функция, не имеющая предела ни в одной точке множества $X = \mathbb{R}$: функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

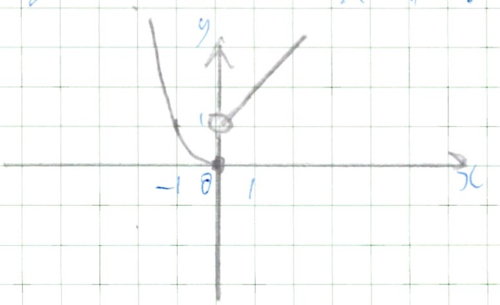
т.е. $D(x) = 1$, если x - рациональное и $D(x) = 0$, если x иррациональное.

Проверим это:

пусть $x_0 \in \mathbb{R}$; $\{x_n\} \to x_0$, причём $x_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $f(x_n) = 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

А если $\{x_n\} \to x_0$, но все $x_n \in \mathbb{I}$, то $f(x_n) = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. В одной точке получилось 2 разных предела - т.е. предела в этой точке нет. Это справедливо для любой точки.

функция, не имеющая предела ровно в одной точке множества $X = \mathbb{R}$: например, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \le 0 \\ x+1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$



143581, Московская обл., Истринский р-н,
д. Аносино, ул. Университетская, вл. 11
Тел.: +7 (495) 665 43 40