Типовичочек

Олежа

1 Неопределённый интеграл

1.3 $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx = |x=t^2, dx=2tdt| = \int \left(1-\frac{1}{t^4}\right)\sqrt{t^3}2tdt = 2\int t^{\frac{5}{2}}dt - 2\int t^{-\frac{3}{2}}dt = 2*\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - 2*(-2)t^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4}{x^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{x^2}{7}+1\right) + c$

1.7 $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x}}dx = |t=\sqrt{2-x} \Rightarrow x = 2-t^2; dx = -2tdt| = \int \frac{(2-t^2)^3}{t}(-2tdt) = -2\int (2-t^2)^3 dt = -2\int (8-12t^2+6t^4-t^6)dt = -2(8t-4t^3+\frac{6}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7)+c = -2\sqrt{2-x}(8-4(2-x)+\frac{6}{5}(2-x)^2-\frac{1}{7}(2-x)^3)+c$

1.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = |t=\sqrt{1+e^x} \Rightarrow e^x = t^2-1; e^x dx = 2tdt \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2-1}| = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\int \frac{1}{2}\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt = \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln(t-1) - \ln(t+1) + c = \ln(\sqrt{e^x+1}-1) - \ln(\sqrt{e^x+1}+1) + c$

1.15 $\int xe^{-x}dx = x*(-e^{-x}) - \int 1*(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

1.19 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{1-x^2-2x-2}dx = -\int \frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x^2+2x+1}dx = -\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{(x+1)^2}dx = |t = x+1; dt = dx| = \frac{1}{x+1} + \int \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}dt = \frac{1}{x+1} + \int \frac{t^2+1}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt = \frac{1}{x+1} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(t) + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}} = |k = \frac{1}{t^2}; dk = -\frac{2dt}{t^3} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}t^3dk| = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{tdk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{1}{k}}dk}{\sqrt{\frac{1}{k}+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dk}{\sqrt{k+1}} = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{k+1} + c = \frac{1}{x+1} + \operatorname{arsh}(x+1) - \sqrt{\frac{1}{x^2+1}+1} + c = \frac{1+(x+1)\operatorname{arsh}(x+1)-\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} + c$

2 Понятие о дифференциальном исчислении функций многих переменных

2.1 Найти частные производные первого и второго порядков от следующих функицй

2.1.1 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

$\frac{\delta f}{\delta x} = 4x^3 - 8y^2x$; $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 12x^2 - 8y^2$; $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = -16xy$

$\frac{\delta f}{\delta y} = 4y^3 - 8x^2y$; $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 12y^2 - 8x^2$; $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = -16xy$

2.1.5 $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\delta f}{\delta x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}*2x*x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = -\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(-2x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$;

$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = -x*(-\frac{3}{2})\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}*2y = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta z} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta z} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

$\frac{\delta f}{\delta z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta z \delta x} = \frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$; $\frac{\delta^2 f}{\delta z \delta y} = \frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$

2.2 Проверить равенство:

2.3 Найти указанные частные производные:

2.3.1 $\frac{\delta^3 u}{\delta^2 x \delta y}$, где $u = x\ln(x)y$

$\frac{\delta u}{\delta x} = y(\ln x + 1)$; $\frac{\delta^2 u}{\delta^2 x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\delta^3 u}{\delta^2 x \delta y} = \frac{1}{x}$

2.4 Показать, что в функция

2.5 Найти дифференциал указанного порядка в следующих примерах:

2.5.2 d^3u, если $u = sin(x^2+y^2)$
$\frac{\delta u}{\delta x} = \cos(x^2+y^2)*2x$; $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -\sin(x^2+y^2)*2x*2x+2\cos(x^2+y^2) = 2\cos(x^2+y^2)-4x^2\sin(x^2+y^2)$;
$\frac{\delta^3 u}{\delta x^3} = -2\sin(x^2+y^2)*2x-4(2x\sin(x^2+y^2)+\cos(x^2+y^2)*2x*x^2) = -4x(3\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2))$;
$\frac{\delta^3 u}{\delta x^2\delta y} = -2\sin(x^2+y^2)*2y-4x^2\cos(x^2+y^2)*2y = -4y(\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2))$;
$\frac{\delta^3 u}{\delta y^3} = -4y(3\sin(x^2+y^2)+2y^2\cos(x^2+y^2))$; $\frac{\delta^3 u}{\delta x^2\delta y} = -4x(\sin(x^2+y^2)+2y^2\cos(x^2+y^2)$;

$d^3u = -4x(3\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2))dx^3-12y(\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2))dx^2dy-12x(\sin(x^2+y^2)+2y^2\cos(x^2+y^2)dxdy^2-4y(\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2))dy^3$

2.6 Найти производные первого и второго порядков от следующих сложных функций:

2.6.1 $u = f(x^2+y^2+z^2)//TODO$

3 Интеграл Римана

3.1 применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти следующие интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади

3.1.3 $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

3.2 Объяснить почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам:

3.3 С помощью неопределённых интегралов посчитать пределы следующих сумм:

3.3.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+...+\frac{n}{n+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+...+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int\limits_0^1\frac{1}{1+x}dx = \ln(x+1)|_0^1 = \ln 2$