Università degli Studi di Milano
Facoltà di Scienze e Tecnologie
Corso di Laurea in Sicurezza dei sistemi e delle reti informatiche

CRITTOGRAFIA POST-QUANTISTICA BASATA SUI RETICOLI: IMPLEMENTAZIONE E CRITTOANALISI DI GGH

Relatore: Prof. Stelvio CIMATO

Tesi di:
Gabriele BOTTANI
Matricola: 01701A

Anno Accademico 2023-2024

dedicato a ...

Prefazione

hkjafgyruet.

Organizzazione della tesi

La tesi è organizzata come segue:

- nel Capitolo 1 ...

Ringraziamenti

asdjhgftry.

Indice

ii

Prefazione **iii**

Ringraziamenti **iv**

1 Introduzione **1**

2 Proprietà e problemi sui reticoli **2**
2.1 Reticoli 2
2.1.1 Nozioni base 2
2.1.2 Dominio Fondamentale 4
2.2 Problemi sui reticoli 5
2.3 Riduzione di un reticolo 6
2.3.1 Rapporto di Hadamard 6
2.3.2 Ortogonalizzazione Gram-Schmidt 6
2.3.3 Algoritmo di Lenstra-Lenstra-Lovász 7
2.3.4 Varianti di LLL 9
2.4 Algoritmi per la risoluzione del CVP 10
2.4.1 Algoritmi di Babai 10
2.4.2 Tecnica di incorporamento 13

Capitolo 1

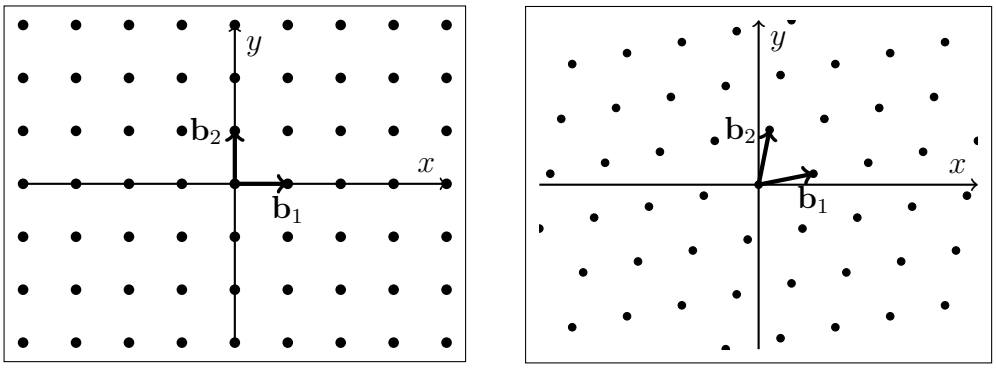
Introduzione

Capitolo 2

Proprietà e problemi sui reticoli

2.1 Reticoli

2.1.1 Nozioni base



(a) $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^n$ (b) $\mathcal{L} = \mathbf{B}\mathbb{Z}^n$ dove $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times n}$

Figura 1: Due esempi di strutture reticolari

Un reticolo è un insieme di punti in uno spazio di dimensione n che forma una struttura periodica. Ogni punto del reticolo può essere generato come combinazione lineare di n vettori, chiamati base, che sono linearmente indipendenti tra loro. La struttura e le proprietà di un reticolo dipendono dai vettori di base che, partendo dall'origine, definiscono il suo pattern di disposizione indicando le direzioni e le distanze tra i punti del reticolo.
Proprietà fondamentale che sta alla base della definizione di reticolo è la proprietà dei coefficienti integrali: la base di un reticolo ha sempre coefficienti integrali, il che significa che tutti i vettori nella base sono combinazioni lineari intere l'uno dell'altro.

I reticoli possono essere formati in diversi modi, il più comune è il reticolo quadrato (Figura 1a) nel quale la base è allineata con gli assi cartesiani. Le altre varianti sono ottenibili applicando delle trasformazioni lineari alla base del reticolo quadrato (Figura 1b).
I reticoli possono essere definiti in uno spazio bidimensionale o tridimensionale, ma il concetto può essere esteso a spazi di dimensioni superiori. La rappresentazione dei vettori in questa tesi è quella per colonna, in quanto gli autori di [5] hanno preso questa decisione per la rappresentazione del loro crittosistema a chiave pubblica Goldreich Goldwasser Halevi (GGH), oggetto di questa tesi. Quindi per esempio, una matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sarà divisa in vettori $[\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b}_n]$.
Più formalmente, dati n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$, il reticolo generato da essi è un set di vettori

$$\mathcal{L}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i \cdot \mathbb{Z} = \left\{ \mathbf{Bx} : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

I vettori $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sono noti come base del reticolo. Lo stesso reticolo può avere più basi

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i \cdot \mathbb{Z}.$$

Una base può essere rappresentata da una matrice $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avente i vettori base come colonne. Utilizzando la matrice come notazione, il reticolo generato da una matrice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ può essere definita come $\mathcal{L}(\mathbf{B}) = \left\{ \mathbf{Bx} : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \right\}$, dove $\mathbf{Bx}$ è una comune moltiplicazione matriciale.
Il determinante di un reticolo è il valore assoluto del determinante della matrice base $\det(\mathcal{L}(\mathbf{B})) = |\det(\mathbf{B})|$. Di conseguenza se $\mathbf{U}$ è una matrice unimodulare, avente quindi determinante +1 o -1, le basi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{BU}$ generano lo stesso reticolo.

2.1.2 Dominio Fondamentale

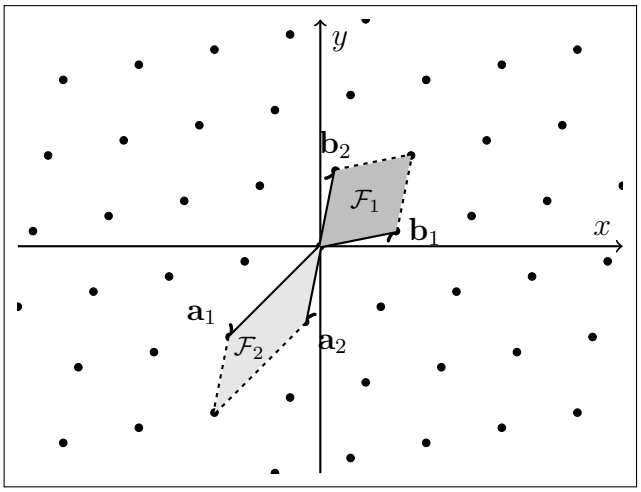


Figura 2: Un reticolo con due suoi domini fondamentali

Il dominio fondamentale è un concetto molto importante nei reticoli, grazie al quale è possibile capire la struttura matematica che li compone. Data una base abritraria $\mathbf{B}$ e un reticolo $\mathcal{L}$ è possibile immaginare il dominio fondamentale come un parallelepipedo che ha come vertici i vettori base $\mathbf{b}$ generanti il reticolo, il punto di origine e come quarto punto la somma dei vettori base all'origine.
Di tale parallelepipedo è possibile calcolarne il volume $\mathcal{F}(\mathbf{B})$, il quale è strettamente legato al determinante del reticolo. E' possibile osservare in Figura 2 un reticolo con due sue basi: nonostante i domini fondamentali abbiano forme diverse, l'area coperta dal loro volume è la medesima. Come dimostrato in [10, Sezione 7.4], proprio come per il determinante, il dominio fondamentale è un'invariante che è indipendente dalla scelta delle basi per il reticolo. Inoltre ne deriva la proprietà:

$$\mathcal{F}(\mathbf{B}) = \det(\mathcal{L})$$

e ricollegandoci a quanto detto nella sezione 2.1.1: $\mathcal{F}(\mathbf{B}) = \det(\mathcal{L}) = |\det(\mathbf{B})|$.
Una seconda proprietà fondamentale, sempre dimostrata in [10] è che tramite il dominio fondamentale è possibile ricostruire l'intero reticolo (Figura 3). In altre parole, ogni vettore $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ può essere ottenuto sommando ripetutamente a un vettore $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ un altro vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$. Più formalmente:

$$\mathcal{F} + \mathbf{v} = \{\mathbf{f} + \mathbf{v} \mid \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}$$

comprende esattamente tutti i vettori nel reticolo $\mathcal{L}$.

2.2 Problemi sui reticoli

Le costruzioni crittografiche basate su reticoli si basano sulla complessità computazionale che certe operazioni su di essi possono richiedere, soprattutto nel caso di spazi multidimensionali. I problemi computazionali più conosciuti relativi ai reticoli sono i seguenti:

- Problema del Vettore più Corto (SVP): Data una base di un reticolo $\mathbf{B}$, trovare il vettore non nullo di lunghezza minima in $\mathcal{L}(\mathbf{B})$.
- Problema del Vettore più Vicino (CVP): Data una base di un reticolo $\mathbf{B}$ e un vettore target $\mathbf{t}$ (non necessariamente nel reticolo), trovare il vettore $\mathbf{w} \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$ più vicino a $\mathbf{t}$ minimizzando $\|\mathbf{t} - \mathbf{w}\|_2$.
- Problema dei Vettori lineramente Vndipendenti più Vorti (SIVP): Data una base di un reticolo $\mathbf{B} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, trovare n vettori linearmente indipendenti $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n]$ (dove $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$) per tutte le i) minimizzando la quantità $||\mathbf{S}|| = \max_i ||\mathbf{s}_i||$. SIVP è una variante di SVP, ma a differenza di quest'ultimo, SIVP mira a identificare un insieme di vettori indipendenti che siano i più corti possibile, in altre parole la ricerca di una base ortogonale o ortonormale che generi il reticolo e che minimizzi la lunghezza dei suoi vettori.

La complessità per risolvere CVP è stata provata essere NP-difficile[8], stessa cosa vale per SVP sotto alcune circostanze specifiche[9], per questo vengono comparati come problemi dalla stessa difficoltà anche se in pratica risolvere CVP è considerato essere un po' più difficile di SVP nella stessa dimensione. Ognuno di questi due problemi ha un relativo sotto-problema che nient'altro è che una variante approssimativa: il Problema del Vettore più Vicino Approssimato (apprCVP) e Problema del Vettore più Corto Approssimato (apprSVP). Questi sotto-problemi consistono nel trovare un vettore non nullo la cui lunghezza non sia più lunga di un fattore dato $\Psi(n)$ rispetto a un vettore non nullo corretto (più corto o più vicino a seconda del problema).
In particolare GGH si basa sulla risoluzione del CVP basandosi su una delle proprietà fondamentali dei reticoli: la possibilità di usare più basi per lo stesso reticolo. Utilizzando due basi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, definite rispettivamente come "buona" e "cattiva", ma che generano lo stesso reticolo, diventa più agevole risolvere determinati problemi sui reticoli utilizzando la base $\mathbf{A}$ piuttosto che con $\mathbf{B}$. Per questi motivi il CVP sarà il fulcro dei problemi discussi in questa tesi assieme al SVP, il quale verrà trattato prevalentemente per quanto riguarda la crittoanalisi di GGH.

2.3 Riduzione di un reticolo

2.3.1 Rapporto di Hadamard

Supponiamo di avere a disposizione due basi **A** e **B** che godono della proprietà di generare lo stesso reticolo. Seppur condividendo tale caratteristica, **A** e **B** sono in realtà molto diverse nella loro struttura; in particolare **A** è composta da vettori corti e quasi ortogonali fra loro e **B** è composta da vettori lunghi e quasi paralleli fra loro. La qualità di una base risiede in queste differenze dei vettori costituenti le basi, chiamiamo quindi base "buona" **A** e base "cattiva" **B**. E' necessario però definire una metrica per valutare quanto una base sia buona o meno, a tal proposito Hadamard[10] introdusse una formula quantitativa per misurare la qualità di una base reticolare, il cosiddetto rapporto di Hadamard.

Data una base $\mathbf{B} = [\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}. \ldots, \mathbf{b}_n]$ e un reticolo $\mathcal{L}$ di dimensione n generato da **B**, il rapporto di Hadamard della base **B** è definito dal valore:

$$\mathcal{H}(\mathbf{B}) = \left(\frac{\det(\mathcal{L})}{\|\mathbf{b_1}\|_2 \cdot \|\mathbf{b_2}\|_2, \cdots \|\mathbf{b}_n\|_2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Il rapporto di Hadamard si configura nell'intervallo $(0, 1]$, dove più vicino all'1 si è e più la base è buona, viceversa più vicino allo 0 si è e più la base è cattiva. Questa formula verrà utilizzata come unica misura per verificare la qualità degli esempi di basi che verranno presentate più avanti in questa tesi.

2.3.2 Ortogonalizzazione Gram-Schmidt

Ora che è possibile giudicare una base dato il suo rapporto di Hadamard, utilizziamo la base **B** definita nella precedente sezione, la quale ipotizziamo abbia un $\mathcal{H}(\mathbf{B})$ prossimo allo zero. Se volessimo utilizzare questa base per risolvere uno dei problemi dei reticoli, molto probabilmente non riusciremmo mai a raggiungere una soluzione che sia valida o quantomeno che sia vicina alla soluzione ottima. A questo proposito sono stati ideati degli algoritmi in grado di ortogonalizzare una base cattiva per convertirla in una buona e mantenere le proprietà del reticolo iniziale: si ottiene quindi una base $\mathbf{B'}$ tale che: $\mathcal{H}(\mathbf{B'}) \approxeq 1$ e che $\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B'})$.
Prima di discutere questo tipo di algoritmi però è necessario affrontare brevemente l'Algoritmo di Gram-Schmidt, il quale esegue un tipo di ortogonalizzazione che viene applicata su spazi vettoriali e che è anche chiamata Ortogonalizzazione Gram-Schmidt (GSO). Questo algoritmo non è adottabile direttamente sulle basi reticolari

in quanto esso andrebbe a violare la proprietà dei coefficienti integrali, di fondamentale importanza nella definizione di reticolo. Nonostante ciò, questo algoritmo gode di una proprietà chiave che viene utilizzata in algoritmi di riduzione dei reticoli. Come dimostrato in [10], teorema 7.13:
siano $\text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ e $\text{span}(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)$ gli spazi vettoriali generati rispettivamente dalle colonne di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^*$, allora se $\mathbf{B}^*$ è il risultato di GSO applicato a $\mathbf{B}$:

$$\text{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n) = \text{span}(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)$$

Ciò comporta che GSO può essere chiamato come sotto-routine di algoritmi per la trasformazione delle matrici di spazi vettoriali, riducendo notevolmente i conti e semplificando l'implementazione di algoritmi per la riduzione di reticoli.

Algoritmo 1: Algoritmo di Gram-Schmidt

Input: Una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\text{rk}(\mathbf{B}) = \text{col}(\mathbf{B})$
Output: Una matrice $\mathbf{B}^*$ ortogonale
$\mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_1$
for $i = 2$ **to** n **do**
  for $j = 1$ **to** $i - 1$ **do**
    $\mu_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \rangle}{\langle \mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^* \rangle}$
  end
  $\mathbf{b}_i^* = \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{i,j} \mathbf{b}_j^*$
end
return $\mathbf{B}^*$

Dove rk() indica il rango e col() il numero delle colonne.

2.3.3 Algoritmo di Lenstra-Lenstra-Lovász

L'algoritmo di Lenstra-Lenstra-Lovász (LLL)[11, 10] è noto come uno dei più famosi algoritmi per la riduzione dei reticoli. In teoria, opera con un tempo polinomiale $O(n^6(\log \mathcal{E})^3)$, dove n è la dimensione di un reticolo $\mathcal{L}$ dato ed $\mathcal{E}$ rappresenta la massima lunghezza euclidea dei vettori nella base fornita. Il risultato di LLL è una base ridotta, il cui vettore più breve può essere considerato una soluzione approssimata del apprSVP con un fattore di $2^{(n-1)/2}$ rispetto alla lunghezza del vettore corretto più corto. Nonostante questo fattore sia esponenziale, l'algoritmo si dimostra sorprendentemente efficiente nella pratica e ciò lo rende un tassello fondamentale negli algoritmi di risoluzione del CVP e del SVP.

Una base $\mathbf{B}^*$ per essere considerata LLL ridotta deve soddisfare due condizioni:

- Condizione di grandezza: $\mu_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j^* \rangle}{\langle \mathbf{b}_j^*, \mathbf{b}_j^* \rangle} \leq \eta$ per ogni $1 \leq j < i \leq n$.
- Condizione di Lovász: $\langle \mathbf{b}_i^*, \mathbf{b}_i^* \rangle \geq (\delta - \mu_{i,i-1}^2) \langle \mathbf{b}_i^*, \mathbf{b}_i^* \rangle$ per ogni $1 < i \leq n$.

I valori δ e η sono standardizzati rispettivamente a $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Algoritmo 2: Algoritmo di LLL, con $\delta = \frac{3}{4}, \eta = \frac{1}{2}$

Input: Una matrice $\mathbf{B}$ che sia base di un reticolo
Output: Una matrice $\mathbf{B}^*$ LLL-ridotta
$k = 1$
$\mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_1$
while $k <= n$ **do**
  for $j = k - 1$ **to** 0 **do**
    if $|\mu_{k,j}| > \eta$ **then** `// Condizione di grandezza`
      $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_k - \lfloor \mu_{k,j} \rceil \mathbf{b}_j$
      GramSchmidt($\mathbf{B}$)
    end
  end
  if $\langle \mathbf{b}_k^*, \mathbf{b}_k^* \rangle \geq (\delta - \mu_{k,k-1}^2) \langle \mathbf{b}_{k-1}^*, \mathbf{b}_{k-1}^* \rangle$ **then** `// Condizione di Lovász`
    $k = k + 1$
  end
  else
    Scambia $\mathbf{b}_{k-1}$ e $\mathbf{b}_k$
    GramSchmidt($\mathbf{B}$)
    $k = \max(k - 1, 1)$
  end
end

Esempio 2.3.1. (Riduzione di una base con LLL) Sia $\mathcal{L}$ un reticolo generato dalla matrice:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 87634 & 32323 & -21221 \\ 88432 & 27883 & -11234 \\ 94345 & 40323 & -32123 \end{bmatrix}$$

con $\mathcal{H}(\mathbf{B}) = 0.14318$ e $\det(\mathbf{B}) = -1079906335101$.

Si applichi ora una riduzione LLL alla matrice $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 7509 & 3560 & -915 \\ 798 & -4440 & 9987 \\ 5833 & -11277 & -1169 \end{bmatrix}$$

Ricalcolando $\mathcal{H}(\mathbf{B}^*)$ è possibile osservare che:

$$\mathcal{H}(\mathbf{B}^*) = 0.96096 \text{ e } \det(\mathbf{B}^*) = 1079906335101.$$

E' stato ottenuto un incremeneto notevole del rapporto di Hadamard grazie alla riduzione LLL senza interferire con le proprietà della base $\mathbf{B}$. Infatti $|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{B}^*)|$ e perciò $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}^*$ sono entrambe basi valide per $\mathcal{L}$.

2.3.4 Varianti di LLL

LLL è un eccellente algoritmo in grado di restituire in un tempo polinomiale una matrice quasi ortogonale partendo da una con vettori quasi paralleli, o che comunque è ritenibile di bassa qualità. Esistono però varianti che ne velocizzano i calcoli, così come altri algoritmi capaci di restituire una base di qualità ancora superiore rispetto a quella ottenuta con la riduzione LLL. Di seguito vengono presentate brevemente tre versioni dell'algoritmo.
La prima versione discussa è quella in virgola mobile (FPLLL)[12], la quale utilizza aritmetica in virgola mobile a precisione arbitraria per accelerare i calcoli razionali dell'algoritmo originale. Questa versione ha come vantaggio un aumento delle performance: in comparazione con LLL il tempo di computazione nel caso peggiore è $O(n^3(\log \mathcal{E})^2)$.
La seconda versione è stata presentata da Schnorr-Euchner [13] ed il suo nome originale è "deep insertions" ovvero inserzioni profonde. In LLL (Algoritmo 2), è presente un passaggio in cui avviene uno scambio tra il vettore $\mathbf{b}_{k-1}$ e $\mathbf{b}_k$, il quale di solito permette qualche riduzione di grandezza ulteriore del nuovo $\mathbf{b}_k$. Nella variante deep insertions, viene invece inserito $\mathbf{b}_k$ tra $\mathbf{b}_{i-1}$ e $\mathbf{b}_i$ con i che viene scelta in modo da apportare una maggiore riduzione di grandezza. L'algoritmo risultante, nel caso peggiore, potrebbe non terminare in un tempo polinomiale, ma in pratica, quando eseguito sulla maggioranza dei reticoli, termina rapidamente e può fornire in output una base ridotta significativamente migliore di quella di LLL standard.
L'ultima variante di LLL è basata sull'algoritmo di riduzione Korkin–Zolotarev (KZ)[2, Sezione 18.5]. Le caratteristiche di una base KZ-ridotta sono generalmente migliori rispetto a quelle di LLL, ma richiedono una complessità maggiore e un tempo di computazione non polinomiale, per le proprietà complete si veda il riferimento. Più nel dettaglio, il problema principale, è che non esiste un algoritmo in grado di computare

una base KZ in tempo polinomiale. L'algoritmo più veloce conosciuto richiede un tempo di computazione esponenziale rispetto alla dimensione. Per compensare a tale problema KZ apporta un grande vantaggio in rispetto all'accuratezza della riduzione, infatti, il primo vettore di una base KZ-ridotta è sempre una soluzione al SVP. Dato che la complessità di KZ cresce con n, è logico pensare che a basse dimensioni sia comunque sufficientemente veloce. Un'idea è quindi quella di computare una riduzione di proiezioni a dimensioni più basse del reticolo originale. L'algoritmo in questa configurazione prende il nome di Korkine-Zolotarev a blocco (BKZ), il quale, se combinato con LLL, diventa una variante di quest'ultimo chiamata LLL-BKZ. Questa variante è in grado di bilanciare costo computazionale e qualità di riduzione ottenendo così l'algoritmo più efficiente per SVP in grandi dimensioni, dimostrando anche una qualità di riduzione significativamente migliore di quella di LLL standard.

2.4 Algoritmi per la risoluzione del CVP

2.4.1 Algoritmi di Babai

Nel 1986 Babai[4] propose due algoritmi per la risoluzione di apprCVP, i cosiddetti: "Metodo del Piano più Vicino" e "Tecnica di Arrotondamento". Ai fini di questa tesi, entrambi verranno trattati, sebbene il primo sarà discusso in modo più conciso poiché, come verrà spiegato nei prossimi capitoli, non è stato utilizzato nelle implementazioni proposte.
Il Metodo del Piano più Vicino è il primo algoritmo presentato da Babai, esso si basa sull'impiegare l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt per semplificare il problema. L'algoritmo inizia quindi ortogonalizzando la base del reticolo fornita in input attraverso Gram-Schmidt. Successivamente, procede in maniera iterativa a partire dalla dimensione più alta: il vettore input viene proiettato sul vettore base ortogonale corrispondente e questa proiezione viene approssimata al multiplo intero più vicino del vettore della base originale. Tale approssimazione viene sottratta dal vettore input, generando un nuovo vettore residuo. Questo processo viene ripetuto per le dimensioni inferiori, una alla volta, fino a coprire tutte le dimensioni. Al termine, l'algoritmo fornisce come risultato una soluzione all'apprCVP. Grazie alla sua complessità polinomiale, l'algoritmo riesce a bilanciare efficacemente l'accuratezza dell'approssimazione con il tempo di esecuzione. Per ulteriori dettagli e informazioni sull'algoritmo si veda [2].
Il secondo algoritmo è la tecnica di arrotondamento, che come da nome si basa principalmente sull'arrotondare dei valori frazionari all'intero più vicino. Seppur la sua implementazione risulti semplice e banale, in realtà la sua dimostrazione teorica è tutt'altro che immediata. A differenza del precedente, non utilizza l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, ma mantiene comunque una complessità polinomiale. Di seguito

viene fornita una spiegazione del suo funzionamento.
Come discusso nella sezione 2.1.2, dati un reticolo $\mathcal{L}$ di dimensione n e una sua base $\mathbf{B}$, per ogni vettore $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{t} \notin \mathcal{L}$, un'unica decomposizione $\mathbf{t} = \mathbf{f} + \mathbf{v}$ può essere sempre trovata in modo tale che $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ e $\mathbf{f}$ si collochi nel dominio fondamentale $\mathcal{F}$ di $\mathbf{B}$. Questa proprietà fornisce l'idea dietro alla risoluzione del CVP usata da questo algoritmo: identificare il dominio fondamentale (traslato) rispettivamente a $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$, nel quale il vettore target $\mathbf{t}$ si trova. Sia $\mathcal{L}$ un reticolo con dimensione n generato da una base (buona) $\mathbf{B}$ e sia $\mathbf{t}$ un vettore tale che $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{t} \notin \mathcal{L}$. Dato che $\mathbf{B}$ è una matrice di rango massimo, è possibile calcolare

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{t}$$

Da qui si applica la tecnica di arrotondamento, la quale è semplicemente

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{b}_i \lfloor \mathbf{x}_i \rceil$$

con $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n]$ e $\lfloor \mathbf{x} \rceil$ che significa prendere l'intero più vicino al numero reale $\mathbf{x}$. Questo algoritmo mira ad identificare il dominio fondamentale (traslato) che il vettore $\mathbf{t}$ localizza e la sua correttezza è strettamente legata alla forma geometrica del dominio fondamentale, è necessaria quindi una base di alta qualità al fine di avere risultati validi.

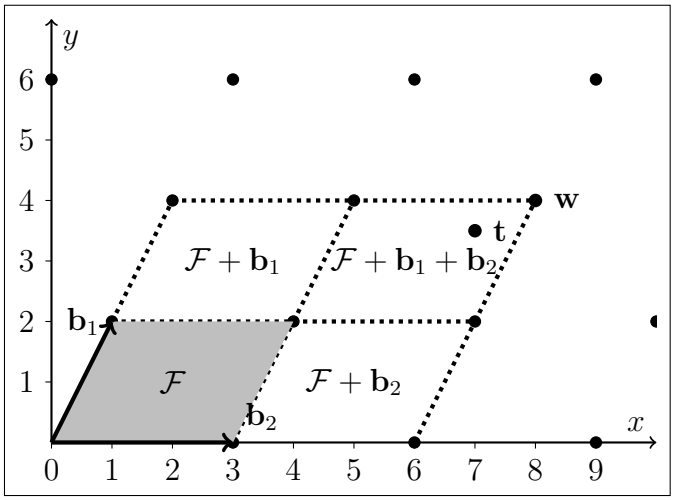


Figura 3: Risoluzione del CVP usando la tecnica di arrotondamento di Babai: $\mathbf{w}$ è il vertice del dominio fondamentale traslato localizzato da $\mathbf{t}$, quindi è soluzione per apprCVP.

Esempio 2.4.1. (Risoluzione del CVP usando la tecnica di arrotondamento di Babai)

Sia $\mathcal{L}$ un reticolo generato dalla base $\mathbf{B}$ e sia $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{t} \notin \mathcal{L}$ con

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3.5 \end{bmatrix}.$$

Si inizi con l'applicare l'algoritmo, dal primo passo si ottiene

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.33 & 0.17 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

si applichi ora la tecnica di arrotondamento a $\mathbf{x}$

$$\lfloor \mathbf{x} \rceil = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si proceda infine con l'ottenere il risultato finale

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

che, come mostrato in Figura 3, è il vettore più vicino a $\mathbf{t}$ con $\|\mathbf{t} - \mathbf{w}\|_2 = 1.12$. Se si dovesse valutare la qualità della base, si otterrebbe che $\mathcal{H}(\mathbf{B}) = 0.97400$ e grazie a tali proprietà ortogonali del dominio fondamentale che si genera da $\mathbf{B}$, l'algoritmo è in grado di raggiungere facilmente la soluzione.
Sia ora $\mathbf{B}'$ una base di bassa qualità, ma che generi lo stesso reticolo $\mathcal{L}$:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad |\det(\mathbf{B}')| = |\det(\mathbf{B})| = 6.$$

Calcolando $\mathcal{H}(\mathbf{B}') = 0.24473$ si conferma la bassa qualità di $\mathbf{B}'$ rispetto a $\mathbf{B}$. Procedendo con l'algoritmo si ottiene che

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}'^{-1}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 8.75 \\ -14 \end{bmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \lfloor \mathbf{x}' \rceil = \begin{bmatrix} 9 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Computando l'ultimo passaggio, il vettore risultante è

$$\mathbf{w}' = \mathbf{B}'\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

il quale non è soluzione corretta al CVP in quanto $\|\mathbf{t} - \mathbf{w}_2\|_2 = 3.35 > \|\mathbf{t} - \mathbf{w}\|_2$.

2.4.2 Tecnica di incorporamento

Babai, oltre alla presentazione dei due algoritmi precedentemente trattati, ha dimostrato anche quanto una base ridotta migliori l'approssimazione della soluzione ad apprCVP. In particolare con una base LLL-ridotta, questo porta ad un fattore di approssimazione esponenziale. Nella pratica però il metodo migliore per risolvere apprCVP è la cosiddetta tecnica di incorporamento[2] che riduce il CVP a un SVP.
Sia $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n]$ la base di un reticolo $\mathcal{L}$ di dimensione n e sia $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{t} \notin \mathcal{L}$. La tecnica di incorporamento impone la costruzione di un reticolo di dimensione $n+1$ con la seguente struttura:

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{t} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo reticolo $\mathcal{L}(\mathbf{B}')$ è strutturato in modo tale da avere lo stesso determinante di $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ e quasi la stessa dimensione, ci si può quindi aspettare che il vettore più corto di $\mathcal{L}(\mathbf{B}')$ abbia quasi la stessa lunghezza di quello di $\mathcal{L}(\mathbf{B})$. Si assuma che $\mathbf{w} \in \mathcal{L}$ minimizzi la distanza per $\mathbf{t}$ e sia $\mathbf{u} = \mathbf{t} - \mathbf{w}$, allora il vettore

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{bmatrix}$$

appartiene a $\mathcal{L}'$ e, se dovesse anche essere il suo vettore più corto, si potrebbe risolvere l'apprCVP di $\mathcal{L}$ determinando l'apprSVP di $\mathcal{L}'$. Per ottenere $\mathbf{v}$ è sufficiente ridurre $\mathbf{B}'$ mediante algoritmi come LLL (o meglio BKZ-LLL) per poi ottenere $\mathbf{w}$ calcolando $\mathbf{t} - \mathbf{u}$. Un problema nella pratica sta nella scelta di $\mathbf{t}$: teoricamente $\mathbf{t}$ può appartenere all'insieme $\mathbb{R}$, ma questo creerebbe problemi nella costruzione della nuova base $\mathbf{B}'$ la quale non soddisferebbe più la proprietà dei coefficienti integrali che sta alla base della definizione di reticolo. Tale problema viene discusso e affrontato nell'attacco di Nguyen contro GGH, il quale verrà trattato nelle prossime sezioni. Nel concreto si tenta di mantenere $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$ in modo da evitare problemi di questa natura.

Esempio 2.4.2. (Risoluzione del CVP usando la tecnica di incorporamento) Siano $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}'$ le stesse basi definite nell'Esempio 2.4.1 e sia

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Seguendo quanto descritto nella tecnica di incorporamento, si costruisca la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{0,0} & \mathbf{b}_{0,0} & \mathbf{b}_{1,0} \\ \mathbf{t}_{1,0} & \mathbf{b}_{0,1} & \mathbf{b}_{1,1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e la si riduca usando un algoritmo di riduzione, in questo caso LLL:

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infine è necessario che si estraggano i primi n valori dalla prima colonna di $\mathbf{M}^*$ sottraendoli poi a $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{t} - \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

che è soluzione all' apprCVP con $\|\mathbf{t} - \mathbf{w}\|_2 = 1.41$. Utilizzando la base cattiva $\mathbf{B}'$ invece, si otterrebbe:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 7 \\ 3 & -6 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ed effettuando l'ultimo passaggio:

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{t} - \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

che è comunque soluzione all'apprCVP in quanto $\|\mathbf{t} - \mathbf{w}_2\|_2 = 1.41$.

Grazie a questo esempio si può comprendere meglio l'efficacia in pratica di questa tecnica in comparazione con l'algoritmo di arrotondamento di Babai: nonostante la bassa qualità della seconda base si è riusciti comunque a trovare una soluzione corretta.

Bibliografia

[1] de Barros Charles Figueredo e Menasché Schechter Luis, "GGH May Not Be Dead after All," Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 21941-590 Rio de Janeiro RJ, 2015

[2] Galbraith Steven, "Mathematics of Public Key Cryptography", seconda edizione, Ottobre 2018

[3] Nguyen Phong, "Cryptanalysis of the Goldreich-Goldwasser-Halevi Cryptosystem from Crypto '97," Advances in Cryptology — CRYPTO' 99, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France, pagine 288–304, 1999

[4] Babai László, "On Lovász' Lattice Reduction e the Nearest Lattice Point Problem," Combinatorica, vol. 6, no. 1, pagine 1–13, 1986

[5] Goldreich Oded, Goldwasser Shafi e Halevi Shai, "Public-key Cryptosystems from Lattice Reduction Problems," Advances in Cryptology — CRYPTO '97, pagine 112–131, 1997

[6] Micciancio Daniele, "Improving Lattice Based Cryptosystems Using the Hermite Normal Form," Lecture Notes in Computer Science, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA 92093 USA, pagine 126–145, 2001

[7] Micciancio Daniele e Regev Oded, "Lattice-based Cryptography," Post-Quantum Cryptography, pagine 147–191, 2009

[8] Aharonov Dorit e Regev Oded, "Lattice Problems in NP $\cap$ coNP", CiteSeer X (The Pennsylvania State University), 2009

[9] Micciancio Daniele e Goldwasser Shafi, "Complexity of Lattice Problems: a cryptographic perspective", The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, Boston, Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, volume 671, 2002

[10] Silverman Joseph H., Pipher Jill e Hoffstein Jeffrey, "An introduction to mathematical cryptography", seconda edizione, Springer, Undergraduate texts in mathematics, 2008

[11] Lenstra Arjen Klaas, Lenstra Hendrik Willem e László Lovász, "Factoring polynomials with rational coefficients", Mathematlsche Annalen, Springer, volume 261, pagine 515-534, 1982

[12] Nguyen Phong e Damien Stehlé, "Floating-point LLL revisited", LNCS, Springer, volume 3494, pagine 215-233, 2005

[13] Schnorr Claus Peter e M. Euchner, "Lattice basis reduction: Improved practical algorithms and solving subset sum problems", Mathematical Programming, volume 66, pagine 181-199, 1994