计算方法（B）习题课

刘嘉诚

2020年6月15日

第1次手写作业

第1题

作业#1 • 下周上课前提交！

1. 阅读绪论并给出计算如下函数的可靠数值计算方法，
使其尽量达到更好的精度。

$$(1) f(x) = (a+x)^n - a^n$$

$$(2) f(x) = \cos(a+x) - \cos a$$

$$(3) f(x) = x - \sqrt{x^2 + a}$$

其中，（1）、（2）中**x很靠近0且$a>0$**；（3）中**$x>>a$**

1、本题主要考察近似计算

（1）、二项式展开就行，$f(x) = (a+x)^n - a^n = (a^n + na^{n-1}x + \cdots) - a^n \approx na^{n-1}x$，因为题目说x很靠近0，后面的可以扔掉

（2）、这个直接和差化积就行，$cos(a+x) - cosa = -2sin(a+\frac{x}{2})sin\frac{x}{2} \approx -xsin(a+\frac{x}{2})$

（3）、$f(x) = x - \sqrt{x^2+a} = \frac{-a}{x+\sqrt{x^2+a}}$

第1次手写作业

第2题

2. 设有精确值 $x^* = 0.0202005$，则其近似值$x = 0.020200$ 有几位有效数字？近似值 x 的绝对误差是多少？

绝对误差：$x^* - x = 5 \times 10^{-7}$。有效数字5位，为0.020200

3. 证明插值基函数 $\{l_i(x), i = 0,1,\Lambda\ ,n\}$是线性无关的。

3、本题主要考察Lagrange插值基函数的性质。所谓n次Lagrange插值基函数，就是这样一个特殊的n次多项式：在其中1个点取值为1，另外n个点取值为0.

证明：构造n+1个常数$a_0,\cdots,a_n$，考虑$\sum_{i=0}^{i=n} a_i l_i(x)$，由基函数的性质，该n次多项式在相应n+1个点的取值分别为$a_0,\cdots,a_n$，所以$\sum_{i=0}^{i=n} a_i l_i(x) = 0 \iff a_0 = \cdots = a_n = 0$，因此按照定义线性无关。

第1次手写作业

第4题

4. 利用插值数据(-1.0,0.0),(1.0,1.0),(4.0,2.0),(5.0,4.0)，构造出三次Lagrange插值多项式 $L_3(x)$，并计算 $L_3(2.0)$，$L_3(4.0)$。

4、由Lagrange插值的性质，很显然$L_3(4.0)=2.0$，另外有

$$L_3(x)=1\times\frac{(x+1)(x-4)(x-5)}{(1+1)(1-4)(1-5)}+2\times\frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(4+1)(4-1)(4-5)}+4\times\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(5+1)(5-1)(5-4)}$$

由该公式也可知$L_3(2.0)=\frac{19}{20}, L_3(4.0)=2.0$

第2次手写作业

第1题

1. $f(x)=\sqrt{x}$在离散点有$f(81)=9$，$f(100)=10$，$f(121)=11$，

用插值方法计算$\sqrt{108}$的近似值，根据误差公式给出误差界。

解：这道题显然不是让你去关心C语言是怎么计算开根的，结合最近讲的课堂内容，本题是让你用Lagrange、Newton插值根据三点$(81,9),(100,10),(121,11)$构造一个插值多项式然后估误差。仔细回忆一下，Lagrange插值和Newton插值无论算出来的多项式还是误差公式都是一样的。

Lagrange插值：

$$\mathscr{L}(x)=9\times\frac{(x-100)(x-121)}{(81-100)(81-121)}+10\times\frac{(x-81)(x-121)}{(100-81)(100-121)}+11\times\frac{(x-81)(x-100)}{(121-81)(121-100)}$$

估计值：$\mathscr{L}(108)=10.393984962406016$

精确值：$\sqrt{108}=10.392304845413264$

误差：$\sqrt{108}-\mathscr{L}(108)=-0.0016801169927518345\approx -1.68\times 10^{-3}$

第2次手写作业

第1题

根据教材第22页定理1.2，n次插值多项式的误差有2种表达形式：

$$\begin{cases} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\text{，其中}\xi \in [a,b]\cdots\cdots\cdots ① \\ |R_n(x)| = \frac{M}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|\text{，其中}|f^{(n+1)}(x)| \le M, x \in [a,b]\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由于是2次插值多项式，因此n=2.[a,b]=[81,121]

根据公式①：$R_2(108) = \frac{\sqrt{x}'''|_{x=\xi}}{3!}(108-81)(108-100)(108-121) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}|_{x=\xi} \times \frac{-2808}{6}$

因为$\xi \in [81,121]$，所以$\frac{3}{8\sqrt{x^5}}|_{x=\xi} \in [\frac{3}{8\sqrt{x^5}}|_{x=121}, \frac{3}{8\sqrt{x^5}}|_{x=81}] = [2.33\times 10^{-6}, 6.35\times 10^{-6}]$

所以$R_2(108) \in [-2.9721\times 10^{-3}, -1.0897\times 10^{-3}]$，前面算出的误差$-1.68\times 10^{-3}$确实在这个范围内。

根据公式②，$|f^{(3)}(x)| = |\frac{3}{8\sqrt{x^5}}| \le 6.35\times 10^{-6} = M$

所以$|R_2(108)| \le \frac{6.35\times 10^{-6}}{3!}|108-81||108-100||108-121| = 2.9721\times 10^{-3}$

第2次手写作业

第2题

2 利用下面的函数值表，作出差商表，写出相应的牛顿插值多项式，

并计算$f(1.5)$的近似值。

x	1.0	2.0	3.0	4.0
$f(x)$	2.0	4.0	8.0	5.0

2、本题是课堂作业01的翻版，差商表如下：

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i]$
0	1.0	2.0			
1	2.0	4.0	$f[x_0,x_1]=\frac{4-2}{2-1}=2$		
2	3.0	8.0	$f[x_1,x_2]=\frac{8-4}{3-2}=4$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{4-1}{3-1}=1$	
3	4.0	5.0	$f[x_2,x_3]=\frac{5-8}{4-3}=-3$	$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{-3-4}{4-2}=-3.5$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{-3.5-1.5}{4-1}=-1.5$

Newton插值多项式：

$$2+(x-1)\times 2+(x-1)(x-2)\times 1+(x-1)(x-2)(x-3)\times(-1.5)=-1.5x^3+10x^2-17.5x+11$$

$$f(1.5)\approx\frac{35}{16}=2.1875$$

3、利用数据$f(0)=2.0, f(1)=0.5, f(3)=0.25, f'(3)=0.6$，构造出三次插值多项式，写出其插值余项，并计算$f(2)$的近似值。

3、待定系数即可。设多项式为ax^3+bx^2+cx+d，则

$$\begin{cases} f(0)=2.0 \implies d=2.0 \\ f(1)=0.5 \implies a+b+c+d=0.5 \\ f(3)=0.25 \implies 27a+9b+3c+d=0.25 \\ f'(3)=0.6 \implies 27a+6b+c=0.6 \end{cases}$$

所以插值多项式为$\mathscr{C}(x)=\frac{-23x^3+422x^2-1479x+1440}{720}=-\frac{23}{720}x^3+\frac{211}{360}x^2-\frac{493}{240}x+2$

$f(2)\approx\mathscr{C}(2)=-\frac{7}{360}\approx-0.0194$

第2次手写作业

第3题

设精确表达式为$f(x)$，插值为$\mathscr{C}(x)$，误差为$R(x)=f(x)-\mathscr{C}(x)$。显然

有$R(0)=R(1)=R(3)=R'(3)=0$

构造$\mathscr{H}(t)=R(t)-\dfrac{R(x)}{(x-0)(x-1)(x-3)^2}(t-0)(t-1)(t-3)^2$

注意：这样构造出来的$\mathscr{H}(t)$满足$\mathscr{H}(0)=\mathscr{H}(1)=\mathscr{H}(3)=\mathscr{H}'(3)=\mathscr{H}(x)=0$，如下图所示

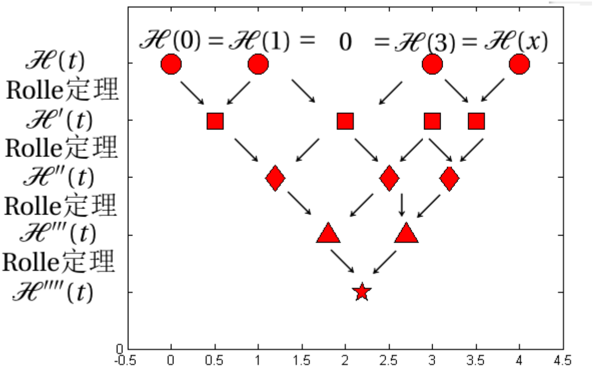

图: 反复应用Rolle定理求误差

第2次手写作业

第3题

在最上面那一行中，$\mathscr{H}(\bullet)=0$。
用一次Rolle定理，第二行有$\mathscr{H}'(\blacksquare)=0$。
再用一次Rolle定理，第三行有$\mathscr{H}''(\blacklozenge)=0$。
再用一次Rolle定理，第四行有$\mathscr{H}'''(\blacktriangle)=0$。
最后用一次Rolle定理，第五行有$\mathscr{H}''''(\bigstar)=0$。
整理一下
有$\mathscr{H}''''(\bigstar)=0=R''''(\bigstar)-\dfrac{R(x)}{(x-0)(x-1)(x-3)^2}4! \Longrightarrow R(x)=\dfrac{R''''(\bigstar)}{4!}(x-0)(x-1)(x-3)^2$。
最后注意到$R(x)=f(x)-\mathscr{C}(x)$，而$\mathscr{C}(x)$是前面算出来的三次多项式，因此
有$R''''(\bigstar)=f''''(\bigstar)-\mathscr{C}''''(\bigstar)=f''''(\bigstar)$

所以误差为$R(x)=\dfrac{f''''(\bigstar)}{4!}(x-0)(x-1)(x-3)^2, \bigstar\in\begin{cases}[x,3], x\le 0\\ [0,3], 0\le x\le 3\\ [0,x] 3\le x\end{cases}$

第3次手写作业

第1题

1 (5 分) 求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0\ (n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$，并计算 S(0)的值。**注意：这里的 n 为小区间个数。**

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	3.00	5.00	10.00

第3次手写作业

第1题

1、设三个区间[-2,-1],[-1,1],[1,2]的三次函数分别为$a_3x^3+a_2x^2+a_1x^1+a_0$、$b_3x^3+b_2x^2+b_1x^1+b_0$、$c_3x^3+c_2x^2+c_1x^1+c_0$。三次样条要求函数$S(x),S'(x),S''(x)$在整个区间[-2,2]上连续。因此有

$$
[-2,-1]:\begin{cases} S(-2)=-4 \\ S(-1)=3 \\ S''(-2)=0 \end{cases},[-1,1]:\begin{cases} S(-1)=3 \\ S(1)=5 \\ S'(-1^-)=S'(-1^+) \\ S''(-1^-)=S''(-1^+) \end{cases},[1,2]:\begin{cases} S(1)=5 \\ S(2)=10 \\ S'(1^-)=S'(1^+) \\ S''(1^-)=S''(1^+) \end{cases}
$$

分别解得：

$$
[-2,-1]:\begin{cases} a_2=6a_3 \\ a_1=11a_3+7 \\ a_0=6a_3+10 \end{cases},[-1,1]:\begin{cases} b_3=-2a_3-1.5 \\ b_2=-3a_3-4.5 \\ b_1=2a_3+2.5 \\ b_0=3a_3+8.5 \end{cases},[1,2]:\begin{cases} c_3=19a_3+25 \\ c_2=-66a_3-84 \\ c_1=65a_3+82 \\ c_0=-18a_3-18 \end{cases}
$$

第3次手写作业

第1题

最后由条件$S''(2)=0$得$a_3=-\frac{11}{8}$。所以三次样条函数为：

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{11}{8}x^3-\frac{33}{4}x^2-\frac{65}{8}x+\frac{7}{4}, x\in[-2,-1]\\ \frac{5}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{35}{8}, x\in[-1,1]\\ -\frac{9}{8}x^3+\frac{27}{4}x^2-\frac{59}{8}x+\frac{27}{4}, x\in[1,2]\end{cases}$$

可得$S(0)=\frac{35}{8}$。函数图像如图所示，$S(x),S'(x),S''(x)$均连续，所以满足定义。

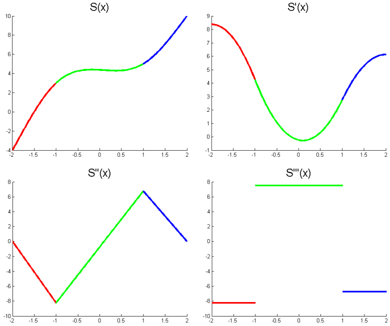

图: 三次样条函数S(x)

第3次手写作业

第2题

2 (5 分) 利用下面的函数值表，构造分段线性插值函数，并计算$f(1.075)$和$f(1.175)$的近似值（保留 4 位小数）。

x	1.05	1.10	1.15	1.20
$f(x)$	2.0	2.20	2.17	2.35

2、这个题直接按照分段线性的定义即可，如下所示：

$$f(x)=\begin{cases} 4x-2.2, x\in[1.05,1.10] \\ -0.6x+2.86, x\in[1.10,1.15] \\ 3.6x-1.97, x\in[1.15,1.20] \end{cases}$$

$f(1.075)=2.1000, f(1.175)=2.2600$

第3次手写作业

第3题

3. (4分) 设 $f(x) = 10x^3 + 3x + 2020$，求 $f[1,2]$ 和 $f[1,2,3,4]$ 。

3、这个题考察牛顿差商的定义，构造差商表如下：

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	1	2033			
1	2	2106	$f[x_0, x_1] = \frac{2106-2033}{2-1} = 73$		
2	3	2299	$f[x_1, x_2] = \frac{2299-2106}{3-2} = 193$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{193-73}{3-1} = 60$	
3	4	2672	$f[x_2, x_3] = \frac{2672-2299}{4-3} = 373$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{373-193}{4-2} = 90$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{90-60}{4-1} = 10$

第3次手写作业

第4题

4. (6分) 设 $\{l_i(x)\}_{i=0}^6$ 是以 $\{x_i = 2i\}_{i=0}^6$ 为节点的6次Lagrange插值基函数，试求 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i(x)$ 和 $\sum_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i'(x)$ （结果须化简）。

4、本题主要考察Lagrange基函数的性质。回想一下，基函数满足其中一个节点为1，其余节点为0，且是个多项式。因此$\sum_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i(x)$等价于对函数$x^3+x^2+1$进行多项式插值。由于取了7个节点，因此是个6次多项式，而x^3+x^2+1只是个3次多项式，故可以精确插值，所以$\sum_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i(x)=x^3+x^2+1$。证明思路：根据教材定理1.2的误差公式（1.9），显然$n=6$，故公式（1.9）的分子为$f^{(7)}(\xi)$，但注意到$f(x)=x^3+x^2+1$，所以$f^{(7)}\equiv 0$，因此误差为0，也即插值结果就是$f(x)$。显然$\sum_{i=0}^{6}(x_i^3+x_i^2+1)l_i'(x)=f'(x)=3x^2+2x$。

第4次手写作业

第1题

1 (5 分) 给出下列数据，用最小二乘法求形如 $y = ae^{bx}$ 的经验公式。

x_i	-0.60	-0.50	0.25	0.75
y_i	1.00	1.25	2.50	4.25

1、根据教材第53页例2.5，应将指数函数取个对数变成一次函数来处理。对$y = ae^{bx}$左右取对数可得$lny = bx + lna$，表中的数据也取对数可得：

x_i	-0.60	-0.50	0.25	0.75
y_i	1.00	1.25	2.50	4.25
$ln(y_i)$	0.00	0.22	0.92	1.45

第4次手写作业

第1题

由教材第50页公式2.1可知应求解方程：

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} lna \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum lny_i \\ \sum x_i lny_i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2350 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} lna \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5864 \\ 1.2027 \end{pmatrix}$$

解得$\begin{cases} lna = 0.6723 \\ a = 1.9587 \\ b = 1.0283 \end{cases}$，$y = 1.9587e^{1.0283x}$：

x_i	-0.60	-0.50	0.25	0.75
y_i	1.00	1.25	2.50	4.25
指数拟合结果	1.0569	1.1713	2.5329	4.2355

第4次手写作业

第2题

2(5 分) 在最小二乘法原理下求下列矛盾方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ x_1 + 6x_2 = 14 \\ 3x_1 + x_2 = 7.5 \\ x_1 + x_2 = 4.5 \end{cases}$$

2、根据教材第55页定理2.1和第58页例2.9，应求解方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 88 \end{pmatrix}$$

解得 $\begin{cases} x_1 = \frac{593}{220} = 2.6955 \\ x_2 = \frac{87}{55} = 1.5818 \end{cases}$ 。 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{593}{220} \\ \frac{87}{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4682 \\ 12.1864 \\ 9.6682 \\ 4.2773 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 7.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$

第4次手写作业

第3题

3. (8 分) 利用最小二乘法构造二次多项式 $y = p(x)$ 去拟合下列数据（这里 x 代表年份，y 为人数），并计算 $y(2015)$，结果精确到小数点后一位.

x	2010	2011	2012	2013	2014
y	134091	134735	135404	136072	136782

3、这里有个小技巧，将x向左平移2012，y向下平移135404，可得新表

x'	-2	-1	0	1	2
y'	-1313	-669	0	668	1378

仿照教材第57页例2.7，设$y' = a_0 + a_1 x' + a_2 x'^2$，则应求解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1313 \\ -669 \\ 0 \\ 668 \\ 1378 \end{pmatrix}$$

第4次手写作业

第3题

化简后

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 6719 \\ 259 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{207}{35} \\ a_1 = \frac{6719}{10} \\ a_2 = \frac{131}{14} \end{cases}$$

$$y - 135404 = y' = \frac{131}{14} x'^2 + \frac{6719}{10} x' - \frac{207}{35} = \frac{131}{14}(x-2012)^2 + \frac{6719}{10}(x-2012) - \frac{207}{35}$$

$$y(2015) = 137498$$

第5次手写作业

第1题

1· · 给定 $n>1$,· 给出用牛顿法计算 $\sqrt[n]{a}$· $(a>0)$ 时的迭代公式，并用此公式来计算 $\sqrt[5]{9}$，取初值 $x_0=2$,· 迭代 3 次，求 x_3.· · · · · · · · · · · （5 分）

1、虽然可以构造$g(x)=x-\sqrt[n]{a}$，并对g(x)用牛顿迭代，但一下子就出结果了。牛顿法是用来解非线性方程的，而g(x)是个线性函数，所以构造g(x)不符合题意。可构造$f(x)=x^n-a$，根据教材第65页公式（3.2）可知迭代格式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}$$

计算 $\sqrt[5]{9}$时结果如下：

$$x_0=2, x_1=x_0-\frac{x_0^5-9}{5x_0^4}=\frac{137}{80}=1.7125, x_2=x_1-\frac{x_1^5-9}{5x_1^4}=1.5793$$

$$x_3=x_2-\frac{x_2^5-9}{5x_2^4}=1.5528$$

而 $\sqrt[5]{9}\approx 1.5518$，可见$x_3$与真实值还是比较接近的。

第5次手写作业

第2题

2.. 写出对方程 $x^3-4x^2+5x-2=0$ 求根时的

Newton 迭代公式 $x_n=\varphi(x_{n-1})$.

取初值 $x_0=0$，判断极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 是否存在；

请给出你的理由或证明。 ···（**10 分**）

2、注意到 $f(x)=x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$， $\begin{cases} f(2)=0\neq f'(2)=1 \\ f(1)=f'(1)=0\neq f''(1)=-2 \end{cases}$ ，

因此x=2是单根，x=1是2重根。根据教材第65页公式（3.2）和第66页公式3.5，有

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Longrightarrow \Gamma(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{2x^2-2x-2}{3x-5},\Gamma'(x)=\dfrac{6x^2-20x+16}{(3x-5)^2} \\ x_{k+1}=x_k-p\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Longrightarrow \Delta(x)=x-2\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{x^2+x-4}{3x-5},\Delta'(x)=\dfrac{(x-1)(3x-7)}{(3x-5)^2} \end{cases}$$

显然，在x=1附近应使用二重迭代 $\Delta(x)$，而在x=2附近应使用单迭代 $\Gamma(x)$，迭代函数图像如图所示。由于 $\Gamma(1)=\Delta(1)=1,\Gamma(2)=\Delta(2)=2$，因此 $\Gamma(x)$ 和 $\Delta(x)$ 均有2个不动点：x=1和x=2。

第5次手写作业

第2题

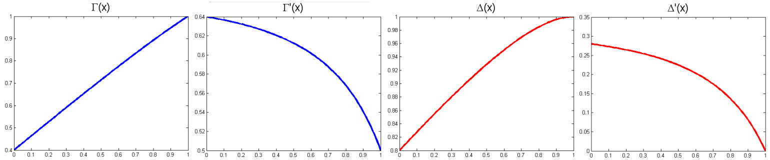

图: 迭代图像：$\Gamma(x), \Gamma'(x), \Delta(x), \Delta'(x)$

注意到在闭区间[0,1]上，均有$\begin{cases} 0 \le \Gamma(x) \le 1, |\Gamma'(x)| \le 0.7 < 1 \\ 0 \le \Delta(x) \le 1, |\Delta'(x)| \le 0.3 < 1 \end{cases}$。由于初值$x_0 = 0 \in [0,1]$，因此根据教材第62页定理3.1，无论用哪个迭代$\Gamma(x)$或$\Delta(x)$，最终都只能收敛到不动点x=1，无法收敛到x=2，也即$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$。

第5次手写作业

第2题

k	x_k	$\Gamma(x_k)$	误差Γ_k	$\frac{\lvert\Gamma_{k+1}\rvert}{\lvert\Gamma_k\rvert}$		x_k	$\Delta(x_k)$	误差Δ_k	$\frac{\lvert\Delta_{k+1}\rvert}{\lvert\Delta_k\rvert^2}$
0	0	0.4000	0.6000			0	0.8000	0.2000	
1	0.4000	0.6526	0.3474	0.5789		0.8000	0.9846	0.0154	0.3846
2	0.6526	0.8065	0.1935	0.5571		0.9846	0.9999	0.0001	0.4887
3	0.8065	0.8960	0.1040	0.5375		0.9999	≈ 1	6.689×10^{-9}	0.4999
4	0.8960	0.9457	0.0543	0.5225		≈ 1	1	0	
5	0.9457	0.9721	0.0279	0.5126		1	1	0	

由上表可知$\Delta(x)$比$\Gamma(x)$的收敛速度快得多，且$\Delta(x)$的收敛阶为2，$\Gamma(x)$的收敛阶为1。

第6次手写作业

第1题

1. 分别计算下列矩阵的$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$范数： (4分)

$$(a)\quad A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -6\end{pmatrix},\qquad (b)\quad A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

1、教材第8页给出了矩阵范数的定义，计算结果见表，对$n\times n$的矩阵而言：

$$\begin{cases}\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{ij}|，\text{每一列先取绝对值再求和，n个和的最大值}\\ \|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|，\text{每一行先取绝对值再求和，n个和的最大值}\end{cases}$$

(a) A=	第1列	第2列	第3列	绝对值行和
第1行	5	-2	1	8
第2行	-1	3	-1	5
第3行	-1	2	-6	9
绝对值列和	7	7	8	

由表可知 $\begin{cases}\|A\|_1=\max\{7,7,8\}=8\\ \|A\|_\infty=\max\{8,5,9\}=9\end{cases}$

(b) A=	第1列	第2列	第3列	绝对值行和
第1行	4	-1	1	6
第2行	-2	3	1	6
第3行	-1	1	6	8
绝对值列和	7	5	8	

由表可知 $\begin{cases}\|A\|_1=\max\{7,5,8\}=8\\ \|A\|_\infty=\max\{6,6,8\}=8\end{cases}$

第6次手写作业

第2题

2. 分别计算矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的谱半径及其$\|\cdot\|_2$范数. (4分)

2、矩阵范数定义仍在教材第8页，$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1}$，$\lambda_1=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$，$\lambda_i$是$A^TA$的特征值。矩阵谱半径在教材第11页定义0.10，$\rho(A)=\max_i|\lambda_i|$，$\lambda_i$为A的特征值。

$$\begin{cases} A\text{的特征值为}\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}\text{，所以}\rho(A)=\max\left\{\left|\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right|,\left|\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right|\right\}=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\approx 4.5616 \\ A^TA\text{的特征值为}11\pm3\sqrt{13}\text{，所以}\|A\|_2=\sqrt{\max\left\{\left|11-3\sqrt{13}\right|,\left|11+3\sqrt{13}\right|\right\}} \end{cases}$$

$$=\sqrt{11+3\sqrt{13}}\approx 4.6708$$

第6次手写作业

第3题

3. 用Doolittle分解法解下列线性方程组(请给出详细的解题过程，包括LU分解; 其中，LU分解给6分，解方程给4分，共10分)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 & = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 & = 20 \end{cases}$$

3、仿照教材第88页例4.5，

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{5} & 1 & \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{14} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & \frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ & & \frac{9}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ & \frac{14}{5} & -\frac{7}{5} \\ & & \frac{9}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 15\frac{5}{14} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{63} \\ \frac{25}{9} \\ \frac{215}{63} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.0794 \\ 2.7778 \\ 3.4127 \end{pmatrix}$$

第7次手写作业

第1题

（10分）1. 设有线性代数方程组 $Ax=b$，其中，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) 求Jacobi迭代的迭代矩阵及相应的迭代格式；（4分）

(b) 讨论此时Jacobi迭代（方法）的收敛性.　　（6分）

采用教材第102页的符号(A、D、L、U、b)，则迭代法解线性方程组$Ax=b$的思路如下

$$Ax=b \Longrightarrow 0=Ax-b \Longrightarrow -Dx=(A-D)x-b \Longrightarrow x=-D^{-1}((A-D)x-b)$$
$$\Longrightarrow x=-D^{-1}(Lx+Ux-b)$$

$$\begin{cases} \text{Jacobi迭代法：} & x^{(k+1)}=-D^{-1}\left(Lx^{(k)}+Ux^{(k)}-b\right) \\ & \Longleftrightarrow x^{(k+1)}=(I-D^{-1}A)x^{(k)}+D^{-1}b \\ \text{Gauss-Seidel迭代法：} & x^{(k+1)}=-D^{-1}\left(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)}-b\right) \\ & \Longleftrightarrow x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b \end{cases}$$

第7次手写作业

第1题

1、（a）$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

（b）根据教材第100页下面，矩阵收敛的充要条件是谱半径<1。因为迭代矩阵的特征值为：$\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}} \approx \pm 0.8090, \pm 0.3090$，谱半径小于1，所以Jacobi迭代收敛。

第7次手写作业

第2题

（15分） 2. 设有线性代数方程组

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = 5 \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 & = 7 \end{cases}$$

(a) 写出Gauss-Seidel迭代的分量形式； （5分）

(b) 求Gauss-Seidel迭代的分裂矩阵(splitting matrix)及迭代矩阵(iteration matrix)； （4分）

(c) 讨论Gauss-Seidel迭代的收敛性(请给出理由或证明)。 （6分）

2、（a）写出Gauss-Seidel迭代的分量形式。

解：首先写出对应的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{9}{25} & -\frac{16}{25} \\ 0 & -\frac{48}{175} & \frac{52}{175} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{9}{35} \end{pmatrix}$$

（b）求Gauss-Seidel迭代的分裂矩阵及迭代矩阵

解：根据课件“ch5.pdf”第21页上面：将A分成两部分的差A=Q-P并使Q（通常称为分裂矩阵）可逆。可知所谓的Q就是分裂矩阵，又根据“ch5.pdf”第49页中间知Q=D+L，所以有

$$\text{分裂矩阵} = Q = D + L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \text{迭代矩阵} = G = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{9}{25} & -\frac{16}{25} \\ 0 & -\frac{48}{175} & \frac{52}{175} \end{pmatrix}$$

第7次手写作业

第2题

（c）讨论Gauss-Seidel迭代的收敛性

解：由教材第104页定理5.4可知当A正定时Gauss-Seidel迭代收敛。一个实对称矩阵A是正定的，是指对任意非零向量$X^T = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$，均有

$$X^TAX = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$$

部分同学误认为若$det(A) > 0$则A正定，这显然是不对的，比如若$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,那么显然$det(A) = 1$，然而$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 < 0$，故此时的A负定。

方法一：根据李尚志《线性代数》第459页定理8.3.4：实对称方阵$S = (S_{ij})_{n \times n}$正定$\Longleftrightarrow$ S的所有顺序主子式大于0。本题中

$$\begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0, \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 48 > 0$$

故迭代收敛。

方法二：根据李炯生《线性代数》第356页定理3：方阵S是正定的 $\Longleftrightarrow$ 方阵S的每个特征值都是正的。本题中矩阵A的所有特征值为$0.7251, 8, 8.2749$，正定，由定理5.4知迭代收敛。

方法三：Gauss-Seidel迭代矩阵的所有特征值为$0, 0.7487, -0.0916$，谱半径严格小于1，故收敛。

⚠本题矩阵A虽然对角优，但不是严格对角优，因此不能根据教材第104页定理5.3判断收敛性。

第8次手写作业

第1题

1. 给定函数 $f(x)$ 离散值如下：

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$f(x)$	3.2	3.5	5.0	5.2	4.8

分别用复化梯形和复化 Simpson 公式计算 $\int_{1.0}^{1.8} f(x)dx$.

1、复化梯形：根据教材第118页公式（6.6），有

$$T(h) = h[\cdots] = 0.2 \times \left[\frac{1}{2} \times 3.2 + 3.5 + 5.0 + 5.2 + \frac{1}{2} \times 4.8\right] = 3.54$$

复化Simpson：根据教材第119页公式（6.8），有

$$S_n(f) = \frac{h}{3}[\cdots] = \frac{0.2}{3}[3.2 + 4 \times 3.5 + 2 \times 5.0 + 4 \times 5.2 + 4.8] = 3.52$$

第8次手写作业

第2题

2. 构造积分 $\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h} f(x)dx$ 的数值积分公式

$$I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0 f(0)+a_1 f(2h)\ (h>0)$$

使其具有尽可能高的代数精度，该公式的代数精度是多少？

2、由教材第110页下面代数精度的定义知应使$\int_{-h}^{2h} f(x)dx=\int_{-h}^{2h} x^k dx$，其中k越大越好。因此可用待定系数法

$$\begin{cases} 令 f(x)=1, I(1)=\int_{-h}^{2h} 1dx=3h=a_{-1}\times 1+a_0\times 1+a_1\times 1 \\ 令 f(x)=x, I(x)=\int_{-h}^{2h} xdx=1.5h^2=a_{-1}\times(-h)+a_0\times 0+a_1\times(2h) \\ 令 f(x)=x^2, I(x^2)=\int_{-h}^{2h} x^2dx=3h^3=a_{-1}\times(h^2)+a_0\times 0+a_1\times 4h^2 \end{cases}$$

解得$a_{-1}=0h, a_0=2.25h, a_1=0.75h$，由于$I(x^3)=\frac{15}{4}h^4\neq a_{-1}f(-h)+a_0 f(0)+a_1 f(2h)$，故

$I(f)=2.25h\times f(0)+0.75h\times f(2h)$，代数精度为2阶

第8次手写作业

第3题

3. 记 $I(f)=\int_{-2}^{2}f(x)dx$，设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式，

其中，$I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$，

a) 试确定参数 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha}$，使得该数值积分公式

具有尽可能高的代数精度，并求该公式的代数精度（需给出求解过程）；

b) 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 足够光滑（可微），求该数值积分公式的误差。

3、（a）列方程即可。

$$
\begin{cases}
\int_{-2}^{2}1dx=4=A+B+C\\
\int_{-2}^{2}xdx=0=A(-\alpha)+B(0)+C(\alpha)\\
\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{16}{3}=A((-\alpha)^2)+B(0)+C((\alpha)^2)\\
\int_{-2}^{2}x^4dx=\frac{64}{5}=A((-\alpha)^4)+B(0)+C((\alpha)^4)
\end{cases}
$$

求解上述方程可得 $A=\frac{10}{9},B=\frac{16}{9},C=\frac{10}{9},\alpha=\sqrt{\frac{12}{5}}$。由于 $\int_{-2}^{2}x^6dx\neq A((-\alpha)^6)+B(0)+C((\alpha)^6)$，因此有5阶代数精度。

（b）直接套公式。根据课件“ch62_4.pdf”第18页（54/67），由Gauss积分的误差公式知

$$
\begin{aligned}
E_n(f) &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b W(x)\omega_n^2(x)dx \\
&= \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-2}^{2} 1\times((x-(-\alpha))(x-0)(x-\alpha))^2\,dx \\
&= \frac{64}{7875}f^{(6)}(\xi), -2\le\xi\le 2
\end{aligned}
$$

第9次手写作业

第1题

1 (6 分) 给定函数 $f(x)$ 的离散值表

x	0.0	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	6.0	4.0	2.0	8.0

分别用向前、向后及中心差商公式计算 $f'(0.02), f'(0.04)$.

1、回想一下定义：

$$\begin{cases} \text{向前差商（教材第132页公式(6.17)）：} f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ \text{向后差商（教材第132页公式(6.18)）：} f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} \\ \text{中心差商（教材第133页公式(6.19)）：} f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \end{cases}$$

那么由上面的定义可知：

	向前差商	向后差商	中心差商
f'(0.02)	$\frac{f(0.04)-f(0.02)}{0.04-0.02} = -100$	$\frac{f(0.02)-f(0.00)}{0.02-0.00} = -100$	$\frac{f(0.04)-f(0.00)}{0.04-0.00} = -100$
f'(0.04)	$\frac{f(0.06)-f(0.04)}{0.06-0.04} = 300$	$\frac{f(0.04)-f(0.02)}{0.04-0.02} = -100$	$\frac{f(0.06)-f(0.02)}{0.06-0.02} = 100$

第9次手写作业

第2题

2. **(6 分)** 求积分 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$ 的 **2** 点 Gauss 积分公式，这里 x^2 为权重函数。

2、此题可参考老师的“ch62_4.pdf”的第20页（57/67）。定义$\langle f,g\rangle = \int_0^1 x^2 f(x)g(x)dx$，仿照讲义的Gram-Schmidt正交法可知$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_1(x)=x-\frac{3}{4} \\ p_2(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5} \end{cases}$，这样构造出来的多项式满足$\langle p_0,p_1\rangle=\langle p_0,p_2\rangle=\langle p_1,p_2\rangle=0$。$p_2(x)$的零点为$x_0=\frac{2+\sqrt{0.4}}{3}, x_1=\frac{2-\sqrt{0.4}}{3}$。以$x_0$和$x_1$为节点构造Lagrange插值多项式$\begin{cases} L_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \\ L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \end{cases}$，因此系数为$\begin{cases} \alpha_0=\int_0^1 x^2 L_0(x)dx=\frac{1+\sqrt{\frac{5}{32}}}{6}\approx 0.2325 \\ \alpha_1=\int_0^1 x^2 L_1(x)dx=\frac{1-\sqrt{\frac{5}{32}}}{6}\approx 0.1008 \end{cases}$，故积分公式：

$$\alpha_0 f(x_0)+\alpha_1 f(x_1)=\frac{1+\sqrt{\frac{5}{32}}}{6} f\left(\frac{2+\sqrt{0.4}}{3}\right)+\frac{1-\sqrt{\frac{5}{32}}}{6} f\left(\frac{2-\sqrt{0.4}}{3}\right)$$

$$\approx 0.2325 f(0.8775)+0.1008 f(0.4558)$$

另外可以验证上述式子确实具有3阶代数精度。

第9次手写作业

第3题

3. (16分) 设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = & -y(x), \quad (0 \le x \le 1) \\ y(0) = & 1 \end{cases}$$

假设求解区间[0,1]被 n 等分 (n充分大), 令 $h = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$($k = 0, 1, ..., n$),

(a) 分别写出用向前Euler公式，向后Euler公式，梯形格式以及改进的Euler公式求上述微分方程数值解时的差分格式(即分别写出此四种方法/公式下，y_{k+1} 与 y_k 之间的递推关系式)；(4 分，每种方法给1分)

(b) 设 $y_0 = y(0)$，分别求此四种公式（方法）下的近似值y_n的表达式；(注：这里的y_n即是$y(x_n) \equiv y(1)$的近似值). (4分，每种方法给1分)

(c) 当 n 充分大(即区间长度$h \to 0$)时，分别判断四种方法下的近似值 y_n是否收敛到原问题的真解 $y(x)$在$x = 1$处的值(i.e., $y(1)$). (8分，每种方法给2分)

第9次手写作业

第3题

3、显然该问题的精确解为$y(x)=e^{-x}$，故$y(1)=\frac{1}{e}$。

（a）分别写出用向前Euler公式，向后Euler公式，梯形格式以及改进的Euler公式的差分格式。

解：由教材第140页公式（7.2）知向前Euler公式为

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)=y_k-\frac{1}{n}y_k=\left(1-\frac{1}{n}\right)y_k$$

由教材第142页公式（7.3）知向后Euler公式为

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1},y_{k+1})=y_k-\frac{1}{n}y_{k+1}，\text{左右移项得}y_{k+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)y_k$$

由教材第146页最上面知梯形公式为

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1}))=y_k+\frac{1}{2n}(-y_k-y_{k+1})，\text{移项得}y_{k+1}=\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)y_k$$

由教材第146页公式（7.8）知改进Euler公式为

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_k+hf(x_k,y_k)))=y_k+\frac{1}{2n}\left(-y_k+\left(-y_k+\frac{1}{n}(-y_k)\right)\right)$$

左右移项得$y_{k+1}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)y_k$。

（b）和（c）：设$y_0 = y(0)$，分别求此四种公式下的近似值y_n的表达式。

解：所谓的近似也即$n \to \infty$，这题考察的是极限的知识，另外注意到$y_0 = 1$。

向前Euler公式：$y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n y_0 = \frac{1}{e}$

向后Euler公式：$y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n y_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\times\frac{n}{n+1}} y_0 = \frac{1}{e}$

梯形公式：$y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^n y_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}\times\frac{2n}{2n+1}} y_0 = \frac{1}{e}$

改进Euler公式：$y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)^n y_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n-1}{2n^2}\right)^n y_0 =$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n-1}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2n-1}\times\frac{2n^2-n}{2n^2}} y_0 = \frac{1}{e}$

由计算结果知这四个公式均能算出精确值$y(1) = \frac{1}{e}$。

第10次手写作业

第1题

1. 试推导例题7.4(第3版教材151-152页)中的差分格式 (本题10分)

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]$$

的局部截断误差，即验证

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$$

(提示：将差分格式右端的某些项在某点处同时作Taylor展开)

1、这个题主要用泰勒展开。计算前注意到，y_{n+1}是近似值，$y(x_{n+1})$是精确值。计算x_{n+1}处的误差时，一般假设x_n之前都是精确值，因此有$y(x_{n-2}) = y_{n-2}, y(x_{n-1}) = y_{n-1}, y(x_n) = y_n$。另外注意到，对方程$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$，

有$$\begin{cases} f(x_n, y_n) = y'(x_n) \\ f(x_{n-1}, y_{n-1}) = y'(x_{n-1}) \\ f(x_{n-2}, y_{n-2}) = y'(x_{n-2}) \end{cases}$$

第10次手写作业

第1题

现在用泰勒展开求误差

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &\equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} \\
&= y(x_{n+1}) - \left\{ y_{n-1} + \frac{h}{3}\left[7y'(x_n) - 2y'(x_{n-1}) + y'(x_{n-2})\right] \right\} \\
&= \left(y(x_{n-1}) + 2hy'(x_{n-1}) + \frac{(2h)^2}{2!} y''(x_{n-1}) + \frac{(2h)^3}{3!} y'''(x_{n-1}) + \frac{(2h)^4}{4!} y''''(x_{n-1}) + O(h^5) \right) \\
&- \left\{ y(x_{n-1}) + \frac{7h}{3}\left(y'(x_{n-1}) + hy''(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2!} y'''(x_{n-1}) + \frac{h^3}{3!} y''''(x_{n-1}) + O(h^4) \right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{2h}{3} y'(x_{n-1}) + \frac{h}{3}\left(y'(x_{n-1}) - hy''(x_{n-1}) + \frac{h^2}{2!} y'''(x_{n-1}) - \frac{h^3}{3!} y''''(x_{n-1}) + O(h^4) \right) \right\} \\
&= \frac{h^4}{3} y''''(x_{n-1}) + O(h^5)
\end{aligned}
$$

第10次手写作业

第2题

2. 试用线性多步法构造 $p=1, q=2$ 时的隐式差分格式，求该格式局部截断误差的误差主项 (10分)并判断它的阶 (1分)，最后为该隐式格式设计一种合适的预估-校正格式 (4分)。 (本题10+1+4=15分)

2、本题可仿照老师的“ch7a.pdf”第36-40页（101/129-129/129）。积分区间为$[x_{n-1}, x_{n+1}]$，积分节点为$\{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}\}$。构造格式$y_{n+1} = y_{n-1} + h[\beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(x_n, y_n) + \beta_2 f(x_{n-1}, y_{n-1})]$，由数值积分公式，有

$$\begin{cases} h\beta_0 = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})} dx = \frac{1}{3}h \\ h\beta_1 = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n-1})} dx = \frac{4}{3}h \\ h\beta_2 = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)} dx = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

故差分格式为$y_{n+1} = y_{n-1} + h\left[\frac{1}{3} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{4}{3} f(x_n, y_n) + \frac{1}{3} f(x_{n-1}, y_{n-1})\right]$

令$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$，则$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}) - T_{n+1}) =$
$f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - T_{n+1} f_y(x_{n+1}, \xi) = y'(x_{n+1}) - T_{n+1} f_y(x_{n+1}, \xi)$

第10次手写作业

第2题

将差分格式的所有项都在x_{n+1}处展开，则有

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_{n+1} \\ y_{n-1}=y(x_{n+1})-2hy'(x_{n+1})+\frac{(2h)^2}{2!}y''(x_{n+1})-\frac{(2h)^3}{3!}y'''(x_{n+1})+\frac{(2h)^4}{4!}y''''(x_{n+1})-\frac{(2h)^5}{5!}y'''''(x_{n+1})+O(h^6) \\ f(x_{n+1},y_{n+1})=-T_{n+1}f_y(x_{n+1},\xi)+y'(x_{n+1}) \\ f(x_n,y_n)=y'(x_n)=y'(x_{n+1})-hy''(x_{n+1})+\frac{h^2}{2!}y'''(x_{n+1})-\frac{h^3}{3!}y''''(x_{n+1})+\frac{h^4}{4!}y'''''(x_{n+1})+O(h^5) \\ f(x_{n-1},y_{n-1})=y'(x_{n+1})-2hy''(x_{n+1})+\frac{(2h)^2}{2!}y'''(x_{n+1})-\frac{(2h)^3}{3!}y''''(x_{n+1})+\frac{(2h)^4}{4!}y'''''(x_{n+1})+O(h^5) \end{cases}$$

将上面5项代入差分格式化简就

有$y_{n+1}=y(x_{n+1})-\frac{h}{3}T_{n+1}f_y(x_{n+1},\xi)+\frac{h^5}{90}y'''''(x_{n+1})+O(h^6)$

移项$T_{n+1}=\dfrac{-\frac{h^5}{90}y'''''(x_{n+1})-O(h^6)}{1-\frac{h}{3}f_y(x_{n+1},\xi)}=$

$\left(-\frac{h^5}{90}y'''''(x_{n+1})-O(h^6)\right)\left(1+\frac{h}{3}f_y(x_{n+1},\xi)+\cdots\right)=-\frac{h^5}{90}y'''''(x_{n+1})+O(h^6)$

由教材第143页最下面知这是4阶精度

预估-校正公式为

$$\begin{cases} \overline{y_{n+1}}=y_{n-1}+\frac{h}{3}[7f(x_n,y_n)-2f(x_{n-1},y_{n-1})+f(x_{n-2},y_{n-2})] \\ y_{n+1}=y_{n-1}+h\left[\frac{1}{3}f(x_{n+1},\overline{y_{n+1}})+\frac{4}{3}f(x_n,y_n)+\frac{1}{3}f(x_{n-1},y_{n-1})\right] \end{cases}$$