

2020计算方法B作业#9--共28分

1 (6分) 给定函数 $f(x)$ 的离散值表

x	0.0	0.02	0.04	0.06
$f(x)$	6.0	4.0	2.0	8.0

分别用向前、向后及中心差商公式计算 $f'(0.02)$, $f'(0.04)$.

2. (6分) 求积分 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 的 2 点 Gauss 积分公式, 这里 x^2 为权重函数。

3. (16分) 设有常微分初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x), & (0 \leq x \leq 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

假设求解区间 $[0,1]$ 被 n 等分 (n 充分大), 令 $h = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$),

- (a) 分别写出用向前Euler公式, 向后Euler公式, 梯形格式以及改进的Euler公式求上述微分方程数值解时的差分格式 (即分别写出此四种方法/公式下, y_{k+1} 与 y_k 之间的递推关系式); (4分, 每种方法给1分)
- (b) 设 $y_0 = y(0)$, 分别求此四种公式 (方法) 下的近似值 y_n 的表达式; (注: 这里的 y_n 即是 $y(x_n) \equiv y(1)$ 的近似值). (4分, 每种方法给1分)
- (c) 当 n 充分大 (即区间长度 $h \rightarrow 0$) 时, 分别判断四种方法下的近似值 y_n 是否收敛到原问题的真解 $y(x)$ 在 $x = 1$ 处的值 (i.e., $y(1)$). (8分, 每种方法给2分)