ta có $BD \perp AC, BD \perp SA$ suy ra $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$, và O là trung điểm của BD suy ra (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

Ta có OI song song SA suy ra $IO \perp (ABCD)$.

Vậy $SA = SB = SC$ là khẳng định sai.

Câu 47: Đáp án D.



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa giữa SC và mp $(ABCD)$ bằng góc $SC \& AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SCA}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có:

$$\tan\alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

Câu 48: Đáp án A.

Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của S lên các cạnh AB,AC,BC.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AB,AC,BC.

$\Rightarrow \widehat{SMH} = \widehat{SNH} = \widehat{SPH} \Rightarrow \Delta SMH = \Delta SNH = \Delta SPH.$

$\Rightarrow HM = HN = NP$

$\Rightarrow H$ là tâm dường tròn nội tiếp của ΔABC.

Câu 49: Đáp án A.

Nếu $\begin{cases} a \perp b \\ b \perp c \end{cases}$ thì a và c có thể trùng nhau nên đáp án **A** sai.

Câu 50: Đáp án D.

Có $AB \perp BC \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta SAB, \Delta SAC$ là các tam giác vuông tại A.

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ là tam giác vuông tại B.

Vậy bốn mặt của tứ diện đều là tam giác vuông nên đáp án **D** đúng.

Câu 51: Đáp án D.

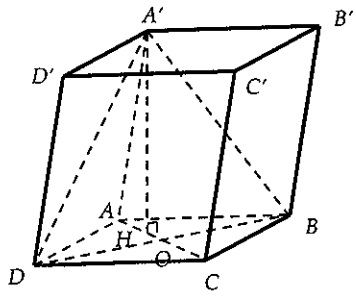
Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE.$

Vậy: $\begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp BC \end{cases} \Rightarrow AE \perp SC (1)$

Tương tự: $AF \perp SC (2)$

Từ $(1);(2) \Rightarrow SC \perp (AEF)$. Vậy đáp án **D** đúng.

Câu 52: Đáp án B.

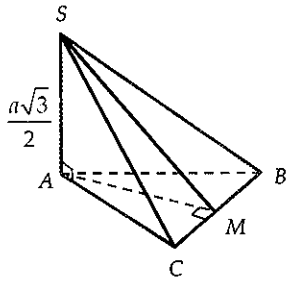


Vì $A'A = A'B = A'D \Rightarrow$ Hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD (1).

Mà tứ giác $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAD} = 60^0$ nên ΔBAD là tam giác đều (2).

Từ (1) & $(2) \Rightarrow H$ là trọng tâm ΔABD.

Câu 53: Đáp án C.



Gọi M là trung điểm của BC thì $BC \perp AM(1)$.

Hiển nhiên $AM = a\sqrt{3}$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA(2)$.

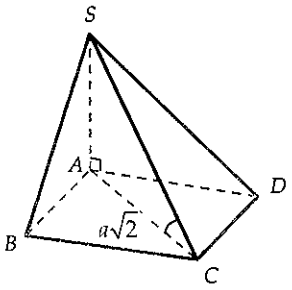
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow (P) \equiv (SAM)$

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABC$ được cắt bởi (P) chính là ΔSAM.

ΔSAM vuông tại A nên:

$$S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}SA.AM = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}.$$

Câu 54: Đáp án A.



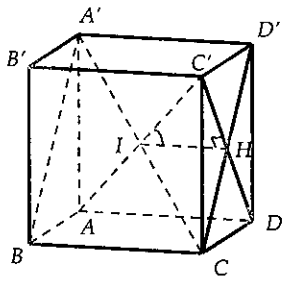
Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa SC và $(ABCD)$.

Tam giác SAC vuông tại A nên:

$$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SCA = 30^0.$$

Câu 55: Đáp án D.



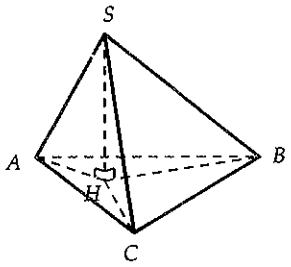
Gọi $\begin{cases} A'C \cap AC' = I \\ C'D \cap CD' = H \end{cases}$

mà $\begin{cases} C'D \perp CD' \\ C'D \perp A'D' \end{cases} \Rightarrow C'D \perp (A'BCD')$

$\Rightarrow IH$ là hình chiếu vuông góc của AC' lên $(A'BCD') \Rightarrow \widehat{C'IH}$ là góc giữa AC' và $(A'BCD')$.

Mà $\tan\widehat{C'IH} = \frac{C'H}{IH} = \frac{1}{\sqrt{2}}.2 = \sqrt{2}$.

Câu 56: Đáp án D.



$$SH \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SH \perp AH \\ SH \perp BH \\ SH \perp CH \end{cases}$$

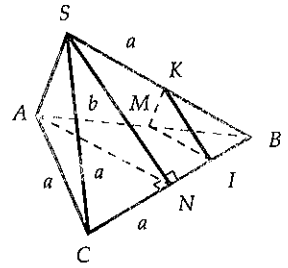
Xét ba tam giác vuông $\Delta SHA, \Delta SHB, \Delta SHC$ có

$\begin{cases} SA = SB = SC \\ SH \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$

$\Rightarrow HA = HB = HC$ mà $H \in (ABC)$

$\Rightarrow H$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Câu 57: Đáp án C.



Gọi N là trung điểm của BC.

$$\begin{cases} SB = SC \\ AB = AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp SN \\ BC \perp AN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAN).$$

Theo bài ra $BC \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} M \in (P) \\ (P)//(SAN) \end{cases}$.

Kẻ $MI // AN, MK // SA$

$\Rightarrow$ Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ là ΔKMI.

$\begin{cases}\Delta ABC\\ \Delta SBC\end{cases}$ là hai tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow AN = SN = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA \Rightarrow \Delta SAN$ là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta KMI$ là tam giác đều cạnh $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a-b}{a} \Rightarrow S_{\Delta KMI} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Câu 58: Đáp án B.

Câu A sai vì b có thể vuông góc với a.

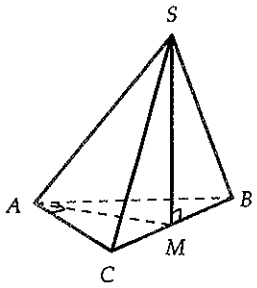
Câu B đúng bởi $a//(P) \Rightarrow \exists a' \in (P)$ sao cho $a' // a$, $b \perp (P) \Rightarrow b \perp a'$. Khi đó $a \perp b$.

Câu C sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu D sai vì b có thể nằm trong (P).

Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 59: Đáp án C.



$AM = BM = \frac{a}{2}$, $SB = a$

Có $SM \perp (ABC)$ nên AM là hình chiếu của SA lên mp(ABC).

$\Rightarrow (SA,\widehat{(ABC)}) = (\widehat{SA,AM}) = \widehat{SAM}$

Áp dụng định lý Pytago: $SM = \sqrt{SB^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SAM có

$\tan \widehat{SAM} = \frac{SM}{AM} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAM} = 60°$

Câu 60: Đáp án A.

Câu 61: Đáp án A.

Vì qua một đường thẳng dựng được vô số mặt phẳng.

Câu 62: Đáp án D.

Thiết diện là hình thang vuông đi qua trung điểm các cạnh $AB;CD;CS;SB$, nên diện tích thiết diện là:

$$S = \frac{\left(BC + \frac{1}{2}BC\right).\frac{1}{2}SA}{2} = \frac{(8+4).6}{2} = 36$$

Câu 63: Đáp án C.

Theo bài ra hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều. Gọi H là trung điểm của BC, ta có $SG \perp (ABC), G \in AH$.

Mặt khác ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

$\Rightarrow SG = SA.\sin \widehat{SAG}$

$= b.\sqrt{1 - (\frac{AG}{SA})^2} = b\sqrt{1 - \frac{\frac{a^2}{3}}{b^2}} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}$

Câu 64: Đáp án C.

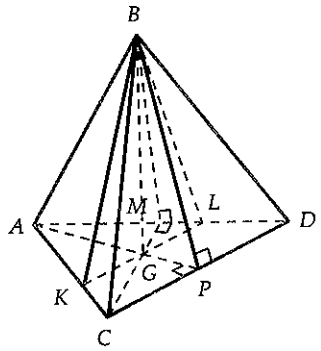
Để C_1 nằm giữa S và C thì $\widehat{ASC} < 90^0$

$\Rightarrow \cos \widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} > 0 \Leftrightarrow b\sqrt{2} > a$

Câu 65: Đáp án C.

Do hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SA = SC, SB = SD$ nên $SO \perp (ABCD)$

Câu 66: Đáp án C.



Ta có: $CD \perp AP, CD \perp BP \Rightarrow CD \perp (APB) \Rightarrow BG \perp CD$

Tương tự: $AD \perp CM, AD \perp BM$

$\Rightarrow AD \perp (BCM) \Rightarrow AD \perp BG$

Suy ra: $BG \perp (ACD) \Rightarrow BG \perp AP$

Kẻ KL đi qua trọng tâm G của ΔACD và song song với CD $\Rightarrow AP \perp KL$ $\Rightarrow (P)$ chính là mặt phẳng (BKL) $\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$.

Có thể nói nhanh theo tính chất tứ diện đều:

Gọi G là trọng tâm ΔACD thì G là tâm ΔACD và $BG \perp (ACD)$

Trong $mp(ACD)$ kẻ qua G đường thẳng song song với CD cắt AC, AD lần lượt tại K, L

Ta có $(BKL) \perp (ACD), AP \perp KL \Rightarrow AP \perp (BKL)$.

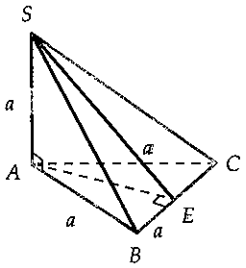
Vậy $(P) \equiv (BKL)$ $\Rightarrow (ACD) \cap (BKL) = KL = \frac{2}{3}CD = 8$.

Câu 67: Đáp án B.

Ta có: $AC_1, \widehat{(ABCD)} = \widehat{CAC_1} = \alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

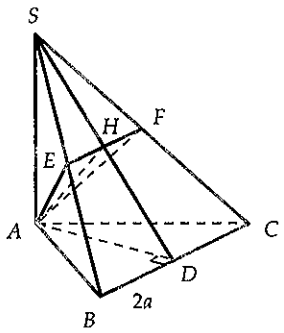
Câu 68: Đáp án A.



Kẻ $AE \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAE) \equiv (P)$

Thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp $S.ABC$ là tam giác SAE có diện tích là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 69: Đáp án C.



Gọi $H = EF \cap SD$.

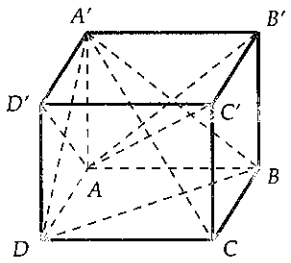
Do $AD \perp BC, SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAD)$

$\Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow EF \perp AH \Rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2}EF.AH$

Mà $EF = \frac{1}{2}BC = a$.

Do H là trung điểm $SD \Rightarrow AH = a \Rightarrow S_{\Delta AEF} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 70: Đáp án A.



Ta có:

$\begin{cases} A'D \perp AD' & (\text{t/c hv}) \\ A'D \perp C'D' & (C'D' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

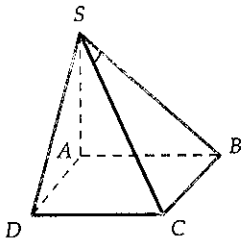
$\Rightarrow A'D \perp (AC'D') \Rightarrow A'D \perp AC' \quad (1)$

$\begin{cases} A'B \perp AB' & (\text{t/c hv}) \\ A'B \perp B'C' & (B'C' \perp (A'D'DA)) \end{cases}$

$\Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow A'B \perp AC' \quad (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$

Câu 71: Đáp án C.



Ta có:

$S \in (SAB) \Rightarrow S$ là hình chiếu của S trên (SAB) (1)

$\begin{cases} BC \perp AB & (t/c\ HV) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ B là hình chiếu của C trên (SAB) (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (\widehat{SC,(SAB)}) = (\widehat{SC,SB}) = \widehat{BSC} = \alpha$

Xét tam giác SAB vuông tại A ta có:

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Xét tam giác SBC vuông tại B ta có:

$\tan\alpha = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

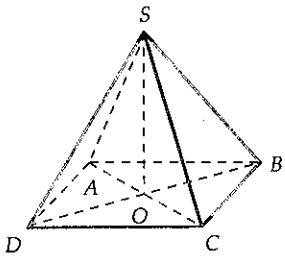
Câu 72: Đáp án C.

Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC & (gt) \\ BH \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Mà $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow (\widehat{SC,(BHK)}) = 90°$.

Câu 73: Đáp án B.



$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$

$\Rightarrow AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$

Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow OA$ là hình chiếu của SA

Vậy góc giữa SA và $(ABCD)$ chính là $\widehat{SAO} = 45^0$

Xét tam giác SAO ta có: $\tan\widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$

Câu 74: Đáp án D.

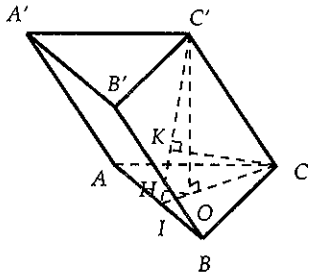
Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD & (\text{t/c hv}) \\ AB \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$

Giả sử $SB \perp SD \Rightarrow SD \perp (SAB)$ (vô lý)

Hay ΔSBD không thể là tam giác vuông.

Câu 75: Đáp án B.



Cách 1: Dựng $CK \perp IC'$ tại K, do đó $d(C;IC') = CK$.

Xét $\Delta ICC'$ ta có: $OC'.CI = CK.IC' \Rightarrow CK = \dfrac{OC'.CI}{IC'}$

Mà $OC' = OC.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$

$CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $IC'^2 = OI^2 + C'O^2 = \dfrac{a^2}{12} + a^2 = \dfrac{13a^2}{12}$

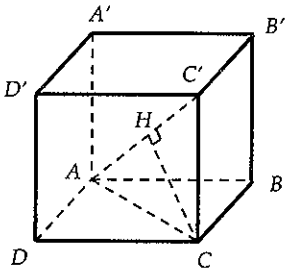
$\Rightarrow d(C;IC') = CK = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Cách 2: Dựng $OH \perp IC'$, ta có: $OI = \dfrac{1}{3}CI$

$\Rightarrow d(C;IC') = 3d(O;IC') = 3OH$

Sau đó dùng công thức $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OC'^2}$ hay $OH.IC' = OI.OC'$. Suy ra OH.

Câu 76: Đáp án C.

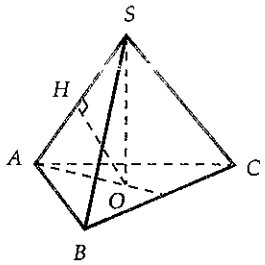


Vì $\Delta CC'A$ vuông tại C nên ta dựng $CH \perp AC'$ thì CH là khoảng cách từ C đến AC'.

$\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow CH^2 = \dfrac{2a^2}{3} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 77: Đáp án A.



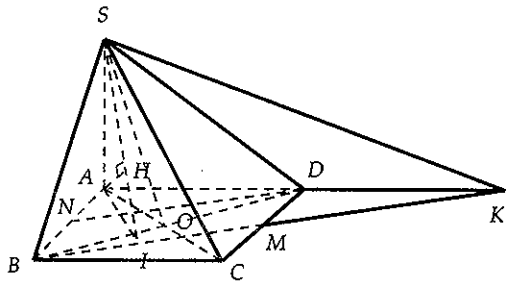
Do $SABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$

$\Rightarrow \Delta SAO$ vuông tại O, dựng $OH \perp SA$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 78: Đáp án D.



Cách 1: Gọi I là hình chiếu của A trên BM

H là hình chiếu của A trên SI

$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BM \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBM) \Rightarrow AH = d(A;(SBM))$

Gọi N là trung điểm của AB $\Rightarrow DN // BM$

$\Rightarrow d(D;(SBM)) = d(N;(SBM)) = \dfrac{1}{2}d(A;(SBM))$

Mặt khác ta có hình chiếu vuông góc của DS lên (SAC) là SO $\Rightarrow$ $\widehat{DSO} = 30°$.

Đặt $DO = x \Rightarrow SO = x\sqrt{3}$ $(O = AC \cap BD)$

Từ $SO = \sqrt{AO^2 + SA^2}$ $\Rightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow ABCD$ là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow S_{ABM} = S_{ABCD} - 2S_{BCM} = \dfrac{a^2}{2}$

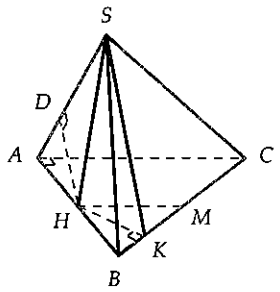
Mà $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AI.BM \Rightarrow AI = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{SA^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d(D;(SBM)) = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{9}{4a^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2a}{3} \Rightarrow d(D;(SBM)) = 2AH = \dfrac{a}{3}$.

Câu 79: Đáp án C.



Trong mặt phẳng (ABC) dựng $HK \perp BC$ tại K

$\Rightarrow BC \perp (SKH)$.

Từ giả thiết ta có $\widehat{SHK} = 30°$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4a$

Ta có: $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{HK}{HB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSHK ta có: $SH = HK.\tan \widehat{SKH} = \frac{a}{2}$

Do M là trung điểm cạnh BC nên $MH // AC$

$\Rightarrow MH // (SAC) \Rightarrow d(M;(SAC)) = d(H;(SAC))$.

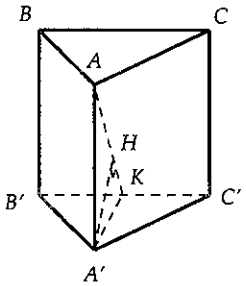
Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $DH \perp SA$ tại D ta có:

$AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp DH \Rightarrow DH \perp (SAC)$

$\Rightarrow \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(M;(SAC)) = d(H;(SAC)) = HD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 80: Đáp án A.



Theo giả thiết mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với $(A'B'C')$ góc $60°$ nên $\widehat{AKA'} = 60°$

Ta có: $A'K = \frac{1}{2}A'C' = \frac{a}{2} \Rightarrow AA' = A'K.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

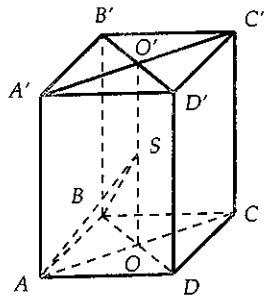
$d(B;(AB'C')) = d(A';(AB'C'))$

Dựng $A'H \perp AK \Rightarrow A'H \perp (AB'C')$

$\Rightarrow d(A';(AB'C')) = A'H$.

Tính $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{4} = d(BC;(AB'C'))$.

Câu 81: Đáp án B.



Theo giả thiết $\begin{cases} AB = AD \\ BAD = 60° \end{cases} \Rightarrow \Delta BAD$ đều cạnh a

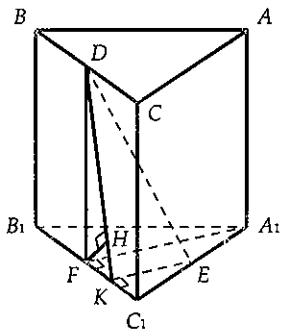
$\Rightarrow OA \perp OB$ và $OO' \perp (ABCD) \Rightarrow$ Tứ diện $OSAB$ vuông tại O có $OB = \frac{a}{2}$; $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OS = a$

$\Rightarrow \frac{1}{d^2(O;(SAB))} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OS^2}$

$= \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{19}{3a^2}$

$\Rightarrow d(O;(SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Câu 82: Đáp án C.



Gọi K là trung điểm của C_1F.

Do $\Delta A_1B_1C_1$ đều nên $A_1F \perp B_1C_1$

$\Rightarrow EK \perp B_1C_1$ và $EK // A_1F \Rightarrow A_1F // (DEK)$

Dựng $FH \perp DK \Rightarrow d(DE;A_1F) = d(A_1F;(DKE)) = FH$

(vì $FH \perp (DKE)$)

Trong tam giác vuông DFK ta có:

$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{FD^2} + \frac{1}{FK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{16}{a^2} = \frac{17}{a^2}$

$\Rightarrow FH = \frac{a}{\sqrt{17}}$.

TRA CỨU THUẬT NGỮ

A

Ảnh của một điểm 372, 375
Ảnh của một hình 333

B

Biến cố 142, 143
Biến cố độc lập 143
Biến cố đối 143
Biến cố giao 143
Biến cố xung khắc 150
Biểu thức tọa độ 330

C

Các tính chất thừa nhận 384
Cấp số cộng 159, 179
Cấp số nhân 159, 191
Chỉnh hợp 107, 108
Công bội 191
Công sai 179
Công thức nhị thức Newton 124

D

Dạng vô định 233, 240, 252, 254
Dãy số 159, 166
Dãy số bị chặn 167
Dãy số bị chặn dưới 167
Dãy số bị chặn trên 167
Dãy số có giới hạn hữu hạn 204
Dãy số có giới hạn 0 204
Dãy số có giới hạn $+\infty$ 205
Dãy số có giới hạn $-\infty$ 205
Dãy số có giới hạn vô cực 205
Dãy số giảm 166
Dãy số hữu hạn 179, 191
Dãy số hằng 166
Dãy số tăng 166
Dãy số vô hạn 166

Đ

Đạo hàm 280
Đạo hàm cấp cao 306
Đạo hàm cấp hai 306
Đạo hàm cấp n 306
Đạo hàm của hàm số hợp 289
Đạo hàm của hàm số tại một điểm 297
Định lý ba đường vuông góc 504
Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau 475
Đường hình sin 18, 19, 45
Đường tiệm cận 20, 21
Đường thẳng song song với mặt phẳng 417
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 458

G

Gia tốc tức thời 306
Giả thiết quy nạp 159
Giao của hai biến cố 143
Giao tuyến của hai mặt phẳng 385, 387
Giới hạn 204
Giới hạn vô cực 205, 206, 209, 210, 215, 216
Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm 231
Giới hạn của hàm số tại một điểm 231
Giới hạn bên phải 231
Giới hạn bên trái 231
Giới hạn một bên 231
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 467
Góc giữa hai mặt phẳng 462
Góc quay 351

H

Hàm số hợp 289
Hàm số liên tục 269
Hàm số liên tục tại một điểm 269
Hàm số liên tục trên khoảng 269
Hàm số lượng giác 15, 17
Hàm số tuần hoàn 17
Hai đường thẳng chéo nhau 417
Hai đường thẳng song song 403
Hai đường thẳng vuông góc 323, 495
Hai mặt phẳng song song 475
Hai mặt phẳng vuông góc 462
Hai mặt phẳng cắt nhau 462
Hệ thức truy hồi 166
Hoán vị 107

K

Kết quả thuận lợi 142, 143
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 474, 475
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song 475
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng 474

Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng 474
Không gian mẫu 142

M

Mặt phẳng 384

P

Phép biến hình 329
Phép chiếu song song 433
Phép chiếu vuông góc 363
Phép dời hình 363
Phép đối xứng tâm 343, 365
Phép đối xứng trục 343
Phép đồng dạng 378
Phép quay 351
Phép thử ngẫu nhiên 142
Phép tịnh tiến 329
Phép vị tự 369
Phương pháp quy nạp toán học 159, 160
Phương trình bậc nhất đối với $\sin x; \cos x$ 71
Phương trình lượng giác cơ bản 70, 94
Phương trình tiếp tuyến 321

Q

Quy tắc ba điểm 446
Quy tắc cộng 107
Quy tắc cộng xác suất 143
Quy tắc đếm 107
Quy tắc hình bình hành 446
Quy tắc hình hộp 446
Quy tắc nhân 107
Quy tắc nhân xác suất 143

S

Số hạng tổng quát của dãy số 166, 168

T

Tam giác Pascal 124
Tâm đối xứng 18, 344
Tâm quay 351
Tâm vị tự 369
Tâm vị tự của hai đường tròn 370
Tâm vị tự ngoài 370
Tâm vị tự trong 370
Thiết diện 387
Tiếp điểm 321
Tiếp tuyến 321
Tổ hợp 107

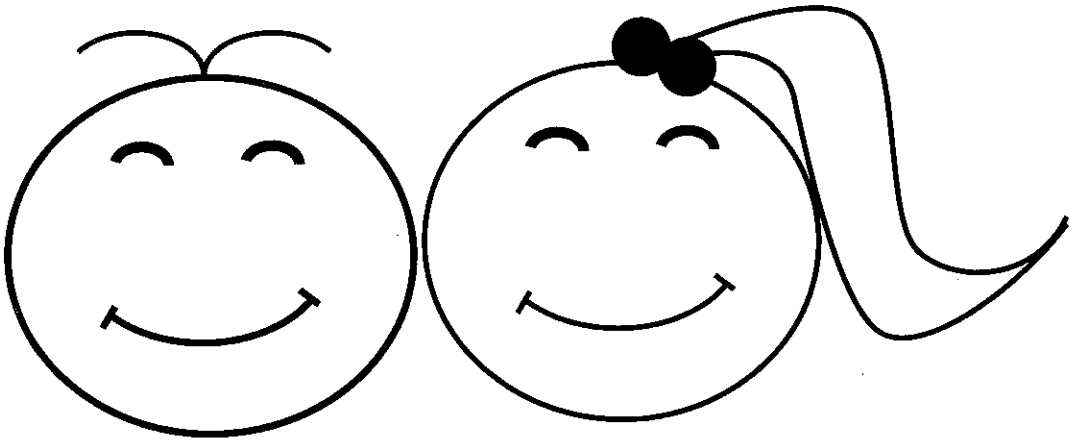
V

Vectơ tịnh tiến 329
Vectơ trong không gian 446
Vi phân 306
Vận tốc tức thời 306

X

Xác suất 142
Xác suất của biến cố 142

GIA ĐÌNH LOVEBOOK ☺

Cuối cùng, toàn thể anh chị em ĐẠI GIA ĐÌNH LOVEBOOK muốn gửi riêng tới các em học sinh:

Nhất định các em sẽ làm được
Đừng bao giờ nản chí các em nhé!