HW2

王嵘晟　PB1711614

3.1-4

$2^{n+1}=O(2^n)$成立，令常数c=2，对任意n>0,有$0\le 2^{n+1}\le 2*2^n$

$2^{2n}=O(2^n)$不成立，假设存在常数c，存在n_0,对任意n≥n_0,有$0\le 2^{2n}\le c*2^n$则2n≤$lgc+n$,即n≤lgc,显然与c为常数矛盾。

3.2-3

由Stirling公式：n!=$\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(1+\Theta(\frac{1}{n}))$所以lg(n!)=$\frac{1}{2}lg(2\pi n)+n(lgn-lge)+lg(1+\Theta(\frac{1}{n}))$则$\frac{lg(n!)}{nlgn}=\frac{\frac{1}{2}lg(2\pi n)+n(lgn-lge)+lg(1+\Theta(\frac{1}{n}))}{nlgn}=1+\frac{\frac{1}{2}lg(2\pi n)-nlge+lg(1+\Theta(\frac{1}{n}))}{nlgn}$由此可得存在常数$c_1$和$c_2$和$n_0$,使得对任意的n≥$n_0$，有$c_1nlgn\le lg(n!)\le c_2nlgn$，因此式3.19成立。

$n!=n*(n-1)*(n-2)*...*1<n^n=n*n*n*...*n$，所以$n!=o(n^n)$

存在$n_1=4$,当$n\ge n_1$时，$n!>2^n$。所以对任意常量$c>0$，存在常量n_0，使得对所有$n\ge n_0$，有$0\le c*2^n<n!$，所以$n!=\omega(2^n)$

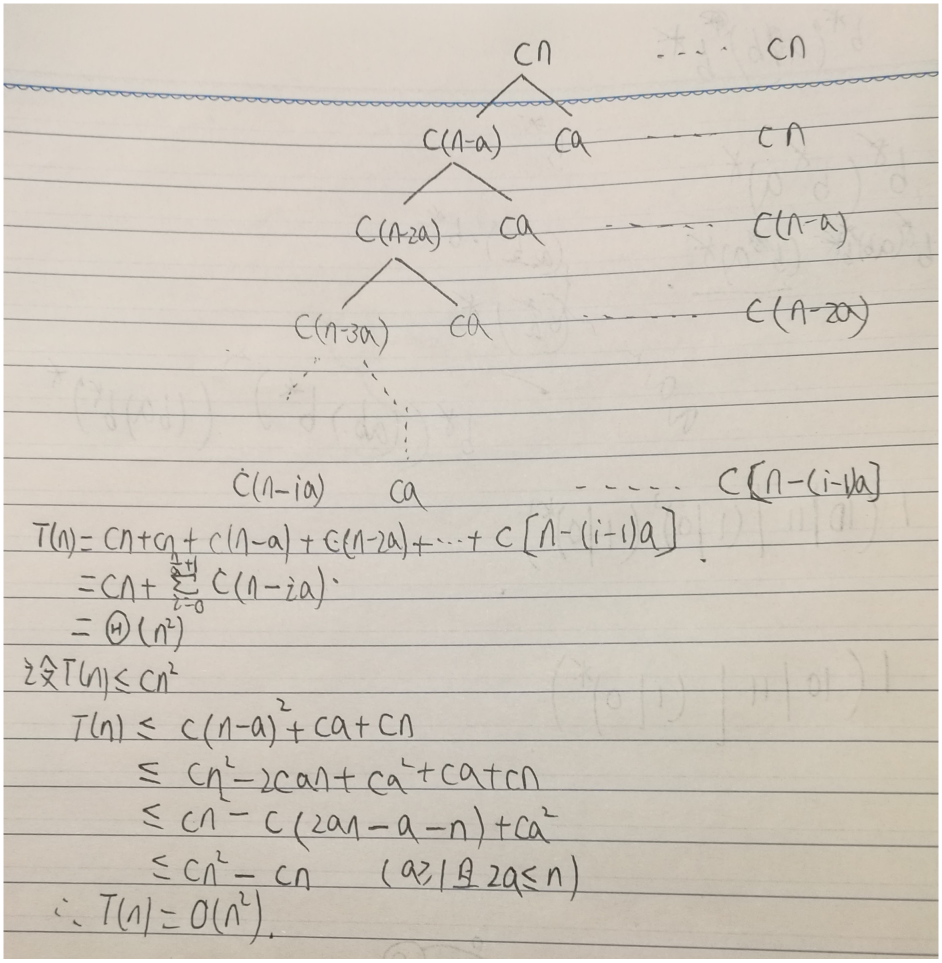
4.3-2

猜测递归式的解为T(n)=O(lgn)，则恰当选择常数c>0,可有T(n)≤clgn。
首先假定此上界对所有正数m≤n都成立，特别是对于m=$\lceil\frac{n}{2}\rceil$，有T($\lceil\frac{n}{2}\rceil$)≤clg($\lceil\frac{n}{2}\rceil$)。
将其带入递归式，得到
T(n)≤clg($\lceil\frac{n}{2}\rceil$)+1≤clg($\frac{n}{2}$) + 2

=clgn-c+2≤clgn

其中只要c≥2，最后一步都会成立。因此T(n)=T($\lceil\frac{n}{2}\rceil$)+1的解为O(lgn)

4.4-8



$T(n)=cn+cn+c(n-a)+c(n-2a)+\cdots+c[n-(i-1)a]$

$=cn+\sum_{i=0}^{\frac{n}{a}+1} c(n-ia)$

$=\Theta(n^2)$

设$T(n)\le cn^2$

$T(n)\le c(n-a)^2+ca+cn$

$\le cn^2-2can+ca^2+ca+cn$

$\le cn^2-c(2an-a-n)+ca^2$

$\le cn^2-cn \quad (a\geq 1$且$2a\le n)$

$\therefore T(n)=O(n^2)$.

4.5-1

b. T(n)=2T($\frac{n}{4}$) + $\sqrt{n}$

f(n)=$\sqrt{n}$，a=2,b=4,显然f(n)=$\Theta(n^{log_4 2}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}}) = \Theta(n^{log_b a})$，所以由主方法得T(n)=$\Theta(n^{\frac{1}{2}}lgn)$

d.T(n)=2T($\frac{n}{4}$) + n^2

f(n)=n^2，a=2,b=4。显然f(n)=$\Omega(n^{log_4(2+6)})$=$\Omega(n^2)$即$\varepsilon = 6$>0，且对某个常数c=$\frac{1}{2}$和所有足够大的n有$2*(\frac{n}{4})^2 \le \frac{1}{2}n^2$，所以T(n)=$\Theta(n^2)$

4.5-4

不能，这个递归式对于主方法的三种情况都不适用。但可用以下方法求解递归式

2. $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^k n\right)$ for some constant $k \geq 0$
   - $f(n)$ and $n^{\log_b a}$ grow at similar rates.
     Solution: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n\right)$.

a=4,b=2,f(n)=$n^2lgn = \Theta(n^{log_2 4}lgn)$，所以T(n)=$\Theta(n^2lg^2n)$，所以渐进上界为O$(n^2lg^2n)$