



МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ГОРБАЧЕВ  
ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ

---

МЕХМАТ МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТКУ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

**НОВИКОВУ ЕВГЕНИЮ АНТОНОВНУ**



# Содержание

Лекция 1 .....	6
Сплошная среда.....	6
1.1 Предмет механики сплошных сред.....	6
1.2 Основная задача механики сплошных сред.....	6
1.3 Подходы к рассмотрению движения сплошной среды .....	8
1.4 Примеры .....	9
Лекция 2 .....	11
Переход от одной системы координат к другой.....	11
2.1 Потенциальные процессы. Действия над векторами.....	11
2.2 Понятие ковариантных и контрвариантных векторов. Преобразование векторов координатного базиса.....	12
2.3 Преобразования компонент векторов. Понятие метрического тензора. ....	14
Лекция 3 .....	16
Дифференцирование тензоров. Символы Кристоффеля .....	16
3.1 Симметрия символа Кристоффеля.....	16
3.2 Ковариантная и контрвариантная производная.....	16
Лекция 4 .....	19
Теория деформаций.....	19
4.1 Действия над тензорами (продолжение). ....	19
4.2 Вычисление длин дуг .....	20
4.3 Компоненты тензора деформации Грина. Его представление с помощью вектора перемещения .....	21
4.4 Инварианты тензора деформации Грина. Тензор дисторсии. ....	21
Лекция 5 .....	24
Вычисление изменения длин .....	24
5.1 Процесс деформации по Лагранжу.....	24
5.2 Вычисление компонент единичного вектора .....	25
5.3 Изменение единичного вектора, направленного вдоль оси. Понятие относительного удлинения вдоль заданного направления.....	26

5.4 Вычисление изменения углов между векторами при деформациях. Вычисление изменения объема при деформациях. Понятие дилатации. ....	27
5.5 Случай малых деформаций .....	28
Лекция 6 .....	30
Подход Лагранжа .....	30
6.1 Подход Лагранжа .....	30
6.2 Тензор деформации .....	31
6.3 Случай, когда все величины относятся к конечному состоянию. ....	32
Лекция 7 .....	34
Тензор Альманси .....	34
7.1 Тензор Альманси .....	34
7.2 Формулы, по которым вычисляются перемещения, если заданы компоненты тензора деформации для случая малых деформаций .....	36
Лекция 8 .....	38
Теория напряжений .....	38
8.1 Теория напряжений. Метод сечений .....	38
8.2 Построение уравнений движений .....	42
Лекция 9 .....	45
Законы сохранения .....	45
9.1 Некоторые моменты теории напряжений. ....	45
9.2 Закон сохранения массы. ....	46
9.3 Закон сохранения количества движения. Уравнение движения сплошной среды. ....	47
9.4 Закон сохранения момента количества движения. ....	48
Лекция 10 .....	49
Экстремальные значения нормальных напряжений .....	49
10.1 Симметрия тензора напряжений .....	49
10.2 Девиатор напряжения .....	50
10.3 Экстремальные значения нормальных напряжений. Главные направления и напряжения. ....	50
Лекция 11 .....	54
Круги Мора. Простейшие модели сплошных сред .....	54
11.1 Экстремальные значения касательных напряжений .....	54
11.2 Круги Мора .....	55

11.3 Простейшие модели сплошных сред .....	57
Лекция 12 .....	59
Модель идеальной вязкой жидкости .....	59
12.1 Модель идеальной жидкости(газа). Баротропная жидкость(газ).....	59
12.2 Модель идеальной вязкой жидкости .....	61
Лекция 13 .....	64
Механика деформируемого твердого тела .....	64
13.1 Вязкоупругая жидкость .....	64
13.2 Механика деформируемого твердого тела. Теория упругости .....	65
13.3 Уравнение движения .....	67
Лекция 14 .....	70
Математическая модель упругого тела .....	70
14.1 Систематика механики деформируемого тела. Общий вид уравнения движения в лагранжевых координатах. ....	70
14.2. Плоскость симметрии упругих свойств. Ортотропный материал. ....	71
14.3 Плоскость изотропии. Трансверсально изотропный материал. ....	72
14.4 Изотропный материал. Коэффициенты Ламе. ....	73
14.5 Тензор обратный модулю упругости. Физический смысл коэффициентов Ламе.....	74
Лекция 15 .....	77
Модель вязкоупругого тела.....	77
15.1 Деформации. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона. ....	78
15.2 Вязкоупругое тело .....	80
Лекция 16 .....	82
Модель вязкоупругого тела (продолжение) .....	82
16.1 Вязкоупругое тело (продолжение) .....	82
16.2 Упругопластический материал .....	84
Лекция 17 .....	87
Механика композитов .....	87
17.1 Гипотеза единой кривой .....	87
17.2 Понятие композита. Общий алгоритм поиска эффективных характеристик. ....	88
17.3 Первая специальная краевая задача .....	89

17.4 1-ая СКЗ для случай упругого материала .....	89
17.5 Неоднородный по толщине слой .....	91
Лекция 18 .....	92
Термодинамика .....	92
18.2 Закон сохранения энергии .....	93
18.3 Вектор теплового потока .....	94
Лекция 19 .....	96
Законы термодинамики .....	96
19.1 Закон сохранения энергии. Энтродия .....	96
19.2 Второй закон термодинамики .....	98
Лекция 20 .....	101
Уравнение теплопроводности .....	101
20.1 Законы термодинамики .....	101
20.2 Потенциал Гельмгольца .....	103
Лекция 21 .....	106
Постановка задач теплопроводности .....	106
21.1 Уравнение теплопроводности .....	106
21.2 Постановка задач теплопроводности .....	107
Лекция 22 .....	109
Методы теории размерности .....	109
22.1 Термодинамические потенциалы. Связь теплоемкостей при постоянном напряжении и постоянной деформации .....	109
22.2 Теория размерности .....	110
22.3 Структура физических законов. Представление физического закона в безразмерной форме .....	111
Лекция 23 .....	113
Теория размерностей .....	113
23.1 Теория размерностей (повторение) .....	113
23.2 Колебание математического маятника .....	114
23.3 Задача о сильном взрыве .....	115
23.4 Задача об обтекании шара потоком вязкой жидкости .....	117

## Лекция 1

### Сплошная среда

#### 1.1 Предмет механики сплошных сред

Теоретическая механика работает с двумя основными объектами:

- тело, состоящее из материальных точек, обладающих массой и связанных между собой;
- абсолютно твердое тело.

Тела, состоящие из большого числа материальных точек, движение каждой из которых описывается своим дифференциальным уравнением, обладают усредненными/макроскопическими характеристиками (например, плотность, давление, скорость, энтропия). Эти характеристики могут быть вычислены статистическими методами.

В механике сплошных сред (МСС) тела считают сплошными.

*Гипотеза сплошности:* тело называется **сплошным**, если в любом бесконечно малом объеме содержится бесконечное количество материальных точек.

Эта гипотеза позволяет перейти от уравнений для отдельной материальной точки к уравнениям для локальных характеристик.

Все движение сплошной среды происходит в евклидовом пространстве и в абсолютном времени.

Объекты исследования МСС: газообразные, жидкие среды; твердые деформируемые тела; тепловые, электромагнитные, радиационные и др. поля.

Задачи МСС: движение жидкости, движение тел в жидкости или в газе, взаимодействие тел с полями, механика деформируемого твердого тела.

#### 1.2 Основная задача механики сплошных сред

**Система координат** - система, устанавливающая соответствие между точками пространства и тройкой чисел  $(x^1, x^2, x^3)$ .

$(0,0,0)$  - **начало координат**. Фиксируя одну из координат, мы получим **координатную плоскость**. Фиксируя две координаты, получим **координатную линию**.

Положение каждой точки задается **радиус-вектором**  $\vec{r}(x^1, x^2, x^3)$ .

Введем пространственный базис координатной системы. Выберем произвольную точку (радиус-вектор  $\vec{r}(x^1, x^2, x^3)$ ) и проведем через нее координатные линии. При смещении на  $\Delta x^1$  получим новую точку  $\vec{r}(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3)$  (см. рис. 1.1).

$$\text{Рассмотрим } \vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \lim_{\Delta x^1 \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(x^1, x^2, x^3) - \vec{r}(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3)}{\Delta x^1} \quad (1)$$

- касательный вектор к кривой  $x^1$ .

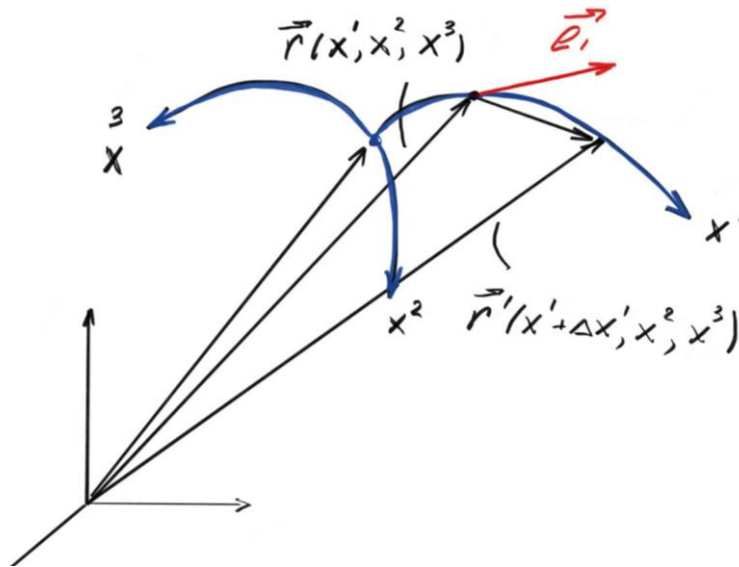


Рис. 1.1 Введение базиса в координатном пространстве

**Базисом** в координатном пространстве назовем вектора  $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$ , где  $i=1,2,3$  (2)

Разложение  $\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i$  по базису (3)

Условимся, что малые латинские индексы принимают значения 1,2,3, большие латинские индексы – 1,2. Кроме того, будем “опускать” знак  $\sum_i^n$ , если суммирование

ведется по двум одинаковым верхним и нижним индексам:  $\vec{r} = x^i \vec{e}_i$ ,  $i$  –

“немой индекс”. Пространственные координаты, связанные с точками пространства называются “эйлеровы”.

Рассмотрим некоторое тело в начальной конфигурации  $V_0$ :  $t=t_0$  (см. рис. 1.2). В начальный момент координаты тела  $\xi^i \equiv x^{0i}$ . Проведем через произвольную точку  $M$  прямолинейные координатные линии  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ , состоящие из материальных точек тела. Спустя время с телом произошли изменения, т.  $M$  переместилась, стали криволинейными координатные линии. Важно, что при таком преобразовании не изменились координаты точек тела относительно координатных линий.

Наблюдая за отдельной точкой, можно легко вычислить ее скорость  $v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$  (4) и ускорение  $a^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}$  (5).



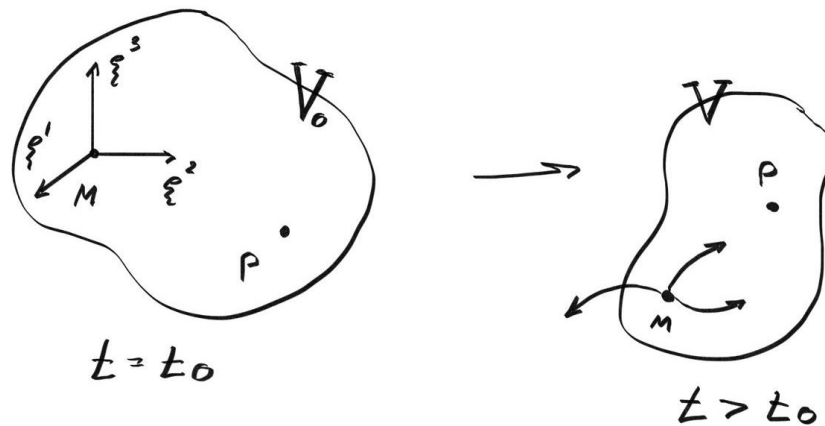


Рис. 1.2 Изменение координатных линий

### 1.3 Подходы к рассмотрению движения сплошной среды

Движение сплошной среды можно изучать, исходя из двух подходов:

#### Подход Лагранжа.

Когда известно  $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = x^i(\xi, t)$  при  $t = t_0 \Rightarrow x^i = x^{0i}$ , (6)

где  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  - начальные координаты точки, за которой мы ведем наблюдение.

**Подход Эйлера.** Когда известно  $v^i = v^i(x^1, x^2, x^3, t) = v^i(x, t)$  (7)

(или любой другой характеристики среды: температуры, ускорения, энтропии и др.) для каждой ее точки.

Закон движения предполагает, что (6) и (7) - непрерывные функции, а движение взаимно однозначно. Тогда соотношение (6) - обратимо:  $\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t)$ .

Чтобы осуществить переход от подхода Лагранжа к подходу Эйлера, нужно продифференцировать (6):  $v_i = \frac{\partial x}{\partial t}$  и  $a_i = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ . (8)

Для обратного перехода необходимо решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = v^i(x^1, x^2, x^3, t) \quad (9)$$

Решение системы:  $x^i = x^i(c^1, c^2, c^3, t)$ , где  $c^1, c^2, c^3$  - константы (10)

$$t=t_0; x^i = x^{0i} \equiv \xi^i \quad (11)$$

$$\xi^i = \xi^i(c^1, c^2, c^3, t_0) \Rightarrow \quad (12)$$

$$c^i = c^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0) \quad (13)$$

Подставляя (13) в закон движения, получаем:  $x^i = x^i(c^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), c^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), c^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), t) \equiv x^i(\xi, t)$

*Точка зрения Лагранжа применяется для твердых деформируемых тел, Эйлера - для процессов в газах и жидкостях.*

#### 1.4 Примеры

Рассмотрим пример: фиксируем некоторую мат. точку, в которую в разные моменты времени приходят другие мат. точки, обладающие определенным свойством А (скалярным/ векторным/ тензорным или др).

1)  $A = A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ , где  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$  не зависят от времени.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} - \text{Лагранж};$$

2)  $A = A(x^1, x^2, x^3, t)$  - Эйлер

Воспользуемся обратимостью закона движения  $A = A(x^1(\xi, t), x^2(\xi, t), x^3(\xi, t), t)$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^i} \cdot v^i \quad (14)$$

Первое слагаемое - *локальная производная* (показывает изменение характеристики А в фиксированной точке пространства)

Второе слагаемое - *конвективная составляющая* (возникает из-за того, что в выбранную точку приходят мат. частицы из близлежащих точек)

- $\rho(x, t)$  — плотность;

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \cdot v^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \rho \quad (15)$$

- $A(x, t)$  - ускорение;

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \cdot v^k = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} v^i \quad (16)$$

#### 1.5 Понятие траектории частицы и линии тока. Их связь.

Процесс называется установившимся, если он не меняется во времени

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} = 0; A = A(x) \right)$$

$$\frac{dA}{dt} = \text{grad} A \cdot \vec{v} = \frac{\partial A}{\partial x^i} \cdot v^i \neq 0;$$

**Траектория частицы** - линия в пространстве, вдоль которой она движется.  
 $x^i = x^i(\xi, t)$

**Линия тока** - линия в пространстве, в каждой точке которой скорость мат. частицы параллельна касательной к этой кривой.

Если пересечь линии тока произвольной кривой, то получится **поверхность тока**. Если же провести пространственную кривую, то через каждую ее точку будут проходить линии тока, образуя **трубку тока**.

Построим выражения для линий тока:  $v^i = v^i(x^1, x^2, x^3, t) = v^i(x, t)$

$$d\vec{r} = dS \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \text{ где } \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} - \text{единичный вектор, направленный по касательной.} \quad (17)$$

$$\frac{dx^i}{dS} = \frac{v^i(x^1, x^2, x^3, t)}{|\vec{v}|} \quad (18)$$

Заметим, что, если в системе (9)  $t$  - переменная, то в (18)  $t$  - параметр. В установившемся состоянии (стационарное течение) решениями систем дифференциальных уравнений (17) и (18) являются:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^i &= x^i(c^1, c^2, c^3, t) = x^i(c^1, c^2, c^3) \\ 2) \quad x^i &= x^i(c^1, c^2, c^3, s, t) \Rightarrow x^i(t = t_0) = \xi^i(c, s, t); \\ &c^i = c^i(\xi, s, t_0) \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, в установившемся процессе линии тока совпадают с траекторией движения частиц.

## Лекция 2

### Переход от одной системы координат к другой

- Подход Лагранжа заключается в том, что мы вводим систему координат и описываем движение с помощью  $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ ,

где  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  - координаты точки в актуальном состоянии. Таким образом мы получаем траекторию движения мат. точки.

Вычисляют изменение характеристики в данной мат. точке при подходе

Лагранжа так:  $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t}$  (частная производная совпадает с полной для любой характеристики).

При подходе Эйлера мы выбираем точку и помещаем туда наблюдателя, который следит за тем, какими свойствами обладают приходящие туда точки.

$$A = A(x^1(\xi, t), x^2(\xi, t), x^3(\xi, t), t)$$

$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x^i} \cdot v^i = \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad}A \cdot \vec{v}$ , если  $A$  - скаляр, то  $\text{grad}A$ - вектор, если  $A$ - вектор, то  $\text{grad}A$ - тензор.

#### 2.1 Потенциальные процессы. Действия над векторами

Рассматриваем Эйлеровский подход.

**Процесс** обладает **потенциальным** признаком, если  $\exists \varphi(x, t): v^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \Rightarrow \vec{v} = \text{grad} \varphi$ ,  $\varphi$  – потенциал движения : (1)

**Условие существования потенциала:**  $\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$  (2)

При рассмотрении различных задач возникает потребность в переходе от одной системы координат к другой, такой, что в ней поверхность тела или поверхность границы, в пределах которой происходит движение сплошной среды, будет описываться проще (например, координатной линией). В этом случае граничные условия задаются легче, задача упрощается.

Вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно:

- 1) складывать по правилу параллелограмма
- 2) умножать на скаляр

3) умножать друг на друга:

- Скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cos \varphi$
- Векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b} = |a| \cdot |b| \sin \varphi$
- Диадное произведение  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  - результат: тензор

Замечание,  $\vec{a} \otimes \vec{b} \neq \vec{b} \otimes \vec{a}$

- Полиадное произведение  $\vec{a} \otimes \vec{b} \otimes \vec{c}$

Любые три некопланарные вектора могут быть выбраны в качестве базиса. Вводится радиус-вектор  $\vec{r}(x^1, x^2, x^3)$  и базисные вектора  $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$ , где  $i=1,2,3$ . Если система координат декартова, то базисные вектора единичные и одинаковые во всех точках. В криволинейной системе координат базисы произвольной длины и зависят от точки.

## 2.2 Понятие ковариантных и контрвариантных векторов. Преобразование векторов координатного базиса.

Объекты с нижними индексами называют **ковариантными** (векторы базиса), с верхними - **контрвариантными** (координаты вектора в разложении базиса):

$$\vec{r} = x^i \vec{e}_i \text{ (обозначение для сумма по договоренности).}$$

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i, a^i - \text{контрвариантные компоненты вектора} \quad (3)$$

Для того чтобы выразить  $a^i$  через вектор и базис, необходимо ввести  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  – *сопряженный базис* (вектора которого перпендикулярны векторам исходного)

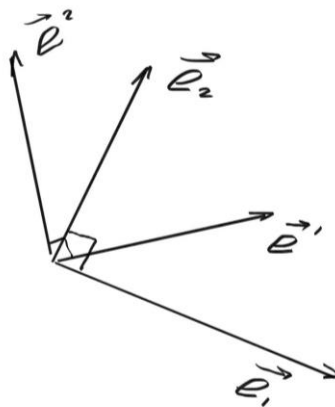


Рис. 2.2 Сопряженные базисы

Сопряженным базисом  $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$  к базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  называется такой базис, что  $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i = \{1, i = j; 0, i \neq j\}$  – символ Кронекера (см. рис. 2.2) (4)

$$\vec{e}^1 = \epsilon^{ijk} \cdot \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{2\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}, \quad \epsilon^{ijk} - \text{символ Леви-Чивиты} \quad (5)$$

$$\epsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ 0, & \text{при совпадении двух индексов} \\ -1, & \text{если перестановка нечетная} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Например, } \vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}; \vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}; \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)} \quad (7)$$

$$\text{Имеем } \vec{a} \cdot \vec{e}^i = a^i \vec{e}_j \cdot \vec{e}^j = a^i \delta_j^j = a^i \Rightarrow$$

$a^i = \vec{a} \cdot \vec{e}^i$  – представление контрвариантной компоненты вектора  $\vec{a}$  через сам вектор и контравариантный базис. (8)

$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$  – представление ковариантной компоненты вектора  $\vec{a}$  через сам вектор и ковариантный базис. (9)

Таким образом, мы можем разложить один и тот же вектор по контрвариантному и ковариантному базису:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}^i - \text{разложение по контрвариантному базису} \quad (10)$$

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i - \text{разложение по ковариантному базису} \quad (11)$$

Посмотрим, как будут меняться базисные вектора при переходе к другой системе координат. Пусть исходная система координат  $O, x^1, x^2, x^3$  и базисы  $\vec{e}^i$  и  $\vec{e}_i$ . Введем новую систему координат  $x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3)$  (12)

Чтобы преобразование было взаимно однозначным, нужно

$$D = \left| \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \right| \neq 0 \quad (13)$$

$$\text{Введем прямую матрицу преобразования } A_{\cdot j}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Т.к ее определитель не равен 0, то мы можем получить **обратную матрицу преобразования**  $(B_{\cdot j}^i) = (\frac{\partial x^i}{\partial x'^j})$ . (15)

Она позволяет выразить старые координаты через новые.

$$A_{\cdot k}^i \cdot B_{\cdot j}^k = \delta_j^i \quad (16)$$

$$\vec{r}(x^1, x^2, x^3) \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$$

$$\text{Тогда } \vec{r}(x^1(x'^1, x'^2, x'^3), x^2(x'^1, x'^2, x'^3), x^3(x'^1, x'^2, x'^3)) = \vec{r}(x'^1, x'^2, x'^3);$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \vec{e}_k B_{\cdot i'}^k = \vec{e}_i \Rightarrow \vec{e}_i \quad (17)$$

$$\vec{e}^{i'} = A_{\cdot k}^i \vec{e}^k \quad (18)$$

### 2.3 Преобразования компонент векторов. Понятие метрического тензора.

Все ковариантные величины преобразуются с помощью обратной матрицы преобразования, контрвариантные - с помощью прямой матрицы.

Преобразование компонент векторов:

$$\vec{a} = a^{i'} \vec{e}_{i'} = a^{i'} B_{\cdot i'}^k \vec{e}_k = a^k \vec{e}_k \Rightarrow$$

$$(a^{i'} B_{\cdot i'}^k - a^k) \vec{e}_k = \vec{0}, \vec{e}_k - \text{линейно независимые вектора} \Rightarrow$$

$$a^{i'} B_{\cdot i'}^k - a^k = 0$$

$$a^k = a^{i'} B_{\cdot i'}^k$$

$$\text{Получаем } a^{i'} = A_{\cdot k}^i a^k \quad (19)$$

$$a_{i'}' = B_{\cdot i'}^k a_k \quad (20)$$

$\vec{a} = a_i \vec{e}^i = a^i \vec{e}_i$  При переходе к другой системе координат меняются базисные вектора и компоненты вектора, но сам вектор остается неизменным. Покажем это:

$$\vec{a} = a^{i'} \vec{e}_{i'} = A_{\cdot k}^i a^k \cdot B_{\cdot i'}^l \vec{e}_l = \delta_k^l a^k \vec{e}_l = a^k \vec{e}_k = \vec{a}$$

Введем **фундаментальную матрицу**  $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ , причем по определению  $g_{ij} = g_{ji}$  (симметричная матрица) (21)

$g'_{ij} = \vec{e}'_i \vec{e}'_j = B^k_i \vec{e}_k \cdot B^l_j \vec{e}_l = B^k_i B^l_j g_{kl}$ , новые компоненты преобразуются с помощью обратной матрицы  $\Rightarrow$  это ковариантные компоненты данного инвариантного объекта. Этот объект вводится с помощью диадного произведения.

$\hat{g} = g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$  - инвариантный объект относительно преобразования координат, который мы будем называть **тензором второго ранга**.

$$\hat{g} = g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = g^i_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = g^j_i \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j \text{ ( в 4-х диадных базисах )}$$

Данный тензор называют *фундаментальным метрическим*, т.к., зная его компоненты, мы можем определить **длину элементарного отрезка**:

$$dS = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = \sqrt{x^i \vec{e}_i x^j \vec{e}_j} = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (22)$$

Тензор второго ранга имеет обширную область применения:  $\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j$

Покажем это, воспользовавшись формулами (8), (9):

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a^i \vec{e}_i \vec{e}_j = a^i g_{ij}$$

$$a^j = \vec{a} \cdot \vec{e}^j = a_i \vec{e}^i \vec{e}^j = a_i g^{ij}$$



## Лекция 3

### Дифференцирование тензоров. Символы Кристоффеля

#### 3.1 Симметрия символа Кристоффеля.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi} \quad (1)$$

Следующие формулы получаются циклической перестановкой в (1):

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{jk}^m g_{mi} + \Gamma_{ij}^m g_{mk} \quad (2)$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{ik}^m g_{mj} \quad (3)$$

$$\text{Вычислим (2)+(3)-(1): } \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2\Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

$$\text{Обратим } g_{mk} : \Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} g^{mk} \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (4)$$

*Символы Кристоффеля позволяют найти производные от ковариантного базиса.*

#### 3.2 Ковариантная и контрвариантная производная.

Вычислим производную от контрвариантного базиса:

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^i} = A_{kj}^i \vec{e}^k, \text{ где } A_{kj}^i \text{ - коэффициенты разложения.} \quad (5)$$

*Эти коэффициенты связаны с символами Кристоффеля:  $\vec{e}^k \cdot \vec{e}_i = \delta_i^k$ .*

При дифференцировании символа Кронекера (скаляр) получаем 0. Тогда

$$0 = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \vec{e}^k + \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}^k}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \vec{e}_m \vec{e}^k + \vec{e}_i A_{mj}^k \vec{e}^m = \Gamma_{ij}^k \delta_m^k + A_{mj}^k \delta_i^m = \Gamma_{ij}^k + A_{ij}^k \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = -A_{ij}^k \quad (6)$$

Это же соотношение можно получить, используя поднятие и опускание индексов.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} &= \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k; \\ \frac{\partial \vec{e}^i}{\partial x^j} &= -\Gamma_{kj}^i \vec{e}^k \end{aligned} \quad (7)$$

- *Дифференцирование векторов:*

Пусть  $\vec{a}$  – некоторый вектор

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (a^j \vec{e}_j) = \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \vec{e}_j + a^j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} = \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \vec{e}_j + \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k a^j = \left( \frac{\partial a^k}{\partial x^i} + a^j \Gamma_{ji}^k \right) \vec{e}_k = \nabla_i a^k \vec{e}_k \quad (8)$$

$\nabla_i a^k \equiv \frac{\partial a^k}{\partial x^i} + a^j \Gamma_{ji}^k$  - ковариантная производная контрвариантных компонент вектора . (9)

Проделав подобные выкладки, можно получить:

$\nabla_i a_k \equiv \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^j a_j$  - контрвариантная производная ковариантных компонент вектора (10)

Если мы дифференцируем компоненты инвариантного объекта в криволинейной системе координат, то используем вместо частных производных обозначения, введенные выше.

- Дифференцирование тензора второго ранга:

$\hat{a} = a_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$ ; Если частным образом продифференцировать  $a_{ij}$  и каждый вектор  $\vec{e}^i, \vec{e}^j$  отдельно, то получим выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{a}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (a_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j) = \frac{\partial}{\partial x^k} (a^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \frac{\partial}{\partial x^k} (a^i_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j) = \frac{\partial}{\partial x^k} (a^j_i \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j) \\ \nabla_k a_{ij} &= a_{ij,k} \{ \text{обозначение для частной производной по } x^k \} - \Gamma_{ik}^m a_{mj} - \\ \Gamma_{jk}^m a_{im} &\quad (11) \end{aligned}$$

$$\nabla_k a^{ij} = a^{ij}_{,k} + \Gamma_{mk}^i a^{mj} + \Gamma_{mk}^j a^{im} \quad (12)$$

Несмотря на то, что уравнения в криволинейных координатах принимают более сложный вид, чем в прямолинейных, их удобно использовать для описания граничных поверхностей, через которые происходят все взаимодействия.

Докажем, что ковариантная производная является компонентами инвариантного объекта второго ранга (тензором второго ранга) и преобразуется по формулам тензорного анализа:

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \varphi_{,i}$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \vec{e}^i = \nabla_i \varphi \vec{e}^i.$$

Ковариантные производные контрвариантных базисных векторов:

$\nabla_i \vec{e}^j = \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j \vec{e}^k = -\Gamma_{ik}^j \vec{e}^k + \Gamma_{ik}^j \vec{e}^k \equiv 0 \Rightarrow$  относительно ковариантного дифференцирования ковариантные и контрвариантные базисные вектора ведут себя как постоянные величины.

Ковариантная производная произвольного вектора:

$$\nabla_k \vec{a} = \nabla_k (a_j \vec{e}^j) = \nabla_k a_j \vec{e}^j + a_j \nabla_k \vec{e}^j = \nabla_k a_j \vec{e}^j = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k},$$

Покажем, что  $\nabla_k g^{ij} = 0$ ;  $\nabla_k g_{ij} = 0$ ;  $\nabla_k g_j^i = 0$

Это следует из  $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$  (Набла от ковариантного базиса = 0  $\Rightarrow$  доказано  $\nabla_k g_{ij} = 0$ )

Компоненты фундаментального метрического тензора ведут себя как константы относительно ковариантного дифференцирования, хотя это функции координат.

## Лекция 4

### Теория деформаций

#### 4.1 Действия над тензорами (продолжение).

Тензор - *инвариантный* объект. Его можно разложить по ковариантному базису с контрвариантными компонентами или по контрвариантному базису с ковариантными компонентами.

**Вектор** - *тензор второго ранга* - объект с двумя индексами, который представляется в диадном базисе (получаемом из исходного с помощью диадного произведения). Данный вид тензора можно разложить по диадному базису четырьмя разными способами.

**Тензор n-ого ранга** - индексный объект с n индексами, представленный в соответствующем полиадном базисе.

В прошлой лекции было разобрано дифференцирование вектора. Если бы вектор был представлен в прямолинейном базисе, то его производная равнялась бы частным производным от компонент вектора, умноженным на базисные векторы. В криволинейной системе координат, когда базисные вектора меняются от точки к точке, производная вектора :

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(a^j \vec{e}_j) = \nabla_i a^j \vec{e}_j \quad (1)$$

$$\nabla_i a^j \equiv \frac{\partial a^j}{\partial x^i} + a^k \Gamma_{ik}^j. \quad (2)$$

Замечание,  $\Gamma_{ik}^j$  не является инвариантным объектом.

$$\text{При переходе к другой системе координат } \frac{\partial \vec{a}(x(x'),t)}{\partial x'^i} = \frac{\partial a}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = B_{\cdot i}^k \left( \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} \right) \quad (3)$$

⇒ сама производная — инвариантный объект.

Можно ввести объект  $\hat{T} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} \otimes \vec{e}^i$ . Первый множитель преобразуется с помощью обратной матрицы перехода, второй - прямой. Тогда получается, что  $\hat{T}$ -инвариантный объект.

$$\hat{T} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^i} \otimes \vec{e}^i = \nabla_i a^k \vec{e}_k \otimes \vec{e}^i = \nabla_i a_k \vec{e}^k \otimes \vec{e}^i = \nabla^i a_k \vec{e}^k \otimes \vec{e}_i \quad (4)$$

$$\text{Отметим, что } \nabla^i a_k = g^{im} \nabla_m a_k \quad (5)$$

## 4.2 Вычисление длин дуг

Любая сплошная среда под действием внешних нагрузок изменяет свою форму

(объем, углы между кривыми, элементарный объем, площадки, длины и т.д). Существует математический аппарат, позволяющий вычислять длины в деформированном состоянии и направление единичного вектора.

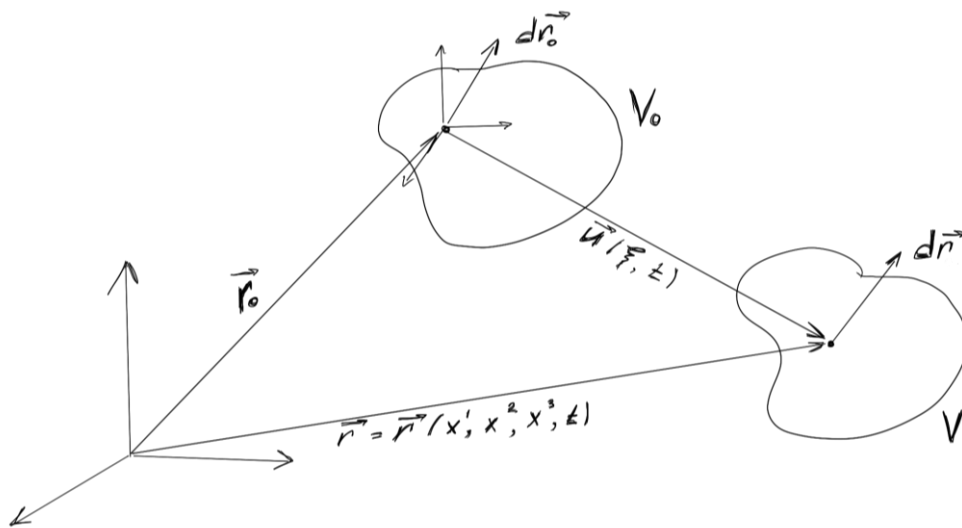


Рис. 4.1 Вычисление длин дуг

Мы уже говорили на первой лекции о двух подходах к рассмотрению сплошных сред: Эйлеровом и Лагранжа. Эти подходы эквивалентны. Эйлеров менее информативен и более удобен при рассмотрении жидких и газообразных сред. Для деформированных твердых сред удобнее применять метод Лагранжа. Воспользуемся им. (см. рис. 4.1)

$x^{oi} \equiv \xi^i$  (характеризует каждую точку в объеме  $V_0$ )  $\in V_0$

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = x^i(\xi, t) \text{ при } t = 0 \quad (6)$$

$$\vec{r}(x^1(\xi, t), x^2(\xi, t), x^3(\xi, t), t) = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$$

Если значения базисных векторов в начальном состоянии  $\vec{e}_i^0 = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i}$ , то в конечном состоянии базис имеет вид:  $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}$  (7)

Построим фундаментальный метрический тензор и будем относить все векторы к начальному состоянию:

Возьмем в начальном состоянии базис:  $g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \vec{e}_j^0$

$$\text{в конечном состоянии базис: } g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j \quad (8)$$

Будем вычислять дуги (см. рис. 4.1):

$$dS_0^2 = d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = d\xi^i \vec{e}_i^0 \cdot d\xi^j \vec{e}_j^0 = g_{ij}^0 d\xi^i d\xi^j \quad (9)$$

$$dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (10)$$

$$\text{Тогда } dS^2 - dS_0^2 = (g_{ij} - g_{ij}^0) d\xi^i d\xi^j = 2\Gamma_{ij} d\xi^i d\xi^j, \quad (11)$$

$$\text{где } \Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0) - \text{компоненты тензора деформации Грина} \quad (12)$$

### 4.3 Компоненты тензора деформации Грина. Его представление с помощью вектора перемещения

Выразим  $\Gamma_{ij}$  в начальном положении. Для этого введем понятие **вектора перемещения**  $\vec{u}(\xi, t)$  (см. рис. 4.1.).

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \vec{e}_i^0 + \frac{\partial}{\partial \xi^i}(u^j \vec{e}_j^0) = \vec{e}_i^0 + \nabla_i u^j \vec{e}_j^0 = (\delta_i^j + \nabla_i u^j) \vec{e}_j^0 \quad (13)$$

Формула (13) позволяет найти ковариантный базис в актуальном состоянии через ковариантный базис в начальном состоянии и вектор перемещения.

Мы ввели тензор деформации по формуле (12), зная только метрические тензоры. Зная же закон движения (6), **можно по  $g_{ij}^0$  вычислить  $g_{ij}$** . То же самое можно сделать, используя вектор перемещения:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = (\delta_i^k + \nabla_i u^k) \vec{e}_k^0 \cdot (\delta_j^l + \nabla_j u^l) \vec{e}_l^0 = \delta_i^k \delta_j^l \vec{e}_k^0 \cdot \vec{e}_l^0 + \\ &\delta_j^l \nabla_i u^k g_{kl}^0 + \delta_i^k \nabla_j u^l g_{kl}^0 + \nabla_i u^k \nabla_j u^l g_{kl}^0 = g_{ij}^0 + \delta_i^k \nabla_j u_k + \delta_j^l \nabla_i u_l + \nabla_i u^k \nabla_j u_k = \\ &g_{ij}^0 + \nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u^k \nabla_j u_k \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Подставим (14) в (12): } \Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \quad (15)$$

Все компоненты вектора перемещения зависят от начального состояния, т.е. от  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ .

Замечание,  $\nabla_i u^k = \frac{\partial u^k}{\partial \xi^i} + \Gamma_{im}^{0k} u^m$ , где  $\Gamma_{im}^{0k}$  вычисляется через  $g_{ij}^0$  и  $g_0^{ij}$ .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - \text{линейная часть тензора деформации (Формула Коши).}$$

### 4.4 Инварианты тензора деформации Грина. Тензор дисторсии.

$\Gamma_{ij}$  - симметричный тензор  $\Rightarrow$  у него имеются **инварианты** (комбинации из коэффициентов, которые не меняются при преобразовании координат):

$$(16) \quad 1) \quad I_1 \equiv \Gamma_i^i = \Gamma_1^1 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^3 \quad - \quad \text{первый} \quad \text{инвариант}$$

$$(17) \quad 2) \quad I_2 \equiv \Gamma_i^k \Gamma_k^i \quad \text{квадратичный} \quad \text{инвариант}$$

$$(18) \quad 3) \quad I_3 \equiv \det(\Gamma_j^i) = \epsilon_{ijk} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \Gamma_3^k = \frac{1}{6} \epsilon^{lpq} \Gamma_l^i \Gamma_p^j \Gamma_q^k$$

**Теорема Гамильтона-Кэли:** У симметричного тензора 2-ого ранга имеется только три независимых инварианта. Остальные выражаются через них.

$D_{ij} = \nabla_j u_i$  - тензор дисторсии

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + \frac{1}{2}(\nabla_j u_i - \nabla_i u_j)$  - представление тензора дисторсии в виде суммы симметричного и антисимметричного тензора (19)

$$D_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

$$\text{Матрица } \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j u_i - \nabla_i u_j) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & -\omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ \omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Матрицу  $\omega_{ij}$  можно представить в виде вектора:

$$\omega^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \nabla_k u_j = \frac{1}{2} \epsilon^{ikj} \nabla_k u_j = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}, \quad (21)$$

$$\text{где } \text{rot} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \epsilon^{kij} \nabla_i u_j \vec{e}_k^0 \quad (22)$$

$\vec{\nabla} = \vec{e}_k^0 \nabla_j (\dots)$  - оператор Гамильтона.

Теперь все готово к вычислению длин:

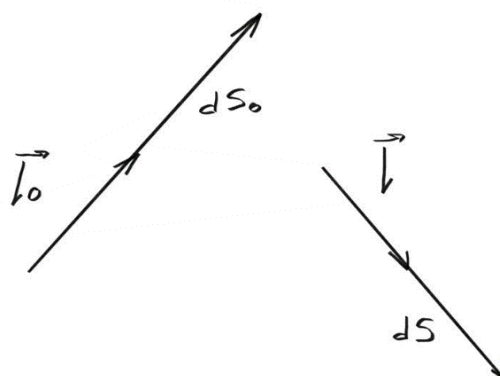


Рис. 4.2  $dS$  и их направляющие вектора

Пусть у нас в начальном положении был вектор  $dS_0^2$  и единичный направляющий вектор  $\vec{l}_0$ . В конечном состоянии они перешли в  $dS^2$  и  $\vec{l}$ . (см. рис. 4.2)

Мы можем вычислить  $\vec{l}$  через  $\vec{l}_0$ ,  $dS^2$  и  $dS_0^2$ . Зная их, можно найти изменение угол между двумя отрезками, изменение элементарных площадей, объемов. (см.рис. 4.3 и 4.4)



Рис. 4.3 Изменения угла между отрезками

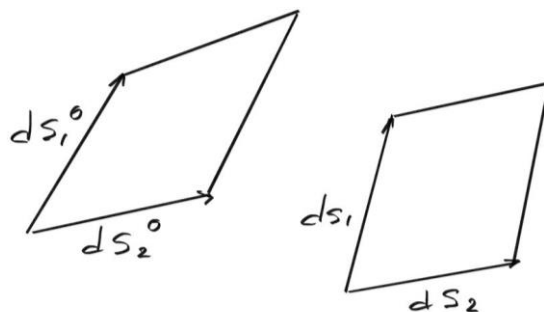


Рис. 4.4 Изменение элементарных площадей



## Лекция 5

### Вычисление изменения длин

#### 5.1 Процесс деформации по Лагранжу

Смысл теории деформации заключается в том, чтобы придумать математический аппарат, по которому можно было бы узнавать, как меняются длины элементарных отрезков и их направления после приложения к ним нагрузок, после которых тело меняет форму, размеры, объем и т.д.

$$\hat{g} - \hat{g}^0 = \hat{R} \quad (\hat{g} - \text{метрический тензор в актуальном состоянии,} \\ \hat{g}^0 - \text{метрический тензор в начальном состоянии})$$

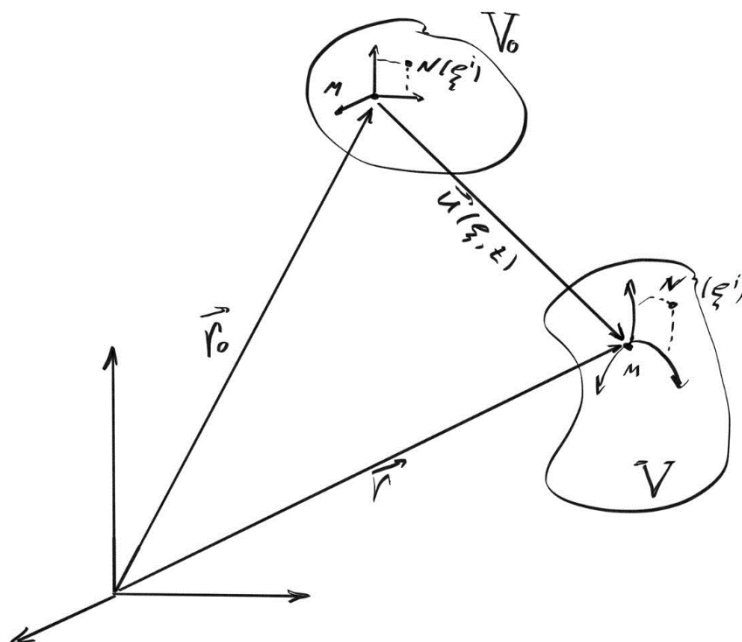


Рис. 5.1 Процесс деформации по Лагранжу

Рассматриваем процесс деформации по Лагранжу:

Введем в  $V_0$  систему координат (чаще в нач. момент вводят декартову), выберем базисные вектора (см. рис. 5.1). После деформации координаты любой фиксированной точки останутся неизменными относительно новой системы координат:

$$\text{Имеем закон движения т. М } x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \Rightarrow$$

$\vec{r}(x^1(\xi, t), x^2(\xi, t), x^3(\xi, t), t) = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ -радиус вектор т. М в начальной системе координат.

$\vec{u} = \vec{u}(\xi, t)$ - вектор перемещения

Из рис. 5.1 видно, что  $\vec{r}(\xi, t) = \vec{r}_0 + \vec{u} = \xi^i \vec{e}_i^0 + u^i \vec{e}_i^0 \Rightarrow x^i = \xi^i + u^i$

Для общности будем считать, что  $\vec{e}_i^0, \vec{e}_i$  - базисы криволинейной системы координат:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u} \Rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \vec{e}_i^0 + \frac{\partial}{\partial \xi^i}(u^j \vec{e}_j^0) = \vec{e}_i^0 + \nabla_i u^j \vec{e}_j^0 = (\delta_i^j + \nabla_i u^j) \vec{e}_j^0$$

$\vec{e}_i = (\delta_i^j + \nabla_i u^j) \vec{e}_j^0$  - базис деформированной системы координат, выраженный через начальный. (1)

$$g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j = g_{ij}^0 + 2\Gamma_{ij}, \quad (2)$$

$$\text{где } \Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - \text{линейная часть тензора деформации} \quad (4)$$

## 5.2 Вычисление компонент единичного вектора

Пусть в исходной системе координат  $d\vec{r} = d\xi^i \vec{e}_i^0$ . Возьмем абсолютную величину  $dS_0 = |d\vec{r}_0|$  и разделим на нее  $d\vec{r}_0 \Rightarrow$  получим единичный вектор в направлении  $d\vec{r}_0$  (см. рис. 5.2).

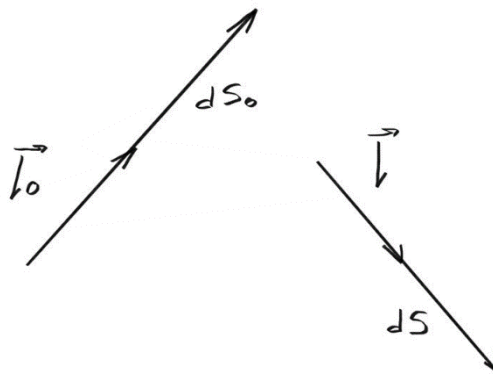


Рис. 5.2 Единичные направляющие вектора

$$\vec{l}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{ds_0} = \frac{d\xi^i}{ds_0} \vec{e}_i^0 \Rightarrow$$

$$l_0^i = \frac{d\xi^i}{ds_0} - \text{компоненты единичного вектора (направляющие косинусы)} \quad (5)$$

$$dS^2 - dS_0^2 = 2\Gamma_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

$$\text{Тогда } dS = \sqrt{(dS^2 - dS_0^2) + dS_0^2} = dS_0 \sqrt{2\Gamma \frac{d\xi^i}{ds_0} \frac{d\xi^j}{ds_0} + 1} = dS_0 \sqrt{2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j + 1} \quad (6)$$

Формула (6) позволяет найти длину в деформированном состоянии, если мы знаем начальную длину и направляющие вектора.

$$\text{Найдем } \vec{l} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{(\delta_i^j + \nabla_i u^j) d\xi^i \vec{e}_i^0}{dS_0 \sqrt{2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j + 1}} = \frac{(\delta_i^j + \nabla_i u^j) l_0^i \vec{e}_i^0}{\sqrt{2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j + 1}} \quad (7)$$

$$\vec{l}_0 = l^j \vec{e}_j^0 \Rightarrow l^i = \frac{(\delta_i^j + \nabla_i u^j) l_0^j}{\sqrt{2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j + 1}} \quad (8)$$

### 5.3 Изменение единичного вектора, направленного вдоль оси. Понятие относительного удлинения вдоль заданного направления.

Пусть задана начальная декартова система координат  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ . Направленный вдоль оси  $\xi^1$  вектор  $d\vec{r}$  после изменения в процессе деформации системы координат приобретает относительно новых базисных векторов три компоненты:

$$\vec{l}_0^1 = (1, 0, 0) \Rightarrow \text{из (6) получаем } dS = d\xi^i \sqrt{2\Gamma_{11} + 1} \quad (9)$$

В общем случае деформированный отрезок, первоначально направленный вдоль оси  $\xi^\alpha$  выражается:

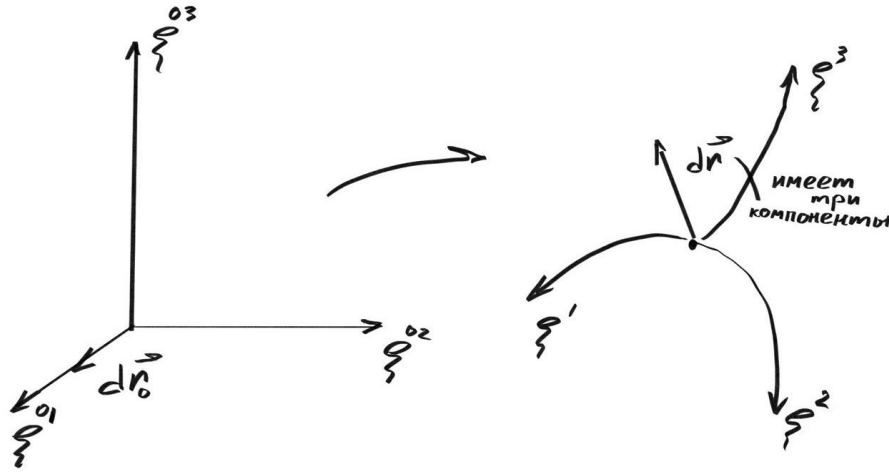


Рис. 5.3 Деформация отрезка, направляющий вектор которого, направлен по оси.

$$dS_\alpha = d\xi^\alpha \sqrt{2\Gamma_{\alpha\alpha} + 1}, \text{ где } \alpha \text{ может быть равно } 1, 2 \text{ или } 3. \text{ (см. рис. 5.3)} \quad (10)$$

Вычислим компоненты  $l^i$  для случая, когда  $d\vec{r}$  направлен вдоль первой координатной оси:

$$l^i = \frac{(\delta_1^i + \nabla_1 u^i)}{\sqrt{2\Gamma_{11} + 1}} \quad (11)$$

$$l_\alpha^i = \frac{(\delta_\alpha^i + \nabla_\alpha u^i)}{\sqrt{2\Gamma_{\alpha\alpha} + 1}} - d\vec{r} \text{ направлен вдоль одной из координатных осей } (\alpha = 1, 2, 3) \quad (12)$$

Для того чтобы упростить формулы вычисления длины дуги, длины элементарного отрезка после деформации, вводится **относительное удлинение** в данном направлении.

Пусть  $\vec{l}_0$  - единичный вектор, тогда относительное удлинение в направлении  $\vec{l}_0$ :

$$\lambda(\vec{l}_0) = \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{dS}{dS_0} - 1 = \sqrt{1 + 2\Gamma_{mn}l_0^m l_0^n} - 1 \quad (13)$$

$$\text{Имеем, } dS = dS_0(1 + \lambda(\vec{l}_0)) \quad (14)$$

$$\text{Если } l_0 \parallel \vec{e}_\alpha, \text{ тогда } \lambda(l_0 \parallel \vec{e}_\alpha) = \sqrt{1 + 2\Gamma_{\alpha\alpha}} - 1 \quad (15)$$

$$\text{Имеем, } l^k = \frac{(\delta_i^k + \nabla_i u^k)l_0^i}{1 + \lambda(\vec{l}_0)} \quad (16)$$

Формулы (14) и (16) являются упрощенными формами записи полученных ранее выражений для  $dS, l^k$ .

#### 5.4 Вычисление изменения углов между векторами при деформациях. Вычисление изменения объема при деформациях. Понятие дилатации.

Пусть в исходном состоянии есть два единичных вектора  $\vec{l}_0$  и  $\vec{m}_0$  и угол между ними (всегда острый по определению)  $\vartheta_0$ . После деформации угол стал равным  $\vartheta$ . (см. рис. 5.4)

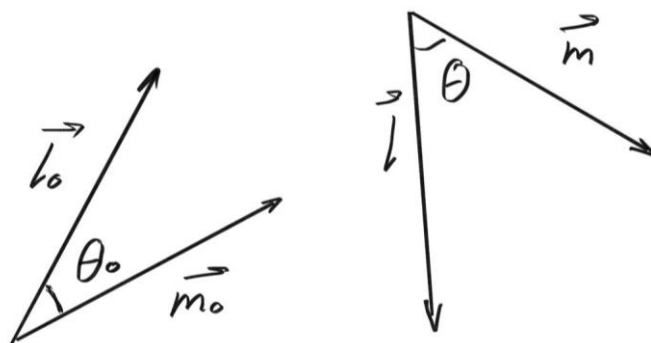


Рис. 5.4 Изменение угла между единичными векторами

$$\begin{aligned}\cos\vartheta_0 &= \vec{l}_0 \cdot \vec{m}_0 = l_0^k m_{0k} \\ \cos\vartheta &= \vec{l} \cdot \vec{m} = l^k m_k = \frac{(\delta_i^k + \nabla_i u^k) l_0^i}{1 + \lambda(\vec{l}_0)} \frac{(\delta_k^j + \nabla_k u^j) m_{0j}}{1 + \lambda(\vec{m}_0)} = \frac{l_0^i m_{0i} + 2\Gamma_{ij} l_0^i m_0^j}{(1 + \lambda(\vec{l}_0))(1 + \lambda(\vec{m}_0))} = \\ &= \frac{\cos\vartheta_0 + 2\Gamma_{ij} l_0^i m_0^j}{(1 + \lambda(\vec{l}_0))(1 + \lambda(\vec{m}_0))}\end{aligned}\quad (17)$$

**Дилатация** ( $\gamma$ ) - относительное изменение объема. Пусть есть элементарный объем  $\gamma = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$ ,

где  $dV$ -элемент объема в начальном состоянии,  $dV_0$  – в конечном.

$$\begin{aligned}dV_0 &= (d\vec{r}_1^0 \times d\vec{r}_2^0) \cdot d\vec{r}_3^0 - \text{разложение по исходному прямоугольному базису} \\ dV_0 &= (\vec{e}_1^0 \times \vec{e}_2^0) \cdot \vec{e}_3^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \\ dV &= (d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2) \cdot d\vec{r}_3 = dV_0 \cdot \det(\delta_k^j + \nabla_j u^i) = \\ dV_0 \sqrt{\det(\delta_j^i + \nabla_i u^j) \cdot \det(\delta_l^k + \nabla_k u^l)} &= dV_0 \sqrt{\det[(\delta_i^k + \nabla_i u^k)(\delta_k^j + \nabla_j u_k)]} = \\ dV_0 \sqrt{\det(\delta_j^i + \Gamma_i^j)} &= dV_0 \sqrt{\epsilon_{ijk}(\delta_1^i + 2\Gamma_1^i)(\delta_2^j + 2\Gamma_2^j)(\delta_3^k + 2\Gamma_3^k)} = \\ dV_0 \sqrt{1 + 2\Gamma_i^i + 2(\Gamma_i^i \Gamma_i^j - \Gamma_j^i \Gamma_i^j) + 8\epsilon_{ijk} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \Gamma_3^k} &\Rightarrow dV = \sqrt{1 - 2I_1 + 2(I_1^2 - I_2) + 8I_3} - 1 \quad (20)\end{aligned}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получаем:

$$\gamma = \sqrt{1 - 2I_1 + 2(I_1^2 - I_2) + 8I_3} - 1 \quad (21)$$

### 5.5 Случай малых деформаций

В случае малых деформаций  $|D_{ij}| = |\nabla_i u_j| \ll 1$ . Тогда можно “выбросить” из тензора Грина нелинейную часть, т.е.  $\Gamma_{ij} \approx \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$

$$\text{Тогда } \lambda(\vec{l}_0) = \sqrt{1 + 2\epsilon_{ij} l_0^i l_0^j} - 1 \approx 1 + \epsilon_{ij} l_0^i l_0^j - 1 = \epsilon_{ij} l_0^i l_0^j \quad (23)$$

При таком представлении явно виден *физический смысл* каждой компоненты  $\Gamma_{ij}$  малых деформациях. Если взять в декартовой системе координат отрезок на оси, то  $\Gamma_{\alpha\alpha}$ - относительное удлинение вдоль оси  $x^\alpha$ .

Для того чтобы понять физический смысл смешанных компонент, вычислим  $\cos\theta$ :

$$\cos\theta = \frac{2\varepsilon_{\alpha\beta}}{(1+\lambda_\alpha)(1+\lambda_\beta)} \simeq 2\varepsilon_{\alpha\beta}, \text{ где } \alpha, \beta = 1, 2, 3 \text{ и } \alpha \neq \beta$$

*Смешанные компоненты в случае малых деформаций дают возможность вычислить изменение углов между прямыми.*

## Лекция 6

### Подход Лагранжа

#### 6.1 Подход Лагранжа

Смысл теории: узнать длины элементарных отрезков.

Подходы изучения среды:

- Подход Лагранжа
- Подход Эйлера

Начальная система координат:  $\vec{e}_i^0 = \frac{d\vec{r}}{d\xi^i}$  (1)

Конечный базис:  $\vec{e}_i = \frac{d\vec{r}}{d\xi^i}$  (2)

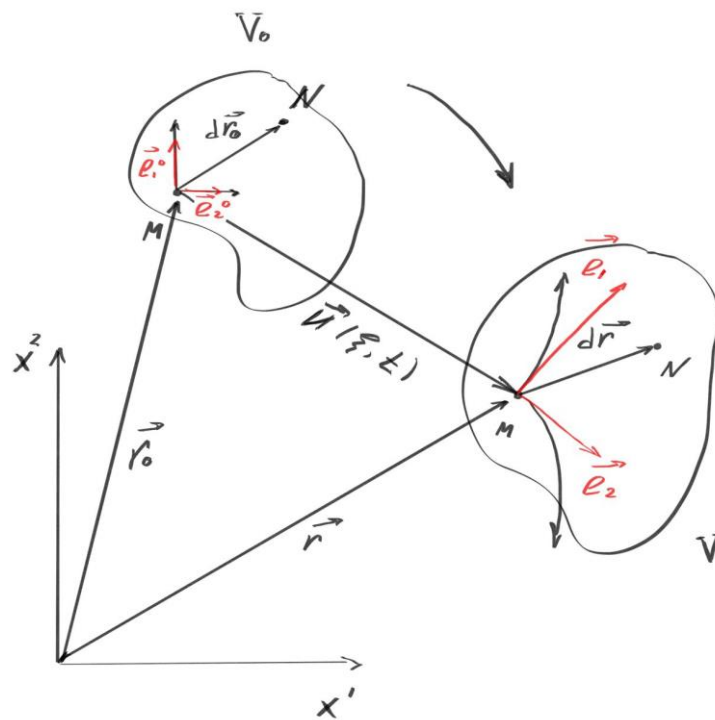


Рис.6. 1 Переход от одного базиса к другому.

Закон движения материальной точки:  $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$

Из рисунка 6.1 видно, что  $\vec{r}(\xi, t) = \vec{r}_0(\xi) + \vec{u}(\xi, t)$ , где  $\vec{r}_0(\xi)$  – начальное положение материальной точки.

Получим базис в конечном состоянии:  $\vec{e}_i = (\delta_i^k + \nabla_i u^k) \vec{e}_k^0$  (3)

Зная базис, можем построить компоненты фундаментального метрического тензора в конечном состоянии, т.е. в начальном состоянии метрический тензор равен  $g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0$ , а в конечном:  $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ .

С помощью формулы (3) можем найти компоненты фундаментального метрического тензора:  $g_{ij} = g_{ij}^0 + \nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k$  (4)

## 6.2 Тензор деформации

Определим тензор деформации через разность компонент тензоров в начальном и конечном состояниях:  $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0)$  – тензор Грина. (5)

Из (4) и (5) получаем, что  $\Gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k)$ . (6)

В выражении (6)  $\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \xi^i} - \Gamma^k_{ij} u_k$ . (7)

Ноль над  $\Gamma$  показывает, что символы Кристоффеля вычисляются через компоненты фундаментального метрического тензора в начальном положении.

Линейная часть тензора деформации:  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$  (8)

Теория, построенная на тензоре Грина (6), называется **геометрически нелинейной**.

В случае малых деформаций, т.е. когда

$$|D_{ij}| = |\nabla_j u_i| \ll 1, \quad (9)$$

получаем **линейную теорию**.

Относительное удлинение:  $\lambda(\vec{l}_0) = \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \sqrt{1 + 2\Gamma_{mn} l_0^m l_0^n} - 1$  (10)

Используя выражение (10), получим формулу для компонент единичного вектора в деформируемом состоянии:  $l^k = \frac{(\delta_i^k + \nabla_i u^k) l_0^i}{1 + \lambda(\vec{l}_0)}$  (11)

С помощью относительного удлинения найдем длину  $dS$ :

$$dS = dS_0(1 + \lambda(\vec{l}_0)) \quad (12)$$

Имея формулы (10) и (11), можем вычислить угол  $\theta$ :

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + 2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j}{(1 + \lambda(\vec{l}_0))(1 + \lambda(\vec{m}_0))} \quad (13)$$



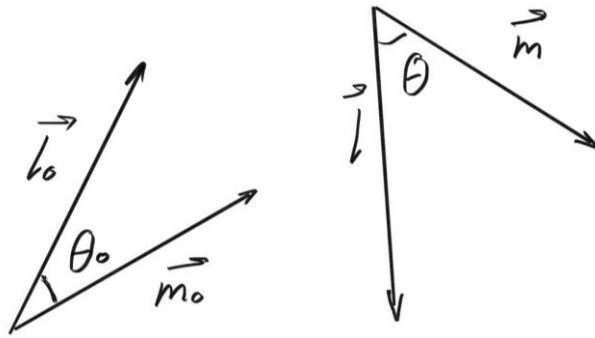


Рис.6. 2 Изменение угла между единичными векторами

Рассмотрим случай, когда есть направление параллельное координатным осям, т.е. в начальном состоянии  $\lambda(\vec{l}_0 \parallel \vec{e}_\alpha^0) = \lambda_\alpha = \sqrt{1 + 2\Gamma_{\alpha\alpha}} - 1$ , где  $\alpha$  может быть равно 1, 2 или 3. (14)

Пусть два вектора  $\vec{l}_0 \parallel \vec{e}_\alpha$  и  $\vec{m}_0 \parallel \vec{e}_\beta$ . Тогда по формуле (13) можем найти  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$ . Причем, если базис ортонормированный, то  $\cos\theta_0 = 0$ . И тогда  $\vec{e}_\alpha \perp \vec{e}_\beta$ . Следовательно,  $\cos\theta_{\alpha\beta} = \frac{2\Gamma_{\alpha\beta}}{(1+\lambda_\alpha)(1+\lambda_\beta)}$ .

$$\text{Общий случай дилатации: } \gamma = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{1 - 2I_1 + 2(I_1^2 - I_2) + 8I_3} - 1, \quad (15)$$

где  $dV$ -элемент объема в начальном состоянии,  $dV_0$  – в конечном.

$$dV = dV_0(1 + \vartheta) \quad (16)$$

При малых деформациях в выражении (14) корень квадратный можно разложить в ряд Тейлора с удержанием первого члена, т.к.  $\Gamma_{\alpha\alpha}$  мало. Тогда получим:  $\lambda_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}$ , т.е. относительные удлинения есть компоненты тензора деформации в направлении координатных осей. А дилатация в этом случае будет равна

$$\gamma = \varepsilon_i^i \quad (17)$$

### 6.3 Случай, когда все величины относятся к конечному состоянию.

$$\text{Рассмотрим вектор } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}, \quad (18)$$

где вектор  $u$  задан как функция координат в конечном состоянии.

$$\text{Тогда } \vec{r}_0(\xi) = \vec{r}(\xi, t) - \vec{u}(\xi, t) = \xi^i \vec{e}_i - u^i \vec{e}_i. \quad (19)$$

$$\text{Соответственно } d\vec{r}_0 = d\vec{r} - d\vec{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi^i} d\xi^i = d\xi^i \vec{e}_i - \nabla_i u^k \vec{e}_k d\xi^i = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k d\xi^i = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{d\xi^i} = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \frac{d\vec{r}}{d\xi^i} \Rightarrow \vec{e}_i^0 = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k \quad (20)$$

Используя формулу (20), вычислим  $g_{ij}^0$ :

$$\begin{aligned} g_{ij}^0 &= \vec{e}_i^0 \vec{e}_j^0 = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k (\delta_j^l - \nabla_j u^l) \vec{e}_l = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^k \nabla_j u^l - \nabla_i u^k \delta_j^l + \nabla_i u^k \nabla_j u^l) g_{kl} = \\ &= \delta_i^k \delta_j^l g_{kl} - (\delta_i^k \nabla_j u^l g_{kl} + \nabla_i u^k \delta_j^l g_{kl} - \nabla_i u^k \nabla_j u^l g_{kl}) = \\ &= g_{ij} - (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - \nabla_j u^k \nabla_i u_k) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{Введем величину } A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_j u^k \nabla_i u_k) \quad (22)$$

$$\text{Тогда получаем } g_{ij}^0 = g_{ij} - 2A_{ij}, \quad (23)$$

$$\text{т.е. } A_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ij}^0). \quad (24)$$

$A_{ij}$  – это компонента тензора деформации **Альманси**.

Вычислим относительное удлинение. Для этого найдем  $dS^2$  и  $dS_0^2$ :

$$dS^2 = d\vec{r} d\vec{r} = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (25)$$

$$dS_0^2 = d\vec{r}_0 d\vec{r}_0 = g_{ij}^0 d\xi^i d\xi^j \quad (26)$$

$$\text{Тогда относительное удлинение: } \lambda(\vec{l}) = \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{dS}{dS_0} - 1 \quad (27)$$

$$\text{Из (27) следует: } dS_0 = \frac{\lambda(\vec{l}) + 1}{dS} \quad (28)$$

$$\text{С другой стороны: } \frac{dS^2 - dS_0^2}{dS^2} = \frac{g_{ij} d\xi^i d\xi^j - g_{ij}^0 d\xi^i d\xi^j}{dS^2} = (g_{ij} - g_{ij}^0) \frac{d\xi^i}{dS} \frac{d\xi^j}{dS} = 2A_{ij} l^i l^j \quad (29)$$

$$\text{Из формулы (29) следует: } 1 - \left(\frac{dS_0}{dS}\right)^2 = 2A_{ij} l^i l^j, \quad 1 - 2A_{ij} l^i l^j = \left(\frac{dS_0}{dS}\right)^2$$

$$\frac{dS_0}{dS} = \sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}$$

$$dS_0 = dS \sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j} \quad (30)$$

$$\text{Сравним формулы (28) и (30): } \frac{1}{\lambda(\vec{l}) + 1} = \sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}$$

$$\text{Получаем: } \lambda(\vec{l}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}} - 1 \quad (31)$$

## Лекция 7

### Тензор Альманси

#### 7.1 Тензор Альманси

Тензор Альманси также, как и тензор Грина определяется через разность фундаментальных метрических тензоров, т.е.  $A_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0)$ .

Считаем, что величины в конечном состоянии известны, т.е. перемещение есть функция координат точек в деформируемой системе координат:

$$\vec{r}_0(\xi) = \vec{r}(\xi, t) - \vec{u}(\xi, t) \quad (1)$$

Для приращений:

$$d\vec{r}_0 = d\vec{r} - d\vec{u} = d\xi^i \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \xi^i} d\xi^i = d\xi^i \vec{e}_i - \frac{\partial}{\partial \xi^i} (u^k \vec{e}_k) d\xi^i = d\xi^i \vec{e}_i - \nabla_i u^k \vec{e}_k d\xi^i, \quad (2)$$

где  $\vec{e}_k$  - базис в деформируемом состоянии.

$$\text{В исходном базисе: } d\vec{r}_0 = d\xi^i \vec{e}_i^0 = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k d\xi^i \quad (3)$$

$$\text{Из формулы (3) получаем: } \frac{d\vec{r}_0}{d\xi^i} = \vec{e}_i^0 = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k \quad (4)$$

Найдем компоненты фундаментального метрического тензора в исходной системе координат, используя формулу (4), т.е.

$$g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0 = (\delta_i^k - \nabla_i u^k) \vec{e}_k \cdot (\delta_j^l - \nabla_j u^l) \vec{e}_l = g_{ij} - 2A_{ij}, \quad (5)$$

$$\text{где } A_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_j u^k \nabla_i u_k) \quad (6)$$

Тензор Альманси является симметричным:  $A_{ij} = A_{ji}$

Теперь вычислим элемент длины в начальном положении, зная элемент длины в конечном положении:

$$dS_0^2 = d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = d\xi^i \vec{e}_i^0 \cdot d\xi^j \vec{e}_j^0 = g_{ij}^0 d\xi^i d\xi^j = (g_{ij} - 2A_{ij}) d\xi^i d\xi^j \quad (7)$$

Преобразуем полученную формулу.

$$dS_0^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j - 2A_{ij} d\xi^i d\xi^j = dS^2 (1 - 2A_{ij} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^j}{ds}) = dS^2 (1 - 2A_{ij} l^i l^j) \quad (8)$$

$$dS_0 = dS \sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j} \quad (9)$$

Найдем направляющие векторы в начальном состоянии.

$$\vec{l}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{|r_0|} = \frac{d\vec{r}_0}{dS_0} = \frac{(\delta_k^i - \nabla_i u^k) \vec{e}_k d\xi^i}{dS \sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}} = \frac{(\delta_k^i - \nabla_i u^k) l^i}{\sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}} \vec{e}_k \quad (10)$$

$$l_0^i = \frac{(\delta_k^i - \nabla_k u^i) l^k}{\sqrt{1 - 2A_{mn} l^m l^n}} \quad (11)$$

Введем величину относительного удлинения:

$$\lambda(\vec{l}) = \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{dS}{dS_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2A_{ij} l^i l^j}} - 1 \quad (12)$$

$$\lambda(\vec{l}_0) = \sqrt{1 + 2\Gamma_{ij} l_0^i l_0^j} - 1 \quad (13)$$

Найдем углы между двумя направлениями:

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 = \vec{l}_0 \vec{m}_0 &= l_0^i m_i^0 = l_0^i m_0^j g_{ij}^0 = (1 + \lambda(\vec{l}))(1 + \lambda(\vec{m}))(\delta_k^i - \nabla_k u^i) l^k (\delta_n^j - \nabla_n u^j) l^n g_{ij}^0 \\ &= (1 + \lambda(\vec{l}))(1 + \lambda(\vec{m}))(\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^i \nabla_n u^j - \delta_n^j \nabla_m u^i + \nabla_m u^i \nabla_n u^j) g_{ij} l^m = \\ &= (1 + \lambda(\vec{l}))(1 + \lambda(\vec{m}))(g_{kn} - 2A_{kn}) l^k m^n \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{Вспомним, что } g_{kn} l^k m^n = l^n m_n = \cos \theta. \quad (15)$$

Тогда величина косинуса угла в начальном состоянии равна:

$$\cos \theta_0 = (1 + \lambda(\vec{l}))(1 + \lambda(\vec{m}))(\cos \theta - 2A_{ij} l^i m^j) \quad (16)$$

Найдем относительное изменение объема. Дилатация равна:

$$\gamma = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2I_1 + 2(I_1^2 - I_2) - 2I_3}} - 1, \quad (17)$$

где  $I_1 = A_i^i$ , т.е. свертка диагональных коэффициентов,  $I_2 = A_j^i A_i^j$ , т.е. квадратичный индекс,  $I_3 = \det(A_j^i) = \frac{1}{6} \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnl} A_i^m A_j^n A_k^l$ , т.е. кубический инвариант.

Малыми деформациями, в случае тензора Альманси, называют такие деформации, при которых тензор дисторсии много меньше единицы, т.е.

$$|D_{ij}| = |\nabla_i u_j| \ll 1 \quad (18)$$

Тогда при малых деформациях формула тензора Альманси (6) приобретает следующий вид:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \quad (19)$$

Можно сказать, что формула (19) по записи похожа на формулу тензора деформации Грина, но в случае тензора Альманси вектор  $\vec{u}$  определен в конечном состоянии, и все операции мы проделываем в конечном состоянии. В случае же тензора Грина все операции мы проделываем в начальном состоянии. Однако, если выполняется соотношение малости (18), то начальное деформируемое состояние мало отличается от конечного деформируемого состояния. Поэтому можно считать, что при малых деформациях и малых поворотах тензоры Грина и Альманси совпадают.

Также при малых деформациях относительные удлинения можно записать в виде:

$$\lambda(\vec{l}) \approx \varepsilon_{ij} l^i l^j \text{ и } \lambda(\vec{l}_0) \approx \varepsilon_{ij} l_0^i l_0^j \quad (20)(21)$$

Дилатации при малых деформациях тоже будут равны:

$$\gamma = \varepsilon_i^i, \quad (22)$$

т.е. это есть первый инвариант тензора деформации.

## 7.2 Формулы, по которым вычисляются перемещения, если заданы компоненты тензора деформации для случая малых деформаций

Рассмотрим следующую проблему. Пусть у нас есть тензор деформации Грина или Альманси, выражающийся через три компоненты вектора перемещения.

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \quad (23)$$

Если  $\Gamma_{ij}$  задается шестью функциями в конечных состояниях, то получается дифференциальное уравнение, в котором нужно получить три непрерывные компоненты перемещения. Уравнений в данном случае больше, чем компонент вектора перемещения. Тогда нужно найти дополнительные соотношения, связывающие компоненты тензора. Эти соотношения называются **условиями совместности**. Если выполнены условия совместности, то система дифференциальных уравнений позволяет единственным образом найти компоненты вектора перемещения по заданным компонентам тензора деформации.

Рассмотрим случай линейных деформаций в декартовых координатах.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^i} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) \quad (24)$$

Пусть есть точки  $P(x_1^p, x_2^p, x_3^p)$  и  $Q(x_1, x_2, x_3)$ . Зная перемещение в точке Р, найдем перемещение в точке Q.

$$u_i = u_i^p + du_i = u_i^p + \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx_k = u_i^p + u_{i,k} dx_k = u_i^p + (\varepsilon_{ik} + \omega_{ik}) dx_k, \quad (25)$$

$$\text{где } \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}), \omega_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} - u_{k,i}).$$

Найдем перемещение в точке Q:

$$u_i = u_i^p + \int_P^Q du_i = u_i^p + \int_P^Q \varepsilon_{ik} dx_k + \int_P^Q \omega_{ik} dx_k \quad (26)$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_P^Q \omega_{ik} dx_k &= \omega_{ik} dx_k|_P^Q - \int_P^Q \omega_{ik,l} x_k dx_l = \omega_{ik}^Q x_k^Q - \omega_{ik}^P x_k^P - \int_P^Q \omega_{ik,l} x_k dx_l = \\ &= \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) + x_k^Q (\omega_{ik}^Q - \omega_{ik}^P) - \int_P^Q \omega_{ik,l} x_k dx_l = \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) + \\ &\int_P^Q \omega_{ik,l} x_k^Q dx_l - \int_P^Q \omega_{ik,l} x_k dx_l, \text{ где } \int_P^Q \omega_{ik,l} x_k^Q dx_l = x_k^Q (\omega_{ik}^Q - \omega_{ik}^P). \end{aligned}$$

Объединим два интеграла, тогда получим:

$$\int_P^Q \omega_{ik} dx_k = \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) - \int_P^Q \omega_{ik,l} (x_k^Q - x_k) dx_l = \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) - \int_P^Q (\varepsilon_{il,k} - \varepsilon_{ik,l}) (x_k^Q - x_k) dx_l$$

Окончательно для перемещения в точке Q получаем следующую формулу:

$$u_i = u_i^p + \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) + \int_P^Q [\varepsilon_{il} + (\varepsilon_{il,k} - \varepsilon_{ik,l}) (x_k^Q - x_k)] dx_l \quad (27)$$

Из математического анализа известно, что интеграл в выражении (27) не должен зависеть от траектории. Это возможно, когда соблюдается следующее условие:

$$f_{il,j} = f_{ij,l}, \quad (28)$$

где  $f_{il,j}$ - функция в интеграле  $\int_P^Q f_{il} dx_l$ .

Тогда интеграл зависит только от конечных значений.

Применим условие (28) для подынтегрального выражения в формуле (27):

$$[\varepsilon_{il} + (\varepsilon_{il,k} - \varepsilon_{ik,l}) (x_k^Q - x_k)]_{,j} = [\varepsilon_{il} + (\varepsilon_{li,j} - \varepsilon_{jl,i}) (x_j^Q - x_j)]_{,k} \quad (29)$$

После дифференцирования получим выражение:

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 \quad (30)$$

## Лекция 8

### Теория напряжений

На прошлой лекции была получена формула, по которой вычисляется перемещение, если заданы компоненты тензора деформации для случая малых деформаций:

$$u_i^Q = u_i^P + \omega_{ik}^P (x_k^Q - x_k^P) + \int_P^Q [\varepsilon_{il} + (\varepsilon_{il,k} - \varepsilon_{ik,l})(x_k^Q - x_k^P)] dx_l \quad (1)$$

Также было получено условие совместности деформаций:

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 \quad (2)$$

Причем, выражение (2) верно только в случае декартовых координат. В случае же криволинейных координат нужно ставить ковариантные производные. При рассмотрении нелинейных деформаций к левой части равенства (2) добавляются дополнительные слагаемые.

В выражении (2) присутствует симметрия по индексам  $ik$  и  $jl$ . А значит, что соотношение (2) содержит 6 уравнений. Их можно кратко записать в следующем виде:

$$\epsilon_{\alpha ki} \epsilon_{\beta jl} \varepsilon_{ij,kl} = 0 \quad (3)$$

Выражение (3) содержит симметрию по индексам  $\alpha\beta$ ,  $kli$  и  $ij$ .

Формула (1) называется **формулой Чезаро**. Левая часть выражения (3) называется **несовместимостью** и обозначается  $\eta_{\alpha\beta}$  (симметричный тензор второго ранга):

$$\eta_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha ki} \epsilon_{\beta jl} \varepsilon_{ij,kl} \quad (4)$$

Если деформации должны быть совместными, то несовместность равна нулю. Однако, это утверждение не всегда верно. Например, в теории дислокации для сплошной среды.

#### 8.1 Теория напряжений. Метод сечений

Когда мы деформируем тело, оно начинает сопротивляться. Возникают внутренние силы, которые препятствуют деформации.

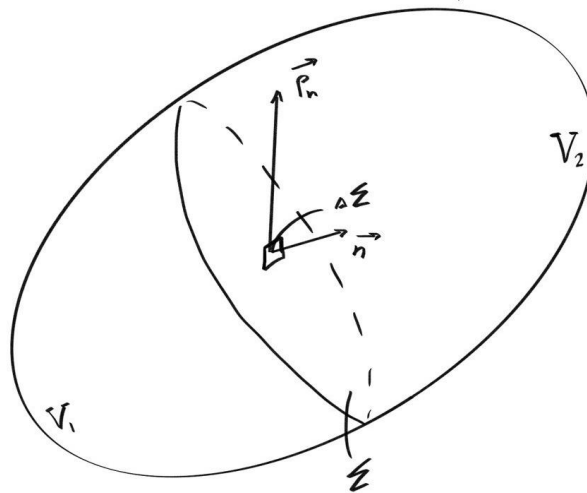


Рис.8.1 Метод сечений

Рассмотрим тело, на которое действуют внешние силы. Воспользуемся **методом сечений**, т.е. разрежем это тело неким плоским сечением  $\Sigma$  так, что тело разбивается на объемы  $V_1$  и  $V_2$ . Всё тело под действием приложенных сил находится в равновесии.

Если отбросить часть  $V_2$ , то оставшаяся часть  $V_1$  останется в равновесии. Значит, на поверхности этого сечения действует сила, т.е. действие отброшенной части заменяется некоторой силой, распределенной по сечению.

Возьмем на поверхности сечения элемент  $\Delta\Sigma$  с нормалью  $\vec{n}$ . На него действуют равнодействующая, характеризующаяся вектором  $\Delta\vec{p}_n$ . Рассмотрим предел при  $\Delta\Sigma \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}_n}{\Delta\Sigma} = \vec{p}_n - \text{вектор напряжения.} \quad (5)$$

При этом мы учитываем, что среда у нас локальная (действие внутренних сил связано с близкодействием) и безмоментная (предполагаем, что равнодействующий момент отсутствует).

Свойства  $\vec{p}_n$ :

1. Если отбросим  $V_1$  и оставим  $V_2$ , то получим  $\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n$  (6)
2. Если разложить вектор  $\vec{p}_n$  на нормальную  $\sigma_n$  и касательную  $\tau_n$

составляющие, то  $\sigma_n = \vec{p}_n \vec{n}$  - **нормальное напряжение**. (7)



Заметим, что нормальное напряжение может быть как положительным, так и отрицательным (направлено против нормали). Причем, если оно положительно, то его называют **растягивающим**. В случае отрицательного значения - **сжимающим**. (см.рис. 8.2)

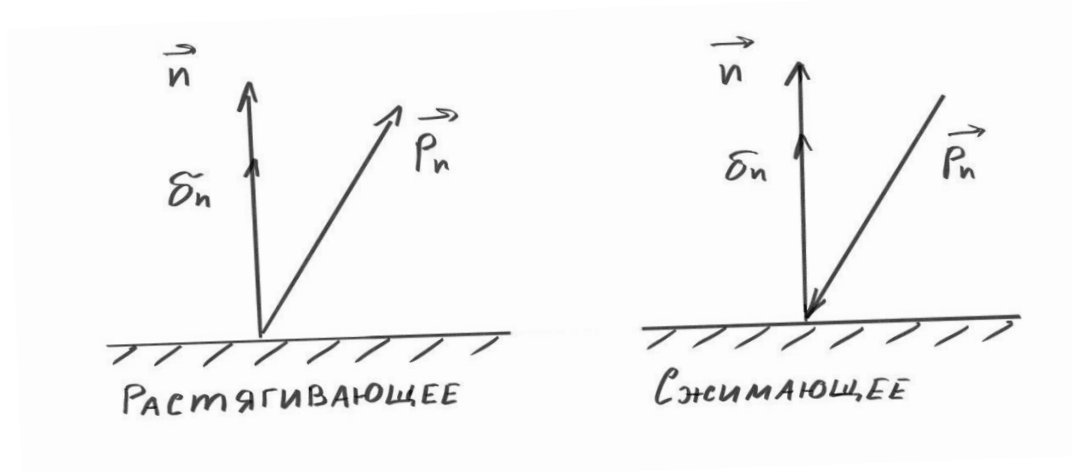


Рис. 8.2 Положительное и отрицательное нормальное напряжение

Касательная составляющая:  $\vec{\tau}_n = \vec{p}_n - \vec{\sigma}_n$  (8)

$|\vec{\tau}_n| = \sqrt{p_n p_n - \sigma_n \sigma_n}$  (9)

Т.к через какую-либо точку тела можно провести бесконечное число сечений, то получится бесконечное число пар векторов  $\vec{p}_n$  и  $\vec{n}$ .

Существует связь:

$\vec{p}_n d\Sigma = f(\vec{n} d\Sigma)$  (10)

Функция (10) является линейной. Докажем это.

Построим тетраэдр(см. рис. 8.3):

Введем  $\vec{n}_1 d\Sigma_1$  - вектор площади грани, построенной на векторах  $\vec{a}_3$  и  $\vec{a}_2$ .

$\vec{n}_1 d\Sigma_1 = \frac{1}{2} \lambda \vec{a}_3 \times \lambda \vec{a}_2 = \frac{\lambda^2}{2} \vec{a}_3 \times \vec{a}_2$  (11)

Аналогично для остальных граней:

$\vec{n}_2 d\Sigma_2 = \frac{\lambda^2}{2} \vec{a}_1 \times \vec{a}_3$  (12)

$\vec{n}_3 d\Sigma_3 = \frac{\lambda^2}{2} \vec{a}_2 \times \vec{a}_1$  (13)

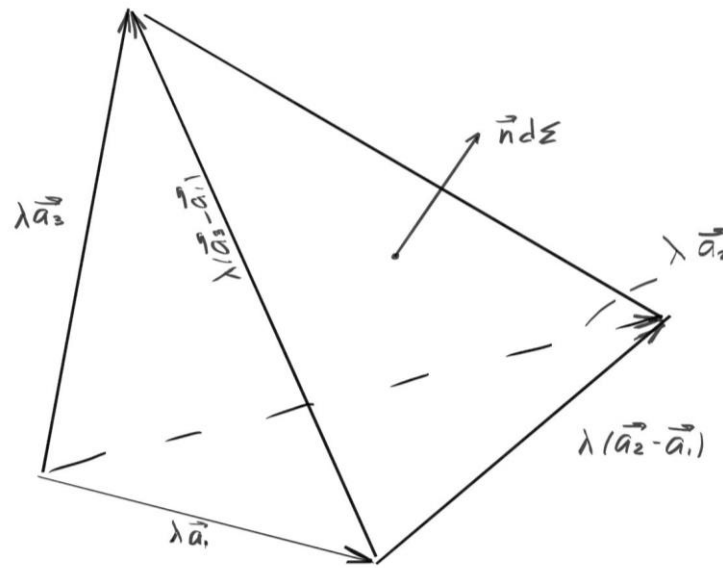


Рис. 8.3 Построение тетраэдра для доказательства линейности функции (10)

$$\vec{n}d\Sigma = \frac{\lambda^2}{2} (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \times (\vec{a}_3 - \vec{a}_1) = -\frac{\lambda^2}{2} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_2 + \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \times \vec{a}_1) \quad (14)$$

$$\vec{n}d\Sigma = -(\vec{n}_1d\Sigma_1 + \vec{n}_2d\Sigma_2 + \vec{n}_3d\Sigma_3) \quad (15)$$

Данный тетраэдр находится в равновесии под действием внешних сил со стороны окружающего вещества, а значит равнодействующая равна нулю.

$\vec{p}_1d\Sigma_1$  - вектор силы.

$$\vec{p}_1d\Sigma_1 + \vec{p}_2d\Sigma_2 + \vec{p}_3d\Sigma_3 + \vec{p}_nd\Sigma + FdV = 0, \quad (16)$$

где  $FdV$  - объемные нагрузки ( $dV$  - объем тетраэдра,  $F$  - объемная сила).

Слагаемое  $FdV$  не будем учитывать, т.к.  $FdV \approx \lambda^3$ , а значит при  $\lambda \rightarrow 0$   $FdV \rightarrow 0$ .

Тогда выражение (16) примет вид:

$$\vec{p}_nd\Sigma = -(\vec{p}_1d\Sigma_1 + \vec{p}_2d\Sigma_2 + \vec{p}_3d\Sigma_3) \quad (17)$$

$$\vec{p}_nd\Sigma = f(\vec{n}d\Sigma) = f(-(\vec{n}_1d\Sigma_1 + \vec{n}_2d\Sigma_2 + \vec{n}_3d\Sigma_3)) \quad (18)$$

Функция (18) является нечетной, следовательно:

$$\begin{aligned}\vec{p}_n d\Sigma &= f(-(\vec{n}_1 d\Sigma_1 + \vec{n}_2 d\Sigma_2 + \vec{n}_3 d\Sigma_3)) = -(\vec{p}_1 d\Sigma_1 + \vec{p}_2 d\Sigma_2 + \vec{p}_3 d\Sigma_3) = \\ &= -(f(\vec{n}_1 d\Sigma_1) + f(\vec{n}_2 d\Sigma_2) + f(\vec{n}_3 d\Sigma_3))\end{aligned}\quad (19)$$

Из (19) следует:

$$f(\vec{n}_1 d\Sigma_1 + \vec{n}_2 d\Sigma_2 + \vec{n}_3 d\Sigma_3) = f(\vec{n}_1 d\Sigma_1) + f(\vec{n}_2 d\Sigma_2) + f(\vec{n}_3 d\Sigma_3) \quad (20)$$

Т.е. функция (10) является линейно выражается через  $\vec{n}d\Sigma$ , что и требовалось доказать. Заметим, что два вектора могут быть связаны между собой только с помощью тензора второго ранга:

$$\vec{p}_n d\Sigma = \hat{\sigma} \vec{n} d\Sigma \quad (21)$$

$$\text{А значит } \vec{p}_n = \hat{\sigma} \vec{n}. \quad (22)$$

$$p_{(n)i} = \sigma_{ij} n_j - \text{в декартовых координатах} \quad (14)$$

Найдем нормальное напряжение:

$$\sigma_n = \vec{p}_n \vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (15)$$

Найдем касательное напряжение:

$$\tau_n = \sqrt{\vec{p}_n \vec{p}_n - \sigma_n^2} = \sqrt{\sigma_{ij} n_j \sigma_{il} n_l - \sigma_{ij} n_i n_j \sigma_{kl} n_k n_l} = \sqrt{(\delta_{ik} n_j n_l - n_i n_j n_k n_l) \sigma_{ij} \sigma_{kl}} \quad (16)$$

## 8.2 Построение уравнений движений

$$\text{Определим скорость деформации: } e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{ij}(x, t + \Delta t) - \varepsilon_{ij}(x, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (17)$$

$$\text{Перемещение за промежуток времени } \Delta t: \Delta u_i = v_i \Delta t \quad (18)$$

Используя переменные Лагранжа, получаем:

$$\Delta \xi_{i,j} = e_{ij} \Delta t = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} - \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}) = \frac{1}{2} ((v_{i,j} + v_{j,i}) \Delta t - v_{k,i} v_{k,j} \Delta t^2) \quad (19)$$

Деля на  $\Delta t$  и устремляя последнее к нулю, нелинейное слагаемое выражения (19) исчезает, а значит тензор скоростей деформаций линейно выражается через скорости перемещения точек. Тензор же деформаций в эйлеровом подходе:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) = \Delta_{ijkl} v_{k,l} \quad (20)$$

Тензор  $\Delta_{ijkl}$  называется единичным тензором четвертого ранга. Он определяется следующим образом:

$$\Delta_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (21)$$

Рассмотрим **интеграл по подвижному объему**. Пусть есть тело конечного объема  $V$ . Выделим из него объем  $V'$ .

$$I = \int_{V' \in V} a(x_i, t) dV \quad (22)$$

Здесь  $a$  может быть как скаляром, так и вектором, так и тензором любого ранга.

В процессе деформации, очевидно, объем  $V'$  будет меняться. Этот факт нужно учитывать при вычислении полной производной.

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \int_{V' + \Delta V} a(x_i, t + \Delta t) dV - \int_{V'} a(x_i, t) dV \right] \frac{1}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \int_{V' + \Delta V} \frac{a(x_i, t + \Delta t) - a(x_i, t)}{\Delta t} dV - \int_{\Delta V'} \frac{a(x_i, t + \Delta t)}{\Delta t} dV \right] \end{aligned} \quad (23)$$

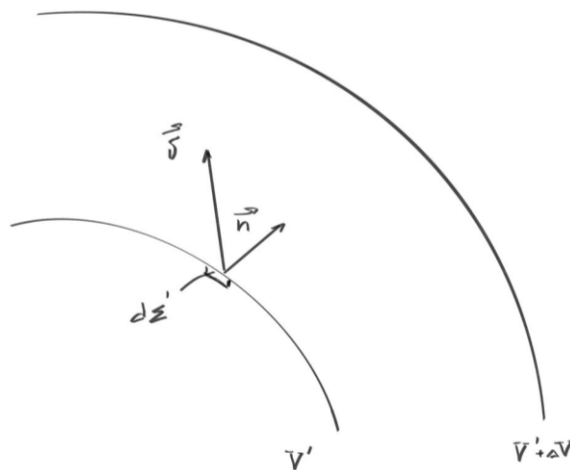


Рис. 8.4 Вычисление  $dV'$

$$dV' = d\Sigma' = \vec{v} \vec{n} \Delta t \quad (24)$$

$$\text{Получаем: } \int_{\Delta V'} a(x_i, t + \Delta t) dv = \int_{\Sigma'} a(x_i, t + \Delta t) \vec{v} \vec{n} d\Sigma' \quad (25)$$

$$\text{Устремив } \Delta t, \text{ получим: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V'} a(x_i, t + \Delta t) dv = \int_{\Sigma'} a \vec{v} \vec{n} \Sigma' \int_{V'} \text{div}(a \vec{v}) dV' \quad (26)$$

Получаем конечную формулу:

$\frac{d}{dt} \int_{V'} a dV = \int_V \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a\vec{v}) \right) dV'$  - формула дифференцирования подвижного объема. (27)

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a\vec{v}) = \frac{\partial a}{\partial t} + (av_i)_{,i} = \frac{\partial a}{\partial t} + v_i a_{,i} + av_{i,i} = \frac{da}{dt} + a \text{div} \vec{v} \quad (28)$$

Тогда:

$$\int_V \left( \frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a\vec{v}) \right) dV' = \int_V \left( \frac{da}{dt} + a \text{div} \vec{v} \right) dV' \quad (29)$$

## Лекция 9

### Законы сохранения

#### 9.1 Некоторые моменты теории напряжений.

На прошлой лекции было положено начало рассмотрению теории напряжений в технике. Был введен  $\vec{p}_{(n)}$  – **вектор напряжения** на площадке с нормалью  $\vec{n}$ .

Если существует правило, связывающее  $\vec{n}$  и  $d\vec{\xi}$ , тогда движение точно известно. Мы установили:  $\vec{p}_{(n)} = \hat{\sigma}\vec{n}$ .

$$p_{(n)i} = \sigma_{ij}n_j \text{ - в декартовой системе координат} \quad (1)$$

$$p_{(n)}^i = \sigma^{ij}n_j \text{ - в криволинейной системе координат} \quad (2)$$

Посмотрим, как будет выражаться вектор напряжения, если в качестве площадок взять *координатные площадки*:

Зафиксируем декартову систему координат (см.рис. 9.1):  $\vec{n}_1 = (1,0,0)$

$$\vec{n}_2 = (0,1,0)$$

$$\vec{n}_3 = (0,0,1)$$

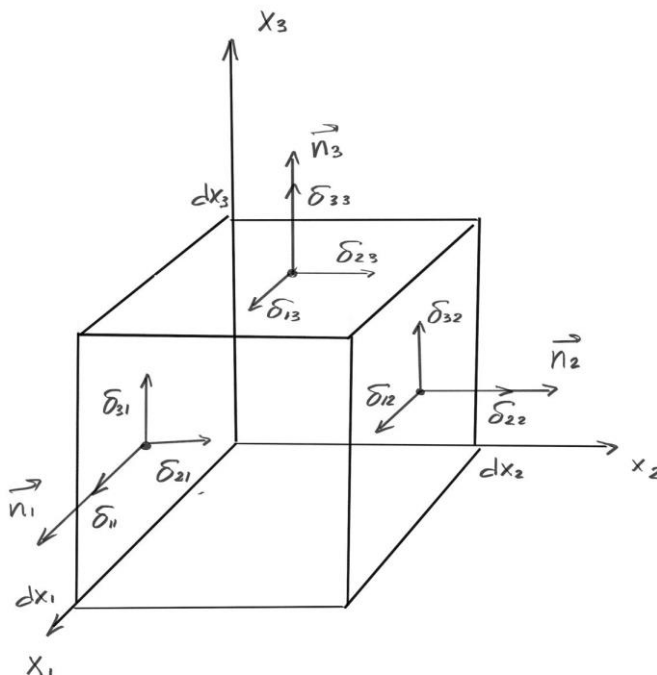


Рис. 9.1 Вектора напряжений на координатных площадках

Тогда получаем:  $p_{(n_1)i} = \sigma_{i1}$

$$p_{(n_2)i} = \sigma_{i2}$$

$$p_{(n_3)i} = \sigma_{i3}$$

$\sigma_{ij}$  -  $i$ -ая компонента вектора напряжения на площадке перпендикулярной оси  $x^j$ .

$$\sigma_{11} = \delta_{n_1}$$

$$\tau = \sqrt{(\sigma_{ik}n_jn_l - n_in_jn_kn_l)\sigma_{ij}\sigma_{kl}} = \sqrt{\sigma_{k1}\sigma_{k1} - \sigma_{11}^2} = \sqrt{\sigma_{21}^2 + \sigma_{31}^2} - \text{величина касательного вектора.} \quad (3)$$

Дальнейшие формулы будем использовать при выводе уравнений движения и доказательстве симметрии компонент тензора напряжения:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \vec{v} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V a dV = \int_V \left( \frac{da}{dt} + a \text{div} \vec{v} \right) dV \quad (5)$$

## 9.2 Закон сохранения массы.

$$dm = \rho dV, \rho - \text{плотность}$$

$$\text{Тогда } m = \int_V \rho dV \quad (6)$$

$$\frac{dm}{dt} = 0 - \text{закон сохранения массы} \Rightarrow$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, y) dV = \int_V \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} \right] dV = 0$$

$$\text{Имеем, } \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (8)$$

Формулы (8), (9) - называются **уравнениями неразрывности или локальным уравнением сохранения масс.**

В случае установившегося движения частные производные по  $t = 0$ .

### 9.3 Закон сохранения количества движения. Уравнение движения сплошной среды.

$$d\vec{Q} = dm\vec{v} = \rho dV \vec{v}$$

$\vec{Q} = \int_{V' \in V} \rho dV \vec{v}$  - количество движения некоторого объема вещества  $V'$  ( $V'$  не должен выходить на границу объема  $V$ ).

(9)

**Закон сохранения количества движения:** Изменение количества движения равно сумме всех действующих сил на объем.

$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V'} \vec{x} dV + \int_{\Sigma'} \vec{p}_{(n)} d\Sigma$ , где  $x$  - декартова координата наблюдателя,  $\Sigma'$  - площадь поверхности объема  $V'$ .

(10)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V'} \rho dV \vec{v} = \int_{V'} \left[ \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = \int_{V'} \left[ \frac{d\rho}{dt} \vec{v} + \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = \\ &= \int_{V'} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] + \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \left\{ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} - \text{уравнение неразрывности} \Rightarrow \right. \\ &\left. \text{оно равно } 0 \right\} \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V'} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \end{aligned}$$

(11)

$$\bullet \quad \int_{\Sigma'} \vec{p}_{(n)} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \hat{\sigma} \vec{n} d\Sigma = \{ \text{по теореме Остроградского – Гаусса} \} = \int_{V'} \operatorname{div} \hat{\sigma} dV$$

(12)

Формула (13) - преобразованное выражение для поверхностного интеграла в законе сохранения количества движения. Для того чтобы осуществить данные преобразования, потребуем непрерывности  $\hat{\sigma} \vec{n}$ .

$$0 = \int_{V'} \vec{x} dV + \int_{\Sigma'} \vec{p}_{(n)} d\Sigma - \frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V'} [\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{x} - \rho \frac{d\vec{v}}{dt}] dV \Rightarrow$$

(13)

Т.к. это справедливо для произвольного объема, то

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{x} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad - \text{уравнение движения сплошной среды}$$

(14)

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{x} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{v} \right]$$

(15)

При малых скоростях в (15) отбрасывается нелинейная часть  $\vec{v} \operatorname{grad} \vec{v}$ .

$$\bullet \quad \operatorname{div} \hat{\sigma} = \vec{\nabla} \sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \vec{e}^k \nabla_k \sigma^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sigma_i^k \nabla_k \sigma^{ij} \vec{e}_j = \nabla_i \sigma^{ij} \vec{e}_j,$$

$$\text{где } \vec{\nabla} = \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k} (\dots)$$

(16)

Тогда получаем **покомпонентную запись уравнения движения сплошной среды:**



$$\nabla_i \sigma^{ij} \vec{e}_j + x^i = \rho \left[ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j \right]$$

$$\text{В случае декартовых координат: } \sigma_{ij,i} + x_i = \rho [v_i + v_i v_{j,i}] \quad (17)$$

#### 9.4 Закон сохранения момента количества движения.

Кроме закона сохранения количества движения закон сохранения момента количества движения. Этот закон позволит доказать *симметрию тензора напряжений*.

Если мы рассматриваем моментную теорию, то закон сохранения момента количества движения дает возможность получить дополнительные уравнения для моментных напряжений.

Мы же будем рассматривать классическую теорию:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{Q} = \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

$$\vec{M} = \int_{V'} \vec{r} \times \rho \vec{v} dV \quad (18)$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \int_{V'} \vec{r} \times \vec{x} dV + \int_{\Sigma'} \vec{r} \times \overrightarrow{p_{(n)}} d\Sigma - \text{закон сохранения момента количества движения} \quad (19)$$

Начнем преобразовывать это выражение:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma'} \vec{r} \times \overrightarrow{p_{(n)}} d\Sigma &= \{\text{декартовы координаты}\} = \int_{\Sigma'} \epsilon_{ijk} x_j \overrightarrow{p_{(n)k}} d\Sigma = \\ \int_{\Sigma'} \epsilon_{ijk} x_j \delta_{kl} n_l d\Sigma &= \int_{V'} \epsilon_{ijk} (x_j \delta_{kl})_{,l} dV \end{aligned}$$

## Лекция 10

### Экстремальные значения нормальных напряжений.

#### 10.1 Симметрия тензора напряжений

Вспомним основные результаты, полученные на прошлой лекции:

$$\text{Масса: } m = \int_{V'} \rho dV;$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V'} \rho(x, y) dV = \int_{V'} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = 0 \quad \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (2б)$$

Если течение установившееся, то  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

$$\text{Количество движения: } \vec{Q} = \int_{V' \in V} \rho dV \vec{v};$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V'} \vec{x} dV + \int_{\Sigma'} \overrightarrow{p_{(n)}} d\Sigma \quad (3)$$

$$\int_{\Sigma'} \overrightarrow{p_{(n)}} d\Sigma = \int_{\Sigma'} \hat{\sigma} \vec{n} d\Sigma = \int_{V'} \operatorname{div} \hat{\sigma} dV \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V'} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \quad (5)$$

Из (3), (4) и (5) получаем  $\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{x} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$  – **уравнение движения сплошной среды** (6)

$$\text{Момент количества движения: } \vec{M} = \int_{V'} \vec{r} \times \rho \vec{v} dV; \quad (7)$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \int_{V'} \vec{r} \times \vec{x} dV + \int_{\Sigma'} \vec{r} \times \overrightarrow{p_{(n)}} d\Sigma \quad (8)$$

$$\int_{V'} \vec{r} \times (\operatorname{div} \hat{\sigma} + \vec{x} - \rho \frac{d\vec{v}}{dt}) dV + \int_{V'} \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} dV \vec{e}_i = 0 \quad (9)$$

$$\int_{V'} \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} dV = \frac{1}{2} \left[ \int_{V'} \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} dV + \int_{V'} \epsilon_{ikl} \sigma_{lk} dV \right] = \frac{1}{2} \int_{V'} \epsilon_{ilk} (\sigma_{kl} - \sigma_{lk}) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk} \text{ - симметрия тензора напряжений} \quad (10)$$

Разделим тело V на две части, одну из которых отбросим. Тогда действие первой на оставшуюся мы заменим только распределенной нагрузкой по сечению. Но

существует много других возможностей. Например, вместо распределенной нагрузки мы можем задать распределенную нагрузку и распределенный момент. Тогда симметрии не будет. Мы получим другое уравнение движения, появится уравнение для моментных напряжений (в этой системе из двух уравнений *тензор напряжения уже не будет симметричным*). Кроме того, придется изменить тензор деформаций. В моментной теории трех “перемещений” мало, нужно добавлять три “вращения”, независимые друг от друга.

## 10.2 Девиатор напряжения

Тензор напряжения можно представить в виде суммы *симметричного* и *антисимметричного* тензора.

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma \delta_{ij};$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \text{среднее гидростатическое давление} \quad (11)$$

$s_{ij}$ - компоненты **тензора девиатора** напряжения

$$\hat{s} = s^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = s_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j;$$

Девиатор используют в физических нелинейных теориях деформированного тела.

Его основное свойство:  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} 3 = 0$  - *первый инвариант* девиатора напряжений (удобно использовать, чтобы учитывать квадратичный член. Например, в теориях разрушения или пластичности).

## 10.3 Экстремальные значения нормальных напряжений. Главные направления и напряжения.

Рассмотрим тело с объемом  $V$  и границей  $\Sigma$ . Возьмем на нем площадку  $d\Sigma'$  близко к поверхности с внешней нормалью  $\vec{n}$ . Задан вектор внешней силы  $\vec{P}_0$  (см. рис. 10.1).

Если устремить  $d\Sigma'$  к поверхности, то  $\delta \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{p}_{(n)} d\Sigma' \rightarrow \vec{P}_0 d\Sigma$ .

$$\vec{p}_{(n)} \big|_{\Sigma} = \vec{P}_0 \quad (12)$$

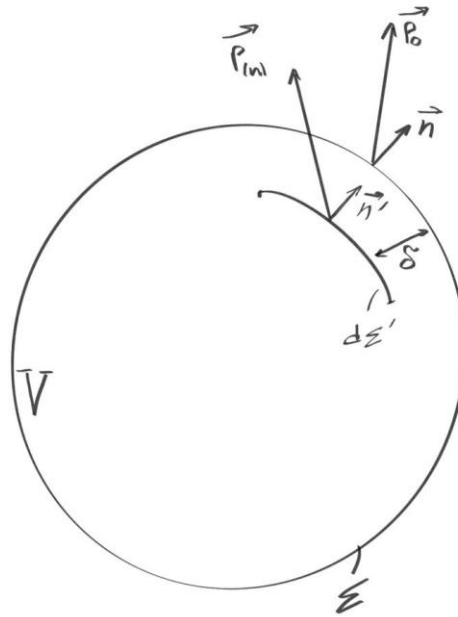


Рис. 10.1 Экстремальные значения нормальных напряжений

$$\delta \vec{n} \Big|_{\Sigma} = \vec{P}_0 \quad (13)$$

Формулы (12) и (13) - **граничные условия** для напряжения. Они представляют собой **уравнения равновесия**.

*Определим, когда нормаль напряжения на площадке достигает максимального значения.*

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j, \quad \text{где } n_i n_i = 1 \quad (14)$$

Найдем условный экстремум:

$$F = \sigma_{ij} n_i n_j - \lambda n_i n_i = (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_i n_j \quad (15)$$

$$\frac{dF}{dn_i} = (\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (16)$$

Домножим (16) на  $n_i$ :  $\sigma_{ij} n_i n_j - \lambda n_i n_i = 0 \Rightarrow$

$$\lambda = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_n$$

$$\text{Тогда (16) приобретает вид: } (\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (17)$$

Система уравнений имеет решения, если  $\det(\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma_n^3 - J_1 \sigma_n^2 + J_2 \sigma_n - J_3 = 0 \quad (18)$$

**Инварианты**, записанные в декартовых координатах:

$$J_1 = \sigma_{ij};$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij})$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} \sigma_{im} \sigma_{jn} \sigma_{kl} = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} + \frac{1}{6} \sigma_{ii}^3 - \frac{1}{2} \sigma_{kk} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (19)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 - \text{корни кубического уравнения} \quad (18)$$

$\sigma_i = \sigma_i(J_1, J_2, J_3)$  - **главные напряжения**.

Направления, соответствующие нормали к площадкам, вычислим по (17)  $\sigma_n$  – из (19).

Находим  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  (**главные направления**) - перпендикуляры к площадкам, на которых нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Эти **площадки** называются **главными**.

Формула (17) подходит для любого направления.

$$\sigma_i n_{j(\alpha)} = \sigma_\alpha n_{i(\alpha)}, \text{ где } \alpha = 1, 2 \text{ или } 3 \quad (20)$$

$$p_{i(\alpha)} = \sigma_\alpha n_{i(\alpha)} \mid \cdot n_{i(\beta)} \quad (21)$$

$$p_{i(\beta)} = \sigma_\beta n_{i(\alpha)} \mid \cdot n_{i(\alpha)}, \text{ для } \alpha \neq \beta \quad (22)$$

$$p_{i(\alpha)} n_{i(\beta)} = \sigma_{ij} n_{i(\alpha)} n_{j(\beta)} = \sigma_\alpha n_{i(\alpha)} n_{i(\beta)} \quad (23)$$

$$p_{i(\beta)} n_{i(\alpha)} = \sigma_{ij} n_{i(\alpha)} n_{j(\beta)} = \sigma_\beta n_{i(\beta)} n_{i(\alpha)} \quad (24)$$

Вычитаем из (23) выражение (24):  $0 = (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) n_{i(\alpha)} n_{i(\beta)} \Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_\beta$ , если  $n_{(\beta)} \perp n_{(\alpha)}$  для  $\alpha \neq \beta$ .

- Главные площадки взаимно ортогональны.
- Вектор напряженности на главной площадке параллелен нормали к этой площадке  $\Rightarrow$  касательное напряжение на главной площадке = 0 .
- Напряженное состояние можно характеризовать не только шестью компонентами тензора напряжения, а тремя главными направлениями и тремя главными напряжениями.

Построим в произвольной точке систему координат, оси которой направлены по главным направлениям:

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + \sigma_2 \delta_{i2} \delta_{j2} + \sigma_3 \delta_{i3} \delta_{j3} \quad (25)$$

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$p_{i(n)} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_1 n_1 \delta_{1i} + \sigma_2 n_2 \delta_{2i} + \sigma_3 n_3 \delta_{3i} \quad (26)$$

$$\sigma_n = p_{i(n)} n_i = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (27)$$

$$\tau_n^2 = \sqrt{\vec{p}_n \cdot \vec{p}_n} - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)$$

$$- \quad \text{касательное напряжение} \quad (28)$$

## Лекция 11

### Круги Мора. Простейшие модели сплошных сред

#### 11.1 Экстремальные значения касательных напряжений

В напряженном теле существуют главные площадки, на которых вектор напряженности параллелен вектору нормали.

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  - главные напряжения

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 \delta_{i1} \delta_{j1} + \sigma_2 \delta_{i2} \delta_{j2} + \sigma_3 \delta_{i3} \delta_{j3} \quad (1)$$

$$p_{i(n)} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_1 n_1 \delta_{1i} + \sigma_2 n_2 \delta_{2i} + \sigma_3 n_3 \delta_{3i} \quad (2)$$

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (3)$$

$$\tau_n^2 = \sqrt{\vec{p}_n \cdot \vec{p}_n} - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \quad (4)$$

$$\text{Воспользуемся тем, что } n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2 \quad (5)$$

$$\text{Подставим (5) в (3): } \sigma_n = (\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3 \quad (6)$$

$$\tau_n^2 = \sigma_3^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) n_2^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2 + \sigma_3]^2,$$

$$\text{где } \sigma_1 \neq \sigma_2; \sigma_2 \neq \sigma_3 \quad (7)$$

Продифференцируем  $\tau_n^2$  по  $n_1, n_2, n_3$ :

$$1) \quad 0 = \frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_1} = n_1 [(\sigma_1 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2]$$

$$2) \quad 0 = \frac{\partial \tau_n^2}{\partial n_2} = n_2 [(\sigma_2 - \sigma_3) - 2(\sigma_1 - \sigma_3) n_1^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) n_2^2]$$

$$3) \quad n_3 = \pm \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$$

Решая эту систему из трех уравнений, получаем решения:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1;$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 0;$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1;$$

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, n_3 = 0;$$

Если  $n_1 = 0$ , то площадка с нормальми  $n_2$  и  $n_3$  проходит через ось  $x^1 \Rightarrow$  она перпендикулярна  $n_1$ , а  $n_2$  и  $n_3$  делят угол между осями  $x^2$  и  $x^3$  пополам. (см. рис. 11.1)

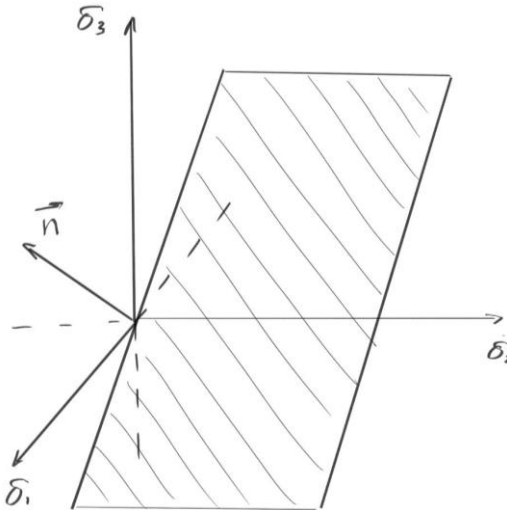


Рис. 11.1 Случай  $n_1 = 0$

Учитывая это, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{n(1)} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; & \sigma_{n(2)} &= \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}; & \sigma_{n(3)} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \\ \tau_{n(1)} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; & \tau_{n(2)} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; & \tau_{n(3)} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \end{aligned}$$

Таким образом, максимальное значение  $\tau_{n(2)} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ .

## 11.2 Круги Мора

Данный результат можно представить графически с помощью кругов Мора.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3 \\ \tau_n^2 &= \sigma_3^2 + (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 + \sigma_3]^2 \\ n_3^2 &= 1 - n_2^2 - n_1^2 \end{aligned}$$

Установим, на каких площадках это достигается.

Зададим  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ . Решим систему относительно  $n_1, n_2, n_3$ .

$$n_1^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} > 0$$



$$n_2^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} > 0$$

$$n_3^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} > 0$$

Случай, когда  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  :

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (8)$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (9)$$

$$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (10)$$

Выражения (8), (9), (10) задают окружности со сдвигом центра в осях  $\tau_n, \sigma_n$  (см. рис. 11.2)

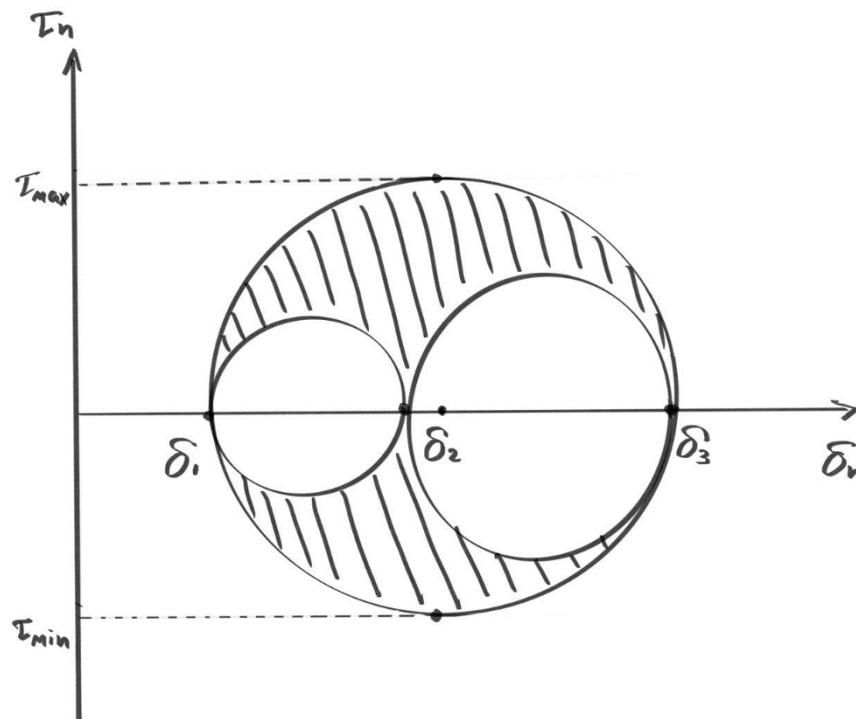


Рис. 11.2 Круги Мора

То, что попадает в заштрихованную область - нужное нам решение.

Наглядно видно:  $\tau_{n(max)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  при  $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

### 11.3 Простейшие модели сплошных сред

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{x} = \rho F\text{- объемная нагрузка} \quad (1)$$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta m} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\rho \Delta V} = \frac{1}{\rho} \vec{x}$$

Компонентная запись (система уравнений 2):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0$$

$$\nabla_i \sigma^{ij} + \rho F^j = \rho \frac{dv^j}{dt}$$

Для решения системы не хватает шести уравнений. Они называются **определяющие соотношения**. В них входят величины, которые определяют данный материал.

Уравнения системы 2 вместе с определяющими соотношениями образуют **модель сплошной среды**.

#### 1. Модель идеальной жидкости (газа)

Жидкость и газ практически не сопротивляются деформации сдвига, но сильно сопротивляются деформации всестороннего сжатия.

$$\vec{p}_n \parallel \vec{n} \text{ (не зависит от ориентации)}$$

$$\vec{p}_n \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j = (s_{ij} + \sigma \delta_{ij}) n_i n_j = s_{ij} n_i n_j + \sigma n_i n_i = -p \quad (p \text{ - новая неизвестная, которую нужно будет определить})$$

$$s_{ij} = 0; \quad \sigma = -p \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = -p g^{ij} \text{ - приведенные координаты} \quad (4)$$

$$\nabla_i \sigma^{ij} = -\nabla_i (p g^{ij}) = -g^{ij} \nabla_i p - p \nabla_i g^{ij}$$

$$\nabla_i g^{ij} = 0$$

$$\text{Тогда } \nabla_i \sigma^{ij} = -\nabla^j p.$$

Учитывая последнее выражение, получаем **уравнение движения** в виде :

$$-\operatorname{grad} p + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (5)$$

$$\text{Разделим (5) на } \rho : \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ -уравнение Эйлера} \quad (6)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (7)$$

Не хватает еще одного уравнения. Для его получения учтем, что среда - идеальная несжимаемая.

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ - условие несжимаемости} \Rightarrow$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ - уравнение неразрывности.}$$

Тогда полная система уравнений (7) идеальной несжимаемой среды:

$$1. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = 0$$

$$2. \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$3. \quad -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = f(\vec{v}, p, x, t) \text{ - зависимость определяется экспериментально.}$$

Тогда для сжимаемой среды система уравнений (8) имеет вид:

$$1. \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = f(\vec{v}, p, x, t)$$

$$2. \quad f(\vec{v}, p, x, t) + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$3. \quad -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$2. \quad \text{Баротропная жидкость (газ)}$$

**Баротропная среда** - это такая среда, в которой давление зависит от  $\rho$  или  $\rho$  зависит от давления.

Для нее полная система уравнений (9):

$$1. \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$2. \quad -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$3. \quad p = f(\rho)$$

4.

## Лекция 12

### Модель идеальной вязкой жидкости

#### 12.1 Модель идеальной жидкости(газа). Баротропная жидкость(газ)

$$\text{Уравнение неразрывности: } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Уравнение движения: } -\operatorname{grad} p + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)$$

В криволинейных координатах уравнения (1) и (2) записываются следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0 \quad (3)$$

$$\nabla_i \sigma^{ij} + \rho F^j = \rho \frac{dv^j}{dt} \quad (4)$$

$$\text{Для идеальной среды было получено: } \sigma_{ij} = -p g^{ij} \quad (5)$$

Если выражение (5) подставим в общие уравнения (4) и (3), то получим уравнения Эйлера (6) и (7) соответственно:

$$-g^{ij} \nabla_i p + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_i v^i = 0 \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) можно записать в виде:

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (9)$$

В уравнениях (8) и (9) присутствуют следующие неизвестные:  $v_i(x_i, t)$ ;

$$\rho(x_i, t); p(x_i, t)$$

В несжимаемом газе уравнение (9) перестает действовать, а вместо него мы полагаем, что  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  - условие несжимаемости.

Тогда получаем случай несжимаемой идеальной жидкости(газа). Уравнение движения остается в неизменном виде, уравнение неразрывности также выполняется, а для условия несжимаемости распишем полную производную:

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (10)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (12)$$

Система уравнений (10) - (12) является замкнутой системой уравнений для несжимаемой среды.

При постоянной плотности, т.е. при  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  получаем тоже замкнутую систему уравнений:

$$-\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (14)$$

Система уравнений (13) - (14) называется **полной системой уравнений идеальной несжимаемой однородной жидкости**.

Заметим, что замыкать систему уравнений можно и по-другому, например:

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (15)$$

Уравнение несжимаемости запишем для сжимаемой среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \rho = f(p, \vec{v}, x, t) \quad - \text{экспериментальная функция (вид функции определяется в результате эксперимента)} \quad (16)$$

Уравнение неразрывности принимает вид:

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} f(p, \vec{v}, x, t) \quad (17)$$

Система уравнений (15) - (17) называется **полной системой уравнений сжимаемой идеальной жидкости**.

Последним способом учесть сжимаемость жидкости(газа) является рассмотрение баротропной жидкости(газа).

Баротропность означает, что мы связываем каким-либо соотношением давление и плотность, т.е. можем записать:  $p = p(\rho, T, x)$  или  $\rho = \rho(p, T, x)$ . (18)

Рассмотрим идеальную сжимаемую баротропную жидкость(газ).

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (19)$$

Условие неразрывности остается неизменным:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (20)$$

И задается функция  $p = p(\rho)$ , например, закон Менделеева-Клайперона:

$$p = \rho RT, \quad (21)$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная, а  $T$  - температура в градусах Кельвина.

Уравнения (19) - (21) являются **уравнениями параболического типа**.

Если рассматривается взаимодействие газа с каким-нибудь твердым телом, то тогда очевидным условием является то, что нормальная компонента вектора скорости не должна проникать внутрь тела. Таким образом, если само тело как-то движется по нормали, то **условие непроницаемости** можно записать так:

$$v_{\vec{n}(\text{жидкости})} = v_{\vec{n}(\text{тела})} \quad (22)$$

## 12.2 Модель идеальной вязкой жидкости

Вязкая жидкость сопротивляется сдвигу, и с чем большей скоростью совершается сдвиг, тем больше жидкость сопротивляется, т.е. жидкость реагирует на скорость сдвига.

Тогда связь напряжения и давления можно записать следующим образом:

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \tau^{ij}, \quad (23)$$

где  $\tau^{ij}$  - тензор вязких напряжений.

Выражение (23) можно подставить в системы уравнений (1) - (2) или (3) - (4). Тогда получим уравнение для  $\tau^{ij}$ .

Заметим, что давление предполагается зависящим от плотности, температуры и некого параметра  $\chi$ :

$$p = p(\rho, T, \chi) \quad (24)$$

Причем выражение (24) предполагается баротропным.

Тогда тензор вязких напряжений  $\tau^{ij}$  зависит от тензора скоростей деформаций  $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ , температуры и других параметров:

$$\tau = \tau(e, T, \chi) \quad (25)$$

Будем рассматривать **линейные вязкие жидкости (ньютоновские жидкости)**, т.е. такие жидкости, тензор вязких напряжений которых связан с тензором скоростей деформаций по линейному закону:

$$\tau^{ij} = \hat{A}^{ijkl} e_{kl}, \quad (26)$$

где тензор  $\hat{A}^{ijkl}$  называется **тензором вязкости анизотропной жидкости**.

При этом должно выполняться следующее соотношение:

$$\hat{A}^{ijkl} = \hat{A}^{jikl} = \hat{A}^{ijlk} = \hat{A}^{klij}, \quad (27)$$

т.е. существует симметрия по парам индексов  $ij$  и  $kl$ .

Тензор  $\hat{A}^{ijkl}$  будет инвариантным относительно любых поворотов. Его компоненты также будут инвариантны относительно поворотов. Среди тензоров четвертого ранга, обладающих симметрией по паре индексов, имеется только два независимых тензора (28) и (29):

$$a^{ijkl} = g^{ij} g^{kl}, \quad (28)$$

где тензор  $g^{kl}$  - метрический тензор.

$$\Delta^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (29)$$

Тензор вязкости можно выразить через тензоры (28) и (29):

$$\hat{A}^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + 2\mu \Delta^{ijkl}, \quad (30)$$

Тогда соотношение (26) примет вид:

$$\tau^{ij} = (\lambda g^{ij} g^{kl} + \mu(g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk})) e_{kl} = \lambda g^{ij} e_k^k + \mu(e^{ij} + e^{ji}) = \lambda g^{ij} e_k^k + 2\mu e^{ij} = \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij} \quad (31)$$

Коэффициент и называются **коэффициентами вязкости**, причем - **коэффициент динамической вязкости**.

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij} = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{v}) g^{ij} + 2\mu e^{ij} \quad (32)$$

Теперь можем выражение для среднего гидростатического давления:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_i^i = \frac{1}{3} ((-p + \lambda \operatorname{div} \vec{v}) \sigma_i^i + 2\mu e_i^i) = -p + (\lambda + \frac{2}{3} \mu) \operatorname{div} \vec{v} \quad (33)$$

При  $\vec{v} = 0$  получаем выражение для давления в гидростатическом случае.

При рассмотрении несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \vec{v}$ .

Запишем полную систему уравнений ньютоновской жидкости:

$$\nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \text{ - уравнение движения} \quad (34)$$

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \hat{A}^{ijkl} e_{kl} \text{ - определяющее соотношение} \quad (35)$$

- соотношение типа Коши (формула Коши для скоростей деформаций)

$$e^{ij} = \Delta^{ijkl} \nabla_k v_l \quad (36)$$

Из системы уравнений (34) - (36) получаем уравнение:

$$-\nabla^j p + \nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (37)$$

Если материал однородный и анизотропный, то уравнение (37) упрощается, в частности:

$$\nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) = (\lambda + \mu) \nabla^i \nabla_k v^k + \mu \Delta v^i \quad (38)$$

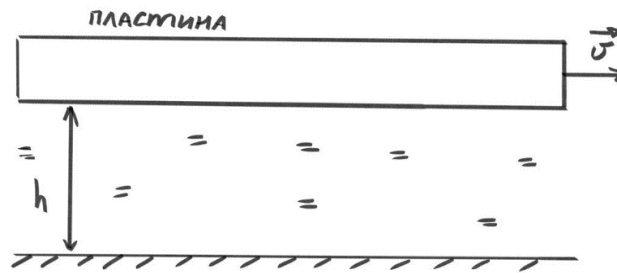


Рис. 12.1 Эксперимент Ньютона

Вместо общего уравнения (37) получаем:

$$-\nabla^j p + (\lambda + \mu) \nabla^i \nabla_k v^k + \mu \Delta v^i + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (39)$$

Уравнения (38) и (39) называются **уравнениями Навье-Стокса**.

$$\text{Уравнение неразрывности: } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (40)$$

К системе уравнений (38) - (40) следует отнести экспериментальную функцию:

$$p = p(\rho) \quad (41)$$



## Лекция 13

### Механика деформируемого твердого тела

#### 13.1 Вязкоупругая жидкость

На прошлой лекция была рассмотрена вязкоупругая жидкость, т.е. жидкость, которая сопротивляется сдвигу.

Тензор напряжений определяется по формуле:

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \tau^{ij} \quad (1)$$

Давление и тензор вязких напряжений выражаются функциями:

$$p = p(\rho, T, \chi) \quad (2)$$

$$\tau = \tau(e, T, \chi), \quad (3)$$

$$\text{где } e - \text{тензор скоростей деформаций: } e_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (4)$$

Общая запись для ньютоновской жидкости:

$$\sigma^{ij} = -p g^{ij} + \hat{A}^{ijkl} e_{kl} \quad (5)$$

Уравнения для общего случая анизотропии:

$$-\nabla^j p + \nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_k v^k = 0 \quad (7)$$

Считая вязкую жидкость несжимаемой, получили:

$$-\nabla^j p + \nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho = 0 \quad (9)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (10)$$

Систему уравнений (8) - (10) можно обобщить на случай сжимаемой жидкости. Для этого достаточно положить, что выражение (9) равно не нулю, а какой-либо функции, вид которой определяется экспериментально:

$$-\nabla^j p + \nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \text{grad } \rho = f(p, \vec{v}, T, \chi, x, t) \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} f(p, \vec{v}, T, \chi, x, t) \quad (13)$$

Система уравнений для вязкой несжимаемой баротропной жидкости:

$$-\nabla^j p + \nabla_j (\hat{A}^{ijkl} \nabla_k v_l) + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (14)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (15)$$

$$\rho = \rho(p, T, x) \quad (16)$$

В случае изотропной жидкости:

$$\hat{A}^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + 2\mu \Delta^{ijkl} \text{ - тензор вязкости} \quad (17)$$

$$\Delta^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad (18)$$

где  $g$  - компоненты фундаментального метрического тензора.

Уравнение движения принимает следующий вид (уравнение Навье-Стокса):

$$-\nabla^j p + (\lambda + \mu) \nabla^i \nabla_k v^k + \mu \Delta v^i + \rho F^i = \rho \frac{dv^i}{dt} \quad (19)$$

Уравнение (19) в векторном виде:

$$-\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (20)$$

### 13.2 Механика деформируемого твердого тела. Теория упругости

**Твердым телом** называют такое тело, расстояние между точками которого не изменяется при каких-либо воздействиях.

В механике деформируемых твердых тел используется подход Лагранжа.

Основные разделы механики деформируемого твердого тела:

- **Теория упругости** (напряжения в теле зависят от вида деформации; при снятии нагрузки деформация исчезает, а тело возвращается к своей первоначальной форме)
- **Теория вязкоупругости** (при приложении нагрузки тело ведет себя как упругий материал, дойдя до определенного состояния, тело начинает медленно менять свою форму, т.е. происходит **процесс ползучести**)
- **Теория пластичности** (при приложении достаточно большой нагрузки возникают деформации; при снятии нагрузки упругие деформации исчезают, но остаются **остаточные деформации**)

Перейдем к рассмотрению **линейной теории упругости**.

В линейной теории упругости напряжение линейно зависит от деформации.

Возьмем элемент объема в начальном состоянии, который после деформации перешел в какой-то другой элемент объема:

$$dm = \rho_0 dV_0 = \rho dV - \text{уравнение неразрывности} \quad (21)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = \frac{dV - dV_0}{dV_0} + 1 = 1 + \gamma = \sqrt{1 + 2I_1 + (I_1^2 - I_2) + 8I_3} + 1, \quad (22)$$

где  $\gamma = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{1 + 2I_1 + (I_1^2 - I_2) + 8I_3}$  - относительное изменение объема (дилатация). Тензор деформации Грина:  $I_1 = \Gamma_i^i$ ,  $I_2 = \Gamma_i^j \Gamma_j^i$ ,  $I_3 = \det(\Gamma_{ij})$ ;

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \quad (23)$$

В случае тензора Альманси:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + 2I_1 + (I_1^2 - I_2) + 8I_3} - 1} \quad (24)$$

Компоненты тензора Альманси вычисляются следующим образом:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - u^k \nabla_j u_k), \quad (25)$$

причем вектор перемещения вычисляем в конечном состоянии.

Начальный объем:

$$dV_0 = \vec{e}_1^0 (\vec{e}_2^0 \times \vec{e}_3^0) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad (26)$$

где  $i$ - координаты в начальном состоянии,  $\vec{e}_i^0$  - начальные базисные векторы.

Конечный объем:

$$dV = \vec{e}_1 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad (27)$$

где  $\vec{e}_i$ - конечные базисные векторы.

В формулах (26) и (27) смешанное произведение трех векторов можно выразить через компоненты фундаментального метрического тензора. Для этого обе части равенств возводятся в квадрат, и используется факт, что смешанное произведение можно представить в виде определителя:

$$dV_0^2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1^0 \vec{e}_1^0 & \vec{e}_1^0 \vec{e}_2^0 & \vec{e}_1^0 \vec{e}_3^0 \\ \vec{e}_2^0 \vec{e}_1^0 & \vec{e}_2^0 \vec{e}_2^0 & \vec{e}_2^0 \vec{e}_3^0 \\ \vec{e}_3^0 \vec{e}_1^0 & \vec{e}_3^0 \vec{e}_2^0 & \vec{e}_3^0 \vec{e}_3^0 \end{vmatrix} (d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3)^2 \quad (28)$$

Т.е. получили определитель фундаментального метрического тензора:

$$g^0 = \det(g_{ij}) \quad (29)$$

Тогда из выражений (21), (28) и (29) получаем:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} \quad (30)$$

### 13.3 Уравнение движения

Запишем закон сохранения импульса (количества движения):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \dot{u} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_{\Sigma} \vec{P}_n d\Sigma, \quad (31)$$

где  $V$  - любой фиксированный объем внутри тела в начальном состоянии, не выходящий за границу.

Из выражения (31) получаем выражение движения в лагранжевом подходе:

$$\nabla_i \sigma^{ji} + \rho F^i = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial u^i}{\partial t} \right) \quad (32)$$

Запишем **обобщенный закон Гука**, связывающий напряжение с деформацией:

$$\sigma^{ji} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (33)$$

$$\text{где } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k).$$

Запишем уравнение движения в линейной теории малых упругих деформаций:

$$\nabla_l [C^{ijkl} \nabla_k u_l] + \rho F^i = (\rho \dot{u}^i), \quad (34)$$

где  $C^{ijkl}$  - коэффициенты **тензора модулей упругости**, причем выполняется следующее соотношение:

$$\hat{C}^{ijkl} = \hat{C}^{jikl} = \hat{C}^{ijlk} = \hat{C}^{klij} \quad (35)$$

Используя формулу (33), выразим деформации через напряжения:

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl} \sigma^{kl}, \quad (36)$$

где тензор  $J_{ijkl}$  обладает тем же типом симметрии, что и тензор модуля упругости  $\hat{C}^{ijkl}$  и является обратным к  $\hat{C}^{ijkl}$ :

$$J_{ijkl} C^{ijkl} = C^{ijkl} J_{ijkl} = \hat{\Delta}, \quad (37)$$

где  $\hat{\Delta}$  - дельта тензор,  $J_{ijkl}$  - **тензор податливостей**.

Запишем условие (37) покомпонентно в декартовых координатах:

$$C_{ijmn} J_{mnkl} = \Delta_{ijkl} \quad (38)$$

Рассмотрим материал, который имеет плоскость упругой симметрии, т.е. если мы возьмем образец вещества в одном направлении и симметрично ему рассмотрим другой образец, то испытания двух образцов дадут одинаковые результаты (см. рис. 13.1).

Теперь возьмем оси  $x_1, x_2, x_3$  декартовых координат. Систему координат, в которой  $x_3$  перпендикулярна плоскости симметрии, называют **канонической**.

При замене “старых” координат на штрихованные:

$$x'_1 = x_1$$

$$x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = -x_3$$

не должны меняться компоненты тензора модулей упругости, т.к. свойства двух рассматриваемых образцов не изменяются.

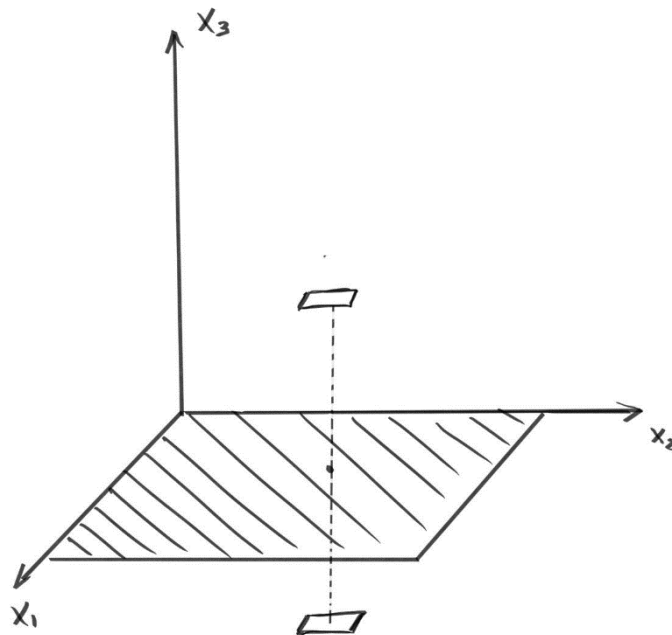


Рис.13.1 Плоскость симметрии

$$l_{ij} = \cos(x'_i x_j) = \delta_{iK} \delta_{Kj} - \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad (39)$$

где  $\cos(x'_i x_j)$  - косинус угла между осями в новой и старой системах координат, большой индекс K может принимать только значения 1 или 2.

Компоненты тензора  $C_{ijkl}$  являются компонентами тензора четвертого ранга, а значит их можно преобразовывать при переходе от одной системы координат к другой следующим образом:

$$C'_{ijkl} = l_{im}l_{jn}l_{kp}l_{lq}C_{mnpq} \quad (40)$$

Из соотношения (40) получаем:

$$C'_{IJKL} = C_{IJKL}; \quad C'_{IJK3} = -C_{IJK3}; \quad C'_{IJ33} = C_{IJ33} \quad (41)$$

$$C'_{I3KL} = -C_{I3KL}; \quad C'_{I3K3} = C_{I3K3}; \quad C'_{I333} = -C_{I333} \quad (42)$$

$$C'_{33KL} = C_{33KL}; \quad C'_{3J33} = -C_{3J33}; \quad C'_{3333} = C_{3333} \quad (43)$$

Заметим, что поменяли свои значения те компоненты, в которых нечетное количество троек:  $C_{IJK3}$ ;  $C_{I333}$ . Следовательно, такие коэффициенты в материале с плоской симметрией должны быть равны нулю. Но это утверждение верно только в системе координат с осью  $x_3$  перпендикулярной к плоскости симметрии.

Итак, материал с плоскостью упругой симметрии в канонической системе координат имеет тринадцать ненулевых независимых компонент.

Рассмотрим случай двух осей симметрии. Для наглядности составим таблицу. Пусть одна плоскость перпендикулярна оси  $x_3$ , а вторая -  $x_2$ . В этой матрице должны исчезнуть все коэффициенты с нечетным количеством троек и двоек.

строка: kl столбец: ij	11	22	33	12	13	23
11	$C_{1111}$	$C_{1122}$	$C_{1133}$	0	0	0
22	$C_{2211}$	$C_{2222}$	$C_{2233}$	0	0	0
33	$C_{3311}$	$C_{3322}$	$C_{3333}$	0	0	0
12	0	0	0	$C_{1212}$	0	0
13	0	0	0	0	$C_{1313}$	0
23	0	0	0	0	0	$C_{2323}$

## Лекция 14

### Математическая модель упругого тела

#### 14.1 Систематика механики деформируемого тела. Общий вид уравнения движения в лагранжевых координатах.

*Механика деформируемого твердого тела* - это раздел механики сплошных сред, которая изучается преимущественно в лагранжевой системе координат.

Мы выделили три основных раздела в механике деформируемого твердого тела:

- теория упругости
- теория вязкой упругости
- теория пластичности

Теория упругости разделяется на *линейную и нелинейную*, в которой выделяют физически и геометрически нелинейные теории.

Теория упругости называется **физически нелинейной**, если связь между напряжением и деформациями нелинейна. Теория является **геометрически нелинейной**, если деформации нелинейны по перемещению (тензор Грина, тензор Альманси).

Мы рассматриваем **линейно упругие тела**. Это означает, что тензор напряжения линейно выражается через тензор деформации. Кроме того, мы считаем деформации малыми.

**Уравнение неразрывности в лагранжевом подходе:**  $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dV}{dV_0} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} = \gamma + 1$ ,

где  $g$  - определитель фундаментальной матрицы в конечном состоянии,  $g_0$  - определитель фундаментальной матрицы в начальном состоянии,  $\gamma$  - дилатация (1)

**Уравнение движения в лагранжевых координатах:**  $\text{div} \hat{\sigma} + \rho \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$  (2)

Рассмотрим решения уравнения, полагая, что  $\vec{F}$  - известна. Но из (1) понятно, что выражается через (через компоненты тензора деформации Грина).

Тензор деформации Грина, даже если он линеен, выражается через перемещение. Получается, что  $\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$  - *нелинейная задача*.

С другой стороны, при малых деформациях деформациях объем не изменяется  $\Rightarrow \rho$  - остается неизменной. В этом случае, перемещение мы понимаем, как поле перемещений, приложенное к каждой точке в начальном положении. Поэтому мы все относим к начальному положению.

$$\sigma^{ji} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \text{ где } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k u_l + \nabla_l u_k) \quad (3)$$

Система уравнений (2) и (3) замкнутая и может быть записана в виде трех уравнений относительно трех компонент вектора перемещения:

$$\nabla_j [C^{ijkl} \nabla_k u_l] + \rho F^i = \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \quad (4)$$

Система (4) является наиболее общей системой трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно вектора перемещения. Здесь компоненты тензора модуля упругости  $C^{ijkl}$  - функции криволинейных координат,  $\rho$  - тоже может быть функцией криволинейных координат.

Будем рассматривать случай, когда  $C^{ijkl}$

- функция декартовых прямолинейных координат  $\Rightarrow$  в системе (4) ковариантные производные пропадают. Исчезает также разница между верхними и нижними индексами (будем писать нижние для удобства).

$$(C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho F^i = \rho \ddot{u}_i, \text{ где } u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial l} \quad (5)$$

Самое большое количество независимых коэффициентов в случае, когда материал **анизотропный**, и выполняется лишь условие симметрии

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (6)$$

Таким образом, мы имеем 21 независимую компоненту (если найти собственные значения (6), то можно уменьшить их количество еще на 3).

Для дальнейшего уменьшения числа независимых компонент будем использовать различные принципы симметрии.

#### 14.2. Плоскость симметрии упругих свойств. Ортотропный материал.

Если два образца, симметричные относительно некоторой плоскости, имеют идентичные механические характеристики, то данную плоскость называют **плоскостью симметрии упругих свойств**. Используя этот факт, получаем 13 компонент.

*Если есть две ортогональные плоскости симметрии упругих свойств, то и третья, ортогональная первым двум, плоскость тоже является плоскостью симметрии. Докажем этот факт с помощью матрицы модуля упругости.*

Пусть одна плоскость симметрии перпендикулярна оси  $x_3$ , а вторая -  $x_2$ . Тогда в этой матрице должны исчезнуть все коэффициенты с нечетным количеством троек и двоек.



строка: kl столбец: ij	11	22	33	12	13	23
11	$C_{1111}$	$C_{1122}$	$C_{1133}$	0	0	0
22	$C_{2211}$	$C_{2222}$	$C_{2233}$	0	0	0
33	$C_{3311}$	$C_{3322}$	$C_{3333}$	0	0	0
12	0	0	0	$C_{1212}$	0	0
13	0	0	0	0	$C_{1313}$	0
23	0	0	0	0	0	$C_{2323}$

Заполняя таблицу, мы автоматически получаем, что “вычеркиваются” коэффициенты с нечетным количеством единиц  $\Rightarrow$  **3-я плоскость также является плоскостью симметрии упругих свойств.**

Такое тело с двумя плоскостями симметрии упругих свойств (а как следствие тремя) называется **ортотропным** телом. В этом случае число независимых компонент сокращается до 9.

Ортотропный материал получается при намотке изделия нитями под углом в 45. Если выбрать другой угол, то получится материал с одной плоскостью симметрии.

### 14.3 Плоскость изотропии. Трансверсально изотропный материал.

Направим ось  $x_3 \perp$  некоторой плоскости, оси  $x_1$  и  $x_2$  направим произвольно, но так, чтобы общая система координат оставалась правой. Теперь повернем оси координат на угол  $\varphi$ . (см. рис. 14.1)

Если при повороте осей координат в плоскости не меняется не только сам тензор, но и все его компоненты, то такую плоскость называют **плоскостью изотропии**.

*Любая плоскость параллельная плоскости изотропии тоже обладает этим свойством.*

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

$$x'_3 = x_3$$

Такому преобразованию координат соответствует матрица перехода ( $l_{ij}$ ):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Компоненты тензора модуля упругости в новой системе координат:

$$C'_{ijkl} = C_{mnpq} l_{im} l_{jn} l_{pk} l_{ql} \quad (7)$$

$$\text{Оси } x_1 \text{ и } x_2 \text{ равноправны} \Rightarrow C_{1111} = C_{2222}, C_{1133} = C_{2233}, C_{1313} = C_{2323} \quad (8)$$

$$\text{Из (7) следует: } C_{1212} = \frac{1}{2} (C_{1111} - C_{1122}) \quad (9)$$

В таком материале с плоскостью изотропии, уже  $(9 - 4) = 5$  независимых компонент.

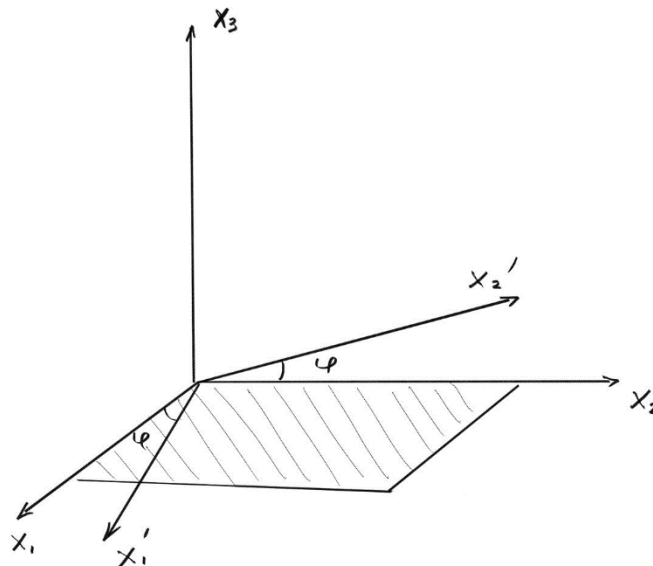


Рис. 14.1 Плоскость изотропии

#### 14.4 Изотропный материал. Коэффициенты Ламе.

Следующий тип симметрии: **изотропный материал**.

Если в изотропном материале в любой точке выбрать систему координат, то при любом ее повороте *коэффициенты упругости останутся неизменными*.

Если выбрана декартова система координат, то относительно вращения не меняются  $\delta_{ij}$ , если криволинейная, то -  $g_{il}$ .

Докажем это:  $A_{ij}$  - матрица поворота,  $B_{ji} = A_{ji}$

$$g'_{ij} = \vec{e}_i' \vec{e}_j' = B_{\cdot i}^k \vec{e}_k B_{\cdot j}^l \vec{e}_l = B_{\cdot i}^k B_{\cdot j}^l g_{kl} = B_{\cdot i}^k B_{kj} = B_{\cdot i}^k A_{jk} = B_{\cdot i}^k B_{\cdot k}^s g_{sj} = \delta_i^s g_{sj} = g_{ij}$$

Из  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$ ,  $g_j^i$  нужно составить комбинации такие, что

$$\hat{C}^{ijkl} = \hat{C}^{jikl} = \hat{C}^{ijlk} = \hat{C}^{klij} \quad (10)$$

$$\text{Имеем: } g^{ijkl} = g^{ij} g^{kl} \quad (11) \quad , \Delta^{ijkl} = \frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (12)$$

В пространстве тензоров, удовлетворяющих (10), существуют два тензора четвертого ранга (11) и (12), через которые можно выразить другие.

Для криволинейной системы координат:

$$\hat{C}^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + 2\mu \Delta^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad \text{где } \lambda, \mu - \text{коэффициенты Ламе} \quad (13)$$

Для декартовой системы координат:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (14)$$

**14.5 Тензор обратный модулю упругости. Физический смысл коэффициентов Ламе.**

$$\sigma_{jl} = \lambda \delta_{jl} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (15)$$

Найдем тензор, обратный к тензору модуля упругости:

Для этого нужно вместо  $\delta_{ij} \delta_{kl}$  и  $\Delta_{ijkl}$  взять другие тензоры (так, чтобы они при умножении сами на себя давали тот же тензор и были взаимно ортогональны):

$$V_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$D_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - V_{ijkl}$$

Проверим выполнение условий:

$$\hat{V}\hat{V} = V: \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{mn} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{mn}$$

$$\hat{D}\hat{D} = D \text{ и } \hat{V}\hat{D} = \hat{D}\hat{V} = 0$$

$$\hat{V} = 3\lambda \hat{V} + 2\mu (\hat{D} - \hat{V} + \hat{V}) = \{\hat{D} = \hat{D} - \hat{V} + \hat{V}\} = (3\lambda + 2\mu) \hat{V} + 2\mu \hat{D} \quad (16)$$

$$\hat{C}^{-1} \equiv \hat{J} = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \hat{V} + \frac{1}{2\mu} \hat{D} \quad (17)$$

$$J_{ijkl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \Delta_{ijkl} \quad (18)$$

$$C_{ijkl} J_{mnkl} = J_{ijmn} C_{mnkl} = \Delta_{ijkl} \Rightarrow \hat{J} \text{ - обратный к } \hat{C}.$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \varepsilon_{ij}, \text{ где}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \text{дилатации при малых деформациях} \quad (19)$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \text{среднее гидростатическое давление} \quad (20)$$

Определим в каких пределах изменяются коэффициенты Ламе:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0 - \text{упругая энергия единицы объема или упругий потенциал при } T = \text{const} \quad (21)$$

$$C_{ijkl} \chi_{ij} \chi_{kl} \geq m \chi_{ij} \chi_{kl}, \text{ где } m > 0; \chi_{ij} = \chi_{kl} - \text{симметричный тензор} \quad (22)$$

Критерий Сильвестра утверждает, что у положительно определенной квадратичной формы (21) все главные миноры положительны.

$$\text{Тогда получаем, что} \quad \mu > 0 \text{ и } \lambda + \frac{2}{3} \mu > 0 \quad (23)$$

строка: kl столбец: ij	11	22	33	12	13	23
11	$\lambda + 3\mu$	$\lambda$	$\lambda$	0	0	0
22	$\lambda$	$\lambda + 3\mu$	$\lambda$	0	0	0
33	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda + 3\mu$	0	0	0
12	0	0	0	$\mu$	0	0
13	0	0	0	0	$\mu$	0
23	0	0	0	0	0	$\mu$

Физический смысл  $\mu$  и  $\lambda$ : на плоскости  $x_2$  и  $x_3$  рассмотрим сдвиг на угол  $\vartheta$  (см. рис.14.2 )

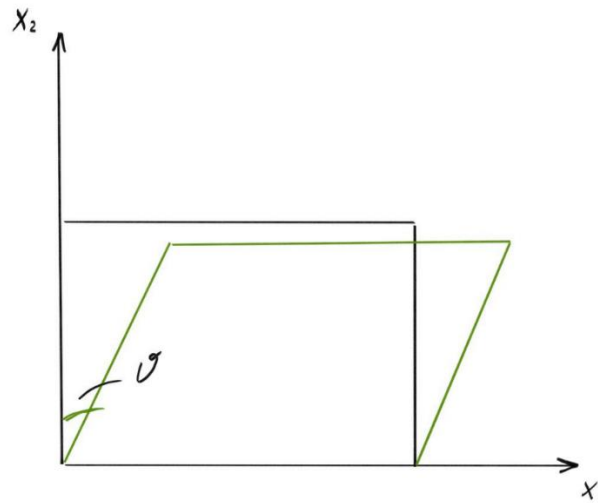


Рис. 14.2 Сдвиг на угол  $\vartheta$

$$1) \quad \varepsilon_{ij} = 0, \text{ кроме } \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \vartheta \Rightarrow \sigma_{12} = \mu \vartheta$$

Таким образом, - **модуль сдвига** (коэффициент пропорциональности между углом сдвига и напряжением).

$$2) \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$3) \quad \text{Положим } j=i: \sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon + 2\mu \varepsilon$$

$$3\sigma = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon \Rightarrow k = \lambda + \frac{2}{3}\mu - \text{модуль объемного сжатия } (k > 0)$$

## Лекция 15

### Модель вязкоупругого тела

На прошлой лекции мы продолжили изучение теории упругости и разобрали, как выглядят определяющие соотношения в различных случаях анизотропии.

Получили компоненты модуля упругости в случае изотропии:

$$\hat{C}^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}), \quad (1)$$

где  $g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} = 2\Delta^{ijkl}$

Получили выражение для тензора податливостей:

$$J_{ijkl} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2\mu} \Delta_{ijkl} \quad (2)$$

Прямой закон Гука:

$$\sigma^{ij} = \lambda g^{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon^{ij} \quad (3)$$

Обратный закон Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} g_{ij} \zeta + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (4)$$

Первый инвариант тензора деформации(дилатация)

$$\varepsilon = \varepsilon_i^i = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3 \quad (5)$$

Первый инвариант тензора напряжений:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_i^i = \frac{1}{3} (\sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3) \quad (6)$$

Упругий потенциал:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} > 0 \quad (7)$$

Выражение (17) является квадратичной формой относительно коэффициентов деформации. Тогда, мы можем применить критерий Сильвестра, согласно которому все миноры матрицы  $C_{ijkl}$  должны быть положительны. Из этого следует, что

$$\mu > 0; \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0.$$

Дифференцируя выражение (7), получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ji} \partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ji}} = C_{klij} \quad (9)$$

Также мы рассмотрели физический смысл параметров Ламе:

$$\varepsilon_{ij} = 0; \quad \varepsilon_{12} \neq 0 \quad (10)$$

Тогда из прямого закона Гука (3) получаем:

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \quad (11)$$

Причем  $\sigma_{12}$  пропорционально углу сдвига, а  $\mu$  является модулем сдвига.

Нашли связь между напряжением и дилатацией:

$$\sigma = \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \varepsilon, \quad (12)$$

где коэффициент  $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  называется **модулем объемного сжатия**. Очевидно, что эта величина положительная.

### 15.1 Деформации. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона.

Положим, что  $\sigma_{11} = p$ , а все остальные компоненты нули, т.е.  $\sigma_{ij} = 0$ .

Среднее гидростатическое напряжение в этом случае:

$$\sigma = \frac{1}{3} \cdot \sigma_{ij} = \frac{p}{3} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{12} = \left[ \frac{3\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \delta_{i2} \delta_{j1} \right] p \quad (14)$$

Найдем  $\varepsilon_{11}$  по формуле (14).  $\sigma_{11}$  - напряжение на площадке перпендикулярной  $x_1$ .

$$\varepsilon_{12} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} p = \frac{p}{E} \quad (15)$$

$$p = E\varepsilon, \quad (16)$$

где  $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$  - **модуль Юнга**.

Теперь из формулы (14) найдем компоненты поперечной деформации, т.е.  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$ :

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} p = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} p = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \frac{p}{E} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \varepsilon_{11} \quad (17)$$

$$\text{Введем обозначение: } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} - \text{коэффициент Пуассона.} \quad (18)$$

$$\text{Тогда } \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} \quad (19)$$

Таким образом, у нас появилось две новых константы: модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Они имеют прозрачный физический смысл. Модуль Юнга является коэффициентом пропорциональности при растяжении образца напряжением  $p$ . А коэффициент Пуассона - коэффициент поперечной деформации.

Заметим, что все коэффициенты, которые были рассмотрены в предыдущих лекциях, можно выразить через модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (20)$$

$$\mu = \frac{Ev}{2(1+\nu)} \quad (21)$$

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (22)$$

Мы знаем, что  $\mu > 0$  и  $k > 0$ , значит, из выражений (20) - (22) следует:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (23)$$

Тензор напряжений мы разбивали на девиатор напряжений и среднее гидростатическое давление, т.е.:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma \delta_{ij}; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \quad (24)$$

Напомним, что  $S_{ij} = 0$ .

Проведем аналогичные рассуждения для тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij} \quad (25)$$

Воспользуемся прямым законом Гука:

$$S_{ij} + \sigma \delta_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \Delta_{ijkl}](e_{kl} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{kl}) \quad (26)$$

$$e_{kl} \delta_{kl} = 0; \quad \Delta_{ijkl} a_{kl} = a_{ij}, \quad (27)$$

где  $a_{kl}$  - симметричный тензор.

Из равенства (26) получаем:

$$S_{ij} + \sigma \delta_{ij} = 2\mu e_{ij} + \frac{1}{3} \lambda \varepsilon \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2}{3} \mu \varepsilon \delta_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda + \frac{2}{3} \mu) \varepsilon \delta_{ij}$$

В результате получаем связь девиаторов:

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (28)$$

Теперь введем следующие выражения:



$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} - \text{интенсивность касательных напряжений} \quad (29)$$

$$\Gamma = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}} - \text{интенсивность касательных деформаций} \quad (30)$$

Из формул (28) и (29) получаем:

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} 2\mu e_{ij} 2\mu e_{ij}} = \mu \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}} = \mu \Gamma \quad (31)$$

В формуле (29) находятся все компоненты тензора напряжений, т.е. это сложное напряженное состояние.

В формуле (30) находятся все компоненты тензора деформаций, т.е. это сложное деформируемое состояние.

В случае сложных напряженных состояний мы можем использовать выражение (31).

Через интенсивности касательных напряжений и деформаций можно выразить энергию (упругий потенциал):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} + \sigma \delta_{ij}) \left( e_{ij} + \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} (S_{ij} e_{ij} + \sigma \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{2} (\mu \Gamma^2 + k \varepsilon^2) \\ W &= \frac{1}{2} \left( \frac{T^2}{\mu} + \frac{\sigma^2}{k} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

## 15.2 Вязкоупругое тело

Как вы знаете, в вязкоупругом материале напряжение зависит не только от данного момента времени, но и от того, что происходило с этим материалом в предыдущие моменты времени. Можно сказать, что материал обладает некой памятью. Этот факт представляется в виде функционала по времени:

$$\hat{\sigma}(x, t) = \hat{C}(x) \hat{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \hat{F}(x, t, \tau) \hat{\varepsilon}(x, \tau) d\tau \quad (33)$$

Обратное соотношение имеет похожий вид:

$$\hat{\varepsilon}(x, t) = \hat{J}(x) \hat{\sigma}(x, t) + \int_0^t \hat{\Phi}(x, t, \tau) \hat{\sigma}(x, \tau) d\tau \quad (34)$$

Определяющие соотношения (33) и (34) записаны для общего случая анизотропного материала.

Тензор четвертого ранга  $\hat{F}(x, t, \tau)$  называется **тензором скоростей релаксации**.

Тензор четвертого ранга  $\hat{\Phi}(x, t, \tau)$  называется **тензором скоростей ползучести**.

Соотношения (33) и (34) можно записать так, чтобы были сингулярные ядра. В частности, для выражения (33) получаем:

$$\hat{\sigma}(x, t) = \int_0^t [\hat{C}(x) \delta(t - \tau) d\tau - \hat{F}(x, t, \tau)] \hat{\varepsilon}(x, \tau) d\tau, \quad (35)$$

где  $\Gamma(x, t, \tau) = \hat{C}(x) \delta(t - \tau) d\tau - \hat{F}(x, t, \tau)$  - сингулярное ядро.

Свойства вязкоупругих материалов может меняться со временем. Например, **стареющие материалы**: резина, бетон и др.

Материалы, свойства которых не изменяются со временем, называется **нестареющими**.

Пусть мы провели два эксперимента с одним и тем же материалом, причем первый эксперимент провели в момент времени  $t = 0$ , а второй - в момент  $t_0$  (рис.15.1). Если этот материал нестареющий, то кривые ползучести будут параллельны, т.е.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t + t_0) \quad (36)$$

Такая же ситуация будет и для напряжений, т.е. для нестареющих материалов

$$\sigma(t) = \sigma(t - t_0) \quad (37)$$

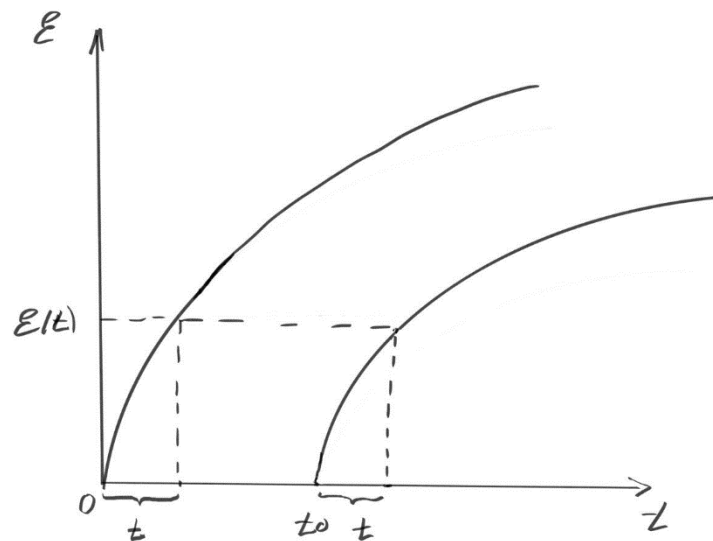


Рис.15.1 Зависимость деформации от времени (кривая ползучести)

Учитывая (36) и (37), можно проделать преобразования определяющих соотношений (33) и (34) и показать, что ядра вида (35) будут **ядрами разностного типа**. Это означает, что  $\Gamma(x, t, \tau) = \Gamma(x, t - \tau)$ . (38)

## Лекция 16

### Модель вязкоупругого тела (продолжение)

#### 16.1 Вязкоупругое тело (продолжение)

На прошлых лекциях мы занимались механикой деформируемых твердых тел. Подробно рассмотрели модели теории упругости. Общим для всех моделей является уравнение движения в лагранжевых координатах, которое записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij,j} + \rho F^i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\text{где } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

Если система координат криволинейная, то частные производные по координатам в выражениях (1) и (2) заменяются на ковариантные производные.

Также мы начали рассматривать модель вязкоупругого тела.

Функционалы по времени:

$$\hat{\sigma}(x, t) = \hat{C}(x) \hat{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \hat{F}(x, t, \tau) \hat{\varepsilon}(x, \tau) d\tau \quad (3)$$

$$\hat{\varepsilon}(x, t) = \hat{J}(x) \hat{\sigma}(x, t) + \int_0^t \hat{\Phi}(x, t, \tau) \hat{\sigma}(x, \tau) d\tau \quad (4)$$

Распишем соотношение (2) по координатам:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t F_{ijkl}(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (5)$$

Если мы рассматриваем случай нестареющего материала, то:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t + t_0); \quad \sigma(t) = \sigma(t - t_0); \quad (6)$$

Учитывая (6), запишем выражение (3) в виде:

$$\sigma(t) = \sigma(t - t_0) = C \varepsilon(t - t_0) - \int_0^t F(t - t_0, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (7)$$

Введем новую переменную  $\vartheta$  такую, что:

$$\tau = \vartheta - t; \quad dt = d\vartheta; \quad \tau = 0 \Rightarrow \vartheta = t_0; \quad \tau = t - t_0 \Rightarrow \vartheta = t$$

Тогда выражение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= C \varepsilon(t) - \int_0^t F(t - t_0, \vartheta - t_0) \varepsilon(\vartheta - t_0) d\vartheta = \\ &= C \varepsilon(t) - \int_0^t F(t - t_0, \vartheta - t_0) \varepsilon(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

$$\sigma(t) = C \varepsilon(t) - \int_0^t F(t - t_0, \tau - t_0) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (8)$$

По формуле (3):

$$\sigma(t) = C \varepsilon(t) - \int_0^t F(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (9)$$

Вычитая (9) из (8), получаем:

$$\int_0^t [F(t - t_0, \tau - t_0) - F(t, \tau)] \varepsilon(\tau) d\tau = 0 \quad (10)$$

Т.к. может быть любым, то из (10) следует, что подынтегральное выражение должно обращаться в нуль:

$$F(t - t_0, \tau - t_0) = F(t, \tau) \quad (11)$$

Равенство (11) возможно, если ядро разностного типа, т.е.  $F(t, \tau) = -F(t - \tau)$ .

Для нестареющих материалов:

$$\hat{\sigma}(x, t) = \hat{C}(x) \hat{\varepsilon}(x, t) - \int_0^t \hat{F}(x, t - \tau) \hat{\varepsilon}(x, \tau) d\tau \quad (12)$$

$$\hat{\varepsilon}(x, t) = \hat{J}(x) \hat{\sigma}(x, t) + \int_0^t \hat{\Phi}(x, t - \tau) \hat{\sigma}(x, \tau) d\tau \quad (13)$$

Для того, чтобы соотношения (12) и (13) были обратимыми, нужно, чтобы  $\hat{F}(x, t - \tau)$  и  $\hat{\Phi}(x, t - \tau)$  были связаны.

Введем функции  $\hat{R}(x, t - \tau)$  и  $\hat{P}(x, t - \tau)$  такие, что

$$\hat{F}(x, t - \tau) = \frac{\partial \hat{R}(x, t - \tau)}{\partial \tau}; \quad \hat{\Phi}(x, t - \tau) = -\frac{\partial \hat{P}(x, t - \tau)}{\partial \tau}. \quad (14)$$

Причем функции  $\hat{R}(x, t - \tau)$  и  $\hat{P}(x, t - \tau)$  называются функциями релаксации и ползучести соответственно. Размерность  $\hat{R}(x, t - \tau)$  соответствует размерности напряжения  $\hat{\sigma}(x, t)$ , а  $\hat{P}(x, t - \tau)$  имеет размерность обратную размерности напряжения.

Воспользуемся этими обстоятельствами и преобразуем интегралы в выражениях (12) и (13):

$$\begin{aligned} \int_0^t \hat{F}(x, t - \tau) \hat{\varepsilon}(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial \hat{R}(x, t - \tau)}{\partial \tau} \hat{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t \varepsilon(\tau) d_\tau R(t - \tau) = \\ &= R(t - \tau) \varepsilon(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = R(0) \varepsilon(t) - R(t) \varepsilon(0) - \int_0^t R(t - \tau) d_\tau \varepsilon(\tau) \end{aligned}$$

Подставим полученный интеграл в формулу (12):

$$\hat{\sigma}(x, t) = \hat{C}(x) \hat{\varepsilon}(t) - \hat{R}(0) \hat{\varepsilon}(t) + \hat{R}(t) \hat{\varepsilon}(0) + \int_0^t \hat{R}(x, t - \tau) d_\tau \varepsilon(\tau) \quad (15)$$

$$\text{Положим } \hat{R}(0) = \hat{C}. \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}(x, t) = \int_0^t \hat{R}(x, t - \tau) d_\tau \varepsilon(\tau) \quad (17)$$

$$\hat{\varepsilon}(x, t) = \int_0^t \hat{\Pi}(x, t - \tau) d\tau \sigma(\tau) \quad (18)$$

Интегралы в формулах (17) и (18) называются **интегралами Стилтжеса**.

В результате получаем:

$$\hat{\sigma} = \hat{R}\hat{\varepsilon}; \quad \hat{\varepsilon} = \hat{\Pi}\hat{\sigma} \quad (19)$$

где  $\hat{R}$  и  $\hat{\Pi}$ - операторы.

$$\hat{R} = 3\hat{K}\hat{V} + 2\hat{G}\hat{D}, \quad (20)$$

где  $\hat{K}$  и  $\hat{G}$  - операторы объемного сжатия и модуля сдвига соответственно.

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{3\hat{K}}\hat{V} + \frac{1}{2\hat{G}}\hat{D} \quad (21)$$

Запишем формулы для тензоров четвертого ранга  $\hat{V}$  и  $\hat{D}$ :

$$C_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (22)$$

$$D_{ijkl} = \Delta_{ijkl} - V_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (23)$$

## 16.2 Упругопластический материал

Пусть к стержню длиной  $l_0$  (рис.16.1), расположенному вертикально, приложена сила  $p$ . Построим график зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ , причем  $\sigma = \frac{p}{F}$ ,  $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$ , где  $F$  - площадь поперечного сечения,  $l$  - конечная длина стержня. Полученный график называется **диаграммой напряжений** (см. рис. 16.1).

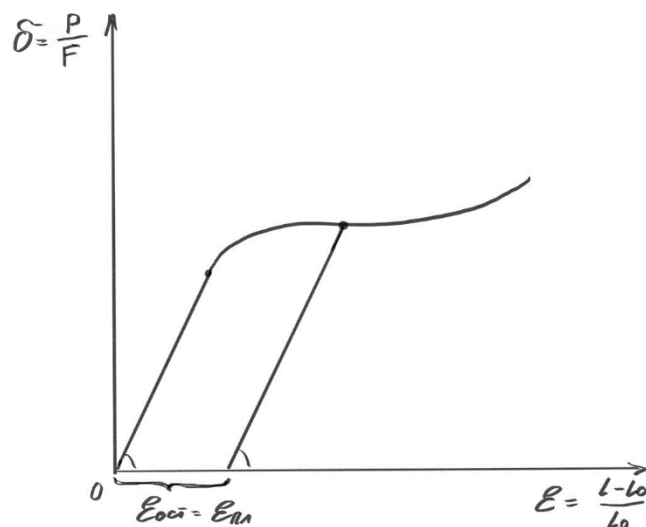


Рис.16.1 Зависимость  $\sigma(\varepsilon)$

Как видно из графика, при малых нагрузках зависимость линейная. Процесс, при котором приложенная сила не уменьшается, называется **активным нагружением**. Обратный процесс называется **разгрузкой**. Заметим, что разгрузка идет по линейному закону.

Процесс называется **упругопластическим**, если при уменьшении напряжения до нуля, деформации остаются. Такие деформации называются **остаточными**.

Рассмотрим теорию упругопластических деформаций.

Т.к. деформации являются малыми, то уравнения движения (1) и (2) остаются такими же. А определяющие соотношения выглядят следующим образом:

$$\sigma_{ij} = F_{ijkl}(x, \hat{\varepsilon}) \varepsilon_{ij}, \quad (24)$$

где  $F_{ijkl} = C_{ijkl}(x) - 2G(x)\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl}$  ( $G$ -упругий модуль сдвига,  $\varepsilon_u$  - скалярная величина, зависящая от всех компонента тензора деформаций - **интенсивность деформаций**) (25)

В теории упругопластических деформаций материал считается практически несжимаемым.

$$C_{ijkl}(x) = 2G(x)\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl} + 3kV_{ijkl} \quad (26)$$

Определим **функцию пластичности Ильюшина**  $\omega(x, \varepsilon_u)$ :

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}} - \text{интенсивность деформаций} \quad (27)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}} - \text{интенсивность напряжений} \quad (28)$$

Можем получить следующую зависимость

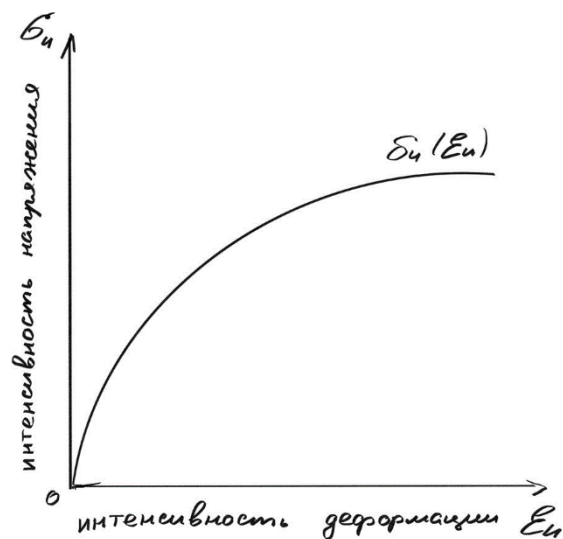


Рис.16.2 Зависимость  $\sigma_u(\epsilon_u)$

Считается, что при любых действиях, совершаемых над материалом интенсивности будут зависеть по одной кривой.

Выразим функцию пластичности Ильюшина:

$$\omega(x, \epsilon_u) = 1 - \frac{\sigma_u(\epsilon_u)}{3G\epsilon_u} \quad (29)$$

Обратим внимание на точку, в которой упругий участок переходит в нелинейный. В этой точке  $\omega(x, \epsilon_u) = 0$ , т.к.  $G = \frac{E}{3}$  ( $\nu = \frac{1}{2}$ ),  $\frac{\sigma_u}{E} = \epsilon_u$ .

Обратное соотношение:

$$\epsilon_{ij} = \Phi_{ijkl}(x, \hat{\sigma}) \sigma_{ij} \quad (30)$$

$$\Phi_{ijkl} = J_{ijkl} + \frac{\varphi(x, \sigma_u)}{3G(x)} D_{ijkl} \quad (31)$$

$$\varphi = \frac{\omega}{1-\omega} = \frac{3G\epsilon_u(\sigma_u)}{\sigma_u} \quad (32)$$

## Лекция 17

### Механика композитов

#### 17.1 Гипотеза единой кривой

Если посмотреть на три рассмотренных нами модели вещества, то можно увидеть общее: при малых деформациях они ведут себя как упругие тела.

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \widehat{F_{ijkl}}(x, \hat{\varepsilon})$ , где  $\widehat{F_{ijkl}}(x, \hat{\varepsilon})$  - некоторый интегральный оператор

- $\widehat{F_{ij}} \equiv 0$  - для упругих тел
- $\widehat{F_{ij}} = \int_0^t F_{ijkl}(x, t, \tau)\varepsilon_{kl}(x, \tau)d\tau$  - линейная вязкая упругость
- $\widehat{F_{ij}} = 2G\omega(x, \varepsilon_u)D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$  - теория пластичности (нелинейная вязкая теория упругости)

$\omega(x, \varepsilon_u)$  строится из эксперимента (см.рис.17.1):

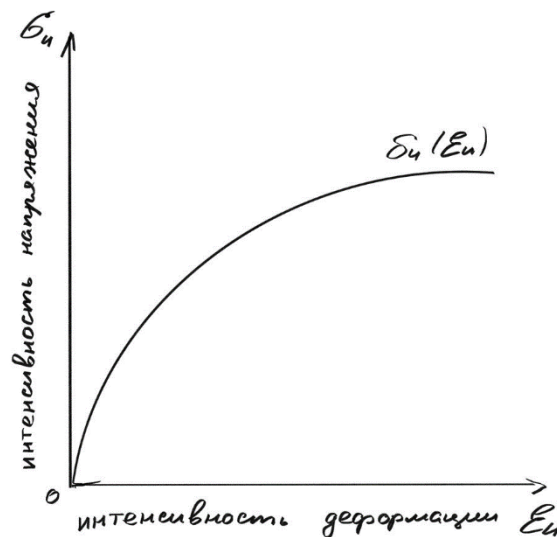


Рис. 17.1 Зависимость  $\sigma_u(\varepsilon_u)$

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3}D_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}} \quad \text{в декартовой системе координат}$$

$D_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \Rightarrow \sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2}D_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl}}$  - в криволинейной системе координат



*Гипотеза единой кривой:* зависимость  $\sigma_u(\varepsilon_u)$  единственная для всех форм испытаний (кручение, сложное напряженное состояние и т.п.)

**Композит-материал, состоящий из отдельных фрагментов различных материалов, каждый из которых представляет собой *сплошную среду*.**

**Идеальный контакт**-случай такого взаимодействия границ фрагментов композита, при котором перемещение, возникающее в теле, *непрерывно* при переходе через эти границы и вектор напряжения непрерывен.

В реальности функции, описывающие свойства вещества (модуль Юнга, коэффициент теплопроводности, диэлектрическая проницаемость и т.п.), на границах *меняются скачком*. Возникает необходимость дифференцировать ступенчатую функцию (обобщенную) или “сращивать” решения, полученные в каждом отдельном фрагменте, используя условие идеального контакта.

В каждом материале можно выделить *типичный элемент* (см. рис. 17.2). При испытании образца мы наблюдаем однородное тело, которое проявляет признаки, отличные от тех, что были у его составных частей. Эти новые характеристики материала называют **эффективными характеристиками**.

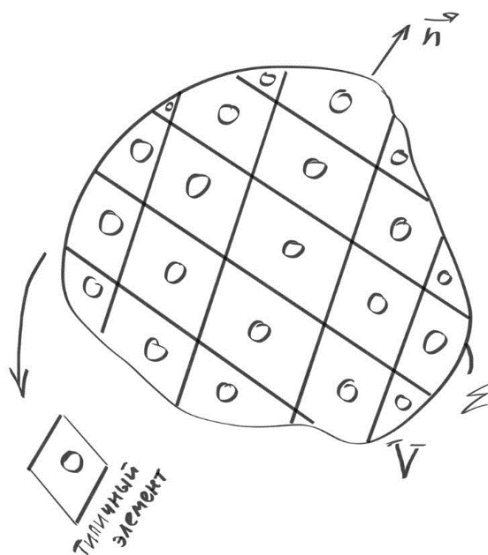


Рис. 17. 2 Строение композита

Система уравнений (1) для определения эффективных характеристик:

$\sigma_{ij,i} = 0$  - нет объемных нагрузок

$$\sigma_{ij} = \widehat{F_{ijkl}}(x, \varepsilon),$$

$$\varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl} u_{k,l} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Граничные условия:

$$1. \quad u_i|_{\Sigma} = \gamma_{ij} y_j, \text{ где } y_j \in \Sigma; \gamma_{ij} = \gamma_{ji} - \text{постоянный тензор} \quad (2)$$

$$2. \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma} = \lambda_{ij} n_j, \text{ где } \vec{n} - \text{нормаль к поверхности; } \lambda_{ij} = \lambda_{ji} - \text{постоянный тензор} \quad (3)$$

Уравнения (1) + (2) - первая специальная краевая задача (1-ая СКЗ)

Уравнения (1) + (3) - вторая специальная краевая задача (2-ая СКЗ)

### 17.3 Первая специальная краевая задача

$\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  - среднее значение деформации по объему

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV = \gamma_{ij} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV &= \frac{1}{V} \int_V \Delta_{ijkl} \varepsilon_{ij} dV = \Delta_{ijkl} \int_V u_{k,l} dV = \Delta_{ijkl} \int_{\Sigma} u_k n_l d\Sigma = \Delta_{ijkl} \int_{\Sigma} \gamma_{ks} y_s n_l d\Sigma = \\ &= \Delta_{ijkl} \gamma_{ks} \int_V x_{s,l} dV = V \Delta_{ijkl} \gamma_{ks} \delta_{sl} = V \gamma_{ij}, \text{ где } x_{s,l} \equiv \frac{\partial x_s}{\partial x_l} = \delta_{sl} \end{aligned}$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} V \gamma_{ij} = \gamma_{ij} - \text{независимо от определяющих соотношений} \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = \widehat{F_{ij}}(x, \varepsilon) = \widehat{F_{ij}}(x, \varepsilon(x, \hat{\gamma})) \quad (6)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle \widehat{F_{ij}}(x, \varepsilon(x, \hat{\gamma})) \rangle = \widehat{h_{ij}}(\hat{\gamma}) = \widehat{h_{ij}}(\langle \varepsilon \rangle)$$

Берем любой представительный объем - по нему находим  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и сопоставляем их. Закономерность, связывающая их, и есть **эффективное определяющее соотношение**.

*В специальной краевой задаче в любом представительном объеме одинаковые  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ .*

Вторая специальная краевая задача рассматривается аналогичным образом.

### 17.4 1-ая СКЗ для случай упругого материала

Система уравнений (6):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

$$\varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl}u_{k,l}$$

$$\text{Ее можно свести к } (C_{ijkl}(x)u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (7)$$

Если  $C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 = \text{const}$ , то  $C_{ijkl}(x)u_{k,l,j} = 0$ ;  $u_i|_\Sigma = \gamma_{ij}y_j$  - граничные условия (8)

$$\text{Решением (8) является } u_i = \gamma_{ij}x_j \quad (9)$$

В линейном неоднородном материале:

$$u_i = \gamma_{ij}x_j + N_i(x, \hat{\gamma}) = \gamma_{ij}x_j + N_{ikl}(x)\gamma_{kl} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = (\Delta_{ijkl} + \Delta_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl} \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl} = (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})\gamma_{kl} \quad (12)$$

Подставим в уравнение равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$ :

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j}\gamma_{kl} = 0$$

Получилась линейная комбинация, равная нулю,  $\gamma$  - независимая  $\Rightarrow$

$$(C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0$$

$$\text{Имеем, } (C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n})_{,j} = 0 \text{ и } N_{jkl}|_\Sigma = 0 \quad (13)$$

Теперь можно усреднить по объему напряжение (12):

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n} \rangle \gamma_{kl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle$$

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n} \rangle - \text{эффективные коэффициенты модуля упругости} \quad (14)$$

Если мы решим (13), то сможем найти  $h_{ijkl}$ . Если модуль упругости постоянный, то из (13) видно, что все эти функции равны нулю в однородном случае, они непрерывны и симметричны по индексам "kl".

## 17.5 Неоднородный по толщине слой

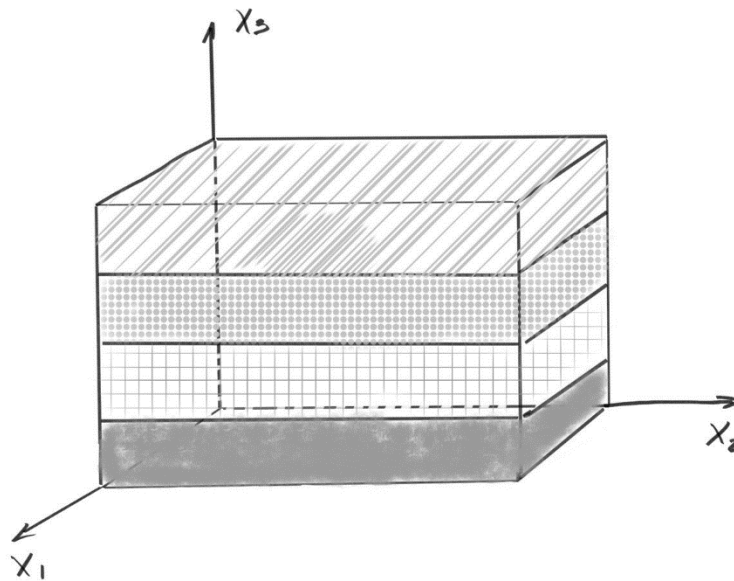


Рис. 17. 3 Неоднородный по толщине слой

Рассмотрим неоднородный по толщине слой (см.рис.17.3) Он бесконечный, поэтому можно считать, что функции (13) - функции одной переменной  $x_3$ .

$$(C_{i3kl}(x_3) + C_{i3m3}(x_3)N_{mkl,n}'(x_3))' = 0 \quad (\text{производные по } x_3) \quad (15)$$

$$N_{mkl}|_{x_3=0, L} = 0 \quad (16)$$

$$C_{m3n3}^{-1} + C_{i3m3}(x_3)N_{mkl}'(x_3) = a_{ikl} = \text{const}$$

$$\text{Для max } N_{mkl}': (C_{i3m3})^{-1} = C_{i3n3}^{-1}$$

$$N_{mkl}' = C_{i3n3}^{-1}(a_{nkl} - C_{n3kl})$$

$$\langle N_{mkl}' \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L N_{mkl}' dx_3 = \frac{1}{L} (N_{mkl}(L) - N_{mkl}(0)) = 0 \quad \text{в силу} \quad (16)$$

$$\langle C_{m3n3}^{-1} \rangle a_{nkl} = \langle C_{m3n3}^{-1} \cdot C_{n3kl} \rangle$$

$$a_{nkl} = \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} \cdot C_{q3kl} \rangle$$

$$N_{mkl}' = C_{m3n3}^{-1} \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} \cdot C_{q3kl} \rangle - \langle C_{m3n3}^{-1} \cdot C_{n3kl} \rangle$$

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} + C_{ijm3} N_{mkl}' \rangle$$

$$h_{ijkl} = \langle C_{ijkl} \rangle + \langle C_{ijm3} \cdot C_{m3n3}^{-1} \rangle \langle C_{n3p3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{p3q3}^{-1} \cdot C_{q3kl} \rangle - \langle C_{ijm3} C_{m3n3}^{-1} C_{n3kl} \rangle$$

Далее по найденным эффективным характеристикам определяют микрохарактеристики вещества.

## Лекция 18

### Термодинамика

При выводе основных уравнений термодинамики нам понадобятся:

$$dm = \rho dV ; \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad - \text{уравнение неразрывности} \quad (1)$$

$$\nabla_j \vec{p}^j + \rho \vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ где } \vec{p}^j = \sigma^{ij} \vec{e}_i - \text{уравнение движения} \quad (2)$$

$$\nabla_j \sigma^{ij} + \rho F^i = \rho \frac{dv^j}{dt}$$

В этих уравнениях не учитывается влияние температуры, хотя, на самом деле, большинство процессов происходят с притоком тепла или его выделением при деформации (переход механической энергии в тепловую).

Теория термодинамики базируется на четырех началах:

1. нулевое начало (вводит понятие температуры)
2. первое начало (закон сохранения энергии)
3. второе начало (закон сохранения энтропии)
4. третье начало (закон Эрнста)

Рассмотрим *физическую систему*: систему различных объектов (в нашем случае - материальных точек), занимающих определенный объем. Все, что окружает физическую систему, называется *окружающей средой*. Система может обмениваться с внешней средой веществом или энергией.

Если нет обмена с внешней средой, то система **изолированная**. Если есть обмен только энергией, то система называется **закрытой**. Если происходит обмен и веществом, и энергией, то система называется **открытой**.

Система характеризуется конечным набором параметров. Те параметры, что пропорциональны объему, называют **экстенсивными** ( $K$ ,  $U$ ,  $W_{\text{полн}}$ ). Остальные называют **интенсивными** (плотность, температура и т.д.).

Зависимость этих параметров друг от друга - это **функция состояния**.

#### Нулевой закон термодинамики:

Тепловое равновесие двух соприкасающихся тел означает, что все их термодинамические параметры совпадают. Если каждое из двух тел находится в термодинамическом равновесии с третьим, то между собой они также находятся в термодинамическом состоянии. (**принцип транзитивности**).

Шкалы температур: Шкала Цельсия, Фаренгейта, Кельвина.

$$0 \text{ K} = -273 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

**Термодинамический процесс** - изменение одного или нескольких параметров системы во времени.

Если в результате термодинамического процесса параметры системы возвращаются к исходным значениям, то такой процесс называют **термодинамическим циклом**.

Если от точки к точке мы проходим так медленно, что система успевает возвращаться в равновесное состояние, то такой процесс называют **квазистатическим**.

Если система претерпевает изменения, и мы можем так организовать процесс, что в результате его выполнения параметры системы вернутся в начальное состояние, то такой процесс называют **обратимым**. Циклический процесс - пример обратимого процесса.

Процесс, происходящий в системе без обмена теплом с внешней средой, называют **адиабатическим** процессом.

## 18.2 Закон сохранения энергии

Рассматриваем случай малых деформаций.

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_V \vec{v} \nabla_j \vec{p}^j dV \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое данного уравнения:

- $$\frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \{\text{инвариант, представим в декартовых координатах}\} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_i}{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$$

$$v^2 = v_i v_i$$

- $$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_m \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) dm = \frac{d}{dt} \int_m \frac{v^2}{2} dm = \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV =$$

$$= \frac{dK}{dt} - \text{изменение кинетической энергии.}$$

$$\int_V \frac{\rho v^2}{2} dV \equiv K - \text{кинетическая энергия, } \frac{\rho v^2}{2} - \text{плотность кинетической энергии.} \quad (6)$$

- $$\int_V \vec{v} \nabla_j \vec{p}^j dV = \int_V v_i \nabla_j \sigma^{ij} dV = \int_V [\nabla_j (\sigma^{ij} v_i) - \sigma^{ij} \nabla_j v_i] dV =$$

$$= \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma - \int_V \sigma^{ij} \nabla_j v_i dV$$

$$\bullet \quad \int_V \sigma^{ij} \nabla_j v_i dV = \int_V \sigma^{ij} \left[ \frac{1}{2} (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2} (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) \right] dV$$

$$\frac{1}{2} (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) \equiv \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{1}{2} (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) \equiv \omega_{ij}$$

$$\bullet \quad \sigma^{ij} \nabla_j v_i = \sigma^{ji} \nabla_i v_j = \sigma^{ij} \nabla_i v_j \Rightarrow \sigma^{ij} \omega_{ij} = \frac{1}{2} [\sigma^{ij} \nabla_j v_i - \sigma^{ij} \nabla_i v_j] = 0$$

$$\bullet \quad \nabla_j v_i = \nabla_j \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \nabla_j u_i$$

$$\bullet \quad \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{ij}$$

$$\bullet \quad \int_V \sigma^{ij} \nabla_j v_i dV = \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV$$

Окончательно имеем:  $\frac{dK}{dt} = \int_V \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma - \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV$  - **закон изменения кинетической энергии** (7)

$\dot{A} = \int_V \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma$  - механическая мощность (мощность внешних сил: объемных и поверхностных) (8)

$\dot{\bar{U}} = \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV$  - изменение внутренней энергии, где  $\bar{U} = \sigma^{ij} \varepsilon_{ij}$  - потенциал (плотность потенциальной энергии). (9)

$K + \bar{U}$  - полная энергия

**Закон сохранения механической энергии** (сумма изменений кинетической и потенциальной энергий равняется мощности внешних сил):

$$\dot{K} + \dot{\bar{U}} = \dot{E} = \dot{A} \quad (10)$$

Учитывая обмен теплом с окружающей средой, получаем  $\frac{d}{dt} (K + \bar{U}) = \dot{A} + \dot{Q}$ , где  $\dot{Q}$  - тепловая мощность.

### 18.3 Вектор теплового потока

Тепло сообщается телу в виде **вектора теплового потока**  $\vec{q}$ . Направление вектора считается положительным, если он противоположно направлен вектору нормали к поверхности тела.

$$\frac{dQ}{dt} = -\vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (11)$$

Если вектор потока идет параллельно вектору касательной к поверхности, то тепло внутрь не проникает.

$$\dot{Q} = - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma \quad (12)$$

$$\dot{Q} = - \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV = - \int_V \nabla_i q^i dV \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}(K + \bar{U}) = \dot{A} - \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV \quad (14)$$

Экспериментально зафиксированный факт:  $\vec{q} = \hat{\kappa} \operatorname{grad} T$  - закон теплопроводности Фурье,  $\hat{\kappa}$  - тензор второго ранга

$$q^i = \kappa^{ij} \nabla_j T \quad (15)$$

В изотропном случае:  $\kappa^{ij} = \kappa g^{ij}$

$$\text{Тогда } q_i = \kappa \nabla^i T \quad (16)$$

$$q_i = \kappa \frac{dT}{dx_i} \quad (17)$$

$$\frac{dK}{dt} = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma - \int_V \dot{U} dV$$

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i dV = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_V \nabla_j (\sigma^{ij} v_i) dV - \int_V \dot{U} dV$$

$$\int_V (\rho F^i - dV \rho \dot{v}^i) v_i dV + \int_V v_i \nabla_j \sigma^{ij} dV + \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V \dot{U} dV = 0$$



## Лекция 19

### Законы термодинамики

#### 19.1 Закон сохранения энергии. Энтропия

Как вы уже успели заметить все факты мы стараемся выводить из законов сохранения:

- массы,
- количества движения,
- момента количества движения,
- энергии.

Запишем уравнение движения:

$$\rho \dot{v}^i = \rho F^i + \nabla_j \sigma^{ij} \quad (1)$$

Умножим уравнение (1) на  $v_i$  и проинтегрируем по произвольному объему:

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i dV = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_V v_i \nabla_j \sigma^{ij} dV \quad (2)$$

Из равенства (2) получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v_i v_i}{2} dV = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_\Sigma \sigma^{ij} n_j v_i d\Sigma - \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (3)$$

$$\text{Кинетическая энергия: } K = \int_V \frac{\rho v_i v_i}{2} dV = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV, \quad (4)$$

где  $\frac{\rho v^2}{2} dV$  - плотность кинетической энергии.

$$\text{Введем следующую величину: } \dot{U} = \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (5)$$

$$\text{где } \dot{U} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \text{потенциал (плотность потенциальной энергии)}. \quad (6)$$

Закон сохранения механической энергии (сумма изменений кинетической и потенциальной энергий равняется мощности внешних сил):

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{E} = \dot{A}, \quad (7)$$

$$\text{где } \dot{A} = \int_V \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_\Sigma \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma - \text{мощность внешних сил} \quad (8)$$

Покажем, что  $U$  является функцией от  $\hat{\varepsilon}$ :

$$dU = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow U = U(\hat{\varepsilon}) \quad (9)$$

Значит, можем записать дифференциал для  $U$ :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (10)$$

$$\text{Из (9) и (10) следует, что } \sigma^{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (11)$$

т.е. внутренняя механическая энергия является **потенциалом**.

Если учитывать тепловое воздействие, то закон сохранения энергии будет записан так:

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{A} + \dot{Q}, \quad (12)$$

где  $\dot{Q}$  - **мощность тепловых источников**.

Т.к. распространение тепла можно рассматривать как движение тепловых потоков, то можно ввести **вектор теплового потока**  $\vec{q}$  (см. рис.19.1) такой, что:

$$d\dot{Q} = -\vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma, \quad (13)$$

$$\dot{Q} = -\int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma = -\int_V \nabla_i q^i dV, \quad (14)$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к участку, площадь которого  $d\Sigma$

Обозначим мощность внутренних источников тепла как  $\vec{w}$ . Тогда выражение для мощности тепловых источников примет вид:

$$d\dot{Q} = -\vec{q} \cdot \vec{n} d\Sigma + \vec{w} dV \quad (15)$$

$$\dot{Q} = \int_V (w - \nabla_i q^i) dV = \int_V (w - \text{div } \vec{q}) dV \quad (16)$$

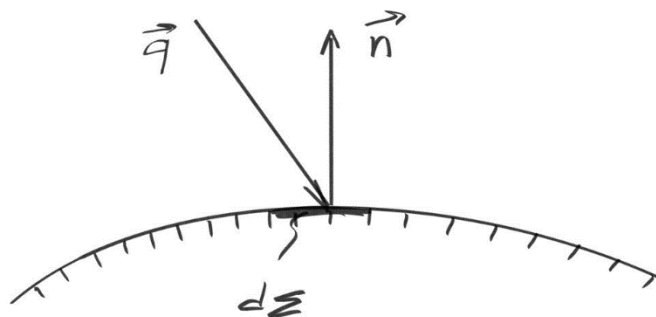


Рис.19.1 Вектор теплового потока  $\vec{q}$

Соотношение (12) является записью **первого закона термодинамики**. Запишем его в следующем виде:

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i dV + \int_V \dot{v} dV = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_\Sigma \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (17)$$

Преобразуем равенство (17).

$$\int_V \dot{v} dV = \int_V (\rho F^i - \rho \dot{v}^i) v_i dV + \int_V \nabla_j (\sigma^{ij} v_i) dV + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (18)$$

$$\int_V \dot{v} dV = \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (19)$$

Получим локальное соотношение:

$$\dot{U} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + w - \nabla_i q^i \quad (20)$$

Выражение (20) показывает, что, если теплообмена нет, то  $\dot{U}$  - полный дифференциал и потенциал. Введем термодинамический параметр  $S$  и положим, что

$$w - \nabla_i q^i = T \dot{S} \quad (21)$$

Тогда выражение (20) можно записать так:

$$\dot{U} = \hat{\sigma} \hat{\varepsilon} + T \dot{S} \quad (22)$$

Параметр  $S$  называется **энтропией**.

$$\dot{S} = \frac{w - \nabla_i q^i}{T} \quad (23)$$

Полное изменение энтропии:

$$\dot{\Sigma} = \int_V \frac{w - \nabla_i q^i}{T} dV = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V \frac{\nabla_i q^i}{T} dV \quad (24)$$

$$\dot{\Sigma} = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V \left[ \nabla_i \left( \frac{q^i}{T} \right) + \frac{q^i \nabla_i T}{T^2} \right] dV \quad (25)$$

Первый интеграл в формуле (25) дает вклад в изменение энтропии в результате взаимодействия тела с внутренними источниками тепла, второй - из-за взаимодействия с внешней средой, т.е.:

$$\dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}_{ext} + \dot{\Sigma}_{int} \quad (26)$$

$$\dot{\Sigma}_{ext} = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V \nabla_i \left( \frac{q^i}{T} \right) dV \quad (27)$$

$\dot{\Sigma}_{int} = \int_V \frac{q^i \nabla_i T}{T^2} dV = - \int_V \frac{\vec{q} grad T}{T^2} dV$  - **производство энтропии**. Возникает из-за того, что внутри тела образуются потоки тепла.

## 19.2 Второй закон термодинамики

Известно, что тепло распространяется от горячего тела к холодному. Рассмотрим произвольную точку в теле и изобразим вектор  $\text{grad } T$  в этой точке (рис. 19.2). Поток тепла, должен быть направлен ниже изображенной плоскости, т.к. в противном случае тепло будет распространяться от более холодной части к более горячей, что противоречит наблюдениям. Пусть  $\vartheta$  - угол между векторами  $\vec{q}$  и  $\text{grad } T$ , причем

$\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3\pi}{2}$ . В этом и заключается суть **второго закона термодинамики**.

$$\vec{q} \text{grad } T \leq 0 \text{ - неравенство Фурье} \quad (28)$$

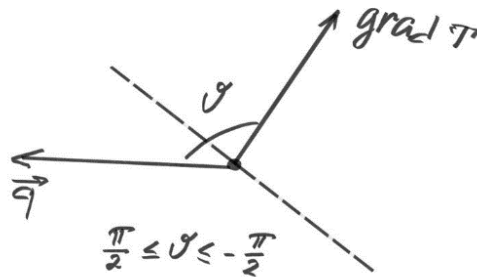


Рис. 19.2 Суть второго закона термодинамики

Тогда производство энтропии определяется скалярным произведением (28):

$$\dot{\Sigma}_{int} = - \int_V \frac{\vec{q} \text{grad } T}{T^2} dV \geq 0 \quad (29)$$

Если нет внутренних источников тепла и нет притоков снаружи, то энтропия внутри тела не может уменьшаться.

$$dU = \hat{\sigma} d\hat{\epsilon} + T dS \quad (30)$$

Из (30) следует, что  $U$  - функция от  $\hat{\epsilon}$  и  $S$ , т.е.  $U = U(\hat{\epsilon}, S)$ . А значит:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \hat{\epsilon}} d\hat{\epsilon} + \frac{\partial U}{\partial S} dS \quad (31)$$

Сравнивая (30) и (31), получаем:

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\epsilon}}; \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (32)$$

Потенциал свободной энергии:

$F = U - TS$  - **потенциал Гельмгольца** (определяет часть энергии, которую можно потратить на работу) (33)

$$dF = dU - SdT - TdS = \hat{\sigma} d\hat{\epsilon} - SdT \Rightarrow F = F(\hat{\epsilon}, T) \quad (34)$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \quad (35)$$

Сравнивая (34) и (35), получаем:

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}}; \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (36)$$

**Потенциал Гиббса:**

$$G = F - \hat{\sigma} \hat{S} \quad (37)$$

$$dG = \hat{\varepsilon} d\hat{\sigma} - S dT \quad (38)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\sigma}}; \quad S = -\frac{\partial G}{\partial T} \quad (39)$$

Введем еще один потенциал. Максимальное тепло характеризуется **энтальпией**, т.е. это та энергия, которую можно превратить в тепло при определенных давлении и температуре:

$$H = U - \hat{\sigma} \hat{S} \Rightarrow dU - \hat{\sigma} d\hat{S} - \hat{\varepsilon} d\hat{\sigma} = T dS - \hat{\varepsilon} d\hat{\sigma} \quad (40)$$

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{\partial H}{\partial \hat{\sigma}}; \quad S = -\frac{\partial H}{\partial T} \quad (41)$$

## Лекция 20

### Уравнение теплопроводности

#### 20.1 Законы термодинамики

На прошлой лекции мы установили, что изменение полной энергии тела при наличии теплообмена с внешней средой записывается следующим образом:

$$\dot{K} + \int_V \dot{U} dV = \dot{A} + \dot{Q} \quad (1)$$

$$K = \int_V \frac{\rho v^i v_i}{2} dV \Rightarrow \dot{K} = \int_V \rho v^i \dot{v}_i dV \quad (2)$$

$\dot{A}$  - мощность внешних массовых нагрузок и поверхностных нагрузок.

$$\dot{A} = \int_V \rho \vec{F} \vec{v} dV + \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma \quad (3)$$

Мощность тепла  $\dot{Q}$ , поступающего извне и изнутри, мы выразил через поток тепла:

$$\dot{Q} = \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (4)$$

В случае адиабатического процесса мы показали, что плотность мощности внутренней энергии выражается формулой (5):

$$\dot{U} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (5)$$

Из (5) следуют, что

$$dU = \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow U = U(\varepsilon) \quad (6)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \Rightarrow \sigma^{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (7)$$

Чтобы выяснить, как влияет на выражение для внутренней энергии тепло, мы рассмотрели закон изменения кинетической энергии:

$$\int_V \rho \dot{v}^i v_i dV + \int_V \dot{v} dV = \int_V \rho F^i v_i dV + \int_{\Sigma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Sigma + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (8)$$

$$\int_V \dot{v} dV = \int_V (\rho F^i - \rho \dot{v}^i) v_i dV + \int_V \nabla_j (\sigma^{ij} v_i) dV + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (9)$$

$$\int_V \dot{v} dV = \int_V \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_V (w - \nabla_i q^i) dV \quad (10)$$

Получим локальное соотношение:

$$\dot{U} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + w - \nabla_i q^i \quad (11)$$

Выражение (11) называется **уравнением баланса внутренней энергии**.

В первом законе термодинамики постулируется существование такой термодинамической функции (функция каких-либо термодинамических параметров), как **внутренняя энергия**, которая является полным дифференциалом.

Введем еще один термодинамический параметр  $S$  (**энтропия**):

$$w - \nabla_i q^i = T \dot{S} \quad (12)$$

Соотношение (12) называется **уравнением баланса энтропии**.

Выражение (12) было введено, чтобы сделать внутреннюю энергию (11) полным дифференциалом.

$$\dot{U} = \hat{\sigma} \dot{\hat{\varepsilon}} + T \dot{S} \quad (13)$$

$$dU = \hat{\sigma} d\hat{\varepsilon} + T dS \Rightarrow U = U(\hat{\varepsilon}, S) \quad (14)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial S} dS \quad (15)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}}; \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (16)$$

$$\text{Также была введена величина полной энтропии } \dot{\Xi} = \int_V \frac{w - \nabla_i q^i}{T} dV \quad (17)$$

$$\dot{\Xi} = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V \frac{\nabla_i q^i}{T} dV = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V [\nabla_i \left(\frac{q^i}{T}\right) + \frac{q^i \nabla_i T}{T^2}] dV \quad (18)$$

$$\dot{\Xi}_{ext} = \int_V \frac{w}{T} dV - \int_V \nabla_i \left(\frac{q^i}{T}\right) dV \quad (19)$$

$$\dot{\Xi}_{int} = \int_V \frac{q^i \nabla_i T}{T^2} dV = - \int_V \frac{\vec{q} \text{grad } T}{T^2} dV \quad (20)$$

Второй закон термодинамики заключается в том, что тепло не может самопроизвольно идти от более холодного тела к более горячему.

$$\vec{q} \text{grad } T \leq 0 \quad (21)$$

$$-\frac{q^i \nabla_i T}{T^2} = q^i \nabla_i \left(\frac{1}{T}\right) = q^i \Phi_i \quad (22)$$

$$\Phi_i = \nabla_i \left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\nabla_i T}{T^2} \quad (23)$$

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{\Phi}); \quad \vec{\Phi} = \Phi_i \vec{e}^i \quad (24)$$

Свяжем векторы  $q$  и  $s$  помощью тензора второго ранга:

$$q^i = a^{ij} \Phi_j \quad (25)$$

Выражение (25) записано в предположении, что температура не слишком сильно меняется как по координатам, так и по времени.

$$q^i = -a^{ij} \frac{\nabla_j T}{T^2} = -\lambda^{ij} \nabla_j T \quad (26)$$

$$\text{При этом мы предполагаем, что } \frac{\vartheta}{T_0} = \frac{T-T_0}{T_0} \ll 1 \quad (27)$$

Величины  $\lambda^{ij}$  называются **коэффициентами теплопроводности**. При малых изменениях температуры коэффициенты теплопроводности можно принять за константы.

**Закон теплопроводности Фурье:**

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T \quad (28)$$

Тогда выражение для энтропии, с учетом условия (27), примет вид:

$$T\dot{S} = w + \nabla_i (\lambda^{ij} \nabla_j T) \quad (29)$$

Запишем **систему уравнение теплопроводности**:

$$T\dot{S} = w - \nabla_i q^i$$

$$q^i = -\lambda^{ij} \nabla_j T$$

В данной системе не хватает ещё одного уравнения. Для его нахождения нужно записать в явном виде, как потенциалы выражаются через свои переменные. Задача о нахождении такой записи в общем виде очень сложна, поэтому рассмотрим случай малых изменений температуры.

## 20.2 Потенциал Гельмгольца

Разложим потенциалы в ряды Тейлора.

В начальном состоянии:  $T = T_0$ ;  $\hat{\sigma} = 0$ ;  $\hat{\varepsilon} = 0$ ;  $\hat{S} = 0$

**Потенциал Гельмгольца**  $F = F(\hat{\varepsilon}, T)$ :

$$dF = \hat{\sigma} d\hat{\varepsilon} - SdT = \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}}; S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$F(\hat{\varepsilon}, T) = F(0, T_0) + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial T^2} (T - T_0)^2 \right] + \dots \quad (30)$$

При этом мы учли, что деформации малые, т.е.  $|\varepsilon_{ij}| \ll 1$ .



Будем считать, что свободная энергия в начальном состоянии равна нулю, т.е.  
 $F(0, T_0) = 0$

$$\frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} = \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} = 0, \text{ т.к. } \sigma^{ij} = 0 \text{ в начальном состоянии.}$$

$$\frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} (T - T_0) = -S(T - T_0) = 0$$

Таким образом, все линейные слагаемые равны нулю.

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \equiv C_T^{ijkl} \text{ (нижний индекс } T \text{ означает, что температура постоянна)} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \equiv -\beta^{ij} \quad (32)$$

Учитывая (31) и (32), получим формулу для потенциала Гельмгольца:

$$F(\hat{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} C_T^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \varepsilon_{ij} \vartheta + F_0(\vartheta) \quad (33)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_T^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \vartheta \quad (34)$$

$C_T^{ijkl}$  - компоненты изотермического модуля упругости (симметричны по индексам  $i$  и  $j$ ,  $k$  и  $l$ )

$\beta^{ij}$  - коэффициенты тепловых напряжений. Это означает, что если мы тело не деформируем, а только нагреваем, то в результате теплового расширения будут возникать напряжения. В общем случае коэффициенты тепловых напряжений зависят не только от тепловых свойств тела, но и от упругих.

Для энтропии:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{\partial F_0}{\partial T} \quad (35)$$

Потенциал  $F$  зависит только от  $\varepsilon$  и  $T$ , следовательно энтропия  $S$  тоже будет функцией деформации и температуры. Т.е.  $S$  также является потенциалом.

$$S = S(\hat{\varepsilon}, T) \Rightarrow dS = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial T} dT \quad (36)$$

$$dS = \beta^{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial T^2} dT \quad (37)$$

Из (37) и (36) следует, что:

$$\beta^{ij} = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (38)$$

Введем **теплоемкость при постоянной деформации** (т.е. это величина, характеризующая теплоту, которую может вобрать в себя тело при постоянной деформации):

$$C_\varepsilon \equiv T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_0}{\partial T^2} \quad (39)$$

Зная (39), можем записать:

$$F_0(\vartheta) = \int_{T_0}^T dT \int_{T_0}^T \frac{C_\varepsilon}{T} dT \quad (40)$$

$$-\frac{\partial F_0}{\partial T} = - \int_{T_0}^T \frac{C_\varepsilon}{T} dT = C_\varepsilon \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = C_\varepsilon \ln\left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right) \quad (41)$$

$$-\frac{\partial F_0}{\partial T} \approx C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} \quad (42)$$

Тогда окончательно получаем замкнутую систему уравнений (43) - (45):

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} \quad (43)$$

$$T \dot{S} = w - \nabla_i q^i \quad (44)$$

$$q^i = -\lambda^{ij} \nabla_j T \quad (45)$$

Эту систему можно свести к одному уравнению для температуры.

## Лекция 21

### Постановка задач теплопроводности

#### 21.1 Уравнение теплопроводности

На прошлой лекции было установлено, что

$$\dot{U} = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + w - \nabla_i q^i \quad (1)$$

Соотношение (1) называется уравнением баланса внутренней энергии.

$$T \dot{S} = w - \nabla_i q^i \quad (2)$$

Соотношение (2) называется уравнением баланса энтропии.

Показали, что энтропия тела возрастает, если оно изолировано. Ввели вектор теплового потока:

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{\Phi}), \quad (3)$$

$$\text{где } \vec{\Phi} = \text{grad} \left( \frac{1}{T} \right) = - \frac{\nabla_i T}{T^2} \vec{e}^i \quad (4)$$

При этом мы предположили, что температура не сильно меняется по сравнению с начальным значением.

$$\text{Закон теплопроводности Фурье: } q^i = -\lambda^{ij} \nabla_j T \quad (5)$$

Разложим функцию (3) в окрестности начальной температуры:

$$q^i = \lambda^{ij} \Phi_j + \frac{1}{2} \lambda^{ijkl} \Phi_k \Phi_l + \dots$$

$$\text{Внутренняя энергия: } \dot{U} = \hat{\sigma} \hat{\varepsilon} + T \dot{S} \Rightarrow U = U(\hat{\varepsilon}, S) \quad (6)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \hat{\varepsilon}}; \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad (7)$$

$$\text{Ввели потенциал Гельмгольца: } F = U - TS \Rightarrow F = F(\hat{\varepsilon}, T) \quad (8)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\varepsilon}}; \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T} \quad (9)$$

$$\text{Рассмотрели потенциал Гиббса: } G = U - TS - \hat{\sigma} \hat{\varepsilon} \Rightarrow G = G(\hat{\sigma}, T) \quad (10)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\partial G}{\partial \hat{\sigma}}; \quad S = - \frac{\partial G}{\partial T} \quad (11)$$

$$\text{Ввели энтальпию: } H = U - \hat{\sigma} \hat{\varepsilon} \Rightarrow H = H(\hat{\sigma}, S) \quad (12)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial \hat{\sigma}}; \quad T = \frac{\partial H}{\partial S} \quad (13)$$

Т.к.  $S = -\frac{\partial F(\hat{\varepsilon}, T)}{\partial T} \Rightarrow S = S(\hat{\varepsilon}, T)$ , т.е. энтропия является термодинамической функцией, а дифференциал энтропии является полным:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial T} dT \quad (14)$$

Ввели теплоемкость при постоянной деформации:

$$C_\varepsilon \equiv T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_0}{\partial T^2} \quad (15)$$

Исходя из потенциала Гиббса, можно ввести коэффициент  $C$ .

Зная начальные условия ( $T = T_0$ ;  $\hat{\sigma} = 0$ ;  $\hat{\varepsilon} = 0$ ;  $\hat{S} = 0$ ) и учитывая, что деформации и отклонения температуры малы, можем разложить потенциал Гельмгольца:

$$F(\hat{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} C_T^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \varepsilon_{ij} \vartheta + F_0(\vartheta) \quad (16)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_T^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \vartheta \quad (17)$$

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} \quad (18)$$

Соотношения (17) и (18) называются **определяющими соотношениями Дюамеля-Неймана**.

## 21.2 Постановка задач теплопроводности

Запишем еще раз уравнение баланса энтропии:

$$T \dot{S} = w - \nabla_i q^i \quad (19)$$

Закон теплопроводности Фурье:

$$q^i = -\lambda^{ij} \nabla_j T \quad (20)$$

Выражение для энтропии:

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0}, \quad (21)$$

$$\text{где } \vartheta = T - T_0 \quad (22)$$

В системе уравнений (19) - (22) неизвестными являются:  $T$ ,  $S$ ,  $q^i$ . Подставим выражения (20) - (22) в уравнение баланса энтропии (19):

$$\nabla_i (\lambda^{ij} \nabla_j T) - T \beta^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + w = C_\varepsilon \frac{T \dot{T}}{T_0} \quad (23)$$

Проведем линеаризацию уравнения (23):

$$T = T_0 \left(1 + \frac{T - T_0}{T_0}\right)$$

$$T \varepsilon_{ij} = T_0 \left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right) \varepsilon_{ij} = T_0 \varepsilon_{ij} + T_0 \frac{\vartheta}{T_0} \varepsilon_{ij} \approx T_0 \varepsilon_{ij}$$

$$\frac{T \dot{T}}{T_0} = T_0 \left(1 + \frac{\vartheta}{T_0}\right) \frac{\dot{T}}{T_0} = T_0 \frac{\dot{T}}{T_0} + T_0 \frac{\vartheta}{T_0} \frac{\dot{T}}{T_0} \approx \dot{T}$$

После линеаризации получили уравнение:

$$\nabla_i (\lambda^{ij} \nabla_j T) - T_0 \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + w = C_\varepsilon \dot{T} \quad (24)$$

Уравнение (24) является классическим уравнением теплопроводности при наличии источников тепла.

$$\nabla_i (\lambda^{ij} \nabla_j T) + \bar{w} = C_\varepsilon \dot{T}, \quad (25)$$

$$\text{где } \bar{w} = -T_0 \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + w$$

Уравнение (25) является уравнением параболического типа.

$$\text{Уравнение эллиптического типа: } \lambda^{ij} T_{,ij} + \bar{w} = 0$$

$$\text{В изотропном случае (декартовы координаты): } \lambda_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (26)$$

$$\text{Учитывая (26), уравнение (25) принимает вид: } \lambda T_{,ij} + \bar{w} = 0 \quad (27)$$

Параболические уравнения характерны тем, что при поиске решений, например, о распространении тепловых возмущений, скорость распространения бесконечна. Но если возмущение гармоническое, то оно распространяется со скоростью пропорциональной  $\sqrt{\omega}$ , где  $\omega$  - частота возмущений.

$$T(x, t)|_{t=0} = T_0(x), \quad x \in V - \text{начальные условия.}$$

Запишем граничные условия для уравнения (25):

$$T(x, t)|_\Sigma = T_\Sigma(y, t), \quad y \in \Sigma, \text{ где } \Sigma - \text{поверхность с постоянной температурой.}$$

Запишем тепловой поток:

$$\vec{q} \vec{n}|_\Sigma = q^i n_i|_\Sigma = \lambda^{ij} \nabla_j T n_i = q(y, t), \quad y \in \Sigma$$

В случае теплоизоляции:

$$1. \quad q = 0$$

$$2. \quad \text{Происходит конвективный теплообмен: } q(y, t) = \chi [T(y, t) - T_{\text{окр}}]$$

$$3. \quad q(y, t) = \sigma^* [T_{\text{луч}}^4 - T^4(y, t)], \text{ где } \sigma^* - \text{коэффициент лучеиспускания.}$$

## Лекция 22

### Методы теории размерности

**22.1 Термодинамические потенциалы. Связь теплоемкостей при постоянном напряжении и постоянной деформации.**

$$S(\hat{\varepsilon}, T) = - \frac{\partial F(\hat{\varepsilon}, T)}{\partial T} \quad (1)$$

**Энтропия** - потенциал, т.е. через ее производные можно выразить величины, характеризующие процесс или материал.

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \hat{\varepsilon}} d\hat{\varepsilon} + \frac{\partial S}{\partial T} dT \quad (2)$$

$$\beta^{ij}(\hat{\varepsilon}, T) = \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = - \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \quad (3)$$

$$C_\varepsilon(\hat{\varepsilon}, T) \equiv T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_0}{\partial T^2} \quad (4)$$

Все эти функции - функции термодинамических параметров. Разложение потенциала в окрестности начального состояния представляет собой *квадратичную форму*.

Тогда  $\beta^{ij}(\hat{\varepsilon}, T)$  и  $C_\varepsilon(\hat{\varepsilon}, T)$  при малых деформациях и малых отклонениях от начальной температуры являются **постоянными** величинами и характеризуют среду.

$$S = \beta^{ij} d\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{d\vartheta}{T} \quad (5)$$

В линейном случае:  $S = \beta^{ij} d\varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{d\vartheta}{T_0}$ , т.к.  $T = (1 + \frac{\vartheta}{T_0})$

$$F(\hat{\varepsilon}, T) = \frac{1}{2} C_T^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \varepsilon_{ij} \vartheta - C_\varepsilon \frac{\vartheta^2}{2T_0} \quad (6)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_T^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} \vartheta \quad (7)$$

$$S = \beta^{ij} \varepsilon_{ij} + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} \quad (8)$$

Выразим энтропию через потенциал Гиббса:

$$S(\hat{\sigma}, T) = - \frac{\partial G(\hat{\sigma}, T)}{\partial T} \quad (9)$$

Тогда  $dS = \frac{\partial S}{\partial \hat{\sigma}} d\hat{\sigma} + \frac{\partial S}{\partial T} dT$  (10)

$$\alpha_{ij}(\hat{\sigma}, T) = \frac{\partial S}{\partial \hat{\sigma}} = - \frac{\partial^2 G(\hat{\sigma}, T)}{\partial \hat{\sigma} \partial T} \quad (11)$$

$$C_\sigma(\hat{\sigma}, T) \equiv T \frac{\partial S(\hat{\sigma}, T)}{\partial T} \quad (12)$$

$$dS = \alpha_{ij} d\sigma^{ij} + C_\sigma \frac{d\vartheta}{T} \quad (13)$$

Тогда  $\alpha_{ij}(\hat{\sigma}, T)$  и  $C_\sigma(\hat{\sigma}, T)$  при малых деформациях и малых отклонениях от начальной температуры тоже являются **постоянными** величинами и характеризуют среду.

$$S = \alpha_{ij} \sigma^{ij} + C_\sigma \frac{\vartheta}{T_0} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij} = J_{ijkl}^T \sigma^{kl} + J_{ijkl}^T \beta^{kl} \vartheta, \text{ где } \hat{J}^T = (\hat{C}_T)^{-1} \quad (15)$$

Сравнивая (5) и (13), видим, что энтропия выражается через различные величины:

$$\alpha_{ij}, C_\sigma, \beta^{ij}, C_\varepsilon, C_T^{ijkl}$$

Найдем связь между ними:

Подставим (15) в (8).

$$\begin{aligned} S &= \beta^{ij} (J_{ijkl}^T \sigma^{kl} + J_{ijkl}^T \beta^{kl} \vartheta) + C_\varepsilon \frac{\vartheta}{T_0} = \\ &= J_{ijkl}^T \beta^{ij} \sigma^{kl} + (C_\varepsilon + T_0 J_{ijkl}^T \beta^{ij} \beta^{kl}) \frac{\vartheta}{T_0} \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая (16) с (14), получаем:

$$\alpha_{ij} = J_{ijkl}^T \beta^{ij} \quad (17)$$

$$C_\sigma = C_\varepsilon + T_0 J_{ijkl}^T \beta^{ij} \beta^{kl} \quad (18)$$

$$C_\sigma - C_\varepsilon = T_0 \alpha_{ij} \beta^{ij} \quad (19)$$

## 22.2 Теория размерности

Для измерения различных величин должна быть выбрана *метрическая система*. Как правило, в ней выделяют **основные единицы** измерения, через которые выражаются все остальные, называемые **производными**.

*MLT* - система “Масса, Длина, Время”.

Наиболее узнаваемой является система *СИ*: килограмм, метр, секунда.

*CGS*: грамм, сантиметр, секунда.

Производные единицы выражаются через основные с помощью **формул размерности**.

$[a]$  - обозначение для размерности величины “а”

Примеры:

$[u] = L$  - перемещение;

$[P] = \frac{ML}{T} = MLT^{-2}$  - сила;

$[I] = M^0 L^0 T^0$  - безразмерная величина;

Размерные переменные в физических законах могут быть *независимыми* или *выражаться друг через друга*.

$[u] = L$ ,  $[\dot{u}] = \frac{L}{T} = LT^{-1}$ ,  $[K] = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2T^{-2}$ ;

Эти величины невозможно выразить друг через друга. Система таких единиц – **размерно-независимая**.

$[\ddot{u}] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$

$[\ddot{u}] = [\dot{u}]^2 [u]^{-1}$  - пример **размерно-зависимых** единиц.

### 22.3 Структура физических законов. Представление физического закона в безразмерной форме.

Рассмотрим структуру физических законов: некоторый параметр выражается через некоторое количество других (размерных или безразмерных). Безразмерный параметр - частный случай размерного.

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (1)$$

$n+1$  параметр, из которых  $a_1 \dots a_k$  – размерно-независимые,  $a_{k+1}, \dots, a_n$  - размерно-зависимые.

*Физический закон не должен зависеть от того, в каких единицах измеряются входящие в него величины.*

Обозначим  $[a] = A$

$[a_1] = A_1, [a_2] = A_2, \dots, [a_n] = A_n$ .

Перейдем к другой системе измерения, т.е. каждый из независимых параметров мы можем увеличить или уменьшить в некоторое количество раз.

$$a'_1 = \alpha_1 a_1;$$

$$a'_2 = \alpha_2 a_2;$$

.....



$$a'_k = \alpha_k a_k; \quad (2)$$

Исходные величины  $a_{k+1}, \dots, a_n$  – размерно-зависимые:

$$[a_1] = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k} \quad (3)$$

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k} \quad (4)$$

$$[a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k} \quad (5)$$

$$a' = f(a'_1, \dots, a'_k, a'_{k+1}, \dots, a'_n) \quad (6)$$

Выражения (7):

$$a' = \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k} a;$$

$$a'_{k+1} = \alpha_1^{p_1} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1};$$

$$a'_n = \alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k} a_n; \quad (7)$$

Подставим (7) в (6), тогда получим:

$$\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k} a = f(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k} a_n) \quad (8)$$

Закон  $f$  - **однородная функция** для различных независимых параметров.

$$\text{Пусть } \alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{a_k} \quad (9)$$

$$\text{Из (7): } a' = \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k}} \equiv \Pi \text{ (безразмерная величина)} \quad (10)$$

$$a'_{k+1} = \frac{a}{\alpha_1^{p_1} \dots \alpha_k^{p_k}} \equiv \Pi_1 \quad (11)$$

$$a'_n = \frac{a}{\alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k}} \equiv \Pi_{n-k} \quad (12)$$

$$\Pi = f(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \text{ где единиц } n \text{ штук} \quad (13)$$

$$[a'] = \frac{[a]}{[a]_1^{m_1} \dots [a]_k^{m_k}} = \frac{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k}} = 1$$

По (13) мы переводим физическую формулу из размерного вида в безразмерный.

Пусть все  $a_1, \dots, a_n$  ( $k = n$ ) размерно-независимы:  $a = C a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k}$ ,  $C$  – безразмерная константа (14)

*Вывод: Любое физическое соотношение можно представить в безразмерном виде.*

## Лекция 23

### Теория размерностей

#### 23.1 Теория размерностей (повторение)

На прошлой лекции мы рассмотрели размерности физических величин. Среди них выделяют отдельный класс размерных единиц, называемый основными. Остальные могут быть выражены через них.

Мы рассматриваем класс единиц MLS:

- 1) m;  $[m] = M$
- 2) l;  $[l] = L$
- 3) t;  $[t] = T$

В различных системах единиц m, l, t измеряются в разных единицах. Так, например, в системе СИ (кг, м, сек), в системе CGS (г, см. сек).

Производные выражаются через основные:  $[I] = M^\alpha L^\beta T^\gamma$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  - показатели размерности.

В частном случае:  $[I] = M^0 L^0 T^0$  – безразмерная величина.

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (1)$$

Одинаковая во всех классах единиц f зависит от n+1 параметра, из которых  $a_1, \dots, a_k$  - размерно независимые,  $a_{k+1}, \dots, a_n$  – размерно-зависимые.

$$[a_1] = A_1, [a_2] = A_2, \dots [a_n] = A_n.$$

В размерно-независимые величины не может входить безразмерная величина, т.к. её можно выразить через нулевые степени размерностей основных величин.

$$\begin{aligned} [a_1] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_k^{m_k} \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_k^{p_k} \\ [a_n] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \dots A_k^{q_k} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Изменим размерность: } a'_1 = \alpha_1 a_1; \dots a'_k = \alpha_k a_k; \quad (4)$$

$$a' = \alpha_1^{s_1} \dots \alpha_k^{s_k} a;$$

$$a'_{k+1} = \alpha_1^{p_1} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1};$$

$$a'_n = \alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k} a_n; \quad (5)$$

$$\text{Подставляем в } a' = f(a'_1, \dots, a'_k, a'_{k+1}, \dots, a'_n) \quad (6)$$

Масштабные коэффициенты мы можем выбрать любыми положительными.

$$\text{Положим } \alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{a_k} \quad (7)$$

$$\text{Имеем, } a'_1 = 1, \dots, a'_k = 1 \quad (8)$$

$$a' = \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_k^{m_k}} \equiv \Pi \quad (9)$$

$$a'_{k+1} = \frac{a}{\alpha_1^{p_1} \dots \alpha_k^{p_k}} \equiv \Pi_1 \quad (10)$$

$$a'_n = \frac{a}{\alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k}} \equiv \Pi_{n-k} \quad (11)$$

$$\Pi = f(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (12)$$

Формулу (12) можно записать в виде:

$$a = a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k} \psi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (13)$$

Если все  $a_1, \dots, a_n$  ( $k = n$ ) размерно-независимы:  $a = C a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}$ ,  $C$  - безразмерная константа.

Чтобы найти  $a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}$  нужно записать формулу размерности величины “а” и формулы размерностей каждой  $a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}$ , а потом, приравнявая правые части, найти показатели размерности.

Если в исходном законе мы учли несколько безразмерных параметров, то

$$C = \psi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m), \text{ где } m - \text{ безразмерный параметр.}$$

Рассмотрим примеры.

## 23.2 Колебание математического маятника

Задача состоит в нахождении периода колебания математического маятника (см.рис.23.1)

Выделим влияющие параметры системы:

1.  $m$  - масса груза
2.  $g$  - ускорение груза

3.  $l$  - длина нити
4.  $\varphi_0$  - начальный угол отклонения в радианах

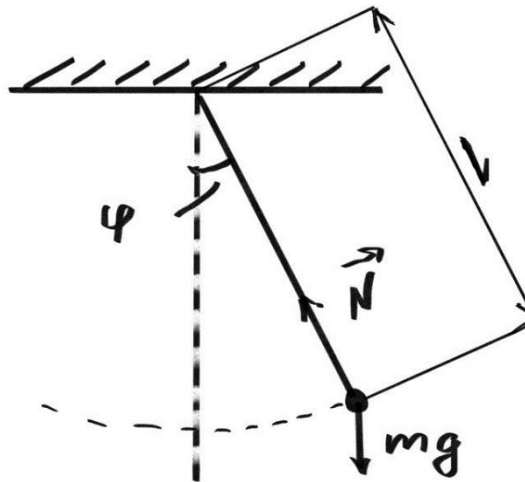


Рис. 23.1 Математический маятник

Ищем  $\tau = f(m, l, g, \varphi_0)$  - ? (14)

$$[\varphi_0] = M^0 L^0 T^0;$$

$$[\tau] = T;$$

$$[m] = M;$$

$$[g] = LT^{-2};$$

$$\tau = m^{s_1} l^{s_2} g^{s_3} \psi(\varphi_0) \quad (15)$$

$$T = M^{s_1} L^{s_2} (LT^{-2})^{s_3} = M^0 L^0 T^1 \quad (16)$$

Из (16) получаем: 
$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 + S_3 = 0 \\ -2S_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_1 = 0$$

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2}$$

Тогда  $\tau = \psi(\varphi_0) \sqrt{\frac{l}{g}}$  (17)

Проведя серию экспериментов, можно выяснить, что  $\psi(\varphi_0) = 2\pi = \text{const}$

### 23.3 Задача о сильном взрыве

Данная задача заключается в рассмотрении взрыва большого количества вещества, которое разлетается, образуя ударную волну, фронт которой характеризуется

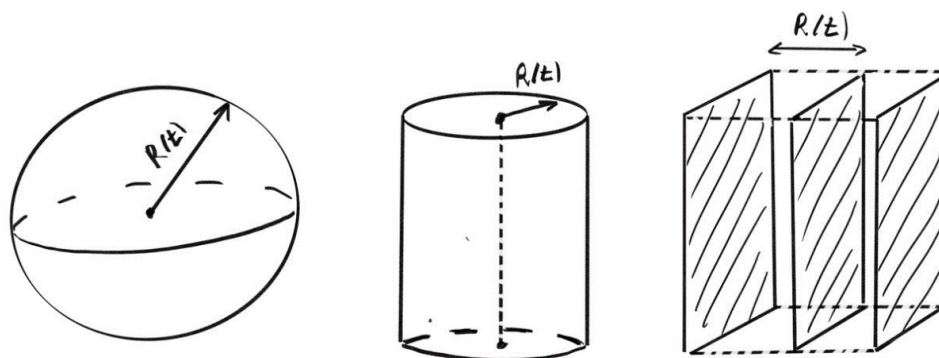


Рис. 23.2 Распространение фронта ударной волны

тем, что давление перед фронтом меньше, чем за ним.

В начальный момент времени выделяется большое количество энергии. Рассмотрим точечный заряд, тогда ударная волна сферическая. Если заряды равномерно распределены по тонкой нити, то распространение волны цилиндрическое. Если заряды распределены по плоскости, то фронт волны будет параллелен исходной плоскости. (см. рис. 23.2)

Решим задачу в общем виде для каждого из этих случаев.

Выделим влияющие параметры системы:

1.  $t$  - время
2.  $\rho$  - плотность среды
3.  $E$  - мощность взрыва

$$\text{Ищем } R(t) = f(t, \rho, E) \quad (18)$$

$$[R] = L;$$

$$[t] = T;$$

$$[\rho] = ML^{-3};$$

$$[E] = ML^{N-1}T^{-2},$$

где  $N = 3$  - объемный случай

$N = 2$  - цилиндрический

$N = 1$  - плоский

$$R(t) = Ct^{s_1} \rho^{s_2} E^{s_3} \quad (19)$$

$$L = T^{s_1}(ML^{-3})^{s_2}(ML^{N-1}T^{-2})^{s_3} = M^0L^1T^0 \quad (20)$$

Из (20) получаем: 
$$\begin{cases} -3S_2 + (N-1)S_3 = 0 \\ S_2 + S_3 = 0 \\ S_1 - 2S_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

Таким образом,  $S_1 = \frac{2}{N+2}$

$$S_2 = -\frac{1}{N+2} \quad (21)$$

$$S_3 = \frac{1}{N+2}$$

$$R(t) = C\left(\frac{Et^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{N+2}}; C = C(N) \quad (22)$$

### 23.4 Задача об обтекании шара потоком вязкой жидкости

Рассмотрим шар, покоящийся в жидкости (см.рис.23.3).

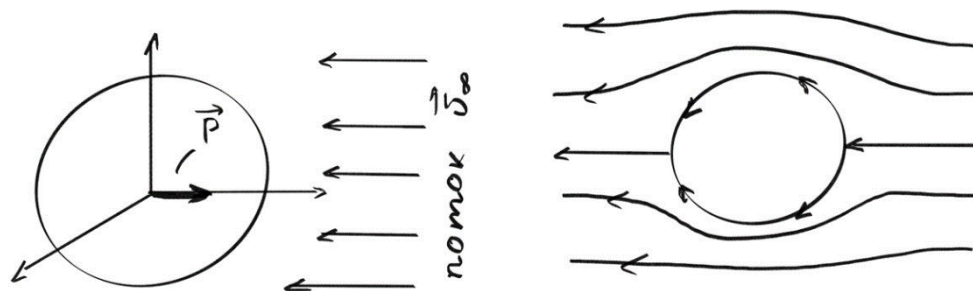


Рис. 23.3 Обтекание шара потоком вязкой жидкости

$\vec{P}$  - сила, необходимая, чтобы удержать шар.  $P$  - ?

Выделим влияющие параметры системы:  $v_\infty$ ,  $\rho$ ,  $[L]$ ,  $c$  - скорость звука в жидкости.

$$[R] = L;$$

$$[v_\infty] = LT^{-1};$$

$$[\rho] = ML^{-3};$$

$$[L] = M^0L^1T^0;$$

$$[c] = LT^{-1};$$

$$[P] = MLT^{-2};$$

$$P = f(v_{\infty}, \rho, \eta, c); \quad (23)$$

В данной задаче можно выбрать несколько наборов размерно-независимых величин. Можем выбрать любой из них.

$$\Pi = \frac{P}{R^{s_1} v_{\infty}^{s_2} \rho^{s_3}} \quad (24)$$

$$\Pi_1 = \frac{\eta}{R^{p_1} v_{\infty}^{p_2} \rho^{p_3}} \quad (25)$$

$$\Pi_2 = \frac{c}{R^{q_1} v_{\infty}^{q_2} \rho^{q_3}} \quad (26)$$

$$[P] = R^{s_1} v_{\infty}^{s_2} \rho^{s_3} = MLT^{-2} \quad (27)$$

$$[\eta] = R^{p_1} v_{\infty}^{p_2} \rho^{p_3} = ML^{-1}T^{-1} \quad (28)$$

$$[c] = R^{q_1} v_{\infty}^{q_2} \rho^{q_3} = LT^{-1} \quad (29)$$

Получаем,

$$1. \quad S_3 = 1,$$

$$S_1 + S_2 - 3S_3 = 1,$$

$$-S_2 = -2;$$

$$2. \quad p_2 = 1,$$

$$p_1 + p_2 - 3p_3 = -1,$$

$$-p_2 = 0;$$

$$3. \quad q_3 = 0,$$

$$q_1 + q_2 - 3q_3 = 1,$$

$$-q_2 = -1;$$

$$\bullet \quad S_1 = S_2 = 2; S_3 = 1$$

$$\bullet \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1$$

$$\bullet \quad q_1 = q_3 = 0; q_2 = 1$$

$$\Pi_1 = \frac{\eta}{R v_{\infty} \rho} = \frac{1}{Re}, \text{ где } Re - \text{число Рейнольдса} \quad (30)$$

$$\Pi_2 = \frac{c}{v_{\infty}} = \frac{1}{M}, \text{ где } M - \text{число Маха} \quad (31)$$

Таким образом,  $P = R^2 v_\infty^2 \rho \psi(R_e, M)$  (32)

Эксперимент показывает, что  $P = 6\pi R v_\infty \eta$  (33)

Если жидкость идеальная и несжимаемая, то  $\mathcal{R} = 0$  (обтекание шара жидкостью не вызывает никакого сопротивления с его стороны).





МЕХАНИКО-  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА

*teach-in*  
Л Е К Ц И И   У Ч Е Н Ы Х   М Г У