中 国 科 学 技 术 大 学

2017—2018学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B)　　得分 ____________

所在系 ________　　姓名 ____________　　学号 ____________

考试时间: 2018年1月10日上午8:30–10:30;　使用简单计算器

一. (30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

(1) 设随机事件A和B相互独立, A和C相互独立, 且B和C互斥. 若$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = 1/2$, $\mathrm{P}(AC|AB \cup C) = 1/4$, 则$\mathrm{P}(C) =$ ______.

(2) 一只蚂蚁从等边三角形$\triangle ABC$的顶点A出发开始沿着边爬行, 设它每次爬行到一个顶点后, 会休憩片刻再随机选择一条边继续爬行, 则第n次爬行是往A爬的概率为__________.

(3) 设连续型随机变量X的密度函数$f(x)$满足$f(1+x) = f(1-x)$, 且$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.4$, 则$\mathrm{P}(X < 0) =$ (　)

(A) 0.2　　(B) 0.3　　(C) 0.4　　(D) 0.5

(4) 设随机变量X的分布函数为$F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$, 其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数, 则$X$的数学期望$\mathrm{E}X =$ ______.

(5) 设随机变量X与Y相互独立, X的概率分布为$\mathrm{P}(X = 1) = \mathrm{P}(X = -1) = 1/2$, Y服从参数为$\lambda > 0$的Poisson分布. 若记$Z = XY$, 则$\mathrm{Cov}(X, Z) =$ ______.

(6) 设将1米长的木棒随机截成两段, 其中一段的长度记为X, 另一段长度的1/3记为Y, 则X与Y的相关系数为(　)

(A) 1　　(B) -1　　(C) $-1/3$　　(D) $1/3$

(7) 设$X_1, X_2, \cdots, X_9$是来自总体$X \sim N(0,1)$的一组简单随机样本, 则下列统计量中服从F分布的是(　)

(A) $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2}$　(B) $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2+X_5^2}{X_5^2+X_6^2+X_7^2+X_8^2+X_9^2}$　(C) $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{2(X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2)}$　(D) $\frac{2(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}{X_4^2+X_5^2+\cdots+X_9^2}$

(8) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一组简单随机样本, 以$\overline{X}$和S^2分别表示样本均值和样本方差. 若记$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, 则(　)

(A) S是σ的无偏估计量　　(B) S是σ的极大似然估计量

(C) S与$\overline{X}$相互独立　　(D) 以上均不对

(9) 设来自总体$X \sim N(\mu, 0.9^2)$一组容量为9的简单随机样本, 其样本均值$\overline{X} = 5$, 则未知参数μ的置信度为0.95的置信区间为________________(保留到小数点后三位).

(10) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一组简单随机样本, 据此样本做假设检验$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$, 其中$\mu_0$是给定的已知常数, 则(　)

(A) 如果在检验水平$\alpha = 0.05$下接受H_0, 那么在检验水平$\alpha = 0.01$下必接受H_0

(B) 如果在检验水平$\alpha = 0.05$下拒绝H_0, 那么在检验水平$\alpha = 0.01$下必接受H_0

(C) 如果在检验水平$\alpha = 0.05$下接受H_0, 那么在检验水平$\alpha = 0.01$下必拒绝H_0

(D) 如果在检验水平$\alpha = 0.05$下拒绝H_0, 那么在检验水平$\alpha = 0.01$下必拒绝H_0

二. (16分)设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=C\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x,y<\infty.$$

(1) 求常数C的值;

(2) 在$X=x$的条件下, 求Y的条件密度$f_{Y|X}(y|x)$.

三. (16分)设二维随机向量(X,Y)服从二元正态分布$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$, 其中$\mu_1=\mu_2=1$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=0.5$, $\rho=0.5$. 记

$$Z=|X-Y|,\quad U=\max(X,Y),\quad V=\min(X,Y).$$

(1) 求Z的密度函数$f_Z(z)$;

(2) 求数学期望$\mathrm{E}(U+V)$;

(3) 分别求数学期望$\mathrm{E}U$和$\mathrm{E}V$.

四. (18分)设总体X的密度函数为

$$f(x)=\frac{2x}{a^2},\quad 0\le x\le a,$$

其中$a>0$为未知参数, 而$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的一组简单随机样本.

(1) 求a的矩估计量$\hat{a}_1$和极大似然估计量$\hat{a}_2$;

(2) 求$p=\mathrm{P}(0<X<\sqrt{a})$的极大似然估计量$\hat{p}$;

(3) 问$\hat{a}_1$和$\hat{a}_2$是否为无偏估计? 若是, 请证明你的结论; 若不是, 请修正之.

五. (10分) 为了检验某种体育锻炼对减肥的效果, 随机抽取了10名减肥者进行测试. 在进行体育锻炼前后这些减肥者的体重(单位:千克)数据列表如下, 问该体育锻炼方法对降低体重是否具有显著性(设人的体重服从正态分布, 取显著性水平α=0.05)?

锻炼前体重	70	65	67	58	69	72	74	61	63	67
锻炼后体重	68	60	68	58	67	70	70	60	60	65

六. (10分)上海证券综合指数简称“上证指数”, 反映了上海证券交易所上市股票价格的变动情况. 自上证指数诞生的二十七年(1991年1月至2017年12月)以来, 所有月份上涨或下跌的情况如下:

月份	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
上涨月数	14	21	16	15	14	14	13	15	11	13	18	13
下跌月数	13	6	11	12	13	13	14	12	16	14	9	14

结合你所学的知识, 我们能否认为上证指数的涨跌与月份有关?

附录: 上分位数表

$u_{0.025}=1.96$, $u_{0.05}=1.645$;

$t_8(0.025)=2.306$, $t_8(0.05)=1.86$, $t_9(0.025)=2.262$, $t_9(0.05)=1.833$;

$\chi^2_{11}(0.05)=19.675$.

参考答案

一. (每小题3分)

$\frac{1}{4}$;　$\frac{1}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$;　B;　2;　λ;　B;　D;　C;　$[4.412, 5.588]$;　A.

二. (1) (8分) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}y = \pi$$

可知$C = \frac{1}{\pi}$;

(2) (8分) 由于X的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2},$$

从而,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

三. (1) (6分) 由$\mathrm{E}(X-Y)=0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X-Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= 0.5+0.5-2\times 0.25 = 0.5,\end{aligned}$$

及二元正态分布的性质可知$X-Y \sim N(0, 0.5)$, 从而$Z=|X-Y|$的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-z^2}, \quad z>0.$$

(2) (4分) 易知, $\mathrm{E}(U+V) = \mathrm{E}(X+Y) = 2$.

(3) (6分) 由$\mathrm{E}U - \mathrm{E}V = \mathrm{E}Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, 可知$\mathrm{E}U = 1+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\mathrm{E}V = 1-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

四. (1) (6分) 矩估计量$\hat{a}_1 = \frac{3}{2}\overline{X}$, 极大似然估计量$\hat{a}_2 = X_{(n)}$;

(2) (4分) 由$p=\frac{1}{a}$知其极大似然估计量为$\hat{p} = 1/X_{(n)}$;

(3) (8分) 矩估计$\hat{a}_1$是无偏的, 因$\mathrm{E}(\hat{a}_1) = \frac{3}{2}\mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{3}{2}\mathrm{E}(X) = a$; 而由$X_{(n)}$的密度函数为

$$h(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x) = \frac{2n}{a^{2n}}x^{2n-1}, \quad 0<x<a,$$

知$\mathrm{E}(\hat{a}_2) = \frac{2n}{2n+1}a$. 故$\hat{a}_2$不是无偏估计, 可修正为$\hat{a}_2^* = \frac{2n+1}{2n}X_{(n)}$.

五. (10分) 成对数据. 首先可算得相减之后, 有$\overline{X}=2, S^2 = 28/9$. 故由

$$t = \frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} = 3.59 > t_9(0.05) = 1.833,$$

可拒绝原假设(H_0: 锻炼前后体重无显著变化), 即认为该体育锻炼方法对降低体重具有显著性.

六. (10分) 列联表齐一性检验. 两行的和分别为177和147, 每列之和均为27. 由此可算得χ^2统计量的值为$11.394 < \chi^2_{11}(0.05) = 19.675$, 故可认为"无充分证据表明上证指数的涨跌与月份有关"或"上证指数的涨跌与月份无关".