ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ GIỚI HẠN

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017 - 2018

GIỚI HẠN DÃY SỐ

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

<table>
<tr><th>GIỚI HẠN HỮU HẠN</th><th>GIỚI HẠN VÔ CỰC</th></tr>
<tr><td>
1. Giới hạn đặc biệt:
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$
$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (|q|<1)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$
2. Định lí :
a) Nếu lim u_n = a, lim v_n = b thì
• lim (u_n + v_n) = a + b
• lim (u_n – v_n) = a – b
• lim (u_n.v_n) = a.b
• $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ (nếu b ≠ 0)
b) Nếu $u_n \ge 0$, ∀n và lim u_n= a
thì $a \ge 0$ và lim $\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$
c) Nếu $|u_n|\le v_n, \forall n$ và lim v_n = 0
thì lim u_n = 0
d) Nếu lim u_n = a thì $\lim|u_n|=|a|$
3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn
$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}\quad (|q|<1)$
</td><td>
1. Giới hạn đặc biệt:
$\lim\sqrt{n}=+\infty$ $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$
$\lim q^n=+\infty\ (q>1)$
2. Định lí:
a) Nếu $\lim|u_n|=+\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n}=0$
b) Nếu lim u_n = a, lim v_n = ±∞ thì $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$
c) Nếu lim u_n = a ≠ 0, lim v_n = 0
thì $\lim\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{neu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{neu } a.v_n<0\end{cases}$
d) Nếu lim u_n = +∞, lim v_n = a
thì $\lim(u_n.v_n)=\begin{cases}+\infty & \text{neu } a>0\\ -\infty & \text{neu } a<0\end{cases}$
* Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞ – ∞, 0.∞ thì phải tìm cách khử dạng vô định.
</td></tr>
</table>

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: TÍNH GIỚI HẠN BẰNG ĐỊNH NGHĨA

Phương pháp:

- Để chứng minh $\lim u_n=0$ ta chứng minh với mọi số $a>0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_a sao cho $|u_n|<a\quad \forall n>n_a$.
- Để chứng minh $\lim u_n=l$ ta chứng minh $\lim(u_n-l)=0$.
- Để chứng minh $\lim u_n=+\infty$ ta chứng minh với mọi số $M>0$ lớn tùy ý, luôn tồn tại số tự nhiên n_M sao cho $u_n>M\quad \forall n>n_M$.
- Để chứng minh $\lim u_n=-\infty$ ta chứng minh $\lim(-u_n)=+\infty$.
- Một dãy số nếu có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.

Câu 1. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $\lim|u_n|=+\infty$, thì $\lim u_n=+\infty$. **B.** Nếu $\lim|u_n|=+\infty$, thì $\lim u_n=-\infty$.

C. Nếu $\lim u_n=0$, thì $\lim|u_n|=0$. **D.** Nếu $\lim u_n=-a$, thì $\lim|u_n|=a$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Theo nội dung định lý.

Câu 2. Giá trị của $\lim \frac{1}{n+1}$ bằng:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a}-1$ ta có $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a \quad \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{1}{n+1} = 0$.

Câu 3. Giá trị của $\lim \frac{1}{n^k} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ bằng:

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt[k]{\frac{1}{a}}$ ta có $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_a^k} < a \quad \forall n > n_a$ nên có $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

Câu 4. Giá trị của $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2}$ bằng:

A. 0 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 8

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với $a>0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a}-2$ ta có $\frac{\sin^2 n}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n_a+2} < a \quad \forall n > n_a$ nên có

$\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$.

Câu 5. Giá trị của $\lim(2n+1)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn $n_M > \frac{M-1}{2}$

Ta có: $2n+1 > 2n_M + 1 > M \quad \forall n > n_M \Rightarrow \lim(2n+1) = +\infty$.

Câu 6. Giá trị của $\lim \frac{1-n^2}{n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn n_M thỏa $\frac{n_M^2-1}{n_M} > M$

$\Leftrightarrow n_M > \frac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}$.

Ta có: $\frac{n^2-1}{n} > M \quad \forall n > n_M \Rightarrow \lim \frac{n^2-1}{n} = +\infty$

Vậy $\lim \frac{1-n^2}{n} = -\infty$.

Câu 7. Giá trị của $\lim \frac{2}{n+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với mọi $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{2}{a} - 1\right] + 1$

Suy ra $\frac{2}{n+1} < a \quad \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{2}{n+1} = 0$.

Câu 8. Giá trị của $\lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\frac{|\cos n + \sin n|}{n^2} < \frac{2}{n^2}$ mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos n + \sin n}{n^2+1} = 0$

Câu 9. Giá trị của $\lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với mọi số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a = \left[\frac{1}{a^2} - 1\right] + 1$

Ta có: $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < a \quad \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0$.

Câu 10. Giá trị của $\lim \frac{3n^3+n}{n^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M = \left[\frac{M}{3}\right] + 1$

Ta có: $\frac{3n^3+n}{n^2} = 3n + \frac{1}{n} > M \quad \forall n > n_M$

Vậy $\lim \frac{3n^3+n}{n^2} = +\infty$.

Câu 11. Giá trị của $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với mọi $M > 0$ lớn tùy ý, ta chọn $n_M > \left(\frac{1}{a} + 3\right)^2 - 1$

Ta có: $\frac{n-2}{\sqrt{1+n}} = \sqrt{n+1} - \frac{3}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{1+n} - 3 > M \ \forall n > n_M$

Suy ra $\lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty$.

Câu 12. Giá trị của $A = \lim \frac{2n+1}{n-2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{5}{a} + 2 > 2$

Ta có: $\left|\frac{2n+1}{n-2} - 2\right| = \frac{5}{|n-2|} < \frac{5}{n_a - 2} < a \ \forall n > n_a$

Vậy $A = 2$.

Câu 13. Giá trị của $B = \lim \frac{2n+3}{n^2+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn n_a thỏa $\frac{2n_a+3}{n_a^2+1} < a$

$\Leftrightarrow n_a > \frac{1 + \sqrt{a^2 - 4a + 13}}{a}$

Ta có: $\frac{2n+3}{n^2+1} < a \ \forall n > n_a \Rightarrow B = 0$.

Câu 14. Giá trị của $C = \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$

Ta có: $\left|\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} - 1\right| < \left|\frac{n+2}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{n_a + 1} < a \ \forall n > n_a$

Vậy $C = 1$.

Câu 15. Giá trị của $A = \lim \frac{n - 2\sqrt{n}}{2n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 16. Giá trị của $B = \lim \frac{n\sin n - 3n^2}{n^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 17. Giá trị của $C = \lim \frac{1}{n^2 + 2\sqrt{n} + 7}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 18. Giá trị của $D = \lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 19. Giá trị của $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Gọi m là số tự nhiên thỏa: $m+1 > |a|$. Khi đó với mọi $n > m+1$

Ta có: $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left|\frac{a}{1}.\frac{a}{2}...\frac{a}{m}\right|.\left|\frac{a}{m+1}...\frac{a}{n}\right| < \frac{|a|^m}{m!}.\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}$

Mà $\lim\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} = 0$. Từ đó suy ra: $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Câu 20. Giá trị của $\lim \sqrt[n]{a}$ với $a > 0$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Nếu $a = 1$ thì ta có đpcm

- Giả sử $a > 1$. Khi đó: $a = \left[1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right]^n > n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

Suy ra: $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} \to 0$ nên $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

- Với $0 < a < 1$ thì $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Tóm lại ta luôn có: $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$.

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ DỰA VÀO CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÁC GIỚI HẠN CƠ BẢN

Phương pháp:

- Sử dụng các định lí về giới hạn, biến đổi đưa về các giới hạn cơ bản.
- Khi tìm $\lim \dfrac{f(n)}{g(n)}$ ta thường chia cả tử và mẫu cho n^k, trong đó k là bậc lớn nhất của tử và mẫu.
- Khi tìm $\lim\left[\sqrt[k]{f(n)}-\sqrt[m]{g(n)}\right]$ trong đó $\lim f(n)=\lim g(n)=+\infty$ ta thường tách và sử dụng phương pháp nhân lượng liên hơn.

+ Dùng các hằng đẳng thức:

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b;\qquad \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a-b$

- **Dùng định lí kẹp**: Nếu $|u_n|\le v_n, \forall n$ và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$

Khi tính các giới hạn dạng phân thức, ta chú ý một số trường hợp sau đây:

- Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng 0.
- Nếu bậc của từ bằng bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó bằng tỉ số các hệ số của luỹ thừa cao nhất của tử và của mẫu.
- Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì kết quả của giới hạn đó là $+\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu cùng dấu và kết quả là $-\infty$ nếu hệ số cao nhất của tử và mẫu trái dấu.

Câu 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n}{4^n}$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\dfrac{1}{2}$. Chọn giá trị đúng của $\lim u_n$ trong các số sau:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học ta có $n\le 2^n, \forall n\in\mathbb{N}$

Nên ta có : $n\le 2^n \Leftrightarrow \dfrac{n}{2^n}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2^n.2^n}\le\dfrac{1}{2^n}\Leftrightarrow\dfrac{n}{4^n}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Suy ra : $0<u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, mà $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow \lim u_n=0$.

Câu 2. Kết quả đúng của $\lim\left(5-\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** –4. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$-\dfrac{n}{n^2+1}\le\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\le\dfrac{n}{n^2+1}$

Ta có $\lim-\dfrac{n}{n^2+1}=\lim-\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{1+1/n^2}=0$; $\lim-\dfrac{n}{n^2+1}=0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\lim\left(\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=0\Rightarrow\lim\left(5-\dfrac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=5$.

Câu 3. Giá trị của. $A=\lim \frac{2n+1}{1-3n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 4. Giá trị của. $B=\lim \frac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 5. Kết quả đúng của $\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim \frac{\left(-1+2/n+1/n^2\right)}{\sqrt{3+2/n^2}}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{3+0}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 6. Giới hạn dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim u_n=\lim \frac{3n-n^4}{4n-5}=\lim n^3\frac{3/n^3-1}{4-5/n}=-\infty .$$

Vì $\lim n^3=+\infty;\lim \frac{3/n^3-1}{4-5/n}=-\frac{1}{4}$.

Câu 7. Chọn kết quả đúng của $\lim \frac{\sqrt{n^3-2n+5}}{3+5n}$:

A. 5. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\lim \frac{\sqrt{n^3-2n+5}}{3+5n}=\lim \sqrt{n}.\frac{\sqrt{\left(1-2/n^2+5/n^3\right)}}{3/n+5}=+\infty .$$

Vì $\lim \sqrt{n}=+\infty;\lim \frac{\sqrt{\left(1-2/n^2+5/n^3\right)}}{3/n+5}=\frac{1}{5}$.

Câu 8. Giá trị của $A=\lim \frac{2n^2+3n+1}{3n^2-n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 9. Giá trị của $B=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** $\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim\frac{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}}{\frac{n-\sqrt{3n^2+1}}{n}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{1-\sqrt{3}}$

Câu 10. Giá trị của $C=\lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4\left(n+2\right)^9}{n^{17}+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 16 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C=\lim\frac{n^8(2+\frac{1}{n^2})^4.n^9(1+\frac{2}{n})^9}{n^{17}(1+\frac{1}{n^{17}})}=\lim\frac{(2+\frac{1}{n^2})^4.(1+\frac{2}{n})^9}{1+\frac{1}{n^{17}}}=16$

Câu 11. Giá trị của $D=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\frac{2}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{2+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}-1\right)}=\frac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$.

Câu 12. Giá trị của $C=\lim\frac{\sqrt[4]{3n^3+1}-n}{\sqrt{2n^4+3n+1}+n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được $C=\lim\dfrac{\sqrt[4]{\dfrac{3}{n^5}+\dfrac{1}{n^8}}-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{2+\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}+\dfrac{1}{n}}=0$.

Câu 13. Giá trị của. $F=\lim\dfrac{(n-2)^7(2n+1)^3}{(n^2+2)^5}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 8 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $F=\lim\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^7\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^3}{\left(1+\dfrac{5}{n^2}\right)^5}=8$

Câu 14. Giá trị của. $C=\lim\dfrac{n^3+1}{n(2n+1)^2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 15. Giá trị của. $D=\lim\dfrac{n^3-3n^2+2}{n^4+4n^3+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 16. Giá trị của. $E=\lim\dfrac{\sqrt{n^3+2n}+1}{n+2}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 17. Giá trị của. $F=\lim\dfrac{\sqrt[4]{n^4-2n+1}+2n}{\sqrt[3]{3n^3+n}-n}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}-1}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 18. Cho dãy số u_n với $u_n=(n-1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim u_n$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0 . **C.** 1 . **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\lim u_n=\lim(n-1)\sqrt{\dfrac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$

$$= \lim \sqrt{\frac{(n-1)^2(2n+2)}{n^4+n^2-1}}$$

$$= \lim \sqrt{\frac{2n^3-2n^2-2n+2}{n^4+n^2-1}}$$

`

$$= \lim \sqrt{\frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}}} = 0.$$

Câu 19. $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ bằng :

A. $+\infty$. **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \lim \frac{10}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}$

Nhưng $\lim \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = 1$ và $\lim \frac{10}{n^2} = 0$

Nên $\lim \frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = 0.$

Câu 20. Tính giới hạn: $\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}$

A. 1. **B.** 0. **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\lim \frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n} = \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{0}{1} = 0$.

Câu 21. Tính giới hạn: $\lim \frac{1+3+5+....+(2n+1)}{3n^2+4}$

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\lim \frac{1+3+5+....+(2n+1)}{3n^2+4} = \lim \frac{n^2}{3n^2+4} = \lim \frac{1}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$

Câu 22. Chọn kết quả đúng của $\lim \sqrt{3+\frac{n^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim\sqrt{3+\frac{n^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}=\lim\sqrt{3+\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}-\frac{1}{2^n}}=\sqrt{3+\frac{1}{1}-0}=2$$

Câu 23. Giá trị của $D=\lim\frac{a_kn^k+...+a_1n+a_0}{b_pn^p+...+b_1n+b_0}$ (Trong đó k,p là các số nguyên dương; $a_kb_p\neq 0$). bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta xét ba trường hợp sau

- $k>p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có: $D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{p-k}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty & \text{if } a_kb_p>0\\ -\infty & \text{if } a_kb_p<0\end{cases}$.
- $k=p$. Chia cả tử và mẫu cho n^k ta có: $D=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_k+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_k}$.
- $k<p$. Chia cả tử và mẫu cho n^p : $D=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+...+\frac{b_0}{n^p}}=0$.

Câu 24. Kết quả đúng của $\lim\frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n}$ là:

A. $-\frac{5}{2}$. **B.** $-\frac{1}{50}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\lim\frac{2-5^{n-2}}{3^n+2.5^n}=\lim\frac{\frac{2}{5^n}-\frac{1}{25}}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2.}=\frac{0-\frac{1}{25}}{0+2}=-\frac{1}{50}.$$

Câu 25. $\lim\frac{3^n-4.2^{n-1}-3}{3.2^n+4^n}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim\frac{3^n-4.2^{n-1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{3^n-2.2^n-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{3^n\left(1-4.\left(\frac{2}{3}\right)^n-3.\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{4^n\left(3.\left(\frac{2}{4}\right)^n+1\right)}$$

$$=\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{\left(1-4.\left(\frac{2}{3}\right)^n-3.\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{\left(3.\left(\frac{2}{4}\right)^n+1\right)}=0.$$

Câu 26. Giá trị của $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\frac{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{2.\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$

Câu 27. Giá trị đúng của $\lim\left(3^n-5^n\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\lim\left(3^n-5^n\right)=\lim 5^n\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)=-\infty.$$

Vì $\lim 5^n=+\infty;\lim\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)=-1$.

Câu 28. Giá trị củ**a.** $K=\lim\frac{3.2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$K=\lim\frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{1}{3}$$

Câu 29. $\lim\frac{5^n-1}{3^n+1}$ bằng :

A. $+\infty$. **B.** 1 . **C.** 0 **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $\lim\dfrac{5^n-1}{3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}$

Nhưng $\lim\left(1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)=1>0$, $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ và $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+\left(\dfrac{1}{5}\right)^n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Nên $\lim\dfrac{5^n-1}{3^n+1}=+\infty$.

Câu 30. $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}$ bằng :

A. 0 . **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}.=\lim\dfrac{1+2^{1-n}}{\sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4^2}}=\lim\sqrt[4]{\dfrac{1+2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4^2}}=\dfrac{1}{2}$

Vì $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0;\lim\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0.$

Câu 31. Giá trị của**a.** $C=\lim\sqrt{\dfrac{3.3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Câu 32. Cho các số thực a,b thỏa $|a|<1;|b|<1$. Tìm giới hạn $I=\lim\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1-b}{1-a}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $1,a,a^2,...,a^n$ là một cấp số nhân công bội a $1+a+a^2+...+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Tương tự $1+b+b^2+...+b^n=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Suy ra $\lim I=\lim\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\dfrac{1-b}{1-a}$

(Vì $|a|<1,|b<1|\Rightarrow\lim a^{n+1}=\lim b^{n+1}=0$).

Câu 33. Tính giới hạn của dãy số $A=\lim\frac{a_k.n^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0}{b_p.n^p+b_{p-1}n^{p-1}+...+b_1n+b_0}$ với $a_kb_p\neq 0$ **.** :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta chia làm các trường hợp sau

TH 1: $n=k$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được $A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\frac{a_k}{b_p}$.

TH 2: $k>p$, chia cả tử và mẫu cho n^k, ta được $A=\lim\frac{a_k+\frac{a_{k-1}}{n}+...+\frac{a_0}{n^k}}{\frac{b_p}{n^{k-p}}+\frac{b_{p-1}}{n^{k-p+1}}+...+\frac{b_0}{n^k}}=\begin{cases}+\infty & \text{khi } a_kb_p>0\\ -\infty & \text{khi } a_kb_p<0\end{cases}$

TH 3: $k<p$, chia cả tử và mẫu cho n^p, ta được $A=\lim\frac{\frac{a_k}{n^{p-k}}+\frac{a_{k-1}}{n^{p-k+1}}+...+\frac{a_0}{n^p}}{b_p+\frac{b_{p-1}}{n}+...+\frac{b_0}{n^p}}=0$.

Câu 34. $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n}-2\right)=-\infty$$

Vì $\lim n^3=+\infty;\lim\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n}-2\right)=-2$

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n}\right|\le\frac{1}{n};\lim\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n}-2\right)=-2.$$

Câu 35. Giá trị của**.** $M=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$M=\lim\frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=3$$

Câu 36. Giá trị của**.** $H=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $H=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

Câu 37. Giá trị của $B=\lim\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $B=\lim n\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-1\right)=+\infty$

Bài 40. Giá trị của $K=\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 38. Giá trị đúng của $\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\lim\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{3n^2+2}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-1/n^2}-\sqrt{3+2/n^2}\right)=-\infty$.

Vì $\lim n=+\infty;\lim\left(\sqrt{1-1/n^2}-\sqrt{3+2/n^2}\right)=1-\sqrt{3}<0$.

Câu 39. Giá trị của $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $A=\lim\left(\sqrt{n^2+6n}-n\right)=\lim\dfrac{n^2+6n-n^2}{\sqrt{n^2+6n}+n}$

$=\lim\dfrac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n}=\lim\dfrac{6}{\sqrt{1+\dfrac{6}{n}}+1}=3$

Câu 40. Giá trị của $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+9n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{9n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+9n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+9n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{9}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{9}{n}\right)^2}+\sqrt{1+\frac{9}{n}}+1}=3.$$

Câu 41. Giá trị của $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$

$$=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}-\lim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}-\lim\frac{2}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{1}{3}.$$

Câu 42. Giá trị của. $M=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^2-8n^3}+2n\right)$ bằng:

A. $-\frac{1}{12}$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có: $M=\lim\frac{1-n^2}{\sqrt[3]{(1-n^2-8n^3)^2}-2n\sqrt[3]{1-n^2-8n^3}+4n^2}=-\frac{1}{12}$

Câu 43. Giá trị của. $N=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $N=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=0$

$\lim\left(\sqrt[3]{8n^2+n}-2n\right)=\lim\frac{n}{\sqrt[3]{(8n^2+n)^2}+2n\sqrt[3]{8n^2+n}+4n^2}=0$

Vậy $N=0$.

Câu 44. Giá trị của. $K=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-3\sqrt{4n^2+n+1}+5n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{5}{12}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $K = \lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)-3\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\frac{1}{3}$; $\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-2n\right)=\frac{1}{4}$

Do đó: $K=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{5}{12}$

Câu 45. Giá trị của. $N=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$N=\lim\frac{3n^2+1}{\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+n^2}=1$$

Câu 46. Giá trị đúng của $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]=\lim\left[\frac{\sqrt{n}\left(n+1-n+1\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\right]=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1-1/n}\right)}=1.$$

Câu 47. Giá trị của. $H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-\sqrt{4n^2+3}\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{2}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$H=\lim n\left(\sqrt[3]{8n^3+n}-2n\right)-\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=-\frac{2}{3}$$

Câu 48. Giá trị của $A=\lim\left(\sqrt{n^2+2n+2}+n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có $A=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=+\infty$

Do $\lim n=+\infty; \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)=2$.

Câu 49. $\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ bằng :

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}=\lim n\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}$

Nhưng $\lim\sqrt[5]{\frac{200}{n^5}-3+\frac{2}{n^3}}=\sqrt[5]{-3}<0$ và $\lim n=+\infty$

Nên $\lim\sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}=-\infty$

Câu 50. Giá trị của**.** $A=\lim\frac{2n^3+\sin 2n-1}{n^3+1}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$A=\lim\frac{2+\frac{\sin 2n-1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=2$$

Câu 51. Giá trị của**.** $B=\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}<\frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}}=\frac{n}{\sqrt{n^3+2n}}\to 0\Rightarrow B=0$

Câu 52. Giá trị của**.** $D=\lim\frac{n+1}{n^2(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1})}$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 53. Giá trị của**.** $E=\lim(\sqrt{n^2+n+1}-2n)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Câu 54. Giá trị của**.** $F=\lim\left(\sqrt{n+1}+n\right)$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 55. Giá trị của**.** $H=\lim(\sqrt[k]{n^2+1}-\sqrt[p]{n^2-1})$ bằng:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** Đáp án khác **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Xét các trường hợp

TH1: $k>p\Rightarrow H=-\infty$

TH 2: $k<p\Rightarrow H=+\infty$

TH 3: $k=p\Rightarrow H=0$.

Câu 56. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

Suy ra $u_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow \lim u_n=1$

Câu 57. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\dfrac{(n+1)\sqrt{1^3+2^3+...+n^3}}{3n^3+n+2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{9}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $1^3+2^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{3}\right]^2$

Suy ra $u_n=\dfrac{n(n+1)^2}{3(3n^3+n+2)}\Rightarrow \lim u_n=\dfrac{1}{9}$.

Câu 58. Tính giới hạn của dãy số $u_n=(1-\dfrac{1}{T_1})(1-\dfrac{1}{T_2})...(1-\dfrac{1}{T_n})$ trong đó $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $1-\dfrac{1}{T_k}=1-\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$

Suy ra $u_n=\dfrac{1}{3}.\dfrac{n+2}{n}\Rightarrow \lim u_n=\dfrac{1}{3}$.

Câu 59. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\dfrac{2^3-1}{2^3+1}.\dfrac{3^3-1}{3^3+1}....\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}$

Suy ra $\Rightarrow u_n=\dfrac{2}{3}.\dfrac{n^2+n+1}{(n-1)n}\Rightarrow \lim u_n=\dfrac{2}{3}$

Câu 60. Tính giới hạn của dãy số $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 3$.

Câu 61. Tính giới hạn của dãy số $u_n = q + 2q^2 + ... + nq^n$ **với** $|q| < 1$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{q}{(1-q)^2}$ **D.** $\frac{q}{(1+q)^2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n - qu_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n - nq^{n+1}$

$\Rightarrow (1-q)u_n = q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}$. Suy ra $\lim u_n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Câu 62. Tính giới hạn của dãy số $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $n\frac{n}{n^2+n} \le u_n \le n\frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \frac{-n}{n^2+1} \le u_n - 1 \le \frac{-1}{n^2+1}$

$\Rightarrow |u_n - 1| \le \frac{n}{n^2+1} \to 0 \Rightarrow \lim u_n = 1$.

Câu 63. Tính giới hạn của dãy số $B = \lim \frac{\sqrt[3]{n^6+n+1} - 4\sqrt{n^4+2n-1}}{(2n+3)^2}$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** $\frac{-3}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Chia cả tử và mẫu cho n^2 ta có được:

$$B = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^6}} - 4\sqrt{1+\frac{2}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Câu 64. Tính giới hạn của dãy số $C = \lim\left(\sqrt{4n^2+n+1} - 2n\right)$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $C = \lim \frac{n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+2n} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+2} = \frac{1}{4}$

Câu 65. Tính giới hạn của dãy số $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\dfrac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}$

$=\lim\dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}+1}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $D=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}$.

Câu 66. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=x_n^2+x_n,\forall n\ge 1$

Đặt $S_n=\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1}>x_n,\ \forall n=1,2,...$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n=x$

Với x là nghiệm của phương trình : $x=x^2+x\Leftrightarrow x=0<x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n=+\infty$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{x_n(x_n+1)}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_n+1}$

Suy ra: $\dfrac{1}{x_n+1}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}$

Dẫn tới: $S_n=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_{n+1}}=2-\dfrac{1}{x_{n+1}}\Rightarrow\lim S_n=2-\lim\dfrac{1}{x_{n+1}}=2$

Câu 67. Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+...+\dfrac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n=\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $1-\dfrac{1}{2012!}$ **D.** $1+\dfrac{1}{2012!}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k=1-\dfrac{1}{(k+1)!}$

Suy ra $x_k-x_{k+1}=\dfrac{1}{(k+2)!}-\dfrac{1}{(k+1)!}<0\Rightarrow x_k<x_{k+1}$

Mà: $x_{2011}<\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+...+x_{2011}^n}<\sqrt[n]{2011}x_{2011}$

Mặt khác: $\lim x_{2011}=\lim\sqrt[n]{2011}x_{2011}=x_{2011}=1-\dfrac{1}{2012!}$

Vậy $\lim u_n=1-\dfrac{1}{2012!}$.

Câu 68. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases}u_0=2011\\ u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n^2}\end{cases}$. Tìm $\lim\dfrac{u_n^3}{n}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta thấy $u_n>0,\ \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3=u_n^3+3+\dfrac{3}{u_n^3}+\dfrac{1}{u_n^6}$ (1)

Suy ra: $u_n^3>u_{n-1}^3+3\Rightarrow u_n^3>u_0^3+3n$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3<u_n^3+3+\dfrac{1}{u_0^3+3n}+\dfrac{1}{\left(u_0^3+3n\right)^2}<u_n^3+3+\dfrac{1}{3n}+\dfrac{1}{9n^2}$

Do đó: $u_n^3<u_0^3+3n+\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{9}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ (3)

Lại có: $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}<1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1)n}=2-\dfrac{1}{n}<2\,.\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\le\sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}}<\sqrt{2n}$

Nên: $u_0^3+3n<u_n^3<u_0^3+3n+\dfrac{2}{9}+\dfrac{\sqrt{2n}}{3}$

Hay $3+\dfrac{u_0^3}{n}<\dfrac{u_n^3}{n}<3+\dfrac{u_0^3}{n}+\dfrac{2}{9n}+\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

Vậy $\lim\dfrac{u_n^3}{n}=3$.

Câu 69. Cho dãy $x>0$ xác định như sau: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$. Tìm $(0;+\infty)$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2010 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2}{2010}\Leftrightarrow\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}.u_n}=\dfrac{u_n}{2010u_{n+1}}$

$\Leftrightarrow\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=2010.\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

Ta có $\sum\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=2010(\dfrac{1}{u_1}-\dfrac{1}{u_{n+1}})=2010(1-\dfrac{1}{u_{n+1}})$

Mặt khác ta chứng minh được: $\lim u_n=+\infty$.

Nên $\lim(\sum\dfrac{u_u}{u_{n+1}})=2010$.

Câu 70. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{n.\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $1+3+5+...+2n-1=n^2$ nên $\lim u_n=\dfrac{1}{2}$

Câu 71. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ và $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Nên $\lim u_n=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}}$

Câu 72. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\le 0\end{cases}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ Suy ra $u_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim u_n=1$

Câu 73. Tìm $\lim u_n$ biết $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$ trong đó $x\neq 1$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $1-\dfrac{1}{T_k}=1-\dfrac{2}{k(k+1)}=\dfrac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$ Suy ra $u_n=\dfrac{1}{3}.\dfrac{n+2}{n}\Rightarrow \lim u_n=\dfrac{1}{3}$.

Câu 74. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, $k=1,2,...,n$ Suy ra $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<u_n<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$ nên suy ra $\lim u_n=1$.

Câu 75. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2...\sqrt{2}}}}_{n\text{ dau can}}$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$,nên $\lim u_n=\lim 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=2$.

Câu 76. Gọi $g(x)\neq 0,\ \forall x\leq 2$ là dãy số xác định bởi $\bullet$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $0<u_1<u_2\Rightarrow u_3=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3u_1}<-\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}\sqrt{3u_2}=u_3$ nên dãy (u_n) là dãy tăng.

Dễ dàng chứng minh được $u_n<\dfrac{4}{3},\forall n\in\mathbb{N}^*$ .Từ đó tính được $\lim u_n=\dfrac{4}{3}$.

Câu 77. Cho dãy số $A=\left(x_1^2+\dfrac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\dfrac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\dfrac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$ được xác định như sau

$\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Đặt $x\leq\dfrac{3}{2}$. Tìm $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $u_{n+1}=\sqrt{(u_n^2+3u_n)(u_n^2+3u_n+2)+1}=\sqrt{(u_n^2+3u_n+1)^2}$

$=u_n^2+3u_n+1$

Suy ra: $u_{n+1}+1=(u_n+1)(u_n+2)\Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{1}{u_n+1}-\dfrac{1}{u_n+2}$

Suy ra: $\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{u_n+1}-\dfrac{1}{u_{n+1}+1}$

Do đó, suy ra: $v_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{u_i+1}-\dfrac{1}{u_{i+1}+1}\right)=\dfrac{1}{u_1+1}-\dfrac{1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{u_{n+1}+1}$

Mặt khác, từ $u_{n+1}=u_n^2+3u_n+1$ ta suy ra: $u_{n+1}>3^n$.

Nên $\lim\dfrac{1}{u_{n+1}+1}=0$. Vậy $\lim v_n=\dfrac{1}{2}$.

Câu 78. Cho $a,b\in\mathbb{N}^\star,(a,b)=1;n\in\{ab+1,ab+2,...\}$. Kí hiệu r_n là số cặp số $(u,v)\in\mathbb{N}^\star\times\mathbb{N}^\star$ sao cho $n=au+bv$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{n}=\dfrac{1}{ab}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{ab}$ **D.** $ab-1$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Xét phương trình $\left[0;\dfrac{n-1}{n}\right]$ (1).

Gọi (u_0,v_0) là một nghiệm nguyên dương của (1). Giả sử (u,v) là một nghiệm nguyên dương khác (u_0,v_0) của (1).

Ta có $au_0+bv_0=n,au+bv=n$ suy ra $a(u-u_0)+b(v-v_0)=0$ do đó tồn tại k nguyên dương sao cho $u=u_0+kb,v=v_0-ka$. Do v là số nguyên dương nên $v_0-ka\ge 1\Leftrightarrow k\le\dfrac{v_0-1}{a}$. (2)

Ta nhận thấy số nghiệm nguyên dương của phương trình (1) bằng số các số k nguyên dương cộng với 1. Do đó $r_n=\left[\dfrac{v_0-1}{a}\right]+1=\left[\dfrac{n}{ab}-\dfrac{u_0}{b}-\dfrac{1}{a}\right]+1$.

Từ đó ta thu được bất đẳng thức sau: $\dfrac{n}{ab}-\dfrac{u_0}{b}-\dfrac{1}{a}\le r_n\le\dfrac{n}{ab}-\dfrac{u_0}{b}-\dfrac{1}{a}+1$.

Từ đó suy ra : $\dfrac{1}{ab}-\dfrac{u_0}{nb}-\dfrac{1}{na}\le\dfrac{r_n}{n}\le\dfrac{1}{ab}-\dfrac{u_0}{nb}-\dfrac{1}{na}+\dfrac{1}{n}$.

Từ đây áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{n}=\dfrac{1}{ab}$.

Câu 79. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi : $\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n},n\ge 1\end{cases}$. Tìm kết quả đúng của $\lim u_n$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $u_1=\frac{1}{2}; u_2=\frac{2}{3}; u_3=\frac{3}{4}; u_4=\frac{4}{5}; u_5=\frac{5}{6}.;...$

Dự đoán $u_n=\frac{n}{n+1}$ với $n\in\mathbb{N}^*$

Dễ dàng chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp.

Từ đó $\lim u_n=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$

Câu 80. Tìm giá trị đúng của $S=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+.......\right)$.

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** 2 . **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $S=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+.......\right)=\sqrt{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$.

Câu 81. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{n(n+1)}\right]$

A. 0 **B.** $1.$ **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** Không có giới hạn.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt :

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{n(n+1)}\quad =1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\quad =1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$$

Câu 82. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+....+\frac{1}{n(2n+1)}\right]$

A. $1.$ **B.** 0 . **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2 .

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Đặt

$A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+....+\frac{1}{n\left(2n+1\right)}$

$\Rightarrow 2A=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+....+\frac{2}{n\left(2n+1\right)}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow 2A=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

$\Rightarrow A=\frac{n}{2n+1}$

Nên $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+....+\frac{1}{n\left(2n+1\right)}\right]=\lim\frac{n}{2n+1}=\lim\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$.

Câu 83. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+....+\frac{1}{n\left(n+2\right)}\right]$

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+....+\frac{1}{n\left(n+2\right)}\right]=\lim\frac{1}{2}\left[\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+....+\frac{2}{n\left(n+2\right)}\right]$

$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$.

Câu 84. Tính giới hạn: $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right]$.

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1:

$\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+...+\frac{1}{n(n+3)}\right]=\lim\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$

$=\lim\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$

$=\frac{11}{18}-\lim\left[\frac{3n^2+12n+11}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}\right]=\frac{11}{18}$.

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\sum_{1}^{100}\frac{1}{x\left(x+3\right)}$ và so đáp án (có thể thay 100 bằng số nhỏ hơn hoặc lớn hơn).

Câu 85. Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1:

$$\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim\left[\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}...\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}\right]=\lim\frac{1}{2}.\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\prod_{2}^{100}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ và so đáp án (có thể thay 100 bằng số nhỏ hơn hoặc lớn hơn).

GIỚI HẠN HÀM SỐ

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c: hằng số) **2. Định lí:** a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ thì: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$) b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ c) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left\|f(x)\right\| = \left\|L\right\|$ **3. Giới hạn một bên:** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$	**1. Giới hạn đặc biệt:** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{neu k chan} \\ -\infty & \text{neu k le} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\|x\|} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\|x\|} = +\infty$ **2. Định lí:** Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ neu } L \text{ va } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cung dau} \\ -\infty \text{ neu } L \text{ va } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ trai dau} \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \quad \text{neu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty \text{ neu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ va } L.g(x) > 0 \\ -\infty \text{ neu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ va } L.g(x) < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG BẰNG ĐỊNH NGHĨA HOẶC TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp:

+ Sử dụng định nghĩa chuyển giới hạn của hàm số về giới hạn của dãy số.

+ Nếu $f(x)$ là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng $f(x_0)$

+ Nếu $f(x)$ cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

Câu 1. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ là:

A. -2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}=\dfrac{(-1)^3+2.(-1)^2+1}{2(-1)^5+1}=-2$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ + CACL + $x=-1+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}\Bigg|_{x\to -1+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3-1}{3x^2+x+2}$ bằng:

A $-\infty$.. **B.** $-\dfrac{11}{4}$.. **C.** $\dfrac{11}{4}$.. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3-1}{3x^2+x+2}=-\dfrac{11}{4}$.

Câu 3. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=1$ ta có: $\lim\dfrac{x_n+1}{x_n-2}=-2$ Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$.

Câu 4. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+1\right)$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 9 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 5. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** $\dfrac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$

Câu 6. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+3}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 7. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x+2}=-\infty$

Câu 8. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+2}{2x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 5 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=2$ ta có: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x+2}{2x-1}=\lim\dfrac{3x_n+2}{2x_n-1}=\dfrac{3.1+2}{2.1-1}=5$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to2}f(x)$:

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}=\sqrt{\dfrac{4.2^2-3.2}{(2.2-1)(2^3-2)}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$ + CACL + $x=2+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}\Bigg|_{x\to2+10^{-9}}$ và so đáp án.

Cách 2: Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $\dfrac{\cos5x}{2x}$ + CACL + $x=-10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: chuyển chế độ Rad + $\lim\dfrac{\cos5x}{2x}\Bigg|_{x\to-10^9}$ và so đáp án.

Câu 10. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{2x}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $\dfrac{1}{8}$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với mọi dãy $(x_n):\lim x_n=0$ ta có:

$$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{2x}=\lim\frac{\sqrt{x_n+4}-2}{2x_n}=\lim\frac{x_n}{2x_n\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\lim\frac{1}{2\left(\sqrt{x_n+4}+2\right)}=\frac{1}{8}.$$

Câu 11. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Với mọi dãy $(x_n): x_n > 1,\ \forall n$ và $\lim x_n = 1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-3}{x-1} = \lim\dfrac{4x_n-3}{x_n-1} = +\infty$.

Câu 12. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với mọi dãy $(x_n): x_n < 2,\ \forall n$ và $\lim x_n = 2$ ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-1}{x-2} = \lim\dfrac{3x_n-1}{x_n-2} = -\infty$.

Câu 13. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** 5 **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với mọi dãy $(x_n): \lim x_n = 1$ ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim\dfrac{2x_n^2+x_n-3}{x_n-1} = \lim(2x_n+3) = 5$.

Câu 14. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{(2-x)^4}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 15. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đáp số: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2+1} = \dfrac{3}{2}$

Câu 16. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+x-1\right)$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 17. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{(x^4+1)(2-x)}}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 18. Tìm giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Do $x \to -1^- \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$. Đáp số: $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|} = -1$.

Câu 19. Tìm giới hạn hàm số $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x+1}{x+1} = \dfrac{1-1+1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 20. Tìm giới hạn hàm số $B = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}+6}{9}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $B = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\tan x+1}{\sin x+1} = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{6}+1}{\sin\dfrac{\pi}{6}+1} = \dfrac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

Câu 21. Tìm giới hạn hàm số $C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\sqrt[3]{2}+1$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-x+1}{3x+1} = \sqrt[3]{2}+1$.

Câu 22. Tìm giới hạn hàm số $D = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -2 **D.** -3

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $D = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7x+1}+1}{x-2} = \dfrac{\sqrt[3]{8}+1}{1-2} = -3$.

Câu 23. Tìm giới hạn hàm số $A = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+1}{x^2+x+4}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 24. Tìm giới hạn hàm số $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin^2 2x-3\cos x}{\tan x}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{9}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 25. Tìm giới hạn hàm số $C=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{9}{2}$ **D.** $\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 26. Tìm giới hạn hàm số $D=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$ bằng định nghĩa.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{khi } x\ge 2\\ x-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-3\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ nên $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

Câu 28. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi $x\to 2$ $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 & \text{khi } x>2\\ 2x^2-x+1 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax+2)=2a+6$. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^2-x+1)=7$.

Hàm số có giới hạn khi $x\to 2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow 2a+6=7\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. Vậy $a=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 29. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại $x=0$ $f(x)=\begin{cases}5ax^2+3x+2a+1 & khi\quad x\ge 0\\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & khi\quad x<0\end{cases}$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2a+1 = 1+\sqrt{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30. Tìm a để hàm số. $f(x) = \begin{cases} 5ax^2+3x+2a+1 & khi \quad x \ge 0 \\ 1+x+\sqrt{x^2+x+2} & khi \quad x < 0 \end{cases}$ có giới hạn tại $x \to 0$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(5ax^2+3x+2a+1\right) = 2a+1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+x+\sqrt{x^2+x+2}\right) = 1+\sqrt{2}$

Vậy $2a+1 = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. Tìm a để hàm số. $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x^2-x+3a & \text{khi } x \le 1 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \to 1$.

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+ax+2) = a+3$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-x+3a) = 3a+1$.

Hàm số có giới hạn khi $x \to 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow a+3 = 3a+1 \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

DẠNG 2: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

1. L = $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x), Q(x) là các đa thức và P(x_0) = Q(x_0) = 0

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Chú ý:

+ Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta luôn có sự phân tích $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

+ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

2. L = $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x_0) = Q(x_0) = 0 và P(x), Q(x) là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu.

Các lượng liên hợp:

+ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$

+ $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$

+ $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+...+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$

3. L = $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$ với P(x_0) = Q(x_0) = 0 và P(x) là biêu thức chứa căn không đồng bậc

Giả sử: P(x) = $\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ vôùi $\sqrt[m]{u(x_0)}=\sqrt[n]{v(x_0)}=a$.

Ta phân tích P(x) = $\left(\sqrt[m]{u(x)}-a\right)+\left(a-\sqrt[n]{v(x)}\right)$.

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau: $\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[m]{v(x)}=(\sqrt[n]{u(x)}-m(x))-(\sqrt[m]{v(x)}-m(x))$, trong đó $m(x)\to c$.

Câu 1. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{2x^3+2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{2(x^2-x+1)}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\frac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$ + CACL + $x=-1+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\frac{x^2+2x+1}{2x^3+2}\Big|_{x\to -1+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 2. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 3. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^3-2^3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+2x+4}=1$.

Câu 4. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 25

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-(1-4x)^4}{x}$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^3-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-4x)^4-1}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x[(1+3x)^2+(1+3x)+1]}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x(2-4x)[(1-4x)^2+1]}{x}$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}3[(1+3x)^2+(1+3x)+1]+\lim\limits_{x\to 0}4(2-4x)[(1-4x)^2+1]=25$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$ là:

A. $-\infty$.. **B.** 0.. **C.** $\sqrt{6}$.. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}.$$

$$=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{(x-3)}}{\sqrt{(x+3)}}=0.$$

Câu 6. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 6

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^3+11x^2+6x}{x}=6$.

Câu 7. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}\quad (m,n\in\mathbb{N}^*)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{n}{m}$ **D.** $m-n$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1}=\dfrac{n}{m}$.

Câu 8. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}\quad (n\in\mathbb{N}^*,a\neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{n}$ **D.** $1-\dfrac{n}{a}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Cách 1: Nhân liên hợp

Ta có:

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+ax}-1)(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}{x(\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1)}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt[n]{(1+ax)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+ax)^{n-2}}+...+\sqrt[n]{1+ax}+1}=\frac{a}{n}.$$

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}\Rightarrow x=\dfrac{t^n-1}{a}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

$$\Rightarrow B=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=a\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^n+...+t+1)}=\frac{a}{n}.$$

Câu 8. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{\sqrt[m]{1+bx}-1}$ với $ab\neq 0$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{am}{bn}$ **D.** $1+\dfrac{am}{bn}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Áp dụng bài toán trên ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[m]{1+bx}-1}=\frac{a}{n}.\frac{m}{b}=\frac{am}{bn}.$$

Câu 9. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}$ với $\alpha\beta\gamma\neq 0$. :

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $B=\dfrac{\gamma}{4}-\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\alpha}{2}$ **D.** $B=\dfrac{\gamma}{4}+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\alpha}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}\sqrt[4]{1+\gamma x}-1=$

$=\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}(\sqrt[4]{1+\gamma x}-1)+\sqrt{1+\alpha x}((\sqrt[3]{1+\beta x}-1)+(\sqrt{1+\alpha x}-1)$

$B=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x})\dfrac{\sqrt[4]{1+\gamma x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+\alpha x}\dfrac{\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}-1}{x}$

Câu 10. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x^2+2x+1)}=\dfrac{1}{3}$

Câu 11. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\dfrac{1}{5}$

Câu 12. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-x}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{2x+3}+x\right)}=\dfrac{-1}{3}$

Câu 13. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt[4]{2x+1}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3}+\sqrt[4]{(2x+1)^2}+\sqrt[4]{2x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$

Câu 14. Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{-8}{27}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $E=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}-\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=A-B$

$$A=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{4x-1}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(4x-1)^2}+3\sqrt[3]{4x-1}+9\right)}=\dfrac{64}{27}$$

$$B=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{2x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\left(\sqrt[4]{2x+2}+2\right)\left(\sqrt[4]{(2x+2)^2}+4\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+3\right)}=\dfrac{8}{3}$$

$$E=A-B=\dfrac{64}{27}-\dfrac{8}{3}=\dfrac{-8}{27}$$

Câu 15. Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{9}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 16. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $M=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-(2x+1)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-(2x+1)}{x^2}=0$

Câu 17. Tìm giới hạn $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}$ **D.** $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $N=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}=\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}$

Câu 18. Tìm giới hạn $G=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{m}-\dfrac{b}{n}$ **D.** $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $G=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\left(\sqrt[n]{1+bx}-1\right)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}=\dfrac{b}{n}+\dfrac{a}{m}$

Câu 19. Tìm giới hạn $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{mn(n-m)}{2}$ **D.** $\dfrac{mn(n+m)}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $V=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+nx)^m-(1+mnx)}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+mnx)}{x^2}=\dfrac{mn(n-m)}{2}$.

Câu 20. Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})...(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{n!}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\dfrac{1}{n!}$.

Câu 21. Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $2n$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-1\right]\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n+1\right]}{x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n}=2n.$$

Câu 22. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-8}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\dfrac{1}{4}$

Câu 23. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{2}{5}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=-\dfrac{2}{5}$

Câu 24. Tìm giới hạn $C = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-4x+3}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)} = \frac{1}{6}$

Câu 25. Tìm giới hạn $D = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{2x\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right]} = \frac{1}{3}$

Câu 26. Tìm giới hạn $F = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)}-1}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{9}{n}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $y = \sqrt[n]{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} \Rightarrow y \to 1$ khi $x \to 0$

Và: $\lim_{x\to 0} \frac{y^n-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x+1)(3x+1)(4x+1)-1}{x} = 9$

Do đó: $F = \lim_{x\to 0} \frac{y^n-1}{x\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)} = \frac{9}{n}$

Câu 27. Tìm giới hạn $M = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{1-\cos 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $M = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1-\cos 3x} = 2.\frac{2}{9} = \frac{4}{9}$.

Câu 28. Tìm giới hạn $N = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x}-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2(an-bm)}{mn}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $N=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[m]{1+ax}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}\right).\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{n}\right).2=\frac{2(an-bm)}{mn}$.

Câu 29. Tìm giới hạn $V=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2(an-bm)}{mn}$ **D.** $mn(n-m)$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $V=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+mx)^n-1}{x^2}-\frac{(1+nx)^m-1}{x^2}\right]\frac{x^2}{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}=\frac{mn(n-m)}{2}.2=mn(n-m)$.

Câu 30. Tìm giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})...(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x^2)^{n-1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{n!}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)...(\sqrt[n]{x^{n-1}}+...+1)}=\frac{1}{n!}$.

Câu 31. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}$

Mà: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+1}=2$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1\right]}=\frac{2}{3}$

Vậy $A=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

Câu 32. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{\sqrt[3]{5x+3}-2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(x-1)\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5(x-1)\left[\sqrt{4x+5}+3\right]}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\left[\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right]}{5\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 33. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2}-1}$:

A. $+\infty$		**B.** $-\infty$		**C.** $\dfrac{4}{3}$		**D.** 3

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[4]{2x+3}-1}{\sqrt{x+2}-1}-\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{x+2}-1}$

$$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{2(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}-\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{-3(x+1)+1}-1}{x+1}}{\dfrac{\sqrt{(x+1)+1}-1}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2}{4}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}}=3$$

Câu 34. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$:

A. $+\infty$		**B.** $-\infty$		**C.** $\dfrac{4}{3}$		**D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-x-2\right)\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x^3-3x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left[x^2+x.\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right]}{(x+1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=1$.

Câu 35. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$:

A. $+\infty$		**B.** $-\infty$		**C.** $\dfrac{1}{2}$		**D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Cách 1: Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{t^3-1}{3}$ và $x\to 0\Leftrightarrow t\to 1$

Nên $A=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{t^3-1}{3}}-t}{\left(\dfrac{t^3-1}{3}\right)^2}=9\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}-t}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}$

$$=3\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^3-3t^2+2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\dfrac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to1}\frac{(t-1)^2(t+2)}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}$$

$$=3\lim_{t\to1}\frac{t+2}{(t^2+t+1)^2\left(\sqrt{\frac{t^3+2}{3}}+t\right)}=\frac{1}{2}.$$

Cách 2: Ta có:

$$A=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}+1+x}-\lim_{x\to0}\frac{-3-x}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}+(1+x)\sqrt[3]{1+3x}+(1+x)^2}$$

Do đó: $A=\frac{1}{2}$.

Câu 36. Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{x^3+x^2-x-1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** -1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2(x-1)}$

Đặt $t=x+1$. Khi đó:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+4x}-\sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+4t}-\sqrt[3]{1+6t}}{t^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+4t}-(2t+1)}{t^2}-\lim_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{1+6t}-(2t+1)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-4}{\sqrt{1+4t}+2t+1}-\lim_{t\to0}\frac{-8t-12}{\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)\sqrt[3]{(1+6t)^2}+(2t+1)^2}=2.$$

Do đó: $B=-1$.

DẠNG 3: TÍNH GIỚI HẠN DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp:

L = $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **trong đó** $P(x),Q(x)\to\infty$**, dạng này ta còn gọi là dạng vô định** $\dfrac{\infty}{\infty}$**.**

với P(x), Q(x) là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

– Nếu P(x), Q(x) là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

– Nếu P(x), Q(x) có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x hoặc nhân lượng liên hợp.

Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

+ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{2k+1}=+\infty\ (-\infty)$.

+ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \dfrac{k}{x^n}=0\ \ (n>0;k\neq 0)$.

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty\ (-\infty)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{k}{f(x)}=0\ \ (k\neq 0)$.

Câu 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+2}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5}{x}}{3+\frac{2}{x}}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{5}{3x+2}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án (với máy casio 570 VN Plus)

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim \left.\dfrac{5}{3x+2}\right|_{x\to 10^9}$ và so đáp án.

Câu 2. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$ là:

A. -1. **B.** 1.. **C.** 7.. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=1.$$

Câu 3. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{3x^2+2}}{5x+\sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{5+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6}$

Câu 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. -2. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}-1}=2$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\left.\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}\right|_{x\to10^9}$ và so đáp án.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\left.\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}\right|_{x\to10^9}$ và so đáp án.

Câu 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ bằng:

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+3}{-\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ + CACL + $x=-10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\left.\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}\right|_{x\to-10^9}$ và so đáp án.

Câu 7. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}+1}}=1$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{x^4+x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}=0.$$

Câu 9. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{2x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=3..$$

Câu 10. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ là:

A. $-\dfrac{21}{5}$. **B.** $\dfrac{21}{5}$. **C.** $-\dfrac{24}{5}$. **D.** $\dfrac{24}{5}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ thành $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x^2-2x+4)}{(x^2+1)}=-\frac{24}{5}.$$

Câu 12. Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $E=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$

Câu 13. Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{4x^2+1}-x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $F=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=-\infty$

Câu 14. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left(4-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)=-\infty..$$

Câu 15. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=+\infty..$$

Câu 16. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=-\infty$

Câu 17. Tìm giới hạn $M=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có: $M = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \begin{cases} 2 \text{ khi } x\to+\infty \\ -2 \text{ khi } x\to-\infty \end{cases}$

Câu 18. Tìm giới hạn $N = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+2x}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $N = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3+2x}+4x^2} = 0$

Câu 19. Tìm giới hạn $H = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $H = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{16x^4+3x+1}-(4x^2+2)}{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{16x^4+3x+1-(4x^2+2)^2}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-16x^2+3x-3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

Suy ra $H=0$.

Câu 20. Tìm giới hạn $K = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $K = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-8x^3+7x^2-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)} = -\dfrac{1}{2}$

Câu 21. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{2x^2+x+1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$

Câu 22. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m}$ $(a_0b_0\neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}$

* Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

* Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

* Nếu $m<n$

$\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-m}(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\ -\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}$.

Câu 23. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3x^3+1}-\sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt[4]{4x^4+2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}+x\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-x\sqrt[4]{4+\frac{2}{x^4}}}=-\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Câu 24. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}-2x+1}{\sqrt[3]{2x^3-2}+1}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$$B=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x(\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x})}=\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{\sqrt[3]{2-\frac{2}{x^3}}+\frac{1}{x}}=+\infty$$

(do tử $\to+\infty$, mẫu $\to\sqrt[3]{2}$).

Câu 25. Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{16}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{2}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}-2\right)^7}=-\frac{1}{16}$$

Câu 26. Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+4}-2x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=2$$

Câu 27. Tìm giới hạn $C=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{3x^2+2}}{5x-\sqrt{x^2+1}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

$$C=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}}{5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Câu 28. Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** -1

Hướng dẫn giải:

$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{1}{x^2}+1}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}}}=-1$

Câu 29. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{2x^3+x-1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}\right)=-\infty$

Câu 30.Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-2x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 31. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{6}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có:

$D=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=M+N$

$M=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\dfrac{1}{3}$

$N=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{1}{2}$

Do đó: $B=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 32. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{x^2-x}+x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^2-4(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$=\dfrac{2x\sqrt{x^2+x+1}+1+5x-2x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$=\dfrac{2x\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}+\dfrac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}$

$=\dfrac{2x(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}+$

$+\dfrac{1+5x}{\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x}+x}.$

Do đó: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{2}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+5}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{2}$

Câu 33. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x=\dfrac{2x^2+2x+2x\sqrt{x^2+2x}-4x^2-4x}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$=2x\dfrac{\sqrt{x^2+2x}-x-1}{\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\dfrac{-2x}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$

Nên $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+2\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x})}=-\dfrac{1}{4}.$

Câu 34. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0x^n+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+...+b_{m-1}x+b_m},\ (a_0b_0\neq 0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}$

- Nếu $m=n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\dfrac{a_0}{b_0}$.

- Nếu $m>n\Rightarrow B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{x^{m-n}(b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m})}=0$

(Vì tử $\to a_0$, mẫu $\to 0$).

- Nếu $m<n$, ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{n-m}(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n})}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a_0.b_0>0\\-\infty \text{ khi } a_0b_0<0\end{cases}$

Câu 35. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt[3]{8x^3+x-1}}{\sqrt[4]{x^4+3}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+x.\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{3}{x^4}}}=4$

Câu 36. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2}+\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}+|x|\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{3}{2}$

Câu 37. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x^2+1}+2x+1}{\sqrt[3]{2x^3+x+1}+x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}}+\frac{1}{x}\right)}=+\infty$.

Câu 38. Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Cách 1: $0\le\left|\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le\left|x^2\cos\dfrac{2}{nx}\right|\le x^2$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ + CACL + $x=10^{-9}$ $+n=10$ và so

DẠNG 4: GIỚI HẠN MỘ BÊN VÀ CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH KHÁC

Phương pháp:

1. Giới hạn một bên : Áp dụng định lý giới hạn của một tích và một thương..

2. Dạng $\infty - \infty$: Giới hạn này thường có chứa căn

Ta thường sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu, Sau đó tìm cách biến đổi đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Dạng $0.\infty$:

Ta cũng thường sử dụng các phương pháp như các dạng ở trên.

Câu 1. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-2}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2<0$

Khi $x\to 0^- \Rightarrow x<0 \Rightarrow x^3<0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-2}{x^3}\right)=+\infty$.

Câu 2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2(x-1)}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x}{\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=1.$.

Câu 3. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-x+1\right)=1>0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)=0; x^2-1>0$.

Câu 4. Giá tri đúng của $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+3}{x-3}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}\neq \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}$$

Vậy không tồn tại giới hạn trên.

Câu 5. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}.$$

Câu 6. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-x+1}\right)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$B=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2-x+1})(2x+\sqrt{4x^2-x+1})}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}=\frac{1}{4}.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$:

A. $-\infty$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

$$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{-x^2-x}{x^3-1}\right)$$

$$\lim\limits_{x\to1^+}\left(-x^2-x\right)=-2$$

Khi $x\to1^+\Rightarrow x>1\Rightarrow x^3-1>0$

Vậy $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$.

Câu 8. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)}-x]$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ **D.** $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{2n}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Đặt $y=\sqrt[n]{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}$

$\Rightarrow y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-1}x + ... + x^{n-1}) \Rightarrow y - x = \dfrac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-1}x + ... + x^{n-1}}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y^n - x^n}{y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}}$

$\Rightarrow C = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{y^n - x^n}{x^{n-1}}}{\dfrac{y^{n-1} + y^{n-1}x + ... + x^{n-1}}{x^{n-1}}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y^n - x^n}{x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n + \dfrac{b_2}{x} + \dfrac{b_3}{x^2} + ... + \dfrac{b_n}{x^{n-1}})$

$= a_1 + a_2 + ... + a_n$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y^k x^{n-1-k}}{x^{n-1}} = 1\ \forall k = 0,...,n-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}}{x^{n-1}} = n$.

Vậy $C = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Câu 9. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$A = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\dfrac{1}{2}$

Câu 10. Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Câu 11. Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** Đáp án khác

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = -1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}} = 1$.

Câu 12. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$D = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt[3]{(8x^3+2x)^2} + 2x\sqrt[3]{(8x^3+2x)} + 4x^2} = 0$$

Câu 13. Tìm giới hạn $E = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{16x^4+3x+1} - \sqrt{4x^2+2})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$E = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1} - 2x\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2} - 2x\right) = 0$$

Câu 14. Tìm giới hạn $F = \lim_{x\to-\infty}(x - \sqrt[3]{1-x^3})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

DẠNG 5 : GIỚI HẠN LƯỢNG GIÁC

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, từ đây suy ra $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Câu 1. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x^2}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2=\dfrac{a}{2}$.

Câu 2. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{m}{n}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\dfrac{2\sin^2\frac{mx}{2}+2\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{mx}{2}}{2\sin^2\frac{nx}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{nx}{2}}$

$$=\frac{m}{n}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}$$

$$A=\frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{\frac{mx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\frac{nx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}+\cos\frac{mx}{2}}{\sin\frac{nx}{2}+\cos\frac{nx}{2}}=\frac{m}{n}.$$

Câu 3. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có:

$$\frac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\frac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$$

$$=\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}$$

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x.\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\cos 2x}{x^2}=3$$

Câu 4. Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\frac{3x}{2}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $A=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin\frac{3x}{2}}=\lim_{x\to 0}x(\dfrac{\sin x}{x})^2.\dfrac{3}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}=0$.

Câu 5. Tìm giới hạn $B=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x(\sin 3x-\sin 4x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$B=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}{-2x\cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2}}=-\lim_{x\to 0}(\frac{5}{2}.\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}).\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\frac{7x}{2}}=\frac{5}{2}.$$

Câu 6. Tìm giới hạn $C=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 6 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$C=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{1-\sqrt[3]{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{1-\cos 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x})}{2\sin^2 x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^2.(\frac{x}{\sin x})^2(1+\sqrt[3]{\cos 2x}+\sqrt[3]{\cos^2 2x}).$$

$\Rightarrow C=6$.

Câu 7. Tìm giới hạn $D=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{7}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}}$

Mà : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-\cos 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin 3x}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$=3\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{3x}.\dfrac{1}{\sqrt{1+x\sin 3x}+1})+2=\dfrac{7}{2}$.

Vậy: $D=\dfrac{7}{2}$.

Câu 8. Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}.\dfrac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{n}{m}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi(1-x^m)}{\sin\pi(1-x^n)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi(1-x^m)}{\pi(1-x^m)}.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi(1-x^n)}{\sin\pi(1-x^n)}.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^n}{1-x^m}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^n}{1-x^m}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)}{(1-x)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1)}=\dfrac{n}{m}$.

Câu 9. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\tan x$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $B=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\pi}{2}-x)\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-x}{\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

Câu 10. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}\quad(\alpha>0)$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $0\le|x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}|<x^{\alpha}$. Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}=0$

Nên theo nguyên lí kẹp $\Rightarrow A_{39}=0$.

Câu 11. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Trước hết ta có: $\sin x < x \quad \forall x > 0$

Ta có: $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| = \left|2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}.\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$ nên $D = 0$.

Câu 12. Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{7}{11}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{x}{2}} = \dfrac{7}{11}$

Câu 13. Tìm giới hạn $B = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{4}{9}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $B = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)} = -\dfrac{4}{9}$

Câu 14. Tìm giới hạn $C = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -96 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}} = -96$

Câu 15. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{16}{81}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Câu 16. Tìm giới hạn $E = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sin(\dfrac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

$$E=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}=0$$

Câu 17. Tìm giới hạn $F=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $0\le\frac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

Câu 18. Tìm giới hạn $H=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{b}{2n}-\frac{a}{2m}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $$H=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=\frac{b}{2n}-\frac{a}{2m}$$

Câu 19. Tìm giới hạn $M=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{a}{2n}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $1-\sqrt[n]{\cos ax}=\frac{1-\cos ax}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}$

$$\Rightarrow M=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt[n]{\cos ax}+(\sqrt[n]{\cos ax})^2+...+(\sqrt[n]{\cos ax})^{n-1}}=\frac{a}{2}.\frac{1}{n}=\frac{a}{2n}.$$

Câu 20. Tìm giới hạn $A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 6x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{7}{11}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{7x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{11x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{7}{11}$

Câu 21. Tìm giới hạn $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+2\sin 2x}}{\sin 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\dfrac{4}{9}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 2x}{\sin 3x\left(1+\sqrt[3]{1+2\sin 2x}+\sqrt[3]{(1+2\sin 2x)^2}\right)}=-\dfrac{4}{9}$

Câu 22. Tìm giới hạn $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** -96 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}}{\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt[4]{\cos x}}{x^2}}=-96$

Câu 23. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\dfrac{16}{81}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $D=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^4.\left(\dfrac{3x}{\sin 3x}\right)^4.\dfrac{16}{81}=\dfrac{16}{81}$

Câu 24. Tìm giới hạn $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\tan x)}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}}{\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}}$ Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\tan x}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-\cos x)\right]}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\tan x}$$

$$=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}\right)}{\frac{\pi\sin^2\frac{x}{2}}{2}}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}.x.\frac{x}{\tan x}=0$$

Do đó: $E=0$.

Câu 25. Tìm giới hạn $F=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin x+2\cos x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có: $0\le\frac{|3\sin x+2\cos x|}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0$ khi $x\to+\infty$

Vậy $F=0$.

Câu 26. Tìm giới hạn $M=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{1-\cos 2x}$:

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** $-\frac{1}{4}$ **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $M=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x^2}}{\frac{1-\cos 2x}{x^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$.

Câu 27. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2+2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{5\sin 2x}{x^2+2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos^2 x}{x^2+2}$$

$$A_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{x^2+2}=0\le A_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\sin 2x}{x^2+2}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2+2}=0\Rightarrow A_2=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{0}{x^2+2}=0\le A_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos^2 x}{x^2+2}\le\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+2}=0\Rightarrow A_3=0$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=0$.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A – LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP

1. Hàm số liên tục tại một điểm: y = f(x) liên tục tại x_0 ⇔ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- Để xét tính liên tục của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 ta thực hiện các bước:

  B1: Tính $f(x_0)$.

  B2: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (trong nhiều trường hợp ta cần tính $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

  B3: So sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$ và rút ra kết luận.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng: y = f(x) liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

3. Hàm số liên tục trên một đoạn [a; b]: y = f(x) liên tục trên (a; b) và

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

- Hàm số đa thức liên tục trên R.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Giả sử y = f(x), y = g(x) liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

- Các hàm số y = f(x) + g(x), y = f(x) – g(x), y = f(x).g(x) liên tục tại x_0.
- Hàm số y = $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

4. Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = 0.

Nói cách khác: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b] và f(a). f(b)< 0 thì phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm c∈ (a; b).

Mở rộng: Nếu y = f(x) liên tục trên [a; b]. Đặt m = $\min\limits_{[a;b]} f(x)$, M = $\max\limits_{[a;b]} f(x)$. Khi đó với mọi T ∈ (m; M) luôn tồn tại ít nhất một số c ∈ (a; b): f(c) = T.

B – BÀI TẬP

DẠNG 1: TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp:

- Tìm giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ và tính $f(x_0)$
- Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ thì ta so sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ với $f(x_0)$.

Chú ý:

1. Nếu hàm số liên tục tại x_0 thì trước hết hàm số phải xác định tại điểm đó

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

3. Hàm số $y = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ k & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k$.

4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \geq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x < x_0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f_2(x) = f_1(x_0)$.

Chú ý:

- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x\neq x_0 \\ k & \text{khi } x=x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=k$.
- Hàm số $y=\begin{cases} f(x) & \text{khi } x> x_0 \\ g(x) & \text{khi } x\leq x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ và $f\left(2\right)=m^2-2$ với $x\neq 2$. Giá trị của m để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$ là:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\pm\sqrt{3}$. **D.** ± 3

Hướng dẫn giải:

Chọn C

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1\right)=1$.

Vậy $m^2-2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$. Chọn câu **đúng** trong các câu sau:

(I) $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$.

(II) $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=2$.

(III) $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. **B.** Chỉ $\left(I\right)$. **C.** Chỉ $\left(II\right)$. **D.** Chỉ $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $D=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

$\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-4}=0$.

$f\left(2\right)=0$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 3. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & x\neq 3;\ x\neq 2 \\ b+\sqrt{3} & x=3;\ b\in\mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=3$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục tại $x=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right)=f\left(3\right)$.

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

$f(3)=b+\sqrt{3}$.

Vậy: $b+\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\Leftrightarrow b=-\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

(II) $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

(III) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (I). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Chỉ (II) và (III).

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

Hàm số không xác định tại $x=1$. Nên hàm số gián đoạn tại $x=1$..

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x>-2\\ 0 & x=-2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=0$.

(II) $f(x)$ liên tục tại $x=-2$.

(III) $f(x)$ gián đoạn tại $x=-2$.

A. Chỉ (I) và (III). **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (I). **D.** Chỉ (I)

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x+8-4}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)}=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=f(-2)$ nên hàm số liên tục tại $x=-2$..

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} & -2\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:.

(I) $f(x)$ không xác định tại $x=3$.

(II) $f(x)$ liên tục tại $x=-2$.

(III) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (I) và (III). **D.** Cả (I); (II); (III) đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

$D=[-2;\ 2]$

$f(x)$ không xác định tại $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{4-x^2}=0$; $f(-2)=0$. Vậy hàm số liên tục tại $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$. Vậy không tồn tại giới hạn của hàm số khi $x\to 2$..

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{5x} & x\neq 0\\ a+2 & x=0\end{cases}$. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$; $f(0)=a+2$.

Vậy để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $a+2=1\Leftrightarrow a=-1$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

A. $k\neq \pm 2$. **B.** $k\neq 2$. **C.** $k\neq -2$. **D.** $k\neq \pm 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x=1$ ta có $f(1)=k^2$

Với $x\neq 1$ ta có

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2=4$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq k^2 \Leftrightarrow k^2\neq 4 \Leftrightarrow k\neq \pm 2$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=4\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=4$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trên tập xác định nhưng gián đoạn tại $x=4$

C. Hàm số không liên tục tại $x=4$

D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{1}{4} = f(4)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=4$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x-1}}+2 & \text{khi } x>1\\ 3x^2+x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=1$
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm
C. Hàm số không liên tục tại $x=1$
D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}}+2\right]=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+x-1\right)=3\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=1$.

Câu 11. Cho hàm số **3.** $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1\\ |x-1| & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.
B. Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.
C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$ và $x=-1$.
D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Hàm số liên tục tại $x=1$, không liên tục tại điểm $x=-1$.

Câu 12. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x(x+1)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}=1$

Vậy ta chọn $f(0)=1$

Câu 13. Chọn giá trị $f(0)$ để các hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+8}-2}{\sqrt{3x+4}-2}$ liên tục tại điểm $x=0$.

A. 1 **B.** 2 **C.** $\dfrac{2}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{9}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\left(\sqrt{3x+4}+2\right)}{3\left(\sqrt[3]{(2x+8)^2}+2.\sqrt[3]{2x+8}+4\right)} = \dfrac{2}{9}$

Vậy ta chọn $f(0) = \dfrac{2}{9}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{khi } x > -1 \\ 2x+3 & \text{khi } x \le -1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại tại $x_0 = -1$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục tại tại $x_0 = -1$.

D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $f(-1) = 1$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (2x+3) = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-x-2}{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{x+2}} = \dfrac{3}{2}$

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \ne \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = -1$.

Câu 15. Cho hàm số **3.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} & \text{khi } x \ne 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 0$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm như gián đoạn tại $x_0 = 0$

C. Hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$

D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có: $f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1+\sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1+\sqrt[3]{x-1}}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x-1}+x-1}\right) = 2 = f(0)$

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{3} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x=1$
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm
C. Hàm số không liên tục tại tại $x=1$
D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}=f(1)$

Hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}+2x & \text{khi } x>2\\ x^2-x+3 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$

. Khẳng định nào sau đây đúng nhất

A. Hàm số liên tục tại $x_0=2$
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm
C. Hàm số không liên tục tại $x_0=2$
D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\dfrac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x-2}}+2x\right]=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-x+3\right)=5\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x_0=2$.

Câu 18. Tìm a để các hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x+2a & \text{khi } x<0\\ x^2+x+1 & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2a)=2a$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm a để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x\neq 0\\ 3 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{1}{6}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{x\left(ax+2a+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4}{\left(ax+2a+1\right)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\frac{2}{2a+1}$

Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow\frac{2}{2a+1}=3\Leftrightarrow a=-\frac{1}{6}$.

Câu 20. Tìm a để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ \dfrac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1}=\frac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{a(x^2-2)}{x-3}=\frac{a}{2}$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\frac{a}{2}=\frac{3}{8}\Rightarrow a=\frac{3}{4}$.

DẠNG 2: TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

Phương pháp:
+ Sử dụng các định lí về tính liên tục của hàm đa thức, lương giác, phân thức hữu tỉ …
+ Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Câu 1. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(II) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ có giới hạn khi $x\to 0$.

(III) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$.

A. Chỉ (I) và (II). **B.** Chỉ (II) và (III). **C.** Chỉ (II). **D.** Chỉ (III).

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Dễ thấy kđ (I) sai, Kđ (II) là lí thuyết.

Hàm số: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-3;3)$. Liên tục phải tại 3 và liên tục trái tại -3.

Nên $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$.

Câu 2. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x\neq 1$.

(II). $f(x)=\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (I) và (III). **D.** Chỉ (II) và (III)

.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có (II) đúng vì hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định.

Ta có (III) đúng vì $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & ,\text{ khi } x\geq 0\\ -\dfrac{x}{x} & ,\text{ khi } x<0\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=1$.

Vậy hàm số $y=f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & ,x\neq\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & ,x=\sqrt{3}\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x=\sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x=\sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ (I) và (II). **B.** Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (I) và (III). **D.** Cả $(I),(II),(III)$ đều đúng.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với $x\neq\sqrt{3}$ ta có hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, (1).

Với $x=\sqrt{3}$ ta có $f\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$ và $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=f\left(\sqrt{3}\right)$ nên hàm số liên tục tại $x=\sqrt{3}$, (2)

Từ (1) và (2) ta có hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=x^5-x^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(II). $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

(III). $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên đoạn $[2;+\infty)$.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (I) và (II). **C.** Chỉ (II) và (III). **D.** Chỉ (I) và (III).

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có (I) đúng vì $f(x)=x^5-x^2+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có (III) đúng vì $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên $(2;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2)=0$ nên hàm số liên tục trên $[2;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,\ 0<x<9\\ m & ,\ x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,\ x\geq 9\end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ là.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{3+\sqrt{9-x}}=\dfrac{1}{6}$.

Vậy để hàm số liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=m \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$.Khi đó hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(-3;2\right)$. **B.** $\left(-2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;3\right)$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Hàm số có nghĩa khi $x^2+5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Vậy theo định lí ta có hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;-3\right);\left(-3;-2\right)$ và $\left(-2;+\infty\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} & khi\; x<2 \\ 2-x & khi\;\; x\geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. Hàm số không liên tục trên $\left(2:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$

- Với $x<2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3-16} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>2 \Rightarrow f(x)=2-x \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=2$ ta có : $f(2)=0$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2-x\right)=0$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2+2x+4)}=-\dfrac{1}{24}\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Hàm số không liên tục tại $x=2$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x>1 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x\leq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $\left(1:+\infty\right)$

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Hàm số xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

- Với $x<1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+2}{x+2} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Với $x>1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow$ hàm số liên tục
- Tại $x=1$ ta có : $f(1)=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{2}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}+2}{x+2}=\dfrac{2}{3}=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

Hàm số liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & , x\neq 0 \wedge x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ 0 & , x=0\end{cases}$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$ hay $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & , x\le\sqrt{2}, a\in\mathbb{R}\\ (2-a)x^2 & , x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 và 2. **B.** 1 và -1. **C.** -1 và 2. **D.** 1 và -2.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=a^2x^2$ liên tục trên khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

Với $x<\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=(2-a)x^2$ liên tục trên khoảng $(-\infty;\sqrt{2})$.

Với $x=\sqrt{2}$ ta có $f(\sqrt{2})=2a^2$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}(2-a)x^2=2(2-a)$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} a^2x^2=2a^2$.

Để hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2a^2=2(2-a) \Leftrightarrow a^2+a-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\\ a=-2\end{array}\right.$.

Vậy $a=1$ hoặc $a=-2$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 & ,x\ge 1\\ \dfrac{2x^3}{1+x} & ,0\le x<1\\ x\sin x & ,x<0\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$.

C. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

D. $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0;1\right\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

TXĐ:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=x^2$ liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$. $\left(1\right)$

Với $0<x<1$ ta có hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3}{1+x}$ liên tục trên khoảng $\left(0;1\right)$. $\left(2\right)$

Với $x<0$ ta có $f\left(x\right)=x\sin x$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. $\left(3\right)$

Với $x=1$ ta có $f\left(1\right)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3}{1+x}=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=1=f\left(1\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Với $x=0$ ta có $f\left(0\right)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^3}{1+x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x.\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2.\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=0$

suy ra $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0=f\left(0\right)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=0$. $\left(4\right)$

Từ $\left(1\right)$, $\left(2\right)$, $\left(3\right)$ và $\left(4\right)$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3;-2\right\}$.Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2,x=3$

C. Hàm số liên tục tại $x=-2,x=3$

D. Tất cả đều sai

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{3;-2\right\}$.

Ta có hàm số liên tục tại mọi $x\in D$ và hàm số gián đoạn tại $x=-2,x=3$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

C. TXĐ : $D=\left(-\infty;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$

D. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

TXĐ : $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^-} f(x)=0=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục trái tại $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x)=0=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\Rightarrow$ hàm số liên tục phải tại $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hàm số gián đoạn tại mọi điểm $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=2\sin x+3\tan 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ **B.** Hàm số liên tục tại mọi điểm

C. TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ **D.** Hàm số gián đoạn tại các điểm

$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ta có hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc D và gián đoạn tại các điểm

$x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & khi\ x\neq 1\\ a\ \ khi\ \ x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ **B.** Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số không liên tục trên $(1:+\infty)$ **D.** Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$ và gián đoạn tại $x=1$

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\ khi\ x\neq 0\\ 0\ \ khi\ \ x=0\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$
B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$
C. Hàm số không liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$
D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$ và gián đoạn tại $x=0$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{khi } x\leq 0\\ (x-1)^3 & \text{khi } 0<x<2\\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$
B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$
C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$
D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=2$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 2$ và gián đoạn tại $x=2$

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1 & \text{khi } |x|\leq 1\\ 3x-1 & \text{khi } |x|>1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$
B. Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$
C. Hàm số không liên tục trên $\left(2;+\infty\right)$
D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x=\pm 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq \pm 1$ và gián đoạn tại $x=\pm 1$.

Câu 19. Xác định a,b để các hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x \text{ khi } |x|\leq \dfrac{\pi}{2}\\ ax+b \text{ khi } |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=1\end{cases}$
B. $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=2\end{cases}$
C. $\begin{cases}a=\dfrac{1}{\pi}\\ b=0\end{cases}$
D. $\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=0\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}a+b=1\\ -\dfrac{\pi}{2}a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{\pi}\\ b=0\end{cases}$

Câu 20. Xác định a,b để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2)\neq 0\\ a & \text{khi } x=2\\ b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $\begin{cases}a=10\\b=-1\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}a=11\\b=-1\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a=12\\b=-1\end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$.

Câu 21. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=\dfrac{4}{3}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Với $x\neq 1$ ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên khoảng $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=1$

Ta có: $f(1)=3m-2$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^2+x+2}{x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right]=2$$

Nên hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 3m-2=2 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$

Vậy $m=\dfrac{4}{3}$ là những giá trị cần tìm.

Câu 22. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$ **C.** $m=2$ **D.** $m=0$

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

- Với $x>0$ ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(0;+\infty)$
- Với $x<0$ ta có $f(x)=2x^2+3m+1$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;0)$.

Do đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có: $f(0)=3m+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(2x^2+3m+1\right)=3m+1$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow 3m+1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$

Vậy $m=-\dfrac{1}{6}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 23. Tìm m để các hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=1$ **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$ **C.** $m=5$ **D.** $m=0$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Với $x>2$ ta có hàm số liên tục

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$ và liên tục tại $x=2$.

- Hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$ khi và chỉ khi tam thức

$g(x)=x^2-2mx+3m+2\ne 0,\ \forall x\le 2$

TH 1: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2\le 0\\ g(2)=-m+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\le m\le \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

TH 2: $\begin{cases}\Delta'=m^2-3m-2>0\\ x_1=m-\sqrt{\Delta'}>2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m-2>0\\ m>2\\ \Delta'<(m-2)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\ m<6\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}<m<6$

Nên $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\le m<6$ (*) thì $g(x)\ne 0,\ \forall x\le 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\frac{3}{6-m}$$

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow m=5$ (thỏa (*))

DẠNG 3: ÁP DỤNG TÍNH LIÊN TỤC XÉT SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp :

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

Câu 1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)\ge 0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ II đúng. **C.** Cả I và II đúng. **D.** Cả I và II sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 2. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

(II) $f(x)$ liên tục trên đoạn $(a;b]$ và trên $[b;c)$ nhưng không liên tục $(a;c)$

A. Chỉ (I).
B. Chỉ (II).
C. Cả (I) và (II) đúng.
D. Cả (I) và (II) sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

KĐ 1 sai.

KĐ 2 sai.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$.

A. Chỉ I. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ II. **D.** Chỉ III.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-1;0]$, $[0;1]$ và $[1;2]$, (1).

Ta có $f(-1)=-1000,99$; $f(0)=0,01$ suy ra $f(-1).f(0)<0$, (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1;0)$.

Ta có $f(0)=0,01$; $f(1)=-999,99$ suy ra $f(0).f(1)<0$, (3).

Từ (1) và (3) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f(1)=-999,99$; $f(2)=-39991,99$ suy ra $f(1).f(2)>0$, (4).

Từ (1) và (4) ta chưa thể kết luận về nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên khoảng $(1;2)$.

ĐÁP ÁN ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
C	D	A	B	C	D	B	C	A	C
Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16	Câu 17	Câu 18	Câu 19	Câu 20
A	B	C	D	B	D	B	C	D	A
Câu 21	Câu 22	Câu 23	Câu 24	Câu 25	Câu 26	Câu 27	Câu 28	Câu 29	Câu 30
C	C	B	A	C	D	A	D	C	B
Câu 31	Câu 32	Câu 33	Câu 34	Câu 35	Câu 36	Câu 37	Câu 38	Câu 39	Câu 40
B	B	A	C	D	B	C	D	B	A
Câu 41	Câu 42	Câu 43	Câu 44	Câu 45	Câu 46	Câu 47	Câu 48	Câu 49	Câu 50
C	A	D	D	B	C	C	D	D	A
Câu 51	Câu 52	Câu 53	Câu 54	Câu 55	Câu 56	Câu 57	Câu 58	Câu 59	Câu 60
D	A	D	C	B	A	B	D	B	B
Câu 61	Câu 62	Câu 63	Câu 64	Câu 65	Câu 66	Câu 67	Câu 68	Câu 69	Câu 70
A	C	D	A	B	B	D	B	C	D
Câu 71	Câu 72	Câu 73	Câu 74	Câu 75	Câu 76	Câu 77	Câu 78	Câu 79	Câu 80
B	A	C	C	D	B	C	B	D	A
Câu 81	Câu 82	Câu 83	Câu 84	Câu 85	Câu 86	Câu 87	Câu 88	Câu 89	Câu 90
C	A	C	B	D	A	C	D	D	A
Câu 91									
B									