

# RAPPORT DU PROJET

MISES EN OEUVRE DE LA MÉTHODE DES  
ÉLÉMENTS FINIS

Thibault Cimić

APRIL 20, 2017

SUPERVISEUR:  
X. CLAEYS, P. MARCHAND

PARIS  
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

# 1 Problème instationnaire : équation de transport à coefficients variables

## 1.1 Question 1

Pour un domaine en espace  $x_0 \in [-2, 2]$  et un domaine en temps  $t \in ]-1, 1[$ , on trace à l'aide de la fonction ode de Scilab, les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  pour  $a(x) = x$  et  $a(x) = -x$ . On obtient la figure 1.

Figure 1: Caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  pour  $a(x) = x$  et  $a(x) = -x$

Par le calcul, on a les expressions des caractéristiques suivantes :

- Pour le cas avec  $a(x) = x$  :

$$X_{x_0}(t) = x_0 \exp(t) \quad (1)$$

- Pour le cas avec  $a(x) = -x$  :

$$X_{x_0}(t) = x_0 \exp(-t) \quad (2)$$

Dans le cas où  $a(x) = x$ , le terme  $\exp(t)$  va entraîner une diffusion en temps croissant, c'est ce que l'on observe sur le graphe gauche de la Figure 1.

Dans le cas où  $a(x) = -x$ , le terme  $\exp(-t)$  va entraîner une contraction en temps croissant, c'est ce que l'on observe sur le graphe droit de la Figure 1.

## 1.2 Question 2

On utilise le calcul des caractéristiques fait précédemment pour calculer la solution exacte en fonction de  $u_{ini}$ . Ce qui donne pour solution dans le cas non-conservatif :

- Pour  $a(x) = x$  :

$$\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(-t)) \quad (3)$$

- Pour  $a(x) = -x$  :

$$\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(t)) \quad (4)$$

Dans le cas conservatif :

- Pour  $a(x) = x$  :

$$\hat{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(-t)) \exp(-t) \quad (5)$$

- Pour  $a(x) = -x$  :

$$\hat{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(t)) \exp(t) \quad (6)$$

### 1.3 Question 3

Le schéma (6) peut se réécrire :

$$u_j^{n+1} = \alpha_j u_j^n + \beta_j u_{j-1}^n + \gamma_j u_{j+1}^n$$

$$\text{où } \begin{cases} \alpha_j &= 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}(a_j^+ + a_{j-1}^-) \\ \beta_j &= \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j-1}^+ \\ \gamma_j &= \frac{\Delta t}{\Delta x} a_j^- \end{cases}$$

Étant donné que  $u_j^n$ ,  $u_{j-1}^n$ ,  $u_{j+1}^n$ ,  $\beta_j$  et  $\gamma_j$  sont positifs, et au vu de la réécriture du schéma, pour que  $u_j^{n+1}$  soit positif, il suffit que :

$$\alpha_j \geq 0 \iff \frac{\Delta t}{\Delta x}(a_j^+ + a_{j-1}^-) \leq 1$$

Et donc si  $A$  est une borne de  $a$ , il suffit que :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} 2A \leq 1 \tag{7}$$

C'est notre condition CFL.

### 1.4 Question 4

Sous cette condition CFL, on a pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{j=-k}^k |u_j^{n+1}| = \sum_{j=-k}^k |\alpha_j u_j^n + \beta_j u_{j-1}^n + \gamma_j u_{j+1}^n|$$

Par inégalité triangulaire :

$$\sum_{j=-k}^k |u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-k}^k \alpha_j u_j^n + \beta_j u_{j-1}^n + \gamma_j u_{j+1}^n$$

Or on a les inégalités immédiates suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_j \leq 1 \\ \beta_j \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} A \\ \gamma_j \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} A \end{cases}$$

On obtient donc que :

$$\sum_{j=-k}^k |u_j^{n+1}| \leq \sum_{j=-k}^k u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A \left( \sum_{j=-k}^k u_{j-1}^n + \sum_{j=-k}^k u_{j+1}^n \right)$$

Or sous la condition CFL, on a :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^n| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j-1}^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j+1}^n$$

On obtient alors :

$$\sum_{j=-k}^k |u_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j-1}^n + \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_{j+1}^n \right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=-k}^k |u_j^{n+1}| \leq \left(1 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} A\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n < +\infty$$

Et la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{n+1}|$  est également convergente, et par la même, la série  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1}$  est convergente. On a alors :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^{n+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j u_j^n + \beta_j u_{j-1}^n + \gamma_j u_{j+1}^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\alpha_j + \beta_{j+1} + \gamma_{j-1}) u_j^n$$

Or pour  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$\alpha_j + \beta_{j+1} + \gamma_{j-1} = 1$$

Et on a bien conservation de la masse discrète :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x u_j^n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta x u_j^{n+1}$$

## 1.5 Question 5

En utilisant les formules  $a_j = a_j^+ - a_j^-$  et  $a_{j-1} = a_{j-1}^+ - a_{j-1}^-$ , puis en simplifiant les termes et en factorisant par  $a_{j-1}^-$  et  $a_{j-1}^+$ , on obtient le résultat.

## 1.6 Question 6

Ici, on peut réécrire le schéma (7) sous la forme :

$$u_j^{n+1} = H(u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), \text{ où } H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v, w) & \mapsto & \alpha_j u + \beta_j v + \gamma_j w \end{array}$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha_j = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_j^- - a_{j-1}^+) \\ \beta_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{j-1}^+ \\ \gamma_j = -\frac{\Delta t}{\Delta x} a_j^- \end{cases}$$

Donc le schéma est associé à un flux numérique linéaire, qui est consistant si et seulement si  $\forall u \in \mathbb{R}, H(u, u, u) = u$ , i.e. si et seulement si  $\forall j \in \mathbb{Z}, \alpha_j + \beta_j + \gamma_j = 1$ . Et si de plus  $\forall j \in \mathbb{Z}, \alpha_j \geq 0, \beta_j \geq 0, \gamma_j \geq 0$  alors  $u_j^{n+1} = H(u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$  est une combinaison linéaire convexe et donc :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \min(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \leq u_j^{n+1} \leq \max(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

Et par suite, on a :

$$\min_{j \in \mathbb{Z}}(u_j^0) \leq u_j^n \leq \max_{j \in \mathbb{Z}}(u_j^0)$$

Ce qui implique la stabilité  $L^\infty$ . Ainsi, pour que le schéma vérifie le principe du maximum discret, il suffit que :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \alpha_j + \beta_j + \gamma_j = 1 \\ \alpha_j \geq 0 \\ \beta_j \geq 0 \\ \gamma_j \geq 0 \end{cases}$$

Or toutes ces conditions sont déjà vérifiées sauf  $\alpha_j \geq 0$ . Ce qui permet d'avoir notre condition CFL :

$$\alpha_j \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} (a_{j-1}^+ - a_j^-) \leq 1$$

Donc si :

$$2A \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

On a :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(a_{j-1}^+ - a_j^-) \leq \frac{\Delta t}{\Delta x}(a_{j-1}^+ + a_j^-) \leq 2A \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Donc notre condition CFL pour que le schéma vérifie le principe du maximum discret et soit alors stable  $L^\infty$  est la condition (7).

## 1.7 Question 8

Traçons, pour différents temps  $t$  dans la subdivision de  $[0, T]$ , la solution approchée par le schéma conservatif (6) et la solution exacte données par la fonction :

$$u(., t) : \begin{array}{ccc} [-2, 2] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x, t) \end{array}$$

On obtient alors la figure 2.

Figure 2: Solution exacte et approchée dans le cas conservatif pour  $a(x) = x$  et  $a(x) = -x$

Dans le graphique de gauche, le cas où  $a(x) = x$ , la solution exacte est :

$$\hat{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(-t)) \exp(-t) = \begin{cases} \exp(-t) & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \exp(-t) \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc lorsque  $t$  augmente,  $\exp(-t)$  diminue, ce qui fait que l'ensemble  $\{x \in [-2, 2] \mid -\frac{1}{2} \leq x \exp(-t) \leq \frac{1}{2}\}$  grandit. Ceci explique le graphique que l'on obtient, la "boite" rouge baisse en  $\exp(-t)$  et s'élargit en  $\exp(t)$ , ce qui ne change rien pour l'aire dans cette "boite" et qui traduit le fait que l'équation soit conservative.

Dans le graphique de droite, le cas où  $a(x) = -x$ , la solution exacte est :

$$\hat{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(t)) \exp(t) = \begin{cases} \exp(t) & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \exp(t) \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc lorsque  $t$  augmente,  $\exp(t)$  augmente, ce qui fait que l'ensemble  $\{x \in [-2, 2] \mid -\frac{1}{2} \leq x \exp(t) \leq \frac{1}{2}\}$  diminue. Ceci explique le graphique que l'on obtient, la "boite" rouge monte en  $\exp(t)$  et s'amminçit en  $\exp(-t)$ , ce qui ne change rien pour l'aire dans cette "boite" et qui traduit encore le fait que l'équation soit conservative.

## 1.8 Question 10

Faisons de même pour le schéma (7) non-conservatif. On obtient la figure 3.

Rappelons l'expression de la solution exacte :

- Pour le cas  $a(x) = x$  :

$$\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(-t)) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \exp(-t) \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

- Pour le cas  $a(x) = -x$  :

$$\bar{u}(x, t) = u_{ini}(x \exp(t)) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \exp(t) \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors le même comportement pour la largeur des "boîtes", mais pas pour la hauteur. En effet, la valeur 1 n'étant pas corrigée pour conserver l'aire sous la courbe, le schéma n'est pas conservatif.

Figure 3: Solution exacte et approchée dans le cas non-conservatif pour  $a(x) = x$  et  $a(x) = -x$

## 2 Problème stationnaire : éléments finis

Pour plus de clarté et de légèreté, introduisons les notations suivantes :

- $\Omega = ]0, 1[$  et donc  $\overline{\Omega} = [0, 1]$ .
- $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  designera la norme associée au produit scalaire suivant :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \int_0^1 u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx \end{array}$$

- On désigne par  $a$  la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$a : \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega)^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \int_0^1 u'(x)v'(x) + \lambda u(x)v(x)dx \end{array}$$

- Et par  $l$  la forme linéaire suivante :

$$l : \begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \int_0^1 f(x)v(x)dx \end{array}$$

### 2.1 Question 1

On applique le théorème de Lax-Milgram au problème variationnel ( $FV_D$ ) :

- $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{1,\Omega}$  est un espace de Hilbert.
- La forme bilinéaire  $a$  est continue :  
Soient  $u, v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_0^1 |u'(x)||v'(x)|dx + |\lambda| \int_0^1 |u(x)||v(x)|dx, \text{ par l'inégalité triangulaire} \\ |a(u, v)| &\leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + |\lambda|\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}, \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwartz} \end{aligned}$$

d'où,

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega}(1 + |\lambda|)$$

et  $a$  est continue.

- $a$  est coercive :  
Soit  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$a(u, u) = \int_0^1 u'(x)^2 + \lambda u^2(x)dx = \int_0^1 u'(x)^2 dx + \lambda \int_0^1 u^2(x)dx$$

$$a(u, u) = \lambda \|u\|_{1,\Omega}^2 + (1 - \lambda) \int_0^1 u'(x)^2 dx$$

Or d'après l'inégalité d'Henri Poincaré :

$$\exists \beta > 0, \int_0^1 u'(x)^2 dx \geq \beta \int_0^1 u(x)^2 dx$$

donc :

$$(1 - \lambda) \int_0^1 u'(x)^2 dx = \frac{1 - \lambda}{2} \int_0^1 u'(x)^2 dx + \frac{1 - \lambda}{2} \int_0^1 u'(x)^2 dx$$

$$(1 - \lambda) \int_0^1 u'(x)^2 dx \geq \frac{1 - \lambda}{2} \int_0^1 u'(x)^2 dx + \frac{(1 - \lambda)\beta}{2} \int_0^1 u(x)^2 dx$$

D'où,

$$a(u, u) \geq \left( \lambda + \frac{1 - \lambda}{2} \min(1, \beta) \right) \|u\|_{1,\Omega}^2$$

et  $a$  est coercive.

- La forme linéaire  $l$  est continue :

Soit  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$|l(v)| \leq \int_0^1 |f(x)| |v(x)| dx$$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{1,\Omega}$$

et  $l$  est continue.

Ainsi, d'après le théorème de Lax-Milgram, il y a existence et unicité de la solution au problème variationnel  $(FV_D)$ .

On sait que les problèmes  $(D)$  et  $(FV_D)$  sont équivalents, donc pour vérifier que  $u(x) = \sin(\pi x)$  est solution faible de  $(FV_D)$  avec pour second membre  $f(x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x)$ , il suffit de vérifier qu'elle est solution de  $(D)$ . Et en effet, on a :

$$u(0) = \sin(0) = u(1) = \sin(\pi) = 0$$

Et on a les dérivées première et seconde de  $u$  suivantes :

$$\begin{cases} u'(x) &= \pi \cos(\pi x) \\ u''(x) &= -\pi^2 \sin(\pi x) = -\pi^2 u(x) \end{cases}$$

Et donc pour  $\lambda = 1$ , on a :

$$-u''(x) + u(x) = \pi^2 \sin(\pi x) + \sin(\pi x) = (1 + \pi^2) \sin(\pi x) = f(x)$$

Ainsi,  $u$  est solution de  $(D)$  et donc de  $(FV_D)$ .

## 2.2 Question 2

Avec les notations introduites, et en remarquant que  $u_h = \sum_{k=1}^N u_h(x_k) \varphi_{h,k}$ , le problème  $(EF_D)$  se réécrit :

$$(EF_D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^1 \text{ telle que, pour tout } j = 1, \dots, N, \text{ on ait :} \\ a(u_h, \varphi_{h,j}) = l(\varphi_{h,j}) \end{array} \right.$$

Or :

$$a(u_h, \varphi_{h,j}) = a \left( \sum_{k=1}^N u_h(x_k) \varphi_{h,k}, \varphi_{h,j} \right) = \sum_{k=1}^N u_h(x_k) a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,j})$$

Donc  $\tilde{u}_h = (u_h(x_1), \dots, u_h(x_N))^t$  est solution du système linéaire suivant :

$$A_h \tilde{u}_h = b_h \tag{8}$$



Où,

$$A_h = (a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,j}))_{1 \leq k, j \leq N}$$

$$b_h = (l(\varphi_{h,j}))_{1 \leq j \leq N}$$

Calculons désormais les coefficients de la matrice  $A_h$ . Donnons tout d'abord une expression claire des éléments de la base de  $V_1^h$  :

$$\forall k \in \{1, \dots, N\}, \forall x \in [0, 1], \varphi_{h,k}(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{h} & , \text{ si } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1}-x}{h} & , \text{ si } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Dès lors, le support d'un  $\varphi_{h,k}$  ou de sa dérivée est  $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ . Ainsi, les produits  $\varphi_{h,k}\varphi_{h,j}$  et  $\varphi'_{h,k}\varphi'_{h,j}$  sont nuls sur  $[0, 1]$  dès que  $|k - j| \geq 2$ , ce qui fait de  $A_h$  une matrice tridiagonale. Par ailleurs la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, donc la sous diagonale et la sur diagonale de  $A_h$  sont identiques au décalage d'indice près. Il nous reste donc plus que deux calculs à faire pour expliciter toute la matrice  $A_h$  : celui de  $a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,k-1})$  et  $a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,k})$ .

$$\begin{aligned} a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,k-1}) &= \int_0^1 \varphi'_{h,k}(x) \varphi'_{h,k-1}(x) + \lambda \varphi_{h,k}(x) \varphi_{h,k-1}(x) dx \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi'_{h,k}(x) \varphi'_{h,k-1}(x) + \lambda \varphi_{h,k}(x) \varphi_{h,k-1}(x) dx \\ &= -\frac{1}{h} + \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} dx \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{\lambda}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k + x_k - x_{k-1})(x_k - x) dx \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{\lambda}{h^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} -(x - x_k)^2 + h(x_k - x) dx \\ &= -\frac{1}{h} - \frac{\lambda}{h^2} \left[ \frac{(x - x_k)^3}{3} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{\lambda}{h} \left[ \frac{(x_k - x)^2}{-2} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} \\ &= -\frac{1}{h} - \frac{\lambda}{h^2} \frac{h^3}{3} + \frac{\lambda}{h} \frac{h^2}{2} \\ &= -\frac{1}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{\lambda h}{2} \\ a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,k-1}) &= -\frac{1}{h} + \frac{\lambda h}{6} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} a(\varphi_{h,k}, \varphi_{h,k}) &= \int_0^1 \varphi'_{h,k}(x)^2 + \lambda \varphi_{h,k}(x)^2 dx \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi'_{h,k}(x)^2 dx + \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_{h,k}(x)^2 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi'_{h,k}(x)^2 dx + \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{h,k}(x)^2 dx \\ &= \frac{2}{h} + \lambda \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left( \frac{x - x_{k-1}}{h} \right)^2 dx + \lambda \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( \frac{x_{k+1} - x}{h} \right)^2 dx \\ &= \frac{2}{h} + \frac{\lambda}{h^2} \left( \left[ \frac{(x - x_{k-1})^3}{3} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \left[ \frac{(x_{k+1} - x)^3}{-3} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{h} + \frac{\lambda}{h^2} \left( \frac{2h^3}{3} \right) \\
&= \frac{2}{h} + \frac{2h\lambda}{3}
\end{aligned}$$

On a donc les coefficients de la matrice  $A_h$ . Calculons désormais les coefficients de  $b_h$ , i.e.  $l(\varphi_{h,k})$  pour  $k = \{1, \dots, N\}$  :

$$\begin{aligned}
l(\varphi_{h,k}) &= \int_0^1 f(x) \varphi_{h,k}(x) dx \\
&= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1 + \pi^2) \sin(\pi x) \left( \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (1 + \pi^2) \sin(\pi x) \left( \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \right) dx \\
&= \frac{1 + \pi^2}{h} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin(\pi x) (x - x_{k-1}) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin(\pi x) (x_{k+1} - x) dx \right)
\end{aligned}$$

Et en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
l(\varphi_{h,k}) &= \frac{1 + \pi^2}{h} \left( \left[ -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} (x - x_{k-1}) \right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos(\pi x) dx + \left[ -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} (x_{k+1} - x) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(\pi x) dx \right) \\
&= \frac{1 + \pi^2}{h} \left( \frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos(\pi x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(\pi x) dx \right) \\
&= \frac{1 + \pi^2}{h\pi} \left( \left[ \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \left[ \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \right) \\
&= \frac{1 + \pi^2}{h\pi^2} (2 \sin(\pi x_k) - \sin(\pi x_{k+1}) - \sin(\pi x_{k-1}))
\end{aligned}$$

Et en utilisant la formule trigonométrique  $\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$  pour  $p = \pi x_{k+1}$  et  $q = \pi x_{k-1}$ , on obtient :

$$\sin(\pi x_{k+1}) + \sin(\pi x_{k-1}) = 2 \sin(\pi x_k) \cos(\pi h)$$

Et donc :

$$l(\varphi_{h,k}) = \frac{1 + \pi^2}{h\pi^2} 2 \sin(\pi x_k) (1 - \cos(\pi h))$$

## 2.3 Question 4

Traçons pour  $N$  variant dans  $\{5, 10, 25, 50, 100\}$ , le graphique de la solution exacte et de la solution approchée. On obtient alors la figure 3.

Figure 4: Solution exacte et approchée pour différentes valeurs de  $N$

On voit alors que la méthode des éléments finis est très efficace, graphiquement au premier coup d'oeil on pourrait se demander si la méthode n'est pas exacte. Mais on voit ici que pour  $N = 5$ , la solution approchée est légèrement au-dessus de 1.

## 2.4 Question 5

Pour comparer graphiquement les dérivées de notre solution exacte et notre solution approchée, il faut se demander de quelle dérivée on va parler. La solution exacte est  $u(x) = \sin(\pi x)$  qui est une fonction de  $C^\infty(\Omega)$ , et donc on parle de sa dérivée forte qui coïncide avec sa dérivée faible. Concernant la solution approchée qui est donnée par  $u_h = \sum_{k=1}^N u_h(x_k) \phi_{h,k}$  qui seulement dans  $C^0(\Omega)$ , on définit sa dérivée faible sur  $\Omega$  par la dérivée forte de  $u_h$  restreinte aux sous intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ . La fonction  $u_h$  étant affine sur chacun de ces intervalles, la dérivée faible de  $u_h$  sur  $\Omega$  est en fait une fonction constante par morceaux discontinue. Le petit calcul suivant peut nous en convaincre :

Soit  $k \in \{0, \dots, N\}$ ,

$$u_{h|[x_k, x_{k+1}]}(t) = u_h(x_k) \frac{t - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + u_h(x_{k+1}) \frac{t - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

$$u_{h|[x_k, x_{k+1}]}(t) = \frac{1}{h} ((u_h(x_{k+1}) - u_h(x_k))t - u_h(x_k)x_{k+1} + u_h(x_{k+1})x_k)$$

Donc :

$$u'_{h|[x_k, x_{k+1}]}(t) = \frac{u_h(x_{k+1}) - u_h(x_k)}{h} \quad (9)$$

On peut alors calculer les dérivées voulues et les tracer, ce pour les mêmes valeurs de  $N$  qu'à la question précédente. On obtient la figure 5.

Figure 5: Dérivées de la solution exacte et approchée pour différentes valeurs de  $N$

On voit alors que pour la solution exacte, comme pour la solution approchée, on obtient la fonction qu'il faut, i.e. :

$$u'(x) = \pi \cos(\pi x)$$

Autrement dit, que par la méthode des éléments finis, la dérivée faible de notre solution approchée approche la dérivée de notre solution exacte. Ce que l'on peut expliquer grâce à (1), en effet on y voit que si  $N \rightarrow +\infty$ , alors  $h \rightarrow 0$  et (9) est en fait une limite de taux d'accroissement.

## 2.5 Question 6

Explicitons tout d'abord un petit calcul qui permet d'expliquer comment a été codé le calcul des normes.

$$\|u - u_h\|_0^2 = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u - u_h)^2(x) dx$$

Qui s'approche par la méthode des trapèzes par :

$$\|u - u_h\|_0^2 \simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^N ((u - u_h)^2(x_{i+1}) + (u - u_h)^2(x_i))$$

Or le premier et dernier terme de cette somme sont nuls, et tous les autres apparaissent deux fois. On a donc :

$$\|u - u_h\|_0^2 \simeq h \sum_{i=1}^N (u - u_h)^2(x_i) = h \|((u - u_h)(x_i))_{1 \leq i \leq N}\|_2^2$$

Calculons également  $|u - u_h|_1^2$  :

$$|u - u_h|_1^2 = \int_0^1 (u' - u_h')^2(x) dx$$

$$|u - u_h|_1^2 = \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - u_h')^2(x) dx$$

Avec la formule (9),  $u_h'$  est constante sur  $[x_i, x_{i+1}]$ , on notera donc seulement  $u_h'$  sa valeur. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - u_h')^2(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( u'(x)^2 - 2u'(x)u_h' + u_h'^2 \right) dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - u_h')^2(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)^2 dx - 2u_h' \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) dx + hu_h'^2 \end{aligned}$$

On approche le premier membre par le méthodes des trapèzes :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (u' - u_h')^2(x) dx = \frac{h}{2}(u'(x_{i+1}) + u'(x_i)) - \frac{2}{h}(u_h(x_{i+1}) - u_h(x_i))(u(x_{i+1}) - u(x_i)) + \frac{1}{h}(u_h(x_{i+1}) - u_h(x_i))^2$$

Et il ne reste plus qu'à faire la somme pour obtenir  $|u - u_h|_1^2$ .

## 2.6 Question 7

On calcul les erreurs en norme 0 et 1 grâce aux calculs faits en question 6. Et asymptotiquement, on a :

$$\|u - u_h\|_0 \simeq C_1 h^{p_1} \text{ et } \|u - u_h\|_1 \simeq C_2 h^{p_2}$$

Donc :

$$\log(\|u - u_h\|_0) \simeq \log(C_1) + p_1 \log(h) \text{ et } \log(\|u - u_h\|_1) \simeq \log(C_2) + p_2 \log(h)$$

Donc pour deux pas de maillage  $h_1$  et  $h_2$ , on a :

$$p_1 \simeq \frac{\log(\|u - u_{h_1}\|_0) - \log(\|u - u_{h_2}\|_0)}{\log(h_1) - \log(h_2)} \text{ et } p_2 \simeq \frac{\log(\|u - u_{h_1}\|_1) - \log(\|u - u_{h_2}\|_1)}{\log(h_1) - \log(h_2)}$$

On trouve alors numériquement :

$$p_1 \simeq 2 \text{ et } p_2 \simeq 1$$