$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=0$$

3) проверим, что частные производные непрерывны.

$$f'_x=\frac{2xe^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \text{ при } x^2+y^2>0; \quad f'_x(0,0)=0.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xe^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}=\cancel{\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xe^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}}$$

перейдём к полярным координатам: $\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}, r\to 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xe^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\varphi\cdot e^{-\frac{1}{r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}}}{(r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))^2}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\varphi\cdot e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}=\lim_{r\to 0}\frac{2\cos\varphi\cdot e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^3}=\lim_{r\to 0}2\cos\varphi\cdot\frac{\frac{1}{r^3}}{e^{\frac{1}{r^2}}}=$$

$$=\cancel{\lim_{r\to 0}}\ 2\cos\varphi\cdot\underbrace{\lim_{r\to 0}\frac{3}{2}\frac{\frac{1}{r}}{e^{\frac{1}{r^2}}}}_{(\text{см. п.2})}=0=f'_x(0,0),$$ т.е. f'_x – непрерывна в $O(0,0)$.

для f'_y действия аналогичны.

f'_x, f'_y – непрерывны в $O(0,0)\Rightarrow f$ дифференцируема в $O(0,0)$.

3252. $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $x^2+y^2\neq 0$; $f(0,0)=0$.

1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left|\begin{array}{l}\text{переход к}\\ \text{поляр. коорд}\\ \begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases}, r\to 0\end{array}\right|=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{|r|}=$$

$$=\lim_{r\to 0}|r|\sin\varphi\cos\varphi=0=f(0,0),$$ т.е. $f(x,y)$ непрерывна в окр. $(0,0)$.

2) частные производные:

$$f'_x=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f'_y=\frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{по аналогии})$$

$$f'_x(0)=\frac{\frac{(0+h)\cdot 0}{|h|}-0}{h}=0; \quad f'_y(0)=0.$$