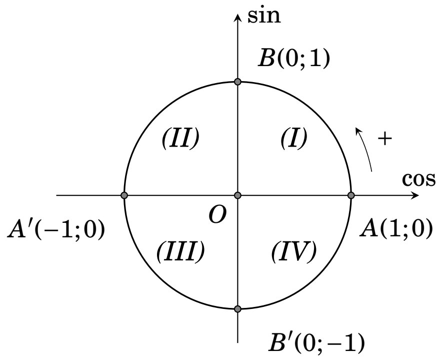
CHƯƠNG 1 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NẮM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Giá trị lượng giác	Góc phần tư I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

② Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\tan x\cot x=1$

③ Cung góc liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung hơn kém π
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$

Cung phụ nhau	Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

④ Công thức cộng

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$	$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$	$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

⑤ Công thức nhân đôi, công thức hạ bậc

Công thức nhân đôi	Công thức hạ bậc
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$	$\cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$
Công thức nhân 3	
$\left[\begin{array}{l}\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{array}\right.$	$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

⑥ Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$
$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$	$\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$

Đặt biệt

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

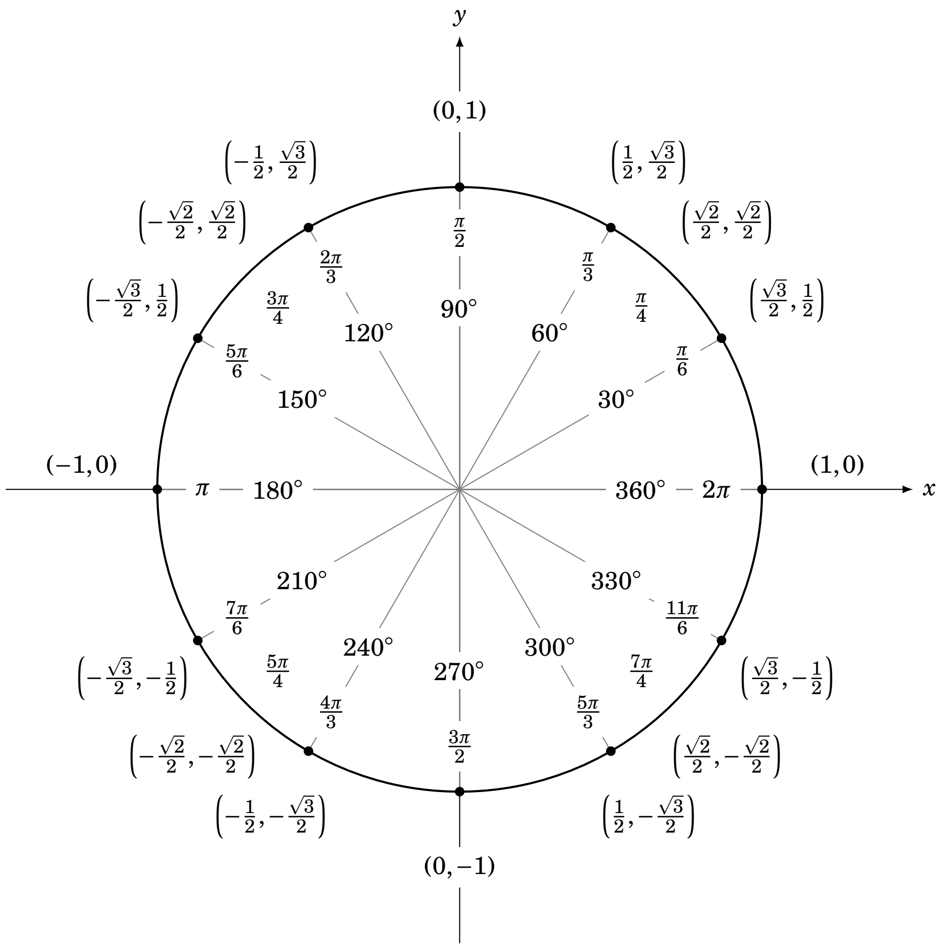
⑦ Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a\cdot\cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$
$\sin a\cdot\sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$
$\sin a\cdot\cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]$

Bảng lượng giác của một số góc đặc biệt

độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

Một điểm M thuộc đường tròn lượng giác sẽ có tọa độ $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$



BÀI 2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Tính chất của hàm số

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

— Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$ và $f(-x)=f(x)$. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

— Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathscr{D}$ gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$ và $f(-x)=-f(x)$. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

b) Hàm số đơn điệu
Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $(a;b)\subset\mathbb{R}$.

— Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b)$ có $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

— Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b)$ có $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

c) Hàm số tuần hoàn

— Hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathscr{D}$, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in\mathscr{D}$ ta có $(x+T)\in\mathscr{D}$ và $(x-T)\in\mathscr{D}$ và $f(x+T)=f(x)$.

— Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kì của hàm tuần hoàn f.

② Hàm số $y=\sin x$

— Hàm số $y=\sin x$ có tập xác định là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\Rightarrow y=\sin[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

— Tập giá trị $T=[-1;1]$, nghĩa là $-1\le\sin x\le 1\Rightarrow$
- $0\le|\sin x|\le 1$
- $0\le\sin^2 x\le 1$.

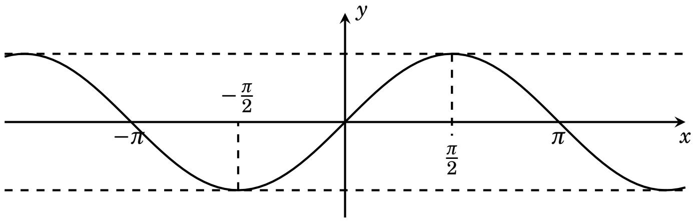
— Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$. Nên đồ thị hàm số $y = \sin x$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

— Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$. Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left|\begin{array}{l} \circ\ \ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \circ\ \ \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \circ\ \ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



③ Hàm số $y = \cos x$

— Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y = \cos[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

— Tập giá trị $T = [-1; 1]$, nghĩa là $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le |\cos x| \le 1 \\ 0 \le \cos^2 x \le 1. \end{cases}$

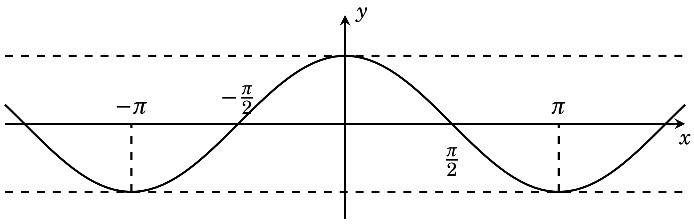
— Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn vì $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ nên đồ thị của hàm số nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

— Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{2\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}$ và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt $\left|\begin{array}{l} \circ\ \ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \circ\ \ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \\ \circ\ \ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Đồ thị hàm số



④ Hàm số $y = \tan x$

— Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, nghĩa là $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \tan[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

— Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

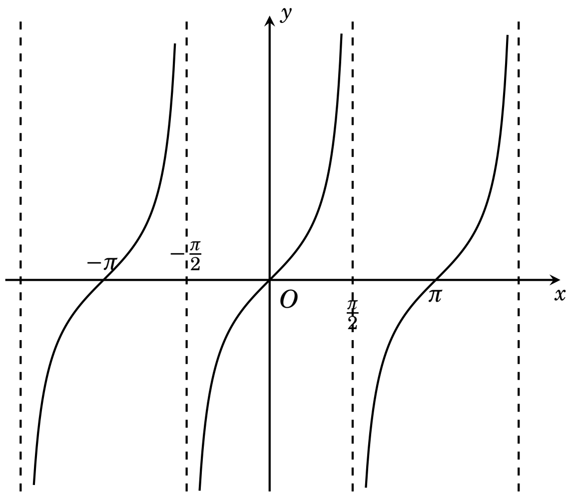
— Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \tan(-x) = -\tan x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

— Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

— Đồ thị hàm số



⑤ Hàm số $y = \cot x$

— Hàm số $y = y = \cot x$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi \Rightarrow$ hàm số $y = \cot[f(x)]$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

— Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

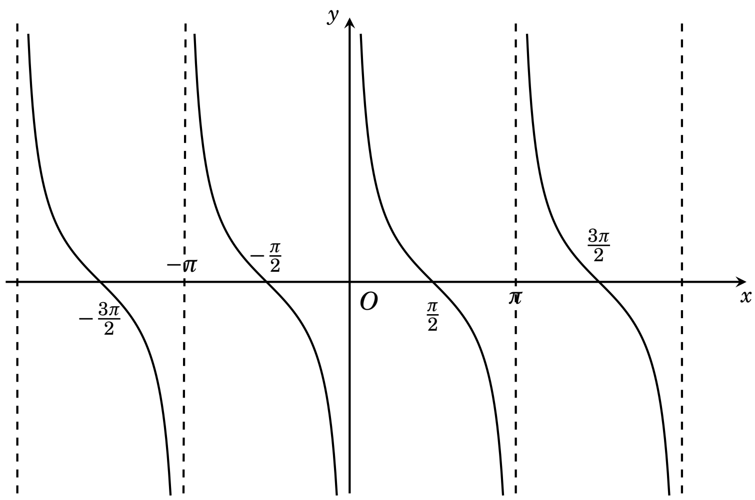
— Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ vì $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.

— Hàm số $y = y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \pi \Rightarrow y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_0 = \dfrac{\pi}{|a|}$.

— Hàm số $y = y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

— Hàm số $y = y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} k\pi$

— Đồ thị hàm số



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 2.1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải: *Để tìm tập xác định của hàm số lượng giác ta cần nhớ:*

① $y=\tan f(x)=\dfrac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$; *Điều kiện xác định:* $\cos f(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

② $y=\cot f(x)=\dfrac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$; *Điều kiện xác định:* $\sin f(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq k\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

③ *Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp:*

— $y=\dfrac{1}{P(x)}$, *điều kiện xác định là* $P(x)\neq 0$.

— $y=\dfrac{1}{\sqrt[2n]{P(x)}}$, *điều kiện xác định là* $P(x)>0$.

— $y=\sqrt[2n]{P(x)}$, *điều kiện xác định là* $P(x\geq 0)$.

④ *Lưu ý rằng:* $-1\leq \sin f(x);\cos f(x)\leq 1$ *và* $A\cdot B\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\neq 0\\ B\neq 0.\end{cases}$

⑤ *Với* $k\in\mathbb{Z}$, *ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:*

— $\left[\begin{array}{l}\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ \sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

— $\left[\begin{array}{l}\tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi\\ \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$

— $\left[\begin{array}{l}\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\\ \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$

— $\left[\begin{array}{l}\cot x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ \cot x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \cot x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$

VÍ DỤ 1. Tìm tập xác định của hàm số: $y=f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\tan^2 x-1}+\sqrt{\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k2\pi\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases}\tan^2 x-1\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}\geq 0\\ \cos x\neq -1.\end{cases}$

Do $-1\leq \cos x\leq 1$ nên $\Leftarrow \begin{cases}1\leq 2-\cos x\leq 3\\ 0\leq 1+\cos x\leq 2\end{cases}$. Từ đó suy ra: $\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x\neq \pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq \pi+k2\pi.\end{cases}$, nên $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\pi+k2\pi\right\}$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tập xác định của hàm số: $y=f(x)=\dfrac{\sqrt{4\pi^2-x^2}}{\cos x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\left\{-2\pi\leq x\leq 2\pi; x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số: $\begin{cases}4\pi^2-x^2\geq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2\pi\leq x\leq 2\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi.\end{cases}$. Vậy $\mathscr{D}=\left\{-2\pi\leq x\leq 2\pi; x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. □

1 BÀI TẬP VẬN DỤNG

BÀI 1. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\cos\dfrac{4}{x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② $\cos\sqrt{2x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=[0;+\infty)$.

③ $y=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$.

④ $y=\dfrac{\tan 2x}{1+\cos^2 x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

⑤ $y=\dfrac{\tan 2x}{\sin x-1}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

⑥ $y=\sqrt{\dfrac{\cos x+4}{\sin x+1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

⑦ $y=\sqrt{\dfrac{\cos x-2}{1-\sin x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\varnothing$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $x\neq 0$.

② Điều kiện xác định: $2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

③ Điều kiện xác định: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$.

④ Điều kiện xác định: $\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$.

⑤ Điều kiện xác định: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k2\pi.\end{cases}$

⑥ Điều kiện xác định: $\begin{cases}\dfrac{\cos x+4}{\sin x+1}\geq 0\\ \sin x+1\neq 0.\end{cases}$

Do $-1\leq\sin x;\cos x\leq 1$ nên $\dfrac{\cos x+4}{\sin x+1}\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy hàm số xác định khi $x\neq-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

⑦ Điều kiện xác định: $\begin{cases}\dfrac{\cos x-2}{1-\sin x}\geq 0\\ 1-\sin x\neq 0.\end{cases}$

Do $-1\leq\sin x;\cos x\leq 1$ nên $\dfrac{\cos x-2}{1-\sin x}\leq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $\varnothing$.

□

BÀI 2. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\dfrac{\sqrt{\pi^2-x^2}}{\sin 2x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\left\{-\pi\leq x\leq\pi;x\neq\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

② $y=\sqrt{\pi^2-4x^2}+\tan 2x$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\left\{-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2};x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

③ $\dfrac{\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{5\pi}{8}+k2\pi\right\}$.

④ $y=\dfrac{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{4}+k\pi;-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\right\}$.

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $\begin{cases}\pi^2-x^2\geq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi\leq x\leq\pi\\ x\neq\dfrac{k\pi}{2}.\end{cases}$

② Điều kiện xác định: $\begin{cases} \pi^2-4x^2 \geq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}. \end{cases}$

③ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x \neq \dfrac{5\pi}{8}+k2\pi. \end{cases}$

④ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ 1-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{3\pi}{4}+k\pi \\ x \neq -\dfrac{\pi}{3}+k2\pi. \end{cases}$

□

2 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 3. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{\cos x+1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$

② $y=\dfrac{\cot 2x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$

③ $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$

④ $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=[0;+\infty)\setminus\mathbb{Z}$

⑤ $y=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin x}+\tan x$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

⑥ $y=\dfrac{x^2+1}{x\cos x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;0\right\}$

⑦ $y=\dfrac{\tan 2x}{\sqrt{\sin x+1}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right\}$

BÀI 4. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau:

① $y=\dfrac{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos x-2}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}$.

② $y=\dfrac{\sqrt{3-\sin 4x}}{\cos x+1}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi\}$.

③ $y=\dfrac{3}{\cos x-\cos 3x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi;\dfrac{k\pi}{4}\right\}$.

④ $y=\cot\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\tan 2x$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

⑤ $y=\sqrt{2+\sin x}-\dfrac{1}{\tan^2 x-1}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right\}$.

⑥ $y=\dfrac{4}{\sin^2 x-\cos^2 x}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

⑦ $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi;k2\pi\right\}$.

⑧ $y=\dfrac{1+\cot\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)}{\tan^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$. **ĐS:** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{3};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}\right\}$.

DẠNG 2.2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải:

— *Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn*

- $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{array}\right.$ *hoặc* $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1. \end{array}\right.$
- *Biến đổi đưa về dạng* $m \leq y \leq M$.

— *Kết luận:* $\max y = M$ *và* $\min y = m$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}}$. **ĐS:** $\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Lời giải.
Ta có

$$y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}(2\cos x \sin x)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}}.$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $5 \ge 5 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x \ge \dfrac{9}{2}$. Suy ra $\dfrac{4\sqrt{5}}{5} \le y = \dfrac{4}{\sqrt{5 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}} \le \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

∘ $y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

∘ $y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ khi $\sin 2x = 1$ hoặc $\sin 2x = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ và $\max y = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. □

VÍ DỤ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2$. **ĐS:** $\min y = -1$, $\max y = 5$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 4\cos 2x - 2 \\ &= 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2\cos^2 x - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2 \\ &= 5 - 6\cos^2 x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \cos^2 x \le 1$ nên $5 \ge f(x) = 5 - 6\cos^2 x \ge -1$.

∘ $f(x) = 5$ khi $\cos x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \dfrac{\pi}{2}$.

∘ $f(x) = -1$ khi $\cos^2 x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

Vậy $\max f(x) = 5$ và $\min f(x) = -1$. □

VÍ DỤ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 2$, $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $\min y = \dfrac{9}{4}$, $\max y = 3$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x + 2 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2 \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 + 2 = 3 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $3 \ge f(x) \ge \dfrac{9}{4}$.

∘ $f(x) = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ hoặc $x = 0$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.

∘ $f(x) = \dfrac{9}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$.

Vậy $\max f(x) = 3$ và $\min f(x) = \dfrac{9}{4}$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

① $y=5\sqrt{3+\cos 2x}+4$ **ĐS:** $\min y=5\sqrt{2}+4$, $\max y=14$

② $y=\sqrt{1-\cos 4x}$ **ĐS:** $\min y=0$, $\max y=\sqrt{2}$

③ $y=3\sin^2 2x-4$ **ĐS:** $\min y=-4$, $\max y=-1$

④ $y=4-5\sin^2 2x\cos^2 2x$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{11}{4}$, $\max y=4$

⑤ $y=3-2|\sin 4x|$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=3$

Lời giải.

① Do $-1\le\cos 2x\le 1$ nên $2\le 3+\cos 2x\le 4$. Suy ra $5\sqrt{2}+4\le y=5\sqrt{3+\cos 2x}+4\le 14$.
- $y=5\sqrt{2}+4$ khi $\cos 2x=-1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\dfrac{\pi}{2}$.
- $y=14$ khi $\cos 2x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.

Vậy $\min y=5\sqrt{2}+4$ và $\max y=14$.

② Do $-1\le\cos 4x\le 1$ nên $\sqrt{2}\ge y=\sqrt{1-\cos 4x}\ge 0$.
- $y=\sqrt{2}$ khi $\cos 4x=-1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\dfrac{\pi}{4}$.
- $y=0$ khi $\cos 4x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.

Vậy $\max y=\sqrt{2}$ và $\min y=0$.

③ Do $0\le\sin^2 2x\le 1$ nên $-4\le y=3\sin^2 2x-4\le -1$.
- $y=-4$ khi $\sin 2x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
- $y=-1$ khi $\sin^2 2x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y=-4$ và $\max y=-1$.

④ Ta có
$$y=4-5\sin^2 2x\cos^2 2x=4-\frac{5}{4}(2\sin 2x\cos 2x)^2=4-\frac{5}{4}\sin^2 2x.$$
Do $0\le\sin^2 2x\le 1$ nên $4\ge y\ge\dfrac{11}{4}$.
- $y=4$ khi $\sin 2x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
- $y=\dfrac{11}{4}$ khi $\sin^2 2x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy $\max y=4$ và $\min y=\dfrac{11}{4}$.

⑤ Do $0\le|\sin 4x|\le 1$ nên $3\ge y=3-2|\sin 4x|\ge 1$.
- $y=3$ khi $\sin 4x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
- $y=1$ khi $|\sin 4x|=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\dfrac{\pi}{8}$.

Vậy $\max y=3$ và $\min y=1$.

□

BÀI 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau:

① $y=-\sin^2 x-\cos x+2$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{3}{4}$, $\max y=3$

② $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1$ **ĐS:** $\min y=-1$, $\max y=2$

③ $y=\cos^2 x+2\sin x+2$ **ĐS:** $\min y=0$, $\max y=4$

④ $y=\sin^4 x+\cos^4 x+4$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{9}{2}$, $\max y=5$

⑤ $y=\sqrt{2-\cos 2x+\sin^2 x}$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=2$

⑥ $y=\sin^6 x+\cos^6 x$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{1}{4}$, $\max y=1$

⑦ $y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x+4$ **ĐS:** $\min y=2$, $\max y=6$

Lời giải.

① Ta có
$$y=-\sin^2 x-\cos x+2=-\left(1-\cos^2 x\right)-\cos x+2=\cos^2 x-\cos x+1=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$
Do $-1\le\cos x\le 1$ nên $-\frac{3}{2}\le\cos x-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$.
Suy ra $0\le\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{4}\le y\le 3$.
∘ $y=\frac{3}{4}$ khi $\cos x=\frac{1}{2}$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\frac{\pi}{3}$.
∘ $y=3$ khi $\cos x=-1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\pi$.
Vậy $\min y=\frac{3}{4}$ và $\max y=3$.

② Ta có
$$y=\sin^4 x-2\cos^2 x+1=\sin^4 x-2\left(1-\sin^2 x\right)+1=\sin^4 x+2\sin^2 x-1=\left(\sin^2 x+1\right)^2-2.$$
Do $0\le\sin^2 x\le 1$ nên $1\le\sin^2 x+1\le 2$.
Suy ra $1\le\left(\sin^2 x+1\right)^2\le 4\Leftrightarrow -1\le y\le 2$.
∘ $y=-1$ khi $\sin x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
∘ $y=2$ khi $\sin^2 x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\frac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y=-1$ và $\max y=2$.

③ Ta có
$$y=\cos^2 x+2\sin x+2=\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x+2=-\sin^2 x+2\sin x+3=4-(\sin x-1)^2.$$
Do $-1\le\sin x\le 1$ nên $-2\le\sin x-1\le 0$.
Suy ra $0\le(\sin x-1)^2\le 4\Leftrightarrow 4\ge y\ge 0$.
∘ $y=4$ khi $\sin x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\frac{\pi}{2}$.
∘ $y=0$ khi $\sin x=-1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=-\frac{\pi}{2}$.
Vậy $\max y=4$ và $\min y=0$.

④ Ta có
$$y=\sin^4 x+\cos^4 x+4=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+4=1-\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2+4=5-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$
Do $0\le\sin^2 2x\le 1$ nên $5\ge y\ge\frac{9}{2}$.
∘ $y=5$ khi $\sin 2x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
∘ $y=\frac{9}{2}$ khi $\sin^2 2x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\frac{\pi}{4}$.
Vậy $\max y=5$ và $\min y=\frac{9}{2}$.

⑤ Ta có
$$y^2=2-\cos 2x+\sin^2 x=2-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sin^2 x=3\sin^2 x+1\Rightarrow y=\sqrt{3\sin^2 x+1}.$$
Do $0\le\sin^2 x\le 1$ nên $1\le 3\sin^2 x+1\le 4$.
Suy ra $1\le y\le 2$.
∘ $y=1$ khi $\sin x=0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=0$.
∘ $y=2$ khi $\sin^2 x=1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x=\frac{\pi}{2}$.
Vậy $\min y=1$ và $\max y=2$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^6 x + \cos^6 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do $0 \le \sin^2 2x \le 1$ nên $1 \ge y \ge \frac{1}{4}$.

∘ $y = 1$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

∘ $y = \frac{1}{4}$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4}$ $\left(\text{do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Vậy $\max y = 1$ và $\min y = \frac{1}{4}$.

⑦ Ta có

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2 \Rightarrow y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 4.$$

Do $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \le 1$ nên $2 \ge y \ge 6$.

∘ $y = 2$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{-\pi}{3}$.

∘ $y = 6$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{6}$.

Vậy $\min y = 2$ và $\max y = 6$.

□

BÀI 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y = \sin 2x,\ \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ **ĐS:** $\min y = 0$, $\max y = 1$

② $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),\ \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ **ĐS:** $\min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 1$

③ $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ **ĐS:** $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max y = 1$

Lời giải.

① Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $2x \in [0; \pi]$. Suy ra $0 \le y = \sin 2x \le 1$

∘ $y = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

∘ $y = 6$ khi $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = 0$ và $\max y = 1$.

② Do $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$ nên $x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Suy ra $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \le y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1$

∘ $y = \frac{1}{2}$ khi $x = -\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = 0$.

∘ $y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{3}$.

Vậy $\min y = \frac{1}{2}$ và $\max y = 1$.

③ Do $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Suy ra $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$.

∘ $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $x = \pm\frac{\pi}{4}$.

∘ $y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{8}$.

Vậy $\min y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\max y = 1$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y=\sqrt{4-2\sin^5 2x}-8$ **ĐS:** $\min y=-8+\sqrt{2}$, $\max y=-8+\sqrt{6}$

② $y=y=\dfrac{4}{1+3\cos^2 x}$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=4$

③ $y=\dfrac{4}{\sqrt{5-2\cos^2 x\sin^2 x}}$ **ĐS:** $\min y=$, $\max y=$

④ $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sin^2 3x}}$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\max y=1$

⑤ $y=\dfrac{3}{3-\sqrt{1-\cos x}}$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=\dfrac{9-3\sqrt{2}}{7}$

⑥ $\dfrac{4}{\sqrt{2-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}+3}$ **ĐS:** $\min y=-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$, $\max y=2$

⑦ $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x}$ **ĐS:** $\min y=-1$, $\max y=1$

BÀI 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y=\cos^2 x+2\cos 2x$ **ĐS:** $\min y=-2$, $\max y=3$

② $y=2\sin^2 x-\cos 2x$ **ĐS:** $\min y=-1$, $\max y=3$

③ $y=2\sin 2x(\sin 2x-4\cos 2x)$ **ĐS:** $\min y=1-\sqrt{17}$, $\max y=1+\sqrt{17}$

④ $y=3\sin^2 x+5\cos^2 x-4\cos 2x$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=7$

⑤ $y=4\sin^2 x+\sqrt{5}\sin 2x+3$ **ĐS:** $\min y=2$, $\max y=8$

⑥ $y=(2\sin x+\cos x)(3\sin x-\cos x)$ **ĐS:** $\min y=5-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, $\max y=5+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⑦ $y=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x-1$ **ĐS:** $\min y=-\dfrac{9}{4}$, $\max y=\sqrt{2}$

⑧ $y=1-(\sin 2x+\cos 2x)^3$ **ĐS:** $\min y=1-2\sqrt{2}$, $\max y=1+2\sqrt{2}$

⑨ $y=|5\sin x+12\cos x-10|$ **ĐS:** $\min y=0$, $\max y=23$

⑩ $y=2\sin x+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-1$ **ĐS:** $\min y=-1-\sqrt{2}$, $\max y=-1+\sqrt{2}$

⑪ $y=2\left[\cos 2x+\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]+3$ **ĐS:** $\min y=1$, $\max y=5$

BÀI 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số lượng giác sau

① $y=\sin^4 x+\cos^4 x,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ **ĐS:** $\min y=\dfrac{5}{8}$, $\max y=1$

② $y=2\sin^2 x-\cos 2x,\ \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$ **ĐS:** $\min y=-1$, $\max y=2$

③ $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right),\ \forall x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right]$ **ĐS:** $\min y=-\infty$, $\max y=0$

DẠNG 2.3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

— ***Bước 1.*** *Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.*
Nếu $\forall x\in D$ thì $-x\in D\Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.

— ***Bước 2.*** *Tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau*

- *Nếu $f(-x)=f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.*
- *Nếu $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.*

!

— *Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.*

— *Ta thường sử dụng cung góc liên kết dạng cung đối trong dạng toán này, cụ thể* $\cos(-a)=\cos a$, $\sin(-a)=-\sin a$, $\tan(-a)=-\tan a$, $\cot(-a)=-\cot a$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

① $f(x)=\sin^2 2x+\cos 3x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn ② $f(x)=\cos\sqrt{x^2-16}$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải.

① Tập xác định $D=\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in D=\mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x)=\sin^2(-2x)+\cos(-3x)=\sin^2 2x+\cos 3x=f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

② Tập xác định $D=(-\infty;-4]\cup[4;+\infty)$.
$\forall x \in (-\infty;-4]\cup[4;+\infty) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;-4] \\ x\in[4;+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x\in[4;+\infty) \\ -x\in(-\infty;-4]\end{array}\right. \Rightarrow -x\in D$
Xét $f(-x)=\cos\sqrt{(-x)^2-16}=\cos\sqrt{x^2-16}=f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

① $y=f(x)=\tan x+\cot x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ

② $y=f(x)=\tan^7 2x\cdot\sin 5x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

③ $y=f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{9\pi}{2}\right)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải.

① Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$.
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}\Rightarrow -x\neq-\dfrac{k\pi}{2}\Rightarrow -x\in D$
Xét $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

② Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$.
$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\Rightarrow -x\neq-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{-(k+1)\pi}{2}\Rightarrow -x\in D$
Xét $f(-x)=\tan^7(-2x)\cdot\sin(-5x)=\left(-\tan^7 2x\right)\cdot(-\sin 5x)=\tan^7 2x\cdot\sin 5x=f(x)$.
Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

③ Tập xác định $D=\mathbb{R}$.
$\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ nên ta xét

$$f(-x)=\sin\left(-2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(-2x-\frac{9\pi}{2}+9\pi\right)=-\sin\left(-2x-\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

① $y=f(x)=-2\cos^3\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ.

② $y=f(x)=\sin^3(3x+5\pi)+\cot(2x-7\pi)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số lẻ.

③ $y=f(x)=\cot(4x+5\pi)\tan(2x-3\pi)$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

④ $y=f(x)=\sin\sqrt{9-x^2}$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

⑤ $y=f(x)=\sin^2 2x+\cos 3x$ **ĐS:** $f(x)$ là hàm số chẵn.

CHƯƠNG 2 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau

- $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi. \end{array}\right.$
- $\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi. \end{array}\right.$
- $\tan x = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$
- $\cot x = \cot b \Leftrightarrow a = b + k\pi.$

Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \to k360^\circ$, $k\pi \to k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.
Những trường hợp đặc biệt

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$
- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$
- $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi.$
- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$
- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình

① $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1.$ **ĐS:** $x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

③ $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}.$ **ĐS:** $x = 45^\circ + k90^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$

④ $\cot(x - \dfrac{\pi}{3}) = 1.$ **ĐS:** $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① $\sin 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

② $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

③ $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 30^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k90^\circ\ (k \in \mathbb{Z}).$

④ $\cot\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin x = \sin\dfrac{2\pi}{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

② $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

④ $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\cos x=-\dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① $\sin x=\sin\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

② $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

④ $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi \\ x=-\dfrac{7\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=k2\pi \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2.

① $2\sin(x+30^\circ)+\sqrt{3}=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-90^\circ+k360^\circ \\ x=-150^\circ+k360^\circ \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

② $\cot(4x+35^\circ)=-1$. **ĐS:** $x=-20^\circ+k45^\circ$ $(k\in\mathbb{Z})$

③ $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\pi+k2\pi \\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$

④ $(1+2\cos x)(3-\cos x)=0$. **ĐS:** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\tan(x-30^\circ)\cos(2x-150^\circ)=0$. **ĐS:** $x=30^\circ+k180^\circ$ $(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\sqrt{2}\sin 2x + 2\cos x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

⑦ $\sin x + \sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k4\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\sin 2x \cos 2x + \dfrac{1}{4} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{8}$ $(k \in \mathbb{Z})$

B MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết

Cung đối nhau	*Cung bù nhau*	*Cung phụ nhau*
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	*Cung hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$*
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

Tính chu kỳ	
$\sin(x + k2\pi) = \sin x$	$\cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin(x + \pi + k2\pi) = -\sin x$	$\cos(x + \pi + k2\pi) = -\cos x$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\cot(x + k\pi) = \cot x$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin 2x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\dfrac{5\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

② Điều kiện: $2x - \dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x + \dfrac{\pi}{3} \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.
Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Leftrightarrow\ & \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow\ & 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow\ & 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin 3x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $\tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{3} - x = -\dfrac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

② Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.
Xét $\tan 3x = 0$ không là nghiệm, khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{\tan x}{\cot 3x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \tan x = -\cot 3x \\ \Leftrightarrow\ & \tan x = \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

① $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

③ $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ $\cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. **ĐS:** $x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm

③ Ta có phương trình tương đương

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{5} = 2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ Điều kiện $\left\{\begin{array}{l} 2x - \frac{3\pi}{4} \neq k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + l\pi \end{array}\right.$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

Ta có phương trình tương đương

$$\cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{3\pi}{4} = -x + \frac{2\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{17\pi}{36} + \dfrac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

① $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = 33{,}75^\circ + k90^\circ \\ x = -112{,}5^\circ + k180^\circ \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{13\pi}{12} - k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

③ $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\tan x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

⑤ $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

⑥ $\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{5}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \cos(3x + 45^\circ) = \cos(180^\circ - x) \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} 3x + 45^\circ = 180^\circ - x + k360^\circ \\ 3x + 45^\circ = x - 180^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = 33{,}75^\circ + k90^\circ \\ x = -112{,}5^\circ + k180^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 33{,}75^\circ + k90^\circ \\ x = -112{,}5^\circ + k180^\circ \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} - 2x + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{13\pi}{12} - k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{36} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{13\pi}{12} - k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

③ Phương trình tương đương

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan(-x) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

④ Phương trình tương đương

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{3}=\pi-x+k2\pi\\3x-\frac{\pi}{3}=x-\pi+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ Phương trình tương đương

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}&\tan\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan(-2x)\\\Leftrightarrow\ &3x+\frac{\pi}{4}=-2x+k\pi\\\Leftrightarrow\ &x=-\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 4x-2\cos^2 x+1=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\\x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

② $2\cos 5x\cdot\cos 3x+\sin x=\cos 8x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{k2\pi}{3}\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

④ $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos 5x+1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\sin\left(\frac{4\pi}{9}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{18}-x\right)=\sqrt{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{9}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{9}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\sin 4x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\cos 8x + \cos 2x + \sin x = \cos 8x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\sin x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

④ Phương trình tương đương

$$\cos 5x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = x - \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Phương trình tương đương

$$\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{9} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\dfrac{9\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{5\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

② $\cos 2x=\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cot x$. **ĐS:** $x=\dfrac{7\pi}{40}+\dfrac{k\pi}{4}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

② $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin x=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\cot\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0$. **ĐS:** Vô nghiệm.

④ $\sin\left(3x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{7\pi}{5}\right)=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{11\pi}{60}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{8\pi}{15}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{7\pi}{60}+\dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ $\tan 2x\cdot\tan 3x=1$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x+2\cos^2 x=1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{k2\pi}{14} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

② $\cot 2x=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

③ $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}-3x\right)=\sqrt{3}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{45}+\dfrac{k2\pi}{3} \\ x=\dfrac{7\pi}{45}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

④ $\cos 2x\cos x+\cos x=\sin 2x\sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right.$ $(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ $\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+3x\right)=2$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

DẠNG 1.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$	$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$
$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$	$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$

Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$. Do đó khi sử dụng nên nhẩm (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin 5x+\sin 3x+\sin x=0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}&\sin 5x+\sin 3x+\sin x=0\Leftrightarrow(\sin 5x+\sin x)+\sin 3x=0\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x=0\\ \Leftrightarrow\ &\sin 3x(2\cos 2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x=k\pi\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{3}+l\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.\quad(k,l\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos 3x+\cos 2x+\cos x+1=0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{l2\pi}{3}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}&\cos 3x+\cos 2x+\cos x+1=0\Leftrightarrow(\cos 3x+\cos x)+(\cos 2x+1)=0\\ \Leftrightarrow\ &2\cos 2x\cos x+2\cos^2 x=0\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 2x+\cos x)=0\\ \Leftrightarrow\ &4\cos 2x\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos\frac{3x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+l\pi\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+m\pi\end{array}\right.(k,l,m\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{l2\pi}{3}\\ x=\pi+m2\pi\end{array}\right.(k,l,m\in\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{l2\pi}{3}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+l2\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

② $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3}+l\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$

③ $1-\sin x-\cos 2x+\sin 3x=0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}+m2\pi, \frac{7\pi}{6}+m2\pi, (k,m\in\mathbb{Z})$

④ $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$. **ĐS:** mnp

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin 2x(2\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}, x=\pm\frac{2\pi}{3}+l2\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0 \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 3x(2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ 2\cos 2x+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, x=\pm\frac{\pi}{3}+l\pi, (k,l\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
&1-\sin x-\cos 2x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\sin x+2\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin x(\cos 2x+\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\sin x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ \cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ 2x=x+\frac{\pi}{2}+l2\pi\\ 2x=-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+l2\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z})\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}+l2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{l2\pi}{3}\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}, x=-\frac{\pi}{6}+m2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+m2\pi$, $(k,m\in\mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ &2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{5x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pi+k2\pi$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{k2\pi}{5}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

② $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x=1$. **ĐS:** $-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $-\frac{\pi}{12}+l\pi$, $\frac{7\pi}{12}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

④ $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 5x+\sin x+2\sin^2 x=1\Leftrightarrow(\sin 5x+\sin x)-(1-2\sin^2 x)=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin 3x\cos 2x-\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x(2\sin 3x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\sin 3x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{l2\pi}{3}$, $(k,l\in\mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x\Leftrightarrow(\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=(1+\cos 2x)+\cos x\\
\Leftrightarrow\ &2\sin 2x\cos x+\sin 2x=2\cos^2 x+\cos x\Leftrightarrow\sin 2x(2\cos x+1)-\cos x(2\cos x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\cos x+1=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow(\cos 3x-\cos x)-2\sin 2x-(\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &-2\sin 2x\sin x-2\sin 2x-(\sin x+1)=0\Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+1)(2\sin 2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ 2\sin 2x+1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+l\pi\\ x=\frac{7\pi}{12}+l\pi\end{array}\right.(k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{12}+l\pi$, $x=\frac{7\pi}{12}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$\begin{aligned} & 4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3\sin 3x + 2\sin 3x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ 3 + 2\cos 2x = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}$, $(k \in \mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + l2\pi, \frac{5\pi}{6} + l2\pi, k, l \in \mathbb{Z}$

② $\sin x - 4\cos x + \sin 3x = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 3x + 2\sin 2x - \cos x = 0$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

④ $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$. **ĐS:** $\frac{k2\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x + \sin 3x + 2\cos x = 1 + \sin 4x$. **ĐS:** $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\cos 2x - \sin 3x + \cos 5x = \sin 10x + \cos 8x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{30} + \frac{l2\pi}{5}, \frac{5\pi}{30} + \frac{l2\pi}{5}, (k, l \in \mathbb{Z})$

③ $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$. **ĐS:** $k\pi, \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + l2\pi, \frac{7\pi}{6} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

④ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

DẠNG 1.3. Hạ bậc khi gặp bậc chẵn của sin và cos

Sử dụng công thức hạ bậc

① $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

② $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

③ $\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

④ $\cot^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$.

! *Đối với công thức hạ bậc của sin và cosin*

— *Mỗi lần hạ bậc xuất hiện $\frac{1}{2}$ và cung góc tăng gấp đôi.*

— *Mục đích cả việc hạ bậc để triệt tiêu hằng số không mong muốn và nhóm hạng tử thích hợp để sau khi áp dụng công thức (tổng thành tích sau khi hạ bậc) sẽ xuất hiện nhân tử chung hoặc làm bài toán đơn giản hơn.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin^2 2x - \cos^2 8x = \frac{1}{2}\cos 10x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^2 2x-\cos^2 8x=\frac{1}{2}\cos 10x \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 16x}{2}=\frac{1}{2}\cos 10x\\
\Leftrightarrow\ &\cos 16x+\cos 4x-\cos 10x=0 \Leftrightarrow 2\cos 10x\cos 6x-\cos 10x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 10x=0\\ 2\cos 6x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{10}$, $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+l\pi$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=\frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+\cos^2 4x=\frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 6x+\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 4x=0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 4x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 4x(2\cos 4x+2\cos 2x+1)=0 \Leftrightarrow \cos 4x(4\cos^2 2x+2\cos 2x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 2x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\\ \cos 2x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}+l\pi\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+l\pi\end{array}\right. (k,l\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+l\pi$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$. □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 x=\frac{1}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4}$, $(k\in\mathbb{Z})$

② $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\cos^2 x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{12}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

④ $4\sin^2 x-1=0$. **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\sin^2\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$. **ĐS:** $\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$, $-\frac{29\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$. **ĐS:** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4},(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin 4x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\cos^2 x=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$4\sin^2 x-1=0 \Leftrightarrow 2(1-\cos 2x)-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

⑤ Ta có

$$\sin^2\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right) \Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(6x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi}{2}-2x+k2\pi \\ 6x+\frac{4\pi}{3}=-\left(\frac{7\pi}{2}-2x\right)+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{4} \\ x=-\frac{29\pi}{24}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{13\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}$, $x=-\frac{29\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ Ta có

$$\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2+\left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)^2+(1+\cos 2x)^2=1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x+4\cos 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ (vô nghiệm)} \\ \cos 2x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-2+\sqrt{2}}{2}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{3}$, $(k\in\mathbb{Z})$

② $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1$. **ĐS:** $\frac{k\pi}{5}$, $(k\in\mathbb{Z})$

③ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

④ $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+l\pi$, $(k,l\in\mathbb{Z})$

⑤ $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\sin^2 x + \sin^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{l\pi}{2}, \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{l\pi}{5}, (k, l \in \mathbb{Z})$

⑦ $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{8} + k\pi, \dfrac{5\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin^2 4x + \cos^2 6x = \sin 10x, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $x = \dfrac{3\pi}{4}; x = \dfrac{k\pi}{10}, k = \overline{1,4}$

② $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5x}{2}\right) - 2\cos^2 \dfrac{9x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) = \dfrac{7}{4}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\sin^2 4x - \cos^2 6x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 10x\right), \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{3}; x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}, k = \overline{0,4}$

⑦ $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{9} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\tan^2 x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $4\sin^2 \dfrac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

DẠNG 1.4. Xác định nhân tử chung để đưa về phương trình tích

Đa số đề thi, kiểm tra thường là những phương trình đưa về tích số. Do đó, trước khi giải ta phải quan sát xem chúng có những lượng nhân tử chung nào, sau đó định hướng để tách, ghép, nhóm phù hợp. Một số lượng

nhân tử thường gặp:
1. Các biểu thức có nhân tử chung với $\cos x \pm \sin x$ *thường gặp là:*

— $1 \pm \sin 2x = \sin^2 x \pm 2\sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin x \pm \cos x)^2$

— $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

— $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

— $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$

— $1 \pm \tan x = 1 \pm \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x \pm \sin x}{\cos x}$

— $1 \pm \cot x = 1 \pm \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x \pm \cos x}{\sin x}$

— $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$

— $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x - \cos x)$

2. Nhìn dưới góc độ hằng đẳng thức số 3, dạng $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$*, chẳng hạn:*

— $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \end{array}\right.$

— $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \sin x)(1 + \sin x)$

— $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)$

— $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x \mp \sin x)(1 \pm \sin x \cos x)$

— $3 - 4\cos^2 x = 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1 = (2\sin x - 1)(2\sin x + 1)$

— $\sin 2x = 1 + \sin 2x - 1 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x + 1)$

— $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = 3\cos^2 x - \sin^2 x = (\sqrt{3}\cos x - \sin x)(\sqrt{3}\cos x + \sin x)$

3. Phân tích tam thức bậc hai dạng: $f(X) = aX^2 + bX + c = a(X - X_1)(X - X_2)$ *với* X *có thể là* $\sin x, \cos x$ *và* X_1, X_2 *là hai nghiệm của* $f(X) = 0$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.
Ta có:$2\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}$
$\Leftrightarrow (2\cos x - \sin 2x) + \left(\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$
$\Leftrightarrow 2\cos x(1 - \sin x) + \sqrt{3}(\sin x - 1) = 0$
$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi;\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$. **ĐS:** $\pi + k2\pi,\ \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ (k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.
Ta có: $\cos 2x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$
$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$
$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (1 + \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$
$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pi+k2\pi$; $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $(\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)-\sin 2x=0$. **ĐS:** $x=k2\pi$; $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$; $x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

Ta có: $(\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)-\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(1-\sin 2x)-1=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)^2-1=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x-1)(\sin x-\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-2\sin x+\cos x+\sin x-\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x+1)(-\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x+1=0\\ \sin x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1=0\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=k2\pi$; $x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$; $x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình $\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4\cos^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$; $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$; $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

Ta có:$\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=1-4(1-\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=4\sin^2 x-3$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sin x\cos x+\sqrt{3}\right)=\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)(\sin x\cos x-2\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\sin x(\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$; $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$; $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ □

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

② $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin x+\cos x=\cos 2x$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;$x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$;$x=k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

④ $\cos 2x+(1+2\cos x)(\sin x-\cos x)=0$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;$x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$,$k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Ta có Ta có: $\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

② Ta có: $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

③ Ta có: $\sin x + \cos x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi; x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

④ Ta có

Ta có: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (1 + 2\cos x)(\cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 1 - 2\sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos x - \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$. **ĐS:** $x = \pi + k2\pi; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

④ $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{\sin x} = 1 + \cot x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

① Ta có: $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} + 1\right)\sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\sin^2 x + \cos x(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \dfrac{1}{2}\sin 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = 2 (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

② Ta có: $\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+\sin 2x=1+\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\cos x+\sin 2x=1+\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(1+\cos x)=1+\cos x$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\sin 2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\pi+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ Ta có: $\sin 2x+\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \sin 2x+\cos x-\sin x+\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x-(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

④ Ta có Điều kiện: $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}=1+\cot x$

$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x)\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos 2x)-(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $(2\cos x+1)(\cos 2x+2\sin x-2)=3-4\sin^2 x$.. **ĐS:** $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=3-4\cos^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi; x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $(\cos x+1)(\cos 2x+2\cos x)+2\sin^2 x=0$. **ĐS:** $x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$. **ĐS:** $k\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ -\dfrac{\pi}{6}+l2\pi,\ \dfrac{7\pi}{6}+l2\pi,\ (k,l\in\mathbb{Z})$

④ $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi,\ (k,l\in\mathbb{Z})$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=1$.

ĐS: $x=k\pi; x=\dfrac{\pi}{3}+n\pi$.

② $4\sin 2x \sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x$.

ĐS: $x = k_1\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

③ $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

④ $(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

⑤ $(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑥ $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 3) = 4\sin^2 x - 1$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑦ $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) + 4\cos^2 x = 3$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi,\ x = k_3\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

⑧ $(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑨ $\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x + 2)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = k'2\pi$, với $k, k' \in \mathbb{Z}$.

⑩ $2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi\end{array}\right., (k, n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$ với $k, n \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k\pi; x = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
4\sin 2x\sin x + 2\sin 2x - 2\sin x = 4 - 4\cos^2 x &\Leftrightarrow 2\sin 2x(2\sin x + 1) - 2\sin x(2\sin x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(4\sin x\cos x - 2\sin x) = 0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x - 1)\sin x = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi\\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với k_1, k_2, k_3, $k_4 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{7\pi}{6} + k_3 2\pi$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_4 2\pi$ với k_1, k_2, k_3, $k_4 \in \mathbb{Z}$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4 &\Leftrightarrow 6\sqrt{3}\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0\\
&\Leftrightarrow \cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \cot x = \sqrt{3}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{6} + k'\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
&(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2\sin^2 x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x) + 2(1 - \cos^2 x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2\cos x + 2 - 2\cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\cos x + 1)(\cos 2x + 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos x = -1\\
\Leftrightarrow\ &x = \pi + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = 4\cos^2 x - 1\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2) = (2\cos x - 1)(2\cos x + 1))\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x + 2\sin x - 2 - 2\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k_1 2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=4\sin^2 x-1\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3)=(2\sin x+1)(2\sin x-1)\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+3-2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(\cos 2x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{2}+k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+4\cos^2 x=3\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\sin 2x+1)+1-4\sin^2 x=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(4\sin x\cos x+1-1-2\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ 2\sin x\cos x-\sin x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=0\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=k_3\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có năm nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$, $x=k_3\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_4\pi$ với $k_1, k_2, k_3, k_4\in\mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
&(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=3-4\cos^2 x\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1)=4\sin^2 x-1\\
\Leftrightarrow\ &(2\sin x-1)(2\cos 2x+2\sin x+1-2\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\dfrac{\pi}{6}+k_1 2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k_2 2\pi$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+k_3\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3\in\mathbb{Z}$.

9. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin 2x = (\sin x + \cos x - 1)(2\sin x + \cos x + 2)\\
\Leftrightarrow\ &\sin 2x = \sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos x - 1\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x - 1 + \sin x\cos x + \cos x = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - 1)(\sin x + 1) + \cos x(\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x + 1)(\sin x + \cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi\\ x = k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k' 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

10. Ta có

$$\begin{aligned}
&2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &2\cos 2x + 1 = \sqrt{3}\cos x - \sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0\\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi\\ x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi\\ x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{3} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

② $\sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x$

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

③ $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

④ $\sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑤ $\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với $k,\ k' \in \mathbb{Z}$.

⑥ $\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k'2\pi$, với $k,\ k' \in \mathbb{Z}$.

⑦ $\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$.

ĐS: $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑧ $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$.

ĐS: $x = k_1\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑨ $\sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x$.

ĐS: $x = k_1\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑩ $\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + \cos x$.

ĐS: $x = \pi + k2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{4} + k'\pi$ với $k,\ k' \in \mathbb{Z}$.

⑪ $\sin 2x - \sin x + 2\cos 2x = 1 - 4\cos x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

⑫ $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

ĐS: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_1 2\pi,\ x = \pi + k_2 2\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑬ $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑭ $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi,\ x = k_2 2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑮ $\sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2,\ k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑯ $\cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑰ $\cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x$.

ĐS: $x = k_1\pi,\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑱ $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1$.

ĐS: $x = k2\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + k'\dfrac{2\pi}{3}$, với $k,\ k' \in \mathbb{Z}$.

⑲ $\cos x + \tan x = 1 + \tan x \sin x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\pi,\ x = k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$.

(20) $\tan x = \sin 2x - 2\cot 2x$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

(1) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x - 2 + 4\cos x - 2\sin x\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + \sqrt{3} = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x - 2\cos x + \sqrt{3} - \sqrt{3}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$ với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

(3) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin x - 2 - 2\sqrt{2}\cos x + 2\sin x\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}(\sin x - \sqrt{2}) + 2\cos x(\sin x - \sqrt{2}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - \sin x = 2 - 4\cos x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x - 1) + 2(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x - 1)(\sin x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(\cos x - 1) - 2(\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k'2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k'2\pi$, với k, $k' \in \mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 6\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x + \sin x - 3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x = 0, (\text{do } \cos x + \sin x - 3 \neq 0) \\
\Leftrightarrow\ & x = k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$
\begin{aligned}
& \sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 1 - \cos 2x - 2\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k_3 2\pi\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi \\ x = k_3 2\pi\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑨ Ta có

$$
\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\sin x + 1 = \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + 2\sin x + 2\sin^2 x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\cos x + \sin x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + k_2 2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + k_3 2\pi\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x = \pi + k_2 2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = k_1\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2 2\pi$ với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(10) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x = 1+\cos x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos^2 x-\cos x+(\sin 2x-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x(\sin 2x-1)+(\sin 2x-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x+1)(\sin 2x-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k'\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pi+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k'\pi$ với k, $k'\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\pi+k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k'\pi$ với k, $k'\in\mathbb{Z}$.

(11) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x-\sin x+2\cos 2x=1-4\cos x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x-\sin x+4\cos^2 x-3+4\cos x=0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x-1)+2\cos x(2\cos x-1)+3(2\cos x-1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x-1)(\sin x+2\cos x+3)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x+2\cos x+3=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Mà $\sin x+2\cos x\geq -3$, đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}\sin x=-1\\ \cos x=-1\end{cases}$ hệ này vô nghiệm. Suy ra phương trình $\sin x+2\cos x+3=0$ vô nghiệm.

Do đó $\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

(12) Ta có

$$\begin{aligned}
& (2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin x(2\cos x-1) \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos x-1)(2\sin x+\cos x-\sin x+1)=0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_1 2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k_2 2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}+k_3 2\pi\end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_1 2\pi\\ x=\pi+k_2 2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_1 2\pi$, $x=\pi+k_2 2\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k_1 2\pi$, $x=\pi+k_2 2\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3\in\mathbb{Z}$.

(13) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sin x \cos x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & 1 = 2\sin x \cos x(\sin 2x + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & 1 = \sin^2 2x + 2\sin 2x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = 2\sin 2x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(14) Ta có

$$\begin{aligned}
& (1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x + \sin x \cos x(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi \\ x = k_2 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(15) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\sin^2 x = \sin x + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(2\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{3\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(16) Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos 3x + \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos 2x \cos x = 2\sqrt{3}\cos 2x \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cot x = \sqrt{3} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

(17) Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos 3x - \cos x = 2\sin x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & -2\sin 2x \sin x = 2\sin x \cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(\sin 2x + \cos 2x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \tan 2x = -1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k_1\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = k_1\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{8} + k_2\dfrac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

(18) Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2 x-\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin x+\cos x=\sin 2x+\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=x-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{4}=-x+\frac{\pi}{4}+k'2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k'\frac{2\pi}{3}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+k'\frac{2\pi}{3}$, với $k,\ k'\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+k'\frac{2\pi}{3}$, với $k,\ k'\in\mathbb{Z}$.

(19) Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos x+\tan x=1+\tan x\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos^2 x+\sin x=\cos x+\sin^2 x\\
\Leftrightarrow\ &\sin x-\cos x=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k_2 2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k_2 2\pi\\ x=k_3 2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x=k_2 2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_3 2\pi$, với $k_1,\ k_2\in\mathbb{Z}$.

(20) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x = \sin 2x - 2\cot 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} = \sin 2x - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \cos 2x = \sin^2 2x - 2\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin^2 2x = -\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 2x + \cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = -1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k_2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

□

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

(1) $\cos x + 2\sin x(1 - \cos x)^2 = 2 + 2\sin x$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(2) $2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1 + \cos 2x)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{12} + k_1\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

(3) $1 - \sin x \cos x = 2\left(\sin x - \cos^2 \dfrac{x}{2}\right)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(4) $\sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(5) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với k_1, k_2, $k_3 \in \mathbb{Z}$.

(6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi.$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(7) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

ĐS: $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = k_2\dfrac{\pi}{2}$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(8) $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

(9) $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$.

ĐS: $x = \pi + k_1 2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(10) $\sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \dfrac{5}{4}\cos 2x$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(11) $\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}$, với k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$.

(12) $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(13) $3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x$.

ĐS: $x = \pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(14) $2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

(1) Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos x + 2\sin x(1-\cos x)^2 = 2 + 2\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - 2 + 2\sin x((1-\cos x)^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - 2 + 2\sin x\cos x(\cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - 2)(\sin 2x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin 2x = -1 \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(2) Ta có

$$\begin{aligned}
& 2(\cos x + \sin 2x) = 1 + 4\sin x(1 + \cos 2x) \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x + 2\sin 2x = 1 + 8\sin x\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x + 2\sin 2x = 1 + 4\sin 2x\cos x \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin 2x(1 - 2\cos x) - (1 - 2\cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\sin 2x - 1)(1 - 2\cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(3) Ta có

$$\begin{aligned}
& 1 - \sin x\cos x = 2\left(\sin x - \cos^2\frac{x}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin x\cos x = 2\sin x - 2\cos^2\frac{x}{2} \\
\Leftrightarrow\ & 1 - \sin x\cos x = 2\sin x - 1 - \cos x \\
\Leftrightarrow\ & 2 + \cos x - \sin x(\cos x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2 + \cos x)(1 - \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

④ Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + \cos x - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x\cos x + \cos x - \sin x + \cos x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos x - 1) + 2\cos x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k_1 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k_2 2\pi$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

⑤ Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) + (\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x + 1 - \sin x - \cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin x = 1 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_3 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k_3 2\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

⑥ Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{2}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x - \sin 2x - \cos 2x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x + \cos x - (\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(1 - \sin x - \cos x - \cos x + \sin x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(1 - 2\cos x) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 1 - 2\cos x = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k_1\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_2 2\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k_2 2\pi.$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

⑦ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=\sin x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)\sin 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi\\ x=k_2\frac{\pi}{2}.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2\frac{\pi}{2}$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=-\frac{\pi}{4}+k_1\pi$, $x=k_2\frac{\pi}{2}$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

⑧ Ta có

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x)\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x-2\sin^5 x+\cos^3 x-2\cos^5 x=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x(1-2\sin^2 x)+\cos^3 x(1-2\cos^2 x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sin^3 x\cos 2x-\cos^3 x\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=\cos x\\ \sin 2x=-2\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{\pi}{4}+k_1\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

⑨ Ta có

$$\begin{aligned}
&2\sin^3 x+\cos 2x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\sin^3 x+1-2\sin^2 x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ &2(1-\cos^2 x)(\sin x-1)+(1+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(2\sin x+2\cos x-2\sin x\cos x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(2(\sin x+\cos x)-(\sin x+\cos x)^2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(\sin x+\cos x)(2-\sin x-\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &(1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \tan x=-1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\pi+k_1 2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\pi+k_1 2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

ĐS: $x=\pi+k_1 2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k_2\pi$, với k_1, $k_2\in\mathbb{Z}$.

(10) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin^8 x + \cos^8 x = 2(\sin^{10} x + \cos^{10} x) + \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin^8 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^8 x(1 - 2\cos^2 x) = \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin^8 x\cos 2x - \cos^8 x\cos 2x = \frac{5}{4}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(4(\sin^8 x - \cos^8 x) - 5) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^8 x - \cos^8 x = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Xét phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \sin^8 x = \frac{5}{4} + \cos^8 x \geq \frac{5}{4} > 1$ vô lý, suy ra phương trình $\sin^8 x - \cos^8 x = \frac{5}{4}$ vô nghiệm.
Do đó $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

(11) Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = x + k_1 2\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = \pi - x + k_2 2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_2\dfrac{2\pi}{3}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\frac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{4} + k_1 2\pi$, $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\frac{2\pi}{3}$, với $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

(12) Điều kiện $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x = 8\cos 2x\sin x\cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = 2\sin 4x\cos x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin 4x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x = \dfrac{\pi}{24} + k_2\dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + k_3\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $x = \frac{\pi}{24} + k_2\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{24} + k_3\frac{\pi}{2}$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(13) Ta có

$$\begin{aligned}
& 3\sin 3x + 2 + \sin x(3 - 8\cos x) = 3\cos x \\
\Leftrightarrow\ & 9\sin x - 12\sin^3 x + 2 + 3\sin x - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x - 12\sin^3 x + 2 - 8\sin x\cos x - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 12\sin x\cos^2 x - 8\sin x\cos x + 2 - 3\cos x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos x(3\cos x - 2) - (3\cos x - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (3\cos x - 2)(2\sin 2x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{2}{3} \\ \sin 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là $x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \pm\arccos\left(\dfrac{2}{3}\right) + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{12} + k_2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{12} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

(14) Ta có

$$\begin{aligned}
& 2\sin x(2\cos 2x + 1 + \sin x) = \cos 2x + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x + 2\sin x + 2\sin^2 x - \cos 2x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\sin x\cos 2x - 2\cos 2x + 2\sin x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (2\cos 2x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k_1 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k_2 2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k_3\pi$, với $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$.

□

CHƯƠNG 3

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ BẬC HAI VÀ BẬC CAO CÙNG MỘT HÀM LƯỢNG GIÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác (cùng sin hoặc cùng cos hoặc cùng tan hoặc cùng cot) với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 X + b\sin X + c = 0$	$t = \sin X$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 X + b\cos X + c = 0$	$t = \cos X$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 X + b\tan X + c = 0$	$t = \tan X$	$X \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$a\cot^2 X + b\cot X + c = 0$	$t = \cot X$	$X \ne k\pi$

Nếu đặt $t = \sin^2 x, \cos^2 x$ hoặc $t = |\sin x|, |\cos x|$ thì điều kiện là $0 \le t \le 1$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình: $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình: $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 3\cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = \dfrac{1}{2} \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3\cos 2x + 7\sin x + 2 = 0 \quad & \Leftrightarrow 3(1 - 2\sin^2 x) + 7\sin x + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow 6\sin^2 x - 7\sin x - 5 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$6t^2 - 7t - 5 = 0 \Leftrightarrow (3t-5)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 4. Giải phương trình: $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 \quad & \Leftrightarrow 4\sin^4 x + 5(1 - \sin^2 x) - 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$ □

VÍ DỤ 5. Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \quad & \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow (1-2\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) + 12\sin^2 x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow 1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x + 12\sin^2 x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow 8\sin^4 x + 4\sin^2 x = 0.\end{aligned}$$

Đặt $t = \sin^2 x$ $(0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$8t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow 4t(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$. □

VÍ DỤ 6. Giải phương trình: $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x + \dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{5}{2} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ta có:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{2}{\cos x} - \frac{5}{2} = 0 \quad &\Leftrightarrow -\frac{\sin^2 x}{2\cos^2 x} + \frac{4\cos x}{2\cos^2 x} - \frac{5\cos^2 x}{2\cos^2 x} = 0.\\ &\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 + 4\cos x - 5\cos^2 x = 0\\ &\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

So sánh hai nghiệm với điều kiện thỏa mãn. Vậy $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$. □

2 BÀI TẬP VẬN DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

2. $4\sin^2 x + 12\sin x - 7 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

3. $2\sqrt{2}\sin^2 x - (2+\sqrt{2})\sin x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

4. $-2\sin^3 x + \sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $2\cos^2 x + (\sqrt{2} - 2)\cos x = \sqrt{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos x = \sqrt{6}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $2\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \arctan \dfrac{\sqrt{3} - 3}{2} + k\pi \\ x = \arctan \dfrac{\sqrt{3} + 3}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑪ $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑫ $3\cot^2 x + 2\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

⑬ $\sqrt{3}\cot^2 x - (1 + \sqrt{3})\cot x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑭ $\sqrt{3}\cot^2 x + (1 - \sqrt{3})\cot x - 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t + 1)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1}{2} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

② Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 12t - 7 = 0 \Leftrightarrow (2t+7)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-7}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

③ Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2\sqrt{2}t^2 - 2t - \sqrt{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

④ Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$-2t^3 + t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow (-t+1)(t+1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = -1 \\ t = \sin x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Đặt $t=\cos x(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2+\sqrt{2}t-2t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow (t-1)(2t+\sqrt{2})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t=\cos x=1\\ t=\cos x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi\\ x=\dfrac{-3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

⑧ Đặt $t=\cos x(-1\le t\le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2-2\sqrt{3}t+2\sqrt{2}t-\sqrt{6}=0\Leftrightarrow (2t+\sqrt{2})(2t-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1\le t\le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t=\cos x=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\ t=\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

⑨ Đặt $t=\tan x(x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2+2\sqrt{3}t+3=0\Leftrightarrow (t+\sqrt{3})^2=0\Leftrightarrow t=-\sqrt{3}$$

Với $x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, ta có $t=\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

⑩ Đặt $t=\tan x(x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2-2\sqrt{3}t-3=0\Leftrightarrow \left(t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}\\ t=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}. \end{array}\right.$$

Với $x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t=\tan x=\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}\\ t=\tan x\dfrac{\sqrt{3}+3}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arctan\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

⑪ Đặt $t=\tan x(x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2+t-\sqrt{3}t-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow (t+1)(t-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\\ t=\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Với $x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t=\tan x=-1\\ t=\tan x=\sqrt{3} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

⑫ Đặt $t=\cot x(x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2+2\sqrt{3}t+1=0\Leftrightarrow (\sqrt{3}t+1)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Với $x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$, ta có $t=\cot x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

(13) Đặt $t = \cot x (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 - t - \sqrt{3}t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(\sqrt{3}t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(14) Đặt $t = \cot x (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$\sqrt{3}t^2 + t - \sqrt{3}t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t\sqrt{3} + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}. \end{array}\right.$$

Với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta có $\left[\begin{array}{l} t = \cot x = 1 \\ t = \cot x = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

(1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(2) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(3) $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(4) $-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. **ĐS:** $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

(5) $-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(6) $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(7) $3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(8) $4\sin^4 x + 2\cos^2 x = 7$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(9) $4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

(10) $4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0$.

ĐS: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

(1) Ta có:

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow -6\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$-6t^2 + 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{4}{3} \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(2) Ta có:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(3) Ta có:

$$\begin{aligned} 3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1) &\Leftrightarrow 3 - 4(1 - \sin^2 x) - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x 1 \\ t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

(4) Ta có:

$$-\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x(-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Ta có:

$$-2\sin^2 x - 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 1 \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \frac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin 2x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Ta có:

$$3\sin^2 x + 2\cos^4 x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2 x (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos^2 x = 1 \\ t = \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Ta có:

$$4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 12t + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Ta có:

$$4\cos^4 x = 4\sin^2 x - 1 \Leftrightarrow 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2 x (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-3}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $t = \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3\pi}{4} + k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑩ Ta có:

$$4\sin^4 x + 5\cos^2 x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x (0 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{4} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $0 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \\ t = \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sin x = \dfrac{1}{2} \\ t = \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $1 + \cos 2x = 2\cos x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

③ $9\sin x + \cos 2x = 8.$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

④ $2 + \cos 2x + 5\sin x = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $3\sin x + 2\cos 2x = 2.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{3}{4} + k2\pi \\ x = -\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $5\cos x - 2\sin\dfrac{x}{2} + 7 = 0.$ **ĐS:** $x = \pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2.$ **ĐS:** $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $\cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0.$ **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có:

$$2\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

② Ta có:

$$1 + \cos 2x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0.$$

Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \cos x = 0 \\ t = \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

③ Ta có:

$$9\sin x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 9t + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

④ Ta có:

$$2 + \cos 2x + 5\sin x = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Ta có:

$$3\sin x + 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 3\sin x = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$-4t^2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $\left[\begin{array}{l} t = \sin x = 0 \\ t = \sin x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \arcsin \dfrac{3}{4} + k2\pi \\ x = -\arcsin \dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ Ta có:

$$2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^2 x + 8\sin x - 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$4t^2 - 8t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑦ Ta có:

$$2\cos^2 2x + 5\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sin 2x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{-1}{2}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin 2x = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{12} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

⑧ Đặt $y = \dfrac{x}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$5\cos 2y - 2\sin y + 7 = 0 \Leftrightarrow -10\sin^2 y - 2\sin y + 12 = 0.$$

Đặt $t = \sin y (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$10t^2 + 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{-6}{5}. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1, y = \dfrac{x}{2}$ nên $t = \sin\dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pi + 4k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

⑨ Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos 2x + \cos x = 2 &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x - 1 + \cos x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

⑩ Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos^2 x - \sin x + 2 = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3\sin^2 x + \sin x - 4 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin x (-1 \le t \le 1)$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-4}{3} \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le t \le 1$ nên $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

□

3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

2. $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. **ĐS:** $x = k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

3. $\cos 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{-4\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

4. $16\sin^2\frac{x}{2} - \cos 2x = 15$. **ĐS:** $x = \pi + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

5. $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} \frac{-5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

6. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2\frac{x}{2}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-4\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

7. $1 + \cos 4x - 2\sin^2 x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

8. $8\cos^2 x - \cos 4x = 1$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2\arctan\sqrt{2\sqrt{3} - 3} + k2\pi \\ x = \pm 2\arctan\sqrt{\frac{1}{3}(3 + 2\sqrt{3})} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

9. $6\sin^2 3x - \cos 12x = 4$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-7\pi}{12} + \frac{k\pi}{12} \\ x = \frac{-\pi}{12} + \frac{k\pi}{12} \end{array}\right.$

10. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

11. $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

12. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{-5\pi}{6} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

2. $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\,(k \in \mathbb{Z})$

3. $4\cos^2(6x - 2) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{-\pi}{18} + \frac{1}{3} + \frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-x\right)-9.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x+4=\cos x.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑦ $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5\pi}{6}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑧ $2\left(\cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)=1.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{-2\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑨ $4\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=7.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑩ $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}+2=2\left(\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\right).$ **ĐS:** $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\dfrac{3}{\cos^2 x}=3+2\tan^2 x.$ **ĐS:** $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

② $\dfrac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x=5.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{-2\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{-4\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}=3\cot x+\sqrt{3}.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

④ $9-13\cos x+\dfrac{4}{1+\tan^2 x}=0.$ **ĐS:** $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $2\tan^2 x+3=\dfrac{3}{\cos x}.$ **ĐS:** $x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $-\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\dfrac{2}{\cos x}-\dfrac{5}{2}=0.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑦ $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{-2\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

⑧ $2\sin^2 x+\tan^2 x=2.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-3\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $8\sin x\cos x-\cos 4x+3=0.$ **ĐS:** $x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

② $2\sin^2 8x+6\sin 4x\cos 4x=5.$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbb{Z})$

③ $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=1-\sin x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

④ $\dfrac{1-\cos x(2\cos x+1)-\sqrt{2}\sin x}{1-\cos x}=1.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{4}+k2\pi\\ x=\dfrac{-3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑤ $\dfrac{3\sin 2x-2\sin x}{\sin 2x\cos x}=2.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑥ $\dfrac{2\sin^2 x+3\sqrt{2}\sin x-\sin 2x+1}{(\sin x+\cos x)^2}=-1.$ **ĐS:** $x=\dfrac{-3\pi}{4}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

⑦ $2\cos 2x-8\cos x+7=\dfrac{1}{\cos x}.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$

⑧ $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x}+\dfrac{4+2\sin 2x}{\sin 2x}-2\sqrt{3}=2(\cot x+1).$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{3}+k\pi\\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑨ $3\cos 4x+2\cos^2 x+3=8\cos^6 x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑩ $3\cos x-2=-3(1-\cos x)\cot^2 x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-2\arctan\sqrt{5}+k2\pi\\ x=2\arctan\sqrt{5}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑪ $\sin 3x+\cos 2x=1+2\sin x\cos 2x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑫ $2\cos 5x\cos 3x+\sin x=\cos 8x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-5\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑬ $4(\sin^6 x+\cos^6 x)=4\sin 2x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=-2\arctan\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{15}\pm\sqrt{2(4+\sqrt{15})}\right)\right)+k2\pi\\ x=-2\arctan\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{15})}\right)+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

⑭ $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x.$ **ĐS:** $\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cos 2x - \tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x + \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

② $3\tan 2x - \dfrac{3}{\cos 2x} - \dfrac{2\tan x - 2}{1 + \tan x} + 4\cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \dfrac{-\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

③ $(2\tan^2 x - 1)\cos x = 2 - \cos 2x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

④ $2\cos^2 x + 3\cos x - 2\cos 3x = 4\sin x \sin 2x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $4\sin x + 3 = 2(1 - \sin x)\tan^2 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $2\sin^3 x - 3 = (3\sin^2 x + 2\sin x - 3)\tan x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $5\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 3(1 - \cos x)\cot^2 x = 2$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\dfrac{3\sin^2 x + 2\sin x - 3}{\cot x} + 3 = 2\sin^3 x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $5\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos x$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\dfrac{3}{4} + \pi + k2\pi \\ x = \arcsin\dfrac{3}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

⑩ $\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \tan x - 2\sqrt{3} = \sin x\left(1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2}\right)$. **ĐS:** $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2\pi}{3} + k\pi \\ x = \dfrac{-\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI SIN VÀ COS

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng tổng quát: $a\sin x + b\cos x = c$, $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$. (1)

Phương pháp giải:

— $a^2 + b^2 < c^2$, phương trình vô nghiệm.

— $a^2 + b^2 \geq c^2$, ta làm như sau:

Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. (2)

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\alpha \in [0;2\pi]$. Ta có

(2) $\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, đây là phương trình ở dạng cơ bản.

Lưu ý: Hai công thức hay sử dụng là

- $\sin a\cos b \pm \cos a\sin b = \sin(a\pm b)$;
- $\cos a\cos b \pm \sin a\sin b = \cos(a\mp b)$.

Các dạng có cách giải tương tự

- $a\sin mx + b\cos mx = c$;
- $a\sin mx + b\cos mx = c\sin nx + d\cos nx$, $a^2+b^2=c^2+d^2$.

B VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình

① $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}$; **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi, x = -\dfrac{5\pi}{12} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{3}\sin x - \sin\frac{\pi}{3}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x-\dfrac{\pi}{3} = \pi+\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{3}-x = \dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ \dfrac{\pi}{3}-x = \pi-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12}+k2\pi\\ x = -\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình

① $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$; **ĐS:** $x = \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}, x = k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \sqrt{2}$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+x+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\frac{1}{2}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình

① $\cos 4x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 4x)$; **ĐS:** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5},k\in\mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}(\cos 2x+\sin 3x)=\sin 2x+\cos 3x$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5},k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\cos 4x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 4x)\Leftrightarrow\cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=\sqrt{3}\cos x+\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{3}\cos 4x+\sin\frac{\pi}{3}\sin 4x=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x-\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x-\frac{\pi}{3}=-x+\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}(\cos 2x+\sin 3x)=\sin 2x+\cos 3x\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\cos 3x-\sqrt{3}\sin 3x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x=\cos\frac{\pi}{3}\cos 3x-\sin\frac{\pi}{3}\sin 3x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{6}=3x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{6}=-3x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 4. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sqrt{3}$; **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x\left(\sqrt{3}-\sin x\right)=\cos x(1+\cos x)$. **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,x=\pi+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
& \sin x\left(\sqrt{3} - \sin x\right) = \cos x(1 + \cos x) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin x - \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 5. Giải phương trình

① $\dfrac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}$; **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

② $\dfrac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3}$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $\cos x - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 2x + k2\pi \\ x \neq -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq k2\pi \\ x \neq \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \neq \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$ (1)

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

② Điều kiện xác định: $2\cos^2 x - \sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x \neq -\dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos x - \sin 2x}{2\cos^2 x - \sin x - 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 2x - \sin x} = \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x + \sin\frac{\pi}{6}\sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{3} = 2x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \dfrac{\pi}{3} = -2x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

VÍ DỤ 6. Giải phương trình

① $\cos 2x\left(1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2}\right) + \tan x = 2\sin x + 1$; **ĐS:** $x = k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{11\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

② $4\sin^2 x + \tan x + \sqrt{2}(1 + \tan x)\sin 3x = 1$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k2\pi}{5}, x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - 1 - 2\sin x + \cos 2x \tan x \tan\frac{x}{2} + \tan x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \tan\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \sin x\left(\frac{\cos 2x}{\cos x} \cdot \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos x} - 2\sin x - 2\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & (2) \\ \dfrac{\cos 2x}{\cos x} \cdot \tan\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\cos x} - 2\sin x - 2 = 0. & (3) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$(2) \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$ (4)

$(3) \Leftrightarrow \cos 2x \sin\dfrac{x}{2} - 2\sin x \cos x \cos\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} - 2\cos x \cos\dfrac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sin\dfrac{x}{2}\cos 2x - \cos\dfrac{x}{2}\sin 2x\right) + \cos\dfrac{x}{2} - \left(\cos\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{3x}{2} + \cos\dfrac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$ (5)

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x = k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{11\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

② Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\left(4\sin^2 x-2\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &2\left(\sin^2-\cos^2 x\right)+(\tan x+1)+\sqrt{2}(1+\tan x)\sin 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &2(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\sin 3x=0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x+\cos x)\left(2\sin x-2\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos x}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (2)\\ 2\sin x-2\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sin 3x}{\cos x}=0. & (3)\end{array}\right.
\end{aligned}$$

$(2)\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ (4)

$(3)\Leftrightarrow 2\sin x-2\cos x+\frac{1}{\cos x}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\cos x}=0\Leftrightarrow \sin 2x-2\cos^2 x+1+\sqrt{2}\sin 3x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\sin 3x\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\sin 3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}-2x=3x+k2\pi\\ \frac{\pi}{4}-2x=\pi-3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5}\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$ (5)

Từ (1), (4), (5) ta có nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{20}+\frac{k2\pi}{5}, x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải phương trình

① $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}, x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin 3x-\cos 3x=\sqrt{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin 3x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 3x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{11\pi}{36}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned}
& \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x=2\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos x-\sin x=2\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned}
& \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2\\
\Leftrightarrow\ & \sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2\\
\Leftrightarrow\ & \sin x+\sqrt{3}\cos x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\frac{\pi}{12}$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

③ $2\cos 3x+\sqrt{3}\sin x+\cos x=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

④ $\sqrt{2}\cos 2x+\sin x-\cos x=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $\sin x-\sqrt{3}\cos x+2=4\cos^2 x$ **ĐS:** $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑦ $2\cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=1$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑧ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x=\sin x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ & \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{12}\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ & \sin 3x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 3x\sin\frac{\pi}{3}=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{4\pi}{15}+\frac{k2\pi}{5}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\cos(\pi-3x)\\ \Leftrightarrow\ & \cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-3x)\\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-3x)\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\pi-3x+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{3}=-\pi+3x+k2\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos 2x\\ \Leftrightarrow\ & \cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos 2x\\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=2x+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-2x+k2\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\ \Leftrightarrow\ & \cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+x+k2\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned} & \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\cos 2x\\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\cos 2x\\ \Leftrightarrow\ & \cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\cos(\pi-2x)\\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\pi-2x)\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\pi+2x+k2\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⑦

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-2=1\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=1\\ \Leftrightarrow\ & \cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}=\cos 0\\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 0\\ \Leftrightarrow\ & 2x-\frac{\pi}{3}=k2\pi\\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

⑧

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\cos 5x-(\sin 5x+\sin x)=\sin x\\ \Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos 5x-\sin 5x=2\sin x\\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x-\frac{1}{2}\sin 5x=\sin x\\ \Leftrightarrow\ & \sin\frac{\pi}{3}\cos 5x-\cos\frac{\pi}{3}\sin 5x=\sin x\\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right)=\sin x\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-5x=x+k2\pi\\ \frac{\pi}{3}-5x=\pi-x+k2\pi \end{array}\right.\\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

BÀI 3. Giải phương trình

① $\sin 2x+\cos x=\cos 2x-\sin x$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 2x + 2\cos^2 x + \sin x - \cos x = 1$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

③ $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

④ $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

⑤ $\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 1$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

⑥ $\sqrt{3}(\cos 2x - \sin x) + \cos x(2\sin x + 1) = 0$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}
& \cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}
& \sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sin x \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1 + 2\sin x \neq 0 \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
& \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}\left(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (1) ta có nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

④ Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& 8\sin^2 x\cos x = \sqrt{3}\sin x + \cos x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sqrt{3}\sin x = 4\sin x\sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2(\cos x + \cos 3x) \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = 3x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -3x + k2\pi \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

⑤

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

⑥

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{3}\sin x-\cos x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-x+\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải phương trình

① $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1$ **ĐS:** $x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}, x=-\frac{13\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}$

④ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin(\pi-2x)=1$ **ĐS:** $x=k\pi, x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $\sin x(\sin x-1)=\cos x(1-\cos x)$ **ĐS:** $x=k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$ **ĐS:** $x=k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑦ $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x-2=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑧ $\cos x\sin 3x-\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\cos 3x\sin x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑨ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$ **ĐS:** $x=k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑩ $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x=1$ **ĐS:** $x=k\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑪ $\cos 7x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=1-\sin 7x\sin 5x$ **ĐS:** $x=k\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑫ $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)+1=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑬ $2\sin^2 x+\sin 2x-3\sin x+\cos x=2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑭ $\cos x-2\cos 2x=2\sin x\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 5. Giải phương trình

① $\cos x=\sqrt{2}\sin 2x-\sin x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $(\sin x+\cos x)^2-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}, x=-\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x-2\sin x=0$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi, x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $2\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin 3x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $4\sin^2 x+\sin x=2-\sqrt{3}\cos x$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

⑦ $\sqrt{3}\sin 2x+2\sin^2 x=4\sin 3x\cos x+2$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

⑧ $2(\cos 6x+\cos 4x)-\sqrt{3}(1+\cos 2x)=\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

⑨ $2\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\sin x+\sqrt{3}\cos 3x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

⑩ $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑪ $\sqrt{3}\sin 7x-2\sin 4x\sin 3x=\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$

⑫ $\sin^2 x+\frac{\sin 2x}{2}=\sqrt{2}\sin x\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $x=k\pi, x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

⑬ $2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x$ **ĐS:** $x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}, x=-\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$

⑭ $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{24}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 6. Giải phương trình

① $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

② $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}=\frac{1-\sin x}{\sqrt{3}\cos x}$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

④ $\frac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\sqrt{3}$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=4\cos 2x\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ **ĐS:** $x=\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 7. Giải phương trình

① $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x=2\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 2x-\cos x+\sin x=1$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=4\sin x-1$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

④ $\tan\frac{\pi}{7}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=2$ **ĐS:** $x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑤ $\sqrt{3}\sin 2x-1=\cos 2x-2\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi, x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑥ $\cos 2x+2\sin x=1+\sqrt{3}\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑦ $2\sin 6x-2\sin 4x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}+\sin 2x$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

⑧ $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẲNG CẤP (BẬC 2, BẬC 3, BẬC 4)

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Dạng tổng quát $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$. (1)

2) Dấu hiệu nhận dạng: phương trình đối với hàm sin hoặc cosin đồng bậc (hoặc lệch nhau hai bậc). Chú ý hàm tan và cotan được xem là bậc 0.

3) Phương pháp giải:

Bước 1. Kiểm tra $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$ có là nghiệm của phương trình không?

Bước 2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{array}\right.$, ta chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$.

$$(1) \Leftrightarrow a\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\cdot\frac{\sin x}{\cos x} + c = \frac{d}{\cos^2 x} \Leftrightarrow a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x).$$

Bước 3. Đặt $t = \tan x$ để đưa về phương trình bậc hai với ẩn t, từ đó suy ra x.

! Giải tương tự đối với phương trình đẳng cấp bậc ba và bậc bốn.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $2\cos^2 x + 2\sin 2x - 4\sin^2 x = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right) + k\pi$

Lời giải.

Ta có phương trình có dạng $2\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 4\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 5\sin^2 x - 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. (2)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (2) ta được $5 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (2) cho $\cos^2 x$ ta được: $5\tan^2 x - 4\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(-\dfrac{1}{5}\right) + k\pi$. □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải.

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình đã cho.

— Nếu $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ thì (1) $\Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lí).

— Nếu $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ thì (1) $\Leftrightarrow 7 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x + 3\left[1 - \tan x(1 + \tan^2 x)\right] = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. □

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin^2 x(\tan x + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Lời giải.
Điều kiện xác định $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x(\tan x + 1) = 3\tan x(1 - \tan x) + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

— Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. □

C BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

2. $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan(-2) + k\pi$

3. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$. **ĐS:** $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

4. $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

5. $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3}$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

6. $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

7. $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 9\cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(\frac{9}{4}\right) + k\pi$

8. $\cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x$. **ĐS:** $x = k\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Lời giải.

1. Ta có

$$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0. \qquad (*)$$

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $0 = 0$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

② Ta có $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = -2 \Leftrightarrow x = \arctan(-2) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan(-2) + k\pi$.

③ Ta có $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$.

TH1. Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

TH2. Với $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

④ Ta có $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x + 4 = 4\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 6\sqrt{3}\sin x \cos x + 4(1 - \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sqrt{3}\sin x) = 0$.

TH1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

TH2. Với $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑤ Ta có $\sqrt{3}\sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \cos^2 x + 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin^2 x + (1 - \sqrt{3})\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑥ Ta có $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $3\tan^2 x + (3 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑦ Ta có $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 9\cos^2 x = 0$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 x$ ta được: $4\tan^2 x - 5\tan x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$

— Với $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan\left(\dfrac{9}{4}\right) + k\pi$.

8. Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2(3\pi - 2x) - \sqrt{3}\cos\left(4x - \frac{9\pi}{2}\right) = 1 + \sin^2 2x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x = 1 + \sin^2 2x \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 2x + 2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sin 2x(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x) = 0. \end{aligned}$$

TH1. Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}$.

TH2. Với $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\sin x = 2\cos^3 x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = k\pi$

2. $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin x - \cos x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

3. $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

4. $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

5. $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$. **ĐS:** $x \in \emptyset$

6. $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x\sin^2 x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

7. $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x\sin^2 x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

8. $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x\cos x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

9. $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

10. $\sin^2 x + \dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x} = 2\cos 2x$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

11. $\cos^2 x\tan^2 4x + 1 + \sin 2x = 0$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

12. $\tan x\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x)$. **ĐS:** $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

13. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$

14. $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + 5\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 6$. **ĐS:** $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

15. $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2 + 3\sqrt{2})\cos x$. **ĐS:** $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

Lời giải.

1. Ta có $\sin x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \sin x - 2\cos^3 x = 0$. (*)

TH1. Với $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x=0$ (vô lí vì $\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

TH2. Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan x(1+\tan^2 x)-2\tan^3 x=0\Leftrightarrow \tan x(1-\tan^2 x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=\pm1\\ \tan x=0.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.
— Với $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.
— Với $\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=k\pi$.

② Ta có $\cos^3 x+\sin^3 x=\sin x-\cos x$. (*)

TH1. Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1=1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1=-1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$1+\tan^3 x=\tan x(1+\tan^2 x)-(1+\tan^2 x)\Leftrightarrow \tan^2 x-\tan x+2=0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

③ Ta có $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$. (*)

TH1. Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3=0$ (vô lí).

TH2. Với $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3=0$ (vô lí).

TH3. Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan x(1+\tan^2 x)-4\tan^3 x+1+\tan^2 x=0\Leftrightarrow -3\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

④ Ta có $4(\sin^3 x+\cos^3 x)=\cos x+3\sin x$. (*)

TH1. Với $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $4=3$ (vô lí).

TH2. Với $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-4=-3$ (vô lí).

TH3. Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4(1+\tan^3 x)=\tan^2 x+1+3\tan x(\tan^2 x+1)\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.
— Với $\tan x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

⑤ Ta có $6\sin x+2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x\Leftrightarrow 3\sin x+\cos^3 x=5\sin x\cos^2 x$. (*)

TH1. Với $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x=0$ (vô lí vì $\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

TH2. Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$3\tan x(1+\tan^2 x)+1=5\tan x\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x+1=0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

⑥ Ta có $\cos^3 x - 4\sin^3 x + \sin x = 3\cos x \sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-3 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $3 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$1 - 4\tan^3 x + \tan x(\tan^2 x + 1) = 3\tan^2 x \Leftrightarrow 3\tan^3 x + 3\tan^2 x - \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$.

⑦ Ta có $3\cos^4 x + \sin^4 x = 4\cos^2 x \sin^2 x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin x = 0$ (vô lí vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

TH2. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^4 x$ ta được:

$$3 + \tan^4 x = 4\tan^2 x \Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑧ Ta có $4\sin^3 x + 3(\cos^3 x - \sin x) = \sin^2 x \cos x \Leftrightarrow 4\sin^3 x - 3\sin x + 3\cos^3 x = \sin^2 x \cos x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 0$ (vô lí).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = 0$ (vô lí).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$4\tan^3 x - 3\tan x(\tan^2 x + 1) + 3 = \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

— Với $\tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

⑨ Ta có $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3\cos x = \sin x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - 3\cos x = \sin x$. (*)

TH1. Với $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $1 = 1$ (thỏa mãn).

TH2. Với $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $-1 = -1$ (thỏa mãn).

TH3. Với $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$(\tan x + 1)^3 - 3(\tan^2 x + 1) = \tan x(\tan^2 x + 1) \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

(10) Điều kiện xác định $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}$.
Ta có $\sin^2 x+\dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x\Leftrightarrow \sin^2 x+\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}=2(\cos^2 x-\sin^2 x)$. (*)
Chia hai vế của (*) cho $\sin^2 x$ ta được:

$$1+\cot^3 x=2(\cot^2 x-1)\Leftrightarrow \cot^3 x-2\cot^2 x+3=0\Leftrightarrow \cot x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

(11) Điều kiện xác định $\cos 4x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}$.
Ta có

$$\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0\Leftrightarrow \tan^2 4x+(1+\tan x)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\tan 4x=0\\ \tan x=-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=k\dfrac{\pi}{4}\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

(12) Điều kiện xác định $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned}\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x\cos x) &\Leftrightarrow \tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos^2 x-\sin^2 x+\sin x\cos x)\\ &\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=3(1-\tan^2 x+\tan x)\\ &\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

— Với $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.
— Với $\tan x=\pm\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

(13) Ta có $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$. (*)

TH1. Với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 x=0$ (vô lí).

TH2. Với $x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, chia hai vế của (*) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan^3 x-\sqrt{3}=\tan x-\sqrt{3}\tan^2 x\Leftrightarrow \tan^3 x+\sqrt{3}\tan^2 x-\tan x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=\pm 1\\ \tan x=-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.
— Với $\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

(14) Ta có

$$\begin{aligned}&4(\sin^4 x+\cos^4 x)+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=6\\ \Leftrightarrow\ &4\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=6.\\ \Leftrightarrow\ &4\left(1-\frac{\sin^2 2x}{2}\right)+5\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x=6.\\ \Leftrightarrow\ &2\sin^2 2x-5\sin 2x\cos 2x-\cos^2 2x+2=0.\end{aligned}\qquad (*)$$

TH1. Với $\cos 2x=0$, thay vào phương trình (*) ta được $\sin^2 2x=-1$ (vô lí).

TH2. Với $\cos 2x \neq 0$, chia hai vế của (*) cho $\cos^2 2x$ ta được:

$$2\tan^2 2x - 5\tan 2x - 1 + 2(1+\tan^2 2x) = 0 \Leftrightarrow 4\tan^2 2x - 5\tan 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan 2x = 1\\ \tan 2x = \dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$$

— Với $\tan 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$.

— Với $\tan 2x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = \arctan\dfrac{1}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

15 Điều kiện xác định $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.
Ta có

$$\begin{aligned} 3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = (2+3\sqrt{2})\cos x \quad &\Leftrightarrow \quad 3\cos x\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \sqrt{2}\right) + 2(\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x)\left(2 - \frac{3\cos x}{\sin^2 x}\right) = 0. \end{aligned}$$

TH1. Với $\sqrt{2}\sin^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -\sqrt{2} \text{ (loại)}\end{array}\right. \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$

TH2. Với $2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ \cos x = -2 \text{ (loại)}\end{array}\right. \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

□

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1. $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0.$ (1)
Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = \ldots$ và viết $\sin x\cos x$ theo t.

! Khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện của t là $0 \leq |t| \leq \sqrt{2}$.

Dạng 2. $a(\tan^2 x + \cot^2 x) + b(\tan x \pm \cot x) + c = 0.$ (2)
Đặt $t = \tan x \pm \cot x$ (điều kiện $|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \ldots$ và biểu diễn $\tan^2 x + \cot^2 x$ theo t.

! Ta thường sử dụng kết quả $\tan x\cot x = 1$ và $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{2}{\sin 2x}$.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin 2x + (2-\sqrt{2})(\sin x + \cos x) + 1 - 2\sqrt{2} = 0.$ (1)

Lời giải.
Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($|t| \leq \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t^2 - 1 + (2-\sqrt{2})t + 1 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + (2-\sqrt{2})t - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ t = -2 \text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi.$ □

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $2(\tan^2 x+\cot^2 x)-(4-\sqrt{2})(\tan x+\cot x)+4+2\sqrt{2}=0.$ (1)

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $t=\tan x+\cot x$ ($|t|\geq 2$), suy ra $t^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$. Thay vào (1) ta được

$$2(t^2-2)-(4-\sqrt{2})t+4+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2t^2-(4-\sqrt{2})t+2\sqrt{2}=0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

□

C BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau:

1. $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5.$ **ĐS:** $-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$
2. $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x=2.$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$
3. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$
4. $(1+\sqrt{2})(\sin x-\cos x)+2\sin x\cos x=1+\sqrt{2}.$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi, \dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$
5. $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)=3-\sin 2x.$ **ĐS:** $\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$
6. $(1-\sqrt{2})(1+\sin x-\cos x)=\sin 2x.$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi, \dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$
7. $2\sqrt{2}(\sin x-\cos x)-2\sin 2x=1.$ **ĐS:** $\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi, \dfrac{13\pi}{12}+k2\pi$
8. $\sin x-\cos x=2\sqrt{6}\sin x\cos x.$ **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi, \dfrac{9\pi}{12}+k2\pi, \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi, -\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi$

Lời giải.

1. $\sin 2x-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=5.$ (1)

   Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\leq\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

   $$t^2-1-2\sqrt{2}t-5=0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}\\ t=3\sqrt{2} \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

   Với $t=-\sqrt{2}$, suy ra $\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-1\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi.$

2. $2(\sin x+\cos x)+6\sin x\cos x=2.$ (1)

   Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\leq\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

   $$2t+3\left(t^2-1\right)=2\Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (thỏa mãn)}\\ t=-\dfrac{5}{3} \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

   Với $t=1$, suy ra $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.$

3. $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$ (1)

   Đặt $t=\sin x+\cos x$ ($|t|\leq\sqrt{2}$), suy ra $t^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$. Thay vào phương trình (1) ta được

   $$t+\dfrac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (thỏa mãn)}\\ t=-3 \text{ (loại)}.\end{array}\right.$$

   Với $t=1$, suy ra $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi.$

④ $(1+\sqrt{2})(\sin x - \cos x) + 2\sin x \cos x = 1+\sqrt{2}$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1+\sqrt{2})t + 1 - t^2 = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 - (1+\sqrt{2})t + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t = 1$, suy ra $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$.

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

⑤ $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 3 - \sin 2x$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t = 3 - (1 - t^2) \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

⑥ $(1-\sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$(1-\sqrt{2})(1+t) = 1 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + (1-\sqrt{2})t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}\end{array}\right.$$

Với $t = -1$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = -1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{-\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi. \end{aligned}$$

Với $t = \sqrt{2}$, suy ra $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

⑦ $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2\sin 2x = 1$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$2\sqrt{2}t - 2(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 2t^2 + 2\sqrt{2}t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi. \end{aligned}$$

8 $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x \cos x$. (1)

Đặt $t = \sin x - \cos x$ ($|t| \le \sqrt{2}$), suy ra $t^2 = 1 - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$t = \sqrt{6}(1-t^2) \Leftrightarrow \sqrt{6}t^2 + t - \sqrt{6} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn)}. \end{array}\right.$$

Với $t = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + k2\pi. \end{aligned}$$

Với $t = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sin x - \cos x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{-\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{19\pi}{12} + k2\pi \end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

1 $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

2 $\dfrac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

3 $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{4\pi}{9} + k\dfrac{\pi}{3}$

4 $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0$. **ĐS:** $k2\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

5 $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

6 $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$

7 $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

8 $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

Lời giải.

1 $3\tan^2 x + 4\tan x + 4\cot x + 3\cot^2 x + 2 = 0$. (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne k\dfrac{\pi}{2}$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \ge 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$. Thay vào (1) ta được

$$3(t^2 - 2) + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = \dfrac{2}{3} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

② $\dfrac{2}{\sin^2 x} + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0.$ (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}.$

$(1) \Leftrightarrow 2(1+\cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(\cot^2 x + \tan^2 x) + 5(\tan x + \cot x) + 6 = 0.$ (2)

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ($|t| \geq 2$), suy ra $t^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2 \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = t^2 - 2$. Thay vào (2) ta được

$$2(t^2-2) + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -\dfrac{1}{2} \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Với $t = -2$, suy ra $\tan x + \cot x = -2 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = -2 \Rightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

③ $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x).$ (1)

Điều kiện xác định $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}.$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\sin x} = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\
\Rightarrow\ & (\sin x + \sqrt{3}\cos x)(\sin x - \sqrt{3}\cos x) = 2\sin 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

④ $2\sin^3 x - \cos 2x + \cos x = 0.$ (1)

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x \sin x - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2\sin x(1-\cos x)(1+\cos x) + (1-\cos x)(2\cos x + 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\cos x)[2\sin x(1+\cos x) + 2\cos x + 1] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\cos x)\left[(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 1 - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & x = k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

⑤ $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos^2 x(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin^2 x)(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x)(2\cos x + 1) + \sin x(1 - \sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin x)[(1 + \sin x)(2\cos x + 1) + \sin x] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin x)[2\cos x + 1 + 2\sin x \cdot \cos x + \sin x + \sin x] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin x)\left[2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1 - \sin x)[(\sin x + \cos x)(2 + \sin x + \cos x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

⑥ $2\sin^3 x - \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - \cos 2x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) - (\sin x - \cos x) + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[2 + 2\sin x\cos x - 1 - (\cos x + \sin x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[1 + 2\sin x\cos x - (\cos x + \sin x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left[(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x + \sin x)\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\cos 2x(\cos x + \sin x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x + \sin x = 1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi.
\end{aligned}$$

⑦ $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \sin 2x.$ (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x - \cos x)^2 \\
&\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[(1 + \sin x\cos x) - (\sin x - \cos x)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 0 \\ 1 + \sin x\cos x - (\sin x - \cos x) = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi.
\end{aligned}$$

⑧ $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$. (1)
Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = (2 - \cos x)(\sin x - \cos x)\\
&\Leftrightarrow \cos^2 x + 2 = 2\sin x - 2\cos x - \cos x \sin x + \cos^2 x\\
&\Leftrightarrow 2(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x + 2 = 0\\
&\Leftrightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \left(\text{với } t = \sin x - \cos x, \frac{1 - t^2}{2} = \sin x \cos x, -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 (\text{thỏa mãn})\\ t = 5 (\text{loại}).\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $t = -1$ suy ra $\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi\\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \quad (k \in Z).$

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi$

② $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{11\pi}{12} + k2\pi, -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$

③ $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi$

④ $2\sin 2x + 8 = 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x|$. **ĐS:** $\frac{5\pi}{12} + k2\pi, \frac{\pi}{12} + k2\pi, \frac{13\pi}{12} + k2\pi, \frac{-7\pi}{12} + k2\pi$

⑤ $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$. **ĐS:** $k\frac{\pi}{2}$

⑥ $\sin x \cos x + |\sin x + \cos x| = 1$. **ĐS:** $k\frac{\pi}{2}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $(3 - \cos 4x)(\sin x - \cos x) = 2$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi$

② $\tan^2 x \cdot \left(1 - \sin^3 x\right) + \cos^3 x = 1$. **ĐS:** $k2\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi, \pm\arctan\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k2\pi$

BÀI 5. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dạng 1. $\boxed{m \cdot \sin 2x + n \cdot \cos 2x + p \cdot \sin x + q \cdot \cos x + r = 0.}$

- Ta luôn viết $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, còn $\cos 2x = \left[\begin{array}{ll} = \cos^2 x - \sin^2 x & (1)\\ = 2\cos^2 x - 1 & (2)\\ = 1 - 2\sin^2 x & (3)\end{array}\right.$
- Nếu thiếu $\sin 2x$ ta sẽ biến đổi $\cos 2x$ theo (1) và lúc này thường được đưa về dạng $A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$.
- Nếu theo (2) được: $\sin x \cdot (2m \cdot \cos x + p) + \underbrace{\left(2n \cdot \cos^2 x + q \cdot \cos x + r - n\right)}_{(i)} = 0$ và theo (3) được $\cos x(2m \cdot \sin x + q) + \underbrace{\left(-2n \cdot \sin^2 x + p \cdot \sin x + r + n\right)}_{(ii)} = 0$.

Ta sẽ phân tích $(i),(ii)$ thành nhân tử dựa vào: $at^2+bt+c=a(t-t_1)(t-t_2)$. Với t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình $at^2+bt+c=0$ để xác định lượng nhân tử chung.

Dạng 2. Phương trình có chứa $R(\ldots,\tan X,\cot X,\sin 2X,\cos 2X,\tan 2X,\ldots)$, sao cho cung của sin, cos gấp đôi cung của tan hoặc cot. Lúc đó đặt $t=\tan X$ và sẽ biến đổi:

- $\sin 2X=2\sin X\cos X=2\cdot\dfrac{\sin X}{\cos X}\cdot\cos^2 X=\dfrac{2\tan X}{1+\tan^2 X}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.
- $\cos 2X=2\cos^2 X-1=2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2 X}-1=\dfrac{1-\tan^2 X}{1+\tan^2 X}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\tan 2X=\dfrac{\sin 2X}{\cos 2X}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ và $\cot 2X=\dfrac{1-t^2}{2t}$.

Từ đó thu được phương trình bậc 2 hoặc bậc cao theo t, giải ra sẽ tìm được $t\Rightarrow x$.

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\cos 2x-\cos x-3\sin x-2=0$. (1)

Lời giải.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\cos x-3\sin x-2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\left(\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow \left(\cos x-\frac{1}{2}-\sin x-\frac{3}{2}\right)\left(\cos x-\frac{1}{2}+\sin x+\frac{3}{2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow (\cos x-\sin x-2)(\cos x+\sin x+1)=0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=2\\ \cos x+\sin x=-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,(\text{vô nghiệm})\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$. (1)

Lời giải.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)-7\sin x-2\cos x+4=0\\
&\Leftrightarrow \cos x(4\sin x-2)+\left(2\sin^2 x-7\sin x+3\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0\\
&\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x+\sin x-3)=0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ 2\cos x+\sin x-3=0 \ (\text{vô nghiệm})\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

□

VÍ DỤ 3. Giải phương trình $\sin 2x+2\tan x=3$. (1)

Lời giải.

Đặt $t=\tan x$. Ta có $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2t}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{2t}{1+t^2}+2t=3\\ &\Leftrightarrow 2t+2t\left(1+t^2\right)-3\left(1+t^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow 2t^3-3t^2+4t-3=0\\ &\Leftrightarrow (t-1)(2t^2-t+3)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t-1=0\\ 2t^2-t+3=0\,(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow t=1\\ &\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

□

C BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải phương trình lượng giác $\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$. **ĐS:** $\frac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi$

Lời giải.

$\cos 2x+3\cos x+2=\sin x$. (1)

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+3\cos x+2-\sin x=0\\ &\Leftrightarrow \left(\cos^2 x+2\cdot\cos x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\left(\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(\cos x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left(\cos x+\frac{3}{2}+\sin x+\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{3}{2}-\sin x-\frac{1}{2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow (\cos x+\sin x+2)(\cos x-\sin x+1)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=-2 \ (\text{loại})\\ \cos x-\sin x=-1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi.\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $1+3\tan x=2\sin 2x$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

② $\cos 2x+\tan x=1$. **ĐS:** $k\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi$

③ $\sin 2x+2\tan x=3$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

④ $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$. **ĐS:** $k\pi, -\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

⑤ $1+\cot\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1+\tan x}{1+\sin 2x}$. **ĐS:** $k\pi$

⑥ $\cot x=\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x}, \forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{4}$

Lời giải.

① $1+3\tan x=2\sin 2x$. (1)

Điều kiện $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 1+3\tan x=2\cdot\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\\ &\Leftrightarrow (1+3\tan x)(1+\tan^2 x)=4\tan x\\ &\Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x-2\tan x+1)=0\\ &\Leftrightarrow \tan x+1=0\\ &\Leftrightarrow \tan x=-1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{4}+k\pi.\end{aligned}$$

② $\cos 2x+\tan x=1$. (1)

Điều kiện $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\frac{\sin x}{\cos x}=1\\ &\Rightarrow 2\sin^2 x\cdot\cos x-\sin x=0\\ &\Leftrightarrow \sin x[2\sin x\cos x-1]=0\\ &\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x-1)=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin 2x=1\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi.\end{array}\right.\end{aligned}$$

③ $\sin 2x + 2\tan x = 3.$ (1)

Điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & 1 - \sin 2x = 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x)^2 - \frac{2}{\cos x}(\sin x - \cos x) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x - \frac{2}{\cos x}) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x - \cos x = 0\\ \sin x - \cos x - \dfrac{2}{\cos x} = 0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \text{vô nghiệm vì từ phương trình suy ra } \sin x = \cos x + \dfrac{2}{\cos x} \geq 2\sqrt{2} \text{ (vô lí)}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{4} + k\pi.
\end{aligned}$$

④ $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x.$ (1)

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow\ & \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}\\
\Leftrightarrow\ & (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \cos 2x = 1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi\\ x = k\pi.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

⑤ $1+\cot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}$. (1)

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0\\ \sin 2x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi.\end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1)\quad &\Leftrightarrow\quad 1-\tan x=\frac{1+\tan x}{1+\sin 2x}\\
&\Leftrightarrow\quad (1+\sin 2x)(1-\tan x)=(1+\tan x)\\
&\Leftrightarrow\quad 1+\sin 2x-\tan x-\sin 2x\tan x=1+\tan x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos x-2\frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x\frac{\sin x}{\cos x}=0\\
&\Leftrightarrow\quad 2\sin x\cos^2 x-2\sin x-2\sin^2 x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(2\cos^2 x-2-2\sin x\cos x\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x\left(2\cos^2 x-1-2\sin x\cos x-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sin x(\cos 2x-\sin 2x-1)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos 2x-\sin 2x=1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\quad\text{(loại)}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\quad x=k\pi.
\end{aligned}$$

⑥ $\cot x=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x},\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$. (1)

Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(1)\quad &\Leftrightarrow\quad \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin 2x-\cos 2x}{2+\sin 2x}\\
&\Leftrightarrow\quad \cos x(2+\sin 2x)=(\sin 2x-\cos 2x)\sin x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\cos x+2\sin x\cos^2 x=2\sin^2 x\cos x-(2\cos^2 x-1)\sin x\\
&\Leftrightarrow\quad 2\cos x+2\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x+2\cos^2 x\sin x-\sin x=0\\
&\Leftrightarrow\quad 2\cos x-\sin x+4\sin x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos x=0\\
&\Leftrightarrow\quad 2\cos x-\sin x+2\sin x\cos x(2\cos x-\sin x)=0\\
&\Leftrightarrow\quad (2\cos x-\sin x)(1+2\sin x\cos x)=0\\
&\Leftrightarrow\quad (2\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^2=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}2\cos x-\sin x=0\\ \sin x+\cos x=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=\arctan 2+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\\
&\Rightarrow\quad x=-\frac{\pi}{4}\left(\text{vì } x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)\right).
\end{aligned}$$

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\frac{5+\cos 2x}{3+2\tan x}=2\cos x$. **ĐS:** $k2\pi$

② $3\sin x-\cos x+2-\cos 2x=\sin 2x$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi, -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

③ $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

④ $\sin 2x-\cos 2x+\sin x-\cos x=1$. **ĐS:** $\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi$

⑤ $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sin x+\cos x+2$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \pi+k2\pi$

⑥ $\cos x+\sin x-\sin 2x-\cos 2x=1$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

⑦ $\sin 2x-\cos x+2\sin x=\cos 2x+3\sin^2 x$. **ĐS:** $\pi+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)+k\pi$

⑧ $\sin 2x-2\cos^2 x=3\sin x-\cos x$. **ĐS:** $-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, -\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

⑨ $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x+4=2\sqrt{2}\cos x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, \arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)+k\pi$

⑩ $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x=1$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

⑪ $\sin 2x+\cos 2x-3\cos x+2=\sin x$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

⑫ $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

⑬ $2\sin 2x-\cos 2x=7\sin x+2\cos x-4$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

⑭ $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{3}+k\pi$

⑮ $\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2$. **ĐS:** $\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k2\pi$

⑯ $\dfrac{2-\tan x}{\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1-\tan x}{\sqrt{2}\sin x}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{12}+k\pi, \dfrac{5\pi}{12}+k\pi, -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$

⑰ $\sqrt{3}(\sin 2x-3\sin x)=2\cos^2 x+3\cos x-5$. **ĐS:** $\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, \dfrac{\pi}{3}+k2\pi$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau:

① $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{3}+k\pi, \dfrac{2\pi}{3}+k\pi$

② $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$. **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

BÀI 6. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

TH1. Tổng các số không âm: $A^2+B^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

TH2. Đối lập: $A=B$ mà chứng minh được $\begin{cases} A\le M \\ B\ge M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=M \\ B=M. \end{cases}$

Hoặc: $A+B=M+N$ mà chứng minh được $\begin{cases} A\le M \\ B\le N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=M \\ B=N. \end{cases}$

TH3. Một số trường hợp đặc biệt

— $\sin u \pm \sin v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = \pm 1 \end{cases}$

— $\sin u + \sin v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases}$

— $\cos u \pm \cos v = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = \pm 1 \end{cases}$

— $\cos u + \cos v = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$

— $\sin u \cdot \sin v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

— $\sin u . \sin v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin u = -1 \\ \sin v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin u = 1 \\ \sin v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

— $\cos u . \cos v = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

— $\cos u . \cos v = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

B VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi.$

② $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0.$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi.$

Lời giải.

① $4\cos^2 x + 3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 2\sqrt{3}\tan x + 4 = 0 \quad (1).$
Điều kiện $\cos x \ne 0.$
Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (2\cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\tan x = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x = -\frac{\pi}{6} + l2\pi.$

② $4\cos^2 x - 4\cos x + 3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 2 = 0 \quad (2)$
Điều kiện $\cos x \ne 0.$
Khi đó

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (2\cos x - 1)^2 + (\sqrt{3}\tan x - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \sqrt{3}\tan x = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + l\pi.$

□

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos x\cos 2x=1$. **ĐS:** $x=l\pi$

② $\sin x\sin 3x=-1$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

Lời giải.

① $\cos x\cos 2x=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 2x=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=k2\pi\\ x=l\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=\pi+2m\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=l\pi.$

② $\sin x\sin 3x=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=1\\ \sin 3x=-1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 3x=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{6}+\dfrac{2l\pi}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{-\pi}{2}+2m\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n2\pi}{3}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{2}+2m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

□

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình lượng giác sau: $\tan^2 x+\cot^2 x=2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\sin 2x\neq 0$.

Ta có $\begin{cases}\tan^2 x+\cot^2 x\geq 2\\ 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\tan^2 x+\cot^2 x=2\\ 2\sin^5\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2.\end{cases}$ (1)

Theo bất đẳng thức Cauchy dấu "=" xảy ra khi: $\tan x=\cot x$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}\tan x=\cot x\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi.$ □

VÍ DỤ 4. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm

① $\cos(2x-15^\circ)=2m^2+m$. **ĐS:** $-1\leq m\leq\dfrac{1}{2}$

② $m\cos x+1=3\cos x-2m$. **ĐS:** $m\in\left[-4;\dfrac{2}{3}\right]$

③ $(4m-1)\sin x+2=m\sin x-3$. **ĐS:** $m\in\left(-\infty;\dfrac{-4}{3}\right]\cup[2;+\infty)$

Lời giải.

① Để phương trình $\cos(2x-15^\circ)=2m^2+m$ có nghiệm thì

$$\begin{cases}2m^2+m\geq -1\\ 2m^2+m\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow -1\leq m\leq\dfrac{1}{2}.$$

② $m\cos x+1=3\cos x-2m$ (2)

Với $m=3$ thì 1 trở thành $1=-6$ (vô lý). Suy ra $m=3$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Với $m\neq 3$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{-2m-1}{m-3}$ (2).

Để (2) có nghiệm thì $\begin{cases}\dfrac{-2m-1}{m-3}\leq 1\\ \dfrac{-2m-1}{m-3}\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-3m+2}{m-3}\leq 0\\ \dfrac{-m-4}{m-3}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]\cup(3;+\infty)\\ m\in[-4;3)\end{cases} \Leftrightarrow m\in\left[-4;\dfrac{2}{3}\right].$

③ $(4m-1)\sin x+2=m\sin x-3$ (3)

— Với $m=\frac{1}{3}$ thì (3) trở thành $2=-3$. (vô lý)
Suy ra $m=\frac{1}{3}$ không thỏa yêu cầu đề bài.

— Với $m\neq\frac{1}{3}$ thì (3) $\Leftrightarrow \sin x=\frac{-5}{3m-1}$. (4)
Để (4) có nghiệm thì

$$\begin{cases}\frac{-5}{3m-1}\leq 1\\ \frac{-5}{3m-1}\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{-3m-4}{3m-1}\leq 0\\ \frac{3m-6}{3m-1}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;\frac{-4}{3}\right]\cup\left(\frac{1}{3};\infty\right)\\ m\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup[2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{-4}{3}\right]\cup[2;+\infty).$$

□

VÍ DỤ 5. Cho phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$

① Giải phương trình khi $m=\frac{3}{2}$. **ĐS:** $x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$

② Tìm tham số m để phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. **ĐS:** $m\in[-1;0)$

Lời giải.

① Với $m=\frac{3}{2}$ thì phương trình trở thành $2\cos^2 x-4\cos x+\frac{3}{2}=0$. Ta có

$$2\cos^2 x-4\cos x+\frac{3}{2}=0 \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{3}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \quad (3.2)$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=\frac{-\pi}{3}+2k\pi.\end{array}\right. \quad (3.4)$$

② $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0\Leftrightarrow 2cos^2x-(2m+1)\cos x+m=0.$ (1)
Đặt $t=\cos x$ khi $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ thì $t\in[-1;0)$.
(1) trở thành $2t^2-(2m+1)t+m=0.$ (2)
Để phương trình (1) có nghiệm nằm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ thì phương trình (2) có nghiệm nằm trong khoảng $t\in[-1;0)$.
Mà $2t^2-(2m+1)t+m=0\Leftrightarrow(2t-1)(t-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\ t=m.\end{array}\right.$
Do đó $m\in[-1;0)$.

□

C BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $2\sin^2 x+3\tan^2 x-6\tan x-2\sqrt{2}\sin x+4=0.$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

② $\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0.$ **ĐS:** $x=\frac{-\pi}{4}+l\pi$

Lời giải.

① $2\sin^2 x+3\tan^2 x-6\tan x-2\sqrt{2}\sin x+4=0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos x\neq 0$.
Khi đó $(1)\Leftrightarrow(\sqrt{2}\sin x-1)^2+(\sqrt{3}\tan x-\sqrt{3})^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \tan x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi.$

② $\cos^2 x\tan^2 4x+1+\sin 2x=0 \quad (1)$.
Điều kiện $\cos 4x\neq 0$.
Khi đó

$$\begin{aligned}(1)\quad&\Leftrightarrow\quad(\cos x\cdot\tan 4x)^2+(\sin x+\cos x)^2=0\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\cdot\tan 4x=0\\ \cos x+\sin x=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 4x=0\end{array}\right.\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{m\pi}{4}\end{array}\right.\\ x=\dfrac{-\pi}{4}+l\pi\end{cases}\\ &\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{-\pi}{4}+l\pi.\end{aligned}$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 2x\cos 4x=1$. **ĐS:** $x=\dfrac{-\pi}{4}+k2\pi$
② $\cos 2x\cos 6x=1$. **ĐS:** $x=\dfrac{k\pi}{2}$

Lời giải.

① $\sin 2x\cos 4x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x=1\\ \cos 4x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x=-1\\ \cos 4x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{4}+k2\pi.$

② $\cos 2x\cos 6x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 2x=1\\ \cos 6x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 2x=-1\\ \cos 6x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $2\cos x+\sqrt{2}\sin 10x=3\sqrt{2}+2\cos 28x\sin x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

② $2\sin 5x+\cos 4x=3+\cot^2 x$. **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

Lời giải.

① $2\cos x+\sqrt{2}\sin 10x=3\sqrt{2}+2\cos 28x\sin x\Leftrightarrow 2\cos x-2\sin x\cos 28x=3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 10x$.
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakowski cho vế trái ta được.

$$(2\cos x-2\sin x\cos 28x)^2\le 4+4\cos^2 28x\le 8\Rightarrow 2\cos x-2\sin x\cos 28x\le 2\sqrt{2}\quad(1)$$

Mặt khác $3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 10x\ge 3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}\quad(2)$.
Từ (1) và (2) Dấu "="xảy ra khi $\begin{cases}\cos^2 28x=1\\ \sin x\cos 28x=-\sin x\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

② $2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$

Ta có $\begin{cases} 2\sin 5x \le 2 \\ \cos 4x \le 1 + \cot^2 x \end{cases}$.

Do đó

$$2\sin 5x + \cos 4x = 3 + \cot^2 x$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 + \cot^2 x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} & (1) \\ \cos 4x = \dfrac{1}{\sin^2 x} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \sin^2 x \cos 4x = 1 \\
&\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)\cos 4x = 2 \\
&\Leftrightarrow (1 - \cos 2x)\left(2\cos^2 2x - 1\right) = 2 \\
&\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^3 2x + \cos 2x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -2\cos^3 2x + 2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow -2(\cos 2x + 1)\left(\cos^2 2x - 2\cos 2x + \frac{3}{2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (3) ta được $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.

□

BÀI 4. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

① $\left(m^2 + m\right)\cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2\cos 2x$. **ĐS:** $m \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; 3]$

② $m\sin x + 2\cos x = 1$. **ĐS:** $m \in \mathbb{R}$

③ $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m + 2$. **ĐS:** $m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

Lời giải.

① $\left(m^2 + m\right)\cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2\cos 2x \Leftrightarrow m\cos 2x = m^2 - m - 3$.

Xét $m = 0$ khi đó ta được $0 = 3$ (vô lý).

Xét $m \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m^2 - m - 3}{m}$.

Vì $-1 \le \cos 2x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{m^2 - m - 3}{m} \le 1$.

Xét $\begin{cases} \dfrac{m^2 - m - 3}{m} \ge -1 & (1) \\ \dfrac{m^2 - m - 3}{m} \le 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{m^2 - 3}{m} \ge 0 \Leftrightarrow m \in [-\sqrt{3}; 0) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{m^2 - 2m - 3}{m} \le 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1] \cup (0; 3]$.

Vậy $m \in [-\sqrt{3}; -1] \cup [\sqrt{3}; 3]$.

② $m\sin x + 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}}\sin x + \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+4}}$.

Đặt $\cos a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+4}} \Rightarrow \sin a = \dfrac{2}{\sqrt{m^2+4}}$.

Ta được

$$\begin{aligned}
& \cos a \cdot \sin x + \sin a \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}} \\
\Leftrightarrow\ & \sin(x+a) = \frac{1}{\sqrt{m^2+11}} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = -a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi \\ & x = -a + \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{m^2+11}} + k2\pi. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$

③ $m\cos 2x + (m+1)\sin 2x = m+2 \quad (1)$

Điều kiện

$$\begin{aligned}
& m^2 + \left(m^2+1\right)^2 \geq \left(m^2+2\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty).
\end{aligned}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\cos 2x + \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}\sin 2x = \dfrac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}$.

Đặt $\sin a = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \Rightarrow \cos a = \dfrac{m+1}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}}$.

Ta được

$$\begin{aligned}
& \sin a \cos 2x + \cos a \sin 2x = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \sin(a+2x) = \frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & a + 2x = \arcsin\frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi \\ & a + 2x = \pi - \arcsin\frac{m+2}{\sqrt{m^2+(m+1)^2}} + k2\pi. \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

Vậy $m \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ thì phương trình có nghiệm.

□

BÀI 5. Cho phương trình $\cos 4x + 6\sin x\cos x = m$

① Giải phương trình khi $m = 1$. **ĐS:** $x = \dfrac{k\pi}{2}$

② Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. **ĐS:** $2 \leq m < \dfrac{17}{8}$

Lời giải.

① Khi $m = 1$ ta được

$$\begin{aligned}
& \cos 4x + 6\sin x\cos x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2\sin^2 2x + 3\sin 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & \sin 2x = 0 \\ & \sin 2x = \frac{3}{2} \end{aligned}\right. \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

② Đặt $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ và $g(x) = m$.
Xét $f(x) = -2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1$ trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
Suy ra $0 \le \sin 2x \le 1$.
Đặt $a = \sin 2x \Rightarrow 0 \le a \le 1$.
Xét $f(a) = -2a^2 + 3a + 1$ trên $[0; 1]$.
Bảng biến thiên

a	0	$\frac{3}{4}$	1
$f(a)$	1 ↗	$\frac{17}{8}$	↘ 2

Vậy $f(x) = g(x)$ có hai nghiệm phân biệt khi $2 \le m < \frac{17}{8}$.

□

D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $4\sin^2 x + \sin^2 3x = 4\sin x \sin^2 3x$. **ĐS:** $x = k\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

② $\sin^2 2x + 2\sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x} + 2\tan x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

③ $-4\cos^2 x + 3\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x = 4\sin x - 6$. **ĐS:** $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

④ $8\cos 4x \cos^2 2x + \sqrt{1 - \cos 3x} + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{3} + k2\pi$

⑤ $\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\left(\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x\right) = \sin x \sin^2 3x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin 5x + 1 = 0$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

② $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$. **ĐS:** $x = \varnothing$

③ $\sin 7x - \sin x = 2$. **ĐS:** $x = \varnothing$

④ $\cos 4x - \cos 6x = 2$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

⑤ $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. **ĐS:** $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

⑥ $\sin^5 x - \cos^3 x = 1$. **ĐS:** $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\tan 2x + \tan 3x = \frac{-1}{\sin x \cos 2x \cos 3x}$. **ĐS:** $x \in \varnothing$

② $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

③ $\sin^4 x - \cos^4 x = |\sin x| + |\cos x|$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

④ $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$. **ĐS:** $x = \frac{k\pi}{2}$

⑤ $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} - 2 = 0$. **ĐS:** $x = k2\pi$

⑥ $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$. **ĐS:** $x = k\pi$

BÀI 9. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau đây có nghiệm

① $m\sin x\cos x+\sin^2 x=m$. **ĐS:** $0\le m\le \frac{4}{3}$

② $\sin x-\sqrt{5}\cos x+1=m(2+\sin x)$. **ĐS:** $-1\le m\le \frac{5}{3}$

③ $\sin 2x+4(\cos x-\sin x)=m$. **ĐS:** $-1\le m\le 5$

④ $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+m=1$. **ĐS:** $-1\le m\le 3$

⑤ $\sin 2x-2\sqrt{2}m(\sin x-\cos x)+1=4m$. **ĐS:** $-1\le m\le 0$

⑥ $3\sin^2 x+m\sin 2x-4\cos^2 x=0$. **ĐS:** $m\in\mathbb{R}$

⑦ $(m+2)\cos^2 x+m\sin 2x+(m+1)\sin^2 x=m-2$. **ĐS:** $m\in(-\infty;-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3};+\infty)$

⑧ $\sin^2 x+(2m-2)\sin x\cos x-(1+m)\cos^2 x=m$. **ĐS:** $-2\le m\le 1$

BÀI 10. Tìm tham số m để phương trình $\cos^2 x-\cos x+1=m$ có nghiệm $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $\frac{3}{4}\le m\le 1$

BÀI 11. Tìm tham số m để phương trình $2\sin x+m\cos x=1-m$ có nghiệm $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $-1\le m\le 3$

BÀI 12. Tìm tham số m để phương trình $2\cos 2x+(m+4)\sin x=m+2$ có 2 nghiệm $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. **ĐS:** $-4\le m\le 4$

BÀI 7. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $5\left(\sin x+\dfrac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3,\ \forall x\in(0;2\pi)$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$

② $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 6x-\cos^2 6x$ **ĐS:** $x=\frac{k\pi}{9}, x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0,\ \forall x\in[0;14]$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{2}, x=\frac{7\pi}{2}$

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$ **ĐS:** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$ **ĐS:** $x=\pi+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$ **ĐS:** $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ **ĐS:** $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

② $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ **ĐS:** $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi, x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$ **ĐS:** $x=k\pi, x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}, x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 7. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi, x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$ **ĐS:** $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 8. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{\pi}{42}+\dfrac{k2\pi}{7}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k\pi}{3}, x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

BÀI 9. Giải các phương trình sau

① $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ **ĐS:** $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

③ $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$ **ĐS:** $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện $\cos x\neq 0$ và $\tan x\neq -1$. Phương trình tương đương với

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Leftrightarrow\ 1+\sin x+\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\sin x=1(\text{không thoả điều kiện})\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}(\text{thoả điều kiện})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sin 2x\cos x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos^2 x-1)+\cos 2x(\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(\sin x+\cos x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x+2=0 \text{ (vô nghiệm)}\\ \cos 2x=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin x\cos x-\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-1=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(2\sin x-1)+2\sin^2 x+3\sin x-2=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x+\sin x+2=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 10. Giải các phương trình sau

① $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

② $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

③ $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ **ĐS:** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Lời giải.

① Điều kiện $\sin x\neq 0$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}}=2\sqrt{2}\cos x\sin^2 x\\
\Leftrightarrow\ & 1+\cos 2x+\sin 2x-2\sqrt{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos x(\cos x+\sin x-\sqrt{2})=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ (thoả điều kiện)}\\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \text{ (thoả điều kiện)}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

② Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x-\sin x=\cos 2x+\cos x\\
\Leftrightarrow\ & \sin x(2\cos^2 x-1+\cos x)-(\cos 2x+\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\cos 2x+\cos x)(\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-\cos x\\ \sin x=1\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\cos(\pi-x)\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=-\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

③ Điều kiện $\cos x\neq 0$ và $\tan x\neq-\sqrt{3}$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\cos x(\sin x+1)+(\sin x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+1)(2\cos x+1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \text{ (không thoả điều kiện)}\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \text{ (không thoả điều kiện)}\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 11. Giải các phương trình sau

① $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k2\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$

② $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ **ĐS:** $\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,k\dfrac{2\pi}{3}$

③ $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$ **ĐS:** $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{7\pi}{12}+k2\pi,-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi$

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{3}\sin x+\cos x-1)\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{3}\sin x+\cos x-1=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=k2\pi\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,x=k2\pi,x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 2x - \frac{\pi}{3} = \pm\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $x = k\frac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$.

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2})\cos 2x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 12. Giải các phương trình lượng giác sau

① $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

② $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7}$

③ $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

① Điều kiện $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \\
\Leftrightarrow\ & (\sin x + \cos x)(2\cos x - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi(k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sin 5x + \cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$.

③ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cos 2x(2\sin x + 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\sin x + 1 = 0 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 13. Giải phương trình lượng giác sau:

① $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ **ĐS:** $\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

② $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$ **ĐS:** $\pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi$

Lời giải.

① Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x \cos x\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - 2)(2\cos x - 1) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \sin x - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

② Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&2\sin x \cos x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ &(\sin x - \sqrt{2})(2\cos x + \sqrt{2}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} \sin x - \sqrt{2} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 14. Giải phương trình lượng giác $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Lời giải.

Ta có $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -4 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -4 \text{ vô nghiệm} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$. □

BÀI 15. Giải các phương trình lượng giác sau

1. $\cos x \cos 3x - \sin 2x \sin 6x - \sin 4x \sin 6x = 0$ **ĐS:** $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$
2. $\cos x \cos 2x \cos 3x - \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4} + k\pi$
3. $\cot x + \cos 2x + \sin x = \sin 2x \cot x + \cos x \cot x$ **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi$
4. $4 + 3\sin x + \sin^3 x = 3\cos^2 x + \cos^6 x$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k\pi$
5. $2\sin^3 x + \cos 2x + \cos x = 0$ **ĐS:** $-\frac{\pi}{4} + k\pi, \pi + k2\pi$
6. $2\cos x \cos 2x \cos 3x + 5 = 7\cos 2x$. **ĐS:** $x = k\pi$
7. $\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = \cos x(\sin x + \cos x - \sin 3x)$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$
8. $\cos x + \sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - 4\cos 2x \cos x - 2\cos^2 x + 2 = 0$. **ĐS:** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$
9. $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right]$. **ĐS:** $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
10. $\frac{1}{2\cot^2 x + 1} + \frac{1}{2\tan^2 x + 1} = \frac{15\cos 4x}{8 + \sin^2 2x}$. **ĐS:** $x = \pm\frac{\pi}{12} + k2\pi$
11. $\frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\tan x - 1} + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi$
12. $3\sin^2 x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = \sin x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos x$. **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$
13. $\frac{(2\sin x + 1)(\cos 2x + \sin x) - 2\sin 3x + 6\sin x + 1}{2\cos x - \sqrt{3}} + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$. **ĐS:** $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$
14. $\sqrt{\frac{3}{4} + \cos^2 x} + \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x} = 2$. **ĐS:** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$
15. $(\tan x + 1)\sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3(\cos x + \sin x)\sin x$. **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$
16. $\sin^3 x - \cos^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x - \cos x + 2 = 0$. **ĐS:** $k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
17. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 7\cos x$. **ĐS:** $x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi$

(18) $8(\sin^6 x+\cos^6 x)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x$. **ĐS:** $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{7\pi}{12}+k\pi$

(19) $\frac{\sin 5x}{\sin x}+\frac{2\sin 3x}{\sin x}+\frac{2\cos 3x}{\cos x}=5$. **ĐS:** $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi$

(20) $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=2(\sin x+\cos x)$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x=-\pi+k2\pi$

(21) $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$. **ĐS:** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi$

(22) $1+\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{1+\sin x}=\cos 2x+2\cos x$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$; $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi$

(23) $(2\cos 2x-1)\cos x-\sin x=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\sin 3x$. **ĐS:** $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{3\pi}{8}+k\pi$

Lời giải.

(1) Phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& \cos x\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 6x-\sin 4x\sin 6x=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\cdot\cos 3x-(\sin 2x+\sin 4x)\sin 6x=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\cdot\cos 3x-2\sin 3x\cdot\cos x\cdot 2\sin 3x\cdot\cos 3x=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\cdot\cos 3x\cdot(2\cos 6x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\\ x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}$, $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$.

(2) Phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& \cos 2x[\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x]+\sin 2x[\cos 4x-\cos 2x-\sin 2x]=0\\
\Leftrightarrow\ & [\cos 2x+\sin 2x]\cdot\left[\cos^2 2x-\sin^2 2x-\sin 2x\right]=0\\
\Leftrightarrow\ & [\cos 2x+\sin 2x]\cdot[\cos 4x-\sin 2x]=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{6}\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{6}$, $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

(3) Điều kiện xác định $\sin x\neq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$
\begin{aligned}
& \cot x+\cos 2x+\sin x=\sin 2x\cdot\cot x+\cos x\cdot\cot x\\
\Leftrightarrow\ & \cot x+\cos 2x+\sin x=2\cos^2 x+\cos x\cdot\cot x\\
\Leftrightarrow\ & \cos x(1-\cos x)+\sin x(\sin x-1)=0\\
\Leftrightarrow\ & (\cos x-\sin x)(1-\sin x-\cos x)=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k2\pi\ (\text{loại})\ (k\in\mathbb{Z}).\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

④ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4+3\sin x+\sin^3 x=3\cos^2 x+\cos^6 x\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+1)\left[\sin^2 x+2\sin x+1-(1-sinx)(3+\cos^4 x)\right])=0\\
\Leftrightarrow\ & (\sin x+1)^3\left[1-(1-\sin x)^3\right]=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

⑤ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sin^3 x+1-2\sin^2 x+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin^2 x(\sin x-1)+1+\cos x=0\\
\Leftrightarrow\ & (1+\cos x)[2(1-\cos x)(\sin x-1)+1]=0\\
\Leftrightarrow\ & (1+\cos x)(\sin x+\cos x)[2-(\sin x+\cos x)]=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\pi+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$.

⑥ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)+5-7\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x(2\cos^2 2x+\cos 2x-1)+5-7\cos 2x=0\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^3 2x+\cos^2 2x-8\cos 2x+5=0\\
\Leftrightarrow\ & (2\cos 2x+5)(\cos 2x-1)^2=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 2\cos 2x+5=0 \\ \cos 2x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=-\dfrac{5}{2}\ \text{(vô nghiệm)} \\ \cos 2x=1 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ & 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

⑦ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 4\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x\left[2\cos 2x\sin(-x)+\cos x\right]\\
\Leftrightarrow\ & \sin^2 2x-\sin^2 x=\cos^2 x-\sin 2x\cos 2x\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1-\cos 4x}{2}-1=0\\
\Leftrightarrow\ & \sin 4x-\cos 4x=1\\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 4x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 4x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$ và $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

⑧ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)-4(2\cos^2 x-1)\cos x-2\cos^2 x+\cos x+2=0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)-8\cos^3 x-2\cos^2 x+5\cos x+2=0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{3}\sin x(2\cos x+1)-(2\cos x+1)(4\cos^2 x-\cos x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &(2\cos x+1)(\sqrt{3}\sin x+4\cos^2 x-\cos x-2)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \sqrt{3}\sin x+4\cos^2 x-\cos x-2=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x+2(2\cos^2 x-1)=0\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}2\cos x+1=0\\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos 2x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos 2x\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi;\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\ x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

⑨ Điều kiện xác định : $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.
Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2 x-\sin^2 x+\sin 2x}{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\sin x\\
\Leftrightarrow\ &(\cos 2x+\sin 2x)\sin^2 x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2 x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)(\sin^2 x-\sin x)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x=0\text{ (loại)}\\ \sin x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2};\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

⑩ Điều kiện xác định : $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Với điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+2\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{15(1-2\sin^2 2x)}{8+\sin^2 2x}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\sin^2 x\cos^2 x+2(\sin^4 x+\cos^4 x)}{2(\sin^4 x+\cos^4 x)+5\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{15-30\sin^2 2x}{8+\sin^2 2x}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{2(\sin^2 x+\cos^2 x)^2+\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{15-30\sin^2 2x}{8+\sin^2 2x}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2-\dfrac{\sin^2 2x}{2}}{2+\dfrac{\sin^2 2x}{4}}=\frac{15-30\sin^2 2x}{8+\sin^2 2x}\\
\Leftrightarrow\ & 28\sin^4 2x+217\sin^2 2x-56=0\\
\Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l}\sin^2 2x=\dfrac{1}{4}\\ \sin^2 2x=-8 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 4x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+k2\pi (k\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+k2\pi (k\in\mathbb{Z})$.

□