数 理 方 程

（复习资料）

数学物理方程试题

2002.1.16

(0006， 0023， 0000班， 00少)　　姓名＿＿＿＿＿，学号＿＿＿＿＿

注： 1)本考卷共两页，其中 $a>0$ 是常数.

2)前七题中选作六题，第八题必作．时间是两小时.

3)可以直接利用本课程学过的有关方程或定解问题解的公式进行计算.

一、(15 分) 解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x, & (t>0, -\infty<x<\infty), \\ u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 3x^2. \end{cases}$$

$\therefore u(x,t) = \omega(x,t) + v(x) = \cdots$

二、(15 分) 线性偏微分算子 $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} - 2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，特征方程 $(dy)^2 + (dx dy) - 2(dx)^2 = 0$.

$(dy - dx)(dy + 2dx) = 0$.

1). 求方程 $L[u]=0$ 的通解；

2). 解定解问题

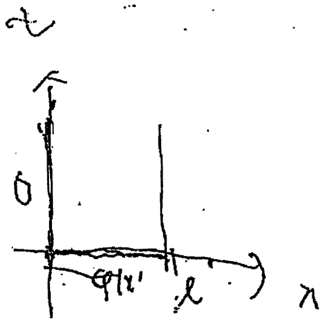
$u = f(2x+y) + g(-x+y)$

$$\begin{cases} L[u]=0, & (y>0, -\infty<x<+\infty), \\ u(x,y)|_{y=0} = \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

三、(15 分)

1). 解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t>0, 0<x<l), \\ u(x,t)|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x). (\phi(0)=0) \end{cases}$$



2). 解定解问题

$v = Ax + B$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t>0, 0<x<l), \\ u(x,t)|_{x=0} = u_0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \dfrac{q_0}{k}, \\ u(x,t)|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

$Ax+B$

其中 u_0, q_0, k 为常数.

四、(15 分)

1) 求解 Lplace 方程的边值问题　可用泊松公式 $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi$

内问题

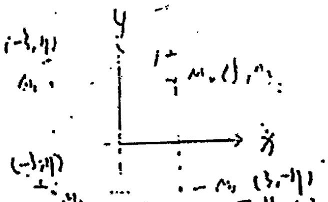
$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, & (r=\sqrt{x^2+y^2}<1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}|_{r=1} = \cos^2\theta - \sin^2\theta = f(\theta) \end{cases}$$

$\cdot 1 \cdot$

2) 如果把边条件改为 $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=1} = f(\theta)$， $f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$ 且有一阶连续导数及分段二阶连续导数，上述边值问题是否一定有解？为什么？

五、(15 分) 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ (t > 0, x > 0); \\ (u - \frac{\partial u}{\partial x})|_{x=0} = 0, \\ u(x,t)|_{t=0} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$



六、(15 分)

1) 解定解问题 Green 函数

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\delta(x - \xi, y - \eta), \ (0 < x, \xi < +\infty; \ 0 < y, \eta < +\infty), \\ G(x, y; \xi, \eta)|_{x=0} = G(x, y; \xi, \eta)|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

2) 利用 1) 中的 $G(x, y; \xi, \eta)$ 写出定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x > 0; y > 0), \\ u(x,y)|_{x=0} = \phi(y), \ u(x,y)|_{y=0} = \psi(x). \ (\phi(0) = \psi(0)) \end{cases}$$

解的积分公式.

七、(15 分) 求初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_2 u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f(x,y,t), \ (t > 0, -\infty < x, y < +\infty), \\ u(x,y,t)|_{t=0} = \phi(x,y). \end{cases}$$

的基本解，并利用基本解写出此定解问题解的积分公式 (b_1, b_2, c 是常数).

八、(10 分) 用分离变量法求解边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}) = 0, \ (1 < x < e, 0 < y < 1, 0 < z < +\infty); \\ u(x,y,z)|_{x=1} = u(x,y,z)|_{x=e} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 0, \\ (u - \frac{\partial u}{\partial z})|_{z=0} = \varphi(x,y). \text{且} z \to +\infty \text{时}, u(x,y,z) \text{有界}. \end{cases}$$

参考公式： $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$， $L[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}] = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

$L[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$； $L[e^{\lambda t} f(t)] = \bar{f}(p - \lambda)$；$L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \bar{f}(p)$，其中 $\bar{f}(p) = L[f(t)]$.

$L[1] = \frac{1}{p}$

2

数学物理方程试题 lxl

00 级 (4.5,7,10)　2002.7.4　　姓名 明[illegible]，学号 PB0000405S

一. (20 分)

1. 利用镜像法写出上半圆 $(x^2+y^2<a^2, y>0)$ 内场位方程第一边值问题的 Green 函数. 用四个点电荷. $\Delta G = -\delta(x-\xi, y-\eta) = -\delta(M-M_0)$ $(M\in D)$

$u = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r(M,M_0)}$

2. 利用达朗贝尔公式求出一维波动方程初值问题的基本解.

二. 解下列定解问题 (45 分) $G|_{边界}=0$

1.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \quad (r<1, 0<\phi<\pi/4), \\ u|_{\phi=0} = \dfrac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=\pi/4} = 0, \\ u|_{r=1} = \sin 2\phi + \sin 6\phi. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \quad (r\neq 1), \\ u|_{r=1} = f(\theta), \\ \lim_{r\to\infty} u = 0. \end{cases}$$

$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$

3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t>0, -\infty<x<\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(t), \quad u|_{t=0} = 0. \\ u_x(t,\infty) = u(t,\infty) = 0. \end{cases}$$

三. (20 分)

1) 解定解问题 $(G = G(t,x;\xi))$

$$\begin{cases} G_{tt} = a^2 G_{xx} + \delta(x-\xi) \quad (0<t, 0<x<l, 0<\xi<l), \\ G|_{x=0} = G|_{x=l} = 0, \\ G|_{t=0} = 0, \quad G_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

2) 利用本题 1) 得到的 $G(t,x;\xi)$, 写出定解问题 积分

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x) \quad (0<t, 0<x<l), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

四（15分）(任选一题) 任选一题，计算之。

1. 设 $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 为场位方程第三边值问题的 Green 函数，即定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta), & ((x,y,z)\in V, (\xi,\eta,\zeta)\in V). \\ \left.\left(\alpha G + \beta\dfrac{\partial G}{\partial n}\right)\right|_S = 0, & \alpha, \beta \text{ 是任意常数}, S\text{是 } V \text{ 的边界}. \end{cases}$$

的解. 试利用第二 Green 公式，推出定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & ((x,y,z)\in V), \\ \left.\left(\alpha u + \beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = \varphi(x,y,z), & \alpha, \beta \text{ 是任意常数}, S\text{是 } V \text{ 的边界}. \end{cases}$$

的解的积分表达式.

2. 利用积分变换求出三维波动方程初值问题的基本解.

附录

1. 设 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在区域 V 及边界曲面 S 上有一阶连续偏导数，在 V 内有二阶连续偏导数，则有

$$\iiint_V (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

2.

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}L[f(t)], \qquad L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\right] = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$$

3.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\lambda - \beta^2\lambda^2}\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}, \quad \beta \neq 0.$$

4.

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

5. 二维 Laplace 极坐标方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$

6.求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u, & t>0,\ y>0,\ x\in(-\infty,\infty), \\ u|_{t=0} = \delta(x, y-\eta), & \eta>0, \\ u|_{y=0} = 0 \end{cases}$

⑩

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y-\eta)\, e^{i\lambda y}\, dx$

7.求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = x\dfrac{\partial u}{\partial x} - xu, & t>0,\ x\in(-\infty,\infty) \\ u|_{t=0} = 1 \end{cases}$

⑩

8.设 $L[u] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} - u$,

⑮

(1) 求方程 $L[u]=0$ 的特征曲线族,

(2) 求解 $\begin{cases} L[u]=0, & x>0,\ y\in(-\infty,\infty), \\ u|_{x=0} = e^{2y}, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = e^{2y}. \end{cases}$

9.求解 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & t>0,\ 0<x<l,\ y\in(-\infty,\infty), \\ u|_{t=0} = y^2 \sin\dfrac{\pi}{l}x, \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 \end{cases}$

⑩

$u = V(x,\eta)T(t)$

附:

(1) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad a>0,$

(3) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

2003.07.03

(01203;0107,0105,0110)　　姓名　　学号

一、(20分) 解定解问题

分离变量法:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,\ t>0) \\ u|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin\dfrac{\pi}{l}x + \sin\dfrac{2\pi}{l}x, \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0. \end{cases}$$

二、(20分) 解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - u, & (r=\sqrt{x^2+y^2}<1,\ t>0)\\ u|_{t=0} = x^2+y^2, \\ u|_{r=1} = e^{-t} \end{cases}$$

提示解:

$U = V + W$　$W = e^{-t}$

$U_t = V_t - e^{-t}$

$-U = -V - e^{-t}$

$U = V + e^{-t}$

三、(15分) 用Laplace变换求解

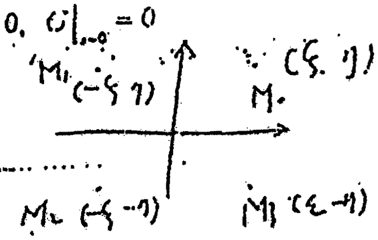
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c^2 u = 0, & (x>0,\ y>0),\quad c>0\text{为常数}\\ u|_{x=0} = y,\\ u|_{y=0}=0.\end{cases}$$

四、(10分) 求边值问题

第一象限格林函数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x-\xi,\ y-\eta), & (0<x,\xi<+\infty,\ 0<y,\eta<+\infty)\\ G|_{x=0}=0,\ G|_{y=0}=0\end{cases}$$

的解 $G(x,y;\xi,\eta)$.



…… 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-u+f(t,x,y), & ((x,y)\in R^2,\ t>0)\\ u|_{t=0}=\phi(x,y),\end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial t}=Lu$

$u|_{t=0}=\delta(x,y)$

（1） 求此初值问题的基本解$U(t,x,y)$；

（2） 利用此基本解写出上述初值问题解的积分表达式。

六、（15 分）设 $L[u]=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$xy\neq 0$，试

（1） 求出方程$L[u]=0$的特征曲线族 $\phi(x,y)=c_1$，$\psi(x,y)=c_2$；

（2） 在区域$x>0$，$y>0$内求方程$L[u]=0$的通解；

（3） 求解定解问题

$$\begin{cases}L[u]=0, & (x>0,\ xy>1,\ y>x)\\ u|_{xy=1}=\dfrac{1}{x^2},\\ u|_{y=x}=x^2\end{cases}$$

参考公式

1．在柱坐标(r,θ,z)下，$\Delta_3 u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

2．在球坐标(r,θ,φ)下，

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

3．ν阶 Bessel 方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$，在 $0<x<+\infty$ 上的基础解组为 $J_\nu(x)$，$N_\nu(x)$。其中$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$.

装订线 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学

2004–2005 学年第二学期考试试卷

考试科目：数理方程 (A)　　　　得分：________

学生所在系：____________　姓名：________　学号：________

要求做下面所有的题目，满分为 100 分。

一. 填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 $0 < x_0 < l$, $\delta(x - x_0)$ 在 $[0, l]$ 上按照正弦函数系 $\{\sin\frac{n\pi x}{l}\}$ 的展开式为

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x_0}{l} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$\delta'(x - x_0)$ 在 $[0, l]$ 上按照余弦函数系 $\{\cos\frac{n\pi x}{l}\}$ 的展开式为　$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(x) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

$$\delta'(x - x_0) = -\frac{2n\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi x_0}{l} \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

2. $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \delta(x, y)$ 的 Fourier 变换是 $-(\lambda^2 + \mu^2)$.

3. 已知 $f(x)$ 的 Fourier 的变换为 $F[f(x)] = \frac{A}{2}\left(\delta(\lambda + \lambda_0) + \delta(\lambda - \lambda_0)\right)$, 则

$$f(x) = \frac{A}{2\pi}\cos\lambda_0 x.$$

4. $\Delta_2 u = f(x, y)$ 在平面区域 $D: 0 < \arg z < \frac{1}{3}\pi$ 内第一边值问题的 Green 函数是 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^3 - \bar{z}_0^3|}{|z^3 - z_0^3|}$.

5. 固有值问题

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 0 < x < 1 \\ y(0) = 0,\ y'(1) = 0, \end{cases}$$

的固有值为 $\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]^2$ ~~$(n\pi)^2$~~，固有函数为 $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ ~~$\sin n\pi x$~~，固有函数的模平方为 $\frac{1}{2}$.

二. 解下列初值问题（每小题 10 分，共 30 分）：

1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - e^{-x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = x. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + \cos x = 0, & (-\infty < x, y < +\infty) \\ u(x,0) = 0,\ u_y(x,0) = 4x. & y > 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (-\infty < x < +\infty,\ y > 0) \\ u|_{y=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

三. 解下列定解问题（第 1 小题 10 分，第 2、3 小题各 15 分，共 40 分）：

1.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + hu = f(t,x), & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = x^2 - y^2, & (r^2 = x^2 + y^2 < a^2) \\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial r} + u\right)\right|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & (t > 0, 0 \leqslant r = \sqrt{x^2+y^2} < b) \\ u|_{r=0}\ 有界,\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

注：$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}\ (a > 0).$

中国科学技术大学

2004-2005 学年第二学期数理方程 (A) 试题参考解答

一. 填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\delta(x-x_0)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x_0\sin\frac{n\pi}{l}x$; $\delta'(x-x_0)=\frac{2n\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}x_0\cos\frac{n\pi}{l}x$.

2. $F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\delta(x,y)\right]=-(\lambda+\mu)^2$.

3. $f(x)=\frac{A}{2\pi}\cos\lambda_0 x$.

4. $G(z;z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^3-\bar{z}_0^3}{z^3-z_0^3}\right|$.

5. $\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2,\ n=0,1,2,\cdots;\ y_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2}\pi x$, $\|y_n(x)\|^2=\frac{1}{2}$.

二. 解下列初值问题（每小题 10 分，共 30 分）：

1.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-e^{-x}\frac{\partial u}{\partial x}=0, & (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u|_{t=0}=x.\end{cases}$$

解：$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{-e^{-x}}$，$e^x dx+dt=0$，$e^x+t=C$。令 $\xi=e^x+t,\ \eta=t$，则 $u_t=u_\xi+u_\eta$，$u_x=u_\xi e^x$。代入方程得：$u_\eta=0$。积分得，$u(\xi,\eta)=f(\xi)$。代回原变量得通解为：$u(t,x)=f(e^x+t)$。由初始条件可得 $f(e^x)=x$。因为 $\ln e^x=x$，故所求问题的解为 $u(t,x)=\ln(e^x+t)$。

2.

$$\begin{cases}u_{xx}-u_{yy}+\cos x=0, & (-\infty<x<+\infty,\ y>0)\\ u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=4x.\end{cases}$$

解：设 $u(x,y)=w(x,y)+v(x)$。代入方程得 $w_{xx}-w_{yy}+v''(x)+\cos x=0$，令 $v''(x)+\cos x=0$，可取 $v(x)=\cos x$。即，设 $u(x,y)=w(x,y)+\cos x$。有

$$\begin{cases}w_{yy}=w_{xx}, & (-\infty<x<+\infty,\ y>0)\\ w(x,0)=\cos x,\ w_y(x,0)=4x.\end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得

$$w(x,y)=-\frac{1}{2}\big(\cos(x-y)+\cos(x+y)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}4\xi\,d\xi$$
$$=-\cos x\cos y+4xy.$$

故 $u(x,y)=-\cos x\cos y+\cos x+4xy$

3.

$$\begin{cases}3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (-\infty<x<+\infty,\ y\geq 0)\\ u|_{y=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

解：特征方程为 $3(dy)^2-10dxdy+3(dx)^2=0$. 即，$(dx-3dy)(3dx-dy)=0$. 于是两族独立的特征曲线为 $x-3y=C_1$ 及 $3x-y=C_2$. 令 $\xi=x-3y,\eta=3x-y$, 则

$$u_x=u_\xi+3u_\eta, \qquad u_{xx}=u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta},$$

$$u_y=-3u_\xi-u_\eta, \qquad u_{xy}=-3u_{\xi\xi}-10u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy}=9u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

代入方程得 $u_{\xi\eta}=0$. 于是 $u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$. 代回原变量得

$$u(x,y)=f(x-3y)+g(3x-y).$$

由初始条件得

$$\begin{cases}f(x)+g(3x)=0,\\ 3f'(x)+g'(3x)=-\varphi(x).\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}f(x)+g(3x)=0,\\ 3f(x)+\frac{1}{3}g(3x)=-\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi+C.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}f(x)=-\frac{3}{8}\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{3}{8}C,\\ g(3x)=\frac{3}{8}\int_0^x\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{3}{8}C.\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}f(x-3y)=\frac{3}{8}\int_{x-3y}^0\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{3}{8}C,\\ g(3x-y)=\frac{3}{8}\int_0^{x-\frac{1}{3}y}\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{3}{8}C.\end{cases}$$

于是

$$u(x,y)=\frac{3}{8}\int_{x-3y}^{x-\frac{1}{3}y}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

三. 解下列定解问题（第 1 小题 10 分，第 2、3 小题各 15 分，共 40 分）：

1.

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}+hu=f(t,x), & (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ u(0,x)=0.\end{cases}$$

直接用FT求解 $\frac{d\hat{u}(t,\lambda)}{dt}+(\lambda^2+h)\hat{u}=\hat{f}(t,\lambda)$, $\hat{u}|_{t=0}=0$

解：先求基本解，即求解

$$\begin{cases}U_t=U_{xx}-hU, & (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ U(0,x)=\delta(x).\end{cases}$$

$\hat{u}(t,\lambda)=\int_0^t\hat{f}(\tau,\lambda)e^{-(\lambda^2+h)(t-\tau)}d\tau$

设 $F[U(t,x)]=\bar{U}(t,\lambda)$ 是 $U(t,x)$ 的 Fourier 变换。则

$$\begin{cases}\bar{U}_t+(\lambda^2+h)\bar{U}=0,\\ \bar{U}(0,\lambda)=1\end{cases}$$

$\therefore u(t,x)=\int f(\tau,x-y)\frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}d$

解得 $\bar{U} = e^{-(\lambda^2+h)t}$. 作 Fourier 逆变换得

$$U(t,x) = F^{-1}[\bar{U}(t,\lambda)] = \frac{e^{-ht}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t - i\lambda x}\,d\lambda = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}-ht}}{2\sqrt{\pi t}}.$$

故

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau,x)}{\sqrt{t-\tau}} * e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}-h(t-\tau)}\,d\tau$$

2.

$$\begin{cases} \Delta_2 u = x^2 - y^2, & (r^2 = x^2+y^2 < a^2) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} + u\right)\Big|_{x^2+y^2=a^2} = 0. \end{cases}$$

解：先求齐次化特解：设 $u = w + Ax^4 + By^4$. 代入方程得

$$\Delta_2 w + 12Ax^2 + 12By^2 = x^2 - y^2.$$

令 $\Delta_2 w = 0$, 则有 $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{12}$. 采用极坐标系，即、设 $u = w + \frac{1}{12}r^4\cos 2\theta$. 则有

$$\begin{cases} \Delta_2 w = 0, \ (r < a) \\ (w_r + w)|_{r=a} = -\left(\frac{a^4}{12} + \frac{a^3}{3}\right)\cos 2\theta. \end{cases}$$

由圆内通解

$$w(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n\cos n\theta + D_n \sin n\theta)$$

及边界条件可取其通解为 $w(r,\theta) = C_2 r^2\cos 2\theta$, 代入边界条件得 $C_2 = -\frac{a^3+4a^2}{12(a+2)}$.

故

$$u(r,\theta) = \left(\frac{r^4}{12} - \frac{a^3+4a^2}{12(a+2)}r^2\right)\cos 2\theta.$$

3.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & (t > 0, 0 < r = \sqrt{x^2+y^2} < b) \\ u|_{r=0} \text{ 有界}, \ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解：设 $u(r,r) = T(t)R(r)$. 分离变量得

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r) = 0, \\ |R(0)| < +\infty, \ R'(b) = 0 \end{cases}$$

及常微分方程

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0.$$

记 $\omega = \sqrt{\lambda}$. 则有

$$R(r) = CJ_0(\omega r), \quad \text{及} \quad -C\omega J_1(\omega b) = 0.$$

故有 $\omega_0 = 0$. 记 ω_n 为方程 $J_1(\omega b) = 0$ 的第 n 个正根。则对 $n = 1, 2, \cdots$, 有

$$\lambda_0 = 0, \qquad R_0(r) = 1, \qquad T_0(t) = A_0 + B_0 t,$$
$$\lambda_n = \omega_n^2, \qquad R_n(r) = J_0(\omega_n r), \qquad T_n(t) = A_n \cos\omega_n at + B_n \sin\omega_n at.$$

于是问题的通解为

$$u(t,r) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\omega_n at + B_n \sin\omega_n at) J_0(\omega_n r).$$

由 $u_t|_{t=0} = 0$ 得 $B_n = 0$. $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 由 $u|_{t=0} = \varphi(r)$ 得

$$\varphi(r) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\omega_n r).$$

注意到模平方 $N_{\nu,2}^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right) J_\nu^2(\omega b)$. 可得

$$A_0 = \frac{2}{b^2}\int_0^b \varphi(r) r\, dr, \quad A_n = \frac{2}{b^2 J_0^2(\omega_n b)}\int_0^b \varphi(r) r J_0(\omega_n r)\, dr,$$

其中 ω_n 为方程 $J_1(\omega b) = 0$ 的第 n 个正根, $n = 1, 2, \cdots$.

数理方程(B)考试卷

(2004.1.6)

一.解定解问题.(20分)

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin 2x \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=6x^2 \end{cases}$$

$(t>0,\ -\infty<x<+\infty)$

$u^1=\frac{1}{4}\sin 2x$

$V=u-w$

$$\begin{cases} V_{tt}=V_{xx} \\ V|_{t=0}=-\frac{1}{4}\sin 2x \\ V_t|_{t=0}=6x^2 \end{cases}$$

$V=\frac{1}{2}[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}6\xi^2 d\xi$

$=2t(3x^2+t^2)-\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2t$

由达朗贝尔:

$\therefore u=2t(3x^2+t^2)-\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2t+\frac{1}{4}$

二.解定解问题.(20分)

$$\begin{cases} \Delta_3 u=0 \\ u|_{r=1}=1+\cos^2\theta \\ u_r|_{r=2}=0 \end{cases}$$

$(1<r<2,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi)$

$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)})P_n^m(\cos\theta)(C_{nm}\cos m\varphi+D_{nm}\sin m\varphi)$

$u|_{r=1}=1+\cos^2\theta=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta$

$u|_{r=2}=$

三.解定解问题.(20分)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u \\ u|_{x=0}\text{有界},\ u|_{x=1}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

$(t>0;\ 0<x<1)$

$u_t=\frac{1}{x}(xu_x)_x+u=\frac{1}{x}(u_x+xu_{xx})+u=\frac{u_x}{x}+u_{xx}+u$

一. 二.

仍为零阶Bessel

四. 解定解问题.(20分)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + b u_x + c u + f(t,x) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

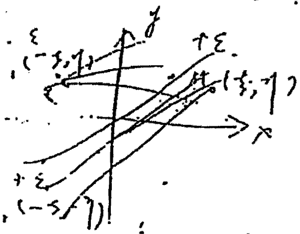
$(t>0, -\infty<x<+\infty)$

a, b, c 均为常数.

五. 求平面区域D: $x>0, y>0$ 的格林函数 $G(x,y;\xi,\eta)$.(10分)

并求下列定解问题的解.(10分)

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(M) & M(x,y)\in D:\ x>0, y>0. \\ u|_l = \varphi(M) & M(x,y)\in l:\ l\text{为}D\text{的边界}. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(M-M_0) \\ v|_l = 0 \end{cases}$$

$$u = \int_D G f\,dxdy - \int_l \varphi \frac{\partial G}{\partial n} dl$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} =$$

$$w(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - \bar z_0^2}$$

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|w(z)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^2-\bar z_0^2}{z^2-z_0^2}\right|$$

附: $\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$.

数理方程(B)

试题解答及评分标准。 (2004.1.6)

一、$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin 2x & (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=6x^2 \end{cases}$

解. 设 $u(t,x)=v(t,x)+f(x)$，代入方程得：$v_{tt}=v_{xx}+f''(x)+\sin 2x$，令 $f''(x)+\sin 2x=0$，得 $f(x)=\frac{1}{4}\sin 2x$ (5分)

~~即设 $u=v+\frac{1}{4}\sin 2x$ 得：~~

$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx} & (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ v|_{t=0}=-\frac{1}{4}\sin 2x,\ v_t|_{t=0}=6x^2 \end{cases}$ (10分) $v(t,x)=-\frac{1}{8}[\sin 2(x-t)+\sin 2(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}6\xi^2 d\xi=-\frac{1}{4}\sin 2x\cos 2t+6x^2t+2t^3$ (15分)

所以：

$u(t,x)=v(t,x)+\frac{1}{4}\sin 2x=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)\sin 2x+6x^2t+2t^3$ (20分)

注. 本题亦可用齐次化原理与达朗贝尔公式求解，也可用基本解 $U(t,x)=\frac{1}{2}h(t-|x|)$ 及定理二求解。

二、$\begin{cases} \Delta_3 u=0 & (1<r<2,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi) \\ u|_{r=1}=1+\cos^2\theta \\ u_r|_{r=2}=0 \end{cases}$

解. $u=u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}]P_n(\cos\theta)$ (5分)

$\begin{cases} 1+\cos^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n+B_n]P_n(\cos\theta) \\ 0=\sum_{n=0}^{\infty}[nA_n2^{n-1}-(n+1)B_n2^{-(n+2)}]P_n(\cos\theta) \end{cases}$ 由 $P_0(\cos\theta)=1$，$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$ 可知：$n=0,2$；当 $n=1$ 及 $n\ge 3$ 时，$A_n=B_n=0$。(10分)

$\begin{cases} A_0+B_0-\frac{1}{2}(A_2+B_2)=1 \\ -\frac{1}{4}B_0-\frac{1}{2}(4A_2-\frac{3}{16}B_2)=0 \\ \frac{3}{2}(A_2+B_2)=1 \\ \frac{3}{2}(4A_2-\frac{3}{16}B_2)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A_2+B_2=\frac{2}{3} \\ A_0+B_0=\frac{4}{3} \\ 4A_2-\frac{3}{16}B_2=0 \\ -\frac{1}{4}B_0=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A_0=\frac{4}{3} \\ B_0=0 \\ A_2=\frac{6}{201} \\ B_2=\frac{128}{201} \end{cases}$ (15分)

所以：$u(r,\theta)=\frac{4}{3}P_0(\cos\theta)+(\frac{6}{201}r^2+\frac{128}{201}r^{-3})P_2(\cos\theta)$ (20分) 注：若一开始用分离变量法求出通解，则给10分，求出系数5分。没有球坐标形式的给分可酌定。

三、$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})+u & (t>0,\ 0<x<1) \\ u|_{x=0}\text{有界},\ u|_{x=1}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$

解. 设 $u(t,x)=T(t)X(x)$，$\begin{cases} x^2X''(x)+xX'(x)+[(\lambda+1)x^2-0^2]X(x)=0 \\ |X(0)|<+\infty,\ X(1)=0 \end{cases}$ $T'(t)+\lambda T(t)=0$ (5分)

记 $\lambda+1=\omega^2$

$X(x)=CJ_0(\omega x)+DN_0(\omega x)$，由 $|X(0)|<+\infty$ 得 $D=0$。$T_n'(t)+(\omega_n^2-1)T_n(t)=0$

由 $X(1)=0$ 得方程 $J_0(\omega)=0$

设 ω_n 为方程 $J_0(\omega)=0$ 的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots$。$T_n(t)=C_ne^{-(\omega_n^2-1)t}$

则 $\lambda_n=\omega_n^2-1\quad n=1,2,3,\cdots$

$X_n(x)=J_0(\omega_nx)$ (10分)

$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-(\omega_n^2-1)t}J_0(\omega_nx)$ (15分) 其中：$C_n=\frac{2}{J_1^2(\omega_n)}\int_0^1\varphi(x)xJ_0(\omega_nx)dx$，而 ω_n 为方程 $J_0(\omega)=0$ 的第 n 个正根。(20分)

注：少写正根应扣1分。

四、$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+bu_x+cu+f(t,x) & (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$ a,b,c 均为常数

解. $\begin{cases} U_t=a^2U_{xx}+bU_x+cU & (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ U|_{t=0}=\delta(x) \end{cases}$ (5分) 设 $F[U(t,x)]=\overline{U}(t,\lambda)$，$\begin{cases} \overline{U}_t+(a^2\lambda^2+b\lambda i-c)\overline{U}=0 \\ \overline{U}(0,\lambda)=1 \end{cases}$ $\overline{U}(t,\lambda)=e^{-(a^2\lambda^2+b\lambda i-c)t}$ (10分)

$U(t,x)=F^{-1}[\overline{U}(t,\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(a^2\lambda^2+b\lambda i-c)t}e^{i\lambda x}d\lambda$

$=\frac{e^{ct}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-[a^2t\lambda^2+2a\sqrt{t}\lambda\frac{(x+b)}{2a\sqrt{t}}i+\frac{(x+bt)^2}{(2a\sqrt{t})^2}]-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}\frac{1}{2a\sqrt{t}}d(a\sqrt{t}\lambda+\frac{(x+bt)}{2a\sqrt{t}}i)$

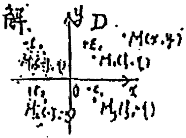
所以：$u(t,x)=U(t,x)*\varphi(x)+\int_0^tU(t-\tau,x)*f(\tau,x)d\tau$ $=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{ct-\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}$ (15分)

$=\frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\xi)e^{-\frac{(\xi+bt)^2}{4a^2t}}d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{c(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau,x-\xi)e^{-\frac{(\xi+b(t-\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$ (20分) 注：若一开始用富氏变换则给5分。

五、求平面区域 D：$x>0$，$y>0$ 的格林函数 $G(x,y;\xi,\eta)$

并求下列定解问题的解。$\begin{cases} \Delta_2 u=-f(M) & M(x,y)\in D;\ x>0,y>0 \\ u|_{l}=\varphi(M) & M(x,y)\in l,\ l\text{为}D\text{的边界} \end{cases}$

解.



$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)r(M,M_3)}{r(M,M_0)r(M,M_2)}$ $(*)$ $=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x+\xi)^2+(y-\eta)^2][(x-\xi)^2+(y+\eta)^2]}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][(x+\xi)^2+(y+\eta)^2]}$ (10分)

$u(x,y)=-\int_l\varphi(x_0,y_0)\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial n}dl+\iint_Df(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)dA$ (20分)

注：若作图正确，则给5分，写出至带有(*)号处给10分。

$\frac{\partial G}{\partial n}$ 及曲线积分的具体积分形式不作要求。(以下不计分)

上述评分间隔为5分，更细评分依实际情况确定

数理方程(A)试题 (2004)

一、解方程 $\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \\ u(1,\theta) = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta \end{cases}$ (20分)

二、解方程 $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2xt \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = -\frac{1}{3}t^3 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$ (20分) (固有值问题)

三、将 $y(x) = x^2 - 1$，($|x| \leq 1$) $0 \leq x \leq 1$ 按零阶贝塞尔函数展开. (20分)

$-1 \quad 1$

四、解方程: $\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u + f(t,x) \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$ (20分)

五：用 V 表示区域：$x^2+y^2+z^2 < 1$，($z \geq 0$) S 表示 V 的边界.

求 $\begin{cases} \Delta_3 u = 0 \\ u|_S = 0 \end{cases}$ 的基本解. (：对 $\forall M_0 \in V$，求解方程 $\begin{cases} \Delta_3 u = \delta(M - M_0) \\ u|_S = 0 \end{cases}$)

$u = u(M)$，$M = M(x,y,z) = M(\rho,\theta,\varphi)$

(10分)

六、验证：$u(t,x) = \int_0^l \varphi(\xi) G(t,x;0,\xi)\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\tau,\xi) G(t,x;\tau,\xi)\,d\xi$

是定解问题 $\begin{cases} u_t = L u + f(t,x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$ 的解. 其中 $G(t,x;\tau,\xi) = G(t-\tau, x;\xi)$，$G(0,x,\xi) = \delta(x,\xi)$ 是定解问题的基本解

$$\frac{\partial G}{\partial t} = L[G] \qquad 0 < x < l$$

定义：$\begin{cases} G|_{x=0} = 0 \quad G|_{x=l} \\ G|_{t=0} = \delta(x-\xi) \end{cases}$ $\qquad \xi \in (0,l)$

$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l}$

《数理方程试题解》 (2004)

一. 解. $u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)$

(20分) 由边界条件得:

$2+\cos\theta-2\sin^2\theta=1+\cos\theta+\cos 2\theta=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)$

比较系数得, $C_0=2$, $C_1=1$, $C_2=1$, $C_n=0$ $n=3,4,5,\cdots$; $D_n=0$ $n=1,2,3\cdots$

所以: $u(r,\theta)=1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta$.

二. 解 设 $u(t,x)=w(t,x)+A(t)x+B(t)$, 代入边界条件, 令 $w|_{x=0}=0$, $w|_{x=1}=0$ 得:

(20分) $B(t)=0$, $A(t)=-\frac{1}{3}t^3$. 故有:

$$\begin{cases} w_{tt}=w_{xx}+2xt & (t>0,\ 0<x<1)\\ w|_{x=0}=w|_{x=1}=0 \\ w|_{t=0}=0,\ w_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

应用齐次化原理. 先求解 $W(t,x;\tau)$.

$$\begin{cases} W_{tt}=W_{xx} & (t>\tau\geq 0,\ 0<x<1)\\ W|_{x=0}=W|_{x=1}=0 \\ W|_{t=\tau}=0,\ W_t|_{t=\tau}=2x\tau \end{cases}$$

[注]亦可用固有函数法.

令 $t_1=t-\tau$, $x=x$. 则有:

$$\begin{cases} W_{t_1t_1}=W_{xx} & (t_1>0,\ 0<x<1)\\ W|_{x=0}=W|_{x=1}=0 \\ W|_{t_1=0}=0,\ W_{t_1}|_{t_1=0}=2x\tau \end{cases}$$

设 $W(t_1,x)=T(t_1)X(x)$

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(1)=0 \end{cases}$$

$\lambda_n=(n\pi)^2$ $n=1,2,3\cdots$

$X_n(x)=\sin n\pi x$.

$T''(t_1)+\lambda T(t_1)=0$, $\lambda_n=(n\pi)^2$

$T_n(t_1)=C_n\cos n\pi t_1+D_n\sin n\pi t_1$

因此有:

$W(t_1,x)=W(t-\tau,x)=W(t,x;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\pi t_1+D_n\sin n\pi t_1)\sin n\pi x$.

由 $W|_{t_1=0}=0$ 得 $C_n=0$, 由 $W_{t_1}|_{t_1=0}=2x\tau$ 得: $D_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 2x\tau\sin n\pi x\,dx=\frac{(-1)^{n+1}4\tau}{n^2\pi^2}$.

故 $W(t,x;\tau)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\tau\sin n\pi(t-\tau)\cdot\sin n\pi x$.

而 $w(t,x)=\int_0^t W(t,x;\tau)d\tau=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin n\pi x\int_0^t\tau\sin n\pi(t-\tau)d\tau$

$=\frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}(n\pi t-\sin n\pi t)\sin n\pi x$.

所以: $u(t,x)=-\frac{1}{3}xt^3+\frac{4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}(n\pi t-\sin n\pi t)\sin n\pi x$.

三. 解. $y(x)=CJ_0(\omega x)+DN_0(\omega x)$ 这里记 $\lambda=\omega^2$, 由 $|y(0)|<+\infty$ 得 $D=0$. 由 $y(1)=0$ 得本征

(20分) $J_0(\omega)=0$. 记 ω_n 为方程 $J_0(\omega)=0$ 的第 n 个正根, $n=1,2,3,\cdots$, 则此固有值问题.

$\lambda_n=\omega_n^2$, $n=1,2,3,\cdots$; $y_n(x)=J_0(\omega_n x)$. $\{J_0(\omega_n x)\}$ 为 $(0,1)$ 上带权 x 正交完备函数系, 且模的平方是 $\|J_0(\omega_n x)\|^2=\frac{1}{2}J_1^2(\omega_n)$; 设: $x^2-1=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\omega_n x)$, 则:

$C_n=\frac{2}{J_1^2(\omega_n)}\int_0^1(x^2-1)xJ_0(\omega_n x)dx=\frac{2}{\omega_n^2J_1^2(\omega_n)}\int_0^1\left[\left(\frac{\omega_n x}{\omega_n}\right)^2-1\right]\omega_n xJ_0(\omega_n x)d\omega_n x$

令 $\omega_n x=t$

$=\frac{2}{\omega_n^2J_1^2(\omega_n)}\int_0^{\omega_n}\left(\frac{t^2}{\omega_n^2}-1\right)tJ_0(t)dt=\frac{2}{\omega_n^2J_1^2(\omega_n)}\left[\left(\frac{t^2}{\omega_n^2}-1\right)tJ_1(t)\Big|_0^{\omega_n}-\frac{2}{\omega_n^2}\int_0^{\omega_n}t^2J_1(t)dt\right]$

$=\frac{2}{\omega_n^2J_1^2(\omega_n)}\cdot\frac{-2}{\omega_n^2}t^2J_2(t)\Big|_0^{\omega_n}=\frac{-4J_2(\omega_n)}{\omega_n^2J_1^2(\omega_n)}=\frac{-8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)}$

由于 $J_2(x)=\frac{2}{x}J_1(x)-J_0(x)$, 即 $J_2(\omega_n)=\frac{2}{\omega_n}J_1(\omega_n)$.

因此: $C_n=\frac{-8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)}$

所以: $x^2-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\omega_n^3J_1(\omega_n)}J_0(\omega_n x)$, 由斯-刘定理完备性可知, 级数在 $[0,1]$ 上绝对一致收敛于 x^2-1.

四. 解. 先求基本解: $\begin{cases} U_t = U_{xx} - 2U_x + U & (t>0, -\infty<x<+\infty) \\ U|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$

(20分)

设 $F[U(t,x)] = \bar{U}(t,\lambda)$. 得: $\begin{cases}\bar U_t + (\lambda^2 - 2\lambda i - 1)\bar U = 0 \\ \bar U|_{t=0} = 1\end{cases}$ $\quad \bar U(t,\lambda) = e^{-(\lambda^2-2\lambda i-1)t}$

$$U(t,x) = F^{-1}[\bar U(t,\lambda)] = \frac{e^t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda^2 t + i\lambda x - 2\lambda i t)} d\lambda = \frac{e^t}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(\lambda\sqrt t)^2 + 2\lambda\sqrt t\cdot\frac{x-2t}{2\sqrt t} i + (\frac{x-2t}{2\sqrt t} i)^2 + \frac{(x-2t)^2}{4t}]} \frac{1}{\sqrt t} d(\lambda\sqrt t + \frac{x-2t}{2\sqrt t} i)$$

令 $s = \lambda\sqrt t + \frac{x-2t}{2\sqrt t} i$

$$= \frac{e^t}{2\pi\sqrt t}\int_{-\infty+\frac{x-2t}{2\sqrt t}i}^{+\infty+\frac{x-2t}{2\sqrt t}i} e^{-s^2} ds \cdot e^{-\frac{(x-2t)^2}{4t}} = \frac{e^{t-\frac{(x-2t)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}},$$

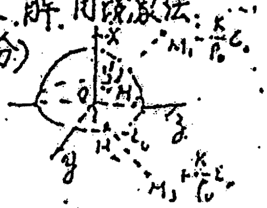
原定解问题的解是:

$$u(t,x) = U(t,x) * \varphi(x) + \int_0^t U(t-\tau,x) * f(\tau,x) d\tau$$

$$= \frac{e^t}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-\xi) e^{-\frac{(\xi-2t)^2}{4t}} d\xi + \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, x-\xi)\frac{e^{(t-\tau)-\frac{[\xi-2(t-\tau)]^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\xi$$

五. 解. 用镜象法:

(10分)



在V内任取一点 $M_0(\rho_0,\theta,\varphi)$ 置点电荷 ε_0,

在 M_0 关于球面对称点 $M_1(\frac{R^2}{\rho_0},\theta,\varphi)$ 置点电荷 $-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0$,

在 M_0 关于平面 $x=0$ 对称点 $M_2(\rho_0,\theta,\pi-\varphi)$ 置点电荷 $-\varepsilon_0$

在 M_1 关于平面 $x=0$ 对称点 $M_3(\frac{R^2}{\rho_0},\theta,\pi-\varphi)$ 置点电荷 $\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0$,

则此定解问题的解是: $u(M;M_0) = G(M;M_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r(M,M_0)} - \frac{R/\rho_0}{r(M,M_1)} - \frac{1}{r(M,M_2)} + \frac{R/\rho_0}{r(M,M_3)}\right]$。

六. 证明. 代入方程:

(10分) $u_t = \int_0^l \varphi(\xi) G_t(t,x;0,\xi)d\xi + \int_0^l f(\tau,\xi)G(\tau,x;\tau,\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G_t(t,x;\tau,\xi)d\xi$

注 $G(t,x;\tau,\xi) = G(t-\tau,x,\xi)$, 因 $G|_{t=\tau} = \delta(x-\xi)$ 故有

$$u_t = \int_0^l \varphi(\xi) LG(t,x;0,\xi)d\xi + \int_0^l f(t,\xi)\delta(x-\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi) LG(t,x;\tau,\xi)d\xi$$

$$= L\left[\int_0^l\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)d\xi\right] + f(t,x) = Lu + f(t,x).$$

代入边界条件:

$$u|_{x=0} = \int_0^l \varphi(\xi) G(t,x;0,\xi)|_{x=0} d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)|_{x=0}d\xi = \int_0^l \varphi(\xi)\cdot 0\, d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)\cdot 0\, d\xi = 0.$$

$$u|_{x=l} = \int_0^l \varphi(\xi) G(t,x;0,\xi)|_{x=l} d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)|_{x=l}d\xi = \int_0^l \varphi(\xi)\cdot 0\, d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)\cdot 0\, d\xi = 0.$$

代入初始条件:

$$u|_{t=0} = \int_0^l \varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)|_{t=0}d\xi + 0 = \int_0^l\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)|_{t=\tau=0}d\xi = \int_0^l \varphi(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = \varphi(x)$$

所以: $u(t,x) = \int_0^l\varphi(\xi)G(t,x;0,\xi)d\xi + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\tau,\xi)G(t,x;\tau,\xi)d\xi$ 是定解问题

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(t,x) & (t>0, 0<x<l) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解。

中国科学技术大学

2005--2006学年第 2 学期考试试卷

考试科目：数理方程(A)　　　　得分：________

学生所在系：_____ _____ 姓名：_________ 学号：_________

一（[illegible] 分）求解定解问题

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\ u\,|_{y=0}=x^2 \end{cases}$$

二（12 分）求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=1 \\ u(x,0)=3x^2,\ u_y(x,0)=\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

三（共 12 分）求解以下固有值问题（计算结果中要明确指出固有值和固有函数）

(1) $$\begin{cases} \dfrac{1}{x}(xY')'+\lambda Y=0, (0<x<1) \\ |Y(0)|<+\infty,\ Y(1)=0. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} Y''+\lambda Y=0,\ (0<x<2) \\ Y(0)=0,\ Y'(2)=0. \end{cases}$$

四（14 分）写出泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_{x^2+y^2\le 1}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2-2xyu]dxdy$$

的 Euler 方程并求出满足边界条件 $u\,|_{x^2+y^2=1}=1$ 的极小元。

五（8 分）将函数 $f(x)=\delta(x)$ 在 [-1,1] 上按照 Legendre 多项式 $P_n(x)$ 展开

六（14 分）求定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\cos 3\pi x,\ (x\in[0,1], t>0) \\ u_x(t,0)=u_x(t,1)=0, \\ u_t(0,x)=0,\ u(0,x)=2\cos\pi x+4\cos 2\pi x, \end{cases}$$

装订线 答题时不要超过此线

七 (14 分) 求函数 $f_1(x)=\delta(x-1)$, $f_2(x)=e^{ix}$, $f_3(x)=\cos x$ 的 Fourier 变换 $F[f_1](\omega)$, $F[f_2](\omega)$, $F[f_3](\omega)$

并利用 Fourier 变换求初值问题

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + u + f(t,x) \ (t>0,\ -\infty < x < +\infty) \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

的基本解，再利用相应公式解出此初值问题.

八 (10 分) 已知半空间的场位方程的第一边值问题为：

$$\begin{cases} \Delta_3 u = -f(x,y,z),\ (x>0) \\ u\,|_{x=0} = \varphi(y,z). \end{cases} \qquad (1)$$

1) 写出此边值问题的 Green 函数 G 满足的定解问题，并求出 Green 函数 G .

2) 当在半空间的场位方程的第一边值问题 (1) 中取 $f(x,y,z)=0$ 时，导出解 $u(x,y,z)$ 的积分公式.

九 (6 分) 用球函数将以下函数展开：

$$f(\theta,\varphi) = \sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + 15\cos\theta\cos 2\varphi\right)$$

参考公式

1) $$(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n \quad (|t|<1, |x|\le 1)$$

2) $$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \quad (m\le n), \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \ (n=0,1,2\ldots)$$

中国科学技术大学
2005—2006学年第一学期考试试卷

考试科目：数学物理方程(B)　　　　得分＿＿＿＿＿＿

学生所在系：＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　学号：＿＿＿＿＿＿

一、填空（30分）

1. 方程 $u_{xy}+u_y=1$ 的通解是 ＿＿＿＿＿＿

2. 固有值问题：$y''+\lambda y=0$，$y(0)=0$，$y'(\pi)=0$ 的固有值 $\lambda_n=$ $\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$，对应的固有函数 $y_n(x)=$ ＿＿＿＿＿＿.

3. 设 $P_{2006}(x)$ 是2006阶勒让德多项式，计算 $\int_{-1}^{1}x^{2005}P_{2006}(x)\,dx=$ 0

4. 计算 $\delta(x-a)$ 的傅里叶变换 $\mathcal{F}(\delta(x-a))=$ $e^{-ia\lambda}$

5. 试将函数 $f(x)=x^3(-1<x<1)$ 按勒让德多项式展开：$f(x)=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$

二、求解定解问题（15分）

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+2x, & (t>0,\ -\infty<x<+\infty) \\ u(0,x)=0, & u_t(0,x)=0. \end{cases}$$

三、求解定解问题（15分）

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & (t>0,\ 0<x<\pi) \\ u(t,0)=0, & u(t,\pi)=100 \\ u(0,x)=\frac{100}{\pi}x+\delta\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

四、求解定解问题（15分）

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (0<x<l,\ t>0) \\ u(t,0)\text{有限},\quad u(t,l)=0, \\ u|_{t=0}=f(x),\quad u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

五、（10分）1. 求出区域 $D=\{(x,y): x^2+y^2<1,\ y>0\}$ 上的格林函数 $G(x,y;\xi,\eta)$，$(\xi,\eta)\in D$，即求解定解问题

$$\begin{cases} \Delta G=-\delta(x-\xi,\ y-\eta), & (x,y)\in D \\ G(x,y)|_{x^2+y^2=1}=0, & G(x,0)=0. \end{cases}$$

$G=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r(MM_0)}-\ln\frac{1}{r(MM_1)}-\ln\frac{1}{r(MM_2)}+\ln\frac{1}{r(MM_3)}\right)$

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(\xi,\eta) \\ G|_s = 0 \end{cases} \quad G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$$

① 格林函数
② 基本解
③ Fourier 变换

$= \int_{l_2} \varphi(x)\frac{\partial G}{\partial n} dl + \iint_D G \cdot f(x,y)$

2. 写出定解问题
(基本解解法)

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(x, y), \ (x, y) \in D \\ u(x, y)\big|_{x^2+y^2=1} = 0, \ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

解的积分表达式。

六、（15分）1. 求出方程 $u_t = a^2 u_{xx} + bu$ 的柯西问题的基本解 $H(t, x)$，其中 a 和 b 是常数，即求解定解问题

F 变换 Fourier 变换

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu, & (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u(0, x) = \delta(x). \end{cases}$$

$\therefore \bar{U} = e^{(b-a^2\lambda^2)t}$

2. 求解柯西问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu, & (t > 0, \ -\infty < x < +\infty) \\ u(0, x) = 1 + x^2. \end{cases}$$

$u = (1+x^2) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\{bt - \frac{x^2}{4a^2t}\} = \frac{e^{bt}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[1+\xi^2]\exp\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\}d\xi$

参考公式

1. 勒让德方程是 $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots, -1 < x < 1)$；勒让德多项式：$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$，特别地，$P_0(x) = 1$，$P_1(x) = x$，$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$，$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$，$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$，$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$。

2. 贝塞尔方程是 $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 (\nu \geq 0, 0 < x < a)$，贝塞尔函数具有微分关系式：

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

和

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

$A\sin\frac{n\pi}{3} = \delta(x - \frac{2}{3})$

贝塞尔函数在第一、二类边界条件下的模平方 $N_\nu^2 = \int_0^a xJ_\nu^2(\omega x)dx$ 分别是

$$N_{\nu 1}^2 = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a), \quad N_{\nu 2}^2 = \frac{1}{2}\left[a^2 - \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]J_\nu^2(\omega a).$$

$Ae^{-n^2t}\sin nx$

3. 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$。$f(x)$ 的傅里叶变换定义为 $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx$。$F(\lambda) = e^{-a|\lambda|}$ 的傅里叶反变换是 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$，$F(\lambda) = e^{-\lambda^2 t}$ 的傅里叶反变换是 $f(x) = \mathcal{F}^{-1}(F) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$。

$A = \int_0^\pi \sin nx \, \delta(x - \frac{2}{3}\pi) dx$

$= \sin\frac{2n\pi}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n\pi}{3} e^{-n^2t}\sin nx$

数理方程(B)考题解答

(2006.1.7.)

一. 填空(30分) 每小题6分.

1. $e^{-x}f(y)+g(x)+y$, f及g为一阶可微的任意函数.

2. $\lambda_n=(n+\frac{1}{2})^2$, $n=0,1,2,\cdots$, $y_n(x)=\sin(n+\frac{1}{2})x$.

3. 0.

4. $e^{i\lambda a}$

5. $f(x)=\frac{3}{5}P_1(x)+\frac{2}{5}P_3(x)$.

二. 解定解问题(15分).

方法1. $u=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}2\xi\,d\xi=x\int_0^t 2(t-\tau)d\tau=x(t-\tau)^2\Big|_t^0=xt^2$.

方法2. $u=\int_0^t \frac{1}{2}h(t-\tau-|x|)*2x\,d\tau=\int_0^t d\tau\int_{-(t-\tau)}^{t-\tau}(x-\xi)d\xi=\int_0^t 2x\tau\,d\tau=xt^2$.

方法3. 设 $u=w+v(x)$ 代入方程后令: $v''(x)+2x=0$, 取 $v(x)=-\frac{x^3}{3}$. 则有:

$$\begin{cases}w_{tt}=w_{xx} & (t>0,-\infty<x<+\infty)\\ w|_{t=0}=\frac{x^3}{3}, & w_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

代达朗贝尔公式. $w=\frac{1}{6}[(x-t)^3+(x+t)^3]=\frac{x^3}{3}+xt^2$

$u=w+v(x)=xt^2$.

方法4. 设 $L[u(t,x)]=U(p,x)$, 则 $p^2U-U_{xx}=\frac{2x}{p}$, $U(p,x)=Ae^{px}+Be^{-px}+\frac{2!}{p^3}x$

由 $|u(t,\pm\infty)|<+\infty$, 得 $|U(p,\pm\infty)|<+\infty$, 取 p 为实数, 则有 $A=B=0$.

$p\to+\infty$ $|U(\pm\infty,x)|<+\infty$

故 $U(p,x)=x\frac{2!}{p^3}$, 即: $u=xt^2$.

三. 解定解问题(15分)

设 $u=w+A(t)x+B(t)$

$0=0+A(t)0+B(t)$, 得 $B(t)=0$

$100=0+A(t)\pi$, 得 $A(t)=\frac{100}{\pi}$

令: $u=w+\frac{100}{\pi}x$ 则有: 〈3分〉

$$\begin{cases}w_t=w_{xx} & (t>0,0<x<\pi)\\ w|_{x=0}=w|_{x=\pi}=0\\ w|_{t=0}=\delta(x-\frac{\pi}{2}).\end{cases}$$ 〈5分〉

设 $w(t,x)=T(t)X(x)$

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}\qquad T'+\lambda T=0$$

$\lambda_n=n^2$ $n=1,2,3,\cdots$

$X_n(x)=\sin nx$ 〈8分〉 $T_n(t)=C_ne^{-n^2t}$

$w=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-n^2t}\sin nx$ 〈10分〉

$\delta(x-\frac{\pi}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin nx$.

$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\delta(x-\frac{\pi}{2})\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n=2k,\\ \frac{2(-1)^k}{\pi} & n=2k+1;\end{cases}$ $k=0,1,2,\cdots$

$u=\frac{100}{\pi}x+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^ke^{-(2k+1)^2t}\sin(2k+1)x$ 〈15分〉

四. 解定解问题(15分).

设 $u=T(t)X(x)$ $\begin{cases}x^2X''+xX'+(\lambda x^2-0^2)X=0\\ |X(0)|<+\infty,\ X(l)=0\end{cases}$ $T''+\lambda T=0$

记 $\lambda=\omega^2$

$X(x)=J_0(\omega x)$. 由 $X(l)=0$ 得方程 $J_0(\omega l)=0$

设 ω_n 为方程 $J_0(\omega l)=0$ 的第 n 个正根, $n=1,2,3,\cdots$

则: $\lambda_n=\omega_n^2$ $n=1,2,3,\cdots$

$X_n(x)=J_0(\omega_nx)$ 〈5分〉

$T_n(t)=A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt$

$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_nt+B_n\sin\omega_nt)J_0(\omega_nx)$ 〈10分〉

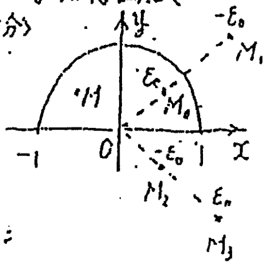
由 $u_t|_{t=0}=0$ 得 $B_n=0$, 由 $u|_{t=0}=f(x)$ 得:

$A_n=\frac{2}{l^2J_1^2(\omega_nl)}\int_0^l f(x)xJ_0(\omega_nx)dx$

$u(t,x)=\frac{2}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^l f(x)xJ_0(\omega_nx)dx}{J_1^2(\omega_nl)}\cos\omega_nt\cdot J_0(\omega_nx)$. 〈15分〉

五. 解定解问题(10分)

1. 求格林函数 (5分)



$M(x,y)$ 或 (ρ,θ)

$M_0(\xi,\eta)$ (ρ_0,θ_0) 置一正点电荷 ε_0

M_1 $(\frac{1}{\rho_0},\theta_0)$ $-\varepsilon_0$

$M_2(\xi,-\eta)$ $(\rho_0,-\theta_0)$ $-\varepsilon_0$

M_3 $(\frac{1}{\rho_0},-\theta_0)$ ε_0

$$G(x;y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r(M,M_1)\cdot r(M,M_2)}{r(M,M_0)\cdot r(M,M_3)}$$

2. (5分)

$$u(x,y)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\frac{\partial G(x,y;\xi,0)}{\partial\eta}d\xi+\int_{-1}^{1}d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}}f(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\eta$$

六. 解定解问题(15分)

1. 求基本解 设 $F[U(t,x)]=\bar{U}(t,\lambda)$ (10分)

$$\begin{cases}\bar{U}_t+(a^2\lambda^2+i\lambda b-b)\bar{U}=0\\ \bar{U}|_{t=0}=1\end{cases}\qquad \bar{U}(t,\lambda)=e^{-(a^2\lambda^2+i\lambda b-b)t}$$

$$U(t,x)=F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2t}e^{-i\lambda bt+bt}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{bt}e^{-\frac{(x-bt)^2}{4a^2t}}$$

2. 由基本解及相应的定理得: (5分)

$$u(t,x)=U(t,x)*\varphi(x)=\frac{e^{bt}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}[1+(x-\xi)]e^{-\frac{(\xi-bt)^2}{4a^2t}}d\xi$$

阅卷时,注意分段给分,卷面找分。

运算错误,视求解方法适当给分。

阅卷结束,请于1月11日之前送交东区55号楼106室。

装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2006—2007学年第一学期考试试卷

考试科目:数学物理方程 (B)　　　　得分 ________

学生所在系:________　　姓名 ________　　学号 ________

一. (20 分) 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x + t, & (t > 0, \quad -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 4x. \end{cases}$$

叠加原理

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u|_{t=0} = \sin x \quad u_t|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

二. (20 分) 求定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, & (1 < r < 2) \\ u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 1 + \cos\theta, \end{cases}$$

其中 (r, θ, φ) 为球坐标

三. (共 24 分) 求解以下固有值问题 (计算结果中要明确指出固有值和固有函数)

(1)
$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, & (0 < x < 1) \\ Y'(0) = Y'(1) = 0. \end{cases}$$

$\lambda=0$ 时 $Y=Ax+B$

$Y'=A=0$

(2)
$$\begin{cases} x^2 Y'' + xY' + (\lambda x^2 - 1)Y = 0, & (0 < x < b) \\ |Y(0)| < +\infty, \quad Y(b) = 0. \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} \Delta_2 u + \lambda u = 0, & (0 < x < 2, 0 < y < 3) \\ u|_{x=0} = u|_{x=2} = u|_{y=0} = u|_{y=3} = 0. \end{cases}$$

$u = X(x)Y(y)$

四. 设初值问题

(A)
$$\begin{cases} u_t = 2u_x + f(t, x), & (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

1) (10 分) 求上述初值问题的基本解 $\underline{U(t,x)}$.

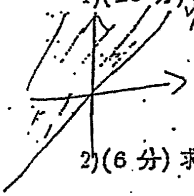
2) (10 分) 求出初值问题 (A) 的解.

叠加原理

F变换

五. 设平面区域 $D = \{(x,y) \mid y > x\}$, 环宇王

1)(10 分) 求 D 内格林函数 G: 作图



$$\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta), & ((x,y)\in D, (\xi,\eta)\in D) \\ G|_{y=x} = 0. \end{cases}$$

$M_0(\xi,\eta) \in D$ 放点电荷

M_0 关于 $y=x$ 对称点 $M_1(\eta,\xi)$, 放负点电荷

则在该两点电荷电势叠加为 $G = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r(M,M_0)} - \ln\frac{1}{r(M,M_1)}\right]$

2)(6 分) 求边值问题

$$\begin{cases} \Delta_2 u = -f(x,y), & ((x,y)\in D) \\ u|_{y=x} = \varphi(x). \end{cases}$$

基本解方程由 $\begin{cases} \Delta_2 G = -\delta(x-\xi, y-\eta) \\ G|_S = 0 \end{cases}$ 即(1)中求出的解

的解.

$u(\xi,\eta) = -\int_l \varphi(x)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}\,dl + \iint_D G f(x)\,dA.$

参考公式

$N(t) \frac{1}{4\pi}\ldots + \tau_{M,B,\eta}$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

$\int_0^t w(t,x;\tau)\,d\tau$

装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学

2007—2008 学年第二学期考试试卷

考试科目:数学物理方程 (A)　　得分 ____________

学生所在系:________　　姓名 ________　　学号 ________

一 (共 14 分) 设 $u=u(t,x)$, 求解以下定解问题:

$$(1)\begin{cases} u_{tx}=x,\ (t>0,x>0) \\ u(0,x)=1+sinx,\ u(t,0)=1. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx},\ (t>0,-\infty<x<+\infty) \\ u(0,x)=\cos x,\ u_t(0,x)=x^2. \end{cases}$$

二 (10 分) 求解定解问题

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ u\mid_{x=0}=y^2-z \end{cases}$$

三 (14 分) 求解定解问题

$$\begin{cases} u_t=4u_{xx}\ (t>0,\ 0<x<2) \\ u(t,0)=u(t,2)=0, \\ u(0,x)=\delta(x-1) \end{cases}$$

四. (共 10 分) 求解以下固有值问题 (计算结果中要明确指出固有值和固有函数)

$$(1)\begin{cases} [(1-x^2)y']'+\lambda y=0, \qquad (0<x<1) \\ y(0)=0,\ |y(1)|<+\infty. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \Delta_2 u+\lambda u=0,\ (0<x<1,\ 0<y<2) \\ \frac{\partial u}{\partial x}\mid_{x=0}=u\mid_{x=1}=u\mid_{y=0}=\frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=2}=0. \end{cases}$$

五 (8 分) 写出泛函

$$J[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)dx$$

的 Euler 方程并求出满足边界条件 $y(1) = 0, y(2) = -1$ 的极值元.

六 (12 分) 求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,\ (0 < r < 1, 0 < z < 1) \\ |u(0, z)| < +\infty,\ u(1, z) = 0, \\ u(r, 0) = 0,\ u(r, 1) = 1 - r. \end{cases}$$

七 (共 14 分) 求初值问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_y + u + f(t, x, y),\ (t > 0,\ -\infty < x, y < +\infty) \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x, y), \end{cases}$$

的解的积分表达式.

八 (8 分) 设空间区域 $V = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0\}$, 试求定解问题

$$\begin{cases} \Delta_3 G = -\delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta), \quad ((x, y, z) \in V,\ (\xi, \eta, \zeta) \in V) \\ G\,|_S = 0,\ (\text{其中S 是 V 的边界,}) \end{cases}$$

的解 $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$.

九 (10 分) 求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin\frac{3}{2}x,\ (t > 0, 0 < x < \pi) \\ u(t, 0) = 0、u_x(t, \pi) = 1, \\ u(0, x) = x + \sin\frac{x}{2} + 5\sin\frac{5x}{2},\ u_t(0, x) = \sin\frac{3}{2}x, \end{cases}$$

参考公式

(1) $(x^\gamma J_\gamma)' = x^\gamma J_{\gamma-1},\ N_{\gamma 1n}^2 = \dfrac{a^2}{2} J_{\gamma+1}^2(\omega_{1n} a)$

(2) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\dfrac{x^2}{4a^2 t})$

中 国 科 学 技 术 大 学

2008—2009 学年第二学期考试试卷

考试科目： 数学物理方程 (A)　　　　　　　　　得分 ________

学生所在系： ________　　　姓名 ________　　　学号 ________

一 (12 分) 求下面方程的通解:

$$u_{xx} - u_{yy} = x^2 - y^2.$$

二 (13 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} (x^2+1)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\mid_{x=0} = y^2. \end{cases}$$

三 (15 分) 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad (0 < x, \xi < 1), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \delta(x-\xi). \end{cases}$$

四 (10 分) 求矩形域 $[0,a] \times [0,b]$ 上问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_x + \lambda u = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

的固有值和固有函数.

五 (15 分) 求解以下定解问题，其中 (r,θ,φ) 为球坐标:

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 1 \ \ (r < 1), \\ u|_{r=1} = \cos 2\theta. \end{cases}$$

六 (15 分) 先求下面 Cauchy 问题的基本解，再求该定解问题解的积分公式:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x + f(t,x), \ (t > 0, -\infty < x < +\infty) \\ u(0,x) = \phi(x). \end{cases}$$

七 (20 分) 设 D 为圆心在原点，半径 r_0 的圆盘. 考虑定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u, \ (t>0, M(x,y)\in D) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M(x,y)\in\partial D} = 0, \\ u(0,M) = \phi(x,y), \end{cases}$$

(1) 求 $u(t,M)$；

(2) 证明 $\int_D u(t,M)dM = \int_D \phi(M)dM$;

(3) 对任意 $M\in D$, 求极限 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,M)$ ；

(4) 试从物理上说明 (2) 、 (3) 的意义.

参考公式

(1) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, $n=0,1,2...$

(2) $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2t})$

(3) 柱坐标下:

$$\Delta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(4) 球坐标下:

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$