模糊控制导论

苏临之
sulinzhi029@nwu.edu.cn

模糊控制导论纲要

- 模糊控制基本概念
- **模糊集合及其运算**
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

模糊集合表示方法

- Zadeh法
- 序对法
- 向量法
- 函数法

常用连续型隶属度函数

- 三角形
- 钟形
- 高斯型
- 梯形
- Sigmoid型

模糊集合的运算

- 模糊全集和空集
- 模糊集合包含与相等
- 模糊集合补集
- 模糊集合交集和并集

模糊集合的补集、交集和并集

- 设$A, B, C\in \mathscr{F}(U)$，$\forall x\in U$。

1、若有$B(x)=1-A(x)$，则称B是A的补集，记为$B=A^{C}$；

2、若有$C(x)=\min\{A(x), B(x)\}=A(x)\wedge B(x)$，则称为$C$是$A$和$B$的交集，记为$C=A\cap B$；

3、若有$C(x)=\max\{A(x), B(x)\}=A(x)\vee B(x)$，则称为$C$是$A$和$B$的并集，记为$C=A\cup B$。

$$(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C} \quad (A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$$

$$A\cap A^{C}\neq\phi \qquad A\cup A^{C}\neq U$$

MATLAB实现模糊集合运算

```
AC=ones(size(x))-A;

AC=1-A;

AandB=min(A,B);

AorB=max(A,B);
```

MATLAB绘制隶属度函数图象

例1：论域U=[-4,9]，A, $B \in \mathscr{F}(U)$，隶属度函数如下。编写MATLAB程序，分别在每个Figure里展示：① A和B；② $A \cap B$和$A \cup B$；③ $A \cap A^C$和$A \cup A^C$；④ $B \cap B^C$和$B \cup B^C$。要求如下：

- 每个Figure里第一个画的曲线使用绿色实线，第二个画的曲线使用黑色点划线，曲线粗细均为1磅；
- 横轴、纵轴标签分别为“x”和“Membership Function”；
- 去掉外框，并在图中适当位置显示图例。

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{7} & -4 \le x < 3 \\ \dfrac{9-x}{6} & 3 \le x \le 9\end{cases} \qquad B(x)=\exp\left[-\frac{|x-2|}{8}\right]$$

MATLAB绘制隶属度函数图象

- A的隶属度函数是三角形隶属度函数，因此直接调用现有函数即可。

```
x=-4:0.001:9;
A=trimf(x,[-4,3,9]);
```

MATLAB绘制隶属度函数图象

- 或者用到for循环和if-else分支语句，注意for和if-else必须有一个相应的end匹配。zeros用于分配空间。

```
x=-4:0.001:9;t=size(x);A=zeros(t);
for i=1:t(2)
    if x(i)>=-4&&x(i)<3
        A(i)=(x(i)+4)/7;
    else
        A(i)=(9-x(i))/6;
    end
end
```

MATLAB绘制隶属度函数图象

- 使用plot画图

```
figure;
plot(x,A,'-g','LineWidth',1);
hold on;
plot(x,B,'-.k','LineWidth',1);
axis([-4,9,0,1.05*max(max(A),max(B))]);
box off;
xlabel('x');ylabel('Membership Function');
legend('A(x)','B(x)','location','best');
```

模糊控制导论纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- **模糊关系的数学表示和运算**
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

经典集合的直积

- 对于经典集合A和B，可以定义两者的直积（笛卡尔积）$A \times B$如下。可见其直积是二维空间（平面）上面的点集。

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

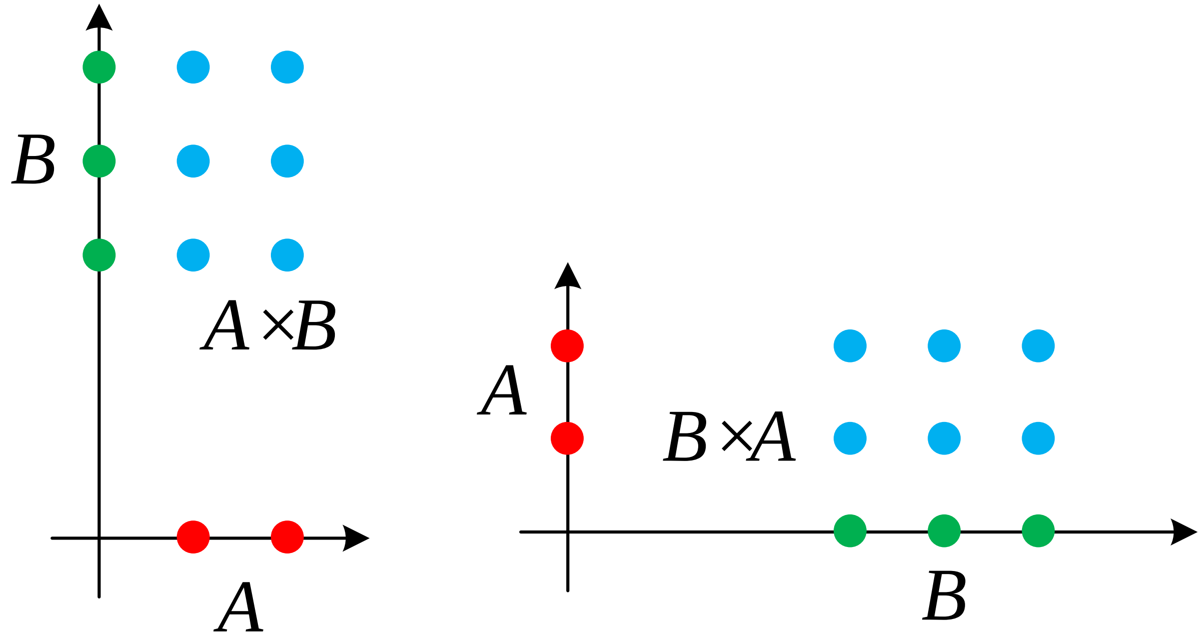
- 比如说$A=\{1,2\}$，$B=\{3,4,5\}$，计算$A \times B$只需要将两者两两组合即可，注意直积乘号有顺序。

$$A = \{1,2\} \quad B = \{3,4,5\}$$

$$\therefore A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$

经典集合的直积

- A={1,2}，B={3,4,5}，那么$A\times B$={(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)}，$B\times A$={(3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (4,2), (5,2)}，如下图。显然$A\times B \neq B\times A$。



经典二元关系

例2：一个家庭中有祖父、祖母、父亲、母亲、儿子和女儿共6口人。请使用不同的方法列举出其中具有“亲子关系”的序对。

经典二元关系

例2：一个家庭中有祖父、祖母、父亲、母亲、儿子和女儿共6口人。请使用不同的方法列举出其中具有“亲子关系”的序对。

分析：可以使用列举法一一列出如下：
(祖父, 父亲) (祖母, 父亲) (父亲, 儿子)
(父亲, 女儿) (母亲, 儿子) (母亲, 女儿)

经典二元关系

例2：一个家庭中有祖父、祖母、父亲、母亲、儿子和女儿共6口人。请使用不同的方法列举出其中具有“亲子关系”的序对。

分析：如果设亲子关系成立为1，不成立为0，则可以列表如下：

	祖父	祖母	父亲	母亲	儿子	女儿
祖父	0	0	1	0	0	0
祖母	0	0	1	0	0	0
父亲	0	0	0	0	1	1
母亲	0	0	0	0	1	1
儿子	0	0	0	0	0	0
女儿	0	0	0	0	0	0

经典二元关系

例2：一个家庭中有祖父、祖母、父亲、母亲、儿子和女儿共6口人。请使用不同的方法列举出其中具有“亲子关系”的序对。

分析：需注意，“亲子关系”有方向性，不等于“子亲关系”

	祖父	祖母	父亲	母亲	儿子	女儿
祖父	0	0	1	0	0	0
祖母	0	0	1	0	0	0
父亲	0	0	0	0	1	1
母亲	0	0	0	0	1	1
儿子	0	0	0	0	0	0
女儿	0	0	0	0	0	0

经典二元关系

例2：一个家庭中有祖父、祖母、父亲、母亲、儿子和女儿共6口人。请使用不同的方法列举出其中具有“亲子关系”的序对。

分析：省略框线和具体意义，其实可以进一步抽象为一个关系矩阵，这就是布尔矩阵。

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

布尔矩阵

- 布尔矩阵实际上就是一种二元有向关系的表现。只需要把两个集合先进行直积，然后在对应位置上填写上相应的关系即可形成布尔矩阵。

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二元模糊关系的定义

- 设A和B是两个非空有限经典集合，R是$A\times B$上的模糊子集。若$R(x,y)\in[0,1]$表示了来自A的x跟来自B的y之间的某种相关程度，则称$R(x,y)$是A到B上的二元模糊关系。

$$R(x,y): A\times B\rightarrow[0,1]$$

- 二元模糊关系的三大基本要素：**元素对，隶属度，方向性**。

二元模糊关系举例

例3：下表列出3个人a、b和c相互信任的关系R。

1、请列出模糊关系矩阵$\boldsymbol{R}$;

2、说明R是定义在哪两个集合直积上的模糊关系，并说明每一个隶属度意义。

R	a	b	c
a	0.9	0.2	0.8
b	0	1	0
c	0.7	0.3	0.5

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.2 & 0.8\\ 0 & 1 & 0\\ 0.7 & 0.3 & 0.5\end{bmatrix}$$

模糊矩阵的运算

例4：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个模糊关系矩阵，求$\boldsymbol{A}^{C}$、$\boldsymbol{B}^{C}$、$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

- 模糊矩阵的各个运算完全类似于模糊集合的运算

模糊矩阵的运算

例4：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个模糊关系矩阵，求$\boldsymbol{A}^{\mathrm{C}}$、$\boldsymbol{B}^{\mathrm{C}}$、$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.9\\ 0.7 & 0.1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.1\\ 0.8 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.9\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix}$$

MATLAB进行模糊矩阵运算

例5：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个模糊关系矩阵，用MATLAB编写程序求$\boldsymbol{A}^{C}$、$\boldsymbol{B}^{C}$、$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B}$。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

MATLAB进行模糊矩阵运算

例5：设A和B是两个模糊关系矩阵，用MATLAB编写程序求A^C、B^C、$A \cap B$和$A \cup B$。

```
A=[0.7,0.1;0.3,0.9];
B=[0.4,0.9;0.1,0.1];
AC=1-A;
BC=1-B;
AandB=min(A,B);
AorB=max(A,B);
```

经典关系的合成

- 设P和Q分别是定义在$X \times Y$和$Y \times Z$上的两个经典关系，那么由P和Q合成的R就是定义在$X \times Z$上的经典关系，记作：

$$R = P \circ Q$$

- 关系的合成本质上是一种二次映射。如两个亲子关系的合成会生成祖孙关系。运算和矩阵乘法相似，只是相乘、相加改为布尔代数的“与”和“或”运算。

模糊关系的合成

- 设$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$分别是定义在$X\times Y$和$Y\times Z$上的两个模糊关系矩阵，那么由$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$合成的$\boldsymbol{R}$就是定义在$X\times Z$上的模糊关系，记作：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{Q}$$

- 在实际运算的时候，遵循和矩阵乘法类似的规则，其中“相乘”变“取小”，“相加”变“取大”。
- 运算口诀：左取行，右取列，对应取小再取大，左行右列定位置。

模糊关系的合成

- 矩阵的合成运算是一种非线性映射关系，因此一般不满足交换律，但是满足结合律：

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} \circ (\boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \circ \boldsymbol{C}$$

- 合成运算的结合律在后续模糊推理中可以大幅度简化计算。

模糊关系的合成

例6：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个模糊关系矩阵，求$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

模糊关系的合成

例6：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是两个模糊关系矩阵，求$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1\\ 0.3 & 0.9\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}(0.7\wedge 0.4)\vee(0.1\wedge 0.2) & (0.7\wedge 0.9)\vee(0.1\wedge 0.1)\\ (0.3\wedge 0.4)\vee(0.9\wedge 0.2) & (0.3\wedge 0.9)\vee(0.9\wedge 0.1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4\vee 0.1 & 0.7\vee 0.1\\ 0.3\vee 0.2 & 0.3\vee 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.7\\ 0.3 & 0.3\end{bmatrix}$$

MATLAB实现模糊关系合成

- MATLAB实现矩阵乘法，只需要一条语句即可。但是模糊关系不同于矩阵乘法，因此需要采用循环。

```
A=[0.7,0.1;0.3,0.9];
B=[0.4,0.9;0.2,0.1];
p=size(A);q=size(B);
C=zeros(p(1),q(2));
```

MATLAB实现模糊关系合成

- 此处p和q是size函数返回值，均为一个1×2向量，表示A和B的行列数。因此在满足p(2)==q(1)的情况下，合成的矩阵C大小为p(1)×q(2)。这里使用zeros函数对C进行空间预分配。

```
A=[0.7,0.1;0.3,0.9];
B=[0.4,0.9;0.2,0.1];
p=size(A);q=size(B);
C=zeros(p(1),q(2));
```

MATLAB实现模糊关系合成

- MATLAB编写模糊矩阵合成的程序段如下。注意for循环的格式比C语言要更加直观。

```
for i=1:p(1)
    for j=1:q(2)
        m=A(i,:);n=B(:,j);
        a=zeros(1,p(2));
        for r=1:p(2)
            a(r)=min(m(r),n(r));
        end
        C(i,j)=max(a);
    end
end
```

MATLAB实现模糊关系合成

- m=A(i,:)的意思是把A的第i行赋给m成为一个行向量。n=B(:,j)同理。这是冒号的第二个用法。

```
for i=1:p(1)
    for j=1:q(2)
        m=A(i,:);n=B(:,j);
        a=zeros(1,p(2));
        for r=1:p(2)
            a(r)=min(m(r),n(r));
        end
        C(i,j)=max(a);
    end
end
```

MATLAB实现子程序

例7：编写一个子程序syn.m使其能够实现两个模糊矩阵的合成的功能。然后编写调用此子程序的主程序来求$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{S}$。

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\0.7 & 0.8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5\\0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

MATLAB实现子程序

- MATLAB子程序第一行格式如下：

```
function [Y1,Y2,…]=fun_name(X1,X2,…)
```

- 其中“function”是固定的，fun_name指的是子函数名称。中括号里的Y1、Y2等代表子函数的输出值，小括号里的X1、X2等代表子函数的输入值。当输出值只有一个时，中括号可以省略。第一行是函数输入输出声明行，因此句尾不能加分号。

MATLAB实现子程序

- 例如此处需要2个输入的矩阵，输出1个合成的矩阵，因此函数是一个2输入1输出的形式，如下：

```
function C=syn(A,B)
```

- 下面的语句中，需要将这里的A和B当做两个已知的量来对待。这里A、B和C被称为形式参数，意思是子程序里面形式上存在的变量。
- 子程序编写完毕后，保存时文件名默认为子程序名，子程序文件名要和子程序名称一模一样。

MATLAB实现子程序

- 为了通过软件测试，需要考虑非法输入的情况，即不满足模糊矩阵及其合成条件的情况要停止运算并予以警示。

```
function C=syn(A,B)
p=size(A);q=size(B);
s=max(max(max(A)),max(max(B)));
t=min(min(min(A)),min(min(B)));
if p(2)~=q(1)||s>1||t<0
    fprintf('Error!\n');
else
    ……
end
```

MATLAB实现子程序

```
function C=syn(A,B)
p=size(A);q=size(B);s=max(max(max(A)),max(max(B)));
t=min(min(min(A)),min(min(B)));
if p(2)~=q(1)||s>1||t<0
    fprintf('Error!\n');
else
    C=zeros(p(1),q(2));
    for i=1:p(1)
        for j=1:q(2)
            m=A(i,:);n=B(:,j);a=zeros(1,p(2));
            for r=1:p(2)
                a(r)=min(m(r),n(r));
            end
            C(i,j)=max(a);
        end
    end
end
```

MATLAB引用子程序

- 引用子程序时，S和T、U和V是实际需要输入或输出的参数，因此称为实际参数。实参必须遵守现有子程序形参的输入输出规范，包括输入输出的变量数量、属性和顺序。如果有偏差，就会产生软件接口错误。

```
clc;clear all;close all;
tic;
S=[.1,.2;.7,.8];T=[.3,.5;.6,.4];
U=syn(S,T);V=syn(T,S);
toc;
```

MATLAB实现子程序

例8：利用子程序syn.m和以下三个矩阵，编写主程序验证模糊矩阵的合成满足结合律。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.4\\ 0 & 1 & 0.1\\ 0.8 & 0.7 & 0.3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.4\\ 0.3 & 0.5\\ 0.9 & 0.3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\\ 0.8 & 0.6\end{bmatrix}$$

作业

1、设$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{Z}$是三个模糊关系矩阵。编写对应的$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{C}}\cap(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C})$的3输入1输出的子程序文件abc.m（可以利用syn.m嵌套子程序），并利用这个子程序来编写主程序求$\boldsymbol{X}^{\mathrm{C}}\cap(\boldsymbol{Z}\circ\boldsymbol{Y})$和$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{C}}\cap(\boldsymbol{Y}\circ\boldsymbol{X})$的值。

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.4 & 0.3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}0.9 & 1\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\ 0.2 & 1\end{bmatrix}$$

作业

2、模糊矩阵***R***、***S***和***T***如下，用MATLAB编写求$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})\circ\boldsymbol{C}$和$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{C})\cup(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C})$的3输入2输出子程序mix_fop（可以利用syn.m嵌套子程序），并利用子程序编写主程序求$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{S}\cap\boldsymbol{T})\circ\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{T}\circ\boldsymbol{S})\cup(\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{S})$。

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.2 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.9\\ 0.5 & 0.8\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 0.2\\ 0.7 & 0.6\end{bmatrix}$$

THANK YOU !