THUPC2022 背包

ltst

THU IIIS

2023 年 2 月 25 日

简要题意

有 n 种物品，第 i 种物品单个体积为 v_i、价值为 c_i。
q 次询问，每次给出背包的容积 V，你需要选择若干个物品，每种物品可以选择任意多个（也可以不选），在选出物品的体积的和恰好为 V 的前提下最大化选出物品的价值的和。
$1 \le n \le 50$，$1 \le v_i \le 10^5$，$1 \le c_i \le 10^6$，$1 \le q \le 10^5$，$10^{11} \le V \le 10^{12}$。

解法

V 很大，一个很直观的想法是：大部分选 $\frac{c_i}{v_i}$ 最大的物品，边角用其他物品填满。我们先假设 V 非常非常非常大并考察一个解法，再证明题目中 V 的下界保证了该算法的正确性。

解法

V 很大，一个很直观的想法是：大部分选 $\frac{c_i}{v_i}$ 最大的物品，边角用其他物品填满。我们先假设 V 非常非常非常大并考察一个解法，再证明题目中 V 的下界保证了该算法的正确性。
设 (c_0, v_0) 为 $\frac{c_i}{v_i}$ 最大的物品的参数。根据 $\bmod v_0$ 的不同，边角有不同方案，而 V 足够大时，$\bmod v_0$ 相同的询问的边角选择方案总会相同。因此计算出每种边角的最优方案即可 $O(1)$ 得到答案。

解法

为此，设 f_i 为最优物品以外的物品的完全背包数组，并设 $g_i = \max_{k \geq 0} f_{i+kv_0} - kc_0$。那么 $\bmod b_0 = i$ 的边角最优方案的收益就是 g_i。注意每当 k 增大 1 时会占用一个最优物品所以需要减掉一个 c_0。

解法

为此，设 f_i 为最优物品以外的物品的完全背包数组，并设 $g_i = \max_{k\geq 0} f_{i+kv_0} - kc_0$。那么 $\bmod b_0 = i$ 的边角最优方案的收益就是 g_i。注意每当 k 增大 1 时会占用一个最优物品所以需要减掉一个 c_0。

沿用完全背包的 dp 思路计算 g_i。加入一个 (c_i, v_i)，转移为

$$g_{(j+v_i) \bmod v_0} \leftarrow \max\left(g_{(j+v_i) \bmod v_0}, g_j + c_i - \lfloor\frac{j+v_i}{v_0}\rfloor c_0\right).$$

解法

为此，设 f_i 为最优物品以外的物品的完全背包数组，并设 $g_i = \max_{k\geq 0} f_{i+kv_0} - kc_0$。那么 $\bmod b_0 = i$ 的边角最优方案的收益就是 g_i。注意每当 k 增大 1 时会占用一个最优物品所以需要减掉一个 c_0。

沿用完全背包的 dp 思路计算 g_i。加入一个 (c_i, v_i)，转移为

$$g_{(j+v_i) \bmod v_0} \leftarrow \max\left(g_{(j+v_i) \bmod v_0}, g_j + c_i - \lfloor\frac{j+v_i}{v_0}\rfloor c_0\right).$$

注意到转移成环，但由于 (c_0, v_0) 的最优性，转移不可能无限进行，所以 dp 规则是良定义的。转移构成若干个圈，沿着每个圈转移两次即可计算出正确的 dp 值。

以上算法复杂度 $O(q + n \max v_i)$。

正确性证明

我们还需要证明 V 确实足够大，也就是说 g_i 对应的方案的容积不超过 V 的下界。

注意到上面的动态规划也可以视为最短路，根据最短路不重复经过单点的性质，每个 g_i 对应的方案都一定有不超过 v_0 个物品，所以总容积不超过 $\max v_i^2 = 10^{10}$，因此在本题设定下该算法是正确的。