# 2021 年國際資訊奧林匹亞 研習營初選 模擬賽

2021.02.28 14:00-17:00

請確認隨身電子設備 (手機等) 已關機。

請等待監考人員宣布測驗開始才翻頁作答。

# 系統資訊

評分主機:https://codeforces.com/group/GG44hyrVLY/contest/316970

帳號:你的 Codeforces 帳號

密碼:你的 Codeforces 密碼

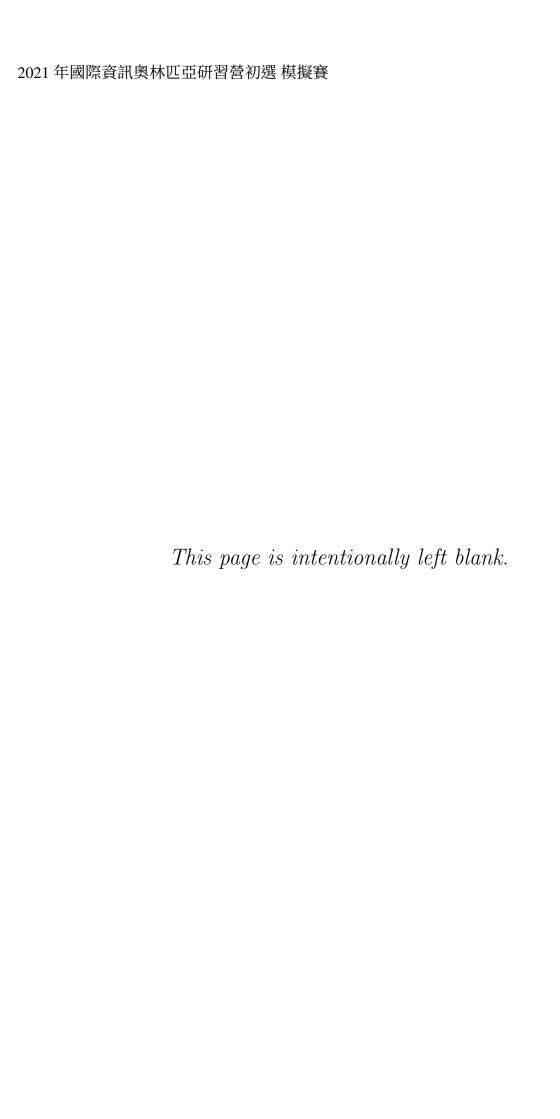
# 題目列表

題目名稱	時間限制	記憶體限制
A 格雷碼 / A_Decode	1.0 秒	512 MiB
B 黑白棋與監禁生活 / B_Reversi	0.5 秒	512 MiB
C 秋收萬顆子 / C_Polygon	1.0 秒	512 MiB
D 天使島大地主視察事件 / D_Traverse	1.0 秒	512 MiB
E 小軒小羽取石子 / E_Stone	1.0 秒	512 MiB

#### 説明事項

- 1. 本測驗採電腦線上自動評分,程式必須依規定上傳至評分主機。請嚴格遵守每一題目 所規定之輸出格式。若未遵守,該題將以 0 分計算。
- 2. 本測驗採取全面回饋機制,程式上傳至評分主機後,將自動編譯並進行測試。視等待 評分題數多寡,該題測試結果及該題得分數將可於短時間內得知。程式可重複上傳及 評分,但同一題兩次上傳之間必須間隔二分鐘以上。每題的每個子題之最終分數以該 子題所有單次評分結果之最高分計算,每題之最終分數為所有子題最終分數之總和。
- 3. 程式執行時,每筆測試資料執行時間個別計時(以評分主機執行時間為準)。執行時間 限制如前頁所示。程式執行超過執行時間視同未完成,該組測試資料得分將以 0 分計 算。每題可使用記憶體空間,除非題目另有規定,以 512 MB 為限。
- 4. 本次測驗程式送審時須上傳原始程式碼(.c,.cpp),輸出入皆以標準輸入、標準輸出進行。注意:所有讀寫都在執行檔的工作目錄下進行,請勿自行增修輸出入檔的等名或路徑,若因此造成評分程式無法評分,該次評分結果將以0分計算。
- 5. 若使用 C++ 撰寫程式, 請在程式碼開頭加上 #include < cstdio >, 並利用 scanf() 讀入資料。使用 cin 讀入資料可能會因為讀入效率太差以致於程式執行時間超過限 制。scanf() 常用的讀入方式如下:

scanf("%d", &x); 讀入一個有號整數至 int 型態變數  $x \circ$  scanf("%lld", &y); 讀入一個有號整數至 long long 型態變數  $y \circ$  scanf("%u", &x); 讀入一個有號整數至 unsigned int 型態變數  $x \circ$  scanf("%llu", &y); 讀入一個有號整數至 unsigned long long 型態變數  $y \circ$ 



#### 第一題:格雷碼(Decode)

#### 問題敍述

傳統的二進位系統,例如數字 3 的 3 位表示法為 011,要切換為鄰近的數字 4,也就是 100 時,裝置中的三個位元都得要轉換,因此於未完全轉換的過程時裝置會經歷短暫的 010,001,101,110,111 等其中數種狀態,也就是代表著 2,1,5,6,7,因此此種數字編碼方法於鄰近數字轉換時有比較大的誤差可能範圍。格雷碼(Gray Code)的發明即是用來將誤差之可能性縮減至最小,編碼的方式定義為每個鄰近數字都只相差一個位元,因此也稱為最小差異碼,可以使裝置做數字步進時只更動最少的位元數以提高穩定性。—Wikipedia

n 位的格雷碼是  $2^n$  個相異 01 字串的一種排序方法。產生 n 位格雷碼的方法不只一種,下面給出一種較為常見的生成方法:

- 1. 1 位格雷碼中 "**0**" 的編碼是 0, "**1**" 的編碼是 1;
- 2. n 位格雷碼中  $(n \ge 2)$  ,編號為 i 的字串  $(0 \le i < 2^{n-1})$  是由 (n-1) 位格雷碼中編號 為 i 的字串加上前綴 **"0"** 組成;
- 3. n 位格雷碼中  $(n \ge 2)$ ,編號為  $2^{n-1} + i$  的字串  $(0 \le i < 2^{n-1})$  是由 (n-1) 位格雷碼中編號為  $2^{n-1} i 1$  的字串(也就是**倒數**第 (i+1) 個字串)加上前綴 "1" 組成。

舉例來說:2 位格雷碼總共有  $2^2 = 4$  個,依序是 "00", "01", "11", "10"。

3 位格雷碼的生成方法如下表所示:

編號	字串
0	0 + 00 = 000
1	0 + 01 = 001
2	0 + 11 = 011
3	0 + 10 = 010

編號	字串
4	1 + 10 = 110
5	1 + 11 = 111
6	1 + 01 = 101
7	1 + 00 = 100

給一個 01 字串 s,請判斷如果由以上方式生成格雷碼,該字串的編碼是多少?因為答案可能很大,請將輸出對  $10^9+7$  取模。 有 T 筆測資。

### 輸入格式

第一行給定一個正整數 T,代表測資筆數。

每一筆測資的輸入只有一行,包含一個01字串 s, 意義如題中所述。

#### 輸出格式

對每一筆測資請輸出一個整數,代表該字串 s 的編碼。輸出請對  $10^9+7$  取模。

#### 測資限制

- $1 \le T \le 10^5$  °
- $1 \le |s| \le 10^5 \circ$
- $\sum |s| \le 10^6 \circ$
- $s_i \in \{0,1\}$  °

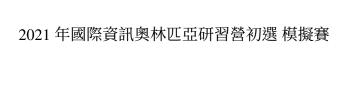
#### 輸入範例1

#### 輸出範例1

# 評分説明

本題共有3組測試題組,條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料,該組所有 測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	36	$ s  \leq 15$ °
2	32	$ s  \leq 60$ °
3	32	無額外限制。



#### 第二題:黑白棋與監禁生活 (Reversi)

#### 問題敍述

朋友買了一塊砧板,綠色的邊框帶藍色紋路,當她拿給你們看時,一位喜歡觀看星象的同學說:「啊,好像彗星似的。」

「我看倒有點像鯊鯊。」你說。

「真像厚臉皮的小學生。」一位外號叫「蘿莉控」的同學緊接著說。

你們不禁哄堂大笑,同樣的一塊砧板,每個人卻有不同的感覺。那位朋友連忙把砧板放在廚房,她覺得るしあ就是るしあ,不是彗星,也不是鯊鯊,更不是小學生。

「NEEEEEEEEEEEEEEEEEE!!!!!!!」突然,一陣大吼聲從廚房傳來,四人直接被這高分貝的吼聲震到失去意識。

等你醒來的時候,你發現你被銬起來,手腳無法動彈了,而你的面前擺著一些黑白棋的棋盤。跟一般的黑白棋不太一樣的是,它的棋盤大小不是一般的 $8\times8$ ,而是從 $1\times1$ 到 $2000\times2000$ 的都有,上面的每一格都擺滿了黑色朝上或白色朝上的棋子。

るしあ告訴你,你需要用最少的步數把所有棋子都翻成白色才會放你回去,不過當然不會那麼簡單的讓你一個一個翻,你每次需要在「左上一右下對角線」上選兩個**不一定相異**的方格,並將這兩個方格圍出的正方形矩陣內的所有棋子都翻面(黑白棋的棋子有兩面,分別是黑色跟白色)。

你覺得被るしあ監禁的生活好像也不錯,但是你也想幫るしあ解決問題,所以你決定來動動腦。如果你可以幫るしあ解決問題,說不定她會讓你成為不死族喔!

注意:るしあ可能會給你根本不可能把全部棋子都翻成白色的盤面,如果遇到這種情況 也請告訴她。

#### 輸入格式

第一行給定一個正整數 N,代表棋盤的邊長。

接下來 N 行,每行有 N 個字元  $A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,N}$ , $A_{i,j}$  對應到第 i 行第 j 列的格子。如果該字元是 '0',代表那個棋子是白色朝上;如果該字元是 '1',代表那個棋子是黑色朝上。

#### 輸出格式

請輸出一個整數,代表將所有棋子翻成白色朝上的最少操作次數,如果這不可能達成, 請輸出-1。

# 測資限制

- $1 \le N \le 2000$  °
- $A_{i,j} \in \{0,1\}$  °

#### 輸入範例1

#### 輸出範例1

# 輸入範例2

### 輸出範例2

-1

# 輸入範例3

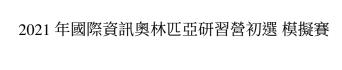
# 輸出範例3

8

# 評分説明

本題共有3組測試題組,條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料,該組所有 測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	17	$N \leq 5$ ,且保證輸入有解。
2	52	$N \leq 80$ °
3	31	無額外限制。



### 第三題:秋收萬顆子(Polygon)

#### 問題敍述

今天風和日麗,又是一個學習的好天氣。大文豪在翻閱著《醣詩三百首》,讀到了醣代 詩人李紳的著作:「春種一蘿莉,秋收萬顆子」。

看到這裡,大文豪想要知道這句話的可信度,於是他決定實驗看看,買下一塊三角形的 土地,並把他的蘿莉收藏分成三份並埋在他土地的三個**頂點**處。

很快的,六個月過去了。正當大文豪覺得詩人都在誇大其辭,準備放棄實驗之時,突然 有若干道光束接連沖天而起,而伴隨著這些光束出現的,是令人精神振奮的叫聲。聽到這些 叫聲的大文豪馬上就認出這是他一直在尋找的 SS 級蘿莉的聲音。

俗話說的好:「近水樓台先得月」。為了把蘿莉們收歸己有(X)保護蘿莉(O),大文豪決定買下所有有蘿莉存在的區域。而由於管理上的方便,大文豪所購買的區域形狀會是一個**凸多邊形**,也就是說,他會選定一個凸多邊形的土地,使其可以包含住所有蘿莉們,並將那塊土地買下來。而且在每一種能涵蓋到所有蘿莉的凸多邊形中,他會選擇使面積**最小**的一種買法,如果有很多種買法,他會從裡面任選一種。可以發現,每次出現新的蘿莉時,大文豪新購買的土地會嚴格包覆住之前的土地。

大文豪還發現,無論何時,都存在一個凸多邊形的土地使所有已經出現的 SS 級蘿莉(包含埋下去的蘿莉收藏)都在此多邊形土地的邊界上。

不過,雖然大文豪很有錢,也仍然逃不出繳稅的命運。面對政府單位派來催繳稅金的可愛蘿莉,大文豪還是需要整理他買的東西才能報稅。於是他整理出一開始蘿莉收藏埋下的地方,以及按照出現時間排序的每一隻 SS 級蘿莉的位置。

請問,大文豪一開始的土地面積以及每次有新的 SS 級蘿莉出現時的土地面積分別是多少?

#### 輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數 Q, 代表有多少道光束沖天而起。

接下來3行,每行有兩個整數 $X_i, Y_i$ ,代表一開始蘿莉收藏埋下的地方,保證這三個地方不共線。

接下來 Q 行,每行有兩個整數  $x_i, y_i$ ,代表第 i 隻 SS 級蘿莉出現的位置,保證每次新增之後都存在一個凸多邊形使所有蘿莉都在邊界上。

#### 輸出格式

請輸出 Q+1 個正整數:一開始的土地面積  $A_0$  以及每一次新的蘿莉出現後的土地面積  $A_1 \sim A_Q$   $\circ$ 

#### 測資限制

- $0 < Q < 10^5 \circ$
- $|X_i|, |Y_i|, |x_i|, |y_i| \leq 10^9$ ,且  $X_i, Y_i, x_i, y_i$  都是偶數。

#### 輸入範例1

5

6 0

-4 -4

0 -6

4 -4

-6 0

0 6

-4 4

4 4

#### 輸出範例1

18

24

48

84

90

96

# 輸入範例2

1

1000000000 1000000000

-1000000000 1000000000

-100000000 -100000000

100000000 -1000000000

#### 輸出範例 2

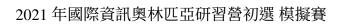
200000000000000000000

4000000000000000000

# 評分説明

本題共有4組測試題組,條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料,該組所有 測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	10	Q = 0 °
2	20	$Q=1$ ,且 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(X_3,Y_3),(x_1,y_1)$ 會形成平行於座標軸的矩形。
3	29	$Q \leq 1000$ , $ X_i ,  Y_i ,  x_i ,  y_i  \leq 10^6$ $\circ$
4	41	無額外限制。



#### 第四題:天使島大地主視察事件(Traverse)

#### 問題敍述

去年,由於惡魔島為了改名為天使島,政府決定通過法律廢除所有刑事處罰,並將一小 部分的死刑犯特赦。

如果你對天使島上的天使監獄不夠熟悉,以下是天使監獄的介紹:

天使島上的天使監獄關押著 N 個死刑犯,這些死刑犯都被單獨關押在單一牢房之中,牢房的編號為牢房之中,牢房的編號為 1 到 N,且犯人身上也有**不盡相同**的罪惡值,代表他所犯下的罪刑輕重。由於天使島的地形實在是太惡魔了(畢竟只是改名,沒辦法連地形一起改),這些單一牢房是建造在島中央最高的山洞內。為了讓天使島上的居民能感覺到從惡魔到天使的變化,所有的牢房都能直接從山洞外進入。不過,為了避免犯人逃走,在進入第一間牢房之後,要抵達其他間牢房必須透過牢房與牢房之間的通道。而且,如果從固定的牢房出發,抵達任何一個死刑犯 x 所在的單一牢房,在不重複經過牢房的前提下,通往死刑犯 x 的牢房路徑總是唯一的。

換句話說,所有的單一牢房在山洞內會連接成一個樹狀結構,每一個節點都代表一間單 一牢房。

最近,由於掌管著天使島的大地主小 S 要來視察天使監獄,典獄長需要安排一條路徑讓小 S 按照這條路徑參觀。在天使一般的典獄長與政府協商後,決定要讓小 S 走一條讓他的驚嚇值最小的路線。典獄長會將天使監獄的(樹狀)結構畫在紙上,並遵循「前序走訪」方案來走訪所有的牢房(也就是使用深度優先搜尋的順序),過程中依序記錄他所走訪到的犯人編號;每個犯人的編號在走訪過程中首次遇到時就會記下,且只會記錄一次。全部走訪完畢以後,典獄長再按照紙上紀錄的順序計算驚嚇值。假設典獄長在紙上記下的序列是 $(G_1,G_2,\ldots,G_N)$ ,一條路線的驚嚇值被定義為 $G_1 \times 10^{10(N-1)} + G_2 \times 10^{10(N-2)} + \cdots + G_i \times 10^{10(N-i)} + \cdots + G_N \times 10^{10(N-N)}$ 。

值得注意的是,雖然牢房與牢房之間的連接情形是固定的,但將其樹狀結構畫在紙上卻 有許多種不同的畫法,也導致了典獄長的前序走訪方案可能會有所不同。

不過典獄長的演算法能力並不強,沒辦法在短時間內得出最好的走訪方案,於是他來拜 託身為御用碼農的你,請你來設計一種走訪方案,走訪的起點(樹根)可能是**任何一間**牢房。

如果沒辦法得到答案,典獄長就會把你監禁在地下室で!

#### 輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數 N。

第二行包含 N 個正整數  $q_1, q_2, \ldots, q_N$ ,表示死刑犯的罪惡值。

第三行開始,總共有 N-1 行,每一行都有兩個正整數  $u_i$  與  $v_i$ ,代表編號為  $u_i$  的死刑犯所在的牢房,有一條通道連接著編號為  $v_i$  的死刑犯所在的牢房。

#### 輸出格式

請輸出N個正整數,代表在驚嚇值最小的走訪方案中,典獄長在紙上記下的序列。

#### 測資限制

- $1 \le N \le 2000 \circ$
- $1 \leq u_i, v_i \leq N \circ$
- $1 \le g_i \le 10^9 \circ$

#### 輸入範例1

5

1 2 3 4 5

4 2

1 3

5 3

1 2

#### 輸出範例1

1 2 4 3 5

#### 輸入範例 2

7

1 2 4 2 4 3 2

1 2

7 5

6 2

3 7

5 4

7 6

#### 輸出範例2

1 2 3 2 4 2 4

# 輸入範例3

5

1 2 2 1 1

1 2

2 3

3 4

4 5

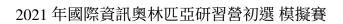
# 輸出範例3

1 1 2 2 1

#### 評分説明

本題共有4組測試題組,條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料,該組所有 測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	18	$g_i = i \circ$
2	19	$g_1=1$ , $orall i\geq 2$ , $g_i eq 1$ $\circ$
3	16	$N \leq 300 \circ$
4	47	無額外限制。



### 第五題:小軒小羽取石子(Stone)

#### 問題敍述

小軒跟小羽是兩位好朋友,小軒家有個矩形的院子鋪滿了正方形的磁磚,下過大雨後院子會積水。小軒把某些區域圍成了大大小小的水坑,因為小羽很喜歡打水漂,在玩打水漂的遊戲時丟了一堆石頭到水坑裡頭。兩過天晴,院子的積水也蒸發了,留在地上的除了磁磚之外只剩下大大小小的石頭。鬼靈精怪的小羽想出了一種既可以把石頭堆整理乾淨,同時又能玩耍的遊戲。本題要請你寫一支程式計算他們玩遊戲的結果。

他們給每顆石頭一個權重,代表拿走這顆石頭之後可以得到的分數。請注意:權重有正有負,因為輸的人要請贏的人一碗拉麵,所以當然應該盡量避免拿到會讓自己分數降低的石頭。小軒很快的發現,只要每次都取權重最高的石頭,那麼結局永遠都是固定且無趣的,於是小軒將石頭依序標上編號 1,2,3,...,並追加規則:當你的回合結束的時候,剩下的所有石頭的編號必須**連續**。小軒和小羽都是程式高手,他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。

你以為題敘就這樣結束了嗎?你太天真了!

玩了幾輪之後,他們覺得速度實在是太慢了,石頭的數量多到就算拿程式來跑也要跑很久,不過更煩人的是,小軒小羽在自己的回合開始前都會一直玩手機,讓每個回合都無比冗長。所以他們經過商量之後,又決定一個足夠大的參數 K,以便讓遊戲早些結束。每次輪到一個人行動時,他需要取**恰好** K 顆石頭(除非院子裡剩下不到 K 顆石頭,那就全部取走),並且先前的追加規則也必須遵守。

再說一次,小軒跟小羽都是程式高手,他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。這下,問題終於解決了?

小軒跟小羽所寫的程式都能**最大化**自己得到的分數。不過,在早就知道遊戲結局的狀況下,他們又為了如何決定先後手而爭執不斷……

(待續)

#### 輸入格式

第一行給定兩個正整數 N, K,代表石頭數量跟小軒小羽商量的參數。 第二行給定 N 個整數  $a_1, a_2, \ldots, a_N$ , $a_i$  代表編號為 i 的石頭的權重。

#### 輸出格式

請輸出兩個整數,分別代表先手跟後手能得到的分數。

#### 測資限制

- $2 \le N \le 2 \times 10^5$  °

#### 輸入範例1

8 1 -2 0 2 1 0 -2 2 0

#### 輸出範例1

2 -1

#### 輸入範例 2

10 2 2 1 4 7 4 8 3 6 4 7

#### 輸出範例2

26 20

### 輸入範例3

17 4 3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

### 輸出範例3

1 5

#### 輸入範例 4

17 11 3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

#### 輸出範例 4

12 -6

# 評分説明

本題共有4組測試題組,條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料,該組所有 測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	12	$N \leq 100$ , $K = 1$ $\circ$
2	21	$N \leq 3000$ , $N \equiv 0 \pmod{K}$ $^{\circ}$
3	38	$N \leq 2 \times 10^4 $ °
4	29	無額外限制。

