HW3

王嵘晟 PB1711614

1.

MAX-HEAPIFY算法中，每个孩子的子树的大小之多为$\frac{2n}{3}$，而调整A[i]、A[LEFT(i)]、和A[RIGHT(i)]的关系的时间代价为Θ(1)，所以MAX-HEAPIFY的运行时间为：
$T(n) \leq T(\frac{2n}{3}) + \Theta(1)$

所以由主方法：a=1，b=$\frac{3}{2}$，f(n)=Θ(1)=$\Theta(n^0)$=$\Theta(n^{log_{\frac{3}{2}}1})$

所以T(n)=$\Theta(n^{log_{\frac{3}{2}}1}lgn)$=$\Theta(n^0 lgn)$=$\Theta(lgn)$

MAX-HEAPIFY的时间复杂度是O(lgn)得证

由于包含n个元素的堆的高度为$\lfloor lgn \rfloor$，高度为h的结点最多包含$\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$个结点。所以在一个高度为h的结点上允许MAX-HEAPIFY的代价为O(h)。所以BUILD-MAX-HEAP的总代价为
$\sum_{h=0}^{\lfloor lgn \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil O(h) = O(n \sum_{h=0}^{\lceil lgn \rceil} \frac{h}{2^h}) = O(n)$

2.

(a)

设随机数组有n个数，分别为A[0]A[1]...A[n-1]，设有X个数被划分在左半部分，Y个数被划分在右半部分，X+Y=n。$|X-Y|$的值越大，划分越不平衡。

分三种情况讨论：

1. X≤ αn时,Y≥ $(1-\alpha)n$，$|X-Y|$ >$(1-2\alpha)n$>0
2. αn<X ≤ $(1-\alpha)$n时,$(1-\alpha)n \leq Y$<αn，$0 \leq |X-Y|$ <$(1-2\alpha)n$
3. X>$(1-\alpha)n$时，Y<αn，$|X-Y|$ >$(1-2\alpha)n$

显然情况2最为趋近平衡。X取值在αn和$(1-\alpha)n$之间更加平衡。由于X落

在1到n之间的概率是等可能的，服从均匀分布。所以X落在αn和(1-αn)之间的概率为1-2α，即PARTITION产生更平衡的划分的概率为1-2α。

(b)

对于叶结点的最小深度：

由于$\alpha \leq \frac{1}{2}$，所以最小深度的结点应该在α划分中。设x为深度：

则$n\alpha^x = 1$，取对数$x + log_\alpha n = 0$，即$x + \frac{lgn}{lg\alpha} = 0$所以最小深度为$-\frac{lgn}{lg\alpha}$

对于叶结点的最大深度：

由于$\alpha \leq \frac{1}{2}$，所以最大深度的结点应该在$1-\alpha$划分中。设x为深度：

则$n(1-\alpha)^x = 1$，取对数$x + log_{1-\alpha} n = 0$，即$x + \frac{lgn}{lg1-\alpha} = 0$所以最大深度为$-\frac{lgn}{lg1-\alpha}$