密封线内不要答题

中国科学技术大学数学科学学院

2019 ～ 2020学年 第 2 学期期末考试试卷

■A卷　　　□B卷

课程名称 ＿＿计算方法(B)＿＿　课程编号 ＿＿001511＿＿

考试时间 ＿＿2020年9月＿＿　考试形式 ＿＿闭卷＿＿

姓 名 ＿＿＿＿＿＿　学 号 ＿＿＿＿＿＿　学 院 ＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	总计
得分							
评卷人							

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷共 6 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。

一、 (30分)填空

(1) (8分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$， 则$\|A\|_\infty=$＿＿＿＿＿＿，$\|A\|_1=$＿＿＿＿＿＿，在$\|\cdot\|_1$范数下的条件数（精确值） $cond_1(A)=$＿＿＿＿＿＿， 谱半径（精确值） $\rho(A)=$＿＿＿＿＿＿。

(2) (4分) 已知函数 $f(x)$ 在节点 $\{0,1,2,3,4,5\}$ 处的函数值，构造 $f(x)$ 的三次样条插值函数，还需要增加＿＿＿＿个条件。若同时知道 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，则还需要增加＿＿＿＿个条件才能构造它的三次样条插值函数。

(3) (5分) 给定数据 $f(a),f'(a)$， $f(b),f'(b)$， $f(c)$，构造次数最低的插值多项式，其最低次数为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。此时的插值余项为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

(4) (7分) 假设对 n 阶矩阵 A 使用规范幂法

$$\begin{cases} Y^{(k)}=X^{(k)}/\parallel X^{(k)}\parallel_\infty \\ X^{(k+1)}=AY^{(k)} \end{cases}$$

得到序列 $\{X^{(n)}\}$。 若 $\{X^{(2k)}\}$ 和 $\{X^{(2k+1)}\}$ 分别收敛于互为反号的向量，则 A 按模最大特征值有＿＿＿＿个，其近似值为＿＿＿＿， 与其对应的特征向量为＿＿＿＿。

(5)（6分）考虑矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，对矩阵 A 进行 Doolittle分解 $A=LU$，则

其中 单位下三角阵$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ____ & 1 & 0 \\ ____ & ____ & 1 \end{pmatrix}$， 上三角阵 $U=\begin{pmatrix} \_\_\_\_ & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ 0 & \_\_\_\_ & \_\_\_\_ \\ 0 & 0 & \_\_\_\_ \end{pmatrix}$。

二、（10分）给出下列数据：

x_i	0.6	0.7	0.8	0.9
y_i	1.0	0.2	1.5	2.1

利用最小二乘法求形如 $y(x)=\frac{1}{a+bx^2}$ 的拟合函数。

三、（12分）考虑序列 $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$，$n \geq 1$. 利用不动点理论证明：任取 $x_0 > \sqrt{2}$，则序列 x_n 总收敛至 $\sqrt{2}$.

四、（15分）设有线性方程组 $Ax = b$， 其中，

$$A = \begin{pmatrix} 4 & c & -1 \\ c & 2 & c \\ -1 & c & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1. 分别写出相应的 Jacobi 迭代，Gauss-Seidel 迭代，以及以 ω 为松弛因子的松弛（SOR）迭代（$0 < \omega < 2$）的分量形式；
2. 令 $c = -1$，求此时 Jacobi 迭代的迭代矩阵；分析并判断他的收敛性（需给出证明）。

密　封　线　内　不　要　答　题

五、（15分）考虑常微分方程 $y' = f(t, y)$ 的多步法格式

$$y_{i+1} = y_i + ahf(t_{i+1}, y_{i+1}) + bhf(t_i, y_i) + chf(t_{i-2}, y_{i-2}),$$

其中 $h = t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = t_{i-1} - t_{i-2}$。确定系数 a, b, c 使得上述格式达到最高阶精度并给出证明。

六、（18分）设有数值积分公式

$$\int_{-1}^{1} |\,x\,|\, f(x)dx \approx S(x) = Af(x_1) + Bf(x_2),$$

其中 $|\,x\,|$ 为权函数。

1. 试确定实参数 A, B, x_1, x_2 使其达到最高阶的代数精度；并求此时的代数精度。
2. 假设 $f(x)$ 充分可微，试求此数值积分公式的误差。