

## 第一題：格雷碼 (Decode)

### 問題敘述

傳統的二進位系統，例如數字 3 的 3 位表示法為 011，要切換為鄰近的數字 4，也就是 100 時，裝置中的三個位元都得要轉換，因此於未完全轉換的過程時裝置會經歷短暫的 010, 001, 101, 110, 111 等其中數種狀態，也就是代表著 2, 1, 5, 6, 7，因此此種數字編碼方法於鄰近數字轉換時有比較大的誤差可能範圍。格雷碼 (Gray Code) 的發明即是用來將誤差之可能性縮減至最小，編碼的方式定義為每個鄰近數字都只相差一個位元，因此也稱為最小差異碼，可以使裝置做數字步進時只更動最少的位元數以提高穩定性。—Wikipedia

$n$  位的格雷碼是  $2^n$  個相異 01 字串的一種排序方法。產生  $n$  位格雷碼的方法不只一種，下面給出一種較為常見的生成方法：

- 1 位格雷碼中 "0" 的編碼是 0，"1" 的編碼是 1；
- $n$  位格雷碼中 ( $n \geq 2$ )，編號為  $i$  的字串 ( $0 \leq i < 2^{n-1}$ ) 是由  $(n-1)$  位格雷碼中編號為  $i$  的字串加上前綴 "0" 組成；
- $n$  位格雷碼中 ( $n \geq 2$ )，編號為  $2^{n-1} + i$  的字串 ( $0 \leq i < 2^{n-1}$ ) 是由  $(n-1)$  位格雷碼中編號為  $2^{n-1} - i - 1$  的字串 (也就是倒數第  $(i+1)$  個字串) 加上前綴 "1" 組成。

舉例來說：2 位格雷碼總共有  $2^2 = 4$  個，依序是 "00", "01", "11", "10"。

3 位格雷碼的生成方法如下表所示：

編號	字串	編號	字串
0	$0 + 00 = 000$	4	$1 + 10 = 110$
1	$0 + 01 = 001$	5	$1 + 11 = 111$
2	$0 + 11 = 011$	6	$1 + 01 = 101$
3	$0 + 10 = 010$	7	$1 + 00 = 100$

給一個 01 字串  $s$ ，請判斷如果由以上方式生成格雷碼，該字串的編碼是多少？

因為答案可能很大，請將輸出對  $10^9 + 7$  取模。

有  $T$  筆測資。

### 輸入格式

第一行給定一個正整數  $T$ ，代表測資筆數。

每一筆測資的輸入只有一行，包含一個 01 字串  $s$ ，意義如題中所述。

## 輸出格式

對每一筆測資請輸出一個整數，代表該字串  $s$  的編碼。輸出請對  $10^9 + 7$  取模。

## 測資限制

- $1 \leq T \leq 10^5$ 。
- $1 \leq |s| \leq 10^5$ 。
- $\sum |s| \leq 10^6$ 。
- $s_i \in \{0, 1\}$ 。

## 輸入範例 1

```
8
0
1
00
01
11
10
10101010101010
0010101000100101111000101000101010001001
```

## 輸出範例 1

```
0
1
0
1
2
3
52428
377602300
```

## 評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	36	$ s  \leq 15$ 。
2	32	$ s  \leq 60$ 。
3	32	無額外限制。

*This page is intentionally left blank.*

## 第二題：黑白棋與監禁生活 (Reversi)

### 問題敘述

朋友買了一塊砧板，綠色的邊框帶藍色紋路，當她拿給你們看時，一位喜歡觀看星象的同學說：「啊，好像彗星似的。」

「我看倒有點像鯊鯊。」你說。

「真像厚臉皮的小學生。」一位外號叫「蘿莉控」的同學緊接著說。

你們不禁哄堂大笑，同樣的一塊砧板，每個人卻有不同的感覺。那位朋友連忙把砧板放在廚房，她覺得るしあ就是るしあ，不是彗星，也不是鯊鯊，更不是小學生。

「NEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEE!!!!!!!」突然，一陣大吼聲從廚房傳來，四人直接被這高分貝的吼聲震到失去意識。

等你醒來的時候，你發現你被銬起來，手腳無法動彈了，而你的面前擺著一些黑白棋的棋盤。跟一般的黑白棋不太一樣的是，它的棋盤大小不是一般的  $8 \times 8$ ，而是從  $1 \times 1$  到  $2000 \times 2000$  的都有，上面的每一格都擺滿了黑色朝上或白色朝上的棋子。

るしあ告訴你，你需要用最少的步數把所有棋子都翻成白色才會放你回去，不過當然不會那麼簡單的讓你一個一個翻，你每次需要在「左上一右下對角線」上選兩個**不一定相異**的方格，並將這兩個方格圍出的正方形矩陣內的所有棋子都翻面（黑白棋的棋子有兩面，分別是黑色跟白色）。

你覺得被るしあ監禁的生活好像也不錯，但是你也想幫るしあ解決問題，所以你決定來動動腦。如果你可以幫るしあ解決問題，說不定她會讓你成為不死族喔！

注意：るしあ可能會給你根本不可能把全部棋子都翻成白色的盤面，如果遇到這種情況也請告訴她。

### 輸入格式

第一行給定一個正整數  $N$ ，代表棋盤的邊長。

接下來  $N$  行，每行有  $N$  個字元  $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,N}$ ， $A_{i,j}$  對應到第  $i$  行第  $j$  列的格子。如果該字元是 '0'，代表那個棋子是白色朝上；如果該字元是 '1'，代表那個棋子是黑色朝上。

### 輸出格式

請輸出一個整數，代表將所有棋子翻成白色朝上的最少操作次數，如果這不可能達成，請輸出  $-1$ 。

## 測資限制

- $1 \leq N \leq 2000$ 。
- $A_{i,j} \in \{0, 1\}$ 。

## 輸入範例 1

```
3
101
010
101
```

## 輸出範例 1

```
5
```

## 輸入範例 2

```
5
10011
01101
01001
11110
11100
```

## 輸出範例 2

```
-1
```

## 輸入範例 3

```
5
11010
10000
00111
10101
00111
```

### 輸出範例 3

8

### 評分說明

本題共有 3 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	17	$N \leq 5$ ，且保證輸入有解。
2	52	$N \leq 80$ 。
3	31	無額外限制。

*This page is intentionally left blank.*



### 第三題：秋收萬顆子 (Polygon)

#### 問題敘述

今天風和日麗，又是一個學習的好天氣。大文豪在翻閱著《醴詩三百首》，讀到了醴代詩人李紳的著作：「春種一蘿莉，秋收萬顆子」。

看到這裡，大文豪想要知道這句話的可信度，於是他決定實驗看看，買下一塊三角形的土地，並把他的蘿莉收藏分成三份並埋在他土地的三個頂點處。

很快的，六個月過去了。正當大文豪覺得詩人都在誇大其辭，準備放棄實驗之時，突然有若干道光束接連沖天而起，而伴隨著這些光束出現的，是令人精神振奮的叫聲。聽到這些叫聲的大文豪馬上就認出這是他一直在尋找的 SS 級蘿莉的聲音。

俗話說的好：「近水樓台先得月」。為了把蘿莉們收歸己有 (X) 保護蘿莉 (O)，大文豪決定買下所有有蘿莉存在的區域。而由於管理上的方便，大文豪所購買的區域形狀會是一個凸多邊形，也就是說，他會選定一個凸多邊形的土地，使其可以包含住所有蘿莉們，並將那塊土地買下來。而且在每一種能涵蓋到所有蘿莉的凸多邊形中，他會選擇使面積最小的一種買法，如果有很多種買法，他會從裡面任選一種。可以發現，每次出現新的蘿莉時，大文豪新購買的土地會嚴格包覆住之前的土地。

大文豪還發現，無論何時，都存在一個凸多邊形的土地使所有已經出現的 SS 級蘿莉（包含埋下去的蘿莉收藏）都在此多邊形土地的邊界上。

不過，雖然大文豪很有錢，也仍然逃不出繳稅的命運。面對政府單位派來催繳稅金的可愛蘿莉，大文豪還是需要整理他買的東西才能報稅。於是他整理出一開始蘿莉收藏埋下的地方，以及按照出現時間排序的每一隻 SS 級蘿莉的位置。

請問，大文豪一開始的土地面積以及每次有新的 SS 級蘿莉出現時的土地面積分別是多少？

#### 輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數  $Q$ ，代表有多少道光束沖天而起。

接下來 3 行，每行有兩個整數  $X_i, Y_i$ ，代表一開始蘿莉收藏埋下的地方，保證這三個地方不共線。

接下來  $Q$  行，每行有兩個整數  $x_i, y_i$ ，代表第  $i$  隻 SS 級蘿莉出現的位置，保證每次新增之後都存在一個凸多邊形使所有蘿莉都在邊界上。

#### 輸出格式

請輸出  $Q + 1$  個正整數：一開始的土地面積  $A_0$  以及每一次新的蘿莉出現後的土地面積  $A_1 \sim A_Q$ 。

## 測資限制

- $0 \leq Q \leq 10^5$ 。
- $|X_i|, |Y_i|, |x_i|, |y_i| \leq 10^9$ ，且  $X_i, Y_i, x_i, y_i$  都是偶數。

## 輸入範例 1

```
5
6 0
-4 -4
0 -6
4 -4
-6 0
0 6
-4 4
4 4
```

## 輸出範例 1

```
18
24
48
84
90
96
```

## 輸入範例 2

```
1
1000000000 1000000000
-1000000000 1000000000
-1000000000 -1000000000
1000000000 -1000000000
```

## 輸出範例 2

```
2000000000000000000
4000000000000000000
```

## 評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	10	$Q = 0$ 。
2	20	$Q = 1$ ，且 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (x_1, y_1)$ 會形成平行於座標軸的矩形。
3	29	$Q \leq 1000$ ， $ X_i ,  Y_i ,  x_i ,  y_i  \leq 10^6$ 。
4	41	無額外限制。

*This page is intentionally left blank.*

## 第四題：天使島大地主視察事件 (Traverse)

### 問題敘述

去年，由於惡魔島為了改名為天使島，政府決定通過法律廢除所有刑事處罰，並將一小部分的死刑犯特赦。

如果你對天使島上的天使監獄不夠熟悉，以下是天使監獄的介紹：

天使島上的天使監獄關押著  $N$  個死刑犯，這些死刑犯都被單獨關押在單一牢房之中，牢房的編號為牢房之中，牢房的編號為 1 到  $N$ ，且犯人身上也有**不盡相同**的罪惡值，代表他所犯下的罪刑輕重。由於天使島的地形實在是太惡魔了（畢竟只是改名，沒辦法連地形一起改），這些單一牢房是建造在島中央最高的山洞內。為了讓天使島上的居民能感覺到從惡魔到天使的變化，所有的牢房都能直接從山洞外進入。不過，為了避免犯人逃走，在進入第一間牢房之後，要抵達其他間牢房必須透過牢房與牢房之間的通道。而且，如果從固定的牢房出發，抵達任何一個死刑犯  $x$  所在的單一牢房，在不重複經過牢房的前提下，通往死刑犯  $x$  的牢房路徑總是唯一的。

換句話說，所有的單一牢房在山洞內會連接成一個樹狀結構，每一個節點都代表一間單一牢房。

最近，由於掌管著天使島的大地主小 S 要來視察天使監獄，典獄長需要安排一條路徑讓小 S 按照這條路徑參觀。在天使一般的典獄長與政府協商後，決定要讓小 S 走一條讓他的驚嚇值最小的路線。典獄長會將天使監獄的（樹狀）結構畫在紙上，並遵循「前序走訪」方案來走訪所有的牢房（也就是使用深度優先搜尋的順序），過程中依序記錄他所走訪到的犯人編號；每個犯人的編號在走訪過程中首次遇到時就會記下，且只會記錄一次。全部走訪完畢以後，典獄長再按照紙上紀錄的順序計算驚嚇值。假設典獄長在紙上記下的序列是  $(G_1, G_2, \dots, G_N)$ ，一條路線的驚嚇值被定義為  $G_1 \times 10^{10(N-1)} + G_2 \times 10^{10(N-2)} + \dots + G_i \times 10^{10(N-i)} + \dots + G_N \times 10^{10(N-N)}$ 。

值得注意的是，雖然牢房與牢房之間的連接情形是固定的，但將其樹狀結構畫在紙上卻有許多種不同的畫法，也導致了典獄長的前序走訪方案可能會有所不同。

不過典獄長的演算法能力並不強，沒辦法在短時間內得出最好的走訪方案，於是他來拜託身為御用碼農的你，請你來設計一種走訪方案，走訪的起點（樹根）可能是**任何一間牢房**。

如果沒辦法得到答案，典獄長就會把你監禁在地下室  $\tau$ ！

### 輸入格式

輸入的第一行包含一個正整數  $N$ 。

第二行包含  $N$  個正整數  $g_1, g_2, \dots, g_N$ ，表示死刑犯的罪惡值。

第三行開始，總共有  $N - 1$  行，每一行都有兩個正整數  $u_i$  與  $v_i$ ，代表編號為  $u_i$  的死刑犯所在的牢房，有一條通道連接著編號為  $v_i$  的死刑犯所在的牢房。

## 輸出格式

請輸出  $N$  個正整數，代表在驚嚇值最小的走訪方案中，典獄長在紙上記下的序列。

## 測資限制

- $1 \leq N \leq 2000$ 。
- $1 \leq u_i, v_i \leq N$ 。
- $1 \leq g_i \leq 10^9$ 。

## 輸入範例 1

```
5
1 2 3 4 5
4 2
1 3
5 3
1 2
```

## 輸出範例 1

```
1 2 4 3 5
```

## 輸入範例 2

```
7
1 2 4 2 4 3 2
1 2
7 5
6 2
3 7
5 4
7 6
```

## 輸出範例 2

```
1 2 3 2 4 2 4
```

### 輸入範例 3

```
5
1 2 2 1 1
1 2
2 3
3 4
4 5
```

### 輸出範例 3

```
1 1 2 2 1
```

### 評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	18	$g_i = i$ 。
2	19	$g_1 = 1$ ， $\forall i \geq 2$ ， $g_i \neq 1$ 。
3	16	$N \leq 300$ 。
4	47	無額外限制。

*This page is intentionally left blank.*



## 第五題：小軒小羽取石子 (Stone)

### 問題敘述

小軒跟小羽是兩位好朋友，小軒家有個矩形的院子鋪滿了正方形的磁磚，下過大雨後院子會積水。小軒把某些區域圍成了大大小小的水坑，因為小羽很喜歡打水漂，在玩打水漂的遊戲時丟了一堆石頭到水坑裡頭。雨過天晴，院子的積水也蒸發了，留在地上的除了磁磚之外只剩下大大小小的石頭。鬼靈精怪的小羽想出了一種既可以把石頭堆整理乾淨，同時又能玩耍的遊戲。本題要請你寫一支程式計算他們玩遊戲的結果。

他們給每顆石頭一個權重，代表拿走這顆石頭之後可以得到的分數。請注意：權重有正有負，因為輸的人要請贏的人一碗拉麵，所以當然應該盡量避免拿到會讓自己分數降低的石頭。小軒很快的發現，只要每次都取權重最高的石頭，那麼結局永遠都是固定且無趣的，於是小軒將石頭依序標上編號  $1, 2, 3, \dots$ ，並追加規則：當你的回合結束的時候，剩下的所有石頭的編號必須連續。小軒和小羽都是程式高手，他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。

你以為題敘就這樣結束了嗎？你太天真了！

玩了幾輪之後，他們覺得速度實在是太慢了，石頭的數量多到就算拿程式來跑也要跑很久，不過更煩人的是，小軒小羽在自己的回合開始前都會一直玩手機，讓每個回合都無比冗長。所以他們經過商量之後，又決定一個足夠大的參數  $K$ ，以便讓遊戲早些結束。每次輪到一個人行動時，他需要取**恰好**  $K$  顆石頭（除非院子裡剩下不到  $K$  顆石頭，那就全部取走），並且先前的追加規則也必須遵守。

再說一次，小軒跟小羽都是程式高手，他們馬上就寫出了一個簡單的程式來模擬遊戲過程。這下，問題終於解決了？

小軒跟小羽所寫的程式都能**最大化**自己得到的分數。不過，在早就知道遊戲結局的狀況下，他們又為了如何決定先後手而爭執不斷……

（待續）

### 輸入格式

第一行給定兩個正整數  $N, K$ ，代表石頭數量跟小軒小羽商量的參數。

第二行給定  $N$  個整數  $a_1, a_2, \dots, a_N$ ， $a_i$  代表編號為  $i$  的石頭的權重。

### 輸出格式

請輸出兩個整數，分別代表先手跟後手能得到的分數。

## 測資限制

- $2 \leq N \leq 2 \times 10^5$ 。
- $\frac{N}{100} \leq K \leq N$ 。
- $|a_i| \leq 10^4$ 。

## 輸入範例 1

8 1  
-2 0 2 1 0 -2 2 0

## 輸出範例 1

2 -1

## 輸入範例 2

10 2  
2 1 4 7 4 8 3 6 4 7

## 輸出範例 2

26 20

## 輸入範例 3

17 4  
3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

## 輸出範例 3

1 5

## 輸入範例 4

17 11  
3 -1 4 -1 5 -9 2 -6 5 -3 5 -8 9 -7 9 -3 2

## 輸出範例 4

12 -6

## 評分說明

本題共有 4 組測試題組，條件限制如下所示。每一組可有一或多筆測試資料，該組所有測試資料皆需答對才會獲得該組分數。

子任務	分數	額外輸入限制
1	12	$N \leq 100$ ， $K = 1$ 。
2	21	$N \leq 3000$ ， $N \equiv 0 \pmod{K}$ 。
3	38	$N \leq 2 \times 10^4$ 。
4	29	無額外限制。

*This page is intentionally left blank.*