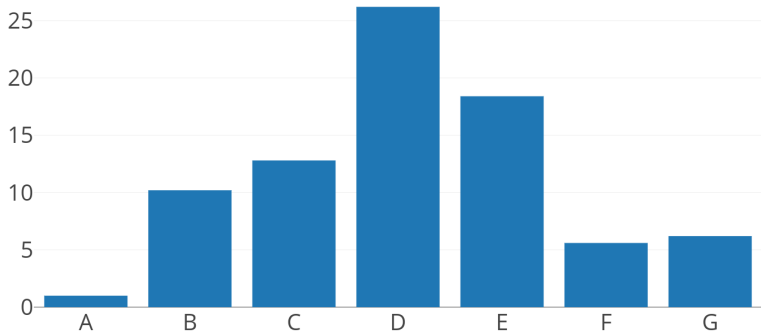


國中組題解

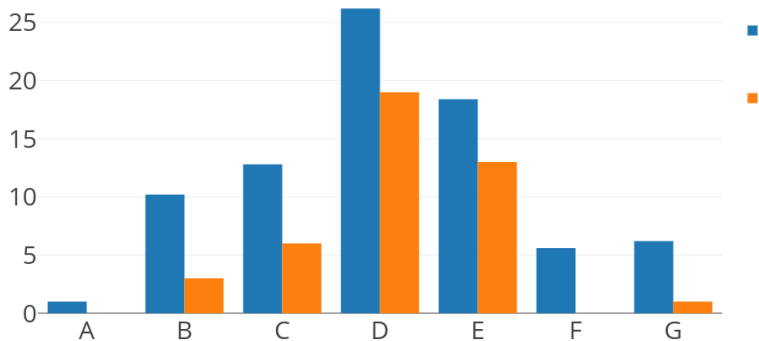
NPSC 2019 裁判組

December 7th, 2019

預期解題人數



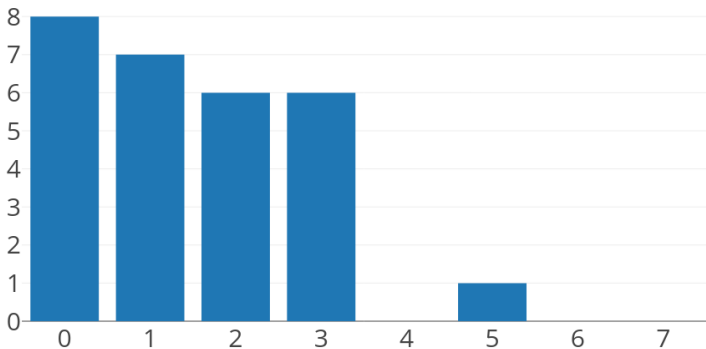
各題解出人數 @Freeze



各題首殺 @Freeze

- Problem A: Unsolved
- Problem B: 108 mins by yphs104
- Problem C: 29 mins by cheissmart
- Problem D: 7 mins by LoserQwQ
- Problem E: 38 mins by alvin
- Problem F: Unsolved
- Problem G: 60 mins by cheissmart

題數 v.s. 隊伍數量 @Freeze



Problem D 雜湊

Problem D 雜湊 – 題目敘述

- 1 給定雜湊函數
- 2 問雜湊函數的輸出

Problem D 雜湊 – Solution

1 打 code

Problem E Q-自動雞

Problem E Q-自動雞 – 題目 & Solution

- 1 這題只要能理解題目，基本上實作並不困難。
- 2 有一個由字母組成的佇列 (queue)。給你這個 queue 的初始狀態，以及初始的心情 (1)。
- 3 每一步會從 queue 中取出 (pop) 一個字母，並且以當前心情和取出的元素決定要放入 (push) 什麼字母和改變成什麼心情。
- 4 求前 N 步取出的字母是什麼。
- 5 照著實作就可以了，queue 可以用一個陣列實作。注意到 queue 的大小最多不會超過 $N + |S|$ (假設每步都 push 兩個字母)。
- 6 就算你不知道怎麼有效率的實作 queue，每一步都 $O(\text{陣列大小})$ 硬搬陣列也不會 TLE。

Problem E Q-自動雞 – 題外話

- 1 順帶一提，這題的題目名稱並不是亂取的：這題實作的實際上是「佇列自動機」，英文叫做 queue automaton，所以「Q-自動雞」是個諧音。
- 2 Queue automaton 的計算能力實際上和 Turing machine 等價。這代表 Q-自動雞其實也沒有比人類創造的電腦還要差(?)
- 3 貝斯比 (Bisbey) 這個名字也是有來由的：第一個發表 queue automaton 相關研究的人很有可能是 Richard L. Bisbey。

Problem C 字符串匹配

Problem C 字串匹配 – 題目敘述

- 1 給定 n 個字串 s_1, s_2, \dots, s_n 。
- 2 定義函數 $f(x, y)$ 會返回兩個字串 s_x, s_y 有幾個位置的字元一樣：

$$\sum_{i=1}^{\min(|s_x|, |s_y|)} \llbracket s_{x,i} = s_{y,i} \rrbracket$$

。也就是，有哪些 i 滿足 $1 \leq i \leq \min(|s_x|, |s_y|)$ 且 $s_{x,i} = s_{y,i}$ 。其中 $|s|$ 代表字串 s 的長度。

- 3 $1 \leq n \leq 10^6$ ，且 $\sum_{i=1}^n |s_i| \leq 5 \times 10^6$ 。

Problem C 字串匹配 – Solution

- 1 每個位置對答案的貢獻是分開的
- 2 分開算每個位置的每個字元各出現幾次
- 3 設在位置 i ，字元 j 出現 $c_{i,j}$ 次，那麼答案就會是 $\frac{c_{i,j}(c_{i,j}-1)}{2}$ 的加總

Problem B 拿行李

Problem B 拿行李 – 題目敘述

- 1 給定兩個 queue 跟對應的兩個 set
- 2 queue 內分別為兩個 1 到 n 的排列，而兩個 set 分別有容量限制
- 3 $n \leq 10^5$

Problem B 拿行李 – Solution

- 1 依序將兩個 queue 的內容放到對應的 set 中
- 2 放入後如果在另外的 set 有一樣的元素，同時將兩個元素從兩個 set 刪除
- 3 最後如果 queue 跟 set 都可以清空即有解

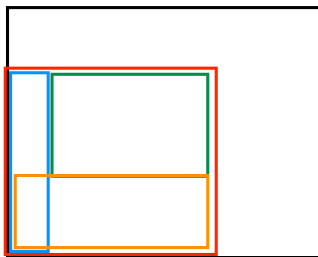
Problem G 尋寶問題

Problem G 尋寶問題 – 題目敘述

- 1 座標平面上有 $N + M$ 個點，每個點有點權以及是藍點還是紅點
- 2 選取任兩個點以後，會拿到所形成矩形中的所有點
- 3 再拿不超過 K 個藍點的情況下，最大化選到的點權總和

Problem G 尋寶問題 – Solution

- 1 座標離散化：再不失去大小關係的情況下把座標範圍縮小，至多只有 $N + M$ 種 x 座標以及 y 座標
- 2 二維前綴和： $O((N + M)^2)$ 預處理每個前綴矩形裡有幾個藍點以及點權總和多少



Problem F 密碼生成器

Problem F 密碼生成器 – 題目敘述

- 1 給定 N 以及多筆詢問 K_i
- 2 構造一個長度為 N 的 0-1 字串使得有恰 K 個子區間 **有至少一個 1**
- 3 或輸出無解

Problem F 密碼生成器 – Solution

至少有一個 1 的區間 $\implies \frac{N \times (N+1)}{2} - \text{全 0 的區間}$

$$\underbrace{000}_{\frac{3 \times 4}{2}} 11 \underbrace{00}_{\frac{2 \times 3}{2}} 1 \underbrace{000000}_{\frac{6 \times 7}{2}} 11$$

Problem F 密碼生成器 – Solution

令 $dp[i][j]$ = 用長度 $1 \sim i$ 的全 0 區間做出共 j 個全 0 區間所需的最小長度：

$$dp[i][j] = \min_k \left\{ dp[i-1][j - k \times \frac{i \times (i+1)}{2}] + (i+1) \times k \right\}$$

Problem F 密碼生成器 – Solution

- 1 預先處理好 DP 表格以及轉移來源，若 $dp[N][K] > N$ 則無解
- 2 否則照著轉移來源回溯一組解，最後長度不夠的話補 1
- 3 時間複雜度： $O(N^3)$ （用類似無限背包問題的方法轉移）

Problem A 貓咪會議

Problem A 貓咪會議 – 題目敘述

- 1 給你二維平面上的 N 個點（貓貓），以及一個正整數 M
- 2 請找出一個點，使得 N 個點到該點的第 M 小距離最小化
- 3 輸出這個最小化的第 M 小距離

Problem A 貓咪會議 – Solution

- 1 二分搜尋
- 2 枚舉
- 3 求圓交點
- 4 在圓上掃描線

Problem A 貓咪會議 – Solution

- 1 如果將問題轉化成，給定一個距離 K ，問是否有 $\geq M$ 隻貓貓可以走到相同的點 (Yes or No 問題)。
- 2 則 K 具有單調性，也就是說，假設最小的距離 (答案) 是 K' ，那麼對於所有的 $K \geq K'$ ，上面問題的答案都是 Yes。
- 3 對於所有的 $K \leq K'$ ，上面問題的答案都是 No。

Problem A 貓咪會議 – Solution

- 1 因為具有單調性，所以我們可以對答案二分搜尋！
- 2 那麼決定一個 K 之後，我們該如何判斷是 Yes 還是 No 呢？

Problem A 貓咪會議 – Solution - 驗證二分搜索的答案

- 1 對於每個點，我們可以張開一個半徑為 K 的圓。
- 2 現在問題變成，是否存在一個點，在至少 M 個圓裡面。
- 3 不難發現，如果存在一個點在至少 M 個圓裡面，那麼這 N 個圓兩兩的交點一定包含候選點。
- 4 因此只要驗證這 N 個圓的兩兩交點即可。

Problem A 貓咪會議 – Solution - 驗證二分搜索的答案

- 1 找出兩兩交點，對於每個圓判斷是否在其中。
- 2 交點有約莫 $O(N^2)$ 個。
- 3 總時間複雜度 $O(N^3 \times \log(\text{座標範圍}))$

Problem A 貓咪會議 – Solution - 驗證二分搜索的答案

1 Time Limit Exceeded

Problem A 貓咪會議 – Solution - 驗證二分搜索的答案

- 1 如果枚舉一個圓，對於其他的圓，判斷兩個交點在枚舉圓的哪個圓弧區間呢？
- 2 在圓弧上掃描，看看是否有包含至少 M 區間的圓弧點。
- 3 總時間複雜度 $O(N^2 \times \log(\text{座標範圍}) \times \log(N))$

Problem A 貓咪會議 – Solution - 驗證二分搜索的答案

1 Accepted