P13. 1.7

$\neg p \wedge q$	$\to$	$\neg q \wedge r$
1000	1	1000
1000	1	1011
1011	0	0100
1011	0	1101
0100	1	0000
0100	1	1011
0101	1	0100
0101	1	1101

1.9

$\neg(p \vee (q \wedge r))$	$\longleftrightarrow$	$((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
1 0 0 000	0	000 0000
1 0 0 001	0	000 0011
1 0 0 100	0	011 0000
0 0 1 111	0	0111 011
0 1 1 000	0	1101 110
0 1 1 001	0	1101 111
0 1 1 100	0	1111 110
0 1 1 111	0	1111 111

P22.

1.1

(1) $(\neg\gamma_1 \to \neg\gamma_2) \to (\gamma_2 \to \gamma_1)$ L3

(2) $((\neg\gamma_1 \to \neg\gamma_2) \to (\gamma_2 \to \gamma_1)) \to ((\gamma_1 \to \gamma_2) \to ((\neg\gamma_1 \to \neg\gamma_2) \to (\gamma_2 \to \gamma_1)))$ L1

(3) $(\gamma_1 \to \gamma_2) \to ((\neg\gamma_1 \to \neg\gamma_2) \to (\gamma_2 \to \gamma_1))$ (1)(2) MP

1.2

$\cancel{((\gamma_2 \to \gamma_3) \to \gamma_3) \to \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3) \to \gamma_3}$

(1) γ_3 假定

(2) $\gamma_3 \to (\gamma_2 \to \gamma_3)$ L(1)

(3) $\gamma_2 \to \gamma_3$ (1)(2) mp

(4) $(\gamma_2 \to \gamma_3) \to (\gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3))$ L(1)

(5) $\gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3)$ (3)(4) mp

(6) $(\gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3)) \to ((\gamma_1 \to \gamma_2) \to (\gamma_1 \to \gamma_3))$ L(2)

(7) $((\gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3)) \to (\gamma_1 \to \gamma_2)) \to ((\gamma_1 \to (\gamma_2 \to \gamma_3)) \to (\gamma_1 \to \gamma_3))$ L(2)

3.2

(1) $\neg\neg p$ 假定

(2) $\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ L(1)

(3) $\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p$ (1)(2) mp

(4) $(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ L(3)

(5) $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (3)(4) mp

(6) $(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ L(3)

(7) $\neg\neg p \to p$ (5)(6) mp

(8) p (1)(7) mp

3.3.

(1) $\neg(q\to r)\to\neg p$ 假定

(2) $(\neg(q\to r)\to\neg p)\to(p\to(q\to r))$ L(3)

(3) $p\to(q\to r)$ (1)(2) mp

(4) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$ L(2)

(5) $(p\to q)\to(p\to r)$ (3)(4) mp

(6) $p\to q$ 假定

(7) $p\to r$ (5)(6) mp

3.4

(1) ~~$p\to q$~~ $p\to(q\to r)$ 假定

(2) $(p\to q)\to(p\to r)$ L(2), mp

(3) $((p\to q)\to(p\to r))\to(q\to((p\to q)\to(p\to r)))$ L(1)

(4) $q\to((p\to q)\to(p\to r))$ (2)(3) mp

(5) $(q\to((p\to q)\to(p\to r)))\to((q\to(p\to q))\to(q\to(p\to r)))$ L(2)

(6) $(q\to(p\to q))\to(q\to(p\to r))$ (4)(5) mp

(7) $q\to(p\to q)$ L(1)

(8) $q\to(p\to r)$ (6)(7) mp.

(9)

P25.

1. 直接证明：(1) $(x_1\to(x_1\to x_2))\to((x_1\to x_1)\to(x_1\to x_2))$ (L2).

将上式记为 P_0.

(2). $P_0\to(((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_1))\to((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_2)))$ (L2).

(3). $((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_1))\to((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_2))$ (1). (2). MP.

(4). $x_1\to((x_1\to x_2)\to x_1)$ (L1).

(5). $(x_1\to((x_1\to x_2)\to x_1))\to((x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_1))$ (L2).

(6). $(x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_1)$ (4). (5). MP.

(7). $(x_1\to(x_1\to x_2))\to(x_1\to x_2)$ (3). (6). MP.

演绎定理证明：只需证 $\{x_1\to(x_1\to x_2), x_1\}\vdash x_2$

(1). x_1 假定.

(2). $x_1\to(x_1\to x_2)$ 假定.

(3). $x_1\to x_2$ (1). (2). MP.

(4). x_2 (1). (3) MP.

2. 2°. 只需证：$\{q\to p\}\vdash \neg p\to\neg q$.

(1). $q\to p$ 假定

(2). $\neg\neg q\to q$ 双重否定律.

(3). $\neg\neg q\to p$ (1). (2). HS

(4). $p\to\neg\neg p$ 第二双重否定律.

(5). $\neg\neg q\to\neg\neg p$ (3). (4). HS

(6). $(\neg\neg q\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg q)$ (L3).

(7). $\neg p\to\neg q$ (5). (6). MP.

3°. 只需证 $\{(p\to q)\to p\}\vdash p$.

(1). $\neg p\to(p\to q)$. 否定前件律.

(2). $(p\to q)\to p$. 假定

(3). $\neg p\to p$. (1). (2). HS

(4). $(\neg p\to p)\to p$ 否定肯定律.

(5). p (3). (4). MP.

P28.

1. 1°. 由演绎定理. 只需证 $\{p\to\neg q, q\}\vdash\neg p$

(1). p 新假定

(2). $p\to\neg q$ 假定.

(3). $\neg q$ (1).(2). HS

(4). q 假定.

即. $\left.\begin{array}{l}\{p\to\neg q, q\}\cup\{p\}\vdash\neg q\\ \{p\to\neg q, q\}\cup\{p\}\vdash q\end{array}\right\}$ 由归谬律得. $\{p\to\neg q, q\}\vdash\neg p$.

2°. 由演绎定理. 只需证 $\{\neg p\to q, \neg q\}\vdash p$.

(1). $\neg p$ 新假定.

(2). $\neg p\to q$ 假定.

(3). q (1).(2). HS

(4). $\neg q$ 假定.

即. $\left.\begin{array}{l}\{\neg p\to q, \neg q\}\cup\{\neg p\}\vdash q\\ \{\neg p\to q, \neg q\}\cup\{\neg p\}\vdash\neg q\end{array}\right\}$ 由反证律得. $\{\neg p\to q, \neg q\}\vdash p$.

3°. 由演绎定理. 只需证 $\{\neg(p\to q)\}\vdash\neg q$.

(1). q 新假定.

(2). $q\to(p\to q)$ (L1)

(3). $p\to q$ (1).(2). MP.

(4). $\neg(p\to q)$. 假定.

(3).(4) 由归谬律 可得 $\{\neg(p\to q)\}\vdash\neg q$.

P30.

1. 要证 $\vdash (p\vee q)\to(q\vee p)$、即证 $\vdash(\neg p\to q)\to(\neg q\vee p)$

由演绎定理. 即证 $\{\neg p\to q, \neg q\}\vdash p$.

(1). $\neg p$ 新假定

(2). $\neg p\to q$ 假定

(3). q (1).(2). HS

(4). $\neg q$ 假定.

(3).(4)由反证律得 $\{\neg p\to q, \neg q\}\vdash p$. 即 $\vdash(p\vee q)\to(q\vee p)$.

2. 2-2°. 要证 $\vdash(p\wedge q)\to q$ 即证 $\vdash(\neg(p\to\neg q))\to q$.

由演绎定理. 只用证 $\{\neg(p\to\neg q)\}\vdash q$.

(1). $\neg q$ 新假定.

(2). $\neg q\to(p\to\neg q)$. (L1)

(3). $p\to\neg q$ (1).(2). MP.

(4). $\neg(p\to\neg q)$. 假定.

(3).(4).由反证律得 $\{\neg(p\to\neg q)\}\vdash q$. 即. $\vdash(p\wedge q)\to q$.

2-3°. 要证 $\vdash(p\wedge q)\to(q\wedge p)$. 即证 $\vdash(\neg(p\to\neg q))\to(\neg(q\to\neg p))$.

由演绎定理. 只用证 $\{\neg(p\to\neg q)\}\vdash\neg(q\to\neg p)$.

(1). $q\to\neg p$. 新假定.

(2). $(q\to\neg p)\to(p\to\neg q)$.

(3). $p\to\neg q$ (1).(2). MP.

(4). $\neg(p\to\neg q)$. 假定.

(3).(4) 由归谬律可得 $\{\neg(p\to\neg q)\}\vdash\neg(q\to\neg p)$.

2-4°. 要证 $\vdash p\to(p\wedge p)$. 即证 ~~{p}⊢~~ $\vdash p\to(\neg(p\to\neg p))$.

由演绎定理. 只用证 $\{p\}\vdash\neg(p\to\neg p)$.

(1). $p\to\neg p$ 新假定

(2). p 假定

(3) $\neg p$ (1).(2). MP.

(2).(3) 由归谬律得. $\{p\}\vdash\neg(p\to\neg p)$.

P_{42}.

2.2 $(p \wedge q) \longrightarrow q$

p	$\wedge$	q	$\longrightarrow$	q
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

为永真式.

2.3 $(q \vee r) \longrightarrow (\neg r \longrightarrow q)$

q	$\vee$	r	$\longrightarrow$	$\neg$	r	$\longrightarrow$	q
0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

为永真式.

2.4 $(p \wedge \neg q) \vee ((q \wedge \neg r) \wedge (r \wedge \neg p))$

取 0001 $\underline{0}$ 1001 01110 时为0,

∴不是永真式.

2.5 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \longrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r)$

取 01010 $\underline{0}$ 0010 00 时为0.

∴不是永真式.

3.1. $\models p(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 对任意赋值 $v(p(x_1, \cdots x_n)) = 1$

由代换定理，用 $\neg x_i$ 代替 x_i，则 $\models p(x_1, x_2, \cdots x_n) \Longrightarrow \models p(\neg x_1, \neg x_2 \cdots \neg x_n)$

反之同理 $\therefore \models p(x_1, x_2, \cdots x_n) \Longleftrightarrow \models p(\neg x_1, \neg x_2, \cdots \neg x_n)$

3.2 对 $(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (p' \rightarrow q')$，赋值 v 使 $v(p)=0$ $v(q)=1$ 满足上式,
$v(p')=1$ $v(q')=1$

但 $p \Longleftrightarrow p'$ 为假，故不正确.

P46

2. 证明：$\Gamma \vDash p \Rightarrow \Gamma \vdash p$

1) 若Γ为有限集，则取$\Sigma = \Gamma$，$\Sigma \vdash p$

2) 若Γ为无限集，由定义知p从Γ的证明是有序序列 $p_1, p_2 \cdots p_n$.

取$\Sigma = \{p_1, p_2 \cdots p_n\}$，则$\Sigma \vdash p$

而$\Sigma \vdash p \Rightarrow \Sigma \vDash p$.

P49.

1. 3°. $\because \vDash (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

$\therefore ((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$

由De.Morgan律，$(\neg(\neg p \vee q) \vee r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$

再由等值传递性得 $((\neg p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee r)$

4°. $\because \vDash (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

$\therefore \neg(\neg p \vee q) \vee r \leftrightarrow (\neg p \vee q) \to r$

$\leftrightarrow (p \to q) \to r$.

3. P131

P53.

2. 3°. 原式的成假指派为：(0, 0, 0). (0, 1, 0). (0, 1, 1). (1, 0, 1). (1, 1, 0). (1, 0, 0).

由此得等值的主合取范式为 $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

4°. 原式的成假指派为：(0, 0, 1, 0). (0, 1, 1, 0). (1, 0, 0, 0). (1, 0, 1, 0). (1, 1, 1, 0).

由此得等值的主合取范式. $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4). \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4).$

$\wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4). \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4).$

P57

2. 2°. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

$= \neg\neg ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3))$

$= \neg ((\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3))$

$= \neg (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \wedge \neg (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$

3°. $(x_1 \leftrightarrow \neg x_2) \leftrightarrow x_3$

$= ((x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_1)) \leftrightarrow x_3$

$= (((x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_1)) \rightarrow x_3) \wedge (x_3 \rightarrow ((x_1 \rightarrow \neg x_2) \wedge (\neg x_2 \rightarrow x_1)))$

$= \neg (\neg (x_1 \wedge x_2) \wedge \neg (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \wedge \neg x_3) \wedge \neg (x_3 \wedge \neg (\neg (x_1 \wedge x_2) \wedge \neg (\neg x_1 \wedge \neg x_2))).$

4. $x_1 \rightarrow x_2 = \neg x_1 \vee x_2$

$\therefore \neg x_1 \vee x_2 \leftrightarrow \neg\neg (\neg x_1 \vee x_2)$

$\leftrightarrow \neg (\neg x_1 \vee x_2) \downarrow \neg (\neg x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \downarrow x_2) \downarrow (\neg x_1 \downarrow x_2)$

$\leftrightarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2)$

P60.

2. 用 x_1, x_2, x_3, x_4 分别表示 ABCD 发生，则论证可形式化为

$\{\neg(x_1\wedge x_2),\ x_1\to(\neg x_3\wedge x_4),\ x_4\to\neg x_2\}\vdash\neg(x_2\wedge x_3)$

解方程组

$$\begin{cases}\neg(x_1\wedge x_2)=1\\ x_1\to(\neg x_3\wedge x_4)=1\\ x_4\to\neg x_2=1\\ \neg(x_2\wedge x_3)=0\end{cases}$$

由 $\neg(x_2\wedge x_3)=0$ 得 $x_2=x_3=1$

$\therefore x_1=0,\ x_4=0$

即方程组有解 $(0,1,1,0)$

$\therefore$ 不正确，不合理

3. 形式化为

$\{(\neg x_1\wedge\neg x_2)\leftrightarrow(\neg x_3\wedge\neg x_4),\ (x_1\wedge x_2)\to((x_3\vee x_4)\wedge\neg(x_3\wedge x_4)),$
$(x_2\wedge x_3)\to((x_1\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge\neg x_4))\}\vdash(\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3)$

解方程组.

$$\begin{cases}(\neg x_1\wedge\neg x_2)\leftrightarrow(\neg x_3\wedge\neg x_4)=1\\ (x_1\wedge x_2)\to((x_3\vee x_4)\wedge\neg(x_3\wedge x_4))=1\\ (x_2\wedge x_3)\to((x_1\wedge x_4)\vee(\neg x_1\wedge x_4))=1\\ \neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3=0\end{cases}$$

由 $\neg x_1\vee\neg x_2\vee\neg x_3=0$ 得 $x_1=x_2=x_3=1$ $\therefore x_4=1$

而 $(x_1\wedge x_2)\to((x_3\vee x_4)\wedge\neg(x_3\wedge x_4))=0$

即方程组无解，合理.

P64.

$R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),\ f_2^2(x_3,x_4))$　　$n_1+n_2=n_3\times n_4$

$R_1^2(f_1^2(x_1,c),\ f_2^2(c,c))$　　$x_1+0=0\times 0$

$R_1^2(f_2^2(x_5,x_5),\ f_2^2(x_6,x_6))$　　$n_5\times n_5=n_6\times n_6$

P66

2.

(1) $\forall x_2 (R_1^2(x_1, x_2) \longrightarrow R_2^2(x_2, c_1))$　　x_1 自由，$f_1^2(x_1, x_3)$ 对其中 x_2 自由

(2) $R_1^1(x_3) \longrightarrow \neg \forall x_1 \forall x_2 R_1^3(x_1, x_2, c_1)$　　x_1 约束出现2次，$f_1^2(x_1, x_3)$ 对其中 x_2 自由

(3) $\forall x_1 R_1^1(x_1) \longrightarrow \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$　　x_1 约束2次，自由1次，$f_1^2(x_1, x_3)$ 对其中 x_2 自由

(4) $\forall x_2 R_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \longrightarrow \underline{\forall x_1} R_2^2(x_3, f_2^2(x_1, \underline{x_2}))$

x_1 自由2次，约束2次，$\underline{f_1^2(x_1, x_3)\text{对其中 } x_2 \text{ 不自由}}$.

(将 $f_1^2(x_1, x_3)$ 代入受约束).

3、

(1) t对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由． $p(t) = \forall x_1 R_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \longrightarrow R_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$

(2) t对 $p(x_1)$ 中 x_1 自由． $p(t) = \forall x_1 \forall x_3 (R_1^1(x_3) \longrightarrow R_1^1(x_1)) = p(x_1)$

(3) (4) t 对 $p(x_1)$ 中 x_1 不自由.

~~注：若为 $f_1^2(x_1, x_3)$，对于 $p(x_1)$ 中的 x_1 若~~

~~4~~ 5. x在 $p(x)$ 中自由出现 ⟹ 任意包含x的范围没有 $\forall x$，记该范围为A.

y在 $p(x)$ 中不自由出现 ⟹ 任意包含y的范围都有 $\forall y$，记该范围为B.

y对 $p(x)$ 中的x自由 ⟹ A范围中没有 $\forall y$． ∴ A,B互斥.

$p(y)$ 对用y替换A中的x，$p(y)$ 中的y自由出现在A，不自由出现在B.

所以，x对 $p(y)$ 的y替换时，只替换A中的y，∴是自由的.

P73.

3. 1°. (1). $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$　假定

(2). $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$　(K4)

(3). $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$　(1).(2). MP

(4). $\forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_1)$.　(K4).

(5). $R_1^2(x_1, x_1)$　(3).(4). MP.

(6). $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_1)$.　(5). Gen.

2°. (1). $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$　假定

(2). $\forall x_1 \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_1 R_1^2(x_1, x_3)$　(K4)

(3). $\forall x_1 R_1^2(x_1, x_3)$.　(1).(2). MP.

(4). $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3)$.　(3). Gen.

(5). $\forall x_1 \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3) \to \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$.　(K4)

(6). $\forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$.　(4).(5). MP.

(7). $\forall x_2 \forall x_3 R_1^2(x_2, x_3)$.　(6). Gen.

4. 1°. 由演绎定理，只需证 $\{p \to \forall x q\} \vdash \forall x (p \to q)$

(1). $p \to \forall x q$　假定

(2) $\forall x q \to q$　(K4)

(3). $p \to q$　(1).(2). MP.

(4). $\forall x (p \to q)$.　(3). Gen.

又. ∵ x 不在 $p \to \forall x q$ 中自由出现，且未增加新的 Gen 变元.

∴由演绎定理得，$\vdash (p \to \forall x q) \to \forall x (p \to q)$.

2°. (1). $\forall x \neg (p \to q)$　假定

(2). $\forall x \neg (p \to q) \to \neg (p \to q)$　(K4)

(3). $\neg (p \to q)$　(1).(2) MP.

(4). $\neg (p \to q) \to p$　永真式.

(5). p　(3).(4). MP.

(6). $p \to \exists x q$　假定.

(7). $\exists x q$. 即 $\neg \forall x \neg q$.　(5).(6). MP.

(8). $\neg (p \to q) \to \neg q$　永真式.

(9). $\neg q$　(3).(8) MP.

(10). $\forall x \neg q$.　(9). Gen.

∴由 $\{p \to \exists x q, \forall x \neg (p \to q)\} \vdash \forall x \neg q$ 和 $\vdash \neg \forall x \neg q$，使用归谬律得，

$\{p \to \exists x q\} \vdash \neg \forall x \neg (p \to q)$.

又∵ x 不在 $p \to \exists x q$ 中自由出现，且无新的 Gen 变元.

∴ $\vdash (p \to \exists x q) \to \neg \forall x \neg (p \to q)$.

即：$\vdash (p \to \exists x q) \to \exists x (p \to q)$.

P74.

5. 1°. 不正确. 不满足演绎定理的条件：x_1 在 $R_1^1(x_1)$ 中不自由出现.

2°. 不正确. 不满足反证律的条件：Gen 变元不在 $\neg R_1^1(x_1)$ 中自由出现.

P81.

1. 1°. 由演绎定理,只需证 $\{\exists x p \to q\} \vdash \forall x(p \to q)$.

(1). $\exists x p \to q$. 即. $\neg\forall x\neg p \to q$　　假定.

(2). $(\neg\forall x\neg p \to q) \to (\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p)$. 永真式.

(3). $\neg q \to \neg\neg\forall x\neg p$.　　(1). (2). MP

(4). $\neg\neg\forall x\neg p \to \forall x\neg p$.　双重否定律.

(5). $\neg q \to \forall x\neg p$　　(3). (4). HS

(6). $\forall x\neg p \to \neg p$　　(K4).

(7). $\neg q \to \neg p$　　(5). (6). HS

(8). $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$.　　(K3).

(9). $p \to q$.　　(7). (8). MP.

(10). $\forall x(p \to q)$.　　(9). Gen.

∵ x 不在 q 中自由出现、且无新的 Gen 变元.

∴ 由演绎定理可得 $\vdash (\exists x p \to q) \to \forall x(p \to q)$.

2°. 下面公式由 ~~{∀x(p→q), ∀xp, ¬q} 可证~~. $\{\neg\forall x\neg(p \to q), \forall x p, \neg q\}$ 可证.

(1). $\forall x p$　假定

(2) $\forall x p \to p$　(K4)

(3). p　　(1) (2) MP

(4). ~~p~~ $\neg q$　假定

(5). $\neg(p \to q)$　永真式

(6). $\forall x\neg(p \to q)$　(5). Gen.

(7). $\neg\forall x\neg(p \to q)$. 假定.

由(6). (7) 和反证律可得 $\{\neg\forall x\neg(p \to q). \forall x p\} \vdash q$.

∴ 由演绎定理可得. $\vdash \exists x(p \to q) \to (\forall x p \to q)$.

2. (1). $p^* \longleftrightarrow \neg p$. (对偶律)

(2). $(p^*)^* \longleftrightarrow \neg p^*$ (对偶律)

(3). $(p^*)^* \longleftrightarrow \neg\neg p$ (传递性)

(4). $\neg\neg p \longleftrightarrow p$　永真式

(5). $(p^*)^* \longleftrightarrow p$　(传递性)

P81

3.

(1) $\forall x_1 R_1^1(x_1) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$

$\forall x_3 R_1^1(x_3) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2)$

$\forall x_2 (\forall x_3 R_1^1(x_3) \to R_1^2(x_1, x_2))$

$\forall x_2 \exists x_3 (R_1^1(x_3) \to R_1^2(x_1, x_2))$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x P \to Q \\ \neg \forall x P \lor Q \\ \exists x \neg P \lor Q \\ \exists x (P \to Q) \end{array}}$$

(2) $\forall x_1 (R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2 R_1^2(x_1, x_2))$

$\forall x_1 (R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 R_1^2(x_1, x_3))$

$\forall x_1 \forall x_3 (R_1^2(x_1, x_2) \to R_1^2(x_1, x_3))$

(3) $\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (\exists x_2 R_1^1(x_2) \to \exists x_3 R_1^2(x_2, x_3))$

$\forall x_1 (R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to \exists x_3 \forall x_4 (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3))$

$\exists x_3 \forall x_4 \exists x_1 ((R_1^1(x_1) \to R_1^2(x_1, x_2)) \to (R_1^1(x_4) \to R_1^2(x_2, x_3)))$

(4) $\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg \exists x_3 R_1^2(x_1, x_3))$

$\exists x_1 R_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_3 (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3))$

$\forall x_3 \forall x_4 (R_1^2(x_4, x_2) \to (R_1^1(x_1) \to \neg R_1^2(x_1, x_3)))$

5. $\forall x_1 P \to \forall x_2 \forall x_3 Q$

$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P \to Q)$

$\forall x_2 \exists x_1 \forall x_3 (P \to Q)$

P84.

2、归纳假设证明.

$k=0$ 时 $t=x_i$ 或 c_i，对 $\forall x$ 有 $\varphi(x)=\psi(x)$ $\varphi(c_i)=\psi(c_i)$

$\therefore$ 有 $\varphi(t)=\psi(t)$

$k\le n-1$ 时，$\varphi(t)=\psi(t)$ 成立.

$\therefore$ 当 $k=n$ 时，设 $t=f_i^m(t_1,\cdots t_m)$ 其中 $t_1,\cdots t_m$ 的层次不超过 n

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\varphi(f_i^m(t_1,\cdots t_m))\\&=\bar{f}_i^m(\varphi(t_1),\cdots\varphi(t_m))\\&=\bar{f}_i^m(\psi(t_1)\cdots\psi(t_m))\\&=\psi(f_i^m(t_1,\cdots t_m))\\&=\psi(t)\end{aligned}$$

由上所证.

3. 对 $u(x)$ 在T的层次 归纳证明.

$k=0$ 时 $u_0(x)=c,\ x,\ y.\ (y\ne x)$

$u_0(x)=c$，$\varphi'(u_0(x))=\varphi'(c)$ $\quad\varphi(u_0(t))=\varphi(c)$

$u_0(x)=x$，$\varphi'(u_0(x))=\varphi'(x)$ $\quad\varphi(u_0(t))=\varphi(t)$

$u_0(x)=y$，$\varphi'(u_0(x))=\varphi'(y)$ $\quad\varphi(u_0(t))=\varphi(y)$

$\therefore k=0$ 时均成立.

假设 $k=n-1$ 时，$\varphi'(u(x))=\varphi(u(t))$

当 $k=n$ 时，对任意 f_i^m 有 $\quad u(x)=f_i^m(t_1(x),\cdots t_m(x))$，$t_1\cdots t_m$ 均为层次不超 n

$$\begin{aligned}\varphi'(u(x))&=\varphi'(f_i^m(t_1(x),\cdots t_m(x)))\\&=\bar{f}_i^m(\varphi'(t_1(x)),\cdots\varphi'(t_m(x)))\\&=\bar{f}_i^m(\varphi(t_1(t)),\cdots\varphi(t_m(t)))\\&=\varphi(u(t))\end{aligned}$$

由上所证

P87

2.4

$\forall x_1$

取φ使 $|P|(\varphi)=1$，即 $\varphi(x_1)-\varphi(x_2)<\varphi(x_3)$

$\therefore$ φ不存在，对 $\forall \varphi \in \Phi$ 均有 $|P|(\varphi)=0$

2.5 $\forall x_1 (x_1 - 0 < x_1) \longrightarrow x_1 < x_2$. 永真式

$\therefore$ $\forall \varphi \in \Phi_2$，使 $|P|(\varphi)=1$ 成立

不存在 $\varphi \in \Phi_2$，使 $|P|(\varphi)=0$ 成立

2.6 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 - x_2 < 0 \longrightarrow x_1 < x_2)$ 永真式.

同2.5.

P91.

3. 构造合理即可. 可参考 P195

4. 参考 P195.

P93.

1. 2°. 设 $|\forall x_1 R_i^1(x_1)|(\varphi)=1$, 只needs证 $|\forall x_2 R_i^1(x_2)|(\varphi)=1$. 对 φ 的任一 x_2 变通 φ_2, 作 φ 的 x_1 变通 φ_1 使 $\varphi_1(x_1)=\varphi_2(x_2)$. 于是.

$|\forall x_1 R_i^1(x_1)|(\varphi)=1 \Rightarrow |R_i^1(x_1)|(\varphi_1)=1 \Rightarrow \varphi_1(x_1)\in\overline{R_i^1}$

$\Rightarrow \varphi_2(x_2)\in\overline{R_i^1} \Rightarrow |R_i^1(x_2)|(\varphi_2)=1 \Rightarrow |\forall x_2 R_i^1(x_2)|(\varphi)=1$

3°. 令 $|\forall x(p\to q)|(\varphi)=1$.

$\therefore |\forall x(p\to q)|(\varphi)=1 \Rightarrow |p\to q|(\varphi)=1$

$\Rightarrow |p|(\varphi)\to|q|(\varphi)=1$

$\Rightarrow |\forall x p|(\varphi)\to|\forall x q|(\varphi)=1$

$\therefore |\forall x(p\to q)\to(\forall x p\to\forall x q)|(\varphi)=1$

$\therefore \vDash \forall x(p\to q)\to(\forall x p\to\forall x q)$.

3. 3°. 取 $\overline{R_i^1}$ 为 "$=0$", $M=N$, $\overline{c_1}=0$. 则对任意 $\varphi\in\Phi_M$ 取 φ 的 x_1 变通. 使 $\varphi(x_1)>0$

则 $|\neg R_i^1(x_1)|(\varphi)=1$.

$|\neg R_i^1(c_1)|(\varphi)=\neg|R_i^1(c_1)|(\varphi)=0$

故不是有效式.

4°. 取 $\overline{R_i^2}$ 为 "相等".

则 $|\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)|=1$

$|\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|=0$.

$\therefore |\forall x_1 R_1^2(x_1,x_1)\to\exists x_2\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)|=0$

故不是有效式.

5°. 取 $\overline{R_1}$ 为 "$=0$", 则 $|\exists x_1 R_1(x_1)|_N=1$, 而当 $\varphi(x_1)=1$ 时 $|R_1(x_1)|(\varphi)=0$.

故不是有效式.

$\boxed{\text{此题 构造合理即可}}$

4. P195.

P_{98}.

1、假设该公式集有矛盾，即存在公式 p 使 $\Gamma \vdash p$ 与 $\Gamma \vdash \neg p$ 同时成立，

由可靠性知 $\Gamma \models p$，$\Gamma \models \neg p$

对于 Γ 的模型 M，$|p|_M = 1$ 与 $|\neg p|_M = 1$ 同时成立，矛盾.

∴假设不成立，该公式集是无矛盾的.

2、由 K 的可靠性，若 $\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \longrightarrow \exists x_2 R_1^2(x_2, x_2)$ 成立

则 $\models \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \longrightarrow \exists x_2 R_1^2(x_2, x_2)$ 成立.

取解释域 M 为实数域. $R_1^2(x_1, x_2)$ $x_1 < x_2$. $\varphi(x_1) = 0$.

$$\begin{cases} \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) & \exists x_2 (0 < x_2) \\ \exists x_2 R_1^2(x_2, x_2) & \exists x_2 (x_2 < x_2) \end{cases}$$

∴ $1 \longrightarrow 0$ 为假. ∴ $\vdash \exists x_2 R_1^2(x_1, x_2) \longrightarrow \exists x_2 R_1^2(x_2, x_2)$ 不成立.

P_{104}.

1.

$\Longrightarrow$ Γ 是完备的，则对任一闭式 p，$\Gamma \vdash p$ 和 $\Gamma \vdash \neg p$ 有且仅有一个成立.

由 K 的可靠性，$\Gamma \models p$ 与 $\Gamma \models \neg p$ 必有一个成立.

若 p 在 Γ 的某个模型中恒真，则 $\Gamma \models \neg p$ 必不成立，故 $\Gamma \models p$ 成立.

∴ p 在 Γ 的所有模型中恒真.

$\Longleftarrow$ 假设 Γ 是不完备的，即存在闭式 p，使 $\Gamma \vdash p$ 和 $\Gamma \vdash \neg p$ 都不成立

由于 Γ 是 K 的无矛盾公式集，则 $\Gamma \cup \{p\}$ 与 $\Gamma \cup \{\neg p\}$ 也都是无矛盾的

故 $\Gamma \cup \{p\}$ 与 $\Gamma \cup \{\neg p\}$ 分别有模型 M_1 与 M_2，有：

$$|p|_{M_1} = 1 \text{，} |\neg p|_{M_2} = 1 \quad |p|_{M_2} = 0$$

而条件中 $|p|_M = 1$，$\Rightarrow$ 对 Γ 的所有模型 M 均有 $|p|_M = 1 \Longrightarrow |p|_{M_2} = 1$

矛盾，故假设不成立，即 Γ 是完备的.

即证.

P110.

2. E_1: $t \sim t$ 表示 t 和 t 有不同的奇偶性，易知<u>恒假</u>. ~~[illegible]~~ $|x \approx x|(\varphi)=0$.

E_2 不包含在题设条件内.

E_3: 构造出成立和不成立的例子.

① 存在 φ_1 使 $|x \approx y|(\varphi_1)=1$. $|x \approx z|(\varphi_1)=1$. $|y \approx z|(\varphi_1)=0$. $\left.\right\}$ eg: x 为奇. y, z 为偶.

故 $|x \approx y \to (x \approx z \to y \approx z)|(\varphi_1)=0$.

② 存在 φ_2 使 $|x \approx y|(\varphi_2)=0$. $|x \approx z|(\varphi_2)=0$. $|y \approx z|(\varphi_3)=0$. $\left.\right\}$ 如 x, y, z 同为奇.

故 $|x \approx y \to (x \approx z \to y \approx z)|(\varphi_2)=1$.

∴ E_3 既非恒真也非恒假.

P118.

1. $N \vdash \bar{k} \times \bar{2} \approx \overline{2k} \approx \bar{n}$

$N \vdash \bar{k} \times \bar{2} \approx \bar{n}$

$\exists x (x \times \bar{2} \approx \bar{n})$

4.

(1) $(\bar{0} + t_2)' \not\approx \bar{0}$	N1
(2) $\bar{0}' + t_2 \approx (\bar{0} + t_2)'$	命题4
(3) $\bar{0}' + t_2 \not\approx \bar{0}$	(1)(2) E3, MP
(4) $(x + t_2)' \approx x' \to x + t_2 \approx x$	(N2)
(5) $x'' + t_2 \approx x' \to (x' + t_2)' \approx x'$	命题4. E3
(6) $x'' + t_2 \approx x' \to x' + t_2 \approx x$	(4)(5), HS
(7) $x' + t_2 \not\approx x \to x'' + t_2 \not\approx x'$	(6) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ 永真, MP
(8) $\forall x (x' + t_2 \not\approx x \to x'' + t_2 \not\approx x')$	(7) Gen
(9) $\forall x (x' + t_2 \not\approx x)$	(3)(8) N7
(10) $t_1' + t_2 \not\approx t_1$	(9) (K4), MP

P124.

1. ① 一元零函数 z：用 ~~$\overline{n}\times\overline{0}$ 表示 $\overline{z(n)}$~~ 用 $y \approx x\times 0$ 表示一元零函数、

对于条件1°：$P(\overline{n}, \overline{z(n)})$ 为 $\overline{z(n)} \approx \overline{n}\times\overline{0}$，而 $\overline{z(n)} \approx \overline{0}$，$\because \overline{n}\times\overline{0} \approx \overline{0}$. 故成立. 有 $N \vdash P(\overline{n}, \overline{z(n)})$.

对于条件2°：当 $P(\overline{n}, t)$ 为真时. $t \approx \overline{n}\times\overline{0} \approx \overline{0}$，故 $t \approx \overline{z(n)}$ 为真，故有 $N \vdash P(\overline{n}, t) \to t \approx \overline{z(n)}$.

② 后继函数 S：用 $y \approx x+1$ 表示后继函数.

对于条件1°：$P(\overline{n}, \overline{S(n)})$ 为 $\overline{S(n)} \approx \overline{n}+\overline{1} \approx \overline{n+1}$. 因为 $\overline{S(n)} \approx \overline{n}+\overline{1} \approx \overline{n+1}$.

所以有 $N \vdash P(\overline{n}, \overline{S(n)})$.

对于条件2°：$P(\overline{n}, t)$ 为真时. $t \approx \overline{n}+\overline{1}$. 故 $t \approx \overline{S(n)}$.

$\therefore$ 故有 $N \vdash P(\overline{n}, t) \to t \approx \overline{Sn}$.

2. 假设公式 P 可表示2个不同的 k 元关系 R_1、R_2. 则存在 $n_1, n_2, \cdots, n_k$，
使得 $(n_1, n_2, \cdots, n_k) \in R_1$ 而 $(n_1, n_2, \cdots, n_k) \notin R_2$，
从而有 $N \vdash P(\overline{n_1}, \overline{n_2}, \cdots, \overline{n_k})$ 和 $\vdash \neg P(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k})$
这与 N 的无矛盾性相矛盾.

P128.

4. "$\supseteq$"

$\neg \exists z(z + x_1 \approx x_2)$.

P134

2.3

$$\max(n_1, n_2) = \begin{cases} n_1 & n_1 \geqslant n_2 \\ n_2 & n_2 \geqslant n_1 \end{cases} = \begin{cases} n_2 + (n_1 - n_2) \\ n_2 + 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n_2 + (n_1 \dot{-} n_2) \\ n_2 + (n_1 \dot{-} n_2) \end{cases} = n_2 + (n_1 \dot{-} n_2)$$

"+" 和 "$\dot{-}$" 都是递归函数，复合之后仍是递归函数.

2.4 $f(0) = 0$

$f(n+1) = (n+1) \times f(n)$

$\quad = S(n) \times f(n)$

由规则二得 $f(n)$ 递归函数.

P136.

3. 假设 $A\times A$ 是递归关系, 则 $C_{A\times A}(n_1, n_2)$ 是递归函数.

$\therefore C_A(n)$ 也是递归函数, $\quad C_{A\times A}(n_1, n_2) = C_A(n_1)\times C_A(n_2)$

又因 A 为非递归集, 矛盾.

即 $A\times A$ 是非递归的二元关系

4. $C_G(n) = sg\Big[\,(3 \dot{-} n) + rem(2,n)$

$$+\sum_{x<n}\sum_{y<n}\big(C_{=}(n, x+y)\cdot C_{prm}(x)\cdot C_{prm}(y)\big)\Big]$$

三个递归集的并集也是递归集

P142

1. 即证明 sg 用公式 $P(x_1,y)$ 可表示. 这里的 $P(x_1,y)$ 是 $(x_1\approx\bar{0}\wedge y\approx\bar{0})\vee(x_1\not\approx\bar{0}\wedge y\approx\bar{1})$

1°. 当 $n=0$ 时. $sg(n)=0$. $\quad\therefore N\vdash(\bar{n}\approx\bar{0}\wedge\overline{sg(n)}\approx\bar{0})$

当 $n\neq0$ 时. $sg(n)=1$. $\quad\therefore N\vdash(\bar{n}\not\approx\bar{0}\wedge\overline{sg(n)}\approx\bar{1})$

$\therefore$ 有 $N\vdash(\bar{n}\approx\bar{0}\wedge\overline{sg(n)}\approx\bar{0})\vee(\bar{n}\not\approx\bar{0}\wedge\overline{sg(n)}\approx\bar{1})$

即. $N\vdash P(\bar{n},\overline{sg(n)})$.

2°. 由演绎定理. 可将问题转化为证明 $N\cup P(\bar{n},t)\vdash t\approx\overline{sg(n)}$

当 $\bar{n}\approx\bar{0}$ 时. 由 $P(\bar{n},t)$ 得 $t\approx\bar{0}$

$\because \overline{sg(n)} = \overline{sg(0)}\approx\bar{0}$

$\therefore t\approx\overline{sg(n)}$

当 $\bar{n}\not\approx\bar{0}$ 时, 由 $P(\bar{n},t)$ 可得 $t\approx\bar{1}$

$\because \overline{sg(n)}\approx\bar{1}$

$\therefore t\approx\overline{sg(n)}$

$\therefore$ 始终有 $t\approx\overline{sg(n)}$ 即. $N\vdash P(\bar{n},t)\rightarrow t\approx\overline{sg(n)}$

由 1°. 2° 可知 sg 用公式 $P(x_1,y)$ 可表示.

P144.

2. 1°. $\bar{0} \times \bar{0} \approx \bar{0}$

2°. $x_1 + x_2 \approx x_2 + x_1$

3°. $x_1 \times x_2 \times x_3 \approx x_1 \times (x_2 \times x_3)$.

P146.

1. 2°. 前置式: $X' x_1 + x_2 x_3$.

$$g(X' x_1 + x_2 x_3) = 2^5\, 3^1\, 5^{15+2}\, 7^3\, 11^{15+4}\, 13^{15+6}.$$

$$= 2^5\, 3^1\, 5^{17}\, 7^3\, 11^{19}\, 13^{21}$$

3°. 前置式: $\forall x_1 \approx X x_1 \bar{0}\bar{0}$

$$g(\forall x_1 \approx X x_1 \bar{0}\bar{0}) = 2^{11}\, 3^{15+2}\, 5^{13}\, 7^5\, 11^{15+2}\, 13^{15}\, 17^{15}$$

$$= 2^{11}\, 3^{17}\, 5^{13}\, 7^5\, 11^{17}\, 13^{15}\, 17^{15}.$$

P149.

4. 设 h 是二元递归函数

$$g(n) = h(n, g^{\#}(n))$$

$$g^{\#}(n) = 2^{g(0)} 3^{g(1)} \cdots p_{n-1}^{g(n-1)} + 2^{g(0)} 3^{g(1)} \cdots p_{n-2}^{g(n-2)} + 2^{g(0)} 3^{g(1)} \cdots p_{n-3}^{g(n-3)}$$

$$= \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ (g^{\#}(n))_{n-1} + (g^{\#}(n))_{n-2} + (g^{\#}(n))_{n-3} & \end{cases}$$

$$\therefore g(n) = 1 \times \overline{sg}(n) + 2 \times \overline{sg}(n \dot{-} 1) + 3 \times \overline{sg}(n \dot{-} 1) + sg(n \dot{-} 2)\left((g^{\#}(n))_{n-1} + (g^{\#}(n))_{n-2} + (g^{\#}(n))_{n-3}\right)$$

因此可知 $g(n)$ 是递归的.