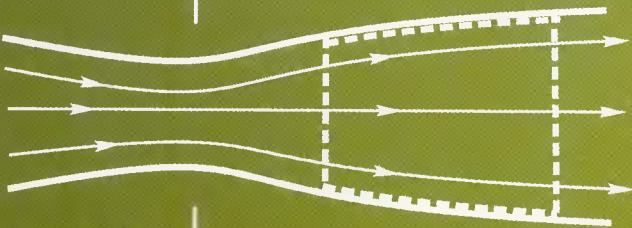


М. Э. ЭГЛИТ



ЛЕКЦИИ
ПО ОСНОВАМ
МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ
СРЕД



М. Э. Эглит

**ЛЕКЦИИ
ПО ОСНОВАМ МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД**

*Издание второе,
исправленное*

Библиотека кафедры
гидромеханики МГУ



МОСКВА

Эглит Маргарита Эрнестовна

Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр.
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 208 с.

Настоящая книга представляет собой записи лекций по курсу «Основы механики сплошных сред», прочитанных автором для студентов второго курса отделения механики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Лекции охватывают следующие разделы механики сплошных сред: элементы тензорного исчисления; основные понятия, используемые для описания движения и деформирования сплошных сред; универсальные физические законы сохранения и следующие из них дифференциальные уравнения и условия на поверхностях сильного разрыва; простейшие модели жидкостей, газов и упругих сред.

Для исследователей в области механики, преподавателей и студентов соответствующих специальностей.

Рецензенты:

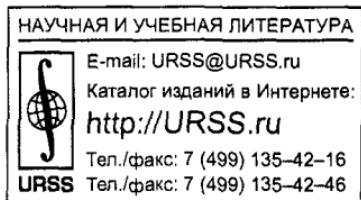
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. П. Карликов*;
канд. физ.-мат. наук, доц. *Н. Е. Леонтьев*

Издательство «Книжный дом “ЛИБРОКОМ”».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 13. Зак. № 3880.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-01476-2

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010



7564 ID 103743



9 785397 014762

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Предисловие	9
Лекция 1	11
1.1. Предмет механики сплошных сред	11
1.2. Понятие сплошной среды	11
1.3. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты	12
1.4. Закон движения сплошной среды	13
1.5. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров	13
1.6. Материальная (индивидуальная) производная по времени	16
1.7. Формулы для вычисления ускорений по скоростям	17
Лекция 2	20
2.1. Криволинейные системы координат. Локальные ковариантные векторы базиса	20
2.2. Метрическая матрица. Контравариантные векторы базиса	21
2.3. Формулы преобразования векторов базиса и компонент метрической матрицы при переходе к другой системе координат	23
Лекция 3	25
3.1. Векторы как объекты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Физические компоненты вектора	25
3.2. Операции над векторами	27
3.3. Тензоры как объекты	29
3.4. Формулы преобразования компонент тензоров при переходе к другой системе координат	30
Лекция 4	32
4.1. Фундаментальный метрический тензор	32
4.2. Операции над тензорами	32
4.3. Скалярные инварианты тензоров	34
4.4. «Теорема деления», или обратный тензорный признак	35

Лекция 5	36
5.1. Дифференцирование скалярной функции по координатам. Вектор градиент	36
5.2. Дифференцирование вектора по координатам	37
5.3. Дифференцирование тензора любого ранга	40
5.4. Правила ковариантного дифференцирования	40
5.5. Ковариантные производные компонент метрического тензора	41
Лекция 6	42
6.1. Свойства символов Кристоффеля	42
6.2. Тензор кривизны	43
6.3. Тензоры второго ранга. Разложение на сумму симметричного и антисимметричного тензоров	44
6.4. Тензорная поверхность. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора второго ранга	44
6.5. Инварианты симметричного тензора второго ранга	45
6.6. Разложение симметричного тензора на шаровой тензор и девиатор	46
Лекция 7	47
7.1. Алтисимметричные тензоры второго ранга в трехмерном пространстве	47
7.2. Преобразование малой частицы при произвольном перемещении среды	50
7.3. Тензоры деформаций Грина и Альманси	52
Лекция 8	55
8.1. Механический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций Грина и Альманси в лагранжевой системе координат	55
8.2. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси, связи между ними	58
8.3. Формулы для величины относительного изменения объема при деформировании	60
Лекция 9	62
9.1. Компоненты тензоров деформаций Грина \mathcal{E} и Альманси $\hat{\mathcal{E}}$ в пространственной системе координат	62
9.2. Выражение компонент тензоров деформации через производные от компонент вектора перемещения	65

Лекция 10	69
10.1. Уравнения совместности для компонент тензора деформаций	69
10.2. Тензор скоростей деформаций	74
10.3. Связь между компонентами тензоров деформаций и скоростей деформаций	74
10.4. Выражение компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости	76
10.5. Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций	76
Лекция 11	78
11.1. Формулы для скорости относительного изменения объема при движении среды	78
11.2. Дивергенция скорости и ее механический смысл	79
11.3. Формула Гаусса—Остроградского	80
11.4. Теорема Коши—Гельмгольца о распределении скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды	81
Лекция 12	83
12.1. Вектор вихря. Его механический смысл. Вихревое и безвихревое движение	83
12.2. Потенциал скорости	85
12.3. Циркуляция скорости	86
12.4. Формула Стокса	86
12.5. Пример вихревого течения с прямолинейными траекториями	88
12.6. Пример безвихревого течения с круговыми траекториями	89
Лекция 13	92
13.1. Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды	92
13.2. Формула дифференцирования по времени интеграла по подвижному индивидуальному объему	93
13.3. Закон сохранения массы для пространственного объема	95
13.4. Дифференциальное уравнение неразрывности — следствие закона сохранения массы	96
13.5. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды	97
Лекция 14	98
14.1. Уравнение неразрывности в лагранжевых координатах	98
14.2. Закон сохранения количества движения	102
14.3. Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные. Вектор напряжений	104

14.4. Математическая формулировка закона сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды	105
14.5. Еще один вид формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему	105
Лекция 15	107
15.1. Формула Коши для вектора напряжений	107
15.2. Тензор напряжений	110
15.3. Дифференциальные уравнения движения	112
Лекция 16	114
16.1. Закон сохранения момента количества движения	114
16.2. Момент количества движения для конечного объема сплошной среды. Массовые и поверхностные пары. Вектор моментных напряжений	115
16.3. Математическая формулировка закона сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды	118
16.4. Формула Коши для вектора моментных напряжений. Тензор моментных напряжений	119
16.5. Дифференциальное уравнение момента количества движения	120
Лекция 17	121
17.1. Дифференциальное уравнение собственного момента количества движения	121
17.2. Симметрия тензора напряжений как следствие закона сохранения момента количества движения при некоторых условиях	122
17.3. Что такое математическая модель среды или явления?	123
17.4. Жидкости и газы в механике сплошных сред. Давление	123
17.5. Идеальные жидкости и газы	125
17.6. Дифференциальные уравнения движения идеальных жидкостей или газов — уравнения Эйлера	126
17.7. Полная система механических уравнений для несжимаемых идеальных жидкостей	127
17.8. Полная система механических уравнений для баротропных процессов в сжимаемых идеальных жидкостях и газах	127
17.9. Граничное условие непроницаемости на поверхности твердого тела, находящегося в идеальной жидкости	128
Лекция 18	129
18.1. Вязкие жидкости и газы. Определение	129
18.2. Модель линейно-вязкой (ニュтоンовской) жидкости	131
18.3. О давлении в вязкой жидкости	133

18.4. Уравнения движения вязкой жидкости — уравнения Навье—Стокса	134
18.5. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости	135
Лекция 19	136
19.1. Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости	136
19.2. Модель упругой среды	137
19.3. Закон Гука для анизотропной и изотропной среды	137
19.4. Механический смысл коэффициентов упругости	140
Лекция 20	142
20.1. Система уравнений линейной теории упругости при изотермических процессах	142
20.2. Уравнения линейной теории упругости в перемещениях — уравнения Навье—Ламе	144
20.3. Граничные условия в задачах теории упругости	145
20.4. Температурные напряжения и деформации	146
Лекция 21	148
21.1. Теорема живых сил (уравнение кинетической энергии)	148
21.2. Работа внутренних поверхностных сил	152
21.3. Первый закон термодинамики — закон сохранения энергии . .	153
21.4. Закон сохранения энергии для индивидуального объема сплошной среды	154
Лекция 22	157
22.1. Закон сохранения энергии для пространственного объема, через который движется среда	157
22.2. Вектор потока тепла	158
22.3. Дифференциальное уравнение энергии	159
22.4. Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии) . .	160
22.5. Закон теплопроводности Фурье	161
Лекция 23	162
23.1. Уравнение притока тепла при теплопроводности в покоящейся среде	162
23.2. Совершенный газ	164
23.3. Второй закон термодинамики	167
23.4. Обратимые и необратимые процессы	168

Лекция 24	170
24.1. Второй закон термодинамики для индивидуального объема сплошной среды	170
24.2. Дифференциальное уравнение энтропии	171
24.3. Производство энтропии в процессе теплопроводности	172
24.4. Понятие некомпенсированного тепла	173
24.5. Неравенство Клаузиуса	174
Лекция 25	175
25.1. Тепловые машины	175
25.2. Тепловые машины, работающие по циклу Карно	176
25.3. Обратимый цикл Карно для совершенного газа	178
25.4. Эквивалентность физических формулировок второго закона термодинамики	181
Лекция 26	182
26.1. Теорема Карно о коэффициентах полезного действия (КПД) тепловых машин	182
26.2. Введение абсолютной температуры с помощью циклов Карно . .	185
26.3. Введение энтропии для системы, для которой определена температура	186
Лекция 27	189
27.1. Введение энтропии для системы, состоящей из подсистем с разными температурами	189
27.2. Вывод утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса из утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода	192
27.3. Выражение для притока энтропии извне для объема V сплошной среды	193
27.4. Введение энтропии без предположения о существовании температуры системы	194
27.5. Вывод утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода из утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса	197
Лекция 28	198
28.1. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах	198
28.2. Тангенциальные разрывы и ударные волны	202
Список обозначений	205
Литература	207

Предисловие

Механика сплошных сред объединяет и составляет общую основу различных наук о равновесии и движении деформируемых сред — газов, жидкостей, твердых деформируемых сред, таких как металлы или грунты. Важно, что в курсе механики сплошных сред излагаются общие подходы к математическому моделированию поведения различных сред, в том числе новых сред со сложными свойствами. Поэтому такой курс считается обязательным в большинстве университетов и высших технических учебных заведений.

Курс «Основы механики сплошных сред» читается в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова для студентов отделения механики механико-математического факультета в четвертом семестре. Он является введением к фундаментальному курсу, который читается в пятом и шестом семестрах, называется «Механика сплошных сред» и содержит более глубокое рассмотрение процессов, происходящих в сплошных средах, а также математических моделей, которые используются для их описания.

Предлагаемая книга основана на многолетнем опыте чтения лекций по курсам «Основы механики сплошных сред» и «Механика сплошных сред» для студентов как отделения механики, так и отделения математики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, для слушателей факультета повышения квалификации преподавателей высших учебных заведений, а также для студентов Российского государственного университета нефти и газа им. И. М. Губкина.

Эта книга представляет собой записи лекций по курсу «Основы механики сплошных сред», прочитанных автором на механико-математическом факультете МГУ в 2008 году. Материал разбит не по темам, а по лекциям, соответственно тому, что фактически было прочитано за два академических часа. При этом иногда начало лекции представляет собой очень краткий повтор той части содержания предыдущей лекции, которая необходима для понимания этой лекции.

Лекции охватывают следующие разделы: лагранжево и эйлерово описание процессов в сплошных средах; элементы тензорного исчисления; геометрические и кинематические понятия, используемые для описания движения и деформирования сплошных сред (тензоры деформаций и скоростей деформаций, вектор вихря и т. д.); универсальные физические законы сохранения; динамические и термодинамические понятия (тензоры напряжений и моментных напряжений, внутренняя энергия, энтропия и т. д.); дифференциальные уравнения и условия на поверхностях сильного

разрыва, следующие из законов сохранения; простейшие модели жидкостей, газов и упругих сред.

Курс, представленный в этой книге, во многом основан на идеях и подходах Л. И. Седова, автора классического двухтомного учебника «Механика сплошной среды» и основоположника курса механики сплошных сред в Московском университете. В частности, намеренно используются обозначения, принятые в учебнике Л. И. Седова, с целью облегчить чтение этого учебника, который является одним из основных по механике сплошных сред в нашей стране. Однако методика изложения материала в этих лекциях во многом отличается от принятой в учебнике Л. И. Седова; особенно это касается изложения основ термодинамики.

Основной целью автора было изложить материал как можно более доступно и выделить самое главное, не упоминая в ряде случаев некоторых деталей и математических ограничений, хотя и важных, но не обязательных, по мнению автора, при первоначальном знакомстве с основами механики сплошных сред.

При подготовке книги автору помогали студенты механико-математического факультета МГУ А. Кручинина, В. Козлицкий, И. Бородин, В. Копанев, О. Герасимова, А. Иванова, А. Копьев, И. Криворучко. Автор выражает им благодарность.

Автор благодарит заведующего кафедрой гидромеханики механико-математического факультета МГУ профессора В. П. Карликова и доцента этой кафедры Н. Е. Леонтьева, которые прочитали рукопись и сделали ряд полезных замечаний, а также профессора А. Г. Куликовского, чьи лекции и их обсуждение сделали для автора более ясными многие вопросы. В частности, изложение основ термодинамики в этой книге частично основано на работах, выполненных автором совместно с А. Г. Куликовским.

Автор надеется, что эта книга будет полезной для студентов, преподавателей и исследователей в области механики сплошных сред.

9 октября 2008 года.

Лекция 1

- 1.1. Предмет механики сплошных сред
- 1.2. Понятие сплошной среды
- 1.3. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты
- 1.4. Закон движения сплошной среды
- 1.5. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров
- 1.6. Материальная (индивидуальная) производная по времени
- 1.7. Формулы для вычисления ускорений по скоростям

1.1. Предмет механики сплошных сред

В механике сплошных сред изучается равновесие и движение деформируемых сред — газов, жидкостей, твердых деформируемых сред, например, металлов. Методами механики сплошных сред можно математически описать процессы, связанные с движением воздуха в атмосфере, воды в трубопроводах, реках, морях и океанах, вещества звезд и межзвездного пространства. Частью механики сплошных сред является биомеханика, изучающая движение крови и других жидкостей в живых организмах, работу мышц и костей и так далее. Механика сплошных сред применяется при расчете зданий и конструкций, автомобилей и ракет. Отдельными разделами механики сплошных сред являются следующие науки: гидромеханика, газовая динамика, теория упругости, теория пластичности и другие. В курсе «Основы механики сплошных сред» 1) даются общие основы этих наук и 2) описываются общие подходы к математическому моделированию поведения различных сред, в том числе сред с новыми сложными свойствами.

1.2. Понятие сплошной среды

Сплошная среда — это среда, заполняющая занятую ею область непрерывно, то есть в любом сколь угодно малом объеме этой области содержится масса. В действительности все среды имеют дискретное строение, состоят

из частиц, находящихся часто на большом (по сравнению с размерами частиц) расстоянии друг от друга. Например, радиус молекулы водорода $\sim 10^{-8}$ см, а радиус ядра (в котором, в основном, и сосредоточена масса) $\sim 10^{-13}$ см, то есть размер ядра в 100 000 раз меньше размера молекулы. Расстояние между молекулами в газе $\sim 10^{-5}$ см, то есть в 1000 раз больше, чем размер самой молекулы. Даже такое плотное вещество, как железо, состоит, в основном, из пустоты, в которую вкраплены частицы вещества: отношение плотности железа к плотности ядерного вещества $\rho_{\text{жел.}}/\rho_{\text{яд.вещ.}} = 7 \cdot 10^{-14}$.

В то же время расстояния между частицами обычно много меньше размеров изучаемых тел. Например, в воздухе при нормальных условиях в кубике со стороной 0,001 см содержится 27 миллиардов молекул.

Оказывается, если изучается явление, масштаб которого L много больше расстояния между частицами и размера частиц, то можно считать массу размазанной непрерывно по всей области, занятой средой, то есть использовать модель сплошной среды. Как потоки сплошной среды можно рассматривать даже потоки камней (камнепад на склоне горы), или зерна, или других крупных частиц, если ширина и глубина потока много больше размера частиц.

Если некоторая величина определена во всех точках рассматриваемой области, то мы говорим, что в этой области задано **поле этой величины**. Например, поле скорости — это совокупность скоростей всех точек среды в рассматриваемой области.

1.3. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты

Пространственная система координат — это система, связанная с пространством, относительно которого происходит движение. Координаты точек среды в пространственной системе координат называются пространственными или эйлеровыми координатами. Мы будем обозначать пространственные координаты через x^1, x^2, x^3 (с индексами наверху!). Для декартовых координат будем использовать и обычные обозначения x, y, z .

Знать движение среды означает знать, как меняются со временем пространственные координаты всех ее точек, то есть знать функции, задающие зависимость пространственных координат точек среды от времени. Для разных точек среды эти функции могут быть различными. Чтобы выделить индивидуальную точку среды, можно, например, использовать в качестве метки («имени») x_0^1, x_0^2, x_0^3 — значения ее координат в начальный момент времени.

При движении среды пространственные координаты индивидуальных точек среды являются функциями времени и «имени» точки:

$$x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Для параметров, выделяющих индивидуальные точки, часто используют обозначения ξ^i . Если эти параметры — начальные координаты, то $\xi^i = x_0^i$. Но необязательно брать в качестве ξ^i начальные координаты; можно использовать какие-нибудь функции начальных координат или координаты в какой-нибудь другой фиксированный момент времени. Важно, чтобы они отмечали индивидуальные точки и для каждой индивидуальной точки не менялись, куда бы эта точка ни двигалась.

Параметры ξ^i , которые выделяют индивидуальные точки среды, называются материальными или лагранжевыми координатами; для индивидуальной точки они не меняются в процессе движения.

1.4. Закон движения сплошной среды

Итак, при движении среды пространственные координаты ее индивидуальных точек являются функциями времени и лагранжевых координат:

$$x^i = x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Эти соотношения называются законом движения среды.

1.5. Два подхода к описанию движения: лагранжев и эйлеров

При описании движения по способу Лагранжа мы следим за тем, что происходит в каждой индивидуальной точке среды. Точки среды перемещаются, но мы следим за ними и описываем изменение скорости, температуры и т. д. каждой из них. Например, если мы хотим описать поток воздуха над поверхностью земли (ветер) по способу Лагранжа, то мы должны запустить в небо много воздушных шаров, снабженных измерительными приборами (причем устроить их так, чтобы сила Архимеда уравновешивалась с силой тяжести). Шары будут перемещаться вместе с частицами воздуха и измерять скорость и другие параметры этих частиц (рис. 1.1а). Математически лагранжево описание состоит в том, что все величины (скорость \vec{v} , температура T , давление p и т. д.) рассматриваются как функции времени и лагранжевых координат:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad T = T(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad p = p(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

При описании движения по способу Эйлера мы изучаем, что происходит в точках пространства, через которое движется среда. При этом нас не интересует, какие именно индивидуальные частицы проходят через рассматриваемую область пространства, где они были раньше и будут в дальнейшем, — нас интересует только то, что происходит в данной области, например в окрестности опоры моста или крыла самолета. Для описания упомянутого выше потока воздуха по способу Эйлера мы должны установить много вышек с измерительными приборами в интересующей нас

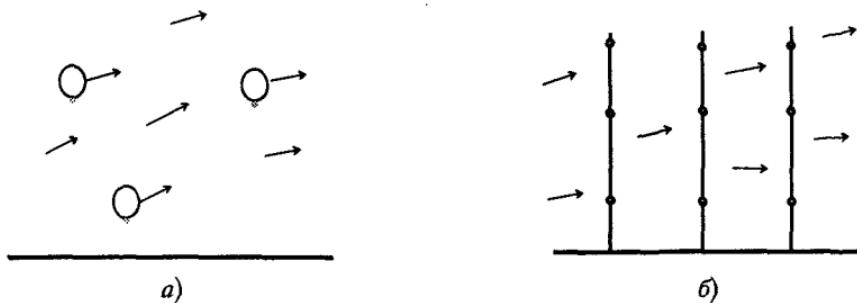


Рис. 1.1. а) Лагранжево описание: шары с измерительными приборами летят вместе с частицами воздуха; б) эйлерово описание: параметры воздушного потока измеряют приборы, помещенные на специальных мачтах

области пространства и измерять скорость ветра, температуру и другие параметры в местах, где стоят вышки (рис. 1.1б). Величины, характеризующие движение сплошной среды, рассматриваются при эйлеровом подходе как функции пространственных координат x^i и времени t

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x^1, x^2, x^3), \quad T = T(t, x^1, x^2, x^3), \quad p = p(t, x^1, x^2, x^3).$$

Еще одна иллюстрация лагранжева и эйлерова подходов к описанию движения приведена на рис. 1.2: Лагранж (который был моложе Эйлера на 30 лет) плывет по реке, следя за индивидуальными частицами, а Эйлер наблюдает все, что происходит в каждой точке выделенной области, сидя на берегу.

Два способа — способ Лагранжа и способ Эйлера — эквивалентны в том смысле, что если известно описание движения по одному из способов, то можно найти описание по другому способу (справедливости ради отметим, что на самом деле оба подхода были предложены впервые Эйлером).

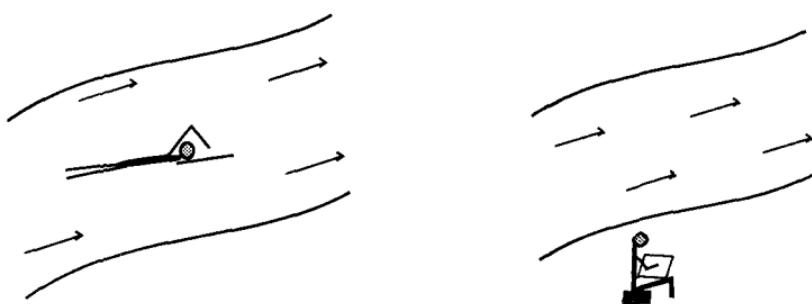


Рис. 1.2. а) лагранжев подход; б) эйлеров подход

Переход от лагранжева описания к эйлерову. Пусть известны все параметры, описывающие движение, как функции времени и лагранжевых координат, то есть известны

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad T = T(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad p = p(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

и т. д. В частности, известен закон движения

$$x^i = f^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Найдем из этих соотношений ξ^i как функции от x^i, t :

$$\xi^i = \xi^i(t, x^1, x^2, x^3), \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя эти выражения в функции

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad T = T(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad p = p(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

и т. д., найдем скорость, температуру и другие параметры как функции пространственных координат и времени, то есть в эйлеровом описании:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x^1, x^2, x^3), \quad T = T(t, x^1, x^2, x^3), \quad p = p(t, x^1, x^2, x^3).$$

Переход от эйлерова описания к лагранжеву. Пусть нам известны параметры среды с точки зрения Эйлера, в частности известны скорости среды во всех точках x^i во все моменты времени t , то есть известна функция $\vec{v}(t, x^1, x^2, x^3)$. Как найти закон движения? Как ввести лагранжевые координаты? По определению, компоненты скорости v^1, v^2, v^3 каждой точки равны производным по времени от ее пространственных координат:

$$\begin{aligned}\frac{dx^1}{dt} &= v^1(t, x^1, x^2, x^3), \\ \frac{dx^2}{dt} &= v^2(t, x^1, x^2, x^3), \\ \frac{dx^3}{dt} &= v^3(t, x^1, x^2, x^3).\end{aligned}$$

Эти соотношения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения x^i как функций времени. Для нахождения решения необходимо задать значения x^i в начальный момент времени. Если задано, что $x^1 = x_0^1, x^2 = x_0^2, x^3 = x_0^3$ при $t = 0$, то решение записывается в виде

$$x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Это и есть закон движения. Начальные координаты x_0^i можно взять в качестве лагранжевых координат. Вводя обозначения $x_0^i = \xi^i$, будем иметь $x^i = x^i(t, \xi^k)$, где для краткости через ξ^k обозначен набор ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Далее

мы часто будем набор координат обозначать одной буквой; например, когда мы пишем $\vec{v}(t, x^i)$, то имеем в виду $\vec{v}(t, x^1, x^2, x^3)$. Подставляя полученные выражения x^i через t , ξ^k в функции $\vec{v}(t, x^i)$, $T(t, x^i)$ и т. д., получим интересующие нас параметры как функции времени и лагранжевых координат, то есть в лагранжевом описании:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad T = T(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

1.6. Материальная (индивидуальная) производная по времени

Материальная, или индивидуальная, производная по времени от величины f описывает, как меняется со временем величина f в индивидуальной точке среды. Обычно в механике сплошных сред индивидуальная производная функции f обозначается df/dt .

Как вычисляется индивидуальная производная f по t , если f задана по способу Лагранжа, то есть $f = f(t, \xi^i)$? Так как для индивидуальной точки $\xi^i = \text{const}$, то, очевидно, индивидуальная производная при лагранжевом описании есть просто частная производная по t :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(t, \xi^i)}{\partial t}.$$

Здесь символом ξ^i обозначен набор ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Как вычисляется индивидуальная производная f по t , если f задана по способу Эйлера, то есть $f = f(t, x^i)$? Рассмотрим сначала частную производную по t при постоянных x^i , то есть $\partial f(t, x^i)/\partial t$. Эта производная называется локальной производной величины f по времени. Что она описывает? Она описывает изменение f со временем в фиксированной точке пространства. Отметим, что при нахождении локальной производной мы сравниваем значения, которые принимает f в данной точке пространства в разные моменты времени; при этом в разные моменты времени через данную точку проходят разные частицы, то есть мы сравниваем значения f в разных частицах. Локальная производная не дает сведений о том, как меняется f в индивидуальных частицах.

Теперь вернемся к вопросу о вычислении индивидуальной производной при эйлеровом описании. Для индивидуальной точки пространственные координаты x^i меняются со временем:

$$x^i = x^i(t, \xi^k).$$

Поэтому для индивидуальной точки f является сложной функцией времени: f зависит от t, x^i , а x^i зависят от t, ξ^k , и индивидуальная производная вычисляется как производная сложной функции:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(t, \xi^k)}{\partial t}.$$

В последнем члене в правой части этого равенства подразумевается суммирование по индексу i от 1 до 3; при этом использовано следующее соглашение о суммировании: если в одночленном выражении какой-то индекс повторяется дважды, то по этому индексу производится суммирование от 1 до 3. При этом обозначение индекса суммирования, очевидно, не существенно.

Формулу для индивидуальной производной можно переписать в другом виде, если учесть, что производные по времени от координат x^i при постоянных ξ^k есть компоненты скорости частицы:

$$\frac{\partial x^i(t, \xi^k)}{\partial t} = v^i.$$

Поэтому выражение для индивидуальной (материальной, полной) производной при эйлеровом описании таково:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial t} + v^1 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^3} \\ &= \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial t} + v^k \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Здесь в последнем выражении снова использовано соглашение о суммировании, то есть

$$v^k \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^k} = v^1 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial f(t, x^i)}{\partial x^3}.$$

1.7. Формулы для вычисления ускорений по скоростям

Ускорение индивидуальной точки есть скорость изменения ее скорости со временем, то есть

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

где $d\vec{v}/dt$ — индивидуальная производная по времени.

Если скорость задана по Лагранжу, то есть

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \xi^i),$$

то

$$\vec{a}(\xi^i, t) = \frac{\partial \vec{v}(t, \xi^i)}{\partial t}.$$

Если скорость задана по Эйлеру, то есть

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x^i),$$

то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial x^3} = \\ = \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial t} + v^i \frac{\partial \vec{v}(t, x^i)}{\partial x^i}.$$

В проекциях на координатные оси декартовой системы это равенство дает

$$a^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^3}, \\ a^2 = \frac{\partial v^2}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^2}{\partial x^3}, \\ a^3 = \frac{\partial v^3}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^3}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^3}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^3}{\partial x^3}.$$

Если координаты обозначены x, y, z , то формулы для компонент ускорения при эйлеровом описании имеют вид

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

В криволинейной системе координат формулы для компонент ускорения имеют более сложный вид (см. формулу (5.1) в лекции 5).

Замечание. Что такое лагранжева система координат?

При лагранжевом подходе к описанию движения обычно используется одна из двух различных лагранжевых систем координат: либо начальная, либо сопутствующая.

При использовании начальной лагранжевой системы мы приписываем все, что происходит с частицами среды, тем точкам, где частицы находились в начальный момент времени, несмотря на то, что частицы перемещаются в пространстве.

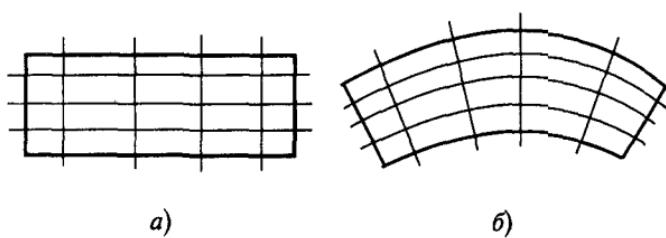


Рис. 1.3. Координатные линии сопутствующей лагранжевой системы координат
а) в момент $t = 0$; б) в момент $t = t_1 > 0$

Если же мы хотим относить все характеристики к текущему (актуальному) положению точек среды, то мы должны пользоваться так называемой сопутствующей лагранжевой системой координат. Очевидно, что для того, чтобы координаты точек в такой системе не менялись при движении, несмотря на перемещение и деформирование среды, сама координатная система должна двигаться и деформироваться вместе со средой. Сопутствующая лагранжева система, как правило, криволинейна (рис. 1.3).

Лекции 2–6 содержат краткое изложение основных понятий, связанных с использованием криволинейных систем координат и тензорного исчисления. Эти понятия важны для механики сплошных сред, так как основные характеристики, используемые для описания движения среды и действующих на нее сил, являются тензорами, а криволинейные системы координат часто удобны для формулировки и решения задач. В частности, сопутствующая лагранжева система координат, как правило, криволинейна.

Лекция 2

- 2.1. Криволинейные системы координат. Локальные ковариантные векторы базиса
- 2.2. Метрическая матрица. Контравариантные векторы базиса
- 2.3. Формулы преобразования векторов базиса и компонент метрической матрицы при переходе к другой системе координат

2.1. Криволинейные системы координат. Локальные ковариантные векторы базиса

Будем обозначать координаты точек через x^1, x^2, x^3 . Для декартовых координат будем использовать и обычные обозначения x, y, z . Через каждую точку области, где задана система координат, можно провести

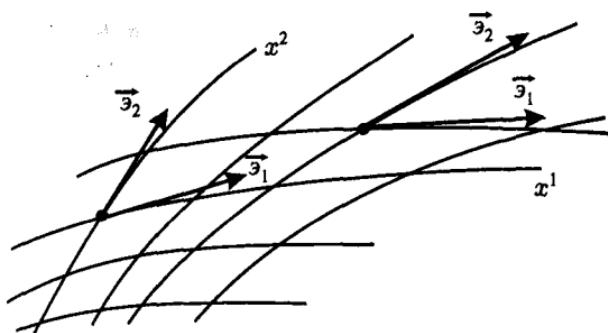


Рис. 2.1. Координатные линии и локальные векторы базиса криволинейной системы координат

в трехмерном пространстве три координатные линии. Координатные линии — это линии, на которых две координаты постоянны. Координатные поверхности — это поверхности, на которых одна из координат постоянна. В каждой точке области, где задана система координат, вводятся локальные так называемые **ковариантные векторы базиса** \vec{e}_i по формулам

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i},$$

где \vec{r} — радиус-вектор точки. Происхождение названия этих базисных векторов мы поймем в конце лекции.

Векторы \vec{e}_i направлены по касательным к координатным линиям, но длины их не равны единице, если координаты не являются длинами дуг вдоль координатных линий. Для вектора $d\vec{r}$, соединяющего точки с координатами x^i и $x^i + dx^i$, имеем

$$d\vec{r} = dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3 = dx^i \vec{e}_i.$$

Здесь мы снова используем «соглашение о суммировании»: в последнем члене подразумевается суммирование по i от 1 до 3. Получим формулу для квадрата расстояния между точками с координатами x^i и $x^i + dx^i$. По определению,

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\vec{r}|^2 = (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) = \\ &= ((dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3) \cdot (dx^1 \vec{e}_1 + dx^2 \vec{e}_2 + dx^3 \vec{e}_3)) = \\ &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dx^i dx^j. \end{aligned}$$

Здесь точка между векторами означает скалярное произведение и в последнем члене, как обычно, подразумевается суммирование по i и по j .

2.2. Метрическая матрица.

Контравариантные векторы базиса

Для скалярных произведений векторов базиса вводятся обозначения

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = g_{ij},$$

тогда формула для квадрата длины дуги принимает вид

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Матрица с компонентами g_{ij} называется **метрической**. Для декартовой системы координат

$$g_{ij} = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символы Кронекера (они равны 1 при $i = j$ и равны 0 при $i \neq j$). Определитель метрической матрицы, который будем обозначать буквой g , равен, как известно, квадрату объема параллелепипеда D , построенного

на векторах базиса \vec{e}_i . Формула для элемента объема, то есть для объема малого параллелепипеда со сторонами $dx^i \vec{e}_i$ (здесь суммирования по i нет!), имеет вид

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Обозначим компоненты матрицы, обратной метрической, через g^{ij} , и введем **контравариантные векторы базиса** \vec{e}^i по формулам

$$\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j. \quad (2.1)$$

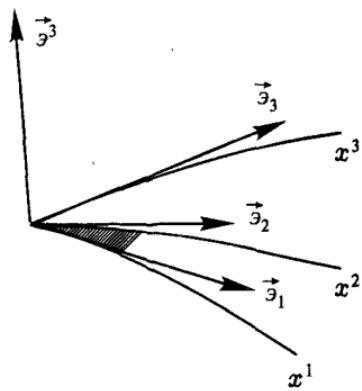


Рис. 2.2. Расположение базисных векторов \vec{e}_i и \vec{e}^i в случае, когда система координат не ортогональна

Покажем еще, что

$$g^{ij} = (\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j).$$

Действительно,

$$(\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j) = (g^{ik} \vec{e}_k \cdot g^{jl} \vec{e}_l) = g^{ik} g^{jl} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) = g^{ik} g^{jl} g_{lk} = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij}.$$

Разложим вектор $d\vec{r}$ по контравариантному базису. Обозначая его компоненты в этом базисе через dx_i , будем иметь

$$d\vec{r} = dx_i \vec{e}^i, \quad ds^2 = d\vec{r}^2 = g^{ij} dx_i dx_j.$$

Связи между компонентами вектора $d\vec{r}$ в ковариантном и контравариантном базисах таковы:

$$dx^k = g^{ki} dx_i, \quad dx_i = g_{ik} dx^k. \quad (2.2)$$

Например, первые из этих формул получаются приравниванием коэффициентов при \vec{e}_k в следующем выражении:

$$d\vec{r} = dx^k \vec{e}_k = dx_i \vec{e}^i = dx_i g^{ki} \vec{e}_k.$$

Вычислим скалярные произведения контравариантного вектора базиса на ковариантный:

$$\begin{aligned} (\vec{e}^i \cdot \vec{e}_k) &= |\vec{e}^i| |\vec{e}_k| \cos \alpha_{ik} = \\ &= g^{ij} (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \end{aligned}$$

Здесь α_{ik} — угол между векторами \vec{e}^i и \vec{e}_k , а δ_{ij}^k — символы Кронекера. Следовательно, **контравариантные векторы базиса направлены по нормалям к координатным поверхностям**. Действительно, из формулы 2.1 имеем, например, что $(\vec{e}^3 \cdot \vec{e}_1) = 0$, $(\vec{e}^3 \cdot \vec{e}_2) = 0$, то есть $\vec{e}^3 \perp \vec{e}_1$, и $\vec{e}^3 \perp \vec{e}_2$.

Для ортогональной декартовой системы координат ковариантные и контравариантные векторы базиса совпадают.

Замечание. Величины dx_i , компоненты вектора $d\vec{r}$ в контравариантном базисе, не являются дифференциалами некоторых новых координат x_i . Координаты x_i в общем случае вообще ввести нельзя: из второй группы формул (2.2) видно, что x_i можно ввести только тогда, когда дифференциальные формы $g_{ik}dx^k$ представляют собой полные дифференциалы. Чтобы это было так, коэффициенты g_{ik} должны удовлетворять известным условиям, которые, как правило, не удовлетворяются. Нетрудно проверить, что, например, в случае цилиндрических координат ($x^1 = R$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$) компоненты метрической матрицы g_{ik} не удовлетворяют условиям полного дифференциала для формы $g_{ik}dx^k$, следовательно величин x_i ввести нельзя.

2.3. Формулы преобразования векторов базиса и компонент метрической матрицы при переходе к другой системе координат

Теперь рассмотрим формулы преобразования векторов базиса и компонент метрической матрицы при переходе к другой системе координат. Пусть наряду с системой x^i мы вводим новую систему координат x'^i . Новые координаты связаны со старыми формулами

$$x'^i = x^i(x^1, x^2, x^3),$$

причем эти связи предполагаются непрерывными и дифференцируемыми, с отличным от нуля якобианом, так что можно написать и обратные формулы:

$$x^i = x^i(x'^1, x'^2, x'^3).$$

Далее нам понадобятся матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B взаимно обратны: $BA = E$. Действительно, произведение i -ой строки матрицы B на k -ый столбец матрицы A имеет вид

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k^i.$$

В старой системе координат мы ввели набор величин

$$\tilde{x}_i, \tilde{x}^i, g_{ij}, g^{ij}, dx^i, dx_i.$$

Как связаны с ними величины

$$\vec{e}_i', \vec{e}^{i'}, g_{ij}', g^{ij}, dx^{i'}, dx_i',$$

соответствующие новой системе координат? Проще всего (непосредственно из формул дифференцирования) получаются формулы преобразования для ковариантных векторов базиса и компонент вектора $d\vec{r}$ в этом базисе:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j, \quad \vec{e}_i' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} = \vec{e}_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}.$$

Далее

$$g_{ij}' = (\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j') = \left(\vec{e}_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \cdot \vec{e}_l \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \right) = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}},$$

$$dx_i' = g_{ij}' dx^{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} dx^m = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \delta_m^l dx^m = g_{kl} dx^l \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = dx_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}.$$

Для того, чтобы получить обратные формулы — перехода от координат со штрихами к координатам без штрихов — надо, очевидно, в написанных выше формулах просто стереть штрихи там, где они были, и поставить там, где их не было, то есть заменить штрихованные величины на нештрихованные и наоборот.

Получим формулы преобразования контравариантных векторов базиса, пользуясь инвариантностью вектора $d\vec{r}$ и формулами преобразования величин dx_i :

$$d\vec{r} = dx_i \vec{e}^i = dx_j' \vec{e}'^j = dx_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \vec{e}'^j,$$

отсюда

$$\vec{e}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \vec{e}'^j, \quad \vec{e}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \vec{e}^j.$$

Наконец,

$$g^{ij} = (\vec{e}^i \cdot \vec{e}^j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^l} g_{kl}.$$

Обратим внимание на то, что переход от старых величин к новым для всех величин **с нижними индексами** проводится с помощью матрицы B , то есть величины с нижними индексами при переходе к новой системе координат меняются по тому же закону (умножаются на ту же матрицу B), что и векторы базиса с нижними индексами, откуда и происходит название закона преобразования — «ковариантный» (от позднелат. со — вместе, с, одинаково и variare — видоизменять), а также и название самих векторов базиса с нижними индексами.

Для величин **с верхними индексами** переход от старых величин к новым происходит с помощью обратной матрицы A , контравариантно по отношению к основным (ковариантным) векторам базиса.

Лекция 3

- 3.1. Векторы как объекты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Физические компоненты вектора
- 3.2. Операции над векторами
- 3.3. Тензоры как объекты
- 3.4. Формулы преобразования компонент тензоров при переходе к другой системе координат

3.1. Векторы как объекты. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. Физические компоненты вектора

Мы будем рассматривать векторы и векторные поля, то есть векторы, заданные как функции координат точек в некоторой области. Например, мы будем далее рассматривать векторы скорости всех точек сплошных среды. Пусть в некоторой точке задан вектор \vec{v} . Рассмотрим разложения \vec{v} по локальным ковариантному и контравариантному базисам:

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_j \vec{e}^j.$$

Получим формулы преобразования компонент v^i и v_j , пользуясь тем, что вектор есть **инвариантный**, (то есть не зависящий от системы координат) объект. Будем, как и раньше, отмечать штрихом компоненты и векторы базиса в новой системе координат. Из свойства инвариантности вектора следует:

$$\vec{v} = v'^j \vec{e}'_j = v^i \vec{e}_i = v^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \vec{e}'_j.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при векторах базиса \vec{e}'_j , получаем

$$v'^j = v^i \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}.$$

Это контравариантный закон преобразования, поэтому компоненты v^i вектора \vec{v} в ковариантном базисе называются контравариантными компонентами. Аналогично

$$\vec{v} = v'_j \vec{e}'^j = v_i \vec{e}^i = v_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \vec{e}'^j,$$

откуда

$$v'_j = v_i \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}.$$

Это ковариантный закон (аналогичен закону преобразования основного базиса); поэтому v_j называются **ковариантными компонентами** вектора \vec{v} . В дальнейшем всегда расположение индекса вверху будет соответствовать контравариантному закону преобразования. Расположение индекса внизу соответствует ковариантному закону.

Выведем соотношения, связывающие ко- и контравариантные компоненты вектора:

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i = v_j \vec{e}^j = v^i g_{ij} \vec{e}^j = v_j g^{ij} \vec{e}_i.$$

Следовательно

$$v_j = v^i g_{ij}, \quad v^i = v_j g^{ij}.$$

Видим, что умножение на метрическую матрицу или обратную к ней «опускает» или «поднимает» индексы.

Замечание 1. В декартовой системе координат $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, поэтому $v_i = v^i$, то есть ко- и контравариантные компоненты векторов совпадают.

В механике и физике используются также компоненты векторов в других базисах. Например, при описании процесса в ортогональных криволинейных системах координат часто вводятся **единичные** векторы базиса, направленные по касательным к координатным линиям (заметим, что векторы \vec{e}_i в общем случае не единичные). **Компоненты векторов в таком единичном ортогональном базисе называются физическими.**

Продемонстрируем различие между ковариантными, контравариантными и физическими компонентами вектора на следующем примере.

Пусть точка движется по окружности радиуса 5 м со скоростью 1 м/с. Введем полярную систему координат

$$x^1 = R, \quad x^2 = \varphi$$

с началом в центре окружности. Координатные линии — радиусы ($\phi = \text{const}$) и окружности ($R = \text{const}$). Квадрат длины дуги в полярных координатах представляется в виде

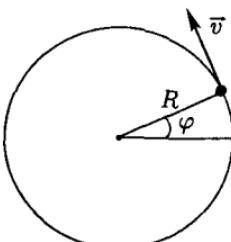
$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2.$$

Соответственно, компоненты метрической матрицы g_{ij} и обратной к ней — g^{ij} следующие:

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = R^2, \quad g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{R^2}.$$

Будем использовать наряду с ковариантными и контравариантными векторами базиса \vec{e}_i , \vec{e}^i также физические векторы базиса \vec{e}_i .

Рис. 3.1. Движение по окружности



Векторы $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}^1, \vec{e}_1$ направлены в каждой точке вдоль радиуса, а векторы $\vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}^2, \vec{e}_2$ — по касательной к окружности. Для модулей этих векторов имеем

$$|\vec{\varepsilon}_1| = \sqrt{g_{11}} = 1, \quad |\vec{\varepsilon}_2| = \sqrt{g_{22}} = R, \quad |\vec{e}_i| = 1.$$

$$|\vec{\varepsilon}^1| = \sqrt{g^{11}} = 1, \quad |\vec{\varepsilon}^2| = \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{R}.$$

Следовательно,

$$\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}^1 = \vec{e}_1, \quad \vec{\varepsilon}_2 = R\vec{e}_2, \quad \vec{\varepsilon}^2 = \frac{1}{R}\vec{e}_2.$$

В рассматриваемом движении вектор скорости точки представляется в виде

$$\vec{v} = v^2 \vec{\varepsilon}_2 = v_2 \vec{\varepsilon}^2 = v_{2\text{физ}} \vec{e}_2,$$

Имеем

$$v_{2\text{физ}} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v^2 = \frac{1}{R} v_{2\text{физ}} = 0,2 \frac{1}{\text{с}}; \quad v_2 = R v_{2\text{физ}} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Мы видим, что если система координат не декартова, то величины ковариантных и контравариантных компонент скорости, вообще говоря, зависят от длин векторов базиса и даже не имеют размерности скорости; физические компоненты дают более реальное представление о величине скорости.

Использование физических компонент удобно в практических расчетах, но вид уравнений при этом зависит от системы координат. В теории предпочтительно использовать инвариантный вид уравнений, а для этого нужно использовать ко- и контравариантные компоненты.

3.2. Операции над векторами

1. Умножение на число. При умножении вектора на число λ все его компоненты умножаются на это число:

$$\lambda \vec{v} = \lambda v^i \vec{\varepsilon}_i = \lambda v_j \vec{\varepsilon}^j.$$

2. Сложение. При сложении двух векторов компоненты суммы суть суммы соответствующих компонент слагаемых:

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_i + u_i) \vec{\varepsilon}^i = (v^j + u^j) \vec{\varepsilon}_j.$$

Складывать можно только компоненты с одинаковым строением индексов! Суммы компонент с одинаковым строением индексов представляют собой компоненты вектора, а с разным строением индексов — нет: они изменяются при переходе к другой системе координат не по закону изменения компонент вектора.

3. Скалярное умножение. Скалярное произведение векторов:

- а) есть скаляр, то есть не зависит от выбора системы координат;
- б) не зависит от порядка сомножителей;
- в) обладает свойством линейности, то есть

$$(\vec{w} \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v})) = \lambda(\vec{w} \cdot \vec{u}) + \mu(\vec{w} \cdot \vec{v}),$$

где λ, μ — скаляры.

Выразим скалярное произведение через компоненты перемножаемых векторов. Пусть $\vec{u} = u_i \vec{e}^i = u^j \vec{e}_j$, $\vec{v} = v_k \vec{e}^k = v^l \vec{e}_l$. Тогда

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (u_i \vec{e}^i \cdot v_k \vec{e}^k) = u_i v_k g^{ik},$$

или

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (u^j \vec{e}_j \cdot v^l \vec{e}_l) = u^j v^l g_{jl},$$

или

$$(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (u_i \vec{e}^i \cdot v^l \vec{e}_l) = u_i v^l \delta_l^i = u_i v^i = u^j v_j.$$

Обратим внимание, что в выражении скалярного произведения по всем индексам производится суммирование, причем один из индексов суммирования — верхний, а другой — нижний. Именно поэтому эта сумма — скаляр, то есть не меняется при переходе к другой системе координат: сомножители с верхними и нижними индексами преобразуются с помощью взаимно обратных матриц A и B . Нетрудно проверить, что, например, $\sum_{i=1}^3 u_i v_i$ в общем случае меняется при переходе к другой системе координат.

4. Тензорное («полиадное», «неопределенное», «внешнее») умножение. Рассмотрим сначала диадное произведение, то есть произведение двух векторов $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b^j \vec{e}_j$. Мы будем обозначать диадное произведение $\vec{a} \vec{b}$. Оно вводится следующим образом. Составим матрицу из всевозможных произведений компонент векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты этой матрицы по определению представляют собой **компоненты диадного произведения** $\vec{a} \vec{b}$. Свойства диадного произведения таковы.

- а) Оно зависит от порядка сомножителей: $\vec{a} \vec{b} \neq \vec{b} \vec{a}$.
- б) Диадное умножение — линейная операция: пусть $\vec{b} = \lambda \vec{c} + \mu \vec{d}$, где λ, μ — скалярные коэффициенты. Это значит, что $b^j = \lambda c^j + \mu d^j$; так как $a^i b^j = \lambda a^i c^j + \mu a^i d^j$, то $\vec{a} \vec{b} = \lambda \vec{a} \vec{c} + \mu \vec{a} \vec{d}$.

в) Диадное произведение любых двух векторов можно представить как линейную комбинацию диадных произведений векторов базиса. Если $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b^j \vec{e}_j$, то, согласно пункту (б),

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b^j \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Произведения $\vec{e}_i \vec{e}_j$ называют базисными диадами. Матрицы их компонент имеют вид

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

г) Диада есть объект, не зависящий от выбора системы координат. Действительно, покажем, что

$$a'^k b'' \vec{e}'_k \vec{e}'_l = a^i b^j \vec{e}_i \vec{e}_j = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Используя формулы преобразования компонент и базисных векторов, имеем

$$a'^k b'' \vec{e}'_k \vec{e}'_l = a^i b^j \vec{e}_m \vec{e}_n \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x''l}{\partial x^j} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \frac{\partial x^n}{\partial x''l} = a^i b^j \vec{e}_i \vec{e}_j = \vec{a} \cdot \vec{b},$$

так как

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = \delta_i^m, \quad \frac{\partial x''l}{\partial x^j} \frac{\partial x^n}{\partial x''l} = \delta_j^n.$$

Аналогично диадному произведению вводятся триадное $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ с компонентами $a^i b^j c^k$ и вообще **полиадное произведение** $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \dots \vec{q}$ с компонентами $a^i b^j c^k \dots q^n$.

3.3. Тензоры как объекты

Одно из определений тензора таково: **тензором называется инвариантный объект, представляющий собой линейную комбинацию полиадных произведений векторов базиса**. Число векторов базиса в соответствующих полиадных произведениях называется рангом тензора. Например, тензоры второго и третьего рангов записываются в виде

$$T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j, \quad H = H^{ijk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k.$$

Вектор можно назвать тензором первого ранга, а скаляр — тензором нулевого ранга. Коэффициенты при полиадных произведениях векторов базиса называются компонентами тензора. Сами полиадные произведения векторов базиса являются при этом базисными тензорами.

Для одного и того же тензора в одной и той же системе координат можно ввести разные наборы компонент — с разным строением индексов.

Рассмотрим, например, тензор второго ранга $T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$. Представляя второй вектор базиса в базисных диадах в виде разложения по контравариантному базису, будем иметь

$$T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T^{ij} \vec{e}_i g_{jk} \vec{e}^k = T^{ij} g_{jk} \vec{e}_i \vec{e}^k = T^i_k \vec{e}_i \vec{e}^k.$$

Здесь мы ввели обозначение

$$T^i_k = T^{ij} g_{jk},$$

причем то, что i — первый индекс, а k — второй, подчеркивается точками, поставленными на пропущенных местах.

Аналогично, представляя первый базисный вектор или оба базисных вектора в базисных диадах в виде разложения по контравариантному базису, получаем

$$T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T^j_k \vec{e}^k \vec{e}_j = T_{kl} \vec{e}^k \vec{e}^l,$$

где

$$T^j_k = T^{ij} g_{ki}, \quad T_{kl} = T^{ij} g_{ik} g_{jl}.$$

Таким образом, для тензора второго ранга можно ввести четыре разных набора компонент. В декартовых координатах все четыре набора совпадают.

Замечание 2. Как и для векторов, для тензоров при описании процессов в ортогональных криволинейных системах координат часто вводятся **физические компоненты** с использованием **единичных** векторов базиса \vec{e}_i , направленных по касательным к координатным линиям. Выражение физических компонент через ковариантные или контравариантные компоненты легко получить, пользуясь инвариантной записью тензора. Например, используя, что диагональные элементы метрической матрицы равны квадратам длин ковариантных векторов базиса, можно написать

$$T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \vec{e}_i \vec{e}_j = T_{\text{физ}}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Таким образом,

$$T^{ij} \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} = T_{\text{физ}}^{ij} \quad (\text{суммирования по } i, j \text{ нет}).$$

Часто при работе с ортогональными криволинейными координатами вводятся обозначения

$$\sqrt{g_{ii}} \equiv H_i.$$

Величины H_i называются коэффициентами Ламе.

3.4. Формулы преобразования компонент тензоров при переходе к другой системе координат

Получим формулы преобразования компонент тензора с различным строением индексов, пользуясь **инвариантностью тензора**, то есть его независимостью от выбора координат. Имеем

$$T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T'^{kl} \vec{e}'_k \vec{e}'_l = T'^{kl} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

Отсюда

$$T^{ij} = T'^{kl} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l}.$$

Эти формулы аналогичны формулам преобразования контравариантных компонент вектора. Компоненты T^{ij} называются контравариантными компонентами тензора T . Аналогично получаются формулы преобразования компонент с другим строением индексов, а также компонент тензоров более высокого ранга. Например,

$$T_{..k}^{ij} = T'^{lm} \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^n}{\partial x^k}. \quad (3.1)$$

Итак, компоненты тензоров преобразуются при переходе к другой системе координат как произведения компонент векторов. Иногда это свойство принимается за определение тензора.

Замечание 3. Из вида формул преобразования компонент тензора (3.1) следует, что если все его компоненты равны нулю в какой-то системе координат, то все они равны нулю и в любой другой системе. Тогда говорят, что тензор равен нулю.

Лекция 4

- 4.1. Фундаментальный метрический тензор
- 4.2. Операции над тензорами
- 4.3. Скалярные инварианты тензоров
- 4.4. «Теорема деления», или обратный тензорный признак

4.1. Фундаментальный метрический тензор

Фундаментальный метрический тензор определяется формулой

$$G = g_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j.$$

Пользуясь формулами преобразования компонент метрической матрицы g_{ij} и векторов базиса (см. лекцию 2), можно показать, что это инвариантный объект, то есть в любой системе координат x'^i

$$G = g'_{kl} \vec{e}'^k \vec{e}'^l.$$

Действительно,

$$G = g_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = g'_{kl} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^j}{\partial x'^n} \vec{e}'^m \vec{e}'^n = g'_{kl} \delta_m^k \delta_n^l \vec{e}'^m \vec{e}'^n = g'_{kl} \vec{e}'^k \vec{e}'^l.$$

Вычислим компоненты метрического тензора со смешанными индексами и контравариантные:

$$\begin{aligned} G &= g_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = g_{ij} g^{ik} \vec{e}_k \vec{e}^j = \delta_j^k \vec{e}_k \vec{e}^j = g_{ij} g^{jk} \vec{e}^i \vec{e}_k = \\ &= \delta_i^k \vec{e}^i \vec{e}_k = \delta_i^k g^{ij} \vec{e}_j \vec{e}_k = g^{kj} \vec{e}_j \vec{e}_k = g^{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k. \end{aligned}$$

Итак, компоненты метрического тензора со смешанными индексами суть δ_j^i , а контравариантные компоненты — g^{ij} .

4.2. Операции над тензорами

- 1. Сложение.** Компоненты суммы двух тензоров представляют собой суммы компонент складываемых тензоров. Подчеркнем, что
 - a) складывать можно только тензоры одинакового ранга;

б) складываются только компоненты с одинаковым строением индексов. Например, если $T_{..k}^{ij}$ и $H_{..k}^{ij}$ — компоненты тензоров, то суммы их компонент

$$C_{..k}^{ij} = T_{..k}^{ij} + H_{..k}^{ij}.$$

также являются компонентами тензора, ранг которого равен рангу складываемых тензоров. Это проверяется с использованием формул преобразования компонент тензоров. Легко видеть, что, например, суммы $T_{..k}^{ij} + H_{..k}^{ij}$ не являются компонентами тензора: они преобразуются при переходе к другой системе координат не по тензорному закону.

Из правила сложения тензоров и формул преобразования компонент тензора при переходе к другой системе координат следует, что если компоненты двух тензоров соответственно равны в какой-то системе координат:

$$T_{..k}^{ij} = B_{..k}^{ij}, \quad (4.1)$$

то они соответственно равны и во всех системах координат, то есть равенство (4.1) инвариантно относительно преобразований координат. Действительно, из (4.1) следует, что в исходной системе координат

$$P_{..k}^{ij} \equiv T_{..k}^{ij} - B_{..k}^{ij} = 0,$$

а так как $P_{..k}^{ij}$ — компоненты тензора, то из их равенства нулю в одной системе координат следует, что они равны нулю в любой системе координат. Это свойство и обуславливает широкое применение векторов и тензоров в физике. При соблюдении правильного расположения индексов у компонент векторов и тензоров, входящих в физические уравнения, запись этих уравнений будет одинаковой во всех системах координат, что очень удобно.

2. Умножение тензора на число. При умножении тензора на число все его компоненты умножаются на это число.

3. Тензорное умножение — это обобщение полиадного умножения векторов: всевозможные произведения компонент двух тензоров

$$T^{ij} H_{kl} = C_{..kl}^{ij..}$$

составляют компоненты тензора, ранг которого равен сумме рангов перемножаемых тензоров. Доказательство этого утверждения состоит в выводе формул преобразования $C_{..kl}^{ij..}$ на основе соответствующих формул для компонент перемножаемых тензоров.

4. Свертка. Свертку можно применять к тензорам, ранг которых больше или равен двум. Для того, чтобы провести свертку по каким-либо двум индексам, нужно взять компоненты, у которых один из этих индексов нижний, а другой — верхний. Затем выбрать те компоненты, у которых значения нижнего и верхнего индексов совпадают, и вычислить суммы

таких компонент для каждого фиксированного набора остальных индексов. Полученные суммы представляют собой компоненты тензора, ранг которого на 2 меньше ранга исходного тензора. Например,

$$T_{..j}^{ij} = C^i,$$

C^i — компоненты вектора. Для доказательства покажем, что C^i преобразуются при переходе от системы координат x^i к системе x'^i по правилу преобразования компонент вектора:

$$C'^\alpha = T'_{\beta}^{\alpha\beta} = T_{..k}^{ij} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\beta} = T_{..k}^{ij} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \delta_j^k = T_{..j}^{ij} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} = C^i \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}.$$

5. Свертка одного тензора с другим. Рассмотрим всевозможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого, причем хотя бы один индекс у компонент одного тензора — верхний, а у компонент другого тензора — нижний. Выделим пару индексов, верхний у компоненты одного сомножителя и нижний — у другого сомножителя; затем выберем те произведения, в которых выделенные верхний и нижний индексы одинаковы; затем рассмотрим суммы таких произведений при фиксированных наборах остальных индексов. Полученные суммы представляют собой компоненты тензора, ранг которого на 2 меньше суммы рангов сомножителей. Например, если T^{ij} — компоненты тензора 2-го ранга и H_{lmn} — компоненты тензора 3-го ранга, то $T^{ij} H_{jlmn}$ — компоненты тензора 3-го ранга.

4.3. Скалярные инварианты тензоров

С помощью сверток можно получать скалярные инварианты тензоров, то есть функции компонент тензоров, сохраняющие свои значения при преобразованиях координат. В частности, из компонент тензора второго ранга можно построить следующие инварианты:

$$J_1 = T_i^{ii}, \quad J_2 = T_{..j}^i T_{..i}^j, \quad J_3 = T_{..j}^i T_{..k}^j T_{..i}^k \quad \text{и т. д.}$$

С помощью формул преобразования компонент тензора доказывается, что приведенные выражения действительно сохраняют свои значения при преобразованиях координат. Заметим, что, например, сумма $\sum_{i=1}^3 T^{ii}$ не является инвариантом.

Из компонент тензора четвертого ранга можно построить, например, следующие инварианты:

$$A_{..j..i}^{i..j}, \quad A_{..k..l}^{i..j} A_{..j..i}^{k..l} \quad \text{и т. д.}$$

4.4. «Теорема деления», или обратный тензорный признак

«Теорема деления», или обратный тензорный признак формулируется следующим образом. Если какие-то числа в свертке с тензором, компоненты которого могут принимать произвольные значения, дают компоненты тензора, причем это справедливо в любой системе координат, то эти числа сами являются компонентами тензора. Например, пусть в любой системе координат выполняется соотношение

$$p^{ij} n_j = T^i, \quad (4.2)$$

причем о природе p^{ij} заранее ничего не известно, но известно, что n_j и T^i — компоненты векторов и n_j могут принимать произвольные значения (конечно, при разных значениях n_j получаются разные T^i). Покажем, что p^{ij} — компоненты тензора. В системе координат x'^i имеем

$$p'^{\alpha\beta} n'_\beta = T'^\alpha. \quad (4.3)$$

Используем в соотношениях (4.2) формулы преобразования для n_j и T^i :

$$p^{ij} n'_k \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} = T'^\beta \frac{\partial x^i}{\partial x'^\beta}.$$

Домножим обе части последнего равенства на $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}$ и проведем суммирование по i :

$$p^{ij} n'_k \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} = T'^\beta \frac{\partial x^i}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} = T'^\beta \delta_\beta^\alpha = T'^\alpha = p'^{\alpha\beta} n'_\beta = p'^{\alpha k} n'_k.$$

Здесь в последнем равенстве мы заменили индекс суммирования β на k , учитывая, что всегда обозначение индекса суммирования несущественно. Далее, так как n'_k могут принимать произвольные значения, то коэффициенты при n'_k должны быть равны, то есть

$$p'^{\alpha k} = p^{ij} \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}.$$

Это тензорный закон преобразования для p^{ij} .

Замечание. Другой формулировкой теоремы деления может служить следующее утверждение. Пусть компоненты одного тензора A суть линейные функции компонент другого тензора B и эти зависимости инвариантны относительно преобразований координат. Тогда коэффициенты этих линейных функций сами являются компонентами тензора, ранг которого равен сумме рангов тензоров A и B .

Лекция 5

- 5.1. Дифференцирование скалярной функции по координатам.
Вектор градиент
- 5.2. Дифференцирование вектора по координатам
- 5.3. Дифференцирование тензора любого ранга
- 5.4. Правила ковариантного дифференцирования
- 5.5. Ковариантные производные компонент метрического тензора

В механике сплошных сред, как правило, имеют дело с тензорными полями: в каждой точке области, занятой средой, вводятся некоторые тензорные величины. Таким образом, тензоры являются функциями координат, возможно, времени. Дальше эти функции предполагаются дифференцируемыми.

5.1. Дифференцирование скалярной функции по координатам. Вектор градиент

Рассмотрим скалярную функцию $\varphi(x^i, t)$. Частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ представляют собой ковариантные компоненты вектора, который называется градиентом φ и обозначается $\text{grad } \varphi$. Действительно, при переходе к другой системе координат x'^i , согласно формуле дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}.$$

Это закон преобразования ковариантных компонент вектора. Таким образом,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \vec{i}^i.$$

В декартовой системе координат x, y, z

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — векторы базиса.

Свойства вектора $\text{grad } \varphi$.

1) φ называется потенциалом вектора — градиента φ . Пример: потенциальная энергия точки с массой m , взятая со знаком «минус», является потенциалом силы тяжести \vec{F} . Если ось z направлена вертикально вверх, а величина ускорения силы тяжести есть g , то на массу m действует сила, компоненты которой равны

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg,$$

то есть

$$\vec{F} = \text{grad } \Pi, \quad \Pi = -mgz.$$

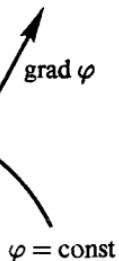


Рис. 5.1. $\text{grad } \varphi$ перпендикулярен поверхности $\varphi = \text{const}$

2) $\text{grad } \varphi$ направлен по нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$.

Действительно, если мы движемся вдоль поверхности $\varphi = \text{const}$, то $d\varphi = 0$, то есть $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0$, иными словами, $(\text{grad } \varphi \cdot d\vec{r}) = 0$, а это означает, что $\text{grad } \varphi$ перпендикулярен $d\vec{r}$, если $d\vec{r}$ направлен по касательной к поверхности $\varphi = \text{const}$.

3) Производная φ по любому направлению равна проекции $\text{grad } \varphi$ на это направление. Доказательство можно провести, например, следующим образом. Производная φ по направлению s по определению есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s},$$

где Δs — расстояние между близкими точками вдоль направления s . Если выбрать ось s в качестве оси x декартовой системы координат, то $\partial \varphi / \partial s = \partial \varphi / \partial x$, а эта частная производная есть проекция $\text{grad } \varphi$ на ось x , то есть на ось s .

В частности $\partial \varphi / \partial n$, где n — расстояние вдоль нормали \vec{n} к поверхности $\varphi = \text{const}$, есть проекция вектора $\text{grad } \varphi$ на самого себя; поэтому

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\text{grad } \varphi)_s = \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\vec{n} \cdot \vec{s}) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos \alpha,$$

где α — угол между \vec{n} и \vec{s} . Таким образом, направление $\text{grad } \varphi$ указывает направление наибольшего роста функции φ .

5.2. Дифференцирование вектора по координатам

Запишем вектор \vec{a} виде

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i.$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \vec{e}_i + a^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}.$$

В декартовой системе координат векторы базиса \vec{e}_i одинаковы во всех точках, $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = 0$, и компоненты производной от вектора равны просто производным от компонент вектора. Однако для криволинейной системы координат производные от векторов базиса \vec{e}_i по координатам в общем случае не равны нулю, за счет этого получается более сложная формула для компонент производной от вектора.

Обозначим коэффициенты разложения вектора $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k}$ по векторам базиса \vec{e}_l через Γ_{ik}^l :

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^l \vec{e}_l.$$

Функции Γ_{ik}^l называются коэффициентами связности или **символами Кристоффеля**. Имеем

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} \vec{e}_i + a^i \Gamma_{ik}^l \vec{e}_l = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^l \Gamma_{lk}^i \right) \vec{e}_i.$$

Комбинацию

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^l \Gamma_{lk}^i$$

называют **ковариантной производной** по x^k от контравариантной компоненты a^i . Для ковариантной производной разные авторы используют различные обозначения, например:

$$\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^l \Gamma_{lk}^i = \nabla_k a^i = a^i_{;k} = a^i_{,k}.$$

В этих лекциях мы будем использовать для ковариантной производной по x^k обозначение ∇_k (символ ∇ читается «набла»). Итак, формула для производной вектора по координате имеет вид

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \nabla_k a^i \vec{e}_i.$$

Пример. Формула, выражающая вектор ускорения через производные скорости, при эйлеровом описании имеет вид (см. лекцию 1)

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v^k \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^k}.$$

Тогда для компонент ускорения в криволинейной системе координат имеем

$$a^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i. \quad (5.1)$$

Некоторые свойства ковариантной производной.

1. В декартовых координатах все символы Кристоффеля равны нулю и ковариантная производная есть просто частная производная по координате

$$\nabla_k a^i \equiv \frac{\partial a^i}{\partial x^k}.$$

2. $\nabla_k a^i$ — компоненты тензора 2-го ранга (в то время как $\frac{\partial a^i}{\partial x^k}$ не являются компонентами тензора). Чтобы в этом убедиться, покажем, что линейная комбинация диадных произведений векторов базиса $\nabla_k a^i \vec{e}_i \vec{e}^k$ есть инвариантный объект:

$$\nabla'_l a^{ij} \vec{e}'_j \vec{e}^l = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^l} \vec{e}^l = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \vec{e}^m \frac{\partial x^l}{\partial x^m} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} \vec{e}^k = \nabla_k a^i \vec{e}_i \vec{e}^k.$$

Введем теперь ковариантную производную от ковариантных компонент вектора. Имеем

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^i, \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \vec{e}^i + a_i \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k}.$$

Обозначим коэффициенты разложения вектора $\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k}$ по векторам базиса \vec{e}^l через C_{lk}^i :

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k} = C_{lk}^i \vec{e}^l.$$

Покажем, что

$$C_{lk}^i = -\Gamma_{lk}^i.$$

Для этого продифференцируем по x^k соотношение $(\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j) = \delta_j^i$. Получим

$$\left(\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j \right) + \left(\vec{e}^i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \right) = 0,$$

то есть

$$C_{lk}^i (\vec{e}^l \cdot \vec{e}_j) + \Gamma_{jk}^l (\vec{e}^i \cdot \vec{e}_l) = C_{jk}^i + \Gamma_{jk}^i = 0.$$

Итак,

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k} = -\Gamma_{jk}^i \vec{e}^j.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \vec{e}^i + a_i \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_l \Gamma_{ik}^l \right) \vec{e}^i = \nabla_k a_i \vec{e}^i,$$

ковариантная производная от ковариантной компоненты вектора определяется формулой

$$\nabla_k a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_l \Gamma_{ik}^l.$$

5.3. Дифференцирование тензора любого ранга

Рассмотрим, например, тензор

$$T = T_{..k}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}^k.$$

Продифференцируем тензор T по координате x^m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x^m} &= \frac{\partial T_{..k}^{ij}}{\partial x^m} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}^k + T_{..k}^{ij} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^m} \vec{e}_j \vec{e}^k + T_{..k}^{ij} \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^m} \vec{e}^k + T_{..k}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \frac{\partial \vec{e}^k}{\partial x^m} = \\ &= \left(\frac{\partial T_{..k}^{ij}}{\partial x^m} + T_{..k}^{\alpha j} \Gamma_{\alpha m}^i + T_{..k}^{i\alpha} \Gamma_{\alpha m}^j - T_{..i}^{ij} \Gamma_{km}^\alpha \right) \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}^k = \nabla_m T_{..k}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}^k. \end{aligned}$$

Следовательно, формула для ковариантной производной компонент тензора третьего ранга имеет вид

$$\nabla_m T_{..k}^{ij} = \frac{\partial T_{..k}^{ij}}{\partial x^m} + T_{..k}^{\alpha j} \Gamma_{\alpha m}^i + T_{..k}^{i\alpha} \Gamma_{\alpha m}^j - T_{..i}^{ij} \Gamma_{km}^\alpha.$$

Аналогично получаются формулы для ковариантных производных компонент тензора любого ранга. В частности, ковариантная производная от скаляра есть, конечно, просто частная производная по координате:

$$\nabla_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Ковариантные производные тензора T представляют собой компоненты следующего тензора

$$\frac{\partial T}{\partial x^m} \vec{e}^m = \nabla_m T_{..k}^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}^k \vec{e}^m = \nabla T.$$

Иногда для этого тензора используется название «градиент тензора T ».

5.4. Правила ковариантного дифференцирования

- Правило ковариантного дифференцирования суммы:

$$\nabla_k (a^i + b^i) = \nabla_k a^i + \nabla_k b^i$$

проверяется непосредственным вычислением.

- Правило ковариантного дифференцирования произведения:

$$\nabla_k (a^i b^m) = (\nabla_k a^i) b^m + a^i \nabla_k b^m$$

проверяется непосредственным вычислением.

- Независимость производных высшего порядка от порядка дифференцирования:

$$\nabla_k \nabla_m a^i = \nabla_m \nabla_k a^i. \quad (5.2)$$

Это свойство выполняется не всегда! Если пространство евклидово, то есть можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат, то проверим равенство (5.2) в декартовой системе. В этой системе ковариантные производные равны просто частным производным по координатам. Частные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому в декартовой системе координат компоненты тензоров, стоящие слева и справа в соотношении (5.2), равны друг другу. Тогда они равны и в любой системе координат, то есть свойство (5.2) выполняется. Однако если пространство таково, что ввести декартову систему координат, единую для всего пространства, нельзя (пространство с кривизной), то свойство (5.2) не выполняется.

5.5. Ковариантные производные компонент метрического тензора

Ковариантные производные компонент метрического тензора равны нулю:

$$\nabla_m g_{ik} = 0, \quad \nabla_m g^{ik} = 0, \quad \nabla_m \delta_k^i = 0.$$

Эти равенства проверяются непосредственными вычислениями. Например, используя определения

$$g_{ik} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k), \quad \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^m} = \Gamma_{im}^l \vec{e}_l,$$

имеем

$$\begin{aligned} \nabla_m g_{ik} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - g_{ik} \Gamma_{im}^l - g_{il} \Gamma_{km}^l = \frac{\partial(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)}{\partial x^m} - g_{ik} \Gamma_{im}^l - g_{il} \Gamma_{km}^l = \\ &= \Gamma_{im}^l (\vec{e}_l \cdot \vec{e}_k) + \Gamma_{km}^l (\vec{e}_l \cdot \vec{e}_i) - g_{ik} \Gamma_{im}^l - g_{il} \Gamma_{km}^l = 0. \end{aligned}$$

Лекция 6

- 6.1. Свойства символов Кристоффеля
- 6.2. Тензор кривизны
- 6.3. Тензоры второго ранга. Разложение на сумму симметричного и антисимметричного тензоров
- 6.4. Тензорная поверхность. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора второго ранга
- 6.5. Инварианты симметричного тензора второго ранга
- 6.6. Разложение симметричного тензора на шаровой тензор и девиатор

6.1. Свойства символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля определяются формулами

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^l \vec{e}_l.$$

Они входят в выражение для ковариантных производных от компонент тензоров. Например, если $T = T_{,j}^i \vec{e}_i \vec{e}^j$, то

$$\frac{\partial T}{\partial x^k} = \nabla_k T_{,j}^i \vec{e}_i \vec{e}^j, \quad \nabla_k T_{,j}^i = \frac{\partial T_{,j}^i}{\partial x^k} + T_{j,l}^l \Gamma_{lk}^i - T_{i,l}^l \Gamma_{jk}^l.$$

Свойства символов Кристоффеля.

1. В трехмерном пространстве количество символов Кристоффеля — 27. Но в евклидовом пространстве (в котором можно ввести единую декартову систему координат) Γ_{ik}^l симметричны по нижним индексам, то есть

$$\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l.$$

Доказательство. В евклидовом пространстве можно ввести радиус-вектор \vec{r} и векторы базиса быть частные производные от \vec{r} по координатам. Тогда имеют место равенства

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i}.$$

Действительно,

$$\vec{\vartheta}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \vec{\vartheta}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial \vec{\vartheta}_k}{\partial x^i}.$$

Поэтому

$$\Gamma_{ik}^l \vec{\vartheta}_l = \Gamma_{ki}^l \vec{\vartheta}_l, \quad \text{то есть} \quad \Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l.$$

Следовательно, независимых Γ_{ik}^l может быть не более 18.

2. Γ_{ik}^l не являются компонентами тензора! Это видно, в частности, из того, что все они равны нулю в декартовой системе координат, и не все равны нулю — в криволинейной.

3. Если Γ_{ik}^l симметричны по нижним индексам, то они выражаются через компоненты метрического тензора и их производные по координатам по формулам:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right). \quad (6.1)$$

Замечание. Для доказательства формул (6.1) достаточно выполнение только двух условий: 1) возможность введения метрики и 2) симметрия Γ_{ik}^l по нижним индексам. Возможность введения единой для всего пространства декартовой системы координат не обязательна, пространство не обязательно должно быть евклидовым. Пространство, в котором выполнены перечисленные два условия, называется римановым.

6.2. Тензор кривизны

Рассмотрим смешанные ковариантные производные второго порядка. Непосредственным вычислением получается следующая формула

$$\nabla_i \nabla_j a^k - \nabla_j \nabla_i a^k = a^l R_{lij}^{...k},$$

где

$$R_{lij}^{...k} = \frac{\partial \Gamma_{lj}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{li}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k - \Gamma_{li}^m \Gamma_{mj}^k. \quad (6.2)$$

Тензор четвертого ранга с компонентами $R_{lij}^{...k}$ называется тензором кривизны. Если имеют место формулы (6.1), то компоненты тензора кривизны могут быть представлены как функции компонент метрического тензора и их первых и вторых производных по координатам:

$$R_{lij}^{...k} = R_{lij}^{...k} \left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\delta \partial x^\omega} \right).$$

В евклидовом пространстве $R_{lij}^{...k} = 0$. Для декартовой системы координат это свойство очевидно, так как в этой системе $g_{ij} = \text{const}$. Но так как $R_{lij}^{...k}$ — компоненты тензора, то из их равенства нулю в одной системе координат следует их равенство нулю во всех системах координат.

6.3. Тензоры второго ранга. Разложение на сумму симметричного и антисимметричного тензоров

Тензор второго ранга может быть представлен в любом из следующих четырех видов:

$$T = T^{ij} \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}_j = T_{ij} \bar{\varepsilon}^i \bar{\varepsilon}^j = T_j^i \bar{\varepsilon}_i \bar{\varepsilon}^j = T_i^j \bar{\varepsilon}^i \bar{\varepsilon}_j.$$

Тензор называется симметричным, если

$$T_{ij} = T_{ji}$$

и антисимметричным, если

$$T_{ij} = -T_{ji}.$$

Для симметричного тензора

$$T_j^i = T_j^i, \quad T_i^j = T_i^j, \quad T^{ij} = T^{ji}.$$

Докажем, например, первые из этих соотношений:

$$T_j^i = g^{ik} T_{kj} = g^{ik} T_{jk} = T_j^i.$$

Для антисимметричного тензора

$$T_j^i = -T_j^i, \quad T_i^j = -T_i^j, \quad T^{ij} = -T^{ji}.$$

Тензор второго ранга можно единственным образом разложить на сумму симметричного и антисимметричного тензоров. Действительно, пусть

$$T_{ij} = H_{ij} + \Omega_{ij}, \quad H_{ij} = H_{ji}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}, \quad \text{то есть} \quad T_{ji} = H_{ij} - \Omega_{ij}.$$

Складывая и вычитая первые и последние из этих равенств, получаем

$$H_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

6.4. Тензорная поверхность. Главные оси и главные компоненты симметричного тензора второго ранга

Тензорную поверхность для тензора второго ранга T по определению введем следующим образом. Пусть x^i — декартовы координаты с началом в той точке, где задан тензор T . Тензорной поверхностью тензора T называется поверхность второго порядка

$$T_{ij} x^i x^j = \text{const.}$$

На самом деле в уравнение тензорной поверхности входит только симметричная часть тензора, так как если Ω_{ij} — антисимметричный тензор, то

$$\Omega_{ij} x^i x^j \equiv 0.$$

Поэтому тензорную поверхность имеет смысл вводить только для симметричных тензоров. Поверхность $H_{ij}x^i x^j = \text{const}$ представляет собой (в случае общего положения) эллипсоид или гиперболоид. Для такой поверхности можно ввести главные оси. Главной системой координат для симметричного тензора второго ранга называется ортогональная декартова система, оси которой направлены по главным осям тензорной поверхности. В главных осях уравнение тензорной поверхности имеет вид

$$H_{11}(x^1)^2 + H_{22}(x^2)^2 + H_{33}(x^3)^2 = \text{const}.$$

Следовательно, в главных осях внедиагональные элементы матрицы H_{ij} равны нулю.

Замечание. На языке алгебры существование главной системы следует из теоремы о том, что всякую симметричную матрицу можно привести к диагональному виду. Для нас важно здесь подчеркнуть, что рассматриваемое преобразование к диагональному виду матрицы компонент тензора связано с переходом к главной системе координат и что главная система координат является по определению ортогональной декартовой, в частности векторы базиса в ней — единичные.

Для элементов, стоящих на главной диагонали, используются обозначения

$$H_{11} = H_1, \quad H_{22} = H_2, \quad H_{33} = H_3.$$

Кроме того, так как главная система — декартова, то

$$H^{ij} = H_{j\cdot i}^i = H_{ij}.$$

Компоненты симметричного тензора в главной системе координат называются **главными компонентами**.

6.5. Инварианты симметричного тензора второго ранга

Из компонент симметричного тензора второго ранга можно составить, например, следующие инварианты, то есть функции, значения которых не меняются при переходе к другой системе координат:

$$J_1 = H_{\cdot i}^i = H_{ij}g^{ij} = H^{ij}g_{ij} = H_1 + H_2 + H_3,$$

$$J_2 = H_{\cdot j}^i H_{\cdot i}^j = H_{ij}H^{ij} = H^{ij}H_{ij} = (H_1)^2 + (H_2)^2 + (H_3)^2,$$

$$J_3 = H_{\cdot j}^i H_{\cdot k}^j H_{\cdot i}^k = (H_1)^3 + (H_2)^3 + (H_3)^3,$$

$$J_4 = H_{\cdot j}^i H_{\cdot k}^j H_{\cdot l}^k H_{\cdot i}^l = (H_1)^4 + (H_2)^4 + (H_3)^4$$

и так далее. Часто используются также инварианты

$$I_1 = J_1, \quad I_2 = \frac{1}{2}J_1^2 - J_2 = H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_3 H_1, \quad I_3 = \det(H_j^i) = H_1 H_2 H_3.$$

Так как все инварианты симметричного тензора могут быть вычислены в главной системе координат через три главные компоненты, то независимых инвариантов симметричного тензора может быть не более трех. Нетрудно проверить, что в общем случае, когда все главные значения различны, инварианты J_1, J_2, J_3 являются независимыми. Эти инварианты называют соответственно первым, вторым и третьим инвариантами. В качестве системы независимых инвариантов используется также набор I_1, I_2, I_3 .

6.6. Разложение симметричного тензора на шаровой тензор и девиатор

Тензор называют **шаровым**, если его тензорная поверхность есть сфера, то есть все главные значения совпадают:

$$H_1 = H_2 = H_3 = \lambda.$$

Компоненты шарового тензора записываются в виде

$$H_{ij} = \lambda g_{ij}, \quad H^{ij} = \lambda g^{ij}, \quad H_j^i = \lambda \delta_j^i.$$

Эти равенства очевидны в главной системе координат (она декартова, в ней $g_{ij} = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символы Кронекера), а так как они тензорные, то они верны и в любой системе; таким образом, шаровой тензор имеет вид

$$H = \lambda G.$$

Так как для шарового тензора $I_1(H) = 3\lambda$, то есть $\lambda = \frac{1}{3}I_1(H)$, то его компоненты записываются также в виде

$$H_{ij} = \frac{1}{3}I_1(H)g_{ij}, \quad H^{ij} = \frac{1}{3}I_1(H)g^{ij}, \quad H_j^i = \frac{1}{3}I_1(H)\delta_j^i,$$

$$H = \frac{1}{3}I_1(H)G.$$

Девиатором $H^{(d)}$ тензора H называется тензор с компонентами, которые обозначаются $H_{ij}^{(d)}$ и определяются формулами

$$H_{ij}^{(d)} = H_{ij} - \frac{1}{3}I_1(H)g_{ij}, \quad H_i^{j(d)} = H_i^{j(d)} - \frac{1}{3}I_1(H)\delta_i^j.$$

Следовательно, любой тензор можно представить в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$H_{ij} = \frac{1}{3}I_1(H)g_{ij} + H_{ij}^{(d)}.$$

Девиатор характеризует отклонение тензора от шарового. Важным свойством девиатора является то, что его первый инвариант тождественно равен нулю:

$$I_1(H^{(d)}) = I_1(H) - \frac{1}{3}I_1(H) \cdot 3 \equiv 0.$$

Лекция 7

- 7.1. Антисимметричные тензоры второго ранга в трехмерном пространстве
- 7.2. Преобразование малой частицы при произвольном перемещении среды
- 7.3. Тензоры деформаций Грина и Альманси

7.1. Антисимметричные тензоры второго ранга в трехмерном пространстве

Рассмотрим **антисимметричные** тензоры второго ранга:

$$\Omega = \Omega_{ij} \tilde{e}^i \tilde{e}^j, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}.$$

Очевидно, все диагональные элементы антисимметричного тензора равны нулю. В трехмерном пространстве антисимметричные тензоры второго ранга имеют в общем случае только три независимые компоненты — столько же, сколько компонент имеет вектор (заметим, что это имеет место только в трехмерном пространстве). Оказывается, если ввести $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ по формулам

$$\omega^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega_{23}, \quad \omega^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega_{31}, \quad \omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega_{12}, \quad (7.1)$$

где g — определитель метрической матрицы (g_{ij}) , то $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ при переходе от системы координат x^i к системе x'^i преобразуются как контравариантные компоненты вектора, если определитель Δ матрицы $B = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right)$ положителен; если же этот определитель отрицателен, то при преобразовании все компоненты дополнительно меняют знак. Такие объекты называются аксиальными векторами. Формулы преобразования компонент аксиального вектора при переходе к системе x'^i имеют вид

$$\omega'^\gamma = \frac{\Delta}{|\Delta|} \omega^k \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k}, \quad (7.2)$$

то есть

$$\omega'^\gamma = \omega^k \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k}, \text{ если } \Delta > 0, \quad \omega'^\gamma = -\omega^k \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^k}, \text{ если } \Delta < 0.$$

Здесь

$$\Delta = |B| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{vmatrix}.$$

Для вывода формул (7.2) надо использовать 1) определение величин $\omega^1, \omega^2, \omega^3$, то есть формулы (7.1), 2) свойство антисимметрии Ω_{ij} , 3) формулы преобразования компонент Ω_{ij} и 4) формулу преобразования определителя метрической матрицы g при переходе к новой системе координат.

Выведем формулу преобразования определителя метрической матрицы g . Имеем

$$g'_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}.$$

Это соотношение в матричных обозначениях имеет вид

$$(G') = B^T(G)B.$$

Здесь (G') , (G) — метрические матрицы в системах координат x'^i, x^i соответственно. Далее

$$g' = \det(G') = \det B^T \det(G) \det B, \quad \det B^T = \det B = \Delta.$$

Поэтому

$$g' = g\Delta^2, \quad \text{то есть} \quad \sqrt{g'} = |\Delta|\sqrt{g}.$$

Теперь убедимся, что верны формулы (7.2). Вычислим, например, ω'^1 :

$$\begin{aligned} \omega'^1 &= \frac{1}{\sqrt{g'}} \Omega'_{23} = \frac{1}{|\Delta|\sqrt{g}} \Omega_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial x'^2} \frac{\partial x^n}{\partial x'^3} = \\ &= \frac{\Delta}{|\Delta|} \left(\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} - \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} + \frac{\Omega_{23}}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} - \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Omega_{31}}{\sqrt{g}} \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} - \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \right) = \frac{\Delta}{|\Delta|} \left(\omega^3 \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} + \omega^1 \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} + \omega^2 \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

При проведении этой выкладки мы умножили и разделили исходное выражение на Δ и учли, что коэффициенты при Ω_{12}/\sqrt{g} и т. д. представляют собой элементы матрицы A , обратной матрице B .

Итак, формулы (7.2) показывают, что если в какой-нибудь системе координат задан вектор $\vec{\omega} = \omega^k \vec{e}_k$, то при переходе к другой системе, хотя компоненты меняются, но сам вектор либо остается прежним, если $\Delta > 0$, либо меняет направление на обратное, если $\Delta < 0$. С этим связано название «аксиальный вектор»: этим вектором определяется ось, а направление вдоль оси зависит еще и от системы координат.

При каких преобразованиях координат $\Delta < 0$? Пусть, например, все оси правой декартовой системы (с конца вектора \vec{e}_1 переход от \vec{e}_2 к \vec{e}_3 виден происходящим против часовой стрелки) меняют направление на обратное (тогда получаем левую систему координат):

$$x'^1 = -x^1, \quad x'^2 = -x^2, \quad x'^3 = -x^3.$$

Тогда $\Delta = -1$. При этом, если \vec{v} — обычный, полярный вектор, а $\vec{\omega}$ — аксиальный, то

$$v'^i = v^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = -v^i, \quad \omega'^i = -\omega^k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} = \omega^i.$$

Направление \vec{v} осталось, как и полагается, прежним, а направление $\vec{\omega}$ изменилось на противоположное.

Примеры аксиальных векторов.

1) Векторное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} . В правой системе координат оно определяется формулой

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

2) Ротор вектора \vec{v} . В правой системе координат он записывается в виде:

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

В частности момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ является аксиальным вектором.

Замечание. Для ковариантных компонент аксиального вектора $\vec{\omega}$ верны формулы

$$\omega_k = \omega^l g_{lk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega^{ij},$$

где $g_1 = \frac{1}{g} = \det(g^{ij})$, i, j, k образуют круговую перестановку из 1, 2, 3.

7.2. Преобразование малой частицы при произвольном перемещении среды

Возвратимся к сплошной среде. Наша ближайшая задача — ввести количественные характеристики деформации. Деформация — это изменение длин всевозможных материальных отрезков и углов между ними. Следовательно, говоря о деформациях, мы сравниваем длины материальных отрезков в двух состояниях — начальном и конечном, деформированном. В разных частях тела деформации могут быть разными. Поэтому при введении количественных характеристик деформации мы рассматриваем малую окрестность некоторой точки M сплошной среды.

Сначала займемся общей геометрической картиной того, что происходит с деформируемой средой в результате перемещения ее точек. Рассмотрим два состояния некоторого объема среды (рис. 7.1а, б). Первое из них назовем начальным, а второе — конечным, или актуальным, или деформированным. Названия эти — условные, просто мы интересуемся деформациями во втором состоянии относительно первого. Можно было бы, наоборот, второе состояние считать начальным, а первое — деформированным, разогнутый брускок на рис. 7.1а получается из согнутого (рис. 7.1б) в результате некоторого деформирования.

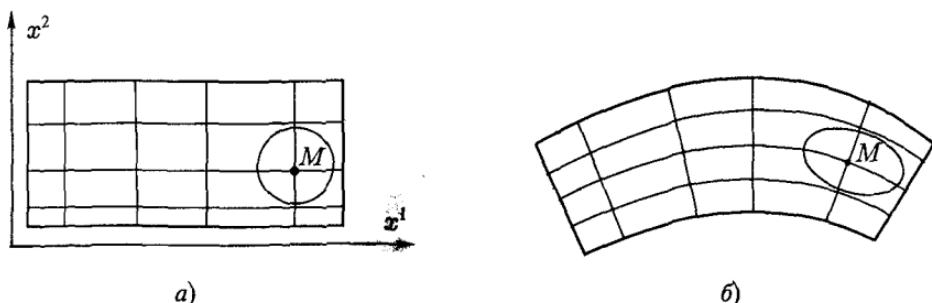


Рис. 7.1. а) Начальное состояние тела, б) деформированное состояние

Пусть x^i — некоторая пространственная система координат, будем ее для простоты считать декартовой. Координаты индивидуальных точек в начальном состоянии обозначим x_0^i , координаты тех же точек в конечном состоянии — x^i . Связи между старыми (начальными) и новыми (после деформации) координатами

$$x^i = x^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \quad (7.3)$$

считаем непрерывными и взаимно однозначными, что соответствует естественным предположениям, что 1) близкие точки переходят в близкие (разрывы вообще возможны, например разбрзгивание, но такие явления в дальнейшем можно рассмотреть отдельно) и 2) две разные точки среды

не оказываются одновременно в одной и той же точке пространства, и одна и та же точка среды не оказывается сразу в двух местах. Будем считать связи (7.3) дифференцируемыми. В остальном соотношения (7.3) могут быть произвольными, поэтому можно сказать только, что при непрерывном преобразовании среды линии переходят в линии, поверхности — в поверхности, объемы — в объемы, замкнутые линии и поверхности — в замкнутые линии и поверхности. Но если рассматривать только **малую** частицу среды, то о ее преобразовании можно сказать существенно больше.

Итак, рассмотрим малую частицу среды — малую окрестность некоторой произвольной точки M (рис. 7.1). Начальные координаты точки M обозначим x_0^i . Точку M далее условно будем называть центром частицы. Точки из малой окрестности точки M имеют в начальном состоянии координаты $x_0^i + dx_0^i$, так что если бы мы эту точку приняли за начало координат, то координаты всех точек из ее малой окрестности были бы dx_0^i . В конечном состоянии точка M имеет координаты x^i , а точки из ее окрестности — $x^i + dx^i$. Векторы $d\vec{r}_0$ с компонентами dx_0^i есть радиус-векторы точек относительно точки M в начальном состоянии, $d\vec{r}$ с компонентами dx^i — в конечном состоянии.

Так как $x^i = x_0^i(x_0^k)$, то

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} dx_0^k. \quad (7.4)$$

Итак, преобразование малой частицы есть 1) перенос вместе с центром и 2) преобразование всех малых векторов $d\vec{r}_0$ в векторы $d\vec{r}$. Все преобразование частицы, кроме поступательного переноса вместе с центром, называется дисторсией. Матрица $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \right)$ называется **матрицей дисторсии**. Она зависит от точки M , но не зависит от dx_0^k . Следовательно, преобразование малой частицы (7.4) — линейное, то есть аффинное. Перечислим некоторые свойства аффинных преобразований, которые делают ясной геометрическую картину того, что происходит с малой частицей сплошной среды.

1. При аффинных преобразованиях прямые переходят в прямые, параллельные прямые — в параллельные прямые, параллелограммы переходит в параллелограммы. Это значит, что все параллельные отрезки растягиваются в одинаковое число раз. Достаточно вычислить, например, относительное растяжение (или сжатие) отрезка, проходящего через точку M , а относительное растяжение (или сжатие) всех других отрезков из данной окрестности, имеющих то же направление, будет таким же.

2. Поверхности второго порядка переходят в поверхности второго порядка; в частности, сфера переходит в эллипсоид, причем сопряженные диаметры сферы переходят в сопряженные диаметры эллипсоида. У эллипсоида общего вида имеется одна тройка взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров и она возникла из сопряженных диаметров

сферы. У сферы все сопряженные диаметры взаимно перпендикулярны. Из всего сказанного можно сделать вывод, что при любом аффинном преобразовании существует по крайней мере одна тройка взаимно перпендикулярных осей, таких, что взаимно перпендикулярные прямые, бывшие до деформации параллельными этим осям, являются взаимно перпендикулярными и после деформации. Эти оси называются **главными осями деформации**. Главные оси можно отметить в положении до деформации и в положении после деформации. В этих двух положениях они, вообще говоря, повернуты друг относительно друга.

3. При аффинной деформации относительное изменение объема не зависит от формы объема. Поэтому для вычисления величины относительного изменения объема можно выбирать частицу любой удобной формы, например в виде сферы или в виде параллелепипеда.

Итог. При произвольном гладком преобразовании среды преобразование малой частицы комбинируется из

- 1) поступательного перемещения,
- 2) поворота, определяемого поворотом главных осей деформации,
- 3) растяжения или сжатия вдоль главных осей деформации.

7.3. Тензоры деформаций Грина и Альманси

Чтобы ввести тензоры деформаций, удобно поначалу воспользоваться лагранжевой системой координат ξ^i . Лагранжевы координаты — это параметры, которые для каждой индивидуальной точки фиксированы, не меняются, что бы с ней ни происходило. Поэтому у точки M координаты ξ^i и в начальном, и в деформированном состояниях — одни и те же, и относительные координаты индивидуальных точек окрестности, то есть $d\xi^i$, — одни и те же. Конечно, это значит, что сама система координат деформируется вместе со средой. Обозначим векторы базиса лагранжевой системы в точке M в начальном и конечном состояниях соответственно через \hat{e}_i , \tilde{e}_i , компоненты метрической матрицы — через \hat{g}_{ij} , \tilde{g}_{ij} (см. Таблицу 7.1).

Квадраты длин материальных отрезков, выходящих из точки M , в начальном и конечном состояниях соответственно равны $ds_0^2 = \hat{g}_{ij}d\xi^i d\xi^j$ и $ds^2 = \tilde{g}_{ij}d\xi^i d\xi^j$, причем величины $d\xi^i$, $d\xi^j$ в обеих последних формулах — одни и те же по определению лагранжевых координат.

Рассмотрим разность квадратов длин малых отрезков после и до деформации

$$ds^2 - ds_0^2 = (\tilde{g}_{ij} - \hat{g}_{ij})d\xi^i d\xi^j.$$

Введем обозначение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ij} - \hat{g}_{ij}). \quad (7.5)$$

Таблица 7.1

Начальное и конечное состояния малой окрестности точки M

	Начальное состояние	Деформированное состояние
Векторы базиса	$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$	$\widehat{\mathbf{e}}_i$
Компоненты метрической матрицы	\dot{g}_{ij}	\widehat{g}_{ij}
Координаты точки M	ξ^i	ξ^i
Координаты близких точек	$\xi^i + d\xi^i$	$\xi^i + d\xi^i$
Квадрат длины малого отрезка	$ds_0^2 = \dot{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$	$ds^2 = \widehat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j$

Тогда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j. \quad (7.6)$$

Тензором деформаций Грина (или лагранжевым тензором деформаций) называют тензор

$$\mathcal{E} = \varepsilon_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{e}}^i \overset{\circ}{\mathbf{e}}^j,$$
 (7.7)

где ε_{ij} определены формулами (7.5), а $\overset{\circ}{\mathbf{e}}^i$ — контравариантные векторы базиса лагранжевой системы координат в начальном состоянии.

Тензором деформаций Альманси (или эйлеровым тензором деформаций) называют тензор

$$\widehat{\mathcal{E}} = \varepsilon_{ij} \widehat{\mathbf{e}}^i \widehat{\mathbf{e}}^j,$$
 (7.8)

где ε_{ij} определены формулами (7.5), а $\widehat{\mathbf{e}}^i$ — контравариантные векторы базиса лагранжевой системы координат в деформированном состоянии.

Обсудим следующие 3 вопроса:

- Почему величины ε_{ij} — компоненты тензора?
- Почему ε_{ij} действительно описывают деформации?
- Зачем введен коэффициент $1/2$ в определении в формуле (7.5)?

Ответ на первый вопрос дается на основе соотношения (7.6). В этом соотношении слева стоит скаляр (так как длина отрезка не зависит от выбора системы координат и не меняется при преобразовании координат); справа стоит свертка величин ε_{ij} с компонентами тензора $d\xi^i d\xi^j$. Так как соотношение (7.6) выполняется при любом выборе системы координат и $d\xi^i, d\xi^j$ могут принимать произвольные значения, то ε_{ij} должны преобразовываться при переходе от одной системы координат к другой по формулам преобразования ковариантных компонент тензора второго ранга (теорема деления).

Ответ на второй вопрос также основан на соотношении (7.6). Из этого соотношения видно, что если $\varepsilon_{ij} = 0$ для всех i, j , то $ds^2 = ds_0^2$ для

любых $d\xi^i$, то есть длины всех отрезков не меняются, деформации нет. И наоборот, если для любых $d\xi^i$ имеем $ds^2 = ds_0^2$, то все $\varepsilon_{ij} = 0$. Наконец, и это главное, если известны ε_{ij} и выбран какой-то отрезок до деформации (т. е. известны ds_0^2 и $d\xi^i$), то длина этого отрезка после деформации вычисляется по формуле (7.6).

Ответ на третий вопрос найдем, когда будем рассматривать механический смысл компонент ε_{ij} .

Обсудим еще, почему оказалось возможным ввести два разных тензора (Грина и Альманси) с совпадающими в лагранжевой системе координат ковариантными компонентами. Это действительно разные тензоры, потому что их (совпадающие) компоненты относятся к разным базисным векторам: очевидно, что $\hat{\mathfrak{g}}^i \neq \mathfrak{g}^i$. В частности, компоненты этих тензоров с другим строением индексов не равны друг другу:

$$\hat{\varepsilon}_{\cdot j}^i = \varepsilon_{kj} \hat{g}^{ki}, \quad \varepsilon_{\cdot j}^i = \varepsilon_{kj} g^{ki}.$$

Почему же **одни и те же** ε_{ij} можно считать коэффициентами при **разных** базисных диадах $\hat{\mathfrak{g}}^i \hat{\mathfrak{g}}^j$ и $\mathfrak{g}^i \mathfrak{g}^j$, получая при этом тензоры? Это связано с тем, что рассматриваются **лагранжевые** координаты: при переходе от одной лагранжевой системы координат ξ^i к другой $\xi'^i(\xi^k)$ векторы базиса как начального, так и деформированного состояния преобразуются с помощью одной и той же матрицы

$$\hat{\mathfrak{g}}'^i = \hat{\mathfrak{g}}^i k \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^k}, \quad \mathfrak{g}'^i = \mathfrak{g}^i k \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^k}.$$

Поэтому обе формулы (7.7), (7.8) определяют инвариантные объекты, представляющие собой линейные комбинации базисных диад — тензоры.

Лекция 8

- 8.1. Механический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций Грина и Альманси в лагранжевой системе координат
- 8.2. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси, связи между ними
- 8.3. Формулы для величины относительного изменения объема при деформировании

8.1. Механический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций Грина и Альманси в лагранжевой системе координат

Для выяснения механического смысла ковариантных компонент тензоров деформаций Грина и Альманси в лагранжевой системе координат запишем формулу, определяющую эти компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \dot{\hat{g}}_{ij}), \quad (8.1)$$

учитывая, что

$$\hat{g}_{ij} = (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{\vartheta}_j) = |\vec{\vartheta}_i| |\vec{\vartheta}_j| \cos \psi_{ij}, \quad \dot{\hat{g}}_{ij} = (\ddot{\vec{\vartheta}}_i \cdot \vec{\vartheta}_j) = |\ddot{\vec{\vartheta}}_i| |\vec{\vartheta}_j| \cos \dot{\psi}_{ij},$$

где $\dot{\psi}_{ij}$, ψ_{ij} — углы между векторами базиса лагранжевой системы координат в начальном и конечном состояниях соответственно или, что то же

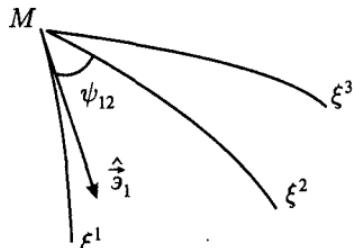
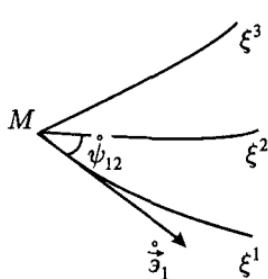


Рис. 8.1. Лагранжева система в точке M : а) в начальном состоянии, б) в конечном состоянии частицы

самое, между малыми материальными отрезками, лежащими вдоль лагранжевых координатных осей, до и после деформации (рис. 8.1). Таким образом,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(|\vec{\beta}_i| |\vec{\beta}_j| \cos \psi_{ij} - |\dot{\vec{\beta}}_i| |\dot{\vec{\beta}}_j| \cos \dot{\psi}_{ij} \right). \quad (8.2)$$

Введем коэффициент относительного удлинения e малого отрезка, начальная длина которого ds_0 , а конечная ds :

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Рассмотрим в начальном состоянии бесконечно малый вектор $d\vec{r}_0 = d\xi^i \dot{\vec{\beta}}_i$, лежащий вдоль оси ξ^i (рис. 8.2).

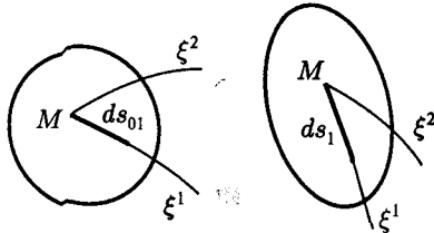


Рис. 8.2. Малая частица в начальном и конечном состояниях

Его длина $ds_{01} = d\xi^i |\dot{\vec{\beta}}_i|$. Если этот вектор соответствует материальному отрезку, то в результате деформации он переходит в вектор $d\vec{r} = d\xi^i \widehat{\vec{\beta}}_i$ с той же самой величиной $d\xi^i$; длина $d\vec{r}$ есть $ds_1 = d\xi^i |\widehat{\vec{\beta}}_i|$. Поэтому коэффициент относительного удлинения e_1 малого отрезка, лежащего вдоль оси ξ^i , есть

$$e_1 = \frac{ds_1 - ds_{01}}{ds_{01}} = \frac{d\xi^i |\widehat{\vec{\beta}}_i| - d\xi^i |\dot{\vec{\beta}}_i|}{d\xi^i |\dot{\vec{\beta}}_i|} = \frac{|\widehat{\vec{\beta}}_i|}{|\dot{\vec{\beta}}_i|} - 1.$$

Аналогично, для коэффициента относительного удлинения малого материального отрезка, лежащего вдоль оси ξ^i , имеем

$$e_i = \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}} = \frac{d\xi^i |\widehat{\vec{\beta}}_i| - d\xi^i |\dot{\vec{\beta}}_i|}{d\xi^i |\dot{\vec{\beta}}_i|} = \frac{|\widehat{\vec{\beta}}_i|}{|\dot{\vec{\beta}}_i|} - 1$$

(в этой формуле суммирования по i нет). Следовательно,

$$|\widehat{\vec{\beta}}_i| = (1 + e_i) |\dot{\vec{\beta}}_i| \quad (\text{суммирования по } i \text{ нет}).$$

Используя эти формулы, можно переписать выражения (8.2) в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [(1 + e_i)(1 + e_j) \cos \psi_{ij} - \cos \dot{\psi}_{ij}] |\dot{\vec{\beta}}_i| |\dot{\vec{\beta}}_j| \quad (8.3)$$

или в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\cos \psi_{ij} - \frac{\cos \dot{\psi}_{ij}}{(1+e_i)(1+e_j)} \right] |\dot{\vartheta}_i| |\dot{\vartheta}_j|. \quad (8.4)$$

Рассмотрим механический смысл компонент ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} . При $i = j$ имеем $\psi_{ii} = 0$, $\dot{\psi}_{ii} = 0$,

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2} [(1+e_i)^2 - 1] |\dot{\vartheta}_i|^2 = \left(e_i + \frac{1}{2} e_i^2 \right) |\dot{\vartheta}_i|^2.$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы компонент тензора деформаций связаны только с относительным удлинением отрезков, лежащих вдоль координатных осей. Если в начальном положении лагранжева система координат — декартова, то $|\dot{\vartheta}_i| = 1$, тогда

$$\varepsilon_{ii} = \left(e_i + \frac{1}{2} e_i^2 \right).$$

Если деформации малы, то есть $\frac{1}{2} e_i^2 \ll e_i$, то с точностью до малых первого порядка

$$\varepsilon_{ii} = e_i.$$

Итак, в случае малых деформаций диагональные элементы матрицы компонент тензора деформаций — это коэффициенты относительного удлинения материальных отрезков, лежащих вдоль координатных осей лагранжевой системы координат (если векторы базиса в начальном состоянии — единичные). Теперь ясно, зачем был введен множитель 1/2 в формуле (8.1), определяющей компоненты тензора деформаций. Без этого множителя диагональные компоненты тензора малых деформаций были бы равны удвоенным коэффициентам относительного удлинения соответствующих материальных отрезков.

Рассмотрим теперь механический смысл ε_{ij} при $i \neq j$. Формулы (8.3) и (8.4) показывают, что эти компоненты связаны как с относительными удлинениями волокон, лежащих вдоль осей ξ^i и ξ^j , так и с изменением углов между этими волокнами. Особенно ясным становится механический смысл ε_{ij} при $i \neq j$ в случае, когда в начальном положении лагранжева система координат — декартова. Тогда $|\dot{\vartheta}_i| = 1$, $\dot{\psi}_{ij} = \pi/2$ при $i \neq j$. Введем обозначение

$$\chi_{ij} = \dot{\psi}_{ij} - \psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \psi_{ij}.$$

Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (1+e_i)(1+e_j) \sin \chi_{ij} \quad \text{при } i \neq j.$$

В частности, если $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то $\chi_{ij} = 0$, $\psi_{ij} = \pi/2$, то есть первоначально прямые углы между волокнами вдоль координатных осей

лагранжевой системы координат остаются прямыми в результате такой деформации.

В случае малых деформаций $e_i \ll 1$, $\sin \chi_{ij} \approx \chi_{ij}$ и

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \chi_{ij} \quad \text{при } i \neq j.$$

Таким образом, в случае малых деформаций ε_{ij} при $i \neq j$ — это половина изменения угла между материальными отрезками, лежащими вдоль координатных осей ξ^i, ξ^j соответственно, если в начальном состоянии в качестве лагранжевой системы выбрана декартова система координат.

Итак, если система координат в начальном положении декартова, то в случае малых деформаций матрица компонент ε_{ij} такова:

$$\begin{pmatrix} e_1 & \frac{1}{2} \chi_{12} & \frac{1}{2} \chi_{13} \\ \frac{1}{2} \chi_{21} & e_2 & \frac{1}{2} \chi_{23} \\ \frac{1}{2} \chi_{31} & \frac{1}{2} \chi_{32} & e_3 \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Заметим, что в инженерной практике часто для описания деформаций используется матрица, аналогичная (8.5), но без множителей $1/2$ у вне-диагональных элементов. В практических расчетах, в которых нет нужды переходить от одной системы координат к другой, это вполне допустимо, надо только иметь в виду, что элементы такой матрицы не являются компонентами тензора.

8.2. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций Грина и Альманси, связи между ними

Выберем в качестве начальной лагранжевой системы главную систему координат для тензора Грина $\hat{\mathcal{E}}$ (это, в частности, значит, что она ортогональная декартова с единичными векторами базиса). Тогда

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_i$ — главные значения тензора $\hat{\mathcal{E}}$. Для лагранжевой системы в деформированном состоянии имеем $\hat{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}$, то есть метрическая

матрица имеет вид

$$(\hat{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + 2\hat{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2\hat{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\hat{\varepsilon}_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в деформированном состоянии лагранжева система снова ортогональная и матрица ε_{ij} — диагональная. Однако эта система не является главной для тензора деформаций $\hat{\mathcal{E}}$, потому что векторы базиса не единичные:

$$|\hat{\mathfrak{z}}_i| = \sqrt{\hat{g}_{ii}} = \sqrt{1 + 2\hat{\varepsilon}_i} = (1 + e_i)|\mathfrak{z}_i| = (1 + e_i). \quad (8.6)$$

Введем единичные векторы базиса \vec{e}_i , направленные по осям лагранжевой системы в деформированном состоянии:

$$\vec{e}_i = \frac{\hat{\mathfrak{z}}_i}{|\hat{\mathfrak{z}}_i|} = \frac{\hat{\mathfrak{z}}_i}{\sqrt{1 + 2\hat{\varepsilon}_i}} = \frac{\hat{\mathfrak{z}}^i}{|\hat{\mathfrak{z}}^i|} = \hat{\mathfrak{z}}^i \sqrt{1 + 2\hat{\varepsilon}_i}$$

(в рассматриваемой системе координат направления векторов $\hat{\mathfrak{z}}_i$ совпадают с направлениями векторов $\hat{\mathfrak{z}}^i$ и $|\hat{\mathfrak{z}}^i| = 1/|\hat{\mathfrak{z}}_i|$, так как система ортогональная). Система с векторами базиса \vec{e}_i будет главной для тензора $\hat{\mathcal{E}}$; обозначим его компоненты в этом базисе (главные компоненты) через $\hat{\varepsilon}_i$. Тензор $\hat{\mathcal{E}}$ записывается в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}} &= \varepsilon_{11}\hat{\mathfrak{z}}^1\hat{\mathfrak{z}}^1 + \varepsilon_{22}\hat{\mathfrak{z}}^2\hat{\mathfrak{z}}^2 + \varepsilon_{33}\hat{\mathfrak{z}}^3\hat{\mathfrak{z}}^3 = \\ &= \frac{\hat{\varepsilon}_1}{1 + 2\hat{\varepsilon}_1}\vec{e}_1\vec{e}_1 + \frac{\hat{\varepsilon}_2}{1 + 2\hat{\varepsilon}_2}\vec{e}_2\vec{e}_2 + \frac{\hat{\varepsilon}_3}{1 + 2\hat{\varepsilon}_3}\vec{e}_3\vec{e}_3 = \\ &= \hat{\varepsilon}_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + \hat{\varepsilon}_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + \hat{\varepsilon}_3\vec{e}_3\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Следовательно, связи между главными компонентами тензоров $\hat{\mathcal{E}}$ и \mathcal{E} таковы:

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{1 + 2\varepsilon_i}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{1 - 2\hat{\varepsilon}_i}, \quad 1 + 2\varepsilon_i = \frac{1}{1 - 2\hat{\varepsilon}_i}. \quad (8.7)$$

В случае **малых деформаций** $\varepsilon_i \ll 1$ и с точностью до малых высшего порядка

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i = e_i,$$

то есть главные значения тензоров Грина и Альманси совпадают. Однако так как базисные векторы в начальном и в деформированном состояниях в общем случае повернуты относительно друг друга, равенство главных значений не означает совпадения тензоров Грина и Альманси даже в случае малых деформаций.

Если малы не только деформации, но и относительные повороты, то с точностью до малых высшего порядка тензоры Грина и Альманси совпадают. Поэтому в теориях, предназначенных для описания малых деформаций и малых относительных поворотов, эти тензоры не различают и говорят просто о тензоре деформаций.

Отметим еще формулы, связывающие главные компоненты тензоров Грина и Альманси с коэффициентами относительного удлинения e_i отрезков, лежащих вдоль координатных осей, которые следуют из (8.6), (8.7):

$$1 + e_i = \sqrt{1 + 2\hat{\varepsilon}_i}, \quad 1 - e_i = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\hat{\varepsilon}_i}}. \quad (8.8)$$

8.3. Формулы для величины относительного изменения объема при деформировании

Так же, как тензор деформаций, величина относительного изменения объема есть локальная характеристика: разные части среды могут сжиматься или расширяться по-разному. Говоря о величине относительного изменения объема в некоторой точке среды, мы имеем в виду изменение объема малой частицы, содержащей эту точку. Так как преобразование малой окрестности любой точки среды при любой деформации является аффинным, то относительное изменение объема не зависит от формы объема. Для вычислений удобно взять частицу в форме параллелепипеда. А именно, возьмем в начальном состоянии в качестве лагранжевой системы координат декартову систему, оси которой направлены по главным осям тензора Грина. Рассмотрим малую частицу среды, имевшую в начальном состоянии форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, направленными по координатным осям, то есть параллелепипеда, построенного на векторах $d\xi^1 \hat{\varepsilon}_1$, $d\xi^2 \hat{\varepsilon}_2$, $d\xi^3 \hat{\varepsilon}_3$. Объем этого параллелепипеда равен

$$dV_0 = d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

При деформации этот параллелепипед переходит в параллелепипед, причем, так как в главной системе $\varepsilon_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то деформированный

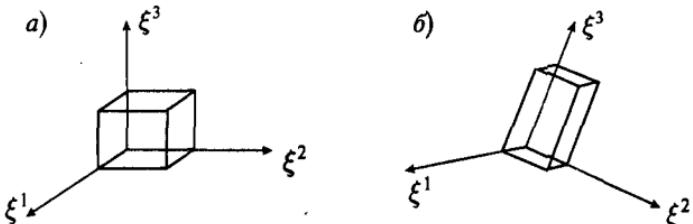


Рис. 8.3. Малый материальный параллелепипед:
а) в начальном состоянии, б) в деформированном состоянии

параллелепипед будет снова прямоугольным с ребрами $d\xi^1 \widehat{\mathfrak{I}}_1$, $d\xi^2 \widehat{\mathfrak{I}}_2$, $d\xi^3 \widehat{\mathfrak{I}}_3$; его объем равен

$$dV = |\widehat{\mathfrak{I}}_1||\widehat{\mathfrak{I}}_2||\widehat{\mathfrak{I}}_3|d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3.$$

С использованием формул (8.6), (8.8) получаем следующие две формулы для величины относительного изменения объема θ

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1)(1 + 2\varepsilon_2)(1 + 2\varepsilon_3)} - 1 = \\ &= \sqrt{1 + 2\widehat{I}_1 + 4\widehat{I}_2 + 8\widehat{I}_3} - 1, \\ \theta &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\widehat{\varepsilon}_1)(1 - 2\widehat{\varepsilon}_2)(1 - 2\widehat{\varepsilon}_3)}} - 1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\widehat{I}_1 + 4\widehat{I}_2 - 8\widehat{I}_3}} - 1. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь \widehat{I}_k , \widehat{I}_k — первый, второй и третий инварианты тензоров деформаций Грина и Альманси. Выражения первого, второго и третьего инвариантов через главные компоненты тензора и через компоненты в произвольной системе координат таковы:

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = g^{ij}\varepsilon_{ij},$$

$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij}),$$

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \det(\varepsilon_j^i).$$

Лекция 9

- 9.1. Компоненты тензоров деформаций Грина \mathcal{E} и Альманси $\widehat{\mathcal{E}}$ в пространственной системе координат
- 9.2. Выражение компонент тензоров деформации через производные от компонент вектора перемещения

9.1. Компоненты тензоров деформаций Грина \mathcal{E} и Альманси $\widehat{\mathcal{E}}$ в пространственной системе координат

В лекции 7 были введены тензоры \mathcal{E} и $\widehat{\mathcal{E}}$ с использованием лагранжевой системы координат. Повторим кратко этот вывод. Рассмотрим малую частицу сплошной среды и какую-нибудь точку M с координатами ξ^i внутри нее. Рассмотрим также точку M' с координатами $\xi^i + d\xi^i$, близкую к точке M . Вектор $\overrightarrow{MM'}$ в начальном состоянии есть $d\vec{r}_0 = d\xi^i \dot{\vartheta}_i$, а в конечном — $d\vec{r} = d\xi^i \dot{\vartheta}_i$, причем по определению лагранжевых координат компоненты $d\xi^i$ векторов $d\vec{r}_0$ и $d\vec{r}$ — одинаковы. Рассмотрим разность квадратов длин материального отрезка $\overrightarrow{MM'}$ в конечном и начальном состояниях:

$$|d\vec{r}|^2 - |d\vec{r}_0|^2 = ds^2 - ds_0^2 = \widehat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j - g_{ij} d\xi^i d\xi^j = (\widehat{g}_{ij} - g_{ij}) d\xi^i d\xi^j.$$

Введем обозначение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\widehat{g}_{ij} - g_{ij}).$$

Тогда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j. \quad (9.1)$$

Так как ε_{ij} в свертке с компонентами тензора $d\xi^i d\xi^j$ дают скаляр, то ε_{ij} — компоненты тензора, причем, если $d\xi^i$ понимаются как компоненты вектора $d\vec{r}_0$ в базисе $\dot{\vartheta}_i$ в начальном состоянии, то ε_{ij} должны быть компонентами тензора тоже в базисе $\dot{\vartheta}_i$. Соответственно, вводится тензор

$$\mathcal{E} = \varepsilon_{ij} \dot{\vartheta}^i \dot{\vartheta}^j$$

— тензор деформаций Грина.

Если же $d\xi^i$ понимаются как компоненты вектора $d\vec{r}$ в базисе $\vec{\mathfrak{g}}_i$ в деформированном состоянии, то ε_{ij} должны быть компонентами некоторого тензора в базисе $\widehat{\vec{\mathfrak{g}}}_i$. Соответственно, вводится тензор

$$\widehat{\mathcal{E}} = \varepsilon_{ij} \widehat{\vec{\mathfrak{g}}}^i \widehat{\vec{\mathfrak{g}}}^j$$

— тензор деформаций Альманси.

Итак, в лагранжевой системе координат для ковариантных компонент как тензора Грина, так и тензора Альманси верны формулы

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\widehat{g}_{ij} - g_{ij}).$$

Получим выражения для компонент тензоров деформаций в пространственной системе координат x^i . Эта система может быть криволинейной, тогда векторы базиса $\vec{\mathfrak{g}}_i$ и компоненты метрической матрицы g_{ij} — функции координат. Пусть в начальном состоянии координаты точки M есть x_0^i , а координаты точки M' есть $x_0^i + dx_0^i$. Тогда $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r}_0 = dx_0^i \vec{\mathfrak{g}}_i(x_0^i)$. В конечном же состоянии координаты точки M есть x^i и координаты точки M' есть $x^i + dx^i$, а $\overrightarrow{MM'} = d\vec{r} = dx^i \vec{\mathfrak{g}}_i(x^i)$. Здесь, как обычно, под x^i , когда они выступают как аргументы в обозначении функций от координат, нужно понимать набор x^1, x^2, x^3 ; например

$$dx^i \vec{\mathfrak{g}}_i(x^i) = dx^1 \vec{\mathfrak{g}}_1(x^1, x^2, x^3) + dx^2 \vec{\mathfrak{g}}_2(x^1, x^2, x^3) + dx^3 \vec{\mathfrak{g}}_3(x^1, x^2, x^3).$$

Рассмотрим разность квадратов длин материального отрезка MM' в конечном и начальном состояниях

$$ds^2 - ds_0^2 = g_{ij}(x^i) dx^i dx^j - g_{ij}(x_0^i) dx_0^i dx_0^j, \quad (9.2)$$

где x_0^i, x^i — координаты одной и той же индивидуальной точки в начальном и деформированном состояниях. Координаты точек в деформированном состоянии связаны с их координатами в начальном положении: $x^i = x^i(x_0^k)$ и, соответственно, наоборот $x_0^k = x_0^k(x^i)$. Поэтому

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} dx_0^k, \quad dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x_0^l} dx_0^l.$$

Вернемся к рассмотрению разности квадратов длин отрезков в деформированном и начальном состояниях. Подставив в равенство (9.2) выражение для dx^i через dx_0^k , получим

$$ds^2 - ds_0^2 = g_{ij}(x^i) \frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \frac{\partial x^j}{\partial x_0^l} dx_0^k dx_0^l - g_{ij}(x_0^i) dx_0^i dx_0^j.$$

Заменим в первом слагаемом в правой части индексы суммирования i на k , k на i , а также j на l , l на j . Тогда выражение для разности

квадратов длин малого отрезка после и до деформации запишется в виде

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(g_{kl}(x^i) \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^l}{\partial x_0^j} - g_{ij}(x_0^i) \right) dx_0^i dx_0^j.$$

Вводя обозначения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{kl}(x^i) \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^l}{\partial x_0^j} - g_{ij}(x_0^i) \right) \quad (9.3)$$

получим следующую формулу:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_0^i dx_0^j. \quad (9.4)$$

Сравнивая формулы (9.1) и (9.4), в первой из которых нужно предполагать лагранжеву систему координат в начальном состоянии совпадающей с пространственной, видим, что ε_{ij} , определяемые формулой (9.3), являются компонентами тензора деформаций Грина в пространственной системе координат.

Если пространственная система координат является декартовой, то $g_{kl} = \delta_{kl}$; поэтому для компонент тензора $\hat{\mathcal{E}}$ в декартовой системе координат верны формулы

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j} - \delta_{ij} \right). \quad (9.5)$$

Можно также пойти по второму пути вычисления $ds^2 - ds_0^2$, выразив dx_0^i через dx^k , тогда

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= g_{ij}(x^i) dx^i dx^j - g_{ij}(x_0^i) dx_0^i dx_0^j = \\ &= g_{ij}(x^i) dx^i dx^j - \underbrace{g_{ij}(x_0^i) \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \frac{\partial x_0^j}{\partial x^l} dx^k dx^l}_{i \rightleftharpoons k, j \rightleftharpoons l} = \\ &= \left(g_{ij}(x^i) - g_{kl}(x_0^i) \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^l}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j, \end{aligned}$$

то есть

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\hat{\varepsilon}_{ij} dx^i dx^j, \quad (9.6)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij}(x^i) - g_{kl}(x_0^i) \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} \frac{\partial x_0^l}{\partial x^j} \right). \quad (9.7)$$

Формулы (9.7) дают выражения для $\hat{\varepsilon}_{ij}$ — компонент тензора деформаций Альманси в пространственной системе координат, в чем можно убедиться, если сравнить формулы (9.6) и (9.1), считая в формуле (9.1) лагранжеву систему в конечном состоянии совпадающей с пространственной.

Если пространственная система координат — декартова, то компоненты метрической матрицы в ней имеют вид $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда выражения для компонент тензора Альманси принимают вид

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^j} \right). \quad (9.8)$$

9.2. Выражение компонент тензоров деформации через производные от компонент вектора перемещения

Вектором перемещения \vec{w} индивидуальной точки среды M называется вектор, соединяющий точки, где находится индивидуальная точка M в начальном и конечном состояниях среды:

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

где \vec{r}_0 , \vec{r} — радиус-векторы точки M в начальном и конечном состояниях. Ясно, что если мы знаем векторы перемещения всех точек, то можно вычислить компоненты тензора деформаций.

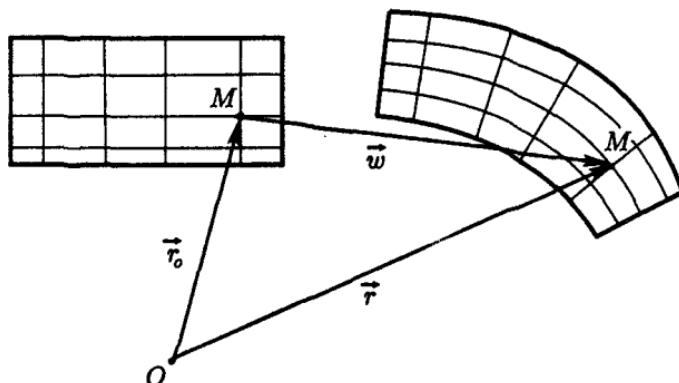


Рис. 9.1. Вектор перемещения индивидуальной точки M

Будем выводить формулы, пользуясь лагранжевой системой координат ξ^i .

Продифференцируем вектор перемещения по координате ξ^i :

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \hat{\vartheta}_i - \dot{\vartheta}_i.$$

Из этой формулы получаем

$$\hat{\vartheta}_i = \dot{\vartheta}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \quad \dot{\vartheta}_i = \hat{\vartheta}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}.$$

Рассмотрим компоненты тензора деформации, используя выражения для компонент метрической матрицы в виде скалярных произведений векторов базиса $g_{ij} = (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{\vartheta}_j)$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\widehat{g}_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}((\widehat{\vec{\vartheta}}_i \cdot \widehat{\vec{\vartheta}}_j) - (\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j)). \quad (9.9)$$

Воспользовавшись только что выведенным выражением для $\widehat{\vec{\vartheta}}_i$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\left(\left(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) \right) - (\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j \right) + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i \right) + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) \right). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Так как векторы \vec{w} можно разложить как по ковариантному базису $\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_k$:

$$\vec{w} = \dot{w}^k \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_k,$$

так и по контравариантному базису $\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k$:

$$\vec{w} = \dot{w}_k \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k,$$

то

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \nabla_i \dot{w}^k \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_k, \quad \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \nabla_i \dot{w}_k \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k.$$

Подставив эти выражения в равенство (9.10), будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\nabla_i \dot{w}_k \underbrace{(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j)}_{\delta_j^k} + \nabla_j \dot{w}_k \underbrace{(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i)}_{\delta_i^k} + \nabla_i \dot{w}^k \nabla_j \dot{w}_l \underbrace{(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_k \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^l)}_{\delta_k^l} \right].$$

С учетом того, что $(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}^k \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j) = \delta_j^k$, получаем выражения ковариантных компонент тензоров деформаций в лагранжевой системе координат через производные от компонент вектора перемещения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{w}_j + \nabla_j \dot{w}_i + \nabla_i \dot{w}^k \nabla_j \dot{w}_k). \quad (9.11)$$

Еще одна формула для ε_{ij} через w_k может быть получена, если в формуле (9.9) воспользоваться выражением для векторов базиса в начальном состоянии через векторы базиса в конечном состоянии и производные вектора перемещения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} ((\widehat{\vec{\vartheta}}_i \cdot \widehat{\vec{\vartheta}}_j) - (\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\widehat{\vec{\vartheta}}_i \cdot \widehat{\vec{\vartheta}}_j \right) - \left(\left(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left(\overset{\circ}{\vec{\vartheta}}_j - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \widehat{\vec{\vartheta}}_j \right) + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \cdot \widehat{\vec{\vartheta}}_i \right) - \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) \right). \end{aligned}$$

На этот раз используем компоненты \vec{w} в базисе деформированного состояния: $\vec{w} = \widehat{w}_k \widehat{\mathcal{E}}^k$. Получаем формулу

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \widehat{w}_j + \nabla_j \widehat{w}_i - \nabla_i \widehat{w}^k \nabla_j \widehat{w}_k). \quad (9.12)$$

Обе формулы (9.11) и (9.12) верны для компонент ε_{ij} в лагранжевой системе координат.

В пространственной системе координат формулы (9.11) верны для компонент тензора \mathcal{E} , а формулы (9.12) верны для компонент тензора $\widehat{\mathcal{E}}$. При этом в первом случае вектор перемещения \vec{w} нужно рассматривать как функцию координат его начала: $\vec{w} = w^i(x_0^k) \mathcal{E}_i(x_0^k)$, а во втором — как функцию координат его конца: $\vec{w} = w^i(x^k) \mathcal{E}_i(x^k)$.

Рассмотрим случай, когда производные компонент вектора перемещения малы, т. е. $\nabla_i w_k \ll 1$, или $\nabla_i w_k \nabla_j w^k \ll \nabla_i w_k$. Если нелинейными членами в выражениях компонент тензора деформаций через производные компонент вектора перемещения пренебречь (так как они — малые высшего порядка), то получим теорию, которая называется **геометрически линейной**.

Каков физический смысл условия малости производных вектора перемещения? Рассмотрим, например, связь между $\widehat{\mathcal{E}}_i$ и \mathcal{E}_i :

$$\widehat{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \mathcal{E}_i + \nabla_i \dot{w}^k \mathcal{E}_k = (\delta_i^k + \nabla_i \dot{w}^k) \mathcal{E}_k.$$

Векторы $\widehat{\mathcal{E}}_i$ и \mathcal{E}_i отличаются за счет $\nabla_i \dot{w}^k$. Но это векторы базиса лагранжевой системы координат, которые движутся и деформируются вместе со средой. Следовательно, малость производных $\nabla_i w_k$ означает малость деформаций и малость относительных поворотов частицы.

Бывают ситуации, когда деформации малы, а относительные повороты не малы. Например, при сильном изгибе металлической пластинки или стержня удлинения малы, а относительные повороты велики. Поэтому теории деформирования пластин, оболочек и стержней, как правило, геометрически нелинейны.

Для тел, характерные размеры которых во всех направлениях одинаковы, малость деформаций означает и малость относительных поворотов.

В геометрически-линейной теории выражения компонент тензора деформаций через производные перемещений имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{w}_j + \nabla_j \dot{w}_i) = \frac{1}{2} (\nabla_i \widehat{w}_j + \nabla_j \widehat{w}_i), \quad (9.13)$$

так как учитываются только малые первого порядка.

В декартовой системе координат эти выражения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j} \right).$$

Выведем еще формулу для коэффициента относительного изменения объема θ в геометрически линейной теории. При малых деформациях

$$\theta = I_1(\varepsilon) = \varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_3^{(3)}.$$

Из формул (9.13) видно, что

$$\varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_3^{(3)} = \nabla_1 w^1 + \nabla_2 w^2 + \nabla_3 w^3 = \nabla_i w^i = \operatorname{div} \vec{w}.$$

Напомним, что в любой системе координат дивергенция вектора определяется формулой

$$\operatorname{div} \vec{w} = \nabla_i w^i.$$

В декартовых координатах

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Итак, в случае малых деформаций и малых относительных поворотов коэффициент относительного изменения объема равен дивергенции вектора перемещений:

$$\theta = \operatorname{div} \vec{w}.$$

Лекция 10

- 10.1. Уравнения совместности для компонент тензора деформаций
- 10.2. Тензор скоростей деформаций
- 10.3. Связь между компонентами тензоров деформаций и скоростей деформаций
- 10.4. Выражение компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости
- 10.5. Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций

10.1. Уравнения совместности для компонент тензора деформаций

Напишем выражения компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещения

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^k \nabla_j w_k). \quad (10.1)$$

Видно, что шесть компонент ϵ_{ij} выражаются через три функции w_i . Поэтому ϵ_{ij} не могут быть произвольными функциями координат, а должны удовлетворять определенным уравнениям, которые символически запишем в виде

$$R_{ijkl}(\epsilon_{ij}) = 0. \quad (10.2)$$

Эти уравнения называются уравнениями совместности деформаций. Такое название можно объяснить следующим образом. Если соотношения

$$\frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^k \nabla_j w_k) = \epsilon_{ij}$$

рассматривать как систему уравнений для определения w_i при заданных ϵ_{ij} , то, очевидно, эта система в общем случае не имеет решения, так как она состоит из шести уравнений, а искомых функций только 3. Чтобы такая система имела решение, правые части должны удовлетворять некоторым условиям, которые и называются уравнениями совместности.

Возможны два способа получения уравнений совместности.

Первый способ состоит в том, чтобы исключить w_i из системы уравнений (10.1). Это несложно сделать в случае, когда можно пренебречь нелинейными членами в этих уравнениях. Если же нелинейные члены существенны, то проще использовать другой способ, основанный на рассмотрении тензоров кривизны пространств начального и деформированного состояний.

А именно, пусть имеем лагранжеву систему координат, тогда компоненты тензора деформаций определяются равенствами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \dot{g}_{ij}).$$

Известно, что для компонент тензора кривизны Римана—Кристоффеля $R_{lij}^{k\dots}$ имеют место формулы

$$R_{lij}^{k\dots} = \frac{\partial \Gamma_{lj}^k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \Gamma_{li}^k}{\partial \xi^j} + \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mi}^k - \Gamma_{li}^m \Gamma_{mj}^k,$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля, причем

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{ls}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial \xi^l} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial \xi^s} \right).$$

Поэтому $R_{lij}^{k\dots}$ являются функциями компонент метрической матрицы и их производных по координатам, то есть

$$R_{lij}^{k\dots} = R_{lij}^{k\dots} \left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right).$$

В деформированном состоянии тело занимает некоторую область евклидова пространства, значит

$$R_{lij}^{k\dots} \left(\hat{g}_{\alpha\beta}, \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial^2 \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right) = 0.$$

Что можно сказать про компоненты

$$\hat{R}_{lij}^{k\dots} \left(\dot{g}_{\alpha\beta}, \frac{\partial \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial^2 \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right)$$

тензора кривизны в пространстве начального состояния? Для компонент $\dot{g}_{\alpha\beta}$ имеем соотношения

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (10.3)$$

Ясно, что при произвольных $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi^k)$ величины

$$\hat{R}_{lij}^{k\dots} \left(\dot{g}_{\alpha\beta}, \frac{\partial \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial^2 \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right)$$

могут оказаться не равными нулю. Однако, если начальное состояние связано с актуальным (деформированным) состоянием некоторым непрерывным перемещением в евклидовом пространстве, то тело в начальном состоянии тоже находится в евклидовом пространстве. Тогда должны выполняться равенства

$$\mathring{R}_{ijkl}^k \left(\dot{g}_{\alpha\beta}, \frac{\partial \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma}, \frac{\partial^2 \dot{g}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\gamma \partial \xi^\delta} \right) = 0. \quad (10.4)$$

Подставляя в эти равенства соотношения (10.3), получим условия на компоненты тензора деформаций, которые и являются уравнениями совместности.

Зная конкретные выражения компонент тензора кривизны через компоненты метрической матрицы, можно написать уравнения совместности для ε_{ij} в явном виде. Приведем без вывода уравнения совместности при конечных деформациях, когда в конечном состоянии система координат декартова:

$$\mathring{R}_{ijkl}^k = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \xi^j \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} + \dot{g}^{mn} [G_{nlj} G_{mki} - G_{nli} G_{mkj}] = 0. \quad (10.5)$$

Здесь используются обозначения

$$G_{nkj} = \frac{\partial \varepsilon_{nk}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \varepsilon_{nj}}{\partial \xi^k} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial \xi^n},$$

а \dot{g}^{ij} — это контравариантные компоненты метрического тензора. Матрица (\dot{g}^{ij}) , как известно, равна матрице, обратной матрице (\dot{g}_{ij}) , то есть

$$(\dot{g}^{ij}) = (\widehat{g}_{ij} - 2\varepsilon_{ij})^{-1}.$$

Система (10.5) содержит 81 уравнение, так как i, j, k, l могут принимать значения 1, 2, 3, но можно показать, что только 6 из них независимы. В частности, легко видеть, что

$$R_{iiii} \equiv 0, \quad R_{ijkl} = R_{jilk} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} \quad \text{и т. д.}$$

Если деформации малы, то можно пренебречь нелинейными членами и получить линеаризованные уравнения совместности, которые называются **уравнениями Сен—Венана**. В декартовой системе координат уравнения Сен—Венана имеют вид

$$\mathring{R}_{ijkl}^k = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \xi^j \partial \xi^l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial \xi^i \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial \xi^j \partial \xi^k} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial \xi^i \partial \xi^l} = 0, \quad (10.6)$$

а в произвольной системе координат:

$$\nabla_j \nabla_l \varepsilon_{ik} + \nabla_i \nabla_k \varepsilon_{jl} - \nabla_j \nabla_k \varepsilon_{il} - \nabla_i \nabla_l \varepsilon_{jk} = 0.$$

Покажем, как можно получить уравнения (10.6) первым способом, то есть исключением w_k из выражений компонент тензора деформаций через производные компонент вектора перемещений. В случае малых деформаций и малых относительных перемещений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i).$$

Будем использовать декартову систему координат, тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right),$$

где $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Следовательно,

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y}.$$

Складывая первые два уравнения и вычитая последнее, получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Это уравнение из системы (10.6), соответствующее $i = k = 1$, $j = l = 2$. Аналогично можно вывести остальные уравнения системы (10.6).

Подчеркнем, что уравнения совместности выводятся из того факта, что начальное и конечное состояния получаются друг из друга непрерывным перемещением в евклидовом пространстве, то есть из факта существования вектора перемещений, а значит, и соотношений (10.1). Верно и обратное: если выполнены уравнения совместности, то существует вектор перемещения из начального состояния в конечное (так как оба состояния находятся в евклидовом пространстве), и, следовательно, верны соотношения (10.1). Это означает, что системы уравнений (10.1) и (10.5) равносильны. При постановке задачи можно использовать либо соотношения (10.1), либо соотношения (10.5). Часто, если нужно вычислить только деформации и напряжения, а знание перемещений не нужно, используют соотношения (10.5), а если интересуются перемещениями, то используют соотношения (10.1).

Уравнения совместности не выполняются, если начальное состояние выбрано так, что область, занятая телом в начальном состоянии, не может быть получена непрерывным перемещением из конечного.

Например, в теории упругости естественно принимать за начальное состояние то, в котором напряжения во всех точках среды отсутствуют.

Однако, если в среде при отсутствии внешних сил уже имеются внутренние напряжения, например, за счет предварительного неравномерного нагрева, то такое начальное состояние (свободное от напряжений) в общем случае можно ввести, только если разрезать тело на мелкие кусочки и дать им свободно «расправиться», перейти к ненапряженному состоянию (тогда перемещения не будут непрерывными и однозначными), или можно это состояние ввести мысленно без разрезаний, тогда начальное состояние будет, вообще говоря, в неевклидовом пространстве.

Рассмотрим эту ситуацию на примере двумерного пространства. Пусть мы имеем плоскую пластинку — область двумерного евклидова пространства. Пусть она изготовлена следующим образом. Первоначально в ее центральной части было круговое отверстие радиуса R_0 , и она находилась в ненапряженном состоянии. Потом пластинку нагрели, в результате она расширилась, так что радиус отверстия стал $R_1 > R_0$, и после этого в отверстие вклеили круговую холодную вставку радиуса R_1 , так что пластинка стала сплошной. Если эту сплошную пластинку охладить до первоначальной температуры, то, очевидно, в пластинке возникнут внутренние напряжения даже при отсутствии внешних сил: внешние части пластины, стремясь при охлаждении сократиться, будут давить на вставку, а вставка, в свою очередь, будет сопротивляться этому сжатию. Дальше эту пластинку можно растягивать или сжимать внешними силами.

Пусть мы все же хотим отсчитывать деформации от ненапряженного состояния, то есть принимать в качестве начального состояния ненапряженное состояние. Как получить ненапряженное состояние пластиинки не нарушая ее сплошности (см. рис. 10.1)? Можно мысленно представить, что вставка и основная часть пластиинки освобождены, оставаясь плоскими, частично накладываясь друг на друга (так как диаметр освобожденной вставки больше отверстия в основном листе). При этом перемещения между начальным и конечным состояниями не будут однозначными. Можно получить ненапряженное состояние по другому — дать пластиинке возможность «выщелкнуться» из плоскости в трехмерное пространство, то есть сделаться криволинейной. При этом актуальное состояние — область двумерного евклидова пространства, а начальное (ненапряженное) состояние находится в двумерном пространстве с кривизной. Нечто подобное можно себе представить, если внутренние напряжения при отсутствии внешних сил имеются в трехмерном теле, но тогда «выщелкивание» может проводиться только мысленно, в пространство большего числа измерений.

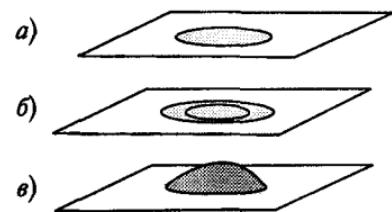


Рис. 10.1. Три состояния пластиинки: а) с внутренними напряжениями; б) освобожденное от внутренних напряжений с помощью разреза: основной лист и вставка частично накладываются друг на друга; в) освобожденное от напряжений выщелкиванием в трехмерное пространство

10.2. Тензор скоростей деформаций

Введем тензор скоростей деформации. Этот тензор, так же, как тензор деформаций, вводится в каждой точке среды.

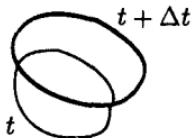


Рис. 10.2. Перемещение частицы за время Δt

Используем лагранжеву систему координат. Рассмотрим в момент времени t некоторую точку среды с координатами ξ^i и малую частицу среды, содержащую эту точку. Рассмотрим малые деформации, которые произошли в этой частице за время Δt . Для таких деформаций начальным состоянием является состояние в момент t , а конечным — состояние в момент $t + \Delta t$.

Компоненты метрического тензора в начальном состоянии есть $\hat{g}_{ij}(t, \xi^i)$, а в конечном состоянии — $\hat{g}_{ij}(t + \Delta t, \xi^i)$. Обозначим компоненты тензора малых деформаций, произошедших за время Δt , через $\Delta \varepsilon_{ij}$. Компоненты тензора скоростей деформации e_{ij} в лагранжевой системе координат определяются соотношениями

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}. \quad (10.7)$$

Используя формулы

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\hat{g}_{ij}(t + \Delta t, \xi^i) - \hat{g}_{ij}(t, \xi^i) \right),$$

получим

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d\hat{g}_{ij}}{dt},$$

где $d\hat{g}_{ij}/dt$ — производная по времени при $\xi^i = \text{const.}$

10.3. Связь между компонентами тензоров деформаций и скоростей деформаций

Найдем связь между компонентами тензоров деформаций и скоростей деформаций сначала в лагранжевой системе координат. Дифференцируя по времени соотношения

$$\hat{g}_{ij} = \dot{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij},$$

получим, что в лагранжевой системе координат

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\dot{g}_{ij}}{dt}.$$

Если деформации отсчитываются всегда по отношению к одному и тому же начальному состоянию, то $\dot{g}_{ij} = \text{const.}$ Тогда в лагранжевой системе координат для ковариантных компонент тензора скоростей деформаций выполняются соотношения

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}.$$

Отметим, что в пространственной системе координат x^i такого соотношения нет,

$$e_{ij} \neq \frac{d\epsilon_{ij}}{dt}.$$

Покажем это, используя связи между компонентами тензора деформации в лагранжевой и эйлеровой системах координат. Связи между лагранжевыми и эйлеровыми координатами точки даются законом движения

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$$

Обозначим компоненты тензоров в системе x^i через $\epsilon_{ij}^{(x)}, e_{ij}^{(x)}$, а в системе ξ^i — через $\epsilon_{ij}^{(\xi)}, e_{ij}^{(\xi)}$.

Из формулы преобразования компонент тензоров при преобразовании координат имеем

$$\epsilon_{ij}^{(\xi)} = \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени при постоянных лагранжевых координатах. Используем, что

- а) дифференцирование по t при $\xi^i = \text{const}$ и дифференцирование по ξ^i перестановочны;
- б) $\left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)_{\xi=\text{const}} = v^i$,
- в) $e_{ij}^{\xi} = \frac{d\epsilon_{ij}^{\xi}}{dt}$ и
- г) обозначение индивидуальной производной по времени

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\xi=\text{const}} = \frac{d}{dt}.$$

Получим

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(\xi)} &= \frac{d\epsilon_{ij}^{(\xi)}}{dt} = \frac{d\epsilon_{kl}^{(x)}}{dt} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \right) \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \right) = \\ &= \frac{d\epsilon_{kl}^{(x)}}{dt} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial v^l}{\partial \xi^j} = \\ &= \frac{d\epsilon_{kl}^{(x)}}{dt} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial v^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} + \epsilon_{kl}^{(x)} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial v^l}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j}. \end{aligned}$$

Переходя от системы ξ^i к системе координат x^α , получим

$$e_{\alpha\beta}^{(x)} = e_{ij}^{(\xi)} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^\beta} = \frac{d\epsilon_{\alpha\beta}^{(x)}}{dt} + \epsilon_{k\beta} \frac{\partial v^k}{\partial x^\alpha} + \epsilon_{\alpha k} \frac{\partial v^k}{\partial x^\beta}.$$

Если деформации и скорости малы, то с точностью до малых высшего порядка и в пространственной системе координат верно соотношение

$$e_{\alpha\beta} = \frac{d\varepsilon_{\alpha\beta}}{dt}.$$

10.4. Выражение компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости

Выведем выражение компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости. Для этого запишем выражение компонент тензора малых деформаций $\Delta\varepsilon_{ij}$, произошедших за время Δt , через перемещения. Вектор перемещений между состояниями в моменты t и $t + \Delta t$ обозначим $\Delta\vec{w}$. Тогда

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i(\Delta w_j) + \nabla_j(\Delta w_i)). \quad (10.8)$$

Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta w_i}{\Delta t} \right) = v_i$, то, согласно определению (10.7),

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i). \quad (10.9)$$

Формулы (10.9) могут быть приняты за определение тензора скоростей деформаций. Они верны не только в лагранжевой, но и в эйлеровой системе координат. Действительно, эти формулы связывают e_{ij} и v_i в один момент времени t . Но если мы имеем дело только с одним моментом времени, то нельзя сказать, лагранжева это система, или эйлерова. Это зависит только от поведения системы в последующие моменты — будет ли она двигаться вместе со средой, или останется неподвижной. В частности, лагранжеву систему всегда можно выбрать так, чтобы она совпадала с эйлеровой в рассматриваемый момент времени.

10.5. Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций

Механический смысл компонент тензора скоростей деформаций в декартовой системе координат следует из формулы

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t}.$$

В частности, для компонент e_{ii} тензора скоростей деформаций имеем (суммирования по i нет)

$$e_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ii}}{\Delta t}.$$

В лекции 8 было показано, что диагональные компоненты тензора малых деформаций равны коэффициентам относительного удлинения отрезков, лежавших до деформации вдоль соответствующих осей (если система координат декартова). Следовательно, механический смысл диагональных компонент тензора скоростей деформации e_{ii} состоит в том, что e_{ii} — это скорость относительного удлинения отрезка, лежащего в данный момент вдоль оси x^i .

Применив такое же рассуждение для внедиагональных компонент, убедимся, что механический смысл e_{ij} при $j \neq i$ в декартовой системе координат таков: это половина скорости изменения угла между материальными отрезками, лежащими в данный момент времени вдоль осей x^i и x^j соответственно.

Лекция 11

- 11.1. Формулы для скорости относительного изменения объема при движении среды
- 11.2. Дивергенция скорости и ее механический смысл
- 11.3. Формула Гаусса—Остроградского
- 11.4. Теорема Коши—Гельмгольца о распределении скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды

11.1. Формулы для скорости относительного изменения объема при движении среды

Скоростью относительного изменения объема при движении среды $d\theta/dt$ называется предел отношения величины относительного изменения малого объема среды ΔV за время Δt к Δt при $\Delta V \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t)}{\Delta V(t)\Delta t}. \quad (11.1)$$

Величина

$$\Delta\theta = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t)}{\Delta V(t)}$$

называется, как известно, коэффициентом относительного изменения объема, которое произошло за время Δt .

Используем формулу для $\Delta\theta$, верную в случае малых деформаций (деформации, произошедшие за малое время, конечно, малы):

$$\Delta\theta = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t)}{\Delta V(t)} = I_1(\Delta\epsilon_{ij}) = g^{ij}\Delta\epsilon_{ij},$$

где $\Delta\epsilon_{ij}$ — компоненты тензора деформаций, возникших за время Δt . Используем также формулу, связывающую компоненты тензоров деформаций и скоростей деформаций

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\epsilon_{ij}}{\Delta t}.$$

Тогда получим, что скорость относительного изменения объема равна

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = g^{ij} e_{ij} = I_1(e_{ij}). \quad (11.2)$$

Представим компоненты тензора скоростей деформации e_{ij} через производные $\nabla_i v_j$ и $\nabla_j v_i$ по формулам

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Получим

$$I_1(e_{ij}) = \frac{1}{2}g^{ij}(\nabla_i v^j + \nabla_j v^i) = \frac{1}{2}\nabla_i v^i + \frac{1}{2}\nabla_j v^j = \nabla_i v^i.$$

Таким образом, **скорость относительного изменения объема равна дивергенции скорости**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right) = \nabla_i v^i = \operatorname{div} \vec{v}.$$

11.2. Дивергенция скорости и ее механический смысл

Дивергенция некоторого вектора \vec{a} по определению равна следующей сумме производных по координатам от компонент вектора:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla_1 a^1 + \nabla_2 a^2 + \nabla_3 a^3 = \nabla_i a^i.$$

В декартовой системе координат x, y, z

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Механический смысл дивергенции скорости состоит в том, что она равна скорости относительного изменения объема при движении среды.

Для того чтобы понять, с чем связано название «дивергенция» (которое переводится как «расхождение»), выведем еще одну формулу для скорости относительного изменения объема. Изменение объема $\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t)$ означает, что частицы среды, находившиеся на поверхности $\Delta\Sigma$ объема $\Delta V(t)$, перемещаются и через время Δt образуют границу объема $\Delta V(t + \Delta t)$. Вектор перемещения этих частиц есть $\vec{v}(t)\Delta t$. Если разбить поверхность $\Delta\Sigma$ на N малых площадок $\Delta\sigma_k$, то объем $\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t)$ можно представить как сумму объемов N малых цилиндров с основаниями $\Delta\sigma_k$, лежащими на поверхности $\Delta\Sigma$, с образующими $|\vec{v}_k|\Delta t$ и высотами $(v_n)_k \Delta t$ (v_n — проекция скорости на внешнюю нормаль к поверхности $\Delta\Sigma$):

$$\Delta V(t + \Delta t) - \Delta V(t) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta\sigma_k \rightarrow 0}} \left(\sum_{k=1}^N (v_n)_k \Delta\sigma_k \Delta t \right) = \int_{\Delta\Sigma} v_n d\sigma \Delta t. \quad (11.3)$$

Подставляя это выражение в формулу (11.1), получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \operatorname{div} \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta\Sigma} v_n d\sigma. \quad (11.4)$$

Интеграл

$$\int_{\Delta\Sigma} v_n d\sigma$$

равен, очевидно, объему среды, вытекающему через поверхность $\Delta\Sigma$ за единицу времени. Следовательно, дивергенция скорости равна отношению величины объема, вытекающего через поверхность $\Delta\Sigma$ за единицу времени, к величине этого объема (точнее, пределу этого отношения при стягивании объема в точку). Образно говоря, отличие дивергенции скорости от нуля в некоторой точке означает, что среда в некотором (интегральном) смысле расходится из этой точки.

11.3. Формула Гаусса—Остроградского

Рассмотрим объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ . Если разбить этот объем на сумму малых объемов ΔV , для каждого малого объема использовать формулу (11.4), а затем просуммировать по всему объему V , то можно получить формулу

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{\Sigma} v_n d\sigma. \quad (11.5)$$

Эта формула называется **формулой Гаусса—Остроградского**. Она преобразует интеграл по объему в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем.

Напишем формулу Гаусса—Остроградского в декартовой системе координат, раскрывая выражения для дивергенции и проекции скорости на нормаль:

$$\int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \int_{\Sigma} \left(v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z) \right) d\sigma. \quad (11.6)$$

В произвольной системе координат формула Гаусса—Остроградского имеет вид

$$\int_V \nabla_i v^i dV = \int_{\Sigma} v^i n_i d\sigma. \quad (11.7)$$

Заметим, что формула Гаусса—Остроградского верна не только для вектора скорости. Любые три функции P, Q, R можно рассматривать как

компоненты вектора скорости какого-то движения, поэтому в декартовых координатах для любых дифференцируемых P, Q, R верна формула Гаусса—Остроградского

$$\int_{\Sigma} \left(P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z) \right) d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV. \quad (11.8)$$

Более того, можно доказать, что формула (11.8) верна даже в случае, когда P, Q, R не обязательно скалярные функции, но и векторы, тензоры или величины другой природы.

11.4. Теорема Коши—Гельмгольца о распределении скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды

Рассмотрим некоторую точку M сплошной среды с координатами x^i и ее малую окрестность. Пусть точка M' с координатами $x^i + dx^i$ — некоторая произвольная точка малой окрестности точки M . Используя формулу Тейлора, можем написать

$$\begin{aligned} \vec{v}(M') &= \vec{v}(x^i + dx^i) = \vec{v}(x^i) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x^i} dx^i = \vec{v}(M) + \nabla_i v_j dx^i \vec{e}^j = \\ &= \vec{v}(M) + \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) dx^i \vec{e}^j + \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) dx^i \vec{e}^j. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Известно, что $\frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}$ — это компоненты тензора деформации. Введем обозначение

$$\frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i) = \omega_{ij};$$

ω_{ij} называются компонентами тензора вихря. Введем еще аксиальный вектор $\vec{\omega}$, компоненты которого определяются формулами

$$\omega^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \omega_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i),$$

где (i, j, k) — круговая перестановка из $(1, 2, 3)$. Вектор $\vec{\omega}$ называется вектором вихря.

Проверим, что

$$\omega_{ij} dx^i \vec{e}^j = [\vec{\omega} \times d\vec{r}] = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \vec{e}^1 & \vec{e}^2 & \vec{e}^3 \\ \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{vmatrix}. \quad (11.10)$$

Для проверки вычислим, например, компоненту при $\tilde{\omega}^1$:

$$\omega_{11} dx^i = \omega_{21} dx^2 + \omega_{31} dx^3 = -\sqrt{g}(\omega^3 dx^2 - \omega^2 dx^3)$$

то есть формула (11.10) верна. Следовательно, формулу (11.9) можно записать в виде:

$$\tilde{v}(M') = \tilde{v}(M) + e_{ij} dx^i \tilde{\omega}^j + [\vec{\omega} \times d\vec{r}]. \quad (11.11)$$

Эта формула называется **формулой Коши—Гельмгольца для распределения скоростей в малой окрестности любой точки сплошной среды**. Она показывает, что для малой частицы скорость можно представить как сумму трех слагаемых. Первое слагаемое одинаково для всех точек малой частицы и поэтому может быть названо скоростью поступательного движения (движение тела называется поступательным, если в каждый момент времени скорости всех точек тела одинаковы и могут зависеть только от времени). Второе слагаемое связано с деформированием среды. Третье слагаемое соответствует, как известно, вращению тела как абсолютно твердого с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

На основе соотношения (11.11) можно сформулировать **теорему Коши—Гельмгольца**:

Движение малой частицы сплошной среды можно представить как сумму:

- 1) поступательного движения со скоростью $\tilde{v}(M)$,
- 2) вращения как твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$,
- 3) движения, связанного с деформированием, которое описывается скоростью $e_{ij} dx^i \tilde{\omega}^j$.

Лекция 12

- 12.1. Вектор вихря. Его механический смысл.
Вихревое и безвихревое движение
- 12.2. Потенциал скорости
- 12.3. Циркуляция скорости
- 12.4. Формула Стокса
- 12.5. Пример вихревого течения с прямолинейными траекториями
- 12.6. Пример безвихревого течения с круговыми траекториями

12.1. Вектор вихря. Его механический смысл. Вихревое и безвихревое движение

Вектором вихря $\vec{\omega}$ называется, как известно, аксиальный вектор, компоненты которого определяются формулами

$$\omega^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \omega_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$$

(i, j, k) — круговая перестановка из $(1, 2, 3)$.

Покажем, что для вектора вихря верна формула

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}. \quad (12.1)$$

В самом деле, по определению, ротором вектора \vec{v} называется вектор, который можно записать в виде следующего символического определителя

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{\delta}_1 & \vec{\delta}_2 & \vec{\delta}_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Видно, что, например, для первой компоненты вектора вихря, действительно, верно равенство

$$\frac{1}{2} (\operatorname{rot} \vec{v})^1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} (\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2) = \omega^1.$$

Механический смысл вектора вихря выясняется с помощью формулы Коши—Гельмгольца о распределении скоростей в малой окрестности любой точки:

$$\vec{v}(M') = \vec{v}(M) + e_{ij} dx^i \vec{e}^j + \vec{\omega} \times d\vec{r}.$$

Механический смысл вектора вихря заключается в следующем.

1. Если частицы движутся как твердое тело, т. е. $e_{ij} = 0$, то $\vec{\omega}$ — угловая скорость этого тела. Говорят еще и так: $\vec{\omega}$ — та угловая скорость, с которой завращалась бы частица, если бы она мгновенно затвердела, то есть если бы из скорости всех точек малой частицы вычесть скорость поступательную и скорость, связанную с деформацией, то частица вращалась бы со скоростью $\vec{\omega}$.

2. Есть ли в частице что-то, что на самом деле вращается со скоростью $\vec{\omega}$? Да, есть. Это триэдр главных осей тензора скоростей деформаций. Действительно, в главных осях $e_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть углы между материальными отрезками, лежащими вдоль главных осей, за малое время остаются прямыми. Поэтому триэдр главных осей ведет себя в течение малого времени как твердое тело и вращается со скоростью $\vec{\omega}$.

Докажем еще следующую замечательную формулу:

$$\nabla_m \omega_{ij} = \nabla_i e_{mj} - \nabla_j e_{mi}, \quad (12.2)$$

где $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i)$. Формула проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} 2\nabla_m \omega_{ij} &= \nabla_m \nabla_i v_j - \nabla_m \nabla_j v_i \nabla_i \nabla_m v_j + \nabla_i \nabla_j v_m - \nabla_j \nabla_m v_i - \nabla_j \nabla_i v_m = \\ &= 2(\nabla_i e_{mj} - \nabla_j e_{mi}). \end{aligned}$$

При проведении этой выкладки мы добавили и вычли слагаемое

$$\nabla_i \nabla_j v_m = \nabla_j \nabla_i v_m$$

и воспользовались возможностью менять порядок дифференцирования при вычислении вторых производных по координатам. Таким образом, формула (12.2) верна. Следовательно, если $e_{ij} = 0$ во всей области, то $\nabla_m \omega_{ij} = 0$. Отсюда следует, что $\vec{\omega}$ не зависит от координат. В этом особенно легко убедиться, если воспользоваться декартовой системой координат. В этой системе $\omega^k = \omega_{ij}$, i, j, k — циклическая перестановка из $(1, 2, 3)$,

$$\nabla_m \omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^m} = \frac{\partial \omega^k}{\partial x^m}.$$

Если $\partial \omega^k / \partial x^m = 0$, то ω^k не зависят от координат, значит, и $\vec{\omega}$ не зависит от координат. Следовательно, если тело движется как абсолютно твердое, то вектор вихря одинаков во всех точках тела и представляет собой угловую скорость тела.

Выведем из формулы Коши—Гельмгольца формулу Эйлера для распределения скоростей в твердом теле. Имеем для близких точек в абсолютно твердом теле

$$\vec{v}(M') - \vec{v}(M) = d\vec{v} = \vec{\omega} \times d\vec{r},$$

причем $\vec{\omega}$ не зависит от координат (так как $e_{ij} = 0$ во всем теле). Интегрируем равенство, начиная от точки M . Получим

$$\vec{v} = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где \vec{r} — радиус-вектор относительно точки M . Это формула Эйлера.

Движение называется **вихревым**, если $\vec{\omega} \neq 0$. Движение называется **безвихревым**, если $\vec{\omega} = 0$.

12.2. Потенциал скорости

Потенциалом скорости называется такая функция φ , что для вектора скорости \vec{v} выполнена формула

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \text{то есть} \quad v_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

В декартовых координатах

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Движение называют **потенциальным**, если существует потенциал скорости.

Утверждение. Если $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$, то $\vec{\omega} = 0$; верно и обратное: если $\vec{\omega} = 0$, то $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Таким образом, всякое безвихревое движение является потенциальным, а всякое потенциальное — безвихревым.

Доказательство. Пусть $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Покажем, что $\vec{\omega} = 0$. Проведем вычисления, пользуясь декартовой системой координат:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) = 0.$$

Аналогично показывается, что $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$.

Пусть теперь $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$. Покажем, что в этом случае существует потенциал скорости. Рассмотрим дифференциальную форму $v_x dx + v_y dy + v_z dz$. Из математического анализа известно, что эта форма локально представляет собой полный дифференциал некоторой функции φ , если и только если

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Но эти условия выполнены, если $\vec{\omega} = 0$. Таким образом, при $\vec{\omega} = 0$

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi.$$

Отсюда

$$\mathbf{v}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathbf{v}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то есть $\vec{v} = \text{grad } \varphi$. □

12.3. Циркуляция скорости

Циркуляцией скорости Γ_{AB} по линии AB называется следующий интеграл по линии AB :

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B v_s ds,$$

где v_s — проекция скорости на касательную к линии AB , s — расстояние вдоль линии AB . Можно, очевидно, записать выражение для циркуляции в виде

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \cdot d\vec{s}) = \int_A^B (\vec{v} \cdot d\vec{r}) = \int_A^B v_i dx^i.$$

Циркуляция скорости формально аналогична работе силы при перемещении по пути AB : работа силы \vec{F} есть

$$A = \int_A^B F_s ds.$$

Особенно часто используется циркуляция по замкнутому контуру

$$\Gamma = \oint_C v_s ds.$$

12.4. Формула Стокса

Формула Стокса связывает интеграл по замкнутому контуру C с интегралом по поверхности Σ , натянутой на этот контур.

Формула Стокса на языке механики записывается в виде

$$\Gamma = \oint_C v_s ds = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma \tag{12.3}$$

то есть она связывает циркуляцию и вихрь. В формуле (12.3) Σ — поверхность, надетая на контур C , $\vec{\omega}$ — вектор вихря, \vec{n} — нормаль к поверхности Σ , направленная так, чтобы с ее конца обход контура при вычислении

циркуляции был виден происходящим против часовой стрелки (если используется правая система координат).

В раскрытом виде формула Стокса в декартовых координатах записывается так:

$$\oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz = \\ = 2 \oint_{\Sigma} (\omega_x \cos(n, x) + \omega_y \cos(n, y) + \omega_z \cos(n, z)) d\sigma,$$

где

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Конечно, так же, как в формуле Гаусса—Остроградского, в этой формуле в качестве v_x, v_y, v_z могут быть любые дифференцируемые функции P, Q, R .

Формулу Стокса можно вывести с помощью формулы Коши—Гельмольца следующим образом. Разобьем поверхность Σ на сумму малых площадок $\Delta\sigma_k$ с границами C_k . Пусть M_k — произвольная точка на площадке $\Delta\sigma_k$. Вычислим циркуляцию скорости по контуру C_k , используя формулу Коши—Гельмольца для скоростей точек из окрестности точки M_k . Обозначая через \vec{r} радиус-вектор относительно точки M_k , имеем в декартовых координатах с началом в точке M_k

$$\vec{v} = \vec{v}(M_k) + e_{ij} x^i \vec{e}^j + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

$$\Gamma_{C_k} = \oint_{C_k} (\vec{v} \cdot d\vec{r}) = \oint_{C_k} (\vec{v}(M_k) \cdot d\vec{r}) + \int_{C_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} dx^j + \oint_{C_k} (\vec{\omega} \times \vec{r} \cdot d\vec{r}). \quad (12.4)$$

Здесь

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{ij} x^i x^j, \quad e_{ij} x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}.$$

Первые два интеграла в правой части формулы (12.4) равны нулю: так как $\vec{v}(M_k) = \text{const}$, то первый интеграл равен скалярному произведению $\vec{v}(M_k)$ на интеграл от $d\vec{r}$ по замкнутому контуру C_k , который, конечно, равен нулю; второй интеграл есть интеграл по замкнутому контуру от $d\Phi$. Подынтегральное выражение в последнем члене формулы (12.4) преобразуется так:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r} \cdot d\vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r} \times d\vec{r}) = 2\omega_n \Delta\sigma,$$

так как $\vec{r} \times d\vec{r}$ — это вектор, направленный по нормали к поверхности $\Delta\sigma_k$, и по величине равный $2\Delta\sigma$, где $\Delta\sigma$ — площадь площадки $\Delta\sigma_k$. Следовательно,

$$\Gamma_{C_k} = 2 \int_{\Delta\sigma_k} \omega_n d\sigma.$$

Складывая по всем малым контурам C_k , получим:

$$\oint_C v_s ds = 2 \oint_{\Sigma} \omega_n d\sigma. \quad (12.5)$$

Здесь было использовано, что $\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}$, то есть циркуляции по всем внутренним границам площадок $\Delta\sigma_k$ в сумме дают нуль.

Формула Стокса верна, если можно на контур C надеть поверхность Σ такую, что в любой точке этой поверхности скорость определена и дифференцируема. Если же такой поверхности не существует, то формула Стокса не применима.

12.5. Пример вихревого течения с прямолинейными траекториями

В обыденной жизни понятие вихря связывается с вращательным движением. Действительно, если вычислить вектор вихря в случае, когда имеется, например, вращение среды как твердого тела (то есть без деформации), то вектор вихря будет отличен от нуля, равен угловой скорости

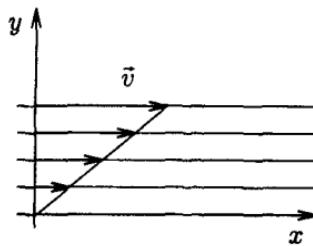


Рис. 12.1. Вихревое течение с прямолинейными траекториями. Показано распределение скорости по y

тела. Однако с точки зрения определения вектора вихря, принятого в механике сплошной среды, движение может быть вихревым, даже если все частицы движутся по параллельным прямым траекториям.

В качестве примера рассмотрим течение, в котором

$$v_x = ay, \quad v_y = v_z = 0, \quad a = \text{const.}$$

Все частицы движутся по прямым, параллельным оси x (рис. 12.1). Компоненты вектора вихря в этом течении таковы:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{a}{2}.$$

Таким образом, это течение является **вихревым**, вектор вихря перпендикулярен плоскости xy . Заметим, что разные материальные отрезки при таком течении поворачиваются по-разному. В частности, отрезки, параллельные оси x , вообще не поворачиваются. Но отрезки, которые в данный момент времени направлены по главным осям тензора скоростей деформаций, поворачиваются с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Главные оси тензора скоростей деформаций направлены под углом $\pm 45^\circ$ к оси x , в чем можно убедиться, вычислив компоненты тензора скоростей деформаций:

$$e_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad e_{yy} = e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0, \quad e_{xy} = e_{yx} = \frac{a}{2}$$

и найдя собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.6. Пример безвихревого течения с круговыми траекториями

Рассмотрим течение, которое называется «точечный вихрь». Оно определяется следующим потенциалом скорости:

$$\varphi = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = k\theta, \quad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \quad k = \text{const.}$$

Таким образом, это течение потенциальное, то есть безвихревое. Кроме того, v_x, v_y — функции от x и y , не зависят от z , и $v_z = 0$. Поэтому это течение плоское (плоско-параллельное).

Вычислим компоненты скорости:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{ky}{R^2}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{kx}{R^2}, \quad v_z = 0. \quad (12.6)$$

Здесь $R^2 = x^2 + y^2$. Радиус-вектор \vec{R} имеет компоненты $x, y, 0$. Поэтому $(\vec{v} \cdot \vec{R}) = 0$, $\vec{v} \perp \vec{R}$, следовательно, все частицы движутся по окружностям.

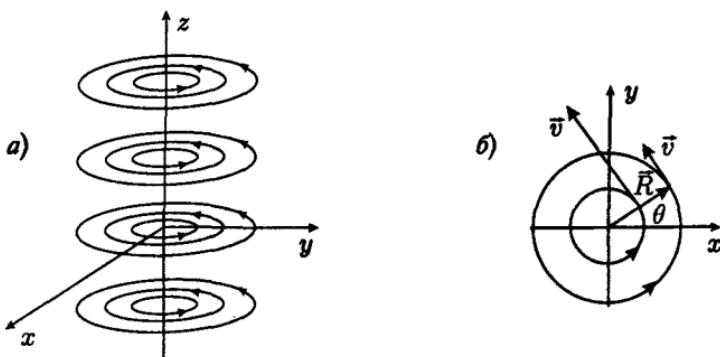


Рис. 12.2. Траектории: а) в пространстве и б) на плоскости xy в течении, которое называется «точечный вихрь»

Можно найти уравнения траекторий и стандартным способом: для точек на траекториях $d\vec{r} \parallel \vec{v}$, то есть

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

В силу формул (12.6) уравнения траекторий рассматриваемого течения таковы:

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \quad \text{то есть} \quad d(x^2 + y^2) = 0, \quad \text{то есть} \quad x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Снова получаем, что траектории — окружности с центром в начале координат. Интересно, что, в отличие от распределения скоростей при вращении твердого тела, когда скорости пропорциональны расстоянию от оси вращения, то есть малы вблизи оси, в этом вращательном движении скорости тем больше, чем ближе к оси вращения — к оси z (или к началу координат, если рассматривается только плоскость x, y). Именно такое распределение окружных скоростей наблюдается во вращающихся столбах жидкостей и газов, например в смерчах. При этом давление в области вблизи оси вращения получается существенно меньшим, чем вне смерча; этим объясняется его всасывающее действие. Почему это течение называется точечный вихрь, хотя вектор вихря равен нулю? Для пояснения найдем циркуляцию скорости Γ по окружности с центром в начале координат. По определению циркуляции по замкнутому контуру C называется следующий интеграл:

$$\Gamma = \oint_C v_s ds,$$

где v_s — проекция \vec{v} на касательную к контуру C , а ds — элемент длины дуги контура C . В данном течении скорость направлена по касательной к окружности, поэтому $|v_s| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = |k|/R$. Если $k > 0$, то движение происходит против часовой стрелки. Если вычисляется Γ при условии, что контур C обходится против часовой стрелки, то $v_s = k/R$,

$$\Gamma = \oint_C \frac{k}{R} ds = \frac{k}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi k \neq 0.$$

Этот результат кажется странным, так как течение безвихревое, а по формуле Стокса циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенному потоку вектора вихря через поверхность, натянутую на этот контур, и, значит, если $\vec{\omega} = 0$, то $\Gamma = 0$. Дело в том, что для данного течения формула Стокса для контура, охватывающего начало координат, не применима, потому что не существует поверхности, которую можно было бы натянуть на контур так, чтобы скорость и ее производные везде на этой поверхности были определены: $v_x, v_y \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow 0$.

Рассмотрим наше течение только в области вне окружности малого радиуса R_0 , а внутри окружности заменим наше течение на какое-нибудь непрерывное так, чтобы скорость и ее производные всюду стали определены. Тогда применима формула Стокса, а значит, течение внутри

окружности $R = R_0$ вихревое:

$$\Gamma = \oint_{R=R_0} v_s \, ds = 2 \int_{\Sigma} \omega_n \, d\sigma = 2\omega\pi R_0^2. \quad (12.7)$$

Здесь Σ — круг $R \leq R_0$, ω — среднее значение величины вектора вихря внутри круга (в точках рассматриваемого круга $\omega_n = \omega_z$, $\omega_x = \omega_y = 0$; последнее верно для любого плоско-параллельного движения). Отметим, что $\Gamma = 2\pi k$, не зависит от R_0 . Если $R_0 \rightarrow 0$, то $\omega \rightarrow \infty$. Говорят, что течение, описываемое потенциалом $\varphi = k \operatorname{arctg}(y/x)$, всюду потенциально, кроме точек оси z , где имеется вихрь бесконечно большой величины.

В следующей части курса мы будем заниматься математической формулой универсальных физических «законов сохранения» и выводить из них уравнения, описывающие поведение сплошных сред. В рамках ньютоновской механики для всех сред, независимо от их свойств, постулируется выполнение следующих законов сохранения, которые мы будем последовательно рассматривать: 1) закон сохранения массы; 2) закон сохранения количества движения; 3) закон сохранения момента количества движения; 4) закон сохранения энергии; 5) закон изменения энтропии.

Лекция 13

- 13.1. Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды
- 13.2. Формула дифференцирования по времени интеграла по подвижному индивидуальному объему
- 13.3. Закон сохранения массы для пространственного объема
- 13.4. Дифференциальное уравнение неразрывности — следствие закона сохранения массы
- 13.5. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

13.1. Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды

Закон сохранения массы утверждает, что **масса M любого индивидуального объема сплошной среды постоянна**:

$$M = \text{const.}$$

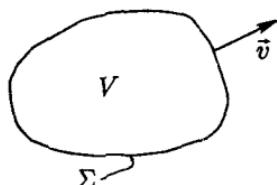


Рис. 13.1. Объем V с поверхностью Σ

Индивидуальным объемом называют выделенную часть среды, состоящую из одних и тех же индивидуальных частиц. В механике сплошных сред интерес представляет не столько масса некоторого объема, сколько распределение массы по объему, которое характеризуется распределением плотности. Определим понятие плотности. Рассмотрим малый объем ΔV с массой Δm . Средняя плотность этого объема равна:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Плотность ρ в точке среды определяется как предел этого отношения, когда ΔV стягивается в рассматриваемую точку:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Масса dm бесконечно малой частицы записывается в виде: $dm = \rho dV$.
Масса в объеме V равна:

$$M = \int_V \rho dV.$$

Закон сохранения массы для конечного индивидуального объема сплошной среды $V_{\text{инд}}$ гласит:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}(t)} \rho dV = 0.$$

Здесь $V_{\text{инд}}(t)$ — индивидуальный, в общем случае подвижный, объем.

13.2. Формула дифференцирования по времени интеграла по подвижному индивидуальному объему

Выведем формулу дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему $V(t)$ от некоторой величины $A(x^i, t)$. По определению производной имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} A(x^i, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} A(x^i, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} A(x^i, t) dV}{\Delta t}.$$

В правой части вычтем и прибавим одно и то же слагаемое:

$$\int_{V(t+\Delta t)} A(x^i, t) dV.$$

Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} A(x^i, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V(t+\Delta t)} A(x^i, t + \Delta t) dV - \int_{V(t+\Delta t)} A(x^i, t) dV}{\Delta t} +$$

$$\begin{aligned}
 & \int A(x^i, t) dV - \int A(x^i, t) dV \\
 & + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{V(t+\Delta t)}{V(t)}}{\Delta t} = \\
 & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V(t+\Delta t)} \frac{A(x^i, t + \Delta t) - A(x^i, t)}{\Delta t} dV + \\
 & + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t+\Delta t) - V(t)} A(x^i, t) dV.
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последней сумме равно

$$\int_{V(t)} \frac{\partial A}{\partial t} dV.$$

Для вычисления второго слагаемого разбиваем область $V(t + \Delta t) - V(t)$ на сумму N малых цилиндров с основаниями $\Delta\sigma_k$, представляющими собой элементы поверхности Σ объема $V(t)$, и длинами образующих $|\vec{v}| \Delta t$ (рис. 13.2). Объем элементарного цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$\Delta V_k = \Delta\sigma_k v_{n_k} \Delta t,$$

где v_{n_k} — проекция скорости на нормаль к площадке $\Delta\sigma_k$. Интеграл по области $V(t + \Delta t) - V(t)$ можно представить как соответствующий предел суммы произведений значений подинтегральной функции в точках элементарных цилиндров на объемы этих цилиндров. Тогда второе слагаемое вычисляется так:

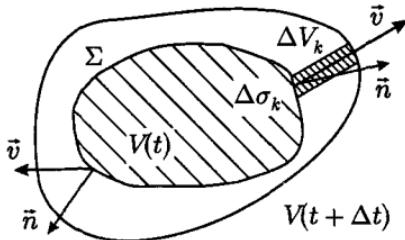


Рис. 13.2. Вычисление интеграла по области $V(t + \Delta t) - V(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A(x_k^i, t) v_{n_k} \Delta t \Delta\sigma_k = \int_{\Sigma} A v_n d\sigma$$

где Σ — поверхность объема $V(t)$.

Итак, формула дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему выглядит так:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} A v_n d\sigma. \quad (13.1)$$

Эта формула обобщает следующую известную формулу дифференцирования интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + f|_{x=b} \frac{db}{dt} - f|_{x=a} \frac{da}{dt}.$$

Последние два члена в правой части — это значения f на границах отрезка $[a; b]$, умноженные на скорость движения границ в сторону, внешнюю по отношению к отрезку $[a; b]$, то есть соответственно на db/dt и $-da/dt$. Скорость db/dt перемещения границы $x = b(t)$ можно назвать v_n .

Замечание. При выводе формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему мы рассматривали интеграл по области $V(t + \Delta t) - V(t)$. При этом если $V(t)$ не лежит целиком внутри $V(t + \Delta t)$, как например на рис. 13.3, все выкладки остаются верными, просто $\Delta V_k = \Delta \sigma_k v_{n_k} \Delta t$ будет положительным для тех областей, которые «добавляются» к $V(t)$ за время Δt , и отрицательным для тех областей, которые «удаляются» из $V(t)$ за время Δt , так как v_n по определению есть проекция скорости точки поверхности объема $V(t)$ на внешнюю нормаль к этой поверхности.

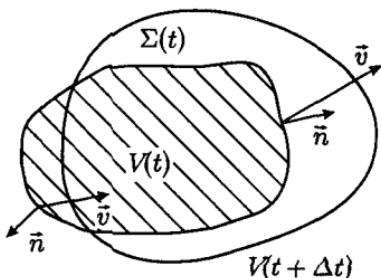


Рис. 13.3. Подвижный объем в моменты t и $t + \Delta t$

С использованием формулы (13.1) закон сохранения массы может быть записан в виде:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} \rho v_n d\sigma = 0. \quad (13.2)$$

13.3. Закон сохранения массы для пространственного объема

Заметим, что в формуле (13.2) производная по времени имеется только в подынтегральном выражении. В этой формуле участвуют V и Σ только для рассматриваемого (одного) момента времени, в отличие от формулы (13.1), содержащей производную по времени от интеграла по $V(t)$, для вычисления которой важно знать, как меняется V во времени.

Если мы имеем дело с V , Σ лишь в один (хотя и любой) момент времени, то невозможно различить, является ли V движущимся (индивидуальным) или неподвижным, то есть просто некоторой выделенной областью пространства. Поэтому формула (13.2) верна как для движущегося объема V , так и для пространственного. Пусть V —

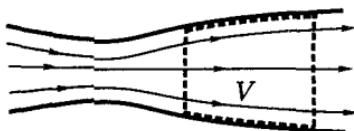


Рис. 13.4. Выделенный пространственный объем в потоке жидкости в трубке

неподвижный пространственный объем, область пространства, через которую движется среда (рис. 13.4). Дифференцирование по времени и интегрирование по неподвижной области пространства перестановочны, то есть если V — неподвижный объем, то в формуле (13.2) можно просто вынести дифференцирование по t из-под знака интеграла. Получаем закон сохранения массы для **пространственного объема**, через границы которого движется среда:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\Sigma} \rho v_n d\sigma. \quad (13.3)$$

Здесь $\int_V \rho dV$ — масса той среды, которая в данный момент находится внутри пространственного объема V , а правая часть уравнения — это масса, поступившая за единицу времени через границы этого пространственного объема. Знак « $-$ » в правой части связан с тем, что v_n — проекция \vec{v} на **внешнюю** нормаль. Итак, **закон сохранения массы для пространственного объема формулируется так: скорость изменения массы в пространственном объеме равна притоку массы через границы объема в единицу времени.**

13.4. Дифференциальное уравнение неразрывности — следствие закона сохранения массы

Дифференциальное уравнение, которое выводится из закона сохранения массы, называется **уравнением неразрывности**. Для вывода уравнения неразрывности нужно преобразовать поверхностный интеграл в соотношении (13.2) в объемный. Пусть ρ , \vec{v} непрерывны и дифференцируемы в V . Применяем формулу Гаусса—Остроградского. В декартовой системе координат имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \rho v_n d\sigma &= \int_{\Sigma} (\rho v_x \cos \widehat{n, \vec{x}} + \rho v_y \cos \widehat{n, \vec{y}} + \rho v_z \cos \widehat{n, \vec{z}}) d\sigma = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) dV = \int_V (\operatorname{div} \rho \vec{v}) dV. \end{aligned}$$

Следовательно, для непрерывного движения закон сохранения массы может быть записан в виде:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для любого объема, то если подынтегральное выражение непрерывно, то оно должно равняться нулю.

Получаем уравнение неразрывности при эйлеровом описании:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (13.4)$$

Напомним, что в произвольной системе координат

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \nabla_i(\rho v^i).$$

В декартовых координатах уравнение неразрывности записывается так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Полная (индивидуальная) производная по времени $d\rho/dt$ определяется формулой

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

поэтому уравнение неразрывности можно записать так:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (13.5)$$

Уравнения (13.4) и (13.5) представляют собой две различные формы уравнения неразрывности в эйлеровых переменных.

13.5. Уравнение неразрывности для несжимаемой среды

Если среда **несжимаемая**, то есть объем каждой индивидуальной частицы не меняется, то $\rho = \text{const}$ в каждой частице, то есть $d\rho/dt = 0$. Поэтому **уравнение неразрывности для несжимаемой среды** имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Замечание. Несжимаемая среда — это идеализированная модель. На практике все среды сжимаемые, однако часто при движении изменение объема частиц мало и им можно пренебречь. Особенно широко используется модель несжимаемой среды при описании движения жидкостей. Но даже газ, если он обтекает какое-то тело с не слишком большой скоростью, можно считать несжимаемым: налетая на препятствие, частицы, если это возможно, предпочитают разлетаться в стороны, чем быть сжатыми.

Лекция 14

- 14.1. Уравнение неразрывности в лагранжевых координатах
- 14.2. Закон сохранения количества движения
- 14.3. Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные.
Вектор напряжений
- 14.4. Математическая формулировка закона сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды
- 14.5. Еще один вид формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему

14.1. Уравнение неразрывности в лагранжевых координатах

Уравнение неразрывности следует из закона сохранения массы. В эйлеровых (пространственных) координатах оно имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (14.1)$$

где

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^k \nabla_k \rho, \quad \nabla_k \rho \equiv \frac{\partial \rho}{\partial x^k}.$$

В лагранжевых координатах ξ^i индивидуальная производная плотности по времени есть просто частная производная:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho(t, \xi)}{\partial t}$$

(через ξ обозначен набор ξ^1, ξ^2, ξ^3). Поэтому уравнение (14.1) записывается в лагранжевых координатах так

$$\frac{\partial \rho(t, \xi)}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (14.2)$$

Это один из видов уравнения неразрывности в лагранжевых координатах.

Замечание о лагранжевых координатах. В качестве лагранжевых координат не обязательно брать начальные координаты частицы. Рассмотрим пример, когда в качестве лагранжевой координаты удобно взять некоторую массу. Пусть в трубе, открытой с одной стороны неподвижной крышкой, а с другой — подвижной крышкой (поршнем) находится газ (см. рис. 14.1).

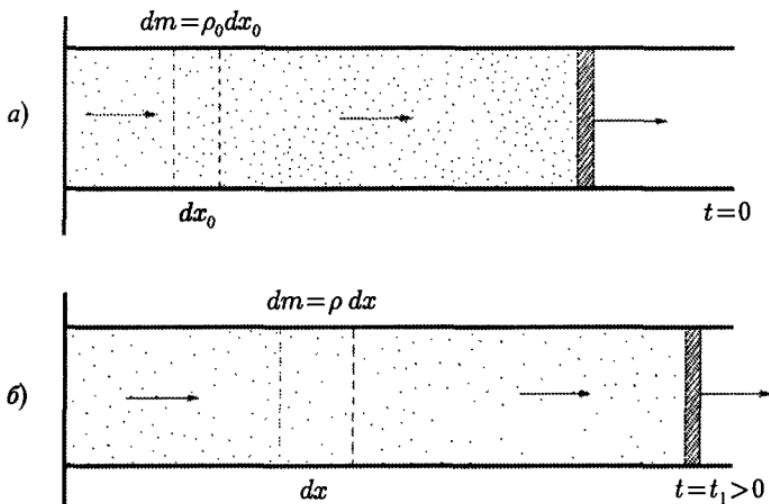


Рис. 14.1. Одномерное движение газа в трубе

Если поршень начинает двигаться, то в газе возникает движение. Пусть ось x совпадает с осью трубы. Предположим, что газ движется вдоль оси трубы, так что $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_x(t, x)$; тогда частицы, находящиеся в каком-нибудь поперечном сечении, движутся с одной и той же скоростью, и, следовательно, при движении остаются в некотором поперечном сечении. Это значит, что координаты (y, z) для каждой частицы остаются постоянными, а меняется со временем только координата x . Уравнение неразрывности (14.1) в этом случае имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (14.3)$$

Обозначим через x_0 начальные координаты частиц. Если использовать x_0 в качестве лагранжевой координаты, то закон движения частиц (то есть зависимость пространственной координаты x от времени и лагранжевой координаты) будет иметь вид

$$x = x(t, x_0),$$

а уравнение неразрывности (14.3) можно записать так:

$$\frac{\partial \rho(t, x_0)}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} = 0. \quad (14.4)$$

Очевидно, можно в качестве лагранжевой координаты частицы взять массу m газа, заключенного между неподвижной крышкой и сечением, в котором расположена данная частица. В силу закона сохранения массы величина m не меняется, куда бы ни сдвинулась частица (вместе со своим сечением), поэтому может быть выбрана в качестве лагранжевой координаты (см. рис. 14.1). При этом для массы dm , заключенной между близкими поперечными сечениями с начальными координатами x_0 , $x_0 + dx_0$ и конечными координатами x , $x + dx$ в силу закона сохранения массы имеем

$$dm = \rho_0 dx_0 = \rho dx.$$

Поэтому

$$\frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

а уравнение неразрывности (14.4) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho^2}{\rho_0} \frac{\partial v_x}{\partial x_0} = 0, \quad \text{или} \quad -\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial v_x}{\partial x_0} = 0. \quad (14.5)$$

Вспоминая, что $dm = \rho_0 dx_0$, и вводя удельный объем $V = 1/\rho$, получаем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial m}. \quad (14.6)$$

Здесь неизвестные V и v_x являются функциями времени t и массовой лагранжевой координаты m . Это уравнение линейно, в отличие от нелинейных уравнений (14.3), (14.4), поэтому оно часто используется в газовой динамике. Есть и другие преимущества использования массовой лагранжевой координаты. Одним из них является то, что в уравнение (14.6), в отличие от уравнения (14.4), не входит начальное распределение плотности в газе.

Отметим, что уравнения в формах (14.1), (14.2) выполняются автоматически, если рассматриваются задачи о равновесии среды, так как $\vec{v} = 0$, $\partial \rho / \partial t = 0$. Исследование задач о равновесии составляет основную часть теории упругости: определение деформаций и напряжений в различных конструкциях (например, в стенах зданий), находящихся в равновесии, является основным предметом этой теории.

Выведем из закона сохранения массы уравнения в таких формах, которые имеют смысл как для задач о движении, так и для задач о равновесии. Они тоже называются уравнениями неразрывности. При выводе используется лагранжев подход: изучается, что происходит с индивидуальной частицей среды при деформировании среды.

Рассмотрим малую частицу среды с массой dm . Плотность и объем этой частицы в начальном состоянии суть ρ_0 , dV_0 , а в конечном (актуаль-

ном) состояния ρ , dV . По закону сохранения массы

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV, \quad \text{то есть} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = \theta + 1. \quad (14.7)$$

Здесь θ — коэффициент относительного изменения объема. В теории деформаций были выведены формулы (8.9)

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{1 + 2\hat{I}_1 + 4\hat{I}_2 + 8\hat{I}_3} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\hat{I}_1 + 4\hat{I}_2 - 8\hat{I}_3}} - 1,$$

где $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3, \widehat{I}_1, \widehat{I}_2, \widehat{I}_3$ — первый, второй и третий инварианты тензоров деформаций Грина и Альманси, соответственно. С использованием этих формул закон сохранения массы приводит к следующим двум эквивалентным соотношениям, каждое из которых может быть названо уравнением неразрывности в лагранжевых переменных:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{1 - 2\hat{I}_1 + 4\hat{I}_2 - 8\hat{I}_3} \quad (14.8)$$

или

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + 2\hat{I}_1 + 4\hat{I}_2 + 8\hat{I}_3}}. \quad (14.9)$$

Если деформации малы, то есть

$$I_3 \ll I_2 \ll I_1 \ll 1,$$

то, пренебрегая малыми высшего порядка, будем иметь **уравнение неразрывности в теории малых деформаций**

$$\rho = \rho_0(1 - \hat{I}_1) = \rho_0(1 - \widehat{I}_1) = \rho_0(1 - \operatorname{div} \vec{w}). \quad (14.10)$$

Наконец, получим еще одну форму уравнения неразрывности в лагранжевых координатах. Для этого используем известные выражения для элемента объема

$$dV = \sqrt{\hat{g}} d\xi^1 d\xi^2 d\xi_3, \quad dV_0 = \sqrt{\hat{g}} d\xi^1 d\xi^2 d\xi_3.$$

Здесь

$$\hat{g} = \det(\hat{g}_{ij}), \quad \hat{g} = \det(\hat{g}_{ij}),$$

\hat{g}_{ij} , \hat{g}_{ij} — компоненты метрического тензора лагранжевой системы координат в деформированном и начальном состояниях соответственно.

Пусть dV и dV_0 соответствуют одной и той же частице, только в разных ее состояниях. Тогда, так как лагранжевые координаты индивидуальных частиц не меняются при движении, $d\xi^i$ в выражениях для dV и dV_0 — одни и те же. Поэтому закон сохранения массы (14.7) дает

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\sqrt{\hat{g}}}{\sqrt{\hat{g}}}. \quad (14.11)$$

Еще одна форма уравнения неразрывности в лагранжевых переменных используется, когда изучается движение или деформирование в **декартовой системе координат** x^i , причем $\xi^i = x_0^i$. Тогда $\det(g_{kl}^x) = 1$, $\hat{g} = 1$,

$$\hat{g}_{ij} = g_{kl}^x \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^l}{\partial x_0^j}, \quad \hat{g} = \det(\hat{g}_{ij}) = \det(g_{kl}^x) \Delta^2 = \Delta^2,$$

где

$$\Delta = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \right),$$

а функции $x^i = x^i(x_0^k)$ связывают координаты индивидуальной точки до и после деформации. Получаем уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = |\Delta|. \quad (14.12)$$

Итак, соотношения (14.2), (14.8)–(14.12) представляют собой **различные формы уравнения неразрывности в лагранжевых переменных**.

14.2. Закон сохранения количества движения

Рассмотрим закон сохранения количества движения (импульса) сначала для материальной точки с массой m . Запишем для нее второй закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Так как масса материальной точки постоянна, то это соотношение переписывается в виде

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F},$$

где

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

называется количеством движения или импульсом точки. Теперь второй закон Ньютона можно сформулировать в виде закона сохранения количества движения: скорость изменения количества движения материальной точки равна силе, действующей на точку. Слово «сохранение» в названии закона используется в том смысле, что если на точку не действует сила ($\vec{F} = 0$), то ее количество движения сохраняется.

Рассмотрим теперь систему N материальных точек. Для k -ой точки системы выполнено уравнение

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \vec{F}_k^{(i)} + \vec{F}_k^{(e)}.$$

Здесь сила, действующая на точку, представлена в виде суммы внутренней силы $\vec{F}_k^{(i)}$, то есть силы, действующей со стороны остальных точек рассматриваемой системы, и внешней силы $\vec{F}_k^{(e)}$, то есть силы, действующей со стороны объектов, не принадлежащих системе. Складывая эти равенства для всех точек системы и учитывая, что сумма внутренних сил равна нулю согласно третьему закону Ньютона, получаем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)},$$

где

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k$$

называется количеством движения системы материальных точек. Закон сохранения количества движения системы материальных точек состоит в утверждении, что скорость изменения количества движения системы материальных точек равна сумме внешних сил, действующих на точки этой системы.

Рассмотрим теперь индивидуальный объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ . Закон сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды формулируется аналогично закону для системы материальных точек: **скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме внешних сил, действующих на этот объем.**

Для получения математической формулировки этого закона в случае сплошной среды нужно написать выражения для количества движения объема сплошной среды и для суммы внешних сил, действующих на этот объем.

Рассмотрим прежде всего, как записывается выражение для количества движения некоторого объема V сплошной среды. Учитывая, что скорости всех точек среды разные, разобъем объем V на малые частицы, в пределах которых скорости всех точек можно считать одинаковыми. Масса малой частицы ρdV , количество движения всей частицы есть $\vec{v} \rho dV$, количество движения всего объема V сплошной среды равно

$$\vec{Q} = \int_V \vec{v} \rho dV.$$

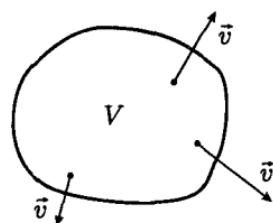


Рис. 14.2. Разные частицы объема могут иметь различные скорости

14.3. Силы, действующие на среду: массовые и поверхностные. Вектор напряжений

Силы, действующие на сплошную среду, делятся на массовые и поверхностные. **Массовые силы** — это силы, которые действуют на частицы внутри объема и для малого объема пропорциональны его массе. Примером может служить сила тяжести. Плотность массовых сил \vec{F} — это отношение силы к массе, точнее

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{\text{масс}}}{\rho \Delta V}.$$

Здесь $\Delta \vec{F}_{\text{масс}}$ — сила, действующая на частицу с массой $\rho \Delta V$. На бесконечно малую частицу действует сила $\vec{F} \rho dV$, а на весь объем V действует сила

$$\int_V \vec{F} \rho dV.$$

Например, плотность массовой силы тяжести есть \vec{g} , где \vec{g} — ускорение силы тяжести. Другие примеры массовых сил: электромагнитные силы, силы инерции.

Кроме массовых сил, на среду могут действовать **поверхностные силы**.

Это силы, которые приложены к поверхности среды, и для малого элемента поверхности пропорциональны площади этого элемента. Приме-

ром могут служить силы давления и поверхностного трения. Плотность поверхностной силы — это предел отношения силы, действующей на площадку, к площади этой площадки при стягивании площадки в точку. Плотность поверхностной силы называется вектором напряжений. **Вектор напряжений, действующий на площадке с нормалью \vec{n} , обозначается \vec{P}_n и определяется формулой**

$$\vec{P}_n = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_{\text{пов}}}{\Delta \sigma}.$$

Здесь $\Delta \sigma$ — площадь элемента поверхности, $\Delta \vec{F}_{\text{пов}}$ — поверхностная сила, которая действует на этот элемент поверхности. Для бесконечно малого элемента поверхности $d\sigma$ поверхностная сила равна $\vec{P}_n d\sigma$, тогда на всю поверхность Σ объема V действует поверхностная сила

$$\int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma. \quad (14.13)$$

Подчеркнем, что индекс n в обозначении вектора напряжений \vec{P}_n **НЕ ОЗНАЧАЕТ**, что сила направлена по нормали к площадке. Если это,

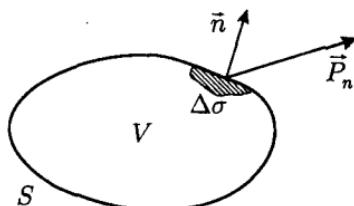


Рис. 14.3. Вектор напряжений \vec{P}_n

например, сила трения, то она направлена по касательной к площадке. В общем случае направление \vec{P}_n может быть любым. Индекс n указывает лишь на ориентацию площадки (в частности, сторону площадки), на которую действует \vec{P}_n . Нормаль считается направленной во внешнюю сторону по отношению к части среды, на которую действует рассматриваемая поверхностная сила.

Если нормаль \vec{n} направлена во внешнюю сторону по отношению к объему, занятому средой, то формула (14.13) дает выражение суммы внешних поверхностных сил, действующих на объем, ограниченный поверхностью Σ .

14.4. Математическая формулировка закона сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды

Закон сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды утверждает, что скорость изменения количества движения индивидуального объема сплошной среды равна сумме внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем. Математически он формулируется так:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \vec{v} \rho \, dV = \int_V \vec{F} \rho \, dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n \, d\sigma. \quad (14.14)$$

Здесь \vec{F} , \vec{P}_n — плотности внешних массовых и поверхностных сил.

14.5. Еще один вид формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему

Получим еще один вид формулы дифференцирования по времени интеграла от некоторой функции $A(t, x^i)$ по индивидуальному подвижному объему $V_{\text{инд}}$, удобный, когда подынтегральное выражение $A(t, x^i)$ имеет специальный вид, а именно, является произведением некоторой функции $f(t, x^i)$ на плотность ρ : $A(t, x^i) = f(t, x^i)\rho(t, x^i)$. Кроме того, предполагается, что $f(t, x^i)$ и ρ определены и дифференцируемы в V .

Согласно формуле (13.1) из лекции 13, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} f \rho \, dV = \int_V \frac{\partial(f\rho)}{\partial t} \, dV + \int_{\Sigma} f \rho v_n \, d\sigma.$$

Поверхностный интеграл можно преобразовать по формуле Гаусса—Остроградского. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{ини}}} f \rho \, dV &= \int_V \left(\frac{\partial(f\rho)}{\partial t} + \nabla_i(f\rho v^i) \right) dV = \\ &= \int_V \left(\rho \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f \right) + f \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) \right) \right) dV. \end{aligned}$$

В последнем интеграле выражение в круглых скобках в первом слагаемом есть полная (индивидуальная) производная функции f , а во втором слагаемом — равно нулю в силу уравнения неразрывности. Окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{ини}}} f \rho \, dV = \int_V \rho \frac{df}{dt} \, dV. \quad (14.15)$$

Обратим внимание, что в формуле (14.15) одно и то же обозначение — d/dt — используется в двух разных смыслах: в левой части это обыкновенная производная по t , так как интеграл, который дифференцируется, зависит только от t , а в правой части — это полная (индивидуальная) производная функции времени и координат.

Лекция 15

- 15.1. Формула Коши для вектора напряжений
- 15.2. Тензор напряжений
- 15.3. Дифференциальные уравнения движения

15.1. Формула Коши для вектора напряжений

Закон сохранения количества движения для индивидуального объема сплошной среды имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{иниц}}} \vec{v} \rho \, dV = \int_V \vec{F} \rho \, dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n \, d\sigma. \quad (15.1)$$

Из этого закона выводится важное следствие, касающееся вектора напряжений \vec{P}_n — так называемая формула Коши. Закон сохранения количества движения с использованием формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему для непрерывного движения может быть записан в виде

$$\int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho \, dV = \int_V \vec{F} \rho \, dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n \, d\sigma,$$

то есть

$$\int_V \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \rho - \vec{F} \rho \right) dV = \int_{\Sigma} \vec{P}_n \, d\sigma, \quad (15.2)$$

причем это соотношение верно для любого объема. Отсюда и выводится формула Коши для \vec{P}_n .

Прежде всего, заметим, что вектор напряжений \vec{P}_n можно и нужно вводить не только для площадок внешней поверхности рассматриваемого объема сплошной среды, но и для площадок, которые можно провести в каждой точке **внутри** среды.

Действительно, через каждую точку внутри объема V можно мысленно провести поверхность, разделяющую объем среды на две части. При этом ясно, что одна часть среды может действовать на другую по разделяющей их поверхности (см. рис. 15.1). Через рассматриваемую точку можно

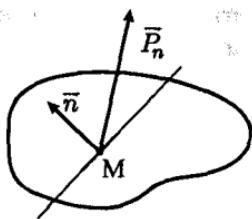


Рис. 15.1. Вектор напряжений во внутренней точке объема M на площадке с нормалью \vec{n}

проводить бесконечное множество поверхностей и, соответственно, бесконечно много малых площадок; положение малой площадки определяется вектором нормали к ней. Векторы напряжений на площадках с разными нормальями будут, конечно, разными, см. рис. 15.2, где изображены векторы напряжений на разных площадках, проходящих через центр тяжелого кирпича, лежащего на горизонтальном столе.

Набор \vec{P}_n , действующих на всевозможных площадках в данной точке, определяет напряженное состояние в данной точке.

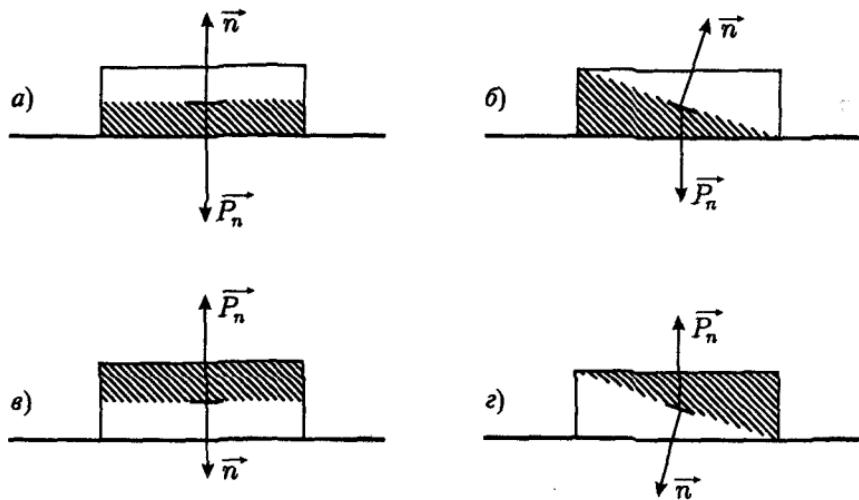


Рис. 15.2. Вектор напряжений на различных площадках внутри тяжелого кирпича обусловлен действием незаштрихованной части кирпича на заштрихованную

Следуя Коши, получим из закона сохранения количества движения, что векторы \vec{P}_n , действующие на всевозможных площадках в данной точке, вычисляются через три вектора напряжений, действующих на трех взаимно-перпендикулярных площадках. А именно, пусть надо вычислить \vec{P}_n в точке M на площадке с заданной нормалью \vec{n} . Проведем в точке M оси декартовой системы координат x^1, x^2, x^3 и построим тетраэдр с вершиной в точке M , три грани которого лежат в координатных плоскостях, а четвертая перпендикулярна \vec{n} (рис. 15.3). Векторы базиса системы x^i обозначим \vec{e}_i , угол между \vec{n} и осью x^i — через $\widehat{\vec{n} \vec{x}^i}$, высоту тетраэдра, опущенную из точки M на грань ABC , — через h . Объем тетраэдра равен $h\Delta\sigma/3$, где $\Delta\sigma$ — площадь грани ABC . Выпишем следующие величины, относящиеся к рассматриваемому тетраэдру:

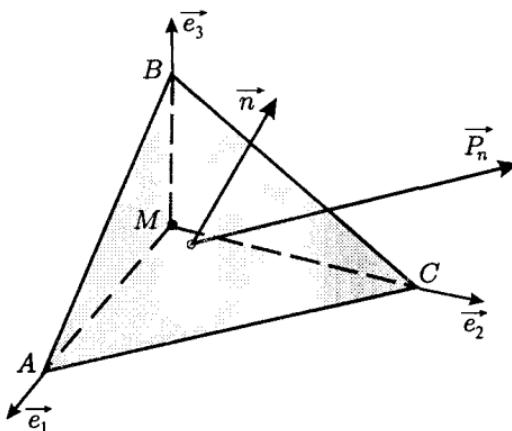


Рис. 15.3. Тетраэдр Коши

- грань ABC : ее площадь $\Delta\sigma$; вектор внешней нормали к ней \vec{n} ; вектор напряжений \vec{P}_n ;
- грань MBC : ее площадь $\Delta\sigma \cdot \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^1}$; вектор внешней нормали к ней $(-\vec{e}_1)$; вектор напряжений \vec{P}_{-e_1} ;
- грань MAB : ее площадь $\Delta\sigma \cdot \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^2}$; вектор внешней нормали к ней $(-\vec{e}_2)$; вектор напряжений \vec{P}_{-e_2} ;
- грань MAC : ее площадь $\Delta\sigma \cdot \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^3}$; вектор внешней нормали к ней $(-\vec{e}_3)$; вектор напряжений \vec{P}_{-e_3} .

Используя теорему о среднем, можно записать закон сохранения количества движения (15.2) для этого тетраэдра в следующем виде

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \rho - \vec{F} \rho \right) \frac{1}{3} h \Delta\sigma = \\ = \vec{P}_n \Delta\sigma + \vec{P}_{-e_1} \Delta\sigma \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^1} + \vec{P}_{-e_2} \Delta\sigma \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^2} + \vec{P}_{-e_3} \Delta\sigma \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^3}.$$

Разделим полученное равенство на $\Delta\sigma$ и перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$. Получим, что в точке M выполняется равенство:

$$\vec{P}_n + \vec{P}_{-e_1} \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^1} + \vec{P}_{-e_2} \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^2} + \vec{P}_{-e_3} \cos \widehat{\vec{n} \vec{x}^3} = 0. \quad (15.3)$$

В частности, при $\vec{n} \rightarrow \vec{e}_1$ получаем $\vec{P}_{e_1} = -\vec{P}_{-e_1}$. Но так как направление оси x^1 может быть выбрано произвольно, то это означает, что для любого направления \vec{n}

$$\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}.$$

Введем обозначения:

$$\vec{P}_{e_1} = \vec{P}^1, \quad \vec{P}_{e_2} = \vec{P}^2, \quad \vec{P}_{e_3} = \vec{P}^3.$$

Тогда равенство (15.3) записывается в виде

$$\vec{P}_n = \vec{P}^1 \cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^1 + \vec{P}^2 \cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^2 + \vec{P}^3 \cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^3,$$

или, так как $\cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^1, \cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^2, \cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^3$ — это компоненты нормали \vec{n} , то есть $\cos \widehat{\vec{n}} \vec{x}^i = n_i$, то

$$\vec{P}_n = \vec{P}^1 n_1 + \vec{P}^2 n_2 + \vec{P}^3 n_3. \quad (15.4)$$

Равенство (15.4) будем называть **формулой Коши**. Это не общепринятое название, но оно оправдывается тем, что Коши впервые (в 1822 году), и именно описанным выше способом, получил эту формулу.

Согласно формуле Коши, вектор напряжений \vec{P}_n , действующий на площадке с нормалью \vec{n} , выражается как линейная комбинация векторов напряжений \vec{P}^k , действующих на координатных площадках декартовой системы координат; n_k — компоненты вектора \vec{n} .

Формула Коши в краткой записи имеет вид

$$\vec{P}_n = \vec{P}^k n_k.$$

15.2. Тензор напряжений

Определим сначала компоненты тензора напряжений, пользуясь декартовой системой координат. Введем в декартовой системе координат проекции векторов $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ на координатные оси, т. е. компоненты этих векторов:

$$\vec{P}^1 = \{p^{11}, p^{21}, p^{31}\}, \quad \vec{P}^2 = \{p^{12}, p^{22}, p^{32}\}, \quad \vec{P}^3 = \{p^{13}, p^{23}, p^{33}\}.$$

Обратим внимание на порядок индексов в обозначениях компонент: второй индекс указывает на площадку, на которой действует соответствующий вектор, а первый — проекцией на какую ось является данная компонента.

Запишем матрицу, столбцы которой составлены из компонент векторов $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ соответственно:

$$\begin{pmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Тензором напряжений называется тензор, столбцы матрицы компонент которого в декартовой системе координат представляют собой компоненты векторов напряжений на координатных площадках.

Формула Коши для компонент P_n^i вектора \vec{P}_n имеет вид

$$P_n^i = p^{ik} n_k. \quad (15.5)$$

Из этой формулы следует, что p^{ik} действительно представляют собой компоненты тензора второго ранга, так как они в свертке с компонентами вектора n_k дают компоненты вектора P_n^i («Теорема деления» из теории тензоров).

Мы вывели формулу (15.5), пользуясь декартовой системой координат. Но если при переходе к любой, в том числе и криволинейной системе величины p^{ik} будут преобразовываться как компоненты тензора второго ранга, то формула (15.5) будет верна в любой системе координат. Поэтому можно дать следующее определение тензора напряжений.

Определение 2. Тензором напряжений называется тензор с компонентами p^{ik} , для которого выполняются соотношения (15.5) в любой системе координат, причем P_n^i — компоненты вектора напряжений на площадке, компоненты нормали к которой суть n_k .

Заметим, что в криволинейной системе координат \vec{P}^k не равны векторам напряжений на координатных площадках. Действительно, вычислим по формуле Коши, например, вектор \vec{P}_n на координатной площадке $x^1 x^2$. Вектор единичной нормали к этой площадке можно записать в виде $\vec{n} = \vec{\varepsilon}^3 / \sqrt{g^{33}}$ (см. рис. 15.4).

Действительно, известно, что контравариантные и ковариантные векторы базиса удовлетворяют соотношениям $(\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}_j) = \delta_{ij}$. Это значит, в частности, что вектор $\vec{\varepsilon}^3$ перпендикулярен векторам $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$, то есть координатной площадке (x^1, x^2) . Кроме того, $|\vec{\varepsilon}^3| = \sqrt{g^{33}}$. Значит, для этой площадки $\vec{n} = \vec{\varepsilon}^3 / \sqrt{g^{33}}$, то есть $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1/\sqrt{g^{33}}$. Поэтому $\vec{P}_n = (1/\sqrt{g^{33}})\vec{P}^3$.

Сформулируем еще раз, каков механический смысл компонент тензора напряжений в декартовой системе координат. Например, что такое p^{23} ? В декартовой системе координат p^{23} — это проекция вектора напряже-

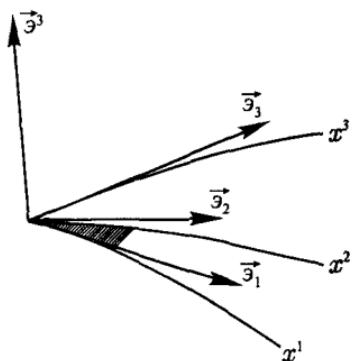


Рис. 15.4. $\vec{\varepsilon}^3$ перпендикулярен координатной площадке $x^1 x^2$

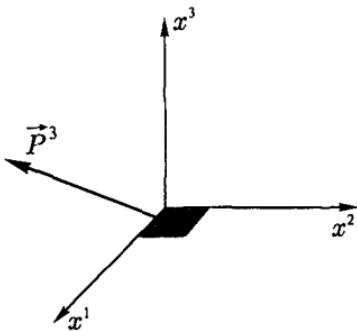


Рис. 15.5. Вектор \vec{P}^3 действует на площадке, перпендикулярной оси x^3

ний, действующего на площадке, перпендикулярной оси x^3 , на ось x^2 . (рис. 15.5).

Если декартовы координаты обозначены x, y, z , то компоненты тензора напряжений обозначаются так:

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix},$$

причем, конечно, индексы здесь можно писать как снизу, так и сверху, в декартовых системах координат положение индексов несущественно.

В книгах по теории упругости компоненты тензора напряжений часто обозначают не p_{ij} , а σ_{ij} . Матрица компонент тензора напряжений в декартовой системе координат в этих обозначениях записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Замечание к выводу формулы Коши. Мы получили формулу $\vec{P}_n = \vec{P}^k n_k$ только из условия, что равенство

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} \right) dV = \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma$$

верно для любого объема. При этом физический смысл подынтегральных выражений не был существенен. Ясно, что если мы имеем общее равенство вида

$$\int_V A dV = \int_{\Sigma} B_n d\sigma,$$

где B_n — некоторая функция координат и нормали, то, если оно верно для любого V , применяя его к объему в виде малого тетраэдра, получим формулу Коши для B_n :

$$B_n = B^i n_i.$$

Мы будем пользоваться этим утверждением при выводе следствий из других законов сохранения.

15.3. Дифференциальные уравнения движения

Дифференциальные уравнения движения — это дифференциальные уравнения, которые следуют из закона сохранения количества движения. Для непрерывного движения закон сохранения количества движения (15.2)

можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{d\vec{v}}{dt} \rho dV &= \int_V \vec{F} \rho dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma = \\ &= \int_V \vec{F} \rho dV + \int_{\Sigma} \vec{P}^k n_k d\sigma = \int_V \vec{F} \rho dV + \int_V \nabla_k \vec{P}^k dV. \end{aligned}$$

При преобразовании использована формула Коши $\vec{P}_n = \vec{P}^k n_k$ и формула Гаусса—Остроградского. Таким образом,

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \nabla_k \vec{P}^k \right) dV = 0,$$

что верно для **любого** объема. Поэтому, если подынтегральное выражение непрерывно, то оно равно нулю. Следовательно, всюду в области непрерывного движения выполняется уравнение:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla_k \vec{P}^k. \quad (15.6)$$

Это уравнение называется **уравнением движения**.

Из этого векторного уравнения следуют уравнения для компонент:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_k p^{ik}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Запишем, например, уравнение движения в проекции на ось x декартовой системы координат в раскрытом виде:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}.$$

Замечание. Член $\nabla_k \vec{P}^k$, входящий в уравнение (15.6), требует некоторой расшифровки. Если бы мы пользовались при выводе уравнения (15.6) декартовой системой координат (с постоянными векторами базиса), то, очевидно, этот член имел бы вид

$$\frac{\partial \vec{P}^k}{\partial x^k} = \frac{\partial p^{ik}}{\partial x^k} \vec{e}_i,$$

то есть, представлял собой вектор с компонентами $\partial p^{ik} / \partial x^k$. В любой криволинейной системе координат свертки $\nabla_k p^{ik}$ образуют компоненты вектора $\nabla_k p^{ik} \vec{e}_i$. В декартовой системе компоненты этого вектора совпадают с $\partial p^{ik} / \partial x^k$; поэтому в любой системе координат $\nabla_k \vec{P}^k$ следует понимать как вектор с компонентами $\nabla_k p^{ik}$:

$$\nabla_k \vec{P}^k = \nabla_k p^{ik} \vec{e}_i.$$

Лекция 16

- 16.1. Закон сохранения момента количества движения
- 16.2. Момент количества движения для конечного объема сплошной среды.
Массовые и поверхностные пары. Вектор моментных напряжений
- 16.3. Математическая формулировка закона сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды
- 16.4. Формула Коши для вектора моментных напряжений.
Тензор моментных напряжений
- 16.5. Дифференциальное уравнение момента количества движения

16.1. Закон сохранения момента количества движения

Сформулируем сначала закон сохранения момента количества движения для материальной точки массы m . Возьмем уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

и умножим его **векторно** слева на радиус-вектор \vec{r} . Получим

$$\left[\vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{F}],$$

или

$$\frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\vec{v}] = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (16.1)$$

Здесь использовано, что

$$\frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\vec{v}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} \right],$$

причем

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] = [\vec{v} \times m\vec{v}] = 0.$$

Величина $[\vec{r} \times m\vec{v}]$ называется моментом количества движения (моментом импульса) материальной точки, $[\vec{r} \times \vec{F}]$ — момент силы.

Равенство (16.1) означает, что скорость изменения момента количества движения материальной точки равна моменту силы, действующей на эту точку. Это и есть закон сохранения момента количества движения. Для материальной точки он является следствием закона сохранения количества движения.

Для индивидуального объема сплошной среды закон сохранения момента количества движения не является следствием закона сохранения количества движения. Он рассматривается как независимый постулат, обобщающий опытные факты, и формулируется так.

Скорость изменения момента количества движения индивидуального объема равна сумме моментов внешних сил и пар.

16.2. Момент количества движения

для конечного объема сплошной среды.

Массовые и поверхностные пары.

Вектор моментных напряжений

Момент количества движения для конечного объема V сплошной среды определяется следующим образом. Разобъем объем на сумму малых объемов с массами ρdV .

Для малой частицы количество движения есть $\vec{v}\rho dV$. По аналогии с материальной точкой кажется, что момент количества движения бесконечно малой частицы сплошной среды есть $\vec{r} \times \vec{v}\rho dV$. В действительности это не всегда так, потому что у частицы сплошной среды может быть собственный момент количества движения, связанный не с макроскопическим движением, а с внутренними вращениями. Момент количества движения малой частицы среды по определению равен

$$[\vec{r} \times \vec{v}]\rho dV + \vec{k}\rho dV,$$

где $\vec{k}\rho dV$ — внутренний, или собственный, момент количества движения частицы с массой ρdV ; \vec{k} — плотность собственного момента количества движения.

Каков физический смысл \vec{k} ? Рассмотрим малую частицу сплошной среды под микроскопом: она состоит из отдельных элементарных частиц — атомов и молекул, которые обладают собственным моментом количества движения, например за счет вращения электронов вокруг ядра.

Если векторы соответствующих угловых скоростей распределены хаотически, то суммарный момент количества движения, связанный с вращением элементарных частиц, равен нулю. Тогда \vec{k} равен нулю. Если же имеется некоторая упорядоченность вращений элементарных частиц, то суммарный собственный момент может быть отличен от нуля. Такая упорядоченность может возникать, в частности, под действием магнитного поля.

Собственный момент количества движения может быть связан не только с вращением внутри атомов. Например, если среда представляет собой

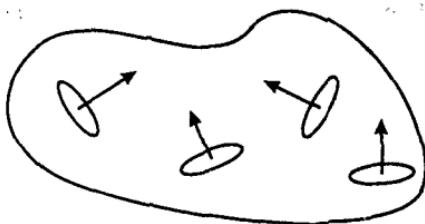


Рис. 16.1. Моменты количества движения элементарных частиц внутри среды

Если среда не содержит вращающихся упорядоченно частиц, и нет электромагнитных эффектов, то $\vec{k} = 0$.

Напишем выражение для суммы моментов внешних сил. Для малой частицы с массой ρdV момент массовых сил равен $[\vec{r} \times \vec{F}] \rho dV$. Сумма моментов внешних массовых сил, действующих на весь объем V , равна

$$\int_V [\vec{r} \times \vec{F}] \rho dV.$$

Поверхностная сила, действующая на элемент поверхности среды $d\sigma$, равна $\vec{P}_n d\sigma$, ее момент равен $[\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma$. Сумма моментов внешних поверхностных сил, действующих на всю поверхность Σ рассматриваемого объема среды, равна

$$\int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma.$$

Таким образом, сумма моментов внешних сил, действующих на объем V с поверхностью Σ , равна

$$\int_V [\vec{r} \times \vec{F}] \rho dV + \int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma.$$

На среду могут действовать также пары сил. Пары сил можно разделить на массовые и поверхностные. **Массовые пары** действуют на каждую частицу в объеме среды. Их момент для малого объема среды пропорционален его массе.

Поверхностные пары приложены к поверхности среды. Их момент для малого элемента поверхности пропорционален площади этого элемента.

Плотность момента массовых пар обозначим буквой \vec{h} ; тогда момент массовых пар, действующих на малую частицу с массой ρdV , есть $\vec{h} \rho dV$, а действующих на весь объем V — $\int_V \vec{h} \rho dV$.

сусpenзию, взвесь твердых частиц в жидкости, или просто поток твердых частиц (камней, зерен и т. д.), то собственный момент количества движения может возникать из-за вращения этих твердых частиц.

Сумма элементарных моментов количества движения внутри малой частицы среды, деленная на массу этой частицы — это плотность собственного момента \vec{k} .

Момент поверхностных пар, действующих на единичную площадку, называется **плотностью момента поверхностных пар или вектором моментных напряжений** и обозначается \vec{M}_n :

$$\vec{M}_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta\sigma},$$

где $\overrightarrow{\Delta M}$ — момент поверхностных пар, действующих на площадку $\Delta\sigma$. Момент пар, действующих на бесконечно малую площадку $d\sigma$, равен $\vec{M}_n d\sigma$.

Итак, сумма моментов внешних пар, действующих на объем V , записывается в виде

$$\int_V \vec{h}\rho dV + \int_{\Sigma} \vec{M}_n d\sigma.$$

Какую природу могут иметь массовые пары? Представим себе среду, состоящую из «стрелок компаса» (намагниченных стерженьков). В магнитном поле каждая стрелка стремится повернуться; это значит, что на каждую частицу среды со стороны магнитного поля действуют пары сил.

Теперь поговорим о поверхностных моментах. В некоторых моделях твердых тел можно представлять себе, что поверхность частицы просто цепляются внешним телом, как некие «шестеренки». Но может быть и другая природа поверхностных моментов. Для пояснения рассмотрим следующий пример, объясняющий, что такое напряжения и моментные напряжения в газах и в средах, состоящих из врачающихся частиц.

Рассмотрим две стаи птиц, которые летят в одном направлении и в данный момент пролетают одна над другой. Птицы — одной породы, но одна стая недавно отдыхала (пусть это будет верхняя); она летит с большой скоростью. Другая стая (нижняя) еще не отдыхала и летит с меньшей скоростью. Птицы видят друг друга и, конечно, не сталкиваются, в этом смысле никакого силового взаимодействия между стаями нет. Но представим себе, что какой-то птице из быстрой стаи понравился кто-то из медленной стаи, и она перелетела в эту стаю. В свою очередь какой-то птице из нижней (медленной) стаи понравился кто-то из верхней стаи, и она перелетела туда.

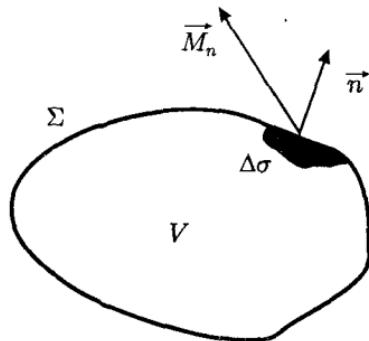


Рис. 16.2. Вектор моментных напряжений \vec{M}_n

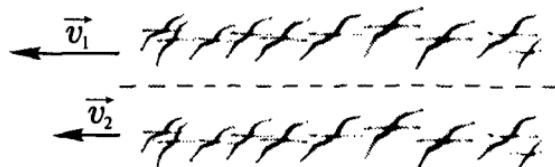


Рис. 16.3. Две стаи птиц, летящих с разными скоростями

Что получится в результате такого обмена? Средняя скорость верхней стаи уменьшится, а нижней — увеличится. Если мы не различаем отдельных птиц, то можем говорить, что на границе между стаями подействовала сила, для верхней стаи в направлении назад, а для нижней — в направлении вперед.

Аналогично рассматриваются потоки газа, роль птиц играют молекулы, которые за счет хаотического теплового движения перескакивают из слоя в слой, перенося свое количество движения и изменяя таким образом количество движения соответствующего слоя. В механике сплошной среды движение отдельных молекул не рассматривают, а говорят о силе, которая действует на поверхности, разделяющей два слоя. Таков механизм поверхностных сил в газах.

Если птицы еще и крутятся (причем, все в одном направлении), то при перелете из стаи в стаю они приносят свой момент количества движения, изменяя суммарный момент количества движения каждой стаи. Это можно трактовать как действие неких пар — моментных напряжений на границе раздела.

В механике сплошных сред рассматриваются, в числе прочих, потоки камней (каменные обвалы на склонах гор), потоки гранулированных сред и т. д. При описании таких потоков также вводятся напряжения и моментные напряжения, вызванные перескоком отдельных глыб или зерен из слоя в слой. Конечно, чтобы ощущалось изменение момента количества движения слоя, нужно, чтобы направления вращения частиц были в какой-то степени упорядочены. В огромном большинстве сред и потоков такой упорядоченности нет, поэтому моментные напряжения не возникают.

16.3. Математическая формулировка закона сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды

Математическая формулировка закона сохранения момента количества движения для индивидуального объема сплошной среды такова:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{ини}}} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) \rho dV = \\ = \int_V [\vec{r} \times \vec{F}] \rho dV + \int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma + \int_V \vec{h} \rho dV + \int_{\Sigma} \vec{M}_n d\sigma, \quad (16.2)$$

где \vec{k} — плотность собственного момента количества движения, \vec{h} , \vec{M}_n — плотности массовых и поверхностных пар.

Из закона сохранения момента количества движения в интегральной форме (16.2) выводятся для непрерывных движений два следствия:

- 1) формула Коши для \vec{M}_n ;
- 2) дифференциальные уравнения момента количества движения.

16.4. Формула Коши для вектора моментных напряжений. Тензор моментных напряжений

Получим с помощью соотношения (16.2) формулу Коши для \vec{M}_n , то есть формулу, выражающую вектор моментных напряжений \vec{M}_n на любой площадке в данной точке через векторы моментных напряжений на координатных площадках (в декартовой системе координат). Для этого, во-первых, преобразуем левую часть (16.2) в интеграл по объему, используя формулу дифференцирования по времени интеграла по индивидуальному объему. Кроме того, преобразуем в объемный интеграл второй член в правой части соотношения (16.2):

$$\int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma = \int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}^k] n_k d\sigma = \int_V \nabla_k [\vec{r} \times \vec{P}^k] dV.$$

Тогда закон сохранения момента количества движения для объема V сплошной среды в случае непрерывного движения принимает вид

$$\int_V \left(\rho \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) - \rho [\vec{r} \times \vec{F}] - \nabla_k [\vec{r} \times \vec{P}^k] - \rho \vec{h} \right) dV = \int_{\Sigma} \vec{M}_n d\sigma.$$

Это соотношение верно для любого объема. Применяя его к малому объему в виде тетраэдра так, как это делалось при выводе формулы Коши для \vec{P}_n , получим **формулу Коши для \vec{M}_n** :

$$\vec{M}_n = \vec{M}^1 n_1 + \vec{M}^2 n_2 + \vec{M}^3 n_3. \quad (16.3)$$

Здесь \vec{M}^1 , \vec{M}^2 , \vec{M}^3 — некоторые векторы, которые в декартовой системе координат суть векторы моментных напряжений, действующие на площадках, перпендикулярных осям x^1 , x^2 , x^3 соответственно; n_1 , n_2 , n_3 — компоненты вектора нормали \vec{n} к той площадке, на которой действует \vec{M}_n .

Формула Коши для компонент вектора \vec{M}_n имеет вид

$$M_n^i = M^{ik} n_k, \quad (16.4)$$

где M^{ik} — компоненты векторов \vec{M}^1 , \vec{M}^2 , \vec{M}^3 :

$$\vec{M}^1 = \{M^{11}, M^{21}, M^{31}\}, \quad \vec{M}^2 = \{M^{12}, M^{22}, M^{32}\}, \quad \vec{M}^3 = \{M^{13}, M^{23}, M^{33}\}.$$

Запишем матрицу, по столбцам которой стоят компоненты векторов \vec{M}^1 , \vec{M}^2 , \vec{M}^3 :

$$\begin{pmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (16.4) и теоремы деления из теории тензоров следует, что элементы этой матрицы представляют собой компоненты тензора, который называется тензором моментных напряжений.

Итак, тензором моментных напряжений называется тензор с компонентами M^{ik} , которые определяются формулой (16.4), где M_n^i — компоненты вектора моментных напряжений на площадке с нормалью \vec{n} , а n_k — компоненты вектора \vec{n} .

Замечание. Так же, как формула Коши для \vec{P}_n , формула (16.3) выводится по способу Коши в декартовой системе координат; однако она верна и в криволинейной системе, но тогда \vec{M}^k не равны векторам напряжений на координатных площадках, а определяются формулами $\vec{M}^k = M^{ik}\vec{\epsilon}_i$, где M^{ik} — компоненты тензора моментных напряжений.

16.5. Дифференциальное уравнение момента количества движения

Получим теперь дифференциальные уравнения момента количества движения.

С использованием соотношения (16.3) и формулы Гаусса—Остроградского получаем

$$\sum \int \vec{M}_n d\sigma = \int \vec{M}^k n_k d\sigma = \int_V \nabla_k \vec{M}^k d\sigma.$$

Тогда закон сохранения момента количества движения (16.2) принимает вид

$$\int_V \left(\rho \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) - \rho([\vec{r} \times \vec{F}] + \vec{h}) - \nabla_k ([\vec{r} \times \vec{P}^k] + \vec{M}^k) \right) dV = 0.$$

Так как это верно для любого объема, то для гладких движений, когда подынтегральное выражение непрерывно, оно должно равняться нулю. Получаем дифференциальное уравнение момента количества движения:

$$\rho \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) = \rho[\vec{r} \times \vec{F}] + \nabla_k [\vec{r} \times \vec{P}^k] + \rho \vec{h} + \nabla_k \vec{M}^k. \quad (16.5)$$

Замечание. Выражение $\nabla_k \vec{M}^k$ обозначает вектор (аксиальный) с компонентами $\nabla_k M^{ik}$:

$$\nabla_k \vec{M}^k = \nabla_k M^{ik} \vec{\epsilon}_i$$

(см. замечание по поводу выражения $\nabla_k \vec{P}^k$ в конце лекции 15).

Лекция 17

- 17.1. Дифференциальное уравнение собственного момента количества движения
- 17.2. Симметрия тензора напряжений как следствие закона сохранения момента количества движения при некоторых условиях
- 17.3. Что такое математическая модель среды или явления?
- 17.4. Жидкости и газы в механике сплошных сред. Давление
- 17.5. Идеальные жидкости и газы
- 17.6. Дифференциальные уравнения движения идеальных жидкостей или газов — уравнения Эйлера
- 17.7. Полная система механических уравнений для несжимаемых идеальных жидкостей
- 17.8. Полная система механических уравнений для баротропных процессов в сжимаемых идеальных жидкостях и газах
- 17.9. Граничное условие непроницаемости на поверхности твердого тела, находящегося в идеальной жидкости

17.1. Дифференциальное уравнение собственного момента количества движения

Дифференциальное уравнение момента количества движения, которое следует из закона сохранения момента количества движения

$$\rho \frac{d}{dt} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) = \rho [\vec{r} \times \vec{F}] + \nabla_k [\vec{r} \times \vec{P}^k] + \rho \vec{h} + \nabla_k \vec{M}^k, \quad (17.1)$$

можно упростить, используя уравнение движения

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla_k \vec{P}^k.$$

А именно, умножим уравнение движения векторно на \vec{r} и вычтем результат из уравнения (17.1). При этом учтем, что

$$\left[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{v}] - \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{v}],$$

потому что $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, $[\vec{v} \times \vec{v}] = 0$. В результате получим

$$\rho \frac{d\vec{k}}{dt} = [(\nabla_k \vec{r}) \times \vec{P}^k] + \rho \vec{h} + \nabla_k \vec{M}^k. \quad (17.2)$$

Учитывая соотношения

$$\nabla_k \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \vec{\vartheta}_k,$$

перепишем уравнение (17.2) в виде

$$\rho \frac{d\vec{k}}{dt} = [\vec{\vartheta}_k \times \vec{P}^k] + \rho \vec{h} + \nabla_k \vec{M}^k. \quad (17.3)$$

Это уравнение называют **уравнением собственного момента количества движения**. Его можно использовать вместо уравнения (17.1).

17.2. Симметрия тензора напряжений как следствие закона сохранения момента количества движения при некоторых условиях

Рассмотрим «классический случай», когда

$$\vec{k} = 0, \quad \vec{h} = 0, \quad \vec{M}^k = 0,$$

то есть собственный момент количества движения отсутствует и нет массовых и поверхностных пар. Такая ситуация типична, если нет электромагнитных взаимодействий или частиц, вращающихся упорядоченным образом, или если такие частицы есть, но они врачаются медленно, так что их собственным моментом можно пренебречь. Именно так обстоит дело при моделировании, например, потоков запыленных газов или течения крови в кровеносных сосудах: частички пыли или содержащиеся в крови эритроциты врачаются за счет неравномерности скорости основного потока, и это вращение учитывается при расчете сил, действующих на частички, но собственным моментом количества движения частичек пренебрегают. В задачах о движении сред, не содержащих большого количества твердых частиц, например, воды, нефти, воздуха, о деформациях и напряжениях в металлах и многих других материалах $\vec{k} = 0$, $\vec{h} = 0$ и $\vec{M}^k = 0$.

Уравнение собственного момента количества движения в этом случае принимает вид

$$[\vec{\vartheta}_k \times \vec{P}^k] = 0,$$

или, так как $\vec{P}^k = p^{ik} \vec{\vartheta}_i$,

$$[\vec{\vartheta}_k \times \vec{\vartheta}_i] p^{ik} = 0. \quad (17.4)$$

В этой формуле по индексам k и i подразумевается суммирование. В раскрытом виде уравнение (17.4) имеет вид

$$[\vec{\vartheta}_1 \times \vec{\vartheta}_2](p^{21} - p^{12}) + [\vec{\vartheta}_2 \times \vec{\vartheta}_3](p^{32} - p^{23}) + [\vec{\vartheta}_3 \times \vec{\vartheta}_1](p^{13} - p^{31}) = 0.$$

Векторные произведения векторов базиса независимы, поэтому из равенства нулю такой суммы следует равенство нулю всех коэффициентов. Итак, в классическом случае закон сохранения момента количества движения сводится к утверждению, что тензор напряжений симметричен:

$$p^{ik} = p^{ki}.$$

Заметим, что существуют модели сред, в которых тензор напряжений считается симметричным, несмотря на то, что есть массовые и поверхностные моменты. Тогда в уравнениях собственного момента количества движения пропадает член $[\vec{\tau}_k \times \vec{P}^k]$, а остальные члены остаются.

17.3. Что такое математическая модель среды или явления?

В следующей части курса мы рассмотрим некоторые **математические модели сплошных сред**. Что такое математическая модель среды или процесса? Это система уравнений и необходимых дополнительных условий, решая которые мы можем рассчитать интересующие нас характеристики процесса.

Чтобы построить математическую модель необходимо:

- 1) выделить количественные характеристики среды или явления, которые существенны для данной задачи;
- 2) написать полную систему уравнений, из которых можно вычислить интересующие характеристики;
- 3) для каждого конкретного явления (конкретной задачи) необходимо указать граничные и начальные условия. Например, если нужно рассчитать сопротивление воздуха при движении автомобиля, то необходимо ставить граничные условия на поверхности автомобиля.

В курсе «Основы механики сплошных сред» мы будем рассматривать только простейшие модели сред: модели жидкостей и газов, а также упругих сред. Простейшими мы их называем в том смысле, что пока будут рассматриваться только механические процессы. В общем случае для получения замкнутой системы уравнений одних уравнений механики недостаточно. Необходимо добавлять уравнения термодинамики. В некоторых случаях механические процессы можно описать, не привлекая в явном виде уравнений термодинамики.

17.4. Жидкости и газы в механике сплошных сред. Давление

Жидкости и газы в механике сплошных сред описываются уравнениями одного и того же вида, поэтому в дальнейшем мы часто будем словом жидкости называть как истинные (капельные) жидкости, так и газы.

Жидкостью или газом называются среды, в которых в состоянии покоя отсутствуют касательные напряжения на любых площадках, то есть на любой площадке в состоянии покоя

$$\vec{P}_n \parallel \vec{n}.$$

В твердых телах это не так: тяжелый кирпич может лежать на наклонной плоскости, удерживаемый силой трения. Жидкий «кирпич» лежать на наклонной плоскости не может, жидкость будет течь.

Заметим, что существуют среды, жидкые на вид, которые не являются жидкостями в смысле данного выше определения. Пример: жидккая масляная краска, нанесенная на вертикальную стенку; если нанести толстый слой краски, то касательное напряжение на стенке, которое должно уравновешивать силу тяжести, будет большим и краска потечет, но если слой тонкий, то краска течь не будет. Таким образом, «жидкая» масляная краска может находиться в покое при наличии малых касательных напряжений и поэтому не является жидкостью с точки зрения механики сплошных сред.

Покажем, что из ЗСКД, а именно из формулы Коши для вектора напряжений

$$\vec{P}_n = \vec{P}^k n_k,$$

выводится, что в жидкостях и газах в состоянии покоя величина вектора \vec{P}_n на всех площадках в данной точке **одинакова**. Проведем выкладки, используя декартову систему координат. Для компонент вектора напряжений \vec{P}^1 (это вектор напряжений на площадке, которая перпендикулярна оси x^1) имеем

$$\vec{P}^1 = p^{11} \vec{\mathfrak{z}}_1 + p^{21} \vec{\mathfrak{z}}_2 + p^{31} \vec{\mathfrak{z}}_3 = p^{11} \vec{\mathfrak{z}}_1,$$

так как p^{21} , p^{31} — это касательные компоненты вектора \vec{P}^1 , которые по определению жидкости равны нулю. Аналогично

$$\vec{P}^2 = p^{22} \vec{\mathfrak{z}}_2, \quad \vec{P}^3 = p^{33} \vec{\mathfrak{z}}_3, \quad \vec{P}_n = p_{nn} \vec{n}$$

(здесь p_{nn} — проекция вектора \vec{P}_n на нормаль \vec{n}). Поэтому формула Коши принимает вид

$$\vec{P}_n = \vec{P}^k n_k = p^{11} \vec{\mathfrak{z}}_1 n_1 + p^{22} \vec{\mathfrak{z}}_2 n_2 + p^{33} \vec{\mathfrak{z}}_3 n_3.$$

Кроме того,

$$\vec{P}_n = p_{nn} \vec{n} = p_{nn} (n^1 \vec{\mathfrak{z}}_1 + n^2 \vec{\mathfrak{z}}_2 + n^3 \vec{\mathfrak{z}}_3).$$

Подставляя это выражение в формулу Коши, получим следующее соотношение, верное для любых n^i :

$$p_{nn} (n^1 \vec{\mathfrak{z}}_1 + n^2 \vec{\mathfrak{z}}_2 + n^3 \vec{\mathfrak{z}}_3) = p^{11} \vec{\mathfrak{z}}_1 n^1 + p^{22} \vec{\mathfrak{z}}_2 n^2 + p^{33} \vec{\mathfrak{z}}_3 n^3.$$

Отсюда

$$p_{nn} = p^{11} = p^{22} = p^{33} = -p \quad \text{и} \quad \vec{P}_n = -p \vec{n},$$

где $(-p)$ — обозначение проекции вектора напряжений на нормаль к площадке, на которой он действует. Эта проекция оказалась одинаковой для всех площадок в данной точке. Величина p называется **давлением**.

Замечание. Проекция вектора напряжений на нормаль к площадке, на которой он действует, обозначена через $-p$, а не через p , для того, чтобы давление было, как правило, положительным: нормаль \vec{n} по условию направлена во внешнюю сторону по отношению к жидкости, на которую действует сила; если $p_{nn} < 0$, то поверхностная сила давит на жидкость, а если $p_{nn} > 0$, то поверхностная сила растягивает жидкость. Газы не выдерживают растягивающих напряжений; в капельных жидкостях они иногда наблюдаются при специальных условиях. Но обычно $p_{nn} < 0$, то есть $p > 0$.

Итак, из закона сохранения количества движения следует, что на любой площадке в данной точке покоящейся жидкости (или газа) давление одно и то же. Это удивительное свойство жидкости: мы, например, давим вниз, и при этом получается точно такое же давление, действующее вбок и в любом другом направлении. В твердых телах это не так: если мы давим на кирпич, лежащий на столе, сверху, то на свободные боковые грани никакого давления не возникает.

17.5. Идеальные жидкости и газы

При движении в жидкости, вообще говоря, возникают касательные напряжения. Они называются вязкими напряжениями.

Иногда касательными напряжениями можно пренебречь, если они малы по сравнению с силами, вызванными давлением. Тогда используется модель идеальной жидкости.

Жидкость или газ называются идеальными, если в них не только в состоянии покоя, но и при движении отсутствуют касательные напряжения, то есть и при движении

$$\vec{P}_n \parallel \vec{n}.$$

Тогда с помощью формулы Коши для \vec{P}_n доказывается, что

$$\vec{P}_n = p_{nn} \vec{n} = -p \vec{n}.$$

Как выглядит матрица компонент тензора напряжений в любой жидкости в покое, а в идеальной жидкости — и в движении? В декартовой системе координат имеем

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad \text{то есть } p_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Если матрица компонент тензора в декартовой системе координат имеет такой вид, то тензор называется шаровым.

Переходя к произвольной системе координат, получим **вид компонент тензора напряжений в идеальной жидкости и идеальном газе**:

$$p^{ij} = -pg^{ij}.$$

Действительно, в декартовой системе координат (в которой $g^{ij} = \delta^{ij}$) это верно, а если компоненты двух тензоров равны в одной системе координат, то они равны и в любой системе координат.

17.6. Дифференциальные уравнения движения идеальных жидкостей или газов — уравнения Эйлера

Выведем дифференциальные уравнения движения идеальных жидкостей или газов — уравнения Эйлера. Напишем уравнения движения, выполняющиеся для любой среды:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_k p^{ik}. \quad (17.5)$$

Учтем, что в идеальной жидкости

$$p^{ik} = -pg^{ik}.$$

Так как g^{ik} относительно оператора ∇_k ведут себя как константы, то

$$\nabla_k p^{ik} = -g^{ik} \nabla_k p$$

и уравнения (17.5) принимают вид

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i - g^{ik} \nabla_k p. \quad (17.6)$$

Эти уравнения называются **уравнениями Эйлера**.

Так как

$$\nabla_k p = \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

— это ковариантные компоненты вектора $\text{grad } p$, а

$$g^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k}$$

— контравариантные компоненты $\text{grad } p$, то **уравнения Эйлера в векторном виде** записываются так

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } p. \quad (17.7)$$

Уравнение Эйлера в проекции, например, на ось x декартовой системы координат в раскрытом виде выглядит так:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Уравнения Эйлера в общем случае содержат 5 неизвестных: ρ, v_x, v_y, v_z, p .

17.7. Полная система механических уравнений для несжимаемых идеальных жидкостей

Для несжимаемой жидкости верно равенство

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

так как плотность каждой частицы постоянна.

Полная система уравнений для однородной несжимаемой жидкости включает в себя:

- 1) уравнение неразрывности $\operatorname{div} \vec{v} = 0$;
- 2) уравнения Эйлера $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p$.

Таким образом, имеем полную систему, состоящую из четырех уравнений для четырех неизвестных функций v_i, p .

Для несжимаемой неоднородной жидкости, в которой плотность различна в разных частицах, будем иметь систему уже из пяти уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0, & \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 0, & \text{то есть } \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} &= 0.\end{aligned}$$

Неизвестными функциями здесь являются $v_i(t, x^i)$, $p(t, x^i)$, $\rho(t, x^i)$.

17.8. Полная система механических уравнений для баротропных процессов в сжимаемых идеальных жидкостях и газах

Для сжимаемых жидкостей и газов уравнение неразрывности и уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p$$

не составляют полную систему, так как содержат 5 неизвестных, а уравнений 4.

Существуют процессы, в которых плотность зависит только от давления,

$$\rho = \rho(p).$$

Такие процессы называются **баротропными**.

Например, если для газа температура во всех точках рассматриваемого объема и во все моменты времени одинакова, $T = T_0$, то из уравнения Клапейрона следует

$$p = R\rho T_0, \quad \rho = \frac{p}{RT_0}, \quad \text{то есть } \rho = \rho(p).$$

Для баротропных процессов полная система уравнений выглядит так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p, \quad \rho = \rho(p).$$

Здесь $\rho = \rho(p)$ — заданная функция. Эта система содержит 5 уравнений для пяти неизвестных функций $v_i(t, x^i)$, $p(t, x^i)$, $\rho(t, x^i)$.

17.9. Граничное условие непроницаемости на поверхности твердого тела, находящегося в идеальной жидкости

Для нахождения решения дифференциальных уравнений необходимы так называемые начальные и граничные условия. Если часть границы области, занятой жидкостью или газом, представляет собой поверхность твердого тела (например, поверхность подводной лодки, движущейся под водой, или опоры моста, или самолета в воздухе), то естественным граничным условием является условие, что жидкость или газ не проникают сквозь эту поверхность. Для этого необходимо, чтобы скорости жидкости и соответствующей точки тела вдоль нормали к поверхности тела были одинаковы, то есть в точках поверхности тела выполнялось равенство:

$$v_n|_{\text{на поверхности тела}} = v_n \text{ тела}. \quad (17.8)$$

Здесь v_n тела — это нормальная составляющая скорости точки поверхности тела. Граничное условие (17.8) называется **условием непроницаемости**. На самом деле оно означает, что жидкость не только не проникает внутрь тела, но и не отрывается от его поверхности. Если тело неподвижно, то условие непроницаемости имеет вид

$$v_n|_{\text{на поверхности тела}} = 0.$$

Лекция 18

- 18.1. Вязкие жидкости и газы. Определение
- 18.2. Модель линейно-вязкой (ニュтоновской) жидкости
- 18.3. О давлении в вязкой жидкости
- 18.4. Уравнения движения вязкой жидкости — уравнения Навье—Стокса
- 18.5. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости

18.1. Вязкие жидкости и газы. Определение

Жидкость или газ называются вязкими, если в них при движении возможны касательные напряжения; компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости представляются в виде

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \tau^{ij}(e_{kl}, T), \quad (18.1)$$

где p — давление, e_{kl} — компоненты тензора скоростей деформаций, T — температура. Величины τ^{ij} называются компонентами тензора вязких напряжений. Если жидкость покоятся, то $\tau^{ij} = 0$.

Жидкость или газ называются линейно-вязкими или ньютоноскими, если компоненты тензора вязких напряжений τ^{ij} являются линейными функциями компонент тензора скоростей деформаций e_{kl} :

$$\tau^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}. \quad (18.2)$$

Соотношения (18.2) являются обобщением соотношения между касательным напряжением и компонентой тензора скоростей деформаций, полученного экспериментально в опыте, который в литературе называется опытом Ньютона. Опыт состоит в следующем: имеется течение вязкой жидкости в слое между двумя параллельными пластинами, одна из которых движется с постоянной скоростью v_0 , а другая неподвижна (рис. 18.1). Движение жидкости происходит за счет увлечения ее движущейся пластиной и скорости всех частиц жидкости параллельны скорости пластины. Расстояние между пластинами равно h . Было обнаружено, что сила τ на единицу площади пластины, с которой надо ее тянуть, чтобы поддерживать ее равномерное движение, пропорциональна скорости v_0 и обратно пропорциональна расстоянию h :

$$\tau = \mu \frac{v_0}{h}. \quad (18.3)$$

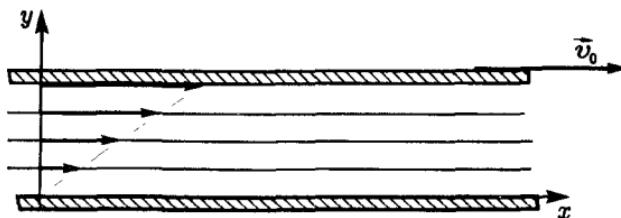


Рис. 18.1. Опыт Ньютона. Распределение скорости поперек потока

Здесь μ — коэффициент, называемый коэффициентом вязкости. Соотношение (18.3) называют законом вязкого трения Ньютона, а жидкости, для которых оно выполнено — ньютоновскими.

Кроме того, было обнаружено, что скорость жидкости на неподвижной пластине равна нулю, на движущейся — равна v_0 , и распределена по толщине слоя по линейному закону. Если направить ось x параллельно скорости движущейся пластины, ось y — перпендикулярно пластинам (рис. 18.1), то для скорости жидкости справедливы соотношения:

$$v_x = \frac{v_0}{h}y, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0. \quad (18.4)$$

Заметим, что сила, с которой жидкость действует на единицу площади верхней пластины, равна $(-\tau)$: пластина движется с постоянной скоростью, следовательно, сумма силы, с которой мы тянем пластину, и силы сопротивления жидкости равна нулю.

Следовательно, сила, с которой пластина действует на жидкость (на единицу площади), равна τ . На языке тензоров $\tau = p_{xy}$, так как p_{xy} есть проекция на ось x вектора напряжений на площадке, перпендикулярной оси y . Вычисляя компоненты тензора скоростей деформаций, покажем, что

$$\frac{v_0}{h} = 2e_{xy}.$$

Действительно,

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0}{h}.$$

Поэтому закон трения Ньютона (18.3) на языке тензоров записывается в виде:

$$p_{xy} = 2\mu e_{xy},$$

или, с учетом определения вязких напряжений, в виде

$$\tau_{xy} = 2\mu e_{xy}.$$

Обобщая эту линейную зависимость, можно предположить, что в случае произвольного движения вязкой жидкости верны соотношения (18.2), то есть

$$\tau^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}.$$

Коэффициенты A^{ijkl} этой линейной связи называются **коэффициентами вязкости**. Они являются компонентами тензора (четвертого ранга), так как в свертке с компонентами тензора они дают тоже компоненты тензора («теорема деления» из тензорного исчисления).

Для некоторых вязких жидкостей зависимости компонент тензора вязких напряжений от компонент тензора скоростей деформаций являются нелинейными. Такие жидкости называются **нелинейно-вязкими или неニュートоновскими**.

Замечание об «опыте Ньютона». Соотношения (18.2) для воды, воздуха, нефти и других жидкостей и газов в стандартных условиях подтверждаются тем, что решения основанных на этих соотношениях уравнений хорошо описывают реальные течения. Но что касается течения между двумя параллельными пластинами, то законы (18.3), (18.4) даже для ньютоновских жидкостей действительно описывают опытные факты только если скорость верхней пластины не слишком велика, а расстояние между пластинами мало, а именно, если следующая комбинация параметров, обозначаемая Re ,

$$Re = \frac{\rho v_0 h}{\mu},$$

и называемая числом Рейнольдса, не превышает некоторого критического значения $Re_{\text{крит}}$. Если же

$$Re > Re_{\text{крит}},$$

то течение является существенно более сложным, турбулентным, скорости частиц пульсируют во времени и пространстве, формулы (18.3), (18.4) в случае турбулентного течения между двумя пластинами неверны. Замечательно, однако, что и турбулентные течения рассчитываются на основе соотношений (18.2).

18.2. Модель линейно-вязкой (ニュートоновской) жидкости

Жидкость, как было сказано выше, называется линейно-вязкой или ньютоновской, если для нее соотношения между τ^{ij} и e_{kl} линейны, то есть

$$\tau^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}, \quad (18.5)$$

где A^{ijkl} — константы или функции температуры; A^{ijkl} называются **коэффициентами вязкости**.

В общем случае анизотропной вязкой жидкости коэффициентов вязкости 81. Но если тензор τ^{ij} симметричен (а тензор скоростей деформаций всегда симметричен), то из 81 коэффициента существенно различных не более 36, так как фактически соотношения (18.5) связывают в этом случае шесть независимых компонент τ^{ij} с шестью независимыми компонентами e_{kl} .

Если линейно-вязкая жидкость **изотропна**, то все A^{ijkl} выражаются через 2 коэффициента вязкости. Покажем это. Изотропность среды означает, что ее свойства по любому направлению одинаковы. Если же среда

анизотропна, то есть в ней имеются какие-то выделенные направления, то эти направления задаются какими-то векторами или тензорами. Сейчас мы рассматриваем изотропную жидкость. Составим свертку (инвариантную по отношению к преобразованию координат):

$$\tau^{ij} e_{ij} = A^{ijkl} e_{kl} e_{ij}.$$

Если нет никаких векторов и тензоров, характеризующих анизотропию среды, то квадратичная форма компонент тензора скоростей деформаций $A_{ijkl} e^{kl} e^{ij}$ должна выражаться через квадратичные инварианты только этого тензора, то есть

$$\tau^{ij} e_{ij} = A_{ijkl} e^{kl} e^{ij} = \lambda I_1^2(e) + 2\mu J_2(e), \quad (18.6)$$

где $I_1(e) = e_{ij} g^{ij}$, $J_2(e) = e_{ij} e^{ij}$ — первый и второй инварианты тензора скоростей деформаций, а λ, μ — скалярные коэффициенты (третий инвариант J_3 не входит, так как он кубический).

Соотношение (18.6) можно переписать в виде:

$$\tau^{ij} e_{ij} = \lambda I_1 e_{ij} g^{ij} + 2\mu e_{ij} e^{ij} = (\lambda I_1 g^{ij} + 2\mu e^{ij}) e_{ij}.$$

Приравнивая коэффициенты при e_{ij} , получим обобщенный закон трения Ньютона для линейно-вязкой изотропной жидкости:

$$\tau^{ij} = \lambda I_1(e) g^{ij} + 2\mu e^{ij}; \quad (18.7)$$

λ и μ называются **коэффициентами вязкости**. Соотношения (18.7), связывающие компоненты тензора вязких напряжений и тензора скоростей деформаций в изотропной линейно-вязкой жидкости, называют также **законом Навье—Стокса**.

Введем понятия коэффициентов объемной и сдвиговой вязкости. Вспомним, что

$$I_1(e) = e_{ij} g^{ij} = \operatorname{div} \vec{v}$$

есть скорость относительного изменения объема. Представим тензор скоростей деформаций в виде суммы шарового тензора и девиатора с компонентами $e^{ij(d)}$:

$$e^{ij} = \frac{1}{3} I_1(e) g^{ij} + e^{ij(d)}. \quad (18.8)$$

Замечательное свойство девиатора, как известно, состоит в том, что его первый инвариант равен нулю:

$$I_1(e_{ij}^{(d)}) \equiv 0.$$

Поэтому соотношение (18.8) соответствует разбиению деформации на деформацию, связанную с изменением объема (описывается первым слагаемым — шаровым тензором) и деформацию, происходящую без изменения объема (описывается девиатором тензора скоростей деформаций). Деформация, происходящая без изменения объема, называется **сдвигом**.

Связи между компонентами тензоров вязких напряжений и скоростей деформаций для изотропной вязкой жидкости (или газа) можно переписать в виде

$$\tau^{ij} = \lambda I_1(e)g^{ij} + \frac{2\mu}{3}I_1(e)g^{ij} + 2\mu e^{ij(d)} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)I_1(e)g^{ij} + 2\mu e^{ij(d)}.$$

Коэффициент μ называется **коэффициентом сдвиговой вязкости**, а

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

— **коэффициентом объемной вязкости** (или **вторым коэффициентом вязкости**). Для μ употребляется также название **динамический коэффициент вязкости**. Вводится также

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

— **кинематический коэффициент вязкости**.

18.3. О давлении в вязкой жидкости

Итак, для вязкой жидкости $p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}$, где $\tau^{ij} = \tau^{ij}(e_{kl}, T)$, а p — давление. Давление характеризует часть напряжений, которая не зависит явно от скорости, в частности, не обращается в нуль в состоянии покоя. Заметим, что сила на единицу площади, действующая по нормали к площадке, в движущейся вязкой жидкости в общем случае не одинакова на разных площадках в одной и той же точке и не равна давлению: например, в изотропной линейно-вязкой жидкости нормальное напряжение равно

$$p_{xx} = -p + \lambda \operatorname{div} \vec{v} + \mu \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

на площадке, перпендикулярной оси x , и

$$p_{yy} = -p + \lambda \operatorname{div} \vec{v} + \mu \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

на площадке, перпендикулярной оси y декартовой системы координат.

Покажем, что в несжимаемой линейно-вязкой изотропной жидкости

$$p = -\frac{1}{3}I_1(p), \quad I_1(p) = p^{ij}g_{ij}.$$

Действительно, в силу несжимаемости $I_1(e) = \operatorname{div} \vec{v} = 0$,

$$p^{ij} = -pg^{ij} + 2\mu e^{ij}, \quad I_1(p) = p^{ij}g_{ij} = -3p + 2\mu I_1(e) = -3p.$$

В частности, в декартовой системе координат в несжимаемой линейно-вязкой жидкости выполнено равенство

$$p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}.$$

Уравнения движения вязкой жидкости — уравнения Навье—Стокса

Уравнения движения линейно-вязких жидкостей или газов называются уравнениями Навье—Стокса. Они получаются из универсальных уравнений движения

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_j p^{ij}, \quad (18.9)$$

если в них подставить выражения для p^{ij} :

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} g^{ij} + 2\mu e^{ij} \quad (18.10)$$

и использовать выражения компонент тензора скоростей деформаций через производные компонент скорости:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i). \quad (18.11)$$

Тогда в уравнениях движения член $\nabla_j p^{ij}$ может быть представлен через производные давления и вторые производные компонент скорости. Полученные уравнения и будут уравнениями Навье—Стокса.

Выведем уравнения Навье—Стокса, пользуясь декартовой системой координат x, y, z . Рассмотрим уравнение движения (18.9) при $i = 1$, то есть соответствующее координате x :

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}. \quad (18.12)$$

Выражения для p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} , согласно соотношениям (18.10), (18.11), таковы:

$$p_{xx} = -p + \lambda \operatorname{div} v + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad p_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).$$

Будем считать, что λ, μ — константы. Вообще λ, μ зависят от температуры, но если температура меняется в рассматриваемом движении не сильно, то можно считать λ, μ константами. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} v + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \mu \Delta v_x, \end{aligned}$$

где

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа от v_x .

Итак, мы преобразовали уравнение (18.12) к виду

$$\rho \frac{d v_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta v_x.$$

Это и есть уравнения Навье—Стокса в проекции на ось x . Аналогичные уравнения получим в проекциях на оси y и z .

Уравнения Навье—Стокса в векторном виде в случае, когда коэффициенты вязкости — константы, записываются так:

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{v}) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}.$$

18.5. Полная система уравнений несжимаемой линейно-вязкой жидкости

Полная система механических уравнений для несжимаемой линейно-вязкой жидкости с постоянными коэффициентами вязкости состоит из уравнения неразрывности, условия несжимаемости и уравнений Навье—Стокса:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \frac{d \rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v^k \frac{\partial \rho}{\partial x^k} = 0, \\ \frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \end{array} \right. \quad (18.13)$$

Эта система содержит пять уравнений для пяти искомых функций p , ρ , v^1 , v^2 , v^3 . Заметим, что второе из этих соотношений нетривиально, если жидкость неоднородна. Тогда плотность, хотя и постоянна в частицах, но разная в разных частицах; при движении частиц получается, что плотность в разных точках пространства не одинакова, не постоянна и заранее не известна.

Если несжимаемая жидкость однородна, то плотность ρ не только постоянна в каждой индивидуальной частице, но и одинакова во всех точках среды. В несжимаемой однородной жидкости соотношение $d\rho/dt = 0$ выполняется тождественно. Оставшиеся четыре уравнения системы (18.13) составляют полную систему для определения четырех искомых функций p , v^1 , v^2 , v^3 .

Замечание. Если коэффициенты вязкости зависят от температуры, то система механических уравнений не замкнута, так как температура является дополнительной неизвестной. Тогда должны быть привлечены еще уравнения термодинамики.

Лекция 19

- 19.1. Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости
- 19.2. Модель упругой среды
- 19.3. Закон Гука для анизотропной и изотропной среды
- 19.4. Механический смысл коэффициентов упругости

19.1. Граничные условия на поверхности твердого тела в вязкой жидкости

Для нахождения решений дифференциальных уравнений, описывающих движение жидкости или газа в ограниченной области, на границах области должны быть заданы так называемые граничные условия.

Границы области, занятой жидкостью или газом, можно разделить на следующие два типа (рис. 19.1).

1. *Твердая граница* — поверхность твердого тела. Предполагается, что ее положение и движение заданы. Такими границами являются поверхности тел, движущихся в жидкости или газе, стенки трубы, заполненной жидкостью или газом, дно водоема.
2. *Свободная граница*. Положение и движение этой границы заранее неизвестны, должны быть найдены в процессе решения задачи. Пример свободной границы — поверхность моря, при наличии волн она заранее неизвестна.

Условие на твердой границе в вязкой жидкости называется **условием прилипания**. Оно утверждает, что скорость жидкости на поверхности тела равна скорости точек тела, и записывается так:

$$\vec{v}|_{\text{на пов. тела}} = \vec{v}_{\text{тела}}.$$

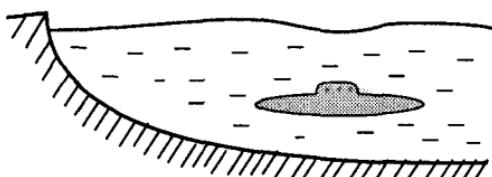


Рис. 19.1. Дно моря и поверхность лодки — твердые границы; поверхность моря — свободная граница

Здесь $\vec{v}_{\text{на пов. тела}}$ — скорость жидкости на поверхности тела, $\vec{v}_{\text{тела}}$ — скорость соответствующей точки тела. Условие прилипания означает выполнение следующих условий:

- 1) v_n на пов. тела = v_n тела — условие непроницаемости;
- 2) \vec{v}_t на пов. тела = \vec{v}_t тела — условие отсутствия проскальзывания.

Здесь \vec{v}_t — касательная составляющая вектора скорости.

Границные условия на свободной поверхности пока рассматривать не будем.

Обратим внимание на то, что число граничных условий для уравнений вязкой жидкости больше, чем для уравнений идеальной жидкости (см. условия (17.8)). Это обусловлено тем, что порядок уравнений вязкой жидкости выше: уравнения Эйлера содержат только первые производные скорости по координатам, а уравнения Навье—Стокса — также и вторые производные.

19.2. Модель упругой среды

Рассмотрим теперь одну из наиболее важных моделей, используемых для описания поведения твердых деформируемых сред — сред, которые могут деформироваться, при этом могут находиться в покое при наличии касательных напряжений. А именно, рассмотрим модель упругой среды. Мы говорим, что тело упругое, если деформации, вызванные действием сил, зависят только от этих сил, и исчезают при снятии сил, так что тело при разгрузке возвращается к первоначальной форме и первоначальным размерам.

Математическое определение упругой среды таково: среда называется упругой, если компоненты тензора напряжений являются функциями компонент тензора деформаций и температуры, то есть

$$p^{ij} = f^{ij}(\epsilon_{kl}, T).$$

Здесь p^{ij} — компоненты тензора напряжений, T — температура, ϵ_{kl} — компоненты тензора деформаций (см. Замечание в конце лекции).

19.3. Закон Гука для анизотропной и изотропной среды

Среда называется линейно-упругой, или подчиняющейся закону Гука, если при постоянной температуре компоненты тензора напряжений являются линейными функциями компонент тензора деформации. Если в качестве начального (недеформированного) состояния выбрано состояние, в котором отсутствуют напряжения, то есть $p^{ij} = 0$ при $\epsilon_{ij} = 0$, то эти линейные функции имеют вид

$$p^{ij} = A^{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (19.1)$$

Коэффициенты A^{ijkl} называются **модулями упругости** или **упругими коэффициентами**.

Эти соотношения обобщают простейшую формулировку закона Гука, утверждающую, что при растяжении стержня растягивающая сила пропорциональна удлинению этого стержня,

$$F \sim \Delta l.$$

На самом деле закон Гука для простого растяжения стержня может быть сформулирован более точно.

Именно, ясно, что, во-первых, удлинение связано не с силой, а с отношением силы к площади сечения: если площадь сечения увеличивается в два раза, то для того, чтобы создать то же удлинение, сила должна быть в два раза больше (см. рис. 19.2). Во-вторых, при одной и той же растягивающей силе величина удлинения зависит от начальной длины стержня;

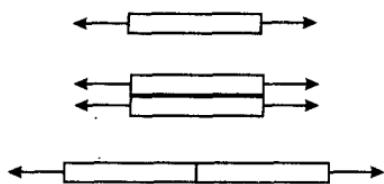


Рис. 19.2. Влияние длины и толщины стержня на величину его абсолютного удлинения при растяжении

если длина стержня в два раза больше, то и удлинение в два раза больше.

Следовательно, более точная формулировка закона Гука для простого растяжения стержня такова:

$$\frac{F}{S} \sim \frac{\Delta l}{l_0},$$

где F — растягивающая сила, а S — площадь поперечного сечения стержня.

Так как $F/S = p_{xx}$ (если ось x направлена по силе), а $\Delta l/l_0 = \varepsilon_{xx}$ при малых деформациях, то закон Гука для простого растяжения образца можно записать в виде

$$p_{xx} = E\varepsilon_{xx},$$

где E — коэффициент пропорциональности между напряжением и относительным удлинением при простом растяжении стержня, называемый модулем Юнга.

Обобщенный закон Гука при произвольной деформировании при постоянной температуре для анизотропной среды записывается в виде (19.1), то есть

$$p^{ij} = A^{ijkl}\varepsilon_{kl}; \quad (19.2)$$

A^{ijkl} — коэффициенты, или модули, упругости.

Для изотропной среды коэффициенты A^{ijkl} выражаются через 2 коэффициента λ и μ , а соотношение (19.2), то есть закон Гука для изотропной среды при изотермическом деформировании имеет вид

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}; \quad (19.3)$$

здесь $I_1(\varepsilon)$ — первый инвариант тензора деформаций. Коэффициенты λ и μ называются модулями упругости, или упругими коэффициентами, или коэффициентами Ламе. Конечно, они, так же, как и A^{ijkl} в формуле (19.2), не имеют никакого отношения к введенным ранее коэффициентам вязкости, хотя и обозначены теми же буквами. Просто исторически так сложилось, что одни и те же исследователи выводили (вернее, постулировали) общий вид связей между напряжениями и деформациями (для упругих сред) или вязкими напряжениями и скоростями деформаций (для вязких жидкостей). Эти связи для обоих типов сред формально аналогичны, поэтому было удобно использовать одни и те же буквы для коэффициентов упругости и вязкости.

Переход от соотношений (19.2) к (19.3) в случае изотропной среды проводится так же, как при выводе аналогичных соотношений для вязких напряжений в изотропной линейно-вязкой жидкости.

Разрешим закон Гука (19.3) относительно компонент тензора деформации ε^{ij} . Для этого сначала найдем из соотношений (19.3) связь между первыми инвариантами

$$I_1(p) = p^{ij}g_{ij} \quad \text{и} \quad I_1(\varepsilon) = \varepsilon^{ij}g_{ij}$$

тензоров напряжений и деформаций:

$$I_1(p) = p^{ij}g_{ij} = (3\lambda + 2\mu)I_1(\varepsilon).$$

Используя эту формулу, из (19.3) получим

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2\mu}p^{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}I_1(p)g^{ij}. \quad (19.4)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{2\mu} = \frac{1 + \sigma}{E}, \quad \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{\sigma}{E},$$

то есть введем вместо λ и μ два других коэффициента E и σ :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

E называется **модулем Юнга**, σ — **коэффициентом Пуассона**. Тогда соотношения (19.4) примут следующий вид:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1 + \sigma}{E}p^{ij} - \frac{\sigma}{E}I_1(p)g^{ij}. \quad (19.5)$$

Соотношения (19.5), так же как (19.3), представляют собой **закон Гука для изотропной упругой среды** при изотермическом деформировании.

19.4. Механический смысл коэффициентов упругости

Рассмотрим простое растяжение стержня (см. рис. 19.3), то есть состояние, в котором только $p_{11} \neq 0$, а остальные $p_{ij} = 0$ (система координат декартова, ось x^1 направлена по оси стержня, все индексы можно писать внизу). В этом случае $I_1(p) = p_{11}$, и из (19.5) получаем

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} p_{11}, \quad p_{11} = E \varepsilon_{11}.$$

Следовательно E — это коэффициент пропорциональности между относительным удлинением $\varepsilon_{11} = \Delta l/l$ и напряжением $p^{11} = F/S$ при простом растяжении стержня.

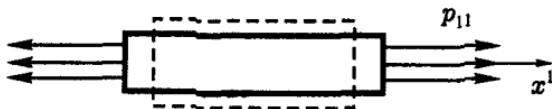


Рис. 19.3. Простое растяжение стержня.
Штрихованная линия — стержень до деформации

Далее из (19.5) следует, что при простом растяжении вдоль оси x^1

$$\varepsilon_{22} \approx -\frac{\sigma}{E} p_{11} = -\sigma \varepsilon_{11}.$$

Обычно при растяжении стержни становятся тоньше, то есть $\Delta l_{\text{поперечн}} < 0$ ($\varepsilon_{22} < 0$) при $\Delta l_{\text{прод}} > 0$ ($\varepsilon_{11} > 0$). Это означает, что для обычных материалов $\sigma > 0$. **Механический смысл коэффициента Пуассона** σ таков: это коэффициент пропорциональности между относительным сжатием в поперечном направлении и относительным удлинением в продольном направлении при простом растяжении стержня.

Рассмотрим еще **механический смысл коэффициента** μ . Пусть мы имеем простой сдвиг (см. рис. 19.4), то есть состояние, в котором в декартовой системе координат $p_{12} \neq 0$, $p_{21} = p_{12}$, а остальные компоненты $p_{ij} = 0$.

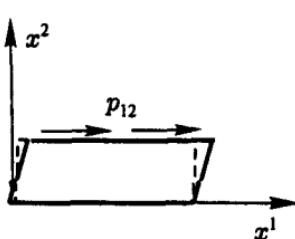
Тогда из закона Гука в форме (19.5) получаем:

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \sigma}{E} p_{12} = \frac{p_{12}}{\mu},$$

то есть

$$p_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}.$$

Рис. 19.4. Простой сдвиг.
Штрихованной линией показаны торцы стержня до деформации



Заметим, что в случае малых деформаций (это обычно так при выполнении закона Гука)

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \chi_{12},$$

где χ_{12} — изменение угла между волокнами, лежавшими до деформации вдоль осей x^1, x^2 .

Следовательно, коэффициент μ — это коэффициент пропорциональности между сдвигающим напряжением и изменением угла между соответствующими волокнами при простом сдвиге. Поэтому μ называют **модулем сдвига**.

Рассмотрим теперь всестороннее сжатие; при этом $p^{ij} = -pg^{ij}$. В этом случае для первого инварианта тензора напряжений верно равенство $I_1(p) = -3p$.

Найдем связь между давлением p и относительным изменением объема при всестороннем сжатии, то есть величиной $\Delta V/V$.

При малых деформациях $\Delta V/V = I_1(\varepsilon)$. Из закона Гука получаем:

$$I_1(\varepsilon) = \frac{1 + \sigma}{E} I_1(p) - 3 \frac{\sigma}{E} I_1(p) = \frac{1 - 2\sigma}{E} I_1(p) = \frac{3(1 - 2\sigma)}{E} p.$$

Следовательно, при всестороннем сжатии связь между сжимающим давлением p и относительным изменением объема такова:

$$p = -\frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \frac{\Delta V}{V}.$$

Коэффициент

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$$

называется **модулем объемного сжатия**.

Для несжимаемой среды $K = \infty$, $\sigma = 0,5$, так как $\Delta V = 0$ при $p \neq 0$. Для многих металлов $\sigma \approx 0,25$. Для каучука $\sigma = 0,47$, это почти несжимаемый материал.

Замечание. На самом деле, в этой лекции речь шла о сжимаемых упругих средах. К несжимаемой среде можно прикладывать любое всестороннее давление, не вызывая никаких деформаций. Поэтому для несжимаемых упругих сред для компонент тензора напряжений имеют место формулы

$$p^{ij} = -pg^{ij} + f^{ij}(\varepsilon_{kl}, T).$$

Величина p не зависит от деформаций и определяется в каждом процессе только внешними условиями.

Лекция 20

- 20.1. Система уравнений линейной теории упругости при изотермических процессах
- 20.2. Уравнения линейной теории упругости в перемещениях — уравнения Навье—Ламе
- 20.3. Граничные условия в задачах теории упругости
- 20.4. Температурные напряжения и деформации

20.1. Система уравнений линейной теории упругости при изотермических процессах

Линейная теория упругости — это теория, в которой изучается поведение упругих тел, причем выполнены следующие два условия.

1. Связи между ε_{ij} и p_{ij} линейны. Это свойство называется физической линейностью.
2. Деформации, относительные повороты, перемещения, скорости и их производные малы. Это свойство приводит к геометрической линейности.

При выполнении этих условий система уравнений для определения деформаций и напряжений в упругой среде получается линейной, если в каждом уравнении пренебречь малыми порядка выше первого. Рассмотрим эту систему подробнее.

Система уравнений теории упругости при $T = \text{const}$ состоит из следующих уравнений:

- 1) уравнение неразрывности,
- 2) уравнения движения,
- 3) закон Гука,
- 4) выражения ε_{ij} через производные компонент вектора перемещения или уравнения совместности деформаций.

Уравнение неразрывности в случае малых деформаций выглядит так:

$$\rho = \rho_0(1 - I_1(\varepsilon)), \quad (20.1)$$

где ρ_0, ρ — плотности одной и той же частицы до и после деформации.

Уравнения движения для любой среды имеют вид

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i + \nabla_k p^{ik}.$$

В линейной теории упругости уравнения движения упрощаются. А именно, во-первых, используется то, что в этих уравнениях неизвестную плотность ρ можно заменить на известную начальную плотность ρ_0 при сохранении малых не выше 1-го порядка:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho_0 \frac{dv^i}{dt} - \rho_0 I_1(\varepsilon) \frac{dv^i}{dt} \approx \rho_0 \frac{dv^i}{dt},$$

так как $\rho_0 I_1(\varepsilon) \frac{dv^i}{dt}$ — малая второго порядка ($I_1(\varepsilon)$ и dv^i/dt малы).

Во-вторых, выражение для dv^i/dt можно упростить, используя малость перемещений, скоростей и их производных:

$$\begin{aligned} \frac{dv^i}{dt} &= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i \approx \frac{\partial v^i}{\partial t}; \\ \vec{v} = \frac{d\vec{w}}{dt}, \quad v^i &= \frac{dw^i}{dt} = \frac{\partial w^i}{\partial t} + v^k \nabla_k w^i \approx \frac{\partial w^i}{\partial t}, \end{aligned}$$

то есть с точностью до малых высшего порядка

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2}.$$

Здесь w^i — компоненты вектора перемещения.

Итак, уравнения движения в линейной теории упругости выглядят так:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \rho_0 F^i + \nabla_k p^{ik}. \quad (20.2)$$

Добавим к этим уравнениям закон Гука

$$p_{ik} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad (20.3)$$

и выражения ε_{ik} через $\nabla_i w_k$:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_k + \nabla_k w_i). \quad (20.4)$$

Получаем 16 уравнений: 1 уравнение неразрывности, 3 уравнения движения, 6 соотношений закона Гука и 6 соотношений (20.4). Неизвестных функций тоже 16: ρ , w^i , ε_{ik} , p^{ik} . Значит, система уравнений (20.1)–(20.4) — полная (число уравнений равно числу неизвестных).

Итак, система уравнений линейной теории упругости состоит из уравнений (20.1)–(20.4).

Замечание 1. Уравнение (20.1) отделяется от основной системы, так как ρ не входит в уравнения (20.2)–(20.4).

Замечание 2. Вместо уравнений (20.4) можно использовать уравнения совместности (уравнения Сен-Венана):

$$\nabla_i \nabla_j \varepsilon_{kl} + \nabla_k \nabla_l \varepsilon_{ij} - \nabla_k \nabla_i \varepsilon_{lj} - \nabla_l \nabla_j \varepsilon_{ki} = 0. \quad (20.5)$$

20.2. Уравнения линейной теории упругости в перемещениях — уравнения Навье—Ламе

Уравнения линейной теории упругости в перемещениях называются уравнениями Навье—Ламе. Они получаются так:

- в уравнениях движения (20.2) выразим p^{ik} с помощью закона Гука через ε_{ik} ;
- подставим ε_{ik} через $\nabla_i w_k$ из соотношений (20.4).

Тогда $\nabla_k p^{ik}$ будут выражены через вторые производные компонент вектора перемещений w^i . Итак, имеем:

$$p_{ik} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i w_k + \nabla_k w_i). \quad (20.6)$$

Нужно вычислить $\nabla_k p^{ik}$.

Вместо того, чтобы проделывать вычисления, воспользуемся формальной аналогией с вязкой жидкостью. В линейно-вязкой жидкости выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} p_{ik} &= -pg_{ik} + \tau_{ik}, \quad \tau_{ik} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} g_{ik} + 2\mu e_{ik}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= I_1(e), \quad e_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i), \end{aligned} \quad (20.7)$$

где e_{ik} — компоненты тензора скоростей деформаций. Для вязкой жидкости было получено (см. лекцию 18):

$$\nabla_k \tau^{ik} = (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta v^i.$$

Сравнивая соотношения (20.6) и (20.7), видим, что $\nabla_k p^{ik}$ в теории упругости по форме будут совпадать с $\nabla_k \tau^{ik}$ в линейно-вязкой жидкости при замене скорости \vec{v} на перемещение \vec{w} . Поэтому уравнения Навье—Ламе должны быть формально аналогичны уравнениям Навье—Стокса, за исключением того, что а) в уравнениях Навье—Стокса присутствует член, связанный с давлением, а в уравнениях упругой среды такого члена нет, и б) ускорение в уравнениях теории упругости представлено в упрощенном линеаризированном виде.

Итак, уравнения Навье—Ламе выглядят так:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \rho_0 F^i + (\lambda + \mu) g^{ij} \nabla_j \operatorname{div} \vec{w} + \mu \Delta w^i, \quad (20.8)$$

или, в векторной форме:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{w}) + \mu \Delta \vec{w}. \quad (20.9)$$

Для вычисления перемещений в упругом теле можно вместо системы пятнадцати уравнений (20.2)–(20.4) использовать три уравнения Навье–Ламе (20.8).

20.3. Границные условия в задачах теории упругости

Задачи теории упругости состоят в определении напряжений и деформаций в тела. Поскольку для этого используются дифференциальные уравнения, то, как всегда, в каждой конкретной задаче должны быть заданы граничные условия на границе, то есть на поверхности тела.

Границные условия в задачах теории упругости бывают трех основных типов.

1. Границные условия первого рода: задан вектор \vec{w} на всей поверхности тела Σ :

$$\vec{w}|_{\Sigma} = \vec{f}(x^i, t), \quad \vec{f} \text{ — заданная функция.}$$

2. Границные условия второго рода: на поверхности тела заданы силы, точнее, распределение сил, то есть задан вектор напряжений \vec{P}_n как функция времени и координат точек поверхности:

$$\vec{P}_n|_{\Sigma} = \vec{\varphi}(x^i, t) \quad \vec{\varphi} \text{ — заданная функция.} \quad (20.10)$$

Компоненты вектора \vec{P}_n выражаются через компоненты тензора напряжений p^{ik} по формуле Коши: $P_n^i = p^{ik} n_k$. Поэтому условие (20.10) в компонентах имеет вид:

$$p^{ik} n_k|_{\Sigma} = \varphi^i(x^i, t), \quad \varphi^i \text{ — заданные функции.} \quad (20.11)$$

Условия (20.11) можно переписать как условия на \vec{w} , если использовать закон Гука и выражения ε_{ij} через w_i .

3. Границные условия третьего рода, встречающиеся наиболее часто: на одной части поверхности тела (на Σ_w) задан вектор \vec{w} , а на другой части (на Σ_p) — \vec{P}_n , $\Sigma = \Sigma_p + \Sigma_w$. Эти условия записываются так

$$\vec{P}_n|_{\Sigma_p} = \vec{\varphi}, \quad \vec{w}|_{\Sigma_w} = \vec{f}.$$

В разных задачах могут быть и другие условия. Например, если упругий металлический бруск стоит на гладкой абсолютно жесткой неподвижной плоской подставке, то при любых действующих силах перемещение точек нижнего основания бруска по нормали к подставке равно нулю (если бруск не отрывается от подставки), а по касательной перемещение

происходит без сопротивления, то есть граничные условия на нижней поверхности бруска записываются в виде:

$$w_z|_{z=0} = 0, \quad p_{xz}|_{z=0} = 0, \quad p_{yz}|_{z=0} = 0,$$

если система координат декартова, ось z перпендикулярна подставке, уравнение подставки $z = 0$.

20.4. Температурные напряжения и деформации

Рассмотрим стержень, на который не действуют никакие силы. При нагревании он меняет свою длину.

Пусть T_0 — начальная температура, а T — температура в рассматриваемом состоянии. Величина удлинения образца при нагревании пропорциональна изменению температуры:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha(T - T_0),$$

где α — коэффициент линейного теплового расширения. Если ось x^1 направлена по оси образца, а относительное удлинение мало, то

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{11}.$$

Таким образом, при отсутствии сил величина ε_{11} в стержне не равна нулю:

$$\varepsilon_{11} = \alpha(T - T_0).$$

Рассмотрим теперь тело произвольной формы. Если материал изотропен, то при нагревании в отсутствие сил все отрезки удлиняются одинаково, поэтому изменения углов между ними не происходит. Поэтому при изменении температуры T в отсутствие сил для компонент тензора деформаций выполняется равенство

$$\varepsilon_{ij} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$

если система координат декартова, и

$$\varepsilon_{ij} = \alpha(T - T_0)g_{ij},$$

если система координат произвольная.

Деформации, которые вызваны только изменением температуры в условиях, когда на частицы среды не действуют силы, называются **температурными деформациями**.

Если действуют силы и температура меняется, то деформации равны сумме деформаций, вызванных напряжениями, и деформаций, вызванных изменением температуры, то есть

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \sigma}{E} p_{ij} - \frac{\sigma}{E} I_1(p)g_{ij} + \alpha(T - T_0)g_{ij}. \quad (20.12)$$

Соотношения (20.12) называют **обобщенным законом Гука при переменной температуре, или соотношениями Дюамеля–Неймана**.

Из (20.12) видно, что если $\varepsilon_{ij} = 0$, то есть тело заключено в жесткую оболочку, но T меняется, то возникают отличные от нуля напряжения, которые вычисляются через $(T - T_0)$. Такие напряжения называются **температурными напряжениями**. Температурные напряжения могут быть очень большими и приводить к разрушению конструкций. В частности, чтобы избежать температурных напряжений, железнодорожные рельсы укладываются, оставляя между ними зазор, дающий рельсам возможность свободно удлиняться и укорачиваться при изменении температуры.

Эта лекция, а также следующие лекции 22–27 посвящены термодинамике сплошных сред.

Лекция 21

- 21.1. Теорема живых сил (уравнение кинетической энергии)
- 21.2. Работа внутренних поверхностных сил
- 21.3. Первый закон термодинамики — закон сохранения энергии
- 21.4. Закон сохранения энергии для индивидуального объема сплошной среды

17

21.1. Теорема живых сил (уравнение кинетической энергии)

Теоремой живых сил называют соотношение, определяющее изменение кинетической энергии системы. Название теоремы связано с тем, что в старые времена кинетическую энергию называли живой силой. Этот термин был введен Лейбницем в конце 17 века.

Получим сначала теорему живых сил для системы N материальных точек. Запишем закон сохранения количества движения (закон Ньютона) для k -той точки с массой m_k :

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}.$$

Мы разделили силы, действующие на k -тую точку, на две группы: $\vec{F}_k^{(i)}$ — внутренняя сила, то есть сила, действующая на k -тую точку со стороны других точек этой же системы, $\vec{F}_k^{(e)}$ — внешняя сила, то есть сила, действующая на эту точку со стороны объектов, не принадлежащих системе.

Чтобы получить теорему живых сил, умножим уравнение движения скалярно на перемещение точки за время dt , то есть на $\vec{v}_k dt$:

$$m_k \left(\vec{v}_k \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) dt = (\vec{F}_k^{(e)} \cdot \vec{v}_k dt) + (\vec{F}_k^{(i)} \cdot \vec{v}_k dt).$$

Далее,

$$\left(\vec{v}_k \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_k^2}{2} \right).$$

Это равенство легко обосновать, раскрывая скалярное произведение в декартовой системе координат следующим образом (для краткости индекс k опускаем):

$$\left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Таким образом, из закона сохранения количества движения выводится соотношение

$$d \frac{m_k v_k^2}{2} = (\vec{F}_k^{(e)} \cdot \vec{v}_k dt) + (\vec{F}_k^{(i)} \cdot \vec{v}_k dt),$$

то есть изменение кинетической энергии точки за время dt равняется сумме работ внешних и внутренних сил.

Если мы просуммируем такие равенства для всех точек системы, то получим

$$d \left(\sum_{k=1}^N \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(e)} \cdot \vec{v}_k dt) + \sum_{k=1}^N (\vec{F}_k^{(i)} \cdot \vec{v}_k dt),$$

или, в символической форме

$$dE_{\text{кин}} = dA^{(e)} + dA^{(i)}, \quad (21.1)$$

где

$$E_{\text{кин}} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{v_k^2}{2}$$

— кинетическая энергия системы материальных точек, $dA^{(e)}$ — работа внешних сил, а $dA^{(i)}$ — работа внутренних сил над всеми точками системы. Подчеркнем, что $dA^{(e)}$ и $dA^{(i)}$ — не дифференциалы работ, а работа на малых перемещениях точек системы.

Соотношение (21.1) выражает теорему живых сил для системы материальных точек: изменение кинетической энергии системы точек равно сумме работ внешних и внутренних сил.

Отметим, что сумма всех внутренних сил, конечно, равна нулю, но работа их может быть не равна нулю, если точки не связаны жестко между собой и расстояния между ними могут меняться.

Получим теперь теорему живых сил для сплошной среды. Запишем дифференциальное уравнение движения для сплошной среды (которое следует из закона сохранения количества движения)

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla_k \vec{P}^k, \quad (21.2)$$

где \vec{F} — плотность массовых сил, $\nabla_k \vec{P}^k$ представляет поверхностные силы, $\vec{P}^k = p^{ik} \vec{\delta}_i$.

Умножим соотношение (21.2) скалярно на $\vec{v} dt$. Получим

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt = \rho (\vec{F} \cdot \vec{v} dt) + (\vec{v} \cdot \nabla_k \vec{P}^k) dt,$$

или

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt = \rho (\vec{F} \cdot \vec{v} dt) + \nabla_k (\vec{P}^k \cdot \vec{v}) dt - (\vec{P}^k \cdot \nabla_k \vec{v}) dt. \quad (21.3)$$

Соотношение (21.3) представляет собой **теорему живых сил для сплошной среды в дифференциальной форме**. Такое название и физический смысл отдельных членов станут понятными, если проинтегрировать это соотношение по некоторому объему V сплошной среды:

$$\begin{aligned} & \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt dV = \\ &= \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV dt + \int_V \nabla_k (\vec{P}^k \cdot \vec{v}) dt dV - \int_V (\vec{P}^k \cdot \nabla_k \vec{v}) dt dV. \end{aligned}$$

Преобразуем это соотношение. Будем считать, что V — это индивидуальный объем. Тогда в левой части мы можем вынести d/dt из-под знака интеграла, основываясь на формуле дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему. Объемный интеграл во втором слагаемом в правой части преобразуем в поверхностный по формуле Гаусса—Остроградского. Получим

$$d \int_{V_{\text{ини}}} \frac{v^2}{2} \rho dV = \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV dt + \int_{\Sigma} (\vec{P}^k \cdot \vec{v}) n_k dt d\sigma - \int_V (\vec{P}^k \cdot \nabla_k \vec{v}) dt dV.$$

Перепишем второе слагаемое в правой части последнего соотношения, используя формулу Коши для вектора напряжений

$$\vec{P}^k n_k = \vec{P}_n$$

и раскроем скалярное произведение в третьем слагаемом, имея в виду, что $\vec{P}^k = p^{ik} \vec{\delta}_i$. Будем иметь

$$d \int_{V_{\text{ини}}} \frac{v^2}{2} \rho dV = \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV dt + \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) dt d\sigma - \int_V p^{ik} \nabla_k v_i dt dV. \quad (21.4)$$

В этом соотношении, очевидно, первые два члена в правой части представляют собой соответственно работу массовых сил $dA_{\text{масс}}$ и работу внешних поверхностных сил $dA_{\text{пов}}^{(e)}$.

Величина

$$E_{\text{кин}} = \int_{V_{\text{ини}}} \frac{v^2}{2} \rho dV$$

представляет собой кинетическую энергию среды, связанную с макроскопической скоростью точек среды.

Наконец, по аналогии с системой материальных точек, назовем третий член в правой части соотношения (21.4) работой внутренних поверхностных сил:

$$dA_{\text{пов}}^{(i)} = - \int_V p^{ik} \nabla_k v_i dt dV. \quad (21.5)$$

Соотношение (21.4) — это **теорема живых сил для индивидуального объема сплошной среды**. В символическом виде эта теорема записывается так:

$$\begin{aligned} dE_{\text{кин}} &= dA^e + dA^i, \\ dA^e &= dA_{\text{масс}}^e + dA_{\text{пов}}^{(e)}, \quad dA^i = dA_{\text{масс}}^i + dA_{\text{пов}}^{(i)}, \end{aligned} \quad (21.6)$$

то есть утверждает, что **изменение кинетической энергии индивидуального объема сплошной среды равно сумме работ внешних и внутренних массовых и поверхностных сил**.

Замечание 1. На самом деле,

$$\int_V \frac{v^2}{2} \rho dV$$

— это только часть кинетической энергии среды, так как сюда не входит кинетическая энергия хаотического движения молекул и кинетическая энергия, связанная с внутренними вращениями (если имеется собственный момент количества движения).

Замечание 2. В соотношении (21.6) правой части, работа массовых сил разбита на работу внутренних и внешних массовых сил. Откуда может возникнуть работа внутренних массовых сил? Ведь в формулировку закона сохранения количества движения для конечного объема среды входят только внешние массовые силы. Но для получения дифференциального уравнения движения мы рассматриваем бесконечно малый объем, а тогда все силы, действующие на этот малый объем, в том числе и действующие со стороны других частей среды, становятся внешними для него и поэтому входят в дифференциальное уравнение движения. А после интегрирования по всему объему среды мы уже можем разделить силы на внешние и внутренние. Таким образом получаем

$$dA_{\text{масс}} = dA_{\text{масс}}^{(e)} + dA_{\text{масс}}^{(i)}.$$

Замечание 3. Сделаем замечание по поводу работы внутренних поверхностных сил. Формально выражение

$$dA_{\text{пов}}^{(i)} = - \int_V p^{ik} \nabla_k v_i dt dV$$

не похоже на работу, так как силы (напряжения) умножаются не на перемещения, а на производные перемещений. Но если вспомнить, что внутренние силы подчиняются третьему закону Ньютона, то становится ясным, почему работа внутренних сил сводится к произведению сил на разности перемещений соседних точек.

21.2. Работа внутренних поверхностных сил

Рассмотрим плотность работы внутренних поверхностных сил, то есть предел отношения работы внутренних поверхностных сил в малом объеме к массе этого объема, когда объем стягивается в точку. Эту величину называют еще работой внутренних поверхностных сил на единицу массы. Для малого объема работа внутренних поверхностных сил согласно формуле (21.5) равна $-p^{ik}\nabla_k v_i dt dV$; масса этого объема $dm = \rho dV$. Тогда работа внутренних поверхностных сил на единицу массы равна

$$\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ik} \nabla_k v_i dt.$$

Здесь мы ввели обозначение $\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)}$ для работы внутренних поверхностных сил на единицу массы. Эта важная величина, которая в дальнейшем будет входить во многие уравнения механики сплошных сред. Полезно представить $\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)}$ в других формах.

Сделаем такое преобразование: разобъем $\nabla_k v_i$ на симметричную и антисимметричную части:

$$\nabla_k v_i = \frac{1}{2}(\nabla_k v_i + \nabla_i v_k) + \frac{1}{2}(\nabla_k v_i - \nabla_i v_k) = e_{ki} + \omega_{ki},$$

где $e_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_k v_i + \nabla_i v_k)$ — компоненты тензора скоростей деформации, ω_{ki} — компоненты тензора вихря. Следовательно

$$\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ik} \nabla_k v_i dt = -\frac{1}{\rho} p^{ik} e_{ik} dt - \frac{1}{\rho} p^{ik} \omega_{ik} dt.$$

Если тензор напряжений симметричен, то последний член равен нулю, так как это свертка симметричного тензора с антисимметричным. Таким образом, если тензор напряжений симметричен, $p^{ik} = p^{ki}$, то

$$\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ik} e_{ik} dt.$$

В лагранжевой системе координат верно равенство

$$d\epsilon_{ik} = e_{ik} dt,$$

где $d\epsilon_{ik}$ — дифференциал по времени от компонент тензора деформаций. Поэтому если $p^{ik} = p^{ki}$, то в лагранжевой сопутствующей системе координат выражение для плотности работы внутренних поверхностных сил принимает вид

$$\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ik} d\epsilon_{ik}. \quad (21.7)$$

Теперь напишем выражение для работы внутренних поверхностных сил на единицу массы для идеальной жидкости или идеального газа. В идеальной жидкости

$$p^{ik} = -pg^{ik}, \quad \frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = \frac{1}{\rho} pg^{ik} e_{ik} dt = \frac{1}{\rho} p \operatorname{div} \vec{v} dt,$$

$g^{ik} e_{ik} = I_1(e) = \operatorname{div} \vec{v}$ — первый инвариант тензора скоростей деформаций. Из уравнения неразрывности имеем

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Поэтому получаем следующее выражение для **плотности работы внутренних поверхностных сил в идеальной жидкости**

$$\frac{1}{dm} dA_{\text{пов}}^{(i)} = -\frac{p}{\rho^2} d\rho = p \frac{1}{\rho} = p dV, \quad (21.8)$$

где $V = 1/\rho$ — объем единицы массы.

Если жидкость или газ вязкие, то такое выражение работы (широко используемое в классической физике) уже не получается.

21.3. Первый закон термодинамики — закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии может быть сформулирован следующим образом.

Для всякой системы можно ввести некоторую функцию ее состояния, называемую полной энергией \mathcal{E} . Изменение полной энергии системы в любом процессе может происходить только за счет притоков энергии *извне* в различных формах (в виде работы внешних сил, притока тепла и притока энергии в других формах).

Символическая запись первого закона для малого участка процесса такова:

$$d\mathcal{E} = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**},$$

где \mathcal{E} — полная энергия системы, $dA^{(e)}$ — работа внешних сил, $dQ^{(e)}$ — приток тепла извне, dQ^{**} — добавочные притоки энергии (то есть притоки энергии в формах, отличных от работы сил и от притока тепла) за малое время dt . В качестве dQ^{**} могут быть, например, энергия, затрачиваемая на намагничивание или поляризацию среды, работа внешних пар и другие виды притоков энергии.

Подчеркнем, что $d\mathcal{E}$ — дифференциал \mathcal{E} , то есть $\frac{d\mathcal{E}}{dt} dt$, а $dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$, dQ^{**} — не дифференциалы каких-либо функций, а малые величины — притоки энергии за малое время.

В формулировку первого закона термодинамики входит понятие «состояние системы». Что такое состояние системы? Считаем, что существуют

некоторые параметры, которые определяют состояние системы: если эти параметры заданы, то считаем, что задано состояние системы. Если в системе происходит некоторый процесс, то параметры состояния в общем случае меняются со временем. Циклический процесс — это процесс в результате которого система возвращается в исходное состояние. В таком процессе сумма всех притоков энергии извне равна нулю, так как

$$\oint d\mathcal{E} = 0.$$

Следовательно,

$$\oint (dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}) = 0. \quad (21.9)$$

Замечание. Соотношение (21.9) часто принимается за **основную формулировку закона сохранения энергии**: если система возвращается в первоначальное состояние, то суммарный приток внешней энергии к ней равен нулю — энергия не исчезает (как было бы, если бы полный приток к системе был положителен) и не возникает (как было бы, если бы полный приток к системе был отрицателен). Отсюда, в частности, следует невозможность вечного двигателя.

Нетрудно показать, что из того, что соотношение (21.9) должно выполняться для **любого циклического процесса**, следует возможность введения энергии системы как функции ее состояния.

В механике сплошных сред принято разбивать полную энергию на кинетическую и внутреннюю, последнюю обозначают буквой U :

$$\mathcal{E} = E_{\text{кин}} + U,$$

то есть **внутренняя энергия U определяется как разность полной и кинетической энергии**:

$$U = \mathcal{E} - E_{\text{кин}}, \quad \text{где} \quad E_{\text{кин}} = \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV.$$

Внутренняя энергия U включает в себя, в частности, кинетическую энергию хаотического движения молекул, а также потенциальную энергию взаимодействия молекул и, возможно, кинетическую энергию, связанную с вращением частиц внутри среды.

После введения внутренней энергии **закон сохранения энергии записывается в виде**

$$dE_{\text{кин}} + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}. \quad (21.10)$$

21.4. Закон сохранения энергии для индивидуального объема сплошной среды

Чтобы написать соотношение, выражающее закон сохранения энергии для индивидуального объема сплошной среды, надо написать выражения для всех членов уравнения (21.10).

Для индивидуального объема сплошной среды обычно вводится плотность внутренней энергии — внутренняя энергия единицы массы, которую будем обозначать через u .

Плотность внутренней энергии — это предел отношения внутренней энергии ΔU малой частицы к ее массе $\rho \Delta V$ при стягивании частицы в точку ($\Delta V \rightarrow 0$):

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho \Delta V}.$$

Внутренняя энергия малой частицы с массой ρdV равна $u \rho dV$. Внутренняя энергия U объема V сплошной среды есть

$$U = \int_V u \rho dV.$$

Таким образом, выражение для полной энергии объема V сплошной среды таково:

$$\mathcal{E} = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dV. \quad (21.11)$$

Работа внешних массовых и поверхностных сил за время dt равна

$$dA^{(e)} = \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV dt + \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) dt d\sigma. \quad (21.12)$$

Работа массовых и поверхностных внешних пар тоже должна присутствовать в законе сохранения энергии, но мы не будем ее писать в явной форме, а будем ее относить к dQ^{**} .

Приток тепла извне $dQ^{(e)}$ будем разбивать на массовый и поверхностный притоки тепла. Массовый приток — это приток тепла непосредственно к каждой частице внутри объема среды, поверхностный — приток тепла через поверхность:

$$dQ^{(e)} = dQ_{\text{масс}}^{(e)} + dQ_{\text{пов.}}^{(e)}.$$

Массовый приток тепла происходит, например, за счет излучения или джоулева тепла. Обозначим через $dq_{\text{масс.}}$ плотность массового притока тепла, то есть массовый приток тепла на единицу массы. Тогда

$$dQ_{\text{масс}}^{(e)} = \int_V dq_{\text{масс.}} \rho dV.$$

Поверхностный приток тепла происходит при контакте поверхности с телом другой температуры. Процесс передачи тепла через поверхность тела, происходящий за счет контакта с телом другой температуры, называется теплопроводностью. Будем в дальнейшем иногда называть поверхностный приток тепла притоком тепла за счет теплопроводности.

Обозначим через q_n количество тепла, которое проходит за единицу времени через единицу площади площадки в ту сторону, куда направлена нормаль к площадке \vec{n} .

Если \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности Σ объема V , то q_n — количество тепла, уходящего из объема, а $(-q_n)$ — приходящего в объем за единицу времени через единицу площади.

Приток тепла извне к объему V через его поверхность Σ за время dt записывается следующим образом:

$$dQ_{\text{пов}}^{(e)} = - \int_{\Sigma} q_n d\sigma dt.$$

(знак минус связан с тем, что \vec{n} — внешняя нормаль). Полный приток тепла к объему V , дается следующим выражением:

$$dQ^{(e)} = \int_V dq_{\text{масс}} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n d\sigma dt. \quad (21.13)$$

Приток энергии dQ^{**} также может быть массовым и поверхностным.

$$dQ^{(**)} = dq_{\text{масс}}^{(**)} + dQ_{\text{пов}}^{(**)}.$$

Например, если на среду действуют пары сил, то работу массовых пар относим к $dQ_{\text{масс}}^{(**)}$, а работу поверхностных пар к $dQ_{\text{пов}}^{(**)}$.

Вводя плотности массового и поверхностного притоков добавочной энергии, получим выражение для полного притока добавочной энергии к объему V , по форме аналогичное выражению для притока тепла:

$$dQ^{**} = \int_V dq_{\text{масс}}^{**} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma dt. \quad (21.14)$$

Здесь $dq_{\text{масс}}^{**}$ — массовый приток добавочной энергии на единицу массы; q_n^{**} — количество добавочной энергии, которое поступает за единицу времени через единицу площади поверхности в ту сторону, куда направлена нормаль к элементу поверхности $d\sigma$.

Собирая вместе выражения (21.11)–(21.14), запишем закон сохранения энергии для индивидуального объема сплошной среды в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{ини}}} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV &= \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) d\sigma + \\ &+ \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}^{**}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma. \end{aligned} \quad (21.15)$$

Лекция 22

- 22.1. Закон сохранения энергии для пространственного объема, через который движется среда
- 22.2. Вектор потока тепла
- 22.3. Дифференциальное уравнение энергии
- 22.4. Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии)
- 22.5. Закон теплопроводности Фурье

22.1. Закон сохранения энергии для пространственного объема, через который движется среда

Приведенная в предыдущей лекции формулировка закона сохранения энергии — первого закона термодинамики — утверждает, что изменение полной энергии **индивидуального** объема среды \mathcal{E} равно сумме притоков энергии извне в виде работы внешних сил, притока тепла и притока добавочной энергии (отличной от работы и тепла). Математически это записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV &= \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) d\sigma + \\ &+ \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}^{**}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Здесь Σ — поверхность рассматриваемого объема.

Получим из соотношения (22.1) формулировку закона сохранения энергии для **пространственного** объема, через который движется среда (рис. 22.1). Преобразуем левую часть соотношения (22.1) по формуле дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho u \right) dV + \int_{\Sigma} \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) v_n d\sigma. \quad (22.2)$$



Рис. 22.1. Пространственный объем, через который движется среда

по неподвижному объему перестановочны, получим **закон сохранения энергии для неподвижного пространственного объема с поверхностью Σ , через который движется среда:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dV = & - \int_{\Sigma} \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) v_n d\sigma + \int_V \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) dV + \\ & + \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) d\sigma + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}^{**}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma. \end{aligned}$$

Этот закон гласит, что скорость изменения энергии в неподвижном пространственном объеме равна сумме энергии, которая приносится через границу объема поступающей в него средой (первое слагаемое в правой части), а также работы внешних сил, притока тепла и энергии в других формах извне в единицу времени.

22.2. Вектор потока тепла

Выведем из закона сохранения энергии формулы Коши для q_n и q_n^{**} и тем самым введем **вектор потока тепла** и **вектор потока добавочной энергии**. Для этого сначала преобразуем левую часть соотношения (22.1) в интеграл по объему с использованием формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему в виде (см. формулу (14.15) из лекции 14)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{ини}}} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dV. \quad (22.3)$$

Затем преобразуем в объемный интеграл второй член в правой части:

$$\int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot \vec{v}) d\sigma = \int_{\Sigma} (\vec{P}^i \cdot \vec{v}) n_i d\sigma = \int_V \nabla_i (\vec{P}^i \cdot \vec{v}) dV.$$

Здесь были использованы формула Коши для \vec{P}_n и формула Гаусса—Остроградского.

Заметим, что объем, по которому происходит интегрирование в правой части формулы (22.2), можно считать неподвижным, так как здесь просто вычисляется интеграл от производной по времени; это вычисление проводится при фиксированном времени. Учитывая, что дифференцирование по времени и интегрирование

Теперь в законе сохранения энергии все члены, кроме тех, которые содержат q_n и q_n^{**} , суть интегралы по объему; соотношение (22.1) принимает вид

$$\int_V \left(\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) - \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}) - \dots \right) dV = - \int_{\Sigma} (q_n + q_n^{**}) d\sigma.$$

Это равенство справедливо для любого объема. Применим его к объему среды в форме малого тетраэдра. Рассуждения, аналогичные проведенным при выводе формулы Коши для \vec{P}_n , приводят к следующим формулам Коши для q_n^* и q_n^{**} :

$$q_n = q^i n_i, \quad q_n^{**} = q^{**i} n_i.$$

Здесь n_i — компоненты нормали к той площадке, через которую поступают q_n^* и q_n^{**} , а q^i и q^{**i} — коэффициенты, не зависящие от ориентации этой площадки. Физический смысл q^1, q^2, q^3 в декартовых координатах таков: q^i — количество тепла, которое проходит через площадку, перпендикулярную оси x^i за единицу времени на единицу площади. Аналогичный физический смысл имеют q^{**i} .

Величина q_n — скаляр, не зависит от выбора системы координат, а n_i — компоненты вектора. Таким образом, q^i в свертке с компонентами вектора дают скаляр. Отсюда следует, что q^i — компоненты вектора $\vec{q}\{q^1, q^2, q^3\}$. Этот вектор называется **вектором потока тепла**. Заметим, что $q_n = q^i n_i = (\vec{q} \cdot \vec{n})$ есть проекция вектора \vec{q} на вектор \vec{n} .

Итак, **вектором потока тепла** называется такой вектор \vec{q} , что количество тепла, проходящее через произвольно ориентированную площадку в данной точке в единицу времени и на единицу площади, равно его проекции на нормаль к этой площадке. Существование такого вектора следует из закона сохранения энергии.

Аналогично определяется \vec{q}^{**} — вектор потока добавочной энергии:

$$q_n^{**} = (\vec{q}^{**} \cdot \vec{n}).$$

Замечание. При формальных выкладках формула Коши выводится лишь для суммы $q_n + q_n^{**}$, а не для каждого члена отдельно. Но так как процессы передачи тепла и добавочной энергии — это разные физические процессы, которые могут происходить независимо друг от друга, то естественно считать, что формулы Коши верны отдельно для q_n и q_n^{**} .

22.3. Дифференциальное уравнение энергии

Выведем теперь дифференциальное уравнение энергии. После введения векторов \vec{q} и \vec{q}^{**} можно преобразовать все поверхностные интегралы, входящие в закон сохранения энергии, в объемные; в частности,

$$\int_{\Sigma} q_n d\sigma = \int_{\Sigma} q^i n_i d\sigma = \int_V \nabla_i q^i dV = \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV$$

и

$$\int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{q}^{**} dV.$$

Объединяя все члены в законе сохранения энергии в один интеграл, получим соотношение вида

$$\int_V \left(\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) - \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) - \dots + \operatorname{div} \vec{q}^{**} \right) dV = 0.$$

Так как это равенство верно для любого объема, то подынтегральное выражение равно нулю (при условии, что подынтегральная функция непрерывна). Следовательно, в каждой точке среды при непрерывном движении должно выполняться равенство

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) + \nabla_i (\vec{P}^i \cdot \vec{v}) + \rho \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho \frac{dq_{\text{масс}}^{**}}{dt} - \operatorname{div} \vec{q}^{**}. \quad (22.4)$$

Это равенство называется **дифференциальным уравнением энергии**.

22.4. Уравнение притока тепла (уравнение внутренней энергии)

Получим уравнение притока тепла сначала в символической форме. Запишем первый закон термодинамики

$$dE_{\text{кин}} + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}$$

и теорему живых сил — уравнение кинетической энергии (21.6)

$$dE_{\text{кин}} = dA^{(e)} + dA^{(i)}.$$

Исключая из уравнения первого закона термодинамики $dE_{\text{кин}}$ с помощью теоремы живых сил, получаем

$$dU = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

Это соотношение называется **уравнением притока тепла** или **уравнением внутренней энергии**. Второе название чаще используется в западной литературе.

Дифференциальное уравнение притока тепла получается из дифференциального уравнения энергии (22.4) с использованием теоремы живых сил в дифференциальной форме, то есть соотношения

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho(\vec{F} \cdot \vec{v}) + \nabla_i (\vec{P}^i \cdot \vec{v}) - p^{ki} \nabla_i v_k.$$

Дифференциальное уравнение притока тепла имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = p^{ki} \nabla_i v_k + \rho \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho \frac{dq^{**}}{dt} - \operatorname{div} \vec{q}^{**}. \quad (22.5)$$

Часто это уравнение используется в виде соотношения для изменения внутренней энергии единицы массы за время dt :

$$du = \frac{1}{\rho} p^{ki} \nabla_i v_k dt + dq + dq^{**}. \quad (22.6)$$

Здесь

$$\frac{1}{\rho} p^{ki} \nabla_i v_k dt = - \frac{1}{dm} dA^{(i)}$$

есть работа внутренних сил на единицу массы со знаком минус;

$$dq = dq_{\text{масс}} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt$$

есть приток тепла к единице массы;

$$dq^{**} = dq_{\text{масс}}^{**} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q}^{**} dt$$

есть приток добавочной энергии к единице массы.

В частности, приток тепла к единице массы за счет теплопроводности равен

$$dq_{\text{тепл}} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt.$$

22.5. Закон теплопроводности Фурье

Опыт показывает, что для многих сред для вектора потока тепла \vec{q} выполняется закон теплопроводности Фурье. Для изотропной среды этот закон утверждает, что вектор потока тепла \vec{q} пропорционален градиенту температуры T , и записывается в виде

$$\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} T, \quad \text{то есть} \quad q_i = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x^i},$$

где κ называется коэффициентом теплопроводности.

Для анизотропной среды закон теплопроводности Фурье имеет вид

$$q^i = -\kappa^{ij} \frac{\partial T}{\partial x^j},$$

где κ^{ij} — компоненты тензора коэффициентов теплопроводности.

Лекция 23

- 23.1. Уравнение притока тепла при теплопроводности в покоящейся среде
- 23.2. Совершенный газ
- 23.3. Второй закон термодинамики
- 23.4. Обратимые и необратимые процессы

23.1. Уравнение притока тепла при теплопроводности в покоящейся среде

Уравнение притока тепла — это соотношение, которое выводится из первого закона термодинамики путем исключения кинетической энергии с помощью теоремы живых сил. Первый закон термодинамики имеет вид

$$dE_{\text{кин}} + dU = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

Вычитая из этого соотношения уравнение живых сил (21.6)

$$dE_{\text{кин}} = dA^{(e)} + dA^{(i)},$$

получаем уравнение притока тепла

$$dU = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

Уравнение притока тепла в дифференциальной форме выводится из дифференциального уравнения энергии и дифференциального уравнения живых сил. Оно имеет вид

$$du = -\frac{1}{dm} dA^{(i)} + dq + dQ^{**}. \quad (23.1)$$

Здесь u — плотность внутренней энергии, $du = \frac{du}{dt} dt$,

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)} = -\frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i dt$$

есть плотность работы внутренних поверхностных сил, то есть работа внутренних поверхностных сил на единицу массы;

$$dq = dQ_{\text{масс}} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt$$

есть приток тепла к единице массы;

$$dq^{**} = dq_{\text{mass}}^{**} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q}^{**} dt$$

есть приток добавочной энергии к единице массы.

Выпишем дифференциальное уравнение притока тепла (23.1) при следующих условиях.

1. Среда покоятся ($\vec{v} = 0$).
2. Добавочные притоки энергии отсутствуют ($dq^{**} = 0$).
3. Массовый приток тепла отсутствует ($dq_{\text{mass}} = 0$), а передача тепла происходит только за счет теплопроводности, то есть

$$dq = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt.$$

4. Для вектора потока тепла \vec{q} выполнен закон теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} T.$$

5. Коэффициент теплопроводности κ постоянен.

Так как $\vec{v} = 0$, то $\frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i = 0$, $dA^{(i)} = 0$. Уравнение притока тепла (23.1) принимает вид

$$du = dq.$$

Конкретизируем выражение для du . Обычно внутренняя энергия связана а) с кинетической энергией хаотического движения молекул и б) с потенциальной энергией взаимодействия молекул, которая зависит от расстояний между молекулами и поэтому меняется при деформировании среды. Для деформируемых твердых тел $u = u(T, \varepsilon_{ij})$, где T — температура, ε_{ij} — компоненты тензора деформации.

Так как среда покоятся, то $\varepsilon_{ij} = \text{const}$, поэтому

$$du = \frac{\partial u}{\partial T} dT.$$

Введем обозначение

$$c_\varepsilon = \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_{\varepsilon_{ij}=\text{const}}.$$

Тогда в рассматриваемом случае

$$du = c_\varepsilon dT.$$

Из уравнения притока тепла для процесса с $\varepsilon_{ij} = \text{const}$ имеем

$$c_\varepsilon = \frac{dq}{dT}.$$

Отношение количества полученного телом тепла к изменению его температуры dQ/dT называется **теплоемкостью**. Теплоемкость зависит от массы тела и от вида процесса. Если, например, процесс адиабатический, то теплоемкость равна нулю. Если изотермический — то бесконечности. Видно, что c_ε — это **удельная теплоемкость**, то есть **теплоемкость единицы массы в процессе с** $\varepsilon_{ij} = \text{const}$.

Рассмотрим теперь выражение для dq при условиях 3, 4. Имеем

$$dq = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt = \frac{\kappa}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T dt.$$

Здесь ΔT — оператор Лапласа от T . В частности, в декартовых координатах имеем

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \Delta T.$$

Таким образом, уравнение притока тепла в нашем случае имеет вид

$$c_\varepsilon \frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T.$$

Далее, с учетом того, что среда покоятся,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v^k \frac{\partial T}{\partial x^k} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Окончательная форма уравнения притока тепла в нашем случае такова:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_\varepsilon} \Delta T.$$

Если $\frac{\kappa}{\rho c_\varepsilon} = \text{const} > 0$, то это уравнение называется в теории уравнений в частных производных «уравнением теплопроводности». Вообще, уравнением теплопроводности называется уравнение вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda \Delta f, \quad \lambda = \text{const} > 0.$$

Мы видим, что процесс теплопроводности в сплошной среде описывается «уравнением теплопроводности», но только в очень частном случае, когда выполнены условия 1–5.

23.2. Совершенный газ

Совершенным газом (perfect gas) называется газ, для которого выполнены два соотношения:

- 1) $p = R\rho T$ — уравнение Клапейрона,

2) $u = c_V T + \text{const}$ где u — плотность внутренней энергии, c_V — некоторая константа, $R = R_0/m$ — постоянная для данного газа, R_0 — универсальная газовая постоянная, m — молекулярный вес газа.

Замечание 1. В классической физике газ, удовлетворяющий соотношениям 1) и 2), называют идеальным, а в механике сплошных сред — совершенным. Это связано с тем, что термин «идеальный газ» в механике сплошных сред уже занят: «идеальный газ» означает «невязкий газ».

Будем считать, что газ не только совершенный, но и идеальный. Тогда уравнение притока тепла имеет вид

$$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho + dq, \quad (23.2)$$

потому что плотность работы внутренних поверхностных сил в любом идеальном газе или идеальной жидкости равна $\left(-\frac{p}{\rho^2} d\rho\right)$ (см. лекцию 21, формулу (21.8)).

Замечание 2. Вообще совершенный газ может быть как идеальным, так и вязким. Это зависит от того, учитываем мы вязкие напряжения, или нет. Если используется модель идеального газа, то уравнение (23.2) верно для любых процессов. Если же используется модель вязкого газа, то оно выполняется только для медленных процессов. Когда работой вязких напряжений можно пренебречь. Это будет предполагаться в дальнейших выкладках.

Рассмотрим физический смысл константы c_V . Для совершенного газа рассмотрим процесс, в котором $\rho = \text{const}$, то есть объем V каждой частицы — постоянен (например, помещаем газ в банку с закрытой крышкой и нагреваем). Тогда из уравнения (23.2) получаем

$$du = dq, \quad du = c_V dT, \quad c_V = \frac{dq}{dT}.$$

Следовательно, c_V — это удельная теплоемкость в процессе с $V = \text{const}$.

Рассмотрим теперь процесс в совершенном идеальном газе, когда $p = \text{const}$ (например, газ в сосуде с подвижной крышкой; при нагревании крышка поднимается так, чтобы в сосуде поддерживалось постоянное давление). Проведем преобразование уравнения притока тепла (23.2) для этого процесса. Имеем

$$p = R\rho T = \text{const}, \quad Td\rho = -\rho dT, \quad d\rho = -\frac{\rho}{T} dT, \quad \frac{p}{\rho^2} d\rho = -R dT.$$

Уравнение притока тепла (23.2) принимает вид

$$c_V dT = -R dT + dq.$$

Значит, в процессе с $p = \text{const}$

$$\frac{dq}{dT} = c_V + R.$$

Обозначая удельную теплоемкость при $p = \text{const}$ через c_p ,

$$c_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_{p=\text{const}},$$

получаем, что

$$c_p = c_V + R,$$

то есть

$$R = c_p - c_V.$$

Это формула Майера.

Рассмотрим теперь адиабатический процесс, то есть процесс с $dq = 0$. Тогда

$$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho,$$

или, так как

$$p = R\rho T,$$

то

$$c_V dT = \frac{RT}{\rho} d\rho.$$

Отсюда

$$\ln T = \frac{R}{c_V} \ln \rho + \ln C_1,$$

то есть

$$T = C_1 \rho^{R/c_V} = C_1 \rho^{(c_p - c_V)/c_V} = C_1 \rho^{\gamma-1}.$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}.$$

Итак, в адиабатическом процессе в идеальном совершенном газе

$$T = C_1 \rho^{\gamma-1}.$$

С использованием уравнения Клапейрона

$$T = \frac{P}{R\rho},$$

это соотношение можно переписать в виде

$$p = C \rho^\gamma, \quad (23.3)$$

где $C = C_1 R = \text{const}$. Соотношение (23.3) называют адиабатой Пуассона; γ — показатель адиабаты.

23.3. Второй закон термодинамики

Существуют различные формулировки второго закона термодинамики. Приведем здесь три формулировки, эквивалентные в том смысле, что из каждой из них можно вывести остальные. Первые две формулировки можно назвать физическими, третью — математической.

Формулировка 1.

Тепло само собой не переходит от холодного тела к горячему.

Более точно это утверждение звучит так.

Невозможно устройство, которое работает циклически, причем результатом цикла является только передача тепла от холодного тела к более горячему без затраты внешней энергии.

Формулировка 2.

Невозможно устройство, которое работает по циклу и производит работу только за счет тепла, полученного от одного тела с фиксированной температурой.

Устройство, о котором идет речь в формулировке 2, называют венным двигателем второго рода. Поэтому утверждение этой формулировки кратко можно выразить так.

Невозможен вечный двигатель 2-го рода.

В лекции 27 мы увидим, как из любой из этих формулировок можно вывести следующую математическую формулировку.

Формулировка 3, содержащая понятие энтропии

- Для каждой термодинамической системы можно ввести некоторую функцию ее состояния S , называемую энтропией. Энтропия может меняться как за счет притока энтропии извне, так и за счет внутренних процессов. Для малого элемента процесса

$$dS = d_e S + d_i S, \quad \text{причем} \quad d_i S \geq 0.$$

Здесь $d_e S$ — приток энтропии извне, а $d_i S$ — производство энтропии внутри системы.

- $d_i S = 0$, если процессы, происходящие в системе, обратимы; $d_i S > 0$, если процессы необратимы.
- Приток энтропии $d_e S$ связан только с притоком тепла или притоком массы к системе.
- Если для всей системы определена температура, она одна и та же во всех точках системы, и нет притока массы в систему, то

$$d_e S = \frac{dQ}{T}, \quad (23.4)$$

где T — абсолютная температура. Если к тому же процесс обратим, то

$$dS = d_e S = \frac{dQ}{T}.$$

Тогда, обозначая через S_A энтропию в состоянии A , можно вычислить энтропию S_B в состоянии B по формуле

$$S_B = S_A + \int \frac{dQ}{T},$$

где интеграл берется по любому обратимому процессу.

Именно эта математическая формулировка 3 используется при постановке и решении задач механики сплошных сред.

Формулировка 3 содержит термины «обратимый процесс» и «необратимый процесс», которые должны быть определены.

23.4. Обратимые и необратимые процессы

Дадим определение обратимого процесса. Процесс называется обратимым, если выполнены следующие условия:

1. Система может пройти этот процесс в обратном направлении, проходя в обратном порядке через те же состояния, что в прямом процессе.
2. При этом все притоки энергии на всех участках процесса и ко всем частям системы в прямом и обратном процессах отличаются только знаком.

Если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то процесс необратим.

Процесс теплопроводности — необратим, процесс с трением — необратим. Однако мы можем иногда пренебрегать трением и теплопроводностью и рассматривать идеализированные обратимые процессы.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется система, состоящая из двух частей B_1 и B_2 , имеющих разные температуры T_1 , T_2 , $T_1 > T_2$. Если мы приведем части B_1 и B_2 в соприкосновение, то начнется процесс теплопроводности, часть B_1 будет охлаждаться, а часть B_2 нагреваться и с течением времени температуры обеих частей станут одинаковыми. Почему этот процесс необратим? Можно ли провести процесс изменения температур обеих частей в обратную сторону, так, чтобы часть B_1 нагревалась, а часть B_2 охлаждалась до тех пор, пока их температуры не станут опять равными T_1 , T_2 ? Конечно, можно: надо их разделить и поставить часть B_1 на печку, а часть B_2 в холодильник. Таким образом, первое условие обратимости выполнено. Однако второе условие не выполнено: в прямом процессе система $B_1 + B_2$ не обменивается теплом с внешними телами,

$$dQ_1^{(e)} = 0, \quad dQ_2^{(e)} = 0,$$

а в обратном — обменивается,

$$dQ_1^{(e)} > 0, \quad dQ_2^{(e)} < 0.$$

Заметим, что суммарное количество тепла, отданное и полученное внешними телами в обратном процессе, как и в прямом, равно нулю, сколько тепла отдала печка, столько же тепла получил холодильник. Это следует из закона сохранения энергии, так как в результате последовательности прямого и обратного процесса система возвращается в первоначальное состояние. Но во втором условии обратимости подчеркивается, что для того, чтобы процесс был обратимым, притоки энергии извне в прямом и обратном процессах должны быть одинаковыми по величине и иметь противоположные знаки на всех участках процесса и для всех частей системы, что в данном случае не выполнено.

Лекция 24

- 24.1. Второй закон термодинамики для индивидуального объема сплошной среды
- 24.2. Дифференциальное уравнение энтропии
- 24.3. Производство энтропии в процессе теплопроводности
- 24.4. Понятие некомпенсированного тепла
- 24.5. Неравенство Клаузиуса

24.1. Второй закон термодинамики для индивидуального объема сплошной среды

Второй закон термодинамики — один из основных законов термодинамики. Общая математическая формулировка второго закона термодинамики имеет вид

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_i S \geq 0. \quad (24.1)$$

Рассмотрим некоторый объем сплошной среды V , ограниченный поверхностью Σ . Чтобы написать математическую формулировку второго закона термодинамики для этого объема, нужно составить выражения для всех членов, входящих в (24.1).

Введем плотность энтропии s так, чтобы энтропия малой частицы с массой dm представлялась в виде

$$s dm = s \rho dV,$$

а энтропия всего объема V — в виде

$$S = \int_V s \rho dV.$$

Напишем выражение для притока энтропии за счет массового притока тепла $d_e S_{\text{mass}}$. Разобъем объем на малые частицы так, чтобы внутри каждой частицы температуру T всех точек можно было считать одной и той же. Тогда, согласно формуле (23.4), приток энтропии за счет массового притока тепла к малой частице с массой ρdV будет

$$\frac{dq_{\text{mass}}}{T} \rho dV,$$

а ко всему объему V

$$d_e S_{\text{масс}} = \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{T} \rho dV.$$

Чтобы получить выражение притока энтропии за счет притока тепла через поверхность Σ , разбиваем поверхность Σ на малые элементы $d\sigma$. Через поверхность $d\sigma$ поступает за счет поверхностного притока тепла количество тепла $-q_n dt d\sigma$ и, соответственно, количество энтропии $(-q_n/T) dt d\sigma$, а через всю поверхность Σ поступает количество энтропии

$$d_e S_{\text{пов}} = - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma.$$

Итак, выражение для притока энтропии за время dt к объему V сплошной среды за счет притока тепла извне таково:

$$d_e S = \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{T} \rho dV - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma. \quad (24.2)$$

Поверхностный интеграл в правой части выражения (24.2) можно преобразовать в объемный по формуле Гаусса—Остроградского, так как по формуле Коши $q_n = q^i n_i$. Получим

$$d_e S = \int_V \left(\rho \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \nabla_i \left(\frac{q^i}{T} \right) dt \right) dV. \quad (24.3)$$

Обозначим через $d_e s$ плотность притока энтропии извне, то есть приток энтропии к единице массы среды. Из формулы (24.3) видно, что

$$d_e s = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) dt. \quad (24.4)$$

Второй закон термодинамики для индивидуального объема сплошной среды записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{иниц}}} s \rho dV = \int_V \frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\sigma + \frac{d_i S}{dt}, \quad \frac{d_i S}{dt} \geq 0. \quad (24.5)$$

24.2. Дифференциальное уравнение энтропии

Дифференциальное уравнение энтропии выводится из второго закона термодинамики (24.5).

Соотношение (24.5) для непрерывных процессов с использованием формулы дифференцирования по времени интеграла по подвижному индивидуальному объему и с учетом формулы (24.4) можно записать в виде

$$\int_V \left(\frac{ds}{dt} - \frac{d_e s}{dt} \right) \rho dV = \frac{d_i S}{dt}. \quad (24.6)$$

Это равенство должно выполняться для любого, в том числе и бесконечно малого объема. Это означает, что производство энтропии в единицу времени представляется в виде интеграла по объему, то есть можно ввести плотность производства энтропии в единицу времени $d_i s/dt$ так, чтобы

$$\frac{d_i S}{dt} = \int_V \frac{d_i s}{dt} \rho dV, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0.$$

Тогда второй закон термодинамики записывается в виде

$$\int_V \rho \left(\frac{ds}{dt} - \frac{d_e s}{dt} - \frac{d_i s}{dt} \right) dV = 0, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0.$$

Так как это справедливо для любого объема, то подынтегральное выражение (предполагаемое непрерывным) должно быть равно нулю, то есть в каждой точке среды должно выполняться соотношение

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} - \frac{1}{\rho} \nabla_i \left(\frac{q^i}{T} \right) + \frac{d_i s}{dt}, \quad \frac{d_i s}{dt} \geq 0. \quad (24.7)$$

Это соотношение называется **дифференциальным уравнением энтропии**.

24.3. Производство энтропии в процессе теплопроводности

Пусть массового притока тепла нет, $dq_{\text{масс}} = 0$. Приток тепла к каждой частице происходит только за счет теплопроводности. Тогда приток тепла на единицу массы за время dt имеет вид

$$dq = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt = -\frac{1}{\rho} \nabla_i q^i dt.$$

Чтобы вывести формулу для производства энтропии в процессе теплопроводности, проведем следующее рассуждение. Разобьем рассматриваемый объем среды V на малые частицы так, чтобы внутри каждой частицы температуру T всех точек можно было считать одной и той же, разности температур точек внутри малой частицы нет. Тогда мы должны считать, что внутри частицы не происходит необратимого процесса теплопроводности, а изменение энтропии частицы $dS = d\rho p dV$ связано с притоком тепла $dq \rho dV$ по формуле, верной для обратимого процесса, то есть

$$ds = \frac{dq}{T}.$$

Для изменения энтропии всего объема V имеем

$$dS = \int_V \frac{dq}{T} \rho dV = - \int_V \frac{1}{T} \nabla_i q^i dt dV = - \int_V \nabla_i \left(\frac{q^i}{T} \right) dt dV +$$

$$+ \int_V q^i \nabla_i \left(\frac{1}{T} \right) dt dV = - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma - \int_V \frac{q^i}{T^2} \nabla_i T dt dV.$$

Первый член в правой части, согласно формуле (24.2), представляет собой приток энтропии извне в случае, когда имеется только поверхностный приток тепла. Следовательно, второй член представляет собой производство энтропии.

Итак, плотность производства энтропии за малое время dt за счет теплопроводности есть

$$d_i s_{\text{тепл}} = - \frac{1}{\rho T^2} q^i \nabla_i T dt = - \frac{1}{\rho T^2} (\vec{q} \cdot \text{grad } T) dt. \quad (24.8)$$

Из соотношения (24.8) можно сделать следующие выводы.

- Пусть выполняется закон Фурье $\vec{q} = -\kappa \text{grad } T$. Тогда

$$d_i s_{\text{тепл}} = \frac{\kappa}{\rho T^2} (\text{grad } T)^2 dt.$$

Так как согласно второму закону $d_i s_{\text{тепл}} \geq 0$, то $\kappa > 0$. Итак, из второго закона термодинамики следует, что коэффициент теплопроводности κ положителен.

- Если $|\text{grad } T|$ мал, то $d_i s/dt$ — малая второго порядка. Поэтому при малой разности температур соседних частиц процесс передачи тепла можно рассматривать как обратимый.

24.4. Понятие некомпенсированного тепла

Понятие «некомпенсированное тепло» вводится следующим образом. Рассмотрим сначала случай, когда температура T всех точек системы одна и та же. Тогда $d_e S = dQ/T$. По второму закону термодинамики

$$dS = \frac{dQ}{T} + d_i S, \quad d_i S \geq 0.$$

После умножения левой и правой частей этого соотношения на абсолютную температуру получим

$$TdS = dQ + Td_i S.$$

Введем обозначение $Td_i S = dQ'$, тогда второй закон термодинамики можно записать так

$$TdS = dQ + dQ', \quad dQ' \geq 0.$$

Если бы процесс был обратим, то было бы

$$TdS = dQ.$$

Таким образом, при необратимых процессах энтропия ведет себя так, как вела бы себя при обратимых, если бы в них приток тепла был бы

равен $dQ + dQ'$. Величина dQ' была названа создателями классической термодинамики **некомпенсированным теплом**.

Если температура в разных точках среды различна, то понятие некомпенсированного тепла можно ввести следующим образом. Воспользуемся уравнением второго закона термодинамики в дифференциальной форме:

$$ds = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{1}{\rho} \nabla_i \left(\frac{q_i}{T} \right) dt + d_i s = \frac{dq_{\text{масс}}}{T} - \frac{\nabla_i q^i}{\rho T} dt + \frac{1}{\rho T^2} q^i \nabla_i T dt + d_i s.$$

Два первых члена в правой части — это плотность притока тепла, деленная на температуру:

$$\frac{1}{T} \left(dq_{\text{масс}} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt \right) = \frac{dq}{T}.$$

Третий член в правой части есть $(-d_i s_{\text{тепл}})$:

$$\frac{1}{\rho T^2} q^i \nabla_i T dt = -d_i s_{\text{тепл}}.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение энтропии можно представить в виде

$$ds = \frac{dq}{T} + (d_i s - d_i s_{\text{тепл}}),$$

или

$$T ds = dq + dq', \quad \text{где } dq' = T(d_i s - d_i s_{\text{тепл}}). \quad (24.9)$$

Величина dq' называется **плотностью некомпенсированного тепла**. Она равна умноженной на абсолютную температуру плотности производства энтропии за счет всех необратимых процессов, кроме теплопроводности. Если остальные необратимые процессы не зависят от процесса теплопроводности, то из второго закона термодинамики следует, что

$$dq' \geq 0.$$

24.5. Неравенство Клаузиуса

Поскольку $dq' \geq 0$, то, согласно соотношению (24.9),

$$T ds \geq dq.$$

Подставим в это неравенство выражение для dq , полученное из уравнения притока тепла:

$$du = dq + \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i dt + dq^{**}.$$

Получим неравенство Клаузиуса:

$$du - \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i dt - dq^{**} - T ds \leq 0.$$

Оно должно быть выполнено для всех процессов во всех средах. Важно, что внешние силы и притоки тепла извне в это неравенство не входят.

Лекция 25

- 25.1. Тепловые машины
- 25.2. Тепловые машины, работающие по циклу Карно
- 25.3. Обратимый цикл Карно для совершенного газа
- 25.4. Эквивалентность физических формулировок второго закона термодинамики

25.1. Тепловые машины

Второй закон термодинамики был впервые сформулирован в работе Сади Карно (1824 год), которая называлась «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу» и была посвящена анализу работы тепловых машин. Это было время, когда тепловые машины начали преобразовывать мир. Их развитие привело к появлению автомобилей, самолетов, огромного числа других машин, без которых невозможно представить современную жизнь. А в 19 веке все это начиналось. Поэтому можно понять, почему столь блестящий молодой человек из знаменитой семьи, каким был Сади Карно, заинтересовался таким кажущимся сейчас прозаическим, но новым и волнующим в те времена вопросом о принципах работы тепловых машин и возможности создания машин с наибольшим коэффициентом полезного действия.

Через сорок лет после появления работы Карно Клаузиусом было показано, что из теоремы Карно следует возможность введения функции состояния системы, которую он назвал энтропией. Так появилась математическая формулировка второго закона. Понятие энтропии начало применяться к всевозможным системам.

В этой лекции, а также в следующих двух лекциях будет рассказано о том, как, исходя из некоторого постулата, касающегося работы тепловых машин, можно ввести такое универсальное понятие, как энтропия.

Тепловой машиной называют устройство, которое

- 1) работает по циклу, то есть в нем происходит процесс, в результате которого устройство приходит в исходное состояние;
- 2) получает от внешних источников тепло и производит работу или отдает энергию в другой нетепловой форме.

Пусть в некоторой системе происходит циклический процесс. Согласно первому закону термодинамики сумма притоков энергии к системе извне за цикл равна нулю:

$$\oint (dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}) = 0. \quad (25.1)$$

Обозначим через Q количество тепла, которое получает система за цикл,

$$Q = \oint dQ^{(e)}.$$

Обозначим через A сумму работы, произведенной системой, и энергии, полученной от системы в других формах (то есть в формах, отличных от тепла и работы),

$$A = -\oint (dA^{(e)} + dQ^{**}).$$

Во многих случаях $dQ^{**} = 0$. Тогда A — это просто работа, произведенная системой. В дальнейшем тексте будем условно называть величину A работой даже в тех случаях, когда $dQ^{**} \neq 0$. С точки зрения второго закона термодинамики различие между механической работой и другими нетепловыми видами энергии несущественно. Второй закон термодинамики делит все формы энергии на «тепло» и «не тепло», утверждая (см. формулировку 2 в лекции 23), что тепло нельзя полностью превратить в «не тепло», то есть в нетепловые виды энергии.

Согласно соотношению (25.1)

$$A = Q.$$

Если $A > 0$, то систему можно назвать **тепловой машиной**. Она совершает работу за счет тепла, полученного от внешних источников.

25.2. Тепловые машины, работающие по циклу Карно

Рассмотрим, следя Карно, тепловую машину,ирующую по так называемому циклу Карно. Для организации такой машины требуется 3 тела: рабочее тело, которое производит работу (например, газ или пар, который расширяется и поднимает груз), и еще два тела B_1 и B_2 с температурами соответственно θ_1 и θ_2 ; с этими телами рабочее тело может обмениваться теплом. При этом считается, что в рассматриваемом процессе $\theta_1 = \text{const}$ и $\theta_2 = \text{const}$. В этом разделе мы обозначаем температуру не буквой T , а буквой θ , так как пока шкала температуры может быть любой, а обозначение T используется, как правило, для абсолютной температуры.

Тела B_1 и B_2 называют тепловыми резервуарами. Если $\theta_1 > \theta_2$, то тело B_1 называется нагревателем, а тело B_2 — холодильником. Будем обозначать количества тепла, полученные газом от тепловых резервуаров, через Q_1 и Q_2 .

Циклом Карно называют любой процесс, в котором тело обменивается теплом только с двумя телами с фиксированными температурами.

При каких условиях можно считать, что $\theta_1 = \text{const}$, $\theta_2 = \text{const}$, несмотря на то, что резервуары тепла отдают или получают тепло? Рассмотрим удельную теплоемкость, то есть теплоемкость единицы массы c . Она, по определению, равна отношению количества тепла, полученного телом в расчете на единицу массы, к соответствующему увеличению температуры

$$c = \frac{\Delta q}{\Delta \theta}.$$

Количество тепла, которое нужно передать телу массы M , чтобы увеличить его температуру на $\Delta\theta$, равно

$$\Delta Q = M \Delta q = M c \Delta \theta.$$

Таким образом, изменение температуры тела связано с массой тела и количеством полученного тепла формулой

$$\Delta \theta = \frac{\Delta Q}{cM}.$$

Величина удельной теплоемкости c конечна; поэтому, если количество тепла ΔQ , передаваемое телу или отбираемого у него, мало или масса тела M — велика, то изменение температуры $\Delta\theta$ мало, то есть θ практически не меняется. Мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

Пусть рабочим телом машины является газ, находящийся в цилиндре под подвижным поршнем. Классический цикл Карно состоит из следующих четырех этапов (рис. 25.1).

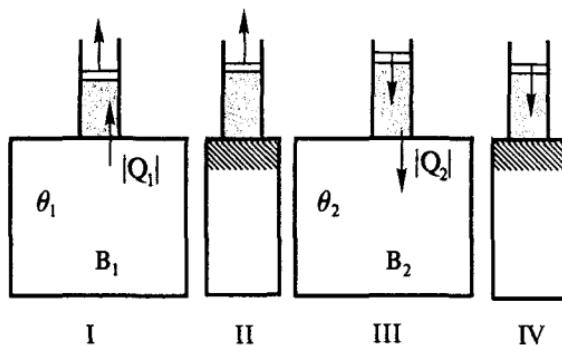


Рис. 25.1. Схема тепловой машины, работающей по циклу Карно.

B_1, B_2 — тепловые резервуары. Заштрихованы теплоизолирующие подставки

I этап: медленное расширение газа в условиях, когда цилиндр с газом находится в контакте с нагревателем B_1 . При расширении температура газа стремится понизиться, но за счет контакта с телом B_1 к газу

все время поступает тепло и температура газа успевает выравниваться с температурой тела B_1 , так что процесс является изотермическим, $\theta_{\text{газа}} = \theta_1$. При расширении газ получает от тела B_1 количество тепла $Q_1 > 0$ и совершают работу (например, поднимает груз).

- II этап: медленное адиабатическое расширение газа. Цилиндр с газом снимается с тела B_1 , ставится на теплоизолирующую подставку, и газу дают возможность дальше расширяться; он опять совершает работу. Так как процесс адиабатический, то температура газа падает. Расширение проводится до тех пор, пока температура газа не станет равной θ_2 .
- III этап: цилиндр с газом ставится на тело с температурой θ_2 , и начинается медленное изотермическое сжатие газа. При этом газ отдает тепло холодильнику B_2 ($Q_2 < 0$), а мы совершаем работу по сжатию газа.
- IV этап: цилиндр с газом снова ставится на теплоизолирующую подставку, и сжатие продолжается адиабатически до тех пор, пока не будет достигнуто первоначальное состояние газа.

25.3. Обратимый цикл Карно для совершенного газа

Рассмотрим в качестве примера обратимый цикл Карно для совершенного газа. Для совершенного газа верны следующие уравнения состояния:

$$p = R\rho T, \quad \text{то есть} \quad pV = RT, \quad u = c_V T + \text{const.}$$

Здесь T — абсолютная температура, $V = 1/\rho$ — объем единицы массы.

Будем обозначать температуры тепловых резервуаров через T_1 и T_2 , а количества тепла, полученные газом от них — попрежнему через Q_1 и Q_2 .

Будем проводить все процессы медленно, тогда давление, плотность и температура газа одинаковы во всех частицах в каждый момент времени. В связи с этим, в частности, достаточно вычислять работу и притоки тепла, приходящиеся на единицу массы газа. Полная работа газа и приток тепла ко всей массе газа будут просто пропорциональны массе.

Изобразим цикл Карно на плоскости p, V (рис. 25.2).

Процесс начинается с состояния A .

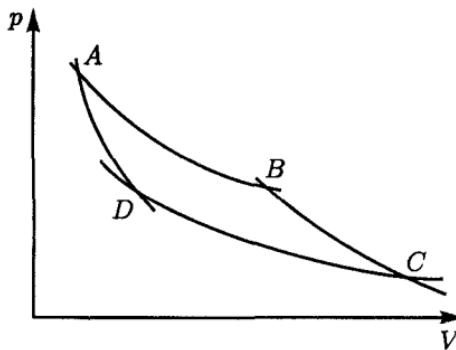
I этап — изотермическое расширение. На изотерме AB имеем $T = T_1 = \text{const}$,

$$p = \frac{RT_1}{V}.$$

II этап — адиабатическое расширение BC :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad \text{то есть} \quad \frac{p}{p_B} = \left(\frac{V_B}{V}\right)^\gamma,$$

причем показатель адиабаты $\gamma > 1$.

Рис. 25.2. Цикл Карно на плоскости p, V

III этап — изотермическое сжатие CD до состояния D такого, чтобы построенная на IV этапе адиабата попала точно в точку A . На CD

$$p = \frac{RT_2}{V}.$$

IV этап — адиабата DA :

$$\frac{p}{p_A} = \left(\frac{V_A}{V} \right)^\gamma; \quad \text{или, в другом виде,} \quad \frac{p}{p_D} = \left(\frac{V_D}{V} \right)^\gamma.$$

Вычислим работу, произведенную газом во всем цикле. Так как мы рассматриваем медленный процесс, то

$$dE_{\text{кин}} = 0, \quad \text{то есть} \quad dA^{(i)} + dA^{(e)} = 0, \quad dA^{(e)} = -dA^{(i)},$$

где $dA^{(e)}$ — работа внешних сил над газом; $dA^{(i)}$ — работа внутренних сил; $dA = -dA^{(e)} = dA^{(i)}$ — работа газа.

Работа внутренних сил на единицу массы в медленном процессе (вязкие напряжения пренебрежимо малы) равна

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)} = -\frac{p}{\rho^2} d\rho = p d\frac{1}{\rho} = p dV.$$

Поэтому работа, произведенная единицей массы газа за весь цикл $ABCDA$, равна

$$\oint_{ABCDA} p dV,$$

а работа всего объема газа с массой M есть

$$A = M \oint_{ABCDA} p dV.$$

На I и II этапах работа газа положительна

$$A_{AB} + A_{BC} = M \int_A^B p \, dV + M \int_B^C p \, dV > 0;$$

на III и IV этапах — отрицательна. Но полная работа газа $A_{ABCDA} > 0$, т.е. мы получаем работу от газа.

Теперь рассмотрим количества тепла Q_1 и Q_2 , которые газ получает от резервуаров B_1 и B_2 в этом цикле Карно.

На участке AB температура постоянна, поэтому изменение внутренней энергии равно нулю:

$$dU = Mdu = Mc_VdT = 0.$$

Тогда из уравнения притока тепла

$$dU = dQ - dA^{(i)}$$

получаем

$$dQ = dA^{(i)} = dA_{\text{газа}}, \quad Q_1 = A_{AB} > 0$$

— газ получает тепло от нагревателя.

Участок BC соответствует адиабатическому процессу, $dQ = 0$.

На участке CD температура постоянна, $dU = 0$, $Q_2 = A_{CD} < 0$ — газ отдает тепло холодильнику.

На участке DA (адиабатический процесс) $dQ = 0$.

В полном цикле

$$Q = Q_1 + Q_2 = A > 0, \quad \text{причем} \quad Q_1 > 0, \quad Q_2 < 0.$$

Таким образом, количество работы, произведенной машиной, меньше количества тепла, взятого у нагревателя. Часть энергии пошла на нагревание холодильника, что нерационально.

Можно ли придумать такой цикл и создать такую машину, чтобы все тепло, полученное от нагревателя, превращалось в работу? Второй закон термодинамики в формулировке Карно утверждает, что этого сделать нельзя, часть тепла обязательно отдается холодильнику (см. формулировку 2 в лекции 23).

Если провести циклический процесс в обратную сторону, то получим устройство, которое забирает тепло у холодного тела и отдает тепло горячему. В этом процессе мы сначала расширяем газ адиабатически до тех пор, пока его температура не понизится до значения температуры холодного тела. Потом приводим цилиндр с газом в соприкосновение с этим холодным телом и продолжаем расширять газ, тогда он забирает тепло от холодного тела. Потом мы начинаем его сжимать адиабатически до тех пор, пока его температура не повысится до значения температуры горячего тела. При дальнейшем сжатии газа, если он находится в контакте с горячим телом, газ будет отдавать тепло горячему телу. Если в конце газ

возвращается к исходному состоянию, то, очевидно, работа газа за весь цикл будет отрицательной, то есть мы вкладываем работу, а количество тепла, которое газ отдает горячему телу, равно сумме количества тепла, взятого от холодного тела, и вложенной нами работы (см., например, цикл $AD + DC + CB + BA$ для совершенного газа).

Машина, работающая по такому циклу, называется холодильной машиной или тепловым насосом. Она может использоваться либо для охлаждения холодного тела (например, бытовой холодильник), либо для обогрева помещений частично за счет тепла, забираемого от холодного тела (например, от холодного моря в северной стране). Тогда она работает как тепловой насос.

25.4. Эквивалентность физических формулировок второго закона термодинамики

Докажем эквивалентность физических формулировок 1 и 2 второго закона термодинамики (см. лекцию 23).

Доказательство проводим от противного.

Пусть формулировка 2 верна, а формулировка 1 неверна. Рассмотрим тогда последовательность двух процессов. В первом процессе некоторое количество тепла Q_1 само собой переходит от холодного тела к горячему, что возможно, если формулировка 1 неверна. В качестве второго процесса возьмем цикл Карно, устроенный так, что в нем от горячего тела берется именно то количество тепла, которое было им получено от холодного тела в первом процессе, то есть Q_1 . Машина Карно произведет за цикл некоторую работу $A > 0$, при этом холодному телу будет передано количество тепла $Q_1 - A$.

Результат двух процессов — следующий.

- Получена работа $A > 0$.
- В рабочем теле машины Карно ничего не изменилось, в результате цикла оно вернулось к первоначальному состоянию.
- В горячем теле ничего не изменилось: оно получило тепло Q_1 и его отдало.
- Холодное тело отдало количество тепла $Q_1 - (Q_1 - A) = A > 0$.

Таким образом, получили устройство, которое производит работу только за счет тепла, взятого у одного тела. Это противоречит формулировке 2. Значит, если формулировка 2 верна, то формулировка 1 тоже верна.

Пусть теперь формулировка 1 верна, а формулировка 2 неверна, то есть можно в цикле забрать тепло от одного тела и превратить его полностью в работу. Сделаем это, а потом возьмем еще одно, более горячее тело и затратим полученную работу на нагревание этого горячего тела (например, трением). Объединяя эти два процесса, получим систему, которая без затраты внешней энергии передает тепло от холодного тела к горячему, что противоречит формулировке 1. Конец доказательства.

Лекция 26

- 26.1. Теорема Карно о коэффициентах полезного действия (КПД) тепловых машин
- 26.2. Введение абсолютной температуры с помощью циклов Карно
- 26.3. Введение энтропии для системы, для которой определена температура

26.1. Теорема Карно о коэффициентах полезного действия (КПД) тепловых машин

Введем понятие коэффициента полезного действия (КПД) тепловой машины Карно. **Машиной Карно** называется устройство, в котором рабочее тело совершает цикл, обмениваясь теплом только с двумя телами (тепловыми резервуарами), имеющими фиксированные температуры θ_1 и θ_2 . Тело с большей температурой называется нагревателем, тело с меньшей температурой — холодильником. Пусть $\theta_1 > \theta_2$. Работа, которую производит машина за цикл, обозначается через A , а количества тепла, которые забираются у нагревателя и холодильника, — через Q_1 , Q_2 соответственно. Если $A > 0$, то есть система работает как тепловая машина, то $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$. Из закона сохранения энергии следует, что

$$A = Q = Q_1 + Q_2 < Q_1. \quad (26.1)$$

Таким образом, в работу превращается лишь часть тепла, полученного от нагревателя. Часть тепла мы вынуждены отдать холодильнику, чтобы вернуть рабочее тело к исходному состоянию. С точки зрения затрат энергии эта часть является для нас бесполезной: нам вообще не нужно нагревать холодильник.

Коэффициентом полезного действия (КПД) машины Карно называется отношение величины полученной работы к количеству тепла, истраченного нагревателем:

$$\text{КПД} = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1. \quad (26.2)$$

Как устроить машину с наибольшим КПД?

Будем сравнивать различные машины, использующие одни и те же тепловые резервуары.

Машины, даже работающие с одними и теми же тепловыми резервуарами, могут быть разными, в частности производить разное количество работы. Например, если рабочим веществом является газ, а процесс медленный, то работа на единицу массы равна $\int p dV$, а работа массы M равна $A = M \int p dV$; значит, количество работы зависит от массы рабочего вещества. Вообще такие тепловые машины могут различаться тем, что в них могут быть 1) разные рабочие вещества, 2) разные массы рабочего вещества, 3) разные степени изотермического и адиабатического расширения, 4) разные скорости проведения процесса. Если процесс происходит быстро, то он, как правило, необратим, так как а) температура в рабочем теле не успевает выравниваться, возникают конечные разности температур, происходит необратимый процесс теплопроводности, б) если рабочее тело — газ или пар, то в нем возникает движение с конечными скоростями и проявляется вязкое трение. Не обратимость процесса в машине может быть также связана с трением в ее различных механических частях.

Теорема Карно формулируется следующим образом.

Если справедлив второй закон термодинамики, то из всех машин Карно, работающих с одними и теми же нагревателем и холодильником,

- 1) *КПД машин, работающих по необратимым циклам Карно, не больше КПД машин, работающих по обратимым циклам;*
- 2) *КПД всех машин, работающих по обратимым циклам Карно, одинаков.*

Доказательство теоремы Карно. Пусть имеются две машины, работающие по циклу Карно с одними и теми же нагревателем и холодильником. Пусть обратимая машина производит работу A , забирая у нагревателя тепло Q_1 . Ее КПД равен $A/Q_1 = \eta$. КПД машины, про которую неизвестно, обратимая она или нет, обозначим η' . Эта машина производит работу A' , забирая у нагревателя тепло Q'_1 .

Докажем, что $\eta \geq \eta'$.

Доказательство проводится особенно легко, если обе машины производят одинаковое количество работы, то есть

$$A = A'.$$

Если это первоначально не так, то возьмем m одинаковых машин с КПД η (они производят количество работы mA) и n машин с КПД η' (они производят количество работы nA'). Подберем m и n таким образом, чтобы количества работы этих двух наборов машин было одинаковым:

$$mA = nA',$$

то есть чтобы было

$$\frac{A}{A'} = \frac{n}{m}.$$

Этого всегда можно добиться с любой точностью, так как любое число можно приблизить рациональным числом n/m .

КПД системы одинаковых машин, конечно, равен КПД одной машины. Действительно, если одна машина с КПД $= \eta$ производит работу A , забирая у нагревателя тепло Q_1 , то m машин производят работу mA , забирая у нагревателя количество тепла mQ_1 . КПД системы m машин равен

$$\frac{mA}{mQ_1} = \frac{A}{Q_1} = \eta.$$

Вышесказанное означает, что не ограничивая общности, можно при доказательстве того, что $\eta \geq \eta'$, сразу считать, что машины с КПД $= \eta$ и КПД $= \eta'$ производят одинаковое количество работы, $A = A'$.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы Карно. Оно проводится от противного.

Пусть $\eta < \eta'$.

Рассмотрим циклический процесс, состоящий из двух циклов: машина с КПД $= \eta'$ работает как тепловая, а машину с КПД $= \eta$ запустим в обратную сторону, то есть она будет работать как холодильная, причем Q_1 , Q_2 и A в этом обратном цикле будут отличаться от соответствующих величин в прямом процессе только знаком. При этом можно считать, что обе машины, работая независимо друг от друга, вместе составляют единую термодинамическую систему, которая обменивается теплом с нагревателем и холодильником и не совершает работы.

Результат циклического процесса, состоящего из цикла необратимой машины и цикла обратимой машины, проходимого в обратную сторону, представлен в таблице.

	Машина с КПД $= \eta'$	Машина с КПД $= \eta$	Нагреватель	Холодильник
Совершает работу	A'	$-A$	0	0
Получает количество тепла	$Q'_1 + Q'_2$	$-Q_1 - Q_2$	$-Q'_1 + Q_1$	$-Q'_2 + Q_2$

Из закона сохранения энергии $A = Q_1 + Q_2$, $A' = Q'_1 + Q'_2$. Из равенства $A = A'$ следует

$$-Q'_1 + Q_1 = -(-Q'_2 + Q_2).$$

После окончания составного цикла обе машины возвращаются в первоначальное состояние. Суммарное количество работы равно нулю: сколько работы было произведено в первой части составного цикла, столько потом было потрачено во второй части цикла. Единственным результатом

является перераспределение тепла между нагревателем и холодильником. Рассмотрим, какой из этих тепловых резервуаров получает тепло, а какой отдает.

Так как $A' = A$, $\eta' = A'/Q'_1$, $\eta = A/Q_1$, то из предположения, что $\eta' > \eta$, следует, что

$$Q'_1 < Q_1, \quad \text{то есть} \quad -Q'_1 + Q_1 > 0,$$

то есть тепло, полученное нагревателем, положительно! Текло $-Q'_1 + Q_2$, взятое от холодильника, поступает к резервуару с большей температурой без затраты работы, что противоречит второму закону термодинамики. Следовательно $\eta \geq \eta'$.

Теперь докажем, что у всех машин, работающих по обратимым циклам с одними и теми же нагревателем и холодильником, КПД одинаков.

Пусть машина с КПД $= \eta'$ тоже обратима, как и машина с КПД $= \eta$. Тогда запустим в обратном направлении машину с КПД $= \eta'$, а в прямом направлении — машину с КПД $= \eta$. Проводя такие же рассуждения, как при доказательстве первой части теоремы Карно, получим, что $\eta' \geq \eta$. Но в первой части было получено, что $\eta' \leq \eta$. Следовательно, если обе машины работают по обратимым циклам, то

$$\eta' = \eta. \quad \square$$

26.2. Введение абсолютной температуры с помощью циклов Карно

Итак, при использовании одних и тех же резервуаров тепла η не зависит от вида обратимой машины Карно. Так как

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1},$$

то утверждение теоремы Карно означает, что для всех обратимых машин с одними и теми же резервуарами тепла отношение Q_2/Q_1 — одинаково. Кроме того, всегда $Q_2/Q_1 < 0$.

Абсолютная температура может быть введена следующим образом. Пусть имеется тело B_1 с температурой θ_1 и тело B_2 с температурой θ_2 . Припишем телу B_1 некоторое число T_1 и назовем T_1 абсолютной температурой тела B_1 . Абсолютную температуру тела B_2 определим формулой

$$T_2 = -T_1 \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (26.3)$$

где Q_1 и Q_2 — количества тепла, полученные обратимой машиной Карно, использующей тела B_1 и B_2 в качестве тепловых резервуаров.

Соотношение (26.3) мы будем в дальнейшем тексте называть соотношением Карно.

Свойства так определенной абсолютной температуры следующие.

1. Она совпадает (с точностью до числового множителя) с той температурой, которая стоит в уравнении Клапейрона для газа. Это проверяется непосредственным вычислением Q_1 и Q_2 для цикла Карно в совершенном газе.
2. Если $T_1 > 0$, то абсолютные температуры всех тел положительны, так как Q_1 и Q_2 всегда разных знаков.
3. Если $\theta_1 > \theta_2$, то $T_1 > T_2$. Доказательство: если $\theta_1 > \theta_2$, то при работе тепловой машины $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $A = Q_1 + Q_2 > 0$. Поэтому $-Q_2 < Q_1$ и, значит, $T_2 < T_1$.
4. Абсолютная температура не зависит от выбора отсчетного тела. Можно доказать, что если имеется три тела A, B, C , то T_A , определенная через T_B с помощью цикла Карно, проведенного между телами A и B , равна T_A , определенной через T_C с помощью цикла Карно, проведенного между телами A и C , если T_C связана с T_B соотношением Карно.
5. Шкалу абсолютной температуры можно ввести так. Условимся, что разность температур кипения T_1 и замерзания T_2 воды равна 100° (так введенная шкала будет с большой точностью совпадать со шкалой Кельвина). Измерим количества тепла Q_1, Q_2 в обратном цикле Карно, в котором тепловыми резервуарами являются кипящая и замерзающая вода. Вычислим отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = -\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Добавляя к этому равенству соотношение $T_1 - T_2 = 100^\circ$, получаем, что абсолютная температура замерзания воды равна 273° .

Если бы мы договорились, что разность температур кипения и замерзания воды равна какому-то другому числу единиц, то мы получили бы другую температурную шкалу. Например, если разделить интервал $T_1 - T_2$ не на 100, а на 180 градусов (так, чтобы величина градуса совпала с градусом Фаренгейта), то мы получили бы так называемую шкалу Ренкина, по которой вода замерзает при $491,67^\circ$. Эта шкала иногда используется западными учеными.

26.3. Введение энтропии для системы, для которой определена температура

Рассмотрим систему V , для которой определена единная температура. Имеется в виду, что температура всех точек системы одинакова, хотя и может меняться со временем.

Пусть в системе происходит некоторый циклический процесс. За малое время температуру T можно считать постоянной. Пусть за малое время система V получает извне количество тепла dQ .

Будем предполагать, что то, каким способом и откуда система V получает тепло dQ , не имеет значения, важно лишь количество этого тепла. Рассмотрим некоторое большое тело B_0 с температурой T_0 и будем считать, что на всех участках процесса dQ передается системе V с помощью обратимых машин Карно, использующих в качестве резервуаров тепла тепло B_0 и нашу систему. На каждом малом участке процесса машина Карно получает от B_0 количество тепла dQ^0 , а от системы V — количество тепла $(-dQ)$. Согласно соотношению Карно

$$T = -T_0 \frac{-dQ}{dQ^0}.$$

Полное количество тепла Q^0 , которое отдает тело B_0 за весь процесс, равно

$$Q^0 = \oint dQ^0 = T_0 \oint \frac{dQ}{T}. \quad (26.4)$$

После того, как система V и все машины Карно совершили цикл, то есть вернулись к первоначальному состоянию, получим, согласно первому закону термодинамики, следующий результат:

$$Q^0 = A,$$

где A — произведенная или затраченная (это зависит от знака A) работа.

По второму закону термодинамики

$$Q^0 \leq 0.$$

Действительно, если бы было $Q^0 > 0$, то было бы $A > 0$, и мы бы имели устройство, которое работает циклически и превращает в работу тепло, взятое от одного тела B_0 с фиксированной температурой.

Неравенство $Q^0 \leq 0$ с учетом соотношения (26.4), приводит к неравенству

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (26.5)$$

которое должно выполняться для любого циклического процесса в системе V . Это неравенство называют неравенством Клаузиуса.

Если система V совершает обратимый процесс, то он может протекать и в обратную сторону; в обратном процессе на малом его участке система V получает тепло $d\tilde{Q} = -dQ$. Но и для этого обратного процесса верно неравенство Клаузиуса

$$\oint \frac{d\tilde{Q}}{T} \leq 0, \quad \text{то есть} \quad \oint \frac{dQ}{T} \geq 0.$$

Сопоставляя это с неравенством (26.5), получаем, что для обратимого цикла выполняется равенство

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (26.6)$$

Это равенство дает возможность ввести энтропию.

Рассмотрим два состояния A и B системы V и какой-нибудь циклический процесс, который проходит через состояния A и B .

Пусть этот циклический процесс обратим. Представим его как последовательность двух процессов 1 и 2. Тогда

$$\int_{A(1)}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B(2)}^A \frac{dQ}{T} = 0,$$

где первый интеграл берется по процессу 1, а второй по процессу 2. Если процесс 2 провести в обратную сторону, то есть от A к B , то будет

$$\int_{A(1)}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A(2)}^B \frac{dQ}{T},$$

то есть интеграл

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}$$

не зависит от выбора обратимого процесса между состояниями A и B .

Припишем системе V в состоянии A некоторую величину $S(A)$, которую назовем энтропией в состоянии A . Тогда энтропия в состоянии B определяется формулой

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

где интеграл взят по любому обратимому процессу между состояниями A и B . Такое определение энтропии (и само название этой термодинамической функции — от греч. *τροπή* — превращение) было введено Клаузиусом в 1865 году.

Лекция 27

- 27.1. Введение энтропии для системы, состоящей из подсистем с разными температурами
- 27.2. Вывод утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса из утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода
- 27.3. Выражение для притока энтропии извне для объема V сплошной среды
- 27.4. Введение энтропии без предположения о существовании температуры системы
- 27.5. Вывод утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода из утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса

27.1. Введение энтропии для системы, состоящей из подсистем с разными температурами

В классической термодинамике энтропия вводится для систем, температура всех частей которых одинакова. В сплошных средах в общем случае температура в разных точках разная, тогда говорить о температуре конечного объема среды нельзя. Например, что такое температура воздуха в окрестности входящего в атмосферу при возвращении на Землю космического корабля? В один и тот же момент времени температура частиц воздуха у самой поверхности корабля очень высокая (обшивка корабля горит), но уже на некотором расстоянии от корабля она низкая (вспомним объявление в самолете: «Температура за бортом — минус сорок градусов по Цельсию».) В этих случаях разделим рассматриваемый объем среды на малые части так, чтобы температуру можно было в пределах каждой малой части считать одинаковой во всех точках. Так мы приходим к понятию системы, состоящей из подсистем с разными температурами. Путь введения энтропии такой системы по существу повторяет путь введения энтропии для системы с единой температурой.

Итак, рассмотрим систему V , которая состоит из N подсистем V_k с температурами T_k . Пусть система V совершает циклический процесс.

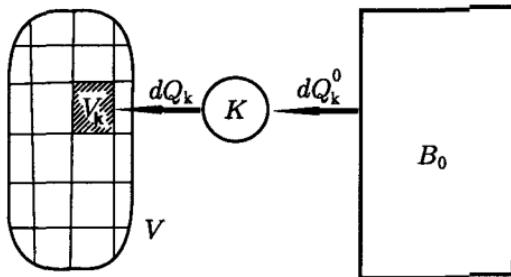


Рис. 27.1. Система V разбита на подсистемы, для которых определены температуры. K — машина Карно

За малое время температуру каждой подсистемы можно считать постоянной, и k -ая подсистема получает извне количество тепла dQ_k . Будем считать, что для подсистем V_k не имеет значения, каким именно способом им передается тепло. Тогда можно представить, что тепло dQ_k подается подсистемам V_k с помощью обратимых машин Карно, использующих в качестве резервуаров тепло эти подсистемы V_k и некоторое одно тело B_0 с постоянной температурой T_0 (рис. 27.1).

Для k -ой обратимой машины Карно, которая получает от подсистемы V_k количество тепла $(-dQ_k)$, а от тела B_0 — количество тепла dQ_k^0 , выполнено соотношение Карно

$$\frac{-dQ_k}{T_k} = -\frac{dQ_k^0}{T_0}.$$

Полное количество тепла Q^0 , отобранное от тела B_0 , равно

$$Q^0 = \oint \sum_{k=1}^N dQ_k^0 = T_0 \oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}.$$

По первому закону термодинамики $Q^0 = A$, где A — работа объединенной системы (V + машины Карно) над внешними телами.

По второму закону термодинамики $A \leq 0$, так как если бы было $A > 0$, то объединенная система представляла бы собой устройство, работающее по циклу и производящее работу только за счет тепла, взятого от одного тела B_0 с фиксированной температурой, что невозможно. Следовательно,

$$\oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} \leq 0. \quad (27.1)$$

Это неравенство Клаузиуса для рассматриваемой системы.

Если процесс, происходящий в системе V , обратимый, то он может протекать и в обратную сторону; в обратном процессе каждая подсистема

получает тепло $d\tilde{Q}_k = -dQ_k$. Но и для этого обратного процесса верно неравенство Клаузиуса

$$\oint \sum_{k=1}^N \frac{d\tilde{Q}_k}{T_k} \leqslant 0, \quad \text{то есть} \quad \oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} \geqslant 0.$$

Сопоставляя это с неравенством (27.1), получаем, что для обратимого цикла выполняется равенство

$$\oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} = 0. \quad (27.2)$$

Из этого равенства следует возможность введения энтропии. А именно, рассмотрим два состояния A и B системы V и какой-нибудь циклический процесс, проходящий через A и B . Пусть этот циклический процесс обратим. Представим его как последовательность двух процессов: процесс 1 — переход от состояния A к состоянию B , и процесс 2 — переход от состояния B к состоянию A .

Равенство (27.2) запишем в виде

$$\int\limits_{A(1)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} + \int\limits_{B(2)}^A \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} = 0 \quad (27.3)$$

где первый интеграл берется по процессу 1, а второй по процессу 2.

Рассмотрим вместо процесса 2 обратный ему процесс 2_- . Тогда из (27.3) следует равенство

$$\int\limits_{A(1)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} = \int\limits_{A(2_-)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k},$$

то есть интеграл $\int\limits_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}$ не зависит от выбора обратимого пути.

Припишем системе в состоянии A некоторую величину $S(A)$, которую назовем энтропией в состоянии A . Энтропия в состоянии B определяется формулой

$$S(B) = S(A) + \int\limits_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}, \quad (27.4)$$

где интеграл $\int\limits_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}$ взят по любому обратимому пути от состояния A к состоянию B .

Если температура всех частей системы одна и та же, $T_k = T$ для любого k , то формула (27.4) переходит в уже полученную в предыдущей лекции формулу

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \frac{dQ}{T}$$

где интеграл взят по любому обратимому пути от состояния A к состоянию B .

27.2. Вывод утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса из утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода

Получим теперь утверждение о возрастании энтропии за счет необратимости процесса, то есть математическую формулировку 3 второго закона термодинамики (см. лекцию 23) из неравенства Клаузиуса, которое было получено из формулировки 2 второго закона о невозможности вечного двигателя второго рода.

Пусть имеем какой-нибудь процесс 1 от состояния A к состоянию B (возможно необратимый). Предположим, что существует также и обратимый процесс 2 перехода от A к B . Рассмотрим цикл, составленный из процесса 1 и процесса 2, проходимого в обратном направлении, то есть цикл $1 + 2_-$. Неравенство Клаузиуса (27.1) дает для этого цикла

$$\int_{A(1)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} + \int_{B(2_-)}^A \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} \leq 0. \quad (27.5)$$

Для процесса 2, в силу того, что он обратим, имеем

$$\int_{B(2_-)}^A \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} = - \int_{A(2)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}$$

$$\int_{A(2)}^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k} = S(B) - S(A).$$

Поэтому неравенство (27.5) переписывается в виде

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}, \quad (27.6)$$

где путь от состояния A к состоянию B произвольный, возможно необратимый. Если же путь обратим, то неравенство превращается в равенство.

Если состояние B близко к состоянию A , то неравенство (27.6) принимает вид

$$dS \geq \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}.$$

Последнее неравенство можно записать и так:

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_i S \geq 0,$$

где $d_e S = \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}$ — приток энтропии извне, а $d_i S \geq 0$ — производство энтропии за счет необратимых процессов внутри системы. Если процесс обратим, то $d_i S = 0$.

27.3. Выражение для притока энтропии извне для объема V сплошной среды

Предыдущие рассуждения позволяют написать выражение для $d_e S$ для объема V сплошной среды, которое постулировалось в лекции 24. Действительно, хотя температура в разных точках объема, вообще говоря, разная, но можно разбить объем на малые частицы, в пределах которых температуру всех точек можно считать одной и той же. При вычислении энтропии учитываем, что притоки тепла к объему могут быть массовые и поверхностные. За счет массового притока тепла к каждой частице с массой ρdV за малое время поступает количество тепла $dq_{\text{масс}} \rho dV$ и, соответственно, количество энтропии

$$\frac{dq_{\text{масс}} \rho dV}{T}.$$

Приток энтропии извне ко всему объему V за счет массового притока тепла за малое время есть

$$\int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{T} \rho dV.$$

Кроме того, тепло к среде может поступать через поверхность. К каждому элементу поверхности $d\sigma$ поступает за время dt количество тепла $(-q_n dt d\sigma)$ и, соответственно, количество энтропии

$$-\frac{q_n dt d\sigma}{T}.$$

Через всю поверхность Σ объема V поступает количество энтропии

$$-\int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma.$$

Итак, приток энтропии извне для объема V сплошной среды за счет притока тепла за время dt есть

$$d_e S = \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{T} \rho dV - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} dt d\sigma. \quad (27.7)$$

Замечание. Кроме притока энтропии за счет притока тепла, возможно поступление энтропии в систему за счет **массообмена** с окружающей средой. Масса в индивидуальный объем может приноситься за счет диффузии. Если среда состоит из молекул разных сортов и происходит диффузия, то молекулы разных сортов переносятся через границы индивидуального объема и переносят с собой свою энтропию. Тогда формула для полного притока энтропии (27.7) содержит дополнительное слагаемое.

Введение энтропии без предположения о температуре системы

27.4. Введение энтропии без предположения о существовании температуры системы

Покажем, как можно ввести энтропию для тел, для которых нельзя ввести температуру даже для их малых частей.

Почему иногда температуру нельзя ввести даже для малых частиц сплошной среды? Для пояснения вспомним, что в молекулярной физике температура определяется как величина, пропорциональная средней кинетической энергии молекул, приходящейся на одну степень свободы молекулы. При этом подразумевается, что а) если среда состоит из молекул разного сорта, то эта величина одинакова для молекул всех сортов; б) для всех степеней свободы молекул (связанных с поступательным движением, вращением и внутренними колебаниями) эта величина одна и та же и в) что распределение молекул по скоростям подчиняется так называемому гауссову закону. Если, например, 100 молекул имеют скорости 500 м/сек, а другие 100 не движутся, то понятие температуры для совокупности этих молекул ввести нельзя.

В механике сплошных сред приходится встречаться с ситуациями, когда средняя кинетическая энергия хаотического движения — разная для разных сортов элементарных частиц, составляющих среду, или разная для разных степеней свободы. Например, в плазме, которая состоит из ионов и электронов, под действием сил легкие электроны разгоняются быстро, а тяжелые ионы — медленно. Возникает разница кинетических энергий ионов и электронов; при этом в некоторых случаях можно ввести отдельно температуру ионов и температуру электронов, то есть две температуры в одной и той же макроскопической частице сплошной среды. Если еще и распределение ионов или электронов неравновесное (не гауссово), то и этих двух температур ввести нельзя. Аналогичная ситуация может возникать в связи с тем, что поступательные степени свободы возбуждаются быстрее, чем колебательные и вращательные. В этих случаях иногда вводят в одной и той же точке среды поступательную, колебательную и вращательную температуры.

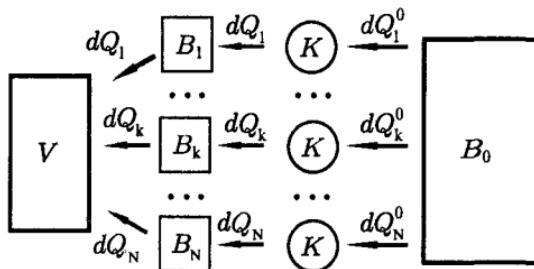


Рис. 27.2. Способ определения энтропии тела V без введения температуры тела. K — машины Карно

Итак, рассмотрим некоторое тело V , для которого неизвестно, можно ли ввести температуру (тело V — «черный ящик»), но известно, что в некотором процессе это тело получает тепло от N внешних тел B_k , для которых понятие температуры определено. Покажем, как можно ввести энтропию тела V . Пусть тело V совершает циклический процесс, на малом участке процесса тела B_k отдают, а тело V получает от них количества тепла dQ_k , при этом температура тел B_k равна $T_k^{(e)}$. Индекс « e » в обозначении температуры подчеркивает, что это температуры внешних тел, а не частей тела V .

Присоединим к системе V и телам B_k еще одно тело B_0 с температурой T_0 и набор обратимых машин Карно, которые используют в качестве резервуаров тепла тела B_0 и B_k , забирают некоторое количество тепла dQ_k^0 от тела B_0 и отдают телам B_k ровно столько тепла, сколько тела B_k отдают системе V , то есть машины Карно получают $(-dQ_k)$ (рис. 27.2). Рассмотрим процесс в объединенной системе: $V + B_k +$ набор обратимых машин Карно $+ B_0$. После того, как тело V и машины Карно совершили циклический процесс, получаем, что V и рабочие тела машин Карно вернулись в исходное состояние; тела B_k сколько отдали тепла, столько получили, то есть тоже не изменились. Тело B_0 отдало количество тепла

$$Q^0 = \oint \sum_{k=1}^N dQ_k^0.$$

При этом для каждой машины Карно выполнено равенство

$$\frac{-dQ_k}{T_k^{(e)}} = -\frac{dQ_k^0}{T_0}.$$

Поэтому

$$Q^0 = T_0 \oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}}.$$

По первому закону термодинамики

$$Q_0 = A,$$

где A — работа, совершенная объединенной системой, из которой исключили тело B_0 (оно могло взаимодействовать с какими-то третьими телами, для наших рассуждений это не важно). По второму закону термодинамики эта работа не может быть положительной,

$$A \leq 0.$$

Следовательно

$$\oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}} \leq 0. \quad (27.8)$$

Если цикл обратимый, то это неравенство переходит в равенство

$$\oint \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}} = 0.$$

Это равенство выполнено для любого обратимого цикла, поэтому для любого обратимого пути от A к B интеграл

$$\int_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}}$$

не зависит от пути.

Тогда, если ввести произвольно некоторую величину $S(A)$ и назвать ее энтропией тела V в состоянии A , то энтропия тела V в состоянии B определяется формулой

$$S(B) = S(A) + \int_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}} \quad (27.9)$$

где интеграл берется по произвольному обратимому процессу от A к B .

При этом из неравенства (27.8) следует, что для любого, в том числе и необратимого процесса между A и B

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k^{(e)}}. \quad (27.10)$$

Для малого участка процесса получаем

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_e S = \sum_{k=1}^N \frac{dQ_k}{T_k}, \quad d_i S \geq 0. \quad (27.11)$$

Заметим, что формулы (27.8)–(27.11) аналогичны полученным ранее формулам для случая, когда V состоит из подсистем, для которых температура определена. Разница состоит в том, что в формулы (27.8)–(27.11) входит температура внешних тел, а не температура частей самой системы V .

27.5. Вывод утверждения о невозможности вечного двигателя второго рода из утверждения о возрастании энтропии за счет необратимости процесса

Получим физическую формулировку второго закона термодинамики о невозможности вечного двигателя второго рода из математической формулировки, содержащей понятие энтропии. Проведем рассуждение от противного. Пусть существует вечный двигатель второго рода, то есть система, которая работает по циклу и производит положительную работу $A > 0$ за счет тепла Q^0 , взятого от резервуара с температурой T_0 , причем $Q^0 = A > 0$. Так как система может быть любой, то воспользуемся математической формулировкой (27.11). Для циклического процесса, который происходит в «вечном двигателе»,

$$\oint dS = \oint d_e S + \oint d_i S = 0,$$

то есть

$$\oint d_i S = - \oint d_e S = -\frac{Q^0}{T_0} < 0.$$

Таким образом, из предположения, что $A = Q^0 > 0$, получилось, что производство энтропии отрицательно, что противоречит математической формулировке (27.11).

Замечание о диссипации энергии. Поясним, что имеется в виду, когда говорят, что в необратимых процессах происходит диссипация энергии. Пусть, например, имеем систему с температурой T . Рассмотрим два процесса от состояния A к состоянию B : обратимый и необратимый; ниже обратимому процессу соответствует обозначение \circ , а необратимому — n . По второму закону термодинамики

$$\int_{A(\text{n})}^B \frac{dQ}{T} \leq \int_{A(\circ)}^B \frac{dQ}{T}.$$

Следовательно, если система проходит через одни и те же значения температуры, то в необратимом процессе система получает меньше тепла извне, и, следовательно, мы получаем меньше работы, чем при обратимом процессе. Поэтому говорят о диссипации механической энергии в необратимом процессе.

Лекция 28

28.1. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах

28.2. Тангенциальные разрывы и ударные волны

28.1. Условия на поверхностях сильного разрыва в сплошных средах

Под поверхностями разрыва понимаются поверхности, на которых сплошность среды не нарушается, но либо параметры среды (скорость, давление и т. д.) терпят разрыв (так называемые сильные разрывы), либо только производные от параметров среды терпят разрыв (так называемые слабые разрывы).

Условия на поверхности разрыва — это соотношения, которые связывают параметры среды и (или) их производные по разные стороны поверхности разрыва.

Сильными разрывами являются, в частности, поверхности раздела двух сред, например поверхность воды в море. Она разделяет воду и воздух, на этой поверхности, в частности, плотность терпит разрыв. Другим примером поверхностей сильного разрыва являются так называемые ударные волны, которые возникают, в частности, при взрыве. В результате взрыва по окружающей среде распространяется фронт — некоторая поверхность, такая, что впереди нее среда еще покойится, а непосредственно за ней — движется (разлетается, от места взрыва); если взрыв произошел, например, в воздухе, то плотность, давление и температура за фронтом существенно выше, чем перед ним. Таким образом, на фронте скорость, плотность, давление и температура терпят разрыв. Если взрыв произошел в твердой деформируемой среде, например в грунте или в металле, то на фронте скачком меняются скорость, плотность, компоненты вектора напряжений и другие параметры. Ударные волны образуются также при движении самолетов с большими скоростями.

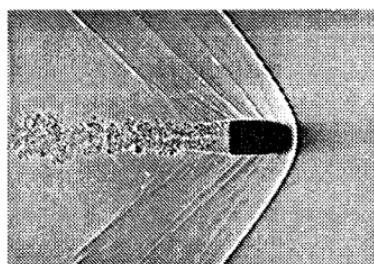


Рис. 28.1. Теневая фотография пули, летящей в воздухе со сверхзвуковой скоростью. Видны ударные волны — поверхности резкого изменения плотности воздуха

Получим условия на поверхностях сильного разрыва, следующие из **законов сохранения**. Сначала выпишем все законы сохранения для индивидуального объема сплошной среды.

Закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \rho dV = 0. \quad (28.1)$$

Закон сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \vec{v} \rho dV = \int_V \vec{F} \rho dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\sigma. \quad (28.2)$$

Закон сохранения момента количества движения:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} ([\vec{r} \times \vec{v}] + \vec{k}) \rho dV = \\ & = \int_V [\vec{r} \times \vec{F}] \rho dV + \int_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{P}_n] d\sigma + \int_V \vec{h} \rho dV + \int_{\Sigma} \vec{M}_n d\sigma. \end{aligned} \quad (28.3)$$

Закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \rho dV = \int_V (\vec{v} \cdot \vec{F}) \rho dV + \int_{\Sigma} (\vec{v} \cdot \vec{P}_n) d\sigma + \\ & + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \frac{dq_{\text{масс}}^{**}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} q_n^{**} d\sigma. \end{aligned} \quad (28.4)$$

Второй закон термодинамики:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} s \rho dV = \int_V \frac{1}{T} \frac{dq_{\text{масс}}}{dt} \rho dV - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\sigma + \frac{d_i S}{dt}, \quad \frac{d_i S}{dt} \geq 0. \quad (28.5)$$

Отметим, что все соотношения (28.1)–(28.5) имеют одинаковую форму

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{инд}}} A dV = \int_V B dV + \int_{\Sigma} C_n d\sigma, \quad (28.6)$$

(пока не обращаем внимания на то, что соотношение (28.5) содержит дополнительное слагаемое).

Например, в законе сохранения массы $A = \rho$, $B = 0$, $C_n = 0$; в законе сохранения количества движения $A = \rho \vec{v}$, $B = \rho \vec{F}$, $C_n = \vec{P}_n$. Поэтому в дальнейших выкладках будем использовать общее соотношение (28.6).

Получим сначала условия на поверхности разрыва в системе координат, относительно которой рассматриваемая часть поверхности разрыва неподвижна.

Отметим, что поверхности разрыва вообще могут двигаться, причем разные точки поверхности движутся с разными скоростями (например, поверхность волн в море, или взрывая волна). Мы будем проводить вы-

кладки, пользуясь инерциальной системой координат, скорость которой равна скорости поверхности в рассматриваемой точке в данный момент времени. Тогда поверхность в малой окрестности этой точки в течение малого времени будет в этой системе неподвижна.

Идея вывода условий на поверхности разрыва такова. Рассматриваем некоторую точку поверхности разрыва. Выделяем малый цилиндрический объем среды V , включающий часть $\Delta\sigma$ поверхности разрыва, содержащую данную точку (см. рис. 28.2). Записываем соотношение (28.6) для этого малого объема, а затем переходим к пределу при стягивании объема в рассматриваемую точку.

Рис. 28.2. Поверхность разрыва Π и малый цилиндрический объем, включающий участок $\Delta\sigma$ этой поверхности (вид сбоку)

Проведем этот вывод. Предварительно преобразуем соотношение (28.6), используя формулу дифференцирования по t интеграла по подвижному объему:

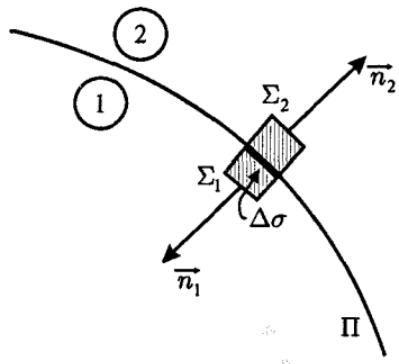
$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{под}}} A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} A v_n d\sigma.$$

Эта формула верна, если $\partial A / \partial t$ и $A v_n$ существуют. При этом они могут быть разрывны. Мы будем применять эту формулу к объему, разные части которого лежат по разные стороны поверхности разрыва, считая, что A , v непрерывны и дифференцируемы по обе стороны поверхности разрыва (см. рис. 28.2). Так как поверхность разрыва неподвижна, то локальная производная $\partial A / \partial t$ по обе стороны от нее существует. Соотношение (28.6) принимает вид

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{\Sigma} A v_n d\sigma = \int_V B dV + \int_{\Sigma} C_n d\sigma. \quad (28.7)$$

Применим полученное соотношение к объему V в виде малого цилиндра (рис. 28.2).

Будем обозначать индексами «1», «2» параметры по разные стороны поверхности разрыва. Торцы малого цилиндра обозначим через Σ_1 и Σ_2 .



Площади этих торцов равны $\Delta\sigma$. Перейдем в соотношении (28.7) к пределу при стремлении высоты цилиндра V к нулю. Если подынтегральные функции конечны, то интегралы по объему и по боковой поверхности цилиндра стремятся при этом к нулю. В пределе ненулевыми (в общем случае) останутся только интегралы по торцам Σ_1 и Σ_2 :

$$\int_{\Sigma_1} Av_n d\sigma + \int_{\Sigma_2} Av_n d\sigma = \int_{\Sigma_1} C_n d\sigma + \int_{\Sigma_2} C_n d\sigma.$$

Используем теорему о среднем, делим на площадь торцов $\Delta\sigma$ и устремляем $\Delta\sigma$ к нулю. Получаем:

$$(Av_n)_1 + (Av_n)_2 = (C_n)_1 + (C_n)_2. \quad (28.8)$$

В этом соотношении \vec{n}_1, \vec{n}_2 — внешние по отношению к объему V нормали к торцам Σ_1, Σ_2 соответственно. Обозначим теперь через \vec{n} — нормаль к поверхности разрыва, направленную в сторону 2. Тогда $\vec{n}_2 = \vec{n}, \vec{n}_1 = -\vec{n}, (v_n)_1 = -v_{n1}, (v_n)_2 = v_{n2}, (C_n)_1 = -C_{n1}, (C_n)_2 = C_{n2}$ и соотношение (28.8) примет вид

$$-A_1 v_{n1} + A_2 v_{n2} = -C_{n1} + C_{n2}. \quad (28.9)$$

Подставляя в соотношение (28.9) значения A и C_n , соответствующие законам сохранения (28.1)–(28.5), получим следующие соотношения, которые называются **условиями на поверхности сильного разрыва**:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} = m; \quad (28.10)$$

$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{P}_{n2} - \vec{P}_{n1}; \quad (28.11)$$

$$m \left(([\vec{r} \times \vec{v}_2] + \vec{k}_2) - ([\vec{r} \times \vec{v}_1] + \vec{k}_1) \right) = [\vec{r} \times (\vec{P}_{n2} - \vec{P}_{n1})] + \vec{M}_{n2} - \vec{M}_{n1}; \quad (28.12)$$

$$m \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \right) = (\vec{v}_2 \cdot \vec{P}_{n2}) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{P}_{n1}) - q_{n2} + q_{n1} - q_{n2}^{**} + q_{n1}^{**}; \quad (28.13)$$

$$m(s_2 - s_1) = -\frac{q_{n2}}{T_2} + \frac{q_{n1}}{T_1} + \Omega, \quad \Omega \geq 0. \quad (28.14)$$

Эти условия выполнены в системе координат, относительно которой поверхность разрыва в рассматриваемый момент времени неподвижна.

Заметим, что соотношения, непосредственно получающиеся из законов сохранения (28.2)–(28.5) описанным выше способом, имеют несколько другую форму. Чтобы привести их к форме (28.11)–(28.14), мы использовали равенство (28.10), следующее из закона сохранения массы. Например, из закона сохранения количества движения сначала получаем

$$\rho_2 \vec{v}_2 v_{n2} - \rho_1 \vec{v}_1 v_{n1} = \vec{P}_{n2} - \vec{P}_{n1},$$

но в силу (28.10)

$$\rho_2 \vec{v}_2 v_{n2} - \rho_1 \vec{v}_1 v_{n1} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Каков физический смысл m ? Величина $|m|$ равна массе, проходящей через единицу площади поверхности разрыва в единицу времени.

Обсудим соотношение (28.14). Каков физический смысл величины Ω и откуда появляется эта величина? Она равна пределу величины скорости производства энтропии в единицу времени в рассматриваемом малом цилиндрическом объеме d_iS/dt , деленной на $\Delta\sigma$, когда объем стягивается в точку. Следовательно, Ω — это производство энтропии на поверхности разрыва в единицу времени в расчете на единицу площади поверхности. Производство энтропии на поверхности разрыва во многих случаях действительно происходит. Дело в том, что на самом деле поверхность разрыва представляет собой узкую зону, где параметры среды меняются резко, просто мы моделируем эту зону математической поверхностью. Так как параметры в этой узкой зоне меняются резко, то необратимые процессы, связанные, например, с теплопроводностью и вязкостью, существенны и, значит, происходит производство энтропии.

Соотношения (28.10)–(28.14) написаны в системе координат, относительно которой поверхность неподвижна, то есть \vec{v} — это скорость среды относительно поверхности разрыва. Чтобы получить условия на поверхности разрыва в системе координат, относительно которой поверхность разрыва в рассматриваемой точке движется со скоростью \vec{D} , надо в них заменить \vec{v} на $\vec{v} - \vec{D}$. Нетрудно проверить, что первое из условий примет вид

$$\rho_1(v_{n1} - D_n) = \rho_2(v_{n2} - D_n) = m,$$

а остальные соотношения не изменятся. Величина $|m|$, как и прежде, равна массе, проходящей через единицу площади поверхности разрыва в единицу времени.

28.2. Тангенциальные разрывы и ударные волны

Тангенциальным разрывом называется поверхность, разделяющая две части среды или две разные среды, если частицы не переходят с одной стороны этой границы раздела на другую. Это выполнено, если

$$v_{n1} = D_n, \quad v_{n2} = D_n, \quad \text{то есть} \quad m = 0.$$

Следовательно, нормальная составляющая скорости среды на тангенциальном разрыве непрерывна; разрыв может терпеть только тангенциальная составляющая скорости среды. С этим связано название таких разрывов. Частным случаем тангенциальных разрывов являются так называемые **контактные разрывы**, на которых непрерывна не только нормальная, но и касательная составляющая скорости.

Итак, на тангенциальных разрывах $m = 0$. Из общих условий (28.10)–(28.10) следует, что на тангенциальных разрывах должны выполняться соотношения:

$$v_{n1} = v_{n2} = D_n; \tag{28.15}$$

$$\vec{P}_{n1} = \vec{P}_{n2}; \quad (28.16)$$

$$\vec{M}_{n1} = \vec{M}_{n2}; \quad (28.17)$$

$$(\vec{v}_2 \cdot \vec{P}_{n2}) - (\vec{v}_1 \cdot \vec{P}_{n1}) = q_{n2} + q_{n2}^{**} - q_{n1} - q_{n1}^{**}; \quad (28.18)$$

$$-\frac{q_{n2}}{T_2} + \frac{q_{n1}}{T_1} + \Omega = 0, \quad \Omega \geq 0. \quad (28.19)$$

При этом значения плотностей ρ_1, ρ_2 , скоростей \vec{v}_1, \vec{v}_2 , плотностей собственного момента количества движения \vec{k}_1, \vec{k}_2 , внутренней энергии u_1, u_2 и энтропии s_1, s_2 сред, находящихся по разные стороны границы раздела (тangenциального разрыва) могут быть, вообще говоря, произвольными.

Условия (28.15)–(28.19) показывают, в частности, что же именно можно задать в качестве граничных условий на границах сред. Например, из условия (28.16) видно, что вектор напряжений на поверхности среды задать можно, потому что он равен вектору напряжений во внешней среде; граничное условие в виде задания вектора напряжений на границе можно и нужно ставить в тех задачах, в которых распределение внешних сил на границе задано. Подчеркнем, однако, что в силу соотношений (28.16) мы можем задать условия лишь на те компоненты тензора напряжений в рассматриваемой среде, через которые вычисляется \vec{P}_n . Остальные компоненты тензора напряжений в среде на границе раздела задавать нельзя: они не связаны явными соотношениями с силами, действующими со стороны внешней среды. Рассмотрим, например, горизонтальную пластину $-h/2 \leq z \leq h/2$, которая растягивается силами, приложенными на ее торцах, а поверхности пластины $z = -h/2$ и $z = h/2$ свободны от нагрузок (z — вертикальная декартова координата). Тогда согласно соотношениям (28.16) граничные условия на нижней и верхней поверхностях пластины (нормаль к которым параллельна оси z) имеют вид

$$p_{xz} = p_{yz} = p_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm \frac{h}{2}.$$

Значения остальных компонент тензора напряжений на нижней и верхней поверхностях пластины задать нельзя. Они определяются из решения задачи и, вообще говоря, отличны от нуля.

Поверхность разрыва называется **ударной волной**, если нормальная составляющая скорости среды разрывна, а это значит, что $m \neq 0$, то есть **частицы переходят с одной стороны поверхности на другую, или, что то же, поверхность разрыва движется по частицам среды**. Типичным примером ударных волн являются взрывные волны, а также ударные волны, образующиеся перед летящими со сверхзвуковыми скоростями самолетами и ракетами. Условия на ударных волнах имеют общий вид (28.10)–(28.14).

Замечание 1. Иногда на поверхности разрыва могут быть источники массы, могут действовать внешние по отношению к среде поверхностные силы и пары, а также существовать притоки энергии извне. Если, например, имеется поток воды сквозь

тающую ледяную решетку и мы моделируем эту решетку как поверхность разрыва, то в соотношение (28.10) мы должны дополнительно включить массу, поступающую в поток из решетки. При изучении работы воздушного пропеллера последний может моделироваться как поверхность разрыва, через которую движется воздух. Тогда в условиях на этой поверхности нужно учесть силы и притоки энергии от пропеллера к воздуху. Дополнительный член может появиться в условии (28.16) за счет поверхностного натяжения, если поверхность разрыва разделяет две различные жидкости или жидкость и газ. Если эта поверхность искривлена, то поверхностное натяжение дает результатирующую силу, которая должна быть учтена в (28.16).

Замечание 2. Понятие скорости поверхности разрыва \vec{D} требует некоторого обсуждения. Если поверхностью разрыва моделируется некоторое материальное тело (например, винт пропеллера, скрепленный с летящим самолетом), то скорость \vec{D} есть скорость точек этого тела. Если же поверхность разрыва — это просто геометрическая поверхность (на которой терпят разрыв некоторые параметры среды), — а это, как правило, так, то мы можем говорить лишь о скорости перемещения поверхности по нормали к ней: малое перемещение по касательной не меняет форму и положение поверхности. Тогда $\vec{D} = D\vec{n}$, где \vec{n} — нормаль к поверхности.

Замечание 3. В некоторых случаях для получения единственного решения задачи требуется использовать, кроме соотношений (28.10)–(28.14), дополнительные соотношения на поверхностях разрыва, которые выводятся не из законов сохранения, а из других физических условий.

Список обозначений

- \vec{a} — вектор ускорения
- c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении
- c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме
- dA — работа за время dt
- dq — количество тепла, поступающего к системе за время dt в расчете на единицу массы
- dq' — некомпенсированное тепло в расчете на единицу массы
- $\frac{ds}{dt}$ — скорость производства энтропии в расчете на единицу массы
- $d\sigma$ — элемент площади
- dV — элемент объема
- e_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций
- \vec{g} — ускорение силы тяжести
- g_{ij} — компоненты метрического тензора
- \vec{k} — вектор собственного момента количества движения в расчете на единицу массы
- \vec{n} — вектор нормали
- p — давление
- p_{ij} — компоненты тензора напряжений
- \vec{q} — вектор потока тепла
- s — энтропия единицы массы
- t — время
- u — внутренняя энергия единицы массы
- \vec{v} — вектор скорости
- \vec{w} — вектор перемещения
- x^i — координаты
- D — скорость поверхности разрыва
- E — модуль Юнга
- \vec{F} — плотность массовых сил
- M_{ij} — компоненты тензора моментных напряжений

- \vec{P}_n — вектор напряжений
 R — газовая постоянная
 S — энтропия
 T — абсолютная температура
 U — внутренняя энергия
 V — объем
 γ — показатель адиабаты, отношение c_p/c_V
 δ_{ij}, δ_j^i — символы Кронекера
 ε_{ij} — компоненты тензора деформаций
 λ — один из коэффициентов вязкости; один из упругих коэффициентов
 μ — коэффициент вязкости; один из упругих коэффициентов
 ν — коэффициент кинематической вязкости
 ∇_i — ковариантная производная по x^i
 \wp — давление
 σ — коэффициент Пуассона
 τ^{ij} — компоненты тензора вязких напряжений
 φ — потенциал скорости
 ξ^i — лагранжевые координаты
 η — коэффициент полезного действия машины Карно
 $\vec{\omega}$ — вектор вихря
 Γ — циркуляция скорости
 Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля
 $\vec{\omega}_i$ — ковариантные векторы базиса
 $\vec{\omega}^i$ — контравариантные векторы базиса
 $\dot{\vec{\omega}}_i$ — векторы базиса лагранжевой системы координат в начальном состоянии среды
 $\widehat{\vec{\omega}}_i$ — векторы базиса сопутствующей лагранжевой системы координат в конечном (деформированном) состоянии среды

Литература

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
2. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 272 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
5. Дроздова Ю. А., Эглит М. Э. Механика сплошных сред. Теория и задачи. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2010. 288 с.
6. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 312 с.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз. Ч. 1. 1963. 583 с. Ч. 2. 1963. 727 с.
8. Кубо Р. Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
10. Лоренц Г. А. Лекции по термодинамике. М.: Гостехтеориздат, 1941
11. Мак-Конелл А. Дж. Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
12. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. 3-е изд. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010. 320 с.
13. Механика сплошных сред в задачах / Под ред. М. Э. Эглит. М.: Изд-во Московский лицей. Т. 1. 1996. 396 с. Т. 2. 1996. 396 с.
14. Победря Б. Е. Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 264 с.
15. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
16. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: ИЛ, 1963. 311 с.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2 т. 6-е изд. М.: Лань. Т. 1. 2004. 528 с. Т. 2. 2004. 560 с.
18. Сокольников И. С. Тензорный анализ, теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. 3-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2010. 376 с.
19. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.

Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов.

Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.

Пфейффер П. Колебания упругих тел.

Геккелер И. В. Статика упругого тела.

Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости.

Георгиевский Д. В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел.

Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.

Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва.

Петкович В. В. Основы механики сплошных сред.

Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости.

Рекач В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости.

Рекач В. Г. Статический расчет тонкостенных пространственных конструкций.

Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения.

Парトン В. З. Механика разрушения: От теории к практике.

Парトン В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. В 2 кн.

Каплун А. Б. и др. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство.

Морозов Е. М. и др. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения.

Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи механики разрушения.

Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения.

Колесников Ю. В., Морозов Е. М. Механика контактного разрушения.

Морозов Е. М., Солнцев С. С. Разрушение стекла.

Сапунов В. Т. Классический курс сопротивления материалов в решениях задач.

Серия «Физико-математическое наследие: физика (механика)»

Сокольников И. С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред.

Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.

Вебстер А. Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. В 2 т.

Вилля А. Теория вихрей.

Кирпичев В. Л. Беседы о механике.

Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры.

Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике.

Френкель Я. И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (499) 135–42–16, 135–42–46
или электронной почтой URSS@URSS.ru
Полный каталог изданий представлен
в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

**Научная и учебная
литература**

Об авторе



Маргарита Эрнестовна ЭГЛИТ

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова и кафедры нефтегазовой и подземной гидромеханики Российской государственной университета нефти и газа им. И. М. Губкина. Окончила Московский государственный университет. Член Национального комитета по теоретической и прикладной механике, Московского математического общества, Российской национальной гляциологической ассоциации и др. Автор более 160 научных публикаций, в том числе одной монографии и семи учебников. Лауреат Ломоносовской премии первой степени за цикл научных работ, а также ряда премий за лучшие публикации в научных журналах. Читает лекции по курсам «Основы механики сплошных сред», «Классические модели сплошных сред», «Механика сплошных сред» и специальным курсам по математическому моделированию природных потоков.

ученых работ, а также ряда премий за лучшие публикации в научных журналах. Читает лекции по курсам «Основы механики сплошных сред», «Классические модели сплошных сред», «Механика сплошных сред» и специальным курсам по математическому моделированию природных потоков.

Наше издательство предлагает следующие книги:



7564 ID 103743

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



9 785397 014762

Тел./факс: 7 (499) 135-42-16

Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>



E-mail:
URSS@URSS.ru

Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>