ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΣΕΙΡΑ ΓΡΑΠΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

για το μάθημα

Τεχνητή Νοημοσύνη

Γεώργιος Σκουρτσίδης (03114307)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εκφώνηση

Μετατρέψτε σε κανονική συζευκτική μορφή τις παρακάτω προτάσεις:

1. $p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \vee (s \Rightarrow (t1 \wedge t2)))))$

2. $\exists x.\forall y.\forall z.(A(x, y, z) \wedge \neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w.(C(x, w, z) \vee \neg K(w))))$

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφονται στις διαφάνειες του μαθήματος.

Πρόταση 1η:

$p \Rightarrow (\neg(q \Rightarrow (r \vee (s \Rightarrow (t1 \wedge t2)))))$

Βήμα 1: $\neg p \vee (\neg(\neg q \vee (r \vee (\neg s \vee (t1 \wedge t2)))))$

Βήμα 2: $\neg p \vee ((q \wedge \neg (r \vee (\neg s \vee (t1 \wedge t2))))) \equiv$

$\neg p \vee ((q \wedge (\neg r \wedge (s \wedge (\neg t1 \vee \neg t2)))))$

Βήμα 3: $\neg p \vee ((q \wedge (\neg r \wedge (s \wedge (\neg t1 \vee \neg t2))))) \equiv$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \wedge (s \wedge (\neg t1 \vee \neg t2)))) \equiv$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (s \wedge (\neg t1 \vee \neg t2))) \equiv$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee (\neg t1 \vee \neg t2)) \equiv$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg t1 \vee \neg t2)$

Τελικά:

α. $\neg p \vee q$

β. $\neg p \vee \neg r$

γ. $\neg p \lor s$

δ. $\neg p \lor \neg t1 \lor \neg t2$

Άρα η ΚΣΜ είναι:

$\{[\neg p, q],[\neg p, \neg r],[\neg p, s],[\neg p, \neg t1, \neg t2]\}$

<u>Πρόταση 2η:</u>

$\exists x.\forall y.\exists z.(A(x, y, z) \land \neg B(z) \Rightarrow \neg(\forall w.(C(x, w, z) \lor K(y))))$

Καθώς αυτή η πρόταση είναι πιο σύνθετη,θα περιγραφεί αναλυτικότερα η διαδικασία βήμα-βημα.

Βήμα 1 - Εξάλειψη των συνεπαγωγών

$$\exists x.\forall y.\exists z.(A(x, y, z) \land B(z) \lor \neg(\forall w.(C(x, w, z) \lor K(y))))$$

Βήμα 2 – Αρνήσεις μόνο στις ατομικές προτάσεις

$$\exists x.\forall y.\exists z.(A(x, y, z) \land B(z) \lor (\exists w.(\neg C(x, w, z) \land \neg K(y))))$$

Βήμα 3 – Εξάλειψη των υπαρξιακών ποσοδεικτών (Σκολεμοποίηση)

Αντικαθιστούμε την μεταβλητή x με μία σταθερά(έστω Γ) αφού το $\exists x$ δεν εξαρτάται από κάποιο καθολικό ποσοδέκτη.Αντίθετα τις μεταβλητές z και w τις αντικαθιστούμε με f(y) και g(y) αντίστοιχα,αφού είναι προφανής η εξάρτησή τους από τον καθολικό ποσοδέκτη $\forall y$.

Συνεπώς μετά την αντικατάσταση έχουμε:

$$\forall y.(A(\Gamma, y, f(y)) \land B(f(y)) \lor (\neg C(\Gamma, g(y), f(y)) \land \neg K(y))))$$

Βήμα 4 – Επονόμαση μεταβλητών καθολικών ποσοδεικτών

Δεν χρειάζεται, αφού έχουμε μόνο τον καθολικό ποσοδέκτη $\forall y$.

Βήμα 5 – Μετακίνηση των καθολικών ποσοδεικτών στα αριστερά

Οι καθολικοί ποσοδέκτες είναι ήδη στα αριστερά.

Βήμα 6 – Μετακίνηση των διαζεύξεων στο επίπεδο των κατηγορημάτων

$\forall y.(A(\Gamma, y, f(y)) \wedge B(f(y)) \vee (\neg C(\Gamma, g(y), f(y)) \wedge \neg K(y))) \equiv$

$\forall y.(\ (A(\Gamma, y, f(y)) \vee \neg C(\Gamma, g(y), f(y))) \wedge$

$(A(\Gamma, y, f(y)) \vee \neg K(y)) \wedge$

$(B(f(y)) \vee \neg C(\Gamma, g(y), f(y))) \wedge$

$(B(f(y)) \vee \neg K(y))))$

Η παραπάνω προταση γράφτηκε σε πολλες σειρές για χάρην ευαναγνωσιμότητας.

Βήμα 7 – Απάλειψη του καθολικού ποσοδέκτη και του AND τελεστή

Έχουμε:

- $A(\Gamma_1, y_1, f(y_1)) \vee \neg C(\Gamma_1, g(y_1), f(y_1))$
- $A(\Gamma_2, y_2, f(y_2)) \vee \neg K(y_2)$
- $B(f(y_3)) \vee \neg C(\Gamma_3, g(y_3), f(y_3))$
- $B(f(y_4)) \vee \neg K(y_4)))$

Τελικα:

Σε ΚΣΜ είναι : $\{[A(\Gamma_1, y_1, f(y_1)), \neg C(\Gamma_1, g(y_1), f(y_1))],$

$[A(\Gamma_2, y_2, f(y_2)), \neg K(y_2)],$

$[B(f(y_3)), \neg C(\Gamma_3, g(y_3), f(y_3))],$

$[B(f(y_3)), \neg C(\Gamma_3, g(y_3), f(y_3))]\}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Εκφώνηση

Δίνονται οι εξής τρεις προτάσεις:

1. $\forall x.R(x, x)$

2. $\forall x.\forall y.(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$

3. $\forall x.\forall y.\forall z.(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$

Οι προτάσεις αυτές λένε ότι η R είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Για κάθε ζεύγος προτάσεων βρείτε, αν υπάρχει,ένα μοντέλο που ικανοποιεί τις δύο αυτές προτάσεις αλλά δεν ικανοποιεί την τρίτη. Τι συμπέρασμα βγάζετε σχετικά με το αν κάποια από τις προτάσεις αποτελεί λογική συνέπεια άλλων προτάσεων;

Λύση

A) Έστω A = {a, b} και R = { (a,a), (b,b), (b,a), (a,b) }

Τα παραπάνω ικανοποιούν τις 1,2 αλλά δεν ικανοποιούν την 3.

B) Έστω A = {a, b, c} και R = { (a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (a,b), (a,c) }

Τα παραπάνω ικανοποιούν τις 1,3 αλλά δεν ικανοποιούν την 2.

C) Έστω A = {a, b, c} και R = { (b,a), (c,a), (c,b), (c,c), (b,c), (a,b), (a,c) }

Τα παραπάνω ικανοποιούν τις 2,3 αλλά δεν ικανοποιούν την 1.

Βρήκαμε μοντέλα που ικανοποιούν τις προτάσεις ανα δύο,ενώ ταυτόχρονα δεν ικανοποιούν την τρίτη.Γνωρίζουμε πως μια πρόταση p συνεπάγεται μία άλλη πρόταση q εάν όλες οι ερμηνείες της γνώσης που περιέχει τις δύο προτάσεις και ικανοποιούν την p ικανοποιούν και την q. Συνεπως καμία από τις παραπάνω προτάσεις δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων δύο.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εκφώνηση

Δίνονται οι εξής προτάσεις:

1. $\forall x.(R(x, x) \Rightarrow \forall y.R(x, y))$

2. $\forall x.\forall y.(R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$

3. $\forall x.\exists y.\neg R(y, x)$

4. $\forall x.\neg R(x, x)$

Ελέγξτε με χρήση του αλγορίθμου της ανάλυσης αν (1),(2),(3) |= (4) και αν (1),(3),(4) |= (2)

Λύση

Μετατρέπουμε αρχικά τις προτάσεις σε Κανονική Συζευκτική Μορφή.

1. $\forall x.(R(x, x) \Rightarrow \forall y.R(x, y)) \equiv \forall x.(\neg R(x, x) \vee \forall y.R(x, y))$
   $\equiv \forall x.\forall y.R(x, y) \vee (\forall x.\neg R(x, x))$
   Αρα $\{[\neg R(x, x), R(x, y))]\}$
2. $\forall x.\forall y.(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)) \equiv \forall x.\forall y.(\neg R(x, y) \vee R(y, x))$
   Αρα $\{[\neg R(x, y), R(y, x))]\}$
3. $\forall x.\exists y.\neg R(y, x) \equiv \forall x.\neg R(A_1, x)$
   Άρα $\{[\neg R(A, x)]\}$
4. $\forall x.\neg R(x, x)$
   Άρα $\{[\neg R(x, x)]\}$

Τελικά οι προτάσεις σε ΚΣΜ είναι:

1. {[¬R(x, x), R(x, y))]}
2. {[¬R(x, y), R(y, x))]}
3. {[¬R(A, x)]}
4. {[¬R(x, x)]}

Οι παραπάνω προτάσεις αποτελούν μια βάση γνώσης K.

Αρχικά εξετάζουμε αν (1),(2),(3) |= (4).

Εφαρμόζω βήμα ανάλυσης (resolution step) προσθέτωντας στην βάση γνώσης την πρόταση {[¬¬R(x, x)]}, δηλαδή {[R(x, x)]}.Επιπλέον από τις προτάσεις 1,2 συνεπάγεται η πρόταση {[¬R(x, x)]}.Άρα η βάση K παίρνει τη μορφή:

K ={ [¬R(x, x), R(x, y))],
[¬R(x, y), R(y, x))],
[¬R(A, x)],
[R(x, x)],
[¬R(x, x)] }

Είναι προφανές πως οι τελευταίες 2 προτάσεις περιέχουν αντίθεση.

Συνεπώς ισχύει πως (1),(2),(3) |= (4).

5. Στη συνέχεια εξετάζουμε την υπόθεση (1),(3),(4) |= (2)

Η βάση γνώσης γίνεται K= {[¬R(x, x), R(x, y))], [¬R(A, x)], [¬R(x, x)]}

Προσθέτουμε την πρόταση ¬ (¬R(x, y) ∨ R(y, x)) ≡ R(x, y) ∧ ¬R(y, x)

Και η βάση γίνεται: K= {[¬R(x, x), R(x, y))], [¬R(A, x)], [¬R(x, x)],

[R(x, y), ¬R(y, x)]}

Δεν προκύπτει κάποια αντίφαση, συνεπώς ο αλγόριθμος τερματίζει μη ικανοποιώντας την αρχική υπόθεση.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Εκφώνηση

Διατυπώστε σε λογική πρώτης τάξης τις ακόλουθες προτάσεις:

1. Καμία χώρα δεν συνορεύει με τον εαυτό της.

2. Όλες οι χώρες συνορεύουν με τουλάχιστον μία άλλη χώρα.

3. Μερικές χώρες συνορεύουν με περισσότερες από τρεις άλλες χώρες.

4. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο χώρες που συνορεύουν μόνο μεταξύ τους.

5. Μερικές χώρες συνορεύουν μόνο με χώρες που έχουν όλες μεγαλύτερη έκταση από αυτές.

Θεωρήστε ότι η γλώσσα διαθέτει τα κατηγορήματα Χώρα(x), συνορεύειΜε(x, y), ΜεγαλύτεροΑπό(x, y), τη συνάρτηση έκταση(x) με τις προφανείς ερμηνείες, και σταθερές για τις χώρες και τις αριθμητικές τιμές των εκτάσεων.

Λύση

1. ¬ (∃ Χώρα(x) ⇒ ΣυνορεύειΜε(x,x))

2. ∀x.∃y.(Χώρα(x) ⇒(Χώρα(y) ∧ ΣυνορεύειΜε(x,y))

3. ∃x.∀y.(Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧ ≥3ΣυνορεύειΜε(x,y))

4. ∃x.∃y.(Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧ ΣυνορεύειΜε(x, y) ∧ ΣυνορεύειΜε(y, x)) ∧

   ∧ (¬(∃z.(Χώρα(z) ∧ (ΣυνορεύειΜε(z,x) ∨ ΣυνορεύειΜε(z,y))))

5. ∃x.∀y.(Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧ ΜεγαλύτεροΑπό(έκταση(x), έκταση(y)) ∧ ΣυνορεύειΜε(x,y))

(Σημείωση: Στις προτάσεις 1,4 χρησιμοποίησα τη λογική πως ∄.x ≡ ¬(∃.x) ≡ ∀.¬x)