ĐOÀN QUỲNH (Chủ biên) - PHẠM KHẮC BAN
VĂN NHƯ CƯƠNG - NGUYỄN ĐĂNG PHẤT - LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN
HÌNH HỌC
11

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LƯU Ý MỘT SỐ KÍ HIỆU ĐƯỢC DÙNG TRONG SÁCH

Kí hiệu	Ý nghĩa
$[\vec{a},\vec{b}]$	Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$
$(\vec{a},\vec{b})$	Góc định hướng (số đo góc định hướng) giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$
$\mathrm{ch}_{\Delta}(\vec{a})$	Chiếu vectơ $\vec{a}$ trên trục Δ
$\det A$	Định thức của ma trận A
$d(M; (\alpha))$, $d(M; \Delta)$	Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α), đến đường thẳng Δ
$d((P), (Q))$, $d(\Delta, \Delta')$	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), giữa hai đường thẳng Δ và Δ'
$\overline{(d,d')}$	Số đo góc định hướng giữa hai đường thẳng d và d'
$D(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$	Tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$
$\mathcal{D}$, $[\mathcal{D}]$, $\{\mathcal{D}\}$	Phép dời hình (đẳng cự), nhóm, tập hợp các phép dời hình
$Đ(\Delta)$, $Đ_{\Delta}$, $Đ(O)$, $Đ_{O}$	Phép đối xứng qua đường thẳng Δ, Phép đối xứng tâm O
(Ou, Ov)	Góc định hướng (số đo góc định hướng) giữa hai tia Ou và Ov

Kí hiệu	Ý nghĩa
$[P, a, Q]$, $[P, Q]$	Nhị diện cạnh a tạo bởi hai nửa mặt phẳng (P), (Q)
$Q(O,\varphi)$; $Q_{(O,\varphi)}$	Phép quay tâm O góc quay φ
$\bar{s}(ABC)$, $\overline{ABC}$	Diện tích đại số của tam giác định hướng ABC
$T(\vec{v})$, $T_{\vec{v}}$; $[\mathcal{T}]$	Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$; Nhóm các phép tịnh tiến
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	Tích lệch của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$
$V(O,k)$, $V_{(O,k)}$	Phép vị tự tâm O, tỉ số k
$(x_1; x_2; x_3; x_4)$	Toạ độ tỉ cự đối với tứ diện
Z; $Z(k)$, Z_k; $[Z]$, $\{Z\}$	Phép đồng dạng; phép đồng dạng tỉ số k; nhóm, tập hợp các phép đồng dạng
$Z(O, \varphi, k)$; $Z(O, \Delta, k)$	Phép vị tự-quay; Phép vị tự-đối xứng
$\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\nparallel$	Cùng hướng, ngược hướng, không song song
$\perp$	Vuông góc (giữa hai đường thẳng, hai mặt phẳng, đường thẳng và mặt phẳng, ...)

LỜI NÓI ĐẦU

Bộ *Tài liệu chuyên Toán 11* này là tiếp nối bộ *Tài liệu (giáo khoa) chuyên Toán 10* đã được xuất bản năm 2009. Nó nhằm :

- Phục vụ việc dạy và học lớp 11 hệ chuyên Toán, thể hiện tinh thần chương trình chuyên Toán đã được Hội đồng chương trình Bộ duyệt, khá gần với chương trình và sách giáo khoa (SGK) Toán nâng cao nhằm giúp học sinh có thể chuyển đổi từ việc học ở hệ chuyên sang hệ không chuyên và ngược lại.

- Làm một tài liệu giảng dạy cho giáo viên dạy các lớp chuyên Toán. Giúp học sinh các lớp chuyên tự học, giúp học sinh khá giỏi ở các lớp đại trà có tài liệu để có thể tự học, tự bồi dưỡng thêm.

Bộ sách *Tài liệu chuyên Toán lớp 11* bao gồm 4 cuốn :

- Tài liệu chuyên Toán – Đại số và Giải tích 11
- Tài liệu chuyên Toán – Hình học 11
- Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Đại số và Giải tích 11
- Tài liệu chuyên Toán – Bài tập Hình học 11.

Chúng tôi đã mời được nhiều thầy dạy ở các trường chuyên, lớp chuyên (dạy các lớp bồi dưỡng thi toán quốc tế cũng như trong nước, dạy các khối chuyên ở các trường đại học,...) tham gia biên soạn để tài liệu sát với thực tiễn giảng dạy hệ chuyên ở nước ta, đồng thời giới thiệu được phần nào đôi nét giảng dạy ở hệ chuyên Toán của các trường đó.

Cuốn sách *Tài liệu chuyên Toán – Hình học 11* này gồm 3 chương và 2 chuyên đề. Các tác giả viết cuốn Tài liệu chuyên Toán Hình học 11 này là :

- Thầy ***Nguyễn Đăng Phất*** (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội) viết chương I (Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng) và Chuyên đề I (Bổ sung về phép dời hình và phép đồng dạng).

- Thầy ***Lê Bá Khánh Trình*** (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên thành phố Hồ Chí Minh) viết chương II (Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song).

- Thầy ***Phạm Khắc Ban*** (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội) viết chương III (Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian).

- Thầy ***Văn Như Cương*** (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội) viết chuyên đề II (Hình tứ diện và khối tứ diện).

Trong từng chương có nhiều ví dụ, nhiều bài tập, bài toán (kể cả bài thi của hệ chuyên, thi học sinh giỏi Toán quốc gia, quốc tế...). Các bài tập đều có lời giải hoặc hướng dẫn giải đầy đủ trong cuốn *Tài liệu chuyên Toán - Bài tập Hình học 11*.

Các tác giả cùng chủ biên và biên tập viên đã rất cố gắng phối hợp biên soạn và biên tập bộ tài liệu chuyên Toán này. Tuy nhiên, chúng tôi chắc hẳn bộ sách vẫn có thể còn có thiếu sót, chúng tôi mong độc giả lượng thứ và hi vọng các thầy cô và các em học sinh trong quá trình dạy, học, đọc tài liệu này đóng góp ý kiến cho chúng tôi để lần tái bản sau, sách phục vụ được tốt hơn. Các góp ý xin gửi về :

Ban Toán, Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội-

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B, Giảng Võ, Hà Nội.

Chúng tôi rất cám ơn các tác giả đã nhiệt tình tham gia biên soạn tài liệu trong khi bề bộn bao công việc khác. Chúng tôi cũng rất cám ơn biên tập viên *Hoàng Việt*, người đã giúp các tác giả và chủ biên sửa chữa các sai sót, sắp xếp phối hợp các phần của các tác giả khác nhau, khắc phục các khó khăn để bộ sách được xuất bản đúng thời hạn, kịp thời phục vụ bạn đọc. Mong muốn duy nhất của chúng ta là bộ sách này thực sự bổ ích cho các học sinh ham thích và học giỏi môn Toán, đặc biệt giúp học sinh chuyên toán có tài liệu học riêng cho hệ chuyên của mình.

Chủ biên

Đoàn Quỳnh

Chương I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP DỜI HÌNH PHẲNG

1. Đại cương về các phép dời hình phẳng

a) *Định nghĩa phép dời hình*

Một phép biến hình f: $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ được gọi là một ***phép dời hình*** của mặt phẳng, kí hiệu là $\mathscr{D}$, nếu với hai điểm bất kì M, N nào của $\mathscr{P}$ và các ảnh $M' = f(M)$, $N' = f(N)$ của chúng, ta đều có $M'N' = MN$.

Nói một cách ngắn gọn, phép dời hình của mặt phẳng, hay gọi vắn tắt là ***phép dời hình phẳng***, là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nào của mặt phẳng. Vậy là, nếu kí hiệu tập các phép dời hình của mặt phẳng là $\{\mathscr{D}\}$ thì: $f \in \{\mathscr{D}\}$ của $\mathscr{P} \Leftrightarrow f(M)f(N) = MN$ ($\forall\, M, N \in \mathscr{P}$).

Chú thích: Chính vì phép dời hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nào nên người ta còn gọi nó là ***phép biến hình đẳng cự***, hay vắn tắt là ***phép đẳng cự***.

b) *Hệ quả*

Từ định nghĩa của phép dời hình ta suy ra:

- Phép biến hình đồng nhất Id là một phép dời hình.

- Phép biến hình đảo ngược của một phép dời hình cũng là một phép dời hình.

- Hợp thành (cũng tức là tích) của hai, hay n ($n > 2$) phép dời hình là một phép dời hình.

- Phép đối xứng - trục, phép đối xứng - tâm, phép tịnh tiến, phép quay (xung quanh một điểm) là những phép dời hình phẳng.

c) *Các tính chất của phép dời hình*

ĐỊNH LÍ 1. *Phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa ba điểm đó.*

Cụ thể là: Phép dời hình biến ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó B ở giữa A và C thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó.

Chứng minh xem là bài tập (tự chứng minh).

HỆ QUẢ 1. Phép dời hình biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.

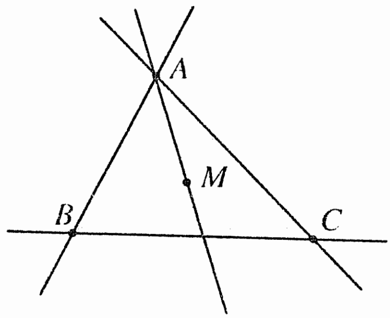
HỆ QUẢ 2. Phép dời hình biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, biến một góc thành một góc bằng nó, biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó, trong đó tâm biến thành tâm.

ĐỊNH LÍ 2. *Một phép dời hình phẳng có ba điểm bất động không thẳng hàng là phép biến hình đồng nhất.*

Chứng minh. Giả sử $f: \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ là một phép dời hình phẳng có ba điểm bất động không thẳng hàng (h.1.1):

$$A = A' = f(A),\ B = B' = f(B),\ C = C' = f(C).$$

Thế thì theo tính chất của phép dời hình, bất kì một điểm nào trên các đường thẳng (BC), (CA) hoặc (AB) đều là điểm bất động (hãy chứng minh điều đó).



Hình 1.1

Từ đó dễ dàng suy ra mọi điểm M của mặt phẳng (ABC) đều là điểm bất động, và do đó $f = Id$.

HỆ QUẢ 3. Một phép dời hình phẳng $f \neq Id$ thì hoặc không có điểm bất động nào, hoặc có một điểm bất động duy nhất, hoặc có một đường thẳng mà mọi điểm của nó đều là điểm bất động (tức là có một đường thẳng cố định).

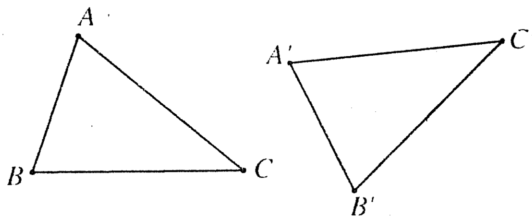
d) *Khái niệm về hai hình bằng nhau*

Như chúng ta đã thấy (Hệ quả 2), phép dời hình biến một tam giác ABC thành một tam giác khác $A'B'C'$ bằng nó (h.1.2), trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau:

$$B'C' = BC,\ C'A' = CA,\ A'B' = AB;\ \widehat{A'} = \widehat{A},\ \widehat{B'} = \widehat{B},\ \widehat{C'} = \widehat{C}$$

Một cách tổng quát, giả sử một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến một hình (phẳng) $\mathcal{H}$ thành một hình $\mathcal{H}'$, kí hiệu $\mathcal{H}' = \mathcal{D}(\mathcal{H})$.

Ta có định nghĩa sau:



Hình 1.2

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ được gọi là bằng nhau, nếu có một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$ (và do đó, phép dời hình $\mathcal{D}^{-1}$, đảo ngược của phép dời hình $\mathcal{D}$ biến $\mathcal{H}'$ thành $\mathcal{H}$), kí hiệu như thông thường: $\mathcal{H}' \underset{\text{dh}}{=} \mathcal{H}$.

2. Sự xác định một phép dời hình phẳng

- Khi chúng ta nói cho một phép dời hình $\mathcal{D}$ mà tổng quát hơn là cho một phép biến hình f của $\mathcal{P}$ (mặt phẳng), tức là chỉ ra đầy đủ các yếu tố để xác định hoàn toàn phép dời hình (hay phép biến hình) đó của $\mathcal{P}$. Điều đó có nghĩa là: Với một điểm M bất kì của $\mathcal{P}$, ta phải chỉ ra cách (quy tắc) dựng, cũng là cách xác định được điểm tương ứng (ảnh) M' của nó qua phép dời hình (hay phép biến hình) này.
- Về phép dời hình, ta đã biết rằng một phép dời hình biến một tam giác ABC thành một tam giác $A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau.

Mệnh đề sau đây khẳng định điều ngược lại.

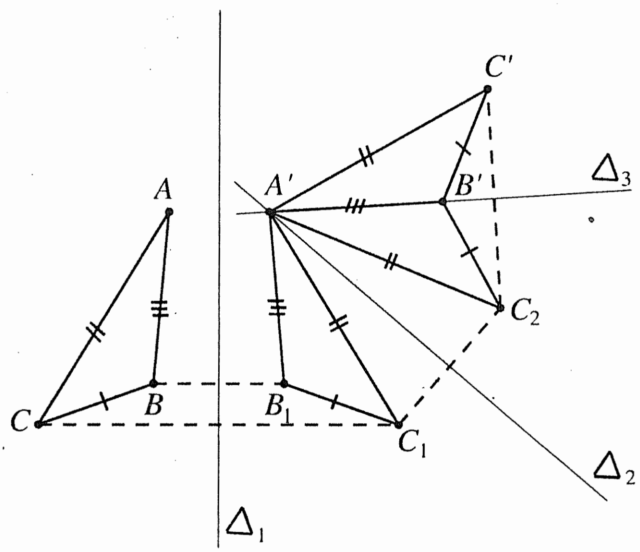
a) Định lí 3 (về sự xác định một phép dời hình phẳng)

ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'B' = AB$). Bao giờ cũng có một và chỉ một phép dời hình $\mathcal{D}: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B' và C thành C'. Đồng thời, phép dời hình $\mathcal{D}$ này có thể phân tích thành tích của không quá ba phép đối xứng - trục.

Chứng minh. Trước hết, để trình bày được gọn gàng ta quy ước kí hiệu như sau: $t[MN]$ là trung trực của đoạn thẳng MN, $Đ_{\Delta_i}$ hoặc $Đ(\Delta_i)$ chỉ phép đối xứng - trục có trục là Δ_i, trong đó i là chỉ số 1, 2, 3.

i) *Tồn tại*. Nếu A và A' là hai điểm phân biệt, ta gọi

$\Delta_1 = t[AA']$. Qua phép $Đ(\Delta_1)$ tam giác ABC biến thành tam giác $A'B_1C_1$ bằng nó nên $\Delta A'B_1C_1 = \Delta A'B'C'$, do đó $A'B_1 = A'B'$ (h.1.3).



Hình 1.3

Nếu $B_1 \neq B'$, ta gọi $\Delta_2 = t[B_1B']$ thì theo chứng minh trên, $A' \in \Delta_2$. Bởi vậy, qua phép $Đ(\Delta_2)$ tam giác $A'B_1C_1$ biến thành tam giác $A'B'C_2$ bằng nó, nên $\Delta A'B'C_2 = \Delta\, A'B'C'$ và do đó: $A'C_2 = A'C'$, $B'C_2 = B'C'$. Đến đây, nếu $C_2 \neq C'$, ta gọi $\Delta_3 = t[C_2C']$ thì A' và B' đều thuộc Δ_3. Và cuối cùng, phép đối xứng - trục $Đ(\Delta_3)$ biến tam giác $A'B'C_2$ thành tam giác $A'B'C'$. Như vậy, thực hiện liên tiếp ba phép đối xứng - trục $Đ(\Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$ thì tích $f = Đ(\Delta_3) \circ Đ(\Delta_2) \circ Đ(\Delta_1)$ là một phép dời hình $\mathcal{D}$, biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, trong đó $A' = \mathcal{D}(A)$, $B' = \mathcal{D}(B)$ và $C' = \mathcal{D}(C)$.

Nhận xét. Trong quá trình chứng minh, chúng ta đã ba lần sử dụng đến từ "nếu" (cũng có nghĩa là "giả sử rằng") và mỗi lần như thế đều xuất hiện một phép đối xứng - trục $Đ(\Delta_i)$ theo thứ tự $i = 1, 2, 3$.

Với nhận xét này, ta thấy rằng nếu $A' = A$ thì không phải thực hiện $Đ(\Delta_1)$. Cũng vậy, nếu $B_1 = B'$ thì không phải sử dụng đến $Đ(\Delta_2)$ và nếu $C_2 = C'$ thì cũng không phải sử dụng đến $Đ(\Delta_3)$.

Nói tóm lại, mỗi lần có một cặp điểm trong ba cặp điểm chỉ ra ở trên mà trùng nhau thì số phép đối xứng - trục cần phải thực hiện giảm đi một.

ii) *Duy nhất*. Giả sử rằng có hai phép dời hình $\mathcal{D}_1: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ và $\mathcal{D}_2: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ cùng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Thế thì phép biến hình (là hợp thành của hai phép dời hình) tích $\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1$ cũng là một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến A thành A, B thành B và C thành C. Như vậy là phép dời hình $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1$ có ba điểm bất động không thẳng hàng là A, B và C. Theo định lí 2, phép dời hình $\mathcal{D}$ này phải là phép đồng nhất ($\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1 = Id$) và do đó:

$$\mathcal{D}_2 \circ (\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2 \circ Id = \mathcal{D}_2. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta lại có (theo tính chất kết hợp của tích các phép biến hình):

$$\mathcal{D}_2 \circ (\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1) = (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_2^{-1}) \circ \mathcal{D}_1 = Id \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1. \qquad (2)$$

Đối chiếu (1) và (2), ta suy ra: $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$.

Và định lí 3 đã được chứng minh xong.

b) *Hệ quả 1*

Tích của n ($1 \le n$ là một số nguyên dương bất kì) phép đối xứng - trục trong mặt phẳng bao giờ cũng phân tích được thành tích của không quá ba phép đối xứng - trục.

Thật vậy, vì phép đối xứng - trục là một phép dời hình nên tích của một số n tuỳ ý những phép đối xứng - trục cũng là một phép dời hình $\mathcal{D}$ nào đó. Bởi vậy, theo định lí 3 ta có điều phải chứng minh (đpcm).

c) *Hệ quả 2*

Mỗi phép dời hình phẳng $\mathcal{D}$ nếu không phải là phép đồng nhất thì, hoặc là một phép đối xứng - trục, hoặc là (cũng tức tương đương với) tích của hai phép đối xứng - trục, hoặc là (tương đương với) tích của ba phép đối xứng - trục.

3. Quan hệ giữa các phép tịnh tiến và các phép quay với các phép đối xứng - trục (trong mặt phẳng)

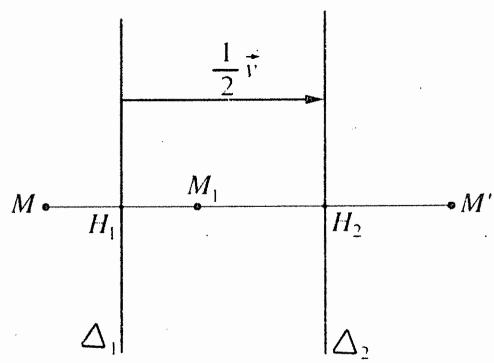
a) *Phần tử sinh của tập hợp {$\mathcal{D}$} các phép dời hình phẳng*

Chúng ta đã biết phép đối xứng - trục, phép tịnh tiến và phép quay xung quanh một điểm (bao gồm trong đó cả phép đối xứng - tâm) đều là những phép dời hình. Nhưng định lí 3 (hệ quả 2) ở trên lại cho biết bất kì một phép dời hình phẳng $\mathcal{D}$ nào, khác Id - đều hoặc bản thân là một phép đối xứng - trục, hoặc tương đương với tích của hai hay ba phép đối xứng - trục. Vì thế, chúng ta cần phải làm rõ mối quan hệ giữa hai loại tích các phép đối xứng - trục này với các phép tịnh tiến và các phép quay. Ngoài ra, định lí 3 và các hệ quả 1 và 2 của nó còn có ý nghĩa hết sức đặc biệt và quan trọng ở chỗ chỉ ra rằng: Các phép đối xứng - trục đóng vai trò nền tảng trong việc tạo thành tất cả các phép dời hình phẳng. Cũng chính vì vậy, người ta còn nói: Phép đối xứng - trục phẳng là phần tử sinh của tập hợp {$\mathcal{D}$} các phép dời hình phẳng.

b) *Mối quan hệ giữa phép tịnh tiến phẳng và các phép đối xứng - trục trong mặt phẳng*

Tính chất sau đây của phép tịnh tiến phẳng làm rõ mối quan hệ của phép tịnh tiến phẳng và các phép đối xứng - trục phẳng.

ĐỊNH LÍ 4. *Tích của hai phép đối xứng - trục (trong mặt phẳng) có trục song song là một phép tịnh tiến phẳng theo vectơ vuông góc với hai trục và gấp đôi vectơ của phép tịnh tiến biến trục thứ nhất Δ_1 thành trục thứ hai Δ_2 (h.1.4).*



Hình 1.4

ĐỊNH LÍ 4'. (Định lí đảo của định lí 4).

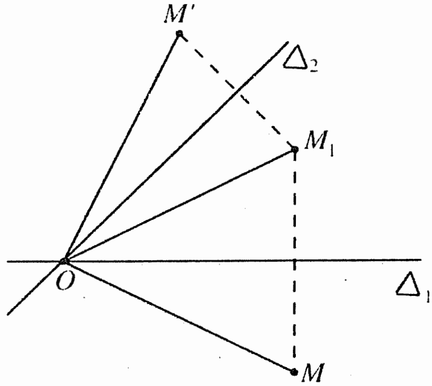
Đảo lại, mọi phép tịnh tiến phẳng theo một vectơ $\vec{v}$ ($\neq \vec{0}$) đều có thể phân tích được bằng vô số cách thành tích của hai phép đối xứng - trục có trục song song và vuông góc với vectơ tịnh tiến $\vec{v}$, trong đó trục thứ hai Δ_2 được suy ra từ trục thứ nhất Δ_1 bởi phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$.

Chứng minh cả hai định lí 4 và 4' xem là bài tập (dành cho bạn đọc).

c) Mối quan hệ giữa phép quay xung quanh một điểm (trong đó có phép đối xứng - tâm) và các phép đối xứng - trục

Ta có định lí sau:

ĐỊNH LÍ 5. *Tích của hai phép đối xứng - trục trong mặt phẳng qua hai trục cắt nhau ở điểm O là phép quay xung quanh tâm O mà góc quay φ gấp đôi góc quay θ của phép quay tâm O biến trục thứ nhất Δ_1 thành trục thứ hai Δ_2 (h.1.5).*



Hình 1.5

$Đ(\Delta_2) \circ Đ(\Delta_1) = Q(O, \varphi)$, trong đó

$\varphi = 2\theta\ [mod\ 2\pi]$

$\{O\} = \Delta_1 \cap \Delta_2$, $\theta = (\Delta_1, \Delta_2)\ [mod\ \pi]$.

$Q(O, \varphi)$ còn được kí hiệu $Q_{(O,\ \varphi)}$ (xem Tài liệu chuyên toán Hình học 10).

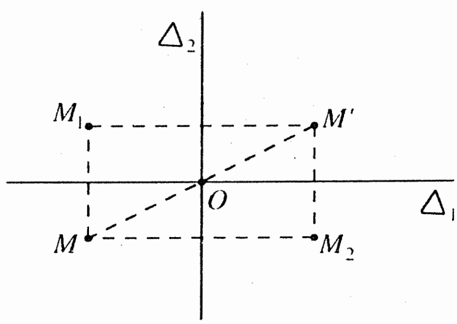
ĐỊNH LÍ 5'. (Định lí đảo của định lí 5).

Đảo lại, mọi phép quay phẳng $Q(O, \varphi)$ đều có thể phân tích được bằng vô số cách thành tích của hai phép đối xứng - trục qua hai đường thẳng cắt nhau ở tâm quay O, miễn là trục đối xứng thứ hai Δ_2 được suy ra từ trục thứ nhất Δ_1 bởi phép quay tâm O góc $\theta = \dfrac{\varphi}{2}$ bằng nửa góc quay φ của phép quay được xét.

d) Mối quan hệ giữa phép đối xứng - tâm (phép quay đặc biệt góc π) và các phép đối xứng - trục trong mặt phẳng

Ta có định lí sau:

ĐỊNH LÍ 6. *Tích của hai phép đối xứng - trục trong mặt phẳng qua hai đường thẳng vuông góc là một phép đối xứng - tâm mà tâm đối xứng O là giao điểm của hai đường thẳng đó. Hơn nữa, tích này giao hoán được (h.1.6).*



Hình 1.6

Đảo lại, mọi phép đối xứng - tâm trong mặt phẳng đều có thể xem là tích của hai phép đối xứng - trục qua hai đường thẳng vuông góc với nhau ở tâm đối xứng. $\Delta_1 \neq \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{O\}$;

$$Đ(\Delta_2) \circ Đ(\Delta_1) = Đ(\Delta_1) \circ Đ(\Delta_2) = Đ(O) \Leftrightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 = O.$$

Chứng minh các định lí 5, 5′ và 6 được xem là bài tập, dành cho bạn đọc.

$Đ(O)$ còn được kí hiệu $Đ_O$ (xem Tài liệu chuyên toán Hình học 10).

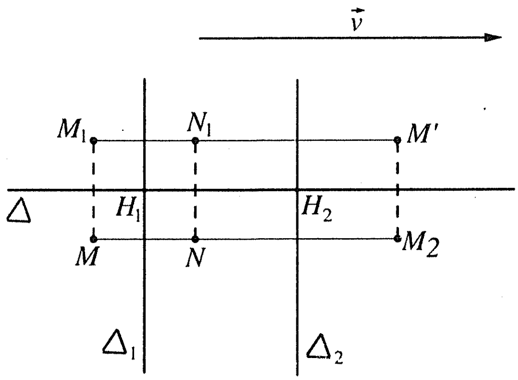
e) Tổng hợp cả ba định lí 4, 5 và 6

Khi xét phép dời hình $\mathcal{D} \neq Id$ là tích của hai phép đối xứng - trục trong mặt phẳng, ta đi đến kết luận, phát biểu trong định lí sau:

ĐỊNH LÍ 7. *Mọi phép dời hình (khác Id) mà tương đương với tích của hai phép đối xứng - trục thì, hoặc là một phép tịnh tiến, hoặc là một phép quay xung quanh một điểm hay đặc biệt là một phép đối xứng - tâm tuỳ theo hai trục đối xứng song song với nhau hoặc cắt nhau, hay đặc biệt cắt nhau theo một góc vuông.*

f) Trường hợp phép dời hình là tích của ba phép đối xứng - trục

Trước hết, ta đề cập đến trường hợp đặc biệt ở đó hai trục đối xứng song song và trục thứ ba vuông góc với hai trục song song đó. Như vậy, trong trường hợp này phép dời hình là tích của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng - trục có trục cùng phương với vectơ tịnh tiến theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại (h.1.7). Dễ thấy rằng tích này giao hoán được. Ta có định nghĩa sau đây:



Hình 1.7

ĐỊNH NGHĨA (phép đối xứng - trượt). Tích giao hoán của một phép đối xứng - trục $Đ(\Delta)$ và một phép tịnh tiến $T(\vec{v})$ theo phương của trục đối xứng Δ được gọi là một phép đối xứng - trượt của mặt phẳng, và Δ được gọi là trục đối xứng - trượt. Kí hiệu: $Đ(\Delta, \vec{v})$;

$$Đ(\Delta, \vec{v}) = T(\vec{v}) \circ Đ(\Delta) = Đ(\Delta) \circ T(\vec{v}).$$

Trường hợp ba trục đối xứng song song với nhau, hoặc đồng quy ở một điểm, ta có kết quả sau:

ĐỊNH LÍ 8. *Tích của ba phép đối xứng - trục có các trục song song với nhau hoặc đồng quy ở một điểm là một phép đối xứng - trục (có trục song song với ba trục đầu, hoặc đi qua điểm chung của ba trục đó).*

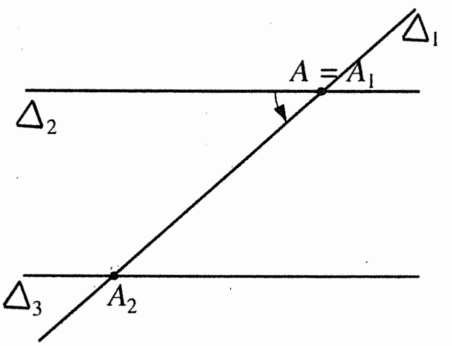
Hãy chứng minh điều đó, xem là bài tập bắt buộc (Bài tập 9, §1).

Tóm lại, ngoài hai trường hợp phép dời hình $\mathcal{D}$ là phép đối xứng - trục hay phép đối xứng - trượt vừa nói ở trên, chúng ta chỉ còn phải xét trường hợp tổng quát, ở đó ba trục đối xứng không song song với nhau, cũng không đồng quy, tức là:

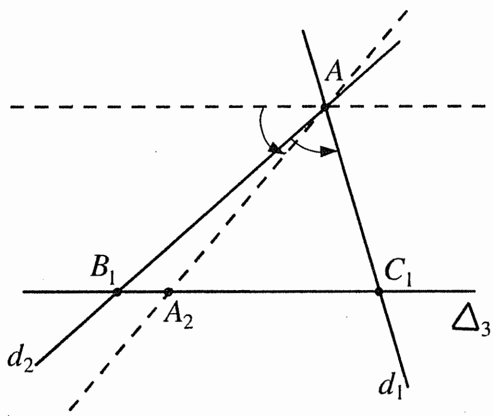
α) Hoặc đôi một cắt nhau tạo thành một tam giác;

β) Hoặc một trục nào đó cắt hai trục còn lại song song.

Tuy nhiên, chỉ việc sử dụng các định lí 5 và 5′, chúng ta dễ dàng đưa được trường hợp β) về trường hợp α), hoặc ngược lại (xem các hình 1.8a, 1.8b).



Hình 1.8a



Hình 1.8b

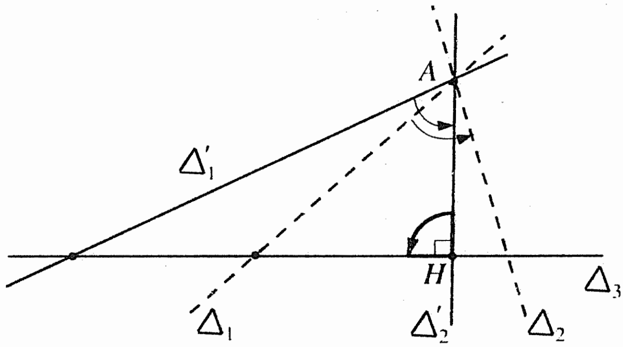
Đặc biệt, có thể đưa cả hai trường hợp này, chẳng hạn đưa trường hợp α) về trường hợp hai trục liên tiếp (các trục của hai phép đối xứng liền kề) song song và vuông góc với trục thứ ba.

Thật vậy, xét phép dời hình

$$\mathcal{D} = Đ(\Delta_3) \circ Đ(\Delta_2) \circ Đ(\Delta_1),$$

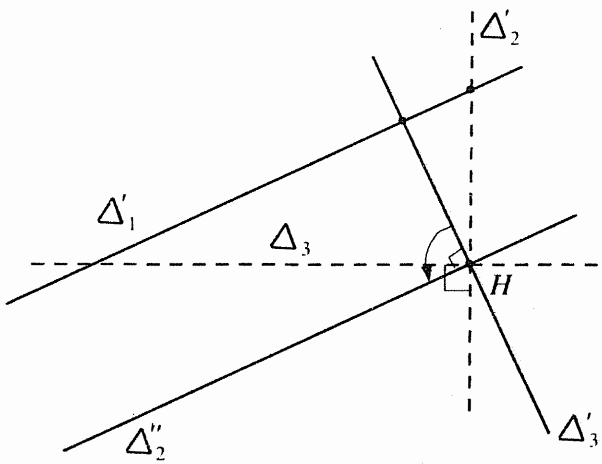
trong đó Δ_1 cắt Δ_2 tại A.

Theo định lí 5 và 5′, ta có thể thay cặp trục Δ_1, Δ_2 bằng cặp trục Δ'_1, Δ'_2 cùng đi qua A mà Δ'_2 vuông góc với Δ_3 tại H (h.1.8c).



Hình 1.8c

Sau đó thay cặp Δ'_2, Δ_3 bằng cặp trục Δ''_2, Δ'_3 cùng đi qua H sao cho Δ''_2 cùng phương Δ'_1 (h.1.8d).



Hình 1.8d

Khi đó tích $\mathcal{T}$ đã được phân tích thành

$$\mathcal{T} = Đ(\Delta'_3) \circ Đ(\Delta''_2) \circ Đ(\Delta'_1)$$

mà Δ'_1, Δ''_2 cùng phương và cùng vuông góc với Δ'_3.

Đó là trường hợp của phép đối xứng - trượt, ở đó hai trục đối xứng song song còn trục thứ ba thì vuông góc với hai trục này, nghĩa là đã quy được về hình 1.7 ở trên.

4. Vận dụng các phép dời hình phẳng vào việc giải một số bài toán hình học

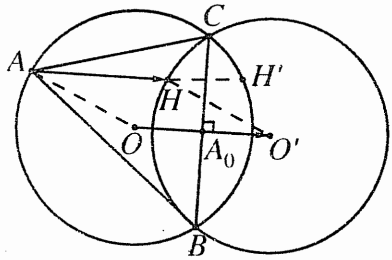
Ví dụ 1. Chứng minh tính chất sau đây của trực tâm tam giác:

Trong mọi tam giác, khoảng cách từ mỗi đỉnh đến trực tâm gấp đôi khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh đối diện.

Giải. (h.1.9) Ta cần chứng minh

$d(A, H) = 2d(O, BC)$ hay $AH = 2OA_0$,

trong đó d là kí hiệu khoảng cách và A_0 là trung điểm cạnh BC. Nhưng cả hai đoạn thẳng AH và OA_0 đều vuông góc với BC, hơn nữa lại cùng hướng. Bởi vậy, ta nghĩ đến sử dụng vectơ và bài toán trở thành chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OO'}$, trong đó O' đối xứng với O qua (BC): $O' = Đ_{BC}(O)$. Từ đó suy ra: $AH = 2OA_0$.



Hình 1.9

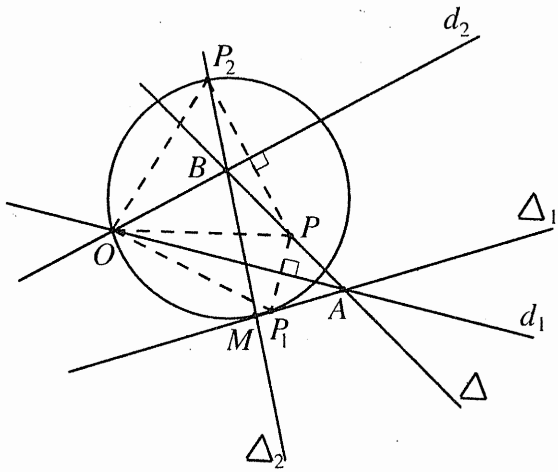
Thật vậy, vì điểm H' đối xứng với trực tâm H của ΔABC qua cạnh BC thuộc vào đường tròn ngoại tiếp tam giác đó (h.1.9), nên các đường tròn (ABC) tâm O và (HBC) tâm O' đối xứng nhau qua BC thì bằng nhau (có cùng bán kính). Và do đó, chúng lại còn tương ứng với nhau trong phép tịnh tiến $T(\vec{v})$ theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OA_0}$. Vì $T(\overrightarrow{OO'})$ biến A thành H nên ta có

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA_0}.$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau ở O và một điểm P cố định nằm ngoài d_1, d_2. Δ là một đường thẳng quay xung quanh P. Gọi M là điểm chung của các đường thẳng Δ_1, Δ_2 đối xứng với Δ lần lượt qua d_1 và d_2. Tìm quỹ tích của M.

Nhận xét. Chúng ta nhận thấy các yếu tố đối xứng - trục đã xuất hiện ngay trong dữ kiện của bài toán. Vì vậy, bài toán này đòi hỏi phải sử dụng tính chất của phép đối xứng - trục và góc định hướng của hai đường thẳng (mod π)(1) vào việc tìm quỹ tích.

(1) Khái niệm này được đề cập ở trong Chuyên đề 1 "Bổ sung về phép dời hình và phép đồng dạng"



Hình 1.10

Giải. Gọi P_i là điểm đối xứng với P qua d_i, $i = 1, 2$ (h.1.10). Vì $P \in \Delta$ nên suy ra $P_i \in \Delta_i = Đ_{d_i}(\Delta)$. Từ đó ta được:

$$\overline{(\Delta_1, \Delta)} = 2\overline{(\Delta_1, d_1)} = 2\overline{(d_1, \Delta)} \text{ [mod } \pi]; \quad (1)$$

$$\overline{(\Delta, \Delta_2)} = 2\overline{(d_2, \Delta_2)} = 2\overline{(\Delta, d_2)} \text{ [mod } \pi]; \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overline{(\Delta_1, \Delta_2)} = 2\overline{(d_1, d_2)} = 2\delta = \theta \text{ [mod } \pi]; \quad (3)$$

trong đó $\overline{(d_1, d_2)} = \delta$ [mod π].

Vì $\Delta_1 \cap \Delta_2 = M$ và $P_i \in \Delta_i$, ($i = 1, 2$) nên (3) được viết lại như sau:

$$\overline{(MP_1, MP_2)} = 2\overline{(d_1, d_2)} \text{ [mod } \pi] \quad (3')$$

Mặt khác, vì $P_i = Đ_{d_i}(\Delta)$, ($i = 1, 2$) và $O = d_1 \cap d_2$ nên ta có các đẳng thức:

$$\overline{(OP_1, OP)} = 2\overline{(OP_1, d_1)} = 2\overline{(d_1, OP)} \text{ [mod } \pi] \quad (4)$$

$$\overline{(OP, OP_2)} = 2\overline{(d_2, OP_2)} = 2\overline{(OP, d_2)} \text{ [mod } \pi] \quad (5)$$

Từ (4) và (5), nhờ hệ thức Chasles ta được:

$$\overline{(OP_1, OP_2)} = 2\overline{(d_1, d_2)} \text{ [mod } \pi] \quad (6)$$

Đối chiếu (3′) và (6), suy ra:

$$\overline{(MP_1, MP_2)} = \overline{(OP_1, OP_2)} \text{ [mod } \pi] \quad (7)$$

Đẳng thức (7) chứng tỏ bốn điểm O, P_1, P_2 và $M = \Delta_1 \cap \Delta_2$ cùng thuộc một đường tròn, đó là đường tròn (OP_1P_2), với mọi vị trí của đường thẳng Δ quay xung quanh điểm P cố định. Vậy, ta đi đến kết luận:

+ Nếu d_1 và d_2 không vuông góc với nhau ở O và do đó, O, P_1 và P_2 không thẳng hàng thì $\{M = \Delta_1 \cap \Delta_2\}$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác OP_1P_2.

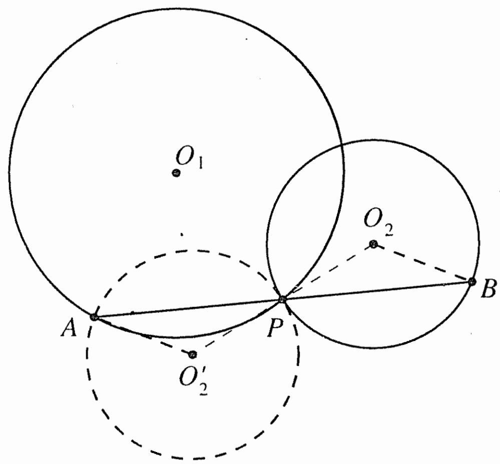
+ Nếu d_1 vuông góc với d_2 thì O, P_1, P_2 thẳng hàng và khi đó $\{M\}$ là đường thẳng P_1P_2 (đi qua O).

Ví dụ 3. (Vận dụng giải toán dựng hình)

Qua giao điểm P của hai đường tròn cắt nhau (O_1) và (O_2) đã cho hãy kẻ một cát tuyến Δ sao cho nó định ra trên các đường tròn đó hai dây cung bằng nhau.

Giải. (h.1.11)

Phân tích: Giả sử đã dựng được cát tuyến Δ đi qua P cắt (O_1) ở A và (O_2) ở B sao cho $AP = PB$, cũng tức là A và B đối xứng nhau qua P. Ta nghĩ đến việc sử dụng phép đối xứng - tâm P để tìm ra tính chất của cát tuyến Δ cần dựng. Như vậy là đã có $A = Đ_P(B)$ và $B \in (O_2)$ đã cho. Suy ra điểm A cần xác định phải thuộc đường tròn (O'_2) đối xứng với đường tròn (O_2) qua điểm P. Bởi vậy, cát tuyến Δ cần dựng đi qua P và giao điểm thứ hai A của hai đường tròn (O_1) và (O'_2).



Hình 1.11

Từ đó suy ra cách dựng Δ theo trình tự sau:

Trước hết, dựng $O'_2 = Đ_P(O_2)$, rồi dựng đường tròn tâm O'_2 đi qua P, nó cắt lại (O_1) ở A ($\neq P$). Sau cùng, dựng giao điểm thứ hai B của tia $[AP)$ và đường tròn (O_2).

Biện luận: Dễ thấy rằng $AP = PB$ và bài toán luôn có nghiệm duy nhất.

5. Những điều cần lưu ý khi vận dụng phương pháp biến hình vào việc giải toán hình học (phần đọc thêm)

a) *Phương pháp biến hình trong việc giải toán hình học*

Những bài toán hình học trình bày dưới dạng những ví dụ minh hoạ sắp đặt vào mục 4, §1 ở trên đề cập tương đối đầy đủ các dạng toán hình học (phẳng), chỉ thiếu dạng tính toán các đại lượng hình học. Dạng chứng minh tính chất hình học của các hình được đề cập đến trong ví dụ 1. Ví dụ 2 đề cập đến dạng toán quỹ tích (tìm tập hợp điểm). Toán dựng hình được đề cập đến trong ví dụ 3.

Tuy nhiên, điều muốn nói ở đây là cả ba bài toán trên đây đều có một đặc điểm chung về phương pháp giải. Phép tịnh tiến đã được sử dụng để giải bài toán nêu trong ví dụ 1. Phép đối xứng - trục đã được sử dụng để giải bài toán quỹ tích nêu trong ví dụ 2 và phép đối xứng - tâm đã được vận dụng để giải bài toán dựng hình nêu trong ví dụ 3. Bởi vậy, có thể gọi tên phương pháp giải các bài toán đó là phương pháp tịnh tiến và phương pháp đối xứng (cụ thể hơn là đối xứng - trục và đối xứng - tâm) gắn với tên gọi của phép biến hình cụ thể được sử dụng đến.

Lưu ý thêm rằng những bài toán nêu trong ba ví dụ minh hoạ ở mục 4, §1 trên đây đều có thể giải được về cơ bản chỉ cần huy động vốn kiến thức hình học thuộc sách giáo khoa trung học cơ sở, nhưng đã được chúng ta giải lại theo quan điểm biến hình. Như vậy là, trong việc khảo sát tính chất hình học của các hình hình học và nói đầy đủ hơn là trong việc giải toán hình học, ngoài phương pháp tổng hợp, phương pháp toạ độ và phương pháp vectơ mà chúng ta đã biết và đã sử dụng, còn có phương pháp biến hình. Đó là phương pháp vận dụng tính chất của các phép biến hình điểm thường gặp như dời hình, đồng dạng, ... vào việc khảo sát tính chất hình học của các hình, tính toán các đại lượng hình học, tìm tập hợp điểm và vào việc giải cả toán dựng hình.

b) *Cách nhận biết lớp các bài toán hình học có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình*

- Về mặt nguyên tắc, bất kì bài toán hình học nào cũng đều có thể giải được bằng phương pháp toạ độ (cũng còn gọi là phương pháp đại số). Tuy nhiên, nhiều bài toán hình học giải bằng phương pháp tổng hợp thông thường lại đi đến kết quả nhanh chóng, gọn gàng và đẹp hơn nhiều. Cũng vậy, nhiều bài toán hình học có thể giải được nhanh chóng và gọn gàng nếu biết sử dụng phương pháp vectơ.

- Như chúng ta đã thấy, thường thì một bài toán hình học có thể giải được bằng nhiều cách khác nhau, chí ít là một cách: phương pháp tổng hợp hay phương pháp toạ độ. Tuy nhiên, đứng trước một bài toán mới về hình học ta nên xem xét cẩn thận để lựa chọn phương pháp giải thích hợp sao cho đạt kết quả nhanh, gọn và dễ dàng nhất.
- Để có thể giải được một bài toán hình học bằng phương pháp biến hình, trước hết phải nhận ra được dấu hiệu của lớp các bài toán có khả năng giải được bằng phương pháp này. Đương nhiên, không phải bài toán nào cũng giải được bằng phương pháp biến hình. Một câu hỏi được đặt ra là: Làm thế nào để nhận biết được một bài toán hình học nào đó có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình?

Muốn vậy, ta hãy trở lại phân tích từng ví dụ đã chỉ ra ở trên. Cơ sở của việc có thể sử dụng phép biến hình này nọ vào mỗi bài toán (ví dụ) đã được chỉ ra. Thường thì trong dữ kiện của bài toán và (hoặc) trong tính chất của hình đòi hỏi phải thiết lập (chứng minh) hoặc trong điều kiện đòi hỏi ở hình cần dựng đã xuất hiện những yếu tố có mối liên hệ đáng chú ý đến một phép biến hình cụ thể nào đó. Chẳng hạn, trong ví dụ 1 khi thiết lập tính chất của trực tâm tam giác, sau khi sử dụng một tính chất khác đã biết của trực tâm là các điểm đối xứng của nó qua mỗi cạnh đều nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác thì tức khắc làm xuất hiện hai đường tròn bằng nhau là (ABC) tâm O và (HBC) tâm O', trong đó H là trực tâm ΔABC còn O' đối xứng với O qua BC. Hai đường tròn này vừa là tương ứng với nhau không những trong phép đối xứng - trục $Đ(BC)$ và trong phép đối xứng - tâm $Đ(A_0)$, trong đó A_0 là trung điểm chung của BC và OO' mà cũng còn tương ứng với nhau cả trong phép tịnh tiến $T(\vec{v})$ theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OA_0}$. Chính mối liên hệ này của hai đường tròn bằng nhau đã giúp ta thiết lập được hệ thức vectơ: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OA_0}$ (vì phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OO'}$ không những biến O thành O' mà cũng biến (O) thành (O'), trong đó điểm A trên (O) biến thành điểm H trên (O')).

Tóm lại, muốn nhận biết được một bài toán hình học nào đó có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình (cụ thể là phương pháp dời hình, bao gồm tịnh tiến, đối xứng - tâm, đối xứng - trục, quay hoặc phương pháp đồng dạng, ...), trước hết chúng ta phải xem xét, phân tích nội dung bài toán để tìm ra yếu tố nào trong đó có mối liên hệ đáng chú ý đến một phép biến hình cụ thể nào đó. Sau đó, vận dụng các tính chất của phép biến hình này mà tìm ra lời giải hay đáp số của bài toán được xét. Đặc biệt đáng chú ý là phương pháp biến hình cũng thường gặp và được sử dụng trong việc giải một số bài toán quỹ tích và dựng hình, nhất là toán dựng hình. Theo quan điểm của lí thuyết tập hợp thì hình là một tập hợp điểm nào đó. Bởi vậy, việc dựng một hình hình học nào đó rốt cuộc lại quy về dựng một số điểm hữu hạn đủ để xác định, cũng có nghĩa là đủ để tạo nên hình đó. Trong mặt phẳng, thông thường một điểm được xác định bởi giao của hai đường, trong đó có đường thẳng và đường cônic mà đường tròn là một elip đặc biệt. Trong hai đường dùng để xác định điểm phải dựng là một trong các giao điểm của chúng, thường thì một đường đã có sẵn trong dữ kiện của bài toán còn đường thứ hai là quỹ tích của những điểm có một tính chất đặc trưng hình học nào đó và được suy ra từ một đường đã cho trong dữ kiện của bài toán bởi một phép biến hình nào đó. Phép biến hình này được phát hiện để sử dụng nhờ việc phân tích cụ thể nội dung bài toán hình học được đặt ra như đã nói ở trên. Ví dụ 3 trình bày trong mục 4 ở trên đã minh hoạ cho những nhận xét chung vừa nêu xoay quanh việc sử dụng phương pháp biến hình vào việc giải toán dựng hình. Còn ví dụ 2 đưa ra cũng ở mục 4 ở trên lại minh hoạ cho việc cần khai thác tính chất của phép biến hình (cụ thể là phép đối xứng - trục đã xuất hiện ngay trong nội dung của bài toán) nào đó mà từ đấy (có thể kết hợp với một vài tính chất hình học khác, chẳng hạn trong bài toán này là góc định hướng [mod π] của hai đường thẳng) tìm ra quỹ tích của những điểm cần tìm. Tuy nhiên, cũng lưu ý thêm rằng trong nhiều trường hợp khác, chúng ta lại giải được bài toán quỹ tích bằng phương pháp biến hình nhờ vận dụng được tính chất hình học đặc trưng (kể cả định nghĩa) của phép biến hình đó.

6. Nhóm các phép dời hình

Trong hình học, các phép biến hình xét riêng rẽ cũng đã đóng một vai trò quan trọng. Nhưng các phép biến hình xét thành những nhóm thoả mãn một số yêu cầu nhất định nào đó, lại còn đóng vai trò quan trọng hơn vì, với những nhóm như vậy người ta có thể tổng hợp nhiều hình học khác nhau vào trong cùng một hệ thống lí thuyết. Vậy thế nào là một nhóm?

a) *Định nghĩa phép toán trong một tập hợp*

Trước khi đưa ra khái niệm nhóm (cũng tức là cho định nghĩa thế nào là một nhóm), ta hãy định nghĩa thế nào là một phép toán trong một tập hợp. Xét một tập hợp những phần tử (thuộc loại bất kì). Nếu ta có một quy tắc để từ bất cứ hai phần tử a, b nào của tập hợp được xét lấy theo một thứ tự nhất định đều có được một phần tử thứ ba c thì ta nói rằng ta có một phép toán ở trong tập hợp đã cho. Người ta thường gọi một phép toán như vậy là "phép nhân" và phần tử c được gọi là "tích" của hai phần tử a và b lấy theo thứ tự đã cho. Tích này có thể thuộc hay không thuộc tập hợp đã cho. Nếu nó thuộc tập hợp đã cho thì người ta nói rằng tập hợp này đóng kín đối với phép nhân nói trên.

b) *Định nghĩa 1* (*khái niệm nhóm*)

Một tập hợp $[T]$ trong đó có xác định một phép nhân được gọi là làm thành một nhóm đối với phép nhân nào đó nếu bốn điều kiện sau đây được thoả mãn:

i) Tập hợp $[T]$ *đóng kín* đối với phép nhân đã cho.

ii) Phép nhân đã cho có tính chất *kết hợp*: $(ab)c = a(bc)$.

iii) Trong tập hợp $[T]$ có một phần tử e sao cho với bất cứ phần tử a nào của $[T]$ ta đều có: $ae = a = ea$; Một phần tử e như vậy được gọi là *phần tử đơn vị*.

iv) Ứng với mọi phần tử a của $[T]$ bao giờ cũng có một phần tử a' của $[T]$ sao cho: $aa' = e = a'a$. Một phần tử a' như vậy được gọi là *phần tử đảo ngược* của a và được kí hiệu là a^{-1}.

c) *Vài ví dụ về nhóm* (*trong số học*)

Ví dụ 1. Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên làm thành một nhóm đối với phép cộng các số nguyên (các phần tử ở đây là các số nguyên, phép nhân của nhóm là phép cộng số nguyên). Ta dễ dàng kiểm tra được tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên thoả mãn đầy đủ bốn điều kiện (i) $\rightarrow$ (iv) nêu ra ở tiểu mục b) trên đây để $\mathbb{Z}$ làm thành một nhóm đối với phép cộng các số nguyên. Trong nhóm $\mathbb{Z}$ này, số 0 đóng vai trò phần tử đơn vị và số nguyên $-a$ đóng vai trò là phần tử đảo ngược của số nguyên a.

Ví dụ 2. Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, trừ số 0, làm thành một nhóm đối với phép nhân các số hữu tỉ (hãy chứng minh). Trong nhóm $\mathbb{Q}$ này, phần tử đơn vị là số 1 và phần tử đảo ngược của số hữu tỉ a là số hữu tỉ $\dfrac{1}{a}$. Để ý rằng nếu ta không trừ số 0 ra thì điều kiện (iv) không được thoả mãn vì số 0 không có số đảo ngược.

Chú thích. Ta có nhận xét ngay rằng tập hợp các số nguyên, trừ số 0 (cũng tức là $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$) không làm thành một nhóm đối với phép nhân các số nguyên vì điều kiện (iv) không được thoả mãn (do số đảo ngược $\dfrac{1}{a}$ của một số nguyên $a \neq 1$ không phải là số nguyên, mà là một phân số tối giản).

d) Một số khái niệm khác liên quan đến khái niệm nhóm

ĐỊNH NGHĨA 2. Nếu phép nhân trong một nhóm mà giao hoán được thì người ta gọi nhóm đó là *nhóm giao hoán* hay *nhóm Abel*.

ĐỊNH NGHĨA 3. Giả sử T' là một tập hợp con của nhóm T. Nếu với phép nhân trong T thu hẹp trên T' (tức là chỉ xét phép nhân các phần tử thuộc T') mà T' là một nhóm thì T' gọi là một *nhóm con* của T.

Chẳng hạn, tập hợp các số chẵn cũng làm thành một nhóm đối với phép cộng. Như vậy, nhóm các số chẵn là một nhóm con của nhóm các số nguyên (đối với phép cộng).

e) Điều kiện cần và đủ để một bộ phận của một nhóm nào đó là một nhóm con của nhóm đó

ĐỊNH LÍ 9. *Nếu một tập hợp $[\mathcal{T}']$ không rỗng rút từ một nhóm $[\mathcal{T}]$ ra mà thoả mãn hai điều kiện (i) và (iv) trong định nghĩa 1, thì tập hợp đó là một nhóm con của $[\mathcal{T}]$: $[\mathcal{T}'] \subset [\mathcal{T}]$.*

Chứng minh. Điều kiện (ii) đã thoả mãn đối với $[\mathcal{T}]$ thì tất nhiên cũng thoả mãn đối với mọi bộ phận của $[\mathcal{T}]$, đặc biệt là đối với $[\mathcal{T}']$.

Vì $[\mathcal{T}']$ thoả mãn điều kiện (iv) nên phần tử đơn vị e của $[\mathcal{T}]$ có thể xem là tích của hai phần tử đảo ngược thuộc $[\mathcal{T}']$. Nhưng $[\mathcal{T}']$ cũng thoả mãn điều kiện (i) nên e cũng thuộc $[\mathcal{T}']$, nghĩa là $[\mathcal{T}']$ thoả mãn điều kiện (iii).

Vậy $[\mathscr{T}']$ thoả mãn cả bốn điều kiện (i), (ii), (iii), (iv), nên nó là một nhóm. Mặt khác, $[\mathscr{T}']$ được rút ra từ $[\mathscr{T}]$ nên $[\mathscr{T}']$ là một nhóm con của $[\mathscr{T}]$; kí hiệu $[\mathscr{T}'] \subset [\mathscr{T}]$.

f) Nhóm dời hình của mặt phẳng

ĐỊNH LÍ 10. *Tập hợp các phép dời hình trong mặt phẳng làm thành một nhóm gọi là nhóm dời hình của mặt phẳng, hay vắn tắt là nhóm dời hình phẳng.*

Chứng minh. Rõ ràng tích của hai phép dời hình trong mặt phẳng là một phép dời hình phẳng và mỗi phép dời hình phẳng $\mathscr{D}$ có một phép đảo ngược $\mathscr{D}^{-1}$ cũng là một phép dời hình. Vậy tập hợp các phép dời hình phẳng $\mathscr{D}$ thoả mãn hai điều kiện (i) và (iv) trong định nghĩa 1, tiểu mục b) ở trên.

Ngoài ra, dễ thấy rằng tích các phép dời hình có tính chất kết hợp:

$$\mathscr{D}_3 \circ (\mathscr{D}_2 \circ \mathscr{D}_1) = (\mathscr{D}_3 \circ \mathscr{D}_2) \circ \mathscr{D}_1 \ (= \mathscr{D}_3 \circ \mathscr{D}_2 \circ \mathscr{D}_1)$$

Sau cùng, trong tập hợp các phép dời hình ta có phép biến hình đồng nhất Id (đóng vai trò phần tử đơn vị e) với tính chất $\mathscr{D} \circ Id = \mathscr{D}$ dù cho $\mathscr{D}$ là bất kì phép dời hình nào.

Từ đó, theo định nghĩa 1, ta kết luận được rằng tập hợp các phép dời hình $\mathscr{D}$ của mặt phẳng làm thành một nhóm đối với phép toán lấy tích các phép dời hình, gọi là nhóm dời hình của mặt phẳng, hay vắn tắt là nhóm dời hình phẳng và kí hiệu là nhóm $\{\mathscr{D}\}$.

(*Chú thích:* Đề nghị bạn đọc tự chứng minh chi tiết các phép dời hình phẳng thoả mãn đầy đủ bốn điều kiện (i) $\rightarrow$ (iv) nêu trong định nghĩa 1 của khái niệm nhóm).

g) Nhận xét

1°) Nhóm dời hình phẳng không phải là một nhóm Abel vì tích của hai phép dời hình $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ nói chung là không giao hoán $\mathscr{D}_2 \circ \mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_1 \circ \mathscr{D}_2$.

2°) Tuy nhiên, tích của hai phép tịnh tiến $\mathscr{T}_1(\overrightarrow{v_1})$, $\mathscr{T}_2(\overrightarrow{v_2})$ là một phép tịnh tiến $\mathscr{T}(\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})$ theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}$ và đảo ngược của phép

tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ là phép tịnh tiến $\mathcal{T}(-\vec{v})$ theo vectơ đối $-\vec{v}$: $\mathcal{T}^{-1}(\vec{v}) = \mathcal{T}(-\vec{v})$.
Hơn nữa, tích hai phép tịnh tiến giao hoán được:

$$\mathcal{T}_2(\overrightarrow{v_2}).\mathcal{T}_1(\overrightarrow{v_1}) = \mathcal{T}_1(\overrightarrow{v_1}).\mathcal{T}_2(\overrightarrow{v_2}) = \mathcal{T}(\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}).$$

Từ đó suy ra:

ĐỊNH LÍ 11. *Tập hợp các phép tịnh tiến trong mặt phẳng làm thành một nhóm Abel, gọi là nhóm tịnh tiến phẳng, kí hiệu [$\mathcal{T}$]. Nhóm tịnh tiến [$\mathcal{T}$] là một nhóm con của nhóm dời hình [$\mathcal{D}$]: [$\mathcal{T}$] $\subset$ [$\mathcal{D}$].*

BÀI TẬP

Bài tập về đại cương các phép dời hình phẳng (1-7)

1. Chứng minh định lí 1 (mục 1c, §1): Phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của bất kì ba điểm nào, và do đó, biến đường thẳng thành đường thẳng.

2. Chứng minh phép dời hình bảo toàn quan hệ song song của hai đường thẳng và khoảng cách giữa chúng: Nếu $a \,//\, b$; $a' = \mathcal{D}(a)$, $b' = \mathcal{D}(b)$ thì: $a' \,//\, b'$ và $d(a', b') = d(a, b)$, trong đó $d(x, y)$ hay $d(x \,//\, y)$ là kí hiệu chỉ khoảng cách giữa hai đường thẳng song song x và y.

3. Hãy sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, chứng minh tính chất nêu trong định lí 2 của phép dời hình phẳng.

4. Chứng minh chi tiết hơn hệ quả 2 của định lí 1 về tính chất của $\mathcal{D}$: Phép dời hình biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, trong đó trọng tâm G, trực tâm H, các tâm I và O của các đường tròn nội và ngoại tiếp của tam giác tạo ảnh ABC theo thứ tự biến thành các tâm tương ứng G', H', I' và O' của tam giác ảnh $A'B'C'$.

5. Chứng minh rằng trong một phép tịnh tiến, ảnh d' của một đường thẳng d thì, hoặc song song với d, hoặc trùng d ($d' \,//\, d$ hoặc $d' \equiv d$). Từ đó suy ra tập hợp tất cả các đường thẳng bất biến trong một phép tịnh tiến.

6. Chứng minh rằng phép đối xứng - tâm $Đ_O$ (hoặc kí hiệu $Đ(O)$) biến một vectơ $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ thành một vectơ đối $\overrightarrow{M'N'}$ với nó: $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN} = -\vec{a}$. Từ đó suy ra:

Phép đối xứng - tâm bảo toàn phương của mọi đường thẳng; đồng thời tìm được tập hợp tất cả những đường thẳng bất biến qua phép đối xứng - tâm.

7. Chứng minh rằng phép đối xứng - trục $Đ_\Delta$ (hoặc kí hiệu $Đ(\Delta)$) biến một đường thẳng a thành đường thẳng a', đối xứng với a qua trục Δ (ta viết $a' = Đ_\Delta(a)$). Từ đó tìm được những phương đường thẳng bất biến trong một phép đối xứng - trục.

Bài tập về sự xác định và hợp thành của các phép dời hình (8-12)

8. *Chứng minh định lí:*

Trong mặt phẳng $\mathscr{P}$ cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và $A'B'$. Thế thì tồn tại hai và chỉ hai phép đẳng cự $f_i: \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, $i = 1, 2$ của $\mathscr{P}$ biến A thành A', B thành B'.

9. Chứng minh định lí 8 (phát biểu trong phần f) mục 3).

10*. Trong mặt phẳng cho ba đường thẳng Δ_i ($i = 1, 2, 3$).

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng Δ_i ($i = 1, 2, 3$) đồng quy hoặc song song là tích $f = Đ_3 \circ Đ_2 \circ Đ_1$ cũng là một phép đối xứng - trục, trong đó $Đ_i = Đ(\Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$.

11. Chứng minh rằng tích của hai phép quay $Q_1(O_1, \varphi_1)$ và $Q_2(O_2, \varphi_2)$ với $O_1 \neq O_2$ là một phép quay hay một phép tịnh tiến tuỳ theo tổng $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ của các góc quay không là bội của 2π (radian) hay là bội của 2π (cũng tức là $\varphi = 0$ [mod 2π]).

12. Chứng minh rằng tích của một phép quay và một phép tịnh tiến (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại) là một phép quay.

Bài tập vận dụng các phép dời hình vào giải toán hình học (13-17)

13. Gọi A là một trong hai giao điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2). Một đường thẳng Δ tùy ý, quay quanh A, cắt lại đường tròn (O_k) ở M_k, $(k = 1,2)$. Tìm quỹ tích tất cả những điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$.

14. Cho ba đường thẳng song song a, b, c. Hãy dựng tam giác đều ABC biết rằng $A \in a, B \in b, C \in c$.

15. Cho tam giác ABC đều và M là một điểm tùy ý nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng MA, MB và MC là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó, kí hiệu là $\tau(M)$.

b) Hãy tính các góc của tam giác $\tau(M)$ biết rằng $\widehat{AMB} = 110^{o}$ và $\widehat{BMC} = 120^{o}$.

16. Trong mặt phẳng cho hai tam giác ABC, ADE có các góc ở đỉnh A chung bù nhau, đồng thời $AB \perp AD$, $AB = AD$; $AC \perp AE$, $AC = AE$ và hai tam giác đó không còn điểm chung nào khác ngoài đỉnh A. Chứng minh rằng đường thẳng chứa trung tuyến xuất phát từ đỉnh chung A của tam giác này cũng chứa đường cao hạ từ A của tam giác kia.

17*. Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai hình vuông $ACLM$ và $BCNP$. Chứng minh rằng nếu giữ hai đỉnh A, B cố định và cho C chạy khắp nửa mặt phẳng mở (nửa dương) có bờ là đường thẳng AB thì đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định điểm đó.

§2. PHÉP ĐỒNG DẠNG PHẲNG

1. Đại cương về phép đồng dạng phẳng

a) Định nghĩa phép đồng dạng

Một phép biến hình $f: \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ được gọi là phép đồng dạng của mặt phẳng hay vắn tắt là phép đồng dạng phẳng, kí hiệu là Z, nếu với bất kì hai điểm M, N nào của $\mathscr{P}$ và các ảnh $M' = f(M)$ và $N' = f(N)$ của chúng, ta đều có $M'N' = kMN$, trong đó k là một số dương xác định. Số k được gọi là tỉ số hay hệ số của phép đồng dạng, hay nói gọn hơn là tỉ số (hay hệ số) đồng dạng. Phép đồng dạng tỉ số k được kí hiệu bởi $Z(k)$.

Nói một cách ngắn gọn, phép đồng dạng phẳng tỉ số k là phép biến hình của mặt phẳng, nhân khoảng cách giữa bất kì hai điểm nào của nó với cùng một số dương k xác định cho trước.

- Rõ ràng là khi $k = 1$, phép đồng dạng trở thành phép dời hình, nghĩa là $Z(1) = \mathscr{D}$ và do đó, dời hình là trường hợp đặc biệt của đồng dạng.

- Từ định nghĩa của phép đồng dạng, dễ dàng suy ra: Phép đảo ngược của phép đồng dạng tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $\frac{1}{k}$; ta viết:

$$\left(Z_1(k)\right)^{-1} = Z_2\left(\frac{1}{k}\right), \text{ hay } Z_1(k) \circ Z_2\left(\frac{1}{k}\right) = \mathcal{D} \text{ (trong đó } \mathcal{D} \text{ là một phép dời hình)}$$

Tích của hai phép đồng dạng có các tỉ số k_1, k_2 là phép đồng dạng với tỉ số $k = k_1k_2$:

$$Z_2(k_2) \circ Z_1(k_1) = Z_{12}(k_1k_2), \text{ nhưng } Z_1(k_1) \circ Z_2(k_2) = Z_{21}(k_2k_1).$$

Phép biến hình đồng nhất Id là một phép đồng dạng.

b) *Các tính chất của phép đồng dạng*

Cũng từ định nghĩa của phép đồng dạng, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của phép đồng dạng, trong đó có những tính chất của phép dời hình.

ĐỊNH LÍ 12. *Phép đồng dạng bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa ba điểm đó.*

Cụ thể là: phép đồng dạng biến ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó.

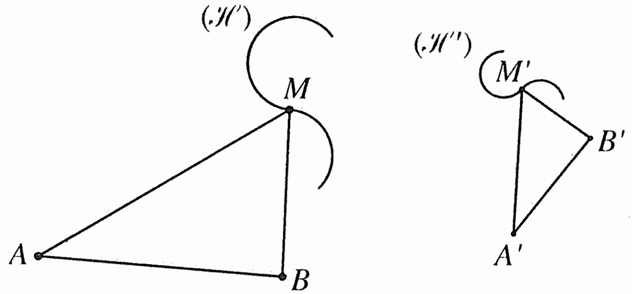
HỆ QUẢ 1. Phép đồng dạng biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng có độ dài được nhân lên với hệ số (tỉ số) đồng dạng ($A'B' = kAB$, $\forall \{A, B\}$).

HỆ QUẢ 2. Phép đồng dạng biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó; biến một góc thành một góc bằng nó; biến một đường tròn thành một đường tròn, trong đó tâm biến thành tâm còn bán kính được nhân lên với hệ số (tỉ số) đồng dạng ($R' = kR$).

Chú thích. Phép đồng dạng tuy không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nhưng cũng giống như phép dời hình, phép đồng dạng bảo toàn góc (nói đúng ra là bảo toàn độ lớn thông thường của góc, bao gồm góc giữa hai tia, giữa hai vectơ, giữa hai đường thẳng). Vì thế, người ta còn nói: phép đồng dạng là một phép biến hình bảo giác.

c) *Khái niệm về hai hình đồng dạng*

ĐỊNH NGHĨA. Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng Z biến hình này thành hình kia: $Z(\mathscr{H}) = \mathscr{H}'$ (h.1.12).



Hình 1.12

Nếu phép đồng dạng Z biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ thì phép đồng dạng đảo ngược Z^{-1} của Z biến $\mathscr{H}'$ thành $\mathscr{H}$: $Z^{-1}(\mathscr{H}') = \mathscr{H}$.

Kí hiệu hai hình đồng dạng bởi dấu: $\backsim$; chẳng hạn: $\mathscr{H}' \backsim \mathscr{H}$ (hình $\mathscr{H}$ đồng dạng với hình $\mathscr{H}'$), $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.

Chú thích. Phép biến đổi (biến hình) đồng dạng trong mặt phẳng hay gọi vắn tắt là phép đồng dạng phẳng lần đầu tiên được đưa vào SGK Hình học 10 và Tài liệu chuyên Toán Hình học 10 là phép vị tự, một phép đồng dạng đặc biệt trong mặt phẳng.

Sau đây, chúng ta nhắc lại định nghĩa phép vị tự - một phép đồng dạng đặc biệt của mặt phẳng và khảo sát chi tiết các tính chất của phép vị tự phẳng cùng những ứng dụng quan trọng của nó vào việc khảo sát tính chất của hình cũng như vận dụng vào việc giải toán hình học.

2. Phép vị tự trong mặt phẳng

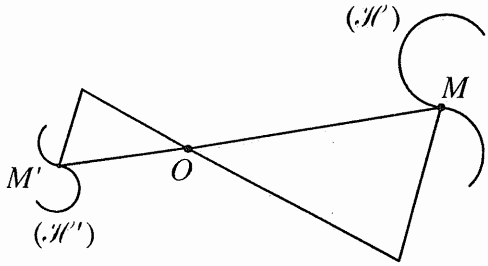
a) *Định nghĩa*

Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và k là một số thực khác không cho trước. Phép biến hình của mặt phẳng biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, (1)

được gọi là một phép vị tự tâm O, hệ số (tỉ số) k và kí hiệu là $V(O, k)$ hay $V_{(O,\, k)}$ (xem Tài liệu chuyên toán Hình học 10). Điểm O gọi là tâm vị tự và k gọi là hệ số hay tỉ số vị tự (h.1.13).

Một phép vị tự hoàn toàn được xác định nếu cho biết tâm O và tỉ số k.

Nếu có đẳng thức (1) thì ta nói: M' là ảnh hay điểm tương ứng của điểm M qua phép vị tự $V(O, k)$, hoặc người ta cũng gọi M' là hình vị tự của điểm M.



Hình 1.13

Nếu phép vị tự $V(O, k)$ biến một hình $\mathscr{H}$ thành một hình $\mathscr{H}'$ (gồm các ảnh M' của tất cả các điểm M thuộc hình $\mathscr{H}$) thì ta cũng nói $\mathscr{H}'$ là hình vị tự của hình $\mathscr{H}$ hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ là hai hình vị tự với nhau.

Chú thích:

1°) Có hai trường hợp đặc biệt đáng chú ý của phép vị tự, ứng với hai giá trị của hệ số k là $k = \pm 1$.

Nếu $k = +1$, khi đó $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ $(\forall M)$ thì $M' = M$ $(\forall M)$.

Vậy, trong trường hợp này, phép vị tự tỉ số 1 là phép đồng nhất.

Nếu $k = -1$, thì $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ $(\forall M)$ tức M' đối xứng với M qua điểm O.

Vậy, trong trường hợp này, phép vị tự tỉ số -1 là phép đối xứng qua tâm O.

2°) Tuỳ theo hệ số vị tự k dương hay âm, người ta còn gọi rõ hơn là: phép vị tự dương hay phép vị tự âm.

Tuy nhiên, một phép vị tự âm hệ số $-k$ $(k > 0)$ là tích của một phép vị tự dương hệ số k $(k > 0)$ và một phép đối xứng-tâm (hay phép quay góc π).

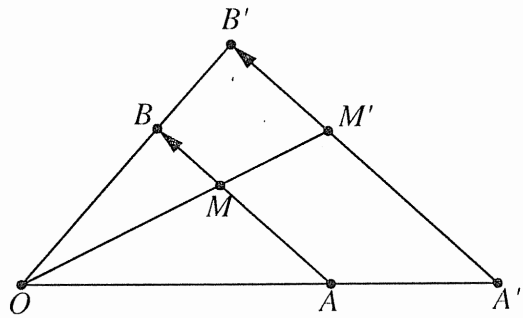
b) *Các tính chất của phép vị tự*

ĐỊNH LÍ 13. *Phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng tỉ số* $|k|$, *trong đó nếu phép vị tự V(O, k) biến M thành M′, N thành N′ thì:* $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Chú thích.

i) Người ta còn nói, phép vị tự tỉ số k biến một vectơ $\vec{v}$ thành vectơ $\vec{v'}$ bằng k lần vectơ $\vec{v}$: $\vec{v'} = k\vec{v}$, hoặc nói gọn hơn là: phép vị tự tỉ số k nhân một vectơ lên k lần (h.1.14).

ii) Vì phép vị tự là một phép đồng dạng đặc biệt, nên phép vị tự có mọi tính chất của phép đồng dạng. Tuy nhiên, phép vị tự còn có những tính chất đặc trưng riêng của nó.



Hình 1.14

ĐỊNH LÍ 14. *Trong một phép vị tự mà hệ số vị tự khác 1, tâm vị tự là điểm bất động duy nhất và một đường thẳng không đi qua tâm vị tự biến thành một đường thẳng song song với nó. Chùm đường thẳng có tâm ở tâm vị tự là tập hợp những đường thẳng bất biến duy nhất của phép vị tự. Phép vị tự phẳng gây nên một phép vị tự trên mọi đường thẳng (bất biến) đi qua tâm vị tự.*

Việc chứng minh các tính chất của phép vị tự nêu trong hai định lí trên đây khá đơn giản. Chúng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của phép vị tự và định lí Thales (xem hình 1.14 chẳng hạn); xin dành cho bạn đọc.

c) *Tâm vị tự của hai đường tròn*

ĐỊNH LÍ 15. *Phép vị tự biến một đường tròn thành một đường tròn, trong đó tâm biến thành tâm còn bán kính được nhân lên với trị tuyệt đối của hệ số vị tự.*

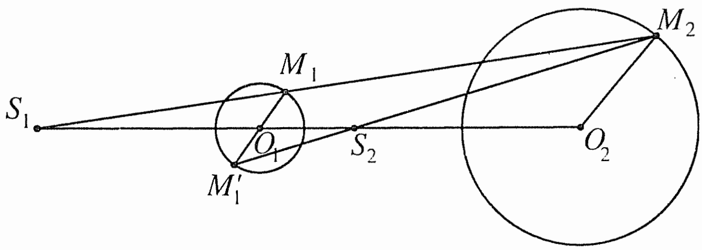
Đảo lại, nếu (O_1, R_1) và (O_2, R_2) là hai đường tròn phân biệt của mặt phẳng thì, nói chung có hai phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia mà tâm vị tự là các điểm chia trong và ngoài đoạn nối tâm theo tỉ số hai bán kính.

Chứng minh. Gọi S là tâm vị tự, k là hệ số vị tự. Thế thì nếu $S = O$ thì phép vị tự $V(O, k)$ biến đường tròn (O, R) thành đường tròn $(O, |k|R)$ đồng tâm O, bán kính $R' = |k|R$.

Nếu $S \neq O$ thì phép vị tự $V(S, k)$ tâm S, hệ số k biến đường tròn (O, R) thành đường tròn (O', R'), trong đó O' được xác định bởi: $\overrightarrow{SO'} = k\overrightarrow{SO}$ và $R' = |k|R$,

cũng tức là S chia $O'O$ theo tỉ số đơn $(O', O, S) = \dfrac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = k$.

Đảo lại, giả sử (O_i, R_i), $i = 1, 2$ là hai đường tròn không đồng tâm và cũng không có cùng bán kính: $O_1 \neq O_2$, $R_1 \neq R_2$. Thế thì tồn tại hai và chỉ hai phép vị tự $V_i(S_i, k_i)$, $i = 1, 2$ tâm S_1 và S_2 theo thứ tự chia ngoài và chia trong đoạn nối tâm O_2O_1 theo các tỉ số tương ứng $k_1 = \dfrac{R_2}{R_1}$ và $k_2 = -\dfrac{R_2}{R_1}$, biến (O_1, R_1) thành (O_2, R_2), (h.1.15). Các điểm S_1 và S_2 theo thứ tự được gọi đó là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn (O_i, R_i), $i = 1, 2$.



Hình 1.15

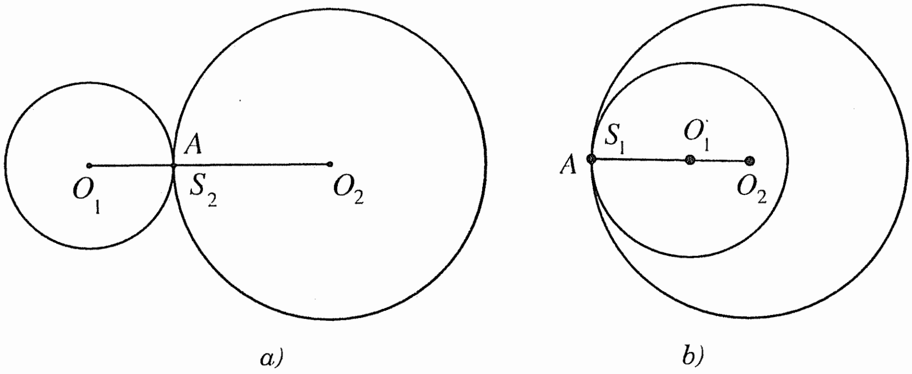
Có hai trường hợp đặc biệt:

- Hai đường tròn đồng tâm nhưng không cùng bán kính: $O_1 = O_2 = O$, $R_1 \neq R_2$. Khi đó, cả hai phép vị tự cùng tâm S trùng với O và tỉ số vị tự $k_i = \pm\dfrac{R_2}{R_1}$ đều biến đường tròn (O, R_1) thành đường tròn (O, R_2).

- Hai đường tròn không đồng tâm nhưng cùng bán kính: $O_1 \neq O_2$, $R_1 = R_2 = R$, cũng tức là hai đường tròn bằng nhau (O_1, R) và (O_2, R). Trong trường hợp này, phép đối xứng - tâm O là phép vị tự duy nhất (có hệ số $k = -1$) biến (O_1, R) thành (O_2, R), hoặc ngược lại, trong đó O là trung điểm của đoạn nối tâm O_1O_2. phép đối xứng - tâm O cũng là phép vị tự đặc biệt tâm O tỉ số $k = -1$: $Đ(O) = V(O, -1)$.

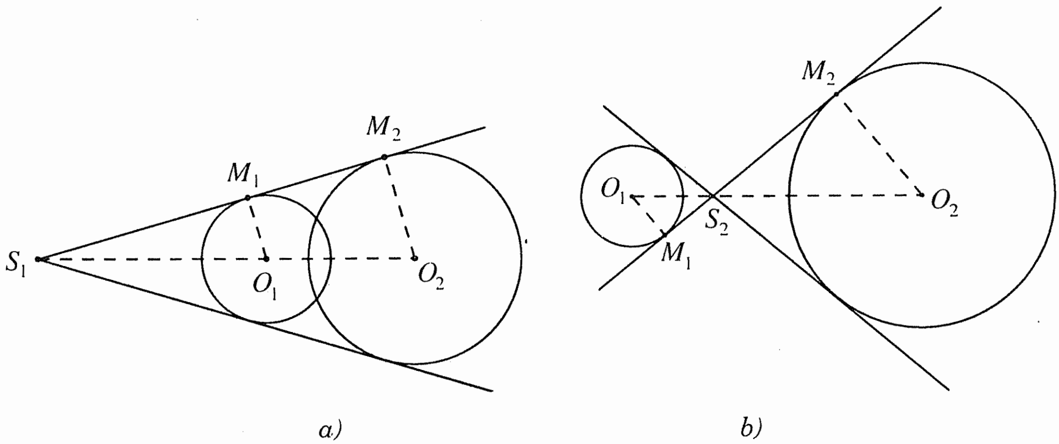
Chú thích.

i) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau ở A thì tiếp điểm A của chúng là một trong hai tâm vị tự S_i, $i = 1, 2$. A là tâm vị tự trong hay tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tuỳ theo hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong với nhau ở điểm A (h.1.16a) và (h.1.16b). Còn tâm vị tự thứ hai là điểm chia ngoài hay chia trong đoạn nối tâm O_2O_1 theo tỉ số $\pm\dfrac{R_2}{R_1}$.



Hình 1.16

ii) Nếu hai đường tròn không đựng nhau, hoặc ngoài nhau thì giao điểm của (O_1O_2) và một tiếp tuyến chung ngoài hoặc một tiếp tuyến chung trong của chúng cũng xác định tâm vị tự ngoài S_1 hoặc tâm vị tự trong S_2 của hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (h.1.17a) và (h.1.17b).



Hình 1.17

d) *Tích của hai phép vị tự*

ĐỊNH LÍ 16. *Tích của hai phép vị tự có các tỉ số k_1 và k_2 là một phép vị tự tỉ số $k = k_1.k_2$ có tâm thẳng hàng với tâm của hai phép vị tự đó hoặc một phép tịnh tiến tuỳ theo $k_1k_2 \neq 1$ hoặc $k_1k_2 = 1$.*

Chứng minh. Giả sử $V_1(O_1, k_1)$ và $V_2(O_2, k_2)$ là hai phép vị tự.

Dễ thấy rằng nếu $O_1 = O_2 = O$ thì $V_2(O, k_2) \circ V_1(O, k_1) = V(O, k_1k_2)$.

Nếu $O_2 \neq O_1$, lược đồ của tích là: $\underbrace{M \overset{V_1}{\mapsto} M_1 \overset{V_2}{\mapsto} M'}_{V_2 \circ V_1}$ và $V_2 \circ V_1$: $M \mapsto M'$.

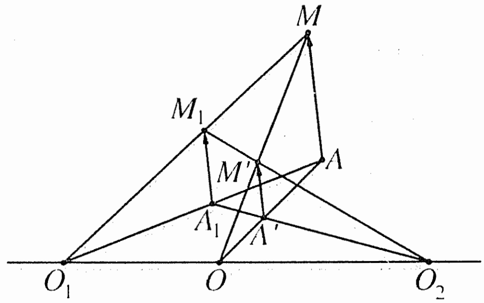
Theo định nghĩa thì:

$\forall M,\ \overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và

$\overrightarrow{O_2M'} = k_2\overrightarrow{O_2M_1}$ (h1.18)

Khử điểm trung gian M_1 nhờ quy tắc cộng vectơ:

$\overrightarrow{O_2M_1} = \overrightarrow{O_1M_1} - \overrightarrow{O_1O_2}$.



Hình 1.18

Hệ thức trên trở thành:

$$\forall M,\ \overrightarrow{O_2M'} = k_2\left(k_1\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2}\right); \quad (1)$$

Vậy điểm bất động O phải tìm của tích $V_2 \circ V_1$, nếu tồn tại thì được xác định bởi (1) (bằng cách cho $M' = M = O$):

$$\overrightarrow{O_2O} = k_2\left(k_1\overrightarrow{O_1O} - \overrightarrow{O_1O_2}\right), \quad (2)$$

nghĩa là: $(1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$. (2')

Trường hợp tổng quát: $k_1k_2 \neq 1$. Đẳng thức (2') xác định một điểm O duy nhất, thẳng hàng với O_1, O_2. Bằng cách lấy (1) trừ (2) vế đối vế, ta đi đến:

$\forall M,\ \overrightarrow{OM'} = k_1k_2\overrightarrow{OM}$

Hệ thức này xác định phép vị tự $V(O, k_1k_2)$ tâm O, tỉ số $k = k_1k_2$ ($\neq 1$).

Trường hợp đặc biệt: $k_1k_2 = 1$. Không có một điểm bất động nào, nhưng với $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$ thì đẳng thức (1) trở thành: $\forall M,\ \overrightarrow{O_2M'} = \overrightarrow{O_1M} - k_2\overrightarrow{O_1O_2}$,

mà ta viết lại dưới dạng: $\forall M,\ \overrightarrow{MM'} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$. (3)

Hệ thức (3) này xác định phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$; đpcm.

3. Sự xác định một phép đồng dạng phẳng

a) *Định lí 17.* *(về sự xác định một phép đồng dạng phẳng)*

ABC và A'B'C' là hai tam giác đồng dạng cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ (xác định bởi: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=k$). Bao giờ cũng có một và chỉ một phép đồng dạng $Z: \mathcal{P}\to\mathcal{P}$ biến A, B, C theo thứ tự thành A', B', C'.

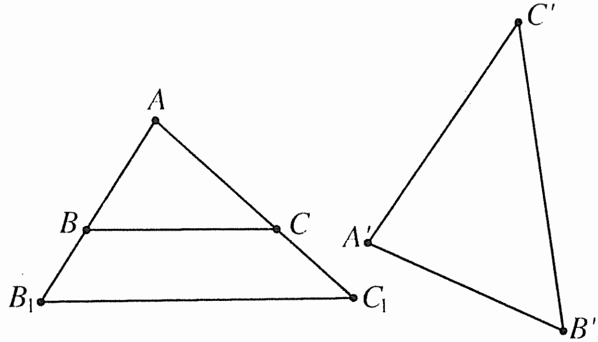
Chứng minh. Xét phép vị tự $V(A, k)$; nó biến tam giác ABC thành tam giác AB_1C_1, trong đó :

$AB_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$,

$C_1A = kCA$ (h.1.19).

Như vậy, phép vị tự $V(A, k)$ biến ΔABC thành

$$\Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'.$$



Hình 1.19

Thế thì (theo định lí 3) có một phép dời hình $\mathcal{D}$ duy nhất biến A, B_1, C_1 theo thứ tự thành A', B', C'. Do đó, tích $\mathcal{D}\circ V(A, k)$ là một phép đồng dạng $Z(|k|)$, tỉ số $|k|$ biến A thành A', B thành B' và C thành C'.

Bây giờ giả sử có hai phép đồng dạng Z_1 và Z_2 đều biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ thì phép $Z_2^{-1}\circ Z_1$ là một phép đồng dạng tỉ số 1, tức là một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến ΔABC thành chính nó, trong đó biến A thành A, B thành B và C thành C. Vì vậy, theo định lí 3, §1 thì $Z_2^{-1}\circ Z_1 = Id$ và do đó, $Z_2 = Z_1$.

Định lí đã được chứng minh.

b) *Hệ quả*

Một phép đồng dạng phẳng bao giờ cũng có thể phân tích được thành tích của một phép vị tự và một phép dời hình (đẳng cự) theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại.

c) *Chú thích*

i) Đối với phép dời hình (đẳng cự) thì phép đối xứng - trục đóng vai trò phần tử sinh, còn đối với các phép đồng dạng thì, đóng vai trò phần tử sinh là phép vị tự và phép đối xứng - trục, trong đó phép vị tự đóng vai trò nổi bật, phân biệt sự khác nhau giữa Z và $\mathcal{Q}$ ở tỉ số $|k| \neq 1$.

ii) Nếu $Z(|k|) = \mathcal{Q} \circ V(A, k)$ thì: $\left(Z(|k|)\right)^{-1} = V\left(A, \frac{1}{k}\right) \circ \mathcal{Q}^{-1} = Z_1\left(\frac{1}{|k|}\right)$.

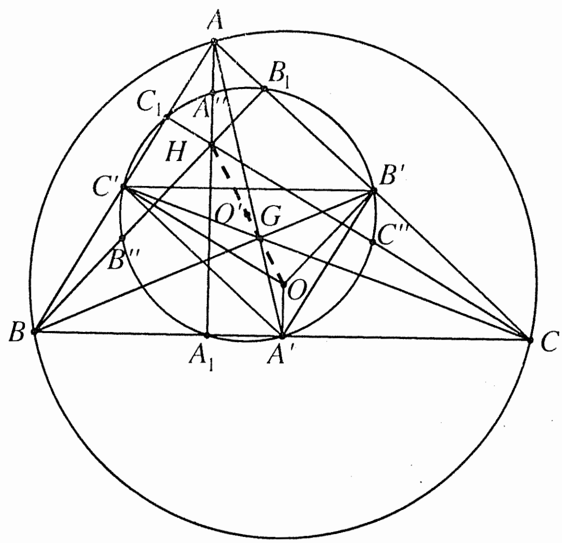
iii) Sự phân tích nói trên là không duy nhất.

4. Vận dụng phép đồng dạng vào việc giải một số bài toán hình học phẳng

a) *Khảo sát tính chất hình học của một số hình (hình hình học)*

Ví dụ 1. Chứng minh định lí về đường tròn Euler: Trong một tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao và trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh này nằm trên một đường tròn, gọi là đường tròn chín điểm hay đường tròn Euler của tam giác đó. Bán kính đường tròn Euler bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và tâm O' của đường tròn Euler thì thẳng hàng với tâm O đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm G và trực tâm H trên đường thẳng Euler sao cho O' là trung điểm của đoạn OH và hàng điểm H, G, O, O' là điều hoà.

Giải. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác trung bình $A'B'C'$ của tam giác ABC (h.1. 20). Thế thì O' là hình vị tự của tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trong phép vị tự $V(G, -\frac{1}{2})$. Do đó O' cũng nằm trên đường thẳng Euler OGH và ta có:



Hình 1.20

$$\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}, \text{ hay là: } \frac{\overline{GO'}}{\overline{GO}} = -\frac{1}{2}.$$

Từ hệ thức trên ta dễ dàng suy ra:

$$\overline{HG} = 2\overline{GO} = 4\overline{O'G} \text{ và } \overline{OH} = 3\overline{OG}\,;\ 3\overline{O'G} = \overline{O'O} = -\overline{O'H}.$$

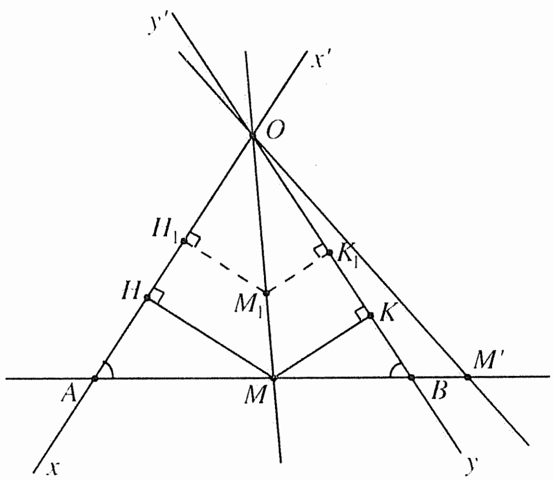
Và do đó, ta được: $\overline{O'H} = -\overline{O'O}$ và $(HGOO')\ \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OG}} : \dfrac{\overline{O'H}}{\overline{O'G}} = -1$; đó là đpcm.

Cũng từ đó suy ra: $\dfrac{\overline{HO'}}{\overline{HO}} = -\dfrac{\overline{GO'}}{\overline{GO}} = \dfrac{1}{2}$, hay là: $\overline{HO'} = \dfrac{1}{2}\overline{HO}$; và do đó, H là tâm của phép vị tự thứ hai, biến đường tròn $(O) = (ABC)$ thành đường tròn $(O') = (A'B'C')$ theo tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

b) Vận dụng vào giải toán quỹ tích

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: Quỹ tích những điểm của mặt phẳng mà tỉ số khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng cắt nhau ở một điểm O bằng k ($k > 0$) không đổi gồm hai đường thẳng đi qua O.

Giải. Giả sử $x'x$ và $y'y$ là hai đường thẳng cho trước cắt nhau ở điểm O (h.1.21) và M là một điểm của mặt phẳng sao cho $\dfrac{MH}{MK} = k$ (hằng số dương cho trước), trong đó: H, K lần lượt là hình chiếu của M trên xx', yy'.



Hình 1.21

Gọi M_1 là điểm tương ứng của điểm M trong một phép vị tự thay đổi[1] tâm O. Vậy quỹ tích này sẽ gồm những đường thẳng đi qua O. Điều đó khiến

---

[1] tức là chỉ có thay đổi về giá trị của tỉ số vị tự mà thôi.

ta nghĩ đến việc tìm những điểm thuộc quỹ tích cần tìm trên một cát tuyến AB của hai đường thẳng Ox và Oy sao cho $OA = OB$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$). Với mọi điểm M của (AB), các tam giác vuông MAH và MBK có các góc nhọn bằng nhau ở A và B thì đồng dạng với nhau và ta có: $\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{MA}{MB}$. Do đó, điểm M sẽ là một điểm của quỹ tích nếu tỉ số $\dfrac{MA}{MB} = k$; vì vậy, rõ ràng là:

$$\frac{MH}{MK} = k, \ \frac{MA}{MB} = k.$$

Khi tỉ số $k \neq 1$ thì trên (AB) có hai điểm M và M' đáp ứng điều kiện đòi hỏi của bài toán. Vậy quỹ tích cần tìm bao gồm hai đường thẳng (OM) và (OM') liên hợp điều hoà đối với hai đường thẳng Ox và Oy đã cho (vì hàng điểm ($ABMM'$) là điều hoà sao cho:

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k \ (k > 0 \text{ cho trước})).$$

c) *Vận dụng vào giải toán dựng hình*

Ví dụ 3. Dựng một tam giác biết các độ dài h_a, h_b, h_c ba đường cao của nó.

Giải

Phân tích. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC phải tìm, ứng với các đường cao có độ dài tương ứng h_a, h_b, h_c đã cho. Thế thì ta có:

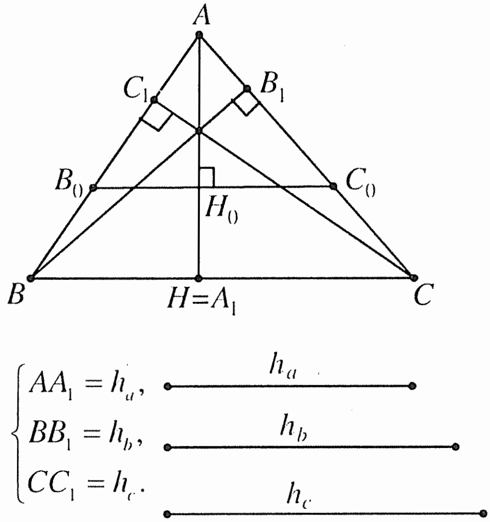
$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{h_b h_c}{h_a} : h_c : h_b . \qquad (*)$$

Các đẳng thức (*) chứng tỏ rằng nếu tồn tại, thì tam giác cần dựng sẽ đồng dạng với một tam giác $\mathcal{T}$ có độ dài các cạnh a', b', c' mà ta kí hiệu là $\mathcal{T}(a', b', c')$ với: $a' = \dfrac{h_b h_c}{h_a}$, $b' = h_c$ và $c' = h_b$. (**)

Vậy, việc dựng tam giác ABC phải tìm đưa về việc dựng tam giác $\mathcal{T}(A'B'C')$ có các cạnh mà độ dài xác định bởi các đẳng thức (**).

$$\Delta ABC \backsim \Delta \mathcal{T}(A'B'C').$$

Tuy nhiên, việc dựng tam giác $\mathcal{T}$ lại rất đơn giản bởi vì chỉ cần đưa về việc dựng đoạn tỉ lệ thứ tư a'. Từ sự phân tích trên đây, ta suy ra từng bước để dựng được ΔABC cần tìm.



$$\begin{cases} AA_1 = h_a, \\ BB_1 = h_b, \\ CC_1 = h_c. \end{cases}$$

Hình 1.22

Bước dựng cuối cùng là dựng tam giác ABC, vị tự với tam giác AB_0C_0 (h.1.22) trong phép vị tự $V(A, k)$ tâm A, tỉ số $k = \dfrac{h_a}{h'_a}$, trong đó AB_0C_0 là một tam giác dựng bất kì, miễn là $\Delta AB_0C_0 \backsim \Delta\mathcal{T}\ (a', b', c')$ và $h'_a = AH_0$ là chiều cao AH_0 hạ từ A của ΔAB_0C_0. Dễ dàng chứng minh tam giác ABC có các chiều cao là h_a, h_b và h_c.

Biện luận. Bài toán có lời giải khi và chỉ khi tồn tại tam giác $\mathcal{T}(a', b', c')$. Bởi vậy, bài toán có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$ và $\dfrac{1}{h_c}$ biểu thị số đo độ dài các cạnh của một tam giác nào đó; cũng tức là: $\exists\mathcal{T}\left(\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}\right)$. Nói khác đi là, trong ba số nghịch đảo của các số h_a, h_b, h_c, mỗi số nhỏ hơn thực sự tổng của hai số còn lại, nghĩa là thoả mãn bất đẳng thức tam giác.

5. Nhóm các phép đồng dạng

Bây giờ đến lượt chúng ta để ý đến phép biến đổi (biến hình) đồng dạng trong mặt phẳng được xem xét trên bình diện tập hợp $\{Z\}$ tất cả các phép đồng dạng $Z(k)$, tỉ số k (trong đó k là một số dương bất kì) bao gồm cả các phép dời hình $\mathcal{D}$ là những phép đồng dạng đặc biệt $Z(1)$ có tỉ số đồng dạng $k = 1$. Cụ thể là, xét $\{Z\}$ theo quan điểm nhóm biến hình.

a) Nhóm đồng dạng của mặt phẳng

ĐỊNH LÍ 18. *Tập hợp các phép đồng dạng trong mặt phẳng làm thành một nhóm gọi là nhóm đồng dạng của mặt phẳng, hay vắn tắt là nhóm đồng dạng phẳng.*

Chứng minh. Rõ ràng tích của hai phép đồng dạng $Z_1(k_1)$ và $Z_2(k_2)$ là một phép đồng dạng $Z_{12}(k_1k_2)$, có tỉ số đồng dạng $k = k_1k_2$ bằng tích các tỉ số đồng dạng của hai phép đó.

Nếu $k_1k_2 = 1$ thì tích $Z_{12}(1) = Z_2(k_2) \circ Z_1(k_1)$ (hoặc tích $Z_{21}(1) = Z_1(k_1) \circ Z_2(k_2)$) trở thành một phép dời hình $\mathcal{D}$ nào đó.

Ngoài ra, mỗi phép đồng dạng phẳng $Z(k)$ có một phép đảo ngược

$$\left(Z_1(k)\right)^{-1} = Z_2\left(\frac{1}{k}\right)$$

cũng là một phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$.

Cũng như tích các phép dời hình, tích các phép đồng dạng có tính chất kết hợp:

$$Z_3 \circ (Z_2 \circ Z_1) = (Z_3 \circ Z_2) \circ Z_1 \; (= Z_3 \circ Z_2 \circ Z_1).$$

Sau cùng, trong tập hợp các phép đồng dạng ta có phép biến hình đồng nhất Id (đóng vai trò phần tử đơn vị e) với tính chất $Z \circ Id = Z$ dù cho Z là bất kì phép đồng dạng nào.

Từ đó, ta đi đến kết luận: Tập hợp các phép đồng dạng $\{Z\}$ của mặt phẳng làm thành một nhóm đối với phép toán lấy tích các phép đồng dạng.

b) Các nhóm con của nhóm đồng dạng

Dễ dàng chứng minh được định lí sau đây:

ĐỊNH LÍ 19

i) Tập hợp các phép vị tự và tịnh tiến trong mặt phẳng làm thành một nhóm, gọi là nhóm vị tự và tịnh tiến. Nhóm này là một nhóm con của nhóm đồng dạng phẳng, nhưng lại chứa một nhóm con là nhóm tịnh tiến.

ii) Nhóm dời hình phẳng là một nhóm con của nhóm đồng dạng phẳng.

c) *Hình học của một nhóm các phép biến hình*

ĐỊNH NGHĨA

i) Các khái niệm, các tính chất hay các đại lượng được bảo toàn qua bất cứ một phép biến hình nào của một nhóm các phép biến hình gọi là các bất biến của nhóm đó.

ii) Tập hợp các bất biến của một nhóm các phép biến hình gọi là hình học của nhóm các phép biến hình đó.

iii) Hình học của nhóm đồng dạng phẳng [Z] gọi là hình học phẳng Euclide.

BÀI TẬP

Bài tập về phép vị tự và sự xác định một phép đồng dạng (18-25)

18. Chứng minh rằng trong một tam giác:

a) Ba đường trung tuyến đồng quy ở một điểm, điểm này cách mỗi đỉnh của tam giác này bằng $\frac{2}{3}$ độ dài của đường trung tuyến phát xuất từ đỉnh đó.

b) Trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng, gọi là đường thẳng Euler và giữa các điểm đó có hệ thức: $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$.

19. Cho hình thang $ABCD$ (AB // CD). Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AD, BC và N là giao điểm hai đường chéo của tứ giác.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABM, CDM tiếp xúc với nhau.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABN, CDN tiếp xúc với nhau.

20. Trong mặt phẳng cho trước đường tròn ω với tâm O bán kính R và hai điểm A, B. Xét điểm C thay đổi trên đường tròn ω, tìm quỹ tích trọng tâm của tam giác ABC.

21. Cho trước đường tròn (O). Hãy dựng tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đỉnh A và trực tâm H cho trước.

22[*]**.** Chứng minh định lí: Trong mặt phẳng cho hai đoạn thẳng AB và $A'B' = kAB$ $(0 < k \neq 1)$. Thế thì có hai và chỉ hai phép đồng dạng $Z_i: \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ $(i = 1, 2)$ của $\mathscr{P}$ biến A thành A', B thành B', trong đó một phép là đồng dạng thuận còn phép kia là đồng dạng nghịch (đồng dạng gương hay phản đồng dạng).

23. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song với nhau nhưng không bằng nhau là hai tam giác vị tự với nhau. (Nói một cách khác, các đường thẳng AA', BB', CC' nối các cặp đỉnh tương ứng đồng quy ở một điểm O nào đó. Điểm O chính là tâm của phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia).

24. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD. Chứng minh rằng có thể chia hình thang đó thành hai hình thang nhỏ đồng dạng với nhau ($DCNM \backsim MNBA$) bằng một đoạn thẳng MN song song với hai đáy, M trên AD và N trên BC.

25. Một hình chữ nhật mà mỗi cạnh (hoặc cạnh kéo dài của nó) chứa một đỉnh của một tứ giác (lồi) $ABCD$ gọi là hình chữ nhật ngoại tiếp tứ giác đó; ngược lại, $ABCD$ gọi là tứ giác nội tiếp hình chữ nhật. Chứng minh rằng có vô số hình chữ nhật $MNPQ$ ngoại tiếp một tứ giác (lồi) $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau, và tất cả các hình chữ nhật đó đều đồng dạng (đồng dạng thuận)[1] với nhau.

Bài tập vận dụng phép vị tự và phép đồng dạng vào việc giải toán (26-34)

26. Gọi A_0, B_0, C_0, D_0 lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của một hình vuông $ABCD$ và P là một điểm bất kì của mặt phẳng. Chứng minh rằng các điểm A_1, B_1, C_1 và D_1 đối xứng với điểm P lần lượt qua A_0, B_0, C_0 và D_0 cũng là các đỉnh của một hình vuông.

27. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó. Gọi (γ_1), (γ_2) theo thứ tự là các đường tròn đường kính AB và AC. Một điểm M chuyển động trên (γ_1), đường thẳng AM cắt lại (γ_2) ở điểm N. Tìm quỹ tích giao điểm P của BN và CM.

---

[1] Các khái niệm "thuận" và "nghịch" được đưa ra ở trong Chuyên đề 1 (bao gồm định hướng thuận hay nghịch; dời hình thuận, dời hình nghịch và đồng dạng thuận, đồng dạng nghịch).

28. Giả sử ba đường tròn (A_0), (B_0) và (C_0) có cùng bán kính, theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ của một tam giác ABC. Gọi D_0 là đường tròn thứ tư tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn nói trên. Chứng minh rằng tâm D_0 thẳng hàng với tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC.

29. Cho hai tam giác đều không bằng nhau ABC và $A'B'C'$. Hỏi có bao nhiêu phép đồng dạng biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai?

30. Gọi A', B' và C' là các hình chiếu (vuông góc) của một điểm M bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC đã cho lần lượt trên các đường thẳng chứa đường cao AA_1, BB_1 và CC_1 của tam giác đó. Chứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ luôn đồng dạng với chính nó khi M chạy khắp mặt phẳng.

31. CD là đường cao hạ xuống cạnh huyền AB của một tam giác ABC vuông ở C. Chứng minh rằng các đường trung tuyến AM và CN của hai tam giác ACD và CBD vuông góc với nhau.

32. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đường tròn tâm O. Phép quay góc φ $(0 < \varphi < \pi)$ xung quanh O biến nó thành tứ giác $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng các cặp cạnh tương ứng AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CD, $C'D'$ và DA, $D'A'$ của hai tứ giác đó giao nhau tại các điểm M, N, P và Q là các đỉnh của một hình bình hành.

33. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau ở A và B. Hai động tử M_1 và M_2 xuất phát từ A lần lượt chuyển động tròn đều trên (O_1) và (O_2) theo cùng một hướng, sau một vòng trở lại A cùng một lúc.

a) Chứng minh rằng:

i) ΔAM_1M_2 luôn đồng dạng với chính nó và đường thẳng M_1M_2 luôn đi qua B.

ii) Trong mặt phẳng có một điểm P duy nhất luôn cách đều M_1 và M_2 ở mọi thời điểm (*Đề thi Olympic Toán quốc tế, IMO, London 1979*).

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của các điểm sau đây:

i) Trung điểm M của đoạn thẳng M_1M_2;

ii) Tâm C đường tròn (AM_1M_2);

iii*) Trọng tâm G, trực tâm H của tam giác AM_1M_2.

34*. Cho tam giác ABC. Dựng tam giác XYZ nội tiếp tam giác đã cho với các đỉnh X, Y, Z lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho nó đồng dạng (thuận) với tam giác ABC và có diện tích nhỏ nhất.

Chương II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Từ trước đến nay trong phần hình học phẳng, chúng ta xem xét các vấn đề, các bài toán trong đó các đối tượng, các hình thể và các chuyển động đều được cho trong một mặt phẳng. Tuy nhiên, trong thực tế, không gian mà chúng ta đang sống không chỉ bó hẹp trong một mặt phẳng; các vật thể, các dịch chuyển mà chúng ta vẫn quan sát hàng ngày không phải lúc nào cũng có thể được mô tả bằng những mô hình đã có trong hình học phẳng. Hình học không gian (hay còn được gọi là hình học khối) đã phần nào giúp ta khắc phục những thiếu sót đó. Ở đây, bên cạnh điểm và đường thẳng như đã có trong hình học phẳng, chúng ta cần xem thêm một đối tượng cơ bản nữa là mặt phẳng và các hình thể được xét đến trong hình học không gian chủ yếu đều có dạng "khối" như tứ diện, hình chóp, hình lăng trụ, hình cầu, ...

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Điểm, đường thẳng, mặt phẳng và các tiên đề

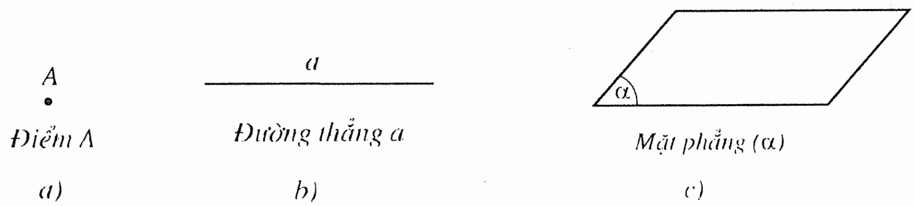
Ta đã biết rằng trong hình học phẳng, điểm, đường thẳng là các đối tượng cơ bản và xuất phát từ các đối tượng này cũng như từ các mối tương quan ban đầu giữa chúng (mà người ta thường gọi đó là các tiên đề), ta có thể xây dựng và định nghĩa các đối tượng, các khái niệm khác và thiết lập các mối tương quan mới giữa chúng.

Trong hình học không gian, ta sẽ xuất phát từ các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng, mặt phẳng. Đây là các đối tượng được thừa nhận từ đầu, không qua định nghĩa.

Có thể nói rằng chúng chính là sự thể hiện của những hình tượng, những đường nét quen thuộc mà chúng ta vẫn thường gặp và cảm nhận được khi quan sát các vật thể xung quanh cùng những chuyển động của chúng trong cuộc sống hàng ngày.

Chẳng hạn, điểm có thể được xem là biểu tượng chung của những ngôi sao lấp lánh trên bầu trời về đêm hoặc những lỗ khoan trên một tấm bảng gỗ,... đường thẳng là đường nét chính hiện hữu trong những tia sáng mặt trời hoặc trong những sợi dây được kéo căng,... Còn mặt biển yên ả không gợn sóng hoặc bề mặt một bức tường là những hình ảnh thực tế của một phần mặt phẳng,...

Trong hình học không gian các điểm thường được biểu thị trên hình vẽ bằng các chấm nhỏ và được kí hiệu bằng các chữ in lớn như: A, B, C, ... (h.2.1a).



Hình 2.1

Các đường thẳng thường được biểu thị bằng các nét kẻ thẳng và kí hiệu bằng các chữ in thường như: a, b, c, ... (h.2.1b).

Còn các mặt phẳng thường được biểu thị bằng các hình bình hành và kí hiệu bằng chữ cái Hy Lạp hoặc chữ in hoa được ghi trong ngoặc đơn như: (α), (β), (γ), ... hoặc (P), (Q), ... (h.2.1c).

Đường thẳng và mặt phẳng là các tập hợp điểm.

Nếu điểm A thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $A \in a$ và đôi khi còn nói rằng đường thẳng a đi qua điểm A.

Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua điểm A.

Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α), ta kí hiệu $a \subset (\alpha)$ và đôi khi còn nói rằng mặt phẳng (α) đi qua (hoặc chứa) đường thẳng a.

Bên cạnh việc lấy điểm, đường thẳng, mặt phẳng làm các đối tượng cơ bản (mà không định nghĩa), chúng ta còn thừa nhận một số tương quan cơ bản giữa chúng (mà không chứng minh). Các tương quan này thường xuất phát từ những nhận định đơn giản nhất về các mối quan hệ giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng có trong thực tế và thường được gọi là các tiên đề.

Trên cơ sở các đối tượng cơ bản là điểm, đường thẳng, mặt phẳng và các tiên đề được thừa nhận, người ta xây dựng các đối tượng, các khái niệm khác và thiết lập một cách chặt chẽ các tính chất cũng như các mối tương quan giữa các đối tượng mới này.

Dưới đây xin liệt kê một số tiên đề cần thiết cho việc trình bày và phát triển các vấn đề của hình học không gian ở các phần tiếp theo.

Tiên đề 1. *Trong không gian với hai điểm phân biệt cho trước có một và chỉ một đường thẳng đi qua.*

Như vậy với hai điểm phân biệt A, B tồn tại duy nhất một đường thẳng chứa cả hai điểm này và đường thẳng đó thường được gọi là đường thẳng AB.

Tiên đề 2. *Trong không gian, với ba điểm cho trước không cùng thuộc một đường thẳng, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua.*

Do đó đối với ba điểm A, B, C không cùng thuộc một đường thẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa cả ba điểm này và mặt phẳng đó thường được gọi là mặt phẳng đi qua A, B, C và kí hiệu là (ABC).

Tiên đề 3. *Trong không gian, hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì phải có điểm chung thứ hai.*

Tiên đề 4. *Trong không gian có ít nhất bốn điểm không cùng thuộc bất cứ mặt phẳng nào.*

Nếu có một số điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta thường nói rằng các điểm đó đồng phẳng. Tiên đề 2 cho thấy rằng ba điểm bất kì thì luôn luôn đồng phẳng. Nhưng đối với bốn điểm, tiên đề 4 cho thấy rằng điều tương tự không phải bao giờ cũng đúng.

Tiên đề 5. *Trong mỗi mặt phẳng của không gian, các tiên đề của hình học phẳng đều đúng.*

Như vậy tiên đề này cho phép chúng ta sử dụng các kết quả đã có của hình học phẳng trong trường hợp nếu các đối tượng mà ta đang lưu ý xem xét và các chuyển động của chúng được giới hạn trong phạm vi một mặt phẳng nào đó của không gian.

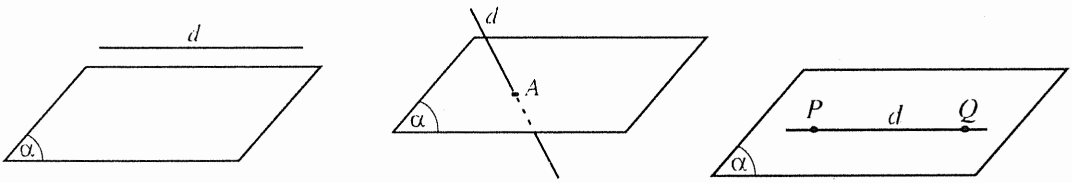
Từ các tiên đề vừa được phát biểu, chúng ta có thể thiết lập được một tổng thể về vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian.

2. Vị trí tương đối của các đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

a) *Vị trí tương đối của một đường thẳng và một mặt phẳng*

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung (h.2.2a). Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) và kí hiệu $d \,//\, (\alpha)$.
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có đúng một điểm chung (h.2.2b). Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng đường thẳng d cắt mặt phẳng (α) tại điểm A và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{A\}$.
- Đường thẳng d và mặt phẳng (α) có nhiều hơn một điểm chung (h.2.2c). Lúc này ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng d thuộc mặt phẳng (α) và kí hiệu $d \subset (\alpha)$.



$d \,//\, (\alpha)$ $d \cap (\alpha) = \{A\}$ $d \subset (\alpha)$

a)   *b)*   *c)*

Hình 2.2

Thật vậy, giả sử d và (α) có hai điểm chung là P và Q. Xét đường thẳng a đi qua P và Q trong mặt phẳng (α). Theo tiên đề 1 thì d và a phải trùng nhau, thành thử đường thẳng d phải thuộc mặt phẳng (α).

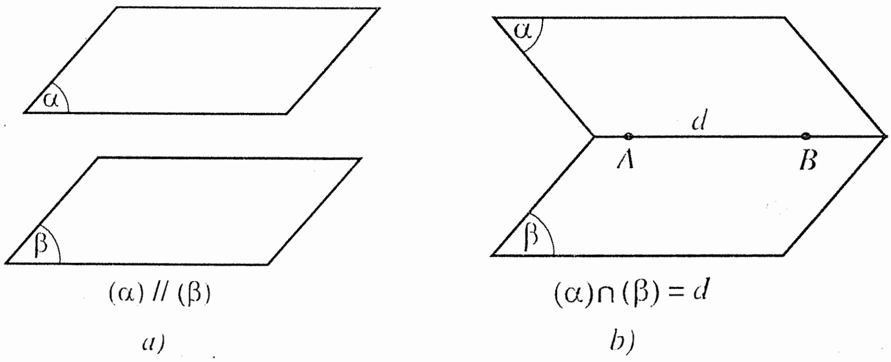
Vậy với một đường thẳng và một mặt phẳng cho trước thì:

Đường thẳng hoặc song song, hoặc cắt mặt phẳng tại một điểm hoặc thuộc mặt phẳng đó.

b) *Vị trí tương đối của hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các mặt phẳng (α) và (β) không có điểm chung (h.2.3a). Trong trường hợp này ta sẽ nói rằng các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và kí hiệu: $(\alpha) // (\beta)$.
- Các mặt phẳng (α) và (β) có ít nhất một điểm chung (h.2.3b). Lúc này ta sẽ chứng minh rằng các mặt phẳng (α) và (β) có phần chung là một đường thẳng. Thật vậy theo tiên đề 3, các mặt phẳng (α) và (β) phải có ít nhất hai điểm chung là A và B. Theo phần vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng ở trên thì (α) và (β) đều chứa đường thẳng AB. Hơn nữa có thể thấy chúng không thể có điểm chung nào khác ngoài đường thẳng AB. Nếu không, gọi C là điểm như vậy thì các mặt phẳng (α) và (β) đều đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên phải trùng nhau. Vô lí! Vậy (α) và (β) có phần chung là đường thẳng d.



Hình 2.3

Trong trường hợp này ta thường nói rằng các mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng d và kí hiệu $(\alpha) \cap (\beta) = d$.

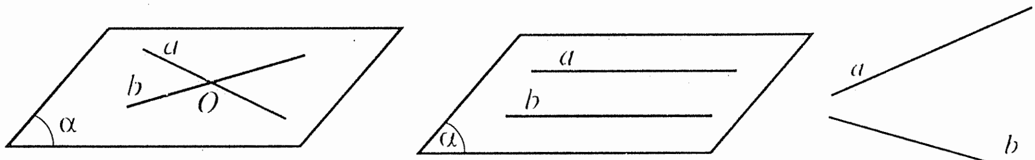
Vậy với hai mặt phẳng phân biệt cho trước thì: Hai mặt phẳng đó hoặc song song hoặc cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng.

c) *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Có thể xảy ra một trong các khả năng sau:

- Các đường thẳng a và b cùng thuộc một mặt phẳng. Trong trường hợp này ta thường nói rằng các đường thẳng a và b đồng phẳng và trong hình học phẳng ta biết rằng a và b lúc đó hoặc cắt nhau tại một điểm (h.2.4a) hoặc không cắt nhau (h.2.4b). Trường hợp hai đường thẳng a và b đồng phẳng và không cắt nhau, cũng như trong hình học phẳng, ta sẽ nói rằng a và b song song với nhau và kí hiệu: $a \parallel b$.

- Các đường thẳng a và b không cùng thuộc bất cứ một mặt phẳng nào. Trong trường hợp này ta thường nói rằng các đường thẳng a và b chéo nhau (h.2.4c).



$a \cap b = \{O\}$ — *a)* $a \parallel b$ — *b)*   *a, b chéo nhau* — *c)*

Hình 2.4

Nhận xét rằng nếu các đường thẳng a và b chéo nhau thì chúng không có điểm chung. Thật vậy, nếu a và b chéo nhau và có điểm chung là O. Lấy trên a và b các điểm A và B khác O. Rõ ràng O, A, B không cùng thuộc một đường thẳng. Do đó theo vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng thì các đường thẳng a và b đều thuộc mặt phẳng (OAB). Vô lí! Vậy a và b không có điểm chung.

Như vậy có thể thấy rằng khác với hình học phẳng, trong hình học không gian, hai đường thẳng không có điểm chung không nhất thiết phải song song với nhau mà có thể chéo nhau.

Vậy với hai đường thẳng phân biệt trong không gian thì: Hai đường thẳng đó hoặc đồng phẳng hoặc chéo nhau. Trong trường hợp đồng phẳng, chúng hoặc cắt nhau tại một điểm hoặc song song với nhau.

3. Xác định mặt phẳng trong không gian

Từ tiên đề 2 ở trên, ta biết rằng một mặt phẳng được xác định bởi ba điểm cho trước không cùng thuộc một đường thẳng. Trong các phần lí thuyết và bài tập về sau, mặt phẳng còn có thể được xác định bằng các cách thức khác. Ta nói rằng mặt phẳng được xác định bởi một cách thức nếu tồn tại duy nhất một mặt phẳng thoả mãn tất cả các yêu cầu của cách thức đó.

Mệnh đề sau đây cho ta một số cách thức xác định mặt phẳng quan trọng nhất.

MỆNH ĐỀ 1. Một mặt phẳng trong không gian có thể được xác định bởi một trong các cách thức sau:

a) Mặt phẳng đó đi qua ba điểm không cùng thuộc một đường thẳng;

b) Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và một điểm ngoài đường thẳng ấy;

c) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau;

d) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song với nhau.

Chứng minh

a) Chính là tiên đề 2.

b) Cho đường thẳng d và điểm A ở ngoài d. Ta chứng minh tồn tại duy nhất một mặt phẳng (α) đi qua d và A. Thật vậy, lấy trên đường thẳng d hai điểm B, C và gọi (α) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C thì đường thẳng d phải thuộc mặt phẳng (α) thành thử (α) đi qua d và A.

Do mọi mặt phẳng chứa d và A đều phải đi qua ba điểm A, B, C nên theo tiên đề 2, (α) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua đường thẳng d và điểm A.

c) Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau hoặc song song với nhau. Theo vị trí tương đối của hai đường thẳng thì a và b cùng thuộc một mặt phẳng (α). Theo vị trí tương đối của hai mặt phẳng thì hai mặt phẳng phân biệt không có chung hai đường thẳng khác nhau nên (α) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua các đường thẳng a và b.

Mặt phẳng đi qua đường thẳng d và điểm A ở ngoài nó thường được kí hiệu là mặt phẳng $(d; A)$.

Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng a và b cắt nhau hoặc song song với nhau thường được kí hiệu là mặt phẳng $(a; b)$.

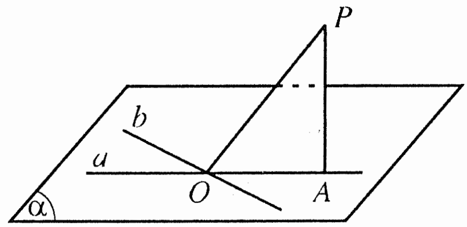
Ví dụ 1. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a, b cùng thuộc (α) sao cho a và b không song song với nhau. Gọi A là một điểm thuộc đường thẳng a nhưng không thuộc b và P là một điểm nằm ngoài (α).

a) Chứng minh rằng các đường thẳng PA và b chéo nhau;

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(a; P)$ và $(b; P)$.

Giải (h.2.5)

a) Giả sử PA và b không chéo nhau. Lúc đó chúng cùng thuộc một mặt phẳng (β). Các mặt phẳng (α) và (β) đều đi qua đường thẳng b và điểm A ở ngoài b nên theo mệnh đề 1, chúng phải trùng nhau. Suy ra điểm P phải thuộc mặt phẳng (α). Vô lí! Vậy PA và b chéo nhau.



Hình 2.5

b) Theo giả thiết a và b cắt nhau và gọi O là giao điểm của chúng.

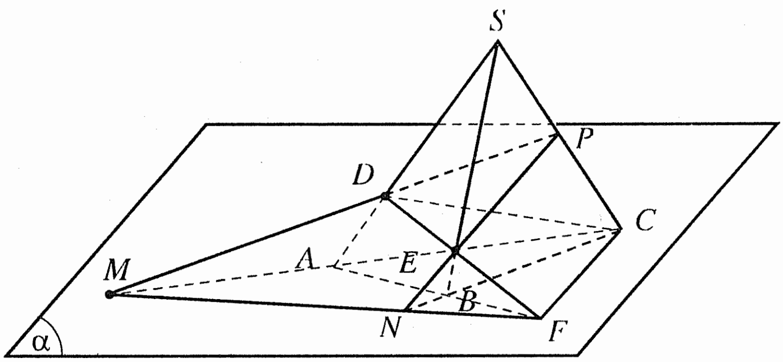
Ta có $P \in (a;P) \cap (b;P)$ và $O \in (a;P) \cap (b;P)$. Do đó giao tuyến của các mặt phẳng $(a;P)$ và $(b;P)$ chính là đường thẳng PO.

Nhận xét. Ta biết rằng giao tuyến của hai mặt phẳng là một đường thẳng; do vậy việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng tương đương với việc xác định hai điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng đã cho. Ngoài ra, nếu biết được rằng ba điểm cùng thuộc đồng thời hai mặt phẳng thì ba điểm đó phải nằm trên một đường thẳng.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC và một điểm S ở ngoài (α). Gọi D, E là các điểm thuộc các đoạn SA, SB sao cho DE không song song với AB.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (CAB) và (CDE);

b) P là một điểm thay đổi trên đoạn SC. Giả sử các đường thẳng PD và PE lần lượt cắt các đường thẳng CA và CB tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 2.6

Giải (h.2.6)

a) Theo giả thiết các đường thẳng AB và DE cắt nhau và gọi F là giao điểm của chúng.

Ta có $C \in (CAB) \cap (CDE)$ và $F \in (CAB) \cap (CDE)$ (theo cách dựng điểm F) nên đường thẳng CF chính là giao tuyến của các mặt phẳng (CAB) và (CDE).

b) Ta có $M \in (CAB) \cap (PDE)$ và $N \in (CAB) \cap (PDE)$ (theo cách xác định các điểm M, N).

Mặt khác, F là giao điểm của AB và DE nên $F \in (CAB) \cap (PDE)$.

Do đó các điểm M, N, F cùng thuộc một đường thẳng là giao tuyến của các mặt phẳng (CAB) và (PDE). Suy ra đường thẳng MN luôn đi qua điểm F cố định.

Chú ý

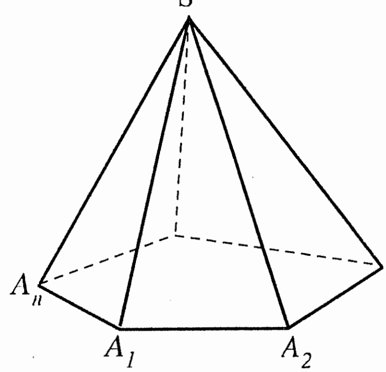
1) Ở đây ta giả thiết rằng DE không song song với AB. Trong trường hợp DE song song với AB, có thể thấy rằng đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn song song với đường thẳng AB (xem phần quan hệ song song ở sau) và do đó không đi qua điểm cố định nào.

2) Việc cho tam giác ABC và một điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABC) trong ví dụ trên thực chất là cho một hình chóp $S.ABC$ (hoặc tứ diện $SABC$). Đây là các hình quan trọng được xét đến nhiều nhất trong các bài tập của hình học không gian. Dưới đây ta sẽ đề cập cụ thể hơn đến các đối tượng này.

3. Hình chóp và tứ diện

a) Hình chóp

Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (h.2.7) là hình được lập thành từ một đa giác $A_1A_2...A_n$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác. Điểm S được gọi là *đỉnh* của hình chóp. Đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là *đáy* của hình chóp và các đoạn A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 được gọi là các *mặt*

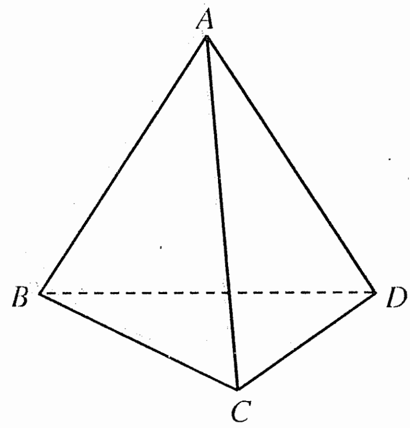


Hình 2.7

bên của hình chóp. Các đoạn SA_1, SA_2, ..., SA_n được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp. Nếu đáy là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng được gọi là hình chóp tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác,...

b) *Tứ diện*

Tứ diện $ABCD$ (h.2.8) là hình được lập thành từ bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Các điểm A, B, C, D được gọi là các *đỉnh* của tứ diện, các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC được gọi là các *mặt* của tứ diện đối diện với các đỉnh A, B, C, D và các đoạn AB, CD, AC, BD, AD, BC được gọi là *cạnh* của tứ diện. Trong đó các cặp cạnh AB và CD, AC và BD, AD và BC thường được gọi là các *cặp cạnh đối* của tứ diện.



Hình 2.8

Như vậy khác với hình chóp tam giác khi một đỉnh đã được chọn trước và ba điểm còn lại lập thành đáy hình chóp, trong tứ diện mỗi một trong bốn điểm đã cho đều là đỉnh và ba điểm còn lại lập thành mặt đối của đỉnh đó.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD);

b) Xác định giao điểm của đường thẳng MC với mặt phẳng (SBD).

Giải

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, AB cắt CD tại điểm E (h.2.9a).

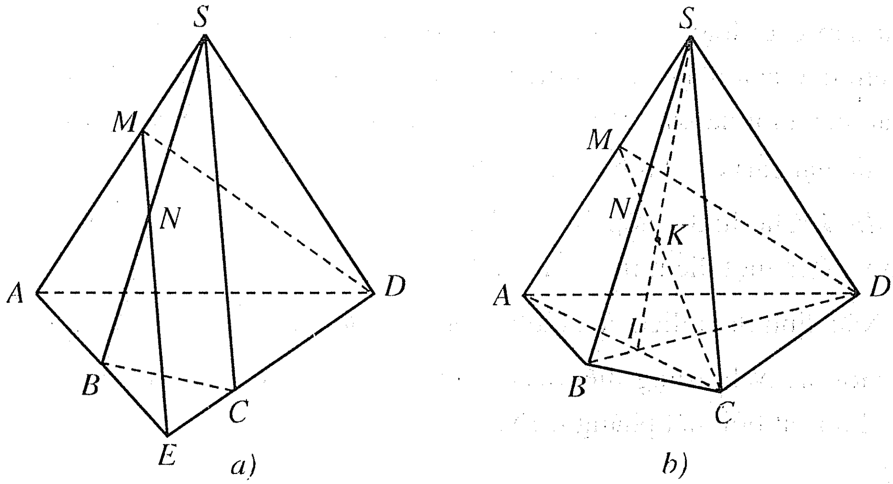
Trong mặt phẳng (SAB), SB cắt EM tại điểm N.

Ta có EM thuộc mặt phẳng (MCD) nên $N \in SB \cap (MCD)$. Suy ra N chính là giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, AC cắt BD tại điểm I (h.2.9b).

Trong mặt phẳng (SAC), MC cắt SI tại điểm K.

Ta có SI thuộc mặt phẳng (SBD) nên $K \in MC \cap (SBD)$. Suy ra K chính là giao điểm của đường thẳng MC với mặt phẳng (SBD).



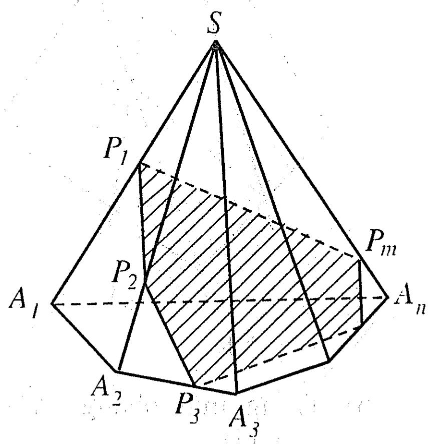
Hình 2.9

Nhận xét

1) Để xác định giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α), ta thường đi tìm trước một đường thẳng a trong mặt phẳng (α) sao cho a và d đồng phẳng (như đường thẳng EM trong câu a), đường thẳng SI trong câu b)) và lấy giao điểm của d và a.

   Việc tìm đường thẳng a như vậy thường yêu cầu phải dựng thêm một vài điểm bổ sung trong mặt phẳng (α) (như điểm E trong mặt phẳng (MCD) câu a), điểm I trong mặt phẳng (SBD) câu b)).

2) Việc xác định giao tuyến của hai mặt phẳng và xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng chính là phương tiện giúp chúng ta giải quyết vấn đề xác định thiết diện của một hình cắt bởi một mặt phẳng. Ta nói qua một đôi điều về vấn đề này.



Hình 2.10

   Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (α). Lúc đó mặt phẳng (α) có thể cắt một số mặt của hình chóp (mp(α) có thể không cắt hết các mặt của hình chóp). Mỗi mặt như vậy được (α) cắt theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến (h.2.10).

Khi sắp các đoạn giao tuyến đó một cách liên tiếp: P_1P_2, P_2P_3, ..., P_mP_1 (điểm đầu của đoạn sau là điểm cuối của đoạn trước), ta được các cạnh liền nhau của một đa giác $P_1P_2...P_m$. Đa giác này chính là thiết diện (đôi khi còn gọi là mặt cắt) của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABP);

b) Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

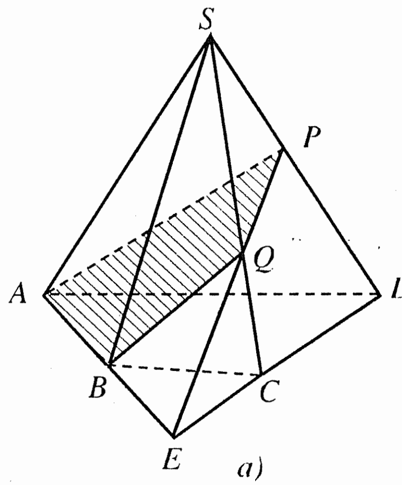
Giải

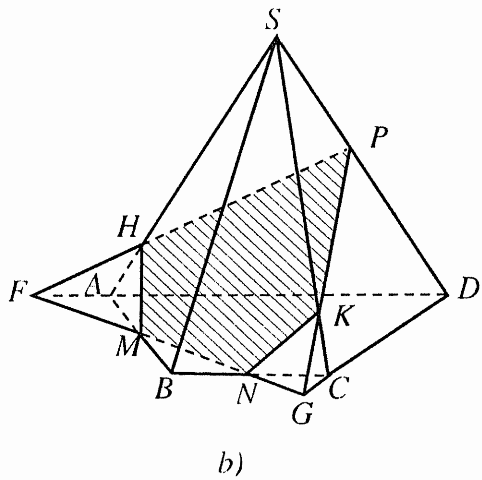
a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, AB cắt CD tại điểm E (h.2.11a).

Trong mặt phẳng (SCD), EP cắt SC tại điểm Q.

Ta có $EP \subset (ABP)$ nên Q là giao điểm của SC với (ABP).

Vậy tứ giác $ABQP$ chính là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABP).





Hình 2.11

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, MN cắt AD và CD lần lượt tại F và G (h.2.11b).

Trong mặt phẳng (SAD), PF cắt SA tại H.

Trong mặt phẳng (SCD), PG cắt SC tại K.

Ta có $PF \subset (MNP)$ nên H là giao điểm của SA với (MNP).

Ta có $PG \subset (MNP)$ nên K là giao điểm của SC với (MNP).

Vậy ngũ giác $MNKPH$ chính là thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Nhận xét. Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện cần xác định chính là đa giác với các đỉnh phải là các giao điểm của (α) với các cạnh của hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp).

BÀI TẬP

1. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng và I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh AJ, BI không đồng phẳng. Xác định giao tuyến của (AJD) và (BIC).

b) M, N là các điểm thuộc các đoạn AB, AC. Xác định giao tuyến của (BIC) và (MDN).

c) K là một điểm thuộc đoạn MN. Xác định giao điểm của DK với (BIC).

2. a) Cho n điểm trong không gian ($n \geq 4$). Biết rằng bốn điểm bất kì trong n điểm đã cho cùng thuộc một mặt phẳng. Chứng minh tất cả n điểm cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Cho n mặt phẳng trong không gian ($n \geq 4$). Biết rằng bốn mặt phẳng bất kì trong n mặt phẳng đã cho có một điểm chung. Chứng minh tất cả n mặt phẳng có một điểm chung.

3. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến d, đường thẳng a thuộc (α), điểm O ngoài (α) và ngoài (β). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng a, OM cắt (β) tại điểm N.

a) Chứng minh N luôn thuộc một đường thẳng cố định.

b) P là một điểm thay đổi trong mặt phẳng (α), OP cắt (β) tại điểm Q. Gọi K là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh K luôn thuộc một đường thẳng cố định.

4. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến d, hai điểm A, B ngoài (α) và ngoài (β) sao cho đường thẳng AB không song song với (α) và với (β). P là một điểm thay đổi trên (α); PA, PB cắt (β) tại M, N.

a) Chứng minh MN luôn đi qua một điểm cố định.

b) MN cắt d tại điểm Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

c) Cho a là một đường thẳng thuộc mặt phẳng (α) (a không song song với d). Giả sử điểm P thay đổi trên (α) sao cho P luôn thuộc a. Chứng minh M, N luôn thuộc lần lượt hai đường thẳng cố định d_1, d_2 và d_1, d_2, d đồng quy.

5. Cho tứ diện $ABCD$ có M là trung điểm cạnh AB, N là điểm trên cạnh BC: $BN = 2CN$.

a) Xác định giao điểm của MN với mp(ACD).

b) P là một điểm thuộc cạnh CD. Xác định giao tuyến của (MCD) và (ANP).

c) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mp(MNP).

6. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm mặt (ABC), I là trung điểm cạnh BD và J là điểm thuộc cạnh CD: $\dfrac{JC}{JD} = 2$.

a) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi (GIJ).

b) M là một điểm trên đoạn AJ. Xác định giao điểm của GM với (ABD).

7. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA.

a) Chứng minh nếu M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng thì

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{DP}\cdot\frac{DQ}{AQ} = 1.$$

b) Khẳng định ngược lại có đúng không? Vì sao?

8. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N là trung điểm cạnh AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm BC).

a) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi (MNP).

b) Chứng minh MN chia đôi diện tích thiết diện.

9. Cho tứ diện $ABCD$ có M là trung điểm cạnh AB và N là điểm thuộc cạnh AC: $\frac{NA}{NC} = 2$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua M, N cắt các cạnh BD, CD ở P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ và BC đồng quy.

b) Gọi K là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh K luôn thuộc một đường thẳng cố định.

c) Gọi I là giao điểm của MP và NQ. Biết $ID = AD$, tính các tỉ số $\frac{PB}{PD}, \frac{QC}{QD}$.

10. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm cạnh bên SA, N là điểm thuộc cạnh bên SB: $SN = \frac{3}{4}SB$ và O là một điểm thuộc mặt đáy (ABC).

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNO).

b) P là một điểm thuộc cạnh bên SC. Xác định giao điểm của SO với (MNP).

11. Cho hình chóp $S.ABC$, D là một điểm thuộc cạnh bên SA, M là một điểm thay đổi trên cạnh BC và N là trung điểm AM. Gọi K là giao điểm của SN và DM.

a) Chứng minh K luôn thuộc một đường thẳng d cố định và xác định đường thẳng d.

b) E là một điểm thuộc cạnh bên SC. Xác định giao điểm của d với (AEM).

12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm cạnh bên SA và N là một điểm thuộc cạnh BC.

a) Xác định giao điểm của SC với (MND).

b) P là một điểm thuộc cạnh CD. Xác định giao tuyến của (MND) và (SBP).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh bên SA và N là một điểm thuộc cạnh bên SC (N không là trung điểm SC).

a) Xác định giao tuyến của (ABN) và (CDM).

b) Xác định giao điểm của MN với (SBD).

c) P là một điểm thuộc cạnh AB. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

14. Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là một điểm thuộc mặt bên (SCD).

a) Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBM).

b) Xác định giao điểm của AM với (SBD).

c) Gọi I, J là trung điểm AB, AD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MIJ).

15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là điểm thuộc cạnh bên SD: $SM = \frac{1}{3}SD$.

a) Xác định giao điểm của BM với mặt phẳng (SAC).

b) N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Xác định giao tuyến của (AMN) và (SBC). Chứng minh giao tuyến này luôn đi qua một điểm cố định.

c) G là trọng tâm mặt bên (SAB). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNG).

16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn AD, M là một điểm thuộc mặt bên (SCD).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAM) với mặt phẳng (SBC).

b) N là một điểm thuộc cạnh AB. Xác định giao điểm của SB với (DMN).

c) P là một điểm thuộc cạnh bên SB. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

17. Cho hình chóp S.$ABCD$, M là trung điểm cạnh bên SB và N là điểm thuộc cạnh bên SC sao cho: $SN = \frac{2}{3}SC$.

a) Xác định giao điểm của CD với mặt phẳng (AMN).

b) P là một điểm thuộc mặt bên (SAD). Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (PBD).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

18. Trong không gian cho n ($n \geq 3$) đường thẳng không cùng thuộc một mặt phẳng.

a) Biết rằng hai đường thẳng bất kì trong n đường thẳng đã cho cắt nhau, chứng minh rằng tất cả n đường thẳng đồng quy.

b) Kết luận gì nếu hai đường thẳng bất kì đồng phẳng? Vì sao?

19. Cho tứ diện $ABCD$ có G_1, G_2, G_3, G_4 và I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp các mặt BCD, CDA, DAB, ACB của tứ diện.

a) Chứng minh AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 đồng quy.

b) Biết tứ diện $ABCD$ thoả mãn: $AB.CD = AC.BD = AD.BC$. Chứng minh AI_1, BI_2, CI_3, DI_4 đồng quy.

§2. QUAN HỆ SONG SONG

Ở trên ta đã thấy rằng quá trình xác định thiết diện của một hình cắt bởi một mặt phẳng thường được thực hiện thông qua việc tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cũng như tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng.

Trong quá trình đó, mỗi đỉnh của một thiết diện cần dựng có thể xác định như là giao điểm của hai đường thẳng đồng phẳng được chọn lựa phù hợp với tình hình cụ thể của từng bài toán.

Trong một vài trường hợp, khi hai đường thẳng đồng phẳng được chọn lựa không thể cắt nhau, việc tìm các yếu tố cần thiết cho bài toán xác định thiết diện (như giao tuyến, giao điểm) có thể được thực hiện dựa trên một số tính chất liên quan đến các mối quan hệ song song. Các tính chất này còn cho phép chúng ta bổ sung thêm những cách thức khác để xác định một đường thẳng hoặc một mặt phẳng trong không gian.

1. Đường thẳng song song với đường thẳng

a) Định nghĩa

Trong phần vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian, ta đã biết rằng hai đường thẳng phân biệt bất kì hoặc chéo nhau hoặc đồng phẳng và nếu đồng phẳng thì hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau tại một điểm hoặc không cắt nhau.

Nếu hai đường thẳng phân biệt đồng phẳng và không cắt nhau thì cũng như trong hình học phẳng ta nói rằng hai đường thẳng đó song song với nhau. Vậy, trong không gian:

Hai đường thẳng a và b được gọi là song song với nhau, kí hiệu $a \parallel b$, nếu chúng đồng phẳng và không cắt nhau.

b) *Tính chất*

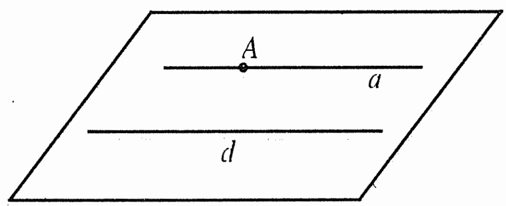
Trong hình học phẳng, ta biết rằng với một đường thẳng d cho trước và một điểm A cho trước nằm ngoài d, tồn tại duy nhất một đường thẳng a đi qua A và song song với d.

Khẳng định này cho ta một cách xác định đường thẳng trong mặt phẳng và được thừa nhận như là một tiên đề. Tiên đề này thường được gọi là tiên đề 5 của hình học phẳng.

Trong không gian, tính chất này cũng đúng nhưng khác với trong mặt phẳng, nó có thể được chứng minh bằng cách sử dụng tiên đề 5 của hình học phẳng mà ta vừa nhắc đến ở trên.

ĐỊNH LÍ 1. *Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm A ngoài d. Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng a đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.*

Chứng minh. Xét mặt phẳng $(d; A)$. Trong mặt phẳng này theo tiên đề 5 của hình học phẳng, tồn tại một đường thẳng a đi qua A và song song với đường thẳng d (h.2.12).



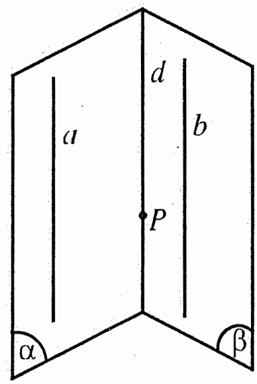
Hình 2.12

Nếu trong không gian còn có một đường thẳng b cũng đi qua A và song song với d thì mặt phẳng $(d;b)$ xác định bởi các đường thẳng song song b và d cũng chính là mặt phẳng $(d;A)$. Theo tính duy nhất của tiên đề 5 trong mặt phẳng này thì các đường thẳng a và b phải trùng nhau. Vậy đường thẳng a tồn tại và duy nhất.

Định lí vừa được chứng minh cho ta thêm một cách xác định đường thẳng trong không gian: đó là đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước không chứa điểm đó. Kết hợp với mệnh đề dưới đây, nó còn cho một phương thức bổ sung để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

MỆNH ĐỀ 1. Nếu hai mặt phẳng chứa lần lượt hai đường thẳng song song với nhau và hai mặt phẳng đó cắt nhau theo một đường thẳng thì đường thẳng này song song với cả hai đường thẳng trên hoặc trùng với một trong chúng.

Chứng minh. Giả sử các mặt phẳng (α) và (β) chứa lần lượt các đường thẳng a và b song song với nhau và (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến d (h.2.13).



Hình 2.13

Xét mặt phẳng $(a; b)$.

Nếu mặt phẳng này trùng với (α) thì ta có:

$(\alpha) \cap (\beta) = b$ và do đó b trùng với d.

Tương tự nếu mặt phẳng $(a; b)$ trùng với (β) thì a trùng với d và mệnh đề được chứng minh.

Bây giờ giả sử rằng $(a; b)$ không trùng với cả (α) lẫn (β). Lấy điểm P bất kì trên d.

Nếu $P \in a$ thì $P \notin b$, suy ra các mặt phẳng (β) và $(a; b)$ phải trùng nhau vì cùng chứa P và b. Vô lí! Thành thử với mọi điểm P thuộc d thì P không thuộc a nên $d \parallel a$.

Lập luận tương tự ta cũng được $d \parallel b$.

Vậy d song song với cả a và b.

Từ mệnh đề 1, có thể chứng minh tính chất sau:

MỆNH ĐỀ 2. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Mệnh đề này thường được gọi là tính bắc cầu trong quan hệ song song giữa các đường thẳng và có thể được ghi vắn tắt dưới dạng:

$$d_1 \parallel d_2,\ d_2 \parallel d_3 \Rightarrow d_1 \parallel d_3.$$

Trong hình học phẳng, đây là một tính chất quen thuộc và là hệ quả của tiên đề 5. Còn trong hình học không gian, ta chứng minh nó như sau:

Chứng minh. Giả sử hai đường thẳng a, b cùng song song với đường thẳng c.

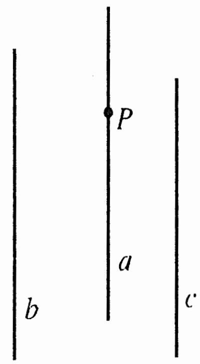
Nếu a, b và c cùng thuộc một mặt phẳng thì theo tính chất quen thuộc đã biết trong hình học phẳng, hệ quả được chứng minh.

Giả sử ba đường thẳng này không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lấy một điểm P trên đường thẳng a (h.2.14).

Các mặt phẳng (b; P) và (c; a) không trùng nhau và có điểm P chung nên chúng cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng. Đường thẳng này cũng đi qua P và song song với c như đường thẳng a nên đó chính là đường thẳng a.

Theo mệnh đề 1 vừa chứng minh trên, giao tuyến a song song với b và c.



Hình 2.14

Mệnh đề được chứng minh.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn AB.

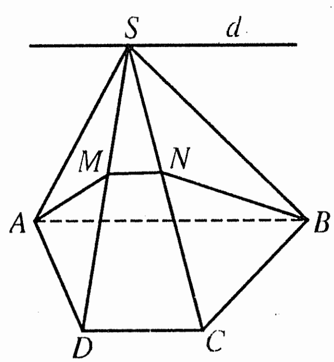
a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD);

b) M là một điểm trên cạnh SD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Giải (h.2.15)

a) Các mặt phẳng (SAB), (SCD) đều đi qua điểm S và chứa lần lượt các đường thẳng AB, CD song song với nhau nên giao tuyến của chúng chính là đường thẳng d đi qua điểm S và song song với AB (hoặc CD).

b) Trong mặt phẳng (SCD), kẻ đường thẳng đi qua điểm M và song song với AB cắt SC tại điểm N.



Hình 2.15

Các mặt phẳng (ABM), (SCD) đều đi qua điểm M và chứa lần lượt các đường thẳng AB, CD song song với nhau nên giao tuyến của chúng chính là đường thẳng MN.

Suy ra thiết diện cần tìm là tứ giác $ABNM$.

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng

ĐỊNH NGHĨA.

Trong phần vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng trong không gian ta đã biết rằng đối với một đường thẳng và một mặt phẳng cho trước thì đường thẳng và mặt phẳng đó hoặc không có điểm chung hoặc có đúng một điểm chung hoặc đường thẳng thuộc mặt phẳng đó.

Nếu đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung, ta nói rằng đường thẳng và mặt phẳng đó song song với nhau.

Vậy trong không gian:

Đường thẳng d và mặt phẳng (α) được gọi là song song với nhau, kí hiệu $d \ // \ (\alpha)$, nếu chúng không có điểm chung.

TÍNH CHẤT.

Trong thực tế, việc chứng minh một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau thường được quy về việc chứng minh hai đường thẳng song song với nhau như nội dung định lí sau:

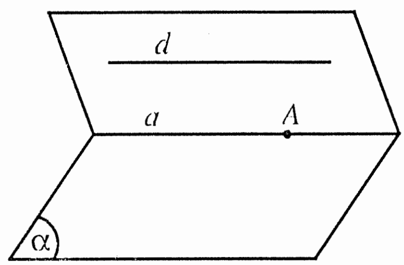
ĐỊNH LÍ 2. *Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng d không thuộc (α). Lúc đó d và (α) song song với nhau khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng a thuộc (α) sao cho d và a song song với nhau.*

Chứng minh (h.2.16)

Phần thuận. Giả sử d song song với (α).

Lấy một điểm A thuộc (α) và gọi a là giao tuyến của các mặt phẳng (α) và $(d; A)$.

Không khó thấy rằng các đường thẳng d và a đồng phẳng và không có điểm chung nào nên d và a song song với nhau.



Hình 2.16

Phần đảo. Giả sử tồn tại một đường thẳng a thuộc (α) sao cho d song song với a. Xét mặt phẳng $(d;a)$, ta thấy ngay rằng giao tuyến của các mặt phẳng $(d;a)$ và (α) chính là đường thẳng a.

Nếu đường thẳng d và mặt phẳng không song song với nhau. Xét P là điểm chung của d và (α) thì P phải là điểm chung của các mặt phẳng $(d; A)$ và (α) nên P thuộc giao tuyến a của các mặt phẳng này.

Suy ra P là điểm chung của d và a. Vô lí!

Vậy d và (α) song song với nhau.

Dựa vào định lí trên, có thể chứng minh mệnh đề 3 dưới đây. Mệnh đề này có thể xem là mở rộng của mệnh đề 1 ở phần trước và cho phép ta xác định giao tuyến của hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng cho trước.

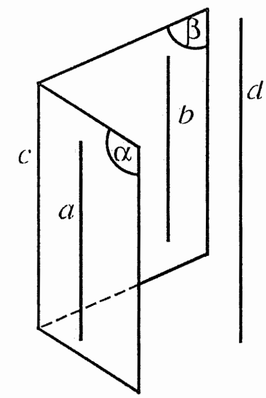
MỆNH ĐỀ 3. Nếu hai mặt phẳng cùng song song hoặc chứa một đường thẳng và chúng cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng thì giao tuyến này song song hoặc trùng với đường thẳng trên.

Chứng minh. Giả sử các mặt phẳng (α), (β) cùng song song hoặc chứa đường thẳng d và (α), (β) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng c.

Theo định lí 2 vừa chứng minh ở trên, tồn tại các đường thẳng a, b lần lượt thuộc (α), (β) sao cho a, b song song hoặc trùng với d.

Nếu a và b trùng nhau thì đó chính là giao tuyến c nên c phải song song hoặc trùng với d.

Nếu a và b phân biệt thì chúng song song với nhau.



Hình 2.17

Theo mệnh đề 1 ở phần trước, các mặt phẳng (α), (β) chứa các đường thẳng a, b song song với nhau nên giao tuyến c của chúng phải song song với a và b hoặc trùng với một trong hai đường thẳng này.

Suy ra c song song hoặc trùng với d.

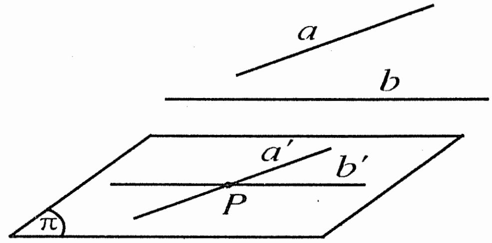
Tính chất song song giữa đường thẳng và mặt phẳng còn cho ta một cách thức xác định mặt phẳng khá phổ biến. Đó là mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và song song với hai đường thẳng cho trước.

Một cách chính xác và đầy đủ hơn, ta có định lí sau:

ĐỊNH LÍ 3. *Cho điểm P và hai đường thẳng a, b chéo nhau. Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (π) đi qua điểm P sao cho (π) song song hoặc chứa a và song song hoặc chứa b.*

Chứng minh (h.2.18)

Gọi a' là đường thẳng đi qua P và song song hoặc trùng với a (a' trùng với a nếu P thuộc a). Gọi b' là đường thẳng đi qua P và song song với b. Ta có các đường thẳng a' và b' cắt nhau tại điểm P.



Hình 2.18

Kí hiệu (π) là mặt phẳng $(a';b')$, ta chứng minh a, b đều song song hoặc thuộc (π). Thật vậy, nếu a thuộc (π) thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Nếu a không thuộc (π) thì do a // a' mà a' thuộc (π) nên a song song với (π). Vậy a song song hoặc thuộc (π).

Lập luận tương tự cho đường thẳng b, suy ra a và b đều song song hoặc thuộc (π).

Cuối cùng ta chứng minh rằng mặt phẳng (π) tồn tại duy nhất. Thật vậy, nếu có mặt phẳng (π') khác cũng đi qua P sao cho (π') song song hoặc chứa a và (π') song song hoặc chứa b. Lúc đó ta thấy (π) và (π') phải cắt nhau theo một đường thẳng và đường thẳng này vừa phải song song hoặc chứa a vừa phải song song hoặc chứa b. Thành thử a và b phải song song với nhau. Vô lí!

Vậy mặt phẳng (π) tồn tại và duy nhất.

Chú ý. Trong phát biểu các định lí và mệnh đề của phần quan hệ song song, chúng ta hay bắt gặp cụm từ "song song hoặc trùng" thay cho từ "song song" trong quan hệ giữa hai đường thẳng và cụm từ "song song hoặc thuộc" cũng như "song song hoặc chứa" thay cho từ "song song" trong quan hệ giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Sở dĩ có sự bổ sung này là vì "trùng nhau" và tương tự là "thuộc", "chứa" có thể xem như là trường hợp đặc biệt của hai đường thẳng song song (tương tự là của đường thẳng song song với mặt phẳng), trong đó tính chất cốt yếu của quan hệ song song là "chỉ cùng một phương" vẫn được đảm bảo. Và việc sử dụng các cụm từ nêu trên cho phép chúng ta trình bày các mệnh đề liên quan đến các tính chất song song một cách đơn giản, chính xác và đầy đủ mà không phải đưa ra các điều kiện giới hạn để loại bỏ các trường hợp đặc biệt.

Để minh hoạ cho điều này, xin dẫn ra đây mệnh đề sau mà thực chất là tương đương với định lí 3 ở trên.

MỆNH ĐỀ 4. Cho điểm P và hai đường thẳng a, b chéo nhau sao cho P không thuộc a và b. Giả sử đường thẳng a không song song với mặt phẳng $(P; b)$ và đường thẳng b không song song với mặt phẳng $(P; a)$. Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (π) đi qua P sao cho (π) song song với a và b.

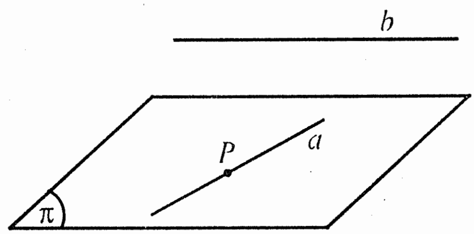
Chứng minh. Theo định lí 3, tồn tại duy nhất mặt phẳng (π) đi qua P sao cho (π) song song hoặc chứa a và song song hoặc chứa b. Nhưng nếu (π) chứa a thì (π) chính là mặt phẳng $(P;a)$ và $(P; a)$ phải song song với b. Điều này vô lí với giả thiết b không song song với $(P; a)$. Vậy (π) không thể chứa a và tương tự (π) cũng không thể chứa b. Do đó (π) song song với a và b và mệnh đề được chứng minh.

Rõ ràng việc tránh sử dụng các cụm từ "song song hoặc chứa" ở đây làm cho phát biểu của mệnh đề 4 trở nên khó khăn hơn so với định lí 3. Ở đây cần thiết phải bổ sung một vài giả thiết như a không song song với $(P; b)$, b không song song với $(P; a)$ và điểm P không thuộc các đường thẳng a, b.

Trong trường hợp nếu P thuộc một trong hai đường thẳng a hoặc b định lí 3 cho ta một hệ quả đơn giản nhưng quan trọng. Nó cho phép chúng ta xác định khái niệm mặt phẳng đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng khác.

HỆ QUẢ. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng (π) đi qua a và song song với b.

Chứng minh (h.2.19). Lấy một điểm P trên đường thẳng a và áp dụng định lí 3. Rõ ràng trong trường hợp này mặt phẳng (π) trước hết không thể song song với a (vì có điểm P chung) và (π) lúc đó lại không thể chứa b (vì a, b chéo nhau) thành thử (π) phải chứa a và song song với b.

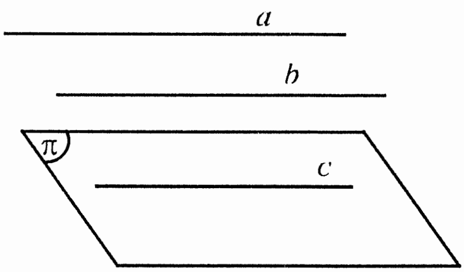


Hình 2.19

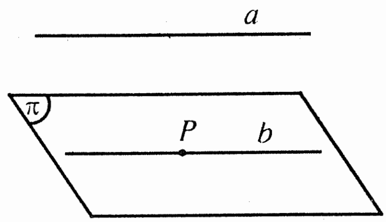
Tính chất bắc cầu trong quan hệ song song giữa đường thẳng và mặt phẳng có thể được phát biểu như sau:

MỆNH ĐỀ 5. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (π). Nếu đường thẳng b song song với đường thẳng a thì b song song hoặc thuộc (π).

Chứng minh (h.2.20). Nếu b thuộc (π) thì mệnh đề hiển nhiên nên giả sử b không thuộc (π). Theo định lí 2, trong mặt phẳng (π) tồn tại một đường thẳng c song song với đường thẳng a và do a song song với b nên c cũng song song với b. Suy ra b song song với mặt phẳng (π).



Hình 2.20



Hình 2.21

HỆ QUẢ. Cho một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau. Nếu một đường thẳng đi qua một điểm thuộc mặt phẳng đã cho và song song với đường thẳng đã cho thì nó phải thuộc mặt phẳng này.

Chứng minh (h.2.21). Giả sử đường thẳng a song song với mặt phẳng (π) và b là đường thẳng đi qua điểm P thuộc mp(π) và song song với a. Theo mệnh đề 5 ở trên, b song song hoặc thuộc mp (π) nhưng do b và mp(π) có chung điểm P nên b phải thuộc mp(π).

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N là trung điểm các cạnh AB, BC.

a) Chứng minh $MN \parallel (SAC)$;

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua CM và song song với SB. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi (α).

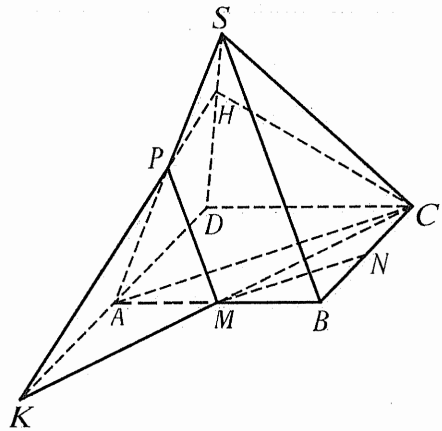
c) Gọi (β) là mặt phẳng đi qua điểm M và song song với SB, AC. Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi (β).

Giải

a) Trước hết nhận xét rằng đường thẳng MN không thuộc mặt phẳng (SAC) vì nếu ngược lại điểm S phải thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua AC và MN, vô lí!

Ta có MN // AC vì là đường trung bình tam giác BAC (h.2.22) suy ra MN // (SAC).

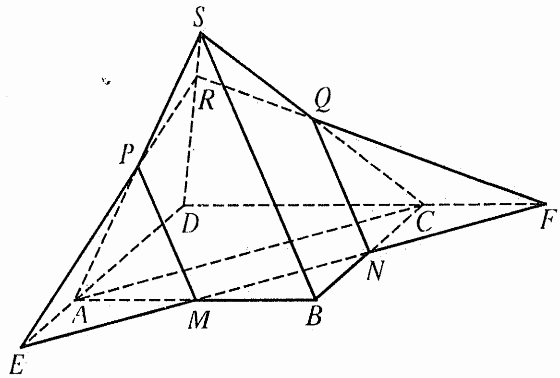
b) Trong mặt phẳng (SAB), kẻ đường thẳng qua M và song song với SB cắt SA tại P. Ta có MP là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên (SAB) (vì (α) và (SAB) cùng đi qua điểm M và cùng song song hoặc chứa SB).



Hình 2.22

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, CM cắt AD kéo dài tại K. Trong mặt phẳng (SAD), KP cắt SD tại H. Ta có PH là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên (SAD). Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $CMPH$.

c) Trong mặt phẳng (SAB), kẻ đường thẳng qua M và song song với SB cắt SA tại P (h.2.23).



Hình 2.23

Do MN qua M và song song với AC nên MN chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt đáy $(ABCD)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng MN cắt DA và DC kéo dài tại E, F. Trong mặt phẳng (SAD), EP cắt SD tại R. Trong mặt phẳng (SDC), FR cắt SC tại Q. Ta có ngũ giác $MNQRP$ chính là thiết diện cần tìm.

3. Mặt phẳng song song với mặt phẳng

ĐỊNH NGHĨA

Trong phần vị trí tương đối của hai mặt phẳng, ta đã biết rằng hai mặt phẳng bất kì hoặc không có điểm chung hoặc cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng. Nếu hai mặt phẳng không có điểm chung, ta nói rằng hai mặt phẳng đó song song với nhau. Như vậy trong không gian:

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau, kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$, nếu chúng không có điểm chung.

TÍNH CHẤT.

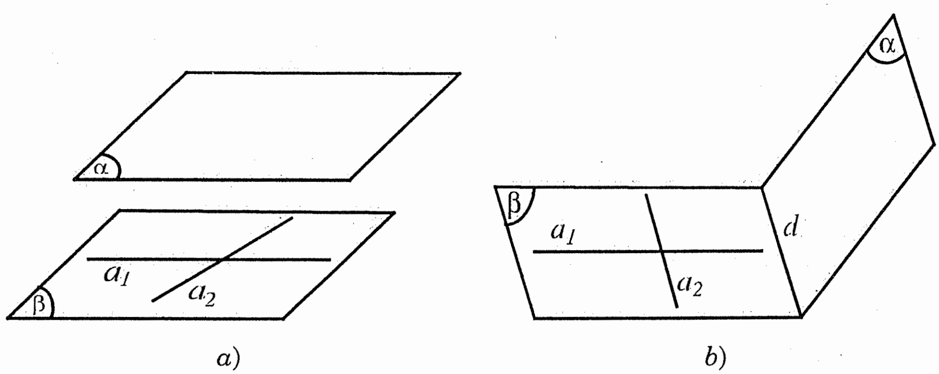
Trước hết chúng ta phát biểu một định lí về điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng song song. Định lí này cho phép đưa việc chứng minh hai mặt phẳng song song về chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng đã quen biết ở trên.

ĐỊNH LÍ 4. *Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Lúc đó (α) và (β) song song với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng (β) tồn tại hai đường thẳng a_1, a_2 cắt nhau sao cho a_1 và a_2 đều song song với (α).*

Chứng minh.

Phần thuận (h.2.24a). Giả sử hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

Lấy trong mặt phẳng (β) hai đường thẳng a_1, a_2 cắt nhau. Hai đường thẳng này đều không có điểm chung với mặt phẳng (α) nên chúng đều song song với (α).



Hình 2.24

Phần đảo. Giả sử trong mặt phẳng (β) tồn tại hai đường thẳng a_1, a_2 cắt nhau sao cho chúng đều song song với mặt phẳng (α).

Ta chứng minh $(\alpha) // (\beta)$ (h.2.24b).

Thật vậy, nếu (α) và (β) không song song với nhau thì chúng phải cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng d. Do a_1 và a_2 không song song với nhau trong (β) nên phải có ít nhất một đường trong chúng cắt đường thẳng d. Suy ra đường thẳng này lại có điểm chung (là giao điểm nói trên) với mặt phẳng (α). Vô lí!

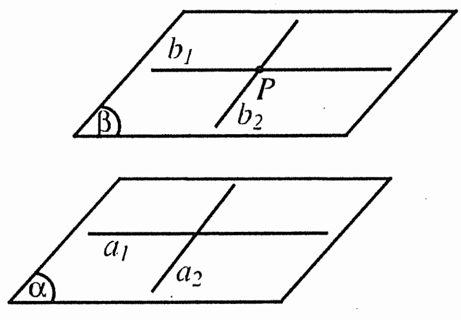
Vậy $(\alpha) // (\beta)$.

Và cũng như quan hệ song song giữa đường thẳng và mặt phẳng ở phần trước, quan hệ song song giữa mặt phẳng và mặt phẳng cho ta một cách thức xác định mặt phẳng khá thuận lợi. Đó là mặt phẳng đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng cho trước. Cách xác định này có thể được xem như mở rộng của việc xác định một đường thẳng đi qua một điểm và song song với một đường thẳng cho trước của tiên đề 5 trong hình học phẳng. Khác biệt ở đây là đối với đường thẳng, cách xác định này được chấp nhận như một tiên đề còn đối với mặt phẳng trong không gian, ta có thể chứng minh nó dựa vào định lí đã có ở trên và tiên đề 5 trong hình học phẳng.

ĐỊNH LÍ 5. *Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*

Chứng minh (h.2.25). Giả sử P là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α). Lấy hai đường thẳng a_1, a_2 cắt nhau trong mặt phẳng (α).

Trong mặt phẳng $(P; a_1)$ dựng đường thẳng b_1 đi qua P và song song với a_1; tương tự trong mặt phẳng $(P; a_2)$ dựng đường thẳng b_2 đi qua P và song song với a_2. Kí hiệu mặt phẳng $(b_1; b_2)$ là (β).



Hình 2.25

Để ý rằng các đường thẳng b_1, b_2 đều song song với mặt phẳng (α) (do chúng lần lượt song song với các đường thẳng a_1, a_2 thuộc (α)) nên theo định lí 4 ở trên, các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

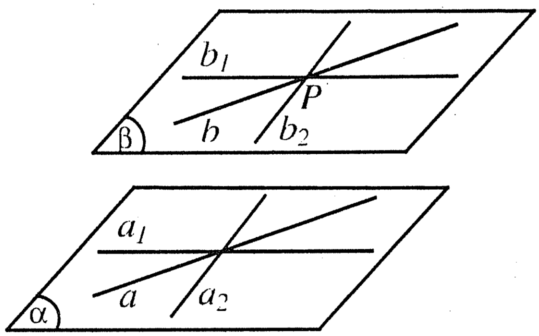
Bây giờ ta chứng minh rằng (β) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua điểm P và song song với mặt phẳng (α).

Thật vậy, nếu (γ) cũng là một mặt phẳng đi qua P và song song với mặt phẳng (α) thì các đường thẳng a_1, a_2 đều song song với (γ) (do không có điểm chung với (γ)). Các đường thẳng b_1, b_2 đều đi qua P và lần lượt song song với a_1, a_2 nên theo hệ quả của mệnh đề 5 ở trước, b_1, b_2 thuộc (γ), vô lí!

Vậy (β) chính là mặt phẳng duy nhất đi qua P và song song với mặt phẳng (α).

Chú ý

1) Tương tự như các đường thẳng b_1, b_2 phải thuộc mặt phẳng (γ) trong chứng minh trên, nếu ta xét một đường thẳng b đi qua điểm P và song song với mặt phẳng (α) thì do b phải song song với một đường thẳng a trong mặt phẳng (α) ta cũng suy ra được b phải thuộc mặt phẳng (β) đi qua P và song song với mặt phẳng (α) (h.2.26).



Hình 2.26

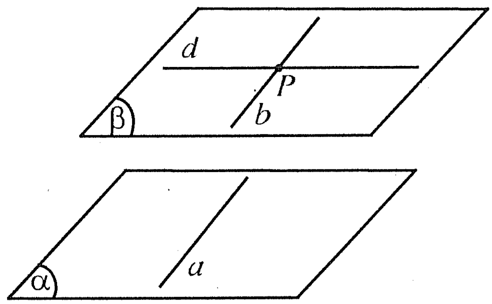
Định lí vừa được chứng minh có thể phát biểu bổ sung như sau:

ĐỊNH LÍ 5 *(bổ sung). Cho một điểm P nằm ngoài mặt phẳng (α). Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua P và song song với (α). Mặt phẳng này chứa mọi đường thẳng đi qua điểm P và song song với mặt phẳng (α).*

2) Ngoài điều kiện đi qua một điểm ở ngoài một mặt phẳng và song song với mặt phẳng đó, ta còn có thể xác định một mặt phẳng bằng điều kiện: đi qua một đường thẳng ở ngoài một mặt phẳng và song song với mặt phẳng đó. Đường thẳng ở ngoài mặt phẳng ở đây được hiểu là đường thẳng song song với mặt phẳng. Ta có mệnh đề sau:

MỆNH ĐỀ 6. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Lúc đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua d và song song với (α).

Chứng minh (h.2.27). Lấy một điểm P trên đường thẳng d và một đường thẳng a trong mặt phẳng (α) sao cho a không song song với d và dựng đường thẳng b qua P, song song với a. Lập luận tương tự như chứng minh định lí 5 ta có mặt phẳng $(d;b)$ là mặt phẳng duy nhất đi qua d và song song với (α).



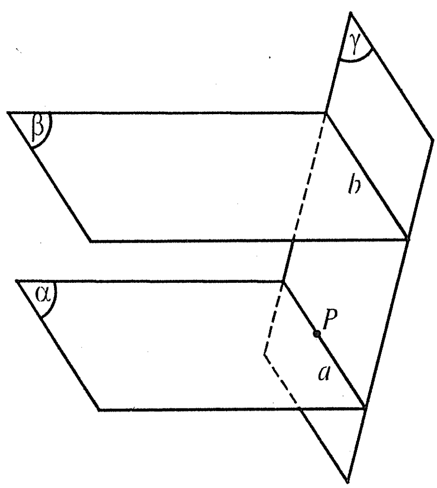
Hình 2.27

Mệnh đề 7 tiếp theo có thể xem là hệ quả của định lí 5. Nó cho phép ta xác định giao tuyến của hai mặt phẳng dựa vào quan hệ song song của hai mặt phẳng.

MỆNH ĐỀ 7. Cho (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu mặt phẳng (γ) cắt (α) theo một đường thẳng thì (γ) cũng cắt (β) theo một đường thẳng và các đường thẳng này song song với nhau.

Chứng minh (h.2.28)

Giả sử (γ) cắt (α) theo đường thẳng a. Nếu (γ) không cắt (β) theo một đường thẳng thì (γ) và (β) phải song song với nhau. Lấy một điểm P trên đường thẳng a thì (α) và (γ) đều đi qua P và song song với (β) nên theo định lí 5 ở trên (α) và (γ) trùng nhau. Vô lí! Vậy (γ) cắt (β) theo một đường thẳng b. Các đường thẳng a, b cùng thuộc mặt phẳng (γ) và không có điểm chung (do (α) và (β) không có điểm chung) nên chúng song song với nhau.



Hình 2.28

Từ mệnh đề vừa được chứng minh, ta có ngay tính chất bắc cầu trong quan hệ song song giữa các mặt phẳng.

MỆNH ĐỀ 8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chứng minh. Giả sử các mặt phẳng (α) và (β) cùng song song với mặt phẳng (γ). Nếu (α) và (β) cắt nhau theo một đường thẳng thì do $(\beta) // (\gamma)$ nên từ mệnh đề 7 suy ra (α) và (γ) cũng phải cắt nhau theo một đường thẳng. Vô lí! Vậy các mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

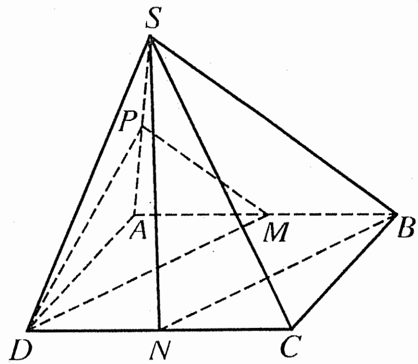
a) Chứng minh $(SBN) // (DPM)$;

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua Q và song song với mặt phẳng (SBN);

c) Xác định thiết diện hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).

Giải

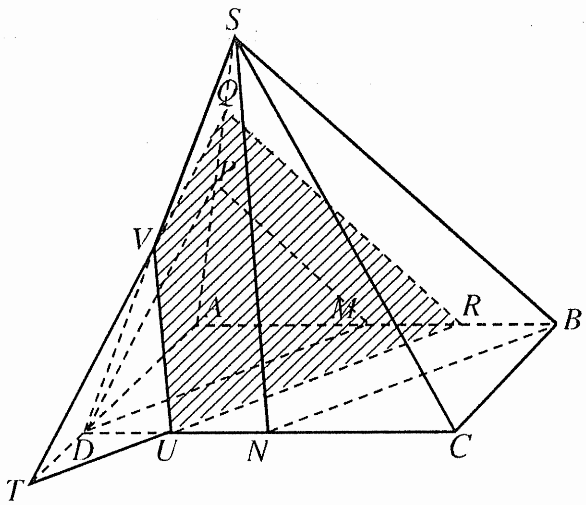
a) Để ý rằng $BN // DM$ và $BS // MP$ nên BN và BS đều song song với mặt phẳng (DPM). Suy ra mặt phẳng (SBN) song song với mặt phẳng (DPM) (h.2.29).



Hình 2.29

b) Để ý rằng $(\alpha) // (SBN)$ nên giao tuyến của (α) với (SAB) phải song song với SB. Do đó trong mặt phẳng (SAB) kẻ đường thẳng đi qua Q và song song với SB và cắt AB tại R thì QR chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên (SAB).

Tương tự trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ đường thẳng đi qua R, song song với BN và cắt CD tại U thì RU chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt đáy $(ABCD)$ (h.2.30). Trong mặt phẳng $(ABCD)$ đường thẳng RU cắt AD kéo dài tại T. Trong mặt phẳng (SAD), TQ cắt SD tại V. Ta có tứ giác $QRUV$ là thiết diện cần tìm.

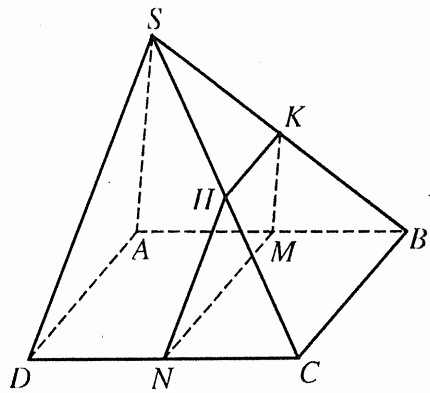


Hình 2.30

Chú ý. Giao điểm V của (α) với cạnh SD còn có thể được dựng như sau:

Do (SBN) // (DPM) suy ra (α) // (DPM) nên nếu trong mặt phẳng (SAD) kẻ đường thẳng đi qua Q, song song với PD và cắt SD tại V thì QV chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên (SAD).

c) Trong mặt phẳng (SAB) kẻ đường thẳng đi qua M, song song với SA cắt SB tại K (h.2.31).



Hình 2.31

Do (β) // (SAD), giao tuyến của (β) với (SAB) phải song song với SA suy ra MK chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt bên (SAB).

Tương tự, trong mặt phẳng (SCD) kẻ đường thẳng đi qua N, song song với SD và cắt SC tại H thì NH chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt bên (SCD). Ta có tứ giác $MNHK$ chính là thiết diện cần dựng.

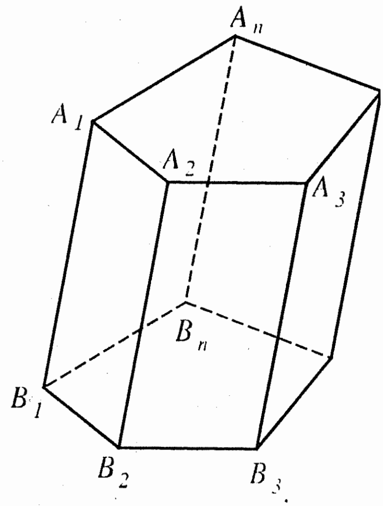
Chú ý. Có thể thấy tứ giác $MNHK$ là hình thang.

Thật vậy, HK chính là giao tuyến của (β) với (SBC) mà các mặt phẳng này lại song song hoặc chứa MN kéo theo HK song song với MN.

4. Hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp cụt

a) Hình lăng trụ

Hình lăng trụ $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$ là hình được lập thành từ hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $B_1B_2...B_n$ bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau sao cho các cạnh A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 tương ứng song song và bằng các cạnh B_1B_2, B_2B_3, ..., B_nB_1.

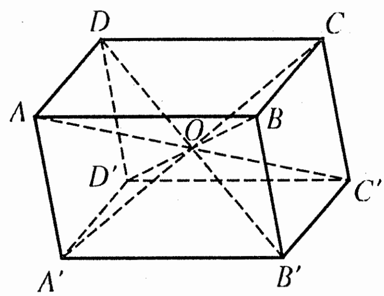


Hình 2.32

- Các đa giác $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ được gọi là các *mặt đáy* của hình lăng trụ (h.2.32).
- Các đoạn A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1 và B_1B_2, B_2B_3,..., B_nB_1 được gọi là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ.
- Các đa giác $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$,..., $A_nA_1B_1B_n$ là các hình bình hành. Chúng được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đoạn A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n đều song song và bằng nhau. Chúng được gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Nếu các mặt đáy là tam giác, tứ giác, ... thì hình lăng trụ tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, tứ giác,...

b) Hình hộp

Ta xét trường hợp các mặt đáy của hình lăng trụ là hình bình hành (h.2.33). Lúc này tất cả các mặt của hình lăng trụ đều là hình bình hành và hình lăng trụ được gọi là hình hộp. Vậy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác trong đó các mặt đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình bình hành.



Hình 2.33

Hình hộp có tất cả 6 mặt đều là các hình bình hành. Hai mặt của hình hộp song song với nhau được gọi các *mặt đối diện*. Như vậy 6 mặt của hình hộp được chia làm 3 cặp mặt đối diện (trong đó có 1 cặp mặt đáy và 2 cặp mặt bên).

Hai đỉnh của hình hộp không cùng thuộc bất cứ một mặt nào của nó (thí dụ A và C', B và D', C và A', D và B') được gọi là các *đỉnh đối diện*.

Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là *đường chéo* của hình hộp. Không khó thấy rằng hai đường chéo bất kì là hai đường chéo của một hình bình hành nên chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Suy ra tất cả 4 đường chéo của hình hộp đồng quy tại một điểm O là trung điểm của chúng. Điểm O được gọi là tâm hình hộp.

Chú ý

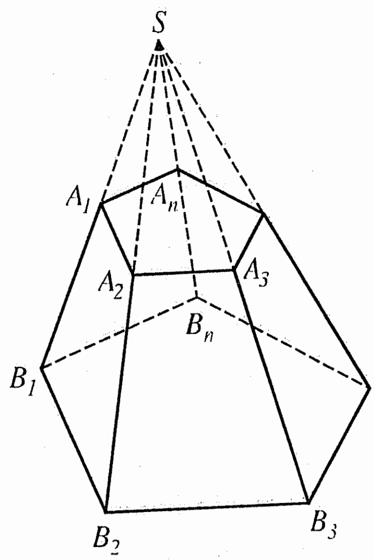
Hình hộp là trường hợp đặc biệt của hình lăng trụ khi mà hai mặt đáy đều là các hình bình hành và chúng được chia làm ba cặp mặt đối diện.

Mỗi cặp mặt đối diện đều gồm 2 hình bình hành nằm trên hai mặt phẳng song song và có các cạnh tương ứng song song bằng nhau nên thực ra chúng bình đẳng với nhau và có thể xem bất kì cặp mặt đối diện nào cũng là các mặt đáy và các mặt còn lại là mặt bên. Do đó để không làm mất tính bình đẳng giữa các cặp mặt đối diện, ta thường không phân biệt mặt đáy với mặt bên và đều gọi chúng là các mặt của hình hộp.

c) *Hình chóp cụt*

Hình chóp cụt $A_1A_2\ldots A_n.B_1B_2\ldots B_n$ là hình được lập thành từ hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $B_1B_2\ldots B_n$ nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau, có các cạnh A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 và B_1B_2, B_2B_3, …, B_nB_1 tương ứng song song với nhau và $\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \dfrac{A_nA_1}{B_nB_1} = k < 1$.

Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ được gọi là *đáy nhỏ*, đa giác $B_1B_2\ldots B_n$ được gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt (h.2.34).



Hình 2.34

Các tứ giác $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ là các hình thang và được gọi là các *mặt bên*; Các đoạn A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n được gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

Để ý rằng hai cạnh bên bất kì A_iB_i và A_jB_j kéo dài về phía A_i và A_j cắt nhau tại một điểm S thoả mãn $\dfrac{SA_i}{SB_i} = \dfrac{SA_j}{SB_j} = k$ nên tất cả các cạnh bên kéo dài đồng quy tại một điểm S thoả mãn

$$\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA_2}{SB_2} = \dots = \frac{SA_n}{SB_n} = k .$$

Như vậy có thể thấy rằng hình chóp cụt là hình nhận được từ hình chóp lớn $S.B_1B_2\dots B_n$ sau khi "cắt" đi hình chóp nhỏ $S.A_1A_2\dots A_n$.

Nếu các đáy là tam giác, tứ giác,... thì hình chóp cụt tương ứng được gọi là hình chóp cụt tam giác, tứ giác,...

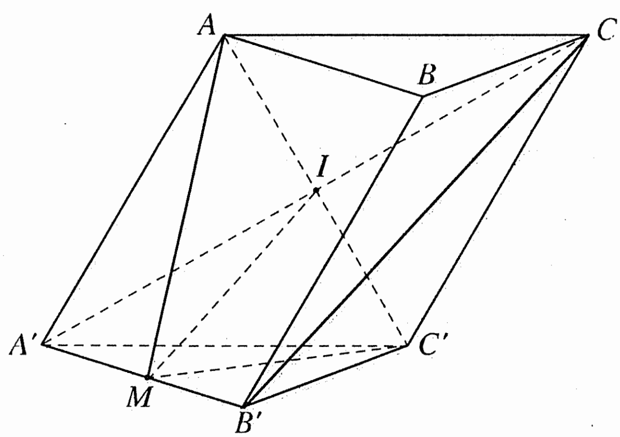
Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm cạnh $A'B'$.

a) Chứng minh $B'C \parallel (AC'M)$.

b) N là một điểm trên cạnh BC. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua N và song song với $B'C$, $A'B$.

c) Gọi D là điểm trên đoạn $A'B$: $\dfrac{DA'}{DB} = \dfrac{3}{2}$. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (β) đi qua D và song song với $B'C$, AC'.

Giải



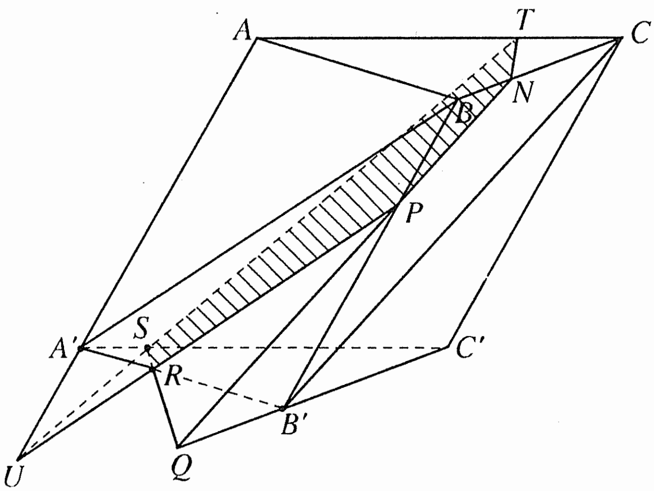
Hình 2.35

a) Gọi I là trung điểm AC' thì do mặt bên $(ACC'A')$ là hình bình hành nên I cũng là trung điểm $A'C$ (h.2.35). Suy ra $B'C$ // MI.

Thành thử $B'C$ // $(AC'M)$.

b) Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ kẻ đường thẳng đi qua N song song với $B'C$ cắt BB' tại P và cắt $C'B'$ kéo dài tại Q.

Do $B'C$ // (α) nên NP chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên $(BCC'B')$ (h.2.36).



Hình 2.36

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ kẻ đường thẳng qua P song song với $A'B$ cắt $A'B'$ tại R và cắt AA' kéo dài tại U.

Do $A'B$ // (α) nên PR chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên $(ABB'A')$.

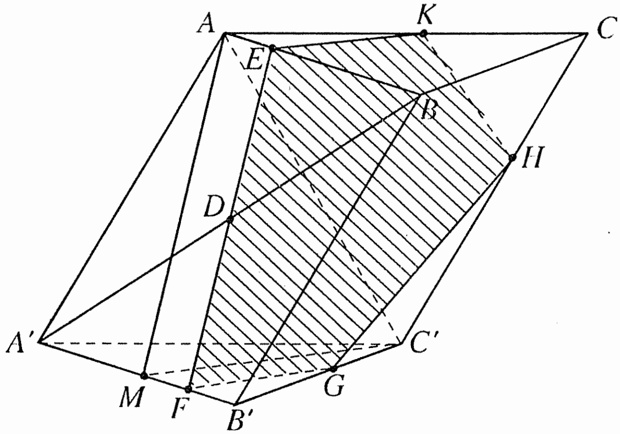
Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, QR cắt $A'C'$ tại S thì RS chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt đáy $(A'B'C')$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, US cắt AC tại T thì ST chính là đoạn giao tuyến của (α) với mặt bên $(ACC'A')$.

Ta có ngũ giác $NPRST$ là thiết diện cần tìm.

c) Để ý rằng theo câu a), mặt phẳng $(AC'M)$ đi qua AC' và song song với $B'C$ nên (β) // $(AC'M)$.

Do đó (β) cũng là mặt phẳng đi qua D và song song với mặt phẳng $(AC'M)$ (h.2.37).



Hình 2.37

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ kẻ đường thẳng đi qua D, song song với AM cắt AB và $A'B'$ tại E, F thì EF chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt bên $(ABB'A')$.

Trong mặt phẳng $(A'B'C')$ kẻ đường thẳng qua F song song với MC' cắt $B'C'$ tại G thì FG chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt đáy $(A'B'C')$.

Trong mặt phẳng $(BCC'B')$ kẻ đường thẳng đi qua G song song với $B'C$ cắt $C'C'$ tại H thì GH chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt bên $(BCC'B')$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ kẻ đường thẳng đi qua H song song với AC' cắt AC tại K thì MK chính là đoạn giao tuyến của (β) với mặt bên $(ACC'A')$.

Ta có ngũ giác $EFGHK$ là thiết diện cần tìm.

5. Định lí Thales trong không gian

Bên cạnh việc dựng các giao tuyến của các mặt phẳng và các cách thức xác định mặt phẳng trong không gian, quan hệ song song còn cho phép chúng ta thực hiện khá thuận lợi các tính toán trong hình học, đặc biệt là các phép tính liên quan đến tỉ số của các đoạn thẳng.

Nguyên lí: "Quan hệ song song bảo toàn tỉ số" không những cho phép chúng ta đơn giản hóa các vấn đề tính toán trong nhiều tình huống khác nhau mà còn là cơ sở để chuyển đổi từ các tính chất hình học thuần túy (như song song, vuông góc, ...) sang các hệ thức tương đương giữa các đại lượng số.

Trong hình học không gian, cũng như trong hình học phẳng, một trong những công cụ đơn giản nhưng hiệu quả cho phép chúng ta thực hiện được nhanh chóng việc "chuyển đổi" giữa "hình tính" và "hệ thức lượng" chính là các định lí Thales thuận và đảo.

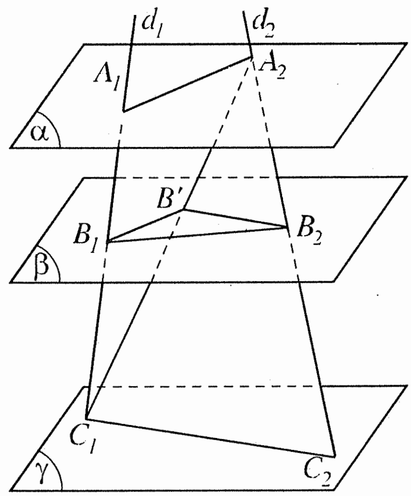
ĐỊNH LÍ 6 (*Định lí Thales trong không gian*).

Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Chứng minh. Giả sử (α), (β), (γ) là các mặt phẳng song song và các đường thẳng d_1, d_2 cắt (α) tại A_1, A_2, cắt (β) tại B_1, B_2, cắt (γ) tại C_1, C_2 (h.2.38).

Ta cần chứng minh: $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$.

Thật vậy, gọi B' là giao điểm của đường thẳng A_2C_1 với mặt phẳng (β). Để ý rằng A_1A_2 và B_1B' là giao tuyến của $(A_1A_2C_1)$ với (α), (β) nên $A_1A_2 \,//\, B_1B'$. Áp dụng định lí Thales trong mặt phẳng $(A_1A_2C_1)$ ta được:



Hình 2.38

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B'}{B'C_1}$$

Tương tự áp dụng định lí Thales trong mặt phẳng $(C_1C_2A_2)$ ta được:

$$\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{A_2B'}{B'C_1}.$$

Suy ra $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Trong thực tế, đôi khi để chứng minh các tính chất song song trong một số bài toán hình học, ta có thể xem xét và đối chiếu tỉ số của các đoạn thẳng thích hợp. Đó chính là ý nghĩa của định lí Thales đảo. Trong không gian, định lí này có thể phát biểu như sau:

ĐỊNH LÍ 7 *(Định lí Thales đảo trong không gian).*

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho: $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

Chú ý

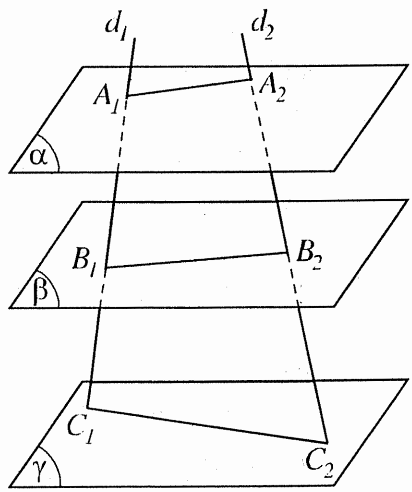
1) Khi cho các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1 ta cần hiểu rằng B_1 nằm giữa A_1, C_1 tương tự khi cho A_2, B_2, C_2 trên d_2 cần hiểu rằng B_2 nằm giữa A_2, C_2.

2) Khẳng định các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng có thể thay thế bằng một khẳng định tương đương khác: Tồn tại ba mặt phẳng lần lượt đi qua A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 và song song với nhau.

Chứng minh (h.2.39). Trước hết nhận xét rằng A_1A_2, B_1B_2 không đồng phẳng vì nếu chúng đồng phẳng thì A_1B_1, A_2B_2 cũng đồng phẳng, mâu thuẫn với d_1, d_2 chéo nhau.

Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua A_1A_2 và song song với B_1B_2, (β) là mặt phẳng đi qua B_1B_2 và song song với (α), còn (γ) là mặt phẳng đi qua C_1 và song song với (α). Gọi C_2' là giao điểm của d_2 với (γ).

Theo định lí 6, ta có:



Hình 2.39

$$\frac{A_1B_1}{B_2C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2'}$$

Suy ra $\dfrac{A_2B_2}{B_2C_2'} = \dfrac{A_2B_2}{B_2C_2}$ thành thử C_2' trùng với C_2.

Lấy một mặt phẳng (π) song song với (α), (β) và (γ) thì A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với (π). Định lí được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

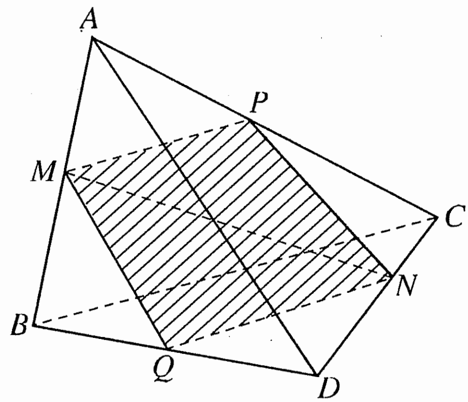
a) Chứng minh đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND} = k > 0$ và P là một điểm trên cạnh AC. Xác định thiết diện của tứ diện cắt với mặt phẳng (MNP).

c) Tính theo k tỉ số giữa diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

Giải.

a) Do $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo, các đường thẳng MN, AC, BD cùng song song với một mặt phẳng (π), mà (π) cũng song song với mặt phẳng (α) đi qua AC và song song với BD nên suy ra MN luôn song song với mặt phẳng cố định (α) (h.2.40).



Hình 2.40

b) Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} = k$, lúc này $MP \mathbin{//} BC$ nên $BC \mathbin{//} (MNP)$.

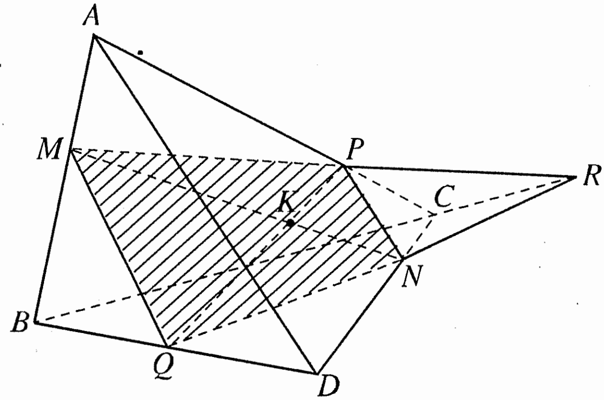
Kẻ đường thẳng đi qua N và song song với BC cắt BD tại Q thì NQ là đoạn giao tuyến của (MNP) với mặt (BCD).

Ta có tứ giác $MPNQ$ là thiết diện cần tìm (h.2.40).

Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} \neq k$.

Trong mặt phẳng (ABC), MP nối dài cắt BC nối dài tại R.

Trong mặt phẳng (BCD), RN cắt BD tại Q thì NQ là đoạn giao tuyến của (MNP) với mặt (BCD).



Hình 2.41

Ta có tứ giác $MPNQ$ là thiết diện cần tìm (h.2.41).

c) Gọi K là giao điểm của các đường chéo MN và PQ trong tứ giác $MPNQ$.

Không khó để thấy rằng tỉ số giữa diện tích tam giác MNP với diện tích thiết diện bằng tỉ số $\dfrac{PK}{PQ}$. Do $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo AC, MN, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và để ý rằng đường thẳng PQ cắt mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k.$$

Suy ra $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{k}{k+1}$ thành thử tỉ số cần tìm bằng $\dfrac{k}{k+1}$.

6. Phép chiếu song song

Từ trước đến nay, các hình vẽ minh hoạ của các vật thể không gian mà chúng ta cần xem xét đều được thực hiện trên mặt giấy. Nói cách khác, đó là những hình biểu diễn mang tính quy ước của các hình trong không gian được vẽ thu lại trên một mặt phẳng. Quy ước ở đây là hình vẽ phải ít nhiều phù hợp với cảm nhận bằng mắt thường đối với các vật thể không gian cần xem xét. Do đó, thông thường các hình vẽ có được ở đây chính là ảnh của các hình không gian ban đầu qua một phép chiếu song song lên một mặt phẳng. Chúng ta hãy xem qua định nghĩa và các tính chất của phép chiếu này.

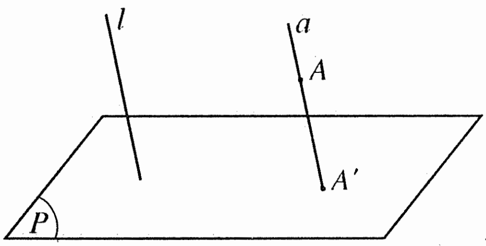
a) *Định nghĩa phép chiếu song song lên mặt phẳng*

Cho mặt phẳng (P) và một đường thẳng l cắt (P). Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương đường thẳng l được định nghĩa như sau:

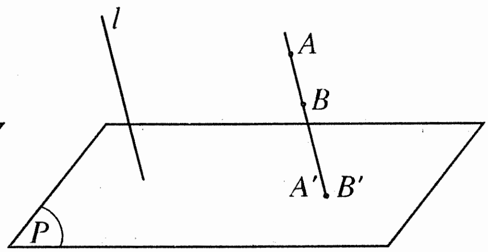
Với mỗi điểm A trong không gian, xét đường thẳng a đi qua A và song song (hoặc trùng) với l (h.2.42).

Giao điểm A' của đường thẳng a với mặt phẳng (P) được gọi là ảnh của điểm A cho phép chiếu song song này.

Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu, còn đường thẳng l được gọi là phương chiếu của phép chiếu song song.



Hình 2.42



Hình 2.43

Đường thẳng a đi qua điểm A và song song (hoặc trùng) với phương chiếu l được xét trong định nghĩa trên luôn tồn tại duy nhất nên điểm ảnh A' cũng luôn tồn tại duy nhất.

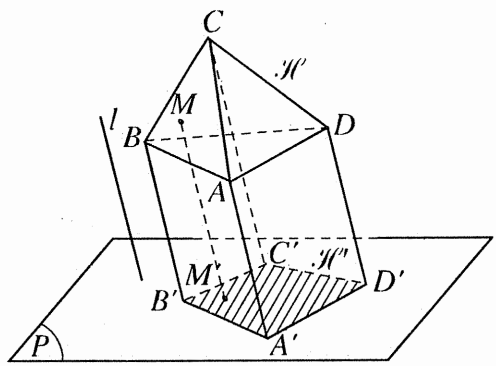
Từ nay, để tiện cho việc trình bày, một đường thẳng song song hoặc trùng với phương chiếu l sẽ được gọi vắn tắt là cùng phương với l (h.2.43).

Không khó để thấy rằng ảnh A' của điểm A trùng với chính A khi và chỉ khi A thuộc mặt phẳng chiếu (P); ngoài ra các ảnh A' và B' của hai điểm A và B trùng nhau khi và chỉ khi đường thẳng AB cùng phương với l.

Cho một hình $\mathscr{H}$ trong không gian.

Tập hợp $\mathscr{H}'$ những ảnh M' của các điểm M thuộc $\mathscr{H}$ được gọi là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song.

Đôi khi $\mathscr{H}'$ còn được gọi là là hình chiếu của $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song (h.2.44).



Hình 2.44

b) *Tính chất của phép chiếu song song*

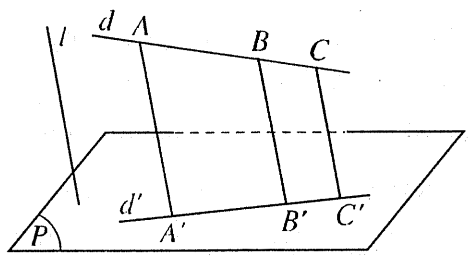
MỆNH ĐỀ 9. Ảnh của ba điểm cùng thuộc một đường thẳng qua phép chiếu song song cũng là ba điểm cùng thuộc một đường thẳng.

Chứng minh. Giả sử A, B, C là ba điểm cùng thuộc đường thẳng d và A', B', C' là ảnh của chúng qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu l. Ta chứng minh A', B', C' cũng cùng thuộc một đường thẳng d'.

Nếu d cùng phương với l thì A', B' và C' trùng nhau nên khẳng định cần chứng minh là hiển nhiên.

Xét trường hợp d không cùng phương với l. Kí hiệu (δ) là mặt phẳng đi qua d và song song hoặc chứa l thì các đường thẳng AA', BB' và CC' đều thuộc (δ). Suy ra các điểm A', B' và C' phải thuộc giao tuyến d' của các mặt phẳng (P) và (δ).

Mệnh đề đã được chứng minh (h.2.45).

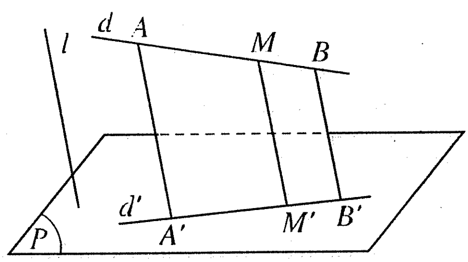


Hình 2.45

Qua mệnh đề trên, ta thấy rằng nếu một đường thẳng cùng phương với phương chiếu thì ảnh của đường thẳng đó qua phép chiếu song song chỉ là một điểm duy nhất. Dưới đây ta chỉ xét ảnh của một đường thẳng (hoặc một đoạn thẳng) qua phép chiếu song song nếu đường thẳng (hoặc đoạn thẳng) đó không cùng phương với phương chiếu. Lúc đó chúng ta có:

ĐỊNH LÍ 8. *Ảnh của một đường thẳng qua phép chiếu song song cũng là một đường thẳng.*

Chứng minh. Theo chứng minh mệnh đề 9, nếu M là một điểm thuộc đường thẳng d thì ảnh M' của nó phải thuộc giao tuyến d' của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (δ) đi qua d và song song hoặc chứa l. Mặt khác nếu cố định hai điểm A, B



Hình 2.46

thuộc d và gọi A', B' là ảnh của chúng (h.2.46) thì với mỗi điểm M trên d ta có định lí Thales: $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

Thành thử mỗi điểm M' trên d' là ảnh của điểm M trên d và chia đoạn AB theo cùng một tỉ số (tỉ số đại số).

Suy ra ảnh của đường thẳng d qua phép chiếu song song chính là đường thẳng d'.

Từ chứng minh này ta có

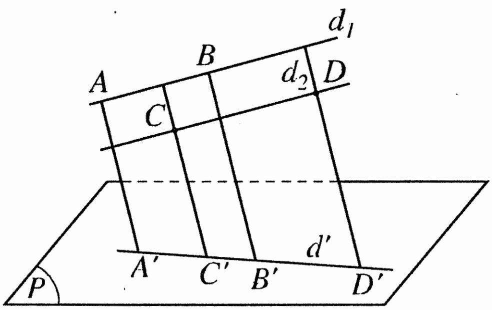
HỆ QUẢ. Ảnh của một đoạn thẳng qua phép chiếu song song cũng là một đoạn thẳng.

Như vậy phép chiếu song song không chỉ bảo toàn sự thẳng hàng mà còn bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên cùng một đường thẳng.

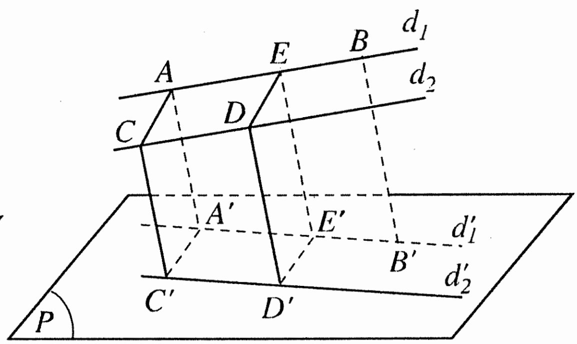
Dưới đây chúng ta sẽ chứng minh tính chất tổng quát hơn.

ĐỊNH LÍ 9. *Phép chiếu song song bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*

Chứng minh. Giả sử các đoạn thẳng AB và CD nằm trên các đoạn thẳng d_1 và d_2 song song hoặc cùng phương. Gọi $A'B'$, $C'D'$, d_1, d_2 là ảnh của chúng qua phép chiếu song song (h.2.47, h.2.48). Ta chứng minh $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.



Hình 2.47



Hình 2.48

Nếu d'_1 và d'_2 trùng nhau (và kí hiệu chung là d') thì các đường thẳng d_1, d_2 và d' cùng thuộc một mặt phẳng và đẳng thức cần chứng minh không khó suy ra từ định lí Thales.

Xét trường hợp d_1' và d_2' không trùng nhau. Lúc đó d_1' và d_2' chính là giao tuyến của mặt phẳng chiếu (P) với các mặt phẳng (δ_1), (δ_2) lần lượt đi qua d_1, d_2 và song song hoặc chứa phương chiếu l.

Do d_1 và d_2 song song nên (δ_1) và (δ_2) song song với nhau và suy ra d_1' và d_2' song song. Lấy trên d_1 điểm E sao cho $\overline{AE} = \overline{CD}$ và gọi E' là ảnh của E qua phép chiếu song song. Ta có $AEDC$ là hình bình hành nên $AC \parallel ED$. Lập luận tương tự như trên suy ra $A'C'$ và $E'D'$ song song và $A'E'D'C'$ cũng là hình bình hành.

Từ đây theo định lí Thales suy ra : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'E'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Chú ý

Định lí 9 được chứng minh dựa vào tính chất khá quan trọng sau đây của phép chiếu song song: nếu hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì ảnh của chúng cũng là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

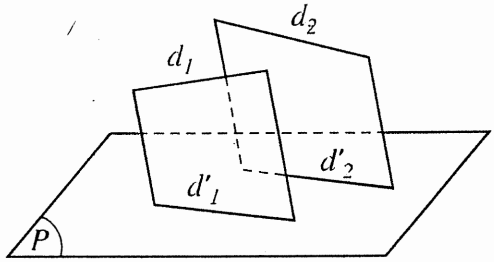
Tuy nhiên có thể thấy rằng điều ngược lại là không đúng:

Hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau vẫn có thể có ảnh là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Chúng ta hãy làm rõ hơn điều này bằng mệnh đề sau.

MỆNH ĐỀ 10. Cho hai đường thẳng d_1, d_2. Kí hiệu (δ_1), (δ_2) là các mặt phẳng lần lượt đi qua d_1, d_2 và song song hoặc chứa phương chiếu l và d_1', d_2' là ảnh của d_1, d_2 qua phép chiếu song song.

Lúc đó d_1' song song hoặc trùng với d_2' khi và chỉ khi (δ_1) song song hoặc trùng với (δ_2).



Hình 2.49

Chứng minh. Ta có d_1', d_2' chính là giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (δ_1), (δ_2). Do đó nếu (γ_1) song song hoặc trùng với (γ_2) ta suy ra ngay $d_1' \parallel d_2'$.

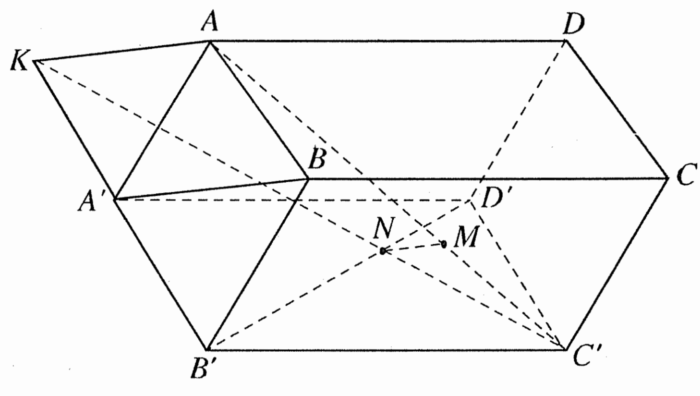
Ngược lại nếu d_1' và d_2' song song hoặc trùng nhau, do (δ_1) và (δ_2) lần lượt đi qua d_1' và d_2' đồng thời song song hoặc chứa l nên (δ_1) và (δ_2) phải song song hoặc trùng nhau (h.2.49).

Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn AC', $B'D'$ sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\dfrac{MA}{MC'}$.

Giải. Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BA'. Ta có N là ảnh của M nên N chính là giao điểm của $B'D'$ và ảnh của AC' qua phép chiếu song song này. Do đó M và N được xác định như sau:

Lấy trên $B'A'$ nối dài điểm K sao cho $A'K = B'A'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên AK // BA' thành thử K là ảnh của A và KC' chính là ảnh của AC' qua phép chiếu song song.

Gọi N là giao điểm của $B'D'$ với KC'. Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại điểm M. Ta có M, N chính là các điểm cần xác định (h.2.50).



Hình 2.50

Theo tính chất bảo toàn tỉ số và định lí Thales, ta có:

$$\frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{C'D'} = 2.$$

Như vậy tính chất bảo toàn tỉ số của phép chiếu song song có thể đưa các vấn đề tính tỉ số của các đoạn thẳng trong không gian về các vấn đề tính toán dễ dàng hơn trong mặt phẳng.

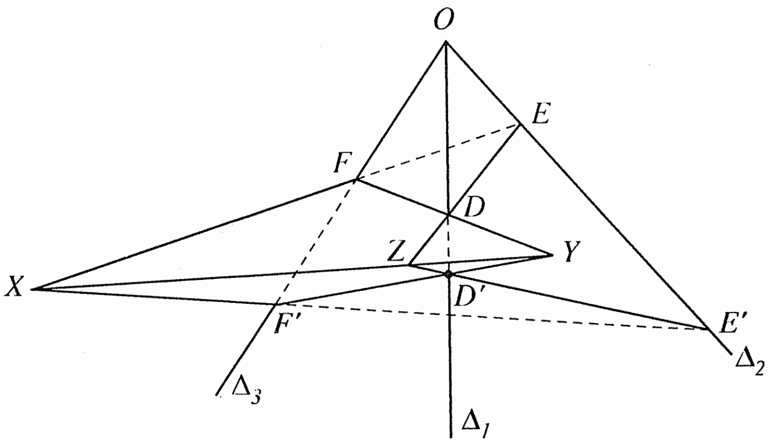
Ngược lại, một số bài toán liên quan đến tính thẳng hàng trong mặt phẳng có thể được suy ra khá nhanh chóng từ các bài toán khá đơn giản trong không gian thông qua tính chất bảo toàn sự thẳng hàng của phép chiếu song song.

Ví dụ 7 *(định lí Desargues).* Trong mặt phẳng cho các đường thẳng d_1, d_2, d_3 cùng đi qua điểm O. Trên d_1 lấy các điểm A và A', trên d_2 lấy các điểm B và B', trên d_3 lấy các điểm C và C'. Giả sử BC và $B'C'$ cắt nhau tại điểm M, CA và $C'A'$ cắt nhau tại điểm N, AB và $A'B'$ cắt nhau tại điểm P. Chứng minh M, N, P thẳng hàng.

Giải. Trước hết ta phát triển và chứng minh bài toán không gian tương tự sau đây: "Trong không gian cho các đường thẳng Δ_1, Δ_2, Δ_3 cùng đi qua điểm O sao cho chúng không cùng thuộc một mặt phẳng.

Trên Δ_1 lấy các điểm D và D', trên Δ_2 lấy các điểm E và E', trên Δ_3 các điểm F và F'.

Giả sử EF và $E'F'$ cắt nhau tại điểm X, FD và $F'D'$ cắt nhau tại điểm Y, DE và $D'E'$ cắt nhau tại điểm Z. Chứng minh X, Y, Z thẳng hàng" (h.2.51)

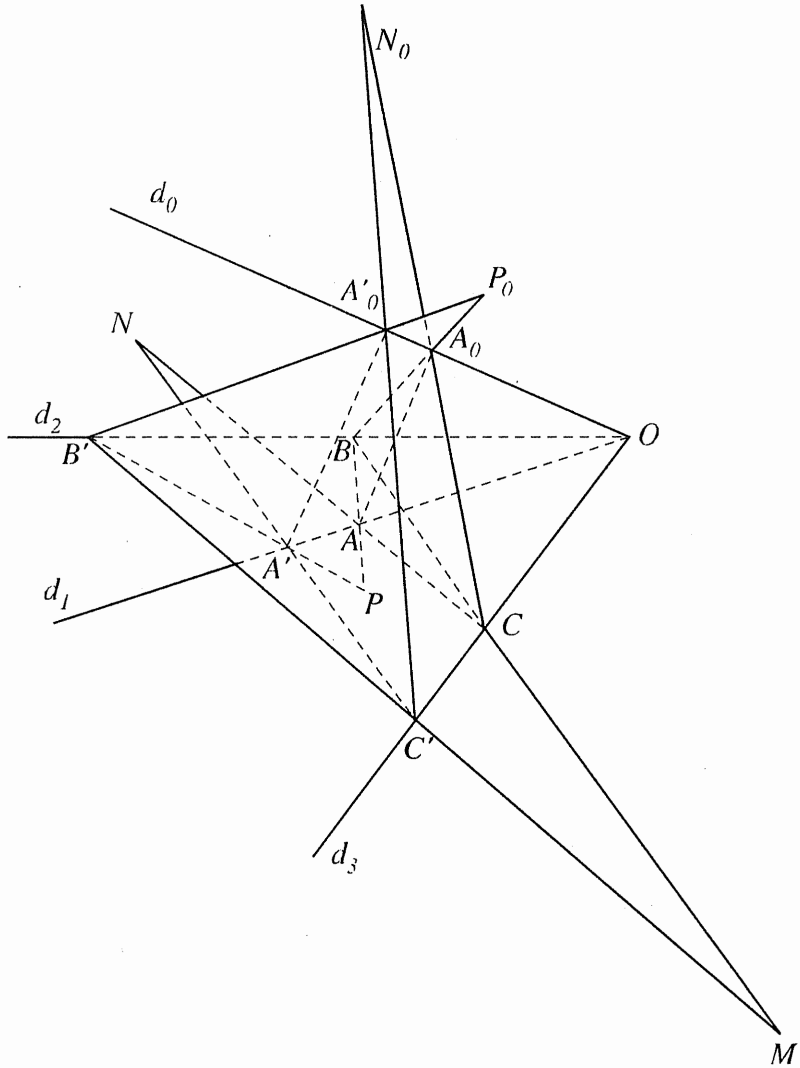


Hình 2.51

Thật vậy, không khó để thấy rằng các giao điểm X, Y, Z đều cùng thuộc các mặt phẳng (DEF) và $(D'E'F')$ nên chúng phải nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng này. Suy ra X, Y, Z thẳng hàng và bài toán được chứng minh.

Bây giờ chúng ta hãy sử dụng phép chiếu song song để suy ra kết quả của bài toán phẳng.

Kí hiệu (P) là mặt phẳng (d_1, d_2, d_3). Lấy một đường thẳng d_0 đi qua O và không thuộc (P) và hai điểm A_0, A_0' trên d_0 sao cho $A_0A \,//\, A_0'A'$ (h.2.52).



Hình 2.52

Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu A_0A. Ta có A, A' và d_1 chính là ảnh của A_0, A_0' và d_0 qua phép chiếu này.

Lại có AB và $A'B'$ là ảnh của A_0B, $A_0'B'$ mà AB, $A'B$ cắt nhau tại điểm P và A_0B và $A_0'B'$ đồng phẳng nên chúng phải cắt nhau tại một điểm P_0 (và P là ảnh của P_0 qua phép chiếu).

Tương tự, A_0C và $A_0'C'$ phải cắt nhau tại một điểm N_0 (và N là ảnh của N_0 qua phép chiếu). Theo bài toán không gian thì M, N_0, P_0 thẳng hàng, suy ra ảnh của chúng là các điểm M, N, P cũng phải thẳng hàng.

Hình biểu diễn của một hình không gian

Như đã nói ở trên, hình vẽ minh hoạ (hay hình biểu diễn) của các vật thể không gian mà chúng ta cần thực hiện trên mặt giấy phải ít nhiều phù hợp với cảm nhận bằng mắt thường đối với các vật thể đó. Do đó thông thường các hình vẽ này chính là ảnh của các hình không gian mà chúng ta quan tâm qua một phép chiếu song song được lựa chọn thích hợp.

Vì thế khi tiến hành các hình vẽ minh hoạ của phần hình học không gian, cần lưu ý trước tiên đến các tính chất của phép chiếu song song mà chúng ta đã đề cập ở trên, cụ thể là:

- Phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng.

- Ảnh của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

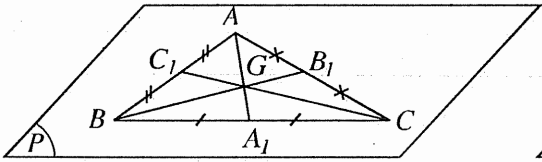
- Phép chiếu song song bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

Chẳng hạn trung điểm một đường thẳng hoặc trọng tâm một tam giác trong hình biểu diễn cũng phải là trung điểm đoạn thẳng hoặc trọng tâm tam giác tương ứng. Các hình thang, hình bình hành trong các hình vẽ minh hoạ cũng phải là hình thang, hình bình hành và nếu tỉ số độ dài của các đáy của hình thang được cho trước thì nó cũng phải giữ nguyên trong biểu diễn.

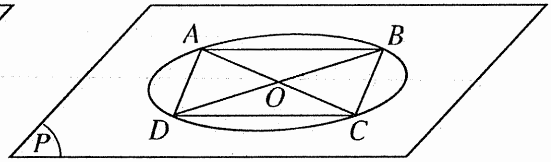
Phép chiếu song song không bảo toàn góc giữa hai đường thẳng cũng như tỉ số của hai đoạn thẳng trên hai đường thẳng cắt nhau. Do đó hình biểu diễn trong hình học không gian của hình chữ nhật hoặc hình vuông không nhất thiết cũng phải là hình chữ nhật hoặc hình vuông mà có thể là hình bình hành.

Đối với đường tròn, người ta chứng minh được rằng ảnh của nó qua phép chiếu song song là một elíp trong đó tâm của elíp chính là ảnh của tâm đường tròn. Do đó hình biểu diễn của đường tròn là một elíp và các đường kính của đường tròn có biểu diễn là các "dây cung" đi qua tâm của elíp.

Hình biểu diễn tam giác ABC với các trung tuyến và trọng tâm trong mặt phẳng (P) (h.2.53).



Hình 2.53

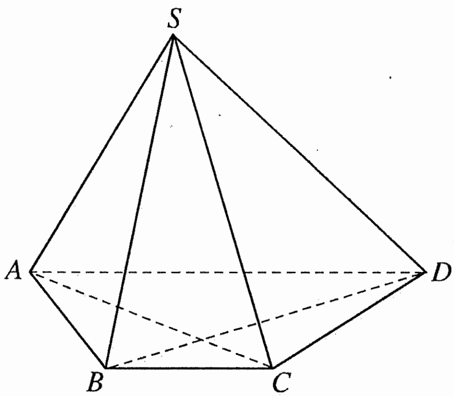


Hình 2.54

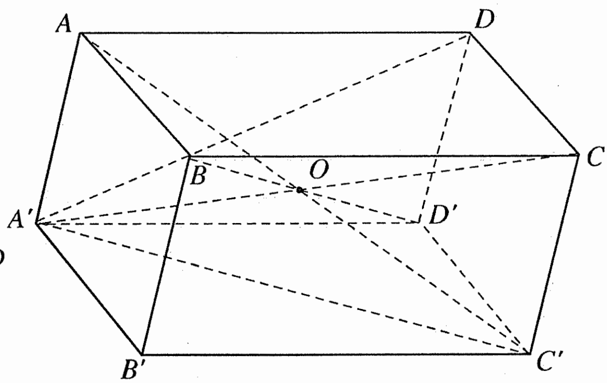
Hình biểu diễn hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) trong mặt phẳng (P) (h.2.54).

Một điểm cần lưu ý nữa là các vật thể không gian (như tứ diện, hình chóp, hình lăng trụ, ...) đều là các hình khối nên thông thường khi xem xét từ một góc nhìn cụ thể (chẳng hạn góc nhìn mà ta chọn làm hướng của phép chiếu song song khi tiến hành vẽ minh hoạ), sẽ có những đoạn thẳng, những cung tròn, ... bị che khuất. Những đoạn thẳng, những cung tròn bị che khuất như vậy thường quy ước được vẽ bằng những nét đứt đoạn.

Hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ với đáy là hình thang và các đường chéo của đáy (h.2.55).



Hình 2.55



Hình 2.56

Hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với các đường chéo chính và tâm O (h.2.56).

BÀI TẬP

20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh AB và M, N là các điểm thay đổi trên các cạnh AC, AD sao cho $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{AN}{DN}$

a) Chứng minh giao tuyến d của các mặt phẳng (BMN) và (ICD) luôn song song với một đường thẳng cố định.

b) Gọi P là giao điểm của d với mặt phẳng (ABC); AP cắt BC tại H. Chứng minh giao điểm K của NP và DH luôn thuộc một đường thẳng cố định.

21. Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (α) thay đổi cắt các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{BN} = \frac{CP}{DP} = \frac{AQ}{DQ}$$

b) Giả sử mặt phẳng (α) thay đổi sao cho $MNPQ$ là hình bình hành. Tìm quỹ tích tâm O của hình bình hành $MNPQ$.

22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua AB và cắt SC, SD tại M, N.

a) Tứ giác $ABMN$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh giao điểm I của AM và BN luôn thuộc một đường thẳng cố định.

c) Chứng minh giao điểm K của AN và BM luôn thuộc một đường thẳng cố định và $\dfrac{AB}{MN} - \dfrac{BC}{SK}$ không đổi.

23. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J là trung điểm AB', $B'C'$.

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(A'IJ)$;

b) K là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (IJK).

24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CC', $C'D'$, $D'A'$, $A'A$.

a) Chứng minh các điểm M, N, P, Q, R, S cùng thuộc một mặt phẳng và mặt phẳng này đi qua tâm của hình hộp.

b) K là điểm trên $B'D'$: $KB' = 4KD'$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (MNK).

25. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua AA' và cắt các cạnh BC, $B'C'$ tại M, M'.

a) Tứ giác $AA'M'M$ là hình gì? Vì sao?

b) Gọi I là trung điểm AM. Chứng minh giao điểm K của AM' và $A'I$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

c) $B'C$ cắt MM' tại N. Gọi H là giao điểm của AN và $A'M'$. Chứng minh trung điểm J của $D'H$ luôn thuộc đường thẳng $A'C'$.

26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, I là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $SC \parallel (MNI)$

b) P là một điểm thuộc cạnh SB. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (CIM) và (APN).

c) Q là một điểm thuộc mặt bên (SAD). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (CPQ).

27. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AD và N là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Kí hiệu (α) là một mặt phẳng đi qua MN và song song với CD.

a) Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α). Tìm vị trí của điểm N để thiết diện này là hình bình hành.

b) Gọi P, Q là giao điểm của AC, BD với (α). Chứng minh giao điểm K của MN và PQ luôn thuộc một đường thẳng d cố định và d đi qua trọng tâm của tứ diện.

28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là điểm thuộc cạnh CD và N là một điểm thuộc cạnh bên SB.

a) Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với AB. Xác định thiết diện tạo bởi hình chóp với (α).

b) Kí hiệu (β) là mặt phẳng đi qua M và song song với BD, SC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

29. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi F, G là trọng tâm các mặt bên (SAB), (SAD) và E là điểm thuộc cạnh AB: $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{1}{3}$.

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (SBD).

b) M là một điểm thuộc cạnh CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (FGM).

30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm cạnh bên SC và M là một điểm thay đổi trên cạnh bên SA. Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua EM và song song với BD.

a) Chứng minh mặt phẳng (α) đi qua một đường thẳng cố định. Xác định giao điểm của SB, SD với (α).

b) F là một điểm thuộc mặt bên (SAB). Kí hiệu (β) là một mặt phẳng đi qua EF và song song với BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (β).

31. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm cạnh AB và (α) là mặt phẳng đi qua I và song song với AB', BC'.

a) Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(BCC'B')$ và (α). Chứng minh (α) đi qua trung điểm của AC'.

b) J là điểm trên đoạn AC': $\dfrac{AJ}{C'J} = 4$. Kí hiệu (β) là mặt phẳng đi qua J và song song với $A'I$, BC'. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (β).

32. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I là trung điểm cạnh $B'C'$.

a) Chứng minh $AB' \parallel (A'IC)$.

b) M là một điểm thuộc cạnh $A'C'$, AM cắt $A'C$ tại P, $B'M$ cắt $A'I$ tại Q. Chứng minh $PQ \parallel AB'$. Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác $A'PQ$ bằng $\dfrac{2}{9}$ diện tích tam giác ACI.

c) J là điểm thuộc cạnh AC: $JA = 3JC$. Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua J và song song với AB', IC. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (α).

33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB'.

a) Chứng minh $C'I \parallel (ACD')$.

b) M là một điểm thuộc cạnh DD'. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(C'IM)$ và (ACD'). Tìm vị trí điểm M để giao tuyến này đi qua trung điểm AD'.

c) N là một điểm thuộc cạnh $C'D'$. Xác định giao điểm của AB, AD với mặt phẳng (IMN).

34. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và M là một điểm thay đổi trên đoạn $B'C$.

a) Chứng minh $D'M \parallel (A'BD)$.

b) Xác định giao điểm K của AM với $(A'B'C'D')$. Chứng minh K luôn thuộc một đường thẳng d cố định và $d \parallel A'C'$.

c) N là điểm thuộc đoạn AC: $\dfrac{AN}{CN} = 2$. Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua N và song song với DA', $D'M$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α).

35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là một điểm thuộc cạnh AB và N là một điểm thuộc đoạn $B'C$.

a) Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua MN và song song với BC. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng $(A'B'C')$ và (α).

b) P là một điểm thuộc cạnh AC và Q là một điểm thuộc cạnh $A'B'$. Xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (NPQ).

36. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, $B'C'$, $D'D$.

a) Chứng minh các mặt phẳng $(AB'D')$, (BDC') và (IJK) đôi một song song.

b) M là một điểm thuộc cạnh $B'C'$. Kí hiệu (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (IJK). Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi (α).

c) H là một điểm thuộc cạnh DD'. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (IHM).

37. a) Trong không gian cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Tìm tất cả các điểm M sao cho tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua M và cắt đồng thời các đường thẳng a, b.

b) Trong không gian cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau. Chứng minh tồn tại vô số đường thẳng cắt đồng thời các đường thẳng a, b, c.

38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và M là một điểm thuộc đoạn AB'.

a) Xác định các giao điểm I, J của BC', DA' với mặt phẳng (MCD').

b) Chứng minh M, I, J thẳng hàng

c) Xác định vị trí điểm M để trung điểm IJ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

39. Trong không gian cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau.

a) Chứng minh có không quá một đường thẳng d song song với c và cắt đồng thời a, b.

b) Tìm điều kiện của c để đường thẳng d tồn tại.

40. a) Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau. Tìm điều kiện của chúng để tồn tại duy nhất một hình hộp có 3 cạnh nằm trên ba đường thẳng đã cho.

b) Cho bốn mặt phẳng (α), (β), (γ), (δ) sao cho ba mặt phẳng bất kì trong chúng có đúng một điểm chung. Chứng minh tồn tại một hình hộp có các cạnh bằng nhau và các đỉnh nằm trên các mặt phẳng đã cho.

41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm AB và J là điểm trên cạnh CD sao cho $JC = 2JD$.

a) Xác định các điểm M, N thuộc các đường thẳng AD, BC sao cho $MN \parallel IJ$.

b) Xác định các điểm P, Q thuộc các đường thẳng AC, DI sao cho $PQ \parallel BJ$.

42. Cho hình chóp $S.ABCD$ và (α) là mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh có vô số mặt phẳng (α) để $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Xác định mặt phẳng (α) để hình bình hành $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

43. a) Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và hai điểm A, B thay đổi trên a, b. Tìm quỹ tích điểm M thuộc đoạn AB sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k$ (k dương, cho trước).

b) Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và đường thẳng c. Tìm điều kiện của c để tồn tại duy nhất một đường thẳng d cắt đồng thời các đường thẳng a, b, c tại A, B, C sao cho C thuộc đoạn AB và $\dfrac{CA}{CB} = k$ (k dương, cho trước).

Chương III

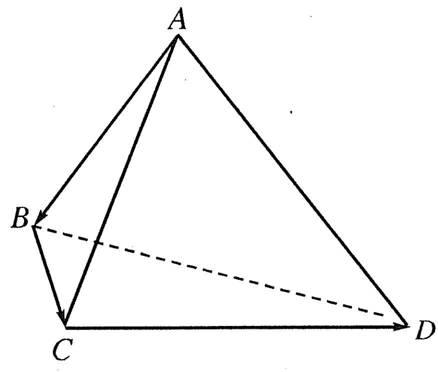
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

1. Vectơ trong không gian

Khái niệm vectơ và các phép toán vectơ đã được đề cập trong chương trình hình học lớp 10. Tuy nhiên, khi đó tất cả các vectơ mà chúng ta xem xét đều nằm trên cùng một mặt phẳng.

Ở chương II, chúng ta đã làm quen với việc nghiên cứu hình học không gian mà đối tượng của nó là các hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chẳng hạn tứ diện $ABCD$ là một hình có tính chất đó và như thế các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng nằm trong một mặt phẳng nào cả (h.3.1). Trong chương này, chúng ta sẽ nói đến các vectơ trong không gian. Vectơ, các phép toán trên các vectơ đã đề cập trong hình học phẳng, về cơ bản được chuyển tương tự cho hình học không gian nên không dành thời gian nhắc lại. Tuy nhiên, cần phải nắm vững thêm một số kết quả nêu dưới đây để vận dụng vectơ vào việc giải các bài tập trong hình học không gian.



Hình 3.1

1) Các điều trình bày về tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ với các hệ số tương ứng $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ trình bày trong tài liệu chuyên Toán Hình học 10 vẫn còn đúng trong không gian, cụ thể là:

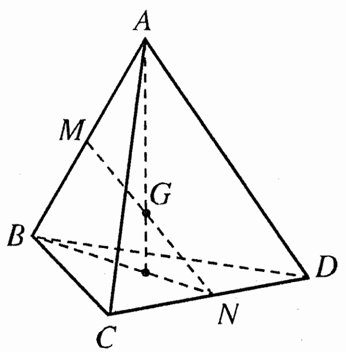
Khi $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, tâm tỉ cự G của hệ điểm đó xác định bởi $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ và với một điểm O nào đấy (hay với mọi điểm O) ta có: $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$ (khi mọi α_i bằng nhau, ta được trọng tâm của hệ điểm).

a) Chẳng hạn, đối với tứ diện $ABCD$ (h.3.2) ta luôn có:

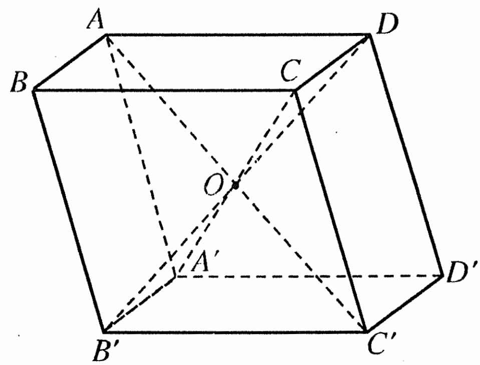
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$ (G là trọng tâm của $ABCD$)
- $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ (M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD)
- Điểm G là trọng tâm của hình tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau đây xảy ra:

  + $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

  + $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$ với mọi điểm P.



Hình 3.2



Hình 3.3

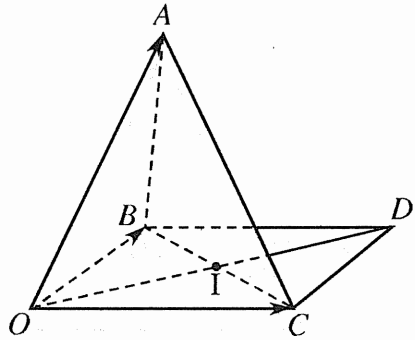
b) Đối với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (h.3.3) ta luôn có:

- $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ (quy tắc đường chéo của hình hộp)
- Có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$ và với điểm P bất kì trong không gian ta có

  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{PD'} = 8\overrightarrow{PO}$, từ đó suy ra điểm O là duy nhất (O là trọng tâm của hệ đỉnh của hình hộp).

2) Về tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cần lưu ý hai tính chất sau đây vẫn còn đúng.

- Trong tam giác ABC ta có $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$
- Tính chất phân phối của tích vô hướng đối với phép cộng vectơ tức là $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$, cụ thể:



Hình 3.4

Khi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng nằm trong một mặt phẳng thì tính chất đó luôn xảy ra, còn khi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì, nó được giải thích:

Từ một điểm O ta đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ (h.3.4). Lấy điểm D sao cho $OBDC$ là hình bình hành, tức là $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Khi ấy ta có:

$$2\vec{a}.\vec{b}=OA^2+OB^2-AB^2,\ 2\vec{a}.\vec{c}=OA^2+OC^2-AC^2$$

Bởi vậy $2\left(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}\right)=2OA^2+OB^2+OC^2-\left(AB^2+AC^2\right)$ (1)

Mặt khác, trong hình bình hành $OBDC$ ta có

$2\left(OB^2+OC^2\right)=OD^2+BC^2$. (2)

Gọi I là tâm của hình bình hành $OBDC$ thì AI là trung tuyến của hai tam giác ABC và AOD nên

$$AI^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{OA^2+AD^2}{2}-\frac{OD^2}{4}.$$

Vậy $AB^2+AC^2=OA^2+AD^2+\frac{1}{2}\left(BC^2-OD^2\right)$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có

$$\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=\frac{1}{2}\left[2OA^2+\frac{1}{2}\left(OD^2+BC^2\right)-OA^2-AD^2-\frac{1}{2}\left(BC^2-OD^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(OA^2+OD^2-AD^2\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Sau đây là một số ví dụ nhằm mục đích ôn tập lại những kiến thức đã có về vectơ trong mặt phẳng để áp dụng vào không gian.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử E và F lần lượt chia AB và DC theo tỉ số k còn P, Q, R lần lượt chia AD, EF, BC theo tỉ số l. Chứng minh rằng ba điểm P, Q, R thẳng hàng (điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$).

Giải (h.3.5)

Cách 1

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EQ}$ (1)

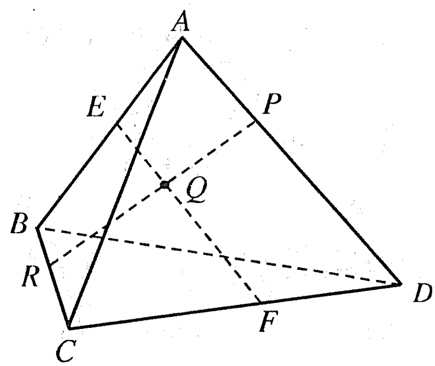
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FQ}$. (2)

Từ (2) ta có

$l\overrightarrow{PQ} = l\overrightarrow{PD} + l\overrightarrow{DF} + l\overrightarrow{FQ}$. (3)

Trừ đẳng thức (1) cho (3) ta có :

$(1-l)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE} - l\overrightarrow{DF}$ hay



Hình 3.5

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{1-l}\overrightarrow{AE} - \frac{l}{1-l}\overrightarrow{DF}.$$

Tương tự ta có $\overrightarrow{QR} = \dfrac{1}{1-l}\overrightarrow{EB} - \dfrac{l}{1-l}\overrightarrow{FC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{EA} = k\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FD} = k\overrightarrow{FC}$ nên $\overrightarrow{PQ} = -\dfrac{k}{1-l}\overrightarrow{EB} + \dfrac{lk}{1-l}\overrightarrow{FC} = -k\overrightarrow{QR}$ hay

$\overrightarrow{QP} = k\overrightarrow{QR}$, tức là ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Cách 2

Ta chọn một điểm O tuỳ ý và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

Vì E chia AB theo tỉ số k nên $\overrightarrow{OE} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k} = \dfrac{\vec{a} - k\vec{b}}{1-k}$

F chia DC theo tỉ số k nên $\overrightarrow{OF} = \dfrac{\overrightarrow{OD} - k\overrightarrow{OC}}{1-k} = \dfrac{\vec{d} - k\vec{c}}{1-k}$.

Các điểm P, Q, R chia AD, EF, BC theo tỉ số l nên

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}-l\vec{d}}{1-l};\ \overrightarrow{OR}=\frac{\vec{b}-l\vec{c}}{1-l};$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OE}-l\overrightarrow{OF}}{1-l}=\frac{1}{1-l}\left[\frac{\vec{a}-k\vec{b}}{1-k}-\frac{l\left(\vec{d}-k\vec{c}\right)}{1-k}\right]=\frac{1}{1-k}\left(\frac{\vec{a}-l\vec{d}}{1-l}-\frac{k\left(\vec{b}-l\vec{c}\right)}{1-l}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OP}-k\overrightarrow{OR}\right)$.

Ta lại có $\dfrac{1}{1-k}+\dfrac{-k}{1-k}=1$ nên từ đẳng thức trên suy ra ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

Ví dụ 2. Cho hai tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tứ diện đó. Chứng minh rằng $GG'\le\dfrac{1}{4}\left(AA'+BB'+CC'+DD'\right)$.

Giải. Vì G và G' là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0},\ \overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}+\overrightarrow{G'D'}=\vec{0}.$$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}$

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'G'}$$

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'G'}$$

$$\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'G'}$$

Từ đó $4\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}$ hay $\left|\overrightarrow{GG'}\right|=\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}\right|$.

Từ đó suy ra $GG'\le\dfrac{1}{4}\left(AA'+BB'+CC'+DD'\right)$.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng $AB.CD\le AC.BD+AD.BC$.

Giải. Do vai trò của A, B, C, D như nhau nên ta xét một trong bốn điểm đó, chẳng hạn điểm A.

- Nếu A trùng với một trong các điểm B, C, D thì bất đẳng thức phải chứng minh hiển nhiên đúng.
- Nếu A không trùng với B, C, D thì AB, AC, AD đều khác không. Khi ấy bất đẳng thức $AB.CD \le AC.BD + AD.BC$ tương đương với

$$\frac{CD}{AC.AD} \le \frac{BD}{AB.AD} + \frac{BC}{AB.AC}. \qquad (*)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (*), ta chọn các điểm B', C', D' sao cho

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{AB^2}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AC^2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD'} = \frac{1}{AD^2}\overrightarrow{AD}.$$

Khi ấy ta có $C'D' = \dfrac{CD}{AC.AD}$, $B'D' = \dfrac{BD}{AB.AD}$, $B'C' = \dfrac{BC}{AB.AC}$.

Thật vậy ta có:

$$\overrightarrow{C'D'}^2 = \left(\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC'}\right)^2 = \left(\frac{1}{AD^2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{AC^2}\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2} - \frac{2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}}{AD^2AC^2}$$

$$= \frac{AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}}{AD^2AC^2} = \frac{CD^2}{AD^2AC^2}, \text{ từ đó } C'D' = \frac{CD}{AD.AC}.$$

Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.

Mặt khác ta luôn có $C'D' \le B'D' + B'C'$.

Vậy bất đẳng thức (*) được chứng minh,

tức là bất đẳng thức $AB.CD \le AC.BD + AD.BC$ được chứng minh.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = c$, $CD = c'$, $AC = b$, $BD = b'$, $BC = a$, $AD = a'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Giải. Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$

$$= \frac{1}{2}\left(CB^2 + CD^2 - BD^2\right) - \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2\right).$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$ xác định bởi

$$\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}\right) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}.$$

Ví dụ 5. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0.$$

Từ đó suy ra trong tứ diện $ABCD$ nếu có $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$ thì

$$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BD}.$$

Giải. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$

$$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD} = 0.$$

Khi tứ diện $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$, tức là $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$, từ kết quả chứng minh ở trên suy ra $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$, tức là $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BD}$.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng diện tích S của tam giác ABC có thể tính theo công thức $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Giải. Đặt α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Ta có

$$AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 = AB^2.AC^2\left(1 - \cos^2\alpha\right) = AB^2.AC^2\sin^2\alpha$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}AB.AC\sin\alpha\right)^2 = 4S^2.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Ví dụ 7. Tính độ dài d của đường chéo OD của hình hộp biết độ dài $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ của ba cạnh xuất phát từ điểm O và các góc $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$. Tính các góc φ_1, φ_2, φ_3 giữa vectơ $\overrightarrow{OD}$ và vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Giải. Dễ thấy $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, từ đó

$$d^2 = \overrightarrow{OD}^2 = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha.$$

Vậy $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}$.

Ta có $\cos\varphi_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OD}\right|} = \dfrac{\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)}{\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OD}\right|}$

$$= \frac{a^2 + ab\cos\gamma + ac\cos\beta}{a.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}}$$

$$= \frac{a + b\cos\gamma + c\cos\beta}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}}.$$

Tương tự ta có

$$\cos\varphi_2 = \frac{a\cos\gamma + b + c\cos\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}}$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha + c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}}$$

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

Giải. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{DB}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{c}}{2} - \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right).$$

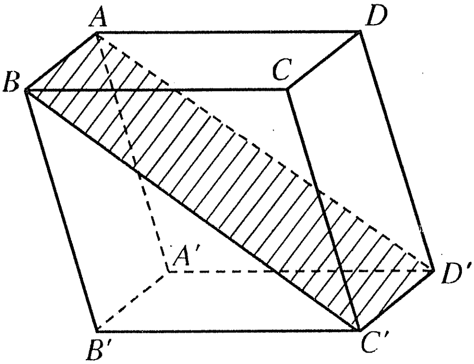
Từ đó

$$AC^2 + BD^2 + 4PQ^2 = \left(\vec{c} - \vec{a}\right)^2 + \vec{b}^2 + \left(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)^2$$

$$= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}\vec{c}.$$

Vậy $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

Ví dụ 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Các góc tại đỉnh A của hình hộp cùng bằng α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Tính diện tích mặt chéo $ABC'D'$.



Hình 3.6

Giải (h.3.6). Ta có $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$,

từ đó $\overrightarrow{AD'}^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$.

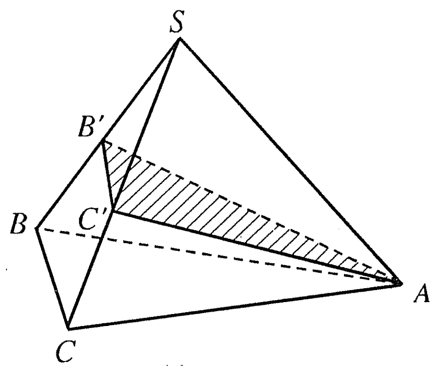
Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD'} = a(b+c)\cos\alpha$.

Do $ABC'D'$ là hình bình hành nên

$$S_{ABC'D'} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2\,\overrightarrow{AD'}^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD'}\right)^2}$$

$$= a\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha - (b+c)^2\cos^2\alpha}.$$

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng đi qua A và các trung điểm B', C' lần lượt của SB, SC.



Hình 3.7

Giải (h.3.7). Dễ thấy thiết diện thu được là tam giác cân $AB'C'$ (cân tại A). Ta có

$$S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{2}\sqrt{AB'^2AC'^2 - \left(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AB'^4 - \left(\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}\right)^2}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA}$ nên

$$AB'^2 = \frac{a^2}{4}(5 - 4\cos\alpha) \text{ và } \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'} = \left(\overrightarrow{SB'} - \overrightarrow{SA}\right)\left(\overrightarrow{SC'} - \overrightarrow{SA}\right) = \frac{a^2}{4}(4 - 3\cos\alpha).$$

Khi ấy $S_{\Delta AB'C'} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^4}{16}(5 - 4\cos\alpha)^2 - \dfrac{a^4}{16}(4 - 3\cos\alpha)^2}$

$$= \frac{a^2}{8}\sqrt{9 + 7\cos^2\alpha - 16\cos\alpha}.$$

Ví dụ 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi N là điểm thuộc cạnh CD (N khác C, D) sao cho $NA = NB$. Chứng minh rằng $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{|CA^2 - CB^2|}{|DA^2 - DB^2|}$.

Giải. Ta có $CA^2 - CB^2 = \left(\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC}\right)^2 - \left(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}\right)^2$

$$= NA^2 - NB^2 - 2\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{NC}$$

$$= 2\overrightarrow{NC}\left(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{NC}.$$

Tương tự ta cũng có $DA^2 - DB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ND}$

Mặt khác do N, C, D thẳng hàng nên $\overrightarrow{NC} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}\overrightarrow{ND}$.

Từ đó $CA^2 - CB^2 = 2\dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}\overrightarrow{ND}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}\left(DA^2 - DB^2\right)$.

Vậy $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{|CA^2 - CB^2|}{|DA^2 - DB^2|}$.

2. Sự đồng phẳng của các vectơ. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

a) *Các vectơ phụ thuộc tuyến tính, độc lập tuyến tính*

+ Cho k vectơ $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_k}$, $k \geq 1$ và k số $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Người ta gọi vectơ $p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k\overrightarrow{a_k}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_k}$ với các số $p_1, p_2, \ldots, p_k$ là các hệ số của tổ hợp tuyến tính ấy.

+ Các vectơ $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_k}$ gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số $p_1, p_2, \ldots, p_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho $p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$. Trong trường hợp ngược lại, các vectơ $\overrightarrow{a_i}$ gọi là độc lập tuyến tính. Nói cách khác, nếu các vectơ $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_k}$ độc lập tuyến tính thì ta chỉ có đẳng thức

$$p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0} \text{ khi } p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 0.$$

b) *Điều kiện để các vectơ phụ thuộc tuyến tính*

ĐỊNH LÍ 1. *Các vectơ* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ *(k > 1) phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có ít nhất một trong các vectơ ấy là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.*

Chứng minh. Nếu $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ phụ thuộc tuyến tính, tức là ta có

$$p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_k\overrightarrow{a_k} = \vec{0}$$

trong đó có ít nhất một hệ số p_i khác 0, chẳng hạn p_k.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{a_k} = -\dfrac{p_1}{p_k}\overrightarrow{a_1} - \ldots - \dfrac{p_{k-1}}{p_k}\overrightarrow{a_{k-1}}$.

Hệ thức này chứng tỏ $\overrightarrow{a_k}$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Ngược lại, giả sử vectơ $\overrightarrow{a_k} = p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}}$, từ đó

$$p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + p_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}} - \overrightarrow{a_k} = \vec{0}.$$

Vậy chứng tỏ hệ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ phụ thuộc tuyến tính.

Từ cách chứng minh mệnh đề trên ta suy ra kết quả sau:

Nếu các vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ độc lập tuyến tính thì bất cứ vectơ nào trong tập hợp các vectơ ấy cũng không thể là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

Định lí sau đây nói lên ý nghĩa hình học của hai vectơ phụ thuộc tuyến tính (dễ dàng chứng minh được định lí đó).

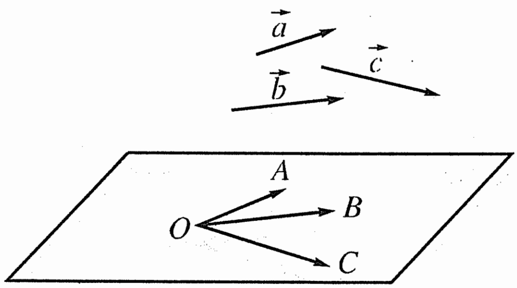
ĐỊNH LÍ 2. *Điều kiện cần và đủ để hai vectơ phụ thuộc tuyến tính là chúng cùng phương.*

c) *Ba vectơ đồng phẳng*

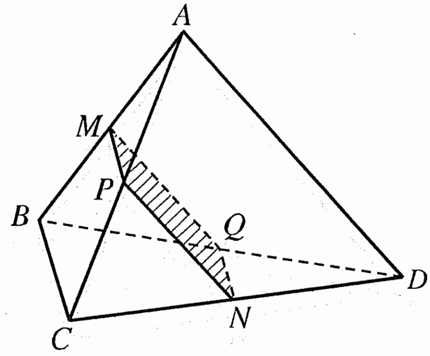
Ta biết rằng với hai đường thẳng phân biệt trong không gian luôn có mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó. Nhưng nói chung không có mặt phẳng song song với ba đường thẳng phân biệt cho trước. Nếu có mặt phẳng như thế thì ta nói rằng ba vectơ nằm trên ba đường thẳng ấy là đồng phẳng.

ĐỊNH NGHĨA. Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trên hình 3.8 giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều song song với mặt phẳng (P) nên ba vectơ đó đồng phẳng.



Hình 3.8



Hình 3.9

Nhận xét. Từ định nghĩa nêu trên suy ra: Nếu từ điểm O ta đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C nằm trên một mặt phẳng hay ba đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng.

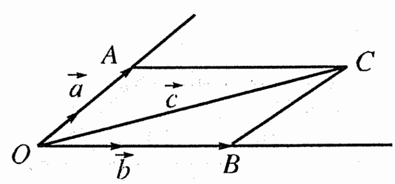
Ví dụ. Đối với tứ diện $ABCD$ (h.3.9), gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Điều này suy ra từ bốn điểm M, N, P, Q cùng trong một mặt phẳng, ở đó P, Q là trung điểm của AC, BD.

Điều kiện ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và sự khai triển một vectơ theo hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng chúng ta có thể chứng minh được định lí sau.

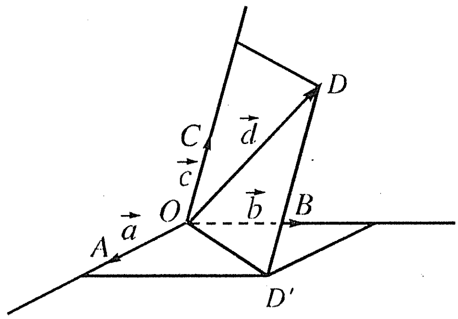
ĐỊNH LÍ 3. *Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.*

Định lí 3 nói đến điều kiện để có thể biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương (h.3.10). Định lí dưới đây sẽ nói về biểu thị một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng.



Hình 3.10

ĐỊNH LÍ 4. *Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$ ta tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa các số m, n, p là duy nhất.*



Hình 3.11

Chứng minh. Từ điểm O, ta đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên bốn điểm O, A, B, C không cùng nằm trong một mặt phẳng.

Từ điểm D kẻ đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng OC, cắt mặt phẳng (OAB) tại điểm D' (h.3.11). Khi đó $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}$.

Theo định lí 3 ta có các số m, n sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra, $\overrightarrow{D'D} = p\vec{c}$ (vì $\overrightarrow{D'D}$ và $\vec{c}$ là hai vectơ cùng phương và $\vec{c} \neq \vec{0}$).

Vậy $\overrightarrow{OD} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, tức là $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

Nếu còn có $\overrightarrow{OD} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$ thì $(m - m')\vec{a} + (n - n')\vec{b} + (p - p')\vec{c} = \vec{0}$.

Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên $m - m' = n - n' = p - p' = 0$, tức là $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$. Vậy các số m, n, p là duy nhất.

Khi có đẳng thức $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$ như trên, người ta còn nói vectơ $\vec{d}$ khai triển theo ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Từ hai định lí khai triển nêu trên ta thấy:

1. Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ độc lập tuyến tính. Tập hợp tất cả các vectơ $\vec{c}$ sao cho $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ phụ thuộc tuyến tính được kí hiệu là $<\vec{a}, \vec{b}>$ và gọi là không gian vectơ hai chiều sinh bởi hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

   Từ định lí 3 suy ra rằng nếu $\vec{c} \in <\vec{a}, \vec{b}>$ thì $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Vậy không gian vectơ hai chiều sinh bởi $\vec{a}$, $\vec{b}$ có thể xem như tập hợp tất cả các vectơ dạng $m\vec{a} + n\vec{b}$ trong đó m, n là những số thực bất kì.

Có thể chứng minh được rằng nếu ta lấy hai vectơ $\vec{a'}$, $\vec{b'}$ độc lập tuyến tính của $<\vec{a}, \vec{b}>$ thì $<\vec{a'}, \vec{b'}> = <\vec{a}, \vec{b}>$.

2. Trong không gian, có những bộ ba vectơ độc lập tuyến tính, cụ thể chỉ cần chọn ba vectơ sao cho chúng không đồng phẳng.

Ta chứng minh rằng bất kì bốn vectơ $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, $\vec{a_4}$ nào cũng phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, xét ba vectơ $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, nếu chúng phụ thuộc tuyến tính thì tất nhiên $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, $\vec{a_4}$ phụ thuộc tuyến tính. Nếu chúng độc lập tuyến tính thì lấy điểm O nào đó và các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a_2}$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a_3}$. Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{a_4}$. Vì $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ độc lập tuyến tính nên O, A_1, A_2, A_3 không nằm trên một mặt phẳng. Khi đó $\overrightarrow{OM} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \lambda_3\vec{a_3}$ tức là bốn vectơ $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$, $\vec{a_4}$ phụ thuộc tuyến tính.

Trong không gian, ba vectơ có thứ tự $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ độc lập tuyến tính được gọi là một cơ sở của không gian. Mọi vectơ $\vec{u}$ bất kì có biểu diễn duy nhất dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Bộ ba $(x; y; z)$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ đối với cơ sở $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ đã cho và viết $\vec{u}$ = $(x; y; z)$ hay $\vec{u}(x; y; z)$.

Chú ý rằng nếu $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$ thì $\lambda\vec{u} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ và

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y'; z + z').$$

d) Chiếu vectơ trong không gian

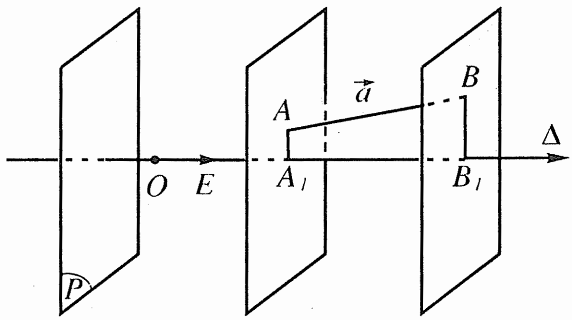
Trong hình học phẳng đã đề cập đến phép chiếu vectơ, ở mục này ta đề cập đến phép chiếu vectơ trong không gian theo các khía cạnh:

+ Khi xét phép chiếu song song của một điểm lên một mặt phẳng (P) theo một phương l cho trước, chúng ta cũng có một số kết quả về phép chiếu vectơ lên mặt phẳng theo một phương cho trước. Các kết quả ấy tương tự như chiếu vectơ trong mặt phẳng.

+ Xét phép chiếu lên một đường thẳng theo phương của một mặt phẳng.

ĐỊNH NGHĨA

- Một đường thẳng trên đó đã chọn một vectơ đơn vị gọi là một trục. Hướng của vectơ đơn vị gọi là hướng của trục.
- Cho một trục Δ, một mặt phẳng (P) không song song với Δ và một vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ tuỳ ý trong không gian. Qua A và B dựng các mặt phẳng song song với (P) cắt Δ lần lượt ở A_1 và B_1. Các điểm A_1, B_1 gọi là các điểm chiếu của các điểm A, B trên Δ theo phương (P); $\overrightarrow{A_1B_1}$ gọi là vectơ chiếu của $\overrightarrow{AB}$ trên Δ theo phương (P) (h.3.12).



Hình 3.12

Ta có $\overrightarrow{A_1B_1} = p\overrightarrow{OE}$ ($\overrightarrow{OE}$ là vectơ đơn vị trên Δ), $p > 0$ nếu $\overrightarrow{A_1B_1}$ và $\overrightarrow{OE}$ cùng hướng, $p < 0$ nếu $\overrightarrow{A_1B_1}$ và $\overrightarrow{OE}$ ngược hướng. Người ta gọi số đại số p là chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Δ theo phương (P) và viết $p = \text{ch}_\Delta \overrightarrow{AB}$ hay $p = \text{ch}_\Delta \vec{a}$. Người ta còn gọi p là độ dài đại số của A_1B_1 và kí hiệu $p = \overline{A_1B_1}$.

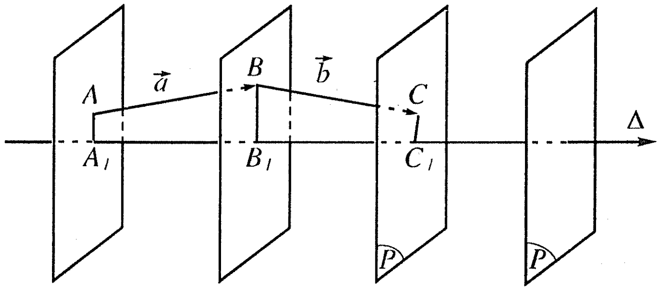
TÍNH CHẤT 1. Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\text{ch}_\Delta \vec{a} = \text{ch}_\Delta \vec{b}$

TÍNH CHẤT 2. Chiếu của vectơ tổng bằng tổng các chiếu của các vectơ thành phần, nghĩa là $\text{ch}_\Delta\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{ch}_\Delta \vec{a} + \text{ch}_\Delta \vec{b}$.

Chứng minh. Từ một điểm A đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ rồi đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (h.3.13).

Như vậy $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm chiếu của A, B, C trên trục Δ theo cùng một phương (P) thì rõ ràng $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}$ và suy ra điều phải chứng minh.



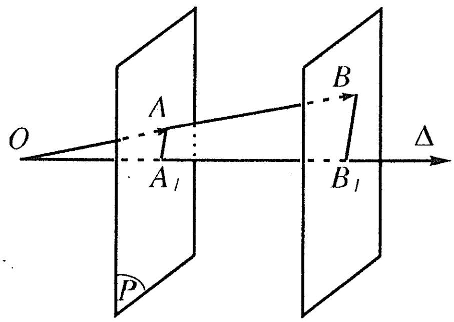
Hình 3.13

Chú ý. Bằng phương pháp quy nạp toán học, có thể chứng minh được

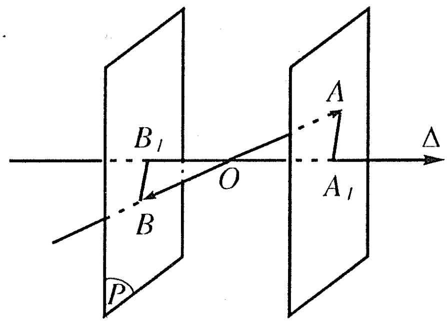
$$\mathrm{ch}_{\Delta}\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\ldots+\overrightarrow{a_n}\right)=\mathrm{ch}_{\Delta}\overrightarrow{a_1}+\mathrm{ch}_{\Delta}\overrightarrow{a_2}+\ldots+\mathrm{ch}_{\Delta}\overrightarrow{a_n}\,.$$

TÍNH CHẤT 3. $\mathrm{ch}_{\Delta}p\vec{a}=p\,\mathrm{ch}_{\Delta}\vec{a}$.

Chứng minh. Lấy một điểm O tuỳ ý trên trục Δ và dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=p\vec{a}$. Có hai trường hợp: $p>0$ (h.3.14a) và $p<0$ (h.3.14b). Gọi A_1, B_1 là các điểm chiếu của A, B trên trục Δ. Trong cả hai trường hợp theo định lí Thales ta có $\dfrac{OB_1}{OA_1}=|p|$. Từ đó $\overrightarrow{OB_1}=p\overrightarrow{OA_1}$ và suy ra điều phải chứng minh.



Hình 3.14a



Hình 3.14b

Sau đây là một số ví dụ với mục đích áp dụng các kết quả của mục này vào giải một số bài tập.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc mp(ABC) là $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x+y+z=1$. Ngoài ra, các số x, y, z không phụ thuộc vào điểm O. Với điều kiện nào của x, y, z thì điểm M thuộc miền tam giác ABC?

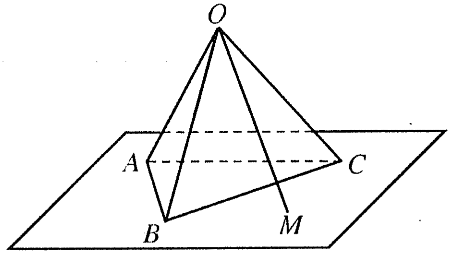
Giải (h.3.15). Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên điểm M thuộc mp(ABC) khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}.$$

Điều này tương đương với

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = m\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + n\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - m - n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$$



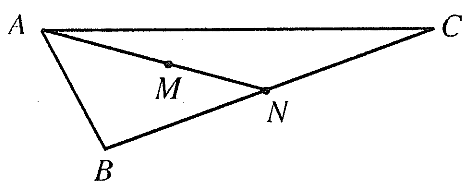
Hình 3.15

Đặt $1 - m - n = x$, $m = y$, $n = z$ thì hệ thức trên tương đương với

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}, \text{ trong đó } x + y + z = 1.$$

Dĩ nhiên x, y, z không phụ thuộc vào điểm O.

Điểm M thuộc vào miền tam giác ABC khi và chỉ khi AM cắt cạnh BC tại điểm N và điểm M thuộc đoạn thẳng AN (h.3.16).



Hình 3.16

Với mỗi điểm O bất kì thì điều nói trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + k'\overrightarrow{ON} \text{ với } k + k' = 1,\ k, k' \geq 0 \text{ và } \overrightarrow{ON} = p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC}$$

với $p + q = 1$, $p, q \geq 0$.

Như vậy $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + k'p\overrightarrow{OB} + k'q\overrightarrow{OC}$.

Nếu đặt $x = k$, $y = k'p$, $z = k'q$ thì tất nhiên

$$x + y + z = k + k'p + k'q = k + k'(p + q) = k + k' = 1$$

đồng thời $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.

Đẳng thức này khẳng định mp($A'B'C'$) đi qua trọng tâm G của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

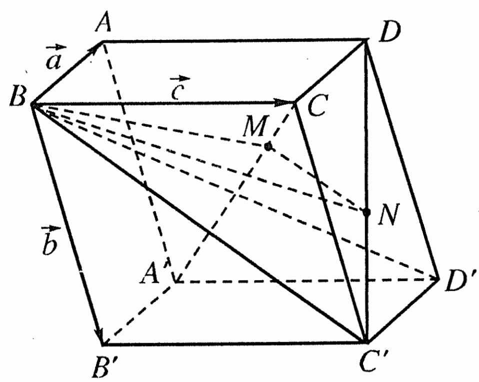
Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.\ A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là các điểm chia $A'C$ và $C'D$ theo các tỉ số k và l (k, l khác 1). Xác định k, l để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Giải (h.3.17). Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

Vì M chia $A'C$ theo tỉ số k tức là $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$ ta suy ra

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}$$

hay $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c}$.



Hình 3.17

Tương tự ta có

$$\overrightarrow{BN} = \frac{-l}{1-l}\vec{a} + \frac{1}{1-l}\vec{b} + \vec{c}.$$

Từ đó

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \left(\frac{-l}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\vec{c} \qquad (1)$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (2)

Do BD' và $C'D$ là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng $C'D$ nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD'. Ta suy ra đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$ (3)

Mặt khác, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên từ (1), (2), (3) ta suy ra

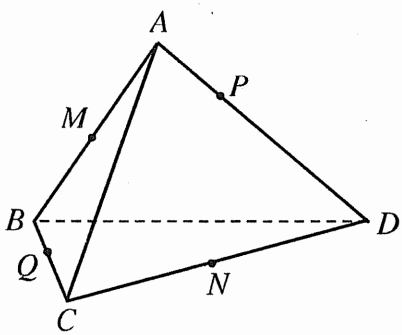
$$\begin{cases} \dfrac{-l}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ \dfrac{1}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ 1 + \dfrac{k}{1-k} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = -1 \\ k = -3 \\ p = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy khi $k = -3$, $l = -1$ thì đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi P, Q là các điểm lần lượt chia AD và BC theo tỉ số k (nghĩa là $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$, $k \neq 1$). Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải (h.3.18)

Cách 1



Hình 3.18

Từ $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$ ta có $\overrightarrow{MP} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự ta có $\overrightarrow{MQ} = \dfrac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}$.

Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{k}{k-1}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).$$

Mặt khác, do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Vậy $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \dfrac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$.

Hệ thức này khẳng định các vectơ $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, tức là bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Cách 2

Lấy một điểm O tuỳ ý, đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Khi ấy từ giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{ON}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}-k\vec{d}}{1-k},\ \overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}-k\vec{c}}{1-k}.$$

Từ đó $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{1-k}\left[\vec{a}+\vec{b}-k\left(\vec{c}+\vec{d}\right)\right]=\dfrac{1}{1-k}\left(2\overrightarrow{OM}-2k\overrightarrow{ON}\right)$ hay

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{1-k}\overrightarrow{OM}-\frac{2k}{1-k}\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OQ}.$$

Trong khai triển này ta có $\dfrac{2}{1-k}-\dfrac{2k}{1-k}-1=1$.

Vậy bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Chú ý. Có thể xác định giao điểm của mp(MNP) với đường thẳng BC, gọi giao điểm đó là Q_1 và chứng minh Q_1 trùng với Q.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{CB'}$ không đồng phẳng và biểu thị vectơ $\overrightarrow{AA'}$ theo ba vectơ đó.

Giải (h.3.19). Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BA'}=\vec{b}$,

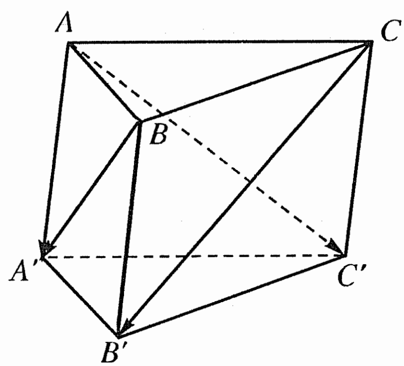
$\overrightarrow{CB'}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{y}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{z}$.

Dễ thấy $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng và

$$\vec{a}=\vec{x}+\vec{z} \qquad (1)$$

$$\vec{b}=\vec{x}-\vec{y} \qquad (2)$$

$$\vec{c}=\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}. \qquad (3)$$



Hình 3.19

Giả sử $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng. Do $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là hai vectơ không cùng phương nên có các số k, l sao cho $\vec{a}=k\vec{b}+l\vec{c}$ hay

$$\vec{x}+\vec{z}=k\left(\vec{x}-\vec{y}\right)+l\left(\vec{x}+\vec{y}-\vec{z}\right)\Leftrightarrow(k+l-1)\vec{x}+(-k+l)\vec{y}-(l+1)\vec{z}=\vec{0}.$$

Vì $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ không đồng phẳng nên

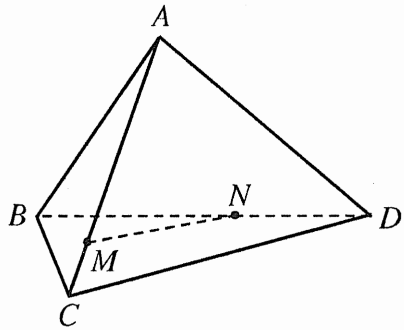
$$\begin{cases} k+l-1=0 \\ -k+l=0 \\ l+1=0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ trên vô nghiệm. Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Từ (1), (2), (3) ta có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{x}$ hay $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{CB'}\right)$.

Ví dụ 6. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Hai điểm M và N lần lượt chia AC và BD theo các tỉ số k và k' (k, $k' \neq 1$). Tìm điều kiện về k và k' để ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Giải (h.3.20). Ba đường thẳng AB, CD và MN cùng song song với một mặt phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Hình 3.20

Đặt ba vectơ xuất phát từ đỉnh D: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Do M chia AC theo tỉ số k nên

$$\overrightarrow{DM}=\frac{\overrightarrow{DA}-k\overrightarrow{DC}}{1-k}=\frac{\vec{a}-k\vec{c}}{1-k}.$$

Vì N chia BD theo tỉ số k' nên $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{1-k'}\vec{b}$.

Từ đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{-1}{1-k}\vec{a}+\frac{1}{1-k'}\vec{b}+\frac{k}{1-k}\vec{c}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{c}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{CD}$, tức là

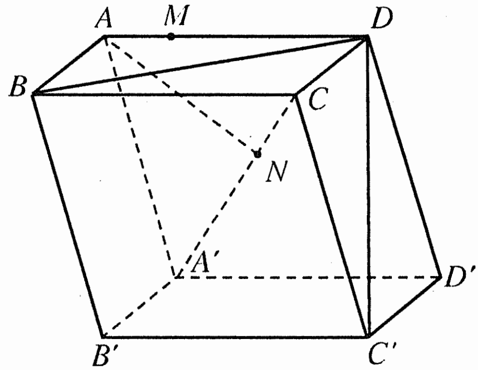
$$\frac{-1}{1-k}\vec{a}+\frac{1}{1-k'}\vec{b}+\frac{k}{1-k}\vec{c}=-m\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}$$

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên $\frac{1}{1-k}=m$, $\frac{1}{1-k'}=m$, $\frac{k}{1-k}=-n$.

Từ đó $k=k'$. Vậy ba đường thẳng AB, CD, MN cùng song song với một mặt phẳng khi và chỉ khi $k=k'$.

Ví dụ 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M là điểm chia AD theo tỉ số $k=-\frac{1}{4}$, N là điểm chia $A'C$ theo tỉ số $k'=-\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(BC'D)$.

Giải (h.3.21). Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ thì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng và $\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{BC'}=\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{BA'}=\vec{a}+\vec{b}$.



Hình 3.21

Ta có $\overrightarrow{BM}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{5\vec{a}+\vec{c}}{5}$,

$$\overrightarrow{BN}=\dfrac{\overrightarrow{BA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}{1+\frac{2}{3}}=\dfrac{3\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}}{5}$$

Từ đó $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\dfrac{-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}$. (*)

Do M thuộc AD, AD cắt mp(BDC') tại D, $N\notin$ mp(BDC') nên đường thẳng MN không nằm trong mp(BDC').

Vậy MN song song với mp(BDC') khi và chỉ khi có m, n sao cho $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{BD}+n\overrightarrow{BC'}$ hay

$$\frac{-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}=m\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+n\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=m\vec{a}+n\vec{b}+\left(m+n\right)\vec{c}$$

Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên hệ thức trên xảy ra khi và chỉ khi

$$m=-\frac{2}{5},\ n=\frac{3}{5}.$$

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$, mp(P) cắt các tia SA, SB, SC, SG (G là trọng tâm tam giác ABC) lần lượt tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$$

Giải. Đặt $\frac{SA}{SA'} = a$, $\frac{SB}{SB'} = b$, $\frac{SC}{SC'} = c$, $\frac{SG}{SG'} = d$.

Ta phải chứng minh $a + b + c = 3d$.

Thật vậy, vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$ hay

$a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = 3d\overrightarrow{SG'}$. (1)

Vì A', B', C', G' cùng thuộc mp(P) nên có các số m, n, p mà $m + n + p = 1$ sao cho $\overrightarrow{SG'} = m\overrightarrow{SA'} + n\overrightarrow{SB'} + p\overrightarrow{SC'}$. (2)

Thay (2) vào (1) ta có $a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = 3dm\overrightarrow{SA'} + 3dn\overrightarrow{SB'} + 3dp\overrightarrow{SC'}$.

Mặt khác do $\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC'}$ không đồng phẳng nên

$a = 3dm$, $b = 3dn$, $c = 3dp$ hay $a + b + c = 3d(m + n + p) = 3d$ (đpcm).

Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho tồn tại điểm O thoả mãn

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

Chứng minh rằng $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}} = \frac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}}$.

Giải. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = t_1\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{BB_1} = t_2\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{CC_1} = t_3\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{DD_1} = t_4\overrightarrow{D_1A}$.

Trường hợp 1: $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$ và A_1, B_1, C_1, D_1 không trùng đỉnh tứ diện thì đẳng thức phải chứng minh là hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2: Tồn tại một t_i nào đó khác không, chẳng hạn $t_1 \neq 0$.

Từ giả thiết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$ ta suy ra

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{0}$ (1)

hay $t_1\overrightarrow{A_1B} + t_2\overrightarrow{B_1C} + t_3\overrightarrow{C_1D} + t_4\overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$ (2)

Ta lại có $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$

Kết hợp với (1) ta có $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{D_1A} = \vec{0}$ (3)

Nhân hai vế của (3) với t_1 rồi trừ các vế với (2) ta được

$$\left(t_1-t_2\right)\overrightarrow{B_1C}+\left(t_1-t_3\right)\overrightarrow{C_1D}+\left(t_1-t_4\right)\overrightarrow{D_1A}=\vec{0}. \quad (4)$$

Mặt khác $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1A}$ là các vectơ độc lập tuyến tính nên

$$t_1-t_2=t_2-t_3=t_3-t_4=0, \text{ tức là } t_1=t_2=t_3=t_4.$$

Vậy $\dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}}=\dfrac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}}=\dfrac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1D}}=\dfrac{\overline{DD_1}}{\overline{D_1A}}$.

Ví dụ 10. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC = 1$. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của tứ diện và cắt SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Tìm giá trị lớn nhất của $\dfrac{1}{SA_1.SB_1}+\dfrac{1}{SB_1.SC_1}+\dfrac{1}{SC_1.SA_1}$.

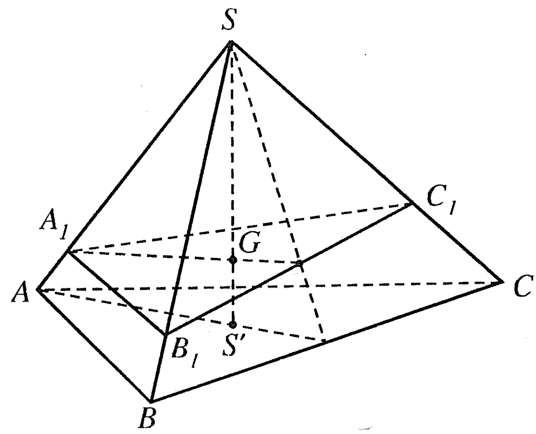
Giải (h.3.22). Gọi G là trọng tâm của tứ diện đã cho thì

$$4\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$$

$$=\frac{SA}{SA_1}\overrightarrow{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\overrightarrow{SC_1}$$

$$=\frac{1}{SA_1}\overrightarrow{SA_1}+\frac{1}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\frac{1}{SC_1}\overrightarrow{SC_1}$$

(do $SA = SB = SC = 1$)



Hình 3.22

Từ đó

$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}\left(\frac{\overrightarrow{SA_1}}{SA_1}+\frac{\overrightarrow{SB_1}}{SB_1}+\frac{\overrightarrow{SC_1}}{SC_1}\right).$$

Mặt khác bốn điểm A_1, B_1, C_1, G cùng thuộc mp(α) nên từ đẳng thức trên ta có $\dfrac{1}{4SA_1}+\dfrac{1}{4SB_1}+\dfrac{1}{4SC_1}=1$ hay $\dfrac{1}{SA_1}+\dfrac{1}{SB_1}+\dfrac{1}{SC_1}=4$.

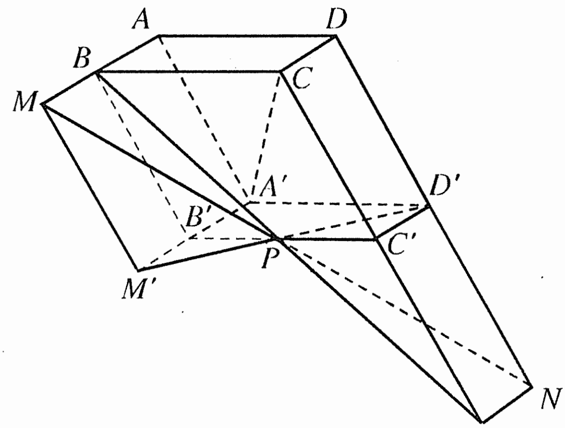
Do $\dfrac{1}{SA_1.SB_1}+\dfrac{1}{SB_1.SC_1}+\dfrac{1}{SC_1.SA_1}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{SA_1}+\dfrac{1}{SB_1}+\dfrac{1}{SC_1}\right)^2=\dfrac{16}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\dfrac{1}{SA_1.SB_1}+\dfrac{1}{SB_1.SC_1}+\dfrac{1}{SC_1.SA_1}$ bằng $\dfrac{16}{3}$.

Giá trị đó đạt được khi $G \in$ mp$(A_1B_1C_1)$ song song với mp(ABC).

Ví dụ 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi P là trung điểm của cạnh $B'C'$. Một đường thẳng Δ đi qua điểm P và cắt các đường thẳng AB, DD' lần lượt tại M, N. Các điểm M, N lần lượt chia AB, DD' theo tỉ số bao nhiêu?

Giải (h.3.23). Chiếu ba điểm M, P, N lên mp$(A'B'C'D')$ theo phương AA' ta được ba điểm M', P, D'. Dễ thấy $\overrightarrow{M'A'} = 2\overrightarrow{M'B'}$, từ đó M chia AB theo tỉ số 2.



Hình 3.23

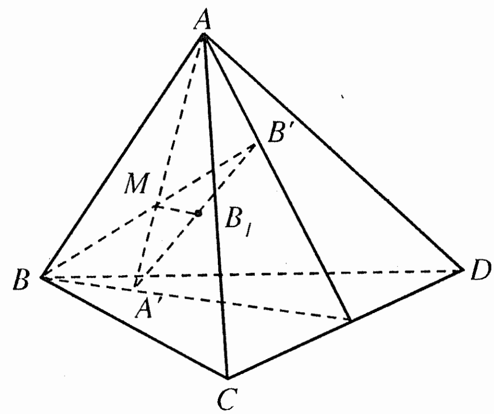
Tương tự bằng cách chiếu các điểm M, P, N lên mp$(BCC'B')$ theo phương $D'C'$ ta cũng suy ra điểm N chia DD' theo tỉ số 2.

Ví dụ 12. Cho M là điểm nằm trong tứ diện $ABCD$. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM theo thứ tự cắt các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) tại A', B', C', D'. Mặt phẳng (α) đi qua điểm M, song song với mp(BCD) lần lượt cắt $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ tại B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$.

Giải (h.3.24). Vì trong không gian bốn vectơ bất kì luôn phụ thuộc tuyến tính nên tồn tại các số x, y, z, t mà $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$ sao cho

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} + t\overrightarrow{MD} = \vec{0} \quad (1)$$

mà theo giả thiết M nằm trong tứ diện nên có thể coi $x, y, z, t > 0$. Mặt khác, mp(α) đi qua M và song song với mp(BCD), cắt $A'B'$ tại B_1 nên $MB_1 \parallel BA'$ và B_1 thuộc đoạn $A'B'$.



Hình 3.24

Xét $\Delta B'A'B$ có $MB_1 // BA'$ nên $\overrightarrow{MB_1} = \dfrac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}}\overrightarrow{BA'}$ (2)

Chiếu các vectơ xác định bởi (1) lên đường thẳng BB' theo phương mp(ACD) ta được:

$x\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MB'} + t\overrightarrow{MB'} = \vec{0}$ hay $(x+z+t)\overrightarrow{MB'} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Rightarrow (x+z+t)\overrightarrow{MB'} = y\overrightarrow{BM}$

$\Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{MB'}}{y} = \dfrac{\overrightarrow{BM}}{x+z+t} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{x+y+z+t}$

Vậy $\dfrac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} = \dfrac{y}{x+y+z+t}$. (3)

Từ (2) và (3) ta có $\overrightarrow{MA_1} = \dfrac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{BA'}$. (4)

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{MB_1} = \dfrac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{CA'}$. (5)

$$\overrightarrow{MC_1} = \dfrac{t}{x+y+z+t}\overrightarrow{DA'}. \quad (6)$$

Mặt khác nếu chiếu các vectơ xác định bởi (1) lên mp(BCD) theo phương AA' ta được

$y\overrightarrow{A'B} + z\overrightarrow{A'C} + t\overrightarrow{A'D} = \vec{0}$ (7)

Từ (4), (5), (6), (7) ta có

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \dfrac{1}{x+y+z+t}\left(y\overrightarrow{BA'} + z\overrightarrow{CA'} + t\overrightarrow{DA'}\right) = \vec{0}$ (8)

Hệ thức (8) khẳng định M là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một, M là điểm bất kì trong không gian.

   Chứng minh rằng tổng các bình phương các khoảng cách từ M đến ba đỉnh nào đó không nhỏ hơn bình phương khoảng cách từ điểm M đến đỉnh còn lại.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$, $AC = b$, $\widehat{BAD} = 90^o$, $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.

   Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mặt phẳng qua trung điểm của các cạnh AB, BC, CD.

3. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác ABC, $M \neq G$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và song song với SG cắt các mặt SBC, SCA, SAB lần lượt tại điểm A', B', C'.

   Chứng minh rằng $SA' + SB' + SC' \geq 3GM$.

4. Cho tam giác ABC. Gọi G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và r là bán kính đường tròn nội tiếp, h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài đường cao, trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ các đỉnh A, B, C. Đặt $M = \max\left\{\dfrac{m_a}{h_a}, \dfrac{m_b}{h_b}, \dfrac{m_c}{h_c}\right\}$.

   Chứng minh rằng $M > \dfrac{GI}{2r}$.

5. Cho ba tia không đồng phẳng Oa, Ob, Oc. Đặt $\alpha = \widehat{aOb}$, $\beta = \widehat{bOc}$, $\gamma = \widehat{cOa}$.

   a) Chứng minh rằng $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\dfrac{3}{2}$.

   b) Gọi Oa_1, Ob_1, Oc_1 lần lượt là các tia phân giác của $\widehat{aOb}$, $\widehat{bOc}$, $\widehat{cOa}$. Chứng minh rằng nếu $Oa_1 \perp Ob_1$ thì $Ob_1 \perp Oc_1$, $Oc_1 \perp Oa_1$.

6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

   Tính diện tích thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (MNC').

7. Trong không gian cho bốn tia Oa, Ob, Oc, Od sao cho góc tạo thành giữa chúng đôi một bằng nhau và khác 0°. Cho tia thứ năm Ot tạo với các tia Oa, Ob, Oc, Od lần lượt các góc α_1, α_2, α_3, α_4.

Chứng minh rằng $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 = 0$.

8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' là các điểm lần lượt thuộc đường thẳng AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{A'A} = k\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{B'B} = k\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{C'C} = k\overrightarrow{C'D}$, $\overrightarrow{D'D} = k\overrightarrow{D'A}$.

Với giá trị nào của k thì bốn điểm A', B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng?

9. Cho n điểm A_i $i = \overline{1,n}$ phân biệt trong mặt phẳng hay không gian và các số thực α_i $i = \overline{1,n}$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$.

Tìm điểm M sao cho $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$ đạt giá trị bé nhất hoặc lớn nhất.

10. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = c$, $CD = c'$, $BC = a$, $AD = a'$, $AC = b$, $BD = b'$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Biết rằng có một điểm O cách đều bốn đỉnh của hình tứ diện, kí hiệu mỗi khoảng cách đó là R.

Chứng minh rằng $GA + GB + GC + GD \geq \dfrac{a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2}{4R}$.

11. Cho tam giác ABC và điểm O. Với mỗi điểm M trong không gian, đặt

$f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MO^2$. (*)

Chứng minh rằng O là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $f(M)$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

12. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi I và K lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua IK cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện.

Xác định vị trí của mp(P) để diện tích thiết diện đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Tính diện tích thiết diện đó.

13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, I là trung điểm của $B'C'$; M là điểm chia CD' theo tỉ số $k_1 = -2$; N là điểm chia BD theo tỉ số $k_2 = 2$.

Chứng minh rằng ba điểm I, M, N thẳng hàng.

14. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và A_1D_1. Xác định các giao điểm P, Q của mặt phẳng (CMN) với các đường thẳng B_1C_1 và DB_1.

15. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lấy các điểm A_1, B_1, C_1. Gọi M là điểm chung của các mặt phẳng (ABC_1), (BCA_1), (CAB_1). Đường thẳng SM cắt $(A_1B_1C_1)$ tại M_1 và cắt mặt phẳng (ABC) tại M_2. Chứng minh rằng

$$\frac{M_2M_1}{M_1S} = 3\frac{M_2M}{MS}.$$

16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của AB' và $A'B$. Chứng minh rằng hai đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

17. Cho ba mặt phẳng song song (P), (Q), (R) và hai đường thẳng chéo nhau Δ, Δ' cắt chúng theo thứ tự tại A, B, C và A', B', C'. Từ một điểm O trong không gian đặt các vectơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{CC'}$. Chứng minh rằng ba điểm M, N, P thẳng hàng.

18. Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $SABC$ cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm A_1, B_1, C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{SA_1^2} + \frac{1}{SB_1^2} + \frac{1}{SC_1^2}$.

19. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đường thẳng AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B_1, C_1, D_1 sao cho $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AD} = \gamma\overrightarrow{AD_1}$.

a) Chứng minh rằng nếu $\gamma = \alpha + \beta + 1$ thì mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$ đi qua điểm cố định, xác định điểm cố định đó.

b) Chứng minh rằng nếu $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \beta + 1$ thì các mặt phẳng $(B_1C_1D_1)$ đi qua một đường thẳng cố định, xác định đường thẳng cố định đó.

20. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thoả mãn điều kiện $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng

$$\frac{\alpha}{\overline{MA_1}} + \frac{\beta}{\overline{MB_1}} + \frac{\gamma}{\overline{MC_1}} + \frac{\delta}{\overline{MD_1}} = 0.$$

§2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

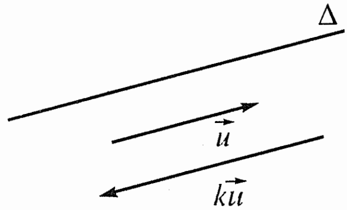
1. Hai đường thẳng vuông góc

a) Vectơ chỉ phương của đường thẳng

ĐỊNH NGHĨA. Một vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u}$ khác vectơ $\vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ là đường thẳng Δ hoặc song song với Δ (h.3.25).

Từ định nghĩa đó suy ra:

Một đường thẳng có nhiều vectơ chỉ phương, cụ thể là nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ và dĩ nhiên các vectơ chỉ phương của một đường thẳng đều cộng tuyến (phụ thuộc tuyến tính) với nhau.



Hình 3.25

Hai đường thẳng Δ và Δ' có vectơ chỉ phương cộng tuyến khi và chỉ khi hai đường thẳng đó song song hoặc trùng nhau.

Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì ta dùng kí hiệu là $\vec{u} \,//\, \Delta$.

b) Góc giữa hai đường thẳng

ĐỊNH NGHĨA 1. Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 lần lượt có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$. Ta xác định một góc φ sao cho $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\right|$ với $0 \leq \varphi \leq 90^o$. Giá trị φ đó được gọi là số đo của góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 (hay góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2).

Chú ý rằng định nghĩa góc φ nêu trên không phụ thuộc vào việc chọn các vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2.

Thật vậy, nếu $k_1\overrightarrow{u_1}$, $k_2\overrightarrow{u_2}$ $(k_1, k_2 \neq 0)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của Δ_1, Δ_2 thì ta có $\left(k_1\overrightarrow{u_1}, k_2\overrightarrow{u_2}\right) = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ nếu $k_1k_2 > 0$ và $\left(k_1\overrightarrow{u_1}, k_2\overrightarrow{u_2}\right) = 180^o - \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ nếu $k_1k_2 < 0$.

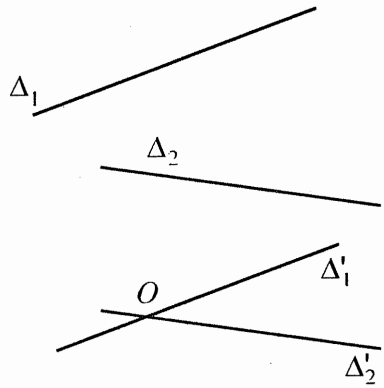
Trong cả hai trường hợp ta đều có $\left|\cos\left(k_1\overrightarrow{u_1}, k_2\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\right|$

Từ định nghĩa góc giữa hai đường thẳng nêu trên ta suy ra

+ Góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng góc giữa hai vectơ chỉ phương nếu $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) \leq 90^o$ và bù với $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)$ nếu $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) > 90^o$.

+ Nếu Δ_1' song song (hay trùng) với Δ_1, Δ_2' song song (hay trùng) với Δ_2 thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng góc giữa Δ_1' và Δ_2'. Vì thế thông thường ta xác định góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 như sau:

Từ một điểm O nào đó ta vẽ hai đường thẳng Δ_1', Δ_2' lần lượt song song (hay trùng) với Δ_1, Δ_2 rồi trong các góc tạo thành bởi Δ_1', Δ_2' ta lấy góc φ mà $0 \leq \varphi \leq 90^o$. Đó chính là góc giữa hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 (h.3.26).



Hình 3.26

ĐỊNH NGHĨA 2.

+ Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^o.

+ Khi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc với nhau ta dùng kí hiệu $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Từ định nghĩa trên suy ra nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ là hai vectơ chỉ phương của Δ_1, Δ_2 thì Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ vuông góc với $\overrightarrow{u_2}$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Giải (h.3.27)

Cách 1. Ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

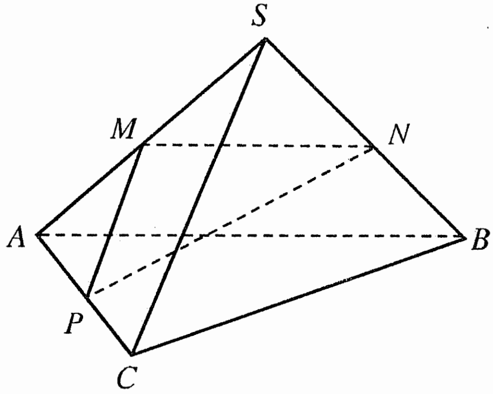
Ta có

$$\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$=\frac{\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$



Hình 3.27

Từ đó $\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{AB}\right)=120^o$. Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB là 60^o.

Cách 2.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC. Khi đó MN // AB, MP // SC.

Để tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB, ta tính góc $\widehat{NMP}$.

Từ giả thiết ta có $MN=\frac{a}{2}$, $MP=\frac{a}{2}$, $SP^2=\frac{3a^2}{4}$, $BP^2=\frac{5a^2}{4}$.

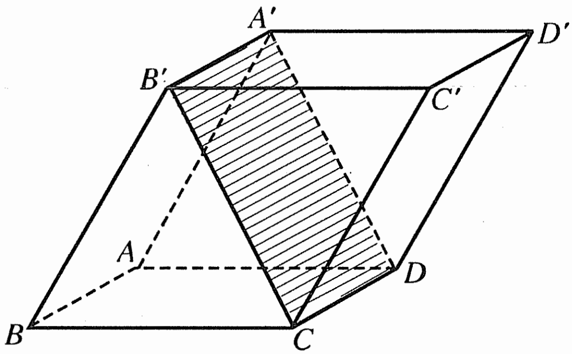
Mặt khác $BP^2+SP^2=2PN^2+\frac{SB^2}{2}$, từ đó $NP^2=\frac{3a^2}{4}$. Áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác MNP ta có $NP^2=MP^2+MN^2-2MP.MN\cos\widehat{NMP}$

Do đó $\cos\widehat{NMP}=-\frac{1}{2}$, tức là $\widehat{NMP}=120^o$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng SC và AB là 60^o.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a, ba góc tại đỉnh B của hình hộp bằng 60^o. Tính diện tích mặt chéo $A'B'CD$.

Giải (h.3.28). Dễ thấy $A'B'CD$ là hình bình hành. Mặt khác $B'C = a = CD$. Vậy $A'B'CD$ là hình thoi. Ta còn thấy $A'B'CD$ là hình vuông. Thật vậy, ta có $\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB'}\right)\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$. Từ đó $S_{A'B'CD}=a^2$.



Hình 3.28

Ví dụ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$ trong đó $AB \perp AC$, $AB \perp BD$. Gọi P và Q là các điểm lần lượt chia AB và CD theo tỉ số $k \neq 1$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và PQ.

Giải. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ (1)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ} \Rightarrow k\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PB} + k\overrightarrow{BD} + k\overrightarrow{DQ}$. (2)

Vì P, Q lần lượt chia AB và CD theo tỉ số k nên từ (1), (2) ta có

$$(1-k)\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}.$$

Vậy $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD}\right)$.

Xét $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}\right)$.

Vì $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$, $AB \perp BD$ nên $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$. Vậy $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$, tức là góc giữa hai đường thẳng AB và PQ bằng 90°.

Ví dụ 4. Tính các góc α, β, γ giữa các cặp đường thẳng DA và BC, DB và AC, DC và AB của tứ diện $ABCD$ biết rằng $DA = BC = a$, $DB = AC = b$, $DC = AB = c$. Từ đó suy ra trong ba số $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số bằng tổng hai số còn lại.

Giải. Theo kết quả của ví dụ 4 §1 mục 1 ta suy ra $\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}\right) = \dfrac{c^2 - b^2}{a^2}$

Vậy góc giữa hai đường thẳng BC và AD bằng α thì $\cos\alpha = \dfrac{\left|c^2 - b^2\right|}{a^2}$.

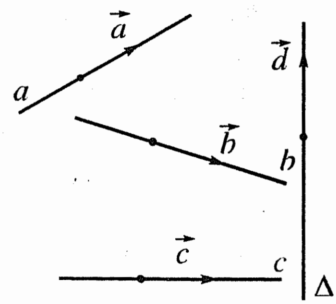
Tương tự góc β giữa AC và BD được tính bởi $\cos\beta = \dfrac{|a^2 - c^2|}{b^2}$ và góc γ giữa AB và CD được xác định bởi $\cos\gamma = \dfrac{|a^2 - b^2|}{c^2}$.

Ta có thể giả thiết $a \geq b \geq c$, khi đó $\cos\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$, $\cos\beta = \dfrac{a^2 - c^2}{b^2}$, $\cos\gamma = \dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$, từ đó $a^2\cos\alpha = b^2 - c^2$, $b^2\cos\beta = a^2 - c^2$, $c^2\cos\gamma = a^2 - b^2$.

Vậy $b^2\cos\beta = a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma$, tức là trong ba số $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ có một số bằng tổng hai số còn lại.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng a, b, c cùng vuông góc với đường thẳng Δ thì a, b, c cùng song song với một mặt phẳng.

Giải (h.3.29). Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng a, b, c, Δ. Theo giả thiết ta có $\vec{a}.\vec{d} = \vec{b}.\vec{d} = \vec{c}.\vec{d} = 0$. Ta xét các trường hợp sau:



Hình 3.29

Trường hợp 1: Có hai trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng phương, chẳng hạn $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, tức là ba đường thẳng a, b, c cùng song song với một mặt phẳng.

Trường hợp 2: $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương.

Trong trường hợp này ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ không đồng phẳng. Thật vậy, nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ đồng phẳng thì có $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Khi đó $\vec{d}^2 = \vec{d}.\vec{d} = m\vec{a}.\vec{d} + n\vec{b}.\vec{d} = 0$, điều này xảy ra mâu thuẫn.

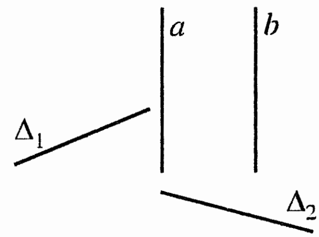
Do $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ không đồng phẳng nên xét bốn vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ta có khai triển $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{d}$. Từ đó $\vec{c}.\vec{d} = x\vec{a}.\vec{d} + y\vec{b}.\vec{d} + z\vec{d}.\vec{d}$, tức là $z = 0$.

Như vậy $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, điều này khẳng định a, b, c cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ 6. Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 phân biệt và không song song. Chứng minh rằng các đường thẳng cùng vuông góc với cả hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 đều song song với nhau hay trùng nhau.

Giải (h.3.30). Giả sử hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với Δ_1, Δ_2.

Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a, b, Δ_1, Δ_2.



Hình 3.30

Theo giả thiết ta có $\vec{a}.\overrightarrow{u_1} = \vec{a}.\overrightarrow{u_2} = \vec{b}.\overrightarrow{u_1} = \vec{b}.\overrightarrow{u_2} = 0$.

Từ chứng minh của ví dụ 5 nêu trên ta có $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\vec{a}$ không đồng phẳng. Vì thế với bốn vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ ta có

$$\vec{b} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2} + z\vec{a}. \qquad (1)$$

Đặt $\vec{w} = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$ thì $\vec{b} = \vec{w} + z\vec{a}$.

Từ đó $\vec{b}.\vec{w} = \vec{w}^2 + z\vec{a}.\vec{w} = \vec{w}^2 + z\left(x\vec{a}.\overrightarrow{u_1} + y\vec{a}.\overrightarrow{u_2}\right) = \vec{w}^2$

$$\vec{b}.\vec{w} = \left(x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}\right)\vec{b} = x\overrightarrow{u_1}.\vec{b} + y\overrightarrow{u_2}.\vec{b} = 0.$$

Vậy $\vec{w}^2 = 0$. (2)

Kết hợp (1), (2) ta có $\vec{b} = z\vec{a}$. Từ đó suy ra hai đường thẳng a và b hoặc song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng tứ diện đó có các cạnh đối diện vuông góc khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$.

Giải. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD.$$

Tương tự, từ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow AD \perp BC$ và

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Giải. Xét $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

Đặt $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=\alpha$ thì

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=a^2\cos\alpha\,,\ \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=a^2\cos\alpha\,.$$

Vậy $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=0$, tức là $SA\perp BC$.

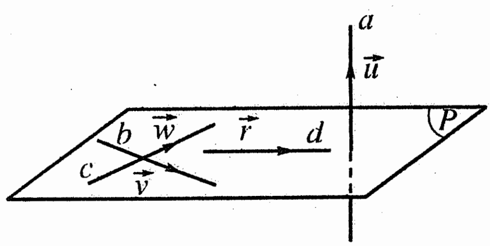
Tương tự có $SB\perp AC$, $SC\perp AB$.

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

a) *Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*

Bài toán. Cho hai đường thẳng cắt nhau b và c cùng nằm trong mặt phẳng (P). Chứng minh rằng nếu đường thẳng a vuông góc với cả b và c thì nó cũng vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Giải (h.3.31). Giả sử d là đường thẳng bất kì trong mp(P). Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, b, c, d. Theo giả thiết thì ba vectơ $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ đồng phẳng và $\vec{v}$, $\vec{w}$ không cùng phương. Do đó có khai triển $\vec{r}=m\vec{v}+n\vec{w}$. Từ đó



Hình 3.31

$$\vec{r}.\vec{u}=\left(m\vec{v}+n\vec{w}\right)\vec{u}=\left(m\vec{v}\right)\vec{u}+\left(n\vec{w}\right)\vec{u}=\vec{0}\ (\text{vì } a\perp b,\ a\perp c).$$

Như vậy a vuông góc với d.

Khi a vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) thì ta nói rằng đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P).

Vậy ta có định nghĩa.

ĐỊNH NGHĨA 1. Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Khi đường thẳng a vuông góc với mp(P) ta còn nói mặt phẳng (P) vuông góc với a hoặc a và (P) vuông góc với nhau và kí hiệu $a\perp(P)$ hoặc $(P)\perp a$.

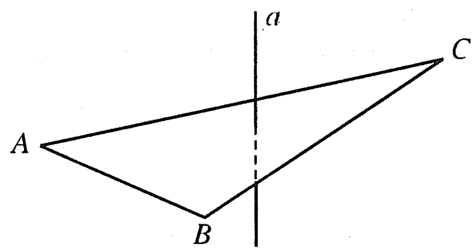
Từ bài toán và định nghĩa nêu trên ta có định lí sau nói về điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

ĐỊNH LÍ 1. *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong mặt phẳng thì đường thẳng ấy vuông góc với mặt phẳng đó.*

Từ định lí 1 suy ra kết quả sau: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó vuông góc với cạnh thứ ba, chẳng hạn với tam giác ABC:

Nếu $a \perp AB$ và $a \perp AC$ thì $a \perp BC$ (h.3.32).

Vectơ $\vec{u}$ trong cách chứng minh bài toán nêu trên gọi là một vectơ pháp tuyến của mp(P). Từ đó ta có định nghĩa vectơ pháp tuyến của mặt phẳng.



Hình 3.32

ĐỊNH NGHĨA 2. Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu $\vec{n} \neq 0$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với (P).

Từ định nghĩa 2 ta suy ra:

- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (P).

- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng vuông góc với mọi vectơ nằm trong mặt phẳng đó.

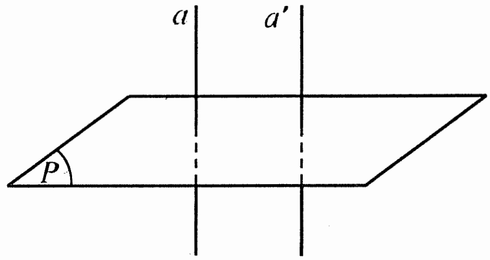
Khi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (P), ta sử dụng kí hiệu $\vec{n} \perp (P)$.

b) *Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng*

TÍNH CHẤT 1.

+ Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

+ Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song hay trùng nhau.



Chứng minh (h.3.33). Dễ dàng có được kết quả.

Lấy trên (P) hai đường thẳng cắt nhau b và c thì a và a' cùng vuông góc với b và c. Từ đó theo ví dụ mục 1 thì $a \,//\, a'$ hay a trùng với a'.

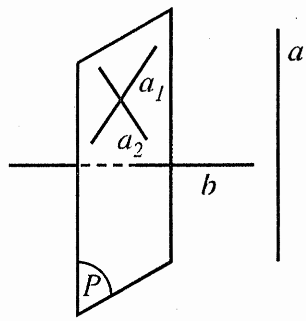
Hình 3.33

TÍNH CHẤT 2.

+ *Cho đường thẳng a và mp(P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mp(P) thì cũng vuông góc với a.*

+ *Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì đường thẳng và mặt phẳng ấy song song với nhau hay đường thẳng ấy nằm trong mặt phẳng.*

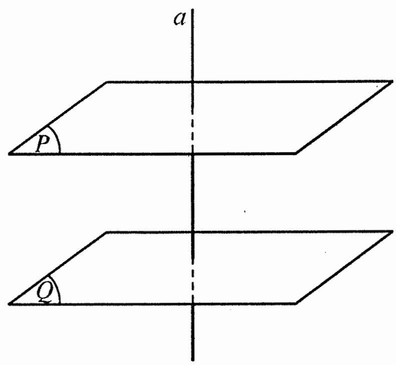
Chứng minh. Dễ dàng có được kết quả.



Lấy trên (P) hai đường thẳng a_1 và a_2 cắt nhau thì a_1, a_2 cùng vuông góc với b (h.3.34). Do đường thẳng a vuông góc với b, như vậy ba đường thẳng a, a_1, a_2 cùng vuông góc với b nên theo kết quả của ví dụ 5 mục 1 thì a, a_1, a_2 cùng song song với một mặt phẳng. Vậy hoặc $a \,//\, (P)$ hoặc $a \subset (P)$.

Hình 3.34

TÍNH CHẤT 3.



+ *Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.*

+ *Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song hay trùng nhau.*

Chứng minh (h.3.35). Dễ dàng có được kết quả.

Hình 3.35

Theo tính chất 2 mục b), mọi đường thẳng nằm trong mp(Q) đều song song với (P) hoặc nằm trong (P).

Bởi vậy hoặc $(P) \,//\, (Q)$ hoặc nếu (P) và (P') có điểm chung thì chúng trùng nhau.

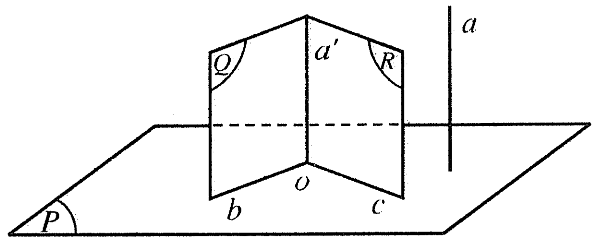
c) *Sự tồn tại mặt phẳng vuông góc với đường thẳng và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng*

ĐỊNH LÍ 2

i) Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua điểm O cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.

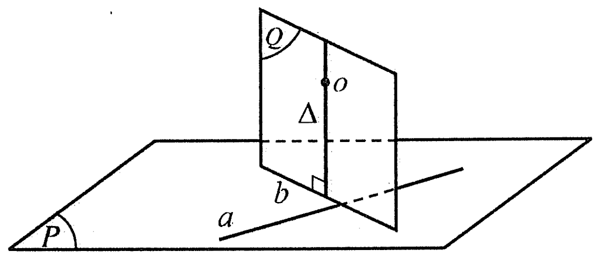
ii) Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Chứng minh. i) Gọi a' là đường thẳng đi qua O và song song với a hoặc chính là a khi O thuộc a (h.3.36), lấy hai mặt phẳng (Q) và (R) phân biệt và cùng chứa a'. Gọi b và c là hai đường thẳng lần lượt thuộc (Q), (R) cùng đi qua điểm O và cùng vuông góc với a'. Khi ấy chọn (P) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng b và c. Đó là mặt phẳng qua O và vuông góc với a. Tính duy nhất của mp(P) suy từ tính chất 2 mục b).



Hình 3.36

ii) Gọi a là đường thẳng nào đó nằm trong mp(P) thì theo a) có mp(Q) đi qua O và vuông góc với a (h.3.37). Kí hiệu b là giao tuyến của (P) và (Q), khi đó trong mp(Q) có đường thẳng Δ đi qua O và vuông góc với b, lẽ tất nhiên Δ vuông góc với a. Khi đó Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b, tức là $\Delta \perp (P)$, đó là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (P). Tính duy nhất của đường thẳng Δ suy từ tính chất 1 mục b).



Hình 3.37

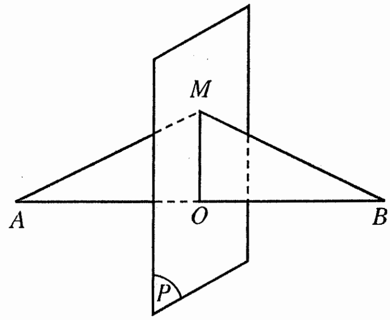
Nhận xét. Trong tính chất 1 nếu ta thay các cụm từ "mặt phẳng" thành "đường thẳng", "đường thẳng" thành "mặt phẳng" còn các từ khác giữ nguyên thì ta có tính chất 3.

d) *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Từ định lí 2 phần a) ta thấy nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AB thì có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB tại điểm O. Mặt phẳng đó được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Từ đó ta có định nghĩa.

ĐỊNH NGHĨA 3. Cho đoạn thẳng AB. Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB và đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (h.3.38).

Từ định nghĩa 3 dễ thấy rằng mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng ấy, nghĩa là nếu gọi (P) là mặt phẳng trung trực của AB thì M thuộc (P) khi và chỉ khi $MA = MB$.



Hình 3.38

e) *Định lí ba đường vuông góc*

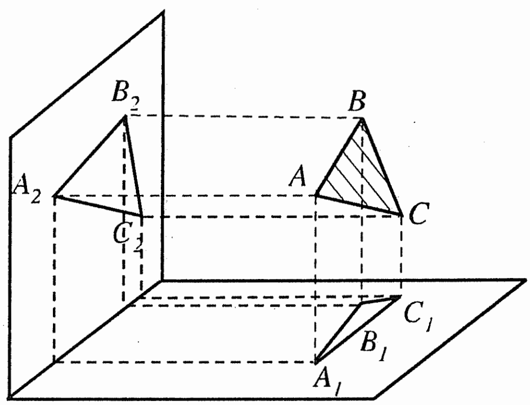
+ Phép chiếu vuông góc

Một trường hợp thường gặp của phép chiếu song song là phép chiếu vuông góc khi phương chiếu vuông góc với mặt phẳng chiếu. Từ đó ta có định nghĩa.

ĐỊNH NGHĨA 4. Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Phép chiếu vuông góc được sử dụng rộng rãi trong hình học hoạ hình. Cơ sở của nó là phương pháp Monge, đó là hình chiếu vuông góc của một hình lên hai mặt phẳng vuông góc với nhau mà người ta gọi là mặt chiếu đứng và mặt chiếu bằng (h.3.39).

$A_1B_1C_1$ là hình chiếu bằng của tam giác ABC còn $A_2B_2C_2$ là hình chiếu đứng của tam giác ABC.



Hình 3.39

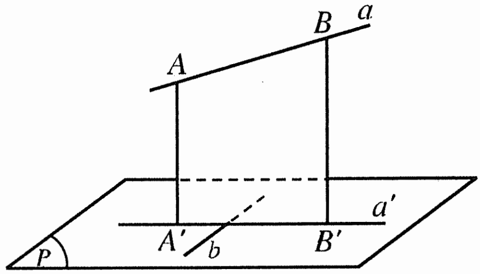
Vì phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song. Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). Nếu $(\mathscr{H}')$ là hình chiếu vuông góc của hình $(\mathscr{H})$ trên mặt phẳng (P) thì ta cũng nói $(\mathscr{H}')$ là hình chiếu của $(\mathscr{H})$ trên mặt phẳng (P).

+ Định lí ba đường vuông góc

ĐỊNH LÍ 3. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

Chứng minh. Nếu a nằm trong (P) thì $a \equiv a'$ và định lí là hiển nhiên đúng.

Nếu a không nằm trong (P) thì ta lấy hai điểm phân biệt A và B thuộc a. Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên (P), khi đó hình chiếu a' của đường thẳng a trên (P) chính là đường thẳng đi qua hai điểm A' và B' (h.3.40)



Hình 3.40

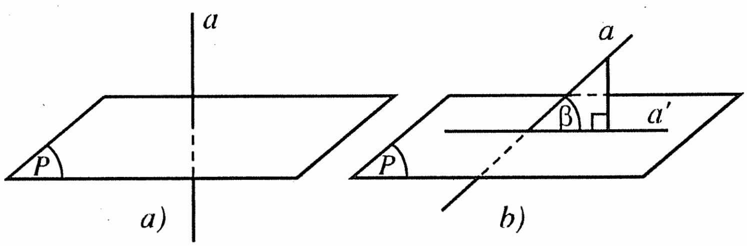
Vì $b \subset (P)$ nên $b \perp AA'$. Vậy nếu $b \perp a$ thì $b \perp mp(a, a')$, do đó $b \perp a'$.

Ngược lại, nếu $b \perp a'$ thì $b \perp mp(a, a')$ do đó $b \perp a$.

Định lí 3 được chứng minh.

g) *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng*

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta có định nghĩa sau (h.3.41).



Hình 3.41

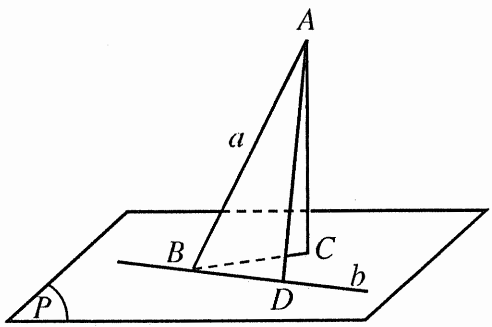
ĐỊNH NGHĨA 5. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°. Nếu đường thẳng a không vuông góc với mp(P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).

Nhận xét

1) Chú ý rằng góc β giữa đường thẳng và mặt phẳng thoả mãn điều kiện $0 \leq \beta \leq 90^\circ$. Góc này có tính chất: Trong tất cả các góc mà đường thẳng AB (với B thuộc mặt phẳng, A nằm ngoài mặt phẳng) tạo với đường thẳng bất kì của mặt phẳng thì nó là góc nhỏ nhất.

Thật vậy, kẻ $AC \perp$ mp(P) thì BC là hình chiếu của đường thẳng AB trên (P) (h.3.42). Giả sử b là đường thẳng bất kì đi qua B và nằm trong (P). Đặt $BD = BC$.

Xét các tam giác ABC và ABD ta thấy AB là cạnh chung, $AD > AC$, $BC = BD$.

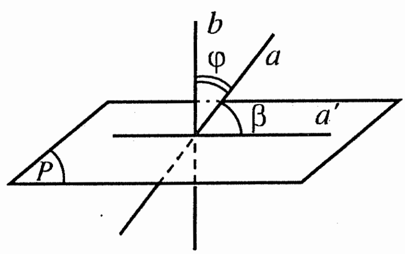


Hình 3.42

Từ đó $\widehat{ABD} > \widehat{ABC}$ mà $\widehat{ABC}$ là góc giữa đường thẳng AB với mặt phẳng (P), đó là điều phải chứng minh (chú ý rằng khi $b \equiv BC$ thì $\widehat{ABD}$ là góc giữa AB và mp(P), từ đó $\widehat{ABD} \geq \widehat{ABC}$).

2) Nếu gọi β là góc giữa đường thẳng a và mp(P), tức là góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P). Gọi φ là góc giữa đường thẳng a và đường thẳng b vuông góc với mp(P) thì $\beta + \varphi = 90^\circ$.

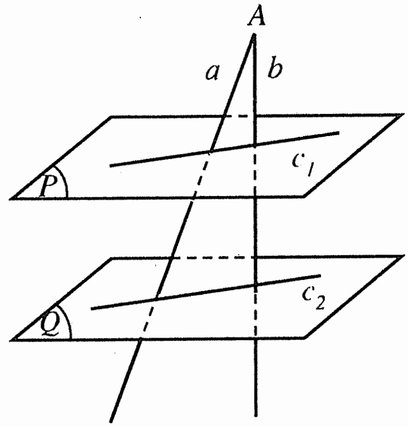
Từ đó $\sin\beta = \cos\varphi$ (h.3.43). Hệ thức này cho ta tính góc của đường thẳng và mặt phẳng nếu biết vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mp(P). Cụ thể là nếu kí hiệu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a, $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) thì $\sin\beta = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$.



Hình 3.43

3) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) và đường thẳng a. Khi ấy đường thẳng a tạo với (P) và (Q) hai góc bằng nhau.

Thật vậy, nếu a nằm trong (P) hoặc (Q) hay song song với (P), (Q) thì kết quả là hiển nhiên. Nếu đường thẳng a cắt mp(P) chẳng hạn, ta lấy điểm A thuộc a và vẽ đường thẳng b đi qua A, vuông góc với (P), khi đó $b \perp (Q)$. Qua a và b xác định mặt phẳng (R), mp(R) cắt (P) và (Q) theo hai giao tuyến song song c_1 và c_2 (h.3.44). Các đường thẳng c_1, c_2 lần lượt là hình chiếu của a trên (P) và (Q). Trong mp(R) ta có góc giữa a và c_1, c_2 như nhau, tức là $\left(\widehat{a, c_1}\right) = \left(\widehat{a, c_2}\right)$.

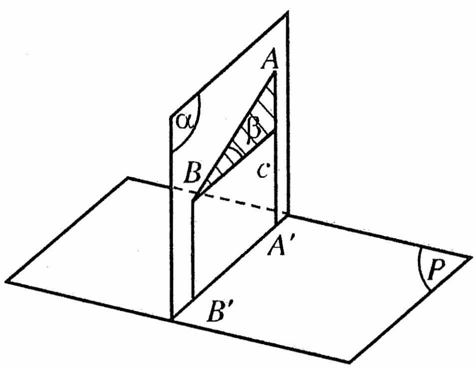


Hình 3.44

Vậy a tạo với (P) và (Q) hai góc như nhau.

4) Quan hệ giữa độ dài đoạn thẳng AB và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P) cho trước thể hiện qua kết quả sau: Độ dài hình chiếu của đoạn thẳng chiếu bằng độ dài của đoạn thẳng nhân với cosin của góc giữa đường thẳng chứa đoạn thẳng chiếu với mặt phẳng chiếu.

Thật vậy, giả sử AB là đoạn thẳng chiếu, mặt phẳng chiếu là (P) và β là góc giữa đường thẳng AB và (P). Ta vẽ qua AB mặt phẳng chiếu (α). Khi đó (α) cắt (P) theo đường thẳng $A'B'$ (h.3.45). Trong mp(α) vẽ BC song song với $A'B'$ thì $\beta = \widehat{ABC}$. Xét tam giác vuông ABC ta có $BC = AB\cos\beta$ mà $BC = A'B'$, từ đó $A'B' = AB\cos\beta$.



Hình 3.45

Sau đây là một số ví dụ áp dụng các kiến thức có tính chất lí thuyết đã trình bày ở trên vào giải một số bài tập hình học.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp mp(ABCD)$.

1) Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB, SC, SD.

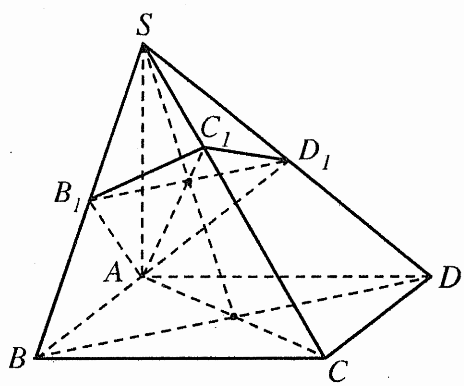
   a) Chứng minh $B_1D_1 // BD$ và $SC \perp mp(AB_1D_1)$

   b) Chứng minh các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng và tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp một đường tròn.

2) Tính góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ khi $SA = a\sqrt{2}$.

Giải (h.3.46)

1) a) Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau và có các đường cao tương ứng là AB_1, AD_1 nên $BB_1 = DD_1$. Mặt khác, tam giác SBD cân tại đỉnh S nên B_1D_1 song song với BD.



Hình 3.46

Ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AB_1$, mặt khác $AB_1 \perp SB$ nên

$AB_1 \perp mp(SBC)$ do đó $AB_1 \perp SC$.

Tương tự ta cũng có $AD_1 \perp SC$, từ đó $SC \perp mp(AB_1D_1)$.

b) Từ chứng minh ở trên ta có $AB_1 \perp SC$, $AD_1 \perp SC$ mà $AC_1 \perp SC$.

Vậy các điểm A, B_1, C_1, D_1 cùng thuộc một mặt phẳng.

Cũng từ chứng minh trên ta có $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{AD_1C_1} = 90^o$.

Vậy tứ giác $AB_1C_1D_1$ nội tiếp một đường tròn.

2) Vì $SA \perp mp(ABCD)$ nên $\widehat{SCA} < 90^o$, từ đó $\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$. Theo giả thiết ta có $AC = SA = a\sqrt{2}$.

Vậy $\widehat{SCA} = 45^o$, tức là góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng 45^o.

Ví dụ 2

a) Tìm tập các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC.

b) Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$.

Giải

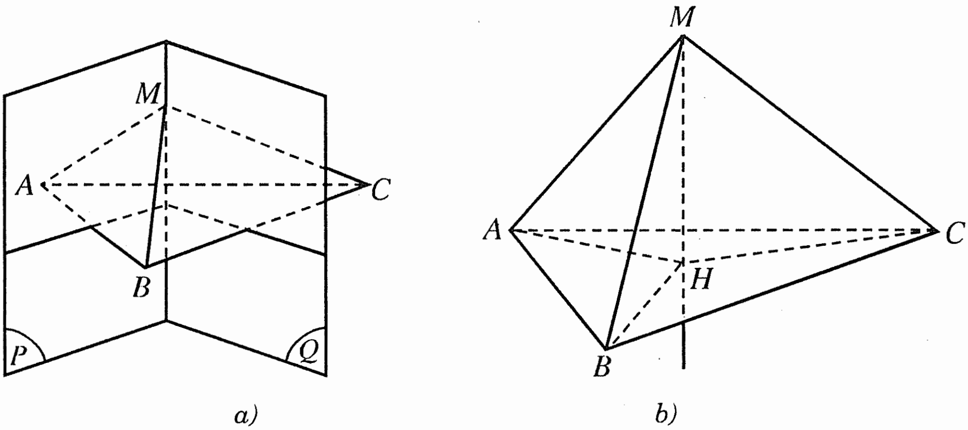
a) *Cách 1* (h.3.47a). M là điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MA = MB \\ MB = MC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ thuộc mặt phẳng trung trực } (P) \text{ của } AB \\ M \text{ thuộc mặt phẳng trung trực } (Q) \text{ của } BC. \end{cases}$$

Vì (P) và (Q) đều đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên chúng cắt nhau theo đường thẳng Δ.

Vậy tập M nói trên là đường thẳng Δ.

Chú ý rằng đường thẳng Δ vuông góc với mp(ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Nó được gọi là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Hình 3.47

Cách 2. (h.3.47b)

Kẻ $MH \perp$ mp(ABC) tại H.

Các tam giác vuông MHA, MHB, MHC có MH chung.

Vậy $MA = MB = MC \Leftrightarrow HA = HB = HC \Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

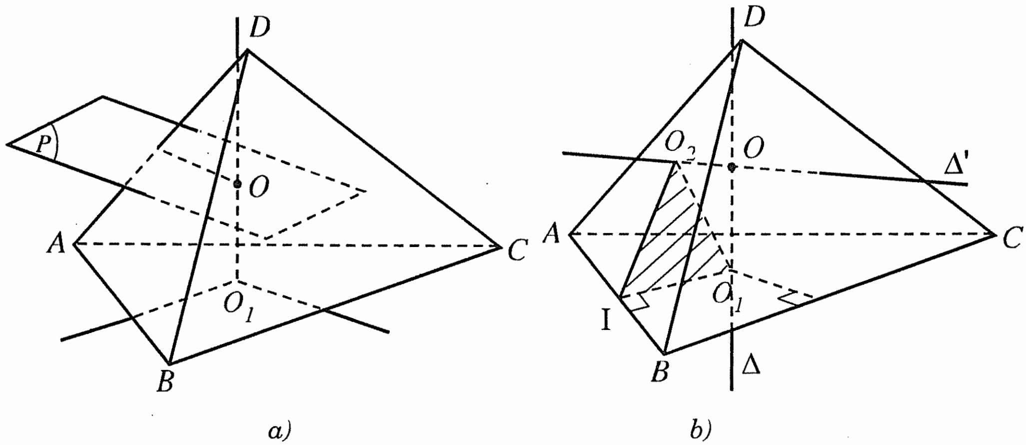
b) *Cách 1.* (h.3.48a)

Gọi O là điểm phải tìm thì $OA = OB = OC$, theo kết quả của câu a) thì điểm O thuộc trục Δ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác, $OA = OD$ nên O thuộc mặt phẳng trung trực (P) của AD.

Vậy O chính là giao điểm của trục Δ và mặt phẳng trung trực của AD.

Chú ý rằng mp(P) phải cắt Δ vì nếu $\Delta \,//\, (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$ thì từ $DA \perp (P)$ suy ra $DA \perp \Delta$. Khi ấy DA nằm trong mp(ABC), điều này mâu thuẫn với bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.



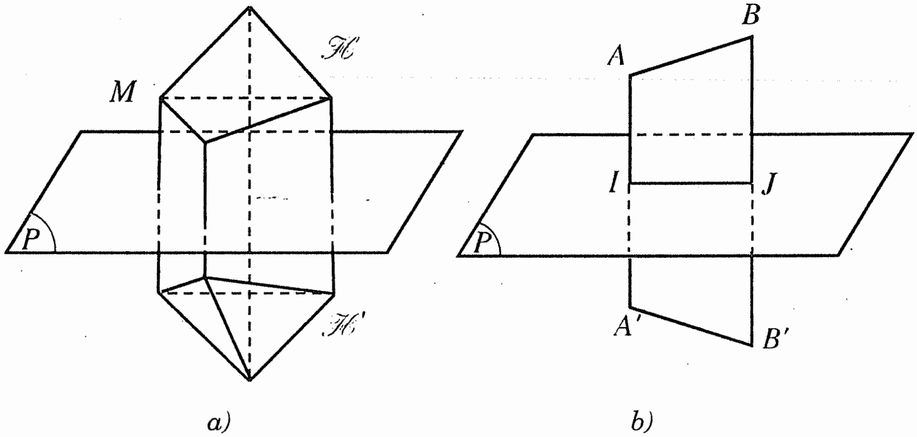
Hình 3.48

Cách 2. (h.3.48b). Có thể tìm điểm O bằng cách xét các trục Δ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trục Δ' của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (hai đường Δ và Δ' cùng nằm trong mặt phẳng trung trực của AB, đó là mp(IO_1O_2), ở đó I là trung điểm của AB và O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ABD từ đó dẫn đến Δ và Δ' cắt nhau tại O, đó là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3. Cho hình $\mathcal{H}$ và mp(P). Ứng với mỗi điểm M thuộc $\mathcal{H}$ ta dựng điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua mp(P). Tập hợp $(\mathcal{H}')$ gồm tất cả các điểm M' gọi là ảnh của hình $\mathcal{H}$ trong phép đối xứng qua mp(P).

Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai điểm bất kì A, B thuộc hình bằng khoảng cách giữa hai ảnh A', B' của chúng trong phép đối xứng qua mp(P).

Giải (h.3.49). Ta có (P) vuông góc với AA' tại trung điểm I của AA', (P) vuông góc với BB' tại trung điểm J của BB'.



Hình 3.49

Từ đó mp(AA', BB') $\cap$ (P) = IJ. Trong mp(AA', BB') đoạn thẳng $A'B'$ là ảnh của đoạn thẳng AB trong phép đối xứng qua trục IJ.

Vậy $AB = A'B'$.

Chú ý. Trong phép đối xứng qua mp(P) nếu hình $(\mathcal{H}')$ và $(\mathcal{H})$ trùng nhau thì ta nói (P) là một mặt phẳng đối xứng của hình $(\mathcal{H})$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSD}$, $\widehat{BSC} = \widehat{ASD}$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm I. Chứng minh rằng đường thẳng $SI \perp$ mp($ABCD$).

Giải (h.3.50). Ta chứng minh $SA = SC$. Thật vậy, giả sử $SA < SC$. Lấy điểm C_1 thuộc tia SC sao cho $SA = SC_1$. Gọi I_1 là giao điểm của AC_1 và SI. Trong mp(SBD) kẻ qua I_1 đường thẳng vuông góc với tia phân giác trong của góc BSD, cắt các đường thẳng SB, SD lần lượt tại B_1 và D_1, từ đó $SB_1 = SD_1$.

Ta có $\Delta ASB_1 = \Delta C_1SD_1$

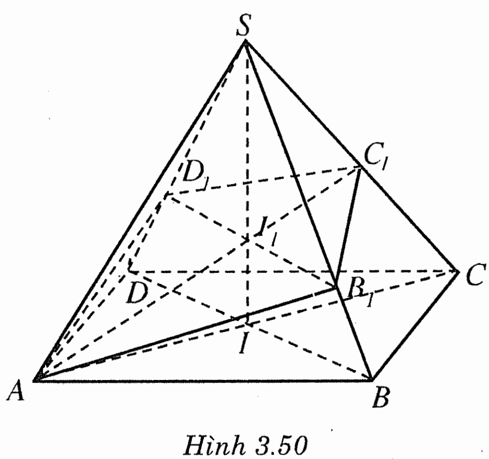
$(SA = SC_1,\ \widehat{ASB} = \widehat{CSD},\ SB_1 = SD_1)$

từ đó $AB_1 = C_1D_1$ (1)

$\Delta B_1SC_1 = \Delta D_1SA$

$(B_1S = D_1S,\ \widehat{BSC} = \widehat{ASD},\ SC_1 = SA)$

từ đó $B_1C_1 = AD_1$ (2)



Hình 3.50

Từ (1), (2) suy ra $AB_1C_1D_1$ là hình bình hành, từ đó $I_1A = I_1C_1$.

Mặt khác $IA = IC$.

Vậy II_1 là đường trung bình của tam giác ACC_1 tức là $II_1 // CC_1$, điều này mâu thuẫn với II_1 và CC_1 cắt nhau tại S.

Từ chứng minh dẫn đến $SC \leq SA$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $SA \leq SC$, từ đó $SA = SC$.

Xét tam giác SAC có $SA = SC$ và $IA = IC$ suy ra $SI \perp AC$. (3)

Tương tự ta được $SI \perp BD$, (4)

Từ (3), (4) ta có $SI \perp mp(ABCD)$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc.

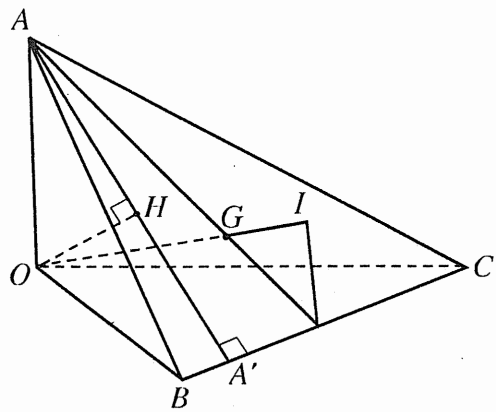
1) Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn;

2) Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mp(ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC và $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

3) Tìm tập hợp các điểm M trong không gian sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2.$$

Giải (h.3.51)



Hình 3.51

1) Ta có $AB^2 = OA^2 + OB^2$,

$BC^2 = OB^2 + OC^2$,

$CA^2 = OC^2 + OA^2$

Từ ba đẳng thức đó ta có

$$BC^2 < AB^2 + AC^2,$$

tức góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC là nhọn.

Tương tự như trên ta chứng minh được tam giác ABC có ba góc nhọn.

2) + Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$.

Mặt khác, $OA \perp mp(OBC)$ nên $OA \perp BC$.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $AH \perp BC$, tức là H thuộc một đường cao AA' của tam giác ABC.

Tương tự như trên ta cũng có H thuộc đường cao thứ hai của tam giác ABC.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC.

+ Từ $AH \perp BC$ tại A', ta có $OA' \perp BC$. Như vậy OH là đường cao của tam giác vuông AOA' và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OA'^2}$, mặt khác $\dfrac{1}{OA'^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

3) Gọi I là điểm cách đều bốn điểm O, A, B, C và G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có O, G, I thẳng hàng và $\overrightarrow{IO} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{GO}$. Ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IO}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{MI} + IA^2 + IB^2 + IC^2 = 6\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI} + 3IO^2$

Do $IA = IB = IC = IO$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI}$$

Mặt khác, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.

Vậy ta có hệ thức $3\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{MI}$ hay $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MI \perp OG$.

Vậy M thuộc mặt phẳng đi qua điểm I và vuông góc với đường thẳng OG, mặt phẳng này cố định vì điểm I cố định và đường thẳng OG cũng cố định

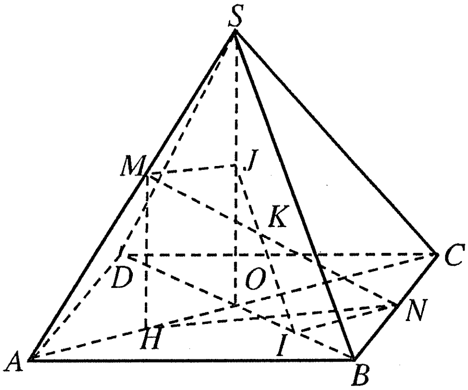
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SO \perp$ mp($ABCD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Cho biết góc giữa đường thẳng MN và mp($ABCD$) bằng 60°.

Tính góc giữa đường thẳng MN và mp(SBD).

Giải (h.3.52)

Cách 1.

Kẻ $MH \perp mp(ABCD)$, dễ thấy H thuộc AC và $3HA = HC$, từ đó $\widehat{MNH}$ chính là góc giữa $mp(ABCD)$ với MN.



Hình 3.52

Theo giả thiết thì $\widehat{MNH} = 60^o$.

Xét tam giác NCH ta có

$$NH^2 = HC^2 + NC^2 - 2HC.NC\cos\widehat{NCH}$$

hay $NH^2 = \left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2.\frac{3}{4}a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow HN = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Xét tam giác vuông MHN ta có

$$\frac{HN}{MN} = \cos 60^o = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ MH = HN\tan 60^o = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}.$$

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì dễ thấy $MJ \,//\, IN$ và $MJ = IN$, MN cắt IJ tại K thì $JK = \frac{1}{2}IJ$ và $MJ \perp mp(SBD)$, từ đó $\widehat{MKJ}$ là góc giữa MN và $mp(SBD)$.

Ta có $IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \frac{15a^2}{8} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{16a^2}{8} = 2a^2$.

Từ đó $IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $\widehat{MKJ} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \frac{MJ}{JK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa đường thẳng MN và mp(SBD) là α được xác định bởi

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}.$$

Cách 2. Sử dụng vectơ

Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Từ đó $MN = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}$.

Vì α là góc giữa đường thẳng MN và mp(SBD) nên

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_{SBD}}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{n_{SBD}}\right|}$$ ($\overrightarrow{n_{SBD}}$ là vectơ pháp tuyến của mp(SBD)).

Dễ thấy $\overrightarrow{n_{SBD}} = \overrightarrow{AC}$, từ đó

$$\sin\alpha = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}} \quad (1)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và mp($ABCD$) bằng 60° nên

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{SO}\right|} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.SO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8SO^2 = 3(2SO^2 + 5a^2)$$

$$\Rightarrow 2SO^2 = 15a^2 \quad (2)$$

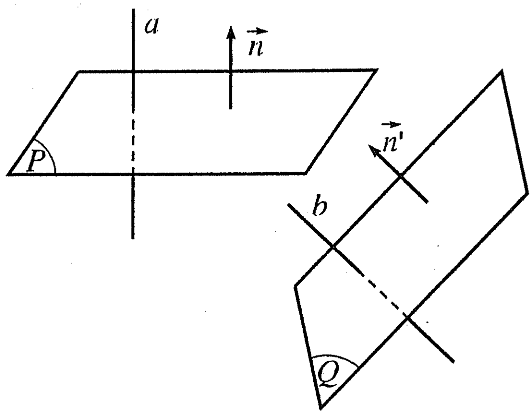
Từ (1), (2) ta có $\sin\alpha = \frac{2a}{\sqrt{15a^2 + 5a^2}} = \frac{2a}{2\sqrt{5}a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy góc giữa MN và mp(SBD) bằng α được tính bởi $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

3. Hai mặt phẳng vuông góc

a) *Góc giữa hai mặt phẳng*

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy hai đường thẳng bất kì a và b lần lượt vuông góc với (P) và (Q) (h.3.53).



Hình 3.53

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a và b không phụ thuộc vào cách lựa chọn chúng và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Từ đó ta có định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Chú ý. Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) thì từ định nghĩa trên ta có: Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hoặc bằng góc giữa hai vectơ $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ hoặc bù với góc giữa $\vec{n}$ và $\vec{n'}$.

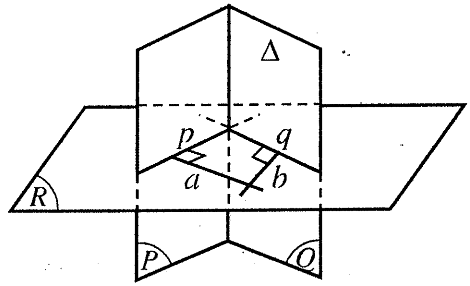
Vậy nếu kí hiệu φ là góc giữa (P) và (Q) thì $\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|}$.

Từ đó $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) song song hay trùng nhau thì góc giữa (P) và (Q) dễ thấy bằng 0°.

Khi (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Ta lấy mặt phẳng (R) bất kì vuông góc với Δ và gọi p, q lần lượt là giao tuyến của (R) với (P), (Q) (h.3.54). Khi ấy góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa p và q. Thật vậy, trong mặt phẳng (R), xét các đường



Hình 3.54

thẳng a và b lần lượt vuông góc với p và q thì thấy $a \perp (P)$ và $b \perp (Q)$ và cũng dễ thấy góc giữa p và q bằng góc giữa a và b, tức là góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa p và q.

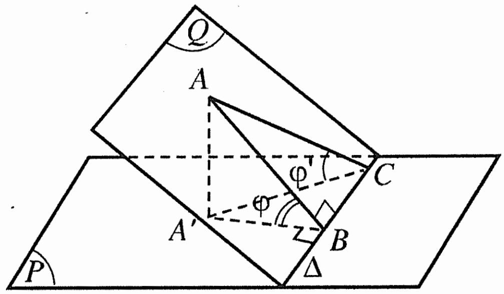
Chú ý.

Từ giải thích trên, trong thực hành để tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) khi chúng cắt nhau, ta làm như sau:

Xét một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ, lần lượt cắt các mặt phẳng (P) và (Q) theo giao tuyến p, q và tính góc giữa hai đường thẳng p và q.

Nếu giao tuyến của (P) và (Q) là Δ và φ là góc giữa (P) và (Q) thì $\varphi > \varphi'$ trong đó φ' là góc giữa đường thẳng bất kì thuộc (Q) với (P) (h.3.55). Thật vậy, ta có

$$\tan\varphi = \frac{AA'}{A'B},\ \tan\varphi' = \frac{A'A}{A'C}.$$



Hình 3.55

Mặt khác, $A'B < A'C$, từ đó

$$\tan\varphi > \tan\varphi' \text{ hay } \varphi > \varphi'.$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp \text{mp}(ABC)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC). Chứng minh rằng $S_{ABC} = S_{SBC}\cos\varphi$, trong đó kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

Giải (h.3.56). Kẻ đường cao AA_1 của tam giác ABC.

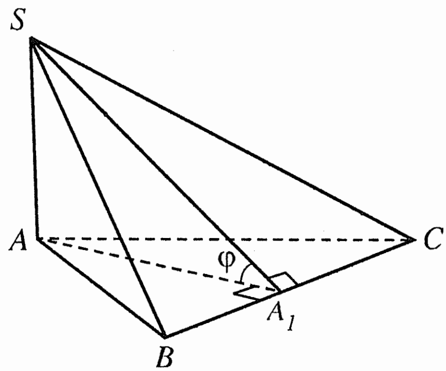
Do $SA \perp \text{mp}(ABC)$ nên $SA_1 \perp BC$.

Từ đó ta có $\widehat{SA_1A}$ chính là φ.

Ta có $AA_1 = SA_1\cos\varphi$.

Từ đó $\frac{1}{2}AA_1.BC = \frac{1}{2}SA_1\cos\varphi.BC$,

tức là $S_{ABC} = S_{SBC}\cos\varphi$.

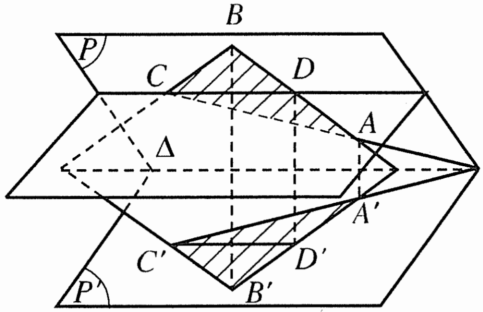


Hình 3.56

Mở rộng kết quả của ví dụ trên ta có định lí tổng quát sau đây.

ĐỊNH LÍ 1. *Giả sử S là diện tích của đa giác $\mathscr{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P') thì S' = S.cosφ, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').*

Chứng minh (h.3.57). Nhận xét rằng khi (P) song song với (P') hay trùng với (P') thì kết quả là hiển nhiên. Vậy chỉ phải xét trường hợp (P) và (P') cắt nhau.



Hình 3.57

Trường hợp 1. $\mathscr{H}$ là tam giác ABC

+ Khi tam giác ABC có một cạnh nằm trong mp(P') thì do ví dụ trên ta có điều phải chứng minh.

+ Khi tam giác ABC có một cạnh, chẳng hạn AC // (P) mà $AC \not\subset (P)$ thì có thể tự chứng minh được kết quả.

+ Khi tam giác ABC không có cạnh nào nằm trên mặt phẳng chiếu và cũng không song song với mặt phẳng chiếu:

Qua đỉnh C vẽ đường thẳng song song với giao tuyến Δ của mp(ABC) và mp$(A'B'C')$ cắt đường thẳng AB tại điểm D. Vẽ qua CD mặt phẳng song song với mặt phẳng (P'). Do cách xây dựng đó hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P') được quy về hình chiếu của hai tam giác BCD, ADC trên mặt phẳng song song với mp(P') mà điều kiện của trường hợp trên được thực hiện, tức là $S_{B'C'D'} = S_{BCD}\cos\varphi$, $S_{C'D'A'} = S_{CDA}\cos\varphi$,

từ đó suy ra $S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cos\varphi$.

Trường hợp 2. Giả sử hình đem chiếu là đa giác bất kì $A_1A_2\ldots A_n$. Có thể chia đa giác đó thành các tam giác, chẳng hạn $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ mà đối với mỗi tam giác định lí đã được chứng minh ở trường hợp 1, tức là

$S_{A_1'A_2'A_3'} = S_{A_1A_2A_3}\cos\varphi$, ..., $S_{A_1'A_{n-1}'A_n'} = S_{A_1A_{n-1}A_n}\cos\varphi$.

Vì thế $S_{A_1'A_2'\ldots A_n'} = S_{A_1A_2\ldots A_n}\cos\varphi$.

Chú ý. Định lí về diện tích hình chiếu đúng không chỉ đối với đa giác phẳng mà nó còn đúng cả đối với hình phẳng bất kì có diện tích. Cụ thể ta có định lí sau.

ĐỊNH LÍ 2. *Diện tích hình chiếu của một hình phẳng bất kì bằng diện tích của hình đem chiếu nhân với côsin của góc giữa mặt phẳng chứa hình đem chiếu và mặt phẳng chiếu.*

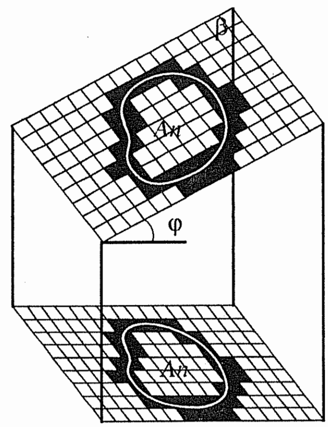
Cụ thể nếu $\mathscr{H}$ là hình phẳng bất kì trong mp(P), $\mathscr{H}'$ là hình chiếu của $\mathscr{H}$ trên mp(P') và kí hiệu $S(\mathscr{H})$ là diện tích hình $\mathscr{H}$. $S(\mathscr{H}')$ là diện tích hình $\mathscr{H}'$ và φ là góc giữa mặt phẳng (P) và (P') thì $S(\mathscr{H}') = S(\mathscr{H})\cos\varphi$.

Chúng ta không đưa ra cách chứng minh một cách hoàn chỉnh định lí này mà chỉ đưa ra ý tưởng của chứng minh, cụ thể như sau:

Ta đặt hình $\mathscr{H}$ vào một khung bao gồm các ô vuông và tính các ô vuông mà $\mathscr{H}$ chứa và các ô vuông có chung với $\mathscr{H}$ ít nhất điểm chung trong. Kí hiệu các ô vuông loại thứ nhất là A_n và các ô vuông loại thứ hai là B_n (h.3.58). Hiển nhiên A_n, B_n là các hình đa giác và $A_n \subset \mathscr{H} \subset B_n$ và cũng như vậy $A'_n \subset \mathscr{H}' \subset B'_n$ (A'_n là hình chiếu của A_n trên (P')). Theo định lí 1 thì

$S(A'_n) = S(A_n)\cos\varphi$, $S(B'_n) = S(B_n)\cos\varphi$.

Vì vậy $S(A_n)\cos\varphi < S(\mathscr{H}') < S(B_n)\cos\varphi$. (*)



Hình 3.58

Khi khung các ô vuông được tạo mịn hơn thì giá trị $S(A_n)$ và $S(B_n)$ có thể coi là gần với $S(\mathscr{H})$. Từ đó theo (*) ta có $S(\mathscr{H}') = S(\mathscr{H})\cos\varphi$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mp(P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A, B, C lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 nằm về một phía của (P) sao cho

$$AA_1 = 3a,\ BB_1 = 2a,\ CC_1 = a.$$

Tính diện tích tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải (h.3.59). Ta có $S_{ABC} = \dfrac{3a^2}{2}$

Vì $CH \perp AB$, $CH = a$, $AH = a$ nên

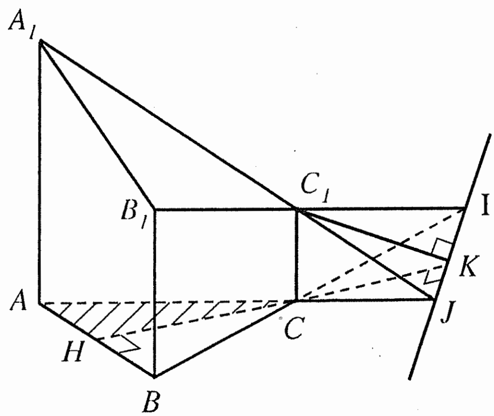
$$AC = a\sqrt{2} \text{ và } \widehat{BAC} = 45^o.$$

Gọi I là giao của B_1C_1 và BC,

do $CC_1 = \dfrac{1}{2}BB_1$ nên $BC = CI$.

Gọi J là giao điểm của A_1C_1 và AC,

do $CC_1 = \dfrac{1}{3}AA_1$ nên



Hình 3.59

$$CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Xét tam giác BCH ta có $BC^2 = BH^2 + CH^2$ từ đó $BC = a\sqrt{5}$.

Mặt khác, $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB\cos C \Rightarrow \cos C = -\dfrac{1}{10}$, tức là

$$\cos\widehat{ICJ} = -\frac{1}{10}.$$

Xét ΔICJ ta có $IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos\widehat{ICJ} = \dfrac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của tam giác ICK, do $CC_1 \perp mp(ICJ)$ nên $C_1K \perp IJ$.

Vậy $\widehat{C_1KC}$ chính là góc giữa mp(ABC) và mp($A_1B_1C_1$).

Đặt $\widehat{C_1KC} = \varphi$ thì $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}\cos\varphi$ (1)

Dễ thấy $S_{ICJ} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = \dfrac{3a^2}{4}$. Mặt khác, $S_{CIJ} = \dfrac{1}{2}IJ.CK$ từ đó $CK = \dfrac{3a}{\sqrt{26}}$.

Xét tam giác C_1CK ta có $\tan\varphi = \dfrac{a}{\dfrac{3a}{\sqrt{26}}} = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$.

Vậy $\cos\varphi$ được định nghĩa bởi $1+\tan^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$ và như vậy

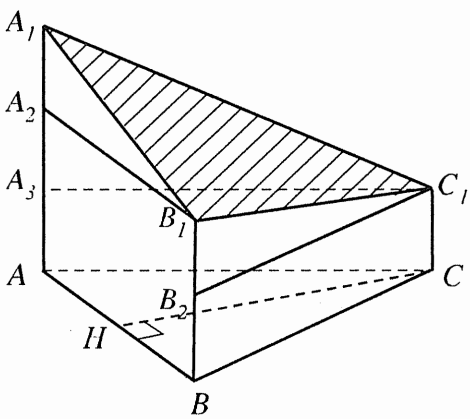
$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{35}}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{\dfrac{3}{\sqrt{35}}} = \dfrac{\sqrt{35}}{2}a^2.$

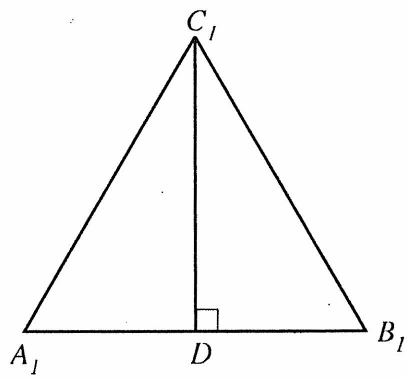
Chú ý.

Cách 2. Có thể tính $S_{A_1B_1C_1}$ bởi tính độ dài ba cạnh của nó (h.3.60), cụ thể khi tính được $AC = a\sqrt{2}$ thì $A_1C_1^{\,2} = (2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 6a^2 \Rightarrow A_1C_1 = a\sqrt{6}$

Mặt khác $A_1B_1^{\,2} = (3a)^2 + a^2 = 10a^2 \Rightarrow A_1B_1 = a\sqrt{10}.$



Hình 3.60



Hình 3.61

Sau khi tính được $BC = a\sqrt{5}$ ta có $B_1C_1^{\,2} = 5a^2 + a^2 = 6a^2$ từ đó $B_1C_1 = a\sqrt{6}$.

Như vậy tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại C_1 (h.3.61).

Gọi D là trung điểm của A_1B_1 thì $C_1D \perp A_1B_1$ và

$$C_1D^2 = A_1C_1^2 - \frac{A_1B_1^2}{4} = 6a^2 - \frac{10a^2}{4} = \frac{14a^2}{4} \text{ tức là } C_1D = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}A_1B_1.C_1D = \dfrac{1}{2}a\sqrt{10}.\dfrac{a\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

Cách 3

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C_1C},\ \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1B}$$

$$\Rightarrow A_1B_1^2 = AB^2 + C_1C^2 = 10a^2,\ A_1C_1^2 = AC^2 + B_1B^2 = 6a^2$$

$$\overrightarrow{A_1B_1}.\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1C}.\overrightarrow{B_1B} = 5a^2$$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\sqrt{10a^2.6a^2 - \left(5a^2\right)^2} = \frac{\sqrt{35}a^2}{2}.$$

b) Hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH NGHĨA 2. Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta còn nói gọn là hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc và kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.

Chú ý. Vì mỗi mặt phẳng có vectơ pháp tuyến nên từ định nghĩa 2 và cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau ta suy ra: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu hai vectơ pháp tuyến của chúng vuông góc với nhau.

Ví dụ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc.

1) Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) đôi một vuông góc;

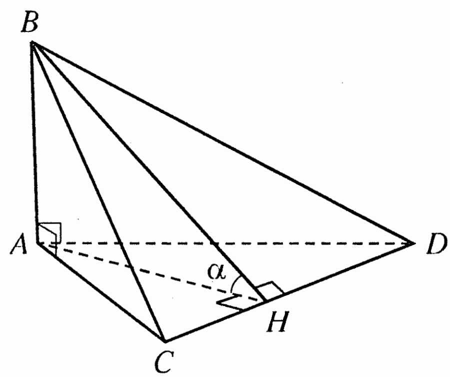
2) Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mp(BCD) với các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Giải (h.3.62)

1) Vì $BA \perp AC$, $BA \perp AD$ nên

$$BA \perp \text{mp}(ACD).$$

Mặt khác, BA là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) nên góc giữa hai đường thẳng AC và AD bằng góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD). Vì $AC \perp AD$ nên góc giữa AC và AD bằng 90°, từ đó mp$(ABC) \perp$ mp(ABD).



Hình 3.62

Tương tự như trên ta cũng có

$$\text{mp}(ABC) \perp \text{mp}(ABD) \text{ và } \text{mp}(ACD) \perp \text{mp}(ABD).$$

Chú ý. Có thể thấy $\overrightarrow{AB}$ là vectơ pháp tuyến của mp(ACD), $\overrightarrow{AC}$ là vectơ pháp tuyến của mp(ABD), $\overrightarrow{AD}$ là vectơ pháp tuyến của mp(ABC) mà $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đôi một vuông góc nên ba mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) đôi một vuông góc.

2) Kẻ đường cao AH của tam giác ACD, do $AB \perp (ACD)$ nên $BH \perp CD$, từ đó ta có $\alpha = \widehat{AHB}$.

Kí hiệu $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$ thì $\tan\alpha = \dfrac{b}{AH}$ mà $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}$ nên

$$\tan\alpha = \frac{b\sqrt{c^2+d^2}}{cd}.$$

Mặt khác, $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{c^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$.

Tương tự ta có $\cos^2\beta = \dfrac{b^2d^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$, $\cos^2\gamma = \dfrac{b^2c^2}{b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2}$

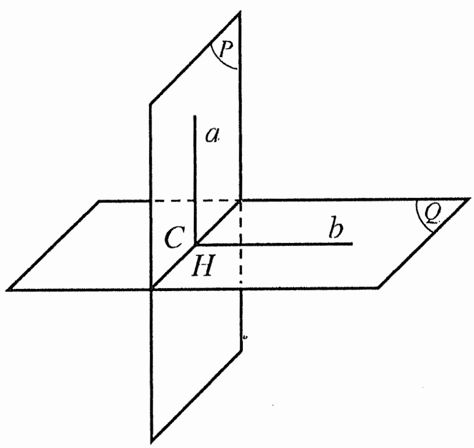
Từ đó suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Định lí dưới đây nói về một điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH LÍ 3. *Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.*

Chứng minh (h.3.63). Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng a mà a vuông góc với mặt phẳng (Q). Gọi H là giao điểm của a và (Q) thì H thuộc giao tuyến của (P) và (Q). Trong mp(Q) kẻ đường thẳng b đi qua H và vuông góc với giao tuyến đó. Khi ấy góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Mặt khác, a vuông góc với (Q) nên $a \perp b$, từ đó suy ra mặt phẳng (P) vuông góc với mp(Q).



Hình 3.63

Vấn đề đặt ra là điều ngược lại có đúng không? Định lí dưới đây trả lời câu hỏi đó.

ĐỊNH LÍ 4. *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong mặt phẳng (P) mà vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).*

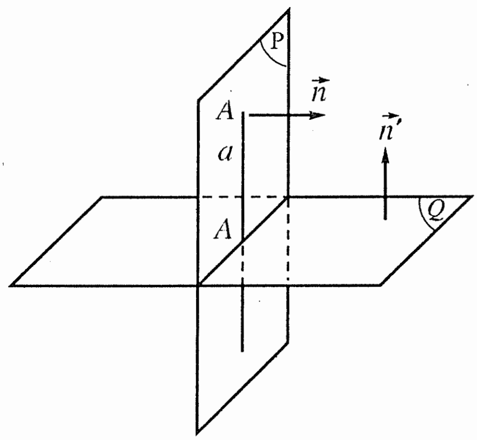
Chứng minh (h.3.63). Gọi c là giao tuyến của (P) và (Q), H là giao điểm của a và c. Trong mp(Q) kẻ đường thẳng b vuông góc với c và đi qua điểm H. Khi đó góc giữa a và b chính là góc giữa (P) và (Q). Do hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nên $a \perp b$. Như vậy a vuông góc với hai đường thẳng b và c thuộc mp(Q), tức là a vuông góc với (Q).

Chú ý. Có thể sử dụng vectơ pháp tuyến của mặt phẳng để chứng minh hai định lí 3 và định lí 4 nêu trên. Hai kết quả đó có thể phát biểu dưới dạng sau:

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chứng minh. Gọi $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Từ điểm A của mặt phẳng (P) vẽ đường thẳng a nhận $\vec{n'}$ làm vectơ chỉ phương, khi đó $a \perp (Q)$ (h.3.64). Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ vuông góc với nhau, tức là khi và chỉ khi $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của a. Vì $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P) và A thuộc (P) nên điều ấy xảy ra khi và chỉ khi a nằm trong (P), nghĩa là mp(P) chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q).



Hình 3.64

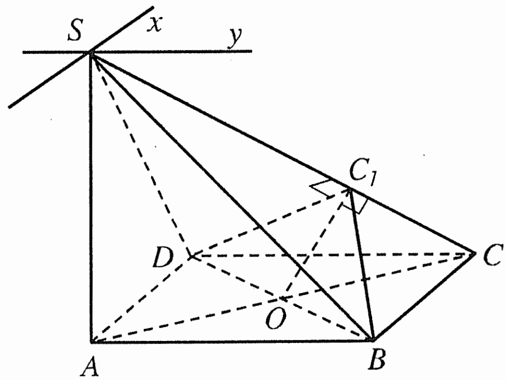
Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm những mặt phẳng chứa các mặt của hình chóp vuông góc với nhau.

Giải (h.3.65). Vì $SA \perp$ mp($ABCD$) nên các mặt phẳng đi qua SA đều vuông góc với mp($ABCD$), từ đó suy ra mp(SAB), mp(SAD), cùng vuông góc với mp($ABCD$).

Do $ABCD$ là hình vuông nên

$$CB \perp AB.$$

Mặt khác, do $SA \perp$ mp($ABCD$) nên $CB \perp SA$, từ đó



Hình 3.65

$CB \perp$ mp(SAB).

Vậy mọi mặt phẳng chứa CB đều vuông góc với mp(SAB), tức là

$$\text{mp}(SBC) \perp \text{mp}(SAB).$$

Tương tự như trên ta có mp(SCD) $\perp$ mp(SAD).

Chú ý. Trong hình chóp trên chỉ có các cặp mặt phẳng vuông góc với nhau như đã kể trên vì các mặt phẳng (SAD) với (SBC) không vuông góc với nhau, mặt phẳng (SAB) và (SCD) không vuông góc, mặt phẳng (SBC) và (SCD) không vuông góc. Cụ thể có thể giải thích điều ấy như sau:

Ta thấy (SAD) cắt (SBC) theo giao tuyến Sx mà $Sx \parallel AD$.

Dễ thấy $Sx \perp$ mp(SAB), tức là $Sx \perp AS$ và BS từ đó suy ra $\widehat{ASB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) mà $\widehat{ASB} < 90^o$.

Điều giải thích tương tự đối với các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

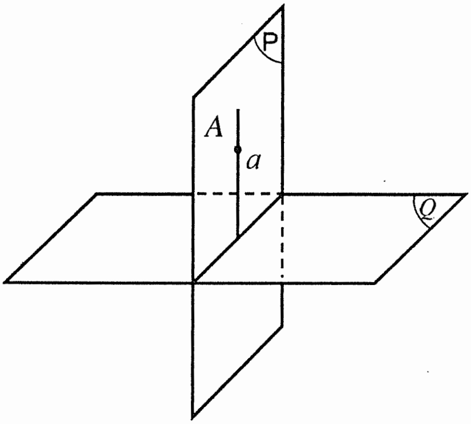
Đối với hai mặt phẳng (SBC) và (SCD): Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mp(SAC) kẻ OC_1 vuông góc với SC. Khi ấy dễ thấy $SC \perp$ mp(BC_1D), từ đó $\widehat{BC_1D}$ hay $180^o - \widehat{BC_1D}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Xét tam giác BC_1D cân tại C_1. Mặt khác, $OC_1 < OC = OB$ từ đó $\widehat{OC_1B} > 45^o$, suy ra $\widehat{BC_1D} > 90^o$.

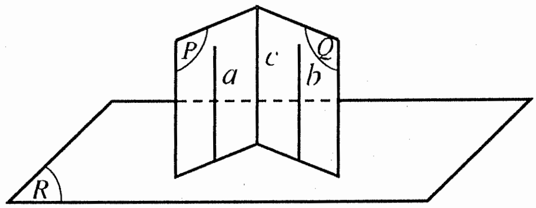
Vậy hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) không thể vuông góc với nhau.

Từ các định lí 3 và 4 nêu trên ta dễ thấy các hệ quả sau:

HỆ QUẢ 1. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là điểm thuộc (P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) (h.3.66).



Hình 3.66

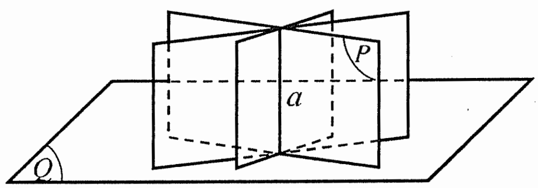


Hình 3.67

HỆ QUẢ 2. Nếu hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng (nếu có) cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba (h.3.67).

Chứng minh. Giả sử mp$(P) \perp$ mp(R) và mp$(Q) \perp$ mp(R). Khi ấy mp(P) chứa đường thẳng a vuông góc với (R) và mp(Q) chứa đường thẳng b vuông góc với mp(R). Từ đó suy ra $a \parallel b$. Nếu (P) cắt (Q) theo giao tuyến c thì c song song với a, từ đó $c \perp (R)$.

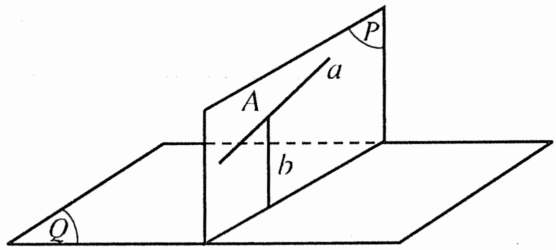
Từ định lí nêu trên ta nhận thấy nếu đường thẳng a vuông góc với mp(Q) thì bất cứ mp(P) nào qua a đều vuông góc với (Q), tức là có vô số mặt phẳng vuông góc với (Q) (h.3.68). Vậy khi a không vuông góc với (Q) thì số lượng mặt phẳng qua a và vuông góc với (Q) là bao nhiêu. Hệ quả sau đây trả lời câu hỏi đó.



Hình 3.68

HỆ QUẢ 3. Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (Q) có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với (Q).

Chứng minh (h.3.69). Lấy điểm A thuộc a và kẻ đường thẳng b đi qua A, vuông góc với (Q). Khi đó mp(a, b) chứa đường thẳng b vuông góc với (Q) nên mp$(a, b) \perp (Q)$.



Hình 3.69

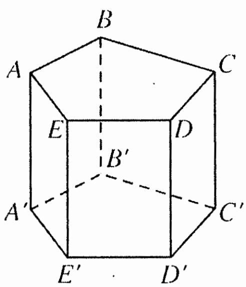
Vậy $(P) \equiv$ mp(a, b).

Tính duy nhất của mp(P) suy từ hệ quả 2.

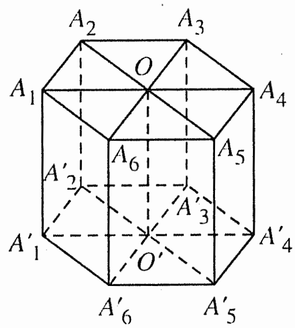
c) *Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương*

Trong chương II, ta đã nêu định nghĩa hình lăng trụ. Ở phần này, ta sẽ xét một số hình lăng trụ đặc biệt.

ĐỊNH NGHĨA 3. Hình lăng trụ đứng *là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy (h.3.70).*



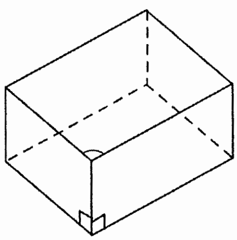
Hình 3.70

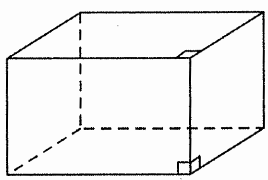


Hình 3.71

ĐỊNH NGHĨA 4. Hình lăng trụ đều là *hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều (h.3.71).*

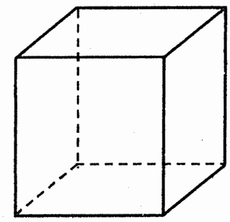
ĐỊNH NGHĨA 5. Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành (h.3.72).


Hình 3.72


Hình 3.73

ĐỊNH NGHĨA 6. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (h.3.73).

ĐỊNH NGHĨA 7. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau (h.3.74).



Hình 3.74

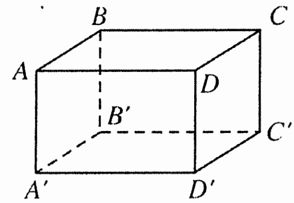
Ví dụ 5. Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật khi biết độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c (a, b, c gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật).

Giải (h.3.75). Từ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'} = 0$

ta có $\overrightarrow{AC'}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

hay $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

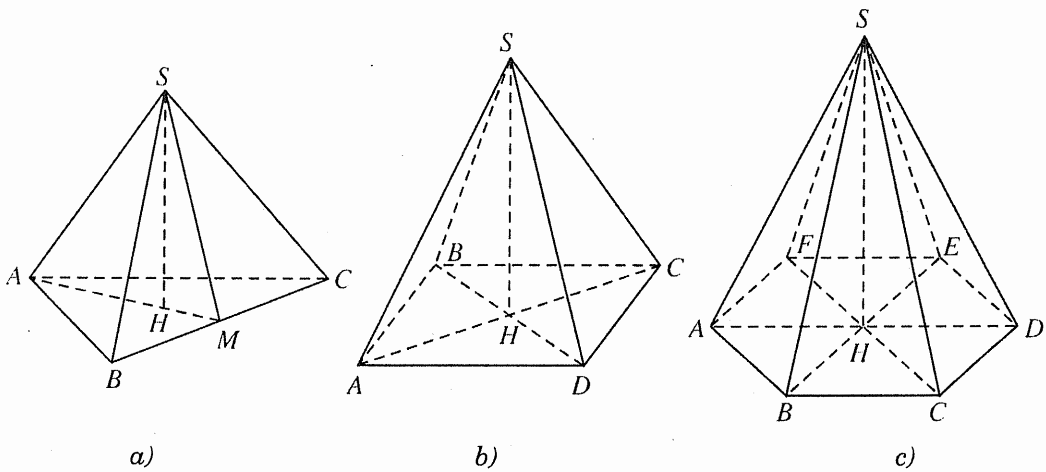


Hình 3.75

Tương tự các đường chéo còn lại cũng bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

d) *Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều*

ĐỊNH NGHĨA 8. Một hình chóp được gọi là *hình chóp đều* nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau (h.3.76).

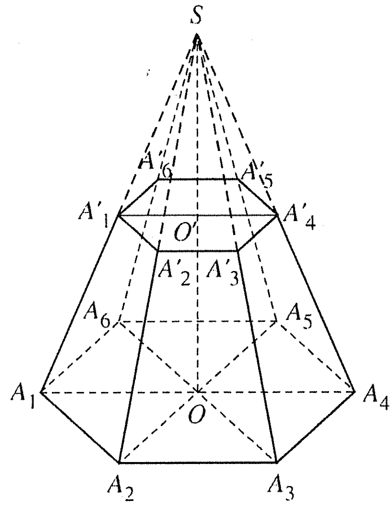


Hình 3.76

Ta biết rằng đối với một hình chóp bất kì, đường thẳng vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là ***đường cao*** của hình chóp.

ĐỊNH NGHĨA 9. Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là *hình chóp cụt đều* (h.3.77).

Đoạn nối tâm của hai đáy được gọi là ***đường cao*** của hình chóp cụt đều.



Hình 3.77

Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

Nếu có $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không? Vì sao?

Giải (h.3.78). Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

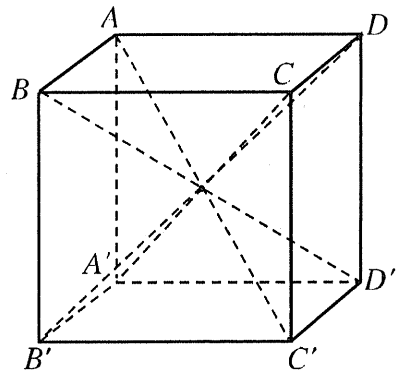
$$AC'^2 + A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$

Mặt khác,

$$AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

nên $A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Như vậy bốn đường chéo của hình hộp bằng nhau.



Hình 3.78

Ta lại có $ACC'A'$ là hình bình hành mà $AC' = A'C$ nên $ACC'A'$ là hình chữ nhật, từ đó $AA' \perp AC$.

Tương tự ta có $BB' \perp BD$ mà $BB' \,//\, AA'$ vậy $AA' \perp$ mp$(ABCD)$.

Tương tự như vậy ta cũng có $AB \perp$ mp$(ADD'A')$.

Do đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật.

Ví dụ 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

1) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'CD')$.

2) Cắt hình lập phương đó bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Xác định thiết diện thu được. Thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

Giải (h.3.79)

1) Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và

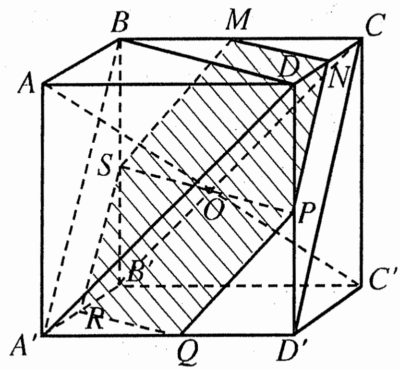
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Vậy

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = 0$$

tức là $AC' \perp BD$.

Tương tự ta có $AC' \perp BA'$.



Hình 3.79

Vậy AC' vuông góc với mp($A'BD$).

Mặt khác, mp($CB'D'$) // mp($A'BD$) nên $AC' \perp$ mp($CB'D'$).

2) Gọi M là trung điểm của BC thì có $MA = MC'$ (vì cùng bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$) nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC'.

Tương tự như trên nếu gọi N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$ thì các điểm đó cũng thuộc mặt phẳng trung trực của AC'.

Từ đó thiết diện thu được là $MNPQRS$.

Nếu gọi O là tâm hình lập phương thì dễ thấy các cạnh của tam giác OMN song song với các cạnh của tam giác $A'BD$ mà tam giác $A'BD$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên tam giác OMN đều cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự như vậy đối với các tam giác ONP, OPQ, OQR, ORS, OSM.

Vậy $MNPQRS$ là hình lục giác đều có cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó diện tích S của thiết diện là $S = 6\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

Chú ý. Có thể tính S bởi công thức $S' = S\cos\varphi$ bằng cách chiếu lục giác đều $MNPQRS$ lên mp($A'B'C'D'$).

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng x.

1) Chứng minh rằng mp(SAC) vuông góc với hai mặt phẳng ($ABCD$) và (SBD).

2) Tính đường cao của hình chóp $S.ABCD$ theo a, x.

3) Tìm sự liên hệ giữa a và x để $S.ABCD$ là hình chóp đều.

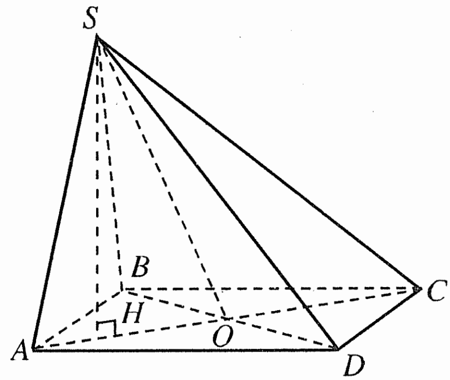
Giải (h.3.80)

1) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $ABCD$ có các cạnh bằng x nên $ABCD$ là hình thoi, từ đó $BD \perp AC$ và O là trung điểm của BD.

Mặt khác, $SB = SD = x$ nên $SO \perp BD$.

Như vậy $BD \perp$ mp(SAC), suy ra mọi mặt phẳng chứa BD đều vuông góc với mp(SAC), nghĩa là mp(SBD) và mp($ABCD$) đều vuông góc với mp(SAC).



Hình 3.80

2) Vì mp(SAC) $\perp$ mp($ABCD$) theo giao tuyến AC nên kẻ đường cao SH của tam giác SAC thì $SH \perp$ mp($ABCD$), tức là SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Từ giả thiết các cạnh còn lại của hình chóp có độ dài bằng x nên suy ra ba tam giác SBD, ABD, CBD là ba tam giác cân chung cạnh BD nên

$$SO = AO = OC.$$

Như vậy tam giác SAC vuông tại S. Từ đó $SH.AC = SA.SC$ tức là

$$SH = \frac{a.x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

3) Hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều thì điều kiện cần là các cạnh bên bằng nhau, tức là $a = x$. Khi ấy $AC = a\sqrt{2}$ mà $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên $ABCD$ là hình vuông.

Vậy $S.ABCD$ là hình chóp đều.

Như vậy $S.ABCD$ là hình chóp đều, điều kiện cần và đủ là $a = x$. Lúc đó chân đường cao của hình chóp là O.

Chú ý. Khi $a = x$, có thể tính được các góc tạo bởi hai mặt phẳng bất kì của hình chóp $S.ABCD$. (bạn đọc tự làm)

Ví dụ 9. Các mệnh đề sau đây có đúng không?

1) Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

2) Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

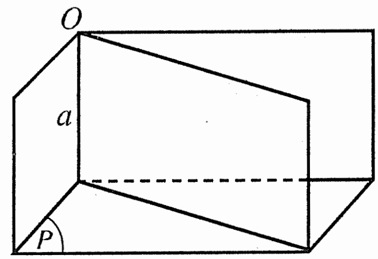
3) Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

Giải (h.3.81)

1) Giả sử (P) là mặt phẳng cho trước và O là điểm đã cho.

Từ O kẻ đường thẳng a vuông góc với (P) khi đó bất cứ mặt phẳng nào qua O và vuông góc với (P) đều chứa đường thẳng a.

Do O và (P) cho trước nên đường thẳng a cố định.



Hình 3.81

Vậy mệnh đề 1) luôn đúng.

2) Nếu hai mặt bên của hình lăng trụ không song song là hình chữ nhật thì hình lăng trụ đó là hình lăng trụ đứng.

Nếu hai mặt bên của hình lăng trụ là hình chữ nhật nhưng lại nằm trên hai mặt phẳng song song thì hình lăng trụ đó không chắc là hình lăng trụ đứng.

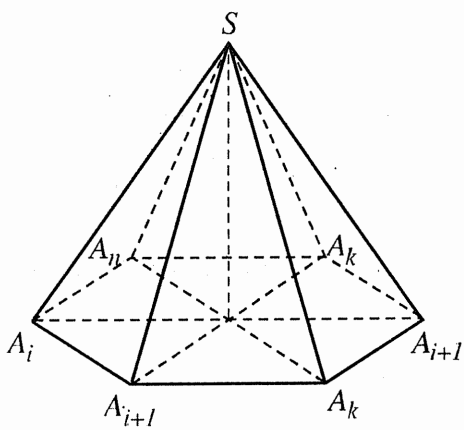
Vậy mệnh đề 2) không đúng.

3) Giả sử hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ đáy $A_1A_2\ldots A_n$ là đa giác đều và ba cạnh bên $SA_i = SA_j = SA_k$. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì

$$HA_i = HA_j = HA_k.$$

Từ đó H phải trùng với tâm của đáy $A_1A_2\ldots A_n$. Suy ra $S.A_1A_2\ldots A_n$ là hình chóp đều (h.3.82).

Vậy mệnh đề 3) luôn đúng.



Hình 3.82

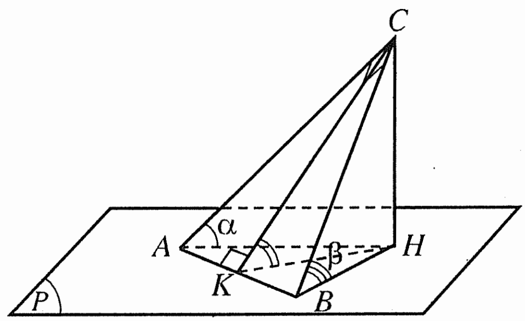
Ví dụ 10. Cạnh huyền của tam giác vuông ABC nằm trên mặt phẳng (P) và các cạnh góc vuông tạo với mp(P) hai góc α, β. Tính góc giữa mặt phẳng chứa tam giác ABC và mặt phẳng (P).

Tìm sự liên hệ giữa α, β để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P).

Giải (h.3.83). Giả sử ABC là tam giác vuông tại C.

Kẻ $CH \perp$ mp(P), kẻ $CK \perp AB$.

Khi đó $HK \perp AB$ và $\widehat{CKH}$ là góc giữa mp(ABC) và mp(P); $\widehat{CBH}$, $\widehat{CAH}$ lần lượt là các góc tạo bởi hai cạnh góc vuông với mp(P). Theo giả thiết, ta có $\widehat{CAH} = \alpha$, $\widehat{CBH} = \beta$.



Hình 3.83

Đặt $CH = h$ thì $CA = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, $CB = \dfrac{h}{\sin\beta}$ và

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 = h^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right) \Rightarrow AB = h\frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Xét tam giác ABC ta có $AB.CK = CA.CB$, từ đó

$$CK = \frac{CA.CB}{AB} = \frac{h}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}.$$

Xét tam giác vuông CHK ta có

$$\sin\widehat{CKH} = \frac{CH}{CK} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} \qquad (*)$$

Vậy góc giữa mp(ABC) và mp(P) được tính bởi (*).

Chú ý.

+ Bài toán luôn có lời giải vì $CH \le CK$. Đặc biệt khi $CH = CK$ hay $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì $\sin\widehat{CKH} = 1$, tức là mp$(ABC) \perp$ mp(P). Vậy hệ thức liên hệ giữa α và β để mp(ABC) vuông góc với (P) là $\alpha + \beta = 90^\circ$.

+ Từ hệ thức $\sin\widehat{CKH} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$, nếu đặt góc giữa mp($ABC$) và ($P$) là φ thì ta có $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

Ví dụ 11. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC, $A'B'$.

1) Xác định thiết diện của hình lăng trụ bởi mp(MNP);

2) Tính diện tích thiết diện.

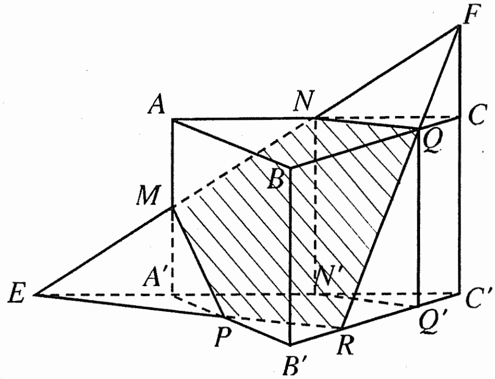
Giải (h.3.84)

1) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng $A'C'$ và CC'.

Gọi R là giao điểm của EP và $B'C'$, gọi Q là giao điểm của FR và BC.

Khi đó thiết diện thu được là $MNQRP$ (ngũ giác).

2) Tính diện tích S của thiết diện $MNQRP$.



Hình 3.84

Dễ thấy

$$A'E = \frac{a}{2} \Rightarrow C'F = \frac{3a}{2} \Rightarrow CF = \frac{a}{2}.$$

Xét tam giác $A'EP$ có $A'E = A'P$ và $\widehat{EA'P} = 120^o$ nên $\widehat{A'EP} = 30^o$, từ đó $\Delta ERC'$ vuông tại R.

Do $FC' \perp (A'B'C')$ nên $RF \perp ER$.

Vậy góc giữa mp(MNP) và mp($A'B'C'$) là $\widehat{FRC'}$.

Ta có $RC' = \dfrac{3a}{4}$, từ đó $QC = \dfrac{a}{4}$.

Xét phép chiếu lên mặt phẳng ($A'B'C'$) thì thiết diện $MNQRP$ có hình chiếu là $A'N'Q'RP$.

Vậy $S_{A'N'Q'RP} = S_{MNQRP}.\cos\widehat{FRC'}$.

Đặt $\widehat{FRC'} = \varphi$.

Ta có $\tan\varphi = \dfrac{a}{\frac{1}{2}a} = 2 \Rightarrow 1 + \tan^2\varphi = 5 = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$S_{A'N'Q'RP} = S_{A'B'C'} - S_{N'C'Q'} - S_{PB'R}$

$S_{A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{N'C'Q'} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{4}\sin 60^o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$,

$S_{PB'R} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{4}\sin 60^o = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$

Từ đó $S_{A'N'Q'RP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

Vậy $S_{MNQRP} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}.\sqrt{5} = \dfrac{3a^2\sqrt{15}}{16}$.

BÀI TẬP

21. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

a) Tính độ dài MN;

b) Tính góc giữa đường thẳng MN và BC;

c) Chứng minh rằng $MN \perp AB$, $MN \perp CD$.

22. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, AD. Tính góc giữa hai đường thẳng MG và NP, ở đó G là trọng tâm tam giác BCD.

23. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^o$, $\widehat{CAD} = 90^o$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD;

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $4\sqrt{2}$, SC vuông góc với CA và CB, $SC = 2$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính góc giữa hai đường thẳng CE và SF.

25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Lấy M thuộc tia AD sao cho $AM = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và DD', P và Q là các điểm lần lượt thuộc AE và CF. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{MP}{PQ}$.

26. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k ($k \neq 0;\ 1$).

a) Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng $(A'BCD')$;

b) Chứng minh rằng khi $k = -\frac{1}{2}$ thì $MN \parallel A'C$ và $MN \perp AD'$ và DB.

27. Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

a) Tính diện tích toàn phần của tứ diện đó;

b) Tìm điểm cách đều các điểm A, B, C, D và tính khoảng cách từ điểm đó đến mỗi đỉnh.

28. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy;

b) Hình chiếu của trực tâm của ΔABC trên mặt phẳng (SBC) là trực tâm của tam giác SBC.

29. a) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy các cạnh đối diện của tứ diện vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là tứ diện trực tâm.

b) Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương:

i) $ABCD$ là tứ diện trực tâm;

ii) Chân đường cao của tứ diện hạ từ mỗi đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện;

iii) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$;

iv) Bốn đường cao của tứ diện đồng quy.

30. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng nhau và bằng b.

a) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Tính SH;

b) Xét mặt phẳng (P) đi qua đỉnh A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt cạnh SC tại điểm C_1. Khi đó tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P).

31. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi G_i là trọng tâm của mặt đối diện với A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ của tứ diện. Xét các đường thẳng d_i đi qua G_i và vuông góc với mặt chứa G_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$. Cho biết bốn đường thẳng đó đồng quy.

Chứng minh tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.

32. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau (tứ diện đều). Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của điểm M bất kì nằm trong tứ diện trên các mặt phẳng đối diện với các đỉnh A, B, C, D đã cho. Gọi G' là trọng tâm của tứ diện $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng $G'M$ đi qua điểm cố định khi điểm M thay đổi.

33. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O và R là tâm và bán kính mặt cầu qua các đỉnh của tứ diện. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các mặt đối diện với đỉnh A, B, C, D. Đặt $AA' = m_a$, $BB' = m_b$, $CC' = m_c$, $DD' = m_d$, $OG = d$.

Chứng minh rằng $4\left(R^2 - d^2\right) = \dfrac{9}{16}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right)$.

Từ đó suy ra $R \geq \dfrac{3}{16}\left(m_a + m_b + m_c + m_d\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

34. Cho tứ diện $ABCD$ có bốn đường cao đồng quy tại điểm H.

Tìm điểm M trong không gian không thuộc mặt phẳng chứa mặt nào của tứ diện sao cho $HG_1 = HG_2 = HG_3 = HG_4$ trong đó G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$.

35. Cho tứ diện $ABCD$.

Chứng tỏ rằng nếu có điểm I nằm trong miền giới hạn bởi tứ diện sao cho $\widehat{BIA} = \widehat{CID}$ và $\widehat{AIC} = \widehat{BID}$, $\widehat{BIC} = \widehat{AID}$ thì với mọi điểm M trong không gian ta có $MA + MB + MC + MD \geq IA + IB + IC + ID$.

36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là điểm cách đều bốn đỉnh A, B, C, D và R là khoảng cách từ O đến mỗi đỉnh đó.

Chứng minh rằng $BC^2 + CD^2 + DB^2 \leq AB^2 + AC^2 + AD^2 + 4R^2$.

37. Cạnh góc vuông AC của tam giác vuông cân ABC nằm trong mặt phẳng (P), cạnh góc vuông BC tạo với mặt phẳng (P) góc α.

Tính góc giữa đường thẳng chứa cạnh huyền AB và (P).

38. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Một đường thẳng l đi qua đỉnh A không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và tạo với AB, AD các góc bằng nhau. Hình chiếu của đường thẳng l trên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt đường thẳng BD tại M'.

Tính $M'B$ và $M'D$ khi cho $AB = a$, $AD = b$.

39. Cho tam giác ABC vuông cân tại C nằm trong mặt phẳng (P) và một đoạn thẳng MN nằm ngoài mặt phẳng (P). Cho biết điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC và điểm N cách đều ba cạnh của tam giác đó.

Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) khi cho biết độ dài $MN = l$, cạnh huyền của tam giác bằng c.

40. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Một đoạn thẳng thay đổi có hai đầu mút lần lượt nằm trên hai đường thẳng AB_1, BC_1 và tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60°.

Tìm vị trí của đoạn thẳng đó sao cho độ dài của nó ngắn nhất.

41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = x$.

a) Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°;

b) Khi điều kiện của a) được thực hiện, hãy tính các góc tạo bởi hai mặt phẳng chứa hai mặt bên đối diện của hình chóp, tức là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD); mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).

42. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc. Trên giao tuyến Δ của (P) và (Q) lấy hai điểm A và B. Gọi C và D là các điểm lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và (Q) sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Một mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α).

Tính diện tích thiết diện khi $AB = AC = BD = a$.

43. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính độ dài AB và IJ theo a và x;

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau?

44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD. Đặt $CM = x$, $CN = y$ $(0 \le x, y \le a)$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để xảy ra một trong hai điều kiện sau:

a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45°;

b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

45. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

Tính diện tích các tam giác HAB, HBC và HCA.

46. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $CA = a$, $CB = b$, mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB'.

a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện.

47. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu có một trong các điều sau đây xảy ra?

a) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối diện bằng nhau;

b) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối diện vuông góc;

c) Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

48. Cho tam giác ABC vuông ở A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hai tia Bx, Cy cùng vuông góc với mp(ABC) và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Lấy các điểm B', C' lần lượt thuộc các tia Bx, Cy sao cho $BB' = a$, $CC' = m$.

a) Với giá trị nào của m thì tam giác $AB'C'$ là tam giác vuông?

b) Khi tam giác $AB'C'$ vuông tại B', gọi H là hình chiếu của A trên BC. Chứng minh rằng $B'C'H$ là tam giác vuông và tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'C')$.

49. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài đường cao bằng nửa cạnh đáy; M là điểm bất kì thuộc cạnh AB.

Tìm giá trị lớn nhất của góc $\widehat{A_1MC_1}$.

50. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác SAB cân tại S nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SAB).

b) Gọi I là trung điểm của AB, K là trung điểm của AD. Chứng minh rằng mặt phẳng (SCK) và mặt phẳng (SID) vuông góc với nhau.

51. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một mặt phẳng (α) song song hay trùng với mặt phẳng $(A'BD)$ cắt hình lập phương theo thiết diện.

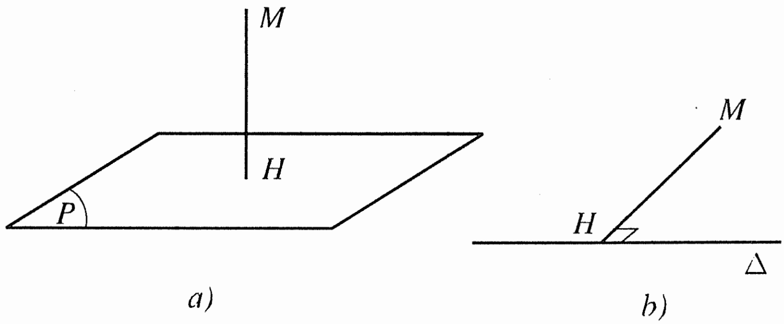
Tính diện tích lớn nhất của thiết diện đó.

§3. KHOẢNG CÁCH. NHỊ DIỆN. GÓC ĐA DIỆN

1. Khoảng cách

a) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, đến một đường thẳng

Trong không gian để đi đến khái niệm khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) hoặc một đường thẳng Δ, ta xét hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng (P) hoặc trên đường thẳng Δ (h.3.85).

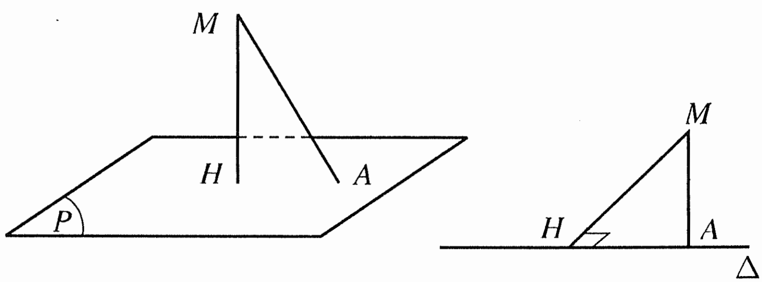


Hình 3.85

Ta có định nghĩa sau:

ĐỊNH NGHĨA 1. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) (hoặc đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc trên đường thẳng Δ).

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) (hoặc đường thẳng Δ) lần lượt được kí hiệu là $d(M; (P))$ (hoặc $d(M; \Delta)$).



a) $MH \leq MA$ *b)* $MH \leq MA$

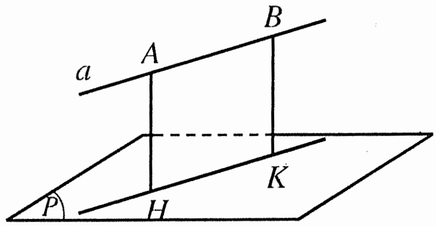
Hình 3.86

Dễ thấy kết quả sau:

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là nhỏ nhất so với khoảng cách từ điểm M đến một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P). Cũng có kết quả tương tự đối với khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (h.3.86).

b) *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song*

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Với hai điểm A, B bất kì trên a, dễ thấy $d(A; (P)) = d(B; (P))$ (h.3.87).



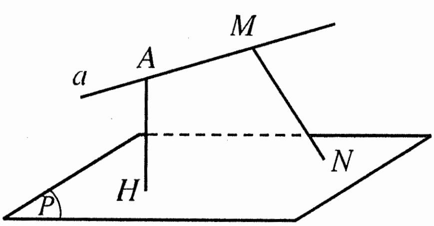
Hình 3.87

Như vậy khoảng cách $d(A; (P))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên đường thẳng a. Từ đó ta có định nghĩa:

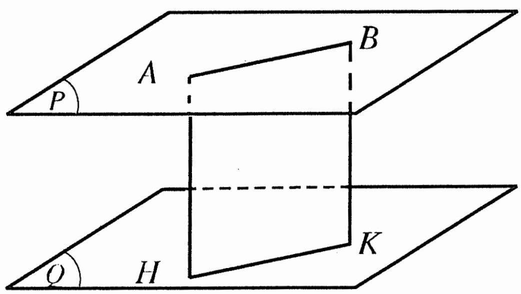
ĐỊNH NGHĨA 2. Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).

Kí hiệu khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nó là $d(a; (P))$.

Hiển nhiên là khi đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì $d(a; (P))$ là nhỏ nhất so với khoảng cách từ điểm bất kì của a đến điểm bất kì của mặt phẳng (P) (h.3.88), nghĩa là $d(a; (P)) \leq MN$ với mọi điểm $M \in a$ và $N \in (P)$.



Hình 3.88



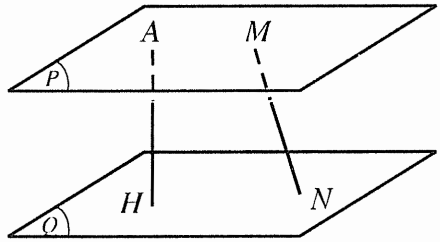
Hình 3.89

Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Khi ấy dễ thấy $d(A; (Q)) = d(B; (Q))$ với A, B là hai điểm bất kì thuộc (P), tức là $d(A; (Q))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên (P) (h.3.89).

Từ đó ta có định nghĩa:

ĐỊNH NGHĨA 3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là $d((P); (Q))$, thì $d((P); (Q)) = d(A; (Q)) = d(C; (P))$ trong đó A là một điểm nào đó thuộc (P) còn C là điểm nào đó thuộc (Q).



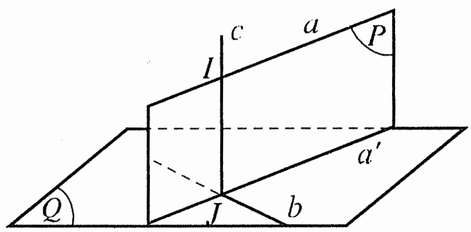
Hình 3.90

Cũng dễ thấy kết quả sau:

Khi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song thì khoảng cách giữa (P) và (Q) là nhỏ nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai mặt phẳng, tức là $d((P); (Q)) \leq MN$ với mọi điểm M thuộc (P) và mọi N thuộc (Q) (h.3.90).

c) *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Bài toán. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Chứng minh rằng có duy nhất đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng a và b đồng thời vuông góc với cả a và b.



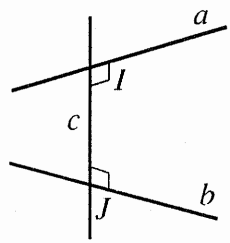
Hình 3.91

Giải (h.3.91). Vì a và b là hai đường thẳng chéo nhau nên có duy nhất mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a. Khi ấy mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng (Q) sẽ cắt (Q) theo giao tuyến a' và cắt đường thẳng b tại J. Gọi c là đường thẳng đi qua điểm J và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng c nằm trong mặt phẳng (P), do đó c cắt đường thẳng a tại điểm I. Khi ấy c là đường thẳng cần tìm.

Nếu còn có đường thẳng c' khác c cũng cắt a và b và vuông góc với cả a và b thì đường thẳng c' sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q), từ đó c và c' song song, vì vậy a và b cùng nằm trong mặt phẳng chứa c và c', trái với giả thiết a và b là hai đường thẳng chéo nhau.

Đường thẳng c nói trên gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại các điểm I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó (h.3.92).



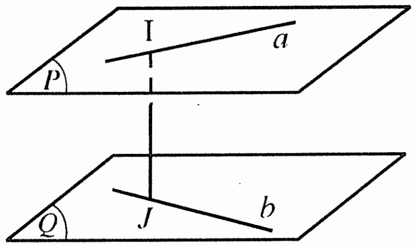
Hình 3.92

Từ đó ta có định nghĩa:

ĐỊNH NGHĨA 4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Nếu gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với nhau và lần lượt đi qua hai đường thẳng a và b thì rõ ràng là

$IJ = d(a; (Q)) = d(b; (P)) = d((P); (Q))$ (h.3.93).



Hình 3.93

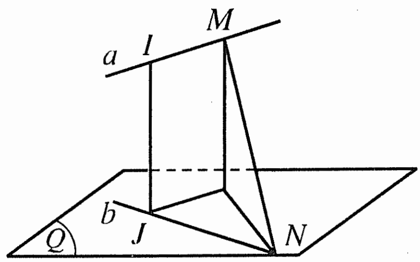
Vậy ta còn có:

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng ấy.

Kí hiệu khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là $d(a; b)$, cũng nhận thấy:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là ngắn nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng đó, tức là $d(a; b) \leq MN$ với mọi điểm $M \in a$ và $N \in b$ (h.3.94).



Hình 3.94

Sau đây là một số ví dụ áp dụng trong một số bài toán tính khoảng cách.

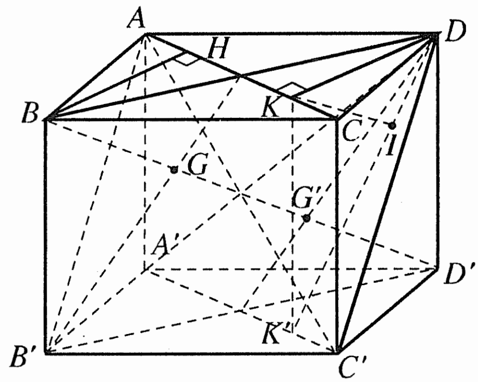
Ví dụ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

1) Tính khoảng cách từ điểm B đến mp$(ACC'A')$;

2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC';

3) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(A'C'D)$.

Giải (h.3.95)



Hình 3.95

1) Kẻ BH vuông góc với AC ($H \in AC$).

Do mp($ABCD$) $\perp$ mp($ACC'A'$) nên

$BH \perp$ mp($ACC'A'$).

Vậy $d(B;$ mp$(ACC'A')) = BH$.

Vì $BH.AC = BA.BC$ nên $BH = \dfrac{BA.BC}{AC}$

từ đó $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2) Ta có BB' và AC' là hai đường thẳng chéo nhau mà BB' // mp($ACC'A'$)

nên $d(BB'; AC') = d(BB';$ mp$(ACC'A')) = d(B;$ mp$(ACC'A')) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

3) *Cách 1.*

Dễ thấy mp($AB'C$) // mp($A'C'D$).

Kẻ $DK \perp AC$ ($K \in AC$) và KK' vuông góc với mp($A'B'C'D'$). Kẻ đường cao KI của tam giác $KK'D$. Khi đó $AC \perp$ mp($KK'D$), mặt khác $A'C'$ // AC, từ đó $A'C' \perp$ mp($KK'D$).

Vậy mp($KK'D$) $\perp$ mp($A'C'D$). Do $K'D$ là giao tuyến của hai mp($A'C'D$) và ($KK'D$) và $KI \perp K'D$ nên $KI \perp$ mp($A'C'D$). Từ đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng ($A'C'D$) và (ACB') là KI.

Xét tam giác vuông $KK'D$ với đường cao KI ta có

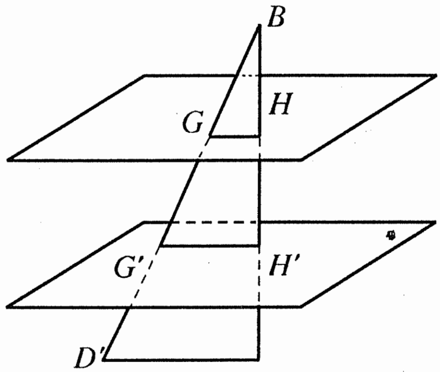
$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{KK'^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{DK^2} \qquad (1)$$

Vì tam giác ADC vuông tại D và DK là đường cao của nó nên

$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $\dfrac{1}{KI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \Rightarrow KI = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Cách 2.



Hình 3.96

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên mp(ACB') // mp($DA'C'$) và đường chéo BD' cắt hai mặt phẳng trên lần lượt tại G, G' (trọng tâm tam giác ACB' và tam giác $A'C'D$) mà $BG = GG' = G'D'$.

Kẻ qua B đường thẳng vuông góc với mp(ACB'), cắt mp(ACB') và mp($A'C'D$) lần lượt tại H và H' thì có $BH = HH'$ (h.3.96).

Như vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACB') và mp($A'C'D$) bằng HH' và bằng BH là khoảng cách từ đỉnh B đến mp(ACB') của tứ diện $BACB'$ có BA, BC, BB' vuông góc từng đôi.

Ta lại có $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BB'^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$,

từ đó $BH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Chú ý. Khi $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương thì từ cách giải trên ta thấy:

1) $d\left(B;\mathrm{mp}\left(ACC'A'\right)\right) = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

2) $d\left(BB';AC'\right) = d\left(B;\mathrm{mp}\left(ACC'A'\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

3) $d\left(\left(ACB'\right);\left(A'C'D\right)\right) = \dfrac{BD'}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên $SA \perp$ mp($ABCD$) và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

1) SB và AD;

2) BD và SC.

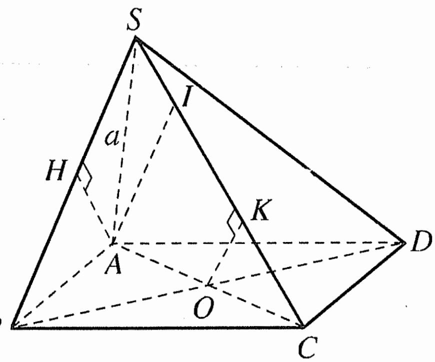
Giải (h.3.97)

1) Ta có $DA \perp$ mp(SAB) tại A. Gọi AH là đường cao của tam giác vuông SAB thì AH là đường vuông góc chung của SB và AD.

Vậy $d(SB; AD) = AH$.

Vì tam giác SAB vuông cân nên

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Hình 3.97

2) Ta có BD vuông góc với mp(SAC) tại tâm O của hình vuông $ABCD$. Kẻ OK vuông góc với SC ($K \in SC$) thì OK là đường vuông góc chung của BD và SC. Như vậy $d\left(BD;SC\right) = OK = \frac{1}{2}AI$ (ở đó AI là đường cao của tam giác vuông SAC), mặt khác $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d\left(BD;SC\right) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

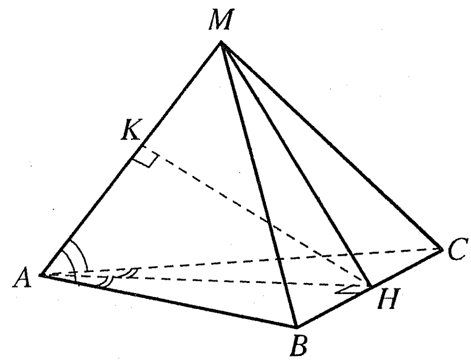
Chú ý. Từ cách giải trong ví dụ 2, ta suy ra: Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau và vuông góc thì việc tìm đường vuông góc chung của chúng quy về việc xác định giao điểm của đường thẳng a với mặt phẳng đi qua đường thẳng b và vuông góc với a và từ giao điểm ấy kẻ đường vuông góc với b, đó là đường vuông góc chung, đồng thời từ đó cũng tính được khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Ví dụ 3. Đường thẳng AM tạo với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC một góc 60°. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AM và đường thẳng BC, biết rằng cạnh của tam giác đều bằng a và $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$.

Giải (h.3.98). Vì $\widehat{MAB} = \widehat{MAC}$ nên hình chiếu của đường thẳng AM trên mặt phẳng (ABC) là đường phân giác AH của góc $\widehat{BAC}$.

Dễ thấy $BC \perp$ mp(AHM), từ đó $\widehat{MAH}$ chính là góc giữa AM với mp(ABC).

Trong mp(AHM) kẻ đường cao HK của tam giác AHM thì HK chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BC.



Hình 3.98

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{KAH} = 60^o$, từ đó $HK = AH\sin 60^o$ hay

$$HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

Vậy khoảng cách giữa AM và BC bằng $\dfrac{3a}{4}$.

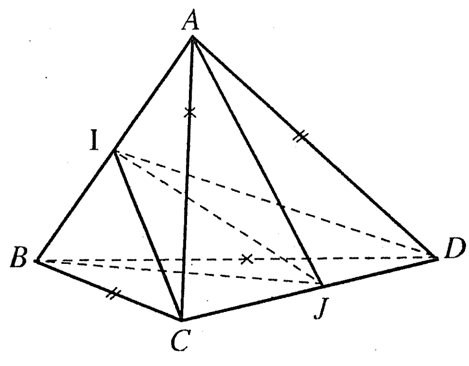
Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $AC = BD$, $AD = BC$ thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng nối trung điểm của AB và CD. Điều ngược lại có đúng không? Tính khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ biết

$$AC = BD = b, AD = BC = a, AB = c, CD = c'.$$

Từ đó suy ra khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ khi $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$.

Giải (h.3.99)

+ Vì $AC = BD$, $AD = BC$ nên tam giác ACD bằng tam giác BDC, từ đó hai đường trung tuyến tương ứng AJ và BJ bằng nhau (ở đó J là trung điểm của CD). Gọi I là trung điểm của AB thì ta có $IJ \perp AB$.



Hình 3.99

Tương tự như trên ta có $IJ \perp CD$.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

Điều ngược lại của kết luận nêu ra trong bài toán cũng đúng, tức là nếu $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$ với I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $AC = BD$, $AD = BC$.

Thật vậy, vì $IJ \perp AB$ và I là trung điểm của AB nên $AJ = BJ$.

Mặt khác ta có

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2}, \; BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

Từ đó ta có $AC^2 + AD^2 = BC^2 + BD^2$ (1)

Tương tự như trên ta cũng có $CB^2 + CA^2 = DB^2 + DA^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 - BC^2 = BC^2 - DA^2$, tức là $DA = BC$ (3)

Kết hợp (1) và (3) ta có $AC = BD$.

+ Tính $d(AB, CD) = IJ$

Ta có $IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = AJ^2 - \frac{AB^2}{4} = AJ^2 - \frac{c^2}{4}$

$$AJ^2 = \frac{AC^2 + AD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c'^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c'^2}{4}$$

Vậy $IJ^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - \left(c^2 + c'^2\right)}{4}$, tức là $IJ = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - \left(c^2 + c'^2\right)}$

(điều kiện $2a^2 + 2b^2 - (c^2 + c'^2) > 0$)

+ Từ kết quả trên suy ra khi $ABCD$ là tứ diện có $AB = CD = c$, $AC = BD = b$, $AD = BC = a$ (tứ diện như thế gọi là tứ diện gần đều) thì

$$d\left(AB, CD\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2c^2}, \; d\left(AC, BD\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - 2b^2},$$

$$d\left(AD, BC\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - 2a^2}.$$

Chú ý rằng tứ diện $ABCD$ có tính chất trên thì các mặt của nó đều là các tam giác nhọn nên điều kiện $a^2 + b^2 > c^2$ được thực hiện.

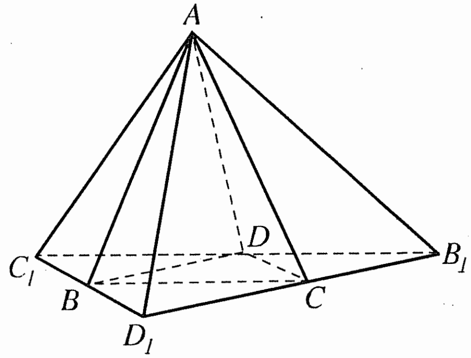
Có thể giải thích kết quả đó như sau:

Kẻ qua B, C, D các đường thẳng song song với các cạnh của tam giác BCD, chúng cắt nhau tại B_1, C_1, D_1 (h.3.100). Khi đó BC, BD, CD là đường trung bình của tam giác $B_1C_1D_1$, từ đó $CD_1 = CB_1 = BD = AC$.

Vậy $B_1A \perp D_1A$.

Tương tự như vậy $C_1A \perp D_1A$ và $C_1A \perp B_1A$ tức là $AB_1C_1D_1$ là tứ diện vuông tại A.

Vậy tam giác $B_1C_1D_1$ có ba góc nhọn, từ đó BCD là tam giác có ba góc nhọn.



Hình 3.100

Nhận xét. Có thể chứng minh lập luận ngược lại của bài toán nêu trên vẫn đúng nhờ phép chiếu vuông góc.

Cụ thể là xét mặt phẳng (P) đi qua CD và song song với AB.

Do IJ là đường vuông góc chung của AB và CD nên IJ vuông góc với mặt phẳng (P).

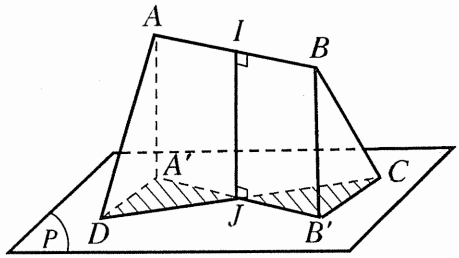
Gọi A' và B' là hình chiếu của A và B trên (P) thì J, A', B' thẳng hàng và do $IA = IB$ nên $JA' = JB'$, từ đó

$\Delta JCB' = \Delta JDA'$, tức là $B'C = A'D$.

Khi ấy hai tam giác vuông $BB'C$ và $AA'D$ bằng nhau, từ đó suy ra

$$BC = AD.$$

Lập luận tương tự như trên ta suy ra $AC = BD$ (h.3.101).



Hình 3.101

Với nhận xét nêu trên, chúng ta đề cập đến nội dung sau:

Ứng dụng của phép chiếu vuông góc để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng AB và CD chéo nhau.

Xét mặt phẳng (P) vuông góc với CD tại điểm O.

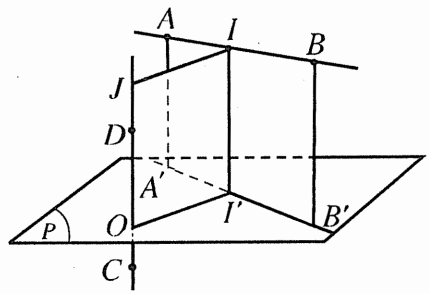
Gọi IJ là đường vuông góc chung của AB và CD (I thuộc AB, J thuộc CD). Khi đó hình chiếu của A, B, I trên mp(P) là A', B', I' thì $IJ = OI'$, từ đó

$$d(AB, CD) = d(O, A'B').$$

Vậy trong từng bài toán mà có thể chọn (P) là mặt phẳng đi qua C hay D hoặc một điểm nào đó thuộc đường thẳng CD (h.3.102).

Cũng như vậy đối với (Q) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB.

Chúng ta nêu ra một số ví dụ minh hoạ cho phương pháp này.

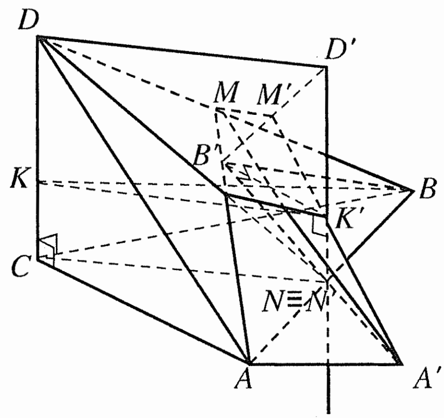


Hình 3.102

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $DC \perp mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh DB, AB, gọi K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa BK và CN bằng khoảng cách giữa AM và CN.

Giải (h.3.103). Xét mặt phẳng (P) vuông góc với CN tại N.

Chiếu tứ diện $ABCD$ lên mp(P). Gọi A', B', C', D', M', K', N' là hình chiếu của các điểm A, B, C, D, M, K, N trên mp(P).



Hình 3.103

Ta có $N' \equiv N \equiv C'$.

Do $CD \perp (ABC)$ nên $CD \perp CB$ và $CD \perp CA$, $CD \perp CN$ từ đó $CD \parallel (P)$.

Vậy $ND' \parallel CD$.

Do $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ nên $\overrightarrow{NK'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ND'}$ và vì

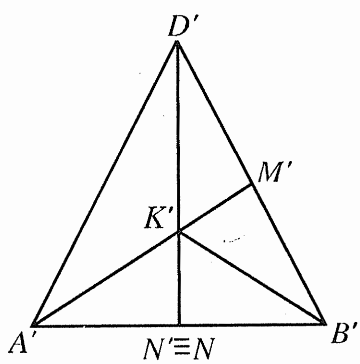
$CD \perp AB \Rightarrow ND' \perp A'B'$ tại N.

Từ đó $d(BK, CN) = d(N, B'K')$,

$$d(AM, CN) = d(N, A'M').$$

Vậy chỉ cần chứng minh

$$d(N, B'K') = d(N, A'M').$$



Hình 3.104

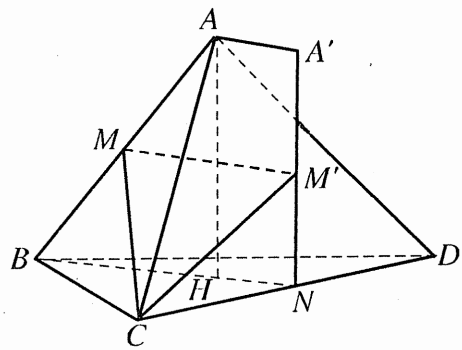
Thật thế vì M là trung điểm của BD nên M' là trung điểm của $B'D'$; N là trung điểm của AB nên N' là trung điểm của $A'B'$.

Mặt khác $\overrightarrow{NK'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ND'}$, từ đó K' là trọng tâm của tam giác $A'B'D'$ (h.3.104).

Mặt khác tam giác $A'K'B'$ cân tại K', từ đó $d(N, B'K') = d(N, A'M')$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BN và CM.

Giải (h.3.105). Vì tam giác BCD đều nên $BN \perp CD$. Xét mp(P) đi qua N và vuông góc với BN thì CD thuộc mp(P). Gọi H là hình chiếu của đỉnh A trên mp(BCD) thì $AH \perp BN$, từ đó AH // (P). Chiếu hình tứ diện $ABCD$ lên mp(P) theo phương BN, gọi A', B', C', D', H', M', N' là hình chiếu của các điểm A, B, C, D, H, M, N trên mp(P) thì

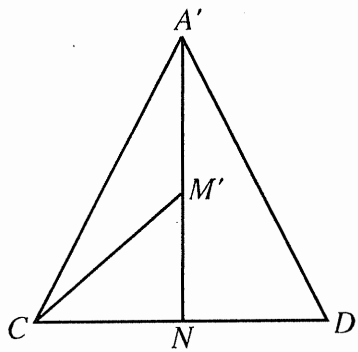


Hình 3.105

$$N' \equiv N \equiv B' \equiv H',\ C' \equiv C,\ D' \equiv D,$$

AA' // HN, M' là trung điểm của $A'N$, từ đó $d(CM, BN) = d(N, CM')$.

Với cách xác định trên thì $d(N, CM')$ chính bằng đường cao NK của tam giác CNM' (h.3.106)



Hình 3.106

Ta có $A'N = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, từ đó $NM' = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Do tam giác BCD đều nên $CN = \frac{a}{2}$. Vậy xét tam giác vuông CNM' với đường cao NK ta có

$$\frac{1}{NK^2} = \frac{1}{NC^2} + \frac{1}{NM'^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{6}} = \frac{4}{a^2} + \frac{6}{a^2} = \frac{10}{a^2}.$$

Từ đó $NK = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và BN bằng $\dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và DM. Chỉ rõ đường vuông góc chung của chúng.

Giải (h.3.107). Gọi P là trung điểm của BC thì $PN \parallel AA'$.

Do M là trung điểm của AB nên

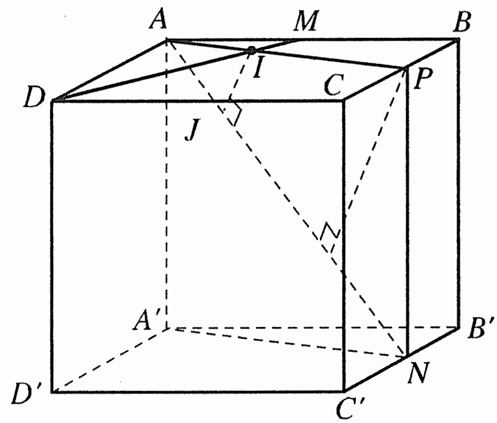
$$DM \perp AP.$$

Vậy $DM \perp \text{mp}(APN)$.

Xét phép chiếu theo phương DM lên mp(APN) thì hình chiếu của DM là điểm I, hình chiếu của AN là AN. Như vậy

$$d(DM, AN) = d(I, AN) = IJ$$

(trong đó IJ vuông góc với AN, $J \in AN$).



Hình 3.107

Dễ thấy $AI = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$, $IJ = AI\sin\widehat{JAI}$ hay $IJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{NP}{AN} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{a}{AN}$

Mặt khác $AN^2 = AP^2 + PN^2 = \dfrac{5a^2}{4} + a^2 = \dfrac{9a^2}{4} \Rightarrow AN = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $IJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{2a}{3a} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$.

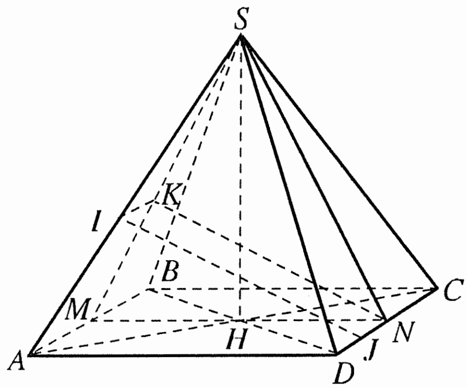
Đường vuông góc chung của DM và AN là IJ.

Ví dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt bên hình chóp và mặt phẳng đáy bằng α.

Tìm đường vuông góc chung của SA và CD.

Giải (h.3.108). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì có $CD \perp$ mp(SMN). Dễ thấy hình chiếu của SA trên mặt phẳng (SMN) là SM, hình chiếu của CD trên mặt phẳng (SMN) là N. Vậy khoảng cách giữa SA và CD bằng khoảng cách từ N đến SM và bằng đường cao NK của tam giác SMN.

Dễ thấy $NK = MN\sin\alpha = a\sin\alpha$



Hình 3.108

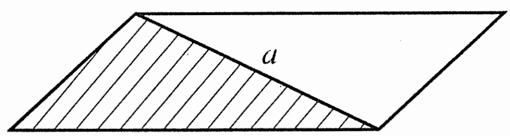
Từ K kẻ đường thẳng song song với CD, cắt SA tại điểm I. Kẻ IJ song song với NK thì có IJ là đường vuông góc chung của SA và CD.

2. Nhị diện. Góc đa diện

a) Nhị diện

Tương tự với khái niệm nửa đường thẳng trong mặt phẳng ta đưa ra khái niệm nửa mặt phẳng trong không gian.

Một đường thẳng nằm trong mặt phẳng chia mặt phẳng làm hai phần, mỗi phần cùng với đường thẳng ấy gọi là một nửa mặt phẳng. Đường thẳng đã cho gọi là bờ của hai nửa mặt phẳng mà nó xác định (h.3.109).

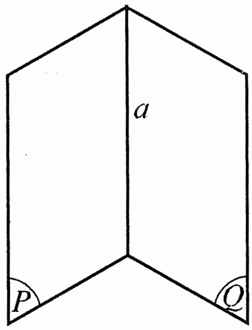


Hình 3.109

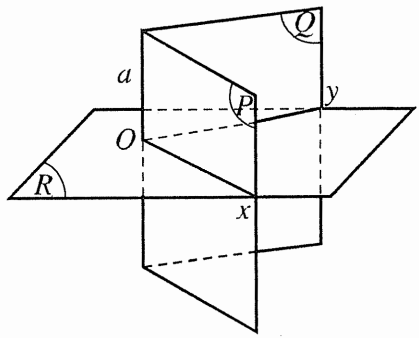
Từ khái niệm đó ta đưa ra định nghĩa sau:

ĐỊNH NGHĨA 1. Hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) có chung bờ a được gọi là một nhị diện. Hai nửa mặt phẳng (P) và (Q) gọi là hai mặt của nhị diện. Đường thẳng a gọi là cạnh của nhị diện (h.3.110).

Kí hiệu nhị diện có hai mặt là (P) và (Q), cạnh a là $[P, a, Q]$ hoặc $[P, Q]$. Cũng có lúc dùng kí hiệu $[M, a, N]$ trong đó M, N là điểm lần lượt thuộc hai mặt (P), (Q) và M, N không thuộc bờ a.



Hình 3.110



Hình 3.111

Nhận xét. Cho nhị diện $[P, a, Q]$. Cắt nhị diện đó bằng mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh a tại O (h.3.111). Giao của (R) với các nửa mặt phẳng (P), (Q) lần lượt là các tia Ox, Oy (hay các nửa đường thẳng Ox, Oy). Khi đó số đo góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của (R). Từ đó ta có định nghĩa sau:

ĐỊNH NGHĨA 2. Góc xOy được tạo nên như trên gọi là góc phẳng của nhị diện $[P, a, Q]$.

Chú ý rằng một nhị diện có nhiều góc phẳng nhưng số đo các góc phẳng đó đều bằng nhau. Số đo của góc phẳng nhị diện được gọi là số đo nhị diện đó.

Kí hiệu $\varphi = \widehat{xOy}$ thì $0^\circ \le \varphi \le 180^\circ$; $\varphi = 0^\circ$ khi hai nửa mặt phẳng (P), (Q) trùng nhau; $\varphi = 180^\circ$ khi hai nửa mặt phẳng ấy tạo thành một mặt phẳng; khi $\varphi = 90^\circ$ ta gọi nhị diện đó là nhị diện vuông, khi xOy là góc nhọn ta có nhị diện nhọn, khi xOy là góc tù ta có nhị diện tù.

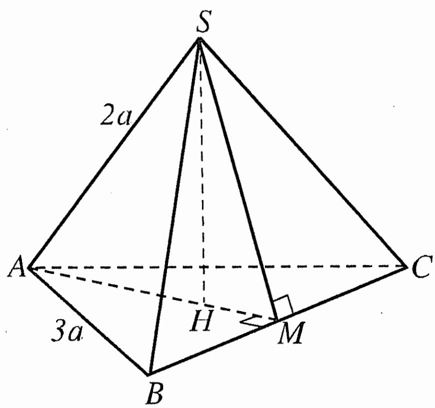
Hai nhị diện có góc phẳng bằng nhau được gọi là hai nhị diện bằng nhau.

Sau đây là một vài ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $3a$, cạnh bên $2a$. Tính số đo nhị diện $[S, BC, A]$.

Giải (h.3.112). Gọi M là trung điểm của cạnh BC thì mp$(SAM) \perp BC$, từ đó $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Hình 3.112

$SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$, từ đó $SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $\cos\widehat{SMH} = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Ta có kết luận:

Số đo nhị diện $[S, BC, A]$ là φ được xác định bởi $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$.

Chú ý. Từ ví dụ 1 nêu trên có thể tính được nhị diện $[S, A_iA_{i+1}, A_j]$ với $j \neq i, i+1$ trong hình chóp đều n-giác $S.A_1A_2\ldots A_n$ biết cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b.

Ví dụ 2. Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P). Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P). Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

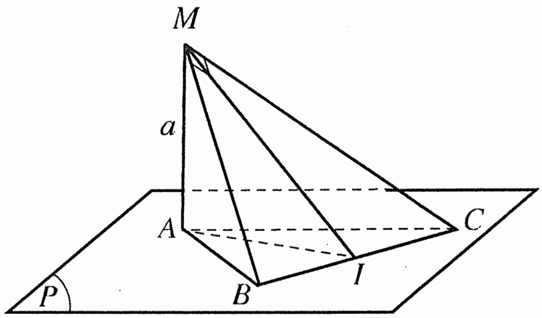
1) Tính độ dài BC;

2) Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Giải (h.3.113)

1) Vì $MA \perp$ mp(P) nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$ là góc giữa MB và MC với mp(P). Theo giả thiết $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^\circ$. Từ đó $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.



Hình 3.113

2) Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp$ mp(MIA), từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện $[M, BC, A]$. Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \dfrac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$.

Từ đó $\sin\varphi = \dfrac{MA}{MI} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0$.

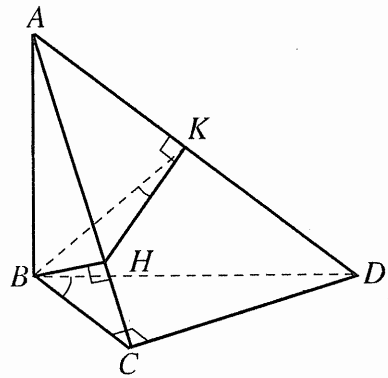
Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45^0.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp mp(BCD)$, tam giác BCD vuông tại C, nhị diện cạnh AB bằng nhị diện cạnh AD. Chứng minh rằng $\dfrac{CD^2}{CB^2} - \dfrac{BC^2}{BA^2} = 1$.

Giải (h.3.114). Vì $AB \perp mp(BCD)$, $BC \perp CD$ nên $AC \perp CD$. Kẻ các đường cao BH và BK của tam giác ABC và ABD thì có

$$mp(BHK) \perp AD.$$

Do đó $\widehat{BKH}$ là góc phẳng nhị diện cạnh AD. Mặt khác $\widehat{CBD}$ là góc phẳng nhị diện cạnh AB. Do giả thiết ta có $\widehat{BKH} = \widehat{CBD}$. Đặt các góc đó bằng α.



Hình 3.114

Khi đó $\sin\alpha = \dfrac{BH}{BK} = \dfrac{CD}{BD}$ hay $\dfrac{BD}{BK} = \dfrac{CD}{BH}$

$$\Rightarrow \frac{BD^2}{BK^2} = \frac{CD^2}{BH^2}.$$

Mặt khác $\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BD^2} + \dfrac{1}{BA^2}$, $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BA^2}$.

Vậy ta có $BD^2\left(\dfrac{1}{BD^2} + \dfrac{1}{BA^2}\right) = CD^2\left(\dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BA^2}\right)$ hay

$$1 + \frac{BD^2}{BA^2} = \frac{CD^2}{BC^2} + \frac{CD^2}{BA^2}$$

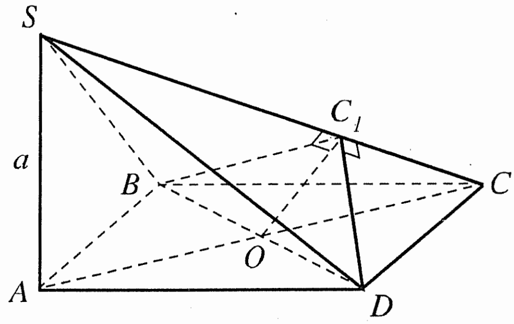
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{CD^2}{BC^2} + \frac{CD^2}{BA^2} - \frac{BD^2}{BA^2} = \frac{CD^2}{CB^2} - \frac{BC^2}{BA^2} \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp mp(ABCD)$, $SA = a$. Tính các số đo nhị diện có cạnh là cạnh của hình chóp đã cho, mặt là mặt của hình chóp đó.

Giải (h.3.115)

+ Dễ thấy số đo nhị diện cạnh SA và hai mặt là (BSA), (DSA) bằng 90°. Số đo nhị diện cạnh AD, hai mặt là (SAD), $(ABCD)$ bằng 90°.

Số đo nhị diện cạnh AB, hai mặt là (SAB), $(ABCD)$ bằng 90°.



Hình 3.115

+ Xét nhị diện

$$[A, SD, C], [A, SB, C].$$

Vì $CD \perp \text{mp}(SAD)$ nên $\text{mp}(SCD) \perp \text{mp}(SAD)$.

Vậy số đo nhị diện đó bằng 90°.

Tương tự ta cũng có số đo nhị diện $[A, SB, C]$ bằng 90°.

+ Xét các nhị diện $[S, CD, (ABCD)]$ và $[S, BC, (ABCD)]$:

Vì $CD \perp \text{mp}(SAD)$ nên $\widehat{SDA}$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, (ABCD)]$, mặt khác $SA = AD = a$ nên $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Tương tự ta cũng có số đo nhị diện $[S, BC, (ABCD)]$ bằng 45°.

+ Xét nhị diện $[B, SC, D]$:

Kẻ $OC_1 \perp SC$ (C_1 thuộc SC), do $BD \perp SC$ nên $SC \perp \text{mp}(BC_1D)$ suy ra $\widehat{BC_1D}$ là góc phẳng nhị diện $[B, SC, D]$.

Ta có $\dfrac{OC_1}{OC} = \sin\widehat{C_1CO} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác $OC = OD$ nên $\dfrac{OC_1}{OD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

Xét tam giác vuông OC_1D ta có $\dfrac{OC_1}{OD} = \cot\widehat{OC_1D}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{OC_1D} = 60^\circ$.

Tương tự như vậy ta có $\widehat{BC_1O} = 60^\circ$. Vậy số đo nhị diện $[B, SC, D]$ bằng 120°.

Nhận xét. Từ cách xét nhị diện $[B, SC, D]$ ta thấy khi $SA \neq a$ thì có thể kết luận số đo nhị diện $[B, SC, D] > 90^\circ$.

Thật vậy, ta có $OC_1 < OC = OD$, từ đó $\widehat{OC_1D} > 45^o$.

Tương tự cũng có $\widehat{BC_1O} > 45^o$, tức là $[B, SC, D] > 90^\circ$.

Như vậy có kết luận chung sau đây:

Với hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mp($ABCD$) thì trong tám nhị diện có cạnh là cạnh hình chóp, có mặt là mặt hình chóp thì có năm nhị diện vuông, hai nhị diện nhọn, một nhị diện tù.

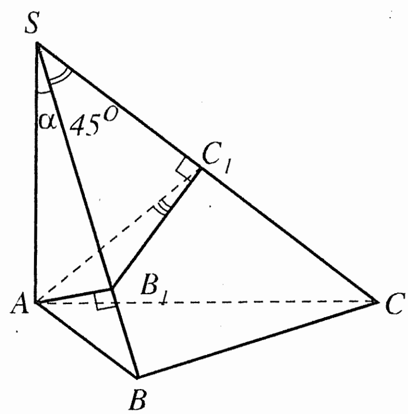
Ví dụ 5. Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mp(ABC), nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông. Cho biết

$$SB = a\sqrt{2}\,,\ \widehat{BSC} = 45^o\,,\ \widehat{ASB} = \alpha\ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

1) Chứng minh rằng $BC \perp SB$;

2) Xác định α để góc phẳng nhị diện cạnh SC bằng 60°.

Giải (h.3.116)



Hình 3.116

1) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Do nhị diện cạnh SB vuông nên

$$(SAB) \perp (SBC).$$

Mặt khác BC là giao tuyến của (SBC) và (ABC). Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$ tức là $BC \perp SB$.

2) Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC.

Dễ thấy $SC \perp \text{mp}(AB_1C_1)$ và $AB_1 \perp (SBC)$, từ đó $\widehat{AC_1B_1}$ là góc phẳng nhị diện cạnh SC. Đặt $\widehat{AC_1B_1} = \varphi$.

Xét tam giác AB_1C_1 vuông tại B_1 ta có $\tan\varphi = \dfrac{AB_1}{B_1C_1}$.

Mặt khác $AB_1 = SB_1 \tan\alpha$, $B_1C_1 = SB_1 \sin 45^o = \dfrac{SB_1}{\sqrt{2}}$.

Từ đó $\tan\varphi = \dfrac{SB_1 \tan\alpha}{SB_1}\sqrt{2} = \sqrt{2}\tan\alpha$.

Vì $\varphi = 60^o$ nên $\sqrt{3} = \sqrt{2}\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy nếu góc α được cho bởi $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ thì số đo nhị diện cạnh SC bằng 60^o.

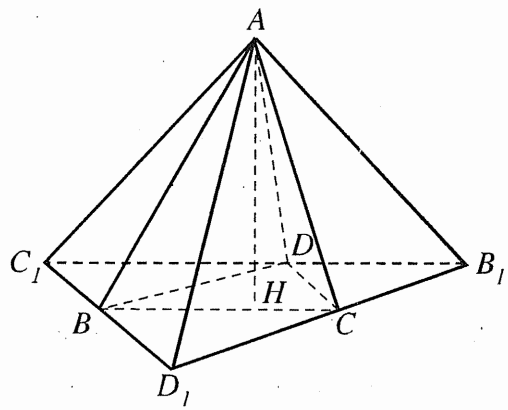
Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ (tứ diện như thế gọi là tứ diện gần đều). Chứng minh rằng

$$\cos AB + \cos BC + \cos CA + \cos DA + \cos DB + \cos DC = 2$$

(ở đó kí hiệu $\cos AB$ là côsin của số đo nhị diện cạnh AB của tứ diện đã cho).

Giải (h.3.117). Kẻ qua B, C, D các đường thẳng lần lượt song song với các đường thẳng CD, BD, BC, chúng cắt nhau tại B_1, C_1, D_1. Khi đó do tứ diện $ABCD$ là gần đều nên tứ diện $AB_1C_1D_1$ có ba cạnh AB_1, AC_1, AD_1 đôi một vuông góc, từ đó tam giác $B_1C_1D_1$ có ba góc nhọn.

Gọi H là hình chiếu của A trên mp$(B_1C_1D_1)$ thì H nằm trong tam giác $B_1C_1D_1$.



Hình 3.117

Có thể xảy ra các trường hợp H nằm trong tam giác BCD hoặc thuộc một cạnh của tam giác đó hay H nằm ngoài tam giác BCD.

Nếu H nằm trong tam giác BCD, áp dụng công thức $S' = S\cos\varphi$ trong phép chiếu vuông góc ta có:

$S_{HBC} = S_{ABC}\cos BC$ (1)

$S_{HCD} = S_{ACD}\cos CD$ (2)

$S_{HDB} = S_{ABD}\cos BD$. (3)

Mặt khác dễ thấy bốn mặt của $ABCD$ có diện tích bằng nhau, kí hiệu là S, từ đó $S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDB} = S(\cos BC + \cos CD + \cos DB)$ hay

$$S = S(\cos BC + \cos CD + \cos DB) \Rightarrow \cos BC + \cos CD + \cos DB = 1.$$

Nếu H nằm ngoài tam giác BCD, chẳng hạn thuộc tam giác B_1CD thì tương tự như trên ta cũng có

$$S_{HBC} = S_{ABC}\cos BC,\ S_{HDB} = S_{ABD}\cos BD,\ S_{HCD} = -S_{ACD}\cos CD$$

từ đó $S_{HBC} + S_{HDB} - S_{HCD} = S_{ABC}\cos BC + S_{ABD}\cos BD + S_{ACD}\cos CD$ hay

$$\cos BC + \cos CD + \cos DB = 1.$$

Khi H thuộc cạnh CD thì đẳng thức trên vẫn đúng. Vậy ta luôn có

$$\cos BC + \cos CD + \cos DB = 1 \quad (4)$$

Tương tự như trên ta có

$$\cos AB + \cos AD + \cos BD = 1 \quad (5)$$

$$\cos AD + \cos AC + \cos CD = 1 \quad (6)$$

$$\cos AC + \cos AB + \cos BC = 1 \quad (7)$$

Từ đẳng thức (4), (5), (6), (7) ta có

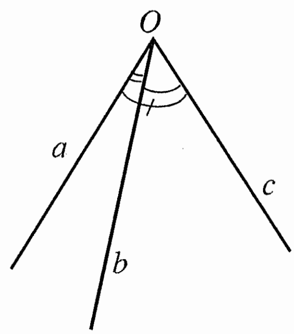
$$\cos AB + \cos BC + \cos CA + \cos DA + \cos DB + \cos DC = 2.$$

b) *Góc đa diện*

- ***Tam diện***

ĐỊNH NGHĨA.

1) Hình hợp bởi ba tia Oa, Ob, Oc không đồng phẳng được gọi là *tam diện* (còn gọi là góc tam diện).
2) O gọi là *đỉnh* của tam diện.
3) Các tia Oa, Ob, Oc gọi là *cạnh* của tam diện.
4) Các miền góc aOb, bOc, cOa được gọi là các *mặt* của tam diện. Số đo của các góc aOb, bOc, cOa được gọi là *các góc phẳng ở đỉnh* của tam diện.



Hình 3.118

Kí hiệu tam diện như trên là $Oabc$ (h.3.118).

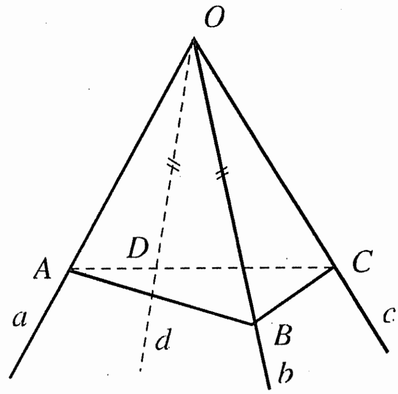
Tính chất của tam diện

Trong một tam diện:

1) Mỗi góc phẳng ở đỉnh nhỏ hơn tổng hai góc phẳng còn lại.

2) Tổng ba góc phẳng ở đỉnh nhỏ hơn 360°.

Chứng minh



Hình 3.119

1) Giả sử với tam diện $Oabc$, góc $\widehat{aOc}$ lớn nhất. Khi đó ta có

$$\widehat{aOb} < \widehat{bOc} + \widehat{cOa},\ \widehat{bOc} < \widehat{aOb} + \widehat{cOa}.$$

Vậy chỉ còn phải chứng minh

$$\widehat{aOc} < \widehat{bOc} + \widehat{aOb}.$$

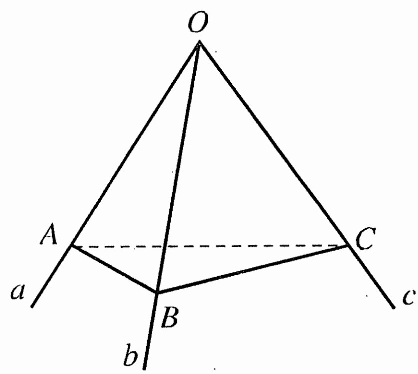
Vì $\widehat{aOc} > \widehat{bOc}$ nên trong góc $\widehat{aOc}$ có tia Od sao cho $\widehat{bOc} = \widehat{cOd}$ (h.3.119).

Trên các tia Ob, Od lấy hai điểm B và D sao cho $OB = OD$ và xét một mặt phẳng qua BD và cắt hai cạnh Oa, Oc lần lượt tại A và C. Khi ấy ta có tam giác BOC bằng tam giác DOC (c.g.c) nên $BC = DC$.

Mặt khác trong tam giác ABC ta có $AC < AB + BC$ hay $AD + DC < AB + BC$, từ đó $AD < AB$.

Xét các tam giác AOD và AOB có các cạnh OA chung, $OD = OB$ và $AD < AB$ từ đó $\widehat{AOD} < \widehat{AOB}$, tức là $\widehat{aOd} < \widehat{aOb}$.

Như vậy $\widehat{aOc} = \widehat{aOd} + \widehat{dOc} < \widehat{aOb} + \widehat{bOc}$, đó là điều phải chứng minh.



Hình 3.120

2) Lấy các điểm A, B, C lần lượt trên ba cạnh Oa, Ob, Oc của tam diện $Oabc$.

Khi ấy ta có các tam diện đỉnh A: $AOBC$, tam diện đỉnh B: $BOCA$, tam diện đỉnh C: $COAB$ (h.3.120).

Áp dụng kết quả phần 1) vào các góc tam diện đó, ta có:

$\widehat{BAC} < \widehat{OAB} + \widehat{OAC}$ (1)

$\widehat{CBA} < \widehat{OBC} + \widehat{OBA}$ (2)

$\widehat{ACB} < \widehat{OCA} + \widehat{OCB}$. (3)

Cộng các vế của (1), (2), (3) ta có

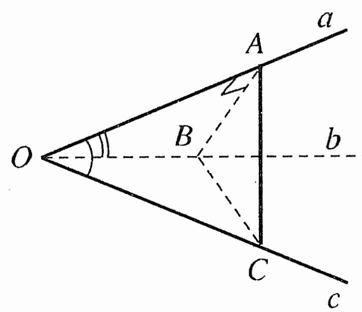
$180^o < \left(\widehat{OAB} + \widehat{OBA}\right) + \left(\widehat{OAC} + \widehat{OCA}\right) + \left(\widehat{OBC} + \widehat{OCB}\right)$ hay

$$180^o < 180^o - \widehat{aOb} + 180^o - \widehat{cOa} + 180^o - \widehat{bOc},$$

từ đó $\widehat{aOb} + \widehat{bOc} + \widehat{cOa} < 360^o$, đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 1. Cho tam diện $Oabc$ có $\widehat{aOb} = 45^o$, $\widehat{aOc} = 60^o$. Tính giá trị của góc phẳng thứ ba $\widehat{bOc}$, biết rằng nhị diện đối diện với mặt đó là nhị diện vuông (tức là nhị diện cạnh Oa vuông).

Giải (h.3.121). Lấy điểm A tuỳ ý trên cạnh Oa của nhị diện $[c, Oa, b]$. Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với Oa, nó cắt mp(bOc) theo giao tuyến BC, cắt mp(aOb) theo giao tuyến AB, cắt mp(aOc) theo giao tuyến AC. Khi ấy $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện cạnh Oa, theo giả thiết ta có $\widehat{BAC} = 90^o$.



Hình 3.121

Đặt $OA = a$ thì $AB = OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông AOC ta có $AC = OA\tan 60^o = a\sqrt{3}$, $OC = 2OA = 2a$.

Từ tam giác vuông ABC ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ hay $BC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$.

Xét tam giác BOC ta có

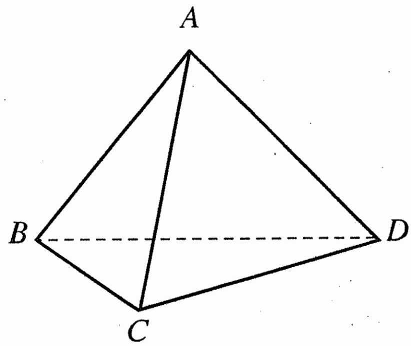
$$\cos\widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2OB.OC} = \frac{2a^2 + 4a^2 - 4a^2}{2.a\sqrt{2}.2a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy góc phẳng phải tìm được xác định bởi $\cos\widehat{BOC} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu tứ diện $ABCD$ là trực tâm thì góc tam diện tại mỗi đỉnh có tính chất ba góc phẳng tại đỉnh hoặc cùng nhọn, hoặc cùng vuông, hoặc cùng tù. Từ đó suy ra tứ diện đó có ít nhất một mặt có cả ba góc cùng nhọn.

Giải (h.3.122). Vì $ABCD$ là tứ diện trực tâm nên

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$



Hình 3.122

Xét tam diện đỉnh A của tứ diện $ABCD$:

Nếu $\widehat{BAC} < 90^o$ thì $\widehat{CAD}$, $\widehat{DAB} < 90^o$.

Thật vậy, nếu $\widehat{BAC} < 90^o$, tức là

$$BC^2 < AB^2 + AC^2.$$

Mặt khác từ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ suy ra $BC^2 = AB^2 + CD^2 - AD^2$.

Từ đó ta có $AB^2 + CD^2 - AD^2 < AB^2 + AC^2$ hay $CD^2 < AC^2 + AD^2$.

Bất đẳng thức này khẳng định $\widehat{CAD} < 90^o$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{DAB} < 90^o$.

Nếu $\widehat{BAC} = 90^o$ tức là $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Lí luận tương tự như trên ta cũng có $\widehat{CAD}$ và $\widehat{DAB}$ cùng bằng 90^o.

Nếu $\widehat{BAC} > 90^o$ tức là $BC^2 > AB^2 + AC^2$ và cũng chứng minh như trên ta có $\widehat{CAD}$ và $\widehat{DAB}$ cùng tù.

Vậy tam diện đỉnh A của tứ diện có tính chất đã nêu.

Đối với tam diện đỉnh B hoặc C hay D cũng được trình bày như trên.

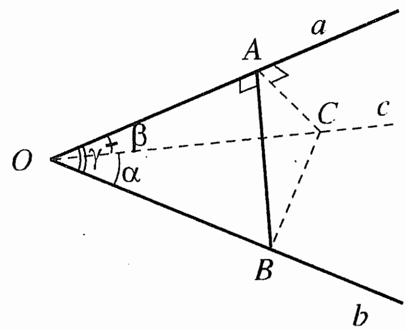
Vì tổng góc trong của tam giác bằng 180^o nên không thể có hai tam diện tại hai đỉnh có tính chất các góc phẳng tại đó cùng vuông hay cùng tù hay nói khác đi chỉ có nhiều nhất một tam diện mà các góc phẳng tại đó cùng vuông hoặc cùng tù, từ đó suy ra có ít nhất một mặt của tứ diện đó mà cả ba góc đều nhọn.

Ví dụ 3. Cho tam diện $Oabc$ và góc phẳng ở đỉnh α, β, γ (chẳng hạn $\widehat{bOc} = \alpha$, $\widehat{cOa} = \beta$, $\widehat{aOb} = \gamma$). Các góc phẳng nhị diện đối diện tương ứng là A, B, C. Chứng minh rằng

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$
$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos B$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$$

(các công thức trên giống như công thức định lí côsin trong tam giác ABC, ví dụ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$).

Giải (h.3.123). Ta chứng minh công thức thứ nhất trong ba công thức trên khi $\beta \neq 90^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$ (h.3.123a).



Hình 3.123a

Trên cạnh Oa lấy điểm A sao cho $OA = 1$. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với Oa, mp(P) cắt Ob, Oc lần lượt tại B, C. Khi đó $\widehat{BAC}$ chính là góc phẳng nhị diện cạnh Oa (nhị diện đối diện với mặt bOc). Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{A}$. Ta có:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB.OC\cos\alpha$,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A$.

Nhưng $OB = \dfrac{OA}{\cos\gamma} = \dfrac{1}{\cos\gamma}$, $OC = \dfrac{1}{\cos\beta}$, $AB = OA\tan\gamma = \tan\gamma$, $AC = \tan\beta$

Từ các hệ thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{\cos^2\gamma} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha$$
$$= \tan^2\gamma + \tan^2\beta - 2\tan\beta\tan\gamma\cos A$$

Từ đó suy ra $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$

Khi $\beta = 90^\circ$ (h.3.123b) cũng làm tương tự như trên với chú ý là

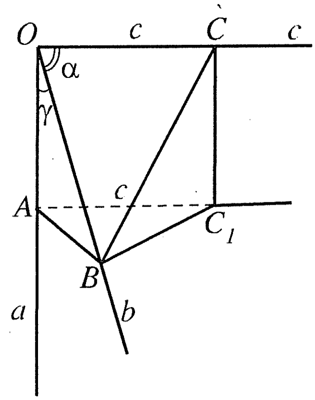
$$(P) \equiv \text{mp}(BAC_1) \text{ mà } AC_1 \parallel OC.$$

Đặt $OC = c$ thì $\cos\alpha = \dfrac{\cos\gamma}{2m} + \sin\gamma\cos A$.

Nếu coi $m \to \infty$ thì công thức này được coi là công thức $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ ứng với $\beta = 90^{\circ}$.

Tương tự khi $\gamma = 90^{\circ}$ ta cũng có điều cần chứng minh.

Các công thức còn lại được chứng minh tương tự.



Hình 3.123b

Chú ý.

1) Từ công thức $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ ta suy ra

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Công thức này cho ta tính được một số đo nhị diện của tam diện khi biết các góc phẳng tại đỉnh của tam diện đó.

2) Các công thức trong (1) gọi là định lí côsin thứ nhất trong tam diện.

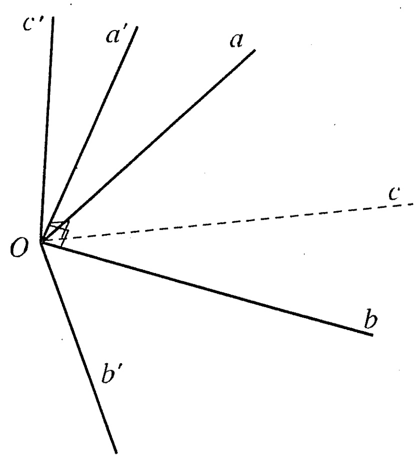
3) Vấn đề đặt ra là với tam diện cho trước, nếu biết các số đo nhị diện của tam diện thì có thể tính được các góc phẳng tại đỉnh của tam diện không?

Để giải quyết vấn đề này chúng ta cùng đưa vào khái niệm tam diện bù.

Cho tam diện $Oabc$. Qua đỉnh O kẻ các tia Oa', Ob', Oc' lần lượt vuông góc với các mặt bOc, cOa, aOb và hai tia Oa, Oa' nằm về cùng một phía đối với mặt bOc; hai tia Ob, Ob' nằm về cùng một phía đối với mặt cOa; hai tia Oc, Oc' nằm về cùng một phía đối với mặt aOb.

Tam diện $Oa'b'c'$ gọi là tam diện bù của tam diện $Oabc$ (h.3.124).

Chú ý rằng nếu tam diện $Oa'b'c'$ là tam diện bù của tam diện $Oabc$ thì $Oabc$ cũng là tam diện bù của tam diện $Oa'b'c'$.



Hình 3.124

Nếu đặt $\widehat{b'Oc'} = \alpha'$, $\widehat{c'Oa'} = \beta'$, $\widehat{a'Ob'} = \gamma'$ thì

$A + \alpha' = B + \beta' = C + \gamma' = A' + \alpha = B' + \beta = C' + \gamma = \pi$, ở đó A', B', C' thứ tự là nhị diện đối diện với mặt $b'Oc'$, $c'Oa'$, $a'Ob'$ trong tam diện bù $Oa'b'c'$.

Sử dụng công thức $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$ cho tam diện bù $Oa'b'c'$ ta có

$$\cos A' = \frac{\cos\alpha' - \cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'}.$$

Vì $A' + \alpha = \pi$, $B + \beta' = \pi$, $C + \gamma' = \pi$ nên ta có $\cos\alpha = \dfrac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C}$.

Tương tự như trên ta có

$$\cos\beta = \frac{\cos B + \cos C\cos A}{\sin C\sin A}, \ \cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A\sin B}$$

Các công thức này khẳng định khi biết các số đo nhị diện của tam diện $Oabc$ ta tính được các góc phẳng của tam diện đó.

Từ các công thức trên ta có:

$$\begin{aligned}
&\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\alpha \\
&\cos B = -\cos C\cos A + \sin C\sin A\cos\beta \\
&\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos\gamma.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Các công thức nêu trong (2) gọi là định lí côsin thứ hai trong tam diện.

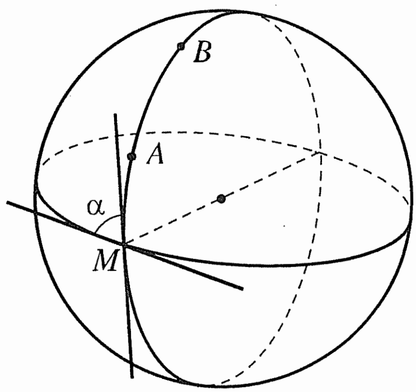
Định lí côsin thứ hai gọi là định lí đối ngẫu của định lí côsin thứ nhất trong tam diện.

Các công thức (1), (2) xác định mối quan hệ giữa mặt và nhị diện của một tam diện. Người ta gọi đó là các công thức cơ bản của hình học các tam diện.

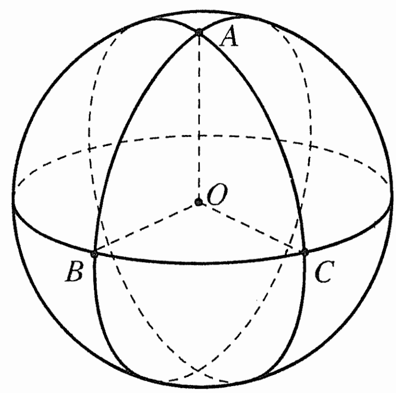
Người ta còn nêu được mối quan hệ giữa các cạnh và góc của một tam giác vẽ trên một mặt cầu (gọi tắt là tam giác cầu) tương tự như các công thức nêu trên. Cụ thể là:

Cho trước hai điểm trên A, B không đối xứng với nhau qua tâm một mặt cầu đã cho. Có duy nhất một đường tròn lớn của mặt cầu đi qua hai điểm A, B. Vì thế trên một mặt cầu mọi đường tròn lớn có vai trò tương tự như một đường thẳng trên mặt phẳng.

Với hai đường tròn lớn cắt nhau ở một điểm M ta hiểu góc giữa hai đường tròn lớn đó là góc α giữa hai tiếp tuyến lần lượt của hai đường tròn đó tại điểm M, góc đó cũng là góc giữa hai mặt phẳng chứa hai đường tròn lớn đó (h.3.125).



Hình 3.125



Hình 3.126

Xét ba điểm A, B, C thuộc một mặt cầu trong đó không có hai điểm nào đối xứng nhau qua tâm mặt cầu và chúng không cùng nằm trên một đường tròn lớn của mặt cầu, qua mỗi cặp điểm trong ba điểm đó có một đường tròn lớn. Hình tạo bởi ba cung của ba đường tròn lớn đó gọi là tam giác cầu. Với ba điểm A, B, C như trên ta có tam giác cầu ABC. Chú ý rằng qua hai điểm A, B có hai cung tròn của đường tròn lớn, ta chỉ giới hạn xét cung nhỏ (h.3.126).

Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cung BC, CA, AB, R là bán kính mặt cầu và

$$\widehat{BOC} = \alpha,\ \widehat{COA} = \beta,\ \widehat{AOB} = \gamma.$$

Khi đó $\alpha = \dfrac{a}{R}$, $\beta = \dfrac{b}{R}$, $\gamma = \dfrac{c}{R}$ (α, β, γ được tính bằng rađian).

Kí hiệu các góc A, B, C của tam giác cầu ABC là góc tạo bởi các cung nêu trên thì các góc này chính là các số đo các nhị diện của tam diện $OABC$. Áp dụng định lí côsin thứ nhất đối với tam diện $OABC$ ta có

$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$ hay

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A. \qquad (3)$$

Đó là công thức côsin thứ nhất của tam giác cầu.

Lẽ tất nhiên ta cũng có hai công thức tương tự như (3)

$$\cos\frac{b}{R} = \cos\frac{c}{R}\cos\frac{a}{R} + \sin\frac{c}{R}\sin\frac{a}{R}\cos B,$$

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos C.$$

Nếu áp dụng công thức $\cos\alpha = \dfrac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C}$ cho tam diện $OABC$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\cos\frac{a}{R} &= \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C} \\
\cos\frac{b}{R} &= \frac{\cos B + \cos C\cos A}{\sin C\sin A} \\
\cos\frac{c}{R} &= \frac{\cos C + \cos A\cos B}{\sin A\sin B}.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Các công thức (3) và (4) cũng gọi là các công thức cơ bản của lượng giác cầu. Chúng xác định mối quan hệ giữa các cạnh, các góc của một tam giác cầu trên một mặt cầu cho trước.

Từ cách trình bày như trên ta đã thấy các công thức của định lí côsin cho tam giác phẳng, cho các tam diện và cho các tam giác cầu. Các công thức đó có mối quan hệ, điều đó được thể hiện qua cách xây dựng các công thức nêu trên.

Nếu bán kính mặt cầu lớn vô cùng thì công thức côsin của định lí côsin trong tam giác phẳng có thể coi là trường hợp giới hạn của công thức côsin trên mặt cầu.

Thật vậy, khi $R \to \infty$ thì $\sin\frac{a}{R} \to \frac{a}{R}$, do đó

$$\cos\frac{a}{R} \to \sqrt{1-\left(\frac{a}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{a^2}{2R^2},$$

tức là $\cos\frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{\varepsilon}{R^2}$ (với ε là đại lượng dần đến 0 khi $R \to +\infty$).

Các kết quả tương tự cũng xảy ra đối với $\sin\frac{b}{R}$, $\sin\frac{c}{R}$, $\cos\frac{b}{R}$, $\cos\frac{c}{R}$.

Khi đó công thức (3) trở thành

$$1-\frac{a^2}{2R^2}=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)+\frac{bc}{R^2}\cos A+\frac{\varepsilon'}{R^2}\quad (\varepsilon' \to 0 \text{ khi } R \to +\infty) \qquad (3')$$

Chú ý rằng $\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)=1-\frac{b^2}{2R^2}-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{\varepsilon''}{R^2}$ $(\varepsilon'' \to 0$ khi $R \to +\infty)$.

Vậy khi $R \to +\infty$ công thức (3′) trở thành $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, đó là công thức côsin của định lí côsin đối với tam giác phẳng.

Ta xét trường hợp riêng của tam giác cầu có một góc vuông, chẳng hạn góc A, lúc đó $\cos A=\cos\frac{\pi}{2}=0$ và khi đó công thức (3) trở thành

$$\cos\frac{a}{R}=\cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}. \qquad (3'')$$

Khi cho $R \to \infty$ thì (3″) trở thành

$$1-\frac{a^2}{2R^2}=\left(1-\frac{b^2}{2R^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2R^2}\right)=1-\frac{b^2}{2R^2}-\frac{c^2}{2R^2}+\frac{\varepsilon'''}{R^2}\quad (\varepsilon''' \to 0 \text{ khi } R \to +\infty).$$

Từ đó dẫn đến $a^2 = b^2 + c^2$ nghĩa là (3″) trở thành công thức Pythagoras trong mặt phẳng. Vì vậy (3″) còn được gọi là công thức Pythagoras cho tam giác cầu.

Ví dụ 4. Cho tam diện $Oabc$ sao cho $\widehat{aOb}=60^\circ$, $\widehat{bOc}=90^\circ$, $\widehat{cOa}=120^\circ$. Lấy các điểm A, B, C lần lượt thuộc Oa, Ob, Oc sao cho $OA = OB = OC = a$.

1) Tìm điểm cách đều các đỉnh O, A, B, C và tính khoảng cách từ điểm đó đến các đỉnh.

2) Tính các số đo nhị diện có cạnh là cạnh của tứ diện $OABC$.

Giải (h.3.127)

1) Ta có $AB = a$, $BC=a\sqrt{2}$, $AC=a\sqrt{3}$. Từ đó có tam giác ABC vuông ở B.

Vì $OA = OB = OC$ nên điểm cách đều các điểm O, A, B, C phải thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mặt khác tam giác ABC vuông tại B nên trục đó chính là đường thẳng OH, H là trung điểm của AC.

Vậy điểm phải tìm chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAC.

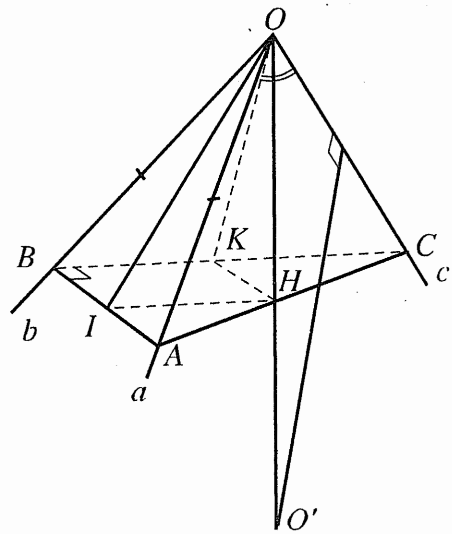
Ta lại có $\widehat{AOH} = 60^o$ nên $\widehat{OAH} = 30^o$. Từ đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAC là điểm O' mà $OO' = 2OH$ sao cho H là trung điểm của OO'.

Từ đó khoảng cách từ điểm O' đến các đỉnh của tứ diện $OABC$ bằng a.

2) Nhị diện cạnh OA của tứ diện $OABC$ chính là nhị diện cạnh Oa của tam diện $Oabc$. Vậy

$$\cos A = \frac{\cos\widehat{bOc} - \cos\widehat{cOa}.\cos\widehat{aOb}}{\sin\widehat{cOa}.\sin\widehat{aOb}}$$

$$= \frac{0 - \cos 120^o.\cos 60^o}{\sin 120^o.\sin 60^o} = \frac{\cos^2 60^o}{\sin^2 60^o} = \frac{1}{3}.$$



Hình 3.127

Tương tự ta có

$$\cos B = \frac{\cos\widehat{cOa} - \cos\widehat{aOb}.\cos\widehat{bOc}}{\sin\widehat{aOb}.\sin\widehat{bOc}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos C = \frac{\cos\widehat{aOb} - \cos\widehat{bOc}.\cos\widehat{cOa}}{\sin\widehat{bOc}.\sin\widehat{cOa}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nhị diện cạnh AC của tứ diện $OABC$ là vuông.

Nhị diện cạnh AB của tứ diện $OABC$: Dễ thấy góc phẳng đó là $\widehat{OIH}$, ở đó I là trung điểm của AB. Ta có $OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OH = \frac{a}{2}$, từ đó

$$\sin\widehat{OIH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nhị diện cạnh BC của tứ diện: góc phẳng là $\widehat{OKH}$, K là trung điểm của BC.

Ta có $OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OH = \dfrac{a}{2}$, từ đó $\sin\widehat{OKH} = \dfrac{OH}{OK} = \dfrac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay

$$\widehat{OKH} = 45^o.$$

Chú ý. Có thể tính hai số đo nhị diện cạnh AB, BC của tứ diện bằng cách xét tam diện nhận nhị diện AB là đối diện với mặt tương ứng, tương tự đối với nhị diện BC. Sau đó áp dụng định lí côsin thứ nhất trong góc tam diện.

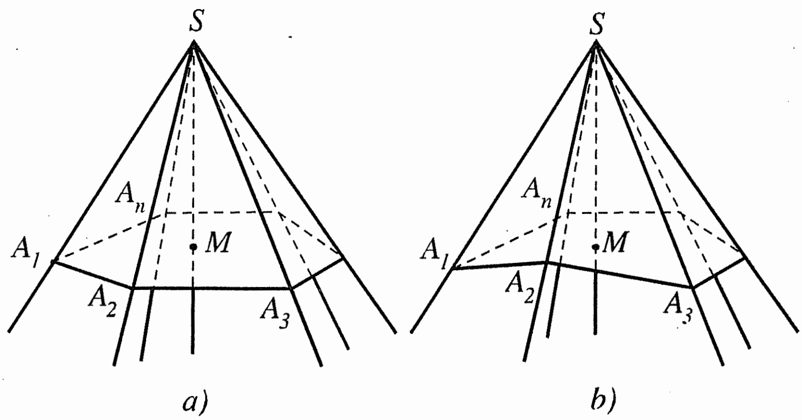
- ***Góc đa diện***

ĐỊNH NGHĨA.

Giả sử $A_1A_2...A_n$ là đa giác tuỳ ý thuộc mặt phẳng (α). S là điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác.

Tập hợp các điểm của các tia SM được tạo nên đối với mỗi điểm M thuộc đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là *góc đa diện*.

Điểm S gọi là *đỉnh* của góc đa diện, các tia SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các *cạnh* của góc đa diện; các góc $\widehat{A_1SA_2}$, $\widehat{A_2SA_3}$, ... gọi là các *mặt* (hoặc các góc phẳng của nó) của góc đa diện. Các mặt của góc đa diện tạo nên mặt (hoặc biên của nó). Các điểm thuộc nửa đường thẳng SM (không kể S) với M là điểm trong của đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là các ***điểm trong***. Tập các điểm trong gọi là *miền trong* của góc đa diện (h.3.128).



Hình 3.128

Nếu đa giác $A_1A_2...A_n$ là đa giác lồi thì góc đa diện được gọi là góc đa diện lồi (h.3.128a), trường hợp ngược lại ta có góc đa diện lõm (h.3.128b). Chúng ta chỉ xét góc đa diện lồi. Kí hiệu góc đa diện như trên là $SA_1A_2...A_n$.

Góc đa diện được phân loại theo số mặt của nó, từ đó có tên gọi góc tam diện, góc tứ diện, ...

ĐỊNH LÍ 1. *Mỗi góc phẳng của góc đa diện lồi bé hơn tổng các góc phẳng còn lại của nó.*

Chứng minh

+ Khi góc đa diện là tam diện thì kết quả của định lí đã được chứng minh trong phần góc tam diện.

+ Trường hợp tổng quát, ta chứng minh kết quả của định lí bằng phương pháp quy nạp toán học.

Giả sử $SA_1A_2...A_n$ là góc đa diện, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ là giá trị các góc phẳng của nó. Ta đã có định lí đúng trong trường hợp $n = 3$, giả sử định lí đúng trong trường hợp $n = k - 1$, nghĩa là ta có

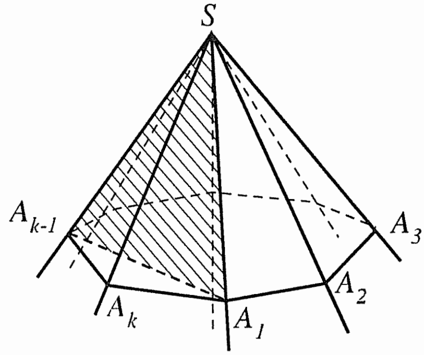
$$\varphi_i < \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} + ... + \varphi_{k-1}.$$

Chúng ta sẽ chứng minh định lí đúng cho trường hợp $n = k$, nghĩa là

$$\varphi_i < \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} + ... + \varphi_k.$$

Để đạt được điều đó qua cạnh $[SA_1)$ và $[SA_{k-1})$ vẽ một mặt phẳng, và như vậy có tam diện $SA_1A_kA_{k-1}$ (h.3.129). Đối với tam diện này thì

$$\widehat{A_{k-1}SA_k} < \varphi_{k-1} + \varphi_k. \qquad (1)$$



Hình 3.129

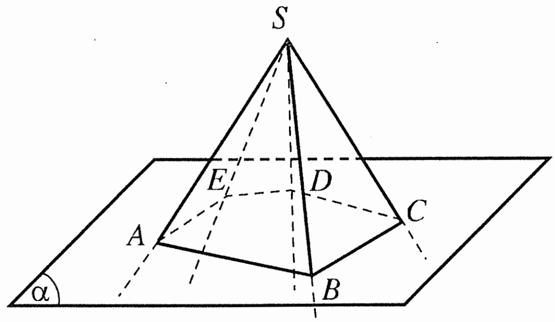
Theo giả thiết quy nạp đối với góc đa diện $SA_1A_2...A_{k-1}$. Vì số mặt của góc đa diện này bằng $k - 1$ nên ta có

$$\varphi_i < \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} + ... + \widehat{A_kSA_{k-1}}. \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có $\varphi_i < \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} + ... + \varphi_k$. Đó là điều phải chứng minh.

ĐỊNH LÍ 2. *Tổng các góc phẳng của góc đa diện lồi nhỏ hơn 360^o.*

Chứng minh. Ta xét góc đa diện lồi $SABCDE$ chẳng hạn. Vẽ mặt phẳng không đi qua đỉnh S và cắt tất cả các mặt của góc đa diện đó (h.3.130). Mỗi đỉnh của đa giác nhận được là đỉnh của tam diện. Áp dụng kết quả định lí 1 ta có



Hình 3.130

$\widehat{ABC} < \widehat{ABS} + \widehat{SBC}$,

$\widehat{BCD} < \widehat{BCS} + \widehat{SCD}$,

$\widehat{CDE} < \widehat{CDS} + \widehat{SDE}$,

$\widehat{DEA} < \widehat{DES} + \widehat{SEA}$, $\widehat{EAB} < \widehat{EAS} + \widehat{SAB}$.

Cộng các vế của các bất đẳng thức trên ta thấy giá trị vế trái thu được chính là tổng các góc trong của đa giác lồi $ABCDE$, giá trị đó chính là $180^o(n-2)$, trong đó n là số cạnh của đa giác, còn vế phải của bất đẳng thức nhận được là tổng các góc trong của tam giác trừ đi tổng các của các tam giác mà có đỉnh tại S của góc đa diện, nghĩa là bằng $180^o.n$ trừ đi $\sum$ (tổng các góc phẳng tại đỉnh S). Như vậy $180^o(n-2) < 180^o n - \sum$ hay $180^o n - 360^o < 180^o n - \sum$, từ đó $\sum < 360^o$ đó là điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

52. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đáy cùng bằng a, góc tạo bởi đường thẳng chứa cạnh bên và mặt đáy bằng α; hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của cạnh $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy;

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$;

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$.

53. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC' = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD');

b) Tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

54. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh cùng bằng a,

$$\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^o.$$

Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của hình hộp đó và khoảng cách giữa CC' và BD.

55. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K; tính khoảng cách đó theo a.

56. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^o$, $\widehat{BOC} = 90^o$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông và $OA \perp BC$;

b) Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC; tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy;

c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

57. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC, M là điểm bất kì thuộc cạnh SC. Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mp(KMN). Chứng tỏ rằng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

58. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD);

c) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và SC;

d) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với SC. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P). Tính diện tích thiết diện;

e) Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

59. a) Hai mặt ABC và ABD của hình tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

b) Bốn mặt của hình tứ diện $ABCD$ có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau, nghĩa là

$$BC = AD,\ AC = BD,\ AB = CD.$$

60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy $ABCD$ và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (A_1CD), trong đó A_1 là trung điểm của SA;

b) Tính khoảng cách giữa AC và SD.

61. Đáy hình chóp $A.BCD$ là tam giác đều BCD. Đường cao của hình chóp kẻ từ đỉnh A đi qua trung điểm của cạnh CD. Cắt hình chóp đó bởi mặt phẳng song song với AB và CD và cách đỉnh B một khoảng d.

Tính diện tích thiết diện thu được biết cạnh của tam giác đều BCD bằng a và $AB = a\sqrt{2}$.

62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng chứa đáy, $AC = a$, $BC = b$, $SA = h$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và SB.

a) Tính độ dài MN;

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h để MN là đường vuông góc chung của AC và SB.

63. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{A} = 60^o$, góc giữa đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy hình hộp bằng 60^o.

a) Tính đường cao của hình hộp;

b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác cân tại S, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy hình chóp góc α.

a) Tính chiều cao của hình chóp $S.ABCD$;

b) Tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt phẳng (SCD);

c) Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng trung trực của BC.

65. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi các số đo nhị diện có cạnh là AB, AC, AD, CD, BD, BC của tứ diện đó lần lượt là α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6.

Chứng minh rằng

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_5 + \cos\alpha_6 \le 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

66. (*Bài toán con nhím*) Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i, $\vec{e_i}$ là véctơ đơn vị vuông góc với mặt đối diện đỉnh A_i và cùng chiều với véctơ pháp tuyến ngoài của mặt đó $\left(i=\overline{1,4}\right)$. Chứng minh rằng

$$S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} + S_4\overrightarrow{e_4} = \vec{0}.$$

67. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$; S_a, S_b, S_c, S_d lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện. Chứng minh rằng

$$S_a\overrightarrow{IA} + S_b\overrightarrow{IB} + S_c\overrightarrow{IC} + S_d\overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

68. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi các số đo nhị diện cạnh AB, AC, AD, CD, DB, BC lần lượt là α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6. Chứng minh rằng với các số x, y, z, t không đồng thời bằng không, ta có

$$zt\cos\alpha_1 + ty\cos\alpha_2 + yz\cos\alpha_3 + xy\cos\alpha_4 + yz\cos\alpha_5 + xt\cos\alpha_6 \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right).$$

69. Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ biết rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M bất kì nằm trong tứ diện đến các mặt của nó là không đổi.

70. Cho tứ diện $ABCD$ có $S_{BCD} = S$, diện tích ba mặt còn lại bằng nhau và bằng 1. Cho biết các số đo nhị diện cạnh AB, AC, AD của tứ diện lần lượt là α_1, α_2, α_3 mà $\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\alpha_1$.

Chứng minh rằng $2-\sqrt{3} < S^2 < 3$.

71. Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh DC, DA, AB, BC lần lượt cắt các cạnh AB, BC, DC, AD tại M, N, P, Q.

Chứng minh rằng $\dfrac{MA}{MB}+\dfrac{NB}{NC}+\dfrac{PC}{PD}+\dfrac{QD}{QA} \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi nào?

72. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ (có các mặt đều là hình thoi) cạnh bằng a, mỗi mặt có góc bằng 60°. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Tính diện tích các hình $BDD'B'$ và $ACC'A'$.

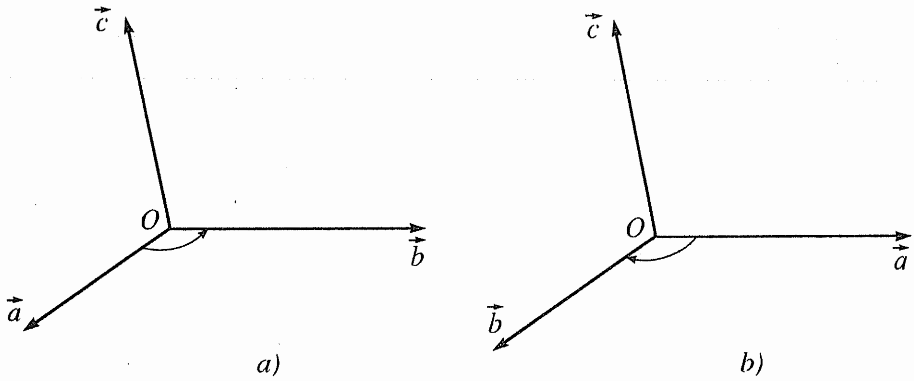
Bài đọc thêm

TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Không gian định hướng

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng và giả sử chúng có cùng điểm gốc là O. Khi ấy vectơ $\vec{c}$ phải nằm hoàn toàn về một phía của mặt phẳng (P) chứa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong mặt phẳng (P) ta quay vectơ $\vec{a}$ theo con đường ngắn nhất để nó đến cùng hướng với vectơ $\vec{b}$. Khi đó nếu nhìn từ điểm ngọn của vectơ $\vec{c}$ thấy chiều quay đó ngược với chiều quay kim đồng hồ thì bộ ba có thứ tự $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gọi là bộ ba có hướng thuận hay bộ ba thuận, còn nếu ta thấy chiều quay cùng với chiều quay kim đồng hồ thì bộ ba vectơ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ gọi là bộ ba nghịch.

Trên hình 3.131 a) ta có bộ ba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là bộ ba thuận, còn hình 3.131b) ta có bộ ba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là bộ ba nghịch.



Hình 3.131

Khi đã có quy ước như trên, không gian của ta trở nên không gian định hướng.

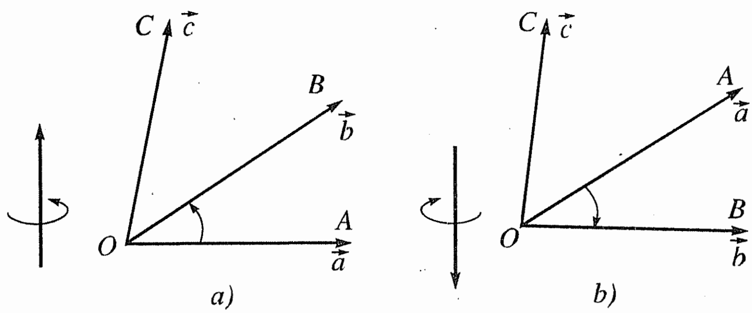
Chú ý

a) Vì trong không gian ba vectơ không đồng phẳng tạo thành cơ sở của không gian nên nếu bộ ba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là bộ ba thuận (nghịch) thì người ta cũng nói $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là một cơ sở định hướng thuận (nghịch) của không gian.

b) Người ta còn có thể định nghĩa bộ ba thuận hay nghịch nhờ quy tắc vặn nút chai hoặc quy tắc bàn tay phải hay trái. Cụ thể là:

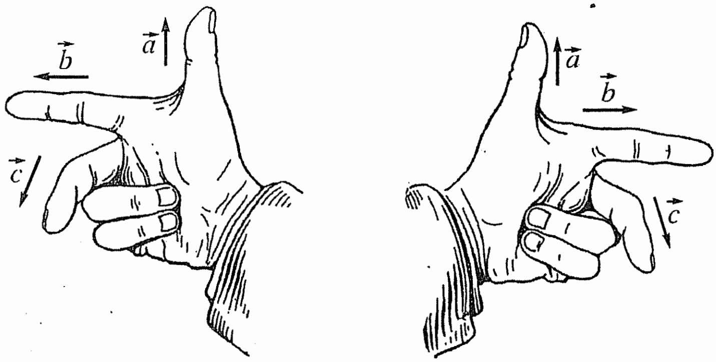
- Bộ ba vectơ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ được gọi là bộ ba thuận (cơ sở định hướng thuận) nếu khi quay cái vặn nút chai theo chiều quay ngắn nhất từ vectơ $\vec{a}$ đến vectơ $\vec{b}$ thì cái vặn nút chai tiến theo vectơ $\vec{c}$. Trong trường hợp ngược lại, bộ ba đó gọi là bộ ba nghịch.

Trên hình 3.132a) bộ ba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là bộ ba thuận, còn hình 3.132b) thì bộ ba $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ là bộ ba nghịch.



Hình 3.132

- Bộ ba ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) được gọi là bộ ba thuận nếu các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt hướng theo các ngón tay cái, ngón tay trỏ và ngón tay giữa của bàn tay phải (h.3.133a). Tương tự xác định được bộ ba nghịch theo bàn tay trái (h.3.133b).



a) b)

Hình 3.133

c) Quy tắc vặn nút chai hay quy tắc bàn tay phải, tay trái có ý nghĩa vật lí. Trong toán học người ta thường nói về sự định hướng như nhau (cùng hướng) hay sự định hướng khác nhau (ngược hướng) của hai bộ vectơ. Nhờ vậy mà tập hợp các bộ ba vectơ như thế được chia thành hai lớp: Hai bộ ba vectơ được gọi là thuộc vào cùng một lớp nếu chúng có định hướng như nhau; hai bộ ba vectơ thuộc vào hai lớp khác nhau nếu chúng có định hướng ngược nhau. Một trong các lớp của các bộ ba vectơ gọi là lớp dương, lớp còn lại là lớp âm.

Phần cuối của mục này có thể định nghĩa không gian định hướng tương tự như mặt phẳng định hướng.

2. Định nghĩa tích có hướng của hai vectơ

Trong không gian định hướng cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cộng tuyến là vectơ $\vec{c}$ thoả mãn các điều kiện sau:

a) $\vec{c}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$;

b) $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\varphi$, ở đó φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$;

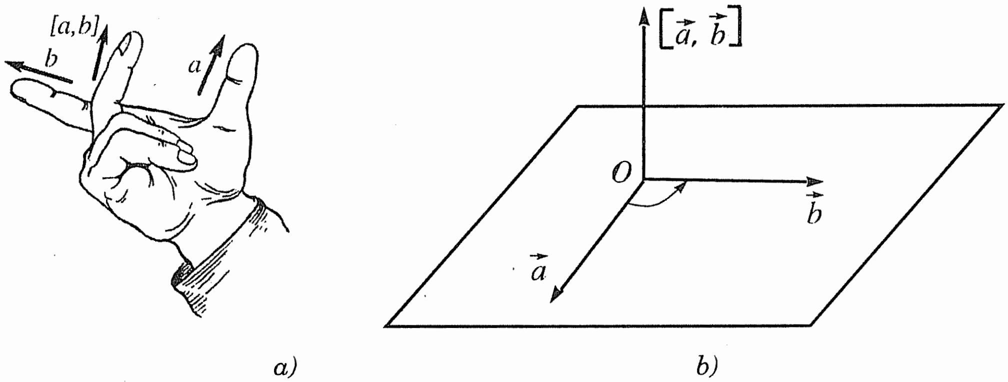
c) Bộ ba ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) là bộ ba thuận.

Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cộng tuyến thì tích có hướng của hai vectơ đó được định nghĩa là vectơ không.

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ hay $\vec{a}\wedge\vec{b}$.

Chú ý:

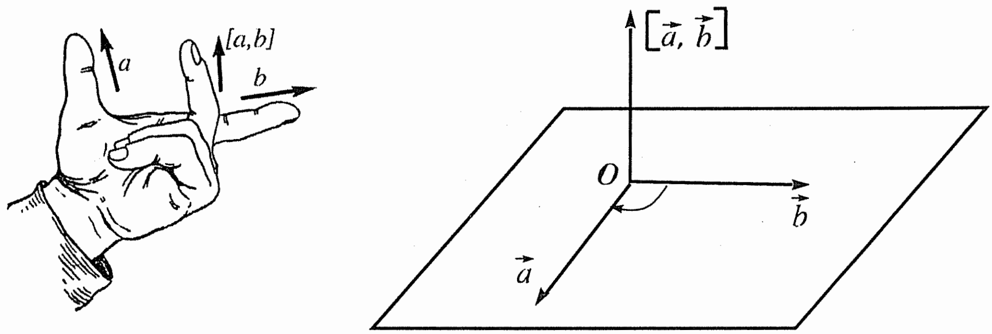
1) Nếu định hướng không gian bởi bộ ba thuận thì hướng của vectơ tích (khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cộng tuyến) được xác định theo quy tắc sau: (h.3.134 a, b)



Hình 3.134

Nếu ngón tay cái của bàn tay phải hướng theo vectơ $\vec{a}$, ngón tay trỏ hướng theo vectơ $\vec{b}$ còn theo phương vuông góc với bàn tay phải thì ngón giữa sẽ chỉ theo hướng của $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ (h.3.134a) hoặc nếu đứng dọc theo vectơ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, hướng của vectơ là hướng từ chân đến đầu thấy hướng quay của vectơ thứ nhất $\vec{a}$ đến vectơ thứ hai $\vec{b}$ theo góc nhỏ nhất là ngược hướng quay của kim đồng hồ (h.3.134b).

2) Nếu không gian được định hướng bởi bộ ba nghịch thì hướng của vectơ tích được xác định theo quy tắc ba ngón tay của bàn tay trái (h.3.135a) hoặc nếu đứng dọc theo vectơ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, hướng của vectơ là hướng từ chân đến đầu thấy hướng quay của vectơ thứ nhất $\vec{a}$ đến vectơ thứ hai $\vec{b}$ theo góc nhỏ nhất là cùng hướng quay của kim đồng hồ (h.3.135b).



a) b)

Hình 3.135

Một số tính chất của tích có hướng của hai vectơ

TÍNH CHẤT 1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ *khi và chỉ khi* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *là hai vectơ cộng tuyến.*

TÍNH CHẤT 2. *Nếu* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *không cộng tuyến thì độ dài của vectơ* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *bằng diện tích hình bình hành dựng trên hai cạnh OA và OB mà* $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

TÍNH CHẤT 3. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

TÍNH CHẤT 4.

a) $\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]=k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

b) $\left[\vec{a},\left(k\vec{b}\right)\right]=k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

TÍNH CHẤT 5.

a) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

b) $\left[\vec{c},\vec{a}+\vec{b}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]+\left[\vec{c},\vec{b}\right]$.

Chứng minh các tính chất trên.

Tính chất 1.

Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cộng tuyến thì theo định nghĩa ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

Giả sử $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ mà $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cộng tuyến thì $\vec{a}$, $\vec{b}$ đều khác vectơ không và góc φ giữa chúng khác 0 hay π, bởi vậy $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$ phải khác 0, tức là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\neq\vec{0}$, điều này dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết.

Tính chất 2, 3 suy trực tiếp từ định nghĩa tích có hướng.

Tính chất 4. Chỉ cần chứng minh tính chất 4a.

Nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}$, $\vec{b}$ cộng tuyến thì cả hai vế của tính chất 4a đều bằng 0, do đó tính chất 4a được chứng minh.

Nếu $k\neq 0$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cộng tuyến, khi đó

$$\left|k\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|k\right|\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|k\right|.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\varphi.$$

+) Xét $\left|\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]\right|$:

Nếu $k>0$ thì $\left|\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]\right|=\left|k\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=k\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$.

Nếu $k<0$ thì $\left|\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]\right|=\left|k\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\left(\pi-\varphi\right)=\left|k\right|.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$

tức là $\left|\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]\right|=\left|k\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

+) Hai vectơ $k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và $\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]$ cộng tuyến vì chúng cùng vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

+) Nếu $k>0$ thì $k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ cùng hướng với $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, còn $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]$ cùng hướng với $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Nếu $k<0$ thì cả hai vectơ $k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và $\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]$ đều ngược hướng với $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, từ đó $k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và $\left[\left(k\vec{a}\right),\vec{b}\right]$ cùng hướng.

Vậy tính chất 4a được chứng minh.

Tính chất 4b suy từ tính chất 3 và 4a. Cụ thể là $\left[\vec{a},k\vec{b}\right]=-\left[k\vec{b},\vec{a}\right]=k\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

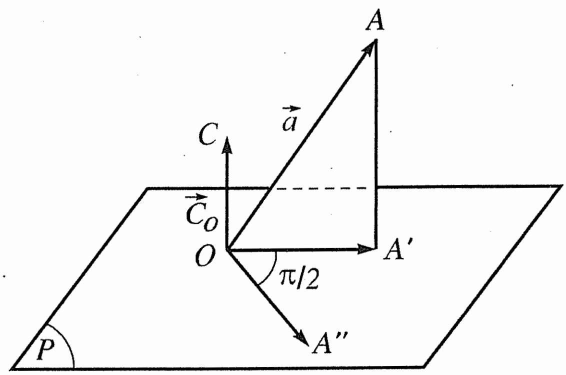
Tính chất 5. Ta chứng minh 5a.

Nếu một trong các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là vectơ không thì 5a hiển nhiên đúng.

Nếu cả ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ không thì gọi $\overrightarrow{c_0}=\dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$, nghĩa là $\overrightarrow{c_0}$ là vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{c}$ và ta chứng minh

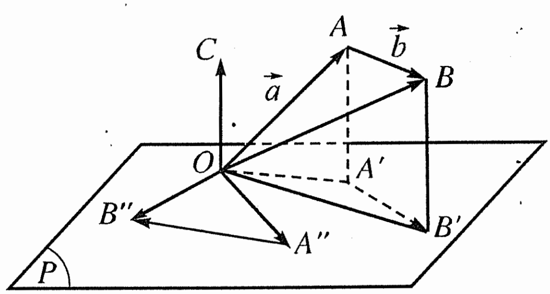
$$\left[\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{c_0}\right]=\left[\vec{a},\overrightarrow{c_0}\right]+\left[\vec{b},\overrightarrow{c_0}\right].$$

Thật vậy, từ điểm O ta đặt $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c_0}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm O và vuông góc với $\overrightarrow{OC}$, gọi $\overrightarrow{OA'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{OA}$ trên mặt phẳng (P). Quay vectơ $\overrightarrow{OA'}$ quanh điểm O một góc $\dfrac{\pi}{2}$ theo chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ điểm C ta được vectơ $\overrightarrow{OA''}$ (h.3.136). Theo định nghĩa thì $\overrightarrow{OA''}$ chính là vectơ tích của $\vec{a}$ và $\overrightarrow{c_0}$. Thật vậy, gọi φ là góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{c_0}$ thì $\left|\overrightarrow{OA''}\right|=\left|\overrightarrow{OA'}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\vec{a}\right|.\left|\overrightarrow{c_0}\right|\sin\varphi$, mặt khác $\overrightarrow{OA''}$ và $\left[\vec{a},\overrightarrow{c_0}\right]$ cùng hướng. Như vậy $\overrightarrow{OA''}=\left[\vec{a},\overrightarrow{c_0}\right]$.



Hình 3.136

Bây giờ từ điểm A đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ (h.3.137). Gọi $\overrightarrow{OB'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{OB}$ trên (P) và $\overrightarrow{OB''}$ là kết quả của việc quay $\overrightarrow{OB'}$ qua phép quay đã nói ở trên. Khi đó $\overrightarrow{OB''}=\left[\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{c_0}\right]$.



Hình 3.137

Vì $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AB}$ trên (P) và $\overrightarrow{A''B''}$ là ảnh của $\overrightarrow{A'B'}$ qua phép quay đang xét nên $\overrightarrow{A''B''} = \left[\vec{b}, \overrightarrow{c_0}\right]$.

Ta có $\overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{A''B''}$ nên $\left[\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{c_0}\right] = \left[\vec{a}, \overrightarrow{c_0}\right] + \left[\vec{b}, \overrightarrow{c_0}\right]$.

Bây giờ ta chứng minh tính chất 5a.

Vì $\overrightarrow{c_0} = \dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}$ nên từ $\left[\vec{a}+\vec{b}, \overrightarrow{c_0}\right] = \left[\vec{a}, \overrightarrow{c_0}\right] + \left[\vec{b}, \overrightarrow{c_0}\right]$ ta có

$\left[\vec{a}+\vec{b}, \dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right] = \left[\vec{a}, \dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right] + \left[\vec{b}, \dfrac{\vec{c}}{\left|\vec{c}\right|}\right]$ hay $\dfrac{1}{\left|\vec{c}\right|}\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\right] = \dfrac{1}{\left|\vec{c}\right|}\left(\left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$ tức là

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right].$$

Vậy tính chất 5a được chứng minh.

Đẳng thức của tính chất 5b được chứng minh như sau:

$$\left[\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}\right] = -\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\right] = -\left(\left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = -\left[\vec{a}, \vec{c}\right] - \left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right] + \left[\vec{c}, \vec{b}\right]$$

Chú ý. Từ định nghĩa và các tính chất của tích có hướng của hai vectơ ta có kết quả sau:

Trong không gian định hướng bởi bộ ba vectơ thuận $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ mà $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ ta có $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] = \vec{k}$, $\left[\vec{j}, \vec{k}\right] = \vec{i}$, $\left[\vec{k}, \vec{i}\right] = \vec{j}$.

Trong không gian định hướng bởi bộ ba nêu trên, cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó ta có $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$. Từ đó $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -a_2b_1\vec{k} + a_3b_1\vec{j} + a_1b_2\vec{k} - a_3b_2\vec{i} - a_1b_3\vec{j} + a_2b_3\vec{i}$

$$= \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

và $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$

$$= a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

3. Tích hỗn tạp

Từ phép toán tích có hướng của hai vectơ và phép toán tích vô hướng, chúng ta đưa ra phép toán tích hỗn tạp của ba vectơ như sau:

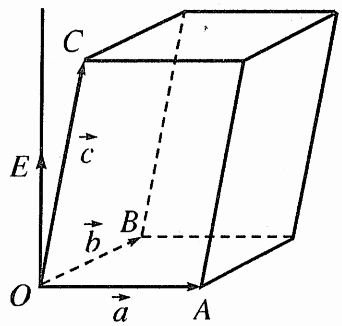
Trong không gian định hướng cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì.

Tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là một số kí hiệu là $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, được xác định như sau: $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}$. (0)

Với định nghĩa đó ta có kết quả sau:

ĐỊNH LÍ. *Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì $\left|D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$ bằng thể tích của hình hộp dựng trên ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ở đó $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.*

Chứng minh. Gọi $\overrightarrow{OE}$ là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sao cho ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$) là bộ ba thuận (h.3.138) khi đó $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{OE}$ và $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = S$ (diện tích hình bình hành dựng trên $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Như vậy $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = S$.



Hình 3.138

Xét hình hộp đỉnh O với ba cạnh là OA, OB, OC.

Ta có thể tích của khối hộp đó $V = S.h$, ở đó h là chiều cao của hình hộp, tức là bằng độ dài hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{OC}$ trên đường thẳng OE.

Từ đó

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c} = S.\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OC} = S.\text{ch}_{OE}\overrightarrow{OC} = \pm S.h = \pm V.$$

Dấu cộng khi bộ ba $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ là bộ ba thuận.

Dấu trừ khi bộ ba $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ là bộ ba nghịch.

Định lí được chứng minh.

Chú ý. Từ chứng minh trên có thể phát biểu thành kết quả sau:

Tích hỗn tạp của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng có giá trị tuyệt đối bằng thể tích của khối hộp dựng trên ba vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$.

Dấu của tích hỗn tạp là dương khi bộ ba $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ là thuận và âm khi bộ ba $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ là nghịch.

Một số tính chất của tích hỗn tạp

TÍNH CHẤT 1. $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ *khi và chỉ khi ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng.*

Chứng minh. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ hoặc bằng $\vec{0}$ hoặc vuông góc với $\vec{c}$ nên $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

Nếu $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$ mà $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng khi đó có hình hộp dựng như phần chứng minh ở trên và $\left|D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$ bằng thể tích hình hộp nên $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\neq 0$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

TÍNH CHẤT 2. $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-D\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-D\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=-D\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$ *(nghĩa là tích hỗn tạp đổi dấu nếu ta hoán vị hai trong ba vectơ đó).*

Chứng minh. Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng thì kết quả là hiển nhiên.

Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì khi ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) là bộ ba thuận và hoán vị hai trong ba vectơ đó ta được bộ ba nghịch, từ đó có đpcm.

Chú ý. Từ tính chất trên ta có $D\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=D\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)=D\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)$.

TÍNH CHẤT 3. *Nếu nhân một trong các vectơ của tích hỗn tạp với số k thì tích hỗn tạp được nhân với số đó.*

Chứng minh. $D\left(\left(k\vec{a}\right),\vec{b},\vec{c}\right)=\left[k\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=k\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=kD\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Tương tự ta có: $D\left(\vec{a},\left(k\vec{b}\right),\vec{c}\right)=kD\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ và $D\left(\vec{a},\vec{b},\left(k\vec{c}\right)\right)=kD\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

TÍNH CHẤT 4. *Tích hỗn tạp có tính phân phối đối với phép cộng, chẳng hạn* $D\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)=D\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}\right)+D\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Chứng minh. $D\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right)=\left[\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b}\right].\vec{c}=\left(\left[\overrightarrow{a_1},\vec{b}\right]+\left[\overrightarrow{a_2},\vec{b}\right]\right).\vec{c}$

$$=\left[\overrightarrow{a_1},\vec{b}\right].\vec{c}+\left[\overrightarrow{a_2},\vec{b}\right].\vec{c}=D\left(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c}\right)+D\left(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Tương tự ta có $D\left(\vec{a},\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2},\vec{c}\right)=D\left(\vec{a},\overrightarrow{b_1},\vec{c}\right)+D\left(\vec{a},\overrightarrow{b_2},\vec{c}\right)$

$$D\left(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_1}+\overrightarrow{c_2}\right)=D\left(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_1}\right)+D\left(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{c_2}\right).$$

4. Định thức của ma trận

Trong không gian định hướng bởi bộ ba thuận $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ mà $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$ và $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$. Xét ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó ta có

$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ và $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$.

Bảng 9 số được sắp như sau:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

được gọi là một ma trận cấp ba.

Mỗi số trong bảng được gọi là một phần tử của ma trận, mỗi phần tử nằm ở một dòng và một cột nhất định.

Ứng với mỗi ma trận ta xác định một số gọi là định thức của ma trận A, kí hiệu là det$A$ như sau:

$$\det A = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1\left(b_2c_3 - b_3c_2\right) - b_1\left(a_2c_3 - a_3c_2\right) + c_1\left(a_2b_3 - a_3b_2\right). \qquad (1)$$

Như vậy $\det A = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. (2)

Công thức (2) gọi là công thức khai triển của định thức theo dòng thứ nhất.

Kết hợp công thức (0) ở phần 3 và công thức (2) ở phần này ta suy ra trong không gian định hướng bởi bộ ba thuận $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ nêu trên thì

$$\det A = D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right). \qquad (*).$$

Từ các tính chất của tích hỗn tạp đã chứng minh ở trên và hệ thức (*), ta suy ra các tính chất sau của định thức:

1) Nếu một dòng nào đó của định thức gồm toàn số 0 thì định thức đó bằng 0 (bởi vì khi đó một trong ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bằng vectơ $\vec{0}$ nên tích hỗn tạp của chúng bằng 0).

2) Nếu hai dòng nào đó của định thức tỉ lệ với nhau thì định thức bằng 0 (vì khi đó hai vectơ tương ứng với hai dòng đó cộng tuyến nên $D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = 0$).

3) Nếu có một dòng là tổ hợp tuyến tính của hai dòng còn lại thì định thức bằng 0 (vì khi đó ba vectơ tương ứng đồng phẳng.

4) Nếu một dòng nào đó được nhân lên với một số k thì định thức cũng được nhân lên với k.

5) Hoán vị hai dòng bất kì thì định thức đổi dấu.

Bây giờ ta tìm dấu hiệu để hai bộ ba vectơ thuộc cùng một lớp hay thuộc hai lớp, tức là hai bộ ba có cùng hướng thuận hay bộ ba này có hướng nghịch so với bộ ba kia. Trước hết ta có kết quả sau:

Trong không gian định hướng với bộ ba thuận bất kì $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì, khi đó

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\ ,\ \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\ ,\ \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\ .$$

Từ đó ta có

$$D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3\right).D\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right).$$

Đặc biệt nếu bộ ba $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ có hướng thuận và $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$, $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$ thì

$$D\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=1 \text{ và từ đó } D\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3.$$

Từ kết quả trên ta có với hai bộ ba vectơ độc lập bất kì $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ và $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ ta có

$$D\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)=\det A.D\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right) \text{ (**) ở đó}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

và $\vec{i'}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$, $\vec{j'}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$, $\vec{k'}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$.

Do $\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}$ không đồng phẳng nên det$A \neq 0$, từ đó det$A > 0$ hoặc det$A < 0$.

Như vậy nếu bộ ba $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ có hướng thuận thì đẳng thức (**) chứng tỏ rằng:

Nếu det$A > 0$ thì bộ ba $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ có hướng thuận hay hai bộ ba $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ và $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ thuộc cùng một lớp.

Nếu det$A < 0$ thì bộ ba $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ có hướng nghịch hay hai bộ ba $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ và $\left(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'}\right)$ thuộc vào hai lớp.

Một số ví dụ

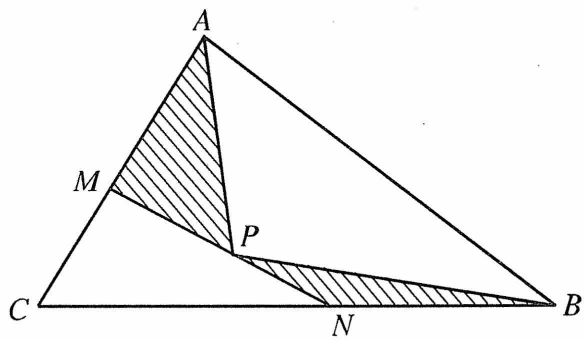
Ví dụ 1. Cho tam giác ABC; M và N là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AC và BC sao cho $\frac{AM}{MC} = \frac{NC}{NB} = \alpha$. Lấy điểm P thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\frac{PM}{PN} = \alpha$. Đặt $S = S_{\Delta ABC}$, $S_1 = S_{\Delta AMP}$, $S_2 = S_{\Delta BNP}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{S} = \sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}.$$

Giải (h.3.139). Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{MC}$ hay $\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \alpha\overrightarrow{MC}$, từ đó $\overrightarrow{CA} = (\alpha+1)\overrightarrow{CM}$ hay

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CA}.$$



Hình 3.139

Tương tự ta có $\overrightarrow{CN} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{CP} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CN} + \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{CM}$.

Mặt khác ta có

$$2S_1 = \left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\right]\right| = \left|\left[\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AM}\right] - \left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}\right]\right|$$

$$= \left|\left[\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AM}\right]\right| \text{ (vì } \overrightarrow{CA} \text{ cộng tuyến với } \overrightarrow{AM})$$

$$= \left|\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CN} + \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{CM}, \frac{-\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CA}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{-\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CA}\right] - \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}\left[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA}\right]\right|.$$

$$=\left|\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\left[\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right]\right|$$

$$=\frac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3}\left|\left[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right]\right|. \qquad (1)$$

Tương tự như trên ta có $2S_2=\frac{1}{(\alpha+1)^3}\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right|$ (2)

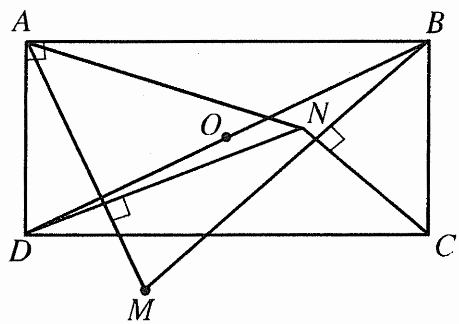
$$2S=\left|\left[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right]\right|. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $\sqrt[3]{\frac{S_1}{S}}=\frac{\alpha}{\alpha+1}$, $\sqrt[3]{\frac{S_2}{S}}=\frac{1}{\alpha+1}$ và từ đó $\sqrt[3]{\frac{S_1}{S}}+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S}}=1$,

tức là $\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}=\sqrt[3]{S}$.

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$; M là điểm không thuộc đường thẳng AB, M thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ từ D và C kẻ các đường thẳng lần lượt vuông góc với các đường thẳng MA và MB, hai đường thẳng đó cắt nhau ở N. Chứng minh rằng $S_{AND}=S_{BCM}$.

Giải. Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ (h.3.140).



Hình 3.140

Vì $MA\perp DN$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DN}=0$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OD}\right)=0$

hay $\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OB}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ (1)

Mặt khác, $MB\perp NC$ nên $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OC}\right)=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ (2)

Từ (1), (2) ta có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OB}$

hay $\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right).\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right).\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

Ta lại có $OA^2=OB^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ cùng phương với $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

Từ đó $\left[\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]=\vec{0} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]=\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{ON}\right]$ (3)

Ta lại có

$$2S_{AND}=\left|\left[\overrightarrow{NA},\overrightarrow{ND}\right]\right|=\left|\left[\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{ON}\right]\right|$$

$$=\left|\left[\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON},-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{ON}\right]\right|=\left|\left[\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}\right]\right|$$

$$=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]+\left[\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}\right]\right| \quad (4)$$

Tương tự $2S_{BCM}=\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]+\left[\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right]\right|$ (5)

Từ (3), (4), (5) ta có $S_{AND}=S_{BCM}$.

Ví dụ 3. Cho tứ giác lồi *ABCD*, gọi *M* là giao điểm hai đường chéo *AC* và *BD*. *M'*, *C'*, *D'* lần lượt là hình chiếu của *M*, *C*, *D* trên đường thẳng *AB*. Đặt $S=S_{ABCD}$, chứng minh rằng $S=\dfrac{AB.CC'.DD'}{2MM'}$.

Giải. Vì $2S_{ACD}=\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ và $2S_{ACB}=\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right|$ nên

$$2S=\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right|.$$

Mặt khác $\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]$ và $\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]$ là hai vectơ cùng chiều nên

$$2S=\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

Gọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ đơn vị sao cho $\vec{a}$ cùng chiều với $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{b}\perp\overrightarrow{AB}$ (h.3.141). Khi đó $\overrightarrow{AB}=p\vec{a}$, $\overrightarrow{C'C}=q\vec{b}$, $\overrightarrow{D'D}=r\vec{b}$, $\overrightarrow{M'M}=s\vec{b}$.

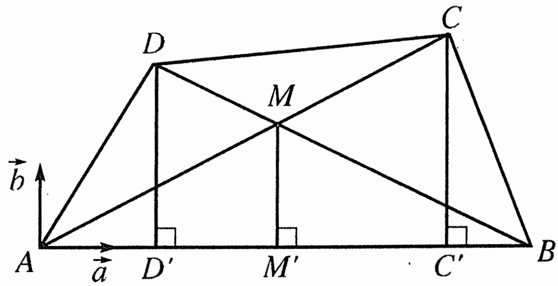
Vì M là giao điểm của AC và BD nên $\overrightarrow{BD} = \lambda_1 \overrightarrow{BM}$ hay

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \lambda_1\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right)$;

$\overrightarrow{AC} = \lambda_2 \overrightarrow{AM}$. Khi ấy

$$2S = \lambda_2\lambda_1\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}\right]\right|$$

$$= \lambda_1\lambda_2 p\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right]\right|.$$



Hình 3.141

Do $\vec{a} \perp \vec{b}$ nên $\left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{AM}}\right) = 90^\circ - \left(\widehat{\vec{b}, \overrightarrow{AM}}\right)$ từ đó

$$\left|\left[\vec{a}, \overrightarrow{AM}\right]\right| = \vec{b}.\overrightarrow{AM} = \vec{b}\left(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}\right) = \vec{b}.\overrightarrow{M'M} = s\vec{b}^2 = s.$$

Như vậy $2S = \lambda_1\lambda_2 ps$ (1)

Ta lại có $\overrightarrow{AC}.\vec{b} = \lambda_2 \overrightarrow{AM}.\vec{b} = \lambda_2 s$ hay $\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}\right).\vec{b} = \lambda_2 s \Leftrightarrow \overrightarrow{C'C}.\vec{b} = \lambda_2 s$

$\Leftrightarrow q\vec{b}.\vec{b} = \lambda_2 s \Rightarrow q = \lambda_2 s \Rightarrow \lambda_2 = \dfrac{q}{s}.$ (2)

Tương tự ta cũng có $\lambda_1 = \dfrac{r}{s}.$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $2S = \dfrac{pqr}{s}$ hay $S = \dfrac{pqr}{2s}$ tức là $S = \dfrac{AB.CC'.DD'}{2MM'}$.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Trên một mặt nào đó của tứ diện, chẳng hạn mặt ABC lấy điểm S và đặt vectơ $\overrightarrow{SS'} = \vec{d}$ sao cho $\left|\overrightarrow{SS'}\right| = S_{\Delta ABC}$, SS' vuông góc với mp(ABC) và có hướng sao cho D, S' nằm về hai phía của mặt phẳng (ABC). Tương tự cho vectơ $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$ đối với mặt BCD; vectơ $\overrightarrow{QQ'} = \vec{b}$ đối với mặt ACD và vectơ $\overrightarrow{RR'} = \vec{c}$ đối với mặt ABD. Chứng minh rằng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

Giải. Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{y}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{z}$ thì $\overrightarrow{CA} = \vec{x} - \vec{z}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{y} - \vec{z}$ (h.3.142).

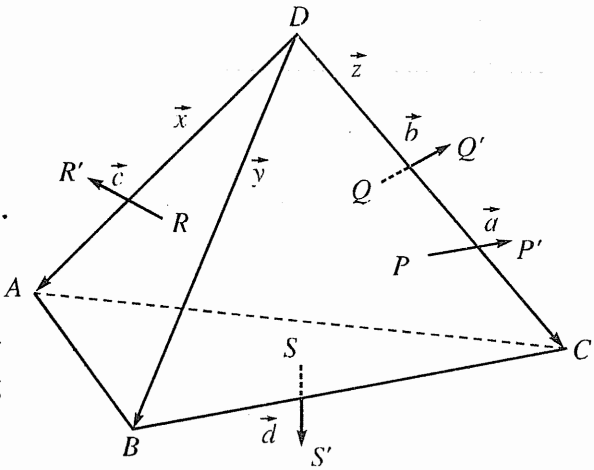
Khi đó $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{y}, \vec{z}\right]$, $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{z}, \vec{x}\right]$, $\vec{c} = \dfrac{1}{2}\left[\vec{x}, \vec{y}\right]$,

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{y} - \vec{z}, \vec{x} - \vec{z}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vec{y}, \vec{x}\right] - \frac{1}{2}\left[\vec{z}, \vec{x}\right] - \frac{1}{2}\left[\vec{y}, \vec{z}\right].$$

Từ đó ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.



Hình 3.142

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không cùng phương thì từ đẳng thức $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$ ta suy ra $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ và ngược lại.

Giải. Xét $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{a}, \vec{a}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$

Từ giả thiết $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$ ta suy ra $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ cùng phương với $\vec{a}$. Tương tự ta có $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ cùng phương với $\vec{b}$. Mặt khác $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Từ đó $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Nếu $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ thì $\left[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0}$ hay $\left[\vec{a}, \vec{a}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0}$ tức là $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}\right]$. Tương tự ta có $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0}$ thì các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. Điều ngược lại có đúng không?

Giải. Từ $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0}$ ta có $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right]\right).\vec{a} = 0$ tức là

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{a} + \left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a} + \left[\vec{c}, \vec{a}\right].\vec{a} = 0.$$

Mặt khác $\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{a} = \left[\vec{c}, \vec{a}\right].\vec{a} = 0$ (vì $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$; $\left[\vec{c}, \vec{a}\right] \perp \vec{a}$).

Vậy $\left[\vec{b}, \vec{c}\right].\vec{a} = 0$. Điều này khẳng định $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ đồng phẳng.

Điều ngược lại không đúng. Vì nếu chọn $\vec{c} = \vec{0}$; $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng nhưng khi đó ta có $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] \neq \vec{0}$.

Chuyên đề I

BỔ SUNG VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

Các phép dời hình và đồng dạng trong mặt phẳng là nội dung chương I. Chuyên đề I này vẫn trở lại các phép biến hình nói trên, nhằm mục đích bổ sung một số kiến thức sâu hơn về các phép dời hình và đồng dạng trong mặt phẳng.

Cũng từ những kiến thức được trang bị bổ sung này, chuyên đề còn có tác dụng không kém phần quan trọng là giúp các em học sinh chuyên Toán (vốn đã yêu thích toán học) rèn luyện kĩ năng (để ngày càng thuần thục hơn), trong việc vận dụng linh hoạt các phép biến hình vào việc giải toán hình học; trên cơ sở đó, giúp các em rèn luyện và phát triển tư duy hình học nói riêng và tư duy toán học nói chung.

§1. PHÉP DỜI HÌNH PHẲNG

1. Nhắc lại và bổ sung một số vấn đề về những đối tượng hình học có hướng và số đo (độ lớn) đại số của những đại lượng hình học liên quan

a) Đoạn thẳng định hướng và độ dài đại số của một vectơ trên một trục

i) Như chúng ta đã biết, đối tượng hình học có hướng đầu tiên được đề cập đến trong hình học (Tài liệu chuyên Toán Hình học 10) chính là đoạn thẳng định hướng, một đoạn thẳng được phân biệt bởi thứ tự hai đầu mút của nó. Từ đó xuất hiện một khái niệm hình học mới, đó là khái niệm vectơ, có nguồn gốc (xuất xứ) từ vật lí học do nhu cầu thực tiễn của việc biểu thị hướng chuyển động (chẳng hạn, chuyển động thẳng đều) của một lực (lực F, kí hiệu bởi $\vec{F}$). Sau đó, người ta đã đưa vào khái niệm trục, tức là đã định hướng một đường thẳng Δ nào đó bằng cách đưa vào trên Δ một điểm gốc O và một vectơ đơn vị $\vec{e}$ rồi xác định tia dương $Ox \uparrow\uparrow \vec{e}$ và tia âm $Ox' \uparrow\downarrow \vec{e}$[1].

ii) Độ dài đại số của một vectơ trên một trục và hệ thức Chasles

Khái niệm độ dài đại số của một vectơ trên một trục đã được định nghĩa trong Tài liệu chuyên Toán Hình học 10. Chúng ta đã gọi độ dài hay mô-đun của một vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài (thông thường) của đoạn thẳng AB, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$; $|\overrightarrow{AB}| = AB = d(A, B)$.

Nếu vectơ $\overrightarrow{AB}$ nằm trên trục $\vec{\Delta}$ (có điểm gốc là O và vectơ đơn vị $\vec{e}$) thì người ta đưa vào khái niệm độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên $\vec{\Delta}$ và kí hiệu là $\overline{AB}$. Đó là một số đại số mà nhân với vectơ đơn vị $\vec{e}$ trên $\vec{\Delta}$ thì được $\overrightarrow{AB}$; nghĩa là (theo định nghĩa):

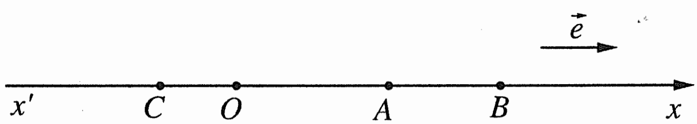
$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{e}.$$

Điều đó có nghĩa là $\overline{AB} = \pm AB$, lấy dấu + hay – tuỳ theo $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng hay ngược hướng với $\vec{e}$.

Về độ dài đại số của một vectơ trên một trục, ta có các hệ thức tương đương sau đây gọi là hệ thức Chasles:

Với bất cứ ba điểm A, B, C nào thẳng hàng trên một trục $\vec{\Delta}$, ta đều có:

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \Rightarrow \overline{BA} = -\overline{AB}$;



Hình 4.1

Thật vậy, ta dễ dàng kiểm nghiệm sự đúng đắn của một trong ba đẳng thức $AB + BC = AC$, hoặc $AC + CB = AB$, hoặc $BA + AC = BC$ tuỳ theo trên $\vec{\Delta}$, B ở giữa A và C, hoặc C ở giữa A và B, hoặc A ở giữa B và C (như trên hình 4.1, A ở giữa B và C và ta có $\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$ và $\overline{BA}, \overline{AC}, \overline{BC}$ đều âm).

[1] Các kí hiệu $\uparrow\uparrow$ và $\uparrow\downarrow$ theo thứ tự chỉ song song và cùng hướng hoặc ngược hướng.

Chú thích: Có thể lập luận như sau được không?

Theo định nghĩa, với ba điểm A, B, C bất kì trên trục $\vec{\Delta}$, ta có $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\vec{e}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{BC}\,\vec{e}$ và $\overrightarrow{AC} = \overline{AC}\,\vec{e}$.

Lại theo định nghĩa ta cũng có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Thế thì, từ bốn đẳng thức vectơ trên đây ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{e}$, và do đó: $\overrightarrow{AC} = (\overline{AB} + \overline{BC})\vec{e} = \overline{AC}\,\vec{e}$. Từ đó suy ra hệ thức Chasles:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \text{ (khi đối chiếu đẳng thức cuối ở trên).}$$

Thực ra, trong lập luận này ta đã sử dụng tính chất phân phối của phép toán tích vectơ với một số (số đại số) mà chứng minh chặt chẽ tính chất này lại chính là chứng minh hệ thức Chasles về độ dài đại số (của một vectơ trên một trục)!!!

b) *Góc định hướng giữa hai tia (hay giữa hai vectơ) và số đo của nó*

i) Góc định hướng giữa hai tia (của hai tia) là đối tượng hình học có hướng thứ hai cũng được đề cập đến trong Tài liệu chuyên Toán Hình học 10. Chúng ta nhắc lại khái niệm này một chút, một khái niệm được xem là đối ngẫu của khái niệm "đoạn thẳng định hướng".

Góc định hướng giữa hai tia Ou, Ov, kí hiệu (Ou, Ov) là một góc được phân biệt bởi thứ tự hai cạnh Ou, Ov của nó (trong khi góc thông thường giữa hai cạnh (hai tia) Ou và Ov được kí hiệu là $\widehat{uOv}$ hay $\widehat{vOu}$ đều được). Ngoài ra, để xác định hướng của góc định hướng giữa hai tia (hay giữa hai vectơ, ta cần chỉ rõ số đo (độ lớn) đại số của nó nữa theo nghĩa sau:

Góc định hướng giữa hai tia Ou, Ov là cặp tia sắp thứ tự, kí hiệu (Ou, Ov) mà số đo là số đo của một góc lượng giác (Ou, Ov), nhưng xác định sai khác một bội nguyên của 2π; nói khác đi là một góc định hướng có vô số số đo. Trong các số đo đó có số đo duy nhất α thoả mãn $-\pi < \alpha \le \pi$.

Nếu $0 < \alpha < \pi$, ta nói góc định hướng (Ou, Ov) có hướng dương hay hướng thuận; nếu $-\pi < \alpha < 0$, ta nói nó có hướng âm hay hướng nghịch, còn nếu $\alpha = 0$ hay $\alpha = \pi$ ta nói nó có hướng bất định (cũng tức là có hướng không xác định).

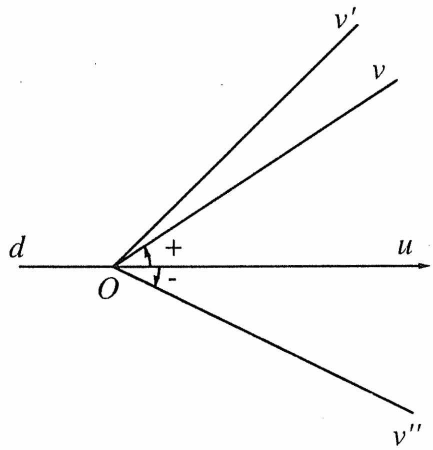
ii) Chú thích

- Để ý rằng giá trị tuyệt đối của α là số đo góc hình học $\widehat{uOv}$ (hay $\widehat{vOu}$) ta được ý nghĩa hình học thông thường về hướng của góc định hướng, Chẳng hạn, góc hình học $\widehat{uOv}$ xác định hai góc định hướng (giữa hai tia) có hướng ngược nhau.

  Xét tia Om nằm trong góc hình học $\widehat{uOv}$; Om quay từ Ou đến trùng với Ov, nếu quay theo chiều dương thì (Ou, Ov) có hướng dương, nếu quay theo chiều âm thì (Ou, Ov) có hướng âm. Chẳng hạn:

- Hai góc định hướng (Ou, Ov) và (Ov, Ou) luôn có hướng ngược nhau (một góc có hướng dương thì góc kia có hướng âm).

- Tia Ou thuộc một đường thẳng d (h.4.2) chia mặt phẳng làm hai miền (hai nửa mặt phẳng) thì hai tia Ov, Ov' cùng nằm trong một nửa mặt phẳng (nửa trên) cho hai góc định hướng (Ou, Ov) và (Ou, Ov') có cùng hướng (hướng dương) còn hai tia Ov, Ov'' nằm trong hai nửa mặt phẳng khác nhau sẽ cho hai góc định hướng có hướng ngược nhau.



Hình 4.2

- Góc định hướng giữa hai vectơ được quy về góc định hướng giữa hai tia (cùng gốc). Thật vậy, từ một điểm O bất kì trong mặt phẳng ta dựng hai tia Ou và Ov lần lượt song song và cùng hướng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cho trước thì dễ thấy rằng góc định hướng (Ou, Ov) không thay đổi về hướng cũng như về số đo (nói khác đi là không phụ thuộc vào vị trí của điểm O trong mặt phẳng).

Từ đó ta có định nghĩa sau cho khái niệm góc định hướng giữa hai vectơ. Góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$ được sắp đặt theo thứ tự đó mà số đo (độ lớn) đại số của nó là số đo của góc định hướng (Ou, Ov) giữa hai tia có chung gốc O là một điểm bất kì của mặt phẳng sao cho hai tia Ou và Ov theo thứ tự song song và cùng hướng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đồng thời, ta có kết luận sau:

Góc định hướng $(\vec{a}, \vec{b})$ của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng hướng và cùng số đo (độ lớn) với góc định hướng (Ou, Ov) giữa hai tia Ou và Ov dựng theo cách nói trên.

iii) Sự bằng nhau của hai góc định hướng giữa hai tia (hay giữa hai vectơ)

Hai góc định hướng (Ou, Ov), $(O'u', O'v')$, (trong đó O' có thể trùng hay khác O) hoặc hai góc định hướng $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a'}, \vec{b'})$ gọi là bằng nhau nếu số đo của chúng bằng nhau theo modulo 2π (tức sai khác một bội nguyên của 2π).

Do đó để diễn tả sự bằng nhau của các góc định hướng người ta dùng số đo của chúng. Chẳng hạn hai góc định hướng (Ou, Ov), $(O'u', O'v')$ bằng nhau được viết là

$(Ou, Ov) = (O'u', O'v') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ hoặc $(Ou, Ov) = (O'u', O'v')\ [\text{mod } 2\pi]$

Cũng như thế, $(Ou, Ou) = 0\ [\text{mod } 2\pi]$ nói rằng góc định hướng (Ou, Ou) bằng góc định hướng tuỳ ý có số đo 0 modulo 2π.

Nếu góc định hướng (Ou, Ov) có số đo $\alpha\ [\text{mod } 2\pi]$ thì góc định hướng (Ov, Ou) có số đo $-\alpha\ [\text{mod } 2\pi]$ nên còn viết

$$(Ov, Ou) = -(Ou, Ov)\ [\text{mod } 2\pi].$$

Tương tự như thế đối với góc định hướng giữa các vectơ, chẳng hạn ta có với các véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác $\vec{0}$:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0\left[\text{mod}\, 2\pi\right]$, $\left(\vec{v},\vec{u}\right) = -\left(\vec{u},\vec{v}\right)\left[\text{mod}\, 2\pi\right]$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \left(\vec{u},\vec{v}\right) = \pi\left[\text{mod}\, 2\pi\right]$

Chú ý:

- Dễ thấy, theo định nghĩa, rằng $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \left(\vec{u},\vec{v'}\right)\left[\text{mod}\, 2\pi\right]$ khi và chỉ khi $\vec{v}$ và $\vec{v'}$ cùng hướng.

Do số đo của góc định hướng giữa hai vectơ xác định sai khác 2π nên có thể nói đến $\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ và rõ ràng góc định hướng $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ có hướng dương hay âm tuỳ $\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ là số dương hay âm.

iv) Hệ thức Chasles về số đo góc định hướng giữa hai tia (hai vectơ)

Phép cộng các số đo modulo 2π của các góc định hướng giữa hai tia có ý nghĩa hình học rõ ràng thể hiện trong công thức (gọi là hệ thức Chasles):

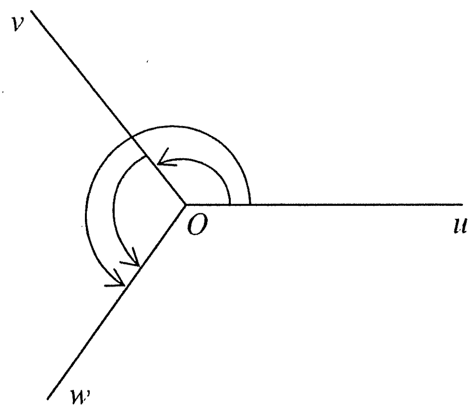
Với ba tia tuỳ ý Ou, Ov, Ow cùng gốc O thì

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow)\ [\text{mod } 2\pi].$$

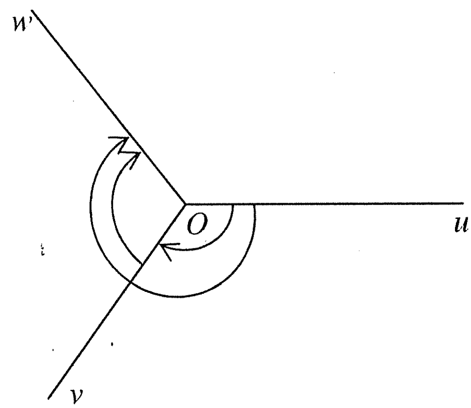
Nó được suy ra trực tiếp từ hệ thức Chasles về góc lượng giác (chương tích vô hướng, Tài liệu chuyên Toán Hình học 10) mà ta có thể nhắc lại ở đây chứng minh ngay cho số đo của góc định hướng giữa hai tia:

Dễ thấy công thức đó đúng cho trường hợp ba tia Ou, Ov, Ow không phân biệt.

Trong trường hợp ba tia Ou, Ov, Ow phân biệt, khi quay tia Ou quanh O theo chiều thuận thì hoặc ta gặp Ov rồi mới gặp Ow (h.4.3a) hoặc ta gặp Ow rồi mới gặp Ov (h.4.3b)



a)



b)

Hình 4.3

Trong trường hợp đầu, các góc định hướng (Ou, Ov), (Ov, Ow), (Ou, Ow) có những số đo α, β, γ thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ mà $\alpha + \beta = \gamma$, trong trường hợp sau, các góc đó có những số đo α', β', γ' thuộc khoảng $(-2\pi; 0)$ mà $\alpha' + \beta' = \gamma'$.

Vậy ta luôn có:

$$(Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) \text{ [mod } 2\pi\text{]}.$$

Cũng từ đó, theo định nghĩa khái niệm góc định hướng giữa hai vectơ được đề cập đến ở trên, ta cũng có hệ thức Chasles về số đo góc định hướng giữa hai vectơ. Các hệ thức sau đây về hệ thức Chasles về số đo góc định hướng là tương đương:

$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})$ [mod 2π];

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{b}) - (\vec{c}, \vec{a})$ [mod 2π].

$(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a}) = 0$ [mod 2π], với mọi bộ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ trong mặt phẳng.

Từ đó suy ra chẳng hạn

$$\left(\vec{a}, -\vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{b}, -\vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \pi \text{ [mod } 2\pi\text{]}$$

$$\left(-\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(-\vec{a}, \vec{a}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \pi \text{ [mod } 2\pi\text{]}.$$

c) *Góc định hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng và số đo của nó*

i) Góc định hướng giữa hai đường thẳng d, d' trong mặt phẳng là cặp đường thẳng d, d' có phân biệt thứ tự và được kí hiệu là (d, d'). Lấy các vectơ chỉ phương tuỳ ý $\vec{e}$, $\vec{e'}$ theo thứ tự của d, d' thì số đo $\left(\vec{e}, \vec{e'}\right)$ modulo π không phụ thuộc chọn $\vec{e}$, $\vec{e'}$ vì chẳng hạn $\left(\vec{e}, -\vec{e'}\right) = \left(\vec{e}, \vec{e'}\right) + \pi = \left(-\vec{e}, \vec{e'}\right)$.

Do đó người ta coi số đo của góc định hướng (d, d') giữa hai đường thẳng d, d' trong mặt phẳng cũng bằng số đo của góc định hướng $\left(\vec{e}, \vec{e'}\right)$ giữa hai vectơ chỉ phương $\vec{e}$, $\vec{e'}$ của d, d' nhưng xác định sai khác một bội nguyên của π và viết

$$\overline{(d, d')} = \left(\vec{e}, \vec{e'}\right) \text{ [mod } \pi\text{]}. \qquad (7)$$

Cũng có thể coi góc định hướng (d, d') có vô số số đo (hai số khác nhau một bội nguyên của π), trong đó có số đo duy nhất $\delta \in [0;\pi)$ gọi là số đo chính tắc của góc định hướng đó. Nếu $\delta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì δ là số đo góc hình học giữa hai đường thẳng; nếu $\delta \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\pi - \delta$ là số đo góc hình học giữa hai đường thẳng.

Hai góc định hướng giữa các cặp đường thẳng (d_1, d_2) và $\left(d_1',d_2'\right)$ gọi là bằng nhau nếu chúng có các số đo sai khác nhau một bội nguyên của π; ta viết $\overline{\left(d_1,d_2\right)}=\overline{\left(d_1',d_2'\right)}$ [mod π] (vậy các góc đó bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số đo chính tắc)

Dễ thấy:

- Hai đường thẳng d, d' cùng phương khi và chỉ khi $\overline{\left(d,d'\right)}=0$ [mod π].
- Hai đường thẳng d, d' vuông góc khi và chỉ khi $\overline{\left(d,d'\right)}=\dfrac{\pi}{2}$ [mod π].
- Nếu $\overline{\left(d,d'\right)}=\alpha$ [mod π] thì $\overline{\left(d',d\right)}=-\alpha$ [mod π]; ta viết

$$\overline{\left(d',d\right)}=-\overline{\left(d,d'\right)} \text{ [mod } \pi\text{]}.$$

- Cho đường thẳng d thì $\overline{\left(d,d_1\right)}=\overline{\left(d,d_2\right)}$ [mod π] khi và chỉ khi d_1, d_2 cùng phương.

Chú thích: Để được tính nhất quán (về mặt hình thức) về cách trình bày góc định hướng của ba loại góc định hướng (giữa hai tia (như góc lượng giác), giữa hai vectơ và giữa hai đường thẳng), sau khi đưa ra khái niệm góc định hướng (d, d') giữa hai đường thẳng d, d' trong mặt phẳng và thừa nhận số đo góc đó là số đo δ của góc định hướng giữa cặp vectơ đơn vị chỉ phương của d và d', người ta có đề xuất khái niệm hướng của góc định hướng (d, d') gĩữa hai đường thẳng d, d' . Bằng cách xem |δ| là số đo của góc hình học giữa d và d', nghĩa là |δ| thoả mãn bất đẳng thức $0 < |\delta| \le \dfrac{\pi}{2}$;

khi đó một góc định hướng (d, d') giữa hai đường thẳng d, d' có vô số số đo. Trong các số đo đó có số duy nhất α thoả mãn bất đẳng thức $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Tuỳ theo $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ hay $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, ta nói góc định hướng (d, d') giữa hai đường thẳng d, d' có hướng dương hay hướng âm (cũng tức là hướng thuận hay nghịch). Như vậy, việc đưa ra khái niệm hướng của góc định hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng như trên đây không chỉ nhất quán về hình thức trình bày chung của ba loại (thực ra chỉ có hai loại, mod 2π và mod π) góc định hướng trong mặt phẳng mà còn hợp lí vì cũng phù hợp với cách hiểu (quy định) truyền thống về số đo của góc hình học giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng (chỉ lấy góc không tù). Tuy nhiên, trong thực tế khảo sát góc định hướng (d, d') giữa hai đường thẳng d, d' thường ta chỉ quan tâm đến giá trị số đo (đại số) δ của góc đó thuộc khoảng $(0, \pi)$ và $(-\pi, 0)$, chứ ít khi để ý đến giá trị của số đo góc đó thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

ii) Đối với góc định hướng giữa hai đường thẳng, ta cũng có hệ thức Chasles:

$$\overline{(a,b)}+\overline{(b,c)}=\overline{(a,c)}\ [\mathrm{mod}\,\pi] \Leftrightarrow \overline{(a,b)}=\overline{(a,c)}-\overline{(b,c)}\ [\mathrm{mod}\,\pi]$$

$$\Leftrightarrow \overline{(a,b)}=\overline{(c,b)}-\overline{(c,a)}\ [\mathrm{mod}\,\pi] \Leftrightarrow \overline{(b,a)}=-\overline{(a,b)}\ [\mathrm{mod}\,\pi]$$

$$\overline{(a,b)}+\overline{(b,c)}+\overline{(c,a)}=0\ [\mathrm{mod}\,\pi];$$

iii) *Chú thích*

Trong các tiểu mục b) và c) trên đây, khi nói về góc lượng giác, góc định hướng (hai loại: giữa hai vectơ và giữa hai đường thẳng), chủ yếu chúng ta nói về số đo của chúng; cộng các góc (cùng loại) đó là cộng các số đo của chúng. Điều này được thể hiện rõ trong hệ thức Chasles.

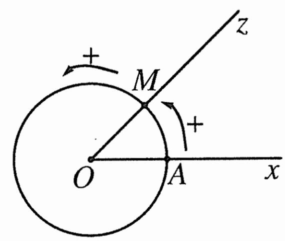
d) Mặt phẳng định hướng

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu tính chất của các hình hình học trong mặt phẳng, người ta cũng còn đưa vào khái niệm mặt phẳng định hướng (chúng ta đã nói đến trong phần nói về góc lượng giác (xem Tài liệu chuyên Toán Hình học 10)). Chúng ta sẽ làm rõ khái niệm này một cách trực quan hình học, thông qua việc quan sát cụ thể một cách trực giác sự chuyển động của một điểm trên một đường tròn, hay trên một tam giác, một đa giác đơn (cũng tức là một đường gấp khúc khép kín không có điểm tự cắt) hay trên một đường cong kín.

- Một điểm M chuyển động trên một đường tròn (v) có thể di chuyển theo hai hướng khác nhau. Một cách trực quan, chúng ta chấp nhận sự việc quan sát này: trên mọi đường tròn (v) của mặt phẳng $\mathscr{P}$, tồn tại hai hướng đi. Ta có các định nghĩa sau đây:

ĐỊNH NGHĨA 1. Định hướng đường tròn (v) là chọn một trong hai hướng đi trên (v).

- Khi đã cho hai đường tròn định hướng (v) và (v') trên mặt phẳng $\mathscr{P}$, chúng ta có khả năng nhận biết rằng (v') được định hướng theo "cùng một hướng" với (v) hay theo hướng ngược lại.



Hình 4.4

- Một nửa đường thẳng (cũng được gọi là một tia) Oz có gốc ở tâm O của một đường tròn (v) quay xung quanh điểm gốc O của nó theo hai hướng khác nhau như hướng chuyển động của điểm M trên đường tròn (v), ở đó tia gốc Oz cắt (v): $\{M\} = Oz \cap (v)$, (h.4.4).

ĐỊNH NGHĨA 2. Định hướng mặt phẳng $\mathscr{P}$ là chọn cùng một hướng đi trên tất cả các đường tròn của mặt phẳng, hướng này gọi là hướng thuận.

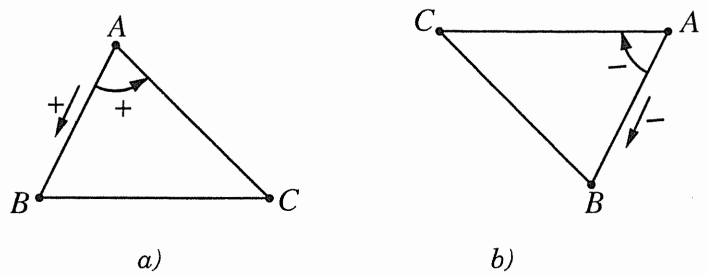
Thường người ta quy ước hướng thuận của phép quay trong mặt phẳng là hướng tương ứng với hướng ngược chiều quay của kim đồng hồ (h.4.4). Hướng ngược lại gọi là hướng nghịch.

Hướng thuận cũng còn được gọi là hướng dương hay hướng lượng giác, hướng nghịch còn được gọi là hướng âm, và kí hiệu dương hay âm bởi dấu + hay –.

Như vậy, mặt phẳng $\mathscr{P}$ gọi là đã được định hướng. Chiều đi thuận trên mọi đường cong kín không tự cắt và đặc biệt trên mọi đa giác đơn (trong đó có tam giác) hoặc mọi đường tròn của mặt phẳng ứng với chiều thuận trong mặt phẳng.

e) *Tam giác định hướng*

i) **ĐỊNH NGHĨA 3.** Nếu chiều đi trên các cạnh AB, BC và CA của một tam giác ABC trong mặt phẳng định hướng $\mathscr{P}$ tương ứng với chiều thuận của mặt phẳng $\mathscr{P}$ thì ta nói tam giác ABC có hướng dương, hay được định hướng dương (h.4.5a). Trái lại, nếu chiều đi trên tam giác đó ứng với chiều nghịch của $\mathscr{P}$ thì ta nói tam giác ABC có hướng âm, hay được định hướng âm (h.4.5b).



Hình 4.5

ii) ***Nhận xét.*** Hai tam giác có cùng ba đỉnh A, B và C thì ABC và BAC là hai tam giác trong mặt phẳng định hướng $\mathscr{P}$ có hướng ngược nhau. Ngoài ra, dễ thấy rằng: Trong mặt phẳng định hướng $\mathscr{P}$, hướng của một tam giác định hướng ABC trùng với hướng của các góc định hướng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, hoặc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$, hoặc $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.[1]

Từ các nhận xét trên ta cũng thấy rằng: Hướng của một tam giác không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh các đỉnh của nó (phù hợp với định nghĩa 3 ở trên).

iii) ***Chú thích.*** Cũng chính vì lẽ đó mà người ta ưa dùng định nghĩa sau:

ĐỊNH NGHĨA 3′. Một bộ ba điểm phân biệt không thẳng hàng sắp thứ tự $\{A, B, C\}$ của một mặt phẳng định hướng $\mathscr{P}$ được gọi là một tam giác định hướng (hay có hướng) của mặt phẳng đó và kí hiệu là ΔABC như thông thường (nhưng chú ý đến cách viết theo thứ tự các đỉnh).

---

[1] Cũng chính vì tính chất này, người ta có thể lấy nó làm định nghĩa của khái niệm tam giác định hướng, rồi trên cơ sở đó đưa vào khái niệm mặt phẳng định hướng (nhằm mục đích trình bày vấn đề hướng của hình (trong mặt phẳng) được gọn gàng và nhẹ nhàng hơn).

2. Góc định hướng và tam giác định hướng trong thực hành và ứng dụng

(Phần đọc thêm "Về ứng dụng của góc định hướng và tam giác định hướng")

Qua mục 1, §1 ở trên chúng ta đã thấy (về mặt lí luận) sự cần thiết phải đưa vào các khái niệm đường thẳng định hướng, đoạn thẳng định hướng cùng số đo của nó, mặt phẳng định hướng, hai loại góc định hướng (trong mặt phẳng định hướng) cùng số đo của chúng và tam giác định hướng.

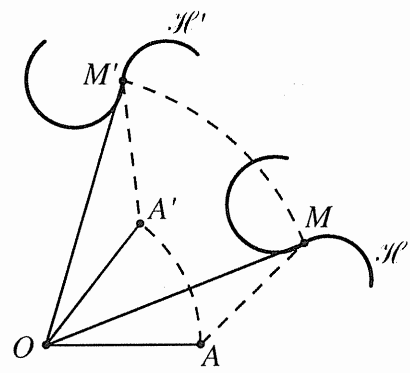
Sau đây, bài đọc thêm này sẽ lưu ý bạn đọc quan tâm đến một vài ứng dụng thiết thực và rất bổ ích của những đối tượng hình học có hướng và số đo (độ lớn) của những đại lượng hình học liên quan (độ dài đoạn thẳng, độ lớn của góc, diện tích hình phẳng) trong việc vận dụng giải toán hình học.

a) Xây dựng khái niệm phép quay (phẳng) xung quanh một điểm

Như ở mục 3 chương I, các định lí 5 và 5′ đã chỉ ra rằng tích của hai phép đối xứng - trục (trong mặt phẳng) có trục cắt nhau là một phép quay phẳng xung quanh giao điểm O của hai trục đó. Bởi vậy, ta cũng có thể lấy nội dung định lí 5 làm định nghĩa của phép quay như một số tác giả đã làm (trình bày) trong một số cuốn SGK hình học. Tuy nhiên, khi đã đưa vào khái niệm mặt phẳng định hướng, góc định hướng giữa hai tia (cùng gốc) hoặc góc giữa hai vectơ thì, ta có thể đưa ra định nghĩa phép quay một cách trực quan hình học hơn như sau:

i) **ĐỊNH NGHĨA 4** (phép quay phẳng).

Trong mặt phẳng $\mathscr{P}$ giả sử đã được định hướng, cho một điểm O cố định và một góc định hướng φ, xác định sai khác $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ta gọi là phép quay tâm O góc định hướng φ (hay phép quay tâm O với góc quay φ) trong mặt phẳng $\mathscr{P}$, kí hiệu là $Q(O, \varphi)$ hay $Q_{O,\varphi}$, một phép biến hình điểm của mặt phẳng, biến điểm O thành chính nó và biến mỗi



Hình 4.6a

điểm M khác O thuộc $\mathscr{P}$ thành điểm M' cũng thuộc $\mathscr{P}$, xác định bởi các hệ thức:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi \text{ và } OM' = OM.$$

Khi điểm M vạch nên một hình $\mathscr{H}$ thì điểm M', tương ứng với nó vạch nên hình tương ứng (hình biến đổi, hay ảnh) của $\mathscr{H}$ trong phép quay đó (h.4.6a), kí hiệu

$$\mathscr{H}' = Q_{(O,\,\varphi)}(\mathscr{H}).$$

Chú thích. Theo định nghĩa trên, nếu φ và φ' là hai góc định hướng mà số đo đại số của chúng hơn kém nhau một bội nguyên của 2π thì $Q(O, \varphi)$ và $Q(O, \varphi')$ là một. Bởi vậy, người ta thường chọn φ sao cho $-\pi < \varphi \le \pi$ (hay đôi khi: $0 \le \varphi < 2\pi$).

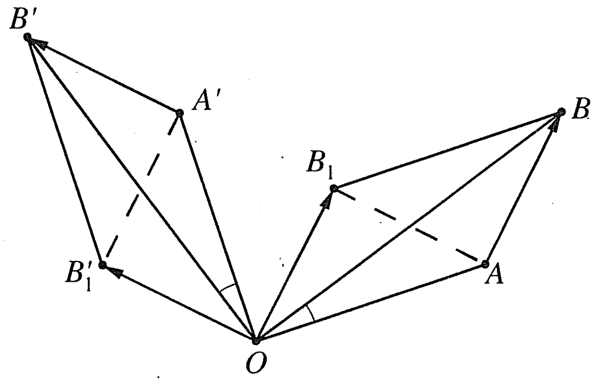
Cũng theo định nghĩa trên thì $Q(O, \varphi = 0)$ là phép đồng nhất và $Q(O, \pi)$ hoặc $Q(O, -\pi)$ là phép đối xứng $Đ(O)$ qua tâm O.

ii) Bổ sung tính chất của phép quay phẳng (liên quan đến góc quay định hướng)

Nếu phép quay $Q(O, \alpha)$ tâm O góc quay α [mod 2π] biến các điểm phân biệt A, B thành các điểm A', B' thì ta có:

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha \ [\text{mod } 2\pi], \ \overline{\left(AB, A'B'\right)} = \alpha \ [\text{mod } \pi].$$

Thực vậy, lấy điểm B_1 (h.4.6b) sao cho $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AB}$ (trung điểm đoạn OB trùng với trung điểm đoạn AB_1), lấy điểm B_1' sao cho $\overrightarrow{OB_1'} = \overrightarrow{A'B'}$ (trung điểm đoạn OB' trùng với trung điểm đoạn $A'B_1'$) thì dễ thấy phép quay $Q(O, \alpha)$ biến



Hình 4.6b

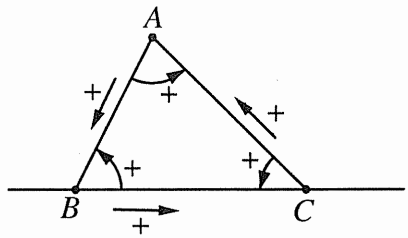
B_1 thành B_1' (vì phép quay biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng, biến trung điểm đoạn thẳng thành trung điểm đoạn thẳng) nên $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_1'}\right) = \alpha$ [mod 2π].

Vậy $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_1'}\right) = \alpha$ [mod 2π] từ đó $\overline{(AB, A'B')} = \alpha$ [mod π].

b) *Về số đo các góc (góc định hướng) trong một tam giác định hướng*

Đối với tam giác ABC không định hướng, độ lớn các góc ở các đỉnh A, B, C của nó thông thường chúng ta kí hiệu là $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ (hoặc $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$) và ta có đẳng thức: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, hay $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ (tuỳ theo đơn vị đo góc là độ hay rađian).

Tuy nhiên, khi mặt phẳng của tam giác ABC (không suy biến) đã được định hướng thì các góc ở các đỉnh A, B, C của nó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ (giữa hai vectơ, modulo 2π) cũng như các góc (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB) (giữa các đường thẳng chứa cạnh của chúng, modulo π) đều có cùng hướng hoặc cùng khác hướng của mặt phẳng $\mathscr{P}$ chứa tam giác (h.4.7).



Hình 4.7

- Dùng góc định hướng thì đối với mọi tam giác ABC, từ

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\right) = \pi \text{ [mod } 2\pi],$$

nhờ hệ thức Chasles ta suy ra

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\right) = \pi \text{ [mod } 2\pi]. \qquad (*)$$

Nếu tam giác ABC định hướng thuận, các góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ có hướng dương, số đo góc thuộc $(0; \pi)$ của chúng theo thứ tự là $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nên từ đẳng thức (*) dễ suy ra $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Trong trường hợp tam giác ABC định hướng nghịch, lập luận tương tự, từ đẳng thức (*) cũng suy ra được $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$.

- Đối với mọi tam giác ABC, cũng dễ thấy

$$\overline{(AB,AC)}+\overline{(CA,CB)}+\overline{(BC,BA)}=\overline{(AB,BA)}=0\ [\text{mod } \pi]$$

(suy ra từ đẳng thức (*) hoặc từ hệ thức Chasles về góc định hướng giữa cặp đường thẳng). Từ đẳng thức này cũng có thể suy ra $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$.

Lập luận tương tự, nhờ hệ thức Chasles về hai loại góc định hướng [mod 2π] và [mod π], ta cũng thấy lại định lí về góc ngoài của một tam giác:

i) $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [\text{mod } 2\pi]$.

ii) $\overline{(BC,CA)}=\overline{(BC,BA)}+\overline{(AB,AC)}\ [\text{mod } \pi]$.

c) *Mối quan hệ giữa các góc (định hướng) nội tiếp và ở tâm cùng chắn một cung (định hướng) trên đường tròn*

i) **ĐỊNH LÍ 1.** *Khi ba điểm A, B, M cùng thuộc một đường tròn tâm O thì ta có hệ thức:*

$$\forall M\in v(O,R):\ \overline{(MA,MB)}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Định lí trên được phát biểu lại như sau: Một góc định hướng (của hai đường thẳng) nội tiếp một đường tròn thì bằng một nửa góc ở tâm định hướng cùng chắn một cung.

Gọi P và Q là các điểm đối xứng với O lần lượt qua AM và BM, cũng là đối xứng với O lần lượt qua trung điểm của AM và BM (h.4.8); thế thì $AOMP$ và $BOMQ$ là những hình thoi, nên $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OB}$. Ta chứng minh :

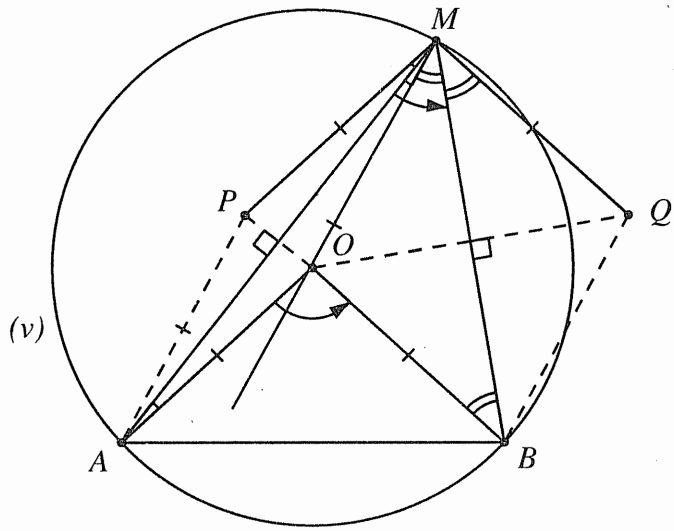
$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}),\ [\text{mod } 2\pi].$$

Thật vậy,

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ})=(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MQ})$$

$$=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})+2(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}).$$

Từ đó suy ra hệ thức (*), đpcm.



Hình 4.8

ii) ***Chú thích.*** Các đẳng thức góc định hướng trên đây giữa hai đường thẳng (MA, MB) đúng với mọi điểm M trên đường tròn. Khi M trùng với A (hay B), coi đường thẳng MA (MB) là tiếp tuyến của đường tròn tại A (B) Ngoài ra, với A khác B thì hai điểm C, D khác A, B cùng thuộc một cung tròn $\overset{\frown}{ACB}$ khi và chỉ khi

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha\ [\text{mod } 2\pi],\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq \pi.$$

Từ đó ta có các kết luận sau đây:

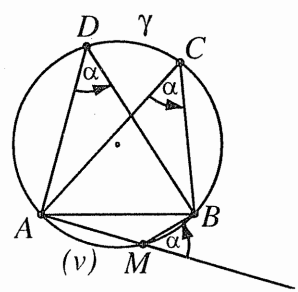
iii) **ĐỊNH LÍ 2.** *Muốn cho bốn điểm A, B, C, D (không thẳng hàng) cùng thuộc một đường tròn, cần và đủ là:*

$$\overline{(CA, CB)} = \overline{(DA, DB)}\ \ (= \varphi \neq 0)\ [\text{mod } \pi].$$

Chú ý. Nếu $\overline{(CA, CB)} = \overline{(DA, DB)} = 0$ thì bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

ĐỊNH LÍ 3.

α) $\left\{M \middle| \overline{(MA, MB)} = \alpha\ (\neq 0)\ [\text{mod } \pi]\right\}$ *là một đường tròn đi qua A và B, gọi là đường tròn chứa góc định hướng α của các đường thẳng đi qua A và B. (h.4.9).*



Hình 4.9

β) $\{M \mid (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ [mod 2π], $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi\}$ *là một cung tròn* $\overset{\frown}{A\gamma B}$ *(h.4.9) có hai đầu mút là A và B, gọi là cung chứa góc định hướng* α [mod 2π] *của hai tia đi qua A và B.*

Chú ý. Chẳng hạn khi M trùng với A, coi $\overrightarrow{MA}$ là vectơ $\vec{u}$ chỉ phương của tiếp tuyến tại A mà $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ cùng hướng $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

d) Hệ thức Chasles về diện tích đại số của tam giác định hướng

Trong mặt phẳng định hướng $\mathscr{P}$, diện tích đại số của một tam giác định hướng ABC, (kí hiệu $\bar{s}(ABC)$ hay gọn hơn $\overline{ABC}$) là một số thực mà trị tuyệt đối của nó là diện tích của tam giác đó với dấu + hay – tuỳ theo tam giác ABC có hướng thuận hay nghịch (cũng tức là có hướng dương hay âm):

$$\bar{s}(ABC) = \pm s(ABC).$$

Trường hợp ΔABC suy biến, tức A, B, C thẳng hàng thì $\bar{s}(ABC) = 0$ ($\Leftrightarrow C \in AB$).

Khi đó ta có hệ thức sau đây gọi là hệ thức Chasles về diện tích đại số của tam giác định hướng:

$$\bar{s}(MBC) + \bar{s}(MCA) + \bar{s}(MAB) = \bar{s}(ABC)$$

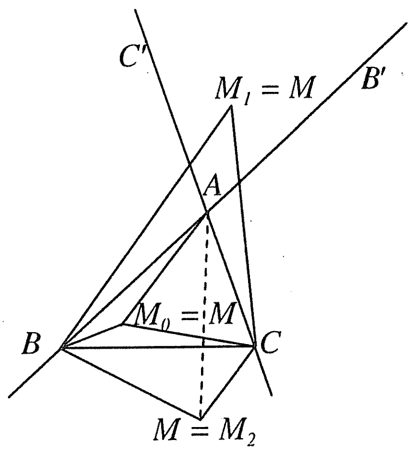
với mọi bộ bốn điểm M, A, B, C trong mặt phẳng. Ngoài ra, ta còn viết được hệ thức Chasles dưới dạng sau:

$\overline{MBC} + \overline{MCA} + \overline{MAB} = \overline{ABC}$, với $\forall M \in$ mp(ABC). (*)

Đẳng thức (*) này còn được gọi là đồng nhất thức Jacobi (đối với tam giác định hướng trong mặt phẳng).

Chứng minh. Dễ thấy ta có hệ thức đó khi A, B, C thẳng hàng. Sau đây xét trường hợp A, B, C không thẳng hàng.

Chúng ta biết rằng ba đường thẳng đôi một cắt nhau (nhưng không đồng quy) thì tạo thành một tam giác ABC nào đó và chia mặt phẳng ra làm bảy miền, gồm miền $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$,



Hình 4.10

ba miền góc đối đỉnh với các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ và ba miền góc $\widehat{A}$ cụt, $\widehat{B}$ cụt, $\widehat{C}$ cụt (tức là ba miền góc của ΔABC sau khi được cắt bỏ đi miền $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$ (h.4.10). Không mất tính tổng quát, để chứng minh hệ thức Chasles (*) về diện tích đại số của tam giác định hướng, ta chỉ cần phải xét ba trường hợp về vị trí hình học của điểm M đối với miền tam giác (định hướng) ABC.

- Trường hợp 1: $M = M_0$ thuộc miền $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$. Dễ thấy các tam giác MBC, MCA và MAB cùng hướng với ABC; vì vậy hệ thức (*) được nghiệm đúng (xét cả khi M thuộc các cạnh của ΔABC).

- Trường hợp 2: $M = M_1$ thuộc miền góc $\widehat{B'AC'}$, đối đỉnh với miền góc $\widehat{BAC}$. Khi đó: A thuộc miền $\left[\overset{\Delta}{MBC}\right]$ và ba tam giác ACM, MBC và AMB cùng hướng với ΔABC. Bởi vậy, quy về trường hợp 1, ta có:

  $\overline{MBC} = \overline{ABC} + \overline{ACM} + \overline{AMB} = \overline{ABC} - \overline{MCA} - \overline{MAB}$.

  Từ đó suy ra (*) được nghiệm đúng.

- Trường hợp 3: $M \equiv M_2$ thuộc miền góc $\widehat{A}$ cụt (= miền góc $\left[\widehat{BAC}\right]$ \ miền $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$.

  Khi đó $ABMC$ là một tứ giác lồi hoặc suy biến thành tam giác ACM hay ABM tuỳ theo M thuộc tia đối của tia $[BA)$ hay của tia $[CA)$. Để ý rằng hai ΔABM và CAM cùng hướng với ΔABC nhưng BCM ngược hướng với ABC và từ: $(\overline{ABMC} =)\ \overline{ABC} + \overline{CBM} = \overline{ABM} + \overline{CAM}$ rồi để ý rằng $\overline{ABM} = \overline{MAB}$, $\overline{CAM} = \overline{MCA}$ và $\overline{CBM} = -\overline{MBC}$, ta cũng thấy hệ thức (*) được nghiệm đúng (đpcm).

Chú ý. Còn có thể trình bày diện tích đại số của tam giác định hướng trong mặt phẳng như sau:

ĐỊNH NGHĨA. Tích lệch của hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu $\vec{u} \wedge \vec{v}$ là số thực, xác định bởi: khi $\vec{u}$ hay $\vec{v}$ bằng $\vec{0}$ thì $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$; còn khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$ thì

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right).$$

Chú ý:

1) Diện tích đại số của tam giác định hướng (theo định nghĩa trên) ABC là $\bar{s}(ABC) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (từ đó tam giác ABC định hướng thuận (hay nghịch) nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ dương hay âm).

2) Rõ ràng $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ và hai véctơ cùng phương khi và chỉ khi $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$. Góc định hướng giữa hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ (khác $\vec{0}$) có hướng dương (hay âm) khi và chỉ khi $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dương (hay âm).

Cách tính:

Xét mặt phẳng toạ độ sao cho gọi $\vec{i}$ là véctơ đơn vị của trục hoành, $\vec{j}$ là vectơ đơn vị của trục tung thì $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \frac{\pi}{2}$ [mod 2π]. Khi đó nếu $\vec{u}$ có toạ độ (u_1, u_2), $\vec{v}$ có toạ độ (v_1, v_2) thì

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = u_1v_2 - u_2v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Thực vậy, khi $\vec{u}$ hay $\vec{v}$ bằng $\vec{0}$ thì rõ ràng $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$.

Khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\begin{aligned}\sin\left(\vec{u}, \vec{v}\right) &= \sin\left(\left(\vec{i}, \vec{v}\right) - \left(\vec{i}, \vec{u}\right)\right)\\ &= \sin\left(\vec{i}, \vec{v}\right)\cos\left(\vec{i}, \vec{u}\right) - \cos\left(\vec{i}, \vec{v}\right)\sin\left(\vec{i}, \vec{u}\right)\\ &= \frac{v_2}{\left|\vec{v}\right|}.\frac{u_1}{\left|\vec{u}\right|} - \frac{v_1}{\left|\vec{v}\right|}.\frac{u_2}{\left|\vec{u}\right|} \text{ nên } \vec{u} \wedge \vec{v} = u_1v_2 - u_2v_1.\end{aligned}$$

HỆ QUẢ. Từ cách tính đó, dễ thấy $\left(k\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ với mọi số thực k, $\left(\vec{u} + \vec{u'}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u'} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{v'}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v'}$.

Chứng minh lại hệ thức Chasles:

$$\bar{s}(ABM) + \bar{s}(BCM) + \bar{s}(CAM) = \bar{s}(ABC).$$

Thực vậy, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CM}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\right) + \overrightarrow{BC} \wedge \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CM}$$

$$= \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

3. Sự xác định và dạng chính tắc của phép dời hình phẳng

a) *Phân loại các phép dời hình phẳng*

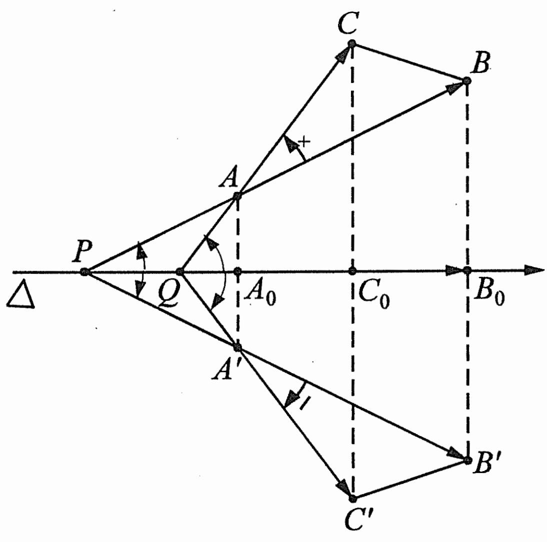
Cơ sở của sự phân loại các phép dời hình phẳng

i) **ĐỊNH LÍ 4.** *Phép đối xứng - trục trong mặt phẳng biến một tam giác (định hướng) thành một tam giác bằng nó, nhưng ngược hướng với nó.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh tính chất sau đây là đủ:

Phép đối xứng - trục biến một góc định hướng (giữa hai vectơ, hoặc giữa hai đường thẳng) trong mặt phẳng định hướng thành góc đối với nó (sai khác $2k\pi$, hoặc $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Gọi A', B' và C' lần lượt là ảnh các đỉnh A, B và C của tam giác ABC trong phép đối xứng - trục $Đ(\Delta)$ qua đường thẳng Δ (h.4.11a). Giả sử ΔABC định hướng dương. Xét các góc định hướng (giữa hai đường thẳng) (AB, AC) và $(A'B', A'C')$ của ΔABC và $\Delta A'B'C'$.



Hình 4.11a

Xét trường hợp tổng quát $(AB) \nparallel \Delta$ và $(AC) \nparallel \Delta$; thế thì vì lí do đối xứng qua trục Δ nên $(A'B') \cap (AB) = P \in \Delta$ và $(A'C') \cap (AC) = Q \in \Delta$ (h.4.11a), đồng thời ta được:

$$\overline{(\Delta, A'B')} = -\overline{(\Delta, AB)} \text{ [mod } \pi] \text{ và } \overline{(\Delta, A'C')} = -\overline{(\Delta, AC)} \text{ [mod } \pi]; \qquad (*)$$

Từ hai đẳng thức góc định hướng (*) và hệ thức Chasles trong mục 1 ta được: $(A'B', A'C') = -(AB, AC) = -\alpha$ [mod π];

Lại vì các góc định hướng (AB, AC) và $(A'B', A'C')$ theo thứ tự cùng hướng với $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ và $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ nên:

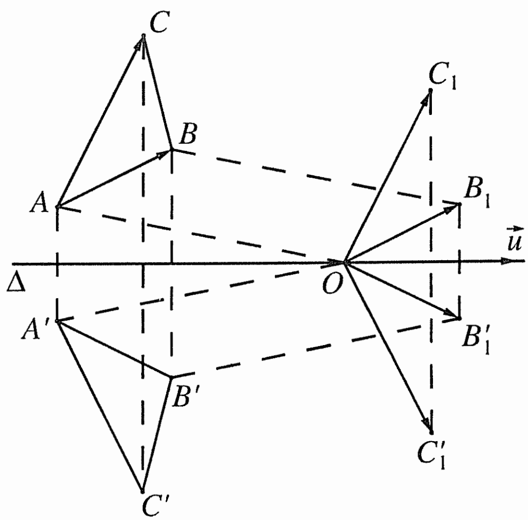
$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\alpha$, [mod 2π];

trong đó $0 < \alpha < \pi$, $\alpha = \widehat{BAC}$ là độ lớn thông thường góc $\widehat{A}$ của ΔABC.

Vì $\Delta A'B'C' = Đ_{\Delta}(\Delta ABC)$ và $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$ nên định lí 4 đã được chứng minh.

Chú ý: Còn có cách chứng minh định lí 4 như sau (h.4.11b):

Phép đối xứng trục Δ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Cần chứng minh $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ có hướng ngược với hướng của $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.



Hình 4.11b

Lấy điểm O trên Δ, lấy B_1 sao cho $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AB}$ (trung điểm của OB trùng với trung điểm của AB_1), lấy B_1' sao cho $\overrightarrow{OB_1'} = \overrightarrow{A'B'}$ (trung điểm của OB' trùng với trung điểm của $A'B_1'$) thì phép đối xứng-trục Δ biến B_1 thành B_1'. Lấy C_1 sao cho $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{AC}$, lấy C_1' sao cho $\overrightarrow{OC_1'} = \overrightarrow{A'C'}$ thì phép đối xứng-trục Δ biến C_1 thành C_1'. Gọi $\vec{u}$ là một véctơ chỉ phương của Δ thì

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB_1}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OB_1'}\right)$ [mod 2π], $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC_1}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC_1'}\right)$ [mod 2π]. Từ đó

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OC_1}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB_1}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC_1'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OB_1'}\right)$$

$$= -\left(\overrightarrow{OB_1'}, \overrightarrow{OC_1'}\right) = -\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$$

ii) **HỆ QUẢ.** Phép đối xứng - trục (trong mặt phẳng) là một phép dời hình, làm đảo ngược hướng của hình.

iii) Đến đây chúng ta đã có cơ sở để phân loại các phép dời hình (đẳng cự) phẳng.

Phân loại các phép dời hình phẳng

ĐỊNH NGHĨA 4. Các phép dời hình phẳng được chia làm hai loại, loại một và loại hai tuỳ theo nó bảo toàn hướng hay đảo ngược hướng của hình.

Phép dời hình loại một cũng còn được gọi là phép dời hình thuận, hay ngắn gọn là phép dời hình. Phép dời hình loại hai cũng còn được gọi là phép dời hình nghịch, hay phép phản chiếu hoặc phép phản dời hình.

ĐỊNH NGHĨA 5.

- Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ là ảnh của nhau trong một phép dời hình thuận được gọi là hai hình bằng nhau thuận, hay ngắn gọn là hai hình bằng nhau, kí hiệu: $\mathscr{H}' = \mathscr{H}$.
- Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ là ảnh của nhau trong một phép dời hình nghịch được gọi là hai hình bằng nhau nghịch, hay phản bằng nhau, đôi khi được kí hiệu bởi: $\mathscr{H}' \doteqdot \mathscr{H}$, chẳng hạn:

$$\Delta A'B'C' \doteqdot \Delta ABC.$$

b) *Dạng chính tắc của phép dời hình phẳng*

Từ nội dung của phần b), c), d), e) và f) mục 3, §1, chương I, sau khi thực hiện việc biến đổi tương đương tích của ba phép đối xứng - trục, kết hợp với các định lí 7 và 8 của §1, chương I ta thu được kết quả sau đây nói lên mối quan hệ giữa một phép dời hình bất kì với các phép đối xứng - trục trong mặt phẳng và tích của chúng, gọi là dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng.

ĐỊNH LÍ 5 (*về dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng*)

Một phép dời hình phẳng nếu không phải là phép đồng nhất thì, hoặc là một phép đối xứng - trục, hoặc là một phép quay hay một phép tịnh tiến, hoặc là một phép đối xứng - trượt.

Chú thích

i) Các phép quay và tịnh tiến nói trong định lí 5 trên đây có thể gọi là những phép quay hay tịnh tiến thực sự, tức là góc quay $\varphi \neq 0$, vectơ tịnh tiến $\vec{v} \neq \vec{0}$. Còn phép quay góc $\varphi = 0$ hay phép tịnh tiến $\vec{v} = \vec{0}$ đều là không thực sự và là phép đồng nhất: $Q(P, 0) = Id$, $T(\vec{0}) = Id$.

ii) Có thể xem phép đối xứng - trục là trường hợp đặc biệt của phép đối xứng - trượt, ở đó vectơ trượt (vectơ tịnh tiến) bằng $\vec{0}$, tức là: $Đ(\Delta, \vec{0}) = Đ(\Delta)$

iii) Phép quay (thực sự) có một điểm bất động duy nhất là tâm quay; phép tịnh tiến (thực sự) không có điểm bất động nào; phép đối xứng - trượt cũng không có điểm bất động nào. Tuy nhiên, phép đối xứng - trục có một đường thẳng cố định mà mọi điểm trên đó đều là điểm bất động (điểm kép). Đó là trục đối xứng.

Dạng chính tắc của phép dời hình thuận và phép dời hình nghịch

Vì một phép dời hình là thuận hay nghịch được phân biệt bởi nó biểu thị được dưới dạng tích của 2 hay 2 ± 1 (tức 3 hoặc 1) phép đối xứng - trục nên ta thu được dạng chính tắc chi tiết hơn cho từng loại trong hai loại dời hình phẳng.

ĐỊNH LÍ 6 (*về dạng chính tắc của các phép dời hình và phản dời hình phẳng*).

i) Một phép dời hình thuận trong mặt phẳng thì, hoặc là phép biến hình đồng nhất, hoặc là một phép quay xung quanh một điểm, hoặc là một phép tịnh tiến.

ii) Một phép dời hình nghịch (phản dời hình) trong mặt phẳng thì, hoặc là một phép đối xứng - trục, hoặc là một phép đối xứng - trượt.

Chú ý

α) Phép quay thực sự (khác *Id*) là phép dời hình thuận có duy nhất một điểm bất động (là tâm quay).

β) Phép đối xứng - trục là phép phản dời hình có một đường thẳng cố định gồm toàn những điểm bất động.

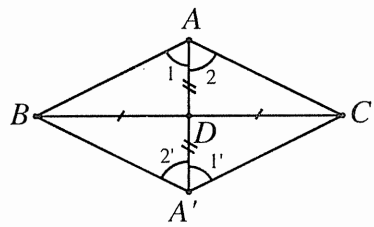
γ) Phép tịnh tiến và phép đối xứng – trượt (thực sự) theo thứ tự là phép dời hình và phép phản dời hình không có điểm bất động.

4. Vận dụng các phép dời hình phẳng vào giải toán hình học

a) *Áp dụng phép dời hình vào việc khảo sát tính chất của hình*

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu một tam giác có đường trung tuyến và đường phân giác phát xuất từ cùng một đỉnh mà trùng nhau thì tam giác đó là cân.

Thật vậy, giả sử tam giác ABC có đường trung tuyến AD đồng thời là đường phân giác (h.4.12).



Hình 4.12

Vì sẵn có D là trung điểm cạnh BC rồi, hay B và C đối xứng với nhau qua điểm D nên ta nghĩ đến phép đối xứng – tâm $Đ(D)$.

Phép này biến A thành A' và do đó, A' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BACA'$ tâm D.

Bởi vậy, $AC = BA'$ và $\widehat{A_2'} = \widehat{A_2} = \widehat{A_1}$; suy ra tam giác BAA' cân ở B và do đó $BA' = BA$.

Từ đó ta được $AB = AC$ và tam giác ABC cân ở A.

Chú thích. Về cơ bản, bài toán này chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức SGK Hình học 7, tuy nhiên cần phải vẽ thêm hình phụ để được hình 12. Ở đây chúng ta sử dụng ngôn ngữ biến hình trong việc trình bày lời giải của bài toán (cụ thể là phép đối xứng – tâm).

Ví dụ 2. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cho trước có hai đỉnh A, B cố định. Chứng minh rằng:

i) Khi C di động trên đường tròn (O) thì trực tâm H của tam giác ABC di động trên một đường tròn (O'); hãy xác định tâm và bán kính đường tròn đó.

ii) Với mọi vị trí của C trên (O), vectơ $\overrightarrow{CH}$ luôn được nhìn từ A dưới một góc định hướng (giữa hai đường thẳng) không đổi (h.4.13).

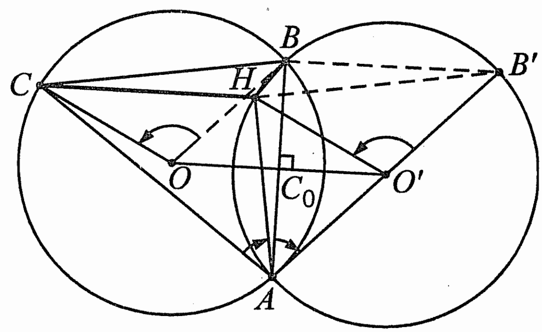
Giải

i) Trước hết, gọi C_0 là trung điểm cạnh AB, thiết lập hệ thức vectơ

$$\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC_0}$$

(tính chất trực tâm tam giác, xem Ví dụ 1 trong mục 4, §1, chương I).

Từ đó suy ra: $\{H\}$ là đường tròn (O'), được suy ra từ đường tròn (O, R) đã cho bởi phép tịnh tiến $T(\vec{v})$ theo $\vec{v} = 2\overrightarrow{OC_0}$; ngoài ra (O') cũng đối xứng với (O) qua (AB).



Hình 4.13

Sau đây là lời giải khác cho Mệnh đề i), không sử dụng biến hình tuy nhiên có động chạm đến khái niệm một phép biến hình. Trong trường hợp tam giác ABC không vuông, ta có:

$$(HA, HB) = (HA, CB) + (CB, CA) + (CA, HB) = (CB, CA) \text{ [mod } \pi].$$

Suy ra $\{H\}$ là một đường tròn (O') đi qua A và B.

Lại vì $(CB, CA) = -(CA, CB)$, [mod π] nên (O') là đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua (AB).

ii) Gọi B' là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo $\vec{v} = 2\overrightarrow{OC_0}$, thế thì $B' = Đ_{O'}(A)$ là điểm xuyên tâm - đối xứng của A trên đường tròn quỹ tích (O', R) của điểm H.

Từ đẳng thức $(\overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'H}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ [mod 2π] ta suy ra:

$(AB', AH) = (AB, AC)$ [mod π] (*)

và tiếp theo, từ (*), nhờ hệ thức Chasles ta thu được đpcm:

$$(AC, AH) = (AB, AB') = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}\right) \text{ không đổi, [mod } \pi].$$

Cách khác:

Về mệnh đề ii), gọi A' là hình chiếu của A trên BC ta có:

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC_0})$ [mod 2π], (xét đầy đủ hai trường hợp về vị trí của C thuộc hai nửa mặt phẳng có bờ là (AB)). Suy ra hai tam giác CAA' và

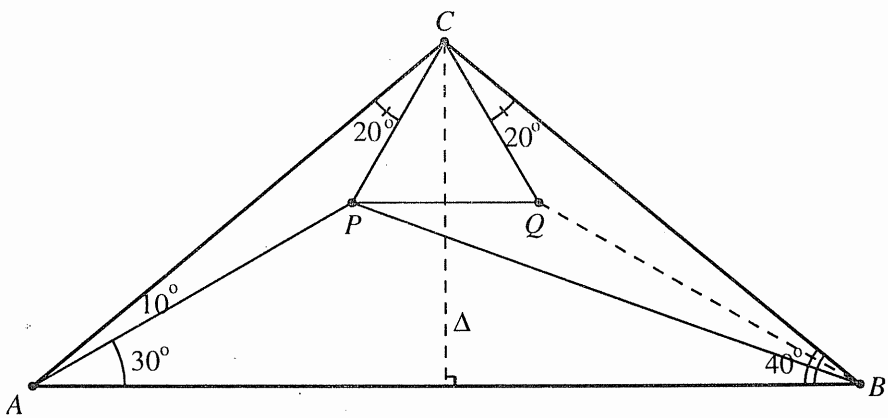
OAC_0 đồng dạng thuận, từ đó $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC_0})$, cũng có nghĩa là: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC_0})$ không đổi khi C chuyển động trên (O).

Ví dụ 3. Giả sử P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PAC} = 10^\circ$, $\widehat{PCA} = 20^\circ$, $\widehat{PAB} = 30^\circ$ và $\widehat{ABC} = 40^\circ$. Hãy xác định độ lớn góc $\widehat{BPC}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại tính toán các đại lượng hình học; cụ thể là tính độ lớn (số đo) của một góc giữa hai tia. Bài toán này vì thế có thể có nhiều lời giải khác nhau, đặc biệt là tìm hướng tính toán dựa trên vận dụng định lí sin và côsin trong hình tam giác. Tuy nhiên, đối với trường hợp bài toán này, từ đặc thù của tam giác ABC chúng ta lại nghĩ đến việc sử dụng một phép biến hình. Đó chính là phép đối xứng - trục.

Thật vậy, theo giả thiết của bài toán thì, rõ ràng là tam giác ABC cân ở C, có góc ở đỉnh $\widehat{C} = 100^\circ$ (vì hai góc $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ mỗi góc 40°). Do đó, đường cao hạ từ C trùng với trung trực $t[AB]$ (của $[AB]$) là trục đối xứng của tam giác ABC.

Gọi $\Delta = t[AB]$, $\Delta \ni C$. Dựng điểm $Q = Đ_\Delta(P)$, ta được $CP = CQ$ và $\widehat{QCB} = \widehat{PCA} = 20^\circ$. Từ đó suy ra tam giác CPQ là đều (h.4.14) rồi tính được $\widehat{BQP} = 150^\circ$. Vì vậy, $\widehat{BQP} = \widehat{BQC} = 150^\circ$ và $\Delta BQC = \Delta BQP$ (c, g, c). Bởi thế, BQ không những là phân giác của góc $\widehat{CBP}$ mà còn là phân giác của góc $\widehat{CQP}$, đồng thời phép đối xứng - trục $Đ(BQ)$ biến ΔBQC thành ΔBQP, trong đó $BC \to BP$, $BP \to BC$ và $\widehat{BCP} \to \widehat{BPC}$.



Hình 4.14

Vì vậy: $\widehat{BPC} = \widehat{BCP} = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$ và do đó, tam giác BCP cân ở B có góc ở đỉnh B bằng 20°.

Trả lời: $\widehat{BPC} = 80^\circ$.

b) *Áp dụng phép dời hình vào việc tìm quỹ tích (tìm tập hợp điểm)*

Ví dụ 4.

i) Chứng minh định lí Pompiu: Giả sử P là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác đều ABC cho trước. Bao giờ cũng tồn tại một tam giác $\mathcal{T}$ có độ dài ba cạnh bằng các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh của tam giác đều đã cho đó, kể cả trường hợp $\mathcal{T}$ có thể suy biến thành đoạn thẳng; kí hiệu $\mathcal{T} = \mathcal{T}(PA, PB, PC)$.

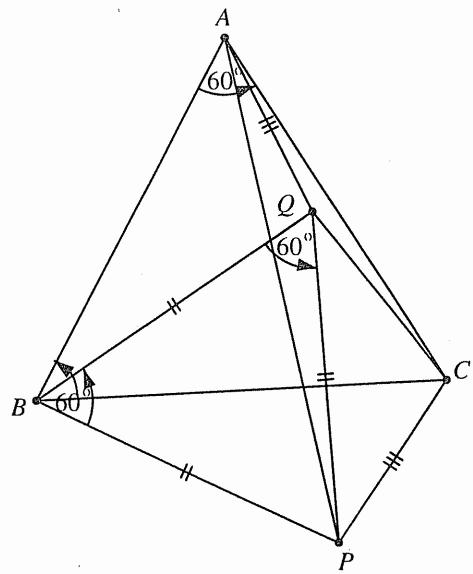
ii) Hãy tìm quỹ tích của điểm P để $\mathcal{T}$ suy biến thành đoạn thẳng

Nhận xét. Định lí Pompiu nêu trên đây cho ta biết một tính chất đặc trưng của tam giác đều. Có nhiều cách chứng minh định lí Pompiu. Sau đây là cách chứng minh nhờ sử dụng phép quay góc 60°.

Phân tích. Giả sử $PA = \max\{PA, PB, PC\}$.

Nếu tồn tại tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ thì ắt phải tồn tại một điểm Q trong mặt phẳng sao cho $PQ = PB$ và $QA = PC$ (h.4.15). Thế thì, hai tam giác BAQ và BCP (đã có $BA = BC$ và $AQ = CP$) sẽ bằng nhau khi và chỉ khi $BQ = BP$, và do đó, khi và chỉ khi $\widehat{PBQ} = 60^\circ$.

Sự phân tích này làm nảy sinh ý tưởng sử dụng phép quay góc 60° xung quanh điểm B một cách hết sức tự nhiên.



Hình 4.15

i) Thật vậy, nếu tam giác đều ABC đã cho có hướng thuận thì, phép quay $Q(B, +60^\circ)$ giữ bất động điểm B, biến C thành A và biến P thành điểm Q (sao cho BPQ là một tam giác đều và cũng có hướng thuận) và do đó, biến ΔBCP thành ΔBAQ (h.4.15). Từ đó suy ra: $PQ = QB = PB$ và $QA = PC$. Nói khác đi là, ΔQAP chính là một tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ đòi hỏi, được sinh ra từ điểm P do thực hiện phép quay $Q(P, 60^\circ)$; đpcm.

ii) Tam giác $\mathcal{T}$ này được sinh ra bởi điểm P tương ứng sẽ suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi P, Q, A thẳng hàng, nghĩa là:

$\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ suy biến khi và chỉ khi $(QP, QA) = 0^\circ$ [mod 180°]; (1)

Lại từ $\Delta BAQ = \Delta BCP$, ta có: $\overline{(QB,QA)} = \overline{(PB,PC)}$, hay là (hệ thức Chasles): $\forall P \in$ mp(ABC), ta có:

$$\overline{(QB,QP)} + \overline{(QP,QA)} = \overline{(PB,PC)} \ \text{[mod } 180^\circ] \qquad (2)$$

Mặt khác, do ΔBPQ là đều và cùng hướng (thuận) với ΔBCA đều, nên ta có:

$$\overline{(QB,QP)} = \overline{(AB,AC)} = 60^\circ \ \text{[mod } 180^\circ] \qquad (3)$$

Đối chiếu (1), (2) và (3) ta suy ra: Tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC) = \Delta QAP$ suy biến khi và chỉ khi:

$$\overline{(PB,PC)} = \overline{(AB,AC)} \ \text{[mod } 180^\circ]. \qquad (4)$$

Hệ thức (4) cho ta biết: Quỹ tích những điểm P để $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ suy biến là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

iii) Chú thích

α) Từ kết luận trên đây ta suy ra tức khắc hệ quả sau đây.

Tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ thực sự (không suy biến) tồn tại với mọi điểm P nằm trong mặt phẳng của tam giác đều ABC đã cho nhưng không thuộc đường tròn (ABC) ngoại tiếp tam giác đó. Hay nói cách khác: $\{P\}$ để tồn tại thực sự tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ là mặt phẳng $(ABC) \setminus$ đường tròn (ABC).

β) Điều nhận xét nêu trên ngay sau phát biểu nội dung của định lí Pompiu là một điều khẳng định nhưng chưa được chứng minh. Định lí Pompiu mới chỉ cho chúng ta biết một tính chất thú vị của tam giác đều, nhưng chưa khẳng định được tính chất đó là một tính chất đặc trưng của tam giác đều.

Sau đây là *Mệnh đề đảo của định lí Pompiu:*

ABC là một tam giác nằm trong mặt phẳng $\mathscr{P}$. Nếu với mọi điểm *P* của $\mathscr{P}$ đều tồn tại một tam giác $\mathscr{T}(PA, PB, PC)$ có độ dài ba cạnh bằng các khoảng cách từ *P* đến các đỉnh *A*, *B* và *C* của tam giác đó, bao gồm cả trường hợp $\mathscr{T}$ suy biến thành đoạn thẳng thì, nhất thiết *ABC* phải là một tam giác đều.

Chứng minh mệnh đề này xin dành cho bạn đọc có thời gian rảnh rỗi để tập dượt và suy ngẫm, chiêm ngưỡng vẻ đẹp và sự hấp dẫn của vấn đề đặt ra.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng cho một cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma B}$. Một tia *Ax* quay xung quanh *A*, đồng thời một động tử *M* cũng chuyển động trên tia đó sao cho hễ *Ax* cắt cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ ở một điểm *N* nào đó thì luôn luôn ta có $AM = BN$. Tìm hình vạch nên bởi điểm *M* khi *N* vạch nên cung tròn đã cho.

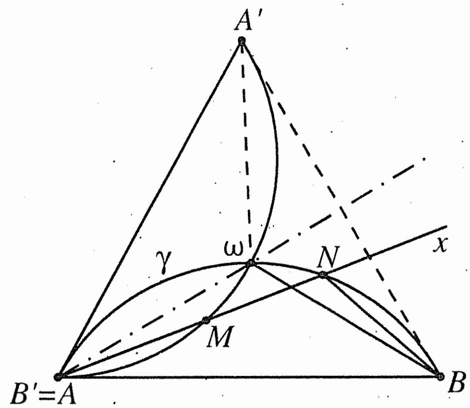
Giải. Đặt $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \varphi$ [mod 2π] thì $\{N\} = \overset{\frown}{A\gamma B}$.

Thế thì: $\begin{cases} \left(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{AM}\right) = -\varphi \ [\text{mod}\, 2\pi] \\ BN = AM. \end{cases}$

Hai đẳng thức này hoàn toàn xác định một phép dời hình $\mathscr{D}$ (xem bài toán 8 của chương I).

Để ý rằng khi $N = B$ thì $M = A$ và $\varphi \neq 0$ [mod 2π] nên $\mathscr{D}$ là một phép quay.

Dễ thấy rằng $\mathscr{D}$ có điểm bất động (tâm quay) duy nhất là trung điểm ω của cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ (ở đó $M = N = \omega$) và do đó, $\mathscr{D}$ là phép quay $Q(\omega, -\varphi)$ tâm ω, góc quay $-\varphi$ [mod 2π]. Phép quay này biến *B* thành *A* và *A* thành *A'*, xác



Hình 4.16

định bởi các hệ thức $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) = -\varphi$ và $\omega A' = \omega A$. Nó còn cho ta biết $A' = Đ_{A\omega}(B)$, đối xứng với B qua ($A\omega$) (h.4.16).

Kết luận. Quỹ tích của M là cung tròn $\overset{\frown}{A\gamma' A'}$ được suy ra từ $\{N\} = \overset{\frown}{A\gamma B}$ bởi phép đối xứng - trục $Đ(A\omega)$ qua đường thẳng $(A\omega)$, trong đó ω là trung điểm cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$.

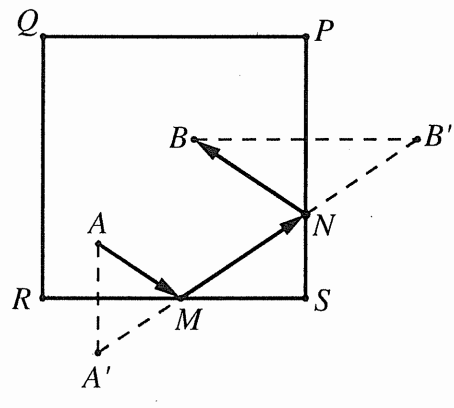
c) *Áp dụng phép dời hình vào giải các bài toán dựng hình*

Ví dụ 6. Tìm đường đi của một quả bi-a, sao cho sau khi chạm hai lần vào thành bàn, nó đi từ điểm A đến điểm B (h.4.17).

Giải. Trước hết, để ý rằng do tác dụng của lực đẩy bắn vào quả bi-a của người chơi, quả bi-a sau khi chạm vào thành bàn (bàn bi-a có dạng hình chữ nhật hoặc hình vuông $PQRS$) thì phản xạ trở lại theo quy luật như phản xạ ánh sáng, tức là góc phản xạ bằng góc tới: tia phản xạ đối xứng với tia tới qua pháp tuyến của thành bàn tại điểm chạm (h.4.17).

Như vậy, rõ ràng phép đối xứng - trục đã phát huy tác dụng giúp ta giải bài toán dựng hình này.

Gọi M và N lần lượt là điểm chạm lần thứ nhất và lần thứ hai của quả bi-a với các thành bàn RS và SP sau khi xuất phát từ điểm A (gần điểm góc R của bàn) trên mặt bàn để rồi bật trở lại điểm B (gần điểm góc P của bàn) cũng đã được định sẵn trên mặt bàn bi-a hình chữ nhật $PQRS$ (h.4.17). Thế thì, theo quy luật phản xạ nói trên, đường thẳng MN chứa tia phản xạ ở M và cũng là tia tới ở N phải đi qua các điểm $A' = Đ_{RS}(A)$ và $B' = Đ_{SP}(B)$. Từ đó suy ra cách xác định các vị trí M và N của quả bi-a chạm vào các thành bàn RS và SP: $[A'B'] \cap \{[RS], [SP]\} = \{M, N\}$.



Hình 4.17

Kết luận: Đường gấp khúc ba đốt $AMNB$ là đường đi phải tìm của quả bi-a sau khi chạm hai lần liên tiếp vào các thành bàn $[RS]$ và $[SP]$.

Chú ý. Biện luận về khả năng có lời giải của bài toán phụ thuộc vào vị trí của các điểm A và B (đã sắp đặt sẵn trên mặt bàn bi-a).

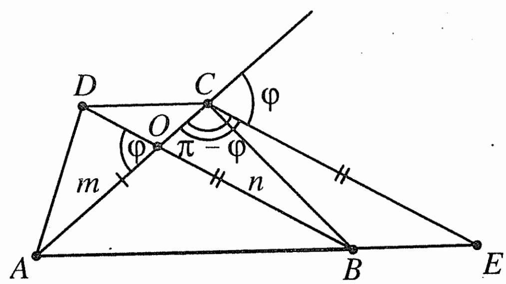
Ví dụ 7. Dựng một hình thang biết độ dài của một cạnh đáy, độ dài hai đường chéo và góc (góc nhọn) giữa chúng.

Phân tích. Giả sử hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) đã dựng được, có các cạnh đáy $AB = a$, hai đường chéo $AC = m$, $BD = n$ và góc $\widehat{(AC, BD)} = \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Để làm xuất hiện một tam giác có một góc bằng φ hoặc $\pi - \varphi$ và hai cạnh góc đó bằng m và n, lẽ tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{DC}$. Và do đó, bài toán được quy về dựng tam giác ACE có $CA = m$, $CE = n$ và $\widehat{ACE}$ bằng $\pi - \varphi$ hoặc φ, trong đó E được suy ra từ B trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{DC}$ (h.4.18), nghĩa là $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ hay E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBE$ và φ ($\leq \dfrac{\pi}{2}$) là góc của hai đường chéo AC, BD. Từ đó ta suy ra cách dựng hình thang cần tìm theo trình tự như sau:

Dựng hình:

- Trước hết, dựng tam giác ACE như đã nói ở trên.
- Sau đó, trên tia $[AE)$ dựng điểm B xác định bởi $AB = a$.
- Cuối cùng, dựng điểm D xác định bởi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$, là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CEBD$.



Hình 4.18

Biện luận. Bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi $a < a'$, trong đó a' là độ dài đoạn thẳng AE, $AE = a'$ với $a' = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\varphi}$.

Cuối cùng, bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi:

$$0 < \varphi < \varphi_0 = \arccos\frac{a^2 - \left(m^2 + n^2\right)}{2mn}.$$

BÀI TẬP

Bài tập về diện tích đại số của đa giác định hướng (1-6)

1. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm hai đáy AB, CD của hình thang $ABCD$ ($AB // CD$). Chứng minh rằng $M \in (IJ) \Leftrightarrow \bar{s}(MDA) = \bar{s}(MBC)$

2. Gọi F, G theo thứ tự là trung điểm hai đường chéo AC, BD của tứ giác lồi $ABCD$. Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng

$$\bar{s}(EFG) = -\frac{1}{4} \cdot \bar{s}(ABCD).$$

3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm hai đường chéo AC, BD của tứ giác. Chứng minh rằng

$$P \in (MN) \Leftrightarrow \bar{s}(PAB) + \bar{s}(PCD) = \bar{s}(PBC) + \bar{s}(PDA).$$

4. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với diện tích S. Trên đường thẳng CD lấy điểm P_1 sao cho $S_{\Delta ABP_1} = \dfrac{S}{2}$ và hai điểm C, P_1 nằm về cùng một phía của đường thẳng AB. Các điểm $P_2 \in (BC), P_3 \in (AB)$ và $P_4 \in (DA)$ được xác định tương tự. Chứng minh rằng các điểm P_1, P_2, P_3 và P_4 thẳng hàng.

5*. a) Cho họ n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng tổng

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JA_1} \wedge \overrightarrow{JA_2} + \overrightarrow{JA_2} \wedge \overrightarrow{JA_3} + \cdots + \overrightarrow{JA_{n-1}} \wedge \overrightarrow{JA_n} + \overrightarrow{JA_n} \wedge \overrightarrow{JA_1}\right)$$

(viết tắt $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{JA_i} \wedge \overrightarrow{JA_{i+1}}$, với quy ước $A_{n+1} = A_1$) không phụ thuộc vào vị trí của điểm J trong mặt phẳng.

Giá trị không đổi đó gọi là *diện tích đại số của họ điểm đã cho* (họ điểm này còn được gọi là "hình n-đỉnh" hay "n-giác"), kí hiệu $\bar{s}(A_1 A_2 \ldots A_n)$.

b) Với bốn điểm A, B, C, D trong mặt phẳng, chứng minh

$$\bar{s}(ABCD) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}.$$

Từ đó suy ra $\bar{s}(ABCD)=0$ khi và chỉ khi AC và BD cùng phương (giả sử $A\neq C$ và $B\neq D$).

Khi $ABCD$ là một tứ giác đơn (không nhất thiết phải là tứ giác lồi), định hướng thuận, chứng minh rằng $\bar{s}(ABCD)$ là diện tích thông thường của tứ giác (tức là miền giới hạn bởi tứ giác đơn đó).

c) Cho ba điểm M,N,P theo thứ tự nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC mà M,N,P không thẳng hàng và không trùng với các đỉnh của tam giác. Chứng minh rằng nếu có điểm O trong mặt phẳng sao cho $\bar{s}(ONAP)=\bar{s}(OPBM)=\bar{s}(OMCN)$ thì O là trọng tâm của tam giác tạo bởi các đường thẳng theo thứ tự đi qua A,B,C và tương ứng song song với NP,PM,MN.

6*. a) Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M nằm trong cùng mặt phẳng với tam giác ABC, đặt $x=\dfrac{\bar{s}(MBC)}{\bar{s}(ABC)}, y=\dfrac{\bar{s}(MCA)}{\bar{s}(ABC)}, z=\dfrac{\bar{s}(MAB)}{\bar{s}(ABC)}\cdot$ Chứng minh rằng $(x;y;z)$ là tọa độ trọng tâm của M đối với tam giác ABC, tức là thỏa mãn $x+y+z=1$ và với mọi điểm O đều có $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

b) Biết toạ độ trọng tâm của các điểm M,N,P đối với tam giác ABC, hãy tính $\bar{s}(MNP)$.

c) Biết tọa độ trọng tâm của các điểm M,N,P,Q đối với tam giác ABC, hãy tính $\bar{s}(MNPQ)$.

d) Cho tam giác ABC và điểm J nằm bên trong tam giác đó.

Tìm các điểm M,N,P theo thứ tự trên các cạnh BC,CA,AB (không trùng với các đỉnh) sao cho ba tứ giác (không nhất thiết phải lồi) $JNAP$, $JPBM$, $JMCN$ có diện tích bằng nhau.

Bài tập về sự xác định và dạng chính tắc của phép dời hình phẳng (7-13)

7. Trong mặt phẳng cho hai tam giác cân bằng nhau ABC và $A'B'C'$, và cân ở A và A'. Tìm các phép dời hình và phản dời hình biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai.

8. Cho hai tam giác đều có cạnh bằng nhau ABC và $A'B'C'$. Hãy xác định tất cả các phép dời hình và phản dời hình (phẳng) biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai.

9. Trong mặt phẳng cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ bằng nhau và cùng hướng nhưng không có hai cạnh tương ứng nào song song với nhau. Chứng minh rằng có một điểm O duy nhất cách đều cả ba cặp điểm A, A'; B, B' và C, C'.

10*. Trong mặt phẳng cho hai tam giác phản bằng nhau: $\Delta ABC \doteqdot \Delta A'B'C'$.

Chứng minh rằng các trung điểm A_0, B_0 và C_0 của các đoạn thẳng AA', BB' và CC' nối các cặp đỉnh tương ứng, là ba điểm thẳng hàng.

11. Cho $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hai tứ giác lồi của mặt phẳng P. Chứng minh rằng nếu $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A'D' = AD$ và $C'D' = CD$ thì $B'D' = BD$ và hai tứ giác đó bằng nhau (thuận hay nghịch):

$$A'B'C'D' = ABCD \text{ hoặc } A'B'C'D' \doteqdot ABCD.$$

12. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ có cạnh bằng nhau và có một đỉnh A chung. Tìm tất cả các phép dời hình và phản dời hình biến hình vuông thứ nhất thành hình vuông thứ hai.

13*. Giả sử $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ giác (lồi) nội tiếp một đường tròn (O). Gọi H_i là trực tâm của tam giác $A_jA_kA_l$ với $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Chứng minh rằng hai tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ và $H_1H_2H_3H_4$ bằng nhau thuận:

$$\mathscr{H}'(H_1H_2H_3H_4) = \mathscr{H}(A_1A_2A_3A_4).$$

Bài tập vận dụng các phép dời hình vào giải toán hình học (14-26)

14. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác $\mathscr{T}$ mà các cạnh bằng các đường trung tuyến của một tam giác ABC nào đó và diện tích của $\mathscr{T}$ bằng $\dfrac{3}{4}$ diện tích tam giác ABC.

15. Hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC = a$. Qua A kẻ các đường cao AE và AF xuống các cạnh BC và CD. Tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác AEF, cho biết $EF = b$ $(b < a)$.

16*. Hai điểm M và N chuyển động trên đường thẳng chứa cạnh AB của một tam giác ABC sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng (BC) và của N trên đường thẳng (CA); S là trung điểm của AN và Q là tâm đường tròn (CDE). Chứng minh SQ có độ dài không đổi; từ đó suy ra quỹ tích của Q khi $\overrightarrow{MN}$ trượt trên đường thẳng AB.

17. Hai người chơi một trò chơi "đặt đồng xu lên mặt bàn hình chữ nhật". Quy tắc chơi như sau: Đồng xu được phép đặt vào bất cứ chỗ trống nào, hai người lần lượt đặt các đồng xu lên mặt bàn. Ai đến lượt đi mà không thể đặt được đồng xu vào đâu thì bị thua. Chứng minh rằng nếu biết cách chơi thì người đi đầu luôn thắng cuộc.

18. Hãy cắt một tam giác ABC cho trước bằng ba đường thẳng song song với các cạnh của tam giác để thu được một lục giác (lồi) ngoại tiếp được một đường tròn.

19. Một đường tròn thứ ba (γ) cắt hai đường tròn đồng tâm O lần lượt trên (γ) ở các điểm A, C, B, D. Chứng minh rằng nếu A, B, O thẳng hàng thì C, D, O cũng thẳng hàng.

20. Hai đường tròn bằng nhau (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) ở các điểm A_1 và A_2. Một điểm M tuỳ ý của (O) được nối với A_1 và A_2. Các đoạn thẳng MA_i cắt (O_i) ở các điểm B_i tương ứng, $(i = 1, 2)$. Chứng minh rằng $B_1B_2 // A_1A_2$.

21. Cho tam giác ABC cân ở A. Một đường thẳng Δ quay quanh A. Gọi D là điểm đối xứng với C qua Δ. Tìm quỹ tích giao điểm M của đường thẳng BD và Δ.

22. Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B nằm cùng phía với đường thẳng đó. Hãy tìm trên đường thẳng xy một điểm P sao cho góc $\widehat{APx}$ bằng hai lần góc $\widehat{BPy}$.

23. Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1) và (O_2). Tìm tất cả các phép dời hình thuận và nghịch (dời hình và phản dời hình) biến đường tròn này thành đường tròn kia.

24. Chứng minh rằng hai đường tròn bằng nhau và cắt nhau ở hai điểm thì tương ứng với nhau trong một phép quay mà tâm quay là một trong hai giao điểm đó và các đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng trên hai đường tròn thì đồng quy ở giao điểm thứ hai.

25. Cho ba điểm A, C, B phân biệt và thẳng hàng theo thứ tự đó. Dựng hai tam giác đều BCM và CAN. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của BN và AM. Chứng minh rằng CDE là một tam giác đều.

26*. Cho một tam giác đều ABC. Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng sao cho MA, MB và MC là độ dài các cạnh của một tam giác vuông nào đó.

§2. PHÉP ĐỒNG DẠNG PHẲNG

1. Điểm bất động và dạng chính tắc của một phép đồng dạng phẳng

a) Phân loại các phép đồng dạng phẳng

Cũng giống như phép dời hình, phép đồng dạng được chia làm hai loại, loại một và loại hai tuỳ theo nó bảo toàn hướng hay đảo ngược hướng của hình.

Ta gọi là phép đồng dạng thuận, hay vắn tắt là phép đồng dạng, một phép đồng dạng phẳng bảo toàn hướng của hình.

Ta gọi là phép đồng dạng nghịch, hay còn gọi là đồng dạng gương hoặc phản đồng dạng, một phép đồng dạng phẳng đảo ngược hướng của hình.

Chú thích.

i) Phép đồng dạng thuận là một phép biến hình bảo giác đồng thời cũng bảo toàn độ lớn đại số của góc định hướng (giữa hai tia, giữa hai đường thẳng). Phép đồng dạng nghịch là một phép biến hình bảo giác nhưng chỉ bảo toàn độ lớn số học của góc định hướng do làm đảo hướng của góc, tức là biến góc dương (độ lớn dương) thành góc âm (độ lớn âm) và ngược lại.

ii) Vì có hai loại phép đồng dạng, thuận và nghịch nên để phân biệt rõ hai hình nào đó là đồng dạng thuận hay đồng dạng nghịch, nếu thấy cần thiết, đôi khi người ta cũng đưa vào kí hiệu để chỉ rõ điều đó. Chẳng hạn, $\mathscr{H}' \mathrel{\dot{\backsim}} \mathscr{H}$, $\Delta A'B'C' \mathrel{\dot{\backsim}} \Delta ABC$ chỉ rằng hai hình $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$ và hai tam giác này là đồng dạng nghịch.

iii) Từ hệ quả của định lí 17 trong mục 3, §2, chương I, ta suy ra:

α) Một phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng tương đương với tích của một phép vị tự và một phép quay hay một phép tịnh tiến (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại).

β) Một phép đồng dạng nghịch trong mặt phẳng tương đương với tích của một phép vị tự và một phép đối xứng - trục hay đối xứng - trượt (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại).

b) *Dạng chính tắc của một phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng*

ĐỊNH LÍ 7 VÀ ĐỊNH NGHĨA. *Một phép đồng dạng thuận hệ số $k \neq 1$ trong mặt phẳng bao giờ cũng phân tích được một cách duy nhất thành tích giao hoán được của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép quay góc φ tâm O, O là điểm bất động duy nhất của phép đồng dạng (tích giao hoán này được gọi là phép vị tự – quay*[1]*, φ gọi là góc đồng dạng).*

Chứng minh

- *Một số nhận xét*:

- Tích của một phép vị tự với một phép quay cùng tâm luôn giao hoán được và nhận tâm đó làm điểm bất động;

- Điểm bất động của phép đồng dạng hệ số $k \neq 1$, nếu có, là duy nhất vì nếu phép đồng dạng đó biến O thành $O' \equiv O$, biến O_1 thành $O_1' \equiv O_1$ thì $O'O_1' = kOO_1$ tức $OO_1 = kOO_1$ nên từ $k \neq 1$ suy ra $O \equiv O_1$.

- Từ đó nếu có phân tích $Q \circ V$ (vị tự và quay cùng tâm O) $= Q_1 \circ V_1$ (vị tự và quay cùng tâm O_1) thì khi các phép vị tự V, V_1 có tỉ số dương khác 1, các điểm O, O_1 phải trùng nhau, từ đó $V = V_1$ và suy ra $Q = Q_1$ tức là phân tích trên là duy nhất.

- Vì mọi phép đồng dạng thuận hoàn toàn được xác định bởi ảnh A', B' của cặp điểm phân biệt A, B cho trước nên việc chứng minh định lí đưa về: cho A, B (A khác B) và A', B' mà $A'B' = kAB$ ($k > 0$, $k \neq 1$), hãy tìm điểm O sao

---

[1] Đây là một danh từ ghép (ghép hai thuật ngữ đều chỉ hai phép biến hình), vì vậy nên thêm một dấu gạch nối để phù hợp với quy ước thông lệ quốc tế về mặt ngôn ngữ. (Các thuật ngữ "đối xứng - tâm", "đối xứng - trục", "đối xứng - trượt" cũng là những danh từ ghép.)

cho có phép quay tâm O góc φ biến A, B thành A_1, B_1 mà phép vị tự tâm O, tỉ số k biến A_1, B_1 thành A', B' đã cho. Khi đó

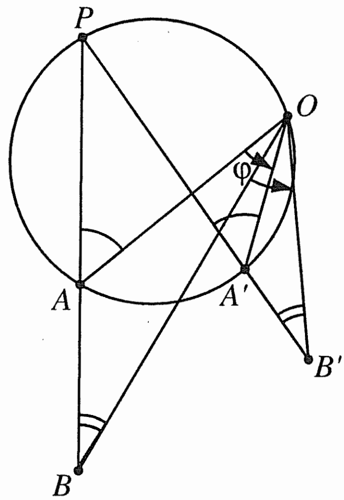
$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA_1}\right)=\varphi=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB_1'}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right) \text{ và}$$

$\varphi=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A_1B_1}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right)$ nên đưa về hãy tìm điểm O sao cho

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) \ [\text{mod } 2\pi]$$

mà trước hết là tìm điểm O sao cho

$$\overline{(OA,OA')}=\overline{(OB,OB')}=\overline{(AB,A'B')} \ [\text{mod } \pi].$$



Hình 4.19

Xét trường hợp các đường thẳng AB, $A'B'$ không cùng phương. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng đó và giả sử P, A, A' không thẳng hàng, P, B, B' không thẳng hàng.

Ta có

$$\overline{(PA,PA')}=\overline{(AB,A'B')}=\overline{(OA,OA')} \ [\text{mod } \pi]$$

$$\overline{(PB,PB')}=\overline{(AB,A'B')}=\overline{(OB,OB')} \ [\text{mod } \pi]$$

nên O phải thuộc giao của hai đường tròn qua P, A, A' và qua P, B, B'.

Bây giờ giả sử P và O là các giao điểm của hai đường tròn qua P, A, A' và qua P, B, B'. Hãy chứng minh rằng có phép vị tự-quay tâm O biến A, B thành A', B'.

Ta có:

$$\overline{(OA,OA')}=\overline{(PA,PA')}=\overline{(PB,PB')}=\overline{(OB,OB')} \ [\text{mod } \pi]$$

$$\overline{(A'O,A'A)}=\overline{(PO,PA)}=\overline{(PO,PB)}=\overline{(B'O,B'B)} \ [\text{mod } \pi]$$

$$\overline{(AA',AO)}=\overline{(PA',PO)}=\overline{(PB',PO)}=\overline{(BB',BO)} \ [\text{mod } \pi]$$

nên hai tam giác OAA', OBB' có các góc định hướng giữa các đường thẳng chứa các cạnh theo thứ tự bằng nhau. Từ đó suy ra được hai tam giác đó đồng dạng thuận (chú ý rằng hai tam giác có các cạnh theo thứ tự cùng phương thì đồng dạng thuận). Từ đó $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)$ [mod 2π] và phép quay tâm O với góc quay $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)$ biến A, B thành A_1, B_1 sao cho OA_1B_1 vị tự (tâm O hệ số $k=\dfrac{A'B'}{AB}$) với OAB. Lập luận trên vẫn đúng khi O trùng với P (hai đường tròn qua P, A, A' và qua P, B, B' tiếp xúc tại P) và cũng dễ suy ra trực tiếp kết luận do lúc này các đường thẳng AA' và BB' cùng phương.

Chứng minh trên, thay đổi ít nhiều cũng dùng được cho trường hợp AB, $A'B'$ không cùng phương nhưng $P = AB \cap A'B'$, A, A' thẳng hàng hay P, B, B' thẳng hàng.

Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng, dễ thấy có phép vị tự tỉ số dương biến A, B thành A', B' còn khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ cùng phương nhưng khác hướng thì còn cần thêm một phép quay góc π nữa.

Chú ý. Ta đã biết mọi phép dời hình thuận mà không phải là phép tịnh tiến đều là một phép quay. Chứng minh trên đây cũng cho phép tìm tâm quay: giao điểm thứ hai của đường tròn qua P, A, A' và qua P, B, B' ($P = AB \cap A'B'$).

Phép đồng dạng thuận tâm O, góc φ và tỉ số k được kí hiệu là $Z(O, \varphi, k)$. Như vậy:

$$Z(O, \varphi, k) = Q(O, \varphi) \circ V(O, k) = V(O, k) \circ Q(O, \varphi).$$

c) *Dạng chính tắc của một phép đồng dạng nghịch trong mặt phẳng*

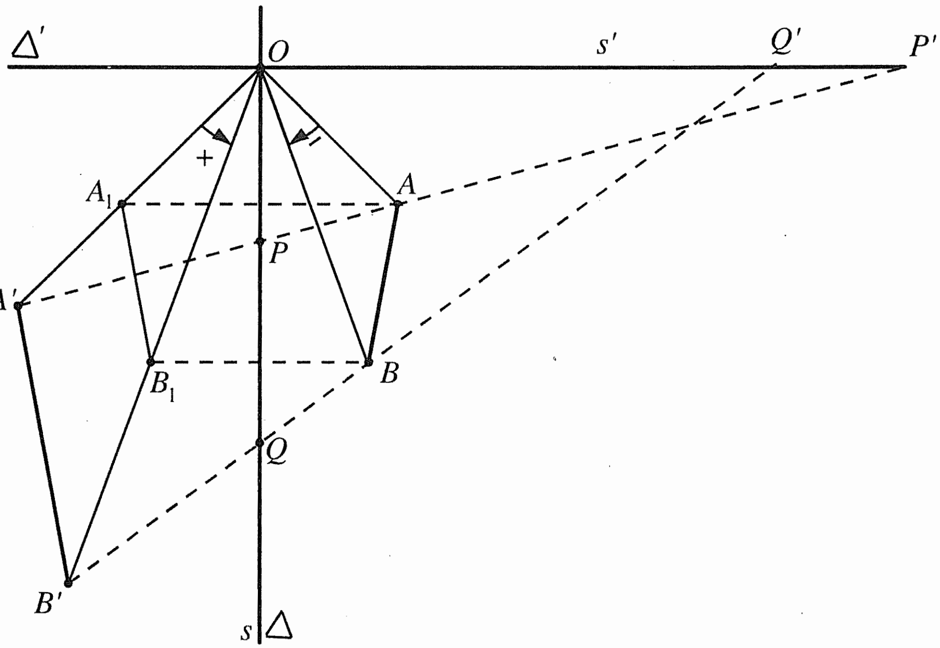
ĐỊNH LÍ 8 VÀ ĐỊNH NGHĨA. *Một phép đồng dạng nghịch hệ số $k \neq 1$ trong mặt phẳng phân tích được một cách duy nhất thành tích giao hoán được của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép đối xứng qua một đường thẳng Δ đi qua O, O là điểm bất động duy nhất của phép đồng dạng (tích giao hoán này được gọi là phép vị tự – đối xứng, Δ gọi là trục của phép đồng dạng, O gọi là tâm đồng dạng).*

Chứng minh:

- *Một số nhận xét*:

- Tích của một phép vị tự tâm O với một phép đối xứng qua một đường thẳng đi qua O luôn giao hoán được và nhận O làm điểm bất động;

- Điểm bất động của phép đồng dạng hệ số $k \neq 1$, nếu có, là duy nhất. Từ đó nếu có phân tích $Đ \circ V$ (vị tự tâm O với phép đối xứng qua đường thẳng đi qua O) $= Đ_1 \circ V_1$ (vị tự tâm O_1 với phép đối xứng qua đường thẳng đi qua O_1) thì khi các phép vị tự V, V_1 có tỉ số dương khác 1, các điểm O, O_1 phải trùng nhau, từ đó $V = V_1$ và suy ra $Đ = Đ_1$ tức là phân tích trên là duy nhất.



Hình 4.20

- Vì mọi phép đồng dạng nghịch hoàn toàn được xác định bởi ảnh A', B' của cặp điểm phân biệt A, B cho trước nên việc chứng minh định lí đưa về: cho A, B (A khác B) và A', B' mà $A'B' = kAB$ ($k > 0$, $k \neq 1$), hãy tìm điểm O và đường thẳng Δ đi qua O sao cho tích của phép đối xứng qua Δ với phép vị tự tâm O, tỉ số k biến A, B thành A', B'.

Nếu có phân tích như thế thì Δ phải có véctơ chỉ phương $\vec{u}$ mà $\left(\vec{u},\overrightarrow{A'B'}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ [mod 2π] và Δ phải đi qua các điểm P, Q mà $\overrightarrow{PA'}=-k\overrightarrow{PA}$ (nếu A' khác A), $\overrightarrow{QB'}=-k\overrightarrow{QB}$ (nếu B' khác B) (khi A' trùng với A, coi $P\equiv A\equiv A'$; khi B' trùng với B, coi $P\equiv B\equiv B'$).

Bây giờ hãy chứng minh có phân tích nói trên.

Lấy $\vec{u}$ là một vectơ khác $\vec{0}$ thoả mãn $\left(\vec{u},\overrightarrow{A'B'}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ [mod 2π].

Xét điểm P thoả mãn $\overrightarrow{PA'}=-k\overrightarrow{PA}$ (nếu A' khác A) (khi $A'\equiv A$, xét B, B' và Q mà $\overrightarrow{QB'}=-k\overrightarrow{QB}$). Gọi Δ là đường thẳng qua P (hay Q) với vectơ chỉ phương $\vec{u}$, gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua Δ thì đường thẳng $A'A_1$ cắt Δ (để ý rằng $k\neq 1$) tại O (nếu $A'\equiv A$ thì xét B_1 đối xứng với B qua Δ, ...). Khi O, A, A' không thẳng hàng thì Δ là đường phân giác trong của tam giác OAA' nên $\dfrac{OA'}{OA_1}=\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{PA'}{PA}=k$ (khi O, A, A' thẳng hàng, dễ thấy rằng ta cũng có các đẳng thức đó), từ đó $\overrightarrow{OA'}=-k\overrightarrow{OA_1}$. Gọi B_1 là điểm đối xứng của B qua Δ thì từ $\left(\vec{u},\overrightarrow{A_1B_1}\right)=-\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{A'B'}\right)$ [mod 2π] suy ra $\overrightarrow{A_1B_1}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng, nên $\dfrac{A'B'}{A_1B_1}=\dfrac{A'B'}{AB}=k$ kéo theo $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB_1}$. Vậy tích của phép đối xứng qua Δ với phép vị tự tâm O tỉ số k biến A, B thành A', B'.

Chú ý.

- Δ' là đường thẳng đi qua O vuông góc với Δ thì Δ' cắt AA' ở P' mà $\overrightarrow{P'A'}=k\overrightarrow{PA}$, cắt BB' ở Q' mà $\overrightarrow{Q'B'}=k\overrightarrow{QB}$.
- Khi $k=1$ tức xét phép dời hình nghịch (phản dời hình) biến A, B thành A', B' ($A'B'=AB$) thì nó là một phép đối xứng-trượt: tích của một phép đối xứng qua một đường thẳng Δ với một phép tịnh tiến trên theo một vectơ có cùng phương với Δ. Chứng minh trên cũng chứng tỏ có phân tích như thế: Gọi Δ là đường thẳng đi qua trung điểm P của AA', đi qua trung

điểm Q của BB' thì tích của phép đối xứng qua Δ với phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{A_1A'}$ (A_1 là điểm đối xứng của A qua Δ) biến A, B thành A', B'.

- Tích giao hoán nói trong định lí 8 được gọi là phép vị tự - đối xứng và kí hiệu vắn tắt là: $Z(O, \Delta, k)$.

  Hai dạng $Z(O, \varphi, k)$ và $Z(O, \Delta, k)$ - phép vị tự - quay và phép vị tự - đối xứng gọi là hai dạng chính tắc của phép đồng dạng trong mặt phẳng.

2. Vận dụng phép đồng dạng vào giải toán hình học phẳng

a) *Áp dụng phép đồng dạng vào việc khảo sát tính chất hình học của hình*

Ví dụ 1. Sử dụng phép vị tự, chứng minh định lí Menelaus.

ĐỊNH LÍ. *Điều kiện cần và đủ để ba điểm A', B', C' nằm trên ba đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC thẳng hàng là:*

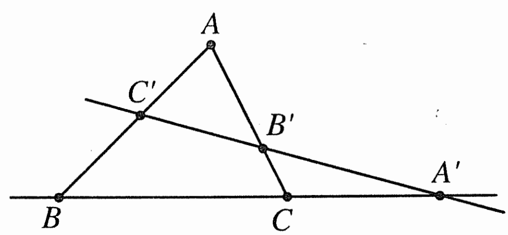
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}.\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}.\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1 . \qquad (1)$$

Chứng minh. Trước hết, ta kí hiệu như sau cho đơn giản:

$V_1 = V(C', k_1)$, $V_2 = V(B', k_2)$,

$V_3 = V(A', k_3)$,

trong đó: $k_1 = \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$, $k_2 = \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$,



Hình 4.22

$$k_3^{-1} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}; \qquad (2)$$

Thế thì, rõ ràng ta có kết quả như sau: V_1: $B \mapsto A$, V_2: $A \mapsto C$, V_3: $B \mapsto C$.

Mặt khác, $V_2.V_1$: $B \mapsto C$.

Nhưng theo định lí 16 (trong mục 2, §2, chương I) về tích của hai phép vị tự thì $V_2 \circ V_1$ là một phép vị tự có tâm thẳng hàng với C' và B', và có tỉ số vị tự $k = k_1.k_2 \neq 1$ (vì $B'C' \nparallel BC$ và $B'C' \cap BC = \{A'\}$). Lại do $V_2 \circ V_1$ biến B thành

thành C, bởi thế tâm của phép vị tự – tích $V_2 \circ V_1$ phải là giao điểm A' của hai đường thẳng BC và $B'C'$. Nói cách khác là: $V_2 \circ V_1 = V_3$. Vậy, ta phải có:

$$k_1.k_2 = k_3, \text{ hay: } k_1.k_2.k_3^{-1} = +1. \qquad (3)$$

Cuối cùng, thay các giá trị của k_i (i = 1, 2, 3) từ (2) vào (3), ta được hệ thức (1) cần tìm.

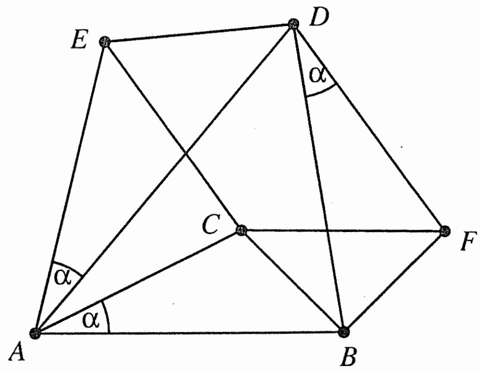
Ví dụ 2. Xét một tam giác ABC và một điểm D cho trước. Ta dựng các tam giác ADE và DBF đồng dạng (thuận) với tam giác ABC. Hãy so sánh các tam giác ABD, ACE và CBF; từ đó tìm hiểu bản chất của tứ giác $CEDF$.

Giải

i) Từ $\Delta ABC \backsim \Delta ADE$ (h.4.23) ta suy ra $\Delta ABD \backsim \Delta ACE$. Các tam giác BAC và BDF là đồng dạng thuận; từ đó cũng suy ra

$$\Delta BAD \backsim \Delta BCF.$$

Vì vậy, ba tam giác ABD, ACE và CBF là đồng dạng thuận.



Hình 4.23

Nhận xét. Như vậy, xuất phát từ ba tam giác ABC, ADE và DBF đồng dạng thuận ta đã thu được ba tam giác ABD, ACE và CBF cũng đồng dạng thuận.

Nhận xét này giúp chúng ta nhanh chóng nhận ra rằng: vai trò của hai điểm C, D là hoàn toàn bình đẳng, nghĩa là có thể hoán đổi vai trò của C và D cho nhau.

ii) Bây giờ ta đặt: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha$ [mod 2π] và $AC = kAB$. Thế thì phép đồng dạng thuận $Z(A, \alpha, k)$ sẽ biến $\overrightarrow{BD}$ thành $\overrightarrow{CE}$, còn phép đồng dạng thuận $Z(D, \alpha, k)$ sẽ biến $\overrightarrow{BD}$ thành $\overrightarrow{FD}$.

Từ đó ta được: $CE = kBD$ và $FD = kBD$; suy ra $CE = FD$. (1)

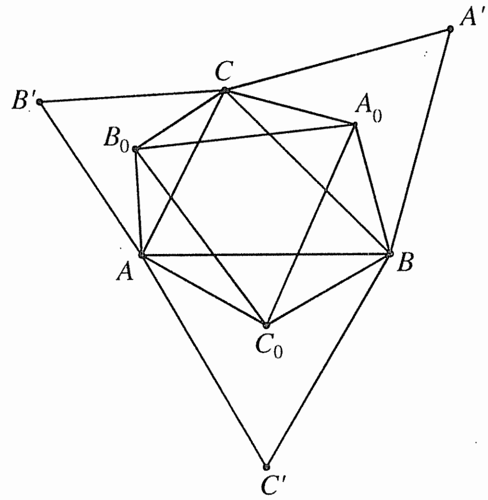
Mặt khác, $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \alpha$ và $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FD}) = \alpha$;

suy ra: $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FD}) = 0$ [mod 2π]. (2)

Cuối cùng, từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FD}$ và do đó $CEDF$ là một hình bình hành.

Ví dụ 3. Lấy các cạnh của một tam giác ABC bất kì (không suy biến) làm đáy, dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đều BCA', CAB' và ABC'. Chứng minh rằng các tâm A_0, B_0, C_0 của ba tam giác đều vừa dựng là các đỉnh của một tam giác đều (Bài toán Napoléon: Về tam giác đều $A_0B_0C_0$ sinh bởi một tam giác bất kì ABC).

Giải. Bài toán này có thể có nhiều cách giải khác nhau, trong đó có cách giải chỉ đòi hỏi sử dụng kiến thức SGK hình học 9 nhưng cần phải vẽ thêm hình phụ. Sau đây là cách giải sử dụng phép đồng dạng thuận, vì thế lời giải được gọn gàng hơn.



Hình 4.24

Trước hết, dễ dàng thấy rằng A_0BC, B_0CA và C_0AB là ba tam giác cân đồng dạng, có góc ở đáy 30° (và ở đỉnh là 120°) (h.4.24).

Xét hai phép đồng dạng thuận (vị tự – quay) có tâm lần lượt ở C và B, có cùng góc quay 30° (với giả thiết ΔABC định hướng dương) và tỉ số đồng dạng lần lượt là

$$k_1 = \sqrt{3} \text{ và } k_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta kí hiệu hai phép vị tự – quay đó lần lượt là:

$$Z_1 = Z(C, 30^\circ, \sqrt{3}); Z_2 = Z(B, 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Xét tích $Z_2 \circ Z_1$. Dễ thấy: Z_1: $A_0 \mapsto A'$, $B_0 \mapsto A$ và Z_2: $A' \mapsto A_0$, $A \mapsto C_0$.

Do đó: Tích $Z_2 \circ Z_1$: $B_0 \mapsto C_0$ và $A_0 \mapsto A_0$.

Mặt khác, $k_1k_2 = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$, đồng thời $\varphi_1 + \varphi_2 = 2.30^\circ = 60^\circ$ nên tích $Z_2 \circ Z_1$ là một phép dời hình $\mathcal{D}$, cụ thể là phép quay góc 60°, tâm A_0 và biến $B_0 \mapsto C_0$.

Vậy $A_0B_0C_0$ là một tam giác đều; ta được đpcm.

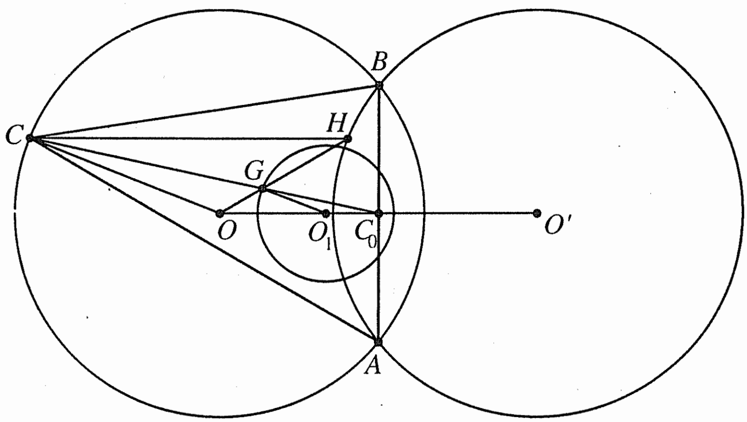
b) *Áp dụng phép đồng dạng vào giải toán quỹ tích (tìm tập hợp điểm)*

Ví dụ 4. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cho trước có hai đỉnh A, B cố định.

1) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

2) Từ đó suy ra quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.

Giải



Hình 4.25

1) Gọi C_0 là trung điểm cạnh AB, ta có (h.4.25): $\overrightarrow{C_0G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_0C}$. Suy ra: $\{G\}$ nhận được từ $\{C\} = (O)$ trong phép vị tự $V_1(C_0, \frac{1}{3})$. Vậy $\{G\}$ là đường tròn tâm O_1, bán kính $R_1 = \frac{R}{3}$, trong đó R là bán kính của (O) còn O_1 được xác định bởi:

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_0}; \qquad (1)$$

2) Ta có: $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (xem Ví dụ 1, trong mục 4, §2, chương I). Do đó, $\{H\}$ được suy ra từ $\{G\}$ bởi phép vị tự $V_2(O, 3)$ tâm O, tỉ số $k_2 = 3$.

Vậy $\{H\}$ là đường tròn (O', R), trong đó O' được xác định bởi $\overrightarrow{OO'} = 3\overrightarrow{OO_1}$, hay theo (1):

$$\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OC_0}. \qquad (2)$$

Hệ thức (2) còn chứng tỏ rằng O' đối xứng với O qua C_0 và qua cả AB. Từ đó ta đi đến kết luận:

Quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC là đường tròn (O', R), đối xứng với đường tròn (O, R) ngoại tiếp tam giác ABC qua cạnh AB.

Nhận xét. Theo lập luận trên thì $\{H\}$ được suy ra từ $\{C\} = (O, R)$ bởi phép đồng dạng $Z = V_2 \circ V_1$ là tích của hai phép vị tự $V_1(C_0, \frac{1}{3})$ và $V_2(O, 3)$ có tích các tỉ số vị tự $k_1k_2 = 1$. Vì vậy, Z là một phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OC_0}$ (không đổi) (theo định lí 16 trong mục 2, §2, chương I).

Ví dụ 5. Trên hai đường thẳng a và b cắt nhau ở một điểm C có hai động tử chuyển động thẳng đều nhưng với vận tốc khác nhau: A chạy suốt cả đường thẳng a với vận tốc v_1, B chạy suốt cả đường thẳng b với vận tốc v_2, $v_2 \neq v_1$. Chúng không gặp nhau ở C.

1) Chứng minh rằng ở bất kì thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng luôn đi qua một điểm cố định O nào đó, khác C.

2) Tìm quỹ đạo chuyển động của động tử M luôn ở vị trí trung điểm của đoạn thẳng $[AB]$.

Giải

1) Trước hết, ta chứng minh rằng ánh xạ f: $A(t) \mapsto B(t)$ (t là thời gian, t là số thực tuỳ ý) từ đường thẳng a đến đường thẳng b là thu hẹp lên a của một biến đổi đồng dạng thuận Z của mặt phẳng. Thật vậy, giả sử t_1, t_2 là hai thời điểm khác nhau nào đó.

Để cho gọn ta kí hiệu như sau: $A(t_i) = A_i$, $B(t_i) = B_i$ $(i = 1, 2)$.

Thế thì:

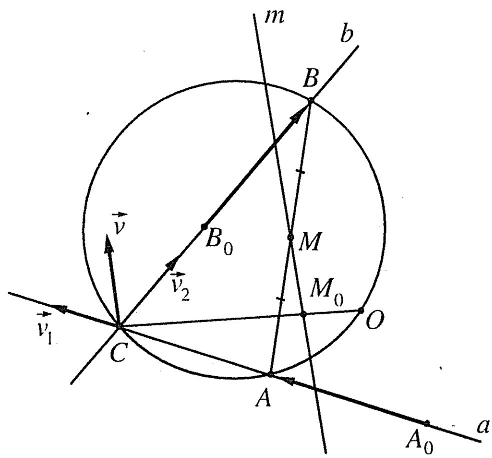
$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{v_2(t_2 - t_1)}{v_1(t_2 - t_1)} = \frac{v_2}{v_1} = k \ \ (0 < k, \text{ không đổi}),$$

và: $\qquad (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}) = \varphi$, [mod 2π];

trong đó $(a, b) = \varphi$, [mod π] là góc định hướng giữa hai đường thẳng a và b.

Bởi vậy, trong mặt phẳng có một phép đồng dạng thuận $Z(O, \varphi, k)$ biến a thành b, trong đó điểm $A(t)$ được biến thành điểm $B(t)$ (h.4.26).

Theo định lí 7 (mục 1) thì tâm đồng dạng (điểm bất động) O của Z là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (A_0B_0C) và (ABC), O khác C vì hai động tử không gặp nhau tại C. Vậy đường tròn (ABC) luôn đi qua điểm O (khác C) cố định.



Hình 4.26

2) Kí hiệu: $A_0 = A$ $(t_0 = 0)$, $B_0 = B$ $(t_0 = 0)$, M_0 là trung điểm của đoạn $[A_0B_0]$; $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$ là các vectơ vận tốc của A và B.

Trả lời: Quỹ tích của M là đường thẳng M_0m đi qua M_0 và có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right)$ (suy từ $2\overrightarrow{M_0M} = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2})t$).

Ví dụ 6*. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC[1]. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua A, không tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC và có tâm O chuyển động trên đường thẳng BC. Đường tròn này cắt lại các đường thẳng AB và AC lần lượt ở M và N. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác AMN. (*Một phiên bản*[1] *Đề thi chọn học sinh giỏi Toán toàn quốc, Bảng A, VMO, 3/2002*).

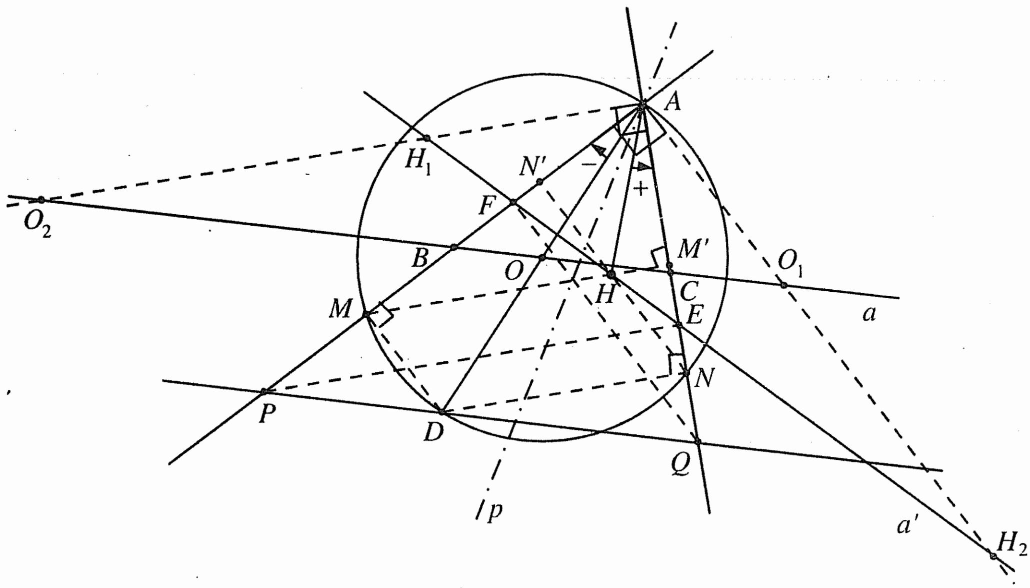
Giải. Sau đây là lời giải sử dụng phép đồng dạng nghịch của bài toán.

Giả sử $\widehat{A} \neq 90^\circ$ (vì nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì H trùng A với mọi đường tròn (O) có tâm $O \in BC$).

Gọi D là điểm xuyên tâm - đối của điểm A trên đường tròn (O). Thế thì M và N theo thứ tự chính là các hình chiếu (vuông góc) của D trên AB và AC. Và do đó, trực tâm H của ΔAMN là điểm đối xứng với D qua trung điểm MN. Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu của H trên AC và AB.

---

[1] Nguyên gốc của đề thi có giả thiết: "ΔABC cân ở A".



Hình 4.27

Dễ thấy rằng: $⊿AHM' \backsim ⊿ADM$. Từ đó ta được (h.4.27):

$$\begin{cases} (AH, AM') = -(AD, AM)\ [\bmod \pi]; & (1) \\ \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM'}{AM} = \pm\cos\widehat{BAC} = \left|\cos\widehat{BAC}\right|; & \end{cases}$$

và do đó (với $\alpha = \widehat{BAC}$):

$$\frac{AH}{AO} = 2\left|\cos\widehat{BAC}\right| = 2\left|\cos\alpha\right|; \qquad (2)$$

Các đẳng thức (1) và (2) nói lên rằng (AH) đối xứng với (AO) qua phân giác Ap của góc A của ΔABC và $\dfrac{AH}{AO} = k$ (không đổi), trong đó k = $2\left|\cos\alpha\right|$.

Vậy H là ảnh của O trong phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) $Z(A, Ap, k)$.

Trả lời. Nếu kí hiệu $(BC) = a$ thì $\{H\}$ là đường thẳng a', ảnh của a trong phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) $Z(A, \Delta = Ap, k = 2\left|\cos A\right|)$ tâm A, trục $\Delta = Ap$ và tỉ số $k = 2\left|\cos A\right|$, bỏ đi hai điểm H_i là ảnh của O_i ($i = 1, 2$) trên $a = (BC)$, ở đó $\widehat{BAO_1} = \widehat{CAO_2} = 90^\circ$ (h.4.27).

Vậy là: $\{H\} = a' \setminus \{H_1, H_2\}$; với $H_i = Z(O_i)$, ($i = 1, 2$).

Chú thích.

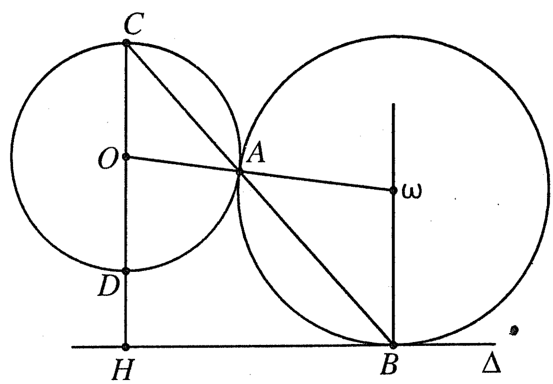
i) $\{H\} \cup \{H_1, H_2\} = a'$ đi qua hai điểm E và F, trong đó $E = PE \perp AC$, $F = QF \perp AB$ và $P = Đ_B(A)$, $Q = Đ_C(A)$. Đường thẳng PQ cũng được suy ra từ $a = (BC)$ qua phép vị tự $V(A, 2)$ tâm A, tỉ số $k = 2$.

ii) Về cơ bản, bài toán quỹ tích trên đây có thể giải được chỉ nhờ định lí Thales và độ dài đại số.

c) *Áp dụng phép đồng dạng vào giải toán dựng hình*

Ví dụ 7. Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn (O) cho trước và với một đường thẳng Δ cho trước, biết một trong các tiếp điểm.

Giải. Giả sử (ω) là một đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) ở A và với đường thẳng Δ ở B (h.4.28). Ta nghĩ đến một phép vị tự tâm A là tiếp điểm của (O) và (ω). Thật vậy, (O) là ảnh của (ω) trong một phép vị tự tâm A biến B thành một trong hai đầu mút C hoặc D của đường kính CD của (ω) vuông góc với Δ. Ta xét hai trường hợp như bài toán đã đặt ra.



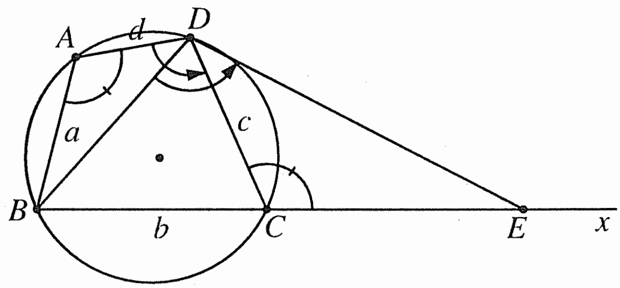
Hình 4.28

i) Nếu điểm A cho trước trên đường tròn (O), thế thì chẳng hạn, đường thẳng CA cắt Δ ở điểm B và do đó, phép vị tự $V(A, k = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}})$ tâm A tỉ số $k = \overline{AB} : \overline{AC}$ sẽ biến đường tròn (O) thành một đường tròn (ω) tiếp xúc với (O) ở A và với Δ ở B. (Một lời giải thứ hai được thực hiện với đường thẳng DA).

ii) Nếu điểm B cho trước trên đường thẳng Δ, thế thì đường thẳng CB cắt lại (O) ở điểm A và phép vị tự $V(A, k = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}})$ sẽ cho một đường tròn (ω) tiếp xúc với Δ ở B và với (O) ở B. (Một lời giải thứ hai được thực hiện tương tự với đường thẳng DB).

Ví dụ 8*. Dựng một tứ giác (lồi) nội tiếp $ABCD$ biết độ dài các cạnh: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, trong đó a, b, c, d là những độ dài cho trước.

Giải



Hình 4.29

Phân tích. Giả sử tứ giác $ABCD$ cần tìm đã dựng được. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{A}+\widehat{C} = 180^{\circ}$ (hoặc $\widehat{B}+\widehat{D} = 180^{\circ}$). Chính vì vậy, kéo dài cạnh BC về phía C để xuất hiện góc $\widehat{DCx} = \widehat{BAD}$ và kề bù với $\widehat{DCB}$. Trên tia Cx (tia đối của tia $[CB)$) lấy điểm E sao cho $\Delta DCE \backsim \Delta DAB$. Bài toán dựng tứ giác nội tiếp $ABCD$, trước hết được quy về việc dựng một tam giác, đó là tam giác DCE.

Giả sử $\Delta DCE \backsim \Delta DAB$. Hai tam giác này chung đỉnh D, bởi vậy ΔDCE được suy ra từ ΔDAB bởi phép vị tự – quay $Z(D, \varphi, k)$, trong đó

$$\varphi = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}), [\text{mod } 2\pi], \text{ và } k = \frac{DC}{DA} = \frac{c}{d}.$$

Chính vì vậy, ta nghĩ đến việc sử dụng phép vị tự – quay để giải bài toán dựng hình này.

Xét phép vị tự – quay $Z(D, \varphi, k)$ nói trên. Z biến $D \mapsto D$, $A \mapsto C$ và $B \mapsto E$ sao cho $C \in [BE]$ (h.4.29).

Thế thì: $\Delta DCE \backsim \Delta DAB$ và do đó $\widehat{DCE} = \widehat{DAB}$ và B, C, E thẳng hàng theo thứ tự đó, đồng thời ta được:

$$\widehat{BDE} = \widehat{ADC} = \delta = \varphi.$$

Như thế là, bằng cách sử dụng phép vị tự – quay Z (tâm A, góc quay $\delta = \varphi$ và tỉ số $k = \frac{c}{d}$) này ta đã chuyển bài toán dựng tứ giác nội tiếp $ABCD$ về bài toán "dựng tam giác DBE có các yếu tố đã biết": $BC = b$, $CE = \frac{c}{d}a$ và do đó, $BE = \frac{ac+bd}{d}$, $CD = c$ và $\frac{DE}{DB} = \frac{c}{d}$.

- Đến lượt bài toán dựng tam giác DBE lại quy về việc dựng đỉnh D của nó, là một trong các giao điểm của đường tròn $\gamma_1(C, c)$ tâm C bán kính $r_1 = c$ và đường tròn Apollonius (γ_2) có đường kính IJ mà I và J là các điểm chia trong và ngoài đoạn thẳng $[BE]$ theo tỉ số số học $k = \frac{c}{d}$.
- Cuối cùng là dựng đỉnh A, một trong hai giao điểm của $\gamma_3(B, r_3 = a)$ và $\gamma_4(D, r_4 = d)$.

Biện luận. Bài toán có thể có một lời giải hoặc không có lời giải nào tuỳ theo (γ_1) và (γ_2), cũng như (γ_3) và (γ_4) có cắt nhau hay không.

BÀI TẬP

Bài tập về phân loại, sự xác định và dạng chính tắc của phép đồng dạng (27-33)

27. Hai đường chéo A_1A_2 và B_1B_2 của một tứ giác (lồi) nội tiếp $A_1B_1A_2B_2$ cắt nhau ở điểm P. Gọi A_0 và B_0 lần lượt là trung điểm của PA_1 và PB_1.

Chứng minh rằng $A_0A_1B_2$ và $B_0B_1A_2$ là hai tam giác đồng dạng nghịch.

28. Chứng minh rằng trong một phép đồng dạng thuận thì tâm đồng dạng O, hai điểm tương ứng M, M' và giao điểm P của hai đường thẳng tương ứng a, a' xuất phát từ hai điểm tương ứng đó cùng nằm trên một đường tròn.

29*. Chứng minh rằng tâm của phép vị tự – quay biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$ cũng là tâm của phép vị tự – quay thứ hai biến $\overrightarrow{AA'}$ thành $\overrightarrow{BB'}$ (hai phép đồng dạng thuận có tâm chung).

30*. Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng AA' và BB', C' là giao điểm của hai đường thẳng AB và $A'B'$. Chứng minh rằng bốn đường tròn $(AA'C')$, $(BB'C')$, (ABC) và $(A'B'C)$ đồng quy ở một điểm O nào đó.

31. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau ở hai điểm P và Q.

Chứng minh rằng chúng tương ứng với nhau trong một phép đồng dạng thuận (vị tự – quay) có tâm ở giao điểm thứ nhất P (hoặc Q) và hai điểm tương ứng M, M' thì thẳng hàng với giao điểm thứ hai Q (hoặc P).

32*. Giả sử P là một điểm nằm trong đoạn thẳng $[AB]$. Về cùng một phía của đường thẳng AB ta dựng hai hình vuông $APEF$ và $PBCD$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng AD, BE và CF đồng quy ở một điểm Q nào đó.

b) Khi P chuyển động trên đoạn thẳng $[AB]$ thì đường thẳng (PQ) luôn đi qua một điểm cố định S, cách đều A và B. Tìm quỹ tích điểm Q.

33*. Cho một tứ giác (lồi) $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau ở O nhưng không vuông góc với nhau. Gọi A' và C' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của A và C trên BD; B' và D' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của B và D trên AC. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ đồng dạng nghịch với tứ giác $ABCD$ (ta viết $A'B'C'D' \circlearrowright ABCD$).

Bài tập vận dụng phép đồng dạng vào giải toán hình học (34-48)

34. Tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi B_i là trọng tâm tam giác $A_jA_kA_l$; $i = 1, 2, 3, 4$, $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Chứng minh rằng tứ giác $B_1B_2B_3B_4$ nội tiếp một đường tròn; hãy xác định tâm O_1 và bán kính R_1 của đường tròn đó.

35*. Đường tròn (J) tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cân ở A, đồng thời tiếp xúc với hai cạnh AB và AC ở M và N.

Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (*Đề thi Olympic Toán quốc tế, IMO, Romania, 1978*).

36. Chứng minh rằng: Nếu gọi O là trọng tâm của hình "tứ điểm phẳng" $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ và P là giao điểm hai đường chéo A_1A_3, A_2A_4 của tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$ thì trọng tâm T của hình tứ giác phẳng, lồi hai chiều (tức một miếng phẳng đồng chất có dạng một miền tứ giác lồi) $[A_1A_2A_3A_4]$ là hình vị tự của điểm P trong phép vị tự $V(O, -\frac{1}{3})$, nghĩa là: $\overrightarrow{OT} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$.

37*. Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tiếp xúc ngoài nhau ở điểm C. Một góc vuông $\widehat{xCy}$ quay xung quanh C; Cx và Cy cắt lại (O_1) và (O_2) theo thứ tự ở A và B. Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của C trên AB.

38. Cho hai đường tròn (v_1) và (v_2) đồng tâm O.

Hãy dựng một dây cung AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở B và C sao cho $AD = 3BC$.

39. Cho hai hình vuông bằng nhau cùng hướng $OABC$ và $OA'B'C'$ có chung đỉnh O.

a) Chứng minh:

α) AA', BB' và CC' đồng quy;

β) $AA' \perp CC'$ và $AA' = CC'$.

b) Tìm độ lớn của góc giữa các tia AA' và BB', AA' và CC'.

40. Giả sử OAA', OBB' và OCC' là ba tam giác cân cùng đỉnh O, bằng nhau và cùng hướng. Chứng minh rằng các cặp cạnh tương ứng BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ và AB, $A'B'$ của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ giao nhau theo ba điểm A_0, B_0 và C_0 tạo thành $\Delta A_0B_0C_0 \backsim \Delta ABC$ và $\Delta A_0B_0C_0 \backsim \Delta A'B'C'$.

41. Dựng ra phía ngoài một tam giác ABC bất kì ba tam giác BCM, CAN và ABP sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{CAN} = 45^\circ$, $\widehat{BCM} = \widehat{NCA} = 30^\circ$ và $\widehat{ABP} = \widehat{PAB} = 15^\circ$.

Chứng minh rằng tam giác MNP vuông cân ở P.

42. Một hình vuông $ABCD$ có đỉnh D cố định và đỉnh A chuyển động trên một đường (γ) cho trước trong mặt phẳng, không đi qua D.

Tìm quỹ đạo chuyển động của hai đỉnh B, C còn lại và của tâm O hình vuông $ABCD$ trong các trường hợp sau đây:

a) (γ) là một đường thẳng a;

b) (γ) là một đường tròn tâm S, bán kính R.

43. Một điểm P chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB. Tìm quỹ đạo chuyển động của hai điểm M và N trên đường thẳng BP sao cho $PM = PN = PA$.

44. Dựng tam giác MNP nội tiếp tam giác ABC đã cho, có đỉnh P cho trước trên cạnh AB và đồng dạng với một tam giác XYZ cho trước.

45. Dựng một hình bình hành nội tiếp một hình bình hành $ABCD$ cho trước và đồng dạng với một hình bình hành khác $MNPQ$ cho trước.

46. Dựng một tứ giác (lồi) $ABCD$ biết tổng độ lớn hai góc đối diện $\widehat{A} + \widehat{C} = \theta$ và độ dài các cạnh $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$.

47*. Trong mặt phẳng cho hai tam giác đều ABC và $A'B'C$ cùng hướng, có đỉnh C chung sao cho A' và B' không trùng với tâm O đường tròn (ABC). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $A'B$ và AB'. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OB'M \backsim \Delta OA'N$.

b) Hai góc $A'OB'$ và MON có chung đường phân giác.

48*. Một điểm P chuyển động trên đường thẳng chứa cạnh BC của một tam giác ABC không vuông đã cho. Các đường thẳng đi qua P vuông góc với AC và AB theo thứ tự cắt các đường thẳng AB và AC ở M và N.

Tìm quỹ tích của điểm Q, đối xứng với điểm P qua trung điểm của MN.

Chuyên đề II

HÌNH TỨ DIỆN VÀ KHỐI TỨ DIỆN

§1. TỨ DIỆN VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT

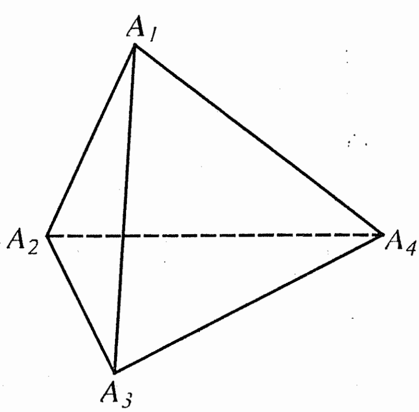
1. Các định nghĩa

Cho bốn điểm không đồng phẳng A_1, A_2, A_3, A_4 (h.5.1).

Khi đó *hình tứ diện* $A_1A_2A_3A_4$ là tập hợp gồm các điểm sau đây (h.5.1):

+ Các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, gọi là các *đỉnh* của hình tứ diện.

+ Các điểm thuộc các đoạn thẳng A_iA_j, với $i, j = 1,2,3,4$ và $i \neq j$. Có 6 đoạn thẳng như thế và mỗi đoạn thẳng đó được gọi là một *cạnh* của hình tứ diện. Hai cạnh gọi là *đối diện* nhau nếu chúng không có điểm chung, chẳng hạn cạnh A_1A_2 đối diện với cạnh A_3A_4.



Hình 5.1

+ Các điểm thuộc các tam giác có đỉnh là ba trong bốn đỉnh của tứ diện, cụ thể là các tam giác $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$ và $A_2A_3A_4$. Ở đây tam giác được hiểu là tập hợp gồm các điểm thuộc các cạnh tam giác và các điểm nằm trong tam giác. Các tam giác đó được gọi là các *mặt* của tứ diện. Mỗi một mặt có một *đỉnh đối diện*, đó là đỉnh không nằm trên mặt ấy.

2. Các kí hiệu

Dưới đây các chỉ số *i*, *j*, *k*, *l* đều lấy các giá trị trong tập hợp $\{1,2,3,4\}$.

Cho hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Ta kí hiệu:

+) Δ_i là mặt của tứ diện đối diện với đỉnh A_i.

+) S_i là diện tích tam giác Δ_i.

+) (α_i) là mặt phẳng chứa tam giác Δ_i.

+) h_i là chiều cao của tứ diện ứng với đỉnh A_i, nghĩa là khoảng cách từ điểm A_i tới mp (α_i).

+ $\varphi_{i,j}$ là góc phẳng nhị diện hợp bởi hai mặt Δ_i và Δ_j trong đó $i \neq j$. Cố nhiên $\varphi_{i,j} = \varphi_{j,i}$ và

$$0^\circ < \varphi_{i,j} < 180^\circ.$$

3. Khối tứ diện

Cho hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Ta gọi α_i^+ là nửa không gian có bờ là mặt phẳng (α_i) và có chứa điểm A_i, tức là tập hợp gồm những điểm nằm cùng phía với điểm A_i đối với mp(α_i). Khi đó

+ Tập hợp $X_0 = \alpha_1^+ \cap \alpha_2^+ \cap \alpha_3^+ \cap \alpha_4^+$ gọi là *phần trong* của hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Một điểm thuộc X_0 được gọi là điểm *nằm trong* hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

+ Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cùng với phần trong của nó được gọi là *khối tứ diện* $A_1A_2A_3A_4$.

4. Một số công thức liên quan đến tứ diện

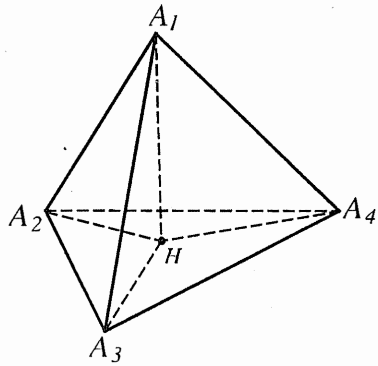
ĐỊNH LÍ. *Đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ với các chỉ số i, j, k, l đôi một phân biệt ta có* $S_i = S_j \cos\varphi_{i,j} + S_k \cos\varphi_{i,k} + S_l \cos\varphi_{i,l}$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $i = 1, j = 2, k = 3, l = 4$, tức là

$$S_1 = S_2 \cos\varphi_{1,2} + S_3 \cos\varphi_{1,3} + S_4 \cos\varphi_{1,4} \qquad (*)$$

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A_1 tới mp(α_1) (h.5.2). Khi đó tam giác HA_3A_4 là hình chiếu của tam giác $A_1A_3A_4$, mà tam giác $A_1A_3A_4$ có diện tích S_2. Bởi vậy nếu ta kí hiệu S_2' là diện tích tam giác HA_3A_4 thì: $S_2' = S_2\left|\cos\varphi_{1,2}\right|$, tức là:



Hình 5.2

+ Nếu $\varphi_{1,2} < 90^o$ thì H và A_2 nằm cùng phía đối với đường thẳng A_3A_4 và

$$S_2' = S_2\cos\varphi_{1,2}$$

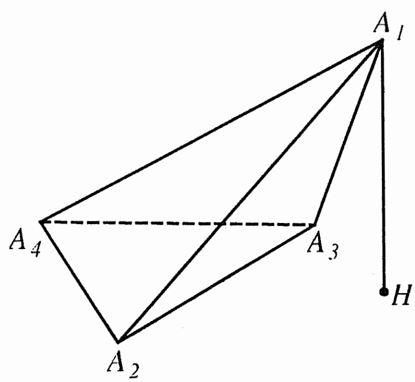
+ Nếu $\varphi_{1,2} > 90^o$ thì H và A_2 nằm khác phía đối với đường thẳng A_3A_4 và $S_2' = -S_2\cos\varphi_{1,2}$

+ Nếu $\varphi_{1,2} = 90^o$ thì H nằm trên đường thẳng A_3A_4, khi đó tam giác HA_3A_4 suy biến thành một đoạn thẳng, do đó $S_2' = S_2\cos\varphi_{1,2} = 0$.

Tương tự như thế, ta kí hiệu S_3' và S_4' lần lượt là diện tích của tam giác HA_2A_4 và HA_2A_3 thì ta cũng có các kết quả tương tự như trên

Để chứng minh công thức (*) ta xét các trường hợp sau: Hoặc cả ba góc $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$, $\varphi_{1,4}$ đều bé hơn hay bằng 90^o, hoặc chỉ có hai góc bé hay bằng 90^o, hoặc chỉ có một góc bé hơn hay bằng 90^o (dễ thấy rằng không thể xảy ra trường hợp không có góc nào bé hơn hay bằng 90^o).

Chẳng hạn ta xét trường hợp $\varphi_{1,2} \le 90^o$, $\varphi_{1,3} \le 90^o$ và $\varphi_{1,4} > 90^o$ (h.5.3). Khi đó điểm H nằm trong góc $A_2A_4A_3$ nhưng không nằm trong tam giác $A_2A_3A_4$.



Hình 5.3

Bởi vậy

$$S_1 = S_2' + S_3' - S_4' = S_2 \cos\varphi_{1,2} + S_3 \cos\varphi_{1,3} - (-S_4 \cos\varphi_{1,4})$$

$$= S_2 \cos\varphi_{1,2} + S_3 \cos\varphi_{1,3} + S_4 \cos\varphi_{1,4}.$$

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

HỆ QUẢ 1. Tổng diện tích ba mặt của một hình tứ diện bao giờ cũng lớn hơn diện tích của mặt còn lại.

HỆ QUẢ 2. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 là bốn chiều cao của hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Khi đó tổng ba trong bốn số $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}$ bao giờ cũng lớn hơn số còn lại.

Chứng minh. Nếu V là thể tích của hình tứ diện thì

$$3V = h_1S_1 = h_2S_2 = h_3S_3 = h_4S_4$$

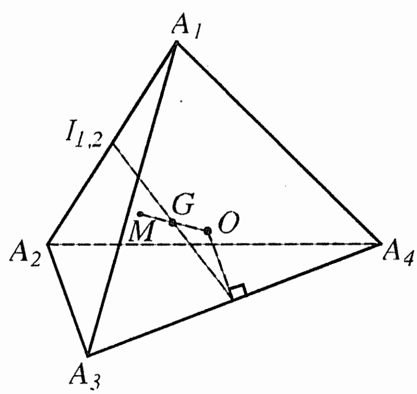
Bởi vậy từ đẳng thức $S_1 + S_2 + S_3 > S_4$ ta suy ra: $\frac{S_1}{3V} + \frac{S_2}{3V} + \frac{S_3}{3V} > \frac{S_4}{3V}$, tức là

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} > \frac{1}{h_4}.$$

5. Điểm Monge của hình tứ diện

ĐỊNH LÍ. *Trong hình tứ diện nếu xét 6 mặt phẳng, mỗi mặt đi qua trung điểm một cạnh và vuông góc với cạnh đối diện, thì 6 mặt phẳng đó cùng đi qua một điểm gọi là điểm Monge của tứ diện.*

Chứng minh. Giả sử cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ với trọng tâm G (h.5.4). Gọi $(\alpha_{i,j})$ là mặt phẳng đi qua trung điểm $I_{i,j}$ của cạnh A_iA_j và vuông góc với cạnh đối diện A_kA_l và $(\alpha'_{i,j})$ là mặt phẳng đối xứng với $(\alpha_{i,j})$ qua điểm G.



Hình 5.4

Khi đó $(\alpha'_{i,j})$ đi qua trung điểm cạnh A_kA_l và cũng vuông góc với A_kA_l (vì hai mặt phẳng $(\alpha_{i,j})$ và $(\alpha'_{i,j})$ song song với nhau). Như vậy $(\alpha'_{i,j})$ là mặt phẳng trung trực của cạnh A_kA_l, nên nó đi qua tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Bởi vậy nếu gọi M là điểm đối xứng với điểm O qua điểm G thì mọi mặt phẳng $(\alpha_{i,j})$ đều đi qua điểm M.

HỆ QUẢ. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Điểm M là điểm Monge của tứ diện đó khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}=2\overrightarrow{MO}.$$

Chứng minh. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Theo chứng minh định lí trên, M là điểm Monge của tứ diện khi và chỉ khi G là trung điểm đoạn thẳng MO hay là $\overrightarrow{MO}=2\overrightarrow{MG}$. Nhưng

$$\overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}\right)$$

nên ta suy ra điều phải chứng minh.

6. Tứ diện nội tiếp hình hộp và hình hộp ngoại tiếp tứ diện

ĐỊNH NGHĨA. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (h.5.5). Trong 8 đỉnh của nó chọn ra bốn đỉnh sao cho bất cứ hai đỉnh nào đều không thuộc cùng một cạnh thì bốn đỉnh đó tạo thành một tứ diện gọi là *tứ diện nội tiếp hình hộp*.

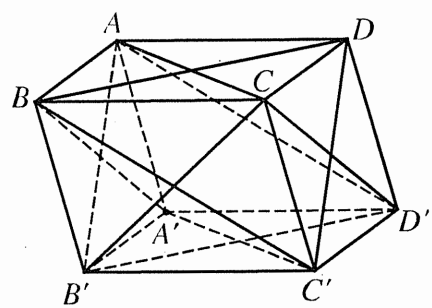
Có hai tứ diện nội tiếp, đó là $ACB'D'$ và $BDA'C'$.

Ta còn nói hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ *ngoại tiếp tứ diện* $ACB'D'$ và $BDA'C'$.

Dễ dàng thấy rằng:

+ Cạnh của tứ diện nội tiếp là đường chéo của mặt bên của hình hộp.

+ Tâm của hình hộp là trọng tâm của tứ diện nội tiếp.

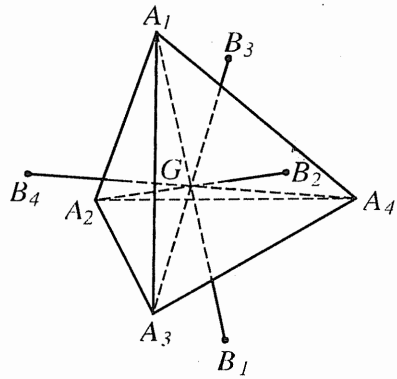


Hình 5.5

+ Thể tích hình hộp bằng ba lần thể tích một tứ diện nội tiếp nó.

ĐỊNH LÍ 1. *Mỗi tứ diện luôn luôn có một và chỉ một hình hộp ngoại tiếp.*

Chứng minh. Giả sử ta có hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ với trọng tâm G (h.5.6). Ta gọi B_i là điểm đối xứng với điểm A_i qua điểm G. Khi đó dễ thấy $A_1B_2A_3B_4.B_3A_4B_1A_2$ là hình hộp và hình hộp đó ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.



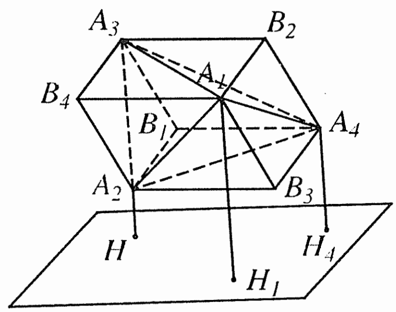
Hình 5.6

ĐỊNH LÍ 2. *Tổng bình phương diện tích tất cả các mặt của hình hộp bằng hai lần tổng bình phương diện tích tất cả các mặt của hình tứ diện nội tiếp hình hộp đó*

Chứng minh. Giả sử hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp hình hộp $A_1B_2A_3B_4.B_3A_4B_1A_2$ như hình 5.7.

Ta kí hiệu $Q_{i,j}$ là diện tích mặt của hình hộp có chứa cạnh A_iA_j thì cố nhiên

$Q_{1,4} = Q_{2,3}$, $Q_{2,4} = Q_{3,1}$, $Q_{3,4} = Q_{1,2}$.



Hình 5.7

Khi đó ta phải chứng minh rằng:

$$Q_{14}^2 + Q_{24}^2 + Q_{34}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$$

Ta lấy một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng A_2A_3 tại một điểm H nào đó và gọi H_1 và H_4 là hình chiếu của A_1 và A_4 trên mặt phẳng đó. Khi đó tam giác HH_1H_4 có góc ở đỉnh H bằng $\varphi_{2,3}$ (bằng góc phẳng nhị diện cạnh A_2A_3 của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$) nên:

$$H_1H^2 + H_4H^2 - 2H_1H.H_4H\cos\varphi_{2,3} = H_1H_4^2$$

Nhân cả hai vế với $\frac{A_2A_3^2}{4}$ ta được kết quả: $S_4^2 + S_1^2 - 2S_4S_1\cos\varphi_{2,3} = Q_{1,4}^2$.

Tương tự ta có:

$$S_4^2 + S_2^2 - 2S_4S_2\cos\varphi_{1,3} = Q_{2,4}^2 \text{ và } S_4^2 + S_3^2 - 2S_4S_3\cos\varphi_{1,2} = Q_{3,4}^2.$$

Như vậy ta có:

$$Q_{1,4}^2 + Q_{2,4}^2 + Q_{3,4}^2 = 3S_4^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_4(S_1\cos\varphi_{2,3} + S_2\cos\varphi_{1,3} + S_3\cos\varphi_{1,2})$$
$$= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2.$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng bất kì hình tứ diện nào đều có ít nhất một đỉnh mà ba cạnh của tứ diện xuất phát từ đỉnh ấy bằng ba cạnh của một tam giác nào đó.

2. Gọi V là thể tích tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, chứng minh rằng:

$$V = \frac{2S_1S_2\sin\varphi_{3,4}}{3A_3A_4},$$

trong đó S_i là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i, $\varphi_{i,j}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh A_iA_j.

3. Tính thể tích của hình tứ diện biết độ dài hai cạnh đối bằng a, b, góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đó là α và khoảng cách giữa hai đường thẳng đó bằng d.

4. Tứ diện $OABC$ có

$$OA = a, OB = b, OC = c, \text{ và } \widehat{BOC} = \alpha, \widehat{COA} = \beta, \widehat{AOB} = \gamma.$$

Chứng minh rằng

$$V = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

5. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, gọi M, N, P, Q là lượt là trung điểm các cạnh A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1, S là diện tích hình bình hành $MNPQ$, d là khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1A_3 và A_2A_4. Tính thể tích tứ diện đó.

6. Gọi d_1, d_2, d_3 là khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của hình tứ diện, chứng minh rằng

$$\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}=\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}+\frac{1}{h_4^2}.$$

7. Cho hai tứ diện cùng nội tiếp một hình hộp. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện này là điểm Monge của tứ diện kia.

8. Chứng minh rằng M là điểm Monge của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MA_2}=\overrightarrow{MA_3}.\overrightarrow{MA_4} & (1)\\ \overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MA_3}=\overrightarrow{MA_2}.\overrightarrow{MA_4} & (2)\\ \overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MA_4}=\overrightarrow{MA_2}.\overrightarrow{MA_3}. & (3)\end{cases}$$

9. Gọi M là điểm Monge của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, A_1' là hình chiếu của A_1 trên mp($A_2A_3A_4$), H_1 là trực tâm tam giác $A_2A_3A_4$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng H_1A_1' là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng ($A_2A_3A_4$).

10. Trong trường hợp nào điểm Monge của tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện?

11. Trong trường hợp nào điểm Monge của tứ diện nằm trên mỗi đường cao của tứ diện?

12. Chứng minh rằng nếu điểm Monge của tứ diện nằm trên một mặt nào đó của tứ diện thì chân đường cao ứng với mặt đó nằm trên đường tròn ngoại tiếp của mặt đó.

§2. TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

ĐỊNH NGHĨA. Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ được gọi là *tứ diện gần đều* nếu nó có các cạnh đối diện bằng nhau: $A_1A_2 = A_3A_4$, $A_1A_3 = A_2A_4$, $A_1A_4 = A_2A_3$.

ĐỊNH LÍ. *Các mệnh đề sau đây tương đương:*

a) Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện gần đều.

b) Đường nối trung điểm của hai cạnh đối của tứ diện là đường vuông góc chung của hai cạnh đó.

c) Ba đường thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau.

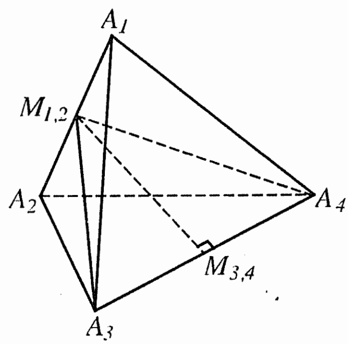
d) Trọng tâm G của tứ diện cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

e) Bốn chiều cao của tứ diện bằng nhau.

f) Diện tích bốn mặt của tứ diện bằng nhau.

Chứng minh.

1) $a \Rightarrow b$: Gọi $M_{i,j}$ là trung điểm cạnh A_iA_j. Ta phải chứng minh $M_{1,2}M_{3,4}$ vuông góc với hai đường thẳng A_1A_2 và A_3A_4 (h.5.8).



Hình 5.8

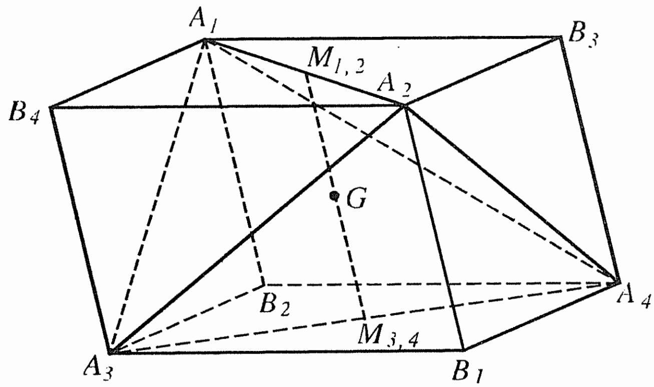
Theo giả thiết, hai tam giác $A_1A_2A_3$ và $A_2A_1A_4$ bằng nhau. Vậy chúng có các trung tuyến tương ứng bằng nhau: $A_3M_{1,2} = A_4M_{1,2}$. Suy ra $M_{1,2}A_3A_4$ là tam giác cân, và vì $M_{3,4}$ là trung điểm A_3A_4 nên $M_{1,2}M_{3,4} \perp A_3A_4$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $M_{1,2}M_{3,4} \perp A_1A_2$ và như vậy $M_{1,2}M_{3,4}$ là đường vuông góc chung của hai cạnh đối diện A_1A_2, A_3A_4.

Đối với các cặp cạnh đối diện khác ta cũng có kết quả tương tự.

2) $b \Rightarrow c$: Theo b) $\overrightarrow{M_{1,2}M_{3,4}} \perp \overrightarrow{A_1A_2}$ và $\overrightarrow{M_{1,2}M_{3,4}} \perp \overrightarrow{A_3A_4}$. Nhưng vì M_{23} và M_{14} lần lượt là trung điểm các cạnh A_2A_3 và A_1A_4 nên ba vectơ $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ và $\overrightarrow{M_{23}M_{14}}$ đồng phẳng. Vậy $\overrightarrow{M_{12}M_{34}} \perp \overrightarrow{M_{23}M_{14}}$. Chứng minh tương tự ta đi đến kết quả là ba đường thẳng $M_{12}M_{34}$, $M_{23}M_{14}$ và $M_{13}M_{24}$ đôi một vuông góc.

3) $c \Leftrightarrow d$: Gọi G là trọng tâm tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Giả sử phép đối xứng qua điểm G biến các điểm A_i thành các điểm B_i (h.5.9). Khi đó ta được hình hộp $A_1B_2A_3B_4.B_3A_4B_1A_2$ ngoại tiếp tứ diện mà các điểm M_{ij} là tâm của các mặt của hình hộp đó và G tâm của hình hộp.



Hình 5.9

Theo c) thì ba đường thẳng $M_{12}M_{34}$, $M_{23}M_{14}$ và $M_{13}M_{24}$ đôi một vuông góc nên hình hộp đó là hình hộp chữ nhật, bởi vậy điểm G cách đều các đỉnh A_i.

4) $d \Rightarrow e$: ta cũng xây dựng hình hộp $A_1B_2A_3B_4.B_3A_4B_1A_2$ như trong chứng minh 3). Theo giả thiết của d) thì G cách đều các đỉnh của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, bởi vậy G cách đều mọi đỉnh của hình hộp đó, tức hình hộp đó nội tiếp mặt cầu tâm G nên nó phải là hình hộp chữ nhật. Từ đó dễ dàng suy ra các chiều cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ bằng nhau.

5) $e \Rightarrow f$: Nếu gọi V là thể tích hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ thì $3V = S_ih_i$, bởi vậy nếu $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$ thì $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

6) $f \Rightarrow a$:

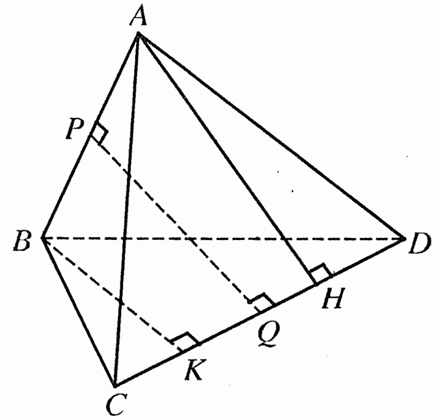
BỔ ĐỀ. Cho tứ diện $ABCD$, nếu hai tam giác ACD và BCD có diện tích bằng nhau thì đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD phải đi qua trung điểm của AB.

Chứng minh. Gọi AH và BK lần lượt là các đường cao của tam giác ACD và BCD (h.5.10).

Vì hai tam giác đó bằng nhau nên ta có $AH = BK$. Ta gọi P là trung điểm AB và Q là trung điểm HK.

+ Nếu $H \equiv K$ thì $H \equiv K \equiv Q$ nên $PQ \perp AB$ và $PQ \perp CD$

(vì $CD \perp (AQB)$), suy ra đpcm.



Hình 5.10

+ Nếu $H \not\equiv K$ thì khi đó hai tam giác vuông AHQ và BKQ bằng nhau nên $AQ = BQ$ do đó $PQ \perp AB$. Lại vì hai tam giác vuông AHK và BKH bằng nhau nên $AK = BH$ và do đó hai tam giác ABH và BAK cũng bằng nhau và các trung tuyến PH và PK của chúng bằng nhau, suy ra $PQ \perp CD$.

Vậy đường vuông góc chung của AB và CD là PQ trong đó P là trung điểm cạnh AB

Bây giờ ta chứng minh $f \Rightarrow a$. Theo giả thiết của f thì diện tích hai mặt $A_1A_2A_3$ và $A_1A_2A_4$ bằng nhau nên đường vuông góc chung của hai đường thẳng A_1A_2 và A_3A_4 đi qua trung điểm $M_{1,2}$ của cạnh A_1A_2. Cũng vì diện tích hai mặt $A_3A_4A_1$ và $A_3A_4A_2$ bằng nhau nên đường vuông góc chung của hai đường thẳng A_1A_2 và A_3A_4 đi qua trung điểm $M_{3,4}$ của cạnh A_3A_4. Tóm lại đường thẳng $M_{1,2}M_{3,4}$ là đường vuông góc chung của hai cạnh A_1A_2 và A_3A_4. Phép đối xứng qua đường thẳng đó biến điểm A_1 thành điểm A_2 và biến điểm A_3 thành điểm A_4 nên $A_1A_3 = A_2A_4$ và $A_1A_4 = A_2A_3$. Chứng minh tương tự cho cặp cạnh đối diện còn lại.

BÀI TẬP

13. Cho một tứ diện gần đều với ba cạnh xuất phát từ một đỉnh có độ dài là a, b, c.

a) Chứng tỏ rằng điểm Monge của tứ diện trùng với trọng tâm tứ diện.

b) Tính thể tích của tứ diện.

c) Tính đường cao của tứ diện.

d) Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

e) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

14. Gọi d_1, d_2, d_3 là khoảng cách giữa các cặp cạnh đối của một hình tứ diện gần đều và h là chiều cao của tứ diện đó. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{h^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2}.$$

15. Chứng minh rằng một tứ diện là tứ diện gần đều khi và chỉ khi có một trong các điều kiện sau đây:

a) Tổng ba góc phẳng tại mỗi đỉnh của nó bằng 180^o.

b) Có hai đỉnh, tổng ba góc phẳng mỗi đỉnh đó bằng 180^o và có một cặp cạnh đối diện nào đó bằng nhau.

c) Tổng ba góc phẳng tại một đỉnh nào đó bằng 180^o và có hai cặp cạnh đối diện bằng nhau.

16. Chứng minh rằng các mặt của tứ diện gần đều là những tam giác nhọn.

17. Chứng minh một hình tứ diện là tứ diện gần đều khi và chỉ khi có một trong các điều kiện sau đây:

a) Tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau.

b) Các đường tròn ngoại tiếp các mặt có bán kính bằng nhau.

c) Trọng tâm của tứ diện là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

18. Chứng minh rằng tứ diện $ABCD$ là gần đều khi $\widehat{BAC} = \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \widehat{BDC}$.

§3. TỨ DIỆN TRỰC TÂM

ĐỊNH NGHĨA. Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ được gọi là *tứ diện trực tâm* nếu nó có các cạnh đối diện vuông góc với nhau

$$A_1A_2 \perp A_3A_4,\ A_1A_3 \perp A_2A_4,\ A_1A_4 \perp A_2A_3.$$

ĐỊNH LÍ. *Các mệnh đề sau đây tương đương:*

a) Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.

b) Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

c) Chân đường cao hạ từ một đỉnh của tứ diện là trực tâm của mặt đối diện.

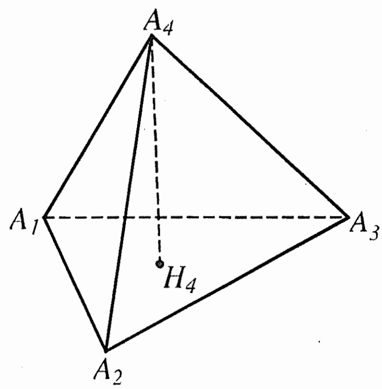
d) Bốn đường cao của tứ diện đồng quy (điểm đồng quy đó gọi là trực tâm của tứ diện trực tâm $A_1A_2A_3A_4$).

e) Tổng bình phương các cạnh đối diện bằng nhau.

Chứng minh.

1) $a \Rightarrow b$: hiển nhiên

2) $b \Rightarrow c$: Giả sử ta có $A_1A_2 \perp A_3A_4$, $A_1A_4 \perp A_2A_3$ và A_4H_4 là đường cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (h.5.11). Khi đó A_1H_4 là hình chiếu của A_1A_4 trên mp($A_1A_2A_3$), nhưng theo giả thiết b) thì $A_1A_4 \perp A_2A_3$ nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $A_1H_4 \perp A_2A_3$.



Hình 5.11

Chứng minh tương tự ta có $A_2H_4 \perp A_1A_3$.

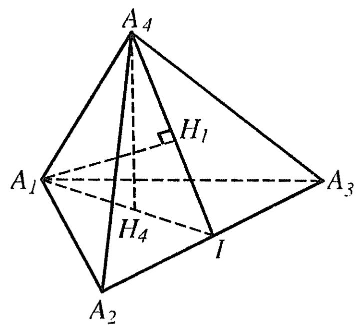
Vậy H_4 là trực tâm tam giác $A_1A_2A_3$.

3) $c \Rightarrow d$: Giả sử A_4H_4 là đường cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và H_4 là trực tâm tam giác $A_1A_2A_3$ (h.5.12).

Giả sử A_1H_4 cắt A_2A_3 tại điểm I và A_1H_1 là đường cao của tam giác A_1A_4I. Khi đó vì $A_2A_3 \perp A_4H_4$ và $A_2A_3 \perp A_1H_4$ nên $A_2A_3 \perp A_1H_1$. Như vậy

$A_1H_1 \perp \text{mp}(A_2A_3A_4)$ hay A_1H_1 là đường cao của tứ diện và hai đường cao A_4H_4, A_1H_1 cắt nhau.

Chứng minh tương tự ta có hai đường cao nào của tứ diện đều cắt nhau. Nhưng bốn đường cao đó không đồng phẳng nên chúng phải đồng quy tại một điểm.

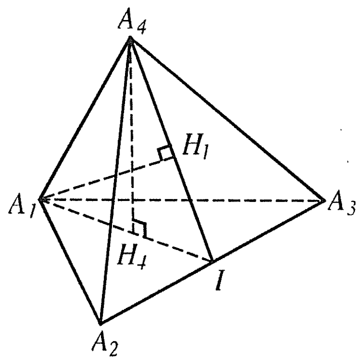


Hình 5.12

4) $d \Rightarrow e$: Xét hai đường cao A_1H_1 và A_4H_4 của tứ diện (h.5.13).

Vì hai đường cao đó cắt nhau nên mặt phẳng chứa chúng vuông góc với đường thẳng A_2A_3 tại điểm I và

$$A_2A_3 \perp A_1I\,,\ A_2A_3 \perp A_4I\,.$$



Hình 5.13

Từ các tam giác vuông IA_1A_2, IA_1A_3, IA_2A_4, IA_3A_4 ta có:

$A_1A_2^2 = A_1I^2 + A_2I^2$, $A_1A_3^2 = A_1I^2 + A_3I^2$,

$A_2A_4^2 = A_2I^2 + A_4I^2$, $A_3A_4^2 = A_3I^2 + A_4I^2$

Từ đó suy ra: $A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2$.

Chứng minh tương tự cho cặp cạnh đối còn lại.

5) $e \Rightarrow a$: Ta có giả thiết $A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2$

Từ $A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2$ ta suy ra $A_1A_2^2 - A_1A_3^2 = A_2A_4^2 - A_3A_4^2$. hay là

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_1A_3}\right).\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \left(\overrightarrow{A_4A_2} - \overrightarrow{A_4A_3}\right).\left(\overrightarrow{A_4A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}\right)$$

Suy ra: $\overrightarrow{A_3A_2}.\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}\right) = \overrightarrow{A_3A_2}.\left(\overrightarrow{A_4A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}\right)$ (*)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{A_3A_2}.\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} - \overrightarrow{A_4A_2} - \overrightarrow{A_4A_3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{A_3A_2}.\overrightarrow{A_1A_4} = 0 \Leftrightarrow A_1A_4 \perp A_2A_3$.

Tương tự ta chứng minh được cho các cặp cạnh đối còn lại.

BÀI TẬP

19. Cho tam giác ABC cố định. Tìm quỹ tích điểm D sao cho tứ diện $ABCD$ là tứ diện trực tâm.

20. Hình hộp ngoại tiếp tứ diện trực tâm có đặc điểm gì?

21. Chứng minh rằng các trung điểm các cạnh của tứ diện trực tâm nằm trên một mặt cầu. Ngược lại có đúng không?

22. Chứng minh rằng đối với tứ diện trực tâm:

a) Ba góc phẳng ở mỗi đỉnh của tứ diện hoặc cùng nhọn hoặc cùng không nhọn.

b) Có ít nhất một mặt là tam giác nhọn.

23. Cho tứ diện trực tâm $A_1A_2A_3A_4$ có trực tâm H. Các tứ diện $HA_iA_jA_k$ ($i \neq j \neq k$) có phải là tứ diện trực tâm hay không? Nếu có thì trực tâm của tứ diện đó là điểm nào?

24. Cho hai tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của C trên mp(ABD) là trực tâm tam giác ABD thì hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) là trực tâm tam giác ABC.

25. Cho tứ diện trực tâm $ABCD$. Biết rằng bốn đường thẳng đi qua một đỉnh và tâm đường tròn nội tiếp mặt đối diện đồng quy. Chứng minh rằng đó là hình chóp đều.

26. Tứ diện $OABC$ gọi là *tứ diện vuông đỉnh O* nếu ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Các tam giác vuông OAB, OBC, OCA gọi là *các mặt vuông* của tứ diện đó, còn tam giác ABC gọi là *mặt huyền* của tứ diện.

a) Chứng minh rằng mặt huyền của tứ diện vuông là tam giác nhọn.

b) Điểm Monge của tứ diện vuông là điểm nào?

c) Chứng minh rằng trong tứ diện vuông bình phương diện tích mặt huyền bằng tổng bình phương diện tích ba mặt vuông.

d) Phải chăng nếu một hình tứ diện có bình phương diện tích một mặt nào đó bằng tổng bình phương diện tích ba mặt còn lại thì hình tứ diện đó là tứ diện vuông?

§4. TOẠ ĐỘ TỈ CỰ ĐỐI VỚI HÌNH TỨ DIỆN

1. Định nghĩa

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Với mọi điểm M trong không gian ta có bộ ba số duy nhất x_1, x_2, x_3 sao cho (h.5.14): $\overrightarrow{A_4M} = x_1\overrightarrow{A_4A_1} + x_2\overrightarrow{A_4A_2} + x_3\overrightarrow{A_4A_3}$, hay:

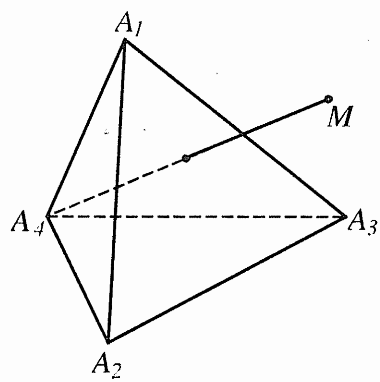
$$\overrightarrow{A_4M} = x_1\left(\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MA_4}\right) + x_2\left(\overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{MA_4}\right) + x_3\left(\overrightarrow{MA_3} - \overrightarrow{MA_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + x_3\overrightarrow{MA_3} + (1 - x_1 - x_2 - x_3)\overrightarrow{MA_4} = \vec{0}.$$

Nếu ta đặt $x_4 = 1 - x_1 - x_2 - x_3$ thì đẳng thức trên trở thành

$$x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + x_3\overrightarrow{MA_3} + x_4\overrightarrow{MA_4} = \vec{0}$$

với $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.



Hình 5.14

Bộ bốn số $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ được gọi là *toạ độ tỉ cự* của điểm M đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Khi đó ta dùng kí hiệu: $M\ (x_1; x_2; x_3; x_4)$ hoặc $M = (x_1; x_2; x_3; x_4)$. Số x_i gọi là *toạ số* thứ *i* của điểm M. Mỗi điểm M có một toạ độ tỉ cự duy nhất.

Ngược lại, mỗi bộ bốn số $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ với điều kiện $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ đều có điểm M duy nhất sao cho $M = (x_1; x_2; x_3; x_4)$.

Dễ thấy:

+) $A_1 = (1;0;0;0)$, $A_2 = (0;1;0;0)$, $A_3 = (0;0;1;0)$, $A_4 = (0;0;0;1)$.

+) Điểm $M(x_1; x_2; x_3; x_4)$ nằm trên mp(α_i) khi và chỉ khi $x_i = 0$.

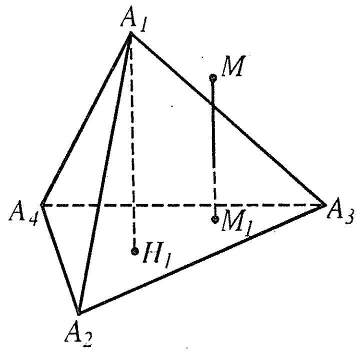
+) Điểm $M(x_1; x_2; x_3; x_4)$ nằm trên đường thẳng A_1A_2 khi và chỉ khi $x_3 = 0$ và $x_4 = 0$.

+) Điểm G là trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ khi và chỉ khi

$$G = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

2. Ý nghĩa hình học của các toạ số

Giả sử đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cho điểm M có toạ độ tỉ cự là $M = (x_1; x_2; x_3; x_4)$. Ta hãy tìm hiểu ý nghĩa của toạ số x_i.



Hình 5.15

Gọi H_i và M_i lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A_i và điểm M trên mp(α_i), tức là $A_iH_i = h_i$, còn $MM_i = d_i$ là khoảng cách từ M tới mp(α_i) (h.5.15). Khi đó vì hai vectơ $\overrightarrow{M_iM}$ và $\overrightarrow{H_iA_i}$ cùng phương nên có số t sao cho $\overrightarrow{M_iM} = t\overrightarrow{H_iA_i}$.

Ta có $x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + x_3\overrightarrow{MA_3} + x_4\overrightarrow{MA_4} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow x_1\left(\overrightarrow{H_iA_1} - \overrightarrow{H_iM}\right) + x_2\left(\overrightarrow{H_iA_2} - \overrightarrow{H_iM}\right) + x_3\left(\overrightarrow{H_iA_3} - \overrightarrow{H_iM}\right) + x_4\left(\overrightarrow{H_iA_4} - \overrightarrow{H_iM}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x_1\overrightarrow{H_iA_1} + x_2\overrightarrow{H_iA_2} + x_3\overrightarrow{H_iA_3} + x_4\overrightarrow{H_iA_4} = \overrightarrow{H_iM}.$$

Nhưng $\overrightarrow{H_iM} = \overrightarrow{H_iM_i} + \overrightarrow{M_iM} = \overrightarrow{H_iM_i} + t\overrightarrow{H_iA_i}$.

Bởi vậy $x_1\overrightarrow{H_iA_1} + x_2\overrightarrow{H_iA_2} + x_3\overrightarrow{H_iA_3} + x_4\overrightarrow{H_iA_4} = \overrightarrow{H_iM_i} + t\overrightarrow{H_iA_i}$.

Nhân vô hướng cả hai vế với vectơ $\overrightarrow{H_iA_i}$ ta được $x_ih_i^2 = th_i^2$ hay $x_i = t$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{M_iM} = x_1\overrightarrow{H_iA_i}$

Như vậy ta có ý nghĩa hình học của toạ số x_i:

+) Về giá trị tuyệt đối của x_i, ta có $|x_i| = \dfrac{d_i}{h_i}$, tức $|x_i|$ bằng tỉ số khoảng cách từ điểm M tới mp(α_i) và chiều cao h_i.

+) Dấu của x_i là dương hay âm tuỳ theo điểm M và điểm A_i nằm cùng phía hay khác phía đối với mp(α_i).

Từ đó suy ra: Nếu cho hai điểm $M(x_1;x_2;x_3;x_4)$ và $M'(x'_1;x'_2;x'_3;x'_4)$ không nằm trên mp(α_i) thì M và M' nằm cùng phía hay khác phía đối với mp(α_i) tuỳ theo $x_i x'_i$ là dương hay âm.

3. Các nửa không gian

Mỗi mp(α_i) chia các điểm không nằm trên nó thành hai nửa không gian có bờ là (α_i). Ta kí hiệu α_i^+ là nửa không gian có chứa điểm A_i và α_i^- là nửa không gian không chứa điểm A_i, tức là:

$$\alpha_i^+ = \{M(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i > 0\} \text{ và } \alpha_i^- = \{M(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i < 0\}.$$

+) Các tập α_i^+ và α_i^- là các tập lồi (nghĩa là: nếu hai điểm A và B cùng thuộc một tập hợp thì đoạn thẳng AB cũng thuộc tập hợp đó).

+) Nếu hai điểm A, B thuộc hai tập α_i^+ và α_i^- khác nhau thì đoạn thẳng AB có điểm chung với mp(α_i).

+) $\alpha_i^+ \cap \alpha_i^- = \varnothing$.

Bây giờ ta xét các tập hợp:

$$\overline{\alpha_i^+} = \{M(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i \geq 0\} \text{ và } \overline{\alpha_i^-} = \{M(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_i \leq 0\}.$$

Chúng được gọi là các *nửa không gian đóng*, hay *nửa không gian kể cả bờ*.

Hiển nhiên các tập đó cũng là những tập lồi và $\overline{\alpha_i^+} \cap \overline{\alpha_i^-} = \alpha_i$.

4. Sự phân chia không gian bởi các mặt phẳng (α_i)

Ta hãy xét tập hợp X gồm các điểm $M(x_1;x_2;x_3;x_4)$ không nằm trên bất kì mp(α_i) nào. Điều đó có nghĩa là các toạ số x_i của M đều khác 0, tức là chỉ có thể dương hay âm. Vậy:

$$X = \{M(x_1;x_2;x_3;x_4) \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0, x_4 \neq 0\}.$$

Tuỳ theo dấu của các toạ số x_i ta có 15 tập hợp cho bởi bảng sau đây:

	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
X_0	+	+	+	+	$X_{1,2}$	−	−	+	+	$X_{3,4}$	+	+	−	−
X_1	−	+	+	+	$X_{1,3}$	−	+	−	+	$X_{1,2,3}$	−	−	−	+
X_2	+	−	+	+	$X_{1,4}$	−	+	+	−	$X_{1,2,4}$	−	−	+	−
X_3	+	+	−	+	$X_{2,3}$	+	−	−	+	$X_{1,3,4}$	−	+	−	−
X_4	+	+	+	−	$X_{2,4}$	+	−	+	−	$X_{2,3,4}$	+	−	−	−

Theo bảng đó, ta có

+) $X_0 = \left\{ M\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right) \middle| x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0 \right\}$.

Như vậy $X_0 = \alpha_1^+ \cap \alpha_2^+ \cap \alpha_3^+ \cap \alpha_4^+$ và do đó X_0 chính là phần trong của hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

+) $X_i = \left\{ M\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right) \middle| x_i < 0, x_j > 0, x_k > 0, x_l > 0 \right\}$ với $i \neq j \neq k \neq l$.

Hiển nhiên $X_i = \alpha_i^- \cap \alpha_j^+ \cap \alpha_k^+ \cap \alpha_l^+ \quad i \neq j \neq k \neq l$.

Ta gọi X_i là *hình chân đế* ứng với đỉnh A_i.

+) $X_{i,j} = \left\{ M\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right) \middle| x_i < 0, x_j < 0, x_k > 0, x_l > 0 \right\}$ với $i \neq j \neq k \neq l$.

$$X_{i,j} = \alpha_i^- \cap \alpha_j^- \cap \alpha_k^+ \cap \alpha_l^+ \text{ với } i \neq j \neq k \neq l$$

Ta gọi $X_{i,j}$ là *hình nóc nhà* ứng với cặp đỉnh A_i, A_j.

+) $X_{i,j,k} = \left\{ M\left(x_1; x_2; x_3; x_4\right) \middle| x_i < 0, x_j < 0, x_k < 0, x_l > 0 \right\}$ với $i \neq j \neq k \neq l$

$$X_{i,j,k} = \alpha_i^- \cap \alpha_j^- \cap \alpha_k^- \cap \alpha_l^+ \text{ với } i \neq j \neq k \neq l.$$

Ta gọi $X_{i,j,k}$ là *hình tam diện* ứng với ba đỉnh A_i, A_j, A_k.

Dễ thấy rằng 15 tập hợp nói trên có các tính chất sau đây:

+) Đôi một không giao nhau

+) Hợp của 15 tập ấy là tập X.

+) Mỗi tập là một tập lồi (tức là nếu hai điểm A, B thuộc cùng một tập thì cả đoạn thẳng AB cùng thuộc tập đó).

+) Nếu hai điểm A, B thuộc hai tập khác nhau thì đoạn thẳng AB có điểm chung với ít nhất một trong các mặt phẳng (α_i).

Bởi vậy người ta nói rằng các mặt phẳng (α_i) chia không gian thành 15 miền lồi.

BÀI TẬP

27. Tìm ý nghĩa hình học của các tập điểm sau đây

a) $\left\{M\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle| x_i=0\right\}$;

b) $\left\{M\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle| x_i=0, x_j\ge 0, x_k\ge 0, x_l\ge 0\right\}$ với $i\ne j\ne k\ne l$

c) $\left\{M\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle| x_i=0, x_j=0\right\}$ với $i\ne j$

d) $\left\{M\left(x_1;x_2;x_3;x_4\right)\middle| x_i=0, x_j=0, x_k\ge 0, x_l\ge 0\right\}$.

28. Đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ hai điểm phân biệt A, B có toạ độ tỉ cự là $A=(a_1;a_2;a_3;a_4)$, $B=(b_1;b_2;b_3;b_4)$.

Tìm điều kiện về toạ số $(x_1;x_2;x_3;x_4)$ của điểm M để:

a) Điểm M nằm trên đường thẳng AB.

b) Điểm M thuộc đoạn thẳng AB.

c) Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

29. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và đối với nó điểm M có toạ độ tỉ cự $(a_1;a_2;a_3;a_4)$.

Gọi N_i là giao điểm (nếu có) của đường thẳng MA_i với mp(α_i).

Tìm toạ độ tỉ cự của điểm N_i.

30. Đối với tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ba điểm không thẳng hàng A, B, C có toạ độ tỉ cự là $A=(a_1;a_2;a_3;a_4)$, $B=(b_1;b_2;b_3;b_4)$, $C=(c_1;c_2;c_3;c_4)$.

Tìm điều kiện cần và đủ để điểm $M(x_1;x_2;x_3;x_4)$

a) nằm trên mặt phẳng (ABC).

b) thuộc tam giác ABC.

c) là trọng tâm tam giác ABC.

31. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, và đối với nó điểm M có toạ độ tỉ cự $(x_1;x_2;x_3;x_4)$. Gọi M_i là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (α_i) theo phương A_iA_i', trong đó A_i' là trọng tâm tam giác Δ_i. Tìm toạ độ tỉ cự của M_i.

32. Cho điểm M nằm trong tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Đường thẳng A_iM cắt mp(α_i) tại các điểm A_i' sao cho $\dfrac{MA_i'}{A_iA_i'}=k$. Hỏi k bằng bao nhiêu và M là điểm gì?

§5. MẶT CẦU NỘI TIẾP VÀ BÀNG TIẾP HÌNH TỨ DIỆN

1. Định nghĩa

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Mặt cầu (Σ) gọi là *nội tiếp* hình tứ diện đó nếu nó tiếp xúc với cả bốn mp(α_i) và tâm của (Σ) là điểm nằm trong hình tứ diện. Mặt cầu (Σ) gọi là *bàng tiếp* hình tứ diện đó nếu nó tiếp xúc với cả bốn mp(α_i) và tâm của (Σ) không nằm trong hình tứ diện.

2. Toạ độ tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi O là điểm có toạ độ tỉ cự là $O=(x_1;x_2;x_3;x_4)$ đối với tứ diện đó. Nếu có mặt cầu (Σ) tâm O bán kính R tiếp xúc với cả bốn mp(α_i) thì khoảng cách d_i từ M tới mp(α_i) đều phải bằng R ($R>0$): $d_1=d_2=d_3=d_4=R$. Vì $d_i=|x_1|h_i$ nên ta phải có

$$|x_1|h_1=|x_2|h_2=|x_3|h_3=|x_4|h_4=R. \qquad (*)$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

a) Nếu mọi toạ số x_i đều dương, tức là điểm O nằm trong hình tứ diện, thì (Σ) là mặt cầu nội tiếp. Khi đó (*) trở thành

$$x_1h_1 = x_2h_2 = x_3h_3 = x_4h_4 = R.$$

Từ đó, với chú ý rằng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ta suy ra

$$\frac{R}{h_1} + \frac{R}{h_2} + \frac{R}{h_3} + \frac{R}{h_4} = 1.$$

Vậy: $R\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = 1.$ (1)

Gọi V là thể tích tứ diện và $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ là diện tích toàn phần của tứ diện. Khi đó $S_i = \dfrac{3V}{h_i}$, nên bằng cách nhân hai vế của (1) với $3V$ ta được $RS = 3V$ hay $R = \dfrac{3V}{S}$. Như thế bán kính mặt cầu nội tiếp (Σ) hoàn toàn xác định, tâm của mặt cầu đó là điểm $O = \left(\dfrac{R}{h_1}; \dfrac{R}{h_2}: \dfrac{R}{h_3}; \dfrac{R}{h_4}\right)$ và bán kính của mặt cầu là $R = \dfrac{3V}{S}$.

Sau đây ta xét trường hợp các mặt cầu bàng tiếp.

b) Trường hợp tâm mặt cầu bàng tiếp có một toạ số x_i nào đó âm, ba toạ số còn lại đều dương. Ta kí hiệu mặt cầu đó là (Σ_i) với tâm là $O_i = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ và bán kính là R_i. Mặt cầu (Σ_i) như thế gọi là mặt cầu *bàng tiếp ứng với đỉnh* A_i.

Nếu $i = 1$ thì (*) trở thành $-x_1h_1 = x_2h_2 = x_3h_3 = x_4h_4 = R_1$.

Từ đó với chú ý rằng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ta suy ra

$$R_1\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = 1.$$

Nhân hai vế với $3V$ ta được:

$$R_1\left(-S_1+S_2+S_3+S_4\right)=3V.$$

Vì $S_1<S_2+S_3+S_4$ nên $R_1>0$ và $R_1=\dfrac{3V}{S-2S_1}$.

Vậy bán kính mặt cầu hoàn toàn xác định.

Tâm mặt cầu là điểm $O_1=\left(-\dfrac{R_1}{h_1};\dfrac{R_1}{h_2};\dfrac{R_1}{h_3};\dfrac{R_1}{h_4}\right)$.

Kết quả tương tự khi $i=2,3,4$ và ta có thêm ba mặt cầu bàng tiếp ứng với ba đỉnh còn lại:

Mặt cầu bàng tiếp (Σ_2) ứng với đỉnh A_2 có bán kính R_2 và có tâm O_2 như sau:

$$R_2=\frac{3V}{S-2S_2} \text{ và } O_2=\left(\frac{R_2}{h_1};-\frac{R_2}{h_2};\frac{R_2}{h_3};\frac{R_2}{h_4}\right).$$

Mặt cầu bàng tiếp (Σ_3) ứng với đỉnh A_3 có bán kính R_3 và có tâm O_3 như sau:

$$R_3=\frac{3V}{S-2S_3} \text{ và } O_3=\left(\frac{R_3}{h_1};\frac{R_3}{h_2};-\frac{R_3}{h_3};\frac{R_3}{h_4}\right).$$

Mặt cầu bàng tiếp (Σ_4) ứng với đỉnh A_4 có bán kính R_4 và có tâm O_4 như sau:

$$R_4=\frac{3V}{S-2S_4} \text{ và } O_4=\left(\frac{R_4}{h_1};\frac{R_4}{h_2};\frac{R_4}{h_3};-\frac{R_4}{h_4}\right).$$

c) Trường hợp tâm mặt cầu có hai toạ số âm là x_i và x_j hai toạ số còn lại dương.

Ta kí hiệu mặt cầu đó là $(\Sigma_{i,j})$ với tâm $O_{i,j}=(x_1;x_2;x_3;x_4)$ và bán kính $R_{i,j}$.

Mặt cầu $(\Sigma_{i,j})$ nếu có được gọi là *mặt cầu bàng tiếp ứng với cạnh* A_iA_j.

Khi $i=1, j=2$ (*) trở thành $-x_1h_1=-x_2h_2=x_3h_3=x_4h_4=R_{1,2}$.

Từ đó với chú ý rằng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ta suy ra

$$R_{1,2}\left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = 1 \text{ hay } R_{1,2}\left(-S_1 - S_2 + S_3 + S_4\right) = 3V.$$

Bán kính $R_{1,2}$ được xác định nếu điều kiện sau thoả mãn

$$S_1 + S_2 < S_3 + S_4 \quad (**)$$

Với điều kiện đó, mặt cầu $(\Sigma_{i,j})$ có bán kính $R_{1,2} = \dfrac{3V}{S - 2(S_2 + S_1)}$ và có tâm là điểm $O_{1,2} = \left(-\dfrac{R_{1,2}}{h_1}; -\dfrac{R_{1,2}}{h_2}; \dfrac{R_{1,2}}{h_3}; \dfrac{R_{1,2}}{h_4}\right)$.

Chú ý:

+) Nếu $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$ thì không có mặt cầu bàng tiếp $(\Sigma_{1,2})$ ứng với cạnh A_1A_2, nhưng lại có mặt cầu bàng tiếp $(\Sigma_{3,4})$ ứng với cạnh A_3A_4

+) Nếu $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ thì cả hai mặt cầu $(\Sigma_{1,2})$ và $(\Sigma_{3,4})$ đều không có. Như vậy nếu là hình tứ diện đều thì không có mặt cầu bàng tiếp ứng với các cạnh.

d) Trường hợp tâm mặt cầu có ba toạ số âm và một toạ số dương. Chẳng hạn nếu x_4 dương thì (*) trở thành:

$$-x_1h_1 = -x_2h_2 = -x_3h_3 = x_4h_4 = R.$$

Từ đó với chú ý rằng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ ta suy ra

$$R\left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = 1 \text{ hay } R\left(-S_1 - S_2 - S_3 + S_4\right) = 3V.$$

Vì $S_1 + S_2 + S_3 > S_4$ nên đẳng thức trên cho ta số $R < 0$.

Vậy không có mặt cầu như thế.

Ví dụ 1. Nếu $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều cạnh a. Khi đó ta có

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Từ đó ta suy ra:

+) Bán kính mặt cầu nội tiếp là $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{12} = \dfrac{h_1}{4}$.

Tâm mặt cầu là điểm $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Vậy tâm mặt cầu nội tiếp là trọng tâm G của tứ diện đều.

+) Có bốn mặt cầu bàng tiếp (Σ_i) bàng tiếp ứng với bốn đỉnh A_i, chúng đều có bán kính bằng nhau $R_i = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{h_1}{2} = 2R$. Tâm của chúng là các điểm

$$O_1\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ O_2\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),$$

$$O_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \text{ và } O_4\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right).$$

Dễ thấy rằng điểm O_i đối xứng với điểm G qua $\text{mp}(\alpha_i)$.

+) Tứ diện đều không có mặt cầu bàng tiếp ứng với cạnh.

Ví dụ 2. Nếu $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện vuông cân tại đỉnh A_4, tức là ba cạnh A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 bằng nhau và đôi một vuông góc. Nếu độ dài các cạnh đó bằng a thì ta dễ thấy: $h_1 = h_2 = h_3 = a,\ h_4 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Từ đó ta tính được:

+) Bán kính mặt cầu nội tiếp là $R = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)a}{6}$ và tâm là điểm

$$O\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6};\frac{3-\sqrt{3}}{6};\frac{3-\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

+ Ba mặt cầu bàng tiếp ứng với các đỉnh A_1, A_2, A_3 có bán kính bằng nhau và bằng $R_1 = R_2 = R_3 = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)a}{2}$ và có tâm lần lượt là các điểm

$$O_1\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$O_2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};-\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{và } O_3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};-\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Mặt cầu bàng tiếp (Σ_4) ứng với đỉnh A_4 có bán kính $R_4=\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{6}$ và có tâm là điểm $O_4\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

+ Mặt cầu bàng tiếp ứng với các cạnh A_1A_2 hoặc A_2A_3 hoặc A_1A_3 có bán kính bằng nhau và bằng $R_{12}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)a}{2}$ và có tâm lần lượt là:

$$O_{12}=\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2};-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

$$O_{23}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};-\frac{\sqrt{3}+1}{2};-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$$

$$O_{13}=\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2};-\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right).$$

BÀI TẬP

33. Chứng minh

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}.$$

34. Chứng minh:

$$2\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}.$$

35. Cho hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, với giả thiết $S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq S_4$. Với điều kiện nào số mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt phẳng (α_i) là nhiều nhất.

36. Cho tứ diện đều T_1 nội tiếp trong tứ diện đều T_2, tức là mỗi đỉnh của T_1 nằm trên một và chỉ một mặt của T_2. Chứng minh rằng nếu T_1 có cạnh là a_1 và T_2 có cạnh là a_2 thì $3a_1 \geq a_2$.

37. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Với mỗi điểm M ta đặt

$$\overrightarrow{S_M} = S_1\overrightarrow{MA_1} + S_2\overrightarrow{MA_2} + S_3\overrightarrow{MA_3} + S_4\overrightarrow{MA_4}.$$

Chứng minh rằng:

a) Điểm M là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện khi và chỉ khi $\overrightarrow{S_M} = \vec{0}$.

b) Điểm M là tâm mặt cầu bàng tiếp ứng với đỉnh A_i khi và chỉ khi $\overrightarrow{S_M} - 2S_i\overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

38. a) Mặt cầu tâm O tiếp xúc với ba mặt SAB, SBC, SCA của tam diện $SABC$ lần lượt tại các điểm A_1, B_1, C_1. Hãy biểu thị góc $\widehat{ASB_1}$ qua các góc phẳng ở đỉnh của tam diện;

b) Mặt cầu nội tiếp và bàng tiếp của tứ diện $ABCD$ tiếp với mặt ABC lần lượt tại P và P'. Chứng minh rằng hai đường thẳng AP và AP' đối xứng với nhau qua phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

39. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, gọi O_i là tâm mặt cầu bàng tiếp (S_i) ứng với đỉnh A_i. Chứng minh rằng nếu các hình tứ diện $O_iA_jA_kA_l$ $(i \neq j \neq k \neq l)$ là tứ diện vuông tại đỉnh O_i thì $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện gần đều.

§6. MẶT CẦU NỘI TIẾP KHUNG VÀ BÀNG TIẾP KHUNG CỦA HÌNH TỨ DIỆN

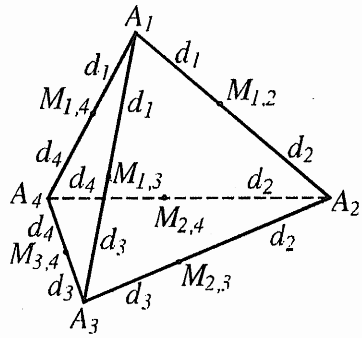
ĐỊNH NGHĨA. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Mặt cầu (S) gọi là *nội tiếp khung* của hình tứ diện đó nếu nó tiếp xúc với 6 đường thẳng chứa 6 cạnh của tứ diện sao cho các điểm tiếp xúc đều nằm trên các cạnh.

Không phải mọi hình tứ diện nào đều có mặt cầu nội tiếp khung. Định lí sau đây nói rõ điều đó.

ĐỊNH LÍ. *Để tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu nội tiếp khung điều kiện cần và đủ là tổng các cặp cạnh đối diện của nó bằng nhau:*

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4 = A_1A_4 + A_2A_3.$$

Chứng minh.



Hình 5.16

a) Giả sử hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu nội tiếp khung là mặt cầu (S).

Gọi các tiếp điểm nằm trên cạnh A_iA_j là $M_{i,j}$ ($i \neq j$ và $i, j = 1,2,3,4$) (h.5.16).

Từ tính chất của các tiếp tuyến của mặt cầu cùng xuất phát từ một điểm, ta đặt:

$$d_1 = A_1M_{1,2} = A_1M_{1,3} = A_1M_{1,4},$$

$$d_2 = A_2M_{1,2} = A_2M_{2,3} = A_2M_{2,4}$$

$$d_3 = A_3M_{1,3} = A_3M_{2,3} = A_3M_{3,4},\ d_4 = A_4M_{1,4} = A_4M_{2,4} = A_4M_{3,4}.$$

Khi đó vì các tiếp điểm đều thuộc các cạnh nên:

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_1M_{1,2} + A_2M_{1,2} + A_3M_{3,4} + A_4M_{3,4} = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

$$A_1A_3 + A_2A_4 = A_1M_{1,3} + A_3M_{1,3} + A_2M_{2,4} + A_4M_{2,4} = d_1 + d_3 + d_2 + d_4$$

$$A_1A_4 + A_2A_3 = A_1M_{1,4} + A_4M_{1,4} + A_2M_{2,3} + A_3M_{2,3} = d_1 + d_4 + d_2 + d_3$$

Vậy $A_1A_2 + A_3A_4 = A_1A_3 + A_2A_4 = A_1A_4 + A_2A_3$. (*)

b) Ngược lại, giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có điều kiện (*).

Gọi (C_1) là đường tròn nội tiếp tam giác $A_2A_3A_4$ với các tiếp điểm là $M_{2,3}$ $(\in A_2A_3)$, $M_{3,4}$ $(\in A_3A_4)$, $M_{2,4}$ $(\in A_2A_4)$.

Ta đặt $d_2 = A_2M_{2,3} = A_2M_{2,4}$, $d_3 = A_3M_{2,3} = A_3M_{3,4}$, $d_4 = A_4M_{2,4} = A_4M_{3,4}$.

Trên các cạnh A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 lần lượt lấy các điểm $M_{1,2}, M_{1,3}, M_{1,4}$ sao cho $A_2M_{1,2} = d_2$, $A_3M_{1,3} = d_3$, $A_4M_{1,4} = d_4$. Khi đó từ đẳng thức (*) ta dễ dàng suy ra $A_1M_{1,2} = A_1M_{1,3} = A_1M_{1,4}$ (và ta gọi ba độ dài đó là d_1).

Trong tam giác $A_1A_3A_4$ ta có $A_1M_{1,3} = A_1M_{1,4} = d_1$, $A_3M_{1,3} = A_3M_{1,4} = d_3$ $A_4M_{3,4} = A_4M_{1,4} = d_4$, nên ta dễ chứng minh rằng đường tròn (C_2) đi qua ba điểm $M_{1,3}$, $M_{3,4}$ và $M_{1,4}$ là đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_3A_4$ và như vậy các điểm $M_{1,3}$, $M_{3,4}$ và $M_{1,4}$ là các tiếp điểm. Tương tự như vậy đường tròn (C_3) đi qua ba điểm $M_{1,2}, M_{1,4}$ và $M_{2,4}$ là đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_4$, đường tròn (C_4) đi qua ba điểm $M_{1,2}$, $M_{2,3}$ và $M_{1,3}$ là đường tròn nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chú ý rằng nếu $i \neq j$ thì hai đường tròn (C_i) và (C_j) cùng tiếp xúc với với một đường thẳng (cạnh đối diện của cạnh A_iA_j) tại một điểm, nên trục của hai đường tròn đó cắt nhau. Như vậy trục cả bốn đường tròn cắt nhau tại điểm O, và O cách đều 6 điểm M_{ij}. Mặt cầu (S) tâm O đi qua 6 điểm M_{ij} chính là mặt cầu nội tiếp khung của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

ĐỊNH NGHĨA. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Mặt cầu (S) gọi là *bàng tiếp khung* của hình tứ diện đó nếu nó tiếp xúc với 6 đường thẳng chứa 6 cạnh của tứ diện sao cho có ít nhất một điểm tiếp xúc không nằm trên bất cứ cạnh nào của tứ diện.

ĐỊNH LÍ. *Nếu tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu (S) bàng tiếp khung thì luôn luôn có ba tiếp điểm thuộc ba cạnh của tứ diện và ba tiếp điểm còn lại không thuộc cạnh nào của tứ diện.*

Chứng minh. Giả sử hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu bàng tiếp khung là mặt cầu (S). Gọi các tiếp điểm nằm trên các đường thẳng A_iA_j là $M_{i,j}$ $(i \neq j$ và $i, j = 1,2,3,4)$. Theo định nghĩa về bàng tiếp khung, ta có thể giả sử tiếp điểm $M_{1,2}$ thuộc đường thẳng A_1A_2 nhưng nằm ngoài cạnh A_1A_2, và không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử điểm A_2 nằm giữa hai điểm A_1 và $M_{1,2}$.

Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng $A_1A_2A_3$ theo một đường tròn (C) tiếp xúc với ba đường thẳng A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 lần lượt tại các điểm $M_{1,2}$, $M_{2,3}$, $M_{1,3}$. Nhưng vì điểm A_2 nằm giữa hai điểm A_1 và $M_{1,2}$ nên (C) là đường tròn bàng tiếp của tam giác $A_1A_2A_3$. Từ đó suy ra điểm $M_{2,3}$ thuộc cạnh A_2A_3, còn điểm $M_{1,3}$ không thuộc cạnh A_1A_3 (điểm A_3 nằm giữa hai điểm A_1 và $M_{1,3}$). Xét tương tự đối với tam giác $A_1A_2A_4$ ta được: điểm $M_{2,4}$ thuộc cạnh A_2A_4, còn điểm $M_{1,4}$ không thuộc cạnh A_1A_4 (điểm A_4 nằm giữa hai điểm A_1 và $M_{1,4}$). Cuối cùng vì trong tam giác $A_2A_3A_4$ hai tiếp điểm $M_{2,3}$, $M_{2,4}$ lần lượt thuộc cạnh A_2A_3 và A_2A_4, nên tiếp điểm $M_{3,4}$ phải thuộc cạnh A_3A_4.

Mặt cầu (S) như thế được gọi là mặt cầu *bàng tiếp khung ứng với đỉnh* A_1.

ĐỊNH LÍ. *Để tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu bàng tiếp khung, ứng với đỉnh A_1 điều kiện cần và đủ là:*

$$A_1A_2 - A_3A_4 = A_1A_3 - A_2A_4 = A_1A_4 - A_2A_3.$$

Chứng minh.

a) Giả sử hình tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có (S) là mặt cầu bàng tiếp khung ứng với đỉnh A_1 (h.5.17).

Gọi các tiếp điểm nằm trên cạnh A_iA_j là $M_{i,j}$ $(i \neq j$ và $i, j = 1,2,3,4)$.

Từ tính chất của các tiếp tuyến của mặt cầu cùng xuất phát từ một điểm, ta đặt $d_1 = A_1M_{1,2} = A_1M_{1,3} = A_1M_{1,4}$, $d_2 = A_2M_{1,2} = A_2M_{2,3} = A_2M_{2,4}$

$d_3 = A_3M_{1,3} = A_3M_{2,3} = A_3M_{3,4}$, $d_4 = A_4M_{1,4} = A_4M_{2,4} = A_4M_{3,4}$.

Khi đó:

$$A_1A_2 - A_3A_4 = A_1M_{1,2} - A_2M_{1,2} - A_3M_{3,4} - A_4M_{3,4} = d_1 - d_2 - d_3 - d_4$$

$$A_1A_3 - A_2A_4 = A_1M_{1,3} - A_3M_{1,3} - A_2M_{2,4} - A_4M_{2,4} = d_1 - d_3 - d_2 - d_4$$

$$A_1A_4 - A_2A_3 = A_1M_{1,4} - A_4M_{1,4} - A_2M_{2,3} - A_3M_{2,3} = d_1 - d_4 - d_2 - d_3.$$

Vậy $A_1A_2 - A_3A_4 = A_1A_3 - A_2A_4 = A_1A_4 - A_2A_3$. (*)

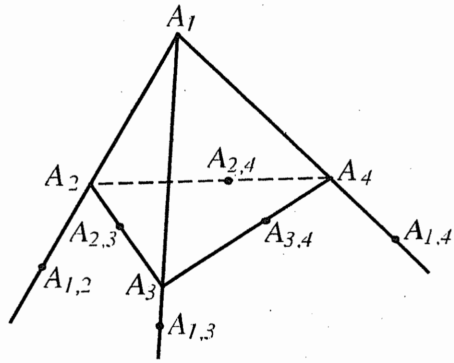
b) Ngược lại, giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có điều kiện (*).

Gọi (C_1) là đường tròn nội tiếp tam giác $A_2A_3A_4$ với các tiếp điểm là $M_{2,3}$ ($\in A_2A_3$), $M_{3,4}$ ($\in A_3A_4$), $M_{2,4}$ ($\in A_2A_4$).

Ta đặt $d_2 = A_2M_{2,3} = A_2M_{2,4}$,

$d_3 = A_3M_{2,3} = A_3M_{3,4}$,

$d_4 = A_4M_{2,4} = A_4M_{3,4}$.



Hình 5.17

Trên các tia đối của các tia A_2A_1, A_3A_1, A_4A_1 lần lượt lấy các điểm $M_{1,2}, M_{1,3}, M_{1,4}$ sao cho $A_2M_{1,2} = d_2$, $A_3M_{1,3} = d_3$, $A_4M_{1,4} = d_4$. Khi đó từ đẳng thức (*) ta dễ dàng suy ra $A_1M_{1,2} = A_1M_{1,3} = A_1M_{1,4}$ (và ta gọi ba độ dài đó là d_1).

Trong tam giác $A_1A_3A_4$ ta có $A_1M_{13} = A_1M_{14} = d_1$, $A_3M_{13} = A_3M_{14} = d_3$, $A_4M_{3,4} = A_4M_{1,4} = d_4$, nên ta dễ chứng minh rằng đường tròn (C_2) đi qua ba điểm $M_{1,3}$, $M_{3,4}$ và $M_{1,4}$ là đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1A_3A_4$ và như vậy các điểm M_{13}, M_{34} và M_{14} là các tiếp điểm. Tương tự như vậy đường tròn (C_3) đi qua ba điểm $M_{1,2}$, $M_{1,4}$ và $M_{2,4}$ là đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1A_2A_4$, đường tròn (C_4) đi qua ba điểm $M_{1,2}$, $M_{2,3}$ và $M_{1,3}$ là đường tròn bàng tiếp tam giác $A_1A_2A_3$.

Ta chú ý rằng nếu $i \neq j$ thì hai đường tròn (C_i) và (C_j) cùng tiếp xúc với một đường thẳng (chứa cạnh đối diện của cạnh A_iA_j) tại một điểm, nên trục của hai đường tròn đó cắt nhau. Như vậy trục cả bốn đường tròn cắt nhau tại điểm O, và O cách đều 6 điểm $M_{i,j}$. Mặt cầu (S) tâm O đi qua 6 điểm M_{ij} chính là mặt cầu bàng tiếp khung của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (ứng với đỉnh A_1).

HỆ QUẢ.

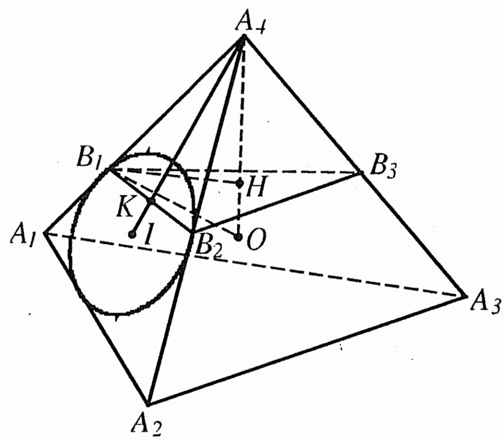
1) Một hình tứ diện có ba mặt cầu bàng tiếp khung khi và chỉ khi nó là tứ diện gần đều.

2) Một hình tứ diện có mặt cầu nội tiếp khung và có mặt cầu bàng tiếp khung khi và chỉ khi đó là hình chóp tam giác đều.

3) Một hình tứ diện có mặt cầu nội tiếp khung và ba mặt cầu bàng tiếp khung khi và chỉ khi nó là tứ diện đều.

Bán kính mặt cầu nội tiếp khung

Giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu nội tiếp khung là (O, R) (h.5.18). Ta kí hiệu a_i là độ dài các đoạn tiếp tuyến với mặt cầu xuất phát từ đỉnh A_i, B_i là điểm tiếp xúc của mặt cầu $(O; R)$ với các cạnh A_4A_i. Như vậy điểm O phải nằm trên đường cao A_4H của hình chóp $A_4.B_1B_2B_3$.



Hình 5.18

Từ tam giác vuông A_4B_1O với đường cao B_1H ta có: $R = OB_1 = \dfrac{A_4B_1.B_1H}{A_4H}$.

Chú ý rằng B_1H là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1B_2B_3$ nên nếu gọi S là diện tích tam giác đó thì $B_1H = \dfrac{B_1B_2.B_2B_3.B_3B_1}{4S}$.

Vậy $R = \dfrac{a_4.B_1B_2.B_2B_3.B_3B_1}{4S.A_4H}$. (*)

Xét tam giác $A_4A_1A_2$ với đường tròn nội tiếp chính là giao của mặt cầu $(O; R)$ với mp(α_3), B_1 và B_2 là hai trong ba tiếp điểm. Tam giác đó có nửa chu vi và diện tích: $p = a_1 + a_2 + a_4$, $S_3 = \sqrt{(a_1 + a_2 + a_4)a_1a_2a_4}$, nên đường tròn nội tiếp có bán kính $r = \dfrac{S_3}{p} = \sqrt{\dfrac{a_1a_2a_4}{a_1 + a_2 + a_4}}$.

Nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là trung điểm B_1B_2 thì từ tam giác A_4B_1I ta có: $\dfrac{1}{KB_1^2} = \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{a_4^2} = \dfrac{a_1 + a_2 + a_4}{a_1a_2a_4} + \dfrac{1}{a_4^2} = \dfrac{(a_4 + a_1)(a_4 + a_2)}{a_1a_2a_4^2}$.

Từ đó suy ra: $B_1B_2 = 2KB_1 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_1a_2}{(a_4 + a_1)(a_4 + a_2)}}$

Tương tự ta có: $B_2B_3 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_2a_3}{(a_4 + a_2)(a_4 + a_3)}}$, $B_3B_1 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_3a_1}{(a_4 + a_3)(a_4 + a_1)}}$

Bởi vậy công thức (*) trở nên: $R = \dfrac{2a_1a_2a_3a_4^4}{S.A_4H(a_4 + a_1)(a_4 + a_2)(a_4 + a_3)}$.

Ta gọi V và V' lần lượt là thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và $B_1B_2B_3A_4$ thì

$$\frac{V'}{V} = \frac{A_4B_1}{A_4A_1}\cdot\frac{A_4B_2}{A_4A_2}\cdot\frac{A_4B_3}{A_4A_3} = \frac{a_4}{a_4 + a_1}\cdot\frac{a_4}{a_4 + a_2}\cdot\frac{a_4}{a_4 + a_3}.$$

Suy ra $S.A_4H = 3V' = \dfrac{3a_4^3}{(a_4 + a_1)(a_4 + a_2)(a_4 + a_3)}V$.

Cuối cùng ta có $R = \dfrac{2a_1a_2a_3a_4}{3V}$.

Chú ý. Ta gọi ba cạnh của tam giác $A_1A_2A_3$ có độ dài là $A_2A_3 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_2 = c$ và các cạnh đối diện của chúng có độ dài lần lượt là $m-a, m-b, m-c$. Khi đó nếu p_4 là nửa chu vi của tam giác $A_1A_2A_3$ thì $a_1 = p_4 - a$, $a_2 = p_4 - b$, $a_3 = p - c$ và $a_4 = m - a - (p_4 - a) = m - p_4$. Bởi vậy ta có:

$$R = \frac{2(p_4-a)(p_4-b)(p_4-c)(m-p_4)}{3V}$$

$$= \frac{2p_4(p_4-a)(p_4-b)(p_4-c)(m-p_4)}{3Vp_4}$$

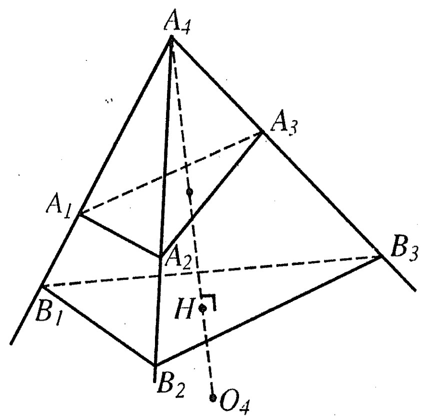
$$= \frac{2(m-p_4)S_4^2}{S_4h_4p_4} = \frac{2(m-p_4)S_4}{p_4h_4}.$$

Một cách tổng quát ta có $R = \dfrac{2(m-p_i)S_i}{p_ih_i}$, trong đó p_i, S_i, h_i lần lượt là nửa chu vi và diện tích tam giác Δ_i, còn h_i là chiều cao của tứ diện ứng với tam giác đó.

Bán kính mặt cầu bàng tiếp khung

Giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có mặt cầu bàng tiếp khung là (O_4, R_4) ứng với đỉnh A_4 (h.5.19).

Ta kí hiệu a_i là độ dài các đoạn tiếp tuyến với mặt cầu xuất phát từ đỉnh A_i, và B_i là điểm tiếp xúc của mặt cầu (O_4, R_4) với các cạnh A_4A_i. Như vậy điểm O_4 phải nằm trên đường cao A_4H của hình chóp $A_4.B_1B_2B_3$.



Hình 5.19

Từ tam giác vuông $A_4B_1O_4$ với đường cao B_1H ta có: $R = O_4B_1 = \dfrac{A_4B_1.B_1H}{A_4H}$.

Chú ý rằng B_1H là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $B_1B_2B_3$ nên nếu gọi S là diện tích tam giác đó thì $B_1H = \dfrac{B_1B_2.B_2B_3.B_3B_1}{4S}$.

Vậy $R = \dfrac{a_4.B_1B_2.B_2B_3.B_3B_1}{4S.A_4H}$. (*).

Xét tam giác $A_4A_1A_2$ với đường tròn bàng tiếp góc A_4 (là giao của mặt cầu (O_4, R_4) với mp(α_3)), B_1 và B_2 là hai trong ba tiếp điểm. Tam giác đó có nửa chu vi là $p = a_4$ nên có diện tích là $S_3 = \sqrt{a_4a_1a_2(a_4 - a_1 - a_2)}$. Mặt khác nếu gọi r là bán kính đường tròn bàng tiếp thì

$$S_3 = \frac{r}{2}(A_4A_1 + A_4A_2 - A_1A_2) = \frac{r}{2}(a_4 - a_1 + a_4 - a_2 - a_1 - a_2) = r(a_4 - a_1 - a_2)$$

Suy ra $r = \sqrt{\dfrac{a_4a_1a_2}{a_4 - a_1 - a_2}}$.

Nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và K là trung điểm B_1B_2 thì từ tam giác A_4B_1I ta có:

$$\frac{1}{KB_1^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{a_4^2} = \frac{a_4 - a_1 - a_2}{a_1a_2a_4} + \frac{1}{a_4^2} = \frac{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)}{a_1a_2a_4^2}.$$

Từ đó suy ra: $B_1B_2 = 2KB_1 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_1a_2}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)}}$.

Tương tự ta có: $B_2B_3 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_2a_3}{(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}}$, $B_3B_1 = 2a_4\sqrt{\dfrac{a_3a_1}{(a_4 - a_3)(a_4 - a_1)}}$

Bởi vậy công thức (*) trở nên: $R_4 = \dfrac{2a_1a_2a_3a_4^4}{S.A_4H(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}$.

Ta gọi V và V' lần lượt là thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và $B_1B_2B_3A_4$ thì

$$\frac{V'}{V} = \frac{A_4B_1}{A_4A_1} \cdot \frac{A_4B_2}{A_4A_2} \cdot \frac{A_4B_3}{A_4A_3} = \frac{a_4}{a_4 - a_1} \cdot \frac{a_4}{a_4 - a_2} \cdot \frac{a_4}{a_4 - a_3}.$$

Suy ra $S.A_4H = 3V' = \dfrac{3a_4^3}{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)}V$.

Cuối cùng ta có $R_4 = \dfrac{2a_1a_2a_3a_4}{3V}$.

Chú ý. Ta gọi ba cạnh của tam giác $A_1A_2A_3$ có độ dài là $A_2A_3 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_2 = c$ và các cạnh đối diện của chúng có độ dài lần lượt là $m+a, m+b, m+c$. Khi đó nếu p_4 là nửa chu vi của tam giác $A_1A_2A_3$ thì

$$a_1 = p_4 - a,\ a_2 = p_4 - b,\ a_4 = p - c \text{ và } a_4 = m + a + (p_4 - a) = m + p_4.$$

Bởi vậy ta có:

$$R_4 = \frac{2(p_4-a)(p_4-b)(p_4-c)(m+p_4)}{3V} = \frac{2p_4(p_4-a)(p_4-b)(p_4-c)(m+p_4)}{3Vp_4}$$

$$= \frac{2(m+p_4)S_4^2}{S_4h_4p_4} = \frac{2(m+p_4)S_4}{p_4h_4}.$$

BÀI TẬP

40. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a* và cạnh bên bằng *b*, với $a \neq b$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp khung và bàng tiếp khung.

41. Tính bán kính mặt cầu bàng tiếp khung của tứ diện gần đều *ABCD*, với $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$.

42. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp khung và bàng tiếp khung của tứ diện đều cạnh *a*.

43. Tứ diện *ABCD* có $AB + CD = BC + AD$. Chứng minh rằng có một mặt cầu tiếp xúc với năm cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* và *AC*.

44. Một mặt cầu (*S*) tiếp xúc với các cạnh *AB*, *BC*, *CD*, *DA* của tứ diện *ABCD* mà các tiếp điểm là bốn đỉnh của một hình vuông. Chứng minh rằng (*S*) là mặt cầu nội tiếp khung của tứ diện *ABCD*.

MỤC LỤC

Trang

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGƯT **NGÔ TRẦN ÁI**

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS. TS **VŨ VĂN HÙNG**

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Phó Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Giám đốc CTCP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội **PHAN KẾ THÁI**

Biên tập nội dung và sửa bản in:

HOÀNG VIỆT

Trình bày bìa:

HOÀNG MẠNH DỨA

Chế bản:

PHÙNG MINH TRỤ

TÀI LIỆU CHUYÊN TOÁN – HÌNH HỌC 11

Mã số : TYT83h4 - CPD
Số đăng kí KHXB: 07-2014/CXB/178-1910/GD

In 3.000 cuốn (QĐ in số 07), khổ 17x24 cm, In tại Công ty CP In - PHS
và TBTH Quảng Nam, 260 Hùng Vương, TP. Tam Kỳ, Quảng Nam.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 02 năm 2014.