Типовичочек

Олежа

1 Неопределённый интеграл

1.3

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = \left|x=t^2, dx=2tdt\right| = \int \left(1-\frac{1}{t^4}\right)\sqrt{t^3}2tdt = 2\int t^{\frac{5}{2}}dt - 2\int t^{-\frac{3}{2}}dt =$$
$$= 2*\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 2*(-2)t^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{x^2}{7}+1\right) + C$$

1.7

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}dx = |t=\sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2-t^2; dx = -2tdt| = \int \frac{(2-t^2)^3}{t}(-2tdt) =$$
$$= -2\int (2-t^2)^3 dt = -2\int (8-12t^2+6t^4-t^6)dt = -2(8t-4t^3+\frac{6}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7)+c =$$
$$= -2\sqrt{2-x}(8-4(2-x)+\frac{6}{5}(2-x)^2-\frac{1}{7}(2-x)^3)+c$$

1.11

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left|t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1; e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1}\right| =$$
$$= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\int \frac{1}{2}\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln(t-1) - \ln(t+1) + c = \ln(\sqrt{e^x+1}-1) - \ln(\sqrt{e^x+1}+1) + c$$

1.15

$$\int xe^{-x}dx = x*(-e^{-x}) - \int 1*(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

1.19

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1-x^2-2x-2}dx = -\int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2+2x+1}dx =$$
$$= -\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = \left|t=x+1; dt=dx\right| =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}dt = \frac{1}{x+1} + \int \frac{t^2+1}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{x+1} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(t) + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = \left|k=\frac{1}{t^2}; dk = -\frac{2dt}{t^3} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}t^3dk\right| =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{tdk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{1}{k}}dk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dk}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{k+1} + c =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{\frac{1}{x^2+1}+1} + c = \frac{1+(x+1)\operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} + c$$

2 Понятие о дифференциальном исчислении функций многих переменных

2.1 Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функицй

2.1.1

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8y^2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy$$

2.1.5

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} * 2x * x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(-2x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x * (-\frac{3}{2})\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} * 2y = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

2.2 Проверить равенство:

2.3 Найти указанные частные производные:

2.3.1

$$\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y}, \text{ где } u = x\ln(x)y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(\ln x + 1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} = \frac{1}{x}$$

2.4 Показать, что в функция

2.5 Найти дифференциал указанного порядка в следующих примерах:

2.5.2

d^3u, если $u = sin(x^2+y^2)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos{(x^2+y^2)} * 2x$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin{(x^2+y^2)} * 2x * 2x + 2\cos{(x^2+y^2)} = 2\cos{(x^2+y^2)} - 4x^2\sin{(x^2+y^2)}$

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -2\sin{(x^2+y^2)} * 2x - 4(2x\sin{(x^2+y^2)} + \cos{(x^2+y^2)} * 2x * x^2) =$

$-4x(3\sin{(x^2+y^2)} + 2x^2\cos{(x^2+y^2)})$

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -2\sin{(x^2+y^2)} * 2y - 4x^2\cos{(x^2+y^2)} * 2y = -4y(\sin{(x^2+y^2)} + 2x^2\cos{(x^2+y^2)})$

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -4y(3\sin{(x^2+y^2)} + 2y^2\cos{(x^2+y^2)})$

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -4x(\sin{(x^2+y^2)} + 2y^2\cos{(x^2+y^2)}$

$d^3u = -4x(3\sin{(x^2+y^2)} + 2x^2\cos{(x^2+y^2)})dx^3 - 12y(\sin{(x^2+y^2)} + 2x^2\cos{(x^2+y^2)})dx^2dy -$

$-12x(\sin{(x^2+y^2)} + 2y^2\cos{(x^2+y^2)}dxdy^2 - 4y(\sin{(x^2+y^2)} + 2x^2\cos{(x^2+y^2)})dy^3$

2.6 Найти производные первого и второго порядков от следующих сложных функций:

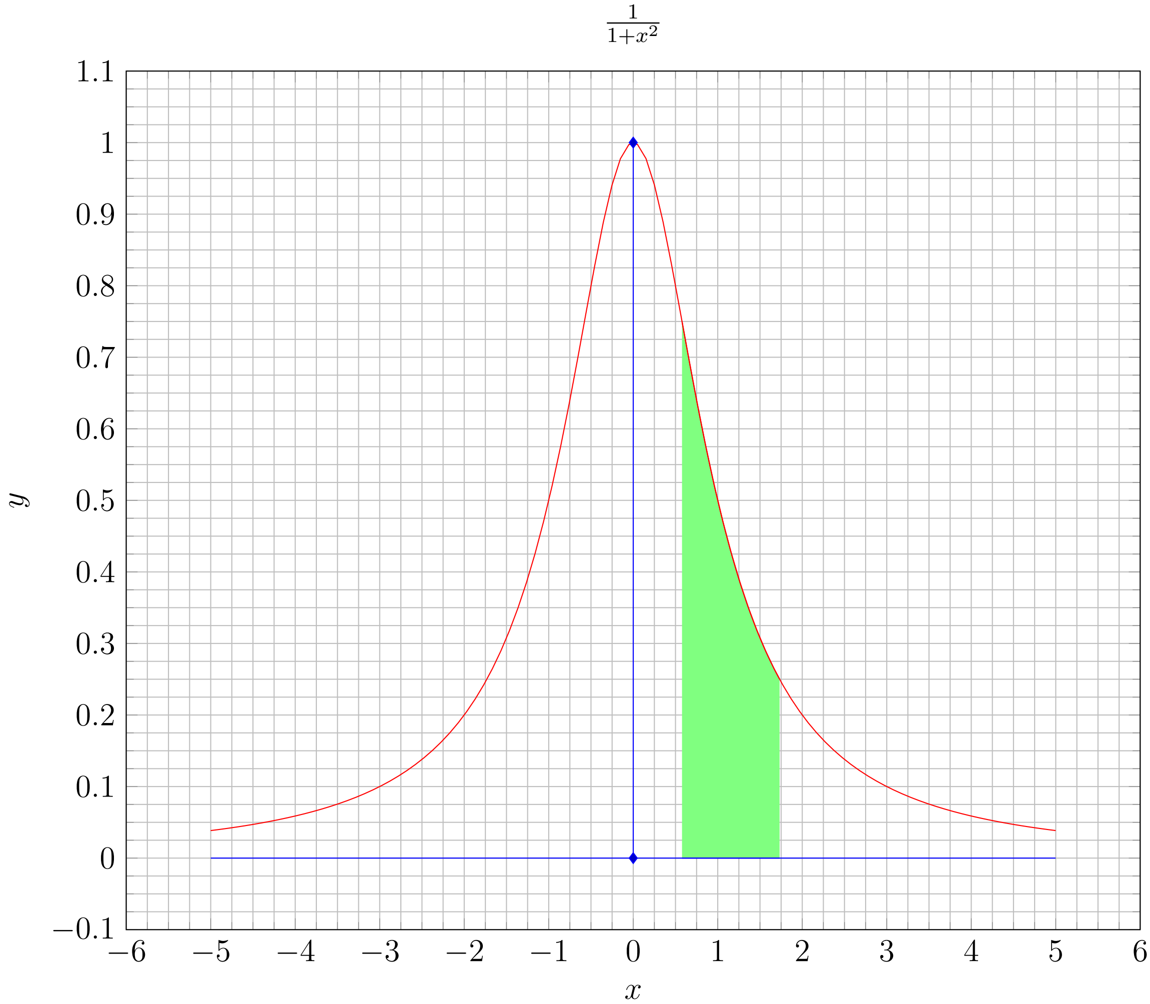
2.6.1 $u = f(x^2+y^2+z^2)//TODO$

3 Интеграл Римана

3.1 применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти следующие интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади

3.1.3

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



3.2 Объяснить почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам:

3.3 С помощью неопределённых интегралов посчитать пределы следующих сумм:

3.3.2

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+...+\frac{n}{n+n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int\limits_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln\left(x+1\right)\Big|_0^1=\ln 2$$

3.4 Вычислить интегралы:

3.4.3

$$\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$$

$$\int x\sqrt[3]{1-x}dx = \left|t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x = 1-t^3; dx = -3t^2dt\right| = \int (1-t^3)t*(-3)t^2dt =$$

$$= -3\int(t^3-t^6)dt = -3(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{7}t^7) + c = -3\left(\frac{1}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}\right) + c.$$

$$\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx = -3\left(\frac{1}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_1^9 =$$

$$= -3\left(\frac{1}{4}(1-9)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{7}(1-9)^{\frac{7}{3}}\right) - -3\left(\frac{1}{4}(1-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{7}(1-1)^{\frac{7}{3}}\right) =$$

$$= -3\left(\frac{1}{4}*16 - \frac{1}{7}*(-128)\right) = -66\frac{6}{7}$$

3.5 Определить знак интеграла:

3.6 Какой интеграл больше:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} xdx \text{ или } \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$$

при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $0 < \sin x < 1$, т.е. $0 \leq \sin^{10} x < \sin^2 x$. При $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin^{10} x = \sin^2 x$ Т.е. можно утверждать, что $S_{sin^{10}x} < S_{sin^2x}$, где $S_{f(x)}$ - площадь под графиком на $[0, \frac{\pi}{2}]$ (обе функции неотрицательные и $sin^{10}x \leq sin^2x$), что равносильно утверждению, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} xdx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$$

3.7 Определить среднее значение данных функций в указанных промежутках:

3.8 Вычислить

3.8.2

$$\int\limits_0^1 \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon \to 0} (x \ln x - x)\Big|_\epsilon^1 = 1 * \ln 1 - 1 - \lim_{\epsilon \to 0} (\epsilon \ln \epsilon - \epsilon) = -1 - 0 = -1$$

$$P.s : \lim_{x \to 0} (x \ln x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0$$

3.9 Исследовать на сходимость интегралы:

3.9.1

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$$

$$\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{x^2}{\left(x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i}{x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} i}{x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} i}{x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}} dx + \int \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} i}{x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}} + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}}{\frac{\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} - i\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}} + \frac{\left(\sqrt{3} + i\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \lim_{R \to \infty} \left. \frac{\left(\sqrt{3} - i\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}} + \frac{\left(\sqrt{3} + i\right) \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}} \right|_0^R =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \frac{\left(\sqrt{3} - i\right) \operatorname{arctg} \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 - i\sqrt{3}}} + \frac{\left(\sqrt{3} + i\right) \operatorname{arctg} \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}} - 0 =$$

$\left(\lim_{R\to\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{6}\sqrt{-1-i\sqrt{3}}} + \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{6}\sqrt{-1+i\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)}{\sqrt{-1-i\sqrt{3}}} + \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)}{\sqrt{-1+i\sqrt{3}}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)\sqrt{-1+i\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3}+i\right)\sqrt{-1-i\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(-1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\sqrt{-1+i\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3}+i\right)\sqrt{-1-i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\left(\sqrt{3}-i\right)i\sqrt{1-i\sqrt{3}} + \left(\sqrt{3}+i\right)i\sqrt{1+i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\left(i\sqrt{3}+1\right)\sqrt{1-i\sqrt{3}} + \left(i\sqrt{3}-1\right)\sqrt{1+i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\sqrt{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}\left(\sqrt{1+i\sqrt{3}} - \sqrt{1-i\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{1+i\sqrt{3}} - \sqrt{1-i\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}} - \sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{\left(\frac{i+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) =$$

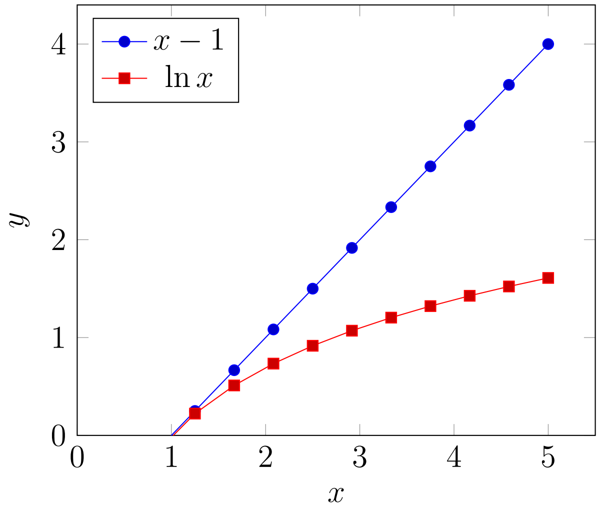
$$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{i+\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6} = \frac{\pi}{2} \text{ - т.е. сходится}$$

3.9.5

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

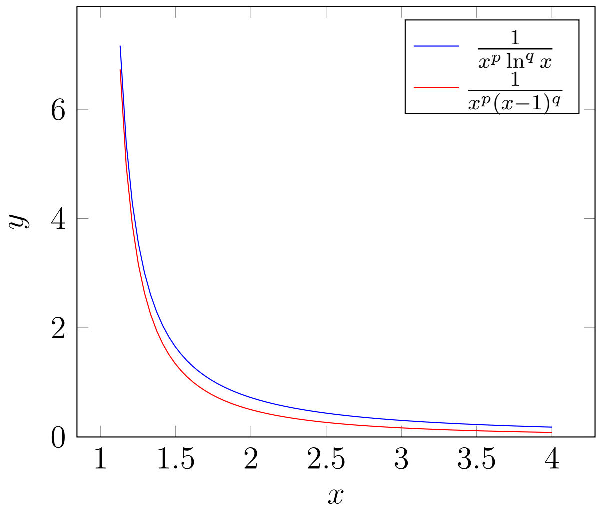
В условии это не было точно прописано, так что примем p и q за целые неотрицательные числа.
Рассмотрим $y = \ln x$ и $y = x - 1$ при $x \geq 1$.

$$x - 1, \ln x$$



Понятно, что $\ln x \le x - 1$ при $x \ge 1$ (да и на всей оси определения в целом)
Тогда $\frac{1}{\ln x} \ge \frac{1}{x-1}$, т.е.
$\frac{1}{x^p \ln^q x} \ge \frac{1}{x^p (x-1)^q}$ (обе функции неотрицательные на промежутке рассмотрения)

$$\frac{1}{x^p \ln^q x} \ge \frac{1}{x^p (x-1)^q}$$



1) Для $p > 0, q > 0$:

$$\frac{1}{x^p(x-1)^q} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + ... + \frac{A_p}{x^p} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + ... + \frac{B_q}{(x-1)^q}$$

т.е. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^p(x-1)^q} = A_1 \ln x - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} - ... - \frac{A_p}{(p-1)x^{p-1}} +$

$\displaystyle + B_1 \ln(x-1) - \frac{B_2}{x-1} - ... - \frac{B_q}{(q-1)(x-1)^{q-1}}$

Подсчёт интеграла $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p(x-1)^q}$ сведётся к пределу $\displaystyle\lim_{R\to\infty} (A_1 \ln R + B_1 \ln(R-1)) = \infty$,

т.е. интеграл не сойдётся (можно сказать, что площадь под графиком бесконечна)

Но, как мы установили, $\displaystyle\frac{1}{x^p \ln^q x} \geq \frac{1}{x^p(x-1)^q}$ на рассматриваемом промежутке

(и обе функции неотрицательны), т.е. площадь под графиком $\displaystyle\frac{1}{x^p \ln^q x}$ $\left(\text{она же} \displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}\right)$

больше площади под графиком $\displaystyle\frac{1}{x^p(x-1)^q}$, которая, как мы установили, бесконечна.

Отсюда получается очевидный вывод, что площадь под графиком $\displaystyle\frac{1}{x^p \ln^q x}$

тоже бесконечна, или, иными словами, $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ разойдётся.

2) Для $p = 0, q > 0$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^q} = -\frac{1}{(q-1)(x-1)^{q-1}}\Bigg|_1^\infty \text{(при q>1)} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{(q-1)(R-1)^{q-1}} - \lim_{\epsilon\to 1+0} -\frac{1}{(q-1)(\epsilon-1)^{q-1}} = \infty.$$

при $q = 1$: $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x-1)^q} = \ln(x-1)\big|_1^\infty = \lim_{R\to\infty} \ln(R-1) - \lim_{\epsilon\to 1+0} \ln(\epsilon - 1) = \infty.$

Делаем аналогичный пункту 1 вывод

3)Для p>0, q=0:

$\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^R = \frac{1}{p-1}$при $p > 1$. При $p = 1$ интеграл разойдётся.

В этом пункте нам даже не нужна была замена логарифма на x-1

4)p=q=0:

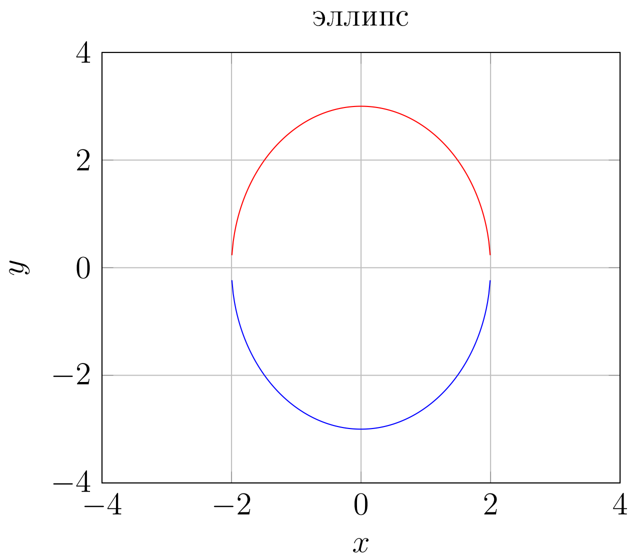
$\displaystyle\int\limits_1^\infty dx = \lim_{R\to\infty} x\Big|_1^R = \infty$. (т.е. разойдётся)

Итог: интеграл расходится, кроме случая p=1,q=0

3.10 Найти площади фигур, ограниченных кривыми заданными в прямоугольных координатах:

3.10.4

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$



$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$y=\pm 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$; y=0 при x=2;-2

$$\int\limits_{-2}^{2} 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$$

$$\int 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = 3\int\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \left|\frac{x}{2}=\sin t;\ \frac{dx}{2}=\cos t dt\right| = 3\int\sqrt{1-\sin^2 t} * 2\cos t dt =$$
$$= 6\int\cos^2 t dt = 6\int\frac{\cos 2t+1}{2}dt = 6\int\frac{\cos 2t}{2}dt + 3\int dt = 6\frac{\sin 2t}{4}+3t+c=$$
$$= 3\sin t\cos t + 3t + c = 3\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+3\arcsin\frac{x}{2}+c$$

$$\int\limits_{-2}^{2} 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = 3\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+3\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_{-2}^{2} = 3\left(\arcsin 1-\arcsin(-1)\right) = 3\pi$$

Понятно, что площадь нижней части графика тоже равна 3π.

Т.е. общая площадь равна 6π