

## РЕЗЮМЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ СТАТЬИ

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

# Экзотические состояния в простой сети нанoeлектромеханических осцилляторов

Мэтью Х. Мэтини, Джеффри Эменхайзер, Уоррен Фон, Эйрли Чепмен, Анастасия Салова, Мартин Роден, Джарвис Ли, Матиас Худоба де Бадын, Мартон Посфай, Леонардо Дуэнас-Осорио, Мехран Месбахи, Джеймс П. Кратчфилд, М. К. Кросс, Райсса М. Д'Соуза, Майкл Л. Рукс\*

**ВВЕДЕНИЕ:** Важнейшей научной задачей современности является понимание и управление сетями. Общие исследования сетей

являются важными для различных дисциплин, включая материаловедение, неврологию, электротехнику и микробиологию. На сегодняшний день большинство исследований являются наблюдательными или "нисходящими", полагаясь на феноменологические модели поведения узлов, выведенные из данных, полученных в результате наблюдений за всей сетью. С другой стороны, синхронизация осцилляторов представляет собой популярную экспериментальную парадигму "снизу вверх" для изучения поведения сети. Синхронизация происходит, когда большое количество осцилляторов сети стремятся к фазовой синхронизации и достижению глобального консенсуса, несмотря на наличие

внутреннего беспорядка (например, различия в частотах осцилляторов). Однако состояние глобального консенсуса - это не единственная динамика.

состояние, проявляющееся в сетях связанных осцилляторов. В недавней работе были обнаружены долгоживущие состояния, которые спонтанно нарушают невытекающие симметрии сети, даже если составляющие ее узлы идентичны. Понимание механизмов, лежащих в основе этой экзотической динамики, нарушающей симметрию, будет полезно для науки о сетях и инженерии. Для проведения экспериментальных исследований с беспрецедентным контролем и разрешением мы разработали осцилляторную сеть на основе нелинейных нанoeлектромеханических систем (НЭМС).

**ОБОСНОВАНИЕ:** Сложная динамика осцилляторов возникает в самых разных условиях. Предыдущие экспериментальные исследования нарушения симметрии в сетях осцилляторов демонстрировали такое сложное поведение только при использовании сложных механизмов связи, разработанных для этой цели. В отличие от этого, в реальных сетях часто доминируют простые связи, поэтому предыдущие экспериментальные результаты не могут быть легко обобщены. В данном случае наблюдается возникновение экзотических состояний в сетях осцилляторов NEMS, которые выходят за пределы слабой связи в простых условиях.

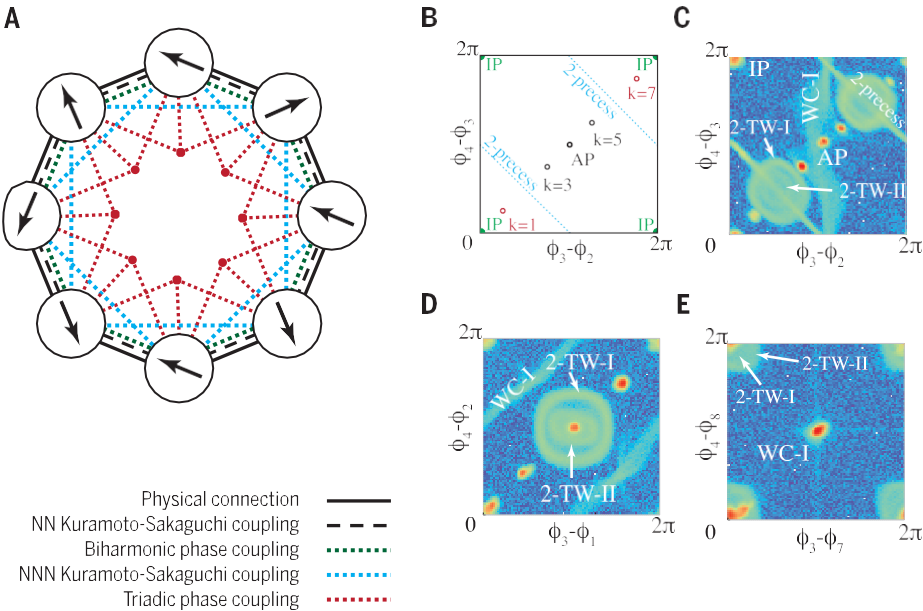
**РЕЗУЛЬТАТЫ:** Используя ар-луча связанных нелинейных осцилляторов NEMS, мы наблюдали спонтанное нарушение симметрии в простой и общей сетевой установке. Эти НЭМС осцилляторные узлы были сделаны практически идентичными, а их самые быстрые динамические временные шкалы были достаточно короткими, чтобы генерировать большие наборы данных, позволяющие проводить наблюдения и статистический анализ экзотических, медленно возникающих сетевых явлений. Кроме того, НЭМС очень стабильны, поэтому переходные эффекты в сети могли релаксировать в пределах экспериментальных временных шкал. Мы подробно изучили динамику сети во всем пространстве параметров и экспериментально показали, что простая сеть осцилляторов может воспроизводить предсказания теоретических моделей с явными сложными взаимодействиями. Мы полностью объяснили эти явления, применив фазовое приближение высшего порядка к полной модели осцилляторов. В качестве убедительного доказательства аргумента о нарушении симметрии мы определили подгруппы симметрии, связанные с каждым состоянием.

Читайте полный текст статьи на сайте <http://dx.doi.org/10.1126/science.aav7932>

Состояния, стабилизированные эмерджентными взаимодействиями. (А) Сеть осцилляторов, показывающая физические связи и возникающие фазовые взаимодействия. NN - ближайший сосед; NNN - следующий ближайший сосед. (В) Стабильные неподвижные точки для состояний без изменений величины. Цвета соответствуют цветам взаимодействий из (А), необходимых для стабильности. (С - Е) Экспериментальные тепловые карты данных временной области для различных комбинаций разности фаз (с использованием тех же данных). Экзотические состояния появляются в виде полос на графиках (2-precess, WC-I, 2-TW-I, 2-TW-II).

Matheny et al., Science 363, 1057

(2019)8 марта 2019



ЗАКЛЮЧЕНИЕ: Наши результаты показывают, что реальные осцилляторные сети демонстрируют сложные и экзотические состояния системы без необходимости сложных взаимодействий. Наши результаты могут быть применены в наблюдательных исследованиях поведения естественных или сконструированных осцилляторных сетей. Эта работа четко проясняет, как 16-мерная система, состоящая из восьми осцилляторов с большой фазой, распадается на синхронизированные состояния, которые развиваются в подпространствах более низкой размерности. Реальные сети на основе нашей нелинейной формы осцилляторов NEMS позволят глубже понять механизмы, с помощью которых такое поведение возникает в более сложных топологиях в еще больших масштабах сети.

Список affiliаций авторов доступен в полной версии статьи в Интернете.  
\*Корреспондирующий автор. Email: roukes@caltech.edu Cite this article as M. H. Matheny et al., Science 363, eaav7932 (2019). DOI: 10.1126/science.aav7932

из 1

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
айт  
а  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.

## НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

# Экзотические состояния в простой сети нанoeлектромеханических осцилляторов

Matthew H. Matheny<sup>1,2</sup>, Jeffrey Emenheiser<sup>3,4</sup>, Warren Fon<sup>1,2</sup>,  
Эйрли Чепмен<sup>5</sup>, Анастасия Салова<sup>3,4</sup>, Мартин Роден<sup>4,6</sup>, Джарвис Ли<sup>2,7</sup>,  
Матиас Худоба де Бадын<sup>8</sup>, Мартон Посфай<sup>4,6</sup>, Леонардо Дуэнас-Осорио<sup>9</sup>, Мехран Месбахи<sup>8</sup>, Джеймс П. Кратчфилд<sup>3,4,10</sup>, М. К. Кросс<sup>1</sup>,  
Raissa M. D'Souza<sup>4,6,10,11</sup>, Michael L. Roukes<sup>1,2,7,12</sup> \*.

Синхронизация осцилляторов - явление, встречающееся в самых разных природных и инженерных системах, - обычно понимается через сведение к фазовой модели первого порядка с упрощенной динамикой. Здесь, используя точность и гибкость нанoeлектромеханических систем, мы изучили динамику кольца квазисинусоидальных осцилляторов на уровне первого порядка и за его пределами. За пределами первого порядка мы обнаружили экзотические состояния синхронизации с очень сложной динамикой, включая слабые химеры, разобщенные состояния, бегущие волны и неоднородные синхронизированные состояния. С помощью теории и эксперимента мы показали, что эти экзотические состояния зависят от сложных взаимодействий, возникающих в сетях с простой линейной связью ближайших соседей. Эта работа дает представление о динамическом богатстве сложных систем со слабыми нелинейностями и локальными взаимодействиями.

Между тем взаимное увлечение взаимодействующих осцилляторов возникает как в природных (1-3), так и в инженерных системах (4-10). Связанные с этим явления варьируются от простых запертых состояний, в которых все осцилляторы имеют одинаковую фазу, до общей динамики неоднородных фазовых конфигураций, связанных с формированием паттерна (11). Для изучения этих явлений мы использовали осцилляторы, сформированные из нанoeлектромеханических систем (НЭМС), представляющих собой гибриды электронных и механических степеней свободы. Мы использовали возможности высокоскоростной электроники, обеспечивающей индивидуальное считывание и управление, для создания систем

с минимальным расстройством параметров. Эти инновации позволяют нам провести детальное сравнение теоретических моделей. Мы исследовали динамику кольца из восьми

для быстрого сбора больших наборов данных, которые уменьшают статистические ошибки и позволяют обнаружить явления, развивающиеся в очень больших временных масштабах. Эта система позволила нам изучить тонкие аспекты сложной динамики, учитывая возможность контролировать узлы и ребра в большом диапазоне параметров (15-17), одновременно имея все степени свободы в реальном времени. Например, мы можем гасить систему, чтобы исследовать аттракторы, которые вряд ли могут быть найдены при заданных начальных условиях.

Основополагающей моделью синхронизации является уравнение Курамото (18, 19), которое описывает

сеть из  $N$  осцилляторов с фазами  $\theta_j$  и частоты  $\omega_j$  и уравнения движения  $\dot{\theta}_j = \omega_j + \sum_{j'} K_{jj'} \sin(\theta_j - \theta_{j'})$ . Предельные циклические осцилляторы НЭМС с линейной связью "ближайший сосед". По

Оптоэлектронные осцилляторы (24) или электронные осцилляторы (25), специализированная межосцилляторная или внутрисосцилляторная обратная связь не была необходима для точной настройки параметров сети для создания этих экзотических состояний. В отличие от этого, мы показываем, что квазисинусоидальные осцилляторы с линейной связью между ближайшими соседями, чуть выше предела слабой связи, достаточны для проявления экзотических состояний.

Предыдущие исследования нарушения симметрии осцилляторных сетей фокусировались на объяснении экзотической динамики с использованием либо фазовых моделей с явным бигармоническим взаимодействием фаз, либо сложных амплитудных моделей с нелинейной связью узловых амплитуд (26-29). Используя модель с линейной ближайшей соседней связью комплексных амплитуд, мы показываем, как расширение параметра связи дает приближение для динамики фаз осциллятора с возникающими бигармоническими, ближайшими соседними и триадическими фазовыми взаимодействиями. Этого расширения оказалось достаточно, чтобы получить почти все экзотические состояния, которые мы наблюдаем. Возникающие свойства находятся в грубом количественном согласии с экспериментами и с полной моделью (которая описывает комплексные амплитуды). Наши результаты показывают, что экзотические нарушения симметрии и динамика гораздо более распространены, чем это предполагалось ранее, и должны иметь непосредственное отношение к биологическим или социально-технологическим сетям с низкой связностью, сформированным из пар. мудрые линейные взаимодействия.

Модель связанного нанoeлектромеханического осциллятора

Наша система может быть описана связанным набором из  $N$  насыщенных осцилляторов (17, 30-32) с уравнениями движения для комплексных амплитуд  $A_j$  каждого осциллятора  $j$ , заданными:

$$\frac{dA_j}{dt} = -\frac{1}{2} A_j + \frac{1}{2} \sum_{j'} K_{jj'} A_{j'} e^{i(\theta_j - \theta_{j'})}$$

$$-i b A_j + \frac{1}{2} \sum_{j'} K_{jj'} A_{j'} e^{i(\theta_j - \theta_{j'})} = \delta \theta_j$$

сравнению с химическими осцилляторами (12, 13) или маятниками (7), временные масштабы,

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
а  
йт  
a  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.

развивается эта динамика, короче по крайней мере на три порядка (14); это позволяет

<sup>1</sup>Кафедра физики, Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния, 91125, США. <sup>2</sup>Институт нанонауки Кавли, Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния, 91125, США. <sup>3</sup>Физический факультет, Калифорнийский университет, Дэвис, Калифорния, 95616, США. <sup>4</sup>Центр наук о сложности, Калифорнийский университет, Дэвис, Калифорния, 95616, США. <sup>5</sup>Факультет машиностроения, Университет Мельбурна, Виктория 3010, Австралия. <sup>6</sup>Факультет компьютерных наук, Калифорнийский университет, Дэвис, Калифорния, 95616, США.

<sup>7</sup>Кафедра прикладной физики, Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния, 91125, США. <sup>8</sup>Факультет авиационной и аэрокосмической инженерии имени Уильяма Э. Боинга, Университет Вашингтона, Сиэтл, WA 98195, США. <sup>9</sup>Факультет гражданского и экологического строительства, Университет Райса, Хьюстон, штат Техас, 77005, США. <sup>10</sup>Институт Санта-Фе, Санта-Фе, NM 87501, США. <sup>11</sup>Факультет механической и аэрокосмической инженерии, Калифорнийский университет, Дэвис, Калифорния, 95616, США. <sup>12</sup>Факультет биоинженерии, Калифорнийский технологический институт, Пасадена, Калифорния, 91125, США.

\*Корреспондирующий автор. Электронная почта: roukes@caltech.edu

$K=N^N \sin f_{ij}$ , где  $K$  - сила связи. Эта модель демонстрирует диссипативные фазовой динамики и демонстрирует переход к синхронизированному состоянию, в котором макроскопическая фракция осцилляторов развивается на одной и той же частоте. Переход происходит, когда межосцилляторная связь преодолевает расстройку частот осцилляторов. Курамото и Сакагучи позже расширили эту базовую модель, включив в нее фазовый сдвиг  $q$ , который вызывает дисперсию, так что сумма в функции связи становится больше  $\sin(f_i - f_j + q)$  (20). Для слабой связи, как описано ниже, мы экспериментально обнаружили синхронизированные состояния с равными фазами осцилляторов или с фиксированной разницей фаз. Мы представляем данные, которые могут быть количественно поняты из аналитической модели. При более сильной связи возникал широкий спектр стабильных состояний, демонстрирующих более богатую структуру и динамику. Мы разработали экспериментальные и аналитические инструменты для классификации и понимания этих экзотических состояний и продемонстрировали, как они возникают при теоретико-групповом анализе симметрий системы (21, 22). В отличие от исследований химических осцилляторов (23),

Уравнение 1 описывает динамику на временных масштабах, превышающих время релаксации резонатора,  $t_{\text{slow}} = Q_m / f_m$ , где  $f_m$  - резонансная частота механического резонатора, а  $Q_m$  - коэффициент добротности (см. дополнительные материалы). Собственная частота каждого осциллятора  $\omega_j$  позволяет учесть дисперсию в наших уравнениях осцилляторов,  $b$  - вещественное число, представляющее силу связи между ближайшими соседями, а  $a$  - узловая нелинейность, связывающая частоту с амплитудой. За исключением случаев, когда это указано явно, все собственные частоты осцилляторов заданы эквивалентными, что делает равномерное кольцо с  $\omega_j = 0$  во вращающейся рамке. Переменные  $A_j$ ,  $T$  и параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\omega_j$  в уравнении 1 не имеют единиц. Масштабное время  $T$  определяется в терминах физического времени  $t$  через  $T = 2\pi \times t/t_{\text{slow}}$ . Отсюда можно вывести зависимость  $a$ ,  $b$  от физических параметров осциллятора. Динамика осциллятора по уравнению 1 аналогична динамике, описываемой уравнением Стюарта-Ландау (33), но квадратичная нелинейная диссипация в этом уравнении заменена обратной связью

насыщение. Периодические граничные условия ( $j = j + N$ ) дают кольцевую топологию.

Уравнение 1 можно разделить на  $A_j$  и разделить на действительную и мнимую части, чтобы получить динамику величины  $|A_j| = a_j$  и фазы  $\angle A_j = f_j$ ,

$$\frac{da_j}{dT} \frac{1}{4} \frac{1 - a_j}{2} - \frac{b}{2} a_j \sin \delta f_j - f_j \quad (2a)$$

$$b a_{j-1} \sin \delta f_{j-1} - f_j b$$

$$\frac{df_j}{dT} \frac{1}{4} w_j b a^2 - b b \frac{1}{2a_j} a_j b_1 \cos \delta f_{j1} - f_j b$$

$$b a_{j-1} \cos \delta f_{j-1} - f_j b \quad (2b)$$

Известно, что решения этого набора уравнений  $c_j = 1$  являются устойчивыми (34). Для решений  $c_j \neq 1$  известно меньше. Для вариаций величины, индуцированных

фазовой динамикой, которая является медленной относительно скорости релаксации величины ( $1/2$  в уравнении 2a), отклонения от  $c_j = 1$  могут быть записаны с порядком  $b$  в терминах мгновенных фаз  $da_j \approx -b[\sin(f_{j+1} - f_j) + \sin(f_{j-1} - f_j)]$ . Вставляя это в разложение уравнения 2b до первого порядка по величине возмущений  $da_j$ , аналогично (35), дает

$$\begin{aligned} \frac{df_j}{dT} \frac{1}{4} w_j b a - b \\ - 2ab \frac{1}{2} \sin \delta f_{j1} - f_j b \sin \delta f_{j-1} - f_j b \\ b \frac{1}{2} \cos \delta f_{j1} - \left( \begin{array}{c} \text{Курамото} \\ \text{Сакагучи} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{ближайший сосед} \\ \text{бигармония} \\ \text{триадик} \\ \text{триадический} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} b \frac{1}{4} \sin \delta f_{j2} - f_j b \sin \delta f_{j-2} - f_j b \\ - \frac{b^2}{2} \sin \frac{1}{2} 2 \delta f_{j1} - f_j b \sin \frac{1}{2} 2 \delta f_{j-1} \\ - \frac{b^2}{4} \sin \delta f_{j2} - 2 f_j b \sin \delta f_{j-1} \\ - \frac{b^2}{4} \sin \delta f_{j-2} - 2 f_j b \sin \delta f_{j-1} \\ b \frac{b^2}{2} \sin \delta f_{j1} - 2 f_j b \sin \delta f_{j-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

где мы обозначаем отдельные члены связи по их основной природе для последующего использования.

Это сводится к уравнению Курамото-Сакагучи (K-S). Мы можем переписать его в более удобной форме (36),

с  $K = -2ab$  и  $g = (4a)^{-1}$ . Здесь  $g$  - мера фазового запаздывания  $q$ .

Для режима малого сцепления, где применимо уравнение 4, увеличение нелинейного параметра  $a$  ограничивает систему курамотоподобной динамикой. Диссипативная синусоидальная связь в этом пределе возникает

от косвенных взаимодействий в фазовом уравнении через нелинейность  $a$ , параметр, полученный из

наноразмерной физики механического резонатора (30, 37). Наша экспериментальная система уникальна тем, что она имеет независимые параметры  $a$  и  $b$  для величин.

$$\frac{df_j}{dT} \frac{1}{4} w_j b a \sin \delta f - f_j b g \frac{1}{2} - \cos \delta f - f_j b g$$

Од  
р

комплексных амплитуд  $A_j$ , при этом  $a_j = |A_j|$  и  $D_j = f_{j+1} - f_j$ . Мы показываем динамику восьми осцилляторов до, во время и после синхронизации в противофазное состояние. При фиксированном  $a = 0.2$  мы резко изменяли  $b$  от 0.02 до 0.7 в течение 1 мс, чтобы вызвать синхронизацию. Анимация

данные, представленные на рис. 1, показаны в фильме мы предположим, что величины могут быть

игнорируется, то состояние восьми осцилляторов эволюционирует на восьмимерном торе. Мы показываем данные из рис. 1A на четырех двумерных торах.

Уравнение 3 не учитывает динамику с быстрой меняющимися магнитудами. Если в динамике величины доминирует одна частота, то для слабой связи мы можем расширить возмущения величины по гармоникам. На сайте это вводит в уравнение 3 реактивные, косинусоидальные ближайшие соседи, бигармонические и триадические члены. С одной стороны, это дает количественные различия<sup>2</sup> между фазовой моделью, уравнение 3, и полной магнитно-фазовой моделью, уравнение 2. С другой стороны, если диссипативные синусоидальные члены доминируют в соображениях стабильности, качественное соответствие между уравнением 2 и уравнением 3 для этих динамических ситуаций должно быть очевидным. Состояния со статическими величинами должны количественно согласовываться с уравнением 3. Как показано ниже, мы проводим сравнение между фазовой моделью и экспериментальными данными с неоднородными синхронизированными состояниями.

Заметим, что в полных комплексных амплитудных уравнениях преобразование  $b \rightarrow -b$ ,  $A_j \rightarrow -A_j$  (для всех четных значений  $j$ ) дает тот же набор уравнений вплоть до равномерного сдвига частоты. Одним из следствий этого является эквивалентность между синфазной синхронизацией для притягивающих взаимодействий (отрицательный  $b$ ) и противофазной синхронизацией для отталкивающих взаимодействий (положительный  $b$ ). В более общем случае на топологии кольца существуют одни и те же типы динамических состояний независимо от того, какое взаимодействие мы выберем - притягивающее или отталкивающее. Эта симметрия сохраняется в фазовом приближении, уравнение 3. Мы изучаем случай положительного  $b$ , так что ожидается противофазная синхронизация.

Мы начнем с обсуждения экспериментальной установки и симметрий системы. После этого мы рассмотрим экзотическое поведение при увеличении параметра связи  $b$ , начиная с предела K-S, где можно провести количественные



Исследователи разделили обсуждение экзотического поведения на разобщенные состояния, слабые химеры и однородные синхронизированные состояния. Для дополнительного понимания все состояния, представленные в данной работе, показаны в виде анимации (фильмы с S1 по S32) с использованием данных реального времени; см. таблицы с S1 по S3 для руководства по фильмам.

#### Экспериментальная установка

Эксперимент сконфигурирован как управляемая сеть из восьми осцилляторов, в которой **динамика** каждого узла описывается предельным циклом в фазовом пространстве механических смещений и скоростей. Каждый осциллятор был соединен с двумя соседними в цепь. Мы наложили периодические граничные

латоры были расцеплены, и фаза случайным образом распространялась по тори. На нижней панели после инициализации связи система синхронизировалась, и ее динамика свернулась в одномерное пространство состояний.

#### Симметрии кольца осциллятора

Теория групп позволяет классифицировать состояния сложной сети с учетом ее симметрии. Ашвин и Свифт (21) провели такой анализ для колец слабосвязанных осцилляторов, что применимо к нашей системе в большинстве случаев, и мы следуем их обозначениям. Наше кольцо из восьми осцилляторов обладает вращательной и отражательной симметриями, связанными с восьмиугольником, описываемым двугранной группой  $D_8$ . Заметим, что уравнение 1 также инвариантно под действием общего фазового сдвига (представленного 1-тором  $T$ ). Объединение этих симметрий дает общую группу симметрии  $D_8 \times T$ . **Динамические** состояния системы могут проявлять уменьшенные симметрии, задаваемые подгруппами изотропии этой группы. Каждая изотропная подгруппа имеет соответствующее подпространство, инвариантное под ее действием. Размерность этого инвариантного подпространства дает число фазовых переменных, необходимых для предварительного диктата динамики (29). Таким образом, подгруппа с одномерным подпространством описывается одной фазой, что дает синхронизированное состояние с паттерном запертых фаз, нарушающим симметрию кольца. Двумерное подпространство требует двух независимых инстантонных фаз. Если эти фазы остаются незапертыми, состояние будет демонстрировать кластерную синхронизацию, с двумя кластерами фаз, запертых в узор, который развивается с разными частотами на тороидальном аттракторе. Более высокоразмерные инвариантные подпространства обычно соответствуют более сложной динамике.

В таблице 1 приведены подгруппы изотропии  $D_8 \times T$ , размеры инвариантных подпространств, генераторы групп и соответствующие схемы осцилляторов. Здесь  $k$  - отражение (с осью через два узла),  $s$  - поворот на один элемент, а  $w^p$  - сдвиг фазы на  $p \times p/4$ . Знак "-1" у генератора означает, что при преобразовании все фазы увеличиваются на  $p$ . Условные обозначения записываются так, что буквы  $a, b, \dots$  обозначают  $\exp(if_1)$ ,  $\exp(if_2)$ ,  $\dots$ . В качестве примера мы объясним симметрию, представленную генератором  $(s^3 k, -1)$ , действующим на паттерн  $\{a, b, -b, -a, a, b, -b, -a\}$ . В-первых, размышление о по оси 2-6 дает  $\{-b, b, a, -a, -b, b, a, -a\}$ . Затем происходит вращение тремя осцилляторами

(2D) тори на рис. 1C. На верхней панели осцил-

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
са  
йт  
а  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.

условия для  
создания  
кольцевой  
топологии  
(рис. 1A). В  
пример  
данных  
временной  
области (рис.  
1B), мы  
извлекли  
величины и  
разности фаз

по часовой стрелке, доводя шаблон до  $\{-a, -b, b, a, -a, -b, b, a\}$ . При увеличении фазы на  $\rho$  восстанавливается исходный образец.

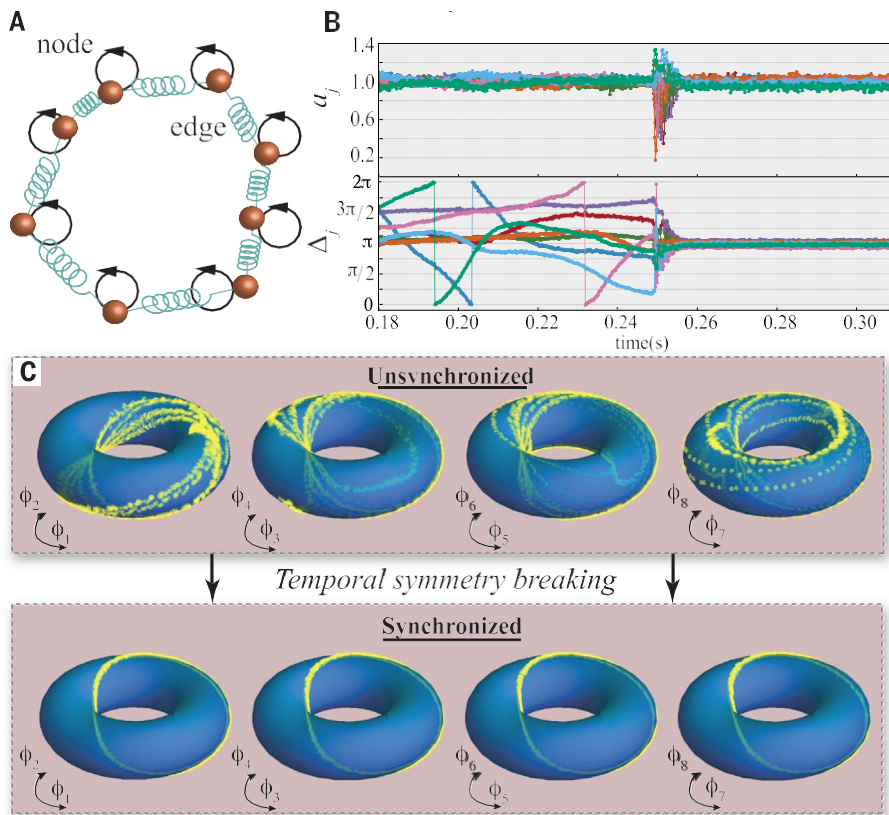
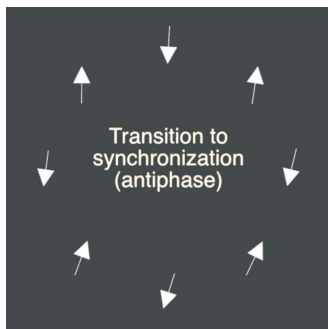


Рис. 1. Экспериментальная установка и репрезентативные данные. (А) Каждый узел осциллятора вращается на предельном цикле (оранжевый на черном круге), с краем связи с ближайшими соседями (пружины). (В) Пример перехода к синхронизации. Динамика сети в реальном времени показывает возникновение синхронизации по мере инициализации связи. Она изображает величины осцилляторов  $a_j$  и разность фаз между ближайшими соседями  $D_j = (f_{j+1} - f_j) \bmod(2\pi)$ . (С) Фазы восьми осцилляторов на четырех двумерных торах до и после синхронизации.



число оборотов фазы вокруг кольца,  
задаваемое номером обмотки

$$k \neq \frac{1}{4} \times N D; k \neq 0; N = 1056$$

$$2\pi \frac{j}{j+1}$$

Фильм 1. Переход из несинхронизированного состояния в противофазное

группы с  $\{7,6,5\}$  сопряжены с группами с  $\{1,2,3\}$ . В фильме 2 мы показываем, как кручение изотропной подгруппы связано с состоянием расщепления ( $k = 7$ ).

Для единичных величин уравнение 2b дает простое предсказание для нормированной частоты во вращающейся рамке  $W^{(k)} = a - b(1 - \cos D^{(k)})$ . Заметим, что уравнение 4 отражает этот результат, поскольку он аппроксимируется  $b$ . На рисунке 2А показан график экспериментального результата для частоты каждого состояния с номером обмотки  $k$  против разности фаз (зеленые сферы). Мы подогнали его к уравнению для  $W^{(k)}$  и обнаружили разницу в 1% в  $b$  и согласие в  $a$  лучше, чем 0,5%, по сравнению со значениями из первоначальной калибровки. Подгонка показана фиолетовой линией.

Для малых значений  $b$  мы наблюдали антифазное состояние  $k = 4$  и два состояния расщепления  $k = \{3,5\}$ . При  $D_j = D^{(k)}$ , этот результат согласуется с анализом линейной устойчивости уравнения 4, который показывает, что состояния  $k = \{3,4,5\}$  устойчивы для любой комбинации  $a, b$ . Этот анализ также показывает, что состояния  $k = \{2,6\}$  имеют нейтральную линейную устойчивость (см. ниже). Для больших  $b$  (1,0) и малых  $a$  (0,074) также наблюдались синфазное состояние и состояния  $k = \{1,7\}$  (рис. 2А).

Фазовые состояния, которые не являются стабильными в рамках повторной импульсной К-С модели с  $K < 0$  - то есть  $k = \{0,1,7\}$  - являются стабильными в рамках моделирования расширенной фазовой модели (уравнение 3). При моделировании уравнения 3 выяснилось, что для стабилизации синфазного состояния требуются только К-С и бигармонические члены. Аналогично, только К-С и триадические члены в уравнении 3 были необходимы для стабилизации  $k = \{1,7\}$ . Таким образом, разные члены в расширенной фазовой модели стабилизируют разные состояния.

В отсутствие шума вероятность перехода в определенное синхронизированное состояние из случайного начального набора фаз может быть рассчитана из объемов бассейнов притяжения различных решений (38). На рис. 2В показана вероятность синхронизации в противофазное состояние как функция параметра фазового лага  $g$  в нашем эксперименте. Вероятность нахождения в этом состоянии в кольце с четным числом...

для отталкивающие связанных осцилляторов равносильно нахождению синфазного состояния в том же самом синхронизированное состояние после индуцирования межосцилляторной связи (составлено из экспериментальных данных).



Простейшими состояниями идентичных осцилляторов, соединенных в кольцо, являются состояния с одинаковой разностью фаз  $D_j = (f_{j+1} - f_j) \bmod(2\pi)$  вдоль каждого края. Эти разности фаз складываются в интеграл

Заметим, что  $k = 0$  дает равномерное синхронизированное состояние, а для четного  $N$  число витков  $k = N/2$  соответствует противофазному состоянию. Остальные значения  $k$  дают расщепленные состояния (33, 34). Поскольку все разности фаз одинаковы для одного из этих состояний, мы можем определить  $D^{(k)} \equiv D^{(k)} = 2\pi k/N$  для числа витков  $k$ . Из уравнений 2а и 2б следует, что эти состояния имеют единичную величину, а осцилляторы образуют единый частотный кластер.

Для нашего восьмиосцилляторного кольца восемь состояний единичной величины  $k = 0, 1, \dots, 7$  включают в себя синфазное состояние ( $k = 0$ ), противофазное состояние ( $k = 4$ ) и состояния расщепления вращающейся фазы ( $k = 1, 2, 3, 5, 6, 7$ ). Ин-фазное состояние обладает всеми спонтанными симметриями  $D_8$ . Противофазное состояние обладает той же структурной симметрией, но с поворотом,  $D_8 (+, -)$ . Состояния расщепления обладают симметрией скрученной циклической группы  $Z_8(p)$ , где  $p \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  дает состояние с номером обмотки  $k = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ , соответственно. Обратите внимание, что под-

размер кольца с притягательно связанными осцилляторами. Таким образом, наши результаты можно напрямую сравнить с предыдущими результатами для предела Курамото  $g=0$  (38).

Мы проводили эксперименты при фиксированном значении сцепления  $K = -0,2$  (рис. 2В, зеленые полосы ошибок) и размахе  $g$  от 0,04 до 0,75, начиная с 300 диф-

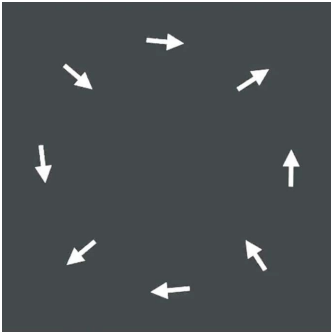
различных случайных начальных условий для каждого значения. При  $g \approx 0,75$ ,  $b$  было увеличено до точки, где величины сильно варьировались и состояния, отличные от состояний расщепления с числом витков  $k = 3, 4, 5$

начала стабилизироваться. Мы построили график отношения числа испытаний, закончившихся в противофазном состоянии ( $k = 4$ ), к общему числу испытаний. Погрешность определяется неопределенностью, возникающей в результате выборки вероятностей при ограниченном числе испытаний. При меньших значениях  $g$  вероятности приближаются к постоянному значению, а затем резко отклоняются от этой тенденции при  $g < 0,07$ . Подгонка данных для  $g > 0,07$  к квадратичной функции  $g^2$  (рис. 2В, красная кривая) дала следующие результаты

Таблица 1. Подгруппы изотропии $D_8$ $\times T$ .			
Подгруппа	размерности подпространства	Генераторы	Фазовая модель
$D_8$	$\{a, a, a, a, a, a, a, a\}$		
$(+, -)$	$\{k, 1\}$	$(ks, -1)\{a, -a, a, -a, a, -a, a, -a\}$	
$Z_8(p), p \in 1, 2, 3$	1	$sw^p$	$\{a, w^p a, w^{2p} a, w^{3p} a, w^{4p} a, w^{5p} a, w^{6p} a, w^{7p} a\}$
$(+, -)$	$\{sk, 1\}$	$(kc, -1)\{a, a, -a, -a, a, a, -a, -a\}$	$q - q$
$D_4$	2	$s^2 k,$	$\{a, b, a, b, a, b, a, b\}$
$(p), p \in 1,$	2	$s^2 w^2$	$\{a, b, i^p a, i^p b, i^{2p} a, i^{2p} b, i^{3p} a, i^{3p} b\}$
$D_2$	3s	$k, k\{a$	$i^{3s} b, b, a, c, b\}$
$(k, k)$	$\{a, b, c, d, e, d, c, b\}$		
$D_2$	$i$	$s^3 k,$	$\{a, b, b, a, a, b, b, a\}$
$(s)$	4s	$k, ks\{a$	$, b, c, d, d, c, b, a\}$
$(s, -)$		$2(s^3 k, -1), (ks, -1)\{a, b, -b, -a, a, b, -b, -a\}$	
$D_1(-, -)$		$4(s^3 k, -1), (ks, -1)\{a, b, c, d, -d, -c, -b, -a\}$	
$D_2(+, -)$		$2(s^3 k, 1), (ks, -1)\{a, b, b, a, -a, -b, -b, -a\}$	
$Z_2$	4	$s^4 w$	$\{a, b, c, d, a, b, c, d\}$
$Z_2(p = 1)$			$\{a, b, c, d, -a, -b, -c, -d\}$

$g \rightarrow 0$  перехват  $p^{(k=4)} (g = 0) = 0,76 \pm 0,02$ . При экстраполяции на наше кольцо с восемью осцилляторами этот результат оказался согласованным с предыдущими численно-эрическими симуляциями на больших кольцах в пределе Курамото, проведенными Уайли и др. (38).

Мы связываем поведение для  $g < 0,07$  с эффектами шума. Чтобы подтвердить это, мы провели стохастическое численное моделирование уравнения 2 (при идентичных собственных частотах осцилляторов  $w_i$ ), добавив независимые стохастические силы  $X_i(t)$  к уравнениям по величине и фазе. Мы использовали двухшаговую стохастическую схему Рунге-Кутты для аддитивного гауссовского белого шума (39), с  $X_i(t)X_j(t') = D\delta(t - t')\delta_{ij}$ , и определили состояние сети в конце этих симуляций, проведя более 1000 испытаний. Результаты (рис. 2В) показывают, что поведение с большим  $g$  было фактически независимым от шума, в то время как поведение с малым  $g$  было сильно зависимым от шума. Моделирование без шума для  $g = 0$  согласуется с результатом, экстраполированным из Wiley et al. (38). Хотя мы не ожидаем, что шум в нашей экспериментальной системе будет полностью белым (16), экспериментальные данные для  $g < 0.07$  были приблизительно согласованы с результатами численного моделирования с силой шума  $D \sim 4 \times 10^{-4}$ . Магнитудный шум входит в фазовое уравнение через нелинейную перестройку частоты при малых значениях  $g$ . Нелинейная перестройка частоты характеризуется параметром  $a = 1/(4g)$ ; она увеличивает эффективную силу фазового



Фильм 2. Выделение пространственно-временной симметрии синхронизированного состояния расщепления,  $k = 7$  (составлено из экспериментальных данных).

Мы исследовали устойчивость синхронизированного состояния к дисперсии собственных частот осцилляторов, внезапно возмущая систему после того, как она установилась в противofазном состоянии. Для этого мы смещали собственную частоту первого осциллятора на величину  $dw_1$  и увеличивали размер возмущения до тех пор, пока

осциллятор разрывался и синхронизация разрушалась. Для слабого возмущения линейный отклик дал сдвиг частоты массива, равный возмущению одного осциллятора, определяемому числом осцилляторов в массиве,  $dW^{(4)} = dw_1 / 8$ . В общем, этот результат разрушается при больших возмущениях, приближающихся к пределу синхронизации. Однако в пределе Курамото он остается верным даже при больших возмущениях.

На рис. 2С показан сдвиг частоты массива после вычитания предсказания малых возмущений  $dw_1 / 8$  для трех различных значений параметра К-С  $g$ . Также был вычтен постоянный остаточный сдвиг частоты  $dW = 0,005$ , общий для всех трех наборов данных. Это может быть объяснено следующим образом дрейфом частоты быстрого генератора  $df_m / f_m \sim 10^{-6}$

в течение экспериментальной шкалы времени  $\sim 100$  мс, которая была выбрана для получения данных с погрешностью  $\sim 0.001$ .

В дополнение к средней частоте мы сообщаем переменную величину возмущенного осциллятора. Численные решения уравнений 2 и 4 показаны сплошной и пунктирной линиями, соответственно. Мы сравниваем эксперимент с решениями с фиксированной точкой, найденными в численном решателе как для полного набора уравнений магнитуды-фазы (уравнение 2), так и для уравнения К-С. Экспериментальная погрешность по оси  $x$  возникла из-за погрешности сдвига частоты, вызванной дискретностью цифро-аналогового преобразователя, используемого для управления узловыми

десинхронизировался, система не установилась в фиксированной точке, и решатель не смог найти правильное решение, поэтому мы не включили числовые данные после десинхронизации. В этом случае мы вручную изменили параметры  $a$  и  $b$  (представленные как  $K$  и  $g$ , повторно, для решения K-S) в решателе, чтобы получить соответствие с данными рис. 2С. Хотя было достигнуто хорошее согласие между экспериментом и теорией, в этом случае было обнаружено больше разногласий, чем для данных по частоте из

равномерного кольца (рис. 2С по сравнению с рис. 2А). Это различие может быть вызвано паразитной нелинейной связью, возникающей при параметрическом управлении механическими резонаторами (см. дополнительный текст). Отметим, что даже при  $b = 0,1$  решение K-S модели показывает некоторые отклонения от решения уравнений полной комплексной амплитуды.

Примечательно, что мы обнаружили количественное согласие с теорией в высокоразмерной нелинейной системе, даже для таких тонких явлений, как реакция вблизи порога десинхронизации, где линейная реакция разрушается. Кроме того, благодаря тщательному контролю частот, мы смогли добиться почти однородной сети. Это позволило нам проверить аналитически трудноразрешимые проблемы, такие как количественная оценка вероятностей состояния, возникающих при случайных начальных условиях в присутствии шума. Оценка этих возможностей требует вычисления объема бассейнов притяжения. Эти результаты показывают, что осцилляторы NEMS позволяют проводить общие и детальные исследования синхронизации.

#### Неоднородная синхронизация

Помимо вышеупомянутых частотно-синхронизированных состояний расщепления, демонстрирующих идентичные разности фаз между ближайшими соседними осцилляторами, мы обнаружили частотно-синхронизированные состояния с разбросом разностей фаз. Мы получили доступ к этим состояниям, воспользовавшись нашими экспериментальными возможностями, которые позволяют неадиабатическое перемещение в пространстве параметров путем быстрого изменения значений  $a$ ,  $b$  и  $W_i$  при одновременном считывании состояний всех восьми осцилляторов.

Неоднородные синхронизированные состояния, которые мы исследовали в этом случае, возникли в результате паттернообразующей неустойчивости пространственно однородного внутрифазного состояния. Эта неустойчивость представляет собой Фурье-моду фазовых возмущений, которая растет и ультимативно насыщается, образуя стационарное состояние с периодической пространственной модуляцией разности фаз ближайших соседей. Мы ожидаем, что период пространственного паттерна, который развивается из одноформенного состояния, связан с волновым вектором, максимизирующим скорость роста от линейной устойчивости (упр. S5). Для восьмиосцилляторного кольца и значений  $a$ ,  $b$ , которые мы использовали, это дало неоднородность

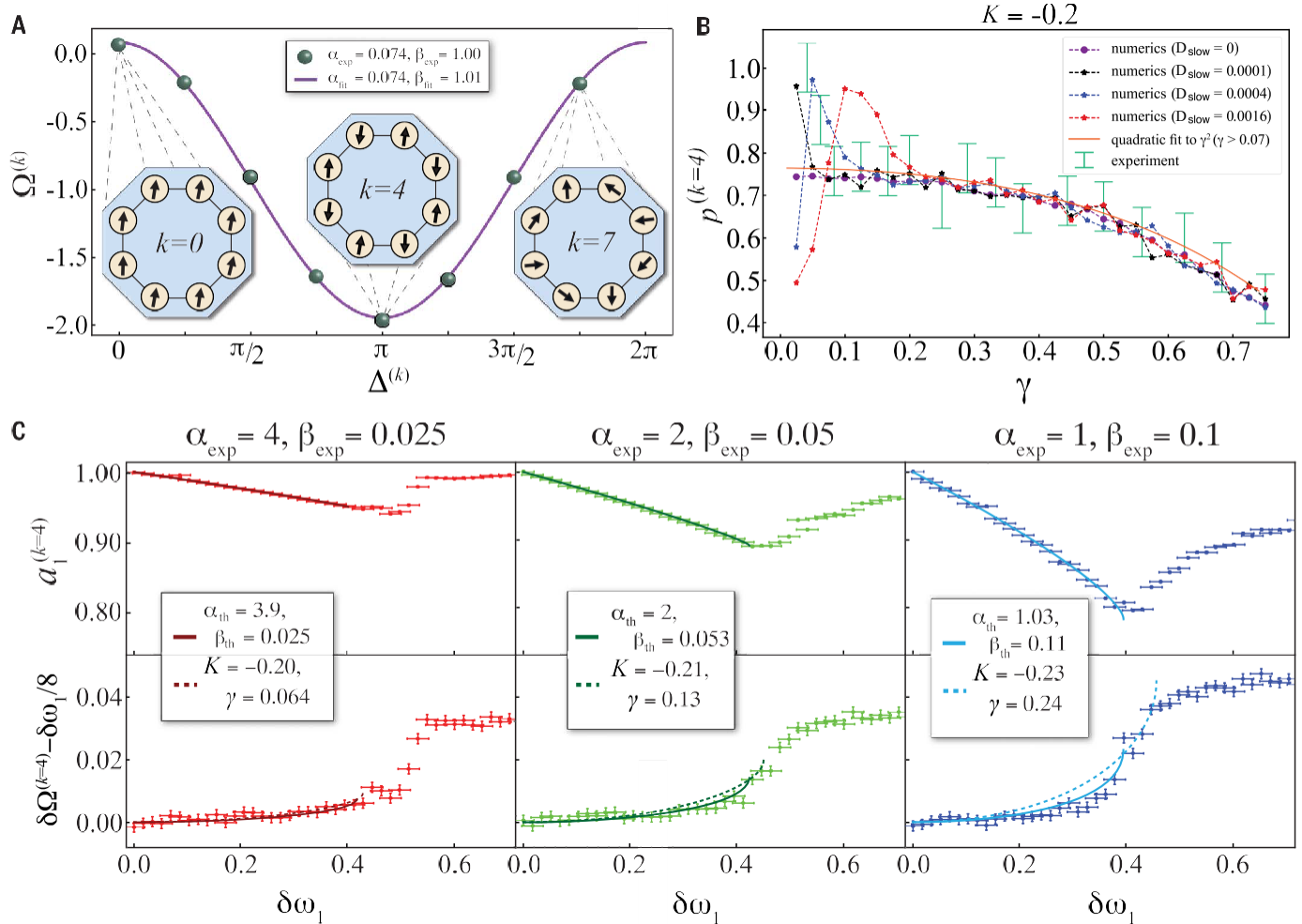


Рис. 2. Экспериментальные данные о состояниях расщепления. (А) Частоты  $\Omega^{(k)}$  одномагнитных синхронизированных состояний  $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$ , для которых соседние разности фаз составляют  $D^{(k)} = 2\pi k/8$ . При  $a = 0.074$  и  $b = 1$  данные (зеленые сферы) хорошо согласуются с подгонкой из теоретической модели (фиолетовая линия). (В) Вероятность нахождения противofазного состояния из 300 экспериментальных испытаний для каждой точки со случайными начальными фазами, как функция параметра фазового запаздывания  $\gamma$  из уравнения 4 (зеленые полосы ошибок). Мы смоделировали полный набор уравнений (уравнение 2) со стохастическим членом белого шума с силой  $D$ , добавленным как к величине, так и к фазе. (С) Экспериментальные данные по возмущению противofазы

синхронизированный паттерн фаз с одним пространственным периодом.

На рисунке 3А показан пример паттернов, возникших из однородного состояния, где разность фаз изображена в виде функ-

времени. Мы подготовили систему без нарушения собственной частоты  $\omega_j \approx 0$ , а затем включили связь на  $b = 1$  при  $t \approx 0,3$  с. При  $t \approx 0,53$  с мы внезапно переключили связь на  $b = 0,28$ . При этих значениях параметров

( $a = 0,09$ ,  $b = 0,28$ ), синфазное состояние было ~~разно~~ неустойчивое, и фазы субсекундарно взорвались в узорчатое, неоднородное состояние. Это состояние было частотно-

синхронизированным, поскольку разность фаз была постоянной во времени. Однако появился большой разброс в разности фаз между ближайшими соседями,

состояние. Мы возмущали собственную частоту одного осциллятора (осциллятор 1) на величину  $d\omega_1$  и исследовали ее величину  $a_1$  и отклонение средней частоты кольца  $d\omega_1/8$ , откуда  $d\Omega^{(k=4)} - d\omega_1/8$ . Мы численно определили влияние возмущения; на графике показаны результаты полной модели (сплошные линии) и модели Курамото-Сакагучи (пунктирные линии). Горизонтальные планки погрешностей даны разрешением цифрового шага используемой схемы для управления частотой. Вертикальная ошибка для частот осцилляторов задается средней разрешаемой частотой для восьми осцилляторов в пределах временного окна  $\sim 100$  мс.

больше, чем можно объяснить остаточной дисперсией собственных частот в  $\omega_j$ . На рис. 3В показан рост пространственного узора в зависимости от времени; цвет среза соответствует оси времени. После гашения (зеленая пунктирная линия) пространственный узор приобрел грубую синусоидально-оидальную форму. Как показано на рисунке, узор имеет один пространственный период, что соответствует предсказанию линейной стабильности. В фильме 3 показано формирование узора после гашения, показанного на рис. 3В.

Мы сравнили экспериментальные данные с результатами численного моделирования, как для полной магнитно-фазовой модели

где  $X_j$  - псевдослучайное число, взятое из равномерного распределения в интервале  $(-p/20, p/20)$ . Мы построили график результирующего абсолютного значения  $M$  параметра порядка  $Z_{ip} = M \exp(iF) =$

$$\delta l = N \delta P \quad \exp \delta l f_P \text{ над пространством}$$

$$\text{параметров}^{1/4}$$
параметров<sup>¼</sup>

Рис. 3. Неоднородная синхронизация. (А) Разность фаз ближайших соседей осциллятора, демонстрирующая формирование паттерна. При  $t \approx 0,53$  с мы внезапно сдвинули связь от значения  $b = 1$  до  $b = 0,28$ .

(В) Разность фаз неоднородного состояния при гашении системы по данным из (А). Цвет соответствует оси времени, более синий цвет соответствует более позднему времени. (С) Численные данные о пространстве состояний неоднородной синхронизации. На графике показана величина параметра порядка Курамото  $Z_{ip}$ , характеризующего устойчивое состояние, найденное в (А).

этих симуляций. (D) Данные, показывающие перекрытие однородных и неоднородных синхронизированных состояний в зависимости от параметра связи  $b$  при  $a = 0,09$ . На графике показано среднее (в количестве проб) из абсолютное значение параметра порядка с порогом для каждого испытания, заданным в  $0,02$  и  $M_n < 0,94$  (синие звезды) или  $M_n > 0,94$  (бордовые треугольники). Четкое разделение состояний появлялось, когда этот порог был применен. Результаты эксперимента сравниваются с численным моделированием уравнения 2 (черные точки) и уравнения 3 (зеленые кружки).

Фильм 3. Формирование пространственной картины фаз в неоднородном синхронизированном состоянии через закалку параметра связи  $b$  (составлено из экспериментальных данных).

линейная устойчивость  $a = b \sin^2(\rho/8)$  (34) синфазного состояния. То есть, при значениях в правом нижнем углу этой линии синфазное состояние было устойчивым и  $M = 1$  (показано белым цветом).

Чтобы получить количественное сравнение с теорией, мы провели следующий эксперимент. Во-первых, мы установили систему на  $(a, b) = (0,09, 1)$ , чтобы инициализировать ее вблизи неподвижной точки  $(a_j, D_j) = (1, x_j)$  при  $x_j < 0,05$ , а затем повторно инициализировали ее, пока не было обнаружено синфазное состояние. Во-вторых, мы

состояние. Соответственно, мы предварительно выбрали состояния со средней разницей фаз  $\rho \approx 0,002$ , когда  $av$ -разделены как в пространстве, так и во времени. Каждое испытание было разбито на одну из двух групп с помощью порогового значения  $M = 0,94$ , которое представляет собой наибольшее значение для состояний, обнаруженных при моделировании вдоль пунктирной линии на рис. 3C. Из каждой из этих двух групп мы построили график среднего значения  $M$  по всем испытаниям в зависимости от  $b$  на рис. 3D. Мы также показали результаты численного моделирования полной магнитно-фазовой модели (рис. 3C) и приближенной фазовой модели (уравнение 3) в виде черных и зеленых точек соответственно. Мы обнаружили, что фазовая модель согласуется с магнитно-фазовой моделью для значений  $b < 0,3$ . Было обнаружено, что синфазное состояние для обеих моделей дестабилизируется при одинаковом значении coupling. Экспериментальные данные показывают качественное согласие с численными результатами (черные точки) полной модели - например, проявляется прерывистый переход при  $b \sim 0,6$ . На этом участке мы не смогли легко объяснить систематическое количественное несогласие между симуляцией полной модели (уравнение 2) и нашими экспериментальными данными.

Синхронизированные состояния с разбросом разности фаз обсуждались Пиковским и Розенблумом (27) в сетях

осцилляторов Стюарта-Ландау с глобальной нелинейной связью. В отличие от этого, в нашей системе такой разброс произошел без явной нелинейной связи. Также не было обнаружено пространственной картины фаз.



Чтобы найти симметрии, которые сохраняются, нам пришлось ввести несколько мер, которые определяют кластеризацию частот. Это показано на рис. 4А и Б, где изображены (сверху вниз) несколько соседних разностей фаз; пространственно-временные графики частот осцилляторов, которые идентифицируют частотные кластеры; парная взаимная информация фаз внутри кластеров  $I(f_i; f_j)$  (40); и экспериментальные снимки фаз осцилляторов. На этих нижних панелях быстро гасит систему до более низкого значения  $\beta$ , вдоль пунктирных линий на рис. 4А. Мы применили эту процедуру, изменяя  $\beta$  от 0,3 до 0,9 с шагом 0,03 и повторяя ее 20 раз для каждого шага. Время от времени наблюдалось, что система случайным образом переходила то в однородное, то в неоднородное состояние.

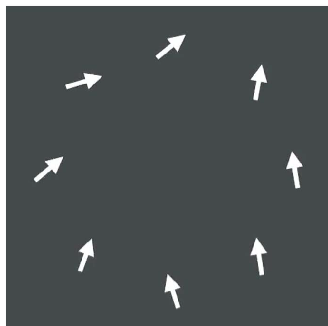
каждый узел осциллятора окрашен для идентификации членов определенного кластера синхронизированных узлов, ориентированных вправо. Full Magnitude-Phase Model показывает относительную фазу каждого узла, соответствующие генераторам (руны), показаны пунктирными стрелками, а соответствующая субструктура изотропии показана в правом нижнем углу. Развязка происходит для особого случая кольца, содержащего 4m осцилляторов (где  $m$  - целое положительное число) с линейными взаимодействиями использовались в их предыдущей работе, поскольку симуляции в глобальной топологии.

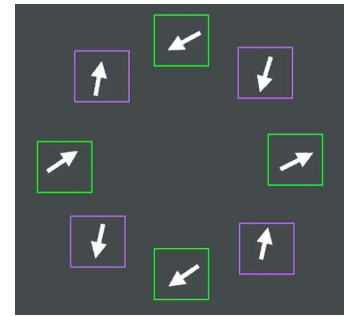
#### Разделенные состояния

В следующих разделах описаны состояния, которые могут образовывать несколько частотно-синхронизированных кластеров.

ближайших соседей (21): В состоянии с  $A_{j+1} = -A_{j-1}$  осциллятор  $A_j$  становится отсоединенным от своих ближайших соседей (см. уравнение 1). В нашей системе, для состояния расщепления  $k=2$ ,  $D_{j+1} + D_j = p$ , что дает  $A_{j+1} = -A_{j-1}$ . Следствием развязки является то, что состояния расщепления  $k=2$  и  $k=6$  стали двумя точками на непрерывной линии в пространстве состояний, реагирующими на произвольную разность фаз между четными и нечетными кластерами. Для неидеальной системы с ненулевой разницей в средней собственной частоте в пределах кластера, Full Model Eq. (4)  $W_{2j-1}^{(i)}$ , мы ожидаем, что наблюдаем два кластера, предсказывающих с разными частотами. На рис. 4А, первый ряд, это изображено как состояние, которое мы называем 2-precess, когда две соседние разности фаз дрейфуют. Обратите внимание, что условие развязки,  $D_{j+1} + D_j = p$ , выполняется в любое время.

Р Р





Фильм 4. Состояние 2-процесса с двумя наборами разобщенных осцилляторов (составлено из экспериментальных данных).

Рис. 4. Развязанные состояния. (А) Разность фаз, частоты, матрица взаимной информации и снимок состояния 2-процесса (см. текст). Обратите внимание, что ближайшие соседи (например, осцилляторы 1 и 3) находятся в одной группе и заперты в противофазе. (В) Разности фаз, частоты, матрица взаимной информации и снимок состояния 2-TW-I. (С) Разность средних частот кластеров (в пределах разобщенного состояния) как функция разности средних собственных частот. Данные показывают, что для двух различных значений связи перехват близок к нулю. Таким образом, в кольце без беспорядка в состоянии без связи не существует разницы в частотах между кластерами. (D) Синфазно синхронизированное состояние, состояние 2-процесса и состояние 2-TW-I построены в уменьшенном фазовом пространстве  $D_8, D_1, a_1$ .

Во втором ряду рис. 4А показаны частоты как функция времени. Кластеры частот показывают разницу в  $\sim 20$  Гц (0,04 в нормализованных единицах). Третий ряд демонстрирует что взаимная информация является заметной бе...

между ближайшими соседями, но пренебрежимо мала между ближайшими соседями. Две фазовые переменные были необходимы для описания этого состояния. Замечания не была полностью нарушена

и сохраняется четырехкратная вращательная симметрия. Подгруппой симметрии, связанной с этим состоянием, является скрученная циклическая группа  $Z_4$  ( $p = 2$ ). В фильме 4 мы непосредственно показываем прецессию двух групп осцилляторов в этом декогерентном состоянии.

Величины в пределах наблюдаемого состояния 2-процесса проявляли небольшие, медленные изменения. Таким образом, фазовая модель (уравнение 3) должна обеспечивать хорошее приближение к динамике этого состояния.

записи собственных частот  $w_j$  и частот осциллятора в состоянии  $W_j$  (как на нижней панели рис. 1С до и после  $t = 0,25$  с, соответственно). Мы построили график разности между частотами осцил-

разница в средних их естественной частоте  $P_4$   $W_{2j} - 1/4 W_{2j-1}$ , против  $P_4$   $W_{2j} - 1/4 W_{2j-1}$ , против

Действительно, мы обнаружили, что это состояние 2-процесса было воспроизведено при моделировании фазовой модели. В этих симуляциях мы варьировали коэффициенты фазовых взаимодействий высшего порядка и таким образом смогли определить член связи ближайшего соседа как наиболее важный для стабильности этого состояния. Бигармонические и триадические члены, как оказалось, оказывают незначительное влияние на это состояние, хотя они сглаживают траектории фазовых различий. Мы показываем эти моделирования на рис. S6A.

рически возбуждают ближайших соседей. Бегущие волны могут проявлять пространственный волновой вектор  $p/2$  (состояние 2-TW-I или первое состояние бегущих волн вокруг состояния  $k = 2$ , показанное на рис. 4В) или  $p/4$  (см. рис. S2A). Для состояния 2-TW-I подгруппой симметрии является  $Z_2$ .

Наконец, на рис. 4D мы показываем расцепленное состояние и состояние бегущей волны из рис. 4, А и В, вместе с синфазным состоянием  $k = 0$  на трехмерном графике. Они демонстрируют, как величина одного осциллятора изменяется в зависимости от разности фаз двух соседних осцилляторов. Синфазное состояние в идеале является точкой в этом фазовом пространстве и, следовательно, может быть описано одной фазовой переменной. Однако два других состояния являются линиями в этом сечении фазового пространства, и для их описания требуется по крайней мере две фазовые переменные. Обратите внимание, что В отсутствие шума состояния 2-precress и 2-TW-I не будут пересекаться друг с другом. Другими словами, объемы в фазовом пространстве, где могут находиться эти состояния, не будут пересекаться. Однако, с экспериментальным шумом, мы наблюдали некоторые де

степень перекрытия соответствующих областей фазового пространства; в этой ситуации система может действительно quencies,  $1/4 W_{2j} - 1/4 W_{2j-1}$ . При двух перехват почти исчез. Таким образом,

Когда разность средних собственных частот была близка к нулю, частоты двух кластеров становились практически неразличимыми. Мы отмечаем, что тип разобщения, который мы наблюдали экспериментально - сеть симметрии  $D_{4m}$  с линейной парной связью - был ранее теоретически обнаружен Александером и Аучмуги (41).

Состояние 2-процесса было не единственным состоянием, которое было обнаружено вблизи фиксированных точек  $k = 2$  и  $k = 6$ . Мы также наблюдали два

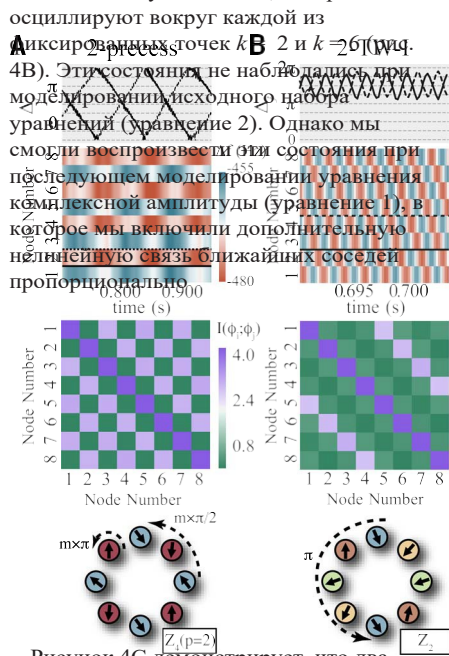


Рисунок 4C демонстрирует, что два различных состояния имеют одинаковые значения в идеальном кольце. Мы извлекли данные из

переход между этими двумя состояниями.

#### Слабые химеры

Недавно было показано, что большие решетки идентичных осцилляторов могут содержать динамические состояния как с когерентной синхронизированной областью, так и с некогерентной областью (7, 43, 42). Такие состояния были названы химерами (43). Для небольших сетей нет общего согласия по определению химеры (43-46). Однако Анвин и Бурлыко (29) придумали термин "слабые химеры" для состояний, в которых частотно-синхронизированный кластер сосуществует с осцилляторами, не синхронизированными с кластером. Эти авторы предполагают, что изучение слабых химер может дать представление об организации химер в больших решетках. Здесь мы показываем два примера слабых химер в нашей системе с магнитно-фазовыми осцилляторами и ближайшей соседней связью. При значениях связи  $b > 0,6$  мы экспериментально обнаружили слабую химеру с кластеризацией частот. к  $A^2_{j \neq 1}$  и  $A^2_{j-1}$  (специально с использованием упр. S9). Эти

данные рисунки, вероятно, возникли из-за параметров.

Мы показываем это состояние WC-I на рис. 5A. В первом ряду рис. 5A мы показываем два фазовых дифференциала, демонстрируя как противофазную пару, так и

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
са  
йт  
а  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.

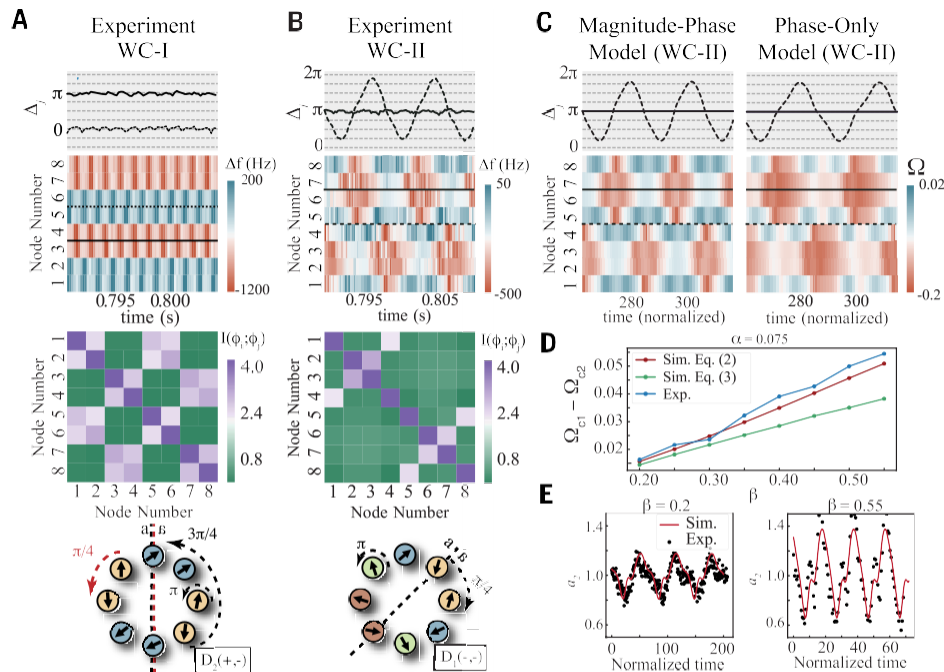


Рис. 5. Слабые химеры. (А) Разности фаз, частоты, матрица взаимной информации и снимок состояния WC-I. (В) Разности фаз, частоты, матрица взаимной информации и снимок состояния WC-II. (С) Моделирование полной магнитно-фазовой модели (уравнение 2) и приближенного фазового режима (уравнение 3) для  $a = 0,075$  и  $b = 0,5$ . (D) Данные для разности частот осциллятора

кластеров (сгруппированных как  $\{2,3,6,7\}$  и  $\{1,4,5,8\}$ ) в зависимости от сцепления

$b$ . Синий - экспериментальные данные; красный - данные численного моделирования модели "магнитуда-фаза" (уравнение 2); зеленый - данные численного моделирования модели "только фаза" (уравнение 3). (Е) Данные для величины, полученные в результате моделирования и эксперимента для  $b = 0,2$  и  $b = 0,55$ . Отклонение величины изменяется от  $\sim 0,4$  до  $\sim 0,8$ .

синфазная пара. Осцилляторы, которые объединяются в кластеры, хорошо видны из пространственно-временных графиков частоты (рис. 5А, второй ряд). Это подтверждается взаимной информацией (рис. 5А, третий ряд). Мы обнаружили паттерн фаз  $\{a, b, b, a, -a, -b, -b, -a\}$ , который инвариантен при преобразованиях подгруппы симметрии  $D_2$  (+, -). Это состояние состоит из двух наборов по четыре осциллятора. Каждый набор из четырех может быть далее разделен на две пары, направленные поперек кольца. Каждая пара находится либо в синфазной, либо в противофазной конфигурации: В одном кластере (синий) ближайшие соседние пары находятся в синфазе, в то время как в другом кластере (красный) ближайшие соседние пары находятся в противофазе. Фильм 5 дает интуитивное представление о динамике этого состояния. Поскольку взаимодействие ближайших соседей наиболее сильное, мы ожидали, что частоты кластеров будут разными, причем разница зависит от  $b$ . Обратите внимание, что это заметно отличается от состояния 2-процесса - это состояние с разницей частот между кластерами, обусловленной  $b$ , а не разницей в собственных частотах  $w_j$ .

При  $a \sim 0.1$ , для значений связи между началом состояния 2-процесса

(приблизительно  $b \sim 0.2$ ) и началом первой слабой химеры WC-I ( $b \sim 0.6$ ), мы обнаружили вторую слабую химеру, WC-II (рис. 5В). Две разности фаз, показанные на рис. 5В, демонстрируют, соответственно, осцилляторную и фиксированную разность фаз. Частоты отдельных осцилляторов менялись со временем, как видно во втором ряду рис. 5В. Взаимная

информационная матрица позволила нам легко сделать вывод, что существует только четыре пары сильно коррелированных осцилляторов, которые проявляют паттерн  $\{a, b, c, d, -d, -c, -b, -a\}$ . В этом паттерне есть одна крученная двугранная симметрия, поэтому подгруппа, связанная с этим состоянием, -  $D_1$  (-, -). Для WC-II существует еще одна симметрия, ассоциированная со сдвигом осцилляторов  $i \in \{1,2,3,4\}$  на полпериода; это видно из свободных... квантовые пространственно-временные диаграммы. Хотя размерность инвариантного подпространства мгновенных фаз равна 4, это двумерное состояние. Отметим, что в среднем осцилляторы внутри блока  $i \in \{2,3,6,7\}$  имели одинаковую частоту. То же самое справедливо и для блока  $i \in \{1,4,5,8\}$ . Эта дополнительная симметрия очевидна в анимации динамики состояния, показанной в фильме 6.

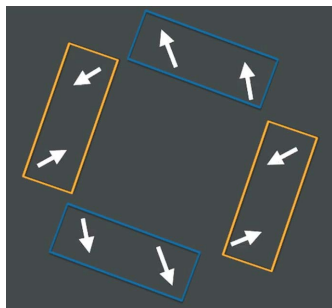
На рис. 5С показано детерминированное моделирование полной магнитно-фазовой модели (уравнение 2) (слева) и модели только для фазы (уравнение 3) (справа), где, как и раньше, включены бигармонические, ближайшие соседи и триадические члены. Частотная дисперсия была установлена на ноль ( $w_j = 0$ ) в этих симуляциях, с  $a = 0.075$  и  $b =$

0.5. Мы наблюдали близкое согласие в спатильных паттернах, демонстрируемых

Фазовая модель по уравнению 3 показывает качественное согласие с динамикой состояния, но расхождение при сравнении частот осцилляторов в рамках фазовой модели с моделированием уравнений фазы магнетика (уравнение 2).

Для количественного сравнения численных и экспериментальных данных мы исследовали разность частот блоков, описанных выше, для фиксированного значения  $a = 0,075$  (рис. 5D, экспериментальные данные показаны синим цветом). Численные данные из магнитно-фазовой модели (показаны красным цветом) были взяты из моделирования уравнения 2 с  $w_j = 0$ . Численные данные из фазовой модели уравнения 3 показаны зеленым цветом. Отдельные точки данных согласуются при низких значениях  $b$  для всех трех наборов данных. Экспериментальные данные и численные данные, полученные с помощью магнитно-фазовой модели, примерно согласуются при всех значениях  $b$ ; однако данные, полученные при моделировании только фазовой модели, отклоняются по мере увеличения  $b$ . Количественный провал фазовой модели (уравнение 3) возникает из-за вариаций величины, которые увеличиваются как по скорости, так и по размеру с ростом  $b$ . Мы показываем вариации величины при двух значениях  $b$  на рис. 5E. Черные точки представляют собой экспериментальные данные; красные линии - данные, смоделированные на основе уравнения 2 в состоянии WC-II. Чтобы получить качественное согласие между фазовой моделью (уравнение 3) и экспериментом, дополнительные члены в гармониках магнитуд должны были бы должны быть включены в фазовую модель. Оба типа слабых химер были обнаружены при моделировании фазовой модели (уравнение 3). Это позволило нам сделать вывод, что бигармонические члены генерируют WC-I. Когда мы отключили в симуляциях ближайшие соседние и триадные взаимодействия, слабые химеры оставались стабильными (26, 29). Это можно понять из того факта, что





Фильм 5. Состояние WC-I и синхронизация

между кластерами по всему кольцу  
(составлено по экспериментальным данным).

что бигармонический член будет одновременно ста- билизировать как синфазную, так и противofазную конфигурацию. Обратите внимание, что поскольку величины этих состояний сильно отличаются от единицы, фазовая модель не дает количественно адекватных результатов.

#### Обсуждение

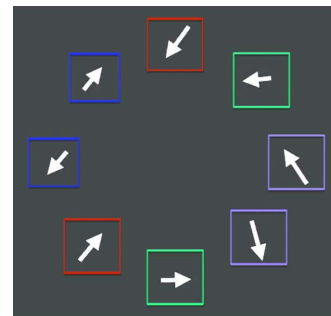
Мы продемонстрировали, что простое кольцо из восьми самоподдерживающихся наноэлектромеханических осцилляторов с линейной, ближайшей к соседям связью демонстрирует экзотические состояния синхронизации со сложной динамикой и нарушенной симметрией. Эти состояния включают слабые химеры, разобщенные состояния, бегущие волны и неоднородные синхронизированные состояния. Мы разработали теоретическую формулировку, начиная с уравнений движения осцилляторов, которая дала приближение для динамики фаз осцилляторов с возникающими взаимодействиями высшего порядка, включая бигармонические, ближайшие соседи и триадические взаимодействия. В более общем виде мы показали, что возникающие взаимодействия высшего порядка возникают в простых сетях из слабо нелинейных элементов с линейной связью ближайших соседей.

Мы обнаружили отличное согласие между нашей моделью, описывающей связанные осцилляторы НЭМС (уравнение 1), и экспериментальными данными для состояний расщепления, включая частоты различных состояний. Также были выяснены более тонкие вопросы, такие как реакция на возмущение собственной частоты одного осциллятора до возникновения десинхронизации и вероятность попадания в ~~предельное~~ состояние

связанные с 11 из них. К ним относятся синфазные, противofазные и расщепленные состояния, связанные с кольцом K-S. Также сюда включены сложные состояния, для описания которых требуется более одной фазовой переменной. Хотя более высокоразмерные состояния анализировались ранее с фазовыми осцилляторами, взаимодействующими через экзотические связи, мы обнаружили аналогичное поведение в фазовых осцилляторах с простым линейным взаимодействием ближайших соседей. Мы обнаружили, что возникающие фазовые взаимодействия второго порядка, стабилизирующие высокоразмерные состояния, обеспечивают интуицию о соответствии между нашей работой и предшествующими исследованиями.

из случайных фазовых начальных условий. При высоких значениях связи мы также обнаружили приблизительное количественное согласие для одного из слабых состояний химеры. Качественно все состояния системы (кроме разобщенной бегущей волны) воспроизводятся в наших симуляциях, основанных как на полной модели (уравнение 2), так и на уменьшенной фазовой модели (уравнение 3). Эти результаты демонстрируют перспективность проведения детальных количественных тестов синхронизации в больших массивах НЭМС, даже вдали от предела слабой связи.

Мы классифицировали наблюдаемые состояния системы с точки зрения их симметрии. Из 18 подгрупп изотропии в группе симметрии  $D_8 \times T$  кольца осциллятора мы обнаружили различные состояния



Фильм 6. Состояние WC-II, демонстрирующее

в предыдущих работах, в которых фазовые осцилляторы моделировались с использованием гораздо более сложных схем связи. Наше обсуждение устойчивости антифазного состояния (рис. 2C) продемонстрировало контроль над отдельными узлами. Наша процедура калибровки для обеспечения идентичности узлов [см. дополнительные материалы и (30)] и ребер может быть модифицирована, чтобы вызвать явное нарушение симметрии. Это само по себе является жизнеспособной стратегией для управления сетью (47, 48).

Наши результаты иллюстрируют перспективность наномеханических осцилляторных массивов для изучения управления сложными и крупномасштабными сетями. В сочетании с полным доступом к подробной динамике переменных состояния в реальном времени, которого мы достигли, управление с обратной связью является захватывающей возможностью для этой уникальной экспериментальной системы. Большие массивы осцилляторов NEMS (~100) возможны с минимальными изменениями в системе архитектуры, о которой идет речь в настоящем документе.

Эти результаты показывают разнообразие экзотических, самоорганизованных моделей синхронизации, которые могут возникать в простых осцилляторных сетях. С практической точки зрения, они также дают представление о реальных системах, где такие динамически самоорганизованные модели колебаний могут быть как разрушительными, так и полезными. Например, циркулирующие потоки энергии наблюдались в высоковольтной электрической сети Северной Америки. Движимые осциллирующими генераторами, потоки энергии непреднамеренно самоорганизуются в замкнутые петли вокруг географически ограниченных регионов, что приводит к снижению пропускной способности линий электропередач без передачи полезной

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
йт  
a  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.



Когерентные модели локальной и кластерной синхронизации также могут привести к неустойчивости в моделях электрической сети (22, 51). Аналогично, даже в одномерных моделях автомобильного потока небольшие нарушения часто приводят к динамически самоорганизованным солитонным импульсам заторов (52-54). Действительно, спонтанное нарушение симметрии в виде химер (43) интенсивно исследуется в динамике нейронов (55, 56) и рассматривается как механизм тремора Паркинсона, эпилепсии и однополушарного медленноволнового сна (57). Кроме того, новые модели синхронизации из самоорганизованной динамики, использующие различия между атрибутами агентов (58), позволят разгадать процессы консенсуса в инженерных приложениях, включая сенсорные сети и рои роботов (59). В более широком смысле, наша система поможет в проектировании тринтически устойчивых технологических сетей в различных масштабах, включая быстро развивающиеся энергетические системы (60).

дополнительная симметрия, не описываемая  $D_8 \times T$  (составленный из экспериментальных данных).

#### Краткое описание методов

Собранная сеть состояла из отдельных осцилляторов, изготовленных из высококачественных пьезоэлектрических нанoeлектромеханических мембранных резонаторов, которые были зажаты со всех сторон и управлялись с помощью электронной обратной связи. Параметры узлов контролировались с помощью электронных схем, собранных на печатных платах (PCB), к которым были приклеены сами НЭМС-резонаторы. Детали отдельных узлов нелинейного NEMS-осциллятора были представлены Фоном и др. (30).

Эти отдельные узлы печатной платы осцилляторов были вставлены в большую материнскую плату, которая формировала края связи (соединения) между узлами сети. Управляющие сигналы от Raspberry Pi направлялись на материнскую плату и мультиплексировались на отдельные осцилляторы с помощью цифрового адресинга. Сигналы осцилляторов считывались с помощью соосных соединений на материнской плате для достижения радиочастотной полосы пропускания. Питание на осцилляторы подавалось через материнскую плату.

Все эксперименты, численное моделирование и обработка данных проводились с помощью пользовательских скриптов на языках Python и C. Сигналы были получены с помощью 8-канального осциллографа с одновременной выборкой. Фаза генератора извлекалась с помощью преобразования Гильберта из необработанных временных записей осциллографа. Выборка осциллографа была установлена на 200 кГц, что примерно на три порядка быстрее, чем динамика осциллятора в медленном времени.

Более подробную информацию см. в дополнительных материалах.

#### ССЫЛКИ И ПРИМЕЧАНИЯ

1. C. Chen, S. Liu, X. Q. Shi, H. Chaté, Y. Wu, Weak synchronization and large-scale collective oscillation in dense bacterial suspensions. *Nature* 542, 210-214 (2017). doi: 10.1038/nature20817; pmid: 28114301
2. I. Dinstein et al., Disrupted neural synchronization in toddlers with autism. *Neuron* 70, 1218-1225 (2011). doi: 10.1016/j.neuron.2011.04.018; pmid: 21689606
3. F. Varela, J.-P. Lachaux, E. Rodriguez, J. Martinerie, The brainweb: Фазовая синхронизация и крупномасштабная интеграция. *Nat. Rev. Neurosci.* 2, 229-239 (2001). doi: 10.1038/35067550; pmid: 11283746
4. A. E. Motter, S. A. Myers, M. Anghel, T. Nishikawa, Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nat. Phys.* 9, 191-197 (2013). doi: 10.1038/nphys2535

5. Л. В. Гамбуца и др., Экспериментальное исследование химерных состояний с доменами покоя и синхронизма в связанных электронных осцилляторах. *Phys. Rev. E* 90, 032905 (2014). doi: [10.1103/PhysRevE.90.032905](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.032905); pmid: [25314502](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25314502/)
6. К. Визенфельд, П. Коле, С. Х. Строгац, Переходы синхронизации в неупорядоченной решетке джозефсоновских серий. *Phys. Rev. Lett.* 76, 404-407 (1996). doi: [10.1103/PhysRevLett.76.404](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.404); pmid: [10061448](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/10061448/).
7. Е. А. Мартенс, С. Тутупали, А. Фуррьер, О. Халлатшек, Химерные состояния в сетях механических осцилляторов. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 110, 10563-10567 (2013). doi: [10.1073/pnas.1302880110](https://doi.org/10.1073/pnas.1302880110); pmid: [23759743](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/23759743/)
8. S. Kaka et al., Взаимная фазовая блокировка микроволновых спин-моментных наноосцилляторов. *Nature* 437, 389-392 (2005). doi: [10.1038/nature04035](https://doi.org/10.1038/nature04035); pmid: [16163351](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/16163351/)
9. D. P. Rosin, D. Rontani, N. D. Haynes, E. Schöll, D. J. Gauthier, Transient scaling and resurgence of chimera states in networks of Boolean phase oscillators. *Phys. Rev. E* 90, 030902 (2014). doi: [10.1103/PhysRevE.90.030902](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.030902); pmid: [25314385](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25314385/)
10. R. Roy, K. S. Thornburg Jr., Экспериментальная синхронизация хаотических лазеров. *Phys. Rev. Lett.* 72, 2009-2012 (1994). doi: [10.1103/PhysRevLett.72.2009](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.2009); pmid: [10055765](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/10055765/)
11. М. К. Кросс, П. К. Хоэнберг, Формирование паттерна вне равновесия. *Rev. Mod. Phys.* 65, 851-1112 (1993). doi: [10.1103/RevModPhys.65.851](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.851)
12. I. Z. Kiss, Y. Zhai, J. L. Hudson, Emerging coherence in a population of chemical oscillators. *Science* 296, 1676-1678 (2002). doi: [10.1126/science.1070757](https://doi.org/10.1126/science.1070757); pmid: [12040190](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/12040190/)
13. M. R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter, Химера и фазово-кластерные состояния в популяциях связанных химических осцилляторов. *Nat. Phys.* 8, 662-665 (2012). doi: [10.1038/nphys2371](https://doi.org/10.1038/nphys2371).
14. X. L. Feng, C. J. White, A. Hajimiri, M. L. Roukes, A self-resustaining ultrahigh-frequency nanoelectromechanical oscillator. *Nat. Nanotechnol.* 3, 342-346 (2008). doi: [10.1038/nnano.2008.125](https://doi.org/10.1038/nnano.2008.125); pmid: [18654544](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/18654544/)
15. Л. Г. Виллануэва и др., Наноразмерный параметрический осциллятор с обратной связью. *Nano Lett.* 11, 5054-5059 (2011). doi: [10.1021/nl203116z](https://doi.org/10.1021/nl203116z); pmid: [22007833](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22007833/)
16. Л. Г. Виллануэва и др., Преодоление фундаментальных пределов осцилляторов с помощью нелинейных резонаторов. *Phys. Rev. Lett.* 110, 177208 (2013). doi: [10.1103/PhysRevLett.110.177208](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.177208); pmid: [23679770](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/23679770/).
17. M. H. Matheny et al., Фазовая синхронизация двух ангармонических наномеханических осцилляторов. *Phys. Rev. Lett.* 112, 014101 (2014). doi: [10.1103/PhysRevLett.112.014101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.014101); pmid: [24483899](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/24483899/)
18. Y. Kuramoto, Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *Международный симпозиум по математическим проблемам теоретической физики* (Springer, 1975), стр. 420-422.
19. J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, R. Spigler, Модель Курамото: Простая парадигма для явлений синхронизации. *Rev. Mod. Phys.* 77, 137-185 (2005). doi: [10.1103/RevModPhys.77.137](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137)
20. H. Sakaguchi, Y. Kuramoto, Модель растворимого активного ротатора, показывающая фазовые переходы через взаимные развлеченния. *Прог. Theor. Phys.* 76, 576-581 (1986). doi: [10.1143/PTP.76.576](https://doi.org/10.1143/PTP.76.576)
21. P. Ashwin, J. W. Swift, Динамика п слабо связанных идентичных осцилляторов. *J. Nonlinear Sci.* 2, 69-108 (1992). doi: [10.1007/BF02429852](https://doi.org/10.1007/BF02429852).
22. L. M. Pecora, F. Sorrentino, A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, Кластерная синхронизация и изолированная десинхронизация в сложных сетях с симметриями. *Nat. Commun.* 5, 4079 (2014). doi: [10.1038/ncomms5079](https://doi.org/10.1038/ncomms5079); pmid: [24923317](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/24923317/).
23. I. Z. Kiss, C. G. Rusin, H. Kori, J. L. Hudson, Engineering complex dynamical structures: Последовательные паттерны и десинхронизация. *Science* 316, 1886-1889 (2007). doi: [10.1126/science.1140858](https://doi.org/10.1126/science.1140858); pmid: [17525302](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/17525302/)
24. J. Д. Харт, К. Бансал, Т. Е. Мерфи, Р. Рой, Экспериментальное наблюдение химерных и кластерных состояний в минимальной глобально связанной сети. *Chaos* 26, 094801 (2016). doi: [10.1063/1.4953662](https://doi.org/10.1063/1.4953662); pmid: [27781456](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27781456/)
25. А. А. Темірбаев, Z. Zh. Жанабаев, С.Б. Тарасов, V. И. Пономаренко, М. Розенблум, Эксперименты на Matheny et al., *Science* 363, eaav7932 (2019)

ансамблях осцилляторов с глобальной нелинейной связью. *Phys. Rev. E* 85, 015204 (2012). doi: [10.1103/PhysRevE.85.015204](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.015204); pmid: [22400613](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22400613/)

26. P. S. Skardal, E. Ott, J. G. Restrepo, Cluster synchrony in systems of coupled phase oscillators with higher-order coupling. *Phys. Rev. E* 84, 036208 (2011). doi: [10.1103/PhysRevE.84.036208](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.036208); pmid: [22060476](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22060476/)
27. А. Пиковский, М. Розенблум, Самоорганизованная частично синхронная динамика в популяциях нелинейно связанных осцилляторов. *Physica D* 238, 27-37 (2009). doi: [10.1016/j.physd.2008.08.018](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.08.018)
28. Р. Клузелла, А. Полити, М. Розенблум, Минимальная модель самосогласованной частичной синхронии. *New J. Phys.* 18, 093037 (2016). doi: [10.1088/1367-2630/18/9/093037](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/9/093037).
29. P. Ashwin, O. Burylko, Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators. *Хаос* 25, 013106 (2015). doi: [10.1063/1.4905197](https://doi.org/10.1063/1.4905197); pmid: [25637917](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25637917/)
30. W. Fon et al., Сложные динамические сети, построенные с помощью полностью управляемых нелинейных наномеханических осцилляторов. *Nano Lett.* 17, 5977-5983 (2017). doi: [10.1021/acs.nanolett.7b02026](https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.7b02026); pmid: [28884582](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/28884582/)
31. М. С. Cross, J. L. Rogers, R. Lifshitz, A. Zumdieck, Synchronization by reactive coupling and nonlinear frequency pull. *Phys. Rev. E* 73, 036205 (2006). doi: [10.1103/PhysRevE.73.036205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.036205); pmid: [16605629](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/16605629/)
32. M. C. Cross, A. Zumdieck, R. Lifshitz, J. L. Rogers, Synchronization by nonlinear frequency pulling. *Phys. Rev. Lett.* 93, 224101 (2004). doi: [10.1103/PhysRevLett.93.224101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.224101); pmid: [15601092](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/15601092/).
33. А. Пиковский, М. Розенблум, Дж. Куртс, *Синхронизация: Универсальное понятие в нелинейных науках* (Cambridge Univ. Press, 2003).
34. J. Эменхайзер и др., Паттерны синхронизации: Индуцированное шумом переключение аттракторов в кольцах связанных нелинейных осцилляторов. *Chaos* 26, 094816 (2016). doi: [10.1063/1.4960191](https://doi.org/10.1063/1.4960191); pmid: [27781453](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27781453/).
35. А. Пиковский, П. Розенау, Фазовые компактоны. *Physica D* 218, 56-69 (2006). doi: [10.1016/j.physd.2006.04.015](https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.04.015)
36. B. Blasius, R. Tönjes, Квазирегулярные концентрические волны в неоднородных решетках связанных осцилляторов. *Phys. Rev. Lett.* 95, 084101 (2005). doi: [10.1103/PhysRevLett.95.084101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.084101); pmid: [16196859](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/16196859/).
37. M. H. Matheny, L. G. Villanueva, R. B. Karabalin, J. E. Sader, M. L. Roukes, Nonlinear mode-coupling in nanomechanical systems. *Nano Lett.* 13, 1622-1626 (2013). doi: [10.1021/nl400070e](https://doi.org/10.1021/nl400070e); pmid: [23496001](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/23496001/)
38. D. A. Wiley, S. H. Strogatz, M. Girvan, The size of the sync basin. *Chaos* 16, 015103 (2006). doi: [10.1063/1.2165594](https://doi.org/10.1063/1.2165594); pmid: [16599769](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/16599769/).
39. Р. Л. Ханикатт, Стохастические алгоритмы Рунге-Кутты. I. Белый шум. *Phys. Rev. A* 45, 600-603 (1992). doi: [10.1103/PhysRevA.45.600](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.600); pmid: [9907023](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/9907023/)
40. M. C. Soriano, G. Van der Sande, I. Fischer, C. R. Mirasso, Synchronization in simple network motifs with negligible correlation and mutual information measures. *Phys. Rev. Lett.* 108, 134101 (2012). doi: [10.1103/PhysRevLett.108.134101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.134101); pmid: [22540702](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/22540702/).
41. J. Alexander, G. Auchmuty, Глобальные бифуркации осцилляторов с фазовой блокировкой. *Арх. Ration. Mech. Anal.* 93, 253-270 (1986). doi: [10.1007/BF00281500](https://doi.org/10.1007/BF00281500).
42. A. M. Hagerstrom et al., Экспериментальное наблюдение химер в решетках со связанными картами. *Nat. Phys.* 8, 658-661 (2012). doi: [10.1038/nphys2372](https://doi.org/10.1038/nphys2372)
43. M. J. Panaggio, D. M. Abrams, Состояния химеры: Существование когерентности и некогерентности в сетях связанных осцилляторов. *Нелинейность* 28, R67-R87 (2015). doi: [10.1088/0951-7715/28/3/R67](https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/3/R67)
44. Д. М. Абрамс, С. Х. Строгац, Химерные состояния для связанных осцилляторов. *Phys. Rev. Lett.* 93, 174102 (2004). doi: [10.1103/PhysRevLett.93.174102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102); pmid: [15525081](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/15525081/)
45. M. J. Panaggio, D. M. Abrams, P. Ashwin, C. R. Laing, Chimera states in networks of phase oscillators: Случай двух малых популяций. *Phys. Rev. E* 93, 012218 (2016). doi: [10.1103/PhysRevE.93.012218](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.012218); pmid: [26871084](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26871084/)
46. Y. S. Cho, T. Nishikawa, A. E. Motter, Стабильные химеры и независимо синхронизируемые кластеры. *Phys. Rev. Lett.* 119, 084101 (2017). doi: [10.1103/PhysRevLett.119.084101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.084101); pmid: [28952757](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/28952757/).
47. R. Grigoriev, M. Cross, H. Schuster, Pinning control of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. Lett.* 79, 2795-2798 (1997). doi: [10.1103/PhysRevLett.79.2795](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.79.2795)
48. M. Mesbahi, M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks* (Princeton Univ. Press, 2010).

За  
гр  
у  
же  
но  
с  
са  
йт  
а  
htt  
p:/  
/s  
ci  
en  
ce  
.s  
ci  
en  
ce  
m  
ag  
.o  
rg  
/7  
ма  
рт  
а  
20  
19  
г.

49. Т. Колетта, Р. Делабейс, И. Адагидели, П. Жакод, Топологически защищенные петлевые потоки в высоковольтных сетях переменного тока. *New J. Phys.* 18, 103042 (2016). doi: [10.1088/1367-2630/18/10/103042](https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/10/103042)
50. Е. Дж. Лернер, в *Гравитационные, электрические и магнитные силы: Антология современной мысли*, Л. К. Крысак, ред. (Розен, Нью-Йорк, 2006), стр. 41-50.
51. Y. Susuki, I. Mezić, T. Hikiyara, Coherent swing instability of power grids. *J. Nonlinear Sci.* 21, 403-439 (2011). doi: [10.1007/s00332-010-9087-5](https://doi.org/10.1007/s00332-010-9087-5)
52. D. Helbing, Трафик и связанные с ним самодвижущиеся многочастичные системы. *Rev. Mod. Phys.* 73, 1067-1141 (2001). doi: [10.1103/ RevModPhys.73.1067](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.1067)
53. В. С. Кернер, Автосолитоны в прикладной физике и дорожном движении *AIP Conf. Proc.* 375, 777-839 (1996). doi: [10.1063/1.51016](https://doi.org/10.1063/1.51016)
54. В. С. Кернер, П. Конхойзер, Кластерный эффект в изначально однородном транспортном потоке. *Phys. Rev. E* 48, R2335-R2338 (1993). doi: [10.1103/PhysRevE.48.R2335](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.R2335); pmid: [9960969](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/9960969/).
55. I. Omelchenko, A. Provata, J. Hizanidis, E. Schöll, P. Hövel, Robustness of chimera states for coupled FitzHugh-Nagumo oscillators. *Phys. Rev. E* 91, 022917 (2015). doi: [10.1103/ PhysRevE.91.022917](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.022917); pmid: [25768579](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/25768579/)
56. B. K. Bera, D. Ghosh, M. Lakshmanan, Chimera states in bursting neurons. *Phys. Rev. E* 93, 012205 (2016). doi: [10.1103/PhysRevE.93.012205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.012205); pmid: [26871071](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/26871071/)
57. S. Majhi, M. Perc, D. Ghosh, Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure. *Sci. Rep.* 6, 39033 (2016). doi: [10.1038/srep39033](https://doi.org/10.1038/srep39033); pmid: [27958355](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/27958355/)
58. S. Motsch, E. Tadmor, Гетерофильная динамика улучшает консенсус. *SIAM Rev.* 56, 577-621 (2014). doi: [10.1137/120901866](https://doi.org/10.1137/120901866)
59. R. Olfati-Saber, J. A. Fax, R. M. Murray, Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. IEEE* 95, 215-233 (2007). doi: [10.1109/JPROC.2006.887293](https://doi.org/10.1109/JPROC.2006.887293)
60. Н. Ронелленфитш, Дж. Дункель, М. Вильчек, Оптимальный шумоподавляющие сети. *Phys. Rev. Lett.* 121, 208301 (2018). doi: [10.1103/PhysRevLett.121.208301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.208301); pmid: [30500224](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/30500224/)

## БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарим Д. Абрамса за плодотворные комментарии, касающиеся состояний бегущей волны, а также Ж. Э. Сейдера и Р. Лифшица за полезные замечания по рукописи. Мы также благодарим CEA-LETI (Гренобль, Франция) за предоставление пьезоэлектрических многослойных материалов, позволивших провести данное исследование. Мы признательны Институту нанонауки Кавли в Калтехе за критически важную поддержку и инфраструктуру, предоставленную для этой работы.

Финансирование: Данный материал основан на работе, выполненной при поддержке или частичной поддержке Исследовательской лаборатории армии США и Исследовательского управления армии США в рамках грантов MURI W911NF-13-1-0340 и W911NF-18-1-0028, а также при поддержке корпорации Intel в качестве Центра параллельных вычислений Intel. Вклад авторов: М.Н.М. и J.L. изготовили наномеханические устройства; М.Н.М., W.F. и M.L.R. разработали и сконструировали экспериментальную аппаратуру; М.Н.М. написал программное обеспечение для управления/измерений и выполнил измерения; М.Н.М. проанализировал экспериментальные данные при участии J.E., W.F., M.C.C., J.P.C. и M.L.R.; М.Н.М. составила и озвучила все видео с участием J.P.C.; J.E., М.Н.М., А.С., А.С. и M.C.C. провели теоретическое моделирование с участием R.M.D., J.P.C., M.P. и M.M.; J.E., М.Н.М., А.С. и А.С. провели теоретическое моделирование.

численного моделирования при участии J.P.C., M.R., M.H.d.B., M.L.R., M.M., M.C.C., M.P., и R.M.D.; М.Н.М. и M.L.R. задумывали эксперимент при участии В.Ф., М.К.К., Ж.Е., А.К., М.М., Л.Д.-О., Р.М.Д. и Дж.

М.Л.Р. подготовил рукопись при участии всех авторов. Все авторы обсуждали результаты и их последствия в равной степени на всех этапах. Конкурирующие интересы: Не заявлено. Доступность данных и материалов: Все (другие) данные, необходимые для оценки выводов, сделанных в статье, доступны в следующей онлайн-базе данных: [10.5281/ zenodo.2543765](https://doi.org/10.5281/zenodo.2543765).

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

[www.sciencemag.org/content/363/6431/eaav7932/suppl/DC1](https://www.sciencemag.org/content/363/6431/eaav7932/suppl/DC1)

Материалы и методы

Дополнительный

Материал, Science 363, eaav7932 (2019)

S6 Таблицы S1

- S3 Фильмы S1

- S32 Ссылки

(61-64)

20 октября 2018; принято 24 января 2019

10.1126/science.aav7932

## Экзотические состояния в простой сети нанoeлектромеханических осцилляторов

Мэтью Х. Мэтини, Джеффри Эменхайзер, Уоррен Фон, Эйрли Чепмен, Анастасия Салова, Мартин Роден, Джарвис Ли, Матиас Худоба де Баден, Мартон Посфай, Леонардо Дуэнас-Осорио, Мехран Месбахи, Джеймс П. Кратчфилд, М. К. Кросс, Райсса М. Д'Суза и Майкл Л. Рукс

*Science* **363** (6431), eaav7932.  
DOI: 10.1126/science.aav7932

### Быстрое исследование слабосвязанных осцилляторов

Синхронизирующие осцилляторы являются полезными моделями для изучения связи в динамических системах. Однако многие макроскопические платформы, такие как маятники, развиваются в медленных временных масштабах, что может ограничить наблюдение состояний, возникающих после многих циклов. Мэтини и др. изготовили кольцо из восьми нанoeлектромеханических осцилляторов, резонирующих на частоте 2,2 мегагерца с коэффициентом качества 4000, которые можно быстро контролировать и считывать. Анализ этих больших наборов данных выявил экзотические состояния синхронизации со сложной динамикой и нарушенной симметрией. Теоретическое моделирование показало, что возникающие взаимодействия высшего порядка (такие как бигармонические и ближайшего соседа) стабилизируют сложную динамику, несмотря на то, что сеть имеет слабую связь ближайшего соседа.

*Наука*, этот выпуск стр. eaav7932

СТАТЬИ ИНСТРУМЕНТЫ <http://science.sciencemag.org/content/363/6431/eaav7932>

SUPPLEMENTARY <http://science.sciencemag.org/content/suppl/2019/03/06/363.6431.eaav7932.DC1>  
МАТЕРИАЛЫ

### ССЫЛКИ

В этой статье цитируется 59 статей, 3 из которых вы можете получить бесплатно  
<http://science.sciencemag.org/content/363/6431/eaav7932#BIBL>

ПЕРМИССИИ <http://www.sciencemag.org/help/reprints-and-permissions>

Использование этой статьи регулируется [Условиями предоставления услуг](#)