Типовой расчёт

Хайкин Олег, P3131

1 Неопределённый интеграл

1.

$$\int (3-x^2)^3\,dx = \int \left(27-27x^2+9x^4-x^8\right)\,dx = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{8}{9}x^9+C.$$

2.

$$\int x^2(5-x^4)\,dx = \int 5x^2\,dx - \int x^6\,dx = \frac{5}{3}x^3-\frac{x^7}{7}+C.$$

3.

$$\int (1-\frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}\,dx - \int \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C.$$

4.

$$\int (2^x+3^x)^2\,dx = \int (4^x+2\cdot 6^x+9^x)\,dx = \int 4^x\,dx+\int 2\cdot 6^x\,dx+\int 9^x\,dx =$$
$$= \frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

5.

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}-1\,dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

6.

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx = -\frac{3}{4}x^2\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}}\;+\;\frac{6}{4}\int x\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}}\;dx =$$
$$-\frac{3}{4}x^2\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}}\;-\;\frac{9}{14}x\left(1-x\right)^{\frac{7}{3}}\;+\;\frac{9}{14}\int\left(1-x\right)^{\frac{7}{3}}\;dx =$$
$$-\frac{3}{4}x^2\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}}\;-\;\frac{9}{14}x\left(1-x\right)^{\frac{7}{3}}\;-\;\frac{27}{140}\left(1-x\right)^{\frac{10}{3}}+C =$$
$$-\frac{3}{140}\left(1-x\right)^{\frac{4}{3}}\left(14x^2+12x-9\right)+C.$$

7.

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{2-x}}dx \Rightarrow \left|t=\sqrt{2-x}\Rightarrow x=2-t^2; dx=-2tdt\right| \Rightarrow \int\frac{(2-t^2)^3}{t}(-2tdt) =$$
$$= -2\int(2-t^2)^3dt = -2\int(8-12t^2+6t^4-t^6)dt =$$
$$-2(8t-4t^3+\frac{6}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7)+C =$$
$$= -2\sqrt{2-x}(8-4(2-x)+\frac{6}{5}(2-x)^2-\frac{1}{7}(2-x)^3)+C.$$

8.

$$\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx \Rightarrow \left| u = \sin x, du = \cos x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \right| \Rightarrow$$
$$\int \cos^5 x \cdot \frac{\sqrt{u}}{\cos x}\, du = \int (1+u^2)^4 \cdot \sqrt{u}\, du =$$
$$= \int u^{\frac{1}{2}}\, du + 4\int u^{\frac{5}{2}}\, du + 6\int u^{\frac{9}{2}}\, du + 4\int u^{\frac{13}{2}}\, du + \int u^{\frac{17}{2}}\, du =$$
$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 4\cdot\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + 6\cdot\frac{2}{11}u^{\frac{11}{2}} + 4\cdot\frac{2}{15}u^{\frac{15}{2}} + \frac{2}{19}u^{\frac{19}{2}} + C =$$
$$= \frac{2}{3}\sin x^{\frac{3}{2}} + 4\cdot\frac{2}{7}\sin x^{\frac{7}{2}} + 6\cdot\frac{2}{11}\sin x^{\frac{11}{2}} + 4\cdot\frac{2}{15}\sin x^{\frac{15}{2}} + \frac{2}{19}\sin x^{\frac{19}{2}} + C.$$

9.

$$\int \frac{lnx}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \ln x \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$$
$$u = \ln x; dv = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| t = 1 + \ln x, dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow xdt = dx \right| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{xdt}{x\sqrt{t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\ln x + 1}$$
$$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = 2\ln x\sqrt{\ln x + 1} - 2\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}dx$$
$$\rhd\ 2\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}dx \Rightarrow \left| k = 1 + \ln x, dk = \frac{1}{x}dx \Rightarrow xdk = dx \right| \Rightarrow 2\int \frac{\sqrt{t}x}{x}dt =$$
$$= 2\int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}2t\sqrt{t} = \frac{4t\sqrt{t}}{3} = \frac{4(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1}}{3} \lhd$$
$$2\ln x\sqrt{\ln x + 1} - 2\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}dx = 2\ln x\sqrt{\ln x + 1} - \frac{4}{3}(\ln x + 1)\sqrt{\ln x + 1} + C =$$
$$= 2\sqrt{\ln x + 1}(\ln x - \frac{2}{3}(\ln x + +1)) + C = 2\sqrt{\ln x + 1}(\frac{\ln x}{3} - \frac{2}{3}) + C.$$

10.

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} \Rightarrow \left| e^{\frac{x}{2}} = t; dt = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx \right| \Rightarrow 2\int \frac{dt}{t\,(t + t^2)} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{t^2} - 2\int \frac{dt}{t} + 2\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{2}{t} - 2\ln\, t + 2\ln\,(1+t) + C =$$
$$= 2\ln\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right) - 2\ln e^{\frac{x}{2}} - \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}} + C = 2\ln\left(1 + e^{\frac{x}{2}}\right) - x - 2e^{-\frac{x}{2}} + C.$$

11.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \Rightarrow \left| t = \sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2 - 1; e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1} \right| \Rightarrow$$
$$= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\int \frac{1}{2}\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln(t-1) - \ln(t+1) + c =$$
$$= \ln(\sqrt{e^x+1}-1) - \ln(\sqrt{e^x+1}+1) + c$$

12.

$$\int \frac{arctg\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \Rightarrow \left| u = arctg\,\sqrt{x}, du = \frac{1}{x+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}(1+x)du \right| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int 2u\,du = u^2 + C = arctg^2\sqrt{x} + C.$$

13.

$$\int \ln x dx \Rightarrow \left| t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow xdt = dx, x = e^t \right| \Rightarrow \int txdt = \int te^t dt$$
$$u = t, dv = e^t dt \Rightarrow v = \int e^t dt = e^t \Big| \Rightarrow \int te^t dt = \ln x e^{\ln x} - e^{\ln x} + C =$$
$$= x\ln x - x + C.$$

14.

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$
$$u = \ln^2 x; dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x}\Big| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\frac{\ln^2 x}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} =$$
$$= -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C.$$

15.

$$\int xe^{-x}dx = x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

16.

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = -x^2\frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\cdot 2x\,dx =$$
$$= -x^2\frac{\cos 2x}{2} + (x\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx) =$$
$$= \frac{1}{2}(-x^2\cos 2x + x\cdot\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x) + C.$$

17.

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\int x\ln(1+x)dx-\int x\ln(1-x)dx$$
$$1:\int x\ln(1+x)dx\Rightarrow\Big|t=1+x,dt=dx,x=t-1\Big|\Rightarrow\int(t-1)\ln tdt=$$
$$=\int t\ln tdt-\int\ln tdt=\int\ln t\cdot tdt-\int\ln t\cdot 1dt=$$
$$=\ln t\cdot\frac{t^2}{2}-\int\frac{t^2}{2}\cdot\frac{1}{t}dt-\ln t\cdot t+\int t\cdot\frac{1}{t}dt=\ln t\cdot\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4}-\ln t\cdot t+$$
$$2:\int x\ln(1-x)dx\Rightarrow\Big|t_1=1-x,\quad dt_1=-dx,\quad x=1-t_1\Big|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-\int(1-t_1)\ln t_1dt_1=\int(t_1-1)\ln t_1dt_1=\int t_1\ln t_1dt_1-\int\ln t_1dt_1=$$
$$=\frac{\ln t_1\cdot t_1^2}{2}-\frac{t_1^2}{4}-\ln t_1\cdot t_1+t_1$$
$$\int\ln xdx=\frac{\ln t\cdot t^2}{2}-\frac{t^2}{4}-\ln t\cdot t+t-\frac{\ln t_1\cdot t_1^2}{2}+\frac{t_1^2}{4}+\ln t_1\cdot t_1-t_1+C=$$
$$=\frac{\ln(x+1)\cdot(x+1)^2}{2}-\frac{(x+1)^2}{4}-\ln(x+1)\cdot(x+1)+(x+1)-$$
$$-\frac{\ln(1-x)\cdot(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{4}+\ln(1-x)\cdot(1-x)-(1-x)+C.$$

18.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x+1-x+1}\,dx=\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,dx=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

19.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1-x^2-2x-2}dx = -\int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2+2x+1}dx =$$
$$= -\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big| t = x+1; dt = dx \Big| \Rightarrow \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}dt =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \int \frac{t^2+1}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{x+1} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(t) + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow \Big| k = \frac{1}{t^2}; dk = -\frac{2dt}{t^3} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}t^3 dk \Big| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{tdk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{1}{k}}dk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dk}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{k+1} + C =$$
$$= \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{\frac{1}{x^2+1}+1} + C =$$
$$= \frac{1+(x+1)\operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} + C.$$

20.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1} \Rightarrow \Big| x = \sin u, dx = \cos u du \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos u} \Big| \Rightarrow \int \frac{\cos u}{\cos u - 1}\, du =$$
$$= \int 1\, du + \int \frac{1}{\cos u - 1}\, du = \arcsin x + \frac{\cos u + 1}{\cos^2 u - 1}\, du =$$
$$= \arcsin x - \int \frac{1}{\sin^2 u}\, du - \int \frac{\cos u}{\sin^2 u}\, du =$$
$$= \arcsin x + \operatorname{ctg} u - \int \frac{dx}{x^2} = \arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1}{x} + C.$$

21.

$$\int \frac{1}{\sin x + 3\cos x} \Rightarrow \Big| \tan\frac{x}{2} = t, \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dx}{\frac{-3t^2+2t+3}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)dx}{-3t^2+2t+3} = \int \frac{(1+t^2)(1+\cos x)dt}{-3t^2+2t+3} =$$
$$= \int \frac{(1+t^2)(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})dt}{-3t^2+2t+3} = \int \frac{(1+t^2+1-t^2)dt}{-3t^2+2t+3} = \int \frac{2dt}{-3t^2+2t+3} =$$
$$= -2\int \frac{1}{3t^2-2t-3} = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{3})^2 - \frac{10}{9}} = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{3})^2 - \frac{10}{9}} =$$
$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2 - \frac{10}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\frac{10}{9} - z^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}\cdot \ln|\frac{\frac{\sqrt{10}}{3}+z}{\frac{\sqrt{10}}{3}-z}| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|\frac{\frac{\sqrt{10}}{3}+z}{\frac{\sqrt{10}}{3}-z}| = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|\frac{\frac{\sqrt{10}}{3}+t-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}-t+\frac{1}{3}}| = \frac{1}{\sqrt{10}}\ln|\frac{\frac{\sqrt{10}-1}{3}+\tan\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{10}+1}{3}-\tan\frac{x}{2}}| + C.$$

22.

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{2+x^4}} = \int x^{-11}\left(2+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big|1+2x^4 = t^2 \Rightarrow 2tdt = -8x^{-5}dx \Rightarrow dx = \frac{tdt}{4x^{-5}}\Big| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \left(\frac{2}{t^2-1}\right)^{-\frac{11}{4}} \left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{t^2-1}\right)^{\frac{5}{4}} \frac{t\,dt}{4} =$$
$$= -\int \frac{2^{-\frac{11}{4}}}{(t^2-1)^{-\frac{11}{4}}} \frac{2^{-\frac{1}{2}}\left(t^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}} \frac{t\,dt}{4} \frac{2^{\frac{5}{4}}}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}} = -\frac{1}{16}\int \frac{dt}{(t^2-1)^{-2}} =$$
$$= -\frac{1}{16}\int \left(t^4-2t^2+1\right)\,dt = -\frac{1}{16}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t\right) + C$$
$$= -\frac{1}{240}\frac{\sqrt{x^4+2}}{x^2}\left(3\cdot\frac{\left(x^4+2\right)^2}{x^8} - 10\cdot\frac{x^4+2}{x^4} + 15\right) + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{x^4+2}}{60x^{10}}\left(2x^8 - 2x^4 + 3\right) + C.$$

2 Понятие о дифференциальном исчеслении функций многих переменных

2.1 Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8y^2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -16xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -16xy$$

2. $f(x, y) = x \sin(x + y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x + y) + x\cos(x + y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(x + y) - x\sin(x + y) + \cos(x + y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(x + y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\sin(x + y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(x + y) - x\sin(x + y)$$

3. $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{6x}{y^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{2}{y^3}$$

4. $f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x \cdot \sin x^2}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2 + 2x \cdot 2x\cos x^2}{y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x \cdot \sin x^2}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\cos x^2}{y^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2x \cdot \sin x^2}{y^3}$$

5. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} * 2x * x}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

$$= -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(-2x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x * (-\frac{3}{2})\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} * 2y = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

2.2 Проверить равенство:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

1. $u = x^2 - 2xy - 3y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2$$

2. $u = x^{y^2}$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} = \boxed{y^2 x^{y^2-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}} = (y^2 \cdot x^{y^2-1})' = 2y \cdot x^{y^2-1} + (x^{y^2-1})y^2 = \boxed{2yx^{y^2-1} + xy^2 - 1 \cdot \ln x \cdot 2y^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} = \boxed{x^{y^2} \cdot \ln x \cdot 2y}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}} = (x^{y^2} \ln x \cdot 2y)' = 2y(\frac{1}{x} \cdot x^{y^2} + (x^{y^2}) \cdot \ln x) = 2y(x^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1} \ln x) =$$

$$= \boxed{2yx^{y^2-1} + x^{y^2-1} \cdot \ln x \cdot 2y^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \text{ чтд.}$$

3. $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2y\sqrt{y-x} - \sqrt{x} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{y-x}} \cdot (-1)\right)}{4y^2\,(y-x)} =$$

$$= \left(\frac{y\sqrt{y-x}}{\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{y-x}}\right) \cdot \frac{1}{4y^2\,(y-x)} = \frac{y}{\sqrt{x}\sqrt{y-x}} \cdot \frac{1}{4y\,(y-x)} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{x}\,(\sqrt{y-x})^3}}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y-x}} \cdot \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y-x}} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{y})^3} = \boxed{\frac{\sqrt{x}}{2y\sqrt{y-x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left((y-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot (y-x)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{x}\,(\sqrt{y-x})^3}}$$

2.3 Найти указанные частные производные

1.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y}, \text{ где } u = x \ln(x) y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y(\ln x + 1); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{y}{x}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y} = \frac{1}{x}$$

2.

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}, \text{ где } u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \sin y - y^3 \sin x; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 \sin y - y^3 \cos x;$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 6 \cos y - 3y^2 \cos x; \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6 \sin y - 6y \cos x;$$
$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6 \cos y - 6 \cos x$$

3.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \text{ если } u = \arctan \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}} \cdot \frac{(1-yz)(1-xy-xz-yz)+(y+z)(x+y-z-xyz)}{(1-xy-xz-yz)^2} =$$
$$= \frac{(1-yz)(1-xy-xz-yz)+(y+z)(x+y+z-xyz)}{(1-xy-xz-yz)^2+(x+y+z-xyz)^2} =$$
$$= \frac{y^2z^2+z^2+y^2+1}{y^2z^2(x^2+1)+z^2(x^2+1)+y^2(x^2+1)+x^2+1} = \frac{y^2z^2+z^2+y^2+1}{(x^2+1)(y^2z^2+z^2+y^2+1)} =$$
$$= \frac{1}{x^2+1}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'_y = 0$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$$

2.4 Показать, что функция

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ если } x^2+y^2 \neq 0 \text{ и } f(0,0) = 0,$$

в окресности точки (0,0) непрерывна и имеет ограниченные частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$. Однако эта функция недифференцируема в точке (0,0)

1) Покажем непрерывность $f(x,y)$:

$$\lim_{x,y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$
$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy;$
$(x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq -2xy.$
$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{2xy} = \frac{1}{2};$$
$$\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{xy}{-2xy} = -\frac{1}{2}, \text{ т.е.}$$
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$0 \leq \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. можно сказать:}$$
$$-\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{\frac{xy}{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}$$
$$-\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x,y\to 0}\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} = \lim_{x,y\to 0} -\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x,y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0) \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ функция непрерывна

2) Посчитаем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) Проверим ограниченность частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$y \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y^3 \leq (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 1;$$
$$\text{аналогично } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leq 1$$

4) Докажем недифференцируемость функции в точке (0,0):
Функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), если её приращение в этой точке представля-

ется в виде:

$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(p)$, где
$p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
Попробуем посчитать такое приращение для данной функции:
$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} - 0$ т.е.
$A = B = 0, \Delta f(0,0) = \dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = o(p)$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Остаётся проверить, что
$\dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = o(p)$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot p} = 0$
$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$
Покажем, что этот предел расходится, рассмотрев значение на 2-ух различных путях:
вдоль $\Delta x = 0 : \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{0}{0 + (\Delta y)^2} = 0;$
вдоль $\Delta x = y : \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{(\Delta y)^2}{(\Delta y)^2 + (\Delta y)^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ предел расходится,
т.е. $\dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \neq o(p) \Rightarrow \Delta f(0,0) \neq A\Delta x + B\Delta y + o(p) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ функция недифференцируема в (0,0)

2.5 Найти дифференциалы указанного порядка в следующих примерах:

1.

d^3u, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x - 6y$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}} = \boxed{6}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}} = \boxed{-6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 + 6xy - 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y + 6x$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}} = \boxed{6}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}} = \boxed{6}$$

$$\boxed{d^3u} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3 =$$

$$= \boxed{6d^3x - 18dy\,d^2x + 18d^2y\,dx + 6d^3y}$$

2.

d^3u, если $u = sin(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x^2+y^2) * 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x^2+y^2) * 2x * 2x + 2\cos(x^2+y^2) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2)$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}} = -2\sin(x^2+y^2) * 2x - 4(2x\sin(x^2+y^2) + \cos(x^2+y^2) * 2x * x^2) =$$

$$= \boxed{-4x(3\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}} = -2\sin(x^2+y^2) * 2y - 4x^2\cos(x^2+y^2) * 2y =$$

$$= \boxed{-4y(\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}} = \boxed{-4y(3\sin(x^2+y^2) + 2y^2\cos(x^2+y^2))}$$

$$\boxed{\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}} = \boxed{-4x(\sin(x^2+y^2) + 2y^2\cos(x^2+y^2)}$$

$$d^3u = -4x(3\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))dx^3 -$$
$$-12y(\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))dx^2dy -$$
$$-12x(\sin(x^2+y^2) + 2y^2\cos(x^2+y^2)dxdy^2 - 4y(\sin(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2))dy^3$$

3.

$d^{10}u$, если $u = \ln(x+y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

Заметим закономерность, получим $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+y)^n} \cdot (dx+dy)^n$

$$d^{10}u = \frac{-9!}{(x+y)^{10}} \cdot (dx+dy)^{10}$$

.

4.

d^3u, если $u = xyz$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = 1$$

$$d^3u = 6dxdydz$$

5.

d^6u, если $u = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$

$$\boxed{d(u)} = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \boxed{(-\sin x \cdot \operatorname{ch} y)\,dx + (\cos x \cdot \operatorname{sh} y)\,dy}$$

$$\boxed{d^2(u)} = \frac{\partial (d(u))}{\partial x}dx + \frac{\partial (d(u))}{\partial y}dy =$$

$$= \boxed{(-\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^2x + 2 \cdot (-\sin x \cdot \operatorname{sh} y)dy\,dx + (\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^2y}$$

$$\boxed{d^3(u)} = \frac{\partial (d^2(u))}{\partial x}dx + \frac{\partial (d^2(u))}{\partial y}dy =$$

$$= \boxed{(\sin x \cdot \operatorname{ch} y)d^3x + 3 \cdot (-\cos x \cdot \operatorname{sh} y)dy\,d^2x + 3 \cdot (-\sin x \cdot \operatorname{ch} y)d^2y\,dx + (\cos x \cdot \operatorname{sh} y)d^3y}$$

...

$$\boxed{d^6(u)} = \frac{\partial^6 u}{\partial^6 x}d^6x + 6 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial^5 x\,\partial y}d^5x\,dy + 15 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial^4 x\,\partial^2 y}d^4x\,d^2y +$$

$$+ 20 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial^3 x\,\partial^3 y}d^3x\,d^3y + 15 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial^2 x\,\partial^4 y}d^2x\,d^4y + 6 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial^5 y}dx\,d^5y + \frac{\partial^6 u}{\partial^6 y}d^6y =$$

$$= \boxed{(-\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^6x + 6 \cdot (-\sin x \cdot \operatorname{sh} y)\,d^5x\,dy + 15 \cdot (\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^4x\,d^2y +}$$

$$\boxed{+20 \cdot (\sin x \cdot \operatorname{sh} y)d^3x\,d^3y + 15 \cdot (-\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^2x\,d^4y + 6 \cdot (-\sin x \cdot \operatorname{sh} y)dx\,d^5y +}$$

$$\boxed{+(\cos x \cdot \operatorname{ch} y)d^6y}$$

2.6 Найти производные первого и второго порядков от следующих сложных функций:

1.

$$
\begin{aligned}
&u = f(x^2+y^2+z^2) = f(m)\\
&du = \frac{\partial f}{\partial m}dm = \frac{df}{dm}\left(\frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy + \frac{\partial m}{\partial z}dz\right) =\\
&= f'_m\left(2xdx + 2ydy + 2zdz)\right)\\
&d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial m^2}d^2m =\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial m^2}\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 m}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 m}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 m}{\partial y\partial z}dydz\right) =\\
&= f''_m\left(2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2\right)
\end{aligned}
$$

2.

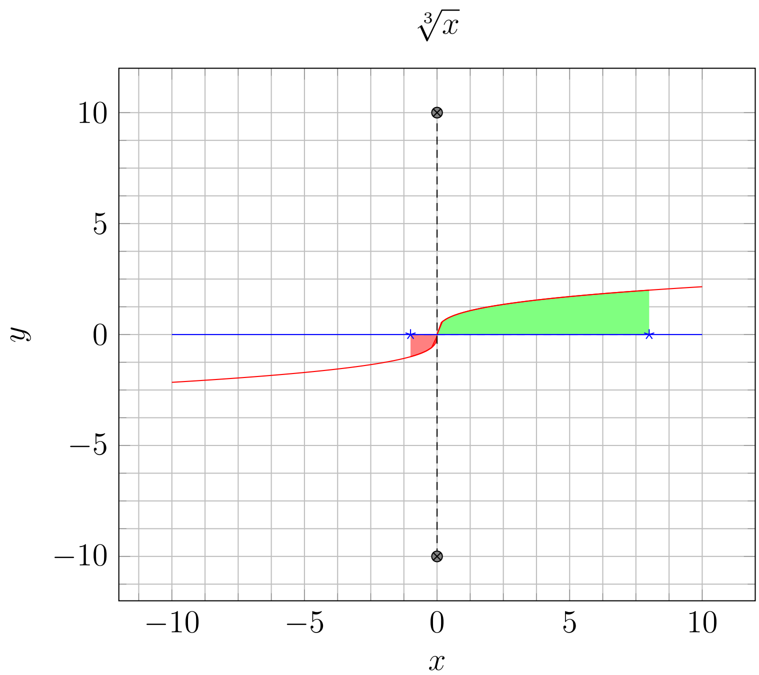
$$
\begin{aligned}
&u = f(x, \frac{x}{y}) = f(n, m)\\
&du = \frac{\partial f}{\partial n}dn + \frac{\partial f}{\partial m}dm = \frac{\partial f}{\partial n}\left(\frac{\partial n}{\partial x}dx\right) + \frac{\partial f}{\partial m}\left(\frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy\right) =\\
&= f'_n dx + f'_m\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right)\\
&d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}dn^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial n\partial m}dndm + \frac{\partial^2 f}{\partial m^2}dm^2 =\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}dx^2\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial n\partial m}\left(\left(\frac{\partial n}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy\right)\right) +\\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial m^2}\left(\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 m}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) =\\
&= f''_{n^2}\cdot 0 + 2f''_{nm}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)dx - \frac{x}{y^2}dy\right) + f''_{m^2}\left(dx^2 - 2\frac{1}{y^2}dxdy + 3\frac{x}{y^3}dy^2\right)
\end{aligned}
$$

3 Интеграл Римана

3.1 Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти следующие интегралы и нарисовать соответствующие криволинецные площади:

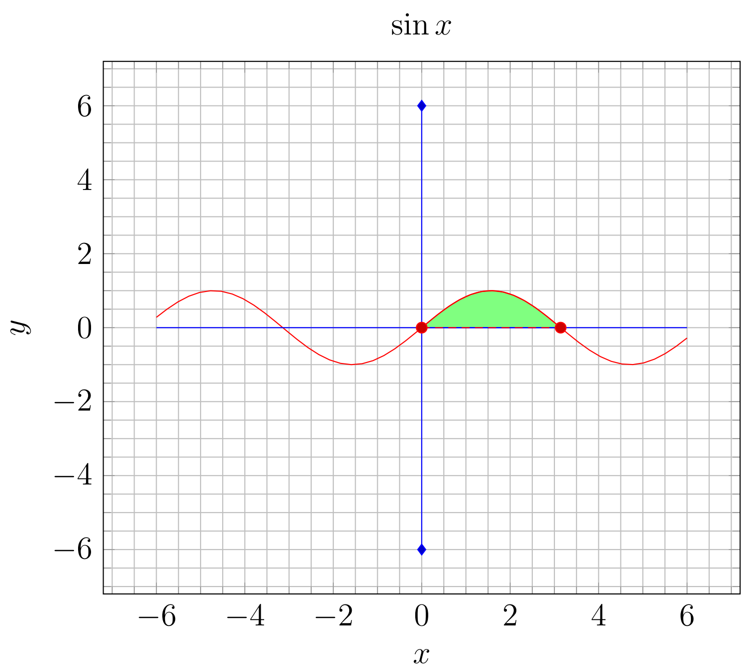
1.

$$
\int\limits_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{4}\cdot 8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\cdot(-1)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\left(16-1)\right) = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}
$$



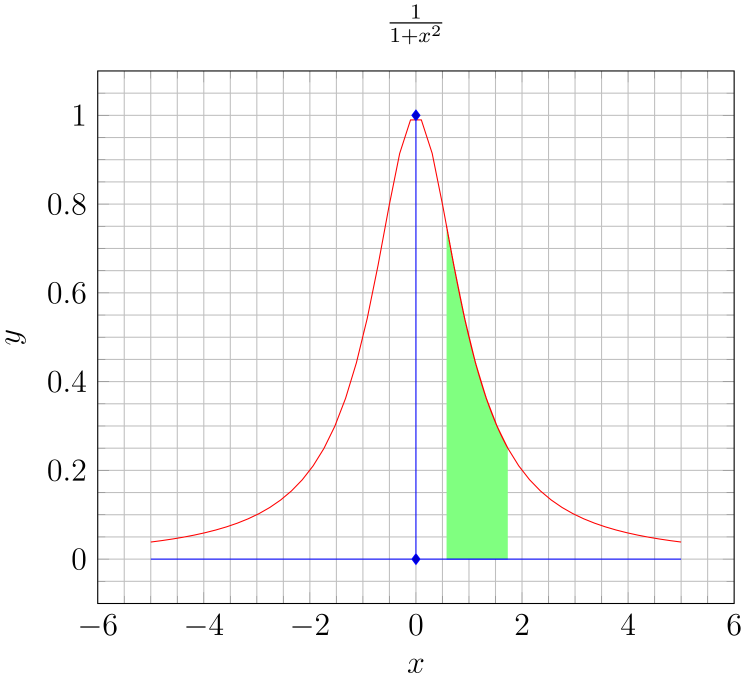
2.

$$\int_0^{\pi} sinx\, dx = \left. -\cos x \right|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$



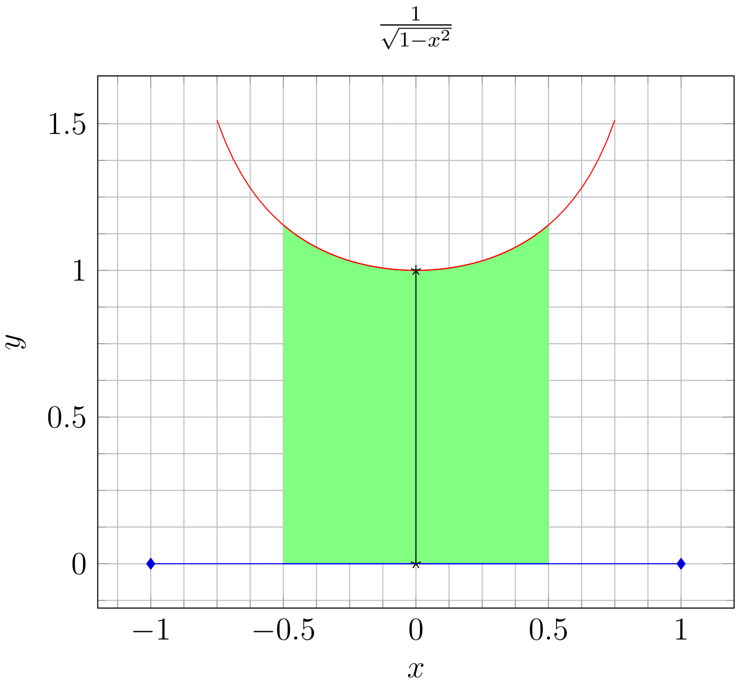
3.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left. \operatorname{arctg} x \right|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$



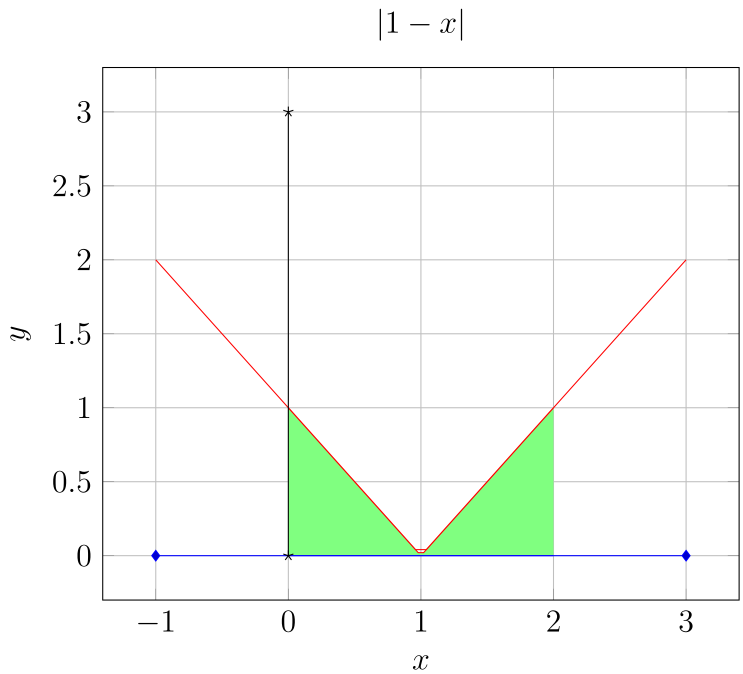
4.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin -\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



5.

$$\int\limits_0^2 |1-x|dx = \int\limits_0^1 (1-x)dx + \int\limits_1^2 (x-1)dx = \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 0 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1\right) = 1$$



3.2 Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$$

Функция $\frac{1}{x}$ не ограничена на промежутке [-1;1]: в точке 0 она не определена вовсе, значение при приближении слева стремится к $-\infty$, а при приближении справа к ∞. Кроме этого, её первообразная разрывна на промежутке [-1;1] в той же точке 0. Из всего этого уже следует невозможность применения формулы Ньютона-Лейбница.
Если вспомнить геометрический смысл определённого интеграла (площадь под графиком функции), то становится понятно, что в в "обычном" смысле посчитать его для функции $\frac{1}{x}$ не получится

3.3 С помощью определённыъ интегралов посчитать пределы следующих сумм:

Заметка: из определения интеграла по Риману можно сказать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n}\left(f\left(\frac{c}{n}\right) + f\left(\frac{2c}{n}\right) + f\left(\frac{3c}{n}\right) + ... + f\left(\frac{(n-1)c}{n}\right)\right) = \int\limits_0^c f(x)dx$$

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n-1}{n}\right)=\int\limits_0^1 xdx=$$
$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+...+\frac{n}{n+n}\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)=\int\limits_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\int\limits_0^\pi\sin xdx=-\cos x\Big|_0^\pi=$$
$$=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$$

3.4 Вычислить интегралы:

1.

$$\int\limits_1^2(x\ln x)^2dx$$
$$\int(\ln^2x)x^2dx\Rightarrow\left|u=\ln^2x, dv=x^2dx\to v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\right|\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int(\ln^2x)x^2dx=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}2\ln x\frac{1}{x}dx=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\int x^2\ln xdx=$$
$$=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\int\ln xx^2dx=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}(\ln x\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx)=$$
$$=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}(\ln x\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\int x^2dx)=(\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2x^3}{27}\int\limits_1^2(x\ln x)^2dx=$$
$$=((\ln^2x)\frac{x^3}{3}-\frac{2}{9}x^3\ln x+\frac{2x^3}{27})\Big|_1^2=$$
$$=(\ln^2 2)\frac{2^3}{3}-\frac{2}{9}2^3\ln 2+\frac{2\cdot 2^3}{27}-((\ln^2 1)\frac{1^3}{3}-\frac{2}{9}1^3\ln 1+\frac{2\cdot 1^3}{27})=$$
$$=(\ln^2 2)\frac{8}{3}-\frac{8}{9}\ln 2+\frac{8}{27}-(0\cdot\frac{1^3}{3}-\frac{2}{9}\cdot 1^3\cdot 0+\frac{2}{27})=\frac{8\ln^2 2}{3}-\frac{16\ln 2}{9}+\frac{14}{27}$$

2.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{x^2+x+1}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(\frac{1}{2}\left(2x+1\right)-\frac{1}{2}\right)dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(2x+1\right)dx}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\ln\left(3\right)}{2}-\frac{\ln\left(1\right)}{2}-\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}-\frac{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{\ln\left(3\right)}{2}-\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right)=\frac{\ln\left(3\right)}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

3.

$$\int\limits_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}dx$$

$$\int x\sqrt[3]{1-x}dx\Rightarrow\left|t=\sqrt[3]{1-x}\Rightarrow x=1-t^3;dx=-3t^2dt\right|\Rightarrow\int(1-t^3)t*(-3)t^2dt=$$

$$=-3\int(t^3-t^6)dt=-3(\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{7}t^7)+c=-3\left(\frac{1}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}\right)+c.$$

$$\int\limits_{1}^{9}x\sqrt[3]{1-x}dx=-3\left(\frac{1}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_{1}^{9}=$$

$$=-3\left(\frac{1}{4}(1-9)^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}(1-9)^{\frac{7}{3}}\right)--3\left(\frac{1}{4}(1-1)^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{7}(1-1)^{\frac{7}{3}}\right)=$$

$$=-3\left(\frac{1}{4}*16-\frac{1}{7}*(-128)\right)=-66\frac{6}{7}$$

4.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4x+\cos^4x}=\int_0^{2\pi}\frac{4dx}{3+\cos4x}\Rightarrow\left|t=4x,dt=4dx,[0;2\pi]\to[0;8\pi]\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{8\pi}\frac{dt}{3+\cos t}\xrightarrow[\text{симметрия косинуса}]{}8\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{3+\cos t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|u=\tan\frac{t}{2},du=\frac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}\to dt=2\frac{du}{1+u^2},\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},[0;\pi]\to[0;\infty]\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow8\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}=16\int\limits_{0}^{\infty}\frac{du}{4+2u^2}=8\int\limits_{0}^{\infty}\frac{du}{u^2+2}=\frac{8}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{0}^{\infty}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=2\sqrt{2}\pi$$

5.

$$\int\limits_0^\pi e^x \cos^2 x dx$$

$$\int e^x \cos^2 x dx = \int \frac{e^x \cos 2x + e^x}{2} dx = \frac{1}{2}(\int e^x \cos 2x dx + \int e^x dx);$$

$$\rhd \int e^x \cos 2x dx \Rightarrow \Big| u = e^x, dv = \cos 2x dx, v = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^x \sin 2x}{2} - \int \frac{e^x \sin 2x}{2} dx = \frac{e^x \sin 2x}{2} + + \frac{e^x \cos 2x}{4} - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x \sin 2x}{2} + \frac{e^x \cos 2x}{4}$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x \sin 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{5} \lhd$$

$$\int e^x \cos^2 x dx = \int \frac{e^x \cos 2x + e^x}{2} dx = \frac{1}{2}(\int e^x \cos 2x dx + \int e^x dx) =$$

$$= \frac{e^x \sin 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{10} + \frac{e^x}{2}$$

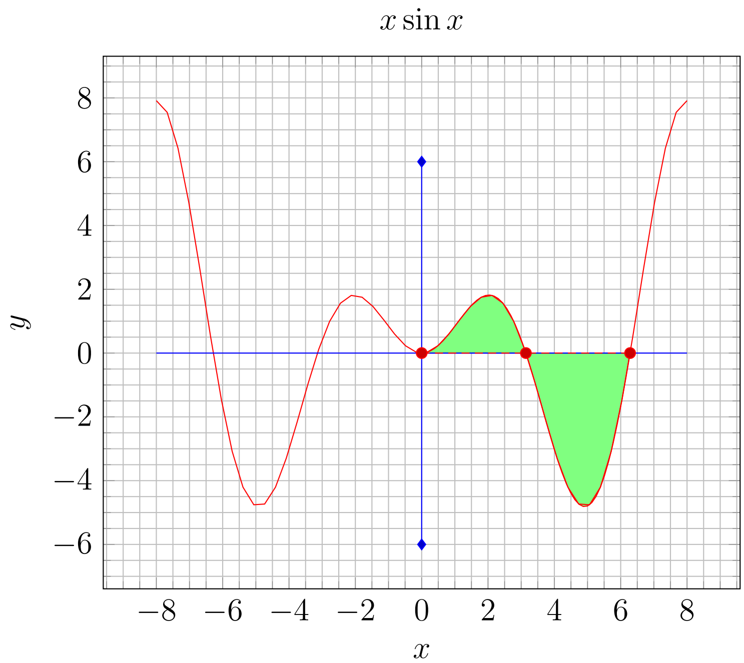
$$\int\limits_0^\pi e^x \cos^2 x dx = (\frac{e^x \sin 2x}{5} + \frac{e^x \cos 2x}{10} + \frac{e^x}{2})\Big|_0^\pi =$$

$$= (\frac{e^\pi \sin 2\pi}{5} + \frac{e^\pi \cos 2\pi}{10} + \frac{e^\pi}{2}) - (\frac{e^0 \sin 0}{5} + \frac{e^0 \cos 0}{10} + \frac{e^0}{2}) =$$

$$= \frac{3e^\pi}{5} - \frac{3}{5}$$

3.5 Определить знак интеграла:

Рассмотрим функцию $f(x) = x \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$. Заметим, что $f(x) > 0$ при $x \in (0; \pi)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (\pi; 2\pi)$ Знак интеграла определяется просто тем, какая из площадей больше - площадь под графиком при $f(x) \geq 0$ или плошадь над графиком при $f(x) \leq 0$ (площадь при $f(x) \leq 0$ отрицательна)



Как видно из графика, модуль площади при $x \in [\pi; 2\pi]$ явно больше $\Rightarrow$ знак интеграла минус. Для сущей верности посчитаем это значение и убедимся:

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi}\cos x\,dx = -2\pi\cos(2\pi) + \cos(2\pi) - \cos(0) = -2\pi$$

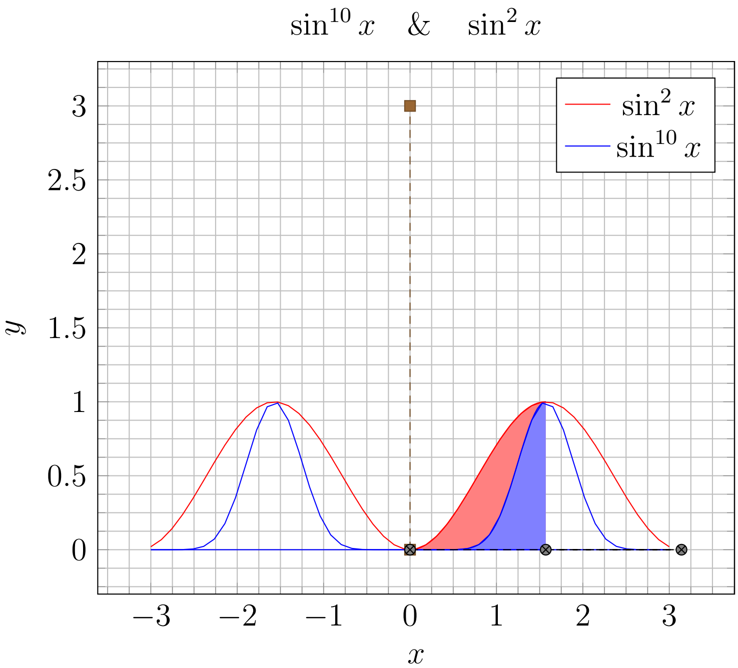
Ответ: знак минус

3.6 Какой интеграл больше:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \text{ или } \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $0 < \sin x < 1$, т.е. $0 \le \sin^{10} x < \sin^2 x$. При $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin^{10} x = \sin^2 x$ Т.е. можно утверждать, что $S_{sin^{10}x} < S_{sin^2x}$, где $S_{f(x)}$ - площадь под графиком на $[0, \frac{\pi}{2}]$ (обе функции неотрицательные и $sin^{10}x \le sin^2x$), что равносильно утверждению, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$



3.7 Определить среднее значение данных функций в указанных промежутках:

Чтобы найти среднее значение функций на промежутках, посчитаем определённый интеграл на данном промежутке (чтобы найти площадь под графиком функции), и поделим получившееся значение на длину промежутка (по сути интерпретируем площадь под графиком как прямоугольник и находим его высоту)

1.

$$f(x) = x^2 \text{ на } [0, 1]$$
$$\frac{1}{1-0}\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2.

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ на } [0, 100]$$
$$\frac{1}{100-0}\int\limits_0^{100} \sqrt{x} dx = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\bigg|_0^{100} = \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1000\right) = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

3.8 Вычислить

1.

$$\int\limits_a^{\infty} \frac{dx}{x^2}\,(a>0) = \lim_{R\to\infty}\int\limits_a^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{2}{x^3}\bigg|_a^R\right) = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{2}{R^3} + \frac{2}{a^3}\right) = \frac{2}{a^3}$$

2.

$$\int\limits_0^1 \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$$

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = \lim_{\epsilon\to 0}(x\ln x - x)\Big|_\epsilon^1 = 1 * \ln 1 - 1 - \lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon\ln\epsilon - \epsilon) = -1 - 0 = -1$$

$$P.s : \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to-\infty}\int_r^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{r\to-\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_r^0 + \lim_{R\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^R =$$
$$= \Big(0 - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) + \Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

4.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \Rightarrow \Big|t = \sqrt{1-x}, dt = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}, t^2 = 1-x, \quad x = 1-t^2\Big| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(2-1+t^2)t} = -\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t} = -2\int\frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= -2\arctan t = -2\arctan\sqrt{1-x}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{r\to 1}(-2\arctan\sqrt{1-x})\Big|_0^r = -2\arctan\sqrt{0} + 2\arctan\sqrt{1} = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

5.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} + \int \frac{dx}{2x\left(1+x^2\right)} = -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} + \int \frac{dx}{2x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} =$$

Первообразная: $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z)^2} = -\frac{1}{2z} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$

и замена: $t \to \frac{1}{x^2} \quad dx = -\frac{x^3dt}{2}$

$$= -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{4}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \int\limits_1^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{x^2\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{4}\right)\Bigg|_\epsilon^1 + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{x^2\ln x}{2\left(1+x^2\right)} - \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{4}\right)\Bigg|_1^R =$$

$$= -\frac{\ln 2}{4} - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon^2\ln\epsilon}{2\left(1+\epsilon^2\right)} - \frac{\ln\left(1+\epsilon^2\right)}{4}\right) + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^2\ln R}{2\left(1+R^2\right)} - \frac{\ln\left(1+R^2\right)}{4}\right) + \frac{\ln 2}{4} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon^2\ln\epsilon}{2\left(1+\epsilon^2\right)} - \frac{\ln\left(1+\epsilon^2\right)}{4}\right) + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^2\ln R}{2\left(1+R^2\right)} - \frac{\ln\left(1+R^2\right)}{4}\right).$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon^2\ln\epsilon}{2\left(1+\epsilon^2\right)} - \frac{\ln\left(1+\epsilon^2\right)}{4}\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon^2\ln\epsilon}{2\left(1+\epsilon^2\right)}\right) - \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\ln\left(1+\epsilon^2\right)}{4}\right) =$$

$$= \frac{\lim_{\epsilon\to 0}\left(\epsilon^2\ln\epsilon\right)}{\lim_{\epsilon\to 0}\left(2\left(1+\epsilon^2\right)\right)} - 0 = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\epsilon^2\ln\epsilon\right) = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\ln\epsilon}{\frac{1}{\epsilon^2}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\epsilon}}{-\frac{2}{\epsilon^3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) = \boxed{0}$$

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R^2\ln R}{2\left(1+R^2\right)} - \frac{\ln\left(1+R^2\right)}{4}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{2R^2\ln R - (1+R^2)\ln(1+R^2)}{4(1+R^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\left(\frac{2\ln R - \frac{\ln(1+R^2)}{R^2} - \ln(1+R^2)}{(1+\frac{1}{R^2})}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\lim_{R\to\infty}\left(2\ln R - \frac{\ln(1+R^2)}{R^2} - \ln(1+R^2)\right)}{\lim_{R\to\infty}(1+\frac{1}{R^2})} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\left(2\ln R - \frac{\ln(1+R^2)}{R^2} - \ln(1+R^2)\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(2\ln R - \ln(1+R^2)\right) - \lim_{R\to\infty}\left(\frac{\ln(1+R^2)}{R^2}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\ln\frac{R^2}{1+R^2}\right) - 0 =$$

$$= \ln\left(\lim_{R\to\infty}\frac{R^2}{1+R^2}\right) = \ln\left(\lim_{R\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{R^2}}\right) = \ln 1 = \boxed{0}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = 0 - 0 = 0$$

3.9 Исследовать на сходимость интегралы

1.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$$

Единственная "особенность " интеграла встречается на ∞.

Рассмотрим критерий Коши:

$$\forall\epsilon>0\exists\epsilon_1,\epsilon_2\in U(\infty):\left|\int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}\right|<\epsilon$$

$$\int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}<\int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}\frac{x^2dx}{x^4-x^2}=\int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)\Big|_{\epsilon_1}^{\epsilon_2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\epsilon_2\to\infty}\ln\left|\frac{1-\epsilon_2}{1+\epsilon_2}\right|-\frac{1}{2}\lim_{\epsilon_1\to\infty}\ln\left|\frac{1-\epsilon_1}{1+\epsilon_1}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\lim_{\epsilon_2\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\epsilon_2}-1}{\frac{1}{\epsilon_2}+1}\right|\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\lim_{\epsilon_1\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\epsilon_1}-1}{\frac{1}{\epsilon_1}+1}\right|\right)=\frac{1}{2}(\ln 1-\ln 1)=0<\epsilon,\text{ т.е.}$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}\text{ сходится}$$

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\geq 0\Rightarrow\int\limits_0^\infty\left|\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}\right|=\int\limits_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}\Rightarrow$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}\text{ сходится абсолютно}$$

2.

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\leq\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2}}=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}=\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\Big|_1^\infty=\frac{3}{2},\text{ т.е.}$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\text{ сходится}$$

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\geq 0\text{ при }x\in[1;+\infty]\Rightarrow\int\limits_1^\infty\left|\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\right|=\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\Rightarrow$$

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\text{ сходится абсолютно}$$

3.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$$

Особенность в точке 1.

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

Рассмотрим $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x} > \int\limits_1^2 \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1)\Big|_1^2 = \ln(2-1) - \ln(1-1) = \infty \Rightarrow$$

$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ расходится

4.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

Рассмотрим функцию в окресности 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \underline{O}(x^6)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(x - \frac{x^3}{3} + \underline{O}(x^5) \right) = 0$$

Оставшаяся "особенность" - на ∞. Рассмотрим критерий Коши

$$\forall \epsilon > 0 \exists \epsilon_1, \epsilon_2 \in U(\infty) : \left| \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\sin^2 x}{x} dx \right| < \epsilon$$

$$\int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{1-\cos 2x}{2x} dx = \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{1}{2x} dx - \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{\ln x}{2}\Big|_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} - \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\cos 2x}{2x} dx =$$

$= \infty - \infty - \int\limits_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\cos 2x}{2x} dx$; Неопределённость, т.е. критерий явно не выполнен $\Rightarrow$

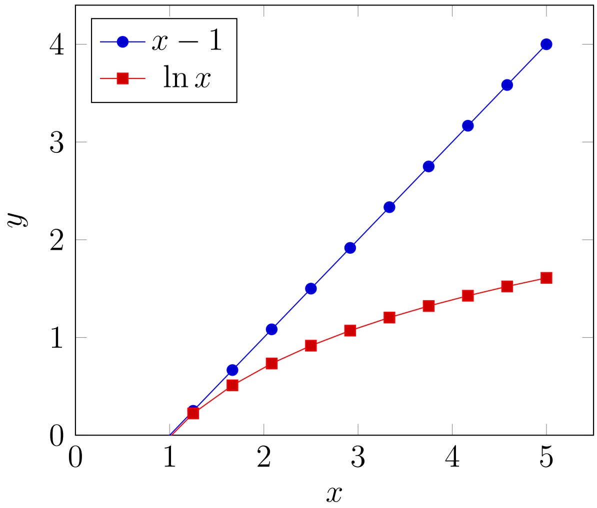
$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится

5.

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

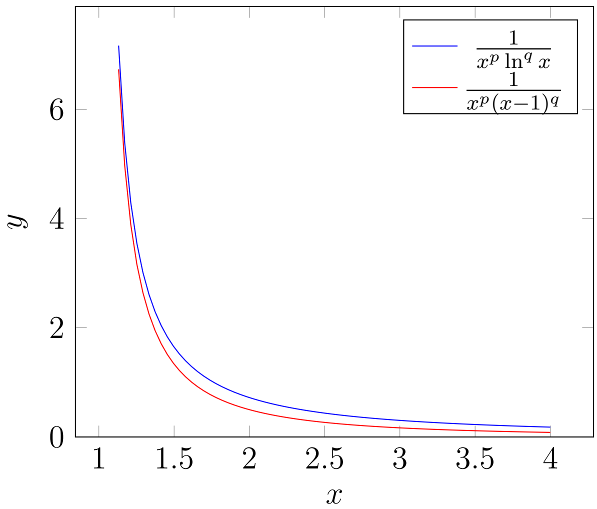
Рассмотрим $y = \ln x$ и $y = x - 1$ при $x \geq 1$.

$x - 1, \ln x$



Понятно, что $\ln x \leq x - 1$ при $x \geq 1$ (да и на всей оси определения в целом)
Тогда $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x-1}$, т.е.
$\frac{1}{x^p \ln^q x} \geq \frac{1}{x^p (x-1)^q}$ (обе функции неотрицательные на промежутке рассмотрения)

$\frac{1}{x^p \ln^q x} \geq \frac{1}{x^p (x-1)^q}$



(a) Для $p > 0, q > 0$:

$$\frac{1}{x^p(x-1)^q} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + ... + \frac{A_p}{x^p} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + ... + \frac{B_q}{(x-1)^q}$$

т.е. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^p(x-1)^q} = A_1 \ln x - \frac{A_2}{x} - \frac{A_3}{2x^2} - ... - \frac{A_p}{(p-1)x^{p-1}} +$

$$+ B_1 \ln(x-1) - \frac{B_2}{x-1} - ... - \frac{B_q}{(q-1)(x-1)^{q-1}}$$

Подсчёт интеграла $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p(x-1)^q}$ сведётся к пределу

$$\lim_{R\to\infty} (A_1 \ln R + B_1 \ln(R-1)) = \infty$$

т.е. интеграл не сойдётся (можно сказать, что площадь под графиком бесконечна) Но, как мы установили, $\frac{1}{x^p \ln^q x} \geq \frac{1}{x^p(x-1)^q}$ на рассматриваемом промежутке (и обе функции неотрицательны), т.е. площадь под графиком $\frac{1}{x^p \ln^q x}$ $\Big($она же $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}\Big)$ больше площади под графиком $\frac{1}{x^p(x-1)^q}$, которая, как мы установили, бесконечна. Отсюда получается очевидный вывод, что площадь под графиком $\frac{1}{x^p \ln^q x}$ тоже бесконечна, или, иными словами, $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ разойдётся.

(b) Для $p > 0, q = 0$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^R = \frac{1}{p-1}$$ при $p > 1$. При $p = 1$ интеграл разойдётся

В этом пункте нам даже не нужна была замена логарифма на x-1

(c) Для $p > 0, q < 0$:

$$t = -q, t > 0.$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^\infty \frac{\ln^t x}{x^p} dx$$

Проинтегрируем по частям:

$$\int \frac{\ln^t x}{x^p} dx = -\frac{\ln^t x}{(p-1)x^{p-1}} + \frac{t}{p-1} \int \frac{\ln^{t-1} x}{x^p} (\text{для } p > 1)$$

Получили формулу понижения степени, из чего получается:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln^t x dx}{x^p} = \lim_{R\to\infty} \left(-C_0 \frac{\ln^t x}{x^{p-1}} - C_1 \frac{\ln^t -1x}{x^{p-1}} - ... - C_t \frac{1}{x^{p-1}} \right)\Bigg|_1^R$$

$$\boxed{\text{Заметка: } \forall a \in R, b > 0 : \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^a x}{x^b} = 0}$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln^t x dx}{x^p} = 0 - (-C_t) = C_t \Rightarrow \text{сходится}$$

для p=1: $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\ln^t x}{x^p} dx = \frac{\ln^{t+1} x}{t+1}\Bigg|_1^\infty = \infty \Rightarrow$ не сходится

(d) Для $p = 0, q > 0$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x-1)^q} = -\frac{1}{(q-1)(x-1)^{q-1}}\Bigg|_1^\infty (\text{при q>1}) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{(q-1)(R-1)^{q-1}} - \lim_{\epsilon\to 1+0} -\frac{1}{(q-1)(\epsilon-1)^{q-1}} = \infty.$$

при $q = 1$: $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x-1)^q} = \ln(x-1)|_1^\infty = \lim_{R\to\infty} \ln(R-1) - \lim_{\epsilon\to 1+0} \ln(\epsilon - 1) = \infty.$

Делаем аналогичный пункту 1 вывод

(e) Для $p = q = 0$:

$$\int\limits_1^\infty dx = \lim_{R\to\infty} x\Big|_1^R = \infty. \text{ (т.е. разойдётся)}$$

(f) Для $p = 0, q < 0$:

$$t = -q, t > 0.$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^\infty \ln^t x dx. \quad \ln^t x \text{ - монотонно возрастающая функция}$$

т.е. очевидно расходится

(g) Для $p < 0, q > 0$:

$$t = -p, t > 0.$$
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^\infty \frac{x^t}{\ln^q x} dx \geq \int\limits_1^\infty \frac{x^t}{(x-1)^q} dx$$
$$\frac{x^t}{(x-1)^q}:$$

ситуация подобна пункту a). После деления числителя на знаменатель (для $t \geq q$) или разложения на дроби (для $t < q$) останется дробь вида $\frac{C}{x-1}$, которая после взятия интеграла станет логарифмом, стремящимся к ∞ при $x \to \infty$, т.е. интеграл расходится

Можно было сказать и проще, что $\frac{x^t}{(x-1)^q} \to \infty$ при $x \to \infty$ (поскольку логарифм растёт медленнее любой степенной функции, при стремлении x на бесконечность функция начнёт возрастать)

(h) Для $p < 0, q = 0$:

$$t = -p, t > 0.$$
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^\infty x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1}\Big|_1^\infty = \infty \Rightarrow \text{расходится}$$

(i) $p < 0, q < 0$:

$$a = -p, a > 0; b = -q, q > 0$$
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p \ln^q x} = \int\limits_1^\infty x^a \ln^b x dx$$

Очевидно, что при $x \geq 1: \quad x^a \ln^b x$ - монотонно возрастающая функция, т.е. интеграл расходится

Итог: интеграл сходится при $p > 1, q \leq 0$

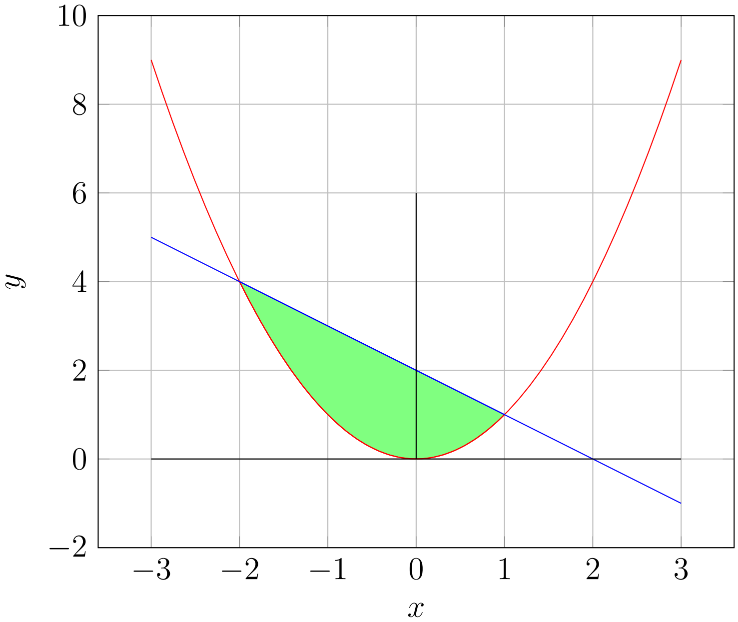
3.10 Найти площади фигур, ограниченных кривыми заданными в прямоугольных координатах:

1. $y = x^2, x + y = 2$

Найдём точки пересечения:

$$y = x^2$$
$$x + y = 2 \to x + x^2 = 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2; x = 1$$
$$S = \left|\int\limits_{-2}^1 x^2 dx - \int\limits_{-2}^1 (2-x) dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1 - \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^1\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 + \frac{1}{2} - 4 - \frac{4}{2}\right| = 4.5$$

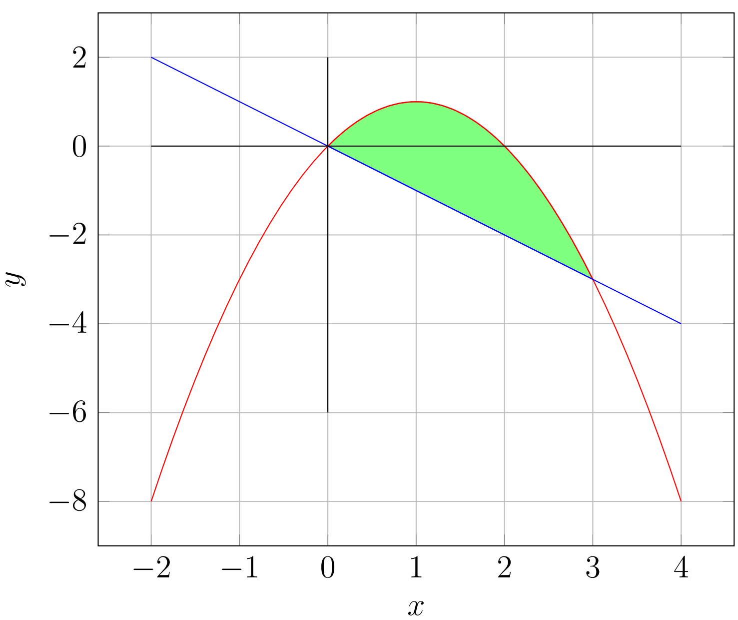
$x^2; x + y = 2$



2. $y = 2x - x^2, x + y = 0$ Найдём точки пересечения:

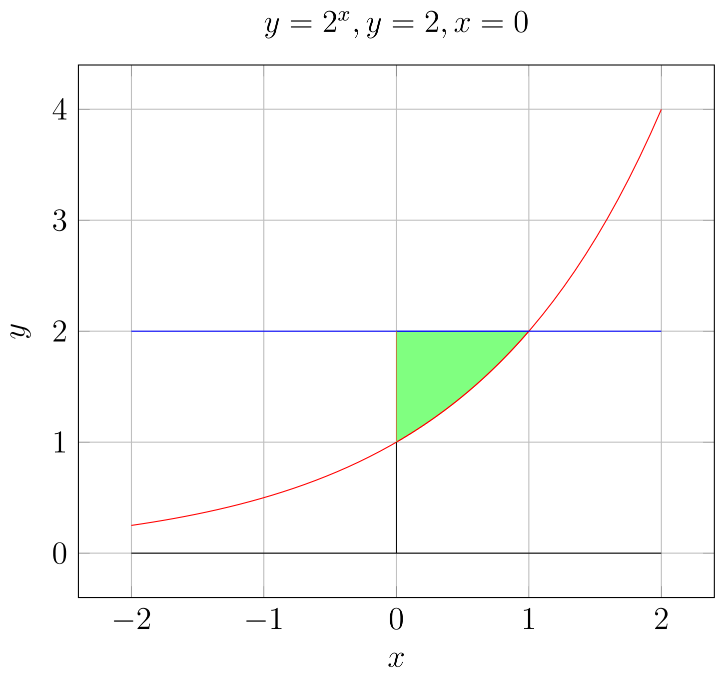
$$y = 2x - x^2$$
$$x + y = 0 \rightarrow x + 2x - x^2 = 0$$
$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3$$
$$S = \left| \int\limits_0^3 (2x - x^2)dx - \int\limits_0^3 (-x)dx \right| = \left| \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 - \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 \right| =$$
$$= \left| 9 - 9 + \frac{9}{2} \right| = 4.5$$

$y = 2x - x^2; x + y = 0$



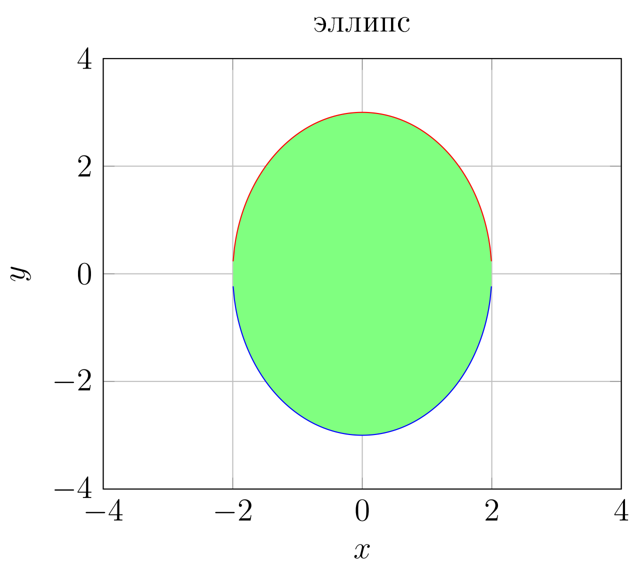
3. $y = 2^x, y = 2, x = 0$ Найдём точки пересечения:

$$(y = 2^x)\&(y = 2) : (1, 2)$$
$$(y = 2^x)\&(x = 0) : (0, 1)$$
$$(y = 2)\&(x = 0) : (0, 2)$$
$$S = \left| \int\limits_0^1 (2^x)dx - \int\limits_0^1 (2)dx \right| = \left| \left(\frac{2^x}{\ln 2}\right)\Big|_0^1 - (2x)\Big|_0^1 \right| = \left| \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - 2 \right| = 2 - \frac{1}{\ln 2}$$



4.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$



$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

$y=\pm 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$; y=0 при x=2;-2

$$\int\limits_{-2}^{2} 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$$

$$\int 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = 3\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \left|\frac{x}{2}=\sin t; \frac{dx}{2}=\cos t dt\right| = 3\int \sqrt{1-\sin^2 t} * 2\cos t dt =$$

$$= 6\int \cos^2 t dt = 6\int \frac{\cos 2t+1}{2}dt = 6\int \frac{\cos 2t}{2}dt + 3\int dt = 6\frac{\sin 2t}{4}+3t+c=$$

$$= 3\sin t\cos t + 3t + c = 3\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 3\arcsin\frac{x}{2} + c$$

$$\int\limits_{-2}^{2} 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx = 3\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 3\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_{-2}^{2} = 3\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) = 3\pi$$

Понятно, что площадь нижней части графика тоже равна 3π.

Т.е. общая площадь равна 6π

4 Равномерная сходимость

4.1 Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

1.

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\sin x dx, (0 < a < \infty)$$

Рассмотрим критерий Коши:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists C > 0 : \forall c_2 > c_1 > C, \forall a \in (0, \infty) : \left|\int\limits_{c_1}^{c_2} e^{-ax}\sin x dx\right| < \epsilon$$

$c_1 = 2k\pi, c_2 = (2k+1)\pi$ (такие k найдутся для любого C) :

$$\left|\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\sin x dx\right| = \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-ax}\sin x dx \geq e^{-a(2k+1)\pi}\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin x dx =$$

$$= e^{-a(2k+1)\pi}(-\cos x)\Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2e^{-a(2k+1)\pi}$$

Если, например, $a = \dfrac{1}{(2k+1)\pi}$:

$\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} e^{-ax}\sin x dx\right| \geq \dfrac{2}{e}$, т.е. критерий не выполнен $\Rightarrow$

интеграл НЕ сходится равномерно

2.

$$\int\limits_1^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx, (a < \alpha < b)$$

В рамках данной задачи будем рассматривать числа a и b как КОНКРЕТНО заданные параметры

$$\int\limits_1^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx \leq \int\limits_1^{\infty} x^{b}e^{-x}dx = -e^{-x}(x^b + d_1x^{b-1} + ... + d_b)\Big|_1^{\infty} = \frac{1 + d_1 + ... + d_b}{e} \Rightarrow$$

исходный интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса

3.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx, (-\infty \le a \le \infty)$$

$$\left| \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx \right| \le \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$ равномерно сходится по признаку Вейерштрасса

Проведя агналогичное рассуждение для $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$

получаем, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$ сходится равномерно

4.

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+1}, (0 \le a \le \infty)$$

Рассмотрим критерий Коши:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists C > 0 : \forall c_2 > c_1 > C, \forall a \in (0, \infty) : \left| \int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{(x-a)^2+1} \right| < \epsilon$$

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{(x-a)^2+1} = \arctan(x-a)\Big|_{c_1}^{c_2} = \arctan(c_2 - a) - \arctan(c_1 - a)$$

Пусть, например: $a = c_1; c_2 = 2c_1$. Тогда:

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{(x-a)^2+1} = \arctan c_1 - \arctan 0 = \arctan c_1 > \epsilon \Rightarrow$$

$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+1}$ НЕ сходится равномерно (проблема при $a \to \infty$)

5.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

По упрощённому признаку Абеля, если

$\exists C > 0 : \forall a, x > 0 : \left| e^{-ax} \right| \leq C$ и

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, то

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ сходится равномерно.

Для $a > 0, x > 0 : e^{-ax} \leq 1$

Теперь разберёмся с $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \underline{O}(x^5)}{x} = \lim_{x \to 0} (1 - \frac{x^2}{6} + \underline{O}(x^4)) = 1$$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$, т.е. на промежутке $[0, 1]$ проблем нет

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}$$

$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$, т.е. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}$ сходится $\Rightarrow$

$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится, т.е.

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится $\Rightarrow$

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ сходится равномерно (при a>0)

4.2 Вычислить интегралы:

1.

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, (\alpha > 0, \beta > 0)$$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx; I(\beta) = 0$$

$$I^{'}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{-xe^{-\alpha x}}{x} dx = -\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right|_0^\infty = -\frac{1}{\alpha}$$

$$I^{'}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha}$$

$$I(\alpha) = -\int \frac{1}{\alpha} d\alpha = -\ln(\alpha) + c; I(\beta) = 0 \Rightarrow -\ln(\beta) + c = 0 \Rightarrow c = \ln(\beta)$$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \ln(\beta) - \ln(\alpha)$$

2.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx, (|\alpha|<1)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow \left|x=\cos\phi; dx=-\sin\phi d\phi; [0,1]\to[\frac{\pi}{2},0]\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\ln(1-\alpha^2\cos^2\phi)}{\cos^2\phi\sqrt{1-\cos^2\phi}}\sin\phi d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1-\alpha^2\cos^2\phi)}{\cos^2\phi}d\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|t=\tan\phi; dt=\frac{d\phi}{\cos^2\phi}; cos^2\phi=\frac{1}{\tan^2\phi+1}=\frac{1}{t^2+1}; [0,\frac{\pi}{2}]\to[0,\infty]\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \ln\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2+1}\right)dt = \int_0^{\infty}\ln\left(\frac{t^2+1-\alpha^2}{t^2+1}\right)dt = \int_0^{\infty}\big(\ln(t^2+1-\alpha^2)-\ln(t^2+1)\big)\,dt =$$

$$= t\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2+1}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{2t}{t^2+1}\right)$$

$$\lim_{t\to 0} t\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2+1}\right)=0;$$

$$\lim_{t\to\infty} t\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2+1}\right)=0 \Rightarrow$$

$$t\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{t^2+1}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{2t}{t^2+1}\right) = -\int_0^{\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{2t}{t^2+1}\right) =$$

$$= -2\int_0^{\infty}\left(\frac{t^2}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{t^2}{t^2+1}\right) = -2\int_0^{\infty}\left(\frac{t^2+1-\alpha^2-(1-\alpha^2)}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\right) =$$

$$= 2\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\alpha^2}{t^2+1-\alpha^2}-\frac{1}{t^2+1}\right) = 2\int_0^{\infty}\frac{1-\alpha^2}{t^2+1-\alpha^2}dt - 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2+1}dt - 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} = 2\sqrt{1-\alpha^2}\int_0^{\infty}\frac{d(\frac{t}{\sqrt{1-\alpha^2}})}{\left(\frac{t}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2+1} - 2\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2(\sqrt{1-\alpha^2}-1)\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1} = 2(\sqrt{1-\alpha^2}-1)\cdot\frac{\pi}{2} = \pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$$