一

(1) 平稳分布满足

$\pi = \pi P$ 　　P41.

当P是不可约的、双随机时，只有一个平稳分布

a × 　　b ×

c √ 　　d ×

(2) a. 设 X_1 —— 第一辆红车到达时间 　　Poisson过程 $N(t)$. X_i. W_i

X_2 　　黄

X_3 　　蓝

我们要求 $X = \min(X_1, X_2, X_3)$ 的期望

先算X的密度函数

$$p(X \geq t) = p(X_1 \geq t, X_2 \geq t, X_3 \geq t)$$
$$= p(X_1 \geq t) \cdot p(X_2 \geq t) \cdot p(X_3 \geq t)$$
$$= e^{-2t} \cdot e^{-3t} \cdot e^{-5t} = e^{-10t}$$

$X \sim Exp(10) \Rightarrow EX = \frac{1}{10}$

(2) b 求 $P(X_1 \leq X_2, X_1 < X_3)$

$$p(X_1 < X_2, X_1 < X_3) = \iiint_{\substack{X_1 < X_2 \\ X_1 < X_3}} e^{-2x_1} e^{-3x_2} e^{-5x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

c. 把黄车和蓝车合并为一个 Poisson 过程

$N_4(t) = N_2(t) + N_3(t)$

$N_4(t) \sim Poisson(8)$

X_{t1} = 第一辆红车到达的时间

$X_1, X_2, \ldots X_k$ 　$N_4(t)$ 前k辆间隔的时间

求的概率为

$$P(X_1 + \cdots + X_k < X_{t1})$$

也可用等待时间表 示

$W_k = X_1 + \cdots + X_k$ 　N_4 过程前k个事件发生的时间

求 $P(W_k < X_{t1})$

(3). 从24个数字中估计

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

0-0 　0-1

1-0 　1-0

0 出发	9个	1出发	14个
0-0	2	1-0	7
0-1	7	1-1	7

二. 求随机个随机变量的和的母函数

$$N_1(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \qquad X_i=\begin{cases}1 & \text{以概率 } p\\ 0 & \text{以概率 } 1-p\end{cases}$$

P9

$$g_{N_1(t)}(v)=Ee^{vN_1(t)}=e^{\lambda pt(e^v-1)}$$

$$EN_1(t)=\mathrm{Var}N_1(t)=\lambda pt$$

$$\mathrm{Cov}(N_1(s),N_1(t))=\lambda p(s\wedge t)$$

三. (1)

$$P(X_1=1)=P(X_1=1\mid X_0=3)P(X_0=3)=0$$

$$P(X_1=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(X_1=3)=\frac{2}{3}$$

$$P(X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1\mid X_1=1)+P(X_1=2)P(X_2=1\mid X_1=2)+P(X_1=3)P(X_2=1\mid X_1=3)\qquad \frac{1}{9}$$

$$P(X_2=2)=\frac{2}{9}$$

$$P(X_2=3)=\frac{6}{9}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} ① \arrow[loop above, "\frac{1}{3}"] \arrow[r, shift left, "\frac{2}{3}"] & ② \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}"] \arrow[r, shift left, "\frac{2}{3}"] & ③ \arrow[loop above, "\frac{2}{3}"] \arrow[l, shift left, "\frac{1}{3}"] \end{tikzcd}$$

不可约. 非周期的. 常返的 $\Longrightarrow$ 极限分布=平稳分布

解 $\pi=\pi P$

$$\pi=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{7}\right)$$

(3) 求极限分布为平稳分布

四 (1) 状态空间 $\{0,1,2,\cdots,a\}$

$$P=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0 & 1 & 2 & \cdots & a\end{matrix}\\ \begin{matrix}0\\1\\2\\ \vdots\\ a\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{a-1}{a} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{a} & \frac{a-2}{a} \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} ⓪ \arrow[r, "1"] & ① \arrow[loop above] \arrow[r, "\frac{1}{a}"] & ② \arrow[loop above] \arrow[r, "\frac{a-2}{a}"] & ③ \arrow[loop above] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & ⓐ \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

都不能互通. 每个状态自成一类

$\{1,\cdots,a\}$ 非周期 $\{0\}$ 周期是∞ $\{0,\cdots,a-1\}$ 是瞬时的 a常返的

(2) 令T — 首达a的时刻

$$f_k=P(X_T=a\mid X_0=k)$$

$$\begin{cases} f_0=f_1\\ f_1=\frac{1}{a}f_1+\frac{a-1}{a}f_2\\ f_2=\frac{2}{a}f_2+\frac{a-2}{a}f_3\\ \vdots\\ f_a=1\end{cases}\Rightarrow f_0=f_1=\cdots=f_a=1$$

(3) 实际上求ET

设 $V_i = E(T|X_0=i)$

$$\begin{cases} V_0 = 1+V_1 \\ V_1 = \frac{1}{a}(1+V_1)+\frac{a-1}{a}(1+V_2) \\ V_a = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow V_0 = 1+\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a-2}+\cdots+a$

五.

(1) $EX(t) = EA\,E\cos(\omega_0 t+\Theta) = 0$

$EX(t+\tau)X(t) = EA^2 E\cos(\omega_0 t+\Theta)\cos(\omega_0(t+\tau)+\Theta)$

$= \sigma^2\cos\omega_0\tau$

$\left(EA^2 = \int_0^\infty x^2 \frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\right)$

是宽平稳

(2) 求功率谱

$S(\omega) = \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0\tau\, e^{j\omega\tau}d\tau$

$= \frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau})e^{-j\omega\tau}d\tau$

$= \frac{\sigma^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{j(\omega_0-\omega)\tau}+e^{-j(\omega_0+\omega)\tau}]d\tau$

$=$

六. (1) S_1分母有实根

S_3分母有零点<0

只有S_2可以

$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega^2+64}{\omega^4+29\omega^2+100}e^{j\omega\tau}d\omega$

$= \frac{5}{7}e^{-2|\tau|}-\frac{13}{70}e^{-5|\tau|}$