HW1

1、(1) $f(x)=(a+x)^n-a^n$

当 $n=0$, $f(x)=0$ $n=1$, $f(x)=a$ $n=2$, $f(x)=(2a+x)x$,

$n=3$ $f(x)=x[(a+x)^2+(a+x)a+a^2]$

…… $\therefore f(x)=x\cdot\sum_{i=0}^{n}C_n^i(a+x)^i a^{n-i}$

将两相近数相减拆成积的形式以减少相对误差.

(2). $f(x)=\cos(a+x)-\cos a$

$$=-2\sin\frac{2a+x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

两相近数相减拆成乘积.

(3). $f(x)=x-\sqrt{x^2+a}$,

设 $g(x)=x+\sqrt{x^2+a}$

$\therefore h(x)=f(x)g(x)=x^2-x^2-a=-a$

$\therefore f(x)=-\dfrac{a}{x+\sqrt{x^2+a}}$

两相近数相减转化成商.

2、 5 0.0000005.

3、

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

……

$$l_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

若 $x_0,\cdots,x_n$ 与 $l_0(x),\cdots,l_n(x)$ 线性相当

当且仅当

当且仅当 $a(x_0,x_1,\cdots,x_n)+b(l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x))=0$,

~~a,b~~ a,b不都为0时成立

∴设 $\begin{cases} ax_0+bl_0(x_0)=0 \\ ax_1+bl_1(x_1)=0 \\ \cdots\cdots \\ ax_n+bl_n(x_n)=0 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a\prod_{i=1}^{n}(x_0-x_i)+b\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=0 \\ a\prod_{i=0,i\neq 1}^{n}(x_1-x_i)+b\prod_{i=0,i\neq 1}^{n}(x-x_i)=0 \\ \cdots\cdots \\ a\prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)+b\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_{n-1})=0 \end{cases}$

∴当且仅当a=b=0时方程组成立 ∴线性无关

4. $(x_0,f(x_0))=(-1,0)$ …… $(x_3,f(x_3))=(5,4)$

$l_0(x)=\dfrac{(x+1)(x-4)(x-5)}{-2\cdot(-5)\cdot(-6)}$ $l_1(x)=\dfrac{(x+1)(x-4)(x-5)}{2\times(-3)\times(-4)}$ $l_2(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x-5)}{5\times3\times(-1)}$

$l_3(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x-4)}{6\times4\times1}$

∴ $L_3(x)=\dfrac{(x+1)(x-4)(x-5)}{24}+2\times\left(-\dfrac{(x+1)(x-1)(x-5)}{15}\right)+\dfrac{(x+1)(x-1)(x-4)}{6}$

∴ $L_3(2.0)=1.7$

$L_3(4.0)=2$