计算方法 Lab4

王嵘晟　PB1711614

1　实验结果：

对于线性方程组 $Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{10\times 10}$$ 为三对角矩阵,

$$b = (2, \cdots, 2)^T \in \mathbb{R}^{10}.$$

(1).Jacobi 迭代：

当取初始迭代 $x^{(0)} = \{0, 0, ..., 0\}^T$，停止条件 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty \leq 10^{-5}$ 时：
程序部分运行结果如图:

```
329
9.9999891 17.9999792 23.9999709 27.9999649 29.9999618 29.9999618 27.9999649 23.9999709 17.9999792 9.9999891

330
9.9999896 17.9999800 23.9999720 27.9999663 29.9999634 29.9999634 27.9999663 23.9999720 17.9999800 9.9999896

331
9.9999900 17.9999808 23.9999732 27.9999677 29.9999649 29.9999649 27.9999677 23.9999732 17.9999808 9.9999900

332
9.9999904 17.9999816 23.9999743 27.9999690 29.9999663 29.9999663 27.9999690 23.9999743 17.9999816 9.9999904

333
9.9999908 17.9999823 23.9999753 27.9999703 29.9999676 29.9999676 27.9999703 23.9999753 17.9999823 9.9999908
```

根据给定的初始条件与停止条件，对于该线性方程组一共迭代了 333 次最终得出结果，该方程组的精确解为:

$$x = (10, 18, 24, 28, 30, 30, 28, 24, 18, 10)^T$$

(1).Gauss-Seidel 迭代：

当取初始迭代 $x^{(0)} = \{0, 0, ..., 0\}^T$，停止条件 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_\infty \leq 10^{-5}$ 时：
程序部分运行结果如图:

```
170
9.9999915 17.9999843 23.9999790 27.9999757 29.9999746 29.9999757 27.9999785 23.9999829 17.9999883 9.9999941

171
9.9999922 17.9999856 23.9999806 27.9999776 29.9999767 29.9999776 27.9999802 23.9999843 17.9999892 9.9999946

172
9.9999928 17.9999867 23.9999822 27.9999794 29.9999785 29.9999794 27.9999818 23.9999855 17.9999901 9.9999950

173
9.9999934 17.9999878 23.9999836 27.9999810 29.9999802 29.9999810 27.9999833 23.9999867 17.9999908 9.9999954

174
9.9999939 17.9999887 23.9999849 27.9999826 29.9999818 29.9999825 27.9999846 23.9999877 17.9999916 9.9999958

175
9.9999944 17.9999896 23.9999861 27.9999839 29.9999832 29.9999839 27.9999858 23.9999887 17.9999922 9.9999961
```

根据给定的初始条件与停止条件，对于该线性方程组一共迭代了 175 次最终得出结果，该方程组的精确解为:

$$x = (10, 18, 24, 28, 30, 30, 28, 24, 18, 10)^T$$

2 算法分析：

本题分别使用 C 语言编写 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的通用程序
对于 Jacobi 迭代，使用分量形式的迭代公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

作为程序编写的大体逻辑框架，使用三层循环来求解。设矩阵阶数为 N，迭代次数为 M，时间复杂度 $O(MN^2)$
对于 Gauss-Seidel 迭代，同样使用分量形式的迭代公式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

作为程序编写的大体逻辑框架，同样使用三层循环来求解，只需对最内层循环稍加修改即可。设矩阵阶数为 N，迭代次数为 M，时间复杂度 $O(MN^2)$

3 结果分析:

两种迭代方式的最终结果：

$$x = (10, 18, 24, 28, 30, 30, 28, 24, 18, 10)^T$$

结果是一样的， Jacobi 迭代的迭代次数为 333 次，而 Gauss-Seidel 迭代的迭代次数只有 175 次，显然 Gauss-Seidel 迭代的收敛速度更快。所以就运算而言，Gauss-Seidel 迭代更具有优势。

4 实验小结：

本次实验同样需要编写通用程序，不过程序代码框架较为简单，且两种迭代方式的代码只需要做轻微修改就可以实现。但对于迭代求解线性方程组的两种方法还是有了一定的深入认识。 Gauss-Seidel 迭代运算优于 Jacobi 迭代