

模糊控制导论

苏临之

sulinzhi029@nwu.edu.cn



模糊控制导论纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读



基本概念

- 论域
- 经典集合
- 隶属度和隶属度函数
- 从经典集合到模糊集合

模糊集合举例

例1：设论域 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，用Zadeh法表示出模糊概念“大数”。

$$A(1)=0, A(2)=0.25, A(3)=0.5, A(4)=0.75, A(5)=1$$

$$A = \frac{0}{1} + \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5} = \frac{0.25}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.75}{4} + \frac{1}{5}$$

- Zadeh法：使用隶属度表示集合，写成分数求和的形式，分母是元素，分子是对应隶属度，不可有任何化简和计算，隶属度为0的项可以省略。



模糊集合表示方法

- Zadeh法
- 序对法
- 向量法
- 函数法



常用连续型隶属度函数

- 三角形
- 钟形
- 高斯型
- 梯形
- Sigmoid型



MATLAB绘制常用隶属度图象

- 三角形: $A=\text{trimf}(x,[a,b,c]);$
- 钟形: $A=\text{gbellmf}(x,[a,b,c]);$
- 高斯型: $A=\text{gaussmf}(x,[\text{sigma},c]);$
- 梯形: $A=\text{trmf}(x,[a,b,c,d]);$
- Sigmoid型: $A=\text{sigmf}(x,[a,c]);$

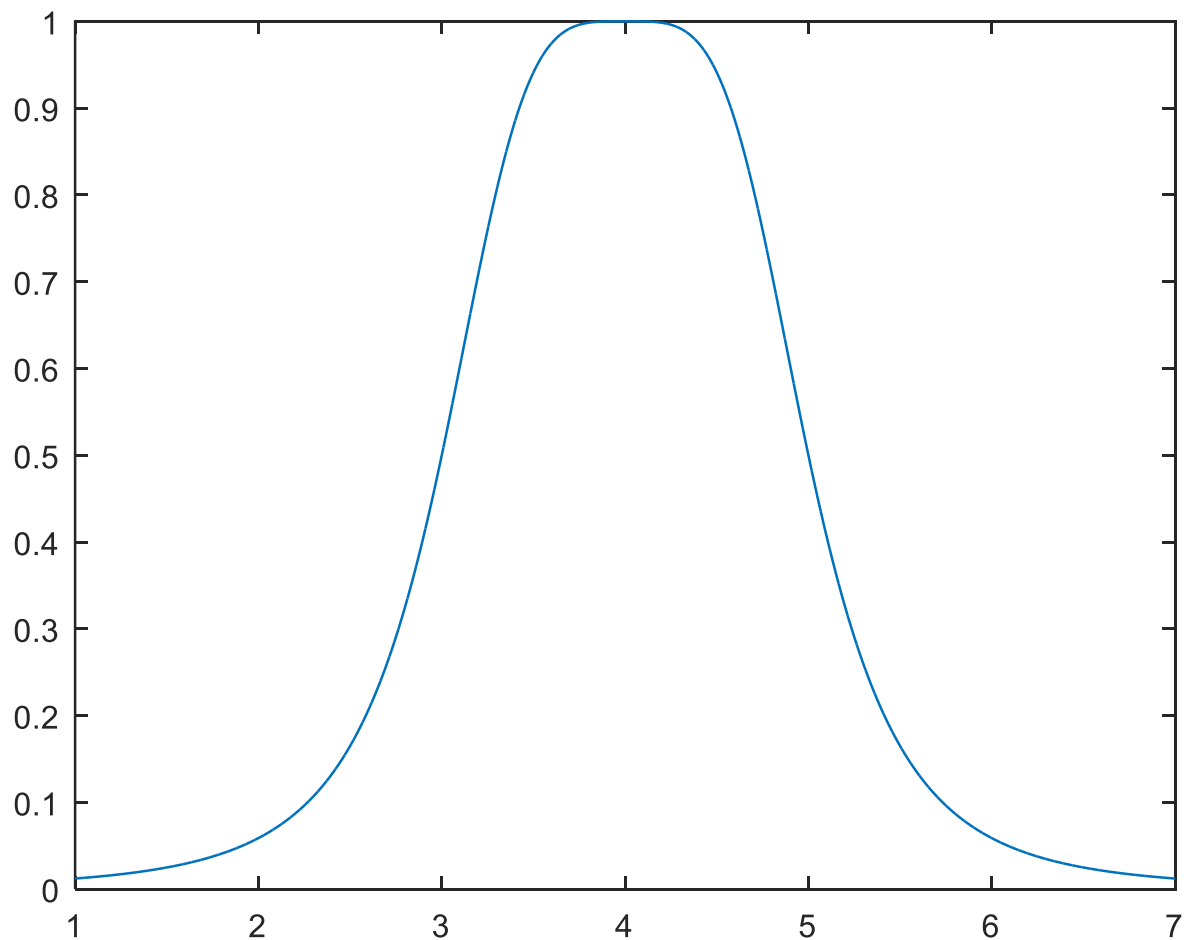


MATLAB绘制常用隶属度图象

例2：使用MATLAB编程绘制钟形隶属度函数，论域 $U = [1,7]$ ，参数 a 、 b 和 c 分别是1、2和4。

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
a=1;b=2;c=4;  
x=1:0.001:7;  
A=gbellmf(x,[a,b,c]);  
figure;plot(x,A);  
toc;
```


MATLAB绘制常用隶属度图象



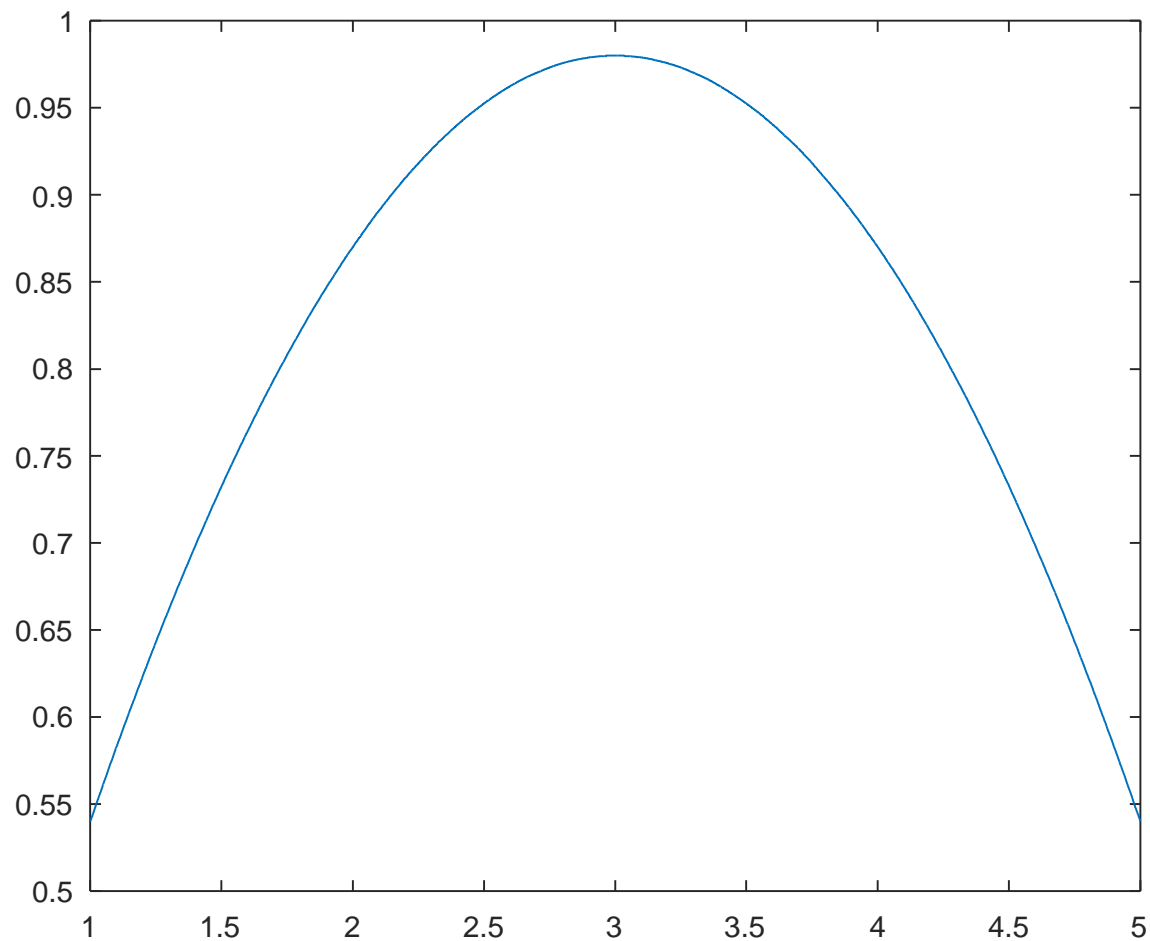


MATLAB绘制连续隶属度图象

例3：设论域 $U=[1,5]$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$ 。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=1:0.001:5;  
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;  
figure;plot(x,A);  
toc;
```

MATLAB绘制连续隶属度图象



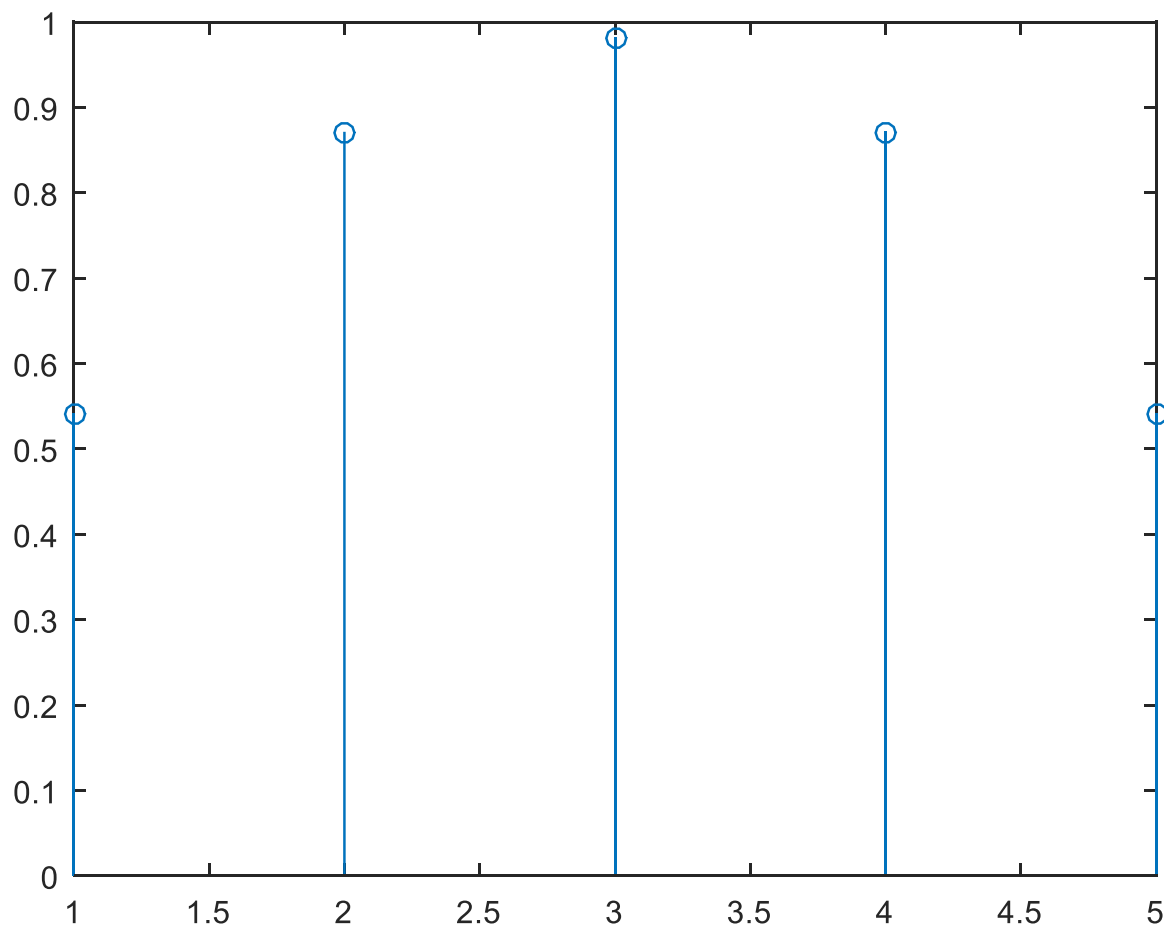
MATLAB绘制离散隶属度图象

例4：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$ 。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[1,2,3,4,5];  
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;  
figure;stem(x,A);  
toc;
```

MATLAB绘制离散隶属度图象

思考：如何
在程序里直
接修改坐标
轴的范围？



MATLAB坐标轴控制

- 在程序中设置坐标轴范围，需要用到axis函数。调用格式是：axis([xmin, xmax, ymin, ymax]);。如上述问题在stem函数后面加上axis函数，如下：

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[1,2,3,4,5];  
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;  
figure;stem(x,A);  
axis([0.8,5.5,0,1.05]);  
toc;
```

MATLAB坐标轴控制

- 人工设定axis的范围可能不灵活，因此可以换成以下较为灵活的方式，此处min/max函数表示求向量的最小/最大值。

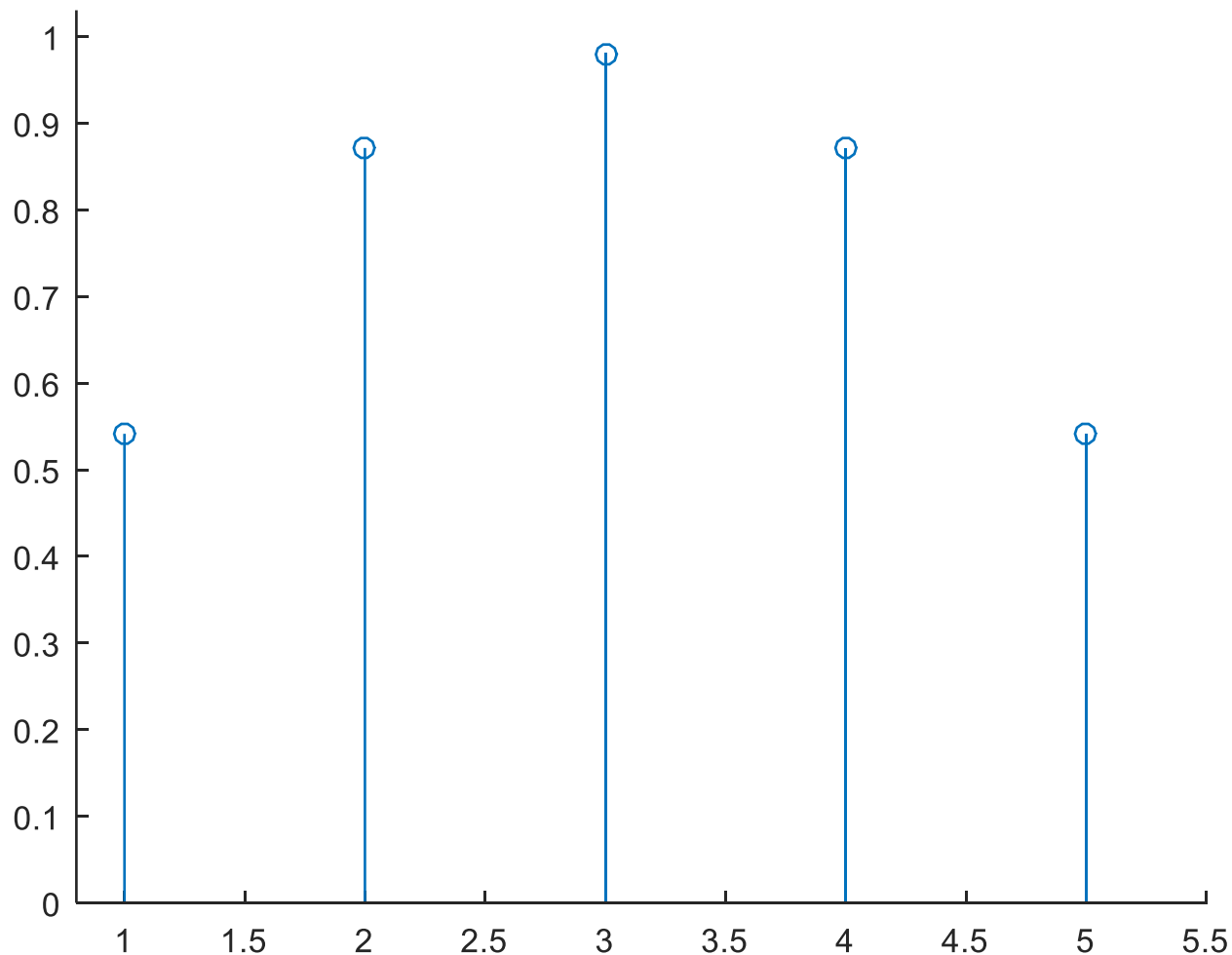
```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[1,2,3,4,5];  
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;  
xmin=min(x);xmax=max(x);ymax=max(A);  
figure;stem(x,A);  
axis([xmin-0.2,xmax+0.5,0,1.05*ymax]);  
toc;
```

MATLAB坐标轴控制

- 如果想去掉外框，可以加上box off命令。

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[1,2,3,4,5];  
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;  
xmin=min(x);xmax=max(x);ymax=max(A);  
figure;stem(x,A);  
axis([xmin-0.2,xmax+0.5,0,1.05*ymax]);  
box off;  
toc;
```


MATLAB坐标轴控制





MATLAB绘制隶属度图象

例5：论域 $U=\{-1,0,1,2,3\}$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=0.16x^2+0.48x+0.36$ 。请使用MATLAB写出画对应隶属度图象的程序。要求：

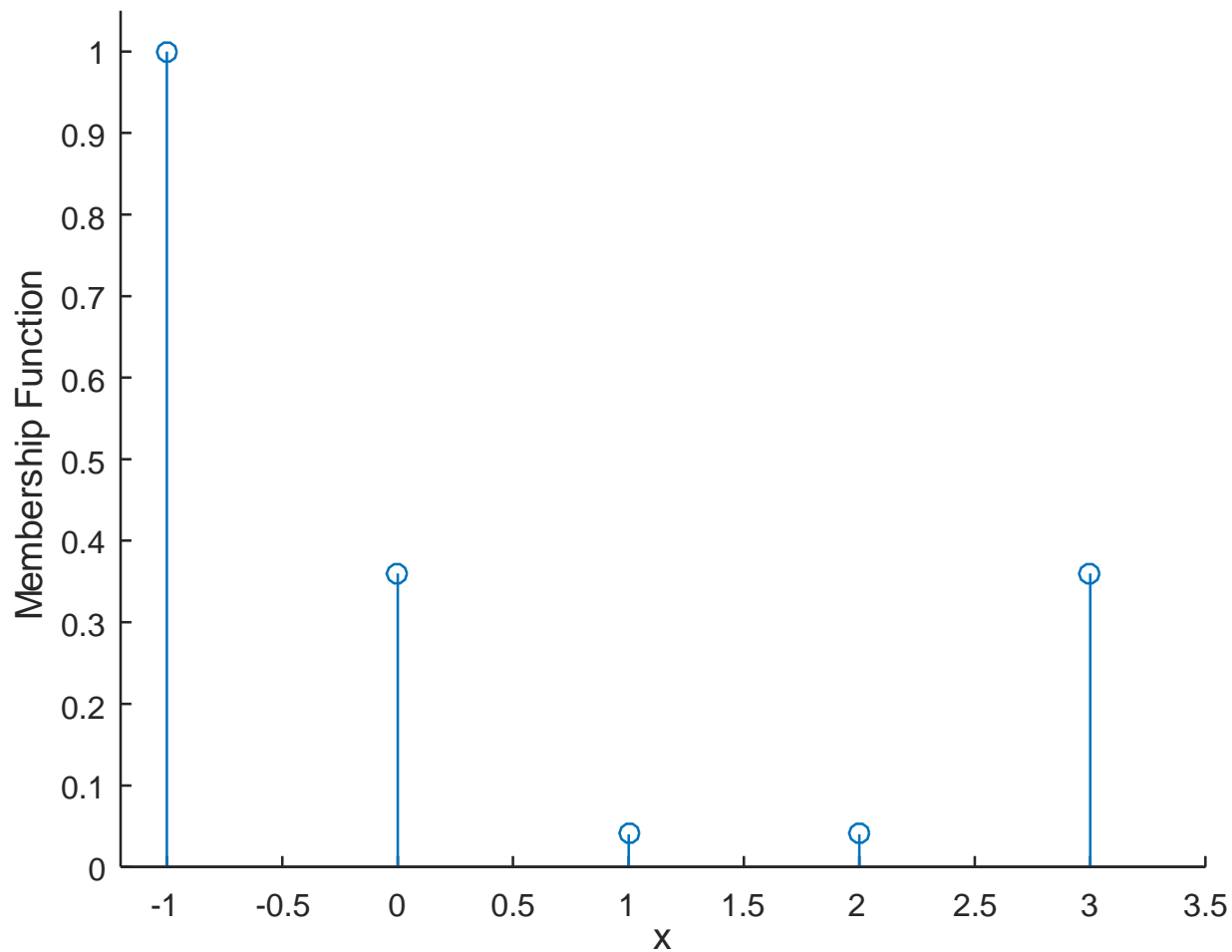
1. 去掉外框，并且将图象自动显示在易于观察的范围内；
2. 横轴标签为“x”，纵轴标签为“Membership Function”；
3. 程序一开始清屏、清变量，关闭所有多余窗口，并具备计时功能。

MATLAB绘制隶属度图象

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[-1,0,1,2,3];A=0.16*x.^2-0.48*x+0.36;  
xmin=min(x);xmax=max(x);ymax=max(A);  
figure;stem(x,A);  
axis([xmin-0.2,xmax+0.5,0,1.05*ymax]);  
xlabel('x');ylabel('Membership Function');  
box off;  
toc;
```

- xlabel和ylabel可以分别给横轴和纵轴加上对应的标签

MATLAB绘制隶属度图象





支集、核和正规模糊集

- 对于定义在论域 U 上的模糊集合 A 来说可以定义两个经典集合：支集 $\text{Supp } A$ 和核 $\text{Ker } A$ 。当 $\text{Ker } A$ 不是空集时，称 A 是正规模糊集。
- 支集和核都是经典集合。

$$\text{Supp } A = \{x \mid x \in U, A(x) > 0\}$$

$$\text{Ker } A = \{x \mid x \in U, A(x) = 1\}$$

支集、核和正规模糊集

例6：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 、 B 和 C 的支集 $\text{Supp } A$ 、 $\text{Supp } B$ 、 $\text{Supp } C$ 和核 $\text{Ker } A$ 、 $\text{Ker } B$ 、 $\text{Ker } C$ 分别是什么？它们是正规模糊集吗？

$$A = \frac{0.2}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.2}{5}$$

$$B = \frac{0.4}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.1}{5}$$

$$C = \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{4} + \frac{1}{5}$$

支集、核和正规模糊集


例6：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 、 B 和 C 的支集 $\text{Supp } A$ 、 $\text{Supp } B$ 、 $\text{Supp } C$ 和核 $\text{Ker } A$ 、 $\text{Ker } B$ 、 $\text{Ker } C$ 分别是什么？它们是正规模糊集吗？

$$A = \frac{0.2}{1} + \frac{0.8}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.2}{5}$$

$$\text{Supp } A = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\text{Ker } A = \{3\}$$

- $\text{Ker } A$ 一定是一个集合，不能直接写成“3”。



支集、核和正规模糊集

例6：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 、 B 和 C 的支集 $\text{Supp } A$ 、 $\text{Supp } B$ 、 $\text{Supp } C$ 和核 $\text{Ker } A$ 、 $\text{Ker } B$ 、 $\text{Ker } C$ 分别是什么？它们是正规模糊集吗？

$$B = \frac{0.4}{2} + \frac{0.9}{3} + \frac{0.4}{4} + \frac{0.1}{5}$$

$$\text{Supp } B = \{2,3,4,5\}$$

$$\text{Ker } B = \emptyset$$



支集、核和正规模糊集

例6：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 、 B 和 C 的支集 $\text{Supp } A$ 、 $\text{Supp } B$ 、 $\text{Supp } C$ 和核 $\text{Ker } A$ 、 $\text{Ker } B$ 、 $\text{Ker } C$ 分别是什么？它们是正规模糊集吗？

$$C = \frac{1}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\text{Supp } C = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$\text{Ker } C = \{1, 5\}$$



集合的数积

- 对于定义在论域 U 上的模糊集合（或经典集合） A 来说，若 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，则可以定义数积集合 λA ，其隶属度函数如下：

$$\begin{aligned}\lambda A(x) &= \begin{cases} A(x) & \text{if } \lambda \geq A(x) \\ \lambda & \text{if } \lambda < A(x) \end{cases} \\ &= \min\{A(x), \lambda\} = \lambda \wedge A(x)\end{aligned}$$

- 通俗地说：对集合的数积的运算，相当于对隶属度进行“削头”处理。



集合的数积

- 如果 $0 \leq \lambda < 1$ ，即使 A 是经典集合， λA 也是模糊集合。

$$\begin{aligned}\lambda A(x) &= \begin{cases} A(x) & \text{if } \lambda \geq A(x) \\ \lambda & \text{if } \lambda < A(x) \end{cases} \\ &= \min\{A(x), \lambda\} = \lambda \wedge A(x)\end{aligned}$$



集合的数积

例7：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 如下。求当 $\lambda=0$ 、 0.2 、 0.5 、 0.8 、 1 时的 λA ，并从中发现规律。

$$A = \frac{0.3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{0.7}{5}$$

集合的数积

例7：设论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$ ，以下定义在 U 上的模糊集 A 如下。求当 $\lambda=0、0.2、0.5、0.8、1$ 时的 λA ，并从中发现规律。

$$0A = \emptyset$$

$$0.2A = \frac{0.2}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5}$$

$$0.5A = \frac{0.3}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.5}{5}$$

$$0.8A = \frac{0.3}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{0.7}{5}$$

$$1A = \frac{0.3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{0.9}{4} + \frac{0.7}{5}$$



集合的数积

例8：定义在 \mathbf{R} 上的模糊集 A 的隶属度函数如下，求 $0.5A(x)$ 。

$$A(x) = \begin{cases} \exp(-x^2) & x \in [-5, 5] \\ 0 & x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$



集合的数积

例8：定义在 \mathbf{R} 上的模糊集 A 的隶属度函数如下，求 $0.5A(x)$ 。

$$0.5A(x) = \begin{cases} \exp(-x^2) & x \in [-5, -\sqrt{\ln 2}) \cup (\sqrt{\ln 2}, 5] \\ 0.5 & x \in [-\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}] \\ 0 & x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \end{cases}$$

模糊集合的表示举例

例9：论域 $U=\{-1,0,1,2,3\}$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=0.16x^2+0.48x+0.36$ 。请使用Zadeh法表示 A ，并求 $\text{Supp } A$ 和 $\text{Ker } A$ 及在 $\lambda=0.1$ 、 0.3 和 0.5 时表示 λA 。

$$U = \{-1,0,1,2,3\}$$

$$A = \frac{1}{-1} + \frac{0.36}{0} + \frac{0.04}{1} + \frac{0.04}{2} + \frac{0.36}{3}$$

$$\text{Supp } A = \{-1,0,1,2,3\}$$

$$\text{Ker } A = \{-1\}$$

模糊集合的表示举例

例9：论域 $U=\{-1,0,1,2,3\}$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=0.16x^2+0.48x+0.36$ 。请使用 Zadeh 法表示 A ，并求 $\text{Supp } A$ 和 $\text{Ker } A$ 及在 $\lambda=0.1$ 、 0.3 和 0.5 时表示 λA 。

$$0.1A = \frac{0.1}{-1} + \frac{0.1}{0} + \frac{0.04}{1} + \frac{0.04}{2} + \frac{0.1}{3}$$

$$0.3A = \frac{0.3}{-1} + \frac{0.3}{0} + \frac{0.04}{1} + \frac{0.04}{2} + \frac{0.3}{3}$$

$$0.5A = \frac{0.5}{-1} + \frac{0.36}{0} + \frac{0.04}{1} + \frac{0.04}{2} + \frac{0.36}{3}$$



模糊凸集

- 对定义在 \mathbf{R} 上的模糊集 A ，若 $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ ，且 $x_1 > x_2 > x_3$ ，均有下式成立，则称 A 是凸模糊集，否则称 A 是非凸模糊集。当下式的“ \geq ”变为“ $>$ ”时，称之为严格凸集。

$$A(x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_3)\} = A(x_1) \wedge A(x_3)$$

- 通俗地说，凸集的隶属度函数直观表现出来是单峰的，对于连续函数来说可以有“凹”的区域，但不能有“凹陷”的区域。



模糊数

- 当模糊集合 A 同时满足正规和凸集两个条件时，则称 A 是一个模糊数。
- 直观来看，模糊数要求有两点：① 隶属度图象必须是单峰的；② 其最大值（峰值）的隶属度值必须是1。
- 日常生活中，“1.8m上下”“20人左右”等这种描述的语言均可以用模糊数表示。

模糊数隶属度的表示

- 模糊数的表示重点在于其隶属度的表示，可以使用模糊集的隶属度表示形式。例如“模糊数2”和“模糊数3”可以用以下形式表示。

$$2(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

$$3(x) = \begin{cases} \exp[-5(x-3)^2] & 1.5 \leq x \leq 4.5 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$



模糊数概念举例

例10：以下有关模糊数的说法，哪些是正确的？哪些是错误的？为什么错了？

- ① 模糊数的隶属度函数若处处存在二阶导数，而其二阶导数值不大于0。
- ② 设 x_0 是模糊数隶属度函数的极大值，则 x_0 左侧函数严格单调递增， x_0 右侧函数严格单调递减。
- ③ 模糊数的支集可能是实数集 \mathbf{R} 。
- ④ 模糊数的核可能包含不止一个元素。
- ⑤ 设 $0 < \lambda < 1$ ，模糊数和 λ 的积仍然为一模糊数。



模糊数概念举例

例10：以下有关模糊数的说法，哪些是正确的？哪些是错误的？为什么错了？

- ① 模糊数的隶属度函数若处处存在二阶导数，而其二阶导数值不大于0。×
- ② 设 x_0 是模糊数隶属度函数的极大值，则 x_0 左侧函数严格单调递增， x_0 右侧函数严格单调递减。×
- ③ 模糊数的支集可能是实数集 \mathbf{R} 。√
- ④ 模糊数的核可能包含不止一个元素。√
- ⑤ 设 $0 < \lambda < 1$ ，模糊数和 λ 的积仍然为一模糊数。×



模糊数概念举例

例10：填空题：

1. 设 A 是定义在论域 U 上的模糊数，设 $p \in (0,1)$ ，则
 $\text{Ker}(pA) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 A 是定义在论域 $U = [1, r]$ 上的正规模糊集合，
 $A(x) = 0.01x^2$ ，则 $r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 对任意模糊集合 A ， $(\text{Supp } A) \cap (\text{Ker } A) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $(\text{Supp } A) \cup (\text{Ker } A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



模糊数概念举例

例10：填空题：

1. 设 A 是定义在论域 U 上的模糊数，设 $p \in (0,1)$ ，则
 $\text{Ker}(pA) = \emptyset$ 。
2. 设 A 是定义在论域 $U = [1, r]$ 上的正规模糊集合，
 $A(x) = 0.01x^2$ ，则 $r = 10$ 。
3. 对任意模糊集合 A ， $(\text{Supp } A) \cap (\text{Ker } A) = \text{Ker } A$ ，
 $(\text{Supp } A) \cup (\text{Ker } A) = \text{Supp } A$ 。



作业

1. 有两个论域 $U_1=\{1,2,3,4,5,6\}$ ， $U_2=[1,6]$ 。模糊集合A的隶属度函数 $A(x)=-0.14x^2+0.97x-0.69$ 。当论域分别为 U_1 和 U_2 时，使用MATLAB画出A对应的隶属度函数图象。要求：
 - ① 编写.m文件并运行，去掉外框，并且将图象自动显示在易于观察的范围内；
 - ② 程序有计时功能，在开始清屏、清变量和关闭冗余窗口；
 - ③ 横轴标签“x”，纵轴标签“Membership Function”；
 - ④ 将图象通过Copy Figure统一放到一个Word或Visio文档中，打包.m文件和Word / Visio文件，并发送至邮箱sulinzhi029@nwu.edu.cn，邮件名格式“模糊控制导论-20230322作业-姓名-学号”。

作业

2. （选做思考题）设论域 $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ ，模糊集合 A 的隶属度函数 $A(x)=|0.05x^3-0.35x^2+0.2x+0.6|$ 。输入以下代码至.m文件并运行。请思考：变量 u 和 v 分别代表了什么？运行结果和理论值是否有偏差？如果有，应该怎么解决这个问题？

```
clc;clear all;close all;  
tic;  
x=[-1,0,1,2,3,4,5,6];  
y=abs(0.05*x.^3-0.35*x.^2+0.2*x+0.6);  
u=x(y~=0);v=x(y==1);  
toc;
```



THANK YOU!