Функция, не имеющая предела ни в одной точке множества $X = R$: <u>функция Дирихле</u>

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q \\ 0, & \text{если } x \in I \end{cases}$$

т.е. $D(x) = 1$, если x – рациональное и $D(x) = 0$, если x иррациональное.

Проверим это:

пусть $x_0 \in R$; $\{x_n\} \to x_0$, причём $x_n \in Q$. Тогда $f(x_n) = 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \underline{1}$.

А если $\{x_n\} \to x_0$, но все $x_n \in I$, то $f(x_n) = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \underline{0}$. В одной точке получилось 2 разных предела – т.е. предела в этой точке нет. Это справедливо для любой точки.

Функция, не имеющая предела ровно в одной точке множества $X = R$: например, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 0 \\ x+1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$.