4M054 : Mise en oeuvre des éléments finis
X.Claeys & P.Marchand

Projet

Il est possible de réaliser le projet en binôme. Celui-ci devra être rendu, au plus tard le dimanche 30 avril 2017 à minuit, par email à xavier.claeys@ann.jussieu.fr et pierre.marchand@upmc.fr

Le projet sera écrit en Python3. L'usage de toute librairie ou routine de scipy ou numpy est autorisée. Le projet sera envoyé sous forme d'une archive .zip contenant les éléments suivants :

- un compte rendu au format pdf tapé à l'aide d'un logiciel de traitement de texte
- les codes sources du projet,
- un fichier readme résumant le contenu des différents fichiers, et la manière de s'en servir,

On attend que vous mettiez en place des tests de votre propre initiative pour vous assurer du bon fonctionnement de votre code et de sa conformité au cahier des charges imposé. Vous serez interrogés sur les tests mis en place. Pour les courbes, on prendra soin de faire apparaitre une légende et des graduations selon une police suffisamment grosse pour permettre une lecture sans effort.

1 Problème de Helmholtz

Etant donné un domaine de calcul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dont la frontière sera notée Γ, une constante $\omega \in \mathbb{C}$ et une fonction $g : \Gamma \to \mathbb{R}$, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \partial_{\boldsymbol{n}} u = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

Question 1)
Ecrivez une première routine permettant de lire un fichier de maillage dans le format indiqué en appendice et de le charger dans deux tableaux représentant les triangles et les noeuds du maillage. La routine prendra en argument d'entrée le nom du fichier de maillage. Ecrivez une deuxième routine permettant d'afficher graphiquement le maillage à partir du nom de fichier en argument d'entrée.

Question 2)
Lorsqu'on écrit (1) sous forme variationnelle, la forme bilinéaire correspondante est-elle coercive ? Ecrivez un code permettant de résoudre (1) par une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Pour le second membre on pourra prendre

$$g(\boldsymbol{x}) = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \exp(\imath\omega \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{2}$$

où $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ est la normale unitaire à Ω dirigée vers l'extérieur de Ω, et où $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur unitaire $|\mathbf{d}| = 1$, et $\omega = 5\pi$. Votre code prendra en entrée le nom du maillage, et en sortie affichera $\Re e\{u(\boldsymbol{x})\}$ la partie réelle de la solution à l'aide d'une carte de champs. Le code devra être écrit de manière à pouvoir modifier facilement le second membre.

Question 3)
Dans le cas où le second membre $g(\boldsymbol{x})$ est donné par (2), déterminez de manière analytique (par une formule explicite) une solution de (1). Ceci fournit une solution de référence $u_{\text{ref}}(\boldsymbol{x})$. Pour les maillages fournit sur la page web du cours (cf : `https://www.ljll.math.upmc.fr/~claeys/4M054.html`),

et pour divers valeurs de ω, représentez en échelle logarithmique la courbe de $\mathrm{E}(\omega, h)$ en fonction de h où

$$\mathrm{E}(\omega, h) := \frac{\|u_h - \Pi_h(u_{\mathrm{ref}})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}{\|\Pi_h(u_{\mathrm{ref}})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}}$$

où $\Pi_h(v)(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\mathrm{Ns}} v(\boldsymbol{s}_j)\varphi_{\boldsymbol{s}_j}(\boldsymbol{x})$ est l'opérateur d'interpolation sur la base des fonctions de forme $\mathbb{P}_1$-Lagrange. On tracera cette courbe pour les valeurs de $\omega = 5, 10, 20, 40, 80$, en faisant apparaitre toutes les courbes dans la même figure. Que peut-on dire de la précision de la méthode $\mathbb{P}_1$-Lagrange pour $\omega \to \infty$?

2 Phénomène de résonnance

On se place maintenant dans le cas d'un second membre nul $g(\boldsymbol{x}) = 0$ dans (1). On veut étudier les cas où ce problème n'est pas bien posé, et où le problème homogène admet des solutions non-triviales.

Question 4)
On note $\mathrm{K} = (\mathrm{K}_{j,k})$ avec $\mathrm{K}_{j,k} = \int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_k d\boldsymbol{x}$ la matrice de rigidité, et $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{j,k})$ avec $\mathrm{M}_{j,k} = \int_\Omega \varphi_j \cdot \varphi_k d\boldsymbol{x}$ la matrice de masse. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que le problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathrm{U} \in \mathrm{R}^{\mathrm{Ns}} \setminus \{0\}, \quad \text{et} \quad \mathrm{KU} = \lambda \mathrm{MU} \tag{3}$$

admet une solution. Vous calculerez les 6 plus petits de ces λ pour chacun des maillages fournit. Vous consignerez les résultats dans un tableau.

Question 5)
Choisissez l'un des maillages fournit sur la page web du cours (cf : `https://www.ljll.math.upmc.fr/~claeys/4M054.html`) et, pour une valeur propre généralisée λ, calculez un vecteur $\mathrm{U} = (u_j)_{j=1}^{\mathrm{Ns}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{Ns}} \setminus \{0\}$ solution de $\mathrm{KU} = \lambda\mathrm{MU}$. En considérant $u_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{\mathrm{Ns}} u_j \varphi_{\boldsymbol{s}_j}(\boldsymbol{x})$, représentez u_h à l'aide d'une carte de champs. Vous ferez ceci pour chacune des 6 plus petites valeurs propres généralisées.

Appendice : format de maillage

`#Nombre de noeuds`
Ns

`#Coordonnees des noeuds`

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{Ns}	y_{Ns}	z_{Ns}

`#Nombre de triangles`
Nt

`#Numeros des sommets de chaque triangle`

$\mathrm{I}_{1,1}$	$\mathrm{I}_{1,2}$	$\mathrm{I}_{1,3}$
$\mathrm{I}_{2,1}$	$\mathrm{I}_{2,2}$	$\mathrm{I}_{2,3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},1}$	$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},2}$	$\mathrm{I}_{\mathrm{Nt},3}$