

# 第七章 常微分方程数值解

中国科学技术大学 数学学院

[chenxjin@ustc.edu.cn](mailto:chenxjin@ustc.edu.cn)

考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

关于**等距分割**时(即节点均匀,i.e.,  
 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 这里,  $x_k = a + kh$ ,  
 $h = \frac{b-a}{n}$ 为步长)的数值解.

建立差分格式主要有**三种方法**:

- **基于数值微分**, i.e., 向前, 向后Euler公式
- **基于数值积分**, i.e., 向前、向后Euler公式, 梯形公式, 线性多步法
- **基于Taylor展开**, i.e., Runge-Kutta方法

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为Runge – Kutta方法.

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge–Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 $x_n$ 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$  得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_n)$$

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为Runge – Kutta方法.

将解函数 $y(x)$ 在 $x_n$ 处的作Taylor展开, 并取 $x = x_{n+1}$  得:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi_n)$$

For example, for a function  $f(x, y)$  that depends on two variables,  $x$  and  $y$ , the Taylor series to second order about the point  $(a, b)$  is

$$f(a, b) + (x-a)f_x(a, b) + (y-b)f_y(a, b) + \frac{1}{2!} \left( (x-a)^2 f_{xx}(a, b) + 2(x-a)(y-b)f_{xy}(a, b) + (y-b)^2 f_{yy}(a, b) \right)$$

where the subscripts denote the respective partial derivatives.

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge–Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 $x_n$ 处的作Taylor展开，并取 $x = x_{n+1}$  得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到 
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \cdots \end{cases},$$

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge–Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 $x_n$ 处的作Taylor展开, 并取 $x = x_{n+1}$  得:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \cdots \end{cases}$  , 比如, 取前3项, 可构造差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)) \right] \quad (\clubsuit)$$

# Runge – Kutta方法

基于解函数的Taylor展开建立差分方程的主要方法为**Runge–Kutta方法**.

将解函数 $y(x)$ 在 $x_n$ 处的作Taylor展开, 并取 $x = x_{n+1}$  得:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \cdots + \frac{h^k}{k!}y^{(k)}(x_n) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi_n)$$

注意到  $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \\ y'''(x) = \cdots \end{cases}$  , 比如, 取前3项, 可构造差分格式:

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} (f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)) \right] \quad (\clubsuit)$$

取的项数越多, 方法的阶数越高. 但同时需要计算更多 $f$ 的偏导值.



# Runge – Kutta法

为避免计算  $f(x, y)$  的高阶导数，Runge–Kutta猜想用  $f(x, y)$  在点  $(x_n, y_n)$  和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶。

# Runge – Kutta法

为避免计算  $f(x, y)$  的高阶导数，Runge–Kutta猜想用 $f(x, y)$ 在点 $(x_n, y_n)$ 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶。

以二阶Runge–Kutta公式为例，即通过选取适当的参数 $a, b, c_1, c_2$ 使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f(x_n + ah, y(x_n) + bh f(x_n, y(x_n))) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[ f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

# Runge – Kutta法

为避免计算  $f(x, y)$  的高阶导数，Runge–Kutta猜想用 $f(x, y)$ 在点 $(x_n, y_n)$ 和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶。

以二阶Runge–Kutta公式为例，即通过选取适当的参数 $a, b, c_1, c_2$ 使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f\left(x_n + ah, y(x_n) + bhf(x_n, y(x_n))\right) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[ f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

$$\text{or } (1) = (2) + O(h^2)$$

为了达到原格式(♣)的阶数2, 对(1)式在 $(x_n, y_n)$ 处Taylor展开后的前几个低阶项的系数应与(2)式的系数相等,即

# Runge – Kutta法

为避免计算  $f(x, y)$  的高阶导数，Runge–Kutta猜想用  $f(x, y)$  在点  $(x_n, y_n)$  和它附近的点的函数值做适当的线性组合来达到相同的误差阶。

以二阶Runge–Kutta公式为例，即通过选取适当的参数  $a, b, c_1, c_2$  使得

$$c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 f\left(x_n + ah, y(x_n) + bhf(x_n, y(x_n))\right) \quad (1)$$

$$\approx f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} \left[ f_x(x_n, y(x_n)) + f_y(x_n, y(x_n)) f(x_n, y(x_n)) \right] \quad (2)$$

$$\text{or } (1) = (2) + O(h^2)$$

为了达到原格式(♣)的阶数2, 对(1)式在  $(x_n, y_n)$  处Taylor展开后的前几个低阶项的系数应与(2)式的系数相等, 即

$$(2) + O(h^2) = (1) =$$

$$\begin{aligned} & c_1 f(x_n, y(x_n)) + c_2 [f(x_n, y(x_n)) + ahf_x(x_n, y(x_n)) + bhf_y(x_n, y(x_n))f(x_n, y(x_n)) + O(h^2)] \\ &= (c_1 + c_2)f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2} [2c_2 af_x + 2c_2 bf_y f] + O(h^2) \end{aligned}$$

## 二阶Runge – Kutta公式

因此, 参数 $a, b, c_1, c_2$ 需满足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_2a = 1 \\ 2c_2b = 1 \end{cases}$$

因  $y(x_n) \approx y_n$ , 故有

$$\begin{aligned} (1) &\approx c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) & (3) \\ &\approx (2) \approx f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} \left[ f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right] \end{aligned}$$

将(3)式代替 (♣) 格式中的中括号部分, 可得二阶差分格式

$$y_{n+1} = y_n + h \left[ c_1 f(x_n, y_n) + c_2 f\left(x_n + ah, y_n + bhf(x_n, y_n)\right) \right] \quad (\diamond)$$

差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

例如, 取  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ , 则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

例如, 取  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ , 则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

此即为改进的Euler公式.



差分格式 (◇) 通常也可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ah, y_n + bhk_1) \end{cases}$$

例如, 取  $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1$ , 则有二阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

此即为改进的Euler公式.

二阶Runge-Kutta公式的局部截断误差为  $O(h^3)$ . 类似地想法, 可建立高阶的Runge-Kutta公式, 常见的为3阶, 4阶公式.

## 三阶、四阶Runge – Kutta公式

常用的三阶Runge – Kutta公式（参见第3版教材P149-150）

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

常用的四阶Runge – Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

一般的Runge-Kutta公式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2 + \cdots + c_m K_m) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + b_{21} h K_1) \\ \vdots \\ K_m = f(x_n + a_m h, y_n + h \sum_{i=1}^{m-1} b_{mi} K_i) \end{array} \right.$$

其中，系数 $a_i, b_i, c_i$ 满足某个代数方程组（易知， $\sum_{i=1}^m c_i = 1$ ），它由需要达到的阶确定。

例：用四阶Runge-Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_1) \\ k_3 = f(x_n + 0.5h, y_n + 0.5hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

解初值问题：  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 0.8), \text{ 取步}$

长  $h = 0.2$ .

解：  $h = 0.2$ 代入前面的四阶Runge-Kutta公式, 得:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = y_n^2 \cos x_n \\ k_2 = (y_n + 0.1k_1)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_3 = (y_n + 0.1k_2)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_4 = (y_n + 0.2k_3)^2 \cos(x_n + 0.2) \end{cases}$$

计算结果列表如下:

解：  $h = 0.2$ 代入前面的四阶Runge-Kutta公式, 得：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = y_n^2 \cos x_n \\ k_2 = (y_n + 0.1k_1)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_3 = (y_n + 0.1k_2)^2 \cos(x_n + 0.1) \\ k_4 = (y_n + 0.2k_3)^2 \cos(x_n + 0.2) \end{cases}$$

计算结果列表如下：

$n$	$x_n$	$y_n$	$y(x_n)$	$ y_n - y(x_n) $
1	0.2	1.24789	1.24792	0.00003
2	0.4	1.63762	1.63778	0.00016
3	0.6	2.29618	2.29696	0.00078
4	0.8	3.53389	3.53802	0.00413

# 方程组和高阶方程的数值解法

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{array} \right. , \quad a \leq x \leq b$$

## 方程组和高阶方程的数值解法

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \cdots, y_m) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, \cdots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{array} \right. , \quad a \leq x \leq b$$

写成向量的形式:  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dx} = F(x, Y) \\ Y(a) = \eta \equiv (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)^T \end{array} \right.$

单个微分方程的各种方法都可以直接平行运用过来.



以两个方程的方程组为例

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \\ y(a) = y_0 \\ z(a) = z_0 \end{cases}, a \leq x \leq b$$

此时的向前Euler公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hg(x_n, y_n, z_n) \end{cases}$$

下面是一种二元常微方程组的四阶Runge-Kutta公式：

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

下面是一种二元常微方程组的四阶Runge-Kutta公式:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} K_1^{(1)} \\ K_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} K_2^{(1)} \\ K_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}) \\ g(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_1^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} K_3^{(1)} \\ K_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}) \\ g(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2^{(1)}, z_n + \frac{h}{2}K_2^{(2)}) \end{pmatrix}$$

$$K_4 = \begin{pmatrix} K_4^{(1)} \\ K_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \\ g(x_n + h, y_n + hK_3^{(1)}, z_n + hK_3^{(2)}) \end{pmatrix}$$

例：考虑微分方程组的数值解。（P156，例7.7）

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0.09u(1 - \frac{u}{20}) - 0.45uv \\ \frac{dv}{dt} = 0.06v(1 - \frac{v}{15}) - 0.001uv \\ u(0) = 1.6 \\ v(0) = 1.2 \end{cases}$$

例：考虑微分方程组的数值解。（P156，例7.7）

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0.09u(1 - \frac{u}{20}) - 0.45uv \\ \frac{dv}{dt} = 0.06v(1 - \frac{v}{15}) - 0.001uv \\ u(0) = 1.6 \\ v(0) = 1.2 \end{cases}$$

解：用Euler预估-校正公式(即改进的Euler公式)

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{n+1} \\ \bar{v}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} f(t_n, u_n, v_n) \\ g(t_n, u_n, v_n) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left[ \begin{pmatrix} f(t_n, u_n, v_n) \\ g(t_n, u_n, v_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) \\ g(t_{n+1}, \bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) \end{pmatrix} \right]$$

取  $h = 1$ ，计算结果如下表：

$t(\text{年})$	$u(t)$	$v(t)$
0	1.6	1.2
1	1.02457	1.26834
2	0.640912	1.3366
3	0.391211	1.41077

# 高阶微分方程

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = \eta_1 \\ y'(a) = \eta_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_m \end{array} \right. , a \leq x \leq b$$

## 高阶微分方程

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(a) = \eta_1 \\ y'(a) = \eta_2 \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \eta_m \end{array} \right. , a \leq x \leq b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = y_1 \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_{m-1}}{dx} = y_m \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_1(a) = \eta_1 \\ \vdots \\ y_m(a) = \eta_m \end{array} \right. , a \leq x \leq b$$

即：高阶方程可化为一阶方程组.



# 常微分方程解的穩定性

## 常微分方程解的稳定性

例：考察初值问题  $\begin{cases} y'(x) = -30y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$  在区间  $[0, 0.5]$  上的解。

分别用欧拉显式、隐式格式以及改进的欧拉格式计算数值解。

节点 $x_i$	欧拉显式	欧拉隐式	改进欧拉法	精确解 $y = e^{-30x}$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	-2.0000	$2.5000 \times 10^{-1}$	2.5000	$4.9787 \times 10^{-2}$
0.2	4.0000	$6.2500 \times 10^{-2}$	6.2500	$2.4788 \times 10^{-3}$
0.3	-8.0000	$1.5625 \times 10^{-2}$	$1.5626 \times 10^1$	$1.2341 \times 10^{-4}$
0.4	$1.6000 \times 10^1$	$3.9063 \times 10^{-3}$	$3.9063 \times 10^1$	$6.1442 \times 10^{-6}$
0.5	$-3.2000 \times 10^1$	$9.7656 \times 10^{-4}$	$9.7656 \times 10^1$	$3.0590 \times 10^{-7}$

## 常微分方程解的稳定性

设初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的解存在唯一. 对不同的初值  $y_0$ , 方程的解为不同的轨线. 解在有限范围内连续的依赖于  $y_0$ , 但当  $x$  扩充到无穷区间时, 这种连续依赖性不一定成立.

## 常微分方程解的稳定性

定义：设  $y = y(x)$  为方程取初值  $y_0$  时的解。  
若  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , s.t 只要  $|z_0 - y(x_0)| < \delta$ ,  
方程取初值  $z_0$  的解  $z = z(x)$  就存在唯一，且满足  
 $|z(x) - y(x)| < \varepsilon (\forall x \geq x_0)$ ，则称解  $y(x)$  是  
(Lyapunov 意义下) 稳定的。

进而，若解  $y(x)$  是稳定的，且满足

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (z(x) - y(x)) = 0,$$

则称  $y(x)$  是渐进稳定的。

# 常微分方程解的稳定性

我们称一个常微初值问题的解  $y(x)$  是

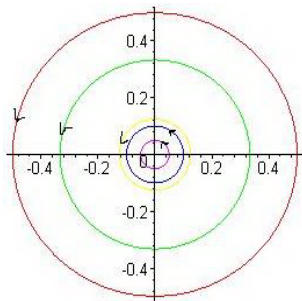
- **稳定性的**，是指只要初值变化足够小，轨线(即解曲线 $y(x)$ )的变化就可足够小.
- **渐进稳定的**，是指初值变化足够小时，轨线的变化趋势越来越接近(当自变量趋向 $\infty$ 时).

# 常微分方程解的稳定性

我们称一个常微初值问题的解  $y(x)$  是

- **稳定性的**，是指只要初值变化足够小，轨线(即解曲线 $y(x)$ )的变化就可足够小.
- **渐进稳定的**，是指初值变化足够小时，轨线的变化趋势越来越接近(当自变量趋向 $\infty$ 时).

例：微分方程  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  的轨线如图，它的解都是**稳定的**，但不是**渐进稳定的**.



# 常微分方程解的稳定性

例. 典型的渐进稳定微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$$

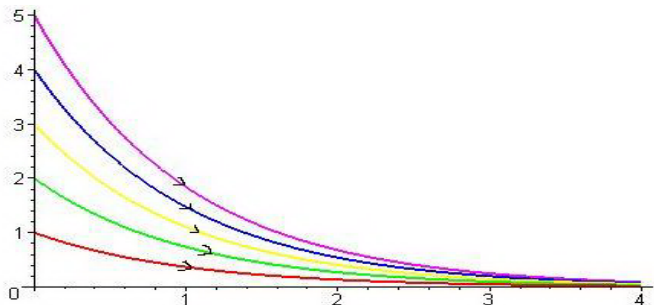
的轨线如下图，它的解都是**渐进稳定的**.

# 常微分方程解的稳定性

例. 典型的渐进稳定微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$$

的轨线如下图，它的解都是**渐进稳定的**。





## 差分方程的绝对稳定性

设求微分方程数值解时采用某种方法建立的差分方程为

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) \quad (\spadesuit)$$

我们希望采用此方法时，即使初值有误差，对结果的影响也能足够的小，即方法对初始误差有抑制作用。

如果微分方程的解本身是不稳定，那就没理由要求这两组解充分接近，故差分格式(方程)的绝对稳定性建立在原微分方程初值问题的解本身是渐进稳定的基础之上。

## 差分方程的绝对稳定性

定义：差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re} \lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当  $z \equiv \lambda h$  落在这个区域时，差分方程的解趋于0 (i.e.,  $y_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ ). 这个区域称为差分方程(格式)的稳定区域.

## 差分方程的绝对稳定性

定义：差分方程称为绝对稳定的，若差分方程作用到微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \quad (\operatorname{Re} \lambda < 0)$$

时，对任意的初值，总存在左半复平面上的一个区域，当  $z \equiv \lambda h$  落在这个区域时，差分方程的解趋于0 (i.e.,  $y_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ ). 这个区域称为差分方程(格式)的稳定区域.

将差分格式(♠)应用到上述的渐进稳定初值问题，可得：

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} \quad (\heartsuit)$$

**定理：** 差分方程  $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j})$  绝对稳定的充要条件为：存在左半复平面上的一个子区域D，当  $\lambda h$  落在此区域时，齐次差分方程(♡)的特征方程 (i.e.,  $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda h \beta_j) \xi^j = 0$  , 它是一个关于的  $\xi$  多项式)的**所有根的绝对值均小于1**.

设给定的初始值  $y_i$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) 有误差  $e_i$  时, 由(♡)得到的  $\{\tilde{y}_{n+j}\}$  与初始值没有误差时得到的  $\{y_{n+j}\}$  之差为  $\{e_{n+j}\}$ , 则  $e_{n+j}$  满足一样的形式:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j e_{n+j} = \lambda h \sum_{j=0}^k \beta_j e_{n+j}$$

故对典型的渐进稳定方程, 绝对稳定的方法会导致  $e_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , 即初值  $y_i$  ( $0 \leq i \leq k-1$ ) 的误差对数值结果没有太大影响.

例：讨论Euler公式  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  的绝对稳定性.

例：讨论Euler公式  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  的绝对稳定性.

解：将Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得  $y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n$ . 其特征方程为

$$\rho(\xi) = \xi - (1 + \lambda h)$$

其根为  $\xi = 1 + \lambda h$ . 当  $|1 + \lambda h| < 1$  时， $|\xi| < 1$ . 故Euler法为绝对稳定的，稳定区域如图所示(即  $z \equiv x + iy = \lambda h$  落在以-1为圆心的复单位圆内).

例：讨论Euler公式  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  的绝对稳定性.

解：将Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得  $y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n$ . 其特征方程为

$$\rho(\xi) = \xi - (1 + \lambda h)$$

其根为  $\xi = 1 + \lambda h$ . 当  $|1 + \lambda h| < 1$  时， $|\xi| < 1$ . 故Euler法为绝对稳定的，稳定区域如图所示(即  $z \equiv x + iy = \lambda h$  落在以-1为圆心的复单位圆内).

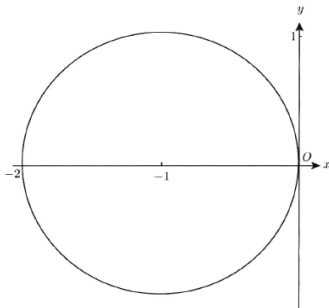


图 7.3 Euler 方法的绝对稳定区域



例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若  $y_n$  有误差  $\rho_n$ ，记  $y_n^* = y_n + \rho_n$ . 易得误差方程（误差关系式）

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若  $y_n$  有误差  $\rho_n$ ，记  $y_n^* = y_n + \rho_n$ . 易得误差方程（误差关系式）

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

其特征方程为

$$\rho(\xi) = (1 - \lambda h)\xi - 1$$

其根为  $\xi = \frac{1}{1-\lambda h}$ . 当  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  时，恒有  $|\xi| = |\frac{1}{1-\lambda h}| < 1$  (对任意  $h > 0$ ). 故，向后Euler格式的绝对稳定区域是整个左半复平面。

例：讨论向后Euler公式 $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$ 的绝对稳定性.

解：将向后Euler公式作用于常微  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h y_{n+1}$$

若  $y_n$  有误差  $\rho_n$ ，记  $y_n^* = y_n + \rho_n$ . 易得误差方程（误差关系式）

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \lambda h \rho_{n+1}$$

其特征方程为

$$\rho(\xi) = (1 - \lambda h)\xi - 1$$

其根为  $\xi = \frac{1}{1-\lambda h}$ . 当  $\operatorname{Re}\lambda < 0$  时，恒有  $|\xi| = |\frac{1}{1-\lambda h}| < 1$  (对任意  $h > 0$ ). 故，向后Euler格式的绝对稳定区域是整个左半复平面。

**【定义】** 当某个方法（或格式）的绝对稳定区域是整个左半复平面时，则称该格式是**无条件绝对稳定(或A稳定)**

由上可知，向后Euler格式是无条件绝对稳定的。

## 中心格式的稳定性

例 7.10 讨论中心差分方法的稳定性.

解 用中心差分方法计算 (7.30) 的公式:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\lambda h y_n$$

## 中心格式的稳定性

例 7.10 讨论中心差分方法的稳定性.

解 用中心差分方法计算 (7.30) 的公式:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\lambda h y_n$$

误差方程:

$$\rho_{n+1} = \rho_{n-1} + 2\lambda h \rho_n \quad (7.33)$$

不失一般性, 我们考虑由  $\rho_0, \rho_1$  对以后  $\rho_n$  的影响. 差分方程 (7.33) 的特征方程为

$$\xi^2 - \underline{2\lambda h} \xi - 1 = 0$$

## 中心格式的稳定性

它的两个根为

$$\xi_1 = \lambda h + \sqrt{1 + (\lambda h)^2}, \quad \xi_2 = \lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2}$$

由差分方程理论 (略),  $\rho_n$  的一般解可由下式表达:

$$\rho_n = a(\lambda h + \sqrt{1 + (\lambda h)^2})^n + b(\lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2})^n$$

其中  $a, b$  可由  $\rho_0, \rho_1$  决定. 又

$$\lambda h - \sqrt{1 + (\lambda h)^2} = \lambda h - 1 + O((\lambda h)^2)$$

由于  $\operatorname{Re} \lambda h < 0$ , 故  $|\lambda h - 1| > 1$ ,  $\rho_n$  因  $n$  增大而恶性发展, 所以方法对任何  $h$  是不稳定的.



## 幂级数展开

$$z = \lambda h$$

$$\text{令 } f(z) = \sqrt{1+z^2}, \text{ 则}$$

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{2} z^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} z^4 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} z^6 + \dots$$

讨论如下**三阶**Runge-Kutta方法的绝对稳定性

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{array} \right.$$

## 三阶Runge – Kutta的绝对稳定性

将该3阶Runge – Kutta公式应用到  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ ，得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = \lambda y_n$$

$$K_2 = \lambda y_n(1 + \frac{1}{2}\lambda h)$$

$$K_3 = \lambda y_n \left[ 1 + \lambda h + (\lambda h)^2 \right]$$

其差分格式为：  $y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 \right]$

其特征方程为：  $\xi - (1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3)$

## 三阶Runge – Kutta的绝对稳定性

将该3阶Runge – Kutta公式应用到  $\frac{dy}{dx} = \lambda y$ , 得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[K_1 + 4K_2 + K_3]$$

$$K_1 = \lambda y_n$$

$$K_2 = \lambda y_n(1 + \frac{1}{2}\lambda h)$$

$$K_3 = \lambda y_n \left[ 1 + \lambda h + (\lambda h)^2 \right]$$

其差分格式为:  $y_{n+1} = y_n \left[ 1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3 \right]$

其特征方程为:  $\xi - (1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3)$

因  $Re\lambda < 0$ , 故存在  $h_0 > 0$ , 当  $h < h_0$  时, 特征根

$$|\xi| = |1 + \lambda h + O(\lambda h)^2| < 1$$

所以, 3阶Runge – Kutta是绝对稳定格式.

# $k$ 阶Runge – Kutta的绝对稳定性

可以证明， $k$  阶Runge – Kutta都是绝对稳定格式，且同阶的不同格式具有相同的稳定区域，不同阶的格式稳定区域不同。

