模糊控制导论

苏临之
sulinzhi029@nuw.edu.cn

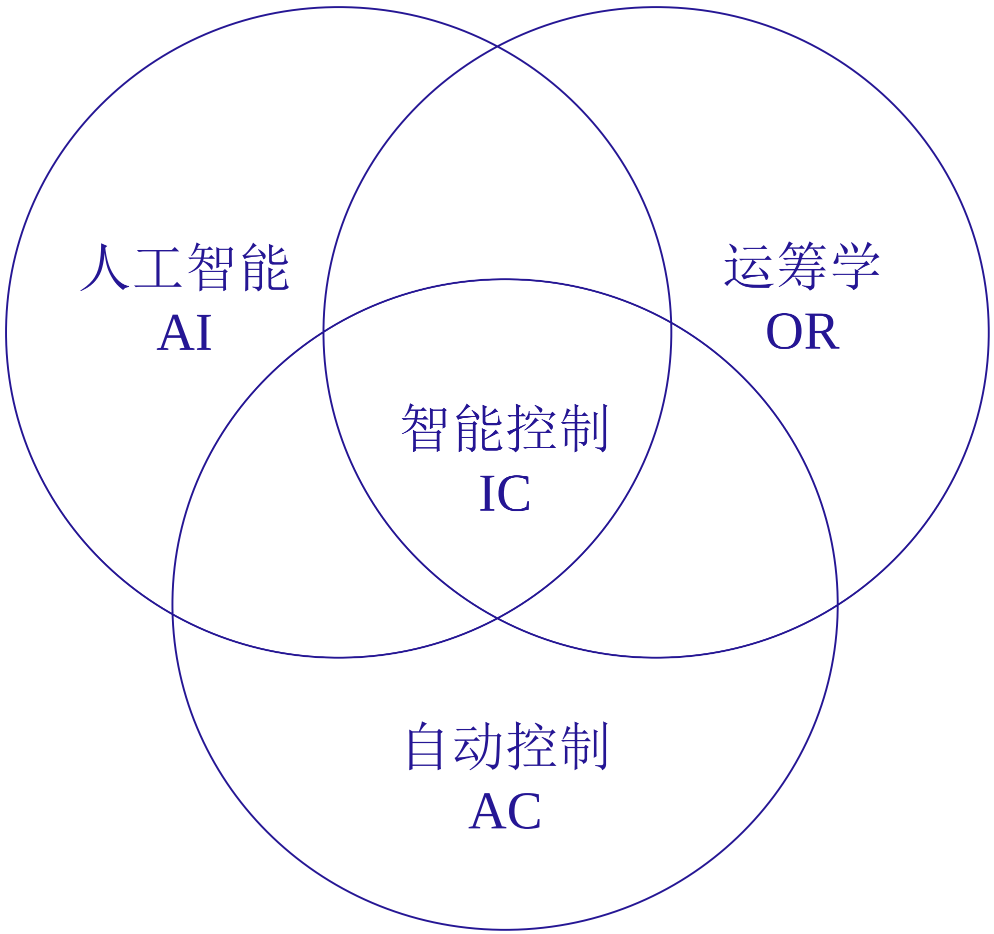
模糊控制导论纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

模糊控制导论纲要

- **模糊控制基本概念**
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

智能控制三元论



智能控制分支

- 专家系统（Expert System）：专家知识体系转换为计算机语言，使得机器代替人解决问题。
- 神经网络控制（Neural Networks Control）：仿照人脑生理结构和神经网络以完成特征提取、非线性函数的映射等任务。
- 模糊控制（Fuzzy Control）：以模糊集合和模糊逻辑推理为基础，将自然语言和思维的模糊性数学化再进行处理。

模糊系统

- Fuzzy：Difficult to perceive clearly or understand and explain precisely; indistinct or vague
- 模糊系统：“模糊”是表示技术特征的词语，用来指明系统所使用的技术，并不是说系统本身是不精确描述的。模糊系统是一种基于知识或规则的系统，核心是“IF-THEN规则”所组成的知识库。

模糊控制的发展

- 形成期（1974年以前）
- 发展期（1974 ~ 1979年）
- 高性能模糊控制阶段（1979年至今）

模糊系统的权威期刊

- IEEE Transactions on Fuzzy Systems (TFS)
- JCR分区：SCI一区期刊

IEEE TRANSACTIONS ON

FUZZY SYSTEMS

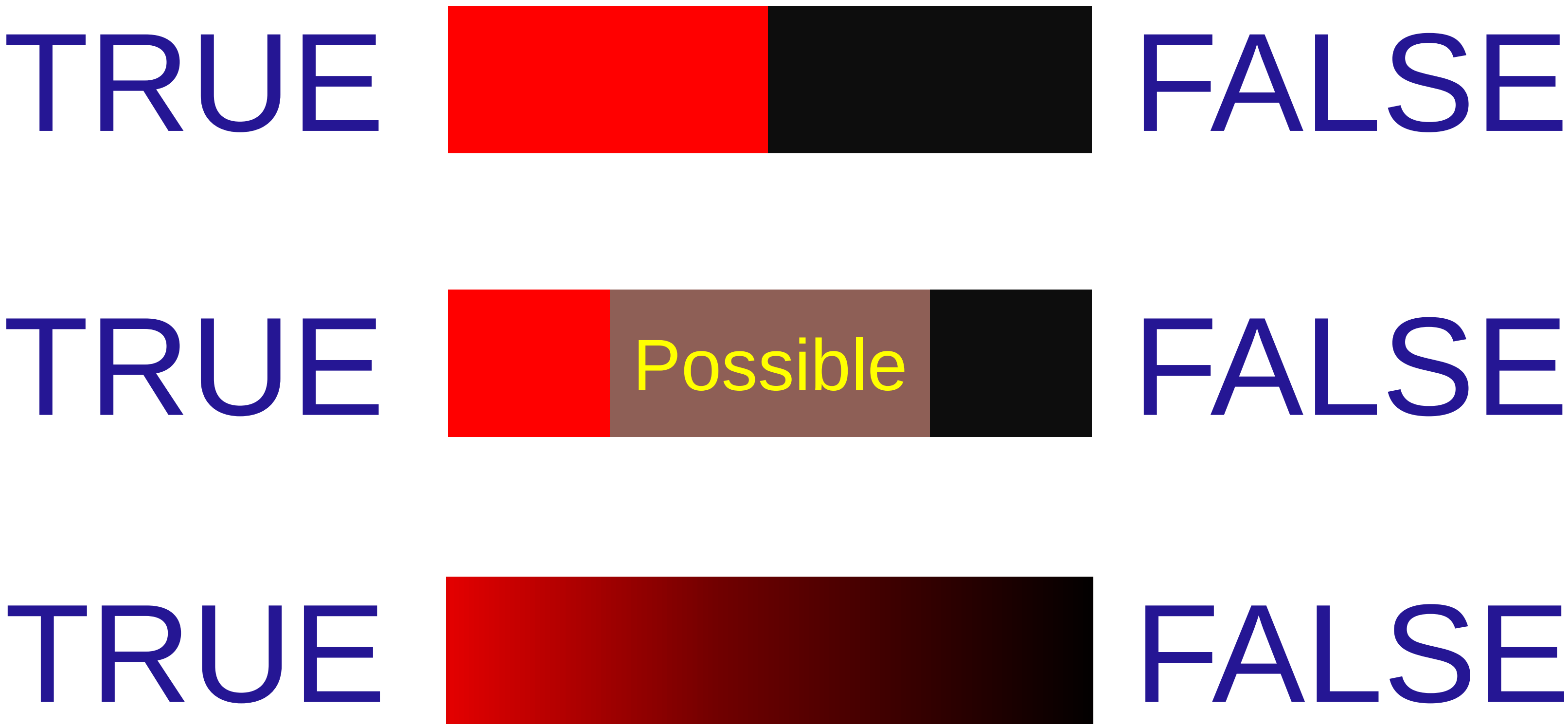
A PUBLICATION OF THE IEEE COMPUTATIONAL INTELLIGENCE SOCIETY

www.ieee-cis.org/pubs/tfs

IEEE
Computational
Intelligence
Society

MIMICKING NATURE FOR PROBLEM SOLVING

模糊逻辑发展历史



模糊控制的特点

1. 设计不依赖于被控对象的精确数学模型
2. 易于被操作人员接受
3. 便于计算机软件实现
4. 鲁棒性和适应性好

陈述语句中的模糊描述

- 以下语句中哪些词汇是对事物性质的模糊描述呢？

1、如果电压**较低**，则灯泡发出的光**较暗**。

2、如果台风中心气压**很低**，则说明台风**非常强**。

3、某地夏季如果气温越**高**，则用电量越**大**。

4、如果花**蔫得厉害**，则需要给它**大量**浇水。

5、100MΩ的电阻具有**极高**的阻值。

模糊控制导论纲要

- 模糊控制基本概念
- **模糊集合及其运算**
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

基本概念

- 论域
- 经典集合
- 隶属度和隶属度函数
- 从经典集合到模糊集合

论域和集合

- 论域（Universe）指的是所谈论事物的特定限定范围，它可以理解为全集。

- 论域中具有某些特征的事物聚在一起就构成了一个定义在该论域上的集合（Set）。目前我们所学过的集合称作经典集合。

经典集合的运算

- 子集和包含关系
- 集合的相等
- 并集
- 交集
- 差集和补集
- 空集和全集

经典集合的性质

分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

De Morgan律

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$
$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$$

互补律

$$A^C\cup A=U$$
$$A^C\cap A=\varnothing$$

隶属度和隶属度函数

- 隶属度（Membership）：设论域是U，对于$x \in U$以及定义在U上的集合A，如果$x \in A$，则定义x对A的隶属度是1；如果$x \notin A$，则定义x对A的隶属度是0。
- 论域里的元素x和定义其上集合只有两种关系，从x到集合{0,1}形成的映射关系就是隶属度函数（Membership Function），它的定义域是论域U，值域是{0,1}。描述一个集合也可以使用隶属度函数来描述。

隶属度函数

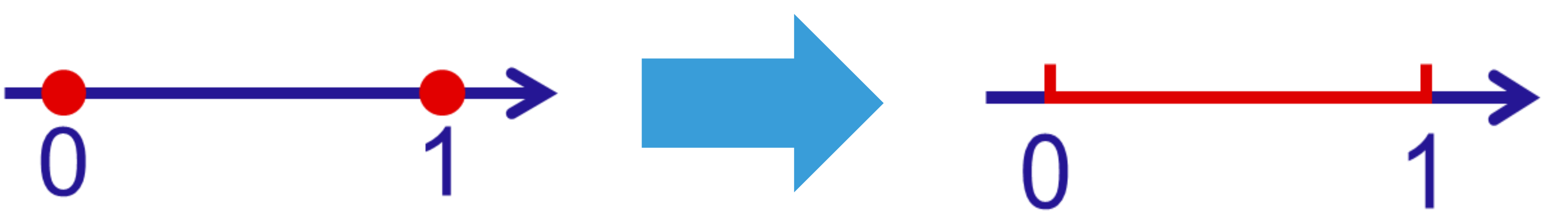
例1：若论域U={1,2,3,4,5}，A={1,3,4}，B={1,2,3,5}, 请说出A和B下各个元素的隶属度。

$$A(1)=1, A(2)=0, A(3)=1, A(4)=1, A(5)=0$$

$$B(1)=1, B(2)=1, B(3)=1, B(4)=0, B(5)=1$$

从经典集合到模糊集合

- 经典集合隶属度函数值域是{0,1}，如果将其改为[0,1]，就构成了模糊集合（Fuzzy Set）。这一改变使得原先表示元素和集合关系的“$\in$”和“$\notin$”不再适用。因此，模糊集合更适合描述日常认知中带有“亦此亦彼”性质的事物。



模糊集合举例

例2：设论域U={1，2，3，4，5}，用模糊集A表示出模糊概念“大数”。

$$A(1)=0, A(2)=0.25, A(3)=0.5, A(4)=0.75, A(5)=1$$

$$A=\frac{0}{1}+\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}=\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}$$

- Zadeh法：使用隶属度表示集合，写成分数求和的形式，**分母是元素，分子是对应隶属度，不可有任何化简和计算**，隶属度为0的项可以省略。

模糊集合举例

例2：设论域U={1, 2, 3, 4, 5}，用模糊集A表示出模糊概念“大数”。

$$A(1)=0, A(2)=0.25, A(3)=0.5, A(4)=0.75, A(5)=1$$

$$A=\frac{0}{1}+\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}=\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}$$

- 使用Zadeh法表示的集合如果省略了隶属度为0的项，必须要返看论域都包含哪些元素

模糊集合的其他表示方法

- 模糊集合的表示方法除了Zadeh法，还有序对法、和向量法等几种方式。
- 序对法将元素和对应隶属度在括号中一一成对列出即可，适用于论域*U*是有限可数集。向量法将元素默认从小到大排列，然后只列出隶属度，类似于一个多维向量，适合于*U*是有限有序集。

模糊集合举例

例3：设论域U={1，2，3，4，5}，用Zadeh法、序对法和向量法表示模糊集A={大数}。

$$A(1)=0, A(2)=0.25, A(3)=0.5, A(4)=0.75, A(5)=1$$

Zadeh法 $$A=\frac{0}{1}+\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}=\frac{0.25}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.75}{4}+\frac{1}{5}$$

序对法 $$A=\{(1,0),(2,0.25),(3,0.5),(4,0.75),(5,1)\}$$

向量法 $$\boldsymbol{A}=(0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1)$$

模糊集合举例

例4：论域U={0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ,90, 100}，用Zadeh法表示模糊集A={小的数}。

$A(0)=1 \quad A(10)=0.9 \quad A(20)=0.8 \quad A(30)=0.7$

$A(40)=0.6 \quad A(50)=0.5 \quad A(60)=0.4 \quad A(70)=0.3$

$A(80)=0.2 \quad A(90)=0.1 \quad A(100)=0$

$$A=\frac{1}{0}+\frac{0.9}{10}+\frac{0.8}{20}+\frac{0.7}{30}+\frac{0.6}{40}$$

$$+\frac{0.5}{50}+\frac{0.4}{60}+\frac{0.3}{70}+\frac{0.2}{80}+\frac{0.1}{90}$$

模糊集合举例

例5：论域U={0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ,90, 100}，用Zadeh法表示模糊集A={考试中的高分}。

$$A(0)=0 \quad A(10)=0.1 \quad A(20)=0.2 \quad A(30)=0.3$$

$$A(40)=0.4 \quad A(50)=0.5 \quad A(60)=0.6 \quad A(70)=0.7$$

$$A(80)=0.8 \quad A(90)=0.9 \quad A(100)=1$$

模糊集合举例

例5：论域U={0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ,90, 100}，用Zadeh法表示模糊集A={考试中的高分}。

分析：百分制下，60分为及格，因此可以认为60分以下的分数绝不是高分。因此隶属度修改成为如下的形式更加符合普遍认知。

$$A(0)=0 \quad A(10)=0 \quad A(20)=0 \quad A(30)=0$$

$$A(40)=0 \quad A(50)=0 \quad A(60)=0.01 \quad A(70)=0.1$$

$$A(80)=0.5 \quad A(90)=0.9 \quad A(100)=1$$

模糊集合举例

例5：论域U={0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ,90, 100}，用Zadeh法表示模糊集A={考试中的高分}。

$A(0)=0$　$A(10)=0$　$A(20)=0$　$A(30)=0$

$A(40)=0$　$A(50)=0$　$A(60)=0.01$　$A(70)=0.1$

$A(80)=0.5$　$A(90)=0.9$　$A(100)=1$

$$A=\frac{0.01}{60}+\frac{0.1}{70}+\frac{0.5}{80}+\frac{0.9}{90}+\frac{1}{100}$$

模糊集合表示举例

例6：论域$U=\{x|\sin(2\pi x)=0, -1\leq x\leq 2\}$，模糊集合$A$的隶属度函数$A(x)=-0.4x^2+0.4x+0.8$，请使用扎德法表示$A$。

分析：U包含的x是有限的，根据题意$U=\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$，所以形成的隶属度函数是离散的。

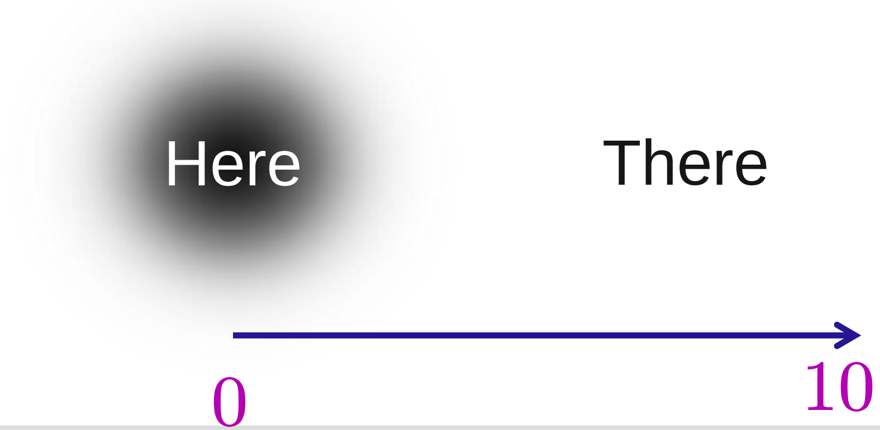
$$A=\frac{0}{-1}+\frac{0.5}{-0.5}+\frac{0.8}{0}+\frac{0.9}{0.5}+\frac{0.8}{1}+\frac{0.5}{1.5}+\frac{0}{2}$$

$$=\frac{0.5}{-0.5}+\frac{0.8}{0}+\frac{0.9}{0.5}+\frac{0.8}{1}+\frac{0.5}{1.5}$$

模糊集合举例

例7：论域U=[0,10]，站在坐标原点观察。用模糊集H和T分别表示“这里”和“那里”。

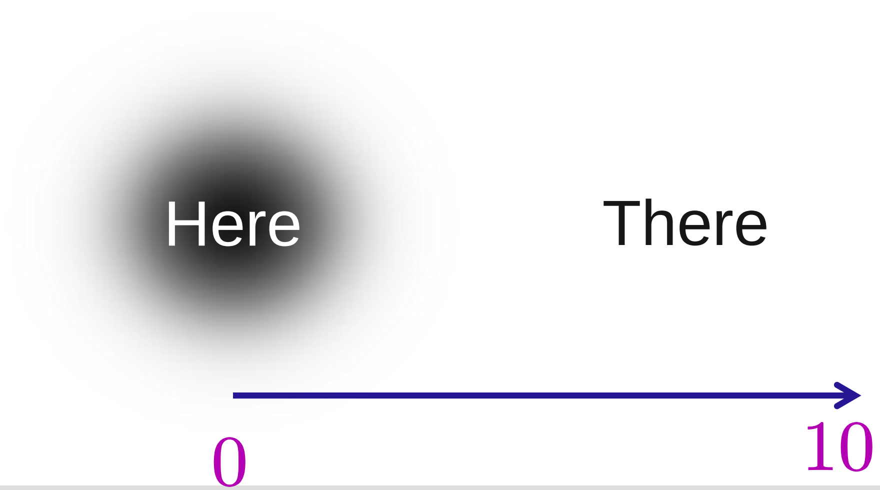
分析：U是连续类型的集合，此时就需要建立一个连续的函数来表示。以“这里”为例，坐标(0)隶属度设为1，坐标(10)隶属度设为0，中间可以线性渐变。



模糊集合举例

例7：论域U=[0,10]，站在坐标原点观察。用模糊集H和T分别表示“这里”和“那里”。

$$H(x) = -0.1x + 1 \qquad T(x) = 0.1x$$



模糊集合举例

例8：论域U=**R**，用模糊集A表示“接近4的数”，使用$A(x)$表示隶属度函数。

分析：坐标(4)这一点最接近于4，因此隶属度是1。其余点的隶属度视具体情况或者个人偏好去确定，不同种类的隶属度函数需要用不同的编号加以区分。

模糊集合举例

例8：论域U=**R**，用模糊集A表示“接近4的数”，使用$A(x)$表示隶属度函数。

分析：例如，隶属度函数可以是如下三角形的形式，设为$A_1(x)$。

$$A_1(x)=\begin{cases}0 & x<3\\ x+3 & 3\le x\le 4\\ -x+3 & 4\le x\le 5\\ 0 & x>5\end{cases}$$

模糊集合举例

例8：论域U=**R**，用模糊集A表示“接近4的数”，使用$A(x)$表示隶属度函数。

分析：也可以使用类似于正态分布的高斯函数构造隶属度函数，设为$A_2(x)$ 。

$$A_2(x)=\begin{cases}\exp\left[-(x-4)^2\right] & |x-4|<2 \\ 0 & |x-4|\geq 2\end{cases}$$

模糊集合举例

例8：论域U=$\mathbf{R}$，用模糊集A表示“接近4的数”，使用$A(x)$表示隶属度函数。

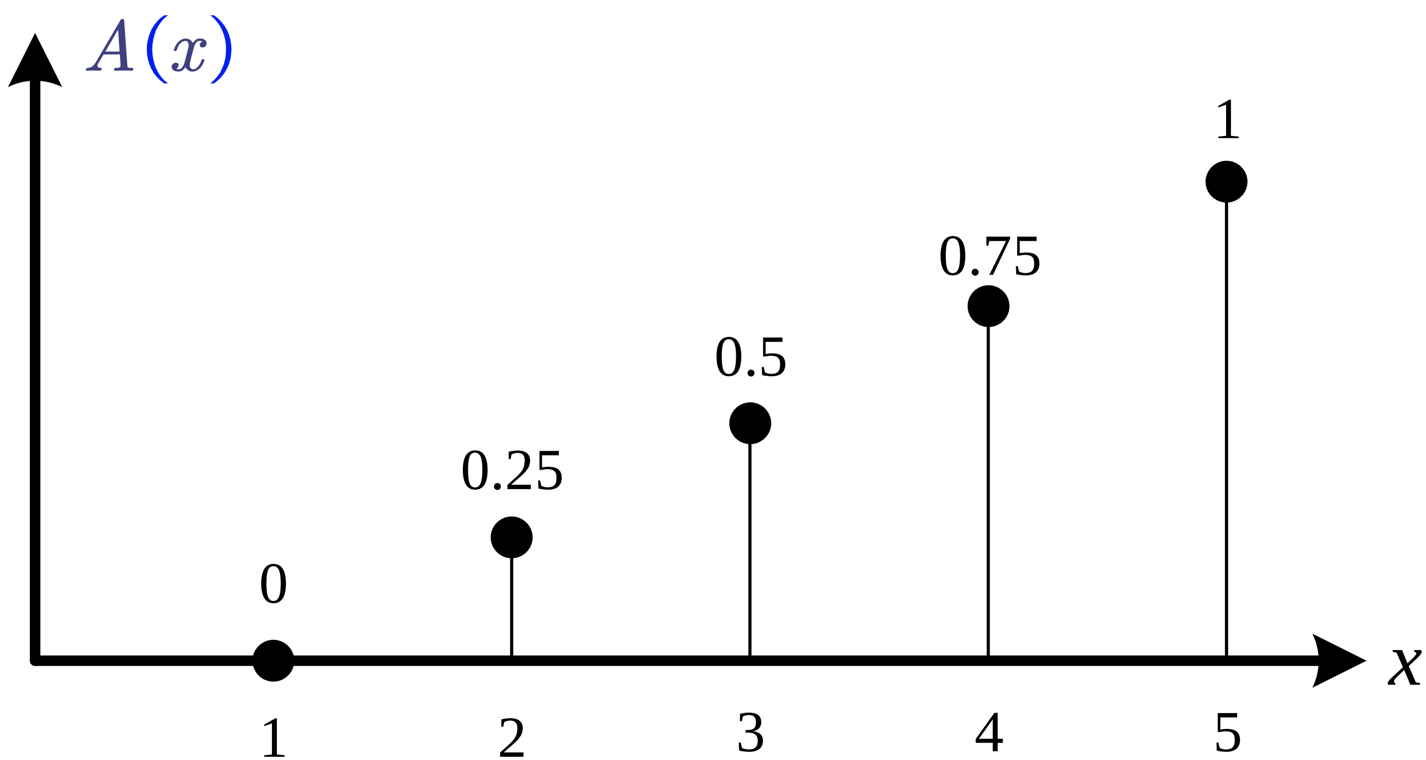
分析：除此之外，还可以使用指数函数构造隶属度函数，设为$A_3(x)$（$a>1$）。

$$A_3(x)=\begin{cases} a^{x-4} & x<4 \\ a^{4-x} & x\ge 4 \end{cases}$$

- 模糊集合还可以使用以上函数法来表示，尤其是连续型隶属度函数更适合使用函数法

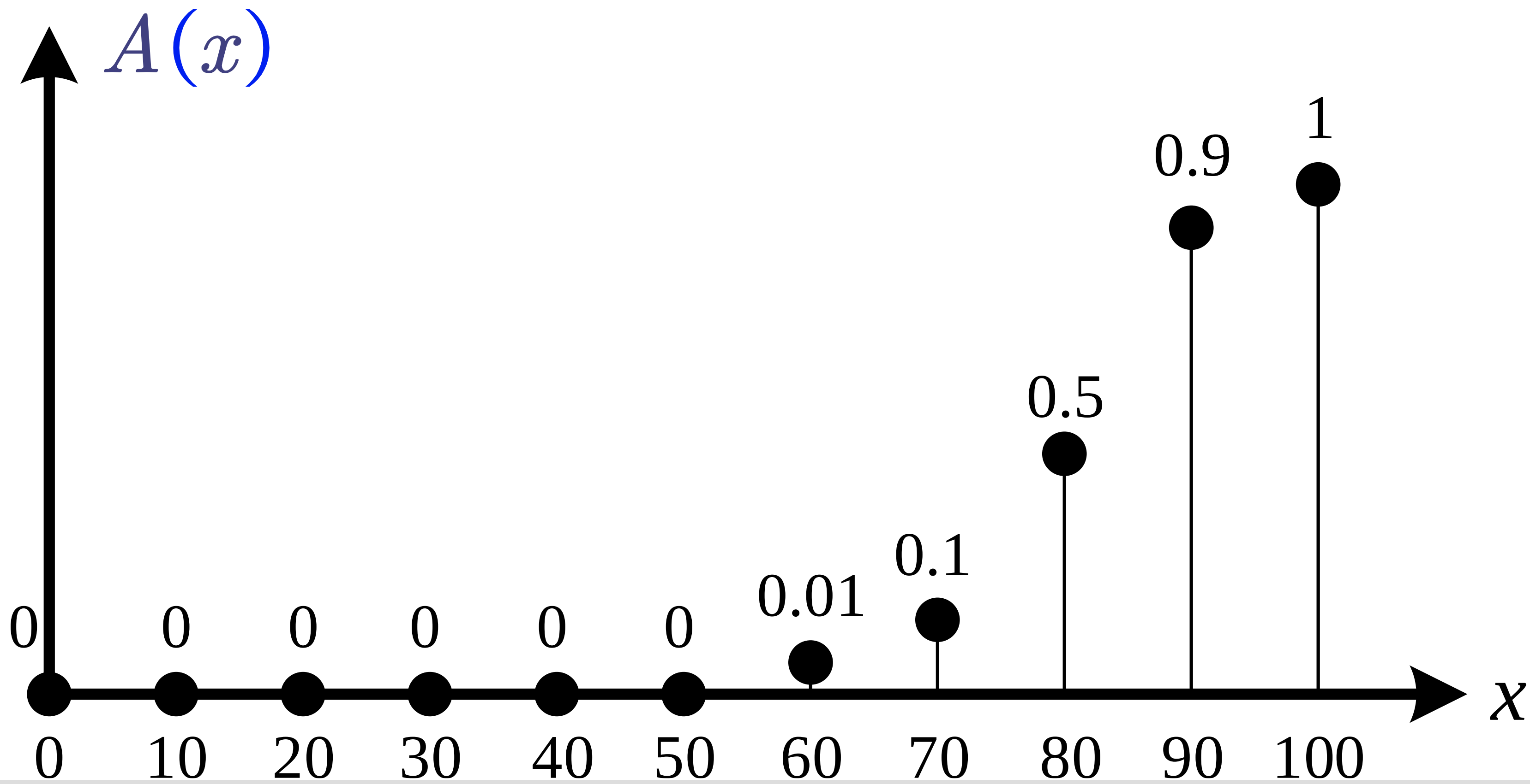
隶属度的图象表示

- 隶属度还可以用图象表示，即隶属度函数图象。例如“大数”的例子中，可以如下画图。



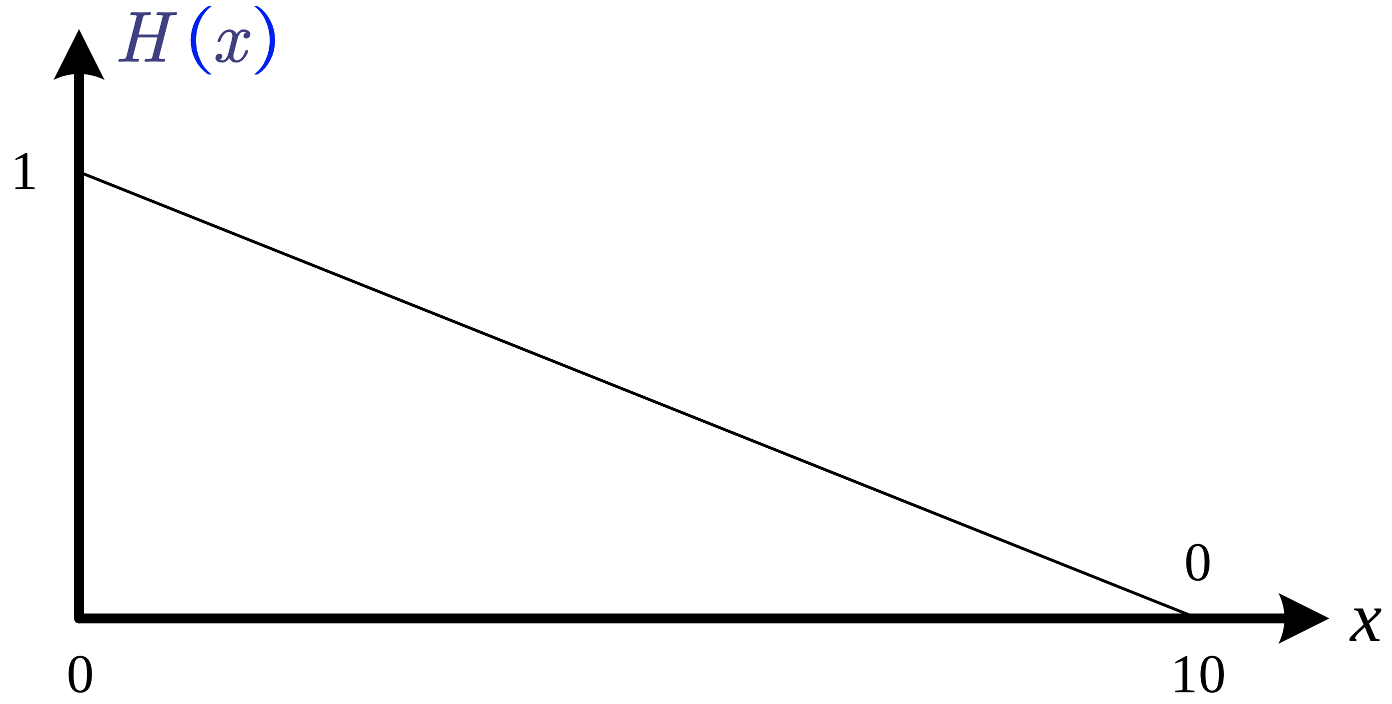
隶属度的图象表示

- “考试中的高分”的例子中，可以如下画图。



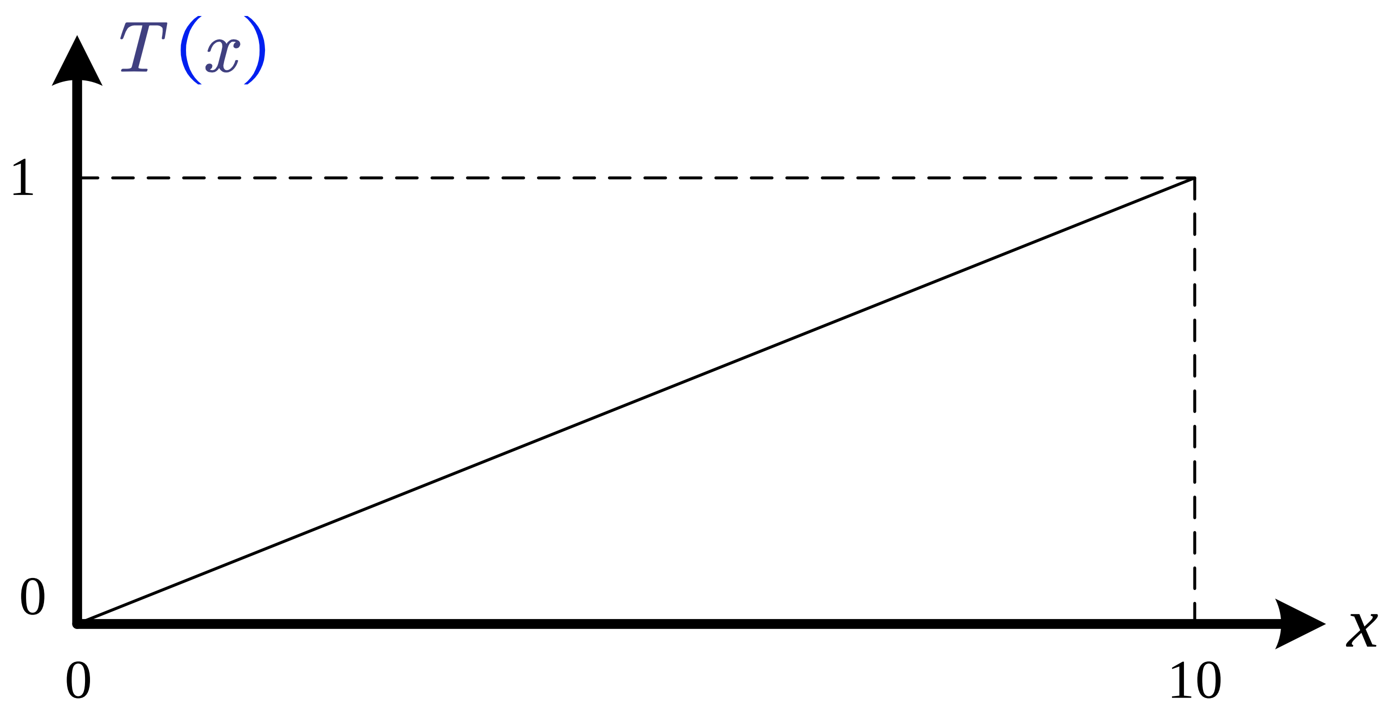
隶属度的图象表示

- “这里”“那里”的例子中，$H(x)$表示如下。



隶属度的图象表示

- “这里” “那里”的例子中，$T(x)$表示如下。



常用连续型隶属度函数

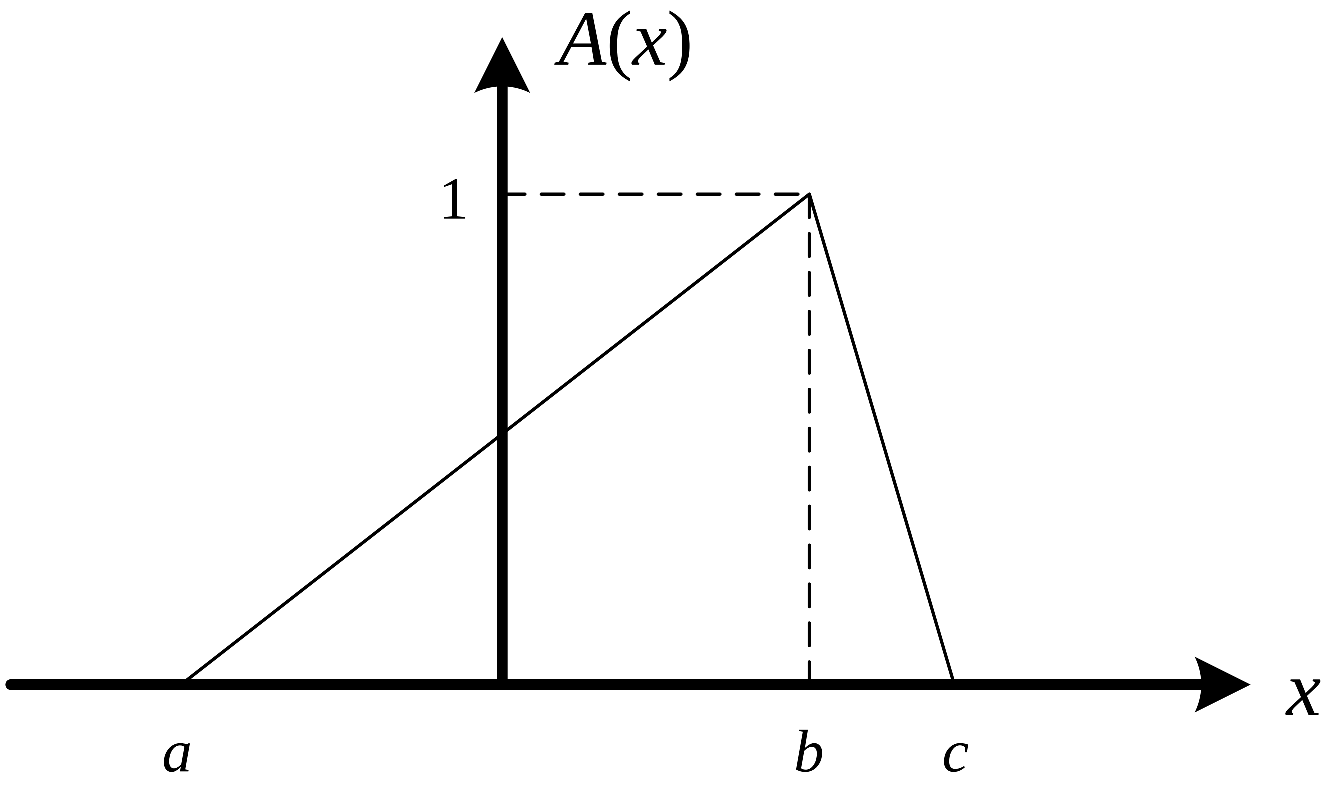
- 三角形
- 钟形
- 高斯型
- 梯形
- Sigmoid型

三角形函数

- 三角形隶属度函数是最简单的类型，其中涉及a、b和c三个依次增大的参数。

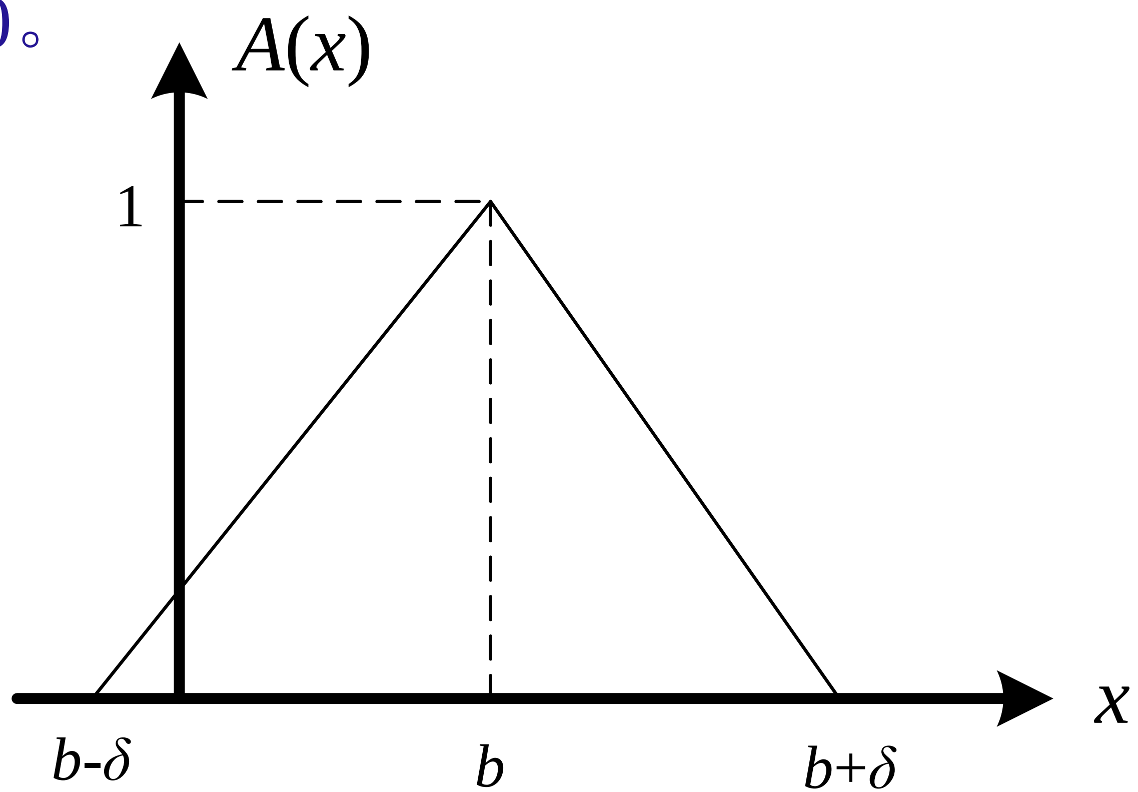
$$A(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\le x\le c \\ 0 & x\ge c \end{cases} \qquad a\le b\le c$$

三角形函数



三角形函数

- 如果使用对称三角形函数，则只需b和δ两个参数，其中$\delta>0$。

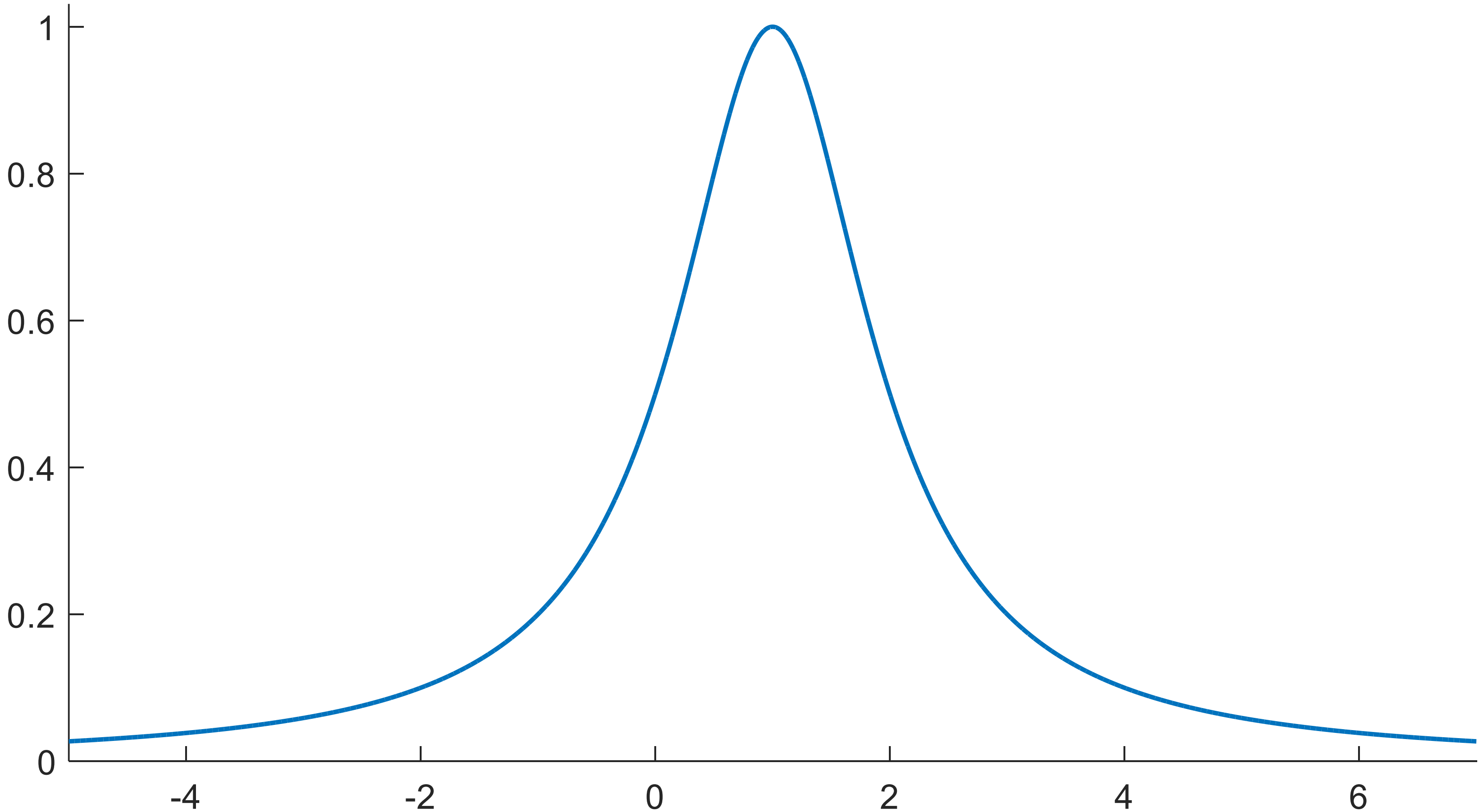


钟形函数

- 钟形函数是反比例函数的拓展，参数c决定了函数中心的位置，a和b决定了函数的形状。

$$A(x)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

钟形函数

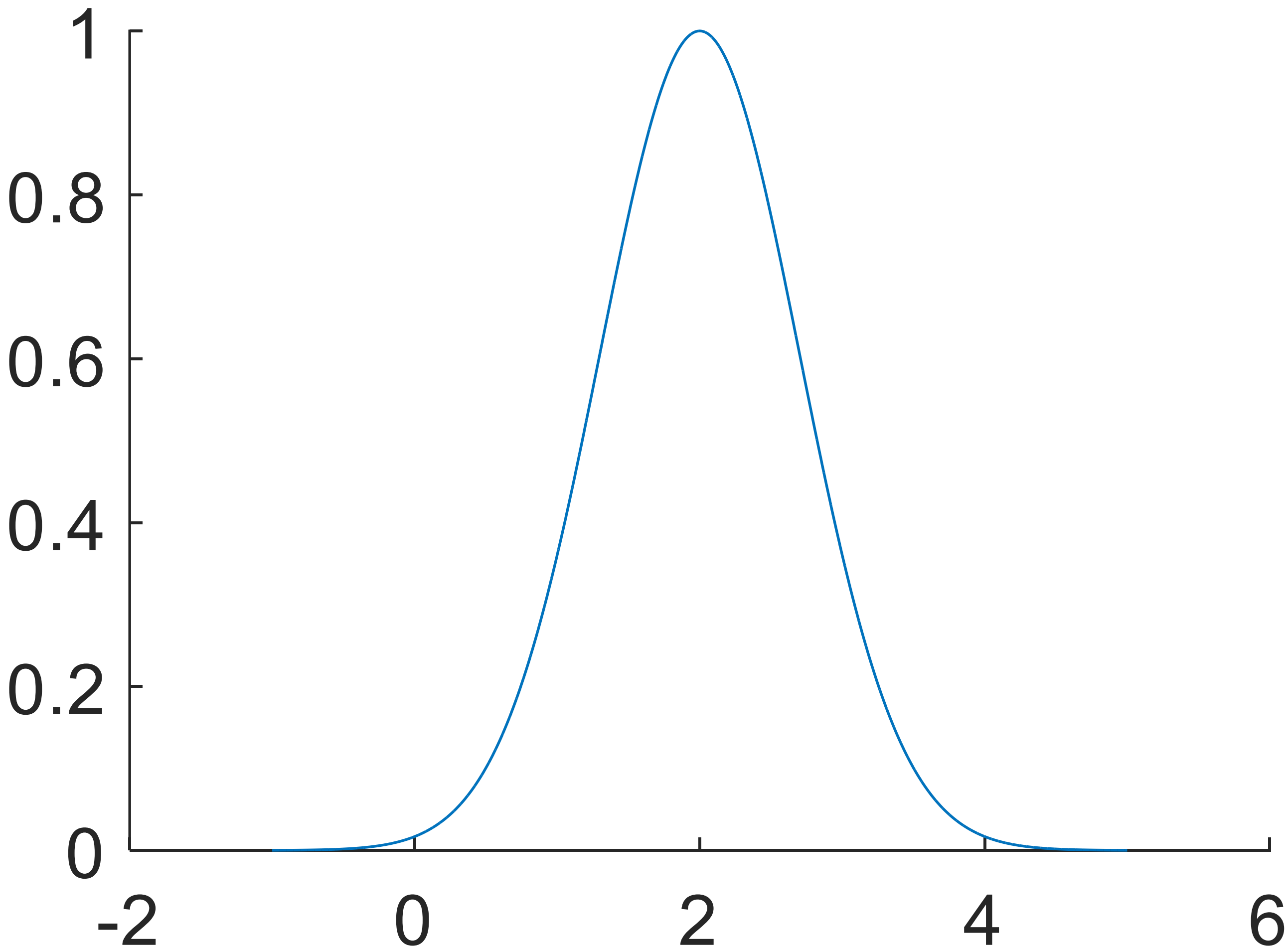


高斯型函数

- 高斯型函数是基于正态分布的原理而设计的，其中c（期望）决定曲线中心，σ（标准差）决定了曲线的宽度。

$$A(x)=\exp\left[-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}\right]$$

高斯型函数

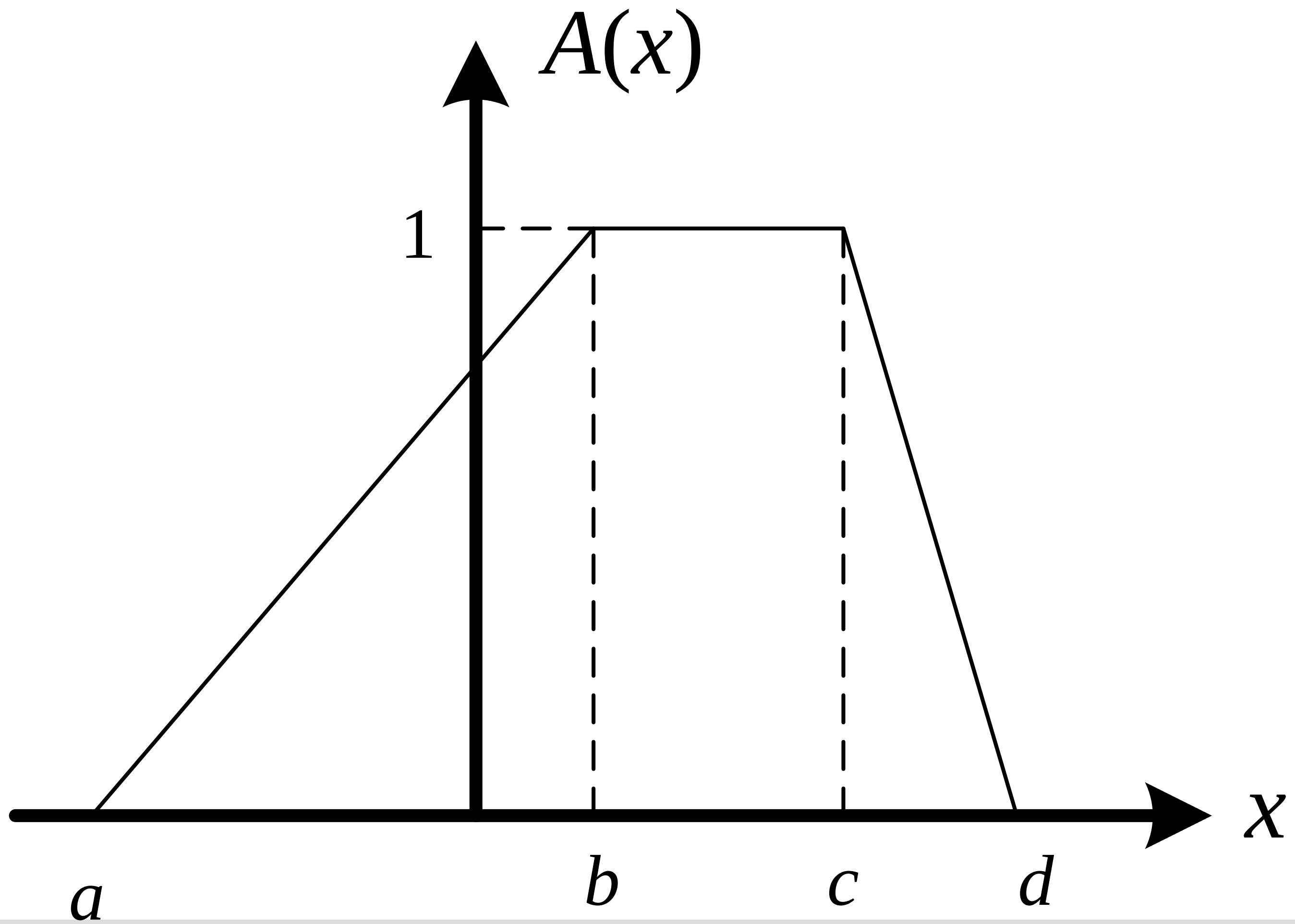


梯形函数

- 梯形函数是对三角形函数的补充，即中部有一段隶属度为1的区域。

$$A(x)=\begin{cases} 0 & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x<b \\ 1 & b\le x\le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c<x\le d \\ 0 & x>d \end{cases} \qquad a\le b<c\le d$$

梯形函数

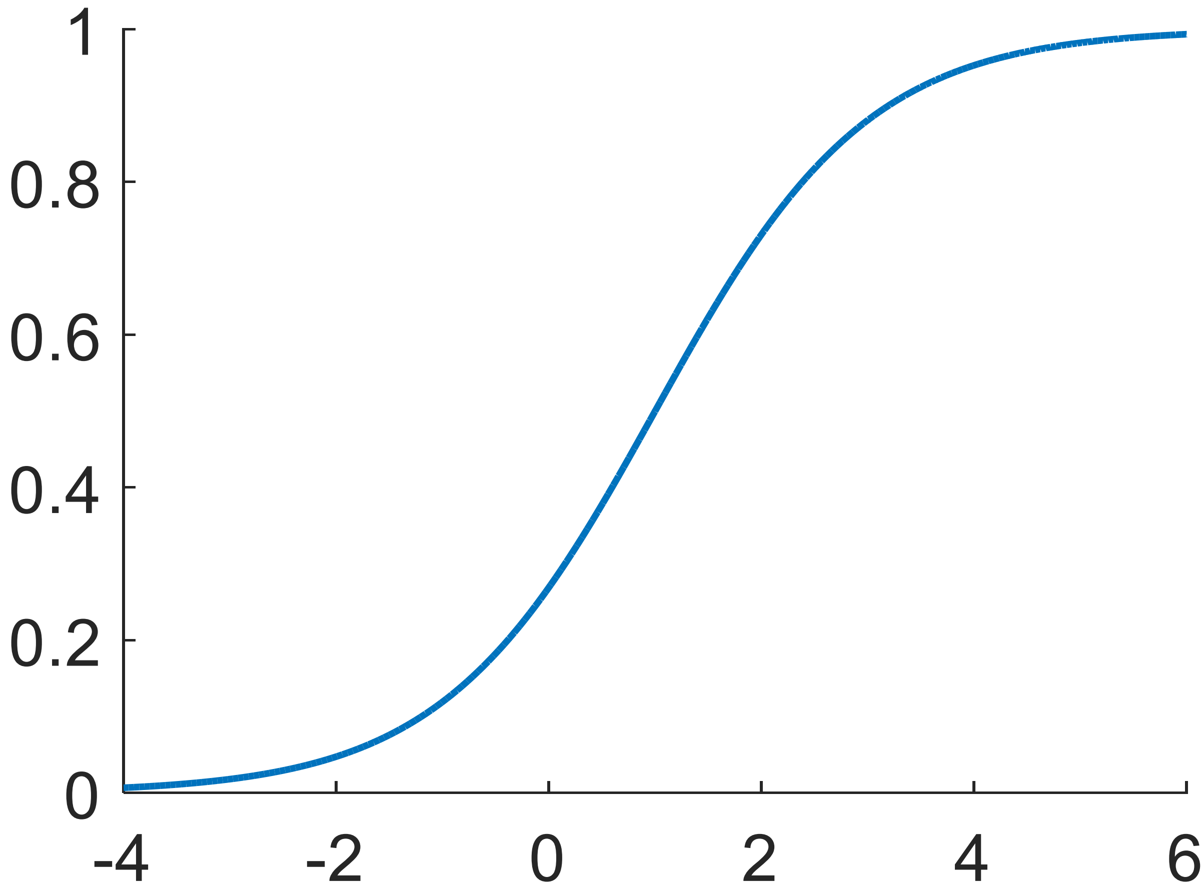


Sigmoid型函数

- Sigmoid型函数是一种特殊的函数，类似于“S”的形态。其中a调节函数形状，c决定函数中心位置。

$$A(x)=\frac{1}{1+\exp[-a(x-c)]}$$

Sigmoid型函数



MATLAB绘制常用隶属度图象

- MATLAB里可以直接在输入框中键入命令，但是一般来说要先新建脚本文件，这样利于程序的永久保存。因此，建议任何命令都要在.m脚本文件里书写。

- 脚本文件编写结束以后需要保存后才能运行。保存时要事先确定好路径，且文件名不能出现中文，且不能以数字开头。如果有子函数，则子函数文件名要和子函数名称本身一样。

MATLAB绘制常用隶属度图象

- MATLAB提供了常用函数的工具包，只需要引用对应函数即可。
  - 三角形：　A=trimf(x,[a,b,c]);
  - 钟形：　A=gbellmf(x,[a,b,c]);
  - 高斯型：　A=gaussmf(x,[sigma,c]);
  - 梯形：　A=tramf(x,[a,b,c,d]);
  - Sigmoid型：A=sigmf(x,[a,c]);

MATLAB绘制常用隶属度图象

- 以钟形函数为例。新建脚本文件后，首先要对三个参数*a*、*b*和*c*数值加以定义。MATLAB里不需要事先定义类型，默认是64位double（IEEE754标准的64位浮点双精度）类型的，因此直接写出对应数值即可。

```
a=1;b=2;c=4;
```

MATLAB绘制常用隶属度图象

- 然后需要定义绘图变量的范围和步长精度，这是因为函数图象要用离散的点去无限逼近。例如函数计算范围是[1,7]，每隔0.001计算一个数值，则书写格式如下。这时，变量x形成了一个包含6001维的向量。

```
a=1;b=2;c=4;
x=1:0.001:7;
```

MATLAB绘制常用隶属度图象

- 引用钟形函数gbellmf，注意引用格式。这样的算出来的结果变量A也是一个和x维度相同的向量。

```
a=1;b=2;c=4;
x=1:0.001:7;
A=gbellmf(x,[a,b,c]);
```

MATLAB绘制常用隶属度图象

- 为了画出函数图象，首先要建立一个图象窗格，因此使用figure命令；然后需要描绘出一个个点并用直线连起来，这一过程使用plot命令。可见，步长精度越小，描绘出的图象越接近真实图象。

```
a=1;b=2;c=4;
x=1:0.001:7;
A=gbellmf(x,[a,b,c]);
figure;plot(x,A);
```

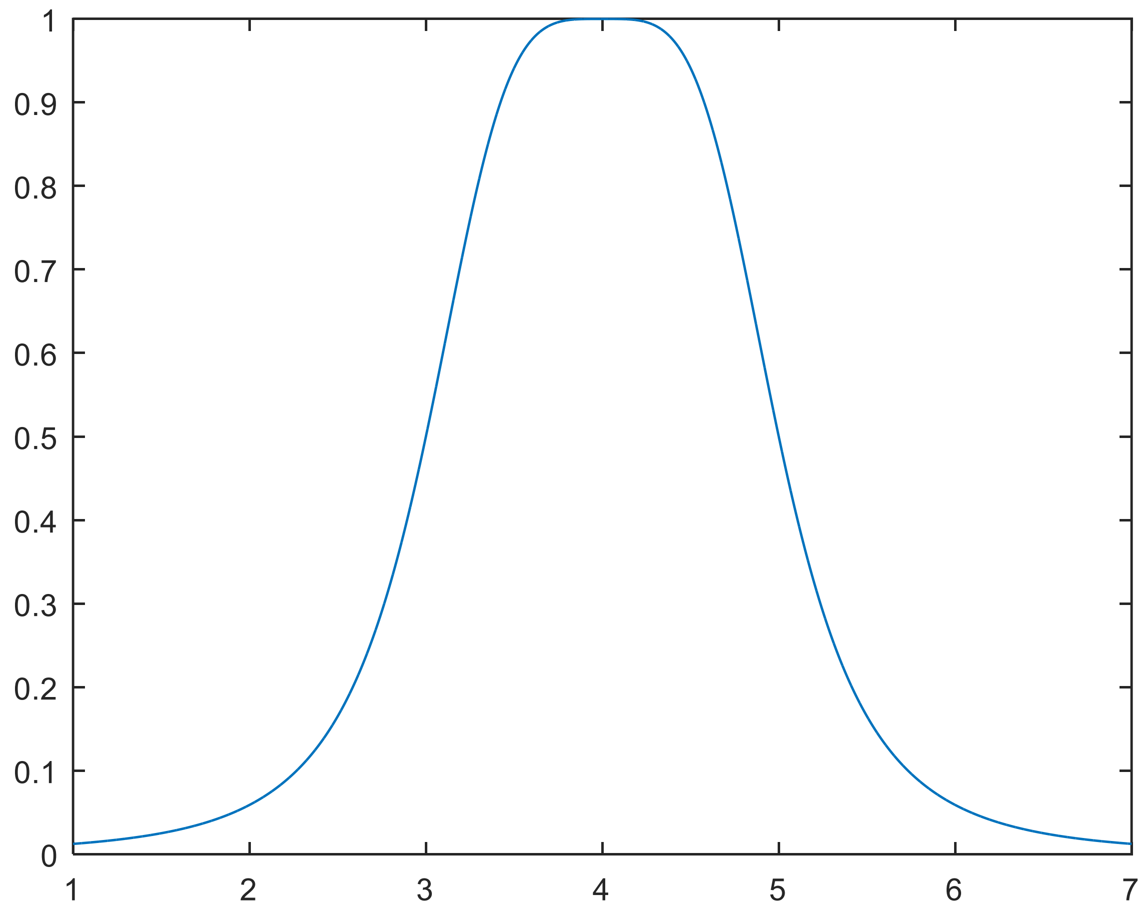
MATLAB绘制常用隶属度图象

- 最后给程序加上“头”和“尾”，就可以保存并运行程序了。除了给出函数图象以外，还有运行的时间长短。

```
clc;clear all;close all;
tic;
a=1;b=2;c=4;
x=1:0.001:7;
A=gbellmf(x,[a,b,c]);
figure;plot(x,A);
toc;
```

MATLAB绘制常用隶属度图象

- 如果想对图象的诸属性进行修改，可以使用选项“Figure Property”来编辑。



MATLAB绘制连续隶属度图象

例9：设论域U=[1,5]，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

MATLAB绘制连续隶属度图象

例9：设论域U=[1,5]，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

```
clc;clear all;close all;
tic;
x=1:0.001:5;
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;
figure;plot(x,A);
toc;
```

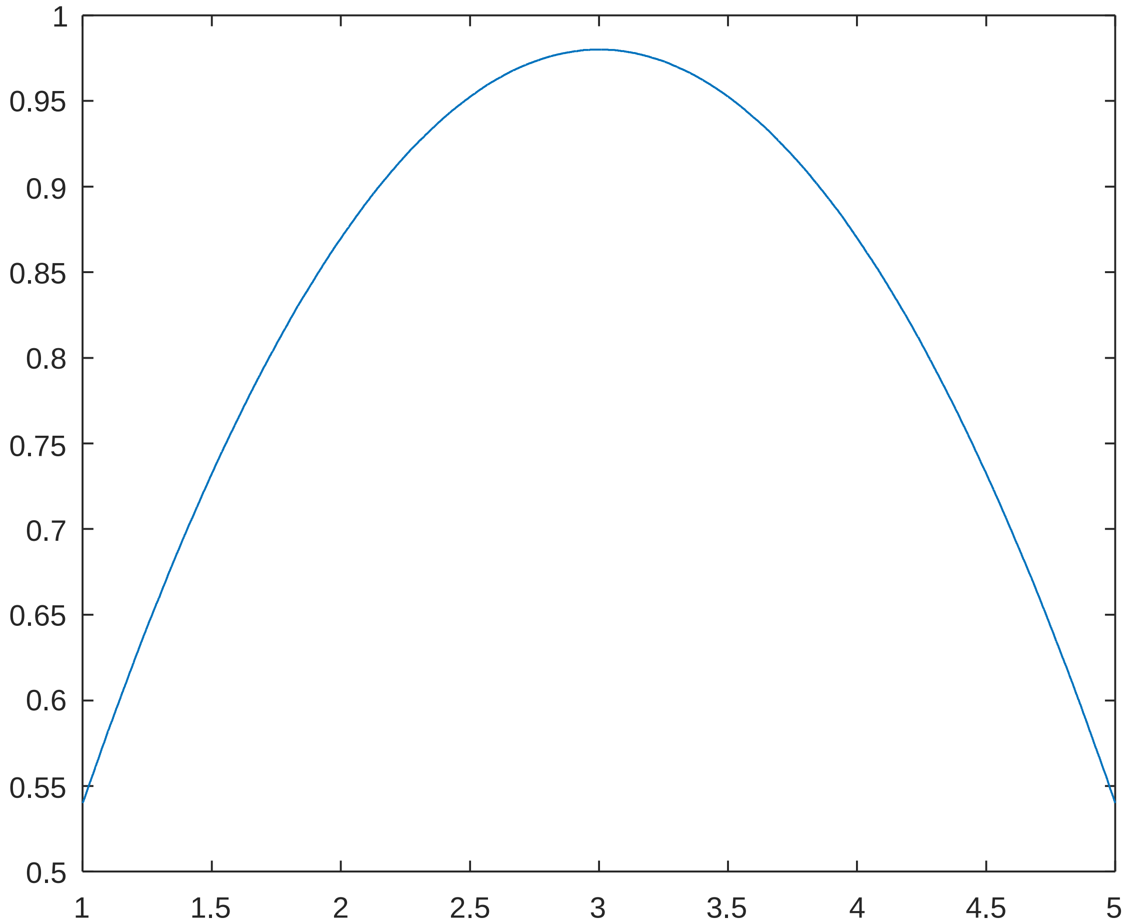
MATLAB绘制连续隶属度图象

例9：设论域U=[1,5]，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

```
clc;clear all;close all;
tic;
x=1:0.001:5;
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;
figure;plot(x,A);
toc;
```

- 注意这是对矩阵（向量）x逐个元素的计算，因此要在相应的地方加上点号，不能直接写成x^2。

MATLAB绘制连续隶属度图象



MATLAB绘制离散隶属度图象

例10：设论域U={1,2,3,4,5}，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

MATLAB绘制离散隶属度图象

例10：设论域U={1,2,3,4,5}，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

分析：要画出离散隶属度图象，首先要计算论域元素和对应隶属度的关系。这里先建立向量x，表示变量x的取值范围。注意矩阵的建立一定使用中括号。

```
x=[1,2,3,4,5];
```

MATLAB绘制离散隶属度图象

例10：设论域U={1,2,3,4,5}，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

分析：然后依据隶属度函数公式计算隶属度值。

```
x=[1,2,3,4,5];
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;
```

MATLAB绘制离散隶属度图象

例10：设论域U={1,2,3,4,5}，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

分析：离散序列不能用plot函数画图表示，否则出现的是折线。此时要用stem函数。

```
x=[1,2,3,4,5];
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;
figure;stem(x,A);
```

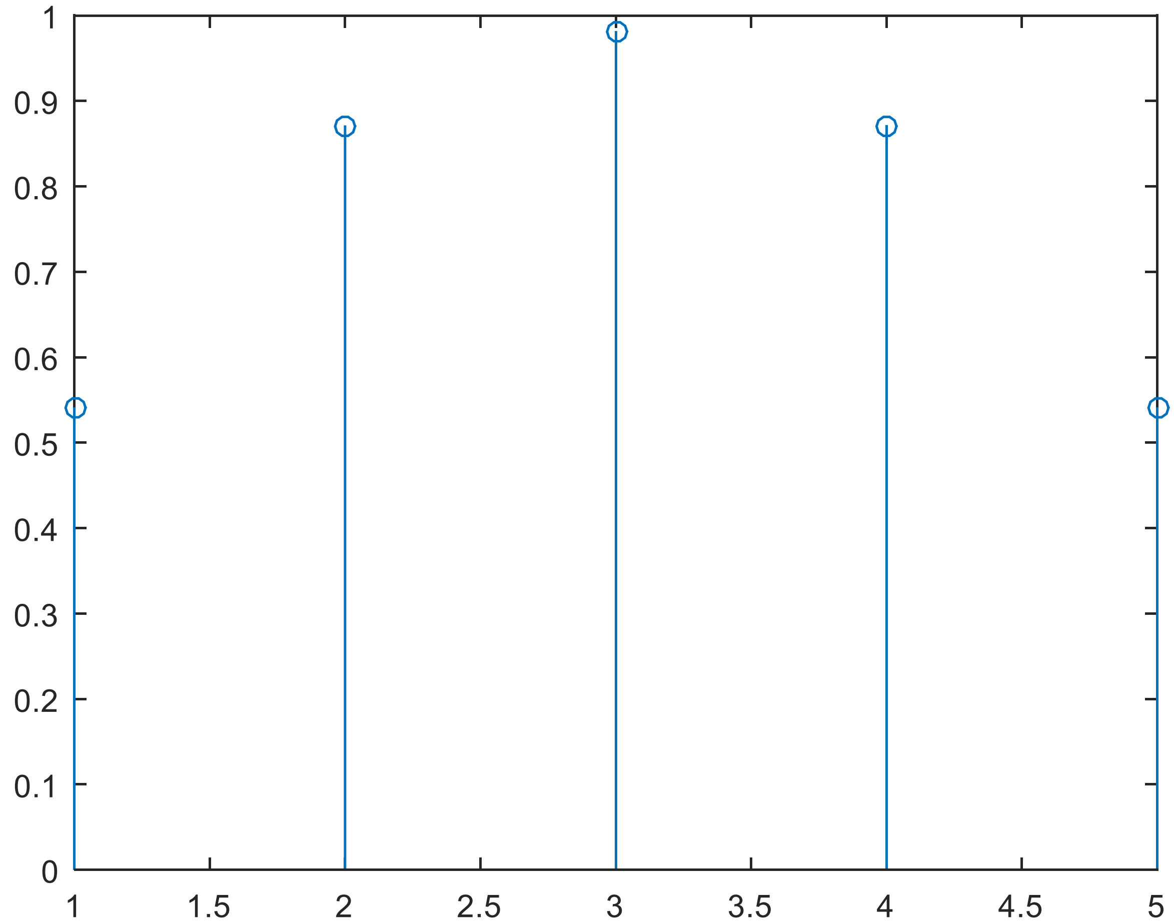
MATLAB绘制离散隶属度图象

例10：设论域U={1,2,3,4,5}，模糊集合A的隶属度函数$A(x)=-0.11x^2+0.66x-0.01$。请使用MATLAB画出对应隶属度图象。

分析：最终程序如下：

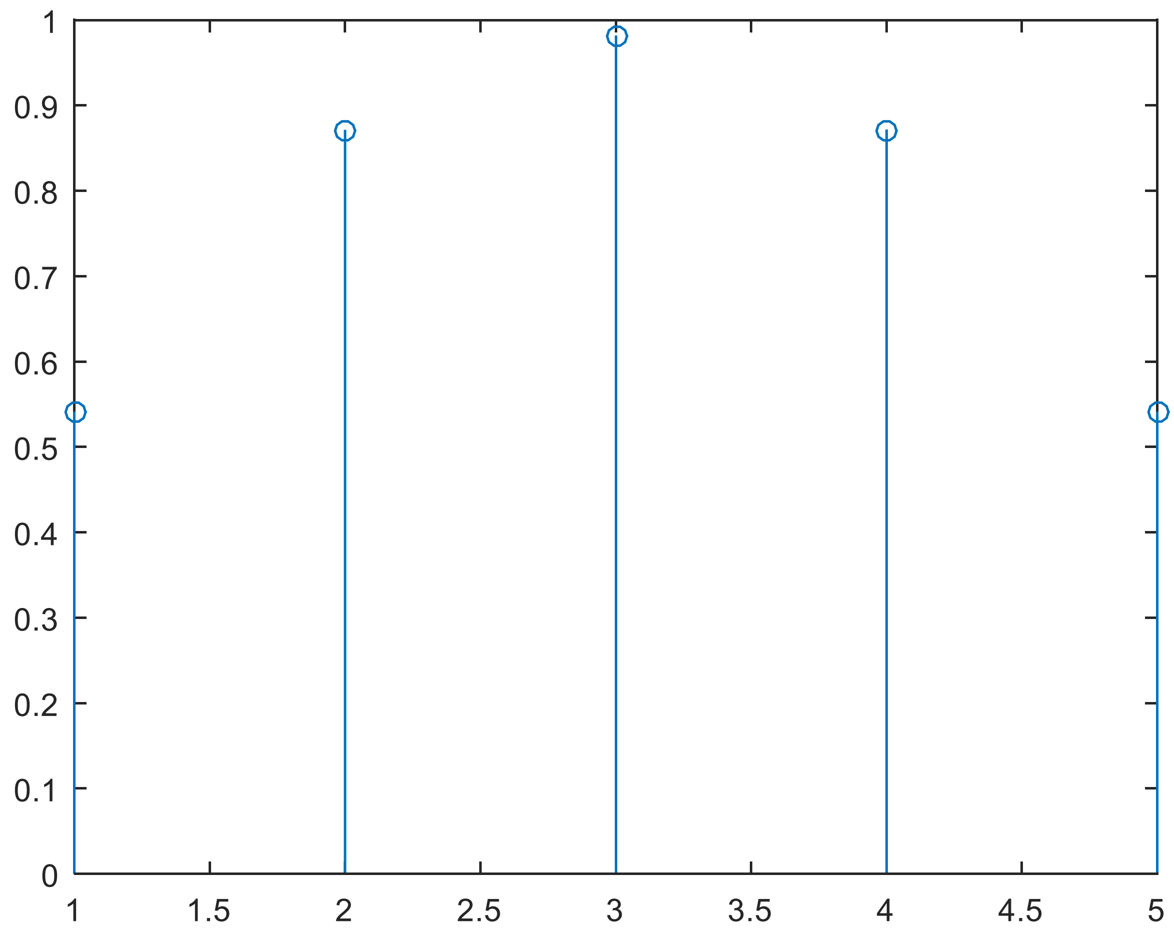
```
clc;clear all;close all;
tic;
x=[1,2,3,4,5];
A=-0.11*x.^2+0.66*x-0.01;
figure;stem(x,A);
toc;
```

MATLAB绘制离散隶属度图象



MATLAB绘制离散隶属度图象

思考：如何在程序里直接修改坐标轴的范围？



THANK YOU !