HW5

PB17111614 王嵘晟

1. 为求 $\sqrt[n]{a}$，设 $x^n=a$ $\therefore f(x)=x^n-a$

只需求 $f(x)=0$ 时 x 的值即可。

$f'(x)=nx^{n-1}$

$\therefore x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}$

$=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_k+\frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$，迭代公式

当 $n=5$，$a=9$ 时，$x_{k+1}=\frac{1}{5}\left(4x_k+\frac{9}{x_k^4}\right)$

$\because x_0=2$

$\therefore x_1=1.7125$

$x_2=1.579291$

$x_3=1.552783$

$\therefore$ 迭代公式：$x_{k+1}=\frac{1}{n}\left[(n-1)x_k+\frac{a}{x_k^{n-1}}\right]$

$x_3=1.552783$

2. $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$

$\therefore f'(x)=3x^2-8x+5$，$f(x)$ 有2重根1

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$

$\therefore \varphi(x)=x-\frac{x-2}{2(x-2)+(x-1)}$

$\varphi'(x)=\frac{\frac{1}{2}+(x-1)\frac{1}{x-2}+(x-1)^2\frac{a}{2^2(x-2)}}{\left[1+(x-1)\frac{1}{2(x-2)}\right]^2}$

$\varphi'(1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\therefore |\varphi'(1)|<1$

初始值 $x_0=0$ 在根1附近，迭代收敛。

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$。