Пусть $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\frac{1}{x}) = L$. Тогда: $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0$: $|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.
$(f(x) = \cos\frac{1}{x})$

возьмём x_1, x_2: $|x_1|<\delta$, $|x_2|<\delta$. Тогда

$|f(x_1)-L|<\varepsilon$, $|f(x_2)-L|<\varepsilon$. $|f(x_1)-f(x_2)| =$

$= |f(x_1)-L+L-f(x_2)| < |f(x_1)-L| + |f(x_2)-L| = 2\varepsilon$.

т.е. $|f(x_1)-f(x_2)|<2\varepsilon$. ε - любое. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$, т.е.

$|f(x_1)-f(x_2)| < 2\cdot\frac{1}{2} = 1$. Однако, для $\forall \delta>0 \; \exists \; n\in\mathbb{N}$:

$x_1 = \frac{1}{2n\pi}$ и $x_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, $|x_1|<\delta$, $|x_2|<\delta$. Тогда

$|f(x_1)-f(x_2)| = |\cos(2\pi n) - \cos(2\pi n+\pi)| = |1-(-1)| = 2$.

но $|f(x_1)-f(x_2)|<1$: противоречие $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(\cos\frac{1}{x})$ не существует,

а значит $\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ тоже не существует. Т.е.

при $x\to 0$ $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ - разрывная.

992. $f(x) = x^n\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ $f(0)=0$.

а) если $n>0$: $|x^n\sin\frac{1}{x}| \le |x|^n \underset{\text{при } x\to 0}{\to} 0$, т.е. $f(x)\underset{\text{при } x\to 0}{\to} 0 \Rightarrow$ при $n>0$

$f(x)$ непрерывна при $x=0$.

если $n<0$: $x_k = \frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}$. $x_k \underset{\text{при } k\to\infty}{\to} 0$

$\underset{k\to\infty}{f(x_k)} = \left(\frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}\right)^n \underbrace{\sin(2\pi k+\frac{\pi}{2})}_{=1} = \left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)^{-n} \to \infty$, т.е. при $n<0$ $f(x)$

разрывная при $x=0$.

если $n=0$: $x_k = \frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}$. $x_k \underset{\text{при } k\to\infty}{\to} 0$ $\underset{k\to\infty}{f(x_k)} = \sin(2\pi k+\frac{\pi}{2}) = 1$, т.е. $\neq 0$

при $n=0$ $f(x)$ разрывная при $x=0$.

Итого: ответ для а) при $n>0$.