博弈论

2016201621魏牧远

Game Time!

热身游戏1

- 已知区间[a, b], 数字x
- 装作不知道数字x的样子
- 两人轮流给出一个数字m
- 如果m>x, 那么接下来在[a, m]中继续游戏
- 如果m<x, 那么接下来在[m, b]中继续游戏
- 如果m=x, 那么给出m的人游戏失败

- 猜中数字的人失败

热身游戏2

- 已知一个长度为 n 的01字符串S
- S仅由 ‘0’ 和 ‘1’ 组成
- 每次可以选择一个 ‘1’ (假设位置为i)
- 翻转从s[i]到s[n]所有01, 即:
- 将其后所有的 ‘0’ 变成 ‘1’, ‘1’ 变成 ‘0’
- 无法翻转的人为负

NIM博弈

- 操作规则:
  - 摆出三堆硬币, 分别包含3, 4, 5枚
  - 两人轮流取硬币
  - 每次选择一堆
  - 从选择的一堆中取走正整数个的硬币
- 胜负判定:
  - 取走最后一枚硬币的人获胜

NIM博弈

- 先手必胜?
  - 初始状态为{3, 4, 5}
  - 先手从第一列中取走2个
  - 接下来状态为{1, 4, 5}
- 必胜!

NIM博弈

- 操作规则:
  - 摆出n堆物品, 第i堆有$A[i]$个
  - 两人轮流取物品
  - 每次选择一堆
  - 从选择的一堆中取走正整数个的物品
- 胜负判定:
  - 取走最后一件物品的人获胜

博弈论

- 先手: 第一个进行游戏操作的人
- 后手: 第二个进行游戏操作的人
- 必败态(必败局面): 在某一局面下无论采取何种行动, 都会输掉这次游戏(∀)
- 必胜态(必胜局面): 在某一局面下存在一种行动使得行动后对手面临必败局面(∃)
- 最优策略: 若在某一局面下存在一种行动使得可以使得对手面临必败局面, 则执行这种行动

博弈论

- 只考虑两人均按照最优决策(最优策略)
- NIM博弈不存在平局.
  - 先手必胜
  - 先手必败
- 定理:
  - NIM博弈先手必胜的充要条件是:
  - $A[1]\ xor\ A[2]\ xor\ A[3]\ xor\ \ldots\ xor\ A[n] \ = \ 0$

XOR 异或和

- Def:
  - 当两两数值相同为否，而数值不同时为真
  - “半加法”
  - $A\ xor\ B\ =\ \neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

A	B	xor
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NIM博弈

- 数学归纳法证明:
  - 所有的物品都被取光是最简单的必败态
  - 即有
    - $A[1] = A[2] = A[3] = \ldots = A[n] = 0$
  - 此时有
    - $A[1]\ xor\ A[2]\ xor\ A[3]\ xor\ \ldots\ xor\ A[n] = 0$

NIM博弈

- 数学归纳法证明:
  - 又: 对于任意一个局面若为
    - $A[1] xor\ A[2] xor\ A[3] xor\ \ldots\ xor\ A[n] = \mathrm{x} \neq 0$
  - 假设此时异或和最高位是第k位
  - 则至少存在一堆物品A[i]其第k位为1
  - 显然有 $(A[i]\ xor\ x) < A[i]$
  - 从A[i]中取走 $A[i]\ xor\ x$ 个物品
  - 此时$A[i]' = A[i] - (A[i]\ xor\ x)$
  - 可以得到:
    - $A[1]\ xor\ A[2]\ xor\ A[3]\ xor \ldots xor\ \mathrm{A}[i]'\ xor\ \ldots\ xor\ A[n] = 0$

NIM博弈

- 数学归纳法证明:
  - 而对于任意一个局面若为:
    - $A[1]\ xor\ A[2]\ xor\ A[3]\ xor\ \ldots\ xor\ A[i]\ xor\ \ldots\ xor\ A[n]\ =\ 0$
  - 则无论进行何种操作, 都有
    - $A[1]\ xor\ A[2]\ xor\ A[3]\ xor\ \ldots\ xor\ \mathrm{A}[i]'\ xor\ \ldots\ xor\ A[n]\ \neq\ 0$
  - 综上,
    - $A[1] xor\ A[2] xor\ A[3] xor\ \ldots\ xor\ A[n] \neq 0$
  - 为必胜局面, 即存在一种行动使得对手面临
    - “$A[1] xor\ A[2] xor\ A[3] xor\ \ldots\ xor\ A[n] = 0$”
  - 的必败局面. 问题得证!

ICG公平组合游戏

- 若一个游戏满足:
  - 两名玩家交替移动
  - 游戏进程的任意时刻, 可以执行的合法行动与轮到的哪名玩家无关
  - 不能行动的玩家判负.
- 则称之为一个公平组合游戏

- NIM游戏, 纳什游戏…
- 围棋, 五子棋, 象棋…

tivility@outlook.com

有向图游戏

- 有向图游戏
  - 一个有向无环图
  - 图中只有唯一一个起点
  - 起点上有一枚棋子
  - 两名玩家交替的按照有向边移动棋子
  - 每次可以移动一步(经过且只经过一条边)
  - 无法移动者判负
- 任意一个公平组合游戏都可以转化成有向图游戏

转化

- ICG游戏转化为有向图游戏:
  - 建图!
  - 每一个局面为一个点
  - 局面之间的转化为有向边

mex运算

- Def:
  - mex(S)为求出不属于集合S的最小非负整数
  - $mex(S) = \min_{x \in \mathrm{N}, x \notin S}\{x\}$

SG函数

- Def:
  - 在有向图游戏中, 对于一个节点x
    - 假设x有k条出边
    - x的k个后继节点为 y1, y2, …, yk
  - 则:
    - SG(x) = mex{SG(y1), SG(y2), …, SG(yk)}
  - 特别的, 整个有向图游戏G的SG函数为其起点s的函数值, 即:
    - SG(G) = SG(s).

有向图游戏的和

- Def:
  - 假设G1, G2, …, Gm为m个有向图游戏
  - 定义有向图游戏G, 规则如下
    - 任选一个有向图游戏Gi
    - 在Gi上行动一步
  - G被称为有向图游戏G1, G2, …, Gm的和
  - 有:
    - SG(G) = SG(G1) xor SG(G2) xor … xor SG(Gm)

有向图游戏

- 定理:
  - 有向图游戏某个局面必胜:
    - 当前局面对应节点的SG函数值大于0
  - 有向图游戏某个局面必败
    - 当前局面对应节点的SG函数值等于0

- 证明同NIM博弈, 略.

习题:

- **HDU 3951 Coin Game**
- **HDU 5591 ZYB's Game**

谢谢！