(B)卷

中 国 科 学 技 术 大 学

2012—2013学年第二学期考试试卷

考试科目：数学物理方程（B）　　　所在院系：＿＿＿＿＿＿

姓名：＿＿＿＿＿＿学号：＿＿＿＿＿＿得分：＿＿＿＿＿＿

一、（15分）设$u=u(x,y)$，求下列方程的一般解：

（1）$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy$；

（2）$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3y\frac{\partial u}{\partial x}=6xy^2$；

二、（15分）用分离变量法解定解问题：

$$\begin{cases} u_t=u_{xx},\ (0<x<1,t>0),\\ u(t,0)=0,\ u_x(t,1)=0,\\ u(0,x)=0,u_t(0,x)=x. \end{cases}$$

三、（16分）求解下列固有值问题（计算结果中要明确指出固有值和固有函数）：

$$(1)\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ (0<x<1),\\ y(0)=y(1)=0. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x^2y''+xy'+(\lambda x^2-1)y=0,\ (0<x<2),\\ |y(0)|<+\infty,\ y'(2)=0. \end{cases}$$

四、（10分）求$u=u(r,\theta)$，满足：

$$\begin{cases} \Delta_2 u=0,\ (1<r<2),\\ u(1,\theta)=1,\ u(2,\theta)=0. \end{cases}$$

五、（14分）（1）将函数$f(x)=2+x^2$按勒让德函数系展开；

（2）计算积分$I=\int_{-1}^{1}(3x^4+2x^3+1)P_2(x)P_5(x)dx$.

六、（12分）利用傅里叶变换求解定解问题（$a>0$）：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ (-\infty<x<+\infty,t>0),\\ u|_{t=0}=\varphi(x). \end{cases}$$

中国科学技术大学 2014-2015 学年第二学期

数理方程(B) 期末考试试卷 A 卷(闭卷)

姓名：__________ 学号：__________ 成绩：__________

一（6 分）设 $u=u(x,y)$，求方程 $u_{xy}=x^2y$ 的通解.

二（12 分）(1) 解固有值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \quad (0<x<5), \\ X'(0)=X'(5)=0. \end{cases}$

(2) 把方程 $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$ 化为 Sturm-Liouville 型方程.

三（20 分）(1) 用分离变量法求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (t>0,\ a>0,\ 0<x<\pi), \\ u(t,0)=u_x(t,\pi)=0, \\ u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x). \end{cases}$$

(2) 求 $\varphi(x)=\sin(\frac{x}{2}),\ \psi(x)=\delta(x-3)$ 时此定解问题的解.

四（12 分）求解非齐次定解问题.

$$\begin{cases} u_t=4\,u_{xx} \quad (t>0,\ 0<x<1), \\ u(t,0)=0,\quad u(t,l)=1, \\ u(0,x)=\varphi(x)+x. \end{cases}$$

五（14 分） 采用球坐标，求轴对称情形下的三维球外边值问题

(提示：需用 Legendre 多项式)

$$\begin{cases} \Delta_3 u(r,\theta)=0 \quad (\mathrm{r}>\mathrm{R},\ 0\le\theta\le\pi), \\ u\big|_{r=R}=\sin^2\theta,\quad u\big|_{r\to+\infty}=0. \end{cases}$$

六（14 分） 用分离变量法，求柱坐标 (r,θ,z) 下轴对称边值问题

(提示：需用 Bessel 方程及 Bessel 函数)

$$\begin{cases} \Delta_3 u(r,z)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \quad (0\le r<a,\ 0<z<d), \\ u(r,0)=f(r),\quad u(r,d)=0,\ \text{(圆柱上下底)} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \ \text{(柱侧绝热)}. \end{cases}$$

七（12 分）设八分之一空间 $V=\{(x,y,z)\mid 0<y<x\}$，用镜像法求出 V 内场势方程第一边值问题的格林函数.

八（10 分）求解初值问题

$$\begin{cases} 4u_{xx}=u_{tt}+2u_t+u \quad (t>0,\ -\infty<x<+\infty), \\ u\big|_{t=0}=0, \\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

(提示：可化为一维波动方程，用达朗贝尔公式；也可用 Fourier 积分变换法)

参考公式:

1. 柱坐标系 $\Delta_3=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，极坐标系 $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$，

球坐标系 $\Delta_3=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

2. Bessel 方程 $x^2y''+xy'+(\lambda x^2-\nu^2)y=0$，$\nu\geq 0$ 通解为 $y(x)=AJ_\nu(\omega x)+BN_\nu(\omega x)$，

$N_\nu(x)$ 在 $x=0$ 无界，若 ω 是 $J_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，模平方 $N_{\nu1}^2=\frac{1}{2}a^2J_{\nu+1}^2(\omega a)$；

若 ω 是 $J_\nu'(\omega a)=0$ 的非负根，模平方 $N_{\nu2}^2=\frac{1}{2}[a^2-\frac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3. Legendre 方程 $[(1-x^2)y']'+\lambda y=0$，$\lambda=n(n+1)$ 时在 $x=\pm1$ 处有界的解为

$y(x)=CP_n(x)$，$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，模平方 $\frac{2}{2n+1}$.

4. Fourier 变换 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx$，$f(x)=F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$.

法则表 $F[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi]=\frac{F(\lambda)}{-i\lambda}$，$F[f(x-\xi)]=F(\lambda)e^{i\lambda\xi}$.

变换表 $F^{-1}[e^{-\lambda^2}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2}e^{-i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$，$F^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}d\lambda=\delta(x)$.

中国科学技术大学
2015 -- 2016 学年第二学期考试试卷

考试科目:数学物理方程 (B) 得分 ________

学生所在系:________ 姓名 ________ 学号 ________

一 (12 分) 求以下固有值问题的固有值和固有函数

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \ (0 < x < 16) \\ Y'(0) = 0, \ Y'(16) = 0. \end{cases}$$

二 (16 分) 利用分离变量法求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \ (t > 0, \, 0 < x < 5) \\ u(t, 0) = u(t, 5) = 0, \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

$A\cos\mu x \pm B\sin\mu x$

$5\mu_i = \frac{2n+1}{2}\pi$

并求 $\varphi(x) = \delta(x - 2)$ 时此定解问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u|_{t=0} = x^2, \ u_t|_{t=0} = \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + f(t,x) \\ u|_{t=0} = 0 \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

三 (共 14 分) 考虑初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + f(t, x), \ \ (t > 0, \quad -\infty < x < +\infty) \\ u\,|_{t=0} = x^2, \ \ u_t\,|_{t=0} = \sin 2x. \end{cases}$$

1) 如取 $f(t, x) = 0$, 求此初值问题的解.

2) 如取 $f(t, x) = t^2 x^2$, 求此初值问题相应的解.

四 (14 分) 求解以下初值问题

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + 5u \, (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

并求出当 $\varphi(x) = e^{-x^2}$ 时此定解问题的解.

五 (16 分) 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r \qquad (0 < r < 1) \\ |u(t, 0)| < +\infty, \ u(t, 1) = 0 \\ u\,|_{t=0} = \varphi(r). \end{cases}$$

并算出 $\varphi(r) = J_0(ar) + 3J_0(br)$ 时的解. (其中 $0 < a < b$, 且 $J_0(a) = J_0(b) = 0$)

六 (共 14 分) 已知下半空间 $V=\{(x,y,z)\mid z<0,\ -\infty<x,y<+\infty\}$

1) 求出 V 内泊松方程第一边值问题的格林函数.

2) 求解定解问题:

$$\begin{cases} 4u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0,\ (z<0,\ -\infty<x,y<+\infty) \\ u\mid_{z=0}=\varphi(x,y). \end{cases}$$

七 (6 分) 对于三维波动方程

$$u_{tt}=a^2\Delta_3 u,\ (a>0,\ t>0,\ -\infty<x,y,z<+\infty)$$

它的形如 $u=u(t,r)=T(t)R(r)$ 的解称为方程的可分离变量的径向对称解，求方程满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}u=0$ 的可分离变量的径向对称解. $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

八 (8 分) 考虑固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}[(1-x^2)y']+\lambda y=0,\ (0<x<1) \\ y'(0)=0,\ |y(1)|<+\infty. \end{cases}$$

(1) 求此固有值问题的固有值和固有函数. $\lambda_n=2n(2n+1)$ $P_{2n}(x)$

(2) 把 $f(x)=2x+1$ 按此固有值问题所得到的固有函数系展开.

参考公式

1) 直角坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, 柱坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,

球坐标系: $\Delta_3 u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

2) 若 ω 是 $J_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方 $N_{\nu1}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_1^2=\dfrac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$.

若 ω 是 $J'_\nu(\omega a)=0$ 的一个正根，则有模平方 $N_{\nu2}^2=\|J_\nu(\omega x)\|_2^2=\dfrac{1}{2}[a^2-\dfrac{\nu^2}{\omega^2}]J_\nu^2(\omega a)$.

3) 勒让德多项式: $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$,

母函数: $(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(x)t^n$, 递推公式: $P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$

4) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t})$

5) 设 $G(M;M_0)$ 是三维 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u=-f(M),\ (M=(x,y,z)\in V) \\ u|_S=\varphi(M). \end{cases}$$

对应的 Green 函数, 则

$$u(M_0)=-\iint\limits_S\varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}(M;M_0)dS+\iiint\limits_V f(M)G(M;M_0)dM.\ \left(其中 M_0=(\xi,\eta,\zeta)\right)$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-A\xi^2+B\xi}d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\,e^{\frac{B^2}{4A}}$

2015方程 打分建议

[6分] 一、方法(一):

2分 $\frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx = \frac{x^3}{3} y + \varphi(y)$

2分 $u = \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (\frac{x^3}{3} y + \varphi(y)) dy$

$= \frac{x^3}{3}\frac{y^2}{2} + \int \varphi(y) dy + g(x)$

2分 $u = \frac{x^3 y^2}{6} + f(y) + g(x)$

方法(二):

2分 特解 $u^* = \frac{x^3 y^2}{6}$

2分 齐次方程通解 $w = f(y) + g(x)$

2分 $u = u^* + w = \frac{x^3 y^2}{6} + f(y) + g(x)$

[6分] 二(1)

2分 边条左II右I 由S-L定理, 固有值> 0

故 $X = A\cos\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda} x\right)$

$X'(0) = -A \cdot 0 + B\cos(0) = 0,\ B = 0$

$X(5) = A\cos\left(\sqrt{\lambda} 5\right) = 0$

2分 $\lambda_n = \left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{5}\right]^2,\ n = 1, 2, 3\cdots$

2分 $X_n = cos\left[(n - \frac{1}{2})\pi \frac{x}{5}\right]$

*若结果错,据边条等推导酌情给,总分≤ 3

[6分] (2)

2分 方程$y'' + \frac{1-x}{x} y' + \frac{\lambda}{x} y = 0$ 同乘$e^{\int \frac{1-x}{x} dx}$

2分 $e^{\int \frac{1-x}{x} dx} = e^{\ln x - x} = x e^{-x}$

2分 $(x e^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0$

[12分] 三(1)

2分 ①分离 $u = T(t) X(x)$

$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

边条分离 $X(0) = 0,\ X'(\pi) = 0$

②解固有值问题

2分 $\lambda_n = \left[(n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\pi}\right]^2,\ n = 1, 2, 3\cdots$

$X_n = \sin\left[(n - \frac{1}{2})x\right]$

2分 解常微分方程 $T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$

$T_n = C_n \cos(n - \frac{1}{2})at + D_n \sin(n - \frac{1}{2})at$

特解 $T_n(t) X_n(x) \cdots$

2分 ③叠加 $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n - \frac{1}{2})at$

$+ D_n \sin(n - \frac{1}{2})at] \sin\left[(n - \frac{1}{2})x\right]$

4分 定系数 $u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[(n - \frac{1}{2})x\right] = \varphi$

$u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (n - \frac{1}{2}) a D_n \sin[n - \frac{1}{2})x] = \psi$

$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin[(n - \frac{1}{2})x] dx$

$D_n = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})a}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(x) \sin[(n - \frac{1}{2})x] dx$

*注意基,内积,模^2; 基若错全错 步骤分≤ 6

[8分] 三(2)

2分 $t = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left[(n - \frac{1}{2})x\right] = \sin(\frac{1}{2}x)$

$C_1 = 1,\ C_n = 0 (n > 1)$

4分 $D_n = \frac{1}{(n-\frac{1}{2})a}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \delta(x) \sin[(n - \frac{1}{2})x] dx$

$= \frac{2}{\pi}\frac{\sin[3(n-\frac{1}{2})]}{(n-\frac{1}{2})a}$

2分 $u = \cos(\frac{at}{2}) \sin(\frac{x}{2})$

$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\sin(\frac{6n-3}{2})}{(2n-1)a} \sin(\frac{2n-1}{2} at) \sin(\frac{2n-1}{2} x)$

[12分] 四、$u = v + w$

4分 设$v = Ax + B$把边条齐次化

$v|_{x=0} = B = 0,\ v|_{x=1} = A \cdot 1 = 1,\ v = x$

$w|_{x=0} = w|_{x=1} = 0$ I类

1分 $w_t - 4w_{xx} = u_t - 4u_{xx} - (v_t - 4v_{xx}) = 0$

1分 $w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = \varphi + x - x = \varphi$

4分 对w分离变量, 经①②③可得

$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-4(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$

$A_n = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin(n\pi x) dx$

2分 $u = v + w = x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-4(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$

*若结果错,据推导酌情给,总分≤ 6

[14分] 五、

2分 ①分离 $u = R(r)\Theta(\theta)$

$\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\} u = 0$

$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) = \lambda$

$\frac{1}{\Theta \sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = -\lambda$

$x = \cos\theta \to [(1 - x^2) y']' + \lambda y = 0$

②解固有值问题(Legendre方程)

$\lambda_n = n(n+1),\ n = 0, 1, 2\cdots$

$\Theta_n = P_n(\cos\theta)$

解Euler方程 $R_n = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$

2分 ③叠加: 轴对称情形下解为

$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$

2分 球外: 自然边条无穷远有界 *漏A_0扣分

$u(t, x) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta)$

2分 定系数 $u|_{r=+\infty} = A_0 = 0$

4分 $u|_{r=R} = \frac{B_0}{R} P_0 + \frac{B_1}{R^2} P_1 + \frac{B_2}{R^3} P_2(\cos\theta) + \cdots$

$= 1 - \cos^2\theta$

偶$\to B_1 = 0$; 正交性: 与$P_n, n > 2$无关;

$B_2 = -\frac{2}{3} R^3,\ B_0 = \frac{2}{3} R$

2分 $u = \frac{2}{3}\frac{R}{r} - \frac{1}{3}\frac{R^3}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$

[14分] 六、

2分 ①分离 $u = R(r)Z(z)$ *轴对称指出$\nu = 0$

$r^2R'' + rR' + \lambda r^2 R = 0$ Bessel

$Z'' - \lambda Z = 0$

边条分离 $R'(a) = J_0'(\omega r) = 0$ II类

1分 ②解固有值问题(Bessel方程)$\lambda = \omega^2$

有界解$R(r) = J_0(\omega r)$

2分 设ω_n是$J_0'(\omega r) = 0$的非负根, $n = 0, 1\cdots$

*也可写$J_1(\omega r) = 0$的非负根; 漏$n = 0$扣分

1分 则固有值$\lambda_n = \omega_n^2$, 固有函数$J_0(\omega_n r)$

1分 解其余问题 $\lambda_0 = 0$, $Z_0 = C_0 + D_0 z$

1分 $n = 1, 2\cdots$时, $Z_n = C_n ch\omega_n z + D_n sh\omega_n z$

*也可用$C_n e^{\omega_n z} + D_n e^{-\omega_n z}$

2分 ③叠加: $u(r, z) = C_0 + D_0 z + \sum_{n=1}^{\infty}\cdots$

4分 定系数: 见课本P288 $f_2 = 0$

$N_{02n}^2 = \frac{a^2}{2}J_0^2(\omega_n a)$, $J_0(0) = 1$, $N_{020}^2 = \frac{a^2}{2}$

[12分] 七、

$\Delta_3 G = -\delta(M - M_0)$, $G|_S = 0$

3分 设M_0处 $(+\xi, +\eta, \zeta)$ 放置+电荷ε_0, 则

M_1坐标 $(+\eta, +\xi, \zeta)$ 镜像-电荷

M_2坐标 $(+\eta, -\xi, \zeta)$ 镜像+

M_3坐标 $(-\xi, +\eta, \zeta)$ 镜像-

M_4坐标 $(-\xi, -\eta, \zeta)$ 镜像+

M_5坐标 $(-\eta, -\xi, \zeta)$ 镜像-

M_6坐标 $(-\eta, +\xi, \zeta)$ 镜像+

M_7坐标 $(+\xi, -\eta, \zeta)$ 镜像-

2分 考虑点源在$M(x, y, z)$处的电势, 约定

$r(M, M_0) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_1) = \sqrt{(x-\eta)^2 + (y-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_2) = \sqrt{(x-\eta)^2 + (y+\xi)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_3) = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_4) = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_5) = \sqrt{(x+\eta)^2 + (y+\xi)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_6) = \sqrt{(x+\eta)^2 + (y-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}$

$r(M, M_7) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

3分 $G = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7$

$= \frac{1}{4\pi r(M,M_0)} - \frac{1}{4\pi r(M,M_1)} + \frac{1}{4\pi r(M,M_2)} - \frac{1}{4\pi r(M,M_3)}$

$+ \frac{1}{4\pi r(M,M_4)} - \frac{1}{4\pi r(M,M_5)} + \frac{1}{4\pi r(M,M_6)} - \frac{1}{4\pi r(M,M_7)}$

2分 验证 $G|_{y=0} = (U_7 + U_0)|_{y=0}$

$+(U_1 + U_2) + (U_3 + U_4) + (U_5 + U_6)|_{y=0}$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\right)\ldots$

$= (0) + $(同理为0)$ + (0) + (0) = 0$

2分 $G|_{y=x} = (U_0 + U_1)|_{y=x}$

$+(U_2 + U_3) + (U_4 + U_5) + (U_6 + U_7)|_{y=x}$

$= 0$

[10分] 八、方法(一):

2分 变换$u = e^{-t}v$

4分 $u_t = e^{-t}v_t - e^{-t}v$

$u_{tt} = e^{-t}v_{tt} - 2e^{-t}v_t + e^{-t}v$

$u_{tt} + 2u_t + u = e^{-t}v_{tt} - 2e^{-t}v_t + e^{-t}v$

$+2e^{-t}v_t - 2e^{-t}v + e^{-t}v = e^{-t}v_{tt}$

$v_{tt} = 4v_{xx}$

*此方法过简,步骤不全应严格扣分以公平

2分 $v = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$= \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\psi(\xi)d\xi$

2分 $u = e^{-t}\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\psi(\xi)d\xi$

~~方法(二):~~

2分 ①FT $\bar{u}(t, \lambda) = F[u(t, x)]$

$4(-i\lambda)^2\bar{u} = \frac{d^2\bar{u}}{dt} + 2\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u}$

$\bar{u}|_{t=0} = 0$

$\bar{u}_t|_{t=0} = \bar{\psi}$, 约定$\bar{\psi}(\lambda) = F[\psi(x)]$

3分 ② 解特征方程得$k = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + 4\lambda^2)}}{2}$

通解 $\bar{u} = Ae^{(-1+i2\lambda)t} + Be^{(-1-i2\lambda)t}$

定解条件 $\bar{u}|_{t=0} = A + B = 0$

$\bar{u}_t|_{t=0} = A(-1 + i2\lambda) + B(-1 - i2\lambda) = \bar{\psi}$

$A = -B = \frac{\bar{\psi}}{4i\lambda}$

定解 $\bar{u} = e^{-t}[\frac{1}{4}\frac{\bar{\psi}}{i\lambda}e^{i2\lambda t} + \frac{1}{4}\frac{\bar{\psi}}{-i\lambda}e^{-i2\lambda t}]$

③$F^{-1}T$

3分 $F^{-1}[\frac{\bar{\psi}}{-i\lambda}] = \int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi$

$F^{-1}[\frac{1}{4}\frac{\bar{\psi}}{-i\lambda}e^{-i2\lambda t}] = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x+2t}\psi(\xi)d\xi$

$F^{-1}[\frac{1}{4}\frac{\bar{\psi}}{i\lambda}e^{i2\lambda t}] = -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{x-2t}\psi(\xi)d\xi$

2分 $u(t, x) = F^{-1}[\bar{u}] = e^{-t}\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t}\psi(\xi)d\xi$

$\frac{\bar{\Psi}}{i\lambda}e^{i2t\lambda} - \frac{\bar{\Psi}}{i\lambda}e^{-i2\lambda t}$

$= \frac{\bar{\Psi}}{i\lambda}2i\sin 2\lambda t$

$= 2\frac{\bar{\Psi}}{\lambda}\sin 2\lambda t$

④ $\frac{\bar{\Psi}}{2\lambda}\sin 2\lambda t$