3183. $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$: $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\left((x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) =$

$= \sin\frac{1}{x}\cdot\left(\underbrace{\lim\limits_{y\to 0} y\sin\frac{1}{y}}_{=0} + x\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}}_{\text{не опр.}}\right)$ т.е. $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не сущ.,

т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ не сущ.

2) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$: аналогично п. 1)

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y) = 0$; $\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y}$ — ограничена

т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

3212.3 $f(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ при $x^2+y^2>0$

$f(0,0) = 0$.

~~f(x~~ f дифференцируема в $O(0;0)$, если обе частные производные непрерывны в $O(0;0)$.

1) найдём частные производные при $x^2+y^2>0$

$f'_x = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, $f'_y = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$

2) найдём частные производные в $O(0;0)$.

$f'_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{h}}{e^{\frac{1}{h^2}}} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{h^2}}{-e^{\frac{1}{h^2}}\cdot\frac{2}{h^3}} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2e^{\frac{1}{h^2}}} = 0.$