$$\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6}\left(\frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(\sin x+1) - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x)\right)\right)\right) + C.$$

2042.

$$\int \frac{(a_1\sin x + b_1\cos x)\,dx}{a\sin x + b\cos x} = \int \frac{A(a\sin x + b\cos x) + B(a\cos x - b\sin x)}{a\sin x + b\cos x}\,dx =$$

$$= \int A\,dx + \int B\,\frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}\,dx = Ax + B\int\frac{dt}{t} = Ax + B\ln|t| + C =$$

$$\left. \begin{array}{l} t = a\sin x + b\cos x \\ dt = (a\cos x - b\sin x)\,dx \end{array} \right| = \underline{Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.}$$

2066. $P(x)$ – многочлен степени n.

$$\int \underbrace{P(x)}_{f}\cdot \underbrace{e^{ax}dx}_{dg} \overset{=}{\scriptstyle (1)} P(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}P'(x)\,dx.$$ но $P'(x)$ – многочлен степени $n-1$.

повторив шаг (1), получим:

$$P(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - P'(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a^2} + \int\frac{e^{ax}}{a^2}P''(x)\,dx =$$

$$= P(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - P'(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a^2} + \frac{1}{a^2}\cdot\underline{\int e^{ax}\cdot P''(x)\,dx}$$

на каждом шаге мы получаем интеграл, аналогичный исходному, но на степень ниже. Сделаем n шагов:

$$\int P(x)\cdot e^{ax}dx = P(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a} - P'(x)\cdot\frac{e^{ax}}{a^2} + P''\frac{e^{ax}}{a^3} - \ldots\ldots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} +$$

$$+ (-1)^{n+1}\int\frac{e^{ax}}{a^{n+2}}P^{(n+1)}(x)\,dx.$$ но $P^{(n+1)}(x)$ – это 0, т.е. $\int\frac{e^{ax}}{a^{n+2}}P^{(n+1)}(x)\,dx = 0$

$$\int P(x)\cdot e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \ldots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C$$