Research on Multi-sensor Fusion Localization of Mobile Robot Based on ROS

A Dissertation Submitted for the Degree of Master

Candidate：Zhuang Tingda

Supervisor：Prof. Zhang Xianmin

Lu Shenglin

South China University of Technology

Guangzhou, China

摘　要

多传感器融合移动操作机器人具有复杂环境感知、大范围移动操作和类人协调操作能力，适用于非结构环境下的复杂操作任务，是当下移动操作领域的研究热点，而正确地理解自身状态是自主移动操作的前提。基于以上背景，本文以双臂移动机器人为研究对象，融合视觉、IMU（Inertial Measurement Unit，惯性测量单元）和轮速传感器信息，研究机器人的自主定位技术，主要研究内容如下：

(1) 搭建了一款多传感双臂移动机器人，并以机器人操作系统 ROS 为基础构建了对应的仿真系统。以智能工厂移动操作为需求，搭建了包含有移动平台、双操作臂、末端灵巧手和多传感器等在内的双臂移动机器人，分析了搭建过程中的关键技术和主要参数。针对该类型机器人系统复杂度高、难以快速开展实验研究的问题，基于 ROS 构建了对应的仿真系统。以该仿真系统为基础，分别开展了多传感器标定仿真实验和多传感器融合 SLAM（Simultaneous Localization and Mapping，同时定位与建图）仿真验证。结果表明所搭建的多传感双臂移动机器人可满足移动操作要求，且相应的仿真系统可用于各类复杂算法的快速验证。

(2) 针对视觉-惯性融合定位方法应用于地面移动机器人中存在的可观性弱和定位精度低等问题，提出了针对移动机器人的视觉-惯性-轮速融合定位方法。提出了约束帧间运动的轮速预积分模型和约束运动流型的平面约束模型，并将视觉-惯性融合 SLAM 中的滑动窗口与边缘化算法推广至视觉-惯性-轮速融合定位中。仿真实验结果表明所提轮速预积分模型和平面约束模型是有效的，所提视觉-惯性-轮速融合定位方法具有比视觉-惯性融合更高的定位精度。

(3) 针对标定参数在移动机器人运行过程中存在的漂移问题，提出了视觉-惯性-轮速融合在线标定方法，实现了传感器内外参数和时间延迟的在线标定。推导了轮速内外参在线标定模型和轮速-IMU 时间延迟在线标定模型。针对视觉-惯性融合初始化应用在地面移动机器人难以成功的问题，给出了视觉-惯性-轮速融合初始化方法。仿真实验验证了所提在线标定模型和初始化方法的有效性，最后通过在线实验验证了所提方法的有效性。

关键词：移动操作；多传感器融合；定位；在线标定；视觉-惯性-轮速

Abstract

In addition to a wide range of mobile manipulation capability, multi-sensor fusion mobile manipulation robots have complex environment perception and human-like coordinated operation capabilities. Therefore, it is suitable for complex manipulation tasks in unstructured environments and is currently a research hotspot in the field of mobile manipulation. Based on the above background, this dissertation takes the dual-arm mobile robot as the object, fusing vision, IMU, and wheel speed sensor information, to study the autonomous localization technology of the robot. The main research contents are as follows:

(1) A dual-arm mobile robot with multi-sensors was built, and a corresponding simulation system was built based on the robot operating system ROS. Taking the mobile manipulation of the smart factory as the demand, a dual-arm mobile robot including a mobile platform, dual-arms, a dexterous hand, and multi-sensors was built, the key technologies and main parameters in the construction process were analyzed. Aiming at the high complexity of this type of robot system and the difficulty of rapid experimentation, a corresponding simulation system was constructed based on ROS. Based on this simulation system, multi-sensor calibration and multi-sensor fusion SLAM(Simultaneous Localization and Mapping) simulation experiments were carried out.

(2) Aiming at the problems of weak observability and low positioning accuracy in the application of the visual-inertial fusion localization method to ground mobile robots, a visual-inertia-wheel fusion localization method for mobile robots is proposed. In this method, a wheel speed pre-integration model for constraining motion between frames and a plane constraint model for constraining motion manifold are proposed, then the sliding window and marginalization algorithm in the visual-inertial fusion SLAM is extended to the visual-inertial-wheel fusion localization. The simulation experiment results show that the proposed wheel speed pre-integration model and plane constraint model are effective, and the proposed visual-inertia-wheel fusion localization method has higher positioning accuracy than visual-inertia fusion SLAM.

(3) Aiming at the drift problem of the calibration parameters during the operation of the mobile robot, a visual-inertia-wheel fusion online calibration method is proposed to realize the online calibration of the extrinsic, intrinsic, and time delay of the sensor. In this method, an online calibration model including intrinsic, extrinsic and time delay for wheel speed sensor is proposed. What's more, aiming at the problem that the application of visual-inertia fusion initialization is difficult to succeed in ground mobile robots, a visual-inertia-wheel fusion

initialization is proposed. Simulation experiments verify the effectiveness of the proposed online calibration model and initialization method. Finally, online experiments verify the effectiveness of the proposed method.

Keywords： Mobile manupulation; Multi-sensor fusion; Localization; Online calibration; Visual-inertial-wheel

目　录

摘　要 ..... **I**

Abstract ..... **II**

目　录 ..... **IV**

第一章 绪论 **1**

1.1 课题研究背景和意义 1

1.2 国内外研究概况 2

1.2.1 移动操作机器人 2

1.2.2 视觉-惯性融合定位方法 4

1.2.3 视觉-惯性-轮速融合定位方法 5

1.2.4 SLAM 中的在线标定 5

1.2.5 SLAM 初始化 7

1.3 论文研究内容及结构 8

第二章 基于 ROS 的多传感双臂移动机器人及其仿真系统 **11**

2.1 引言 11

2.2 BetaGo 硬件平台 11

2.2.1 设备选型 12

2.2.2 三相机配置 14

2.2.3 电气方案 16

2.3 BeatGo 仿真系统 17

2.3.1 仿真架构 17

2.3.2 Gazebo+Moveit!联合仿真 19

2.4 基于仿真系统的实验研究 20

2.4.1 单线激光雷达-相机的外参标定 20

2.4.2 多传感器融合 SLAM 导航 23

2.5 本章小结 24

第三章 视觉-惯性-轮速融合定位方法研究 **25**

3.1 引言 25

3.2 视觉-惯性-轮速融合状态估计及因子图表征 25
3.2.1 坐标系定义 25
3.2.2 基于最大后验的视觉-惯性-轮速融合状态估计 26
3.2.3 状态估计的因子图表征 27
3.3 视觉-惯性-轮速融合理论建模 28
3.3.1 视觉-惯性因子 29
3.3.2 轮速因子 33
3.3.3 平面因子 40
3.3.4 滑动窗口与边缘化 42
3.4 单元仿真实验研究 44
3.4.1 轮速预积分仿真验证 44
3.4.2 平面因子仿真验证 46
3.5 视觉-惯性-轮速融合定位仿真与分析 47
3.6 本章小结 49
第四章 视觉-惯性-轮速融合在线标定 50
4.1 引言 50
4.2 视觉-惯性-轮速融合在线标定理论建模 50
4.2.1 相机-IMU 外参在线标定 51
4.2.2 轮速内外参在线标定 52
4.2.3 时间延迟在线标定 57
4.3 视觉-惯性-轮速融合初始化 59
4.3.1 外参初始化 60
4.3.2 陀螺仪偏差和轮速内参初始化 60
4.3.3 视觉-惯性-轮速联合对齐 61
4.4 单元仿真实验研究 62
4.4.1 视觉-惯性-轮速融合初始化仿真验证 62
4.4.2 内参在线标定仿真实验 64
4.4.3 外参在线标定仿真实验 66

4.4.4 时延在线标定仿真实验 71
4.5 本章小结 73
第五章 视觉-惯性-轮速融合定位实验研究 74
5.1 引言 74
5.2 实验设置 74
5.3 实验结果与讨论 76
5.3.1 室内实验 76
5.3.2 室内→室外→室内大光度切换实验 78
5.3.3 基于视觉-惯性-轮速融合的导航地图构建实验 83
5.4 本章小结 85
总结与展望 86
参考文献 88

第一章 绪论

1.1 课题研究背景和意义

目前机器人已经被广泛应用于工业领域，逐步成为工业制造的重要组成部分。随着生产方式逐步从大规模生产转向定制生产，对机器人的柔性也提出了更高的要求。目前的工业机器人柔性不足，因为它们通常都是专用的或者是固定的。由于市场的全球化、商品的多样性、交易的不稳定性日益提高，机器人柔性不足的问题愈发严峻。得益于计算和传感技术的进步，机器人的柔性提升迎来了巨大的机会。如图 1-1 所示的移动操作机器人兼具大范围移动性和操作性，能够在不同工位执行更加灵活多变的任务，在日益定制化的制造业有广阔的应用前景[1]。移动操作技术作为其中的核心技术，受到广泛的关注和研究，其在工业、家庭服务、物流、救援、反恐防暴等多个领域都具有极高的应用价值。

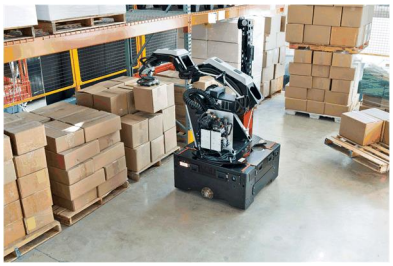


图 1-1 波士顿动力 stretch[2]

柔性带来便利的同时也给机器人的定位带来了挑战，传统的工业机器人，如机械臂，固定在一个稳定的工位上，通过关节编码器即可得到较高精度的自身状态，并且周围的环境不变，可通过外部设备获取并编码至机器人系统里；如 AGV 小车，通过预先设置的导引装置，即可实现沿特定路径的移动。而移动操作机器人为了实现大范围自主移动操作，需要在非结构化环境下实时估计自身状态和环境地图。SLAM（Simultaneous Localization and Mapping，同时定位与建图）同时估计传感器的状态以及传感器所处环境的地图[3]，为机器人的决策和控制提供必要信息，是自主移动操作机器人基础且核心的能力。本文着重研究其中的多传感器融合定位技术。

SLAM 的研究在过去的 20 年从未停止[4, 5]，使用低成本多模态传感器实现高精度定位是学术界和工程界共同努力的方向[6]。近几年视觉-惯性融合 SLAM 的研究取得巨大成功，展示了即使只有一个相机和一个 IMU（Inertial Measurement Unit，惯性测量单元）也能提供准确的 3D 运动估计[7]。但是，平面运动下，特别是地面移动机器人常见的匀

加速运动，会使得视觉-惯性融合定位系统的可观性变弱，难以成功初始化，定位精度也随之降低[8, 9]，因此，对于地面移动机器人，进一步融合其他传感器是很有必要的。轮速传感器普遍存在于地面移动机器人中，且成本低，受到研究者的青睐[8-11]，另外，视觉-惯性-轮速融合的配置和人体运动估计系统类似，如图 1-2 所示，人眼对应机器人的视觉测量，耳蜗对应机器人的惯性测量，下肢的本体感受对应机器人的轮速测量，因此，研究视觉-惯性-轮速融合定位方法对于地面移动机器人具有重要的理论意义和实际价值。

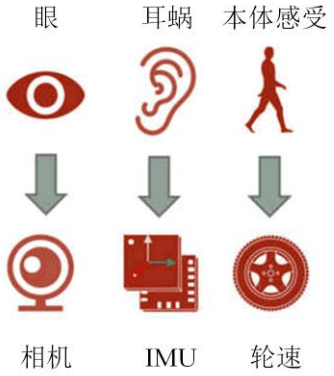


图 1-2 人类的自我感知和机器人的多传感器融合感知[12]

1.2 国内外研究概况

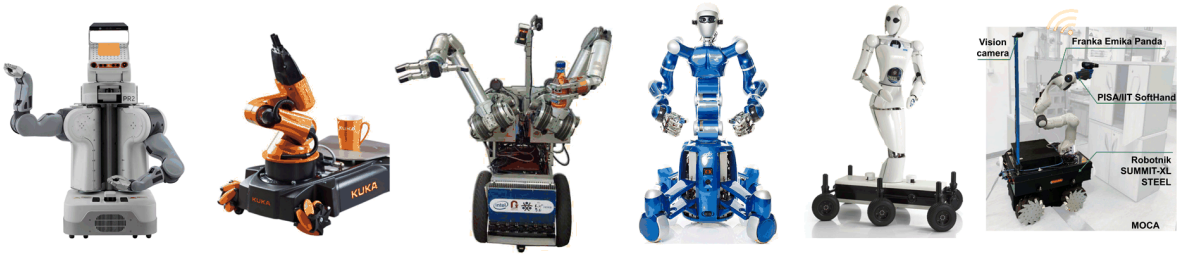
下面分别从移动操作机器人、视觉-惯性融合定位方法、视觉-惯性-轮速融合定位方法、SLAM 中的在线标定和 SLAM 初始化五个方面对研究现状进行介绍。

1.2.1 移动操作机器人

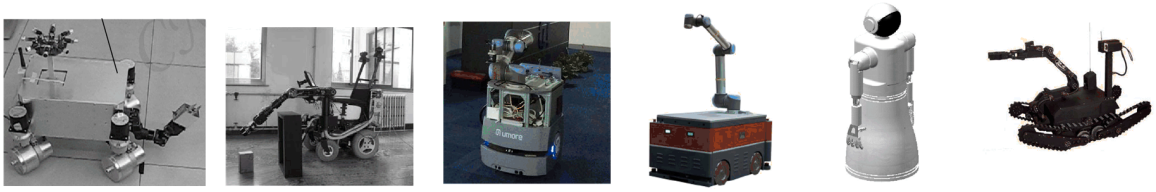
除了兼具大范围移动操作能力，多传感器融合双臂移动机器人具有复杂环境感知和类人协调操作能力，因此适用于非结构化环境下的复杂操作任务，是当下移动操作领域的研究热点。

由于具有巨大应用潜力，国内外众多研究单位对移动操作机器人展开了研究。单臂移动操作机器人方面，2009 年美国卡内基梅隆大学机器人实验室开发了单臂移动机器人 HERB 1.0[13]，用于人类环境下的操作场景。2011 年德国 KUKA 公司将单轴五自由度机械臂与全向移动平台进行深度融合，开发了面向教学与科研的 KUKA youbot 移动机器人系统[14]。2015 年日本丰田汽车公司开发了一款定位为家用助手的机器人 HSR[15]，并致力于将其推广为研究移动操作的通用平台[16]。双臂移动机器人方面，2009 年德国宇航中心（DLR）发布了双臂移动机器人 Rollin' Justin[17]，该机器人特点为具有高运动冗余自由度（51 个运动自由度），包括两个 7 自由度机械臂、两个 12 自由度机械手、2 自由度颈部、3 自由度躯干和 4 轮移动平台。2010 年美国 Willow Garage 公司和宾夕法尼

亚大学抓取实验室共同开发了由两个七自由度机械臂和移动平台所组成的 PR2[18]机器人，可以打开和关闭多种不同类型的门，该款机器人的软件系统被抽象成为如今受众最广的机器人操作系统 ROS。2011 年德国人工智能研究中心（DFKI）的 Lemburg 等设计并开发了一个具有 32 个运动自由度的类人双臂移动操作机器人 AILA[19]，其主要由两个 7 自由度机械臂、4 自由度躯干、2 自由度头部和 6 轮移动平台组成。2012 年美国卡内基梅隆大学机器人实验室在 HERB 1.0 基础上开发了双臂移动机器人 HERB 2.0[20]，该机器人具备两个 7 自由度机械臂，差速底盘，以及 3 指夹爪，主要用于研究机器人在人类环境下如何协助人类。2019 年意大利理工学院（IIT）开发了移动操作机器人平台 MOCA，其主要由轻型机械臂、Pisa / IIT 软手和全向移动平台组成[21]。



a) Willow Garge PR2　b) KUKA youbot　c) CMU HERB 2.0　d) DLR Rollin’Justin　e) DFKI AILA　f) IIT MOCA



g) 哈尔滨工业大学机器人研究所开发的全向移动操作机器人　h) 哈尔滨工业大学（威海）机器人研究所开发的8自由度移动操作系统　i) 苏州大学先进制造技术研究院　j) 上海交通大学机器人研究所　k) 上海交通大学智能机器人实验室 FISR　l) 中科院沈阳自动化所“灵蜥”系列

图 1-3 国内外典型移动操作机器人

国内也有不少单位对移动操作进行了研究。单臂移动操作机器人方面，哈尔滨工业大学机器人研究所蒋林开发了一款全向移动操作机器人，研究底盘+臂的整体运动规划方法以及定位导航、模糊避障等技术[22]。哈尔滨工业大学（威海）机器人研究所姚玉峰开发了轮椅式移动操作机器人，深入研究了 8 自由度避障规划的理论和实现，实验验证了其在助老助残领域的有效性[23, 24]。上海交通大学机器人研究所开发了一款包含 UR10 和全向移动平台的单臂移动操作机器人，实现了 SLAM 自主导航和机械臂运动规划[25]。中科院自动化所研发的“灵蜥”系列机器人，以履带和机械臂结合为主，可以用于反恐防暴领域[26]。苏州大学先进制造技术研究院陈飞采用欧姆龙 LD-60 移动平台和 UR5 机

械臂集成的方案，基于 ROS 的 moveit！进行了运动学仿真，并实验验证了集成的移动操作机器人在自主导航和运动规划方面的有效性[27]。双臂移动机器人方面，上海交通大学智能机器人实验室曹其新教授团队开发了一款服务型全维移动双臂机器人 FISR，研究示教规划算法[28]、运动规划算法[29-31]，并且开发了多机协作的分布式系统仿真平台 CORBA[32, 33]。综上，以往移动操作机器人的研究主要集中在服务机器人，对于有潜力成为智能工厂重要一环的移动操作机器人研究尚少。

1.2.2 视觉-惯性融合定位方法

视觉-惯性融合 SLAM 以相机和 IMU 的测量为输入得到设备位姿和环境地图。视觉 SLAM 具有 7 自由度不可观，而视觉-惯性融合 SLAM 可以通过重力确定水平面，因此滚转角（roll）和俯仰角（pitch）在世界坐标系下是绝对状态，只有位置和航向角（yaw）是相对参考坐标系的相对状态，因此在充分运动的情况下，只有 4 自由度不可观[34-37]。

视觉-惯性融合 SLAM 主要有滤波和优化两种框架。滤波方法使用 IMU 惯性解算作为状态预测，视觉测量作为状态更新[36, 38-44]。MSCKF[40]是基于滤波的代表性开源算法，它在状态量中维护一个滑动窗口的相机位姿，且不维护 3D 路标点，利用零空间投影边缘化 3D 路标点，建立相机之间的相对观测约束。

OKVIS[45]是第一个基于捆集调整（Bundle Adjustment）[46]优化的视觉-惯性融合 SLAM 方法。为了避免 IMU 多次重新积分，Forster[47]提出了 IMU 预积分算法，使用 IMU 预积分约束相邻两帧关键帧的状态，建立最大后验概率（MAP）状态估计问题，寻找最优的状态。VINS-Mono[48]前端使用光流跟踪，略微比描述子匹配更鲁棒，后端同样建立 MAP 状态估计问题进行视觉-惯性融合，并在回环检测后执行 4 自由度的位姿图优化。VINS-Mono 目前已经拓展为支持双目、双目-惯性传感器配置的 SLAM 算法，即 VINS-Fusion[49]。最近的 ORB-SLAM3[50]在 ORB-SLAM2[51]的基础上加入了 IMU，是一个完全基于 MAP 估计的算法，并且提出了第一个完整的多地图 SLAM 系统 Atlas，支持丢失重启，找回合并。另外还抽象了相机模型，只需提供相机的投影方程、反投影方程和雅可比矩阵就可以拓展到不同的相机上。Kevin[52]发现在预积分过程中假设机体加速度标称值恒定比现有的假设加速度测量值恒定更加合理，因此根据机体加速度标称值恒定的假设推导了闭式解预积分模型，并基于该预积分模型分别提出了紧耦合滑窗优化视觉-惯性融合 SLAM 和松耦合直接法 SLAM，实验验证了提出的闭式解预积分模型优于目前先进的离散预积分模型。上述 SLAM 算法中，几乎没有可以将单目视觉-惯性融合直

接用于地面移动机器人的。

1.2.3 视觉-惯性-轮速融合定位方法

对于地面移动机器人，匀加速运动（车体系下加速度向量不变）和直线运动（无旋转）是常见的运动模式，但是 VIO（视觉-惯性融合定位方法）在匀加速运动模式下，原本可观的尺度退化为不可观，在直线运动模式下，原本可观的滚转角和俯仰角退化为不可观[8, 35]，虽然完全精确的匀加速运动和直线运动在现实中不易存在，但接近匀加速运动和直线运动也会使可观性变弱，导致定位精度变差。

轮速可以提供有效的测量改善上述场景下的弱可观性问题，提升定位精度和鲁棒性。Liu[11]在 IMU 预积分的基础上引入轮速平移预积分，在初始化过程中使用 IMU 的平移预积分量、速度预积分量以及轮速的平移预积分量初始化每一帧的速度和重力向量，无需引入尺度因子，另外将 IMU 和轮速的外参引入优化框架中进行在线标定，并根据加速度偏差（bias）的收敛程度来判断是否对外参进行优化。Quan[53]将轮速和陀螺仪视为一种新的传感器，推导了对应的预积分，构建了包含预积分因子、视觉因子以及平面因子的因子图模型，使用非线性优化进行状态估计。另外针对视觉观测不可用、轮速打滑的异常状态提供了对应的跟踪策略。Zheng[54]将地面机器人的运动建模在 $SE(2)$ 流型上，相当于引入了确定性的平面约束，然而，现实中由于地形、地面物体以及自身抖动，机器人经常不满足平面运动约束，此时这种确定性平面约束会导致定位精度降低，为了防止确定性平面约束导致精度降低，Zheng 在视觉测量中引入了 Z 轴位移分量、滚转角和俯仰角的不确定性。Wang[55]提出了在优化过程中将雅可比矩阵对应列设为 0，使得 Z 轴上的位移、滚转角和俯仰角保持不变，以此将地面机器人的运动约束在平面上。Lu[56]将轮速的位置测量和陀螺仪的角度测量打包为轮式里程计的测量，推导了对应的预积分，基于最大化后验概率获得最优的状态估计，此外，Lu 提出了 3 个判据用于监测底盘的异常运动，分别是①底盘运动学的运动约束误差；②惯性导航解算和轮速航迹推算的一致性误差；③惯性导航解算和轮速航迹推算的配准误差，当底盘处于异常运动，就将该预积分测量丢弃。Lee 推导了差分轮速预积分模型，并基于 MSCKF 实现了视觉-惯性-轮速融合里程计[9]。

1.2.4 SLAM 中的在线标定

精确的标定是多传感器融合的前提，需要标定的参数主要包括传感器内参、传感器之间的外参以及传感器之间的时间延迟。标定通常离线进行，在线运行过程中标定结果

通常为已知常值。然而，标定参数在运行过程中可能发生变化，例如机械振动、零件磨损、环境变化导致的参数变化，如果这种变化没有正确地处理，将会导致定位精度降低[9]。另外，需要较强先验信息（如标定板，已知路标点）的离线标定会显著增加每次标定的经济、时间和人力成本。

目前已有大量的工作研究多传感器融合的离线标定问题。由苏黎世联邦理工大学自主系统实验室开发的 Kalibr 标定工具箱基于连续时间建模的捆集调整估计相机和 IMU 之间的外参、IMU 内参、时间延迟以及相机运动[57-61]，由于效果优异，受到开发者的青睐，但是，该工具箱需要一个固定的标定板。Mohan[62]提出一种通用的标定框架，用于标定轮式里程计和外感式传感器（相机、激光雷达等）之间的外参以及轮式里程计的内参，通用体现在该框架不仅适用于轮式里程计运动模型已知的标定，还能用于运动模型未知的标定，运动模型已知的情况下采用手眼标定的思想建立优化模型求解，运动模型未知的情况下提出无参高斯过程回归方法学习轮式里程计和外感式传感器的外参，该标定框架需要机器人中断工作。

由于离线标定存在上述弊端，研究者提出了在位姿估计的同时进行在线标定，即同时标定、定位与建图（SCLAM）[63, 64]。SCLAM 将标定问题和 SLAM 问题统一，具有无需特殊环境准备、无需中止机器人工作、实时跟踪标定参数变化的优势。无论是基于滤波还是基于优化，SCLAM 标准作法为将待标定参数加入到待估计状态量中。具体来说，针对传感器之间的外参，Kelly[37]、Jones[36]和 Martineli[65]分析了相机和 IMU 之间外参的可观性，当绕至少两个轴旋转时，外参是可观的；当只绕一个轴旋转时（如地面机器人），沿该轴的平移分量不可观；纯平移时，外参的平移量不可观。VINS-Mono[48]将相机-IMU 外参加入到状态量中进行估计，类似的还有 M-Loam[66]和 Lio-Mapping[67]等。针对传感器内参，Yang[68]聚焦于讨论 IMU 内参在线标定的必要性，首先在 IMU 内参模型中考虑了刻度系数误差，轴不对齐误差以及加速度计-IMU 外参误差，然后对 IMU 内参进行可观性分析，最后通过实验得出对于地面移动机器人不建议同时估计 IMU 内参，因为平面运动激励不足，无法达到可观性要求，而对于手持可充分激励设备，同时估计 IMU 内参可以提高定位精度。Zuo[10]将轮速的内参建模为随机游走过程以更好地符合时变特性。Lee[9]基于 MSCKF 将两轮差分模型的内参加入到状态量中进行估计，并进行了可观性分析。针对传感器之间的时间延迟，Li[69]基于 MSCKF 将视觉-惯性时间延迟 t_d^C 加入状态量进行估计，对于时间延迟的特殊处理体现在 IMU 预积分中，并证明了时延

是可估计的，除了匀速旋转和纯平移的情况。Tong[70]同样将视觉-惯性时间延迟 t_d^C 加入状态量进行估计，但是针对时间延迟的特殊处理体现在视觉观测中，该方法认为在时间延迟 t_d^C 内像素在归一化平面作匀速运动，因此可以对像素进行偏移实现延迟补偿。Liu[71]推导了包含时间延迟的 IMU 预积分，基于 VINS-Mono 的优化框架进行实现，实验结果表明 Liu 的方法时延收敛速度更快。当然，更为系统性的方案会同时考虑外参、内参和时延。VINS-Mono[48]将相机-IMU 外参、时延加入优化模型中进行在线估计，并开源了代码。Li[72]将相机-IMU 外参、时延、卷帘曝光时间、相机内参和 IMU 内参同时融入 MSCKF 框架，通过仿真和实验证明所标定的参数可以收敛，但是没有进行可观性分析。Lee[9]提出了一种基于 MSCKF 的 VIWO，着重建模了轮速-IMU 外参、时延、轮速内参的在线标定模型，并进行了可观性分析。Lee 的工作很完整，但是目前尚没有基于优化的包含内外参、时间延迟在线标定的视觉-惯性-轮速融合定位方法，本文主要提出了一种基于优化的同时包含内外参、时间延迟在线标定的视觉-惯性-轮速融合定位方法。

1.2.5 SLAM 初始化

惯性参数在机器人每次上电都会产生变化，轮速参数由于机械磨损会在使用过程中产生变化，为了使用 IMU 和轮速传感器，需要在初始化阶段估计这些参数的初值，包括尺度、重力向量、初始速度、加速度偏差、陀螺仪偏差、轮速内参。错误的初始化将会导致难以收敛。

目前视觉-惯性融合初始化方面的工作主要分为联合估计初始化以及松耦合初始化。联合估计初始化方面，Martinelli[65]提出了一个闭式解方法同时恢复尺度、重力向量、加速度计偏差、初始速度以及视觉特征的深度。该方法假设可以通过 IMU 测量初步估计相机的位姿，跟踪所有图像中的几个稳定特征点，并根据任何相机对看到的特征点的 3D 坐标都相同建立方程，然后通过线性最小二乘求解。Kaiser[73]对 Martinelli 的方法进行拓展，将陀螺仪的偏差一同初始化，但是该方法存在两个缺点：1) 假设所有的特征点在所有帧里都能观测到，且正确跟踪，该假设不易满足；2) 部分运动模式会造成弱可观性，导致初始化失败，这种情况下缺少判断初始化成功的判据。Campos[74]在 Martinelli[65]和 Kaiser[73]方法的基础上进行改进，主要体现在：1) 通用性，不再需要保证特征点在所有初始化帧里都能观测到，只要检测到有至少 m 个特征点被跟踪至少 l 个像素的长度，就发起初始化；2) 效率，限制了特征点个数和帧数以及使用了预积分；3) 鲁棒性，提出了可观性判据和一致性判据检测初始化是否成功，每次判据检测通过都会进行捆集调整

以提高精度。

松耦合初始化假设单目视觉能够较精确地估计相机轨迹（尺度等价意义下），直接使用单目估计的轨迹去估计惯性参数。这是因为目前的视觉里程计以及视觉 SLAM 采用捆集调整进行优化，得到的轨迹精度显著比普通 IMU 积分高，在估计惯性参数时忽略该轨迹的不确定性是合理的。松耦合初始化首先由 Mur-Artal[75]提出，然后被 Qin[48]应用在 VINS-Mono 中，VINS-Mono 的初始化主要包含以下几个步骤：1) 视觉运动恢复结构（SFM），获得相机轨迹；2) 利用手眼标定的方式初始化 IMU 和相机之间的外参；3) 利用旋转约束估计陀螺仪偏差；4) 利用平移预积分和速度预积分估计关键帧速度，重力向量以及尺度因子；5) 优化重力向量，并利用重力向量将初始帧对齐至世界坐标系下。Mur-Artal 和 Qin 的方法在初始化过程中将 IMU 的测量建模在一个线性系统里，不同残差的权重都是一致的，忽略了传感器的不确定性，另外，不同的惯性参数被分步求解，忽略了参数之间的相关性，导致初始化结果不是 MAP 意义下的最优。Campos[76]在 ORBSLAM3 中提出的完全基于 MAP 的初始化方法充分考虑了传感器的不确定性，该方法可以分为三步，1) 纯视觉 MAP 估计，该部分和 ORBSLAM2[51]并无太大差别；2) 纯惯性 MAP 估计，将 IMU 轨迹和第一步得到的视觉轨迹进行对齐，得到尺度、关键帧速度、重力方向以及 IMU 偏差；3) 视觉-惯性 MAP 估计，建立视觉-惯性捆集调整模型，前两步得到的估计作为初值进行优化，得到最优解。

视觉-惯性-轮速融合的初始化方法研究尚少，Quan[53]虽然将陀螺仪和轮速进行融合，但是初始化过程中仅考虑陀螺仪的偏差，认为轮速的内参已知。Liu[11]类似 Qin[48]使用视觉轨迹的旋转部分恢复陀螺仪偏差，接着使用 IMU 的平移和速度预积分以及轮速的平移预积分构建线性系统求解关键帧速度和重力向量，线性系统不使用视觉轨迹的平移部分，所以不涉及尺度的计算。视觉轨迹通过捆集调整优化而得，轨迹精度比 IMU 和轮速积分得到的轨迹精度高[76]，Liu 在计算陀螺仪偏差时已经计算了视觉轨迹，却没有进一步使用。本文在初始化过程中利用视觉轨迹恢复陀螺仪偏差、轮速内参，并且在恢复关键帧速度、重力向量的过程中充分使用视觉轨迹信息、IMU 预积分信息和轮速预积分信息，实现精度更高、鲁棒性更强的视觉-惯性-轮速融合初始化。

1.3 论文研究内容及结构

针对上述机器人定位过程中存在的关键问题，本文以地面移动机器人为对象，对相关多传感器融合定位技术展开研究。为了行文精简，视觉-惯性融合定位方法简称为 VIO，

视觉-惯性-轮速融合定位方法简称为 VIWO。论文在国家自然科学基金（51820105007）项目的资助下开展研究。全文框架及各章关系如图 1-4 所示。各章主要工作如下：

第一章首先详细评述了当前移动操作机器人的研究现状，发现对于有望成为智能工厂重要一环的双臂移动操作机器人研究尚少。然后调研目前较先进的视觉-惯性融合定位方法，发现视觉-惯性融合定位方法几乎没有可以直接用于地面移动机器人的，因此接着调研视觉-惯性-轮速融合定位方法，并针对实际中存在的标定参数漂移现象，调研了 SLAM 的在线标定工作，进而发现尚没有基于优化的包含内外参、时间延迟在线标定的视觉-惯性-轮速融合定位方法。

第二章首先搭建了一款面向智能工厂的多传感双臂移动机器人（BeatGo）。之后，以开源机器人操作系统 ROS 为基础，构建了包括 Gazebo 物理仿真平台、Moveit!运动规划器和 Navigation 导航包等第三方工具在内的联合仿真系统并进行了开源发布。最后，通过仿真实验验证该系统的有效性。

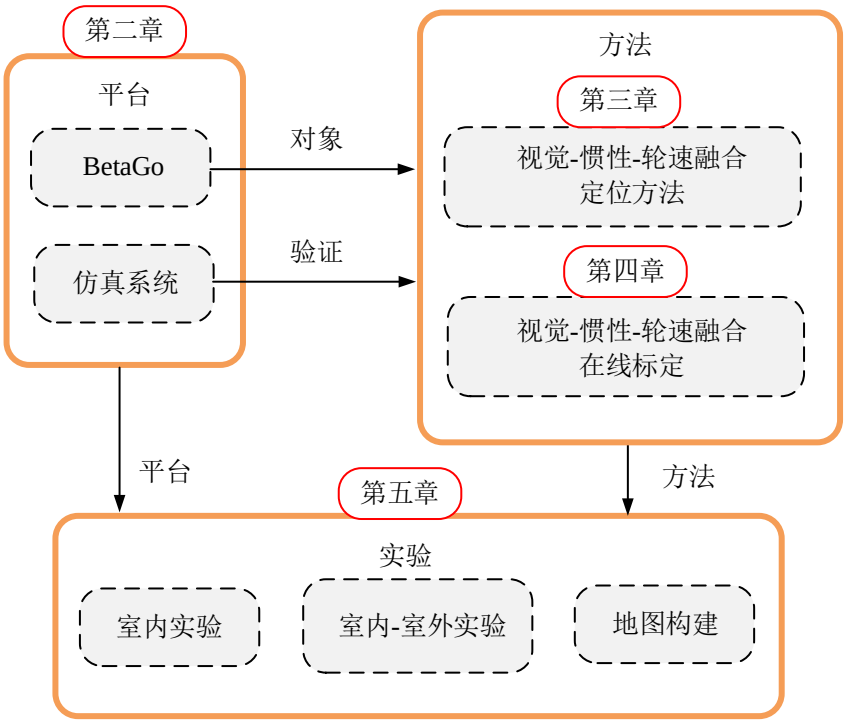


图 1-4 全文框架及各章节的联系

第三章针对视觉-惯性融合定位方法应用于平面移动机器人时的可观性弱、定位精度低和鲁棒性差的问题，重点研究如何融合平面移动机器人普遍具有的轮速传感器来提高定位精度和鲁棒性，提出了一套基于 MAP 的视觉-惯性-轮速融合定位方法，其中的状态估计模型可以由因子图来表示，重点推导了用于约束帧间运动的轮速因子、用于约束运动流型的平面因子，并将 VIO 的滑动窗口与边缘化算法推广到 VIWO 中。为了验证

所提 VIWO 的有效性，首先对轮速因子和平面因子进行了数值仿真验证，然后通过数值仿真与物理仿真证明 VIWO 的有效性，仿真过程与 VINS-Fusion[49]的单目 VIO 进行对比。

第四章以第三章所提 VIWO 为基础，针对标定参数在机器人实际运行过程中的漂移问题，提出了一套包含内外参、时间延迟的在线标定方案。然后针对单目视觉-惯性融合定位方法难以在地面移动机器人中成功初始化的问题，以 VINS-Fusion 的单目视觉-惯性融合初始化为基础进行改进，提出了单目视觉-惯性-轮速融合初始化方法。实验部分首先对所提视觉-惯性-轮速融合初始化方法进行仿真验证，并与 VINS-Fusion 的视觉-惯性融合初始化进行对比说明所提方法的有效性。然后分别对内外参、时间延迟在线标定进行仿真验证，并根据实验结果得出视觉-惯性-轮速融合在线标定的规律。

第五章为了测试所提方法在实际运行中的性能，以第二章搭建的多传感双臂移动机器人为对象，设计了室内和室内→室外→室内两组实验，并与 VINS-Fusion 的单目视觉-惯性融合和双目视觉-惯性融合定位方法进行对比，说明所提方法应用于移动机器人的有效性。实验的最后验证了基于所提方法的定位结果构建稠密点云地图和可导航多分辨率八叉树地图的有效性。

论文的最后，总结全文，并展望未来可能的研究方向。

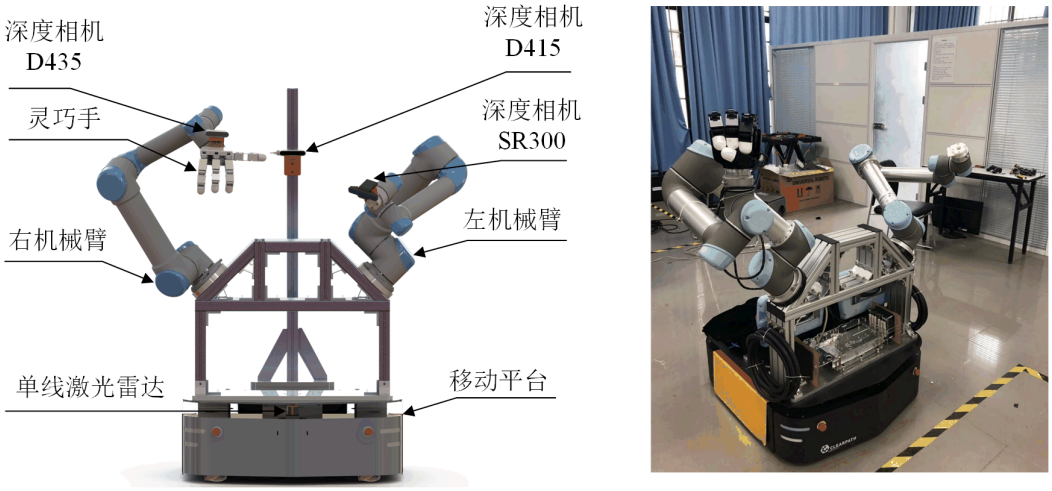
第二章 基于 ROS 的多传感双臂移动机器人及其仿真系统

2.1 引言

目前，随着机械臂、灵巧手、传感器等单元技术的不断进步，移动操作机器人正朝着高冗余运动自由度和多传感器融合方向不断发展[77]。伴随着硬件模块和操作任务复杂程度的不断增加，经典机器人系统的开发思路（硬件设计→软件开发→系统搭建→实验研究）面临巨大挑战。为了提升开发速度、降低开发风险和开发成本，不少研究单位发布的移动机器人、双臂机器人或移动单臂机器人都构建了相应的仿真系统，但是针对多传感器融合的双臂移动机器人，相关开源项目和研究还较少，由于该类型机器人系统复杂、开发成本高，更加迫切需要可快速验证系统设计合理性、算法可行性的仿真系统。

针对上述问题，本章搭建了一款多传感器融合双臂移动机器人 BetaGo，并基于 ROS 构建了对应的仿真系统，最后基于该仿真系统进行了标定仿真和多传感器融合 SLAM 仿真以验证该仿真系统的有效性。

2.2 BetaGo 硬件平台



a) b)

图 2-1 BetaGo 机器人：a) 渲染图；b) 实物图

如图 2-1 所示，本文所搭建的多传感双臂移动机器人 BetaGo 由两个 6 自由度机械臂（UR5）、移动平台（Ridgeback）、16 自由度灵巧手（Allegro-hand）以及多个传感器组成。传感器包括一个头部相机（Realsense D415），两个手臂相机（Realsense SR300 和 Realsense D435），一个前向的单线激光雷达（Hokuyo UST-10LX）以及一个惯性测量单

元（Microtrain 3dmgx2 IMU）。其中，手臂相机 SR300 用于近距离物体扫描，头部相机（Realsense D415）和手臂相机（Realsense D435）用于定位、建图以及人机交互，手臂相机 D435 可以补充激光雷达和头部相机的盲区。机器人主要性能参数列于表 2-1。

表 2-1 BetaGo 主要性能参数

	尺寸[1]/重量	自由度	工作范围	运行时长	移动	传感器	负载	软件
BetaGo（本文）	96.0x79.3x110/208Kg	移动平台 3+臂 6x2+灵巧手 16 = 31	1.2m	4h	全向 1.1m/s	双目相机，IMU，单线激光雷达，双目相机，结构光相机，IMU	机身负载：27Kg；手臂负载 10Kg；	ROS 开源

[1]尺寸描述格式：长×宽×高(mm)

2.2.1 设备选型

对移动平台的需求主要如下：1) 结构和电气上足够安装两台 UR5 机械臂；2）稳定的系统；3) 软件开源，支持 ROS 和 Gazebo；4) 稳定的维护团队。我们调研了市场上大部分的移动平台，选择三款候选者列在表 2-2 中，出于拓展性和二次开发性的考虑，Ridgeback 具有足够大的尺寸和负载用于添加其他设备，如机械臂和灵巧手；具有足够丰富的文档，便于使用者快速上手；有附件商店，随着研究的深入，需要添加各种传感器如触觉传感器、压力传感器、相机、激光雷达，在 Ridgeback 的商店都能选购，且提供技术支持，可以加快开发速度。综上，选择 Ridgeback 作为 BetaGo 的移动平台。

表 2-2 移动平台候选者

	Ridgeback	MIR 100	Robotink SUMMIT-XL
尺寸[1](mm)	960×793×296	890×580×352	847×663×509
负载	100 Kg	100 Kg	130 Kg / 250 Kg
最大速度	1.1 m/s	1.5 m/s	3 m/s
轮配置	麦克纳姆轮	差速模型	麦克纳姆轮
附件[2]	前向单线激光雷达，IMU，(GPU)，(后向单线激光雷达)	前向单线激光雷达，后向单线激光雷达，3D 相机	前向单线激光雷达，IMU，GPS，3D 相机
软件	ROS，Gazebo	ROS，Gazebo	ROS，Gazebo
文档	+ + + + +	+ +	+ + + +

[1]尺寸描述格式：长×宽×高

[2]括号里的附件需要另外购买，Ridgeback 的厂家 Clearpath 有商店出售各种支持的附件的。

由于实验室已经在 UR5 机械臂上进行过部分研究[78, 79]，为了在 BetaGo 上延续，我们直接选用 UR5 作为 BetaGo 的机械臂。如图 2-2 所示，双臂基座高度为 750mm，根据双臂的工作空间形状，当基座与桌面相同高度时（桌面高度一般为 750mm 高），工作空间与桌面的相交面是最大的，具有最大的可操作距离。

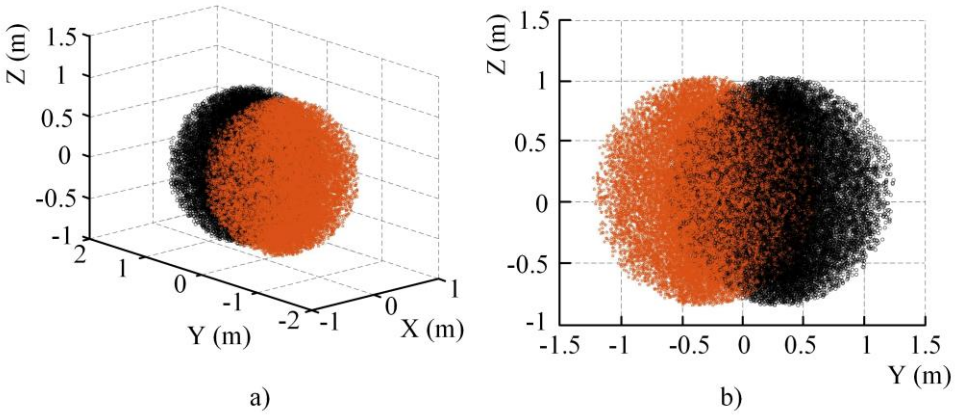


图 2-2 双臂工作空间：a) 等轴测视图；b) 侧视图

针对灵巧手，主要考虑灵巧性，因此对自由度要求比较高，候选者列在表 2-3 中，考虑到自由度，以及成本，BetaGo 选择 allegro-hand 作为其中一支灵巧手，另外一支计划后续自主设计。

表 2-3 灵巧手候选者

	尺寸 [1]	重量	自由度	负载	反馈 [2]	软件	文档
Allegro-hand	239×135×40.8	1.2 Kg	4×4=16	5 Kg	编码器，电机电流，（IMU，三维力传感器，指尖压力）	ROS	+ + +
Reflex-TakkTile 2	—	0.9 Kg	3× 弯曲，1× 旋转	2 Kg	每个手指有 14× 压力，1× 近端关节编码器。1× 指尖 IMU	ROS	+ + +
Robotiq-3-Finger	130×210×126	2.3 Kg	2×2+1=5	10 Kg	编码器，电流，（表面压力，手腕力矩，手腕相机）	ROS, Gazebo	+ + + + +
Shadow Hand-Lite	327×120×109	2.4 Kg	3×3+4=13	4 Kg	16× 编码器，26× 应变片，电机电流，13× 温度传感器	ROS, Gazebo	+ + + +

[1] 尺寸描述格式：长×宽×高(mm)

[2] 括号里的附件需要另外购买。

2.2.2 三相机配置

BetaGo 装有三个相机，类人头部相机提供前向视野，两个手臂相机提供辅助视野。配备手臂相机具有三个优势：1) 单线激光雷达无法检测到低于发射平面的障碍物，而且头部相机视角有限无法看到近距离障碍物，如图 2-3 所示，手臂相机可以容易地解决这个问题。2) 手臂相机可以为物体操作提供更高精度的深度信息，深度均方根误差按照距离的平方增长，对于精度要求比较高的物体操作，头部相机距离较远，精度很难达到要求，而手臂相机可以容易地解决这个问题。3) 手臂相机提供的辅助视野可以提高建图的效率。

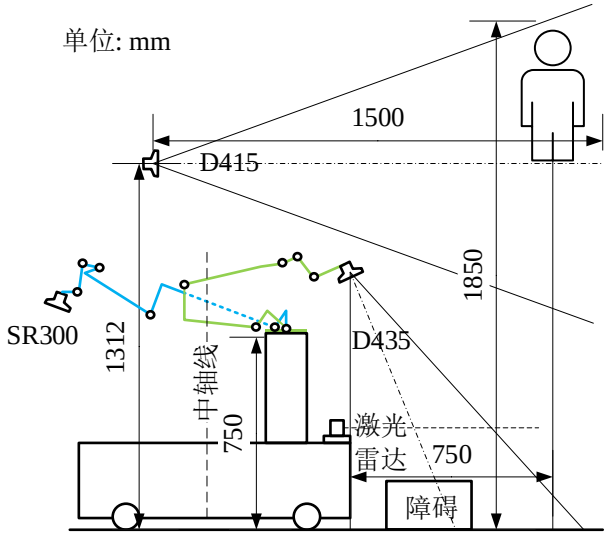


图 2-3 BetaGo 关键尺寸

手臂相机应在近距离有着较高的精度，另外尺寸和重量应较小，减小对机械臂造成的额外负担。手臂相机和头部相机最好具有相同的 SDK。因此，我们先对手臂相机进行选型，然后在具有相同 SDK 的产品中选择头部相机。候选相机列在表 2-4 中。虽然 ORBEEC AstraS 是候选者中近距离扫描效果最好的，但是 ORBEEC 旗下多为基于结构光的产品，结构光对环境光敏感，不适合用于头部相机。我们测试了 D435、D415、SR300 和 ZED mini 的近距离扫描性能，“0”是基准分数，以 D435 的表现作为基准分数，“+N”表明具备比 D435 更好的近距离扫描性能，“-N”表明近距离扫描性能不如 D435，N 表明差距的大小程度。ORBEEC Astra S 的“+2.5”是基于测评报告[80]以及深度相机综述[81]得出的。SR300 作为另一个较优的候选者，其共享 SDK 的产品中，Realsense D400 系列基于主动红外双目技术，适用于室内室外，可以作为头部相机，因此 BetaGo 选择 SR300

作为手臂相机。头部相机固定在移动平台上，如图 2-3 所示，其与移动平台中轴线的距离比手臂相机短，可以推出，头部相机的运动速度会小于等于手臂相机，而且工厂环境移动平台的速度较慢，因此，头部相机选择具有更高精度但为卷帘快门的 D415，D435 被选作另一个手臂相机。手臂相机不全使用 SR300 的原因为 SR300 与 D400 系列共视时会互相影响，D400 系列之间不会互相影响[82]。当对一个物体进行扫描时，可以关闭头部相机，使用扫描精度较高的 SR300 进行扫描，但是在建图时，需要手臂相机提高建图效率和定位精度，因此在导航过程中，如图 2-3，SR300 只负责左后方，不与 D415 和 D435 产生共视，而另一个手臂相机 D415 可以与头部相机 D435 产生共视。

如图 2-3，头部相机的高度通过视场角和社交个人距离所定义。用于朋友之间典型的个人距离是 0.75m，移动平台前端与人距离 0.75m 时，相机与人的距离在 1.5m 之内，此时相机的深度均方根误差在 5mm 之内，在距离 1.5m 左右，头部相机的高度和视场需要能捕获一个最高 1.85m 的人的全脸图像，就可以定出相机高度在 1.312m 左右。

表 2-4 候选相机

	尺寸[1]/重量	深度原理	快门	有效距离	分辨率/帧率[2]	系统兼容性	近距离扫描效果
Realsense SR300	110×12.6×4.1/ –	结构光	滚动	0.2-1.5 m	60×480/ 60 FPS	Windows, Linux, ROS, Jeston TX1/2	+2
Realsense D415	99×20×23/ 72 g	主动双目	滚动	0.16-10 m	1280×720/ 90 FPS	Windows, Linux, ROS, Jeston TX1/2	+1
Realsense D435	90×25×25/ 72 g	主动双目	全局	0.11-10m	1280×720/ 90 FPS	Windows, Linux, ROS, Jeston TX1/2	0
ZED mini	124.5×30.5×26.5/ 62.9 g	双目	滚动	0.1-15m	1344×376/ 100 FPS	Windows, Linux, ROS, Jeston L4T	-1
ORBEEC Astra S	165×30×40/ —	结构光	滚动	0.4-2m	640×480/ 30 FPS	Windows, Linux, ROS	2.5
MYNTEYE D1000	165×31.5×30.12/ 184 g	主动双目	全局	0.32-7m	640×480/ 60 FPS	Windows, Linux, ROS, Jeston TX1/2	—

[1] 尺寸描述格式：长×宽×高(mm)

[2] 分辨率/帧率是深度输出的分辨率和帧率

2.2.3 电气方案

UR5 机械臂为交流供电，且带有体积为 475mm×423mm×268mm 的控制箱，集成到移动平台上需要使用蓄电池供电，另外，控制箱里主要部件为安全控制板和主板，冗余空间过多，不适合直接放在移动平台上，因此将安全控制板和主板直接集成到移动平台上，让整体更加紧凑。

Ridgeback 电源用户面板提供稳压 24VDC，5VDC，12VDC 输出，以及不稳定（根据电池电量以及负载的不同在 20VDC 和 30VDC 之间变化）24VDC 输出。而 UR5 为 100-240VAC, 50-60Hz 输入，通过交流转直流，转成 48VDC 和 12VDC 输入给安全控制板，安全控制板再用 48VDC 驱动机械臂，而 12VDC 用于主板及示教器。因此，集成时将移动平台的 24VDC 通过 DC 转 DC 变压器转成 48V 提供给安全控制板，而 12V 输出可以直接提供给安全控制板。具体集成电路图及所需材料见开源链接。

在将 UR5 集成到移动平台之前，需要验算移动平台电池的容量是否足够支撑两台 UR5 同时工作。移动平台的电池容量为 ${}_bC = 2400\text{Wh}$，电压输出为 ${}_bV = 24\text{VDC}$，电池保险丝最大能够承受 ${}_bI_M = 70\text{A}$，移动平台在最大负重 100Kg 时的消耗功率为 ${}_bP_M^R = 800\text{W}$，可以计算出移动平台的最大电流为：

$$ {}_bI_M^R = {}_bP_M^R / {}_bV = 33.4\text{A} \tag{2-1} $$

UR5 需要的输入为 $V^U = 48\text{VDC}$、$V^{MB} = 12\text{VDC}$，V^U 对应的额定电流为 $I_N^U = 5\text{A}$，峰值电流为 $I_M^U = 10\text{A}$，V^{MB} 所对应的峰值电流为 $I_M^{MB} = 4\text{A}$，可以计算出 UR5 电池端的峰值电流为：

$$ \begin{aligned} {}_bI_M^U &= \lambda_U I_M^U = 2\times 10\text{A} = 20\text{A} \\ {}_bI_M^{MB} &= \lambda_{MB} I_M^{MB} = 0.5\times 4\text{A} = 2\text{A} \end{aligned} \tag{2-2} $$

其中，λ 是升压比。双臂电池端的峰值电流为：

$$ {}_bI_M^{dualarm} = 2({}_bI_M^U + {}_bI_M^{MB}) = 44\text{A} \tag{2-3} $$

灵巧手的峰值功率为 $P_M^{hand} = 100\text{W}$，额定电压为 $V^{hand} = 24\text{V}$，峰值电流为：

$$ {}_bI_M^{hand} = P_M^{hand} / V^{hand} = 4.2\text{A} \tag{2-4} $$

结合(2-1)(2-3)(2-4)得出电池端的最大电流为：

$$ {}_bI^{total} = {}_bI_M^R + {}_bI_M^{dualarm} + {}_bI_M^{hand} = 81.6\text{A} > {}_bI_M \tag{2-5} $$

可见，移动平台的电池并不足以满足两台 UR5 的需求，因此，添加一块 48V30Ah 的锂电池单独对其中一个 UR5 供电，移动平台电池负责剩余设备的供电。

2.3 BeatGo 仿真系统

2.3.1 仿真架构

BeatGo 的仿真框架在机器人操作系统 ROS 下进行搭建，图 2-4 展示了基于 ros_control 框架进行仿真系统构建的总体框图。该仿真框架可分为三层，第一层为应用层，第二层为 ros_control 层，其包括控制器层、硬件资源接口层和硬件抽象层三部分；最后一层为仿真机器人或者实物机器人层。基于 ros_conrol 的机器人仿真平台或者实物控制平台的运行流程如下：首先，应用层交互端接受用户高级指令，进而调用第三方功能包对不同种类运动系统进行运动规划；控制器层接受应用层中的运动指令并结合当前关节状态解算关节驱动，关节驱动通过硬件资源接口层传递给硬件抽象层，硬件抽象层将关节驱动转换成驱动机器人的电机驱动，从而驱动仿真机器人或者实际机器人。

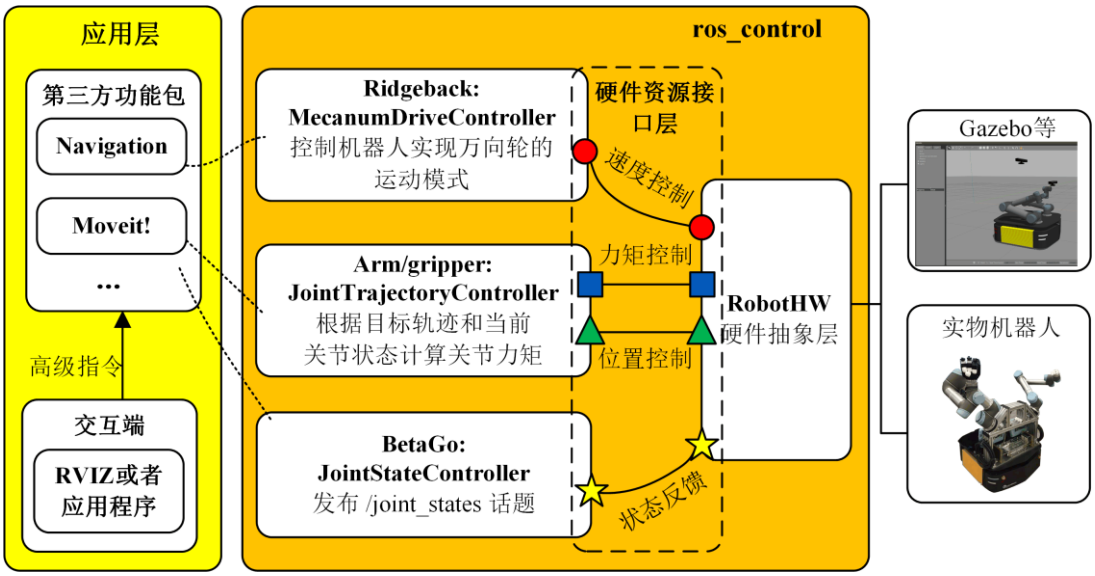


图 2-4 ROS 机器人操作系统下 ros_control 仿真架构

图 2-5 更加具体地展示了 BetaGo 仿真架构的模块和数据流。值得指出的是，在该实例中包含两个 PID 闭环：第一个闭环由绿色和天蓝色箭头组成，JointTrajectoryController 接收到 Moveit!发出的轨迹指令，计算关节力矩，根据蓝色箭头流驱动关节运动，绿色箭头流反馈当前关节状态至控制器；第二个闭环由绿色箭头和紫色箭头组成，Mecanum DriveController 接收到速度指令，解算出轮关节的速度，根据紫色箭头流驱动关节运动，绿色箭头流反馈当前关节状态。下面具体解释各个层的功能：

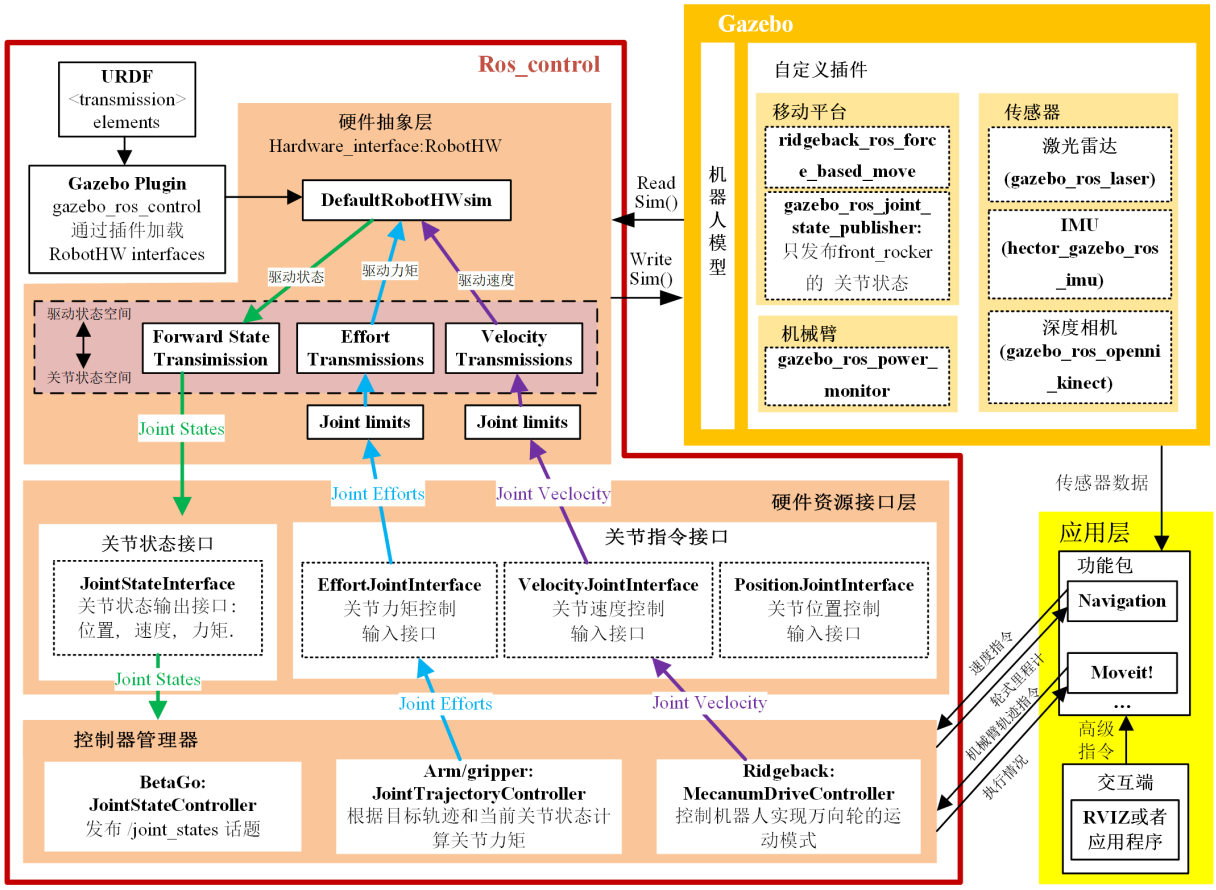


图 2-5 BetaGo 仿真框架，基于 ros_control 框架的实例化

控制器管理器负责管理控制器整个生命周期，管理来往于硬件接口的硬件资源，以及处理控制器之间的资源冲突。图 2-5 中可见，控制器管理器管理着 BetaGo 的三个控制器。JointStateController 负责发布关节状态（/joint_states）话题，/joint_states 是 Gazebo 中 BetaGo 各个主动关节或者某些指定的被动关节的状态信息。双臂或者灵巧手的 JointTrajectoryController 负责执行来自 Moveit!的轨迹。MecanumDriveController 控制移动平台的四个轮子实现全向运动。

控制器和硬件抽象层通过硬件接口层传递资源，JointStateInterface 为 JointStateController 获取关节信息（位置、速度、力矩）提供接口，EffortJointInterface 为 JointTrajectoryController 发送关节力矩信息提供接口，VelocityJointInterface，PositionJointInterface 与 EffortJointInterface 类似。

硬件抽象层是框架骨干，通过 writeSim()和 readSim()方法直接与硬件打交道。该层还提供了 joint limits，torque conversion，state conversion 等功能。位置、速度、力矩等 Joint limit 在 URDF 文件中设定，由 joint_limit_interface 提供接口实现关节状态限制。

Transmission_interface 实现关节空间和驱动器空间的转换，如简单的减速器，四连杆，差速模型等。

自定义插件用来扩展硬件抽象层功能，它允许用户自己设置仿真的特性。传感器插件可以模拟传感器的行为然后以 ROS 消息的形式输出传感器测量信息。Ridgeback_ros_force_based_move 根据 twist 消息（线速度，角速度）对移动平台施加作用力使之移动。Gazebo_ros_joint_state_publisher 只发布 front_rocker 的关节状态，因为 JointStateController 只发布具有 hardware_interface 的关节的状态，而 front_rocker 是被动关节，不具有 hardware_interface，因此，需要单独的 gazebo_ros_joint_state_publisher 进行发布。

2.3.2 Gazebo+Moveit!联合仿真

仿真环境的主要平台为 Gazebo[83]，Gazebo 是 Nathan Koenig 在 2004 年开源的 3 维动力学仿真器。提供了多体动力学仿真、传感器仿真、高质量的环境渲染以及丰富可扩展的插件等功能，主要用于室内外机器人的仿真，包括地面机器人，飞行机器人等。Moveit![84]是 Sachin Chitta 在 2012 年开源的机器人操作框架，能够实现运动规划、抓取、逆运动学求解、避障等功能，已经运用在 150 多款机器人上。

仿真环境搭建的难点在于 Gazebo 和 Moveit!的联合仿真。Moveit!只能进行运动学的仿真。Moveit!单独仿真和 Moveit!+Gazebo 联合仿真最本质的区别为 Moveit!单独仿真是运动学仿真，Moveit!+Gazebo 联合仿真是考虑了重力加速度及机器人惯量的仿真。

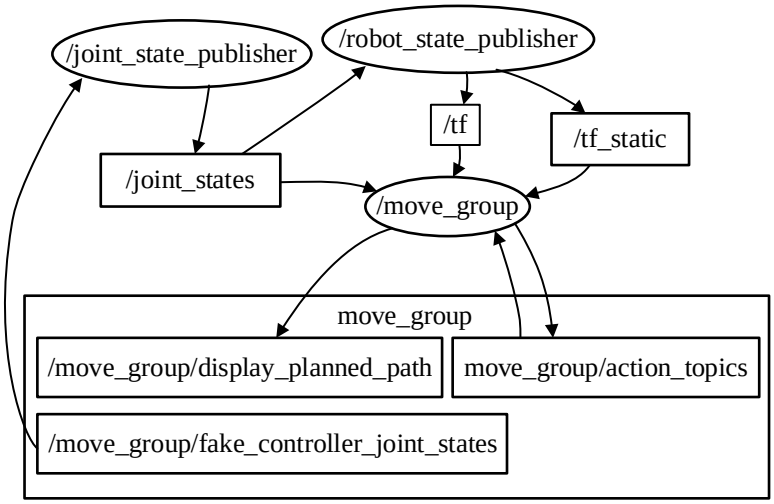


图 2-6 BetaGo 的 Moveit!单独仿真节点图

图 2-6 是单纯的 Moveit!运动学仿真，/move_group 节点规划后的轨迹会通过虚拟关

节状态控制器（fake_controller_joint_states）发布给/joint_state_publisher 节点， /joint_state_publisher 节点会更新关节状态消息（/joint_states），rivz 通过关节状态消息对机器人状态进行可视化。不涉及机器人惯量方面的仿真，只是运动学上的可视化。

图 2-7 是 Moveit!+Gazebo 联合仿真的节点图。/move_group 节点规划后的轨迹消息通过 action 话题发布给 /gazebo 中的关节轨迹控制器，关节轨迹控制器通过控制算法让机器人关节跟随该轨迹，/gazebo 中的关节状态控制器会反馈仿真环境中关节的真实状态，进行闭环控制，rivz 通过关节状态消息对机器人状态进行可视化，是考虑了重力加速度及机器人惯量的仿真。

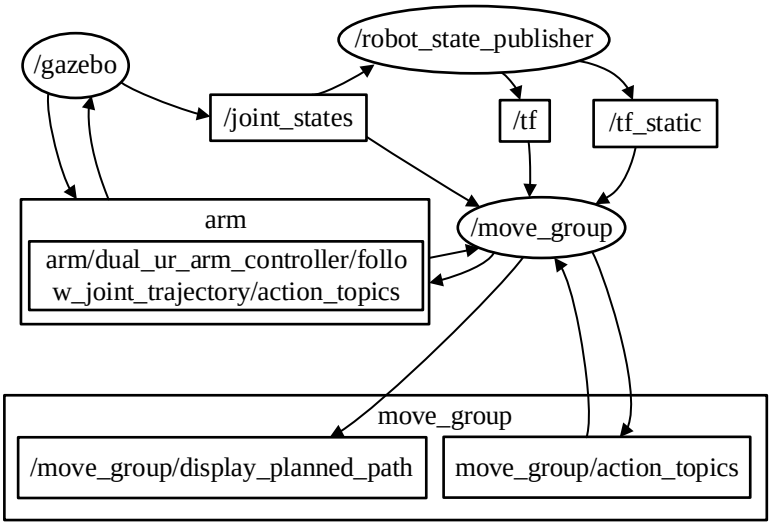


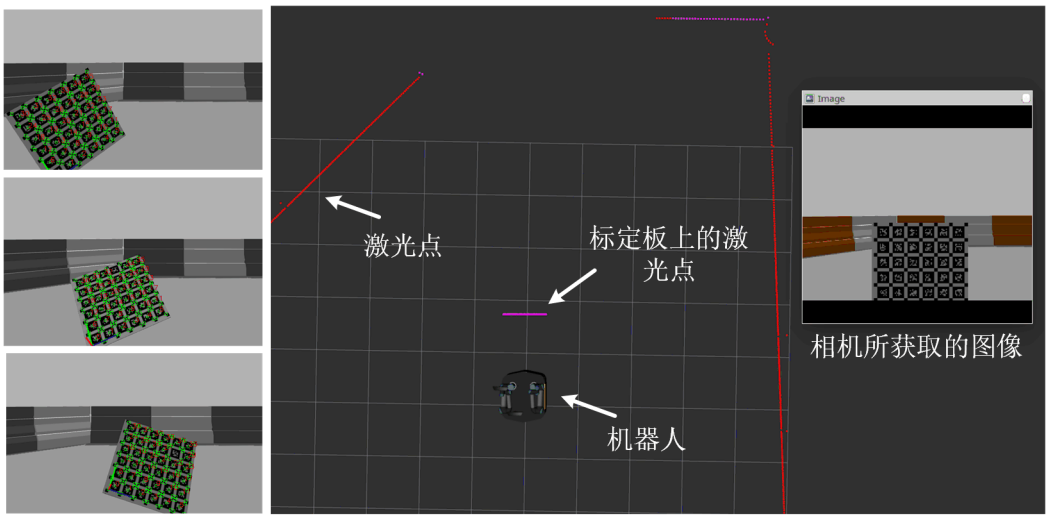
图 2-7 BetaGo 的 Gazebo+Moveit!联合仿真节点图

2.4 基于仿真系统的实验研究

为了验证该仿真系统的有效性，本节使用该仿真系统进行了单线激光雷达和相机的外参标定以及多传感器融合 SLAM 仿真实验。

2.4.1 单线激光雷达-相机的外参标定

为了融合视觉和激光雷达的测量信息，需要通过外参将两种传感器表示在统一的参考坐标系下。基于该仿真系统标定单线激光雷达-相机外参的方案为：1) 制作标定板模型，在 sdf 脚本里定义一个标定板载体（box），并定义纹理为标定板图片（用户可以直接使用本文开源文件中的模板进行替换以制作不同种类的标定板）；2) 如图 2-8 所示，在仿真系统中合适范围内随机放置标定板（开源代码提供了一个在随机范围内放置标定板的程序，用户可以直接修改范围以实现标定板的放置），然后录制激光雷达点云和图像消息为 bag 包；3) 使用基于 ROS 消息框架的标定程序读取 bag 包进行标定。



a) b)

图 2-8 a) 仿真系统中随机放置标定板；b) 将图像和激光点录制成 bag 包

如图 2-9 所示，以文献[85]提出的优化激光点到标定板平面距离的方法和对应的开源方案[86]为基础，采用上述流程对 BeatGo 的激光雷达和视觉传感器之间的外参进行标定。优化目标为：

$$\boldsymbol{R}_{cl},\hat{\boldsymbol{t}}_{cl}=\arg\min_{\boldsymbol{R}_{cl},\boldsymbol{t}_{cl}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N_i}\sum_{m=1}^{N_i}\left\|e_m\right\|^2 \tag{2-6}$$

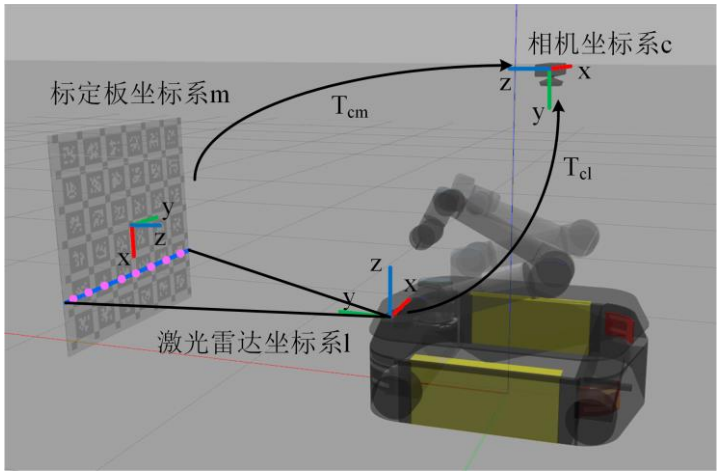


图 2-9 单线激光雷达-相机外参标定原理图

$\boldsymbol{R}_{cl}$ 和 $\boldsymbol{t}_{cl}$ 分别是激光雷达和相机之间外参的旋转和平移部分，激光雷达的点 $\boldsymbol{P}^l$ 经过 $\boldsymbol{R}_{cl}$ 和 $\boldsymbol{t}_{cl}$ 转换到相机坐标系下的标定板平面上，由于传感器噪声，无法完全满足点在平面上，存在误差：$e=\boldsymbol{n}^{cT}\left(\boldsymbol{R}_{cl}\boldsymbol{P}^l+\boldsymbol{t}_{cl}\right)+d^c$。$N$ 代表采集的 N 个标定板视图，N_i 是落在标定板 N 上的激光点个数，用 N_i 的倒数进行缩放保证点多和点少的视图的权重是一样的。

标定过程中假设内参已知，也可使用 OpenCV、Matlab、Kalibr 等开源工具进行标定，外参真值从 Gazebo 中读取，具体真值列于表 2-5。

如图 2-10 所示，将标定板上的激光点通过标定后的外参投影到图像上，得到标定板上绿色激光线，根据激光线的端点和标定板边界（图 2-10 红色边界）基本重合，以及周围环境中激光点和参考路障基本平行，可以判断标定结果合理。

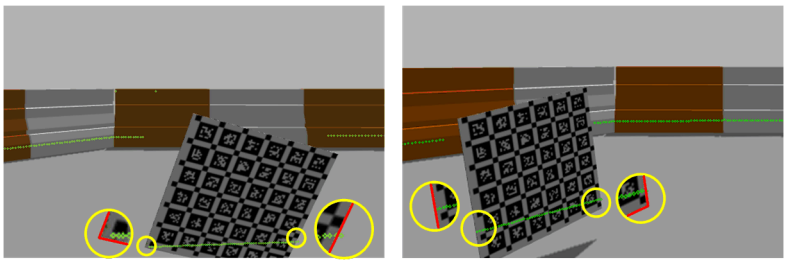


图 2-10 激光雷达相机外参标定结果可视化

为了进一步说明仿真系统的有效性，将标定的真值与标定结果列在表 2-5 中。Roll，Pitch，Yaw 是 $\boldsymbol{R}_{cl}$ 转换得到的 rpy 欧拉角的三个分量。平移 t_x，t_y，t_z 是 $\boldsymbol{t}_{cl}$ 的三个分量。

表 2-5 仿真环境下单线激光雷达和相机的标定结果

	真值	标定结果	误差
欧拉角 Roll (rad)	-1.5708	-1.5691	-0.0017
欧拉角 Pitch(rad)	0.0000	0.0008	0.0008
欧拉角 Yaw(rad)	-1.5708	-1.5682	-0.0026
平移 t_x(m)	-0.4801	-0.5092	0.0291
平移 t_y(m)	-0.0012	0.0080	-0.0092
平移 t_z(m)	0.8699	0.8298	0.0401

表 2-5 中 t_z 误差与参考算法原始文献[85]误差相比，平移误差多了 0.017m，为了分析其中原因，使用 SVD 分解分析可观性[74]，打印出算法优化完成后的海瑟矩阵的特征值（从大到小排列）：

$$\begin{bmatrix}58.40 & 25.40 & 12.35 & 2.467 & 1.084 & 0.134\end{bmatrix} \tag{2-7}$$

其中最小特征值对应的特征向量在 Z 轴方向上，因此 t_z 标定的可观性比较弱。另外，相机和激光雷达 Z 方向上偏置较大，为了保证激光点落在标定板上，标定板绕自身 Y 轴的转动范围有限，导致角速度激励有限。综上，Z 轴方向可观性不足导致误差变大。不过，t_z 的误差对于配备二维激光雷达的平面移动机器人影响极小，二维激光雷达帧间匹配只提供二维的位姿约束，不包括 Z 向约束。

实验结果表明旋转误差在 0.01 rad 以内，满足室内移动机器人的精度需求。此外，采用仿真系统进行标定算法验证还具有如下优点：1) 采用所搭建的基于 Gazebo 的仿真系统，用户可直接利用其中的传感器插件以获取传感器模拟数据，不需要专门编写程序进行生成；2) 在仿真系统中可方便制作和调用各类标定板，有效提升标定效率；3) 在仿真系统中可实时对标定板的可观性进行评估，进而对标定板位姿进行优选。

2.4.2 多传感器融合 SLAM 导航

融合过程如图 2-11 所示，初始化过程设置第一帧为世界坐标系，并设置初始状态 $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ 和协方差 $\boldsymbol{P}_0$，随之进行 IMU 惯性导航解算，即状态预测，激光里程计提供位姿观测，轮式里程计提供位姿和速度观测，经过卡尔曼滤波得到后验状态，后验状态给激光帧间匹配提供位姿初值，且轮式里程计和 IMU 惯性导航解算在后验状态的基础上进行积分，深度相机使用后验状态中的位姿对每一帧点云进行拼接。

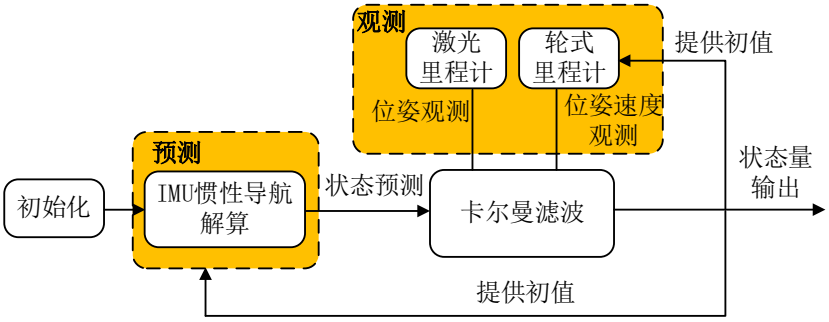
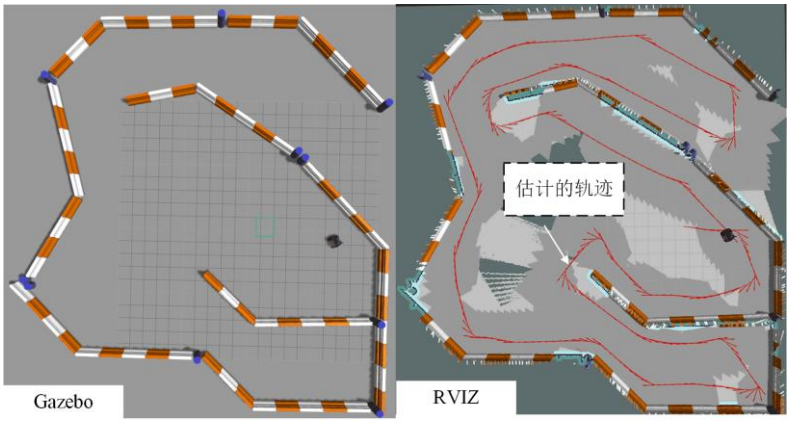


图 2-11 EKF 融合框架



a) b)

图 2-12 a) BetaGo 在 Gazebo 环境里运行；b) 多传感器融合 SLAM 导航在 RVIZ 中的可视化

如图 2-11，BetaGo 在仿真系统中运行多传感器融合 SLAM 导航，保存 BetaGo 估计的轨迹以及 BetaGo 在 Gazebo 中运行的真实轨迹，使用 evo[87]工具进行轨迹评测。

图 2-13 左图将轨迹误差用颜色可视化在每一个轨迹点上，其右侧颜色条的颜色和误差对应。图 2-13 右图揭示了轨迹误差随时间的变化。值的注意的是图 2-13 曲线的两个剧烈的误差抖动，抖动的关键节点在图中用序号标出，在节点①之前，轨迹误差整体呈上升趋势，节点①达到波峰，节点①附近姿态角度估计不足，使得估计的轨迹和真值轨迹存在 X 型交叉现象，因此产生误差迅速变小和迅速恢复（①->②->③）的现象，节点③->④->结束也存在同样的现象。

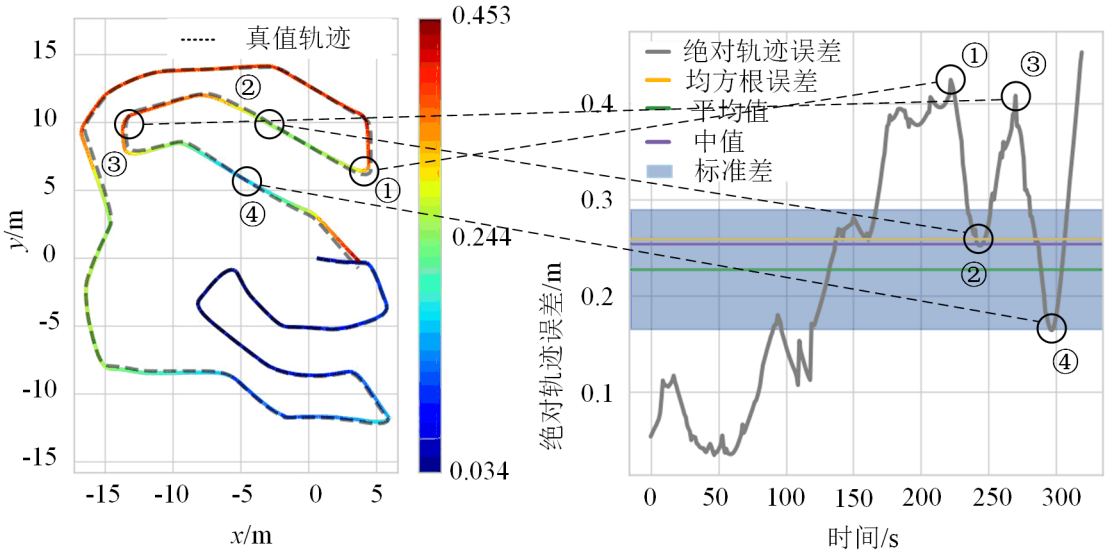


图 2-13 轨迹误差图

实验结果证明了构建的多传感器融合双臂移动机器人仿真系统可以有效地进行 SLAM 算法的研究，其功能贯穿传感器数据生成、SLAM 算法实现、真值获取、轨迹测评。并且具有以下优势：1) 轨迹真值易获取；2) 传感器内外参易获取，在算法研究前期，不必陷入标定的问题。

2.5 本章小结

本章搭建了一套多传感双臂移动机器人及其仿真实验系统。在仿真系统下进行多传感器联合标定和多传感器融合 SLAM 模拟实验，实验结果证明搭建的仿真系统可以有效地对设计的机器人系统和算法进行验证。本文将该仿真系统开源，其他研究学者可以在不搭建机器人的情况下直接使用 BeatGo 的仿真系统，进行各类复杂算法的测试、验证与开发。此外，该开源仿真系统也可为其他类似机器人系统的快速开发提供架构参考。

第三章 视觉-惯性-轮速融合定位方法研究

3.1 引言

由于测量特性互补，视觉-惯性融合的传感器配置在定位方案中被广泛采用[40, 43, 45, 50, 88, 89]。但是对于地面移动机器人，运动激励难以达到视觉-惯性融合的要求，尺度和姿态的可观性较弱，导致定位精度降低。一般地面移动机器人都配备轮速传感器，轮速传感器的运动测量具有绝对尺度，且不依赖环境，因此本章研究视觉-惯性-轮速融合定位方法以提高地面移动机器人的定位精度。

本章首先分析了基于 MAP 的视觉-惯性-轮速融合状态估计模型和因子图模型，然后简要介绍采用的视觉-惯性因子，接着着重推导了轮速因子，根据实验环境的特点，引入了平面因子，为了实现效率和精度的平衡，将滑动窗口算法和边缘化理论扩展到视觉-惯性-轮速融合里，最后通过仿真实验对所提轮速因子、平面因子以及整个视觉-惯性-轮速融合定位方法进行验证。

3.2 视觉-惯性-轮速融合状态估计及因子图表征

3.2.1 坐标系定义

如图 3-1 所示，主要使用的坐标系分别为相机坐标系 C 、IMU 坐标系 B 、轮速坐标系 O 、平面坐标系 π 和世界坐标系 W 。使用李群 $\boldsymbol{T}_{\mathcal{F}_2}^{\mathcal{F}_1} \in SE(3)$ 表示坐标系之间的变换，且建模过程使用的旋转表示有旋转矩阵 $\boldsymbol{R} \in SO(3)$ 、单位四元数 $\boldsymbol{q}$ 和旋转向量 $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{so}(3)$ 。

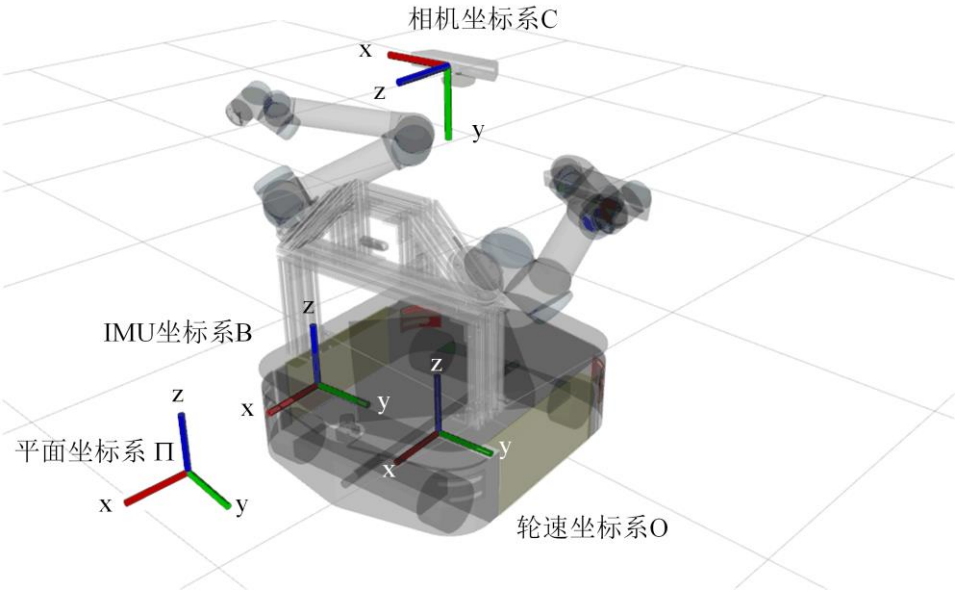


图 3-1 BetaGo 主要坐标系

3.2.2 基于最大后验的视觉-惯性-轮速融合状态估计

视觉-惯性-轮速融合的核心方程包括运动方程（惯性和轮速）和观测方程（视觉）：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_B\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k^B\right) + \boldsymbol{n}_{Bk} \\ \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}_O\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_k^O\right) + \boldsymbol{n}_{Ok} \quad k = 1, \ldots, N \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}_k\right) + \boldsymbol{n}_{zk} \end{cases} \tag{3-1}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是状态量，k 代表不同时刻，$\boldsymbol{u}_k^B$ 是惯性测量，$\boldsymbol{n}_{Bk}$ 是测量噪声，服从高斯分布 $\boldsymbol{n}_{Bk} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k^B\right)$，$\boldsymbol{f}_B()$ 是运动方程，表征前一个时刻状态根据惯性测量转换到当前时刻状态的过程。同理，$\boldsymbol{u}_k^O$ 是轮速测量，$\boldsymbol{n}_{Ok}$ 是测量噪声，服从高斯分布 $\boldsymbol{n}_{Ok} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k^O\right)$，$\boldsymbol{f}_O()$ 是运动方程。$\boldsymbol{z}$ 是观测量，$\boldsymbol{n}_{zk}$ 是观测噪声，服从高斯分布 $\boldsymbol{n}_{zk} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k^z\right)$，$\boldsymbol{h}()$ 是观测方程，表征在状态量 $\boldsymbol{x}$ 下得到的观测信息。

令状态量 $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_l, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$，观测量 $\boldsymbol{Z} = \{\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n\}$，$\boldsymbol{U}_B = \{\boldsymbol{u}_{B1}, \boldsymbol{u}_{B2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{Bn}\}$ 是惯性测量，$\boldsymbol{U}_O = \{\boldsymbol{u}_{O1}, \boldsymbol{u}_{O2}, \cdots, \boldsymbol{u}_{On}\}$ 是轮速测量，$\boldsymbol{X}$ 的最优估计通过求解下式获得：

$$\boldsymbol{X}^* = \arg\max P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O) \tag{3-2}$$

$P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O)$ 为后验分布，根据贝叶斯公式可以进行分解：

$$P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O) = \frac{P(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O \mid \boldsymbol{X}) P(\boldsymbol{X})}{P(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O)} \propto \underbrace{P(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O \mid \boldsymbol{X})}_{\text{似然}} \underbrace{P(\boldsymbol{X})}_{\text{先验}} \tag{3-3}$$

这里把分母略去，因为它和 $\boldsymbol{X}$ 无关。观测量 $\boldsymbol{Z}$、惯性测量 $\boldsymbol{U}_B$ 和轮速测量 $\boldsymbol{U}_O$ 在给定状态量 $\boldsymbol{X}$ 时是条件独立的，因此：

$$P(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O \mid \boldsymbol{X}) = \underbrace{P(\boldsymbol{Z} \mid \boldsymbol{X})}_{\text{观测}\boldsymbol{h}()} \underbrace{P(\boldsymbol{U}_B \mid \boldsymbol{X})}_{\text{运动}\boldsymbol{f}_B()} \underbrace{P(\boldsymbol{U}_O \mid \boldsymbol{X})}_{\text{运动}\boldsymbol{f}_O()} \underbrace{P(\boldsymbol{X})}_{\text{先验}} \tag{3-4}$$

假设各个观测都是独立的，可以将 $P(\boldsymbol{Z} \mid \boldsymbol{X})$ 分解为：

$$P(\boldsymbol{Z} \mid \boldsymbol{X}) = \prod_{k=0}^{K} P(\boldsymbol{z}_k \mid \boldsymbol{x}_k) \tag{3-5}$$

对于 $P(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{X})$，假设运动输入是独立的，可以展开为：

$$P(\boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{X}) = \prod_{k=1}^{K} P(\boldsymbol{u}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k) \tag{3-6}$$

把(3-3)-(3-6)代入(3-2)：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^* &= \arg\max P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U}_B, \boldsymbol{U}_O) \\
&= \arg\max \underbrace{P(\boldsymbol{X})}_{\text{先验}} \underbrace{\prod_{k=0}^{N} P(\boldsymbol{z}_k \mid \boldsymbol{x}_k)}_{\text{观测}\boldsymbol{h}()} \underbrace{\prod_{k=1}^{N} P(\boldsymbol{u}_{Bk} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k)}_{\text{运动}\boldsymbol{f}_B()} \underbrace{\prod_{k=1}^{N} P(\boldsymbol{u}_{Ok} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_k)}_{\text{运动}\boldsymbol{f}_O()}
\end{aligned}
\tag{3-7}
$$

式(3-7)是基于 MAP 的视觉-惯性-轮速融合状态估计的核心问题。

3.2.3 状态估计的因子图表征

因子图[90]可以清晰地表示 MAP 估计中优化变量和约束的关系。因子图是一种二分图 $G=(\mathcal{F},\boldsymbol{X},\mathcal{E})$，图中包括两类节点：因子节点 $f_i \in \mathcal{F}$ 和变量节点 $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{X}$。边 $e_{ij} \in \mathcal{E}$ 连接因子节点和变量节点[91]。一个因子图 G 定义了一个函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的因式分解：

$$
f(\boldsymbol{X}) = \prod_i f_i(\boldsymbol{X}_i) \tag{3-8}
$$

式中 $\boldsymbol{X}_i$ 是与因子 f_i 有边相连的变量 $\boldsymbol{x}_j$ 的集合，每个因子 f_i 是变量 $\boldsymbol{X}_i$ 的函数，目标是找到最优的 $\boldsymbol{X}^*$ 使得(3-8)最大：

$$
\boldsymbol{X}^* = \arg\max f(\boldsymbol{X}) \tag{3-9}
$$

式(3-9)等价于式(3-7)MAP 问题，MAP 问题对应最小化负对数后验概率[92]，对式(3-7)取负对数可得到如下最小化问题：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^* &= \arg\min(-\log P(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{U})) \\
&= \arg\min \begin{pmatrix} -\log P(\boldsymbol{X}) + \sum_{k=0}^{N} -\log P(\boldsymbol{z}_k \mid \boldsymbol{x}_k) \\ + \sum_{k=1}^{N} -\log P(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{Bk}) + \sum_{k=1}^{N} -\log P(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{Ok}) \end{pmatrix} \\
&= \arg\min(\| \boldsymbol{r}_p \|^2_{\boldsymbol{Q}^{p^{-1}}} + \sum_{k=0}^{K} \| \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{z}k} \|^2_{\boldsymbol{Q}_k^{\boldsymbol{z}^{-1}}} + \sum_{k=1}^{K} \| \boldsymbol{r}_{Bk} \|^2_{\boldsymbol{Q}_k^{B^{-1}}} + \sum_{k=1}^{K} \| \boldsymbol{r}_{Ok} \|^2_{\boldsymbol{Q}_k^{O^{-1}}})
\end{aligned}
\tag{3-10}
$$

式中 $\boldsymbol{r}_p$ 为先验残差项，$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{z}k}$ 为观测残差项，$\boldsymbol{r}_{Bk}$ 为惯性测量残差项，$\boldsymbol{r}_{Ok}$ 为轮速测量残差项，$\boldsymbol{Q}^p$、$\boldsymbol{Q}_k^{\boldsymbol{z}}$、$\boldsymbol{Q}_k^B$ 和 $\boldsymbol{Q}_k^O$ 分别是先验、观测、惯性测量和轮速测量的协方差矩阵。观测对应本文的视觉观测，运动输入对应本文的 IMU 和轮速测量。式(3-10)对应的因子图为图 3-2 所示，状态量 $\boldsymbol{X}$ 包括位姿节点和路标节点，先验残差项 $\boldsymbol{r}_p$ 与先验因子对应，观测残差项 $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{z}k}$ 与视觉测量因子对应，惯性测量残差项 $\boldsymbol{r}_{Bk}$、轮速测量残差项 $\boldsymbol{r}_{Ok}$ 与运动约束因子对应。

式(3-10)与图 3-2 表示同一个状态估计问题，可以使用非线性优化方法求解，高斯牛

顿（Gauss Netwon）及其衍生的方法如列文伯格-马尔夸特（Levenberg Marquadt）、DogLeg 是 SLAM 常用的非线性优化算法，集成在非线性优化库 Ceres[93]中。

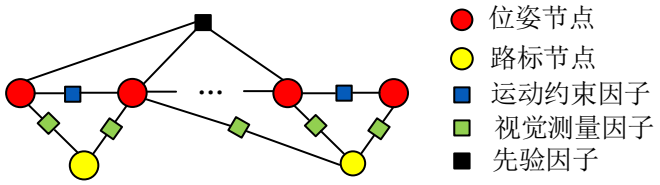


图 3-2 典型因子图

求解需要定义的五要素分别为状态量、残差、增量更新方式、雅可比矩阵以及协方差矩阵。状态量为 $\boldsymbol{X}$；残差为先验残差 $\boldsymbol{r}_p$、观测残差 $\boldsymbol{r}_{zk}$、惯性测量残差项 $\boldsymbol{r}_{Bk}$ 和轮速测量残差项 $\boldsymbol{r}_{Ok}$；增量更新方式定义为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\oplus\delta\boldsymbol{X}$；雅可比矩阵分别为 $\boldsymbol{J}_p$、$\boldsymbol{J}_{zk}$、$\boldsymbol{J}_{Bk}$ 和 $\boldsymbol{J}_{Ok}$；协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{Q}^p$、$\boldsymbol{Q}_k^z$、$\boldsymbol{Q}_k^B$ 和 $\boldsymbol{Q}_k^O$。高斯牛顿类方法使用 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}$ 代替海瑟（Hessian）矩阵复杂的计算，先验残差 $\boldsymbol{r}_p$、观测残差 $\boldsymbol{r}_{zk}$、惯性测量残差 $\boldsymbol{r}_{Bk}$ 和轮速测量残差 $\boldsymbol{r}_{Ok}$ 对应的海瑟矩阵分别为 $\boldsymbol{H}_p$、$\boldsymbol{H}_{zk}$、$\boldsymbol{H}_{Bk}$ 和 $\boldsymbol{H}_{Ok}$。状态量增量求解：

$$\left(\boldsymbol{H}_p+\boldsymbol{H}_z+\boldsymbol{H}_B+\boldsymbol{H}_O\right)\delta\boldsymbol{X}=\left(\boldsymbol{b}_p+\boldsymbol{b}_z+\boldsymbol{b}_B+\boldsymbol{b}_O\right) \tag{3-11}$$

式中 $\boldsymbol{H}_z=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{H}_{zk}$，$\boldsymbol{H}_B=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{H}_{Bk}$，$\boldsymbol{H}_O=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{H}_{Ok}$，$\boldsymbol{b}_p=-\boldsymbol{J}_p^T\boldsymbol{r}_p$，$\boldsymbol{b}_z=-\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{J}_{zk}^T\boldsymbol{r}_{zk}$，$\boldsymbol{b}_B=-\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{J}_{Bk}^T\boldsymbol{r}_{Bk}$，$\boldsymbol{b}_O=-\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{J}_{Ok}^T\boldsymbol{r}_{Ok}$，随后，状态量进行更新：

$$\boldsymbol{X}\leftarrow\boldsymbol{X}\oplus\delta\boldsymbol{X} \tag{3-12}$$

状态量更新后进入下一次计算残差—>线性化—>增量求解—>增量更新—>收敛判断的迭代过程。

3.3 视觉-惯性-轮速融合理论建模

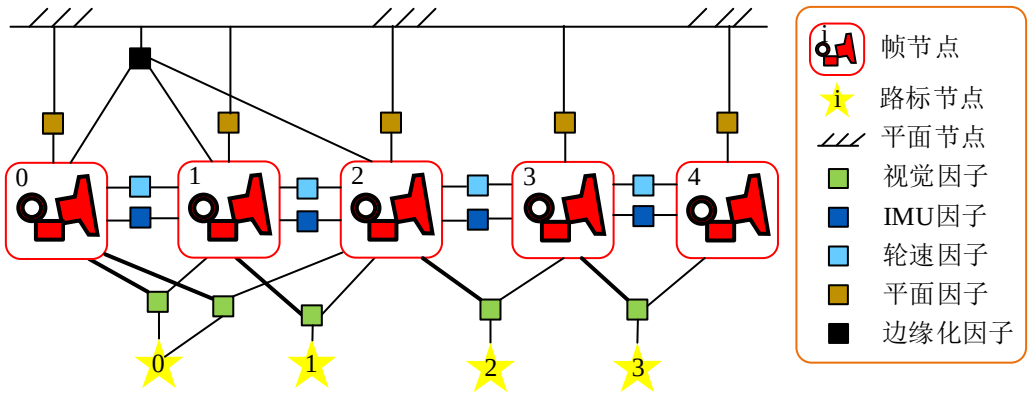


图 3-3 视觉-惯性-轮速融合因子图模型

图 3-3 是所提视觉-惯性-轮速融合因子图模型，以视觉为观测，以 IMU、轮速为运动约束，根据地面机器人的运动特性，添加了平面约束，通过滑动窗口算法实现精度与效率的平衡，因此引入了边缘化先验。以上约束分别对应视觉因子、IMU 因子、轮速因子、平面因子和边缘化因子。节点包括帧节点、路标节点和平面节点。

如图 3-4 所示，帧节点包含的变量有位置 $\boldsymbol{p}_B^W$、速度 $\boldsymbol{v}_B^W$、姿态 $\boldsymbol{q}_B^W$、陀螺仪偏差 $\boldsymbol{b}^g$、加速度计偏差 $\boldsymbol{b}^a$；路标节点通过逆深度 λ 建模；平面节点包含的变量有姿态 $\boldsymbol{\theta}_W^\pi$ 和 Z 轴上的平移 z_W^π。与变量同一行的颜色块对应因子图中约束该变量的因子。

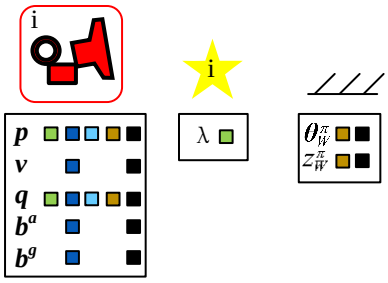


图 3-4 节点变量与相关因子

本节剩余内容将围绕该视觉-惯性-轮速融合因子图的因子展开，所采用的视觉-惯性因子将会在 3.3.1 节简要描述，轮速因子将会在 3.3.2 节详细描述，平面因子将会在 3.3.3 节详细描述，边缘化因子将会在 3.3.4 节详细描述，因子图随着每一节因子的引入从简到繁逐步构建，并给出每个因子的非线性优化五要素。

3.3.1 视觉-惯性因子

IMU 高频、不依赖环境但漂移较大的测量特点和相机低频，依赖环境但漂移较小的测量特点具有天然的互补，视觉-惯性融合方案已被广泛使用，本节对采用的视觉-惯性因子作简要描述。

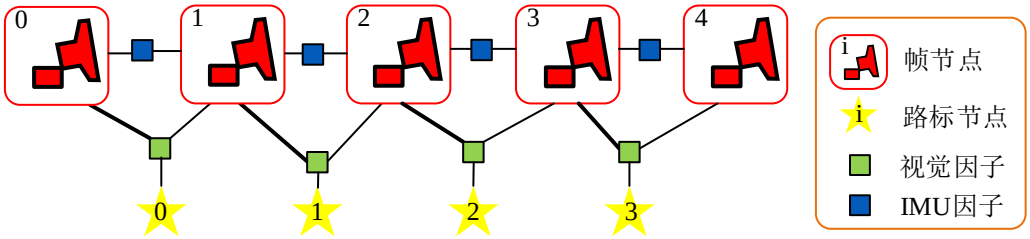


图 3-5 视觉-惯性融合因子图模型

视觉-惯性融合的因子图模型如图 3-5 所示，状态变量如图 3-6 所示。帧节点包含的变量有位置 $\boldsymbol{p}_B^W$、速度 $\boldsymbol{v}_B^W$、姿态 $\boldsymbol{q}_B^W$、陀螺仪偏差 $\boldsymbol{b}^g$、加速度计偏差 $\boldsymbol{b}^a$，路标节点使用

逆深度 λ 建模，即待估计的状态量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}\right] \\ \boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{Bi}^W, \boldsymbol{v}_{Bi}^W, \boldsymbol{q}_{Bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g\right] \end{aligned} \tag{3-13}$$

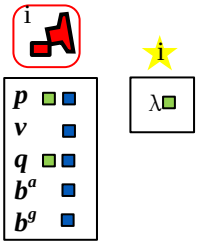


图 3-6 节点变量与相关因子

状态量的更新方式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_{Bi}^W &\leftarrow \boldsymbol{p}_{Bi}^W + \delta \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{v}_{Bi}^W &\leftarrow \boldsymbol{v}_{Bi}^W + \delta \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{q}_{Bi}^W &\leftarrow \boldsymbol{q}_{Bi}^W \otimes \delta \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{b}_i^a &\leftarrow \boldsymbol{b}_i^a + \delta \boldsymbol{b}^a \\ \boldsymbol{b}_i^g &\leftarrow \boldsymbol{b}_i^g + \delta \boldsymbol{b}^g \\ \lambda_k &\leftarrow \lambda_k + \delta \lambda \end{aligned} \tag{3-14}$$

■ 视觉因子

主帧上的特征点投影至客帧产生的重投影误差为视觉因子，特征点被观测到的起始帧为其主帧（图 3-5 加粗的边所连帧为主帧），后续观测到该特征点的帧为客帧。一般地，路标点 $\boldsymbol{l}_k^W$ 的主帧为 C_i，在主帧上的观测为 $\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{l}_k}^{C_i} = \left[\tilde{u}_k^i, \tilde{v}_k^i\right]^T$，在客帧上的观测为 $\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{l}_k}^{c_j} = \left[\tilde{u}_k^j, \tilde{v}_k^j\right]^T$，则重投影误差为[94]：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{\mathcal{C}}(\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{l}_k}^{c_j}, \boldsymbol{X}) &= \begin{bmatrix} \dfrac{lx_k^j}{lz_k^j} - \tilde{u}_k^j \\ \dfrac{ly_k^j}{lz_k^j} - \tilde{v}_k^j \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{l}_k^{c_j} &= \begin{bmatrix} lx_k^j \\ ly_k^j \\ lz_k^j \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_c^{b^T} \boldsymbol{R}_{b_j}^{W^T} \boldsymbol{R}_{b_i}^W \boldsymbol{R}_c^b \frac{1}{\lambda_k} \begin{bmatrix} \tilde{u}_k^i \\ \tilde{v}_k^i \\ 1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}_c^{b^T} \left(\boldsymbol{R}_{b_j}^{W^T} \left(\left(\boldsymbol{R}_{b_i}^W \boldsymbol{p}_c^b + \boldsymbol{p}_{bi}^W \right) - \boldsymbol{p}_{bj}^W \right) - \boldsymbol{p}_c^b \right) \end{aligned} \tag{3-15}$$

式中 $\left[\boldsymbol{R}_c^b, \boldsymbol{p}_c^b\right]$ 为相机和 IMU 之间的外参，这里不涉及外参的标定，认为外参是已知量，$\mathcal{C}$ 是视觉测量集合，即 $(k, j) \in \mathcal{C}$。

状态量的更新方式为：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_{bi}^{W} \leftarrow \boldsymbol{p}_{bi}^{W} + \delta \boldsymbol{p} \\
&\boldsymbol{q}_{bi}^{W} \leftarrow \boldsymbol{q}_{bi}^{W} \otimes \delta \boldsymbol{q}, \quad \delta \boldsymbol{q} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\lambda_k \leftarrow \lambda_k + \delta\lambda
\end{aligned} \tag{3-16}$$

残差相对状态量的雅可比矩阵可参考 VINS-Fusion[49]，本文并没有对其做出改动，故在正文中省略。

假设 j 帧像素误差的协方差为 $\boldsymbol{Q}_j^{pixel}$，根据归一化平面坐标和像素坐标的线性关系：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{norm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x} & \\ & \frac{1}{f_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{pixel} - \begin{bmatrix} \frac{c_x}{f_x} \\ \frac{c_y}{f_y} \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

可得出归一化平面像素误差的协方差：

$$\boldsymbol{Q}_j^{norm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x} & \\ & \frac{1}{f_y} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}_j^{pixel} \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x} & \\ & \frac{1}{f_y} \end{bmatrix}^T \tag{3-18}$$

■ IMU 因子

IMU 提供预积分形式的帧间运动约束。

(1) IMU 测量模型

只考虑高斯白噪声和偏差时，IMU 的测量模型为：

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B &= \boldsymbol{\omega}^B + \boldsymbol{b}^g + \boldsymbol{n}^g \\
\tilde{\boldsymbol{a}}^B &= \boldsymbol{q}_W^B \left(\boldsymbol{a}^W + \boldsymbol{g}^W \right) + \boldsymbol{b}^a + \boldsymbol{n}^a
\end{aligned} \tag{3-19}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^B$ 为陀螺仪的测量值，$\boldsymbol{\omega}^B$ 为真实值，$\boldsymbol{n}^g \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}^g)$ 是测量噪声，$\tilde{\boldsymbol{a}}^B$ 为加速度计的测量值，$\boldsymbol{a}^W$ 为真实值，$\boldsymbol{g}^W$ 为重力向量，$\boldsymbol{n}^a \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}^a)$ 是测量噪声。陀螺仪偏差 $\boldsymbol{b}^g$、加速度计偏差 $\boldsymbol{b}^a$ 建模为布朗运动[47]。

(2) IMU 预积分

在非线性优化迭代过程中，状态量始终在更新，IMU 的帧间测量通过积分得到，积分项与状态量没有解耦，状态量更新时，积分项需要重新积分 IMU 的测量值，这在优化过程中十分耗时，因此采用预积分[47]作为帧与帧之间的 IMU 因子，预积分的目的是

把 i 时刻的 IMU 状态量和得到 j 时刻状态量的积分进行解耦，直观地，状态量更新后无需重新积分。

IMU 的平移预积分 $\boldsymbol{\alpha}_{B_j}^{B_i}$、速度预积分 $\boldsymbol{\beta}_{B_j}^{B_i}$ 和旋转预积分 $\boldsymbol{q}_{B_j}^{B_i}$ 分别为：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{B_j}^{B_i} &= \iint_{t\in[i,j]} \left(\boldsymbol{q}_{B_t}^{B_i}\boldsymbol{a}^{B_t}\right)\delta t^2 \\
\boldsymbol{\beta}_{B_j}^{B_i} &= \int_{t\in[i,j]} \left(\boldsymbol{q}_{B_t}^{B_i}\boldsymbol{a}^{B_t}\right)\delta t \\
\boldsymbol{q}_{B_j}^{B_i} &= \int_{t\in[i,j]} \boldsymbol{q}_{B_t}^{B_i} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega^{B_t} \end{bmatrix} \delta t
\end{aligned} \tag{3-20}$$

IMU 因子残差项为：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_p \\ \boldsymbol{r}_q \\ \boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_{ba} \\ \boldsymbol{r}_{bg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_W^{B_i}\left(\boldsymbol{p}_{B_j}^W - \boldsymbol{p}_{B_i}^W - \boldsymbol{v}_{B_i}^W\Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^W\Delta t^2\right) - \boldsymbol{\alpha}_{B_j}^{B_i} \\ 2\left[\boldsymbol{q}_{B_i}^{B_j} \otimes \left(\boldsymbol{q}_W^{B_i} \otimes \boldsymbol{q}_{B_j}^W\right)\right]_{xyz} \\ \boldsymbol{q}_W^{B_i}\left(\boldsymbol{v}_j^W - \boldsymbol{v}_i^W + \boldsymbol{g}^W\Delta t\right) - \boldsymbol{\beta}_{B_j}^{B_i} \\ \boldsymbol{b}_j^a - \boldsymbol{b}_i^a \\ \boldsymbol{b}_j^g - \boldsymbol{b}_i^g \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

IMU 因子的雅可比矩阵与 VINS-Fusion 一致，本文不再赘述。

(3) 协方差传递

IMU 测量的协方差 $\boldsymbol{Q}^g$ 和 $\boldsymbol{Q}^a$ 以及偏差的协方差 $\boldsymbol{Q}^{bgd}$ 和 $\boldsymbol{Q}^{bad}$ 可以通过 Allan 方差法[95]标定，但是 IMU 因子里的测量为预积分，因此需要通过协方差传递获得预积分的协方差。将预积分误差写成递推形式：

$$\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{\theta}_{b_{k+1}}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{b_{k+1}}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{b}_{i,k+1}^a \\ \delta\boldsymbol{b}_{i,k+1}^g \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\alpha}_{b_k}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{\theta}_{b_k}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{\beta}_{b_k}^{b_i} \\ \delta\boldsymbol{b}_{i,k}^a \\ \delta\boldsymbol{b}_{i,k}^g \end{bmatrix} + \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_k^a \\ \boldsymbol{n}_k^g \\ \boldsymbol{n}_{k+1}^a \\ \boldsymbol{n}_{k+1}^g \\ \boldsymbol{n}_k^{bad} \\ \boldsymbol{n}_k^{bgd} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

根据协方差的正向传递[96]，预积分协方差可按如下方式递推：

$$\boldsymbol{Q}_{i,k+1}^b = \boldsymbol{F}\boldsymbol{Q}_{i,k}^b\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}^{nb}\boldsymbol{G}^T \tag{3-23}$$

式中 $\boldsymbol{Q}^{nb} = diag\left(\boldsymbol{Q}^a \quad \boldsymbol{Q}^g \quad \boldsymbol{Q}^a \quad \boldsymbol{Q}^g \quad \boldsymbol{Q}^{ba} \quad \boldsymbol{Q}^{bg}\right)$，预积分协方差初值 $\boldsymbol{Q}_{i,i}^b = \boldsymbol{0}_{15\times15}$。具体推导过程可参考文献[47, 94]。

(4) 预积分的偏差更新

预积分与状态量中的位置、速度、姿态解耦，但是将陀螺仪和加速度计的偏差加入状态量后，预积分不再和状态量完全解耦。偏差存在于预积分的计算中，状态量优化过程中，偏差会更新 $\boldsymbol{b} \leftarrow \bar{\boldsymbol{b}} + \delta \boldsymbol{b}$，为了避免重新积分，预积分使用一阶泰勒展开近似更新：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{b_j}^{b_i}(\boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{b}_i^a) &\simeq \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{b_j}^{b_i}(\bar{\boldsymbol{b}}_i^g, \bar{\boldsymbol{b}}_i^a) + \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{b_j}^{b_i}}{\delta \boldsymbol{b}^g} \delta \boldsymbol{b}_i^g + \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{b_j}^{b_i}}{\delta \boldsymbol{b}^a} \delta \boldsymbol{b}_i^a \\
\boldsymbol{\beta}_{b_j}^{b_i}(\boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{b}_i^a) &\simeq \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b_j}^{b_i}(\bar{\boldsymbol{b}}_i^g, \bar{\boldsymbol{b}}_i^a) + \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b_j}^{b_i}}{\delta \boldsymbol{b}^g} \delta \boldsymbol{b}_i^g + \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\beta}}_{b_j}^{b_i}}{\delta \boldsymbol{b}^a} \delta \boldsymbol{b}_i^a \\
\boldsymbol{q}_{b_j}^{b_i}(\boldsymbol{b}_i^g) &\simeq \bar{\boldsymbol{q}}_{b_j}^{b_i}(\bar{\boldsymbol{b}}_i^g) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \frac{\delta \bar{\boldsymbol{q}}_{b_j}^{b_i}}{\delta \boldsymbol{b}^g} \delta \boldsymbol{b}_i^g \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3-24}
$$

至此，视觉-惯性融合的优化五要素：状态量(3-13)、残差(3-15)(3-21)、增量更新方式(3-14)、雅可比矩阵（参考 VINS-Fusion）以及协方差矩阵(3-18)(3-23)已全部给出。

3.3.2 轮速因子

轮速传感器可以提供帧间的运动测量，加入了轮速因子的因子图模型如图 3-7 所示。

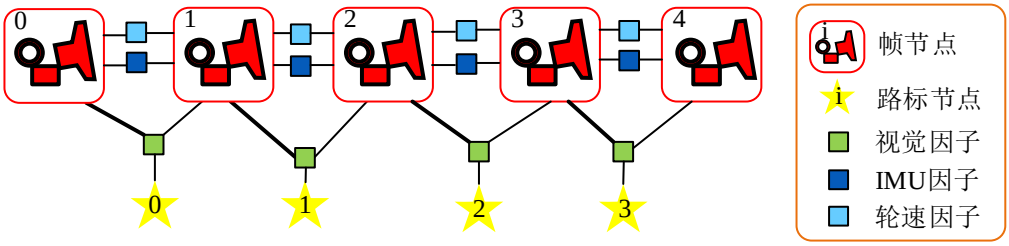


图 3-7 视觉-惯性-轮速融合因子图模型

如图 3-8 所示，加入轮速因子后，帧节点包含的变量有位置 $\boldsymbol{p}_B^W$、速度 $\boldsymbol{v}_B^W$、姿态 $\boldsymbol{q}_B^W$、陀螺仪偏差 $\boldsymbol{b}^g$、加速度计偏差 $\boldsymbol{b}^a$，路标节点使用逆深度建模，即待估计的状态量为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}\right] \\
\boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{bi}^W, \boldsymbol{v}_{bi}^W, \boldsymbol{q}_{bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g\right]
\end{aligned}
\tag{3-25}
$$

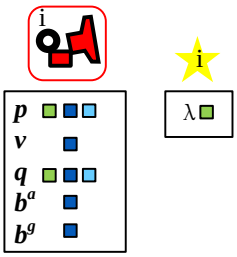


图 3-8 节点变量与相关因子

状态量的更新方式与式(3-14)保持一致。

■ 轮速测量模型

麦克纳姆轮的逆运动学模型为：

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(a+b) \\ 1 & 1 & -(a+b) \\ 1 & -1 & a+b \\ 1 & 1 & a+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^O \\ v_y^O \\ \omega_z^O \end{bmatrix} \tag{3-26}$$

式中$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}^T$是四个轮子的线速度，$\begin{bmatrix} v_x^O & v_y^O & \omega_z^O \end{bmatrix}^T$是期望的车身速度。逆运动学模型的伪逆即为正运动学模型：

$$\begin{bmatrix} v_x^O \\ v_y^O \\ \omega_z^O \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{3-27}$$

令$\boldsymbol{v}^O = \begin{bmatrix} v_x^O & v_y^O & 0 \end{bmatrix}^T, \boldsymbol{\omega}^O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_z^O \end{bmatrix}^T$为轮速传感器的测量。该测量受到高斯白噪声的影响$\boldsymbol{n}^\omega(t) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}^\omega)$，$\boldsymbol{n}^v(t) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}^v)$：

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{v}}^O(t) &= \boldsymbol{v}^O(t) + \boldsymbol{n}^v(t) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}^O(t) &= \boldsymbol{\omega}^O(t) + \boldsymbol{n}^\omega(t) \end{aligned} \tag{3-28}$$

为了根据轮速测量推算机器人的运动，引入如下运动学模型[97]：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}}_O^W &= \boldsymbol{R}_O^W \boldsymbol{\omega}^{O\wedge} \\ \dot{\boldsymbol{p}}_O^W &= \boldsymbol{v}_O^W \end{aligned} \tag{3-29}$$

式(3-29)描述了O系的位姿变化，对式(3-29)进行积分可以获得$t+\Delta t$时刻的位姿：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_O^W(t+\Delta t) &= \boldsymbol{R}_O^W(t) Exp\left(\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{\omega}^O(\tau) d\tau\right) \\ \boldsymbol{p}_O^W(t+\Delta t) &= \boldsymbol{p}_O^W(t) + \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{v}_O^W(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{3-30}$$

BetaGo 的轮速传感器测量频率为 50Hz，使用中值积分，我们可以得到轮速测量模型：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_O^W(t+\Delta t) &= \boldsymbol{R}_O^W(t) Exp(\bar{\boldsymbol{\omega}}^O \Delta t) \\ \boldsymbol{p}_O^W(t+\Delta t) &= \boldsymbol{p}_O^W(t) + \bar{\boldsymbol{v}}_O^W \Delta t \end{aligned} \tag{3-31}$$

式中$\bar{\boldsymbol{\omega}}^O$和$\bar{\boldsymbol{v}}_O^W$为为$t$时刻测量和$t+\Delta t$时刻测量的均值：

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\omega}}^{O} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^{O}(t)+\boldsymbol{\omega}^{O}(t+\Delta t)) \\
\bar{\boldsymbol{v}}_{O}^{W} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_{O}^{W}(t)+\boldsymbol{v}_{O}^{W}(t+\Delta t)) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_{O}^{W}(t)\boldsymbol{v}^{O}(t)+\boldsymbol{R}_{O}^{W}(t+\Delta t)\boldsymbol{v}^{O}(t+\Delta t))
\end{aligned}
\tag{3-32}
$$

将式(3-28)代入(3-32)：

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{\omega}}^{O} &= \frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{O}(t)+\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{O}(t+\Delta t)-\boldsymbol{n}^{\omega d}(t)-\boldsymbol{n}^{\omega d}(t+\Delta t)) \\
\bar{\boldsymbol{v}}_{O}^{W} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_{O}^{W}(t)+\boldsymbol{v}_{O}^{W}(t+\Delta t)) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{R}_{O}^{W}(t)(\tilde{\boldsymbol{v}}^{O}(t)-\boldsymbol{n}^{vd}(t))+\boldsymbol{R}_{O}^{W}(t+\Delta t)(\tilde{\boldsymbol{v}}^{O}(t+\Delta t)-\boldsymbol{n}^{vd}(t+\Delta t)))
\end{aligned}
\tag{3-33}
$$

式中，离散噪声 $\boldsymbol{n}^{\omega d}$ 的协方差可以通过采样频率和连续时间噪声的协方差得到[98]：

$$
\boldsymbol{Q}^{\omega d}=\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{Q}^{\omega},\boldsymbol{Q}^{vd}=\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{Q}^{v} \tag{3-34}
$$

■ 轮速流型预积分测量模型

虽然式(3-31)可以作为因子图里的帧间运动约束，但是它约束的是轮速测量频率下的状态量，这意味着需要在因子图里包含高频的状态量，直观来说，每个轮速测量时刻都需要在因子图里加入一个帧节点，状态量个数激增，使得优化问题维度过高，无法满足实时性。如图 3-9 所示，在关键帧 $k=i$ 和关键帧 $k=j$ 之间的轮速测量可以积分为一个复合测量值，称为预积分测量，该测量约束了连续两个关键帧之间的运动。预积分由 Luptont 首次提出，并使用欧拉角建模[99]，Forster 将其扩展到流型上[47]。

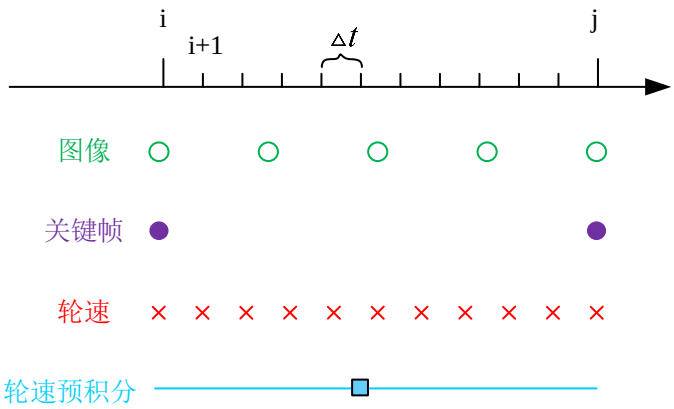


图 3-9 轮速预积分

假设轮速、IMU 和相机已经时间同步，如图 3-9 所示，对关键帧 $k=i$ 和关键帧 $k=j$ 之间的轮速测量进行积分：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{Oj}^{W} &= \boldsymbol{R}_{Oi}^{W}\prod_{k=i+1}^{j} Exp(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O}\Delta t)\\ \boldsymbol{p}_{Oj}^{W} &= \boldsymbol{p}_{Oi}^{W}+\sum_{k=i+1}^{j}\bar{\boldsymbol{v}}_{Ok}^{W}\Delta t\end{aligned} \tag{3-35}$$

虽然式(3-35)已经提供了t_i和t_j之间的运动估计，但是它有个缺点，它与状态量没有解耦，在非线性优化迭代过程中，状态量一旦改变，式(3-35)需要重新积分[45]。直观来说，$\boldsymbol{R}_{Oi}^{W}$的改变将会导致$\boldsymbol{R}_{Ok}^{W}, k=i+1,\cdots,j-1$都改变，需要重新积分轮速的测量值，这在优化过程中十分耗时。

为了避免状态量改变时重新积分，本文借鉴 Lupton 和 Foster 的做法[47, 99]，定义如下相对运动增量：

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i} &= \boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}\boldsymbol{R}_{Oj}^{W}=\prod_{k=i+1}^{j}Exp(\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O}\Delta t)=\prod_{k=i+1}^{j}Exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O}-\boldsymbol{n}_{k-1}^{\omega d}-\boldsymbol{n}_{k}^{\omega d})\Delta t\right)\\ \triangle\boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i} &= \boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}(\boldsymbol{p}_{Oj}^{W}-\boldsymbol{p}_{Oi}^{W})=\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\boldsymbol{R}_{O_{k-1}}^{O_i}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{O}-\boldsymbol{n}_{k-1}^{vd}\right)+\triangle\boldsymbol{R}_{O_k}^{O_i}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_{k}^{O}-\boldsymbol{n}_{k}^{vd}\right)\right)\Delta t\end{aligned} \tag{3-36}$$

该增量的积分过程与i时刻的状态量解耦。

式(3-36)将关键帧i、j的状态量（等式左侧）和轮速的测量（等式右侧）联系起来，从这个角度来说，它已经可以理解为一个测量模型了，但是噪声以比较复杂的形式存在于测量模型中，使得直接使用 MAP 变得困难。一般来说，MAP 估计需要清晰地定义测量的概率密度函数和对数似然。为了简化测量的对数似然，将预积分时间段内每一次轮速测量的噪声项复合成一个统一的预积分噪声项。

推导旋转预积分量的复合噪声项，首先引入李群的一阶近似：

$$\begin{aligned}&Exp(\boldsymbol{\theta}+\delta\boldsymbol{\theta})\approx Exp(\boldsymbol{\theta})Exp(\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta})\\ &Log(Exp(\boldsymbol{\theta})Exp(\delta\boldsymbol{\theta}))\approx\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{J}_r^{-1}(\boldsymbol{\theta})\delta\boldsymbol{\theta}\end{aligned} \tag{3-37}$$

以及旋转矩阵的右雅可比[100]$\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\theta})$，该雅可比将切空间上的简单扰动$\delta\boldsymbol{\theta}$和流型上的复杂扰动进行联系，当$\theta$为小量时，$\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\theta})\approx\boldsymbol{I}$。

然后使用李群的一阶近似和右雅可比重写旋转预积分量：

$$\begin{aligned}\triangle\boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i} &\simeq\prod_{k=i+1}^{j}\left(Exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O})\triangle t\right)Exp\left(-\boldsymbol{J}_r^{k}\bar{\boldsymbol{n}}_{k}^{\omega d}\triangle t\right)\right)\\ &=\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\prod_{k=i+1}^{j}Exp\left(-\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i^T}\boldsymbol{J}_r^{k}\bar{\boldsymbol{n}}_{k}^{\omega d}\triangle t\right)\\ &=\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}Exp(-\delta\boldsymbol{\theta}_{ij})\end{aligned} \tag{3-38}$$

式中 $\boldsymbol{J}_r^k = \boldsymbol{J}_r^k\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right)$，$\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_{k-1}^{\omega d} + \boldsymbol{n}_k^{\omega d})$。式(3-38)的最后一行，我们定义了预积分旋转测量 $\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i} = \prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right)$，以及它的复合噪声 $\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$，该噪声将会在下一节进一步分析。

接着推导平移预积分量的复合噪声表达式，推导之前引入小量 $\delta\boldsymbol{\theta}$ 的指数映射的一阶近似：

$$\mathrm{Exp}(\delta\boldsymbol{\theta}) \approx \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\theta}^\wedge \tag{3-39}$$

然后将式(3-38)代回式(3-36)中 $\triangle\boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}$ 的表达式里，对 $Exp(-\delta\boldsymbol{\theta}_{ij})$ 使用一阶近似(3-39)，丢弃高阶小量，可以得到：

$$\begin{aligned}
\triangle\boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i} &= \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}(1-\delta\boldsymbol{\theta}_{ik-1}^\wedge)\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^O - \boldsymbol{n}_{k-1}^{vd}\right) + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}(1-\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}^\wedge)\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_k^O - \boldsymbol{n}_k^{vd}\right)\right)\triangle t \\
&= \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^O + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^O\right)\triangle t \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{O\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik-1} + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^{O\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}\right)\triangle t \\
&\quad + \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(-\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\boldsymbol{n}_{k-1}^{vd} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\boldsymbol{n}_k^{vd}\right)\triangle t \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i} - \delta\boldsymbol{p}_{ij}
\end{aligned} \tag{3-40}$$

式中我们定义了预积分位移测量 $\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i} = \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^O + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^O\right)\triangle t$ 及其复合噪声 $\delta\boldsymbol{p}_{ij}$。

将式(3-38)和式(3-40)代回式(3-36) $\triangle\boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}$ 和 $\triangle\boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}$ 的原始定义中，最终得到轮速预积分测量模型：

$$\begin{aligned}
\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i} &= \boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}(\boldsymbol{p}_{Oj}^W - \boldsymbol{p}_{Oi}^W) + \delta\boldsymbol{p}_{ij} \\
\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i} &= \boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}\boldsymbol{R}_{Oj}^W Exp(\delta\boldsymbol{\theta}_{ij})
\end{aligned} \tag{3-41}$$

式中预积分测量被写成待估状态量“加上”随机噪声 $\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}^T \quad \delta\boldsymbol{p}_{ij}^T\right]^T$ 的形式，可以方便地使用 MAP 的对数似然。

预积分测量 $\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}$，$\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}$ 一般采用递推的形式计算：

$$
\begin{aligned}
\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i} &= \prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O})\triangle t\right) \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i} Exp\left(\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j}^{O})\triangle t\right) \\
\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i} &= \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{O}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k}^{O}\right)\triangle t \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{j-1}}^{O_i}+\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^{O}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j}^{O}\right)\triangle t
\end{aligned}
\tag{3-42}
$$

这一小节首先推导出轮速的预积分测量模型(3-36)，随后将该模型重写成(3-41)的形式。(3-41)形式的优势为，对于一个合适分布的噪声，可以直接定义预积分测量的对数似然。例如，具有高斯白噪声的测量值（$\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}$）的（负）对数似然是二次函数。相似地，如果$\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$是高斯白噪声，也可以计算$\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}$的对数似然。噪声的性质将会在下面讨论。

■ 方差传递

这一小节将会推导轮速预积分测量的协方差矩阵。首先考虑旋转预积分噪声项$\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$，从式(3-38)可得：

$$
Exp(-\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}) = \prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(-\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k{}^T}\boldsymbol{J}_r^k\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}\triangle t\right) \tag{3-43}
$$

对式(3-43)两边取对数映射然后改变符号可以得到：

$$
\delta\boldsymbol{\theta}_{ij} = -Log\left(\prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(-\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k{}^T}\boldsymbol{J}_r^k\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}\triangle t\right)\right) \tag{3-44}
$$

重复使用一阶近似(3-37)（由于$\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}$和$\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$都是小量，右雅可比近似为单位向量）可以得到：

$$
\delta\boldsymbol{\theta}_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k{}^T}\boldsymbol{J}_r^k\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}\triangle t \tag{3-45}
$$

可以看出，在一阶近似下，$\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}$是高斯白噪声$\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}$的线性组合，因此它也是高斯白噪声。

同理，平移预积分测量误差$\delta\boldsymbol{p}_{ij}$：

$$
\delta\boldsymbol{p}_{ij} = -\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{O^\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik-1}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k}^{O^\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}\right)\triangle t+\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\boldsymbol{n}_{k-1}^{vd}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\boldsymbol{n}_{k}^{vd}\right)\triangle t \tag{3-46}
$$

也是高斯白噪声。因此，可以将轮速预积分噪声表征为：

$$
\left[\delta\boldsymbol{\theta}_{ij}{}^T \quad \delta\boldsymbol{p}_{ij}{}^T\right]^T \sim N(\boldsymbol{0}_{6\times1},\boldsymbol{Q}_{ij}^{O}) \tag{3-47}
$$

$\boldsymbol{Q}_{ij}^{O}$ 可以通过迭代的形式计算，这里直接给出 $\boldsymbol{Q}_{ij}^{O}$ 的迭代方程:

$$\begin{bmatrix}\delta \boldsymbol{p}_{ik}\\ \delta\boldsymbol{\theta}_{ik}\end{bmatrix}=\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}\delta \boldsymbol{p}_{ik-1}\\ \delta\boldsymbol{\theta}_{ik-1}\end{bmatrix}+\boldsymbol{G}\begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_{k-1}^{vd}\\ \boldsymbol{n}_{k-1}^{\omega d}\\ \boldsymbol{n}_{k}^{vd}\\ \boldsymbol{n}_{k}^{\omega d}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{3\times3} & -\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}(\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^{O})^{\wedge}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\tilde{\boldsymbol{v}}_{j}^{O})^{\wedge}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_{j-1}^{T}}\right)\triangle t\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_{k-1}^{T}}\end{bmatrix} \tag{3-48}$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{\triangle t}{2}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i} & -\frac{\triangle t^2}{4}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^{O^{\wedge}}\boldsymbol{J}_r^k & \frac{\triangle t}{2}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i} & -\frac{\triangle t^2}{4}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^{O^{\wedge}}\boldsymbol{J}_r^k\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^k & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^k\end{bmatrix}$$

■ 轮速预积分残差及雅可比矩阵

前面已经推导出轮速的预积分测量模型(3-41)，也证明了在一阶近似下，测量噪声为高斯白噪声(3-47)，那么残差项为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}&=Log\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i^T}\boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}\boldsymbol{R}_{Oj}^{W}\right)\\ \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}&=\boldsymbol{R}_{Oi}^{W^T}(\boldsymbol{p}_{Oj}^{W}-\boldsymbol{p}_{Oi}^{W})-\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}\end{aligned} \tag{3-49}$$

由图 3-8 中状态量和因子的对应可知与轮速因子有关的状态量为 $\boldsymbol{p}_{Bi}^{W}$、$\boldsymbol{q}_{Bi}^{W}$、$\boldsymbol{p}_{Bj}^{W}$ 和 $\boldsymbol{q}_{Bj}^{W}$，因此将 $\boldsymbol{p}_{O}^{W}=\boldsymbol{R}_{B}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}+\boldsymbol{p}_{B}^{W},\boldsymbol{R}_{O}^{W}=\boldsymbol{R}_{B}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}$ 代入残差(3-49)得到以状态量为参数的残差：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}&=Log\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i^T}\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)\\ \boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}&=\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}+\boldsymbol{p}_{Bj}^{W}-\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}-\boldsymbol{p}_{Bi}^{W})-\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}\end{aligned} \tag{3-50}$$

式中，$\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}$ 和 $\boldsymbol{q}_{Bi}^{W}$ 可以互相转化；$\left[\boldsymbol{R}_{O}^{B},\boldsymbol{p}_{O}^{B}\right]$ 为 IMU-轮速外参，这里假设为已知量。

这里直接给出残差相对状态量的雅可比：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}_i}=\left(\bar{\boldsymbol{R}}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\left(\bar{\boldsymbol{R}}_{Bi}^{W}\left(\boldsymbol{p}_{O}^{B}\right)^{\wedge}\right)+\boldsymbol{R}_{O}^{B^T}\left(\bar{\boldsymbol{R}}_{Bi}^{W^T}\left(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}+\boldsymbol{p}_{Bj}^{W}-\bar{\boldsymbol{R}}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}-\boldsymbol{p}_{Bi}^{W}\right)\right)^{\wedge}\\ &\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{p}_i}=-\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}_i}=-\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}\right)\left(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{p}_j}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{p}_i}=\boldsymbol{0}_{3\times3}\\ &\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}_j}=-\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B^{\wedge}}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{\theta}_j}=\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{Oj}^{Oi}}\right)\boldsymbol{R}_{O}^{B^T}\quad\frac{\partial\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{Oj}^{Oi}}}{\partial\delta\boldsymbol{p}_j}=\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\end{aligned} \tag{3-51}$$

至此，融合轮速的优化五要素：状态量(3-13)、残差(3-51)、增量更新方式(3-14)、雅可比矩阵(3-51)以及协方差矩阵(3-48)已全部给出。

3.3.3 平面因子

工业移动机器人大部分在平面上运动，特别是室内移动机器人。平面约束能够提供额外的信息，提高定位精度。但是现实中由于地形、地面物体以及自身抖动，平面运动难以完全满足，理论上在理想平面上运动，滚转角和俯仰角应该为常值，但实际情况并非如此，本文借鉴 Kejian[8]将平面约束建模为伴有高斯白噪声的观测模型的思想，对视觉-惯性-轮速融合定位方法中的平面约束进行建模，并加入因子图模型中，加入平面因子的因子图模型如图 3-10 所示。

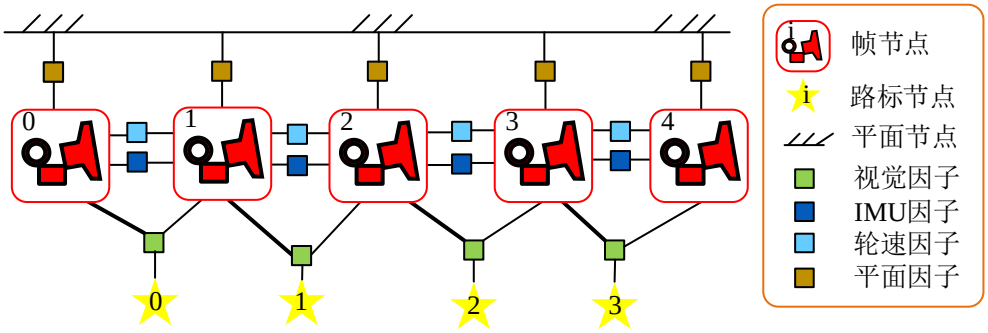


图 3-10 加入平面因子的视觉-惯性-轮速融合因子图模型

如图 3-11 所示，新增平面节点，平面节点包含的状态量为$\left[\boldsymbol{\theta}_W^{\pi}, z_W^{\pi}\right]$，分别为平面坐标系和世界坐标系之间的姿态和沿 Z 轴的平移分量，状态量只有沿 Z 轴的平移分量是因为默认平面坐标系和世界坐标系之间没有沿 X 轴和 Y 轴的位移。待估计的状态量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}\right] \\ \boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{bi}^W, \boldsymbol{v}_{bi}^W, \boldsymbol{q}_{bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{\theta}_W^{\pi}, z_W^{\pi}\right] \end{aligned} \tag{3-52}$$

新加入的平面状态量的更新方式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_W^{\pi} &\leftarrow \boldsymbol{\theta}_W^{\pi} + \delta\boldsymbol{\theta} \\ z_W^{\pi} &\leftarrow z_W^{\pi} + \delta z \end{aligned} \tag{3-53}$$

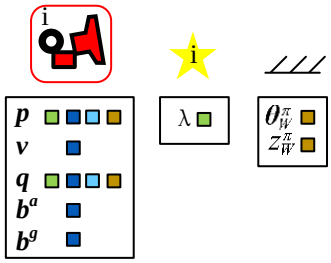


图 3-11 节点变量与相关因子

■ 平面测量模型

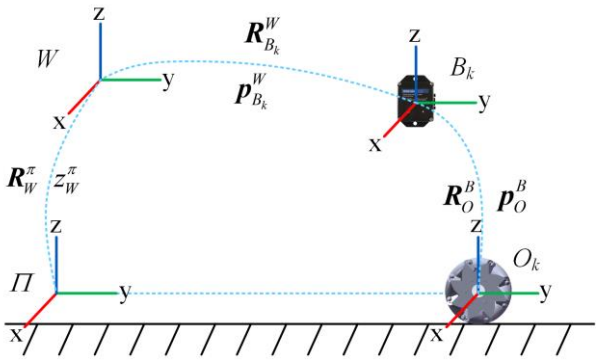


图 3-12 当机器人做平面运动，O 系、B 系、π 系和 W 系之间的变换关系

如图 3-12 所示，平面坐标系 π 的 $x-y$ 平面和地面平行，机器人在地面移动，轮速坐标系期望在平面上运动，可以给出如下平面测量模型：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{h}}_k^{\pi}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}_O^{B^T}\boldsymbol{R}_{B_k}^{W^T}\boldsymbol{R}_W^{\pi^T}\boldsymbol{e}_3\\ z_W^{\pi}+\boldsymbol{e}_3^T\boldsymbol{R}_W^{\pi}\left(\boldsymbol{P}_{B_k}^{W}+\boldsymbol{R}_{B_k}^{W}\boldsymbol{P}_O^{B}\right)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{h}_k^{\pi}}+\boldsymbol{n}_k^{\pi} \tag{3-54}$$

式中 $\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$。式(3-54)的 $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}_O^{b^T}\boldsymbol{R}_{b_k}^{W^T}\boldsymbol{R}_W^{\pi^T}\boldsymbol{e}_3$ 将平面坐标系下的 $\boldsymbol{e}_3$ 旋转到 O_k 系下并取前两维，根据轮速传感器在平面上运动，旋转到 O_k 系下的 $\boldsymbol{e}_3$ 应该还是 $\boldsymbol{e}_3$，其前两维应该都是 0，这就是测量值 $\tilde{\boldsymbol{h}}_{pl}$ 前两维都为 0 的原因；式(3-54)的 $z_W^{\pi}+\boldsymbol{e}_3^T\boldsymbol{R}_W^{\pi}\left(\boldsymbol{P}_{B_k}^{W}+\boldsymbol{R}_{B_k}^{W}\boldsymbol{P}_O^{B}\right)$ 的+号右侧为 $z_{\boldsymbol{P}_{O_k}^{W}}$，$z_{\boldsymbol{P}_{O_k}^{W}}$ 和 z_W^{π} 应为相反数，因此对应的测量值 $\tilde{\boldsymbol{h}}_k^{\pi}$ 的第三维也应为 0。以上分析基于理想平面运动，实际中的抖动使用高斯白噪声进行建模：

$$\boldsymbol{n}_k^{\pi}\sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{Q}^{\pi}) \tag{3-55}$$

■ 平面残差及雅可比矩阵

前面已经推导出平面测量模型(3-54)并假设噪声为高斯白噪声，那么平面残差为：

$$\boldsymbol{r}_{\pi k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_{\pi k0}\\ \boldsymbol{r}_{\pi k1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}_O^{B^T}\boldsymbol{R}_{B_k}^{W^T}\boldsymbol{R}_W^{\pi^T}\boldsymbol{e}_3\\ z_W^{\pi}+\boldsymbol{e}_3^T\boldsymbol{R}_W^{\pi}\left(\boldsymbol{P}_{B_k}^{W}+\boldsymbol{R}_{B_k}^{W}\boldsymbol{P}_O^{B}\right)\end{bmatrix} \tag{3-56}$$

如图 3-11 所示，与平面因子有关的状态量为 $\boldsymbol{p}_{Bk}^{W}$、$\boldsymbol{q}_{Bk}^{W}$、$\boldsymbol{\theta}_W^{\pi}$ 和 z_W^{π}，这里直接给出残差相对状态量的雅可比：

$$
\begin{aligned}
& & \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k1}}{\partial \delta \boldsymbol{p}_k} &= \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{R}_W^{\pi} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k0}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_k} &= \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{R}_O^{B^T} \left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{W^T} \boldsymbol{R}_W^{\pi^T} \boldsymbol{e}_3 \right)^{\wedge} & \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k1}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_k} &= -\boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{R}_W^{\pi} \boldsymbol{R}_{B_k}^{W} \boldsymbol{P}_O^{B^{\wedge}} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k0}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_W^{\pi}} &= \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{R}_O^{B^T} \boldsymbol{R}_{b_k}^{W^T} \left(\boldsymbol{R}_W^{\pi^T} \boldsymbol{e}_3 \right)^{\wedge} & \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k1}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_W^{\pi}} &= -\boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{R}_W^{\pi} \left(\boldsymbol{P}_{B_k}^{W} + \boldsymbol{R}_{b_k}^{W} \boldsymbol{P}_O^{B} \right)^{\wedge} \\
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k0}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_O^{B}} &= \boldsymbol{\Lambda} \left(\boldsymbol{R}_O^{B^T} \boldsymbol{R}_{b_k}^{W^T} \boldsymbol{R}_W^{\pi^T} \boldsymbol{e}_3 \right)^{\wedge} & \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k1}}{\partial \delta z_W^{\pi}} &= 1 \\
& & \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\pi k1}}{\partial \delta \boldsymbol{p}_O^{B}} &= \boldsymbol{e}_3^T \boldsymbol{R}_W^{\pi} \boldsymbol{R}_{b_k}^{W}
\end{aligned}
\tag{3-57}
$$

至此，平面约束的优化五要素：状态量、残差(3-56)、增量更新方式(3-53)、雅可比矩阵(3-57)以及协方差矩阵(3-55)已全部给出。

3.3.4 滑动窗口与边缘化

捆集调整（Bundle Adjustment）[46]已经成为基于视觉的状态估计的标准方法，目前先进的 SLAM 方案以及主流的开源 SLAM 方案多采用捆集调整[45, 48, 50, 67, 101, 102]，捆集调整中，所有的历史状态和观测将会联合优化，达到较高的一致性和精度，但是在大场景下，无法满足实时性要求。滑动窗口算法从待估计状态中移除旧的状态，只对最近的状态量使用捆集调整进行估计，限制了参与优化的状态量个数，保证了系统的实时性。边缘化是移除旧状态量的一种方式，它以边际概率的形式保留了旧状态量和观测带来的约束，即 $P(\boldsymbol{\alpha}) = \int P(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) d\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{\beta}$ 为移除的旧状态量[103]。这一节将 VINS-Fusion 中视觉-惯性融合的滑动窗口和边缘化算法[48, 94, 104]拓展到视觉-惯性-轮速融合中。

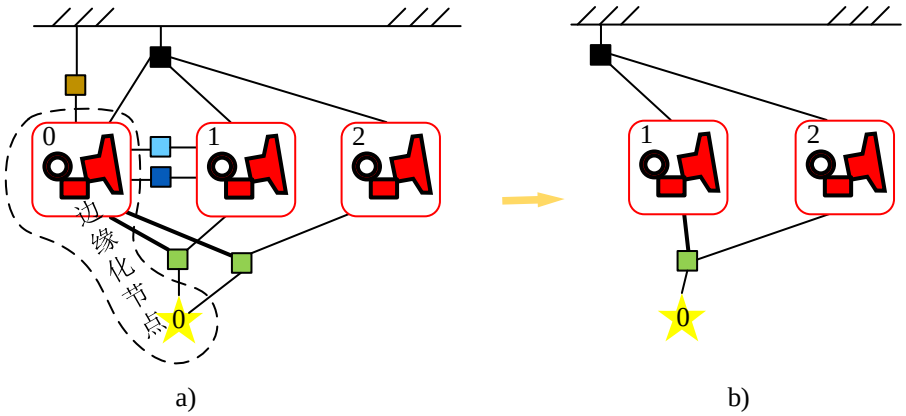


图 3-13 边缘化最老帧

假设当前窗口如图 3-3 所示，此时最老帧为第 0 帧，次新帧为第 3 帧，首先根据视差大小判断是边缘化最老帧还是边缘化次新帧。边缘化最老帧则将第 0 帧和以第 0 帧为

主帧的特征点进行边缘化。首先将滑动窗口中与第 0 帧有边相连的节点取出，组成子因子图（图 3-13 a），构建子优化问题，子优化问题的海瑟矩阵为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_p &= \boldsymbol{H}_p + \sum_{(k,j)\in\mathcal{C}'} \boldsymbol{H}_{Ckj} + \sum_{k=\mathcal{B}'} \boldsymbol{H}_{Bk} + \sum_{k=\mathcal{O}'} \boldsymbol{H}_{Ok} + \sum_{k=\mathcal{P}} \boldsymbol{H}_{\pi k} \\ \boldsymbol{b}_p &= \boldsymbol{b}_p + \sum_{(k,j)\in\mathcal{C}'} \boldsymbol{b}_{Ckj} + \sum_{k=\mathcal{B}'} \boldsymbol{b}_{Bk} + \sum_{k=\mathcal{O}'} \boldsymbol{b}_{Ok} + \sum_{k=\mathcal{P}} \boldsymbol{b}_{\pi k} \end{aligned} \tag{3-58}$$

式中，$\boldsymbol{H}_p$ 为边缘化（先验）因子的海瑟矩阵。$\mathcal{C}'$ 为子因子图的视觉因子集合，$\mathcal{B}'$ 为子因子图的 IMU 因子集合，$\mathcal{O}'$ 为子因子图的轮速因子集合，$\mathcal{P}'$ 为子因子图的平面因子集合。在式(3-58)得到的海瑟矩阵中对边缘化变量对应的项进行边缘化，边缘化操作通过舒尔补实现[105]，得到边缘化因子的 $\boldsymbol{H}_p$ 和 $\boldsymbol{b}_p$。边缘化完成后的子因子图如图 3-13 b 所示，以第 0 帧为主帧的特征点后移至下一帧。图 3-3 的因子图边缘化第 0 帧后变成图 3-14 所示因子图。

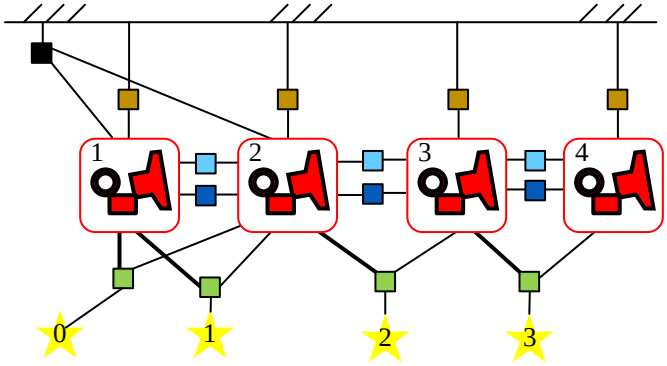


图 3-14 边缘化最老帧后的因子图

如图 3-15 所示，边缘化次新帧则简单地将该帧以及与该帧有关的视觉测量、平面测量丢弃，以该帧为主帧的特征点移至下一帧，IMU 的预积分测量和轮速的预积分测量将会保留并延续至下一帧。

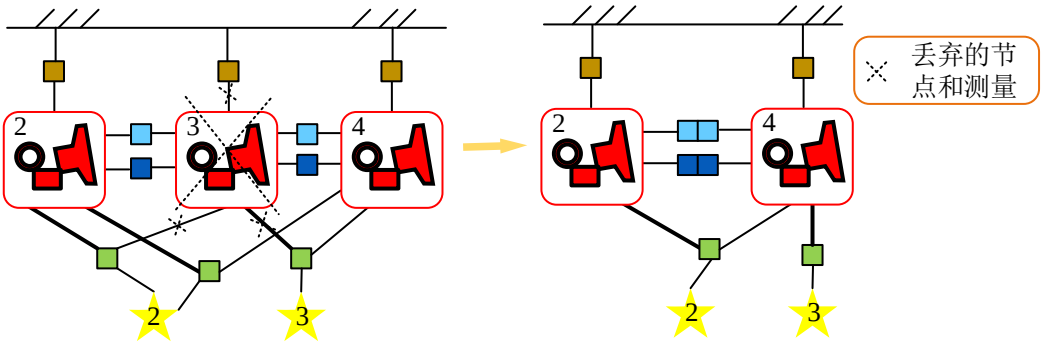


图 3-15 边缘化次新帧

图 3-3 的因子图边缘化次新帧后变成图 3-16 所示因子图。

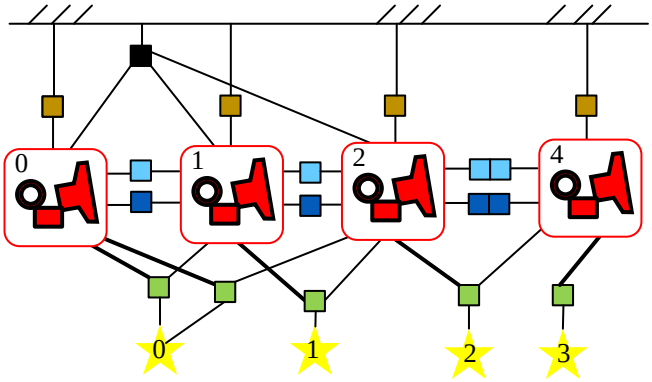


图 3-16 边缘化次新帧后的因子图

边缘化因子的优化五要素：状态量(3-13)、残差（通过 $\boldsymbol{b}_p$ 恢复）、增量更新方式(3-14)、雅可比矩阵（通过 $\boldsymbol{H}_p$ 恢复）以及协方差矩阵（已在 $\boldsymbol{H}_p$ 中）已全部给出。

3.4 单元仿真实验研究

本节的实验研究主要由两部分构成，第一部分对所提轮速预积分模型进行仿真验证。第二部分对提出的平面因子进行仿真测试。

3.4.1 轮速预积分仿真验证

为了分析轮速预积分的精度和鲁棒性，设计了两个仿真实验进行验证和评估。使用的误差指标为绝对位置误差（ATE）均方根（rmse）和相对位置误差（RTE）均方根（rmse）。将真值轨迹和预积分轨迹分成对应的 k 段，每一段都将预积分轨迹的段首和真值轨迹的段首对齐，计算段尾误差，k 个段尾误差代入均方根公式得到均方根误差（RTErmse），具体参考 Zhang 的论文[106]。

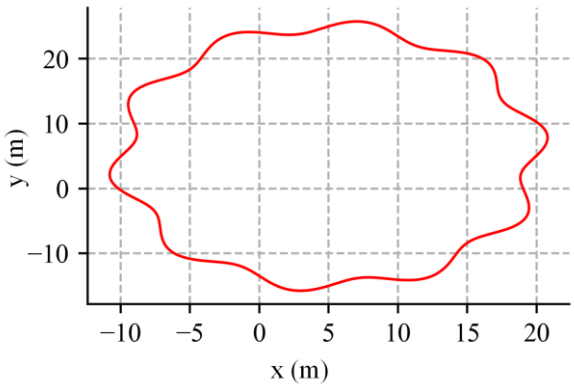


图 3-17 使用的真值轨迹

如图 3-17 所示，为了仿真轮速测量数据，首先设计一条具有解析形式的真值位姿轨

迹，位置对时间求导得到速度，姿态对时间求导得到角速度。BetaGo 提供的轮速测量数据中 v_x^O 、ω_x^O 和 ω_y^O 始终为 0，因此仿真过程中也设置为 0，仿真轨迹长度为 118.018m。

为了验证轮速预积分模型的有效性并且评估其系统误差，对不同频率的轮速数据进行预积分，预积分频率为 10Hz。计算 ATErmse 和 RTErmse，ATE-频率曲线如图 3-18 a 所示，RTE-频率曲线如图 3-18 b 所示。从图中可知，当轮速测量频率越高，轮速预积分精度越高，且误差收敛于 0，误差趋于 0 验证了轮速预积分模型的有效性。BetaGo 轮速测量频率为 50Hz，此时绝对位置系统误差为 0.004m，相对位置系统误差为 0.001m。

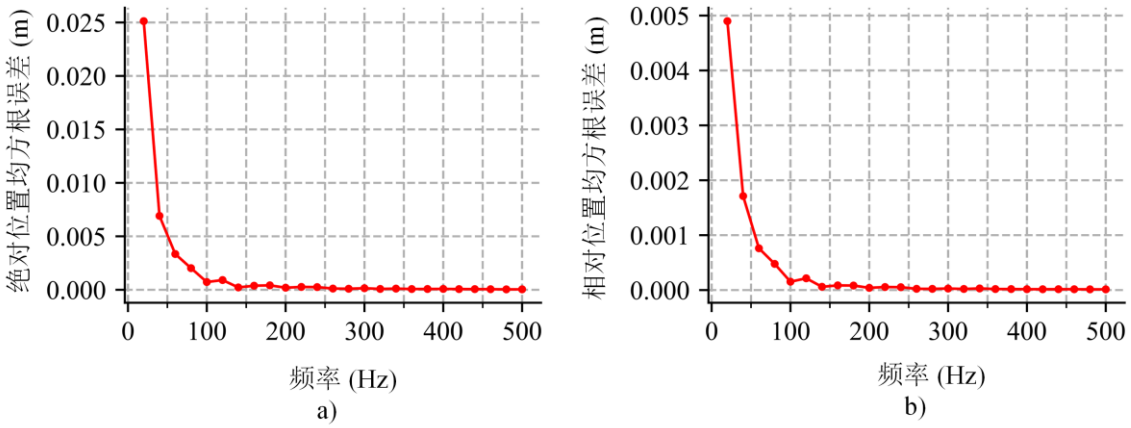


图 3-18 误差-频率曲线： a) ATErmse-频率；b) RTErmse-频率

为了分析轮速预积分模型的鲁棒性，对频率为 50Hz 的轮速测量数据添加不同程度的高斯噪声，然后进行预积分，预积分作为帧间运动约束，主要指标为帧间运动精度，所以重点考察 RTErmse 随噪声标准差的变化。如图 3-19 所示，RTErmse 与高斯噪声成正相关，且对角速度测量噪声更加敏感。

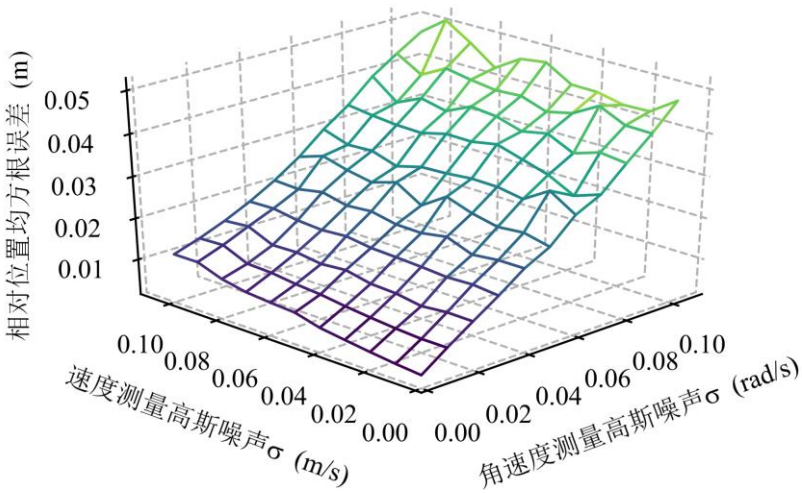


图 3-19 相对位置均方根误差-噪声关系

在图 3-19 中取一点（x=0.015, y=0.015, z=0.006796），设置的参数为轮速测量频率：50H、速度测量噪声：σ=0.015 m/s、角速度测量噪声：σ=0.015 rad/s、预积分频率：10Hz。预积分得到的轨迹使用 evo 进行测评，轨迹如图 3-20 b 所示，统计参数随时间变化的曲线如图 3-20a 所示。

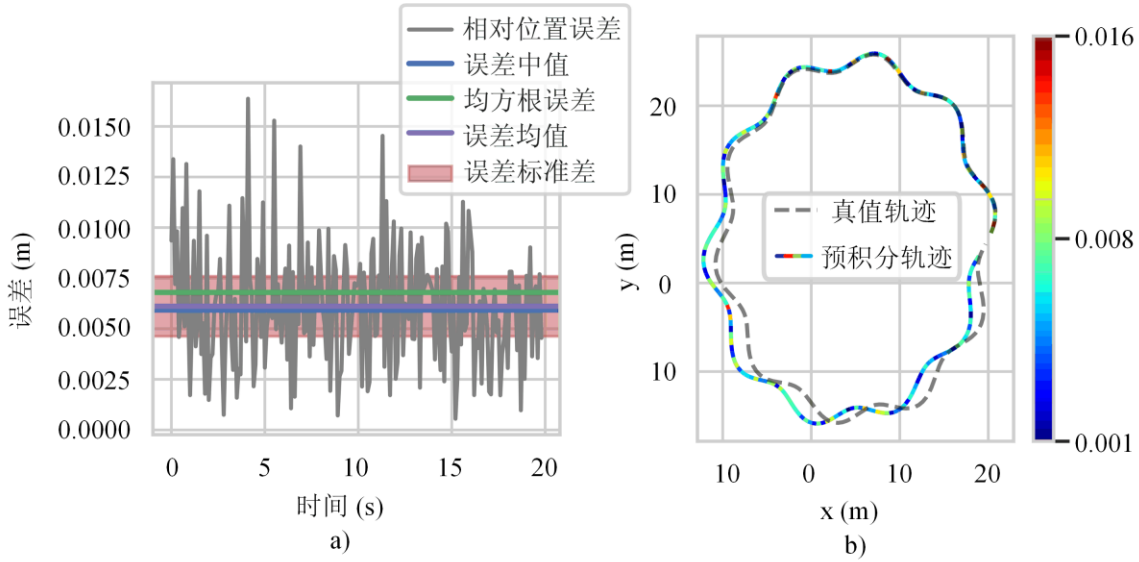


图 3-20 预积分轨迹测评： a) 统计参数随时间变化；b) 预积分轨迹

以上结果验证了轮速预积分的有效性，并且给出了误差评估结果。鲁棒性评估发现该轮速预积分对角速度噪声比较敏感，因此在传感器融合前，需要重点对比不同传感器角速度测量的精度，根据精度从高到底，设置相应协方差从低到高。

3.4.2 平面因子仿真验证

对于平面运动，轨迹的 z 轴分量以及 roll、pitch 应为常值。为了验证平面因子的有效性，设置仿真实验对比加入平面因子前后轨迹的平移分量、欧拉角分量与真值的偏差。平面因子测量的协方差设为：

$$\boldsymbol{Q}^{\pi}=\begin{bmatrix}0.01 & & \\ & 0.01 & \\ & & 0.005\end{bmatrix} \tag{3-59}$$

加入平面因子前后轨迹平移分量与真值的偏差如图 3-21 所示，加入平面因子前后 x 和 y 轴分量基本重合且与真值接近，z 轴分量上有较大差距。加入平面因子前，z 轴分量有较大的起伏，加入平面因子后，z 轴分量的起伏减小。

加入平面因子前后轨迹旋转分量与真值的偏差如图 3-22 所示，加入平面因子前后沿平面法向的旋转分量（yaw）基本重合且与真值接近，roll 和 pitch 有较大差距，加入

平面因子前，roll 和 pitch 分量有较大的起伏，加入平面因子后，roll 和 pitch 轴分量的起伏减小。

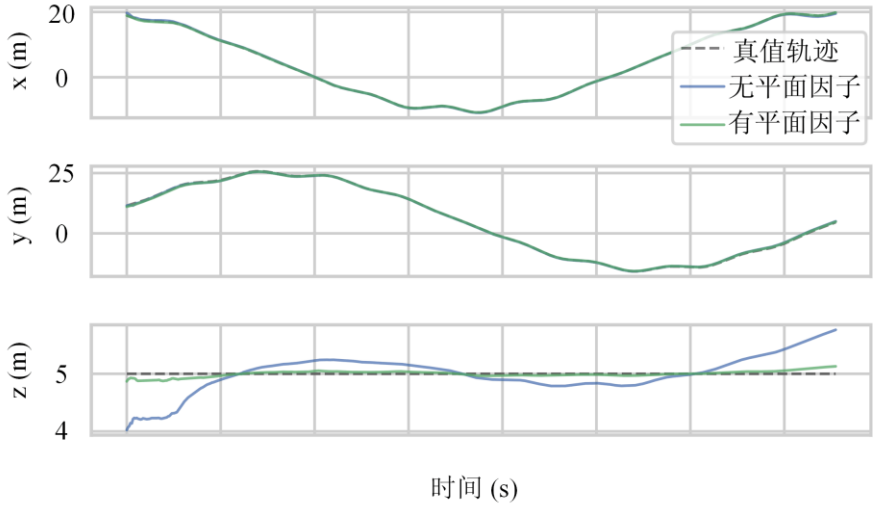


图 3-21 加入平面因子前后轨迹平移分量

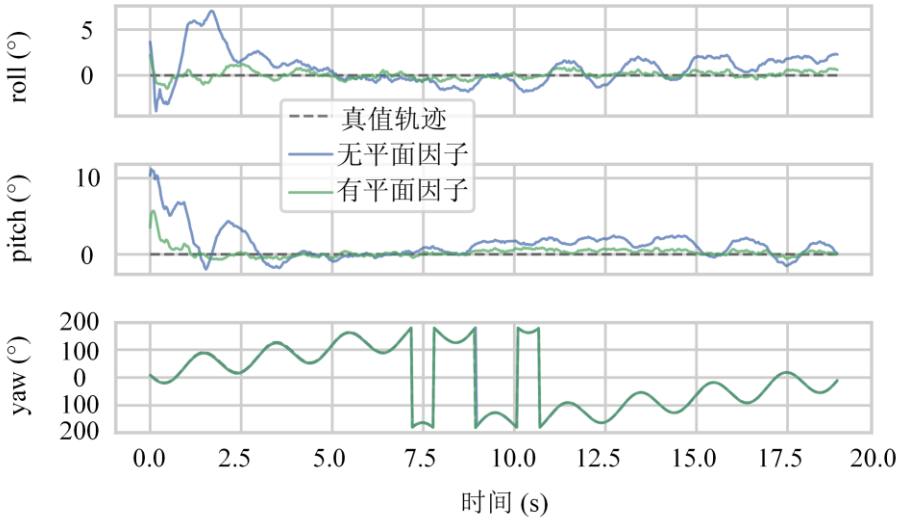


图 3-22 加入平面因子前后轨迹旋转分量

以上实验结果说明，平面因子可以有效地将估计的轨迹约束在平面流型上。

3.5 视觉-惯性-轮速融合定位仿真与分析

为了测试所提 VIWO 的性能，设计数值仿真实验和物理仿真实验，从定位精度方面对比所提 VIWO 和现有的 VIO，且假设内外参已知，设定优化求解时间最大为 40ms，保证实时性。定位精度的评价指标为绝对位置误差（ATE）和相对位置误差（RTE）。

■ 数值仿真实验

分别用所提 VIWO 和现有 VIO 运行仿真数据，轨迹如图 3-23 所示，可以看出 VIWO

估计的轨迹比 VIO 估计的轨迹更接近真值轨迹。

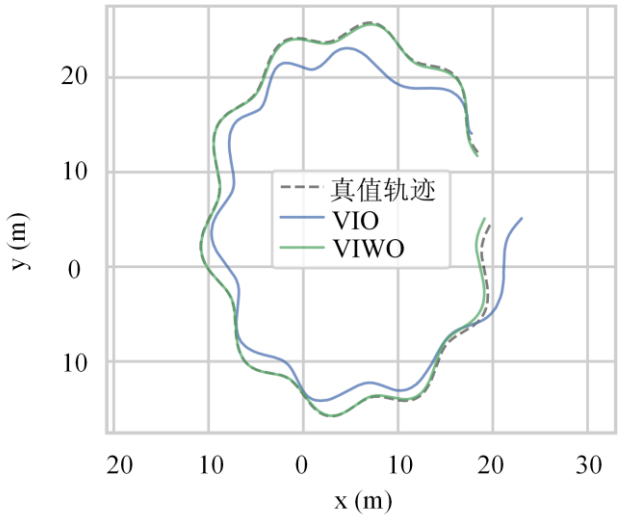


图 3-23 VIWO、VIO 估计的轨迹

VIWO 和 VIO 的 ATE 变化如图 3-24 a 所示，RTE 变化如图 3-24 b 所示，ATE 和 RTE 的具体统计参数列于表 3-1 中，图和统计参数都说明了 VIWO 的定位精度高于 VIO。

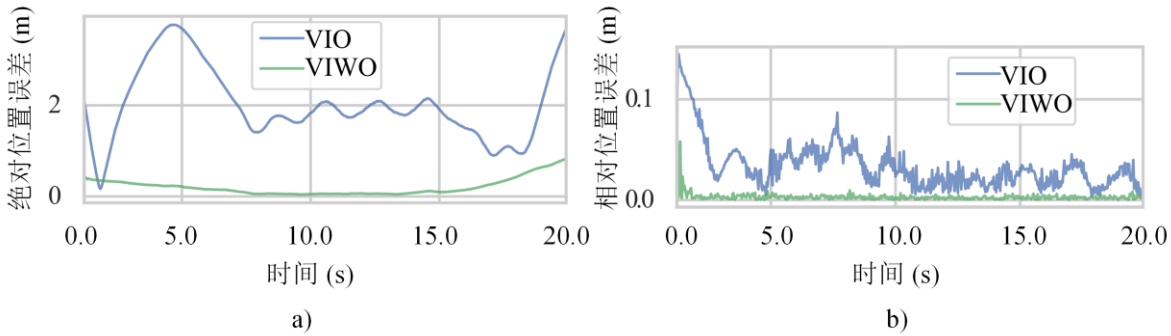


图 3-24 VIWO 和 VIO 误差对比：a) ATE；b) RTE

表 3-1 VIWO 和 VIO 的 ATE、RTE 统计参数 (单位 m)

	最大值	均值	中值	最小值	均方根	标准差
VIO ATE	3.7718	2.0057	1.8549	0.1667	2.1549	0.7879
VIWO ATE	0.8340	0.2059	0.1451	0.0430	0.2743	0.1812
VIO RTE	0.1448	0.0333	0.0285	0.0039	0.0406	0.0231
VIWO RTE	0.0580	0.0031	0.0024	0.0002	0.0052	0.0041

■ 物理仿真实验

为了在仿真中充分考虑机器人的动态特性、摩擦特性以及视觉特征匹配的不确定性等，使用第二章搭建的 BetaGo 仿真系统对所提 VIWO 进行测试，并与 VIO 进行对比，使用的世界模型来自 https://github.com/mlherd/Dataset-of-Gazebo-Worlds-Models-and-Maps。估计的轨迹和真值轨迹对齐至仿真系统的世界中，如图 3-25 所示，可以看出 VIWO

的轨迹比 VIO 轨迹更加接近真值。

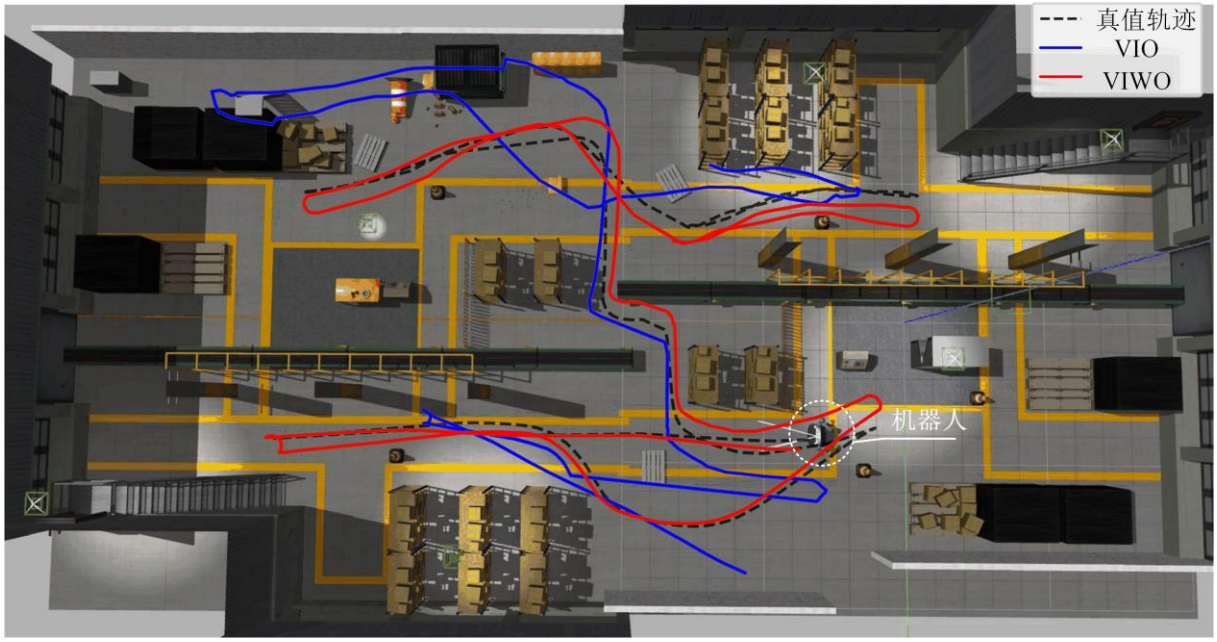


图 3-25 对齐至仿真世界的轨迹对比

使用 evo 轨迹评测工具量化轨迹误差，ATE 和 RTE 指标对比结果如图 3-26 所示，与数值仿真实验类似，也说明了所提 VIWO 具有更高的定位精度。

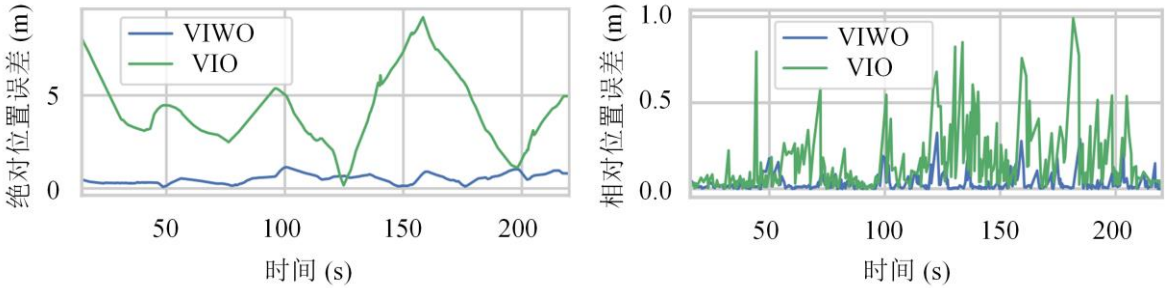


图 3-26 VIWO 和 VIO 误差对比：a) ATE；b) RTE

3.6 本章小结

本章以第二章搭建的多传感双臂移动机器人系统为基础，基于 MAP 和因子图提出了一种视觉-惯性-轮速融合定位方法，着重推导了轮速预积分测量模型，并引入了平面约束，制定了对应的滑动窗口策略。仿真实验结果表明：1) 推导的轮速预积分测量模型是有效的，轮速测量频率为 50Hz 且预积分长度为 118.018m 时绝对位置系统误差为 0.004m，相对位置系统误差为 0.001m；2) 平面约束能够有效地将估计的轨迹约束在平面流型下；3) 对于平面移动机器人，本章所提带有平面约束的视觉-惯性-轮速融合模型具有比视觉-惯性融合模型更高的定位精度。

第四章 视觉-惯性-轮速融合在线标定

4.1 引言

上一章，针对 BetaGo 机器人平台，提出了视觉-惯性-轮速融合定位方法，过程中假设内外参已知且固定，时间戳已同步，但是，实际机器人运行过程中，机械振动、零件磨损、环境变化会导致内外参变化，并且时间延迟在多传感器融合系统中也是现实存在的问题，如果在定位方法中不对参数变化和时间延迟正确建模和标定，将会导致定位精度和鲁棒性降低。

本章在上一章提出的视觉-惯性-轮速融合定位方法的基础上，研究对应的在线标定问题，提出视觉-惯性-轮速融合在线标定方法。首先给出完整的因子图模型，然后分别对相机-IMU 外参在线标定、轮速内外参在线标定、时间延迟在线标定进行建模，并构建对应的因子图模型。接着提出了视觉-惯性-轮速融合初始化方案计算移动机器人定位系统的初值。最后通过仿真实验验证所提初始化方法和在线标定模型的有效性。

4.2 视觉-惯性-轮速融合在线标定理论建模

图 4-1 是在第三章视觉-惯性-轮速融合模型的基础上加入在线标定后的因子图模型。主要增加了标定参数节点，包括相机-IMU 外参节点、轮速-IMU 外参节点、相机-IMU 时延节点、轮速-IMU 时延节点、轮速内参节点。

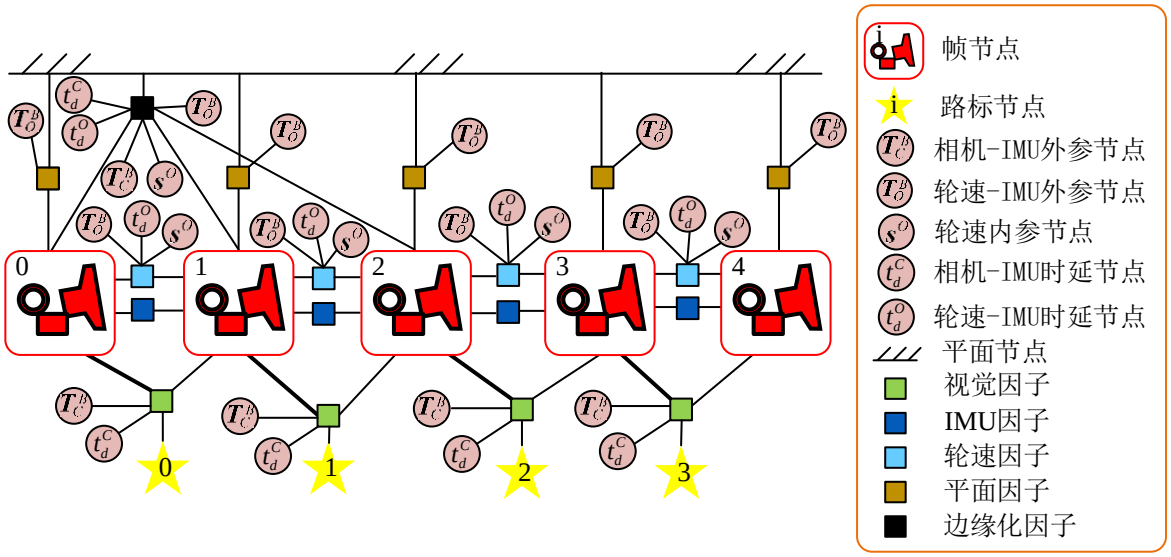


图 4-1 视觉-惯性-轮速融合在线标定因子图

如图 4-2 所示，相比于图 3-4 的节点变量，在线标定中新增轮速内参 s^{ω}、s^{x}、s^{y}、相机-IMU 外参节点、轮速-IMU 外参节点、相机-IMU 时延节点、轮速-IMU 时延节点。

与变量同一行的颜色块对应约束该变量的因子。

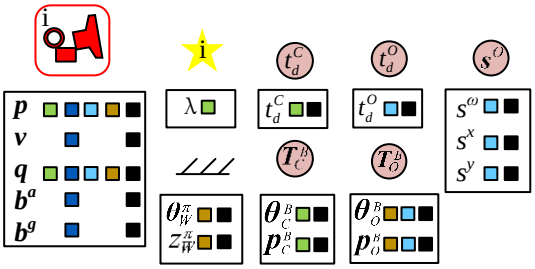


图 4-2 节点变量与相关因子

本章剩余内容将围绕该视觉-惯性-轮速融合在线标定因子图展开，相机-IMU 外参在线标定将会在 4.2.1 节简要描述，轮速内外参在线标定将会在 4.2.2 节详细描述，时间延迟在线标定将会在 4.2.3 节详细描述。因子图随着每一节标定参数的引入从简到繁逐步构建。

4.2.1 相机-IMU 外参在线标定

包含相机-IMU 外参在线标定的因子图如图 4-3 所示。

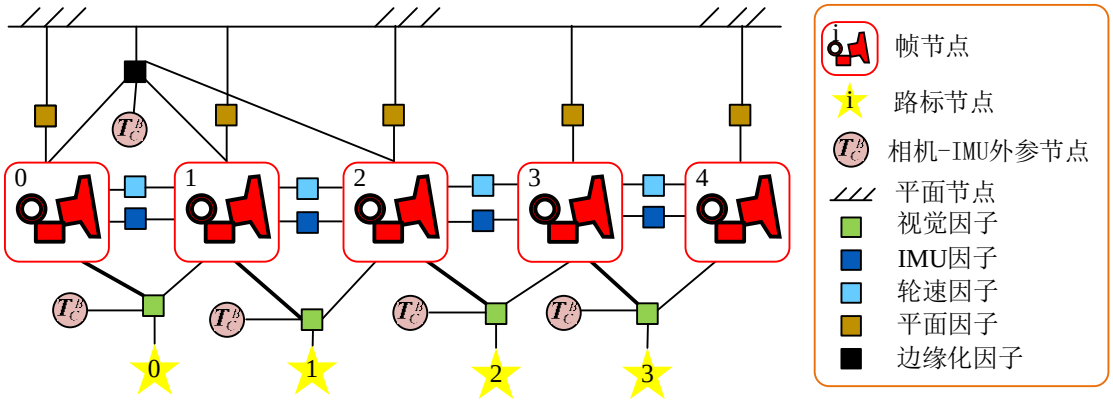


图 4-3 相机-IMU 外参在线标定因子图

如图 4-4 所示，新加入的外参节点包括姿态 $\boldsymbol{\theta}_C^B$ 和平移 $\boldsymbol{p}_C^B$。即待估计的状态量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \boldsymbol{q}_C^B, \boldsymbol{p}_C^B \right] \\ \boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{Bi}^W, \boldsymbol{v}_{Bi}^W, \boldsymbol{q}_{Bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{\theta}_W^\pi, z_W^\pi \right] \end{aligned} \tag{4-1}$$

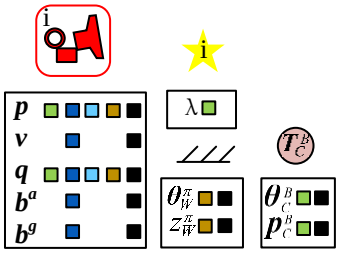


图 4-4 节点变量与相关因子

新加入的外参状态量的更新方式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_C^B &\leftarrow \boldsymbol{p}_C^B + \delta \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q}_C^B &\leftarrow \boldsymbol{q}_C^B \otimes \delta \boldsymbol{q} \end{aligned} \tag{4-2}$$

首先分析可观性，Martineli[65]和 Jones[36]证明了在纯平移的情况下，$\boldsymbol{p}_C^B$ 不可观，绕单轴旋转情况下，$\boldsymbol{p}_C^B$ 沿旋转轴的分量不可观，因此，在一般的平面运动下，除了 $\boldsymbol{p}_C^B$ 沿旋转轴的分量不可观，相机-IMU 外参 $\boldsymbol{T}_C^B$ 是可观的。

接着推导包含 $\boldsymbol{T}_C^B$ 的残差模型，如图 4-2 所示，相机-IMU 外参与边缘化因子、视觉因子相关，边缘化因子对 $\boldsymbol{T}_C^B$ 的雅可比矩阵通过舒尔补得到，是 SLAM 中的标准化操作，这里不再赘述。包含 $\boldsymbol{T}_C^B$ 的视觉因子的残差模型和第三章的视觉因子是一致的，只是在第三章里将外参认为是已知量，这里也不再赘述。视觉因子相对外参的雅可比矩阵可参考 VINS-Fusion[49]，本文并没有对其做出改动，故在正文中省略。

4.2.2 轮速内外参在线标定

机器人运行过程存在磨损，为了保证精度，标定需要定期执行。这种情况使得无需额外硬件，无需先验信息，无需中断机器人操作过程的标定方法更加有意义[62]。添加轮速-IMU 外参节点和轮速内参节点的因子图如图 4-5 所示。

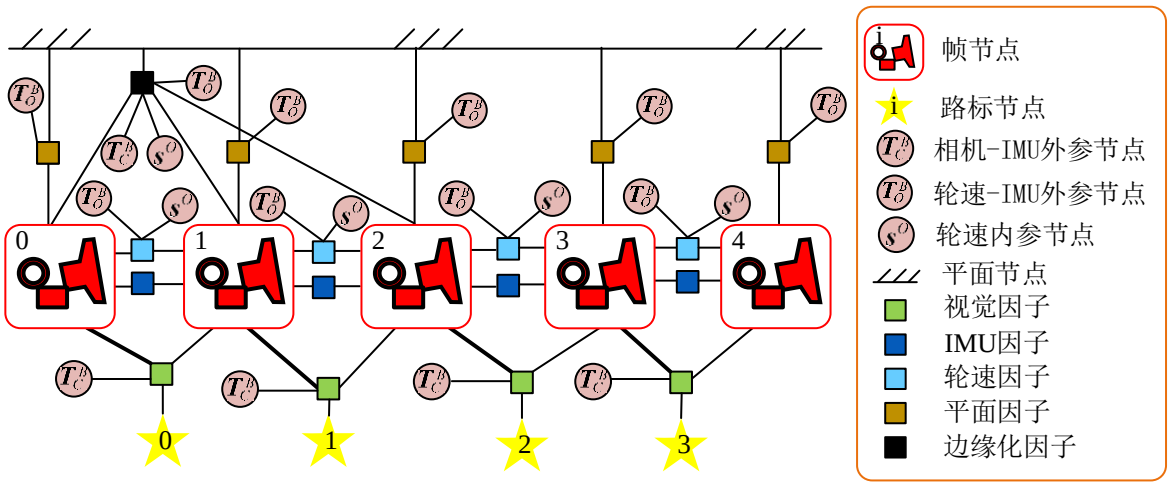


图 4-5 轮速内外参在线标定因子图

如图 4-6 所示，新加入的外参节点包括姿态 $\boldsymbol{\theta}_O^B$、平移 $\boldsymbol{p}_O^B$、轮速内参 s_ω、s_x、s_y。即待估计的状态量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \boldsymbol{q}_C^B, \boldsymbol{p}_C^B, \boldsymbol{q}_O^B, \boldsymbol{p}_O^B \right] \\ \boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{Bi}^W, \boldsymbol{v}_{Bi}^W, \boldsymbol{q}_{Bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{\theta}_W^\pi, z_W^\pi, s^\omega, s^x, s^y \right] \end{aligned} \tag{4-3}$$

新加入的状态量的更新方式为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_O^B &\leftarrow \boldsymbol{p}_O^B + \delta \boldsymbol{p} \\
\boldsymbol{q}_O^B &\leftarrow \boldsymbol{q}_O^B \otimes \delta \boldsymbol{q} \\
s^{\omega} &\leftarrow s^{\omega} + \delta s^{\omega} \\
s^{x} &\leftarrow s^{x} + \delta s^{x} \\
s^{y} &\leftarrow s^{y} + \delta s^{y}
\end{aligned}
\tag{4-4}
$$

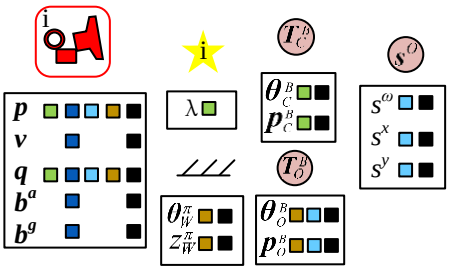


图 4-6 节点变量与相关因子

■ 轮速内外参模型

含内参 $\boldsymbol{s}^O = \left[\boldsymbol{s}^v, s^{\omega}\right]$ 的轮速传感器测量为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{v}}^O(t) &= \boldsymbol{s}^{v^{-1}} \boldsymbol{v}^O(t) + \boldsymbol{n}^v(t) \\
\tilde{\boldsymbol{\omega}}^O(t) &= s^{\omega^{-1}} \boldsymbol{\omega}^O(t) + \boldsymbol{n}^{\omega}(t)
\end{aligned}
\tag{4-5}
$$

式中 $\boldsymbol{s}^v$ 为：

$$
\boldsymbol{s}^v = \begin{bmatrix} s^x & & \\ & s^y & \\ & & 1 \end{bmatrix}
\tag{4-6}
$$

由于轮速测量的第三维始终为 0，因此设 s^z 为常值 1。

当 $\boldsymbol{v}^O = \begin{bmatrix} v_x^O & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$，易得 s^y 和 s^{ω} 不会影响轮速测量，不会影响轮速约束，因此，当 $\boldsymbol{v}^O$ 为沿 X 轴平移，s^y 和 s^{ω} 不可观。同理，当 $\boldsymbol{v}^O$ 为沿 Y 轴平移，s^x 和 s^{ω} 不可观，纯旋转时，s^x 和 s^y 不可观。

轮速外参为轮速-IMU 外参 $\boldsymbol{T}_O^B$，Lee[9]证明了对于视觉-惯性-轮速融合，当进行纯平移运动时，位移 $\boldsymbol{p}_O^B$ 不可观；当进行纯旋转运动时，$\boldsymbol{p}_O^B$ 沿旋转轴的分量不可观。

■ 在线标定轮速预积分测量模型

根据 3.3.2 节的推导思路，将内外参引入进行推导，这里不再给出详细过程，只给出重要的中间结果。

轮速预积分测量模型(3-41)以 $\boldsymbol{R}_{Oi}^W$、$\boldsymbol{p}_{Oi}^W$ 为状态量，而所提 VIWO 以 $\boldsymbol{R}_{Bi}^W$、$\boldsymbol{p}_{Bi}^W$ 为状态

量，因此将 $\boldsymbol{R}_{Oi}^{W}=\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}$、$\boldsymbol{p}_{Oi}^{W}=\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}+\boldsymbol{p}_{Bi}^{W}$ 代入(3-41)得到以 $\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}$、$\boldsymbol{p}_{Bi}^{W}$ 为状态量的轮速预积分测量模型：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}&=(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B})^{T}\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}Exp(\delta\boldsymbol{\theta}_{ij})\\\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}&=(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B})^{T}(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}+\boldsymbol{p}_{Bj}^{W}-\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B}-\boldsymbol{p}_{Bi}^{W})+\delta\boldsymbol{p}_{ij}\end{aligned}\tag{4-7}$$

从轮速测量值根据内参恢复标称值：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}^{O}(t)&=\boldsymbol{s}^{v}(\tilde{\boldsymbol{v}}^{O}(t)-\boldsymbol{n}^{v}(t))\\\boldsymbol{\omega}^{O}(t)&=s^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{O}(t)-\boldsymbol{n}^{\omega}(t))\end{aligned}\tag{4-8}$$

代入轮速预积分测量值的递推式(3-42)，得到引入内参的轮速预积分测量值递推式：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}&=\prod_{k=i+1}^{j}Exp\left(\frac{1}{2}s_i^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k}^{O})\triangle t\right)\\&=\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}Exp\left(\frac{1}{2}s_i^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^{O}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j}^{O})\triangle t\right)\\\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}&=\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^{O}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k}^{O}\right)\triangle t\\&=\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{j-1}}^{O_i}+\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^{O}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j}^{O}\right)\triangle t\end{aligned}\tag{4-9}$$

式中认为在 i 时刻到 j 时刻的预积分过程中内参 $\boldsymbol{s}^{O}$ 保持不变。

■ 在线标定轮速预积分内参一阶更新

轮速预积分测量值与状态量中的位置、速度、姿态解耦，但是将轮速内参加入状态量后，预积分测量值不再和状态量完全解耦。轮速内参存在于预积分的计算中，状态量优化过程中，内参会更新 $\hat{\boldsymbol{s}}^{O}\leftarrow\bar{\boldsymbol{s}}^{O}+\delta\boldsymbol{s}^{O}$，如果重新预积分，每次迭代计算量将会过大。为了避免重新积分，预积分测量值使用一阶泰勒展开近似更新：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\left(\hat{s}^{\omega}\right)&\simeq\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)Exp\left(\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}}\delta s_i^{\omega}\right)\\\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}\left(\hat{s}^{x},\hat{s}^{y},\hat{s}^{\omega}\right)&\simeq\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}\left(\bar{s}^{x},\bar{s}^{y},\bar{s}^{\omega}\right)+\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{x}}\delta s_i^{x}+\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{y}}\delta s_i^{y}+\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}}\delta s_i^{\omega}\end{aligned}\tag{4-10}$$

使用泰勒展开需要求相对展开量的雅可比矩阵，下面以旋转预积分测量值为例，推导其相对内参的雅可比矩阵，由式(4-9)可知，$\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}$ 只与 s^{ω} 耦合，令 $\hat{s}_i^{\omega}=\bar{s}_i^{\omega}+\delta s_i^{\omega}$，则旋转预积分测量值按如下更新：

$$
\begin{aligned}
\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\hat{\boldsymbol{s}}_i^O) &= \prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(\frac{1}{2}(\bar{s}_i^{\omega}+\delta s_i^{\omega})(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right) \\
&= \prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(\frac{1}{2}\bar{s}_i^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right) Exp\left(J_r^k\frac{1}{2}\delta s_i^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right) \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)\prod_{k=i+1}^{j} Exp\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k T}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)J_r^k\frac{1}{2}\delta s_i^{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\right) \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O) Exp\left(\sum_{k=i+1}^{j}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k T}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)J_r^k\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t\delta s_i^{\omega}\right) \\
&= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O) Exp\left(\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}}\delta s_i^{\omega}\right)
\end{aligned}
\tag{4-11}
$$

从式(4-11)中可以得到旋转预积分测量值一阶更新的雅可比矩阵：

$$
\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}} = \sum_{k=i+1}^{j}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k T}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)J_k^r\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t \tag{4-12}
$$

将式(4-12)写成递推形式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}} &= \sum_{k=i+1}^{j-1}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_k\ T}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)J_r^k\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k^O)\triangle t+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_j T}(\bar{\boldsymbol{s}}_i^O)J_r^j\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^O)\triangle t \\
&= \frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}}{\partial s_i^{\omega}}+J_r^j\frac{1}{2}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1}^O+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^O)\triangle t
\end{aligned}
\tag{4-13}
$$

平移预积分测量值相对内参的雅可比矩阵的递推形式直接给出结果：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{\omega}} &= \frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_{j-1}}^{O_i}}{\partial s^{\omega}}+\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\left(\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}}{\partial s^{\omega}}\right)^{\wedge}\bar{\boldsymbol{s}}^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^O+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\left(\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{\omega}}\right)^{\wedge}\bar{\boldsymbol{s}}^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_j^O\right)\triangle t \\
\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{x}} &= \frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_{j-1}}^{O_i}}{\partial s^{x}}+\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\boldsymbol{I}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^O+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\boldsymbol{I}_1\tilde{\boldsymbol{v}}_j^O\right)\triangle t \\
\frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{y}} &= \frac{\partial\triangle\bar{\boldsymbol{p}}_{O_{j-1}}^{O_i}}{\partial s^{y}}+\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\boldsymbol{I}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^O+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}\left(\bar{s}^{\omega}\right)\boldsymbol{I}_2\tilde{\boldsymbol{v}}_j^O\right)\triangle t
\end{aligned}
\tag{4-14}
$$

■ 在线标定轮速预积分方差传递

加入轮速内外参后的预积分测量误差为：

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{\theta}_{ij} &= \sum_{k=i+1}^{j}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_k T}\boldsymbol{J}_r^k s_i^{\omega}\bar{\boldsymbol{n}}_k^{\omega d}\triangle t \\
\delta\boldsymbol{p}_{ij} &= \sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}(\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k-1}^O)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik-1}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}(\boldsymbol{s}_i^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_k^O)^{\wedge}\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}\right)\triangle t-\sum_{k=i+1}^{j}\frac{1}{2}\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\boldsymbol{n}_{k-1}^{vd}+\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^{v}\boldsymbol{n}_k^{vd}\right)\triangle t
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

是高斯白噪声的线性组合，因此也是高斯白噪声。那么可以将轮速预积分噪声表征为：

$$\left[\delta \boldsymbol{p}_{ij}^{\ T} \quad \delta \boldsymbol{\theta}_{ij}^{\ T}\right]^T \sim N(\boldsymbol{0}_{6\times1}, \boldsymbol{Q}_{ij}^O) \tag{4-16}$$

$\boldsymbol{Q}_{ij}^O$ 可以通过迭代的形式计算，这里直接给出 $\boldsymbol{Q}_{ij}^O$ 的迭代方程:

$$\begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{p}_{ik} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{ik} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F} \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{p}_{ik-1} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{ik-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_{k-1}^{vd} \\ \boldsymbol{n}_{k-1}^{\omega d} \\ \boldsymbol{n}_{k}^{vd} \\ \boldsymbol{n}_{k}^{\omega d} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{3\times3} & -\frac{\Delta t}{2}\left(\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j-1}}^{O_i}(\boldsymbol{s}_i^v \tilde{\boldsymbol{v}}_{j-1}^O)^\wedge + \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}(\boldsymbol{s}_i^v \tilde{\boldsymbol{v}}_j^O)^\wedge \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_{j-1}^T}\right) \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_{k-1}^T} \end{bmatrix} \tag{4-17}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2}\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k-1}}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^v & -\frac{\Delta t^2}{4}\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\left(\boldsymbol{s}_i^v \tilde{\boldsymbol{v}}_k^O\right)^\wedge \boldsymbol{J}_r^k & \frac{\Delta t}{2}\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\boldsymbol{s}_i^v & -\frac{\Delta t^2}{4}\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_k}^{O_i}\left(\boldsymbol{s}_i^v \tilde{\boldsymbol{v}}_k^O\right)^\wedge \boldsymbol{J}_r^k s_i^\omega \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^k s_i^\omega \triangle t & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_r^k s_i^\omega \triangle t \end{bmatrix}$$

■ 在线标定轮速预积分残差及雅可比矩阵

轮速预积分残差已由式(3-50)给出，只是在第三章认为外参已知且固定。残差相对其他状态量的雅可比矩阵已由(3-51)给出，这里直接给出残差相对内外参的雅可比矩阵：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_O^B} = \left(\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^W \boldsymbol{R}_O^B\right)^T \left(\boldsymbol{R}_{Bj}^W \boldsymbol{p}_O^B + \boldsymbol{p}_{Bj}^W - \boldsymbol{R}_{Bi}^W \boldsymbol{p}_O^B - \boldsymbol{p}_{Bi}^W\right)\right)^\wedge \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta \boldsymbol{p}_O^B} = \left(\boldsymbol{R}_{Bi}^W \boldsymbol{R}_O^B\right)^T \left(\boldsymbol{R}_{Bj}^W - \boldsymbol{R}_{Bi}^W\right) \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^\omega} = -\frac{\partial \triangle \bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^\omega} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^x} = -\frac{\partial \triangle \bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^x} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^y} = -\frac{\partial \triangle \bar{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^y} \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_O^B} = \boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}\left(\boldsymbol{R}_O^B\right)\right)\left(\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{R}_{Bj}^W \boldsymbol{R}_O^B\right)^T \boldsymbol{R}_{Bi}^W \boldsymbol{R}_O^B\right) \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta \boldsymbol{p}_O^B} = \boldsymbol{0}_{3\times3} \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^\omega} = -\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}(\delta s^\omega)\right) Exp\left(\boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}(\delta s^\omega)\right)^T \boldsymbol{J}_r\left(\frac{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{R}}_{Oj}^{Oi}}{\partial s^\omega}\delta s^\omega\right)\frac{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{R}}_{Oj}^{Oi}}{\partial s^\omega} \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^x} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^y} = \boldsymbol{0}_{3\times1}
\end{aligned} \tag{4-18}$$

至此，轮速在线标定的优化五要素：状态量(4-3)、残差(3-50)、增量更新方式(4-4)、雅可比矩阵(4-18)以及协方差矩阵(4-17)已全部给出。

4.2.3 时间延迟在线标定

时间延迟主要由时钟漂移、时间戳精度低、通讯延迟、操作系统调度延时、时钟源不同等因素引起，即有系统偏差，也有随机偏差[107]。如果未考虑时间偏移，则会在估计过程中引入未建模的误差，导致精度降低，即使传感器之间只有小的时延误差也会对估计精度产生较大的影响[108]。

包含时间延迟的因子图模型已在图 4-1 给出，新加入的时间延迟节点包括 t_d^C 和 t_d^O，即待估计的状态量为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \ \boldsymbol{x}_{N-1}, \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, \boldsymbol{q}_C^B, \boldsymbol{p}_C^B, \boldsymbol{q}_O^B, \boldsymbol{p}_O^B, t_d^C, t_d^O \right] \\ \boldsymbol{x}_i &= \left[\boldsymbol{p}_{Bi}^W, \boldsymbol{v}_{Bi}^W, \boldsymbol{q}_{Bi}^W, \boldsymbol{b}_i^a, \boldsymbol{b}_i^g, \boldsymbol{\theta}_W^\pi, z_W^\pi, s^\omega, s^x, s^y \right] \end{aligned} \tag{4-19}$$

新增状态量的更新方式为：

$$\begin{aligned} t_d^C &\leftarrow t_d^C + \delta t_d^C \\ t_d^O &\leftarrow t_d^O + \delta t_d^O \end{aligned} \tag{4-20}$$

相机-IMU 时延采用 VINS-Mono 的方案，对于轮速-IMU 时延，如图 4-7 所示，对数值时间戳 t_k 和 t_{k+1} 之间的轮速和惯性测量进行预积分，由于时延的存在，通过数值时间戳得到的轮速预积分实际对应采样时间戳 $t_{k'}$ 和 $t_{k'+1}$ 之间的轮速预积分，为了得到采样时间戳 t_k 和 t_{k+1} 之间的轮速预积分，本文推导了包含时延的轮速预积分。下面推导使用的时间为采样时间戳的时间。

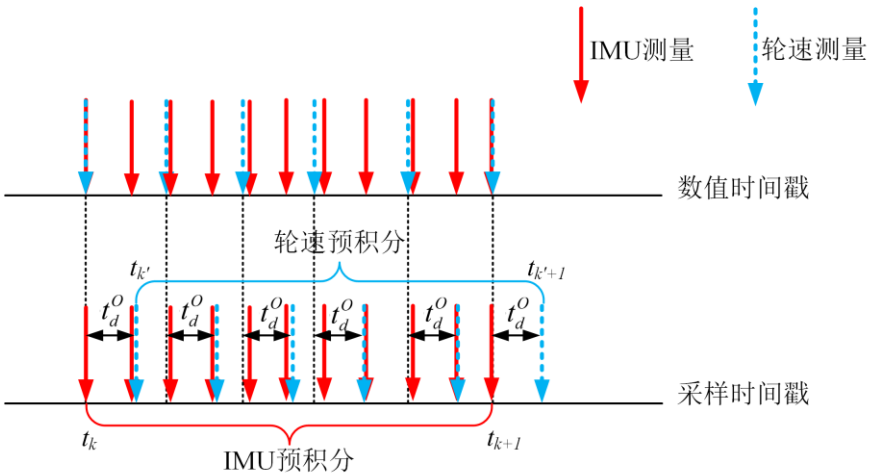


图 4-7 轮速-IMU 时间延迟示意图

$\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k}$ 是待求的旋转预积分，借鉴 Liu[71]推导包含时间延迟的 IMU 预积分所用的近似思想，可以表示为：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k} &= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}\,-1} \\ &\approx Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'}^{O}t_d^{O})\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}Exp(-s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'+1}^{O}t_d^{O})\end{aligned} \tag{4-21}$$

式中：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k} &\approx Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'}^{O}t_d^{O}) \\ \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}} &\approx Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'+1}^{O}t_d^{O})\end{aligned} \tag{4-22}$$

式中近似认为在 t_k 到 $t_{k'}$ 间角速度保持为 $\tilde{\omega}_{k'}^{O}$，在 t_{k+1} 到 $t_{k'+1}$ 间角速度保持为 $\tilde{\omega}_{k'+1}^{O}$。

$\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}$ 是待求的平移预积分，可以表示为：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k+1}}^{O_k} &= \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'}}^{O_k} + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}} \\ &= \sum_{t_i=t_k}^{t_{k'}}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_i}^{O_k}\tilde{\boldsymbol{v}}_i^{O}\triangle t + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k}\sum_{t_j=t_{k+1}}^{t_{k'+1}}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_{k+1}}\tilde{\boldsymbol{v}}_j^{O}\triangle t \\ &\approx \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}t_d^{O} + \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}t_d^{O} \\ &= \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}t_d^{O} + \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}t_d^{O}\right) \\ &= Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'}^{O}t_d^{O})\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}t_d^{O} + \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}t_d^{O}\right)\end{aligned} \tag{4-23}$$

式中：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'}}^{O_k} &\approx \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'}}^{O_k}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}t_d^{O} \\ \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}} &\approx \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k+1}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}t_d^{O}\end{aligned} \tag{4-24}$$

式中近似认为在 t_k 到 $t_{k'}$ 间速度保持为 $\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}$，在 t_{k+1} 到 $t_{k'+1}$ 间角速度保持为 $\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}$。

综上，我们得到了包含时延的轮速预积分：

$$\begin{aligned}\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k+1}}^{O_k} &= Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'}^{O}t_d^{O})\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}Exp(-s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'+1}^{O}t_d^{O}) \\ \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k+1}}^{O_k} &= Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{k'}^{O}t_d^{O})\left(s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'}^{O}t_d^{O} + \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{k'+1}}^{O_{k'}}s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{k'+1}^{O}t_d^{O}\right)\end{aligned} \tag{4-25}$$

将该轮速预积分代入轮速因子的残差(3-50)，得到了包含时延的残差：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}} &= Log\left(\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i^T}\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right) \\ &= Log\left(\left(Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{i'}^{O}t_d^{O})\triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}Exp(-s^{\omega}\tilde{\omega}_{j'}^{O}t_d^{O})\right)^{T}\left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right) \\ \boldsymbol{r}_{\triangle\boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}} &= \left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B} + \boldsymbol{p}_{Bj}^{W} - \boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B} - \boldsymbol{p}_{Bi}^{W}) - \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i} \\ &= \left(\boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{R}_{O}^{B}\right)^{T}(\boldsymbol{R}_{Bj}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B} + \boldsymbol{p}_{Bj}^{W} - \boldsymbol{R}_{Bi}^{W}\boldsymbol{p}_{O}^{B} - \boldsymbol{p}_{Bi}^{W}) - Exp(s^{\omega}\tilde{\omega}_{i'}^{O}t_d^{O})\left(s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O}t_d^{O} + \triangle\tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{j'}}^{O_{i'}} - \triangle\tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right)\end{aligned} \tag{4-26}$$

虽然前述推导基于 $t_d^O > 0$ 的假设，但是在 $t_d^O < 0$ 的情况下依然成立。这里只给出由于引入时延而发生变化的雅可比矩阵：

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{\omega}} = -Exp\left(\tilde{s}^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \triangle \overline{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{\omega}} - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}\left(\tilde{s}^{\omega}\right)\left(\boldsymbol{J}_r\left(\dfrac{\partial \Delta \overline{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\boldsymbol{\omega}}}\delta s_i^{\boldsymbol{\omega}}\right)\dfrac{\partial \Delta \overline{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^{\boldsymbol{\omega}}}\right)^{\wedge} s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}t_d^{O} \\ +\left(\boldsymbol{J}_r\left(\tilde{s}^{\omega}\tilde{\omega}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)\tilde{\omega}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)^{\wedge}\left(s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O}t_d^{O} + \triangle \tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}\left(\tilde{s}^{\omega}\right) - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}\left(\tilde{s}^{\omega}\right)s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{x}} = -Exp\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)\left(I_1\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O}t_d^{O} + \frac{\partial \triangle \overline{\boldsymbol{p}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}}{\partial s^{x}} - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}I_1\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right)
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{y}} = -Exp\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)\left(I_2\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O}t_d^{O} + \frac{\partial \triangle \overline{\boldsymbol{p}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s^{y}} - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}I_2\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right)
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{p}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta t_d^{O}} = -Exp\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}\overline{t}_d^{O}\right)\begin{pmatrix} s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O} - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O} + \left(\boldsymbol{J}_r\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}\overline{t}_d^{O}\right)s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}\right)^{\wedge} \\ \left(s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{i'}^{O}\overline{t}_d^{O} + \triangle \tilde{\boldsymbol{p}}_{O_{j'}}^{O_{i'}} - \triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}s^{v}\tilde{\boldsymbol{v}}_{j'}^{O}\overline{t}_d^{O}\right) \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{\omega}} = -\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{R}_{ij}}(\delta s_i^{\boldsymbol{\omega}})\right)Exp\left(-\boldsymbol{r}_{\Delta \boldsymbol{R}_{ij}}(\delta s_i^{\boldsymbol{\omega}})\right)Exp\left(s_i^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}_{t_{j'}}^{O}t_{di}^{O}\right)
$$

$$
\left(\left(\Delta \tilde{\boldsymbol{R}}_{i'j'}(\tilde{s}_i)\right)^{T}\boldsymbol{J}_r\left(s_i^{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}_{t_{i'}}^{O}t_{di}^{O}\right)\boldsymbol{\omega}_{t_{i'}}^{O}t_{di}^{O} + \boldsymbol{J}_r\left(\frac{\partial \Delta \overline{\boldsymbol{R}}_{i'j'}}{\partial s_i^{\boldsymbol{\omega}}}\delta s_i^{\boldsymbol{\omega}}\right)\frac{\partial \Delta \overline{\boldsymbol{R}}_{i'j'}}{\partial s_i^{\boldsymbol{\omega}}}\right)
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta s^{y}} = \boldsymbol{0}_{3\times 3}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}}{\partial \delta t_d^{O}} = -J_r^{-1}\left(\boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}\left(t_d^{O}\right)\right)Exp\left(\boldsymbol{r}_{\triangle \boldsymbol{R}_{O_j}^{O_i}}\left(t_d^{O}\right)\right)^{T}Exp\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right)
$$

$$
\bullet\left(\left(\triangle \tilde{\boldsymbol{R}}_{O_{j'}}^{O_{i'}}\left(\hat{\boldsymbol{s}}^{O}\right)\right)^{T}J_r\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O}t_d^{O}\right)s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{i'}^{O} - J_r\left(s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j'}^{O}t_d^{O}\right)s^{\omega}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j'}^{O}\right)
$$

(4-27)

4.3 视觉-惯性-轮速融合初始化

包含在线标定的视觉-惯性-轮速融合定位系统是一个高度非线性系统，需要较好的初值。初始化的质量对后续估计的精度有很大影响，错误的初始化甚至导致估计无法收敛。现有视觉-惯性融合初始化方法（如 VINS-Mono 中的初始化方法）应用在地面移动机器人成功率较低。研究如何在初始化过程中利用轮速信息提高初始化的精度和鲁棒性具有重要意义。

初始化过程从纯视觉运动恢复结构（SFM）开始，通过捆集调整，该步骤可以获得比 IMU 积分精度更高的相机轨迹（尺度等价意义下），SFM 详见 VINS-Mono[48]。

4.3.1 外参初始化

外参标定采用手眼标定的思路估计旋转参数，平移参数通过测量给定初值，运行过程中会进行优化。对于相机-IMU 外参，参考 VINS-Mono[48]。对于相机-轮速的外参，可构建如下手眼标定等式：

$$\boldsymbol{q}_{C_{k+1}}^{C_k} \otimes \boldsymbol{q}_O^C = \boldsymbol{q}_O^C \otimes \boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k} \tag{4-28}$$

化简之前定义$\otimes$为四元数乘法，四元数相乘$\boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_3}^{\mathcal{F}_1} = \boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_2}^{\mathcal{F}_1} \otimes \boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_3}^{\mathcal{F}_2}$，且四元数相乘可以转换为四元数对应的矩阵乘以四元数：

$$\boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_2}^{\mathcal{F}_1} \otimes \boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_3}^{\mathcal{F}_2} = \left[\boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_2}^{\mathcal{F}_1}\right]_L \boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_3}^{\mathcal{F}_2} = \left[\boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_3}^{\mathcal{F}_2}\right]_R \boldsymbol{q}_{\mathcal{F}_2}^{\mathcal{F}_1} \tag{4-29}$$

根据(4-29)的四元数相乘性质，可将(4-28)写成：

$$\left(\left[\boldsymbol{q}_{C_{k+1}}^{C_k}\right]_L - \left[\boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k}\right]_R\right)\boldsymbol{q}_O^C = \boldsymbol{Q}_{k+1}^k \boldsymbol{q}_O^C = \boldsymbol{0} \tag{4-30}$$

将多个时刻的线性方程(4-30)累计，并加上 Huber 鲁棒核权重得到：

$$\begin{bmatrix} w_1^0 \boldsymbol{Q}_1^0 \\ w_2^1 \boldsymbol{Q}_2^1 \\ \vdots \\ w_N^{N-1} \boldsymbol{Q}_N^{N-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_O^C = \boldsymbol{Q}_N \boldsymbol{q}_O^C = \boldsymbol{0} \tag{4-31}$$

求解上式得到初始化的外参$\boldsymbol{q}_O^C$。

4.3.2 陀螺仪偏差和轮速内参初始化

利用旋转约束求陀螺仪偏差和轮速内参s^ω，陀螺仪偏差的初始化参考 VINS-Mono，对于轮速内参s^ω初始化，认为轮速积分得到的旋转和视觉得到的旋转的差是由s^ω导致的，构建如下优化方程：

$$s^{\omega *} = \arg\min \sum_{k \in \mathcal{C}} \left\| 2\left[\boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{C_0^{-1}} \otimes \boldsymbol{q}_{O_k}^{C_0} \otimes \boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k}\right]_{xyz} \right\|^2 \tag{4-32}$$

式中$\mathcal{C}$代表图像关键帧集合，$\boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k}$由轮速预积分得到，且根据在线标定轮速预积分的内参一阶更新有：

$$\boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k} \approx \boldsymbol{q}_{O_{k+1}}^{O_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{J}_{s^\omega}^q \delta s^\omega \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_{s^\omega}^q = \frac{\partial \triangle \bar{\boldsymbol{R}}_{O_j}^{O_i}}{\partial s_i^\omega} \tag{4-33}$$

结合式(4-33)可以将(4-32)构建成最小二乘问题求解。求解出新的陀螺仪偏差和轮速

内参后重新对预积分项进行积分。

4.3.3 视觉-惯性-轮速联合对齐

这里初始化关键帧速度，重力向量和尺度因子：

$$\boldsymbol{X}_I=\left[\boldsymbol{v}_{B_0}^{B_0},\boldsymbol{v}_{B_1}^{B_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{B_n}^{B_n},\boldsymbol{g}^{C_0},s\right] \tag{4-34}$$

式中 $\boldsymbol{v}_{B_k}^{B_k}$ 是第 k 帧关键帧时 IMU 坐标下的速度，$\boldsymbol{g}^{C_0}$ 是 C_0 帧下的重力向量，s 将单目视觉的尺度缩放到米制单位。考虑滑窗中连续的两帧 B_k 和 B_{k+1}，有如下等式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{B_{k+1}}^{B_k}&=\boldsymbol{R}_W^{B_k}\left(\boldsymbol{p}_{B_{k+1}}^W-\boldsymbol{p}_{B_k}^W-\boldsymbol{v}_{B_k}^W\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^W\Delta t^2\right)\\
\boldsymbol{\beta}_{B_{k+1}}^{B_k}&=\boldsymbol{R}_W^{B_k}\left(\boldsymbol{v}_{k+1}^W-\boldsymbol{v}_k^W+\boldsymbol{g}^W\Delta t\right)\\
\triangle\boldsymbol{p}_{O_{k+1}}^{O_k}&=(\boldsymbol{R}_{B_k}^W\boldsymbol{R}_O^B)^T(\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^W\boldsymbol{p}_O^B+\boldsymbol{p}_{B_{k+1}}^W-\boldsymbol{R}_{B_k}^W\boldsymbol{p}_O^B-\boldsymbol{p}_{B_k}^W)
\end{aligned} \tag{4-35}$$

由于 SFM 过程以 C_0 帧为参考坐标系，将 W 替换为 C_0：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{B_{k+1}}^{B_k}&=\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\left(s\left(\overline{\boldsymbol{p}}_{B_{k+1}}^{C_0}-\overline{\boldsymbol{p}}_{B_k}^{C_0}\right)-\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{v}_{B_k}^{B_k}\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{C_0}\Delta t^2\right)\\
\boldsymbol{\beta}_{B_{k+1}}^{B_k}&=\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\left(\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{v}_{B_{k+1}}^{B_{k+1}}-\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{v}_{B_k}^{B_k}+\boldsymbol{g}^{C_0}\Delta t\right)\\
\triangle\boldsymbol{p}_{O_{k+1}}^{O_k}&=\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\left(\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_O^B+s\left(\overline{\boldsymbol{p}}_{B_{k+1}}^{C_0}-\overline{\boldsymbol{p}}_{B_k}^{C_0}\right)-\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{p}_O^B\right)
\end{aligned} \tag{4-36}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{p}}_{B_k}^{C_0}$ 由 SFM 得到，是无尺度的量，因此需要乘上尺度 s，且满足：

$$s\overline{\boldsymbol{p}}_{B_k}^{C_0}=s\overline{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}-\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{p}_C^B \tag{4-37}$$

将式(4-37)分别代入 $\boldsymbol{\alpha}_{B_{k+1}}^{B_k}$ 和 $\triangle\boldsymbol{p}_{O_{k+1}}^{O_k}$ 得到：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_{B_{k+1}}^{B_k}&=s\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\left(\overline{\boldsymbol{p}}_{C_{k+1}}^{C_0}-\overline{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}\right)-\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_C^B+\boldsymbol{p}_C^B-\boldsymbol{v}_{B_k}^{B_k}\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{g}^{C_0}\Delta t^2\\
\triangle\boldsymbol{p}_{O_{k+1}}^{O_k}&=\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_O^B+s\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\left(\overline{\boldsymbol{p}}_{C_{k+1}}^{C_0}-\overline{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}\right)-\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_C^B+\boldsymbol{R}_O^{B^T}\left(\boldsymbol{p}_C^B-\boldsymbol{p}_O^B\right)\\
\boldsymbol{\beta}_{B_{k+1}}^{B_k}&=\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{v}_{B_{k+1}}^{B_{k+1}}-\boldsymbol{v}_{B_k}^{B_k}+\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{g}^{C_0}\Delta t
\end{aligned} \tag{4-38}$$

可以将式(4-38)整理为如下线性测量模型：

$$\hat{z}_{B_{k+1}}^{B_k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{B_{k+1}}^{B_k}+\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_C^B-\boldsymbol{p}_C^B\\ \triangle\boldsymbol{p}_{O_{k+1}}^{O_k}-\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_O^B+\left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}\boldsymbol{p}_C^B-\boldsymbol{R}_O^{B^T}\left(\boldsymbol{p}_C^B-\boldsymbol{p}_O^B\right)\\ \boldsymbol{\beta}_{B_{k+1}}^{B_k}\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}_{B_{k+1}}^{B_k}\boldsymbol{X}_I+\boldsymbol{n}_{B_{k+1}}^{B_k} \tag{4-39}$$

式中：

$$\boldsymbol{H}_{B_{k+1}}^{B_k}=\begin{bmatrix} -\Delta t I_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \frac{1}{2}\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\Delta t^2 & \boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\left(\bar{\boldsymbol{p}}_{C_{k+1}}^{C_0}-\bar{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}\right) \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times1} & \left(\boldsymbol{R}_{B_k}^{C_0}\boldsymbol{R}_O^B\right)^T\left(\bar{\boldsymbol{p}}_{C_{k+1}}^{C_0}-\bar{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}\right) \\ -I_{3\times3} & \boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0} & \boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}\Delta t & \boldsymbol{0}_{3\times1} \end{bmatrix} \tag{4-40}$$

式中 $\boldsymbol{R}_{C_0}^{B_k}$、$\boldsymbol{R}_{B_{k+1}}^{C_0}$、$\bar{\boldsymbol{p}}_{C_k}^{C_0}$、$\bar{\boldsymbol{p}}_{C_{k+1}}^{C_0}$ 由单目视觉 SFM 得到。Δt 是相邻两帧的时间间隔。通过求解线性最小二乘问题(4-39)可以得到滑动窗口内每一帧在 IMU 坐标系下的速度、重力向量以及尺度因子。

紧接着对重力向量进行优化，利用重力向量将参考坐标系 C_0 与世界坐标系 W 对齐，后续部分与 VINS-Mono 并无差别。

4.4 单元仿真实验研究

4.4.1 视觉-惯性-轮速融合初始化仿真验证

为了测试视觉-惯性-轮速融合初始化的性能以及验证其理论正确性，分别设计有噪声和无噪声仿真实验对估计的尺度进行定量分析，并与视觉-惯性融合初始化进行对比。仿真设置的噪声标准差列于表 4-1 中。

表 4-1 各项噪声标准差

轮速角速度测量	轮速速度测量	IMU 角速度测量	IMU 加速度测量	IMU 角速度偏差	IMU 加速度偏差	图像
0.015 rad/s	0.015 m/s	0.015 rad/s	0.019 m/s^2	1.0x10^{-5} rad/s^2	0.0001 rad/s^2	1.5 pixel

我们使用尺度比（scale ratio）来比较视觉-惯性-轮速融合初始化和视觉-惯性融合初始化，尺度比如下计算[8]：

$$SR=\frac{d_{est}}{d_{gt}}-1 \tag{4-41}$$

式中，d_{est} 为算法估计的两帧之间的距离，d_{gt} 为对应真值。尺度比反映了尺度估计的效果，SR 越接近 0，尺度估计的效果越好。

图 4-8 为逐帧尺度比曲线图，其对应的标准差列于表 4-2 中。图 4-8 a 的曲线以及对应的标准差表明改进的视觉-惯性-轮速融合初始化的尺度估计精度比视觉-惯性融合初始化的尺度估计精度高。同时为了验证视觉-惯性-轮速融合初始化的理论正确性，设置了无噪声仿真实验，图 4-8 b 中两条尺度比曲线基本重合，VIWO 略优于 VIO，且相比

于有噪声，无噪声情况下 VIWO 和 VIO 的尺度比都接近 0，这说明所提视觉-惯性-轮速融合初始化的理论正确性和现有的视觉-惯性融合初始化[109]相当。另外，从无噪声到有噪声，视觉-惯性融合初始化的尺度比发散得更加剧烈，说明视觉-惯性-轮速融合初始化具有更高的鲁棒性。

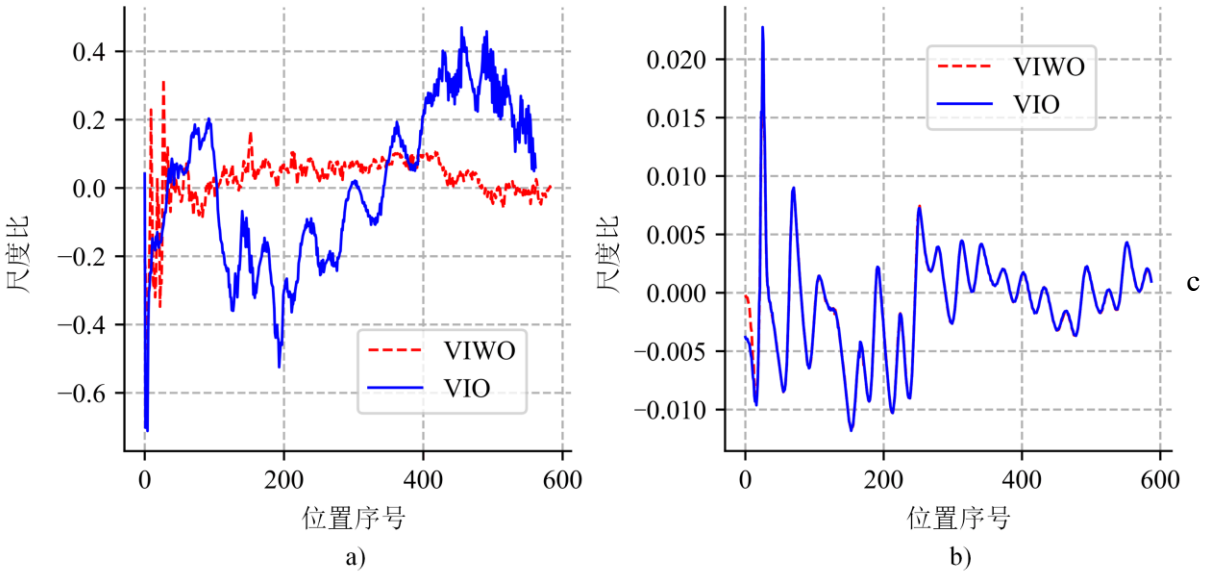


图 4-8 逐帧尺度比曲线图：a) 有噪声；b) 无噪声

表 4-2 尺度比标准差

	VIWO 有噪声	VIO 有噪声	VIWO 无噪声	VIO 无噪声
标准差	0.0737	0.2293	0.0043	0.0044

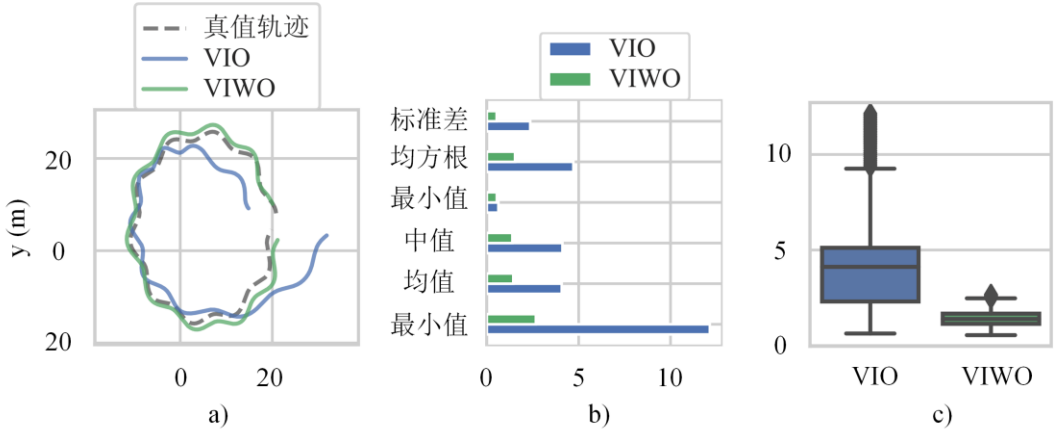


图 4-9 VIWO 初始化和 VIO 初始化对比：a) 轨迹对比；b) 绝对位置误差统计数据对比；c) 绝对位置误差箱线图对比

进一步使用 evo 分别对 VIWO 初始化得到的轨迹和 VIO 初始化得到的轨迹进行测评，从图 4-9 a 可以直观看出使用 VIWO 初始化得到的轨迹更加接近真值轨迹；从图 4-9

b 的绝对位置误差角度来看，使用 VIWO 初始化的各项统计指标也优于 VIO 初始化；从图 4-9 c 的绝对位置误差箱线图可以看出，改进的 VIWO 初始化方法得到的轨迹具有更短的箱高，更小的中值，以及更少的异常值，因此相比于 VIO 初始化，所提的 VIWO 具有更高的精度和鲁棒性。另外，从图 4-9 a 可以看出仅初始化方式的不同对随后的定位精度影响也很大，因此，所改进的 VIWO 初始化方法能够有效提升机器人的定位精度。

4.4.2 内参在线标定仿真实验

为了测试在线标定模型的性能，设计仿真实验，记录迭代过程，对比仿真真值。首先对轮速内参在线标定进行测试。设置轮速内参真值为 $s^x = s^y = s^\omega = 1.2$，初始值为 $s^x = 1.4$，$s^y = 1.0$，$s^\omega = 0.9$。

VIWO 运行过程中内参的变化如图 4-10 所示，曲线起始的“平台”正处于 VIWO 初始化过程，内参尚未进行优化，初始化完成随即进行一次优化，内参有一个快速变小的过程。这是由于视觉 SFM 过程中，轨迹尺度归一化为 1，而实际场景的大小远大于 1m（轨迹长度为 111m），使得尺度初始化偏小，在紧接着的一次优化中，轮速信息尚少，不足以和初始化的信息相抗衡，为了使得残差减小，只能使内参变小。随着 VIWO 的运行，轮速约束增多，内参开始往真值收敛，s^x 充分收敛至真值，s^y 和 s^ω 收敛不足。

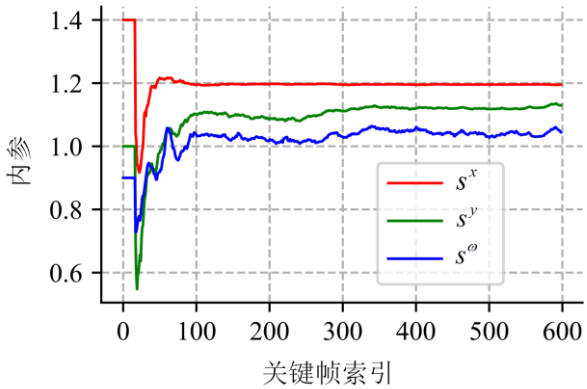
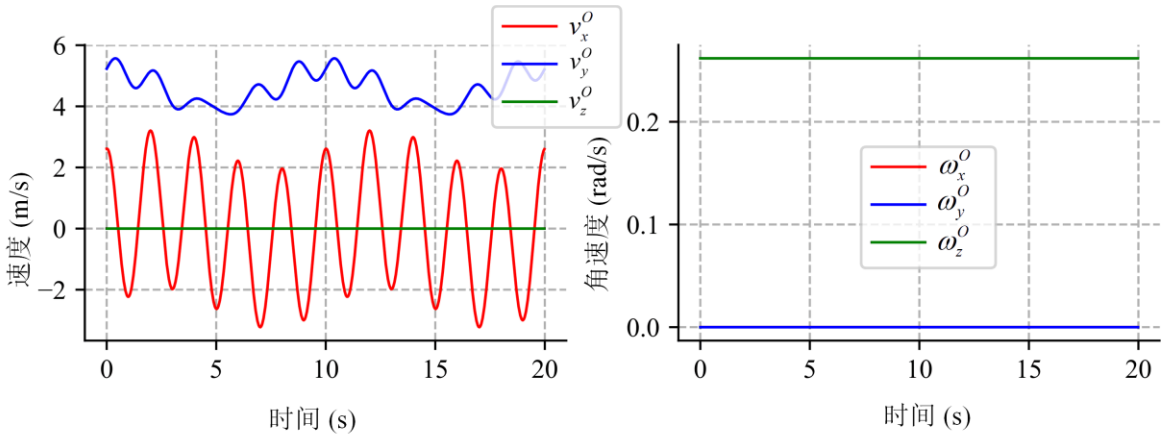


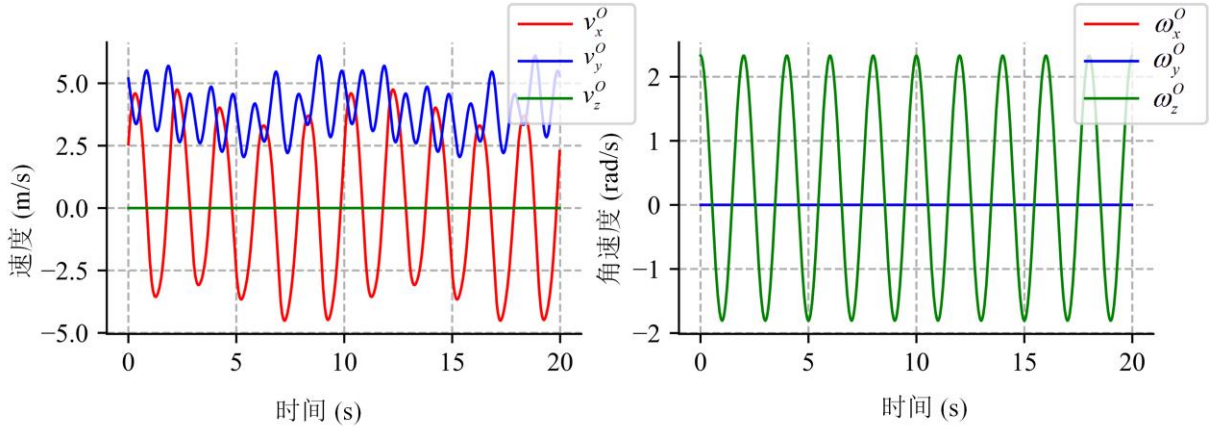
图 4-10 VIWO 运行过程中内参在线标定变化图

为了分析收敛不足的原因，将仿真轨迹生成的轮速测量值绘制于图 4-11 中，可以看出，x 方向的速度激励显著强于 y 方向速度激励和角速度激励，因此推测收敛不足的原因为激励不足。为了验证该想法，在仿真中加强角速度激励，加强后的轮速测量如图 4-12 所示，在轨迹不变的情况下，角速度激励加强会使得速度激励加强，导致 y 方向的速度激励也伴随增强。



a) b)

图 4-11 仿真轮速测量：a) 速度测量；b) 角速度测量



a) b)

图 4-12 加强角速度激励后的仿真轮速测量：a) 速度测量；b) 角速度测量

使用加强角速度激励后的数据运行 VIWO，内参变化如图 4-13 所示。在“平台”阶段初始化完成后紧接着的一次优化中，s^{ω} 直接优化至真值附近，说明加强角速度激励有效且在运行初期即可快速收敛，虽然 s^{x} 和 s^{y} 经历了一个远离真值的过程，但是由于伴随速度激励增强，s^{x} 和 s^{y} 紧接着也快速向真值方向优化，慢慢收敛。

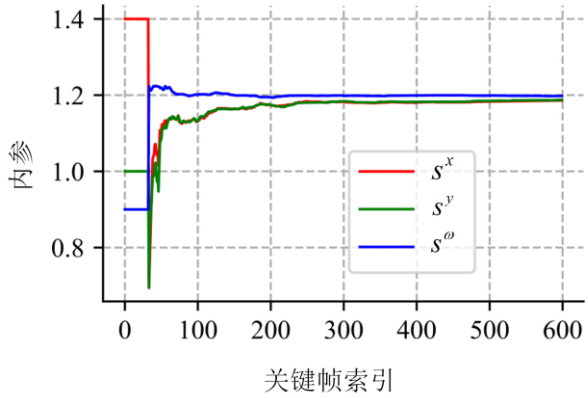


图 4-13 加强角速度激励后 VIWO 运行过程中内参在线标定变化图

以上结果验证了提出的轮速内参在线标定模型的有效性，运行初期加强角速度激励可以加快内参收敛到真值。

4.4.3 外参在线标定仿真实验

为了测试用于地面移动机器人的外参在线标定模型的性能，分别对相机外参在线标定和轮速外参在线标定进行仿真实验，设定外参平移手工测量误差为 5cm，外参旋转手工测量误差为 10°，将误差添加到外参上作为初始值，使用的外参真值和初始值列于表 4-3。最后根据实验结果总结视觉-惯性-轮速外参在线标定的规律。

表 4-3 外参真值和初始值 (角度: [yaw, pitch, roll]，单位°；平移: [x, y, z]，单位 m)

	旋转真值	旋转初始值	平移真值	平移初始值
相机外参	[-90, 0, 90]	[-79.8, 9.8, 81.7]	[0.05, 0.04, 0.03]	[0.1, 0.09, 0.08]
轮速外参	[0, 0, 0]	[-10, 10, -10]	[-0.0208, 0.0290, -0.0168]	[-0.0708, 0.0790, 0.0332]

■ 相机外参在线标定

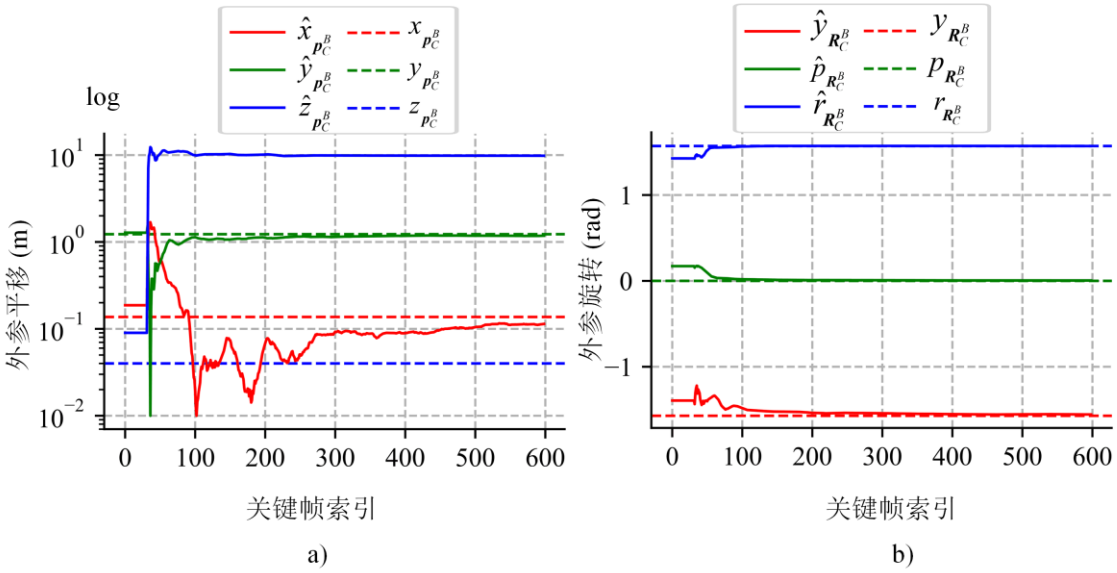


图 4-14 旋转和平移同时在线标定变化图：a) 平移变化图；b) 旋转变化图

首先对外参的旋转和平移同时标定（六自由度优化）进行测试，旋转和平移在 VIWO 运行过程中的变化如图 4-14 所示，虚线对应真值，实线对应估计的外参。图 4-14 b 将 $\boldsymbol{R}_C^B$ 转换成 ypr 形式的欧拉角并绘制曲线，可以看出旋转部分收敛速度快且精度高。为了曲线清晰可观，图 4-14 a 采用对数坐标，数据存在负数，因此对最小值为负数的数据组进行偏移：$x_i = x_i - \min(x) + 0.01$。从图 4-14 a 可知 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 发生了较大的漂移（真值为 0.03，从初始值 0.08 漂移至 9.82），这是因为平面移动情况下外参平移沿旋转轴的分量不可观，

不可观意味着该分量为零空间的一个基，改变该分量的大小只是在零空间里变化，不改变约束，因此不可观的分量在优化过程中极易产生大的漂移，收敛到真值是小概率事件。

不可观分量无法保证正确估计，且会给优化带来振荡，使得其他变量收敛较慢甚至无法收敛，因此我们在优化过程中将 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 固定，结果如图 4-15 所示，从图 4-15 b 可知，固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 对旋转估计几乎没有影响，但是对平移的估计精度影响较大，具体误差列于表 4-4 中，结果说明固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 防止了 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 的漂移，并提高了另外两个平移分量的估计精度。

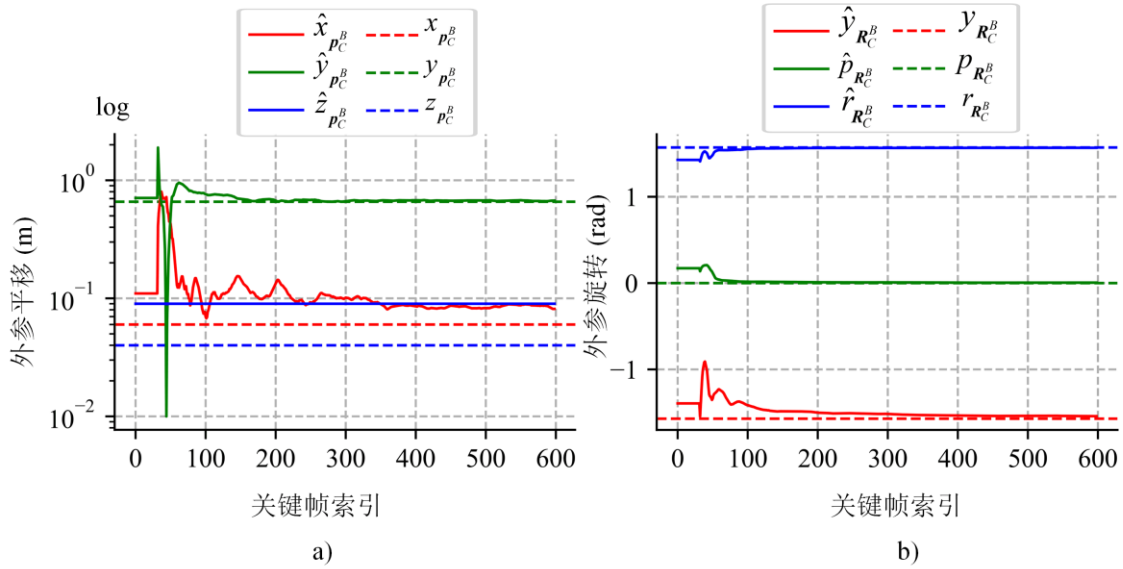


图 4-15 固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 在线标定变化图：a) 平移变化图；b) 旋转变化图

表 4-4 固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 前后平移估计误差 (平移: [x, y, z], 单位 m)

	估计值	误差
六自由度优化	[0.0268, -0.0078, 9.8213]	[0.0232, 0.0478, 9.7913]
固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$	[0.0714, 0.0548, 0.0800]	[0.0214, 0.0148, 0.0500]

为了进一步分析固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 对 VIWO 定位精度和在线标定精度的影响，在 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 真值附近 $[-0.05\text{m} \quad +0.05\text{m}]$ 以 0.01m 为间隔取值，作为每次 VIWO 运行的固定值，基本包含了手动测量 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 的误差范围，分别统计定位精度和在线标定精度，如图 4-16 所示。从图 4-16 a 可以看出，在固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 的情况下在线标定，除了 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 本身的误差，$\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 的手动测量误差对外参的其他量的标定精度并没有实质性的影响。另外从图 4-16 b 可以看出，在固

定 $\hat{z}_{p_C^B}$ 的情况下运行 VIWO 比六自由度优化定位精度更高，另外 $\hat{z}_{p_C^B}$ 的手动测量误差对定位精度没有产生显著的影响，均方根误差的极差为 0.016m。

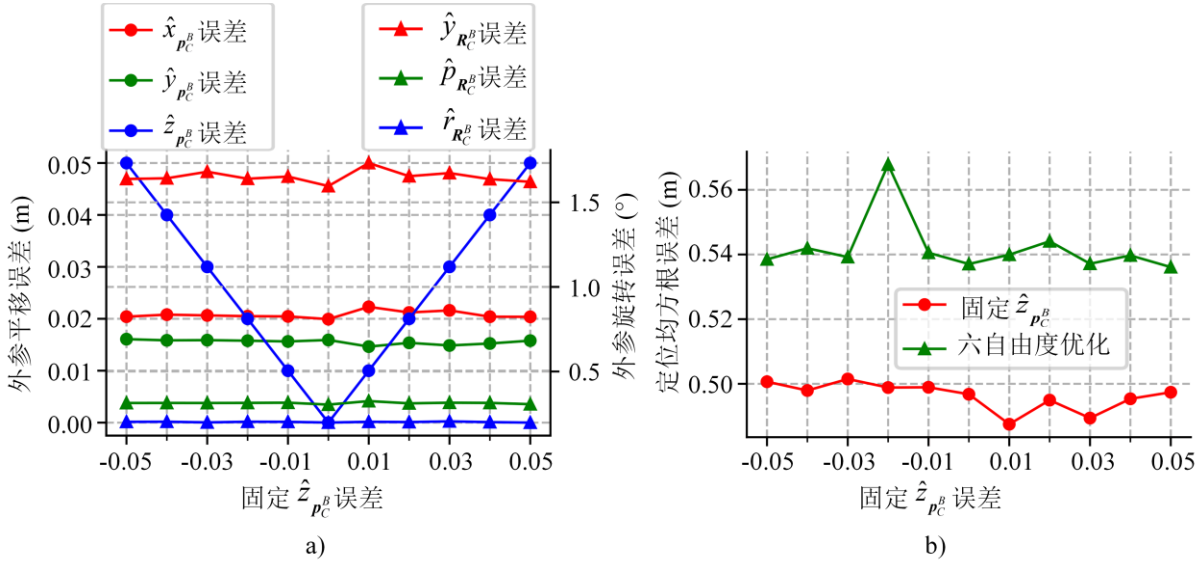


图 4-16 固定不同 $\hat{z}_{p_C^B}$ 误差下的标定误差和定位误差：a) 标定误差；b) 定位误差

以上实验结果说明平面运动的情况下，相比参与优化，在优化中固定 $\hat{z}_{p_C^B}$ 可以得到更高的标定精度和定位精度。除此之外，在手工测量误差范围内，$\hat{z}_{p_C^B}$ 固定值与真值之间的误差大小对标定精度和定位精度没有实质影响。

■ 轮速外参在线标定

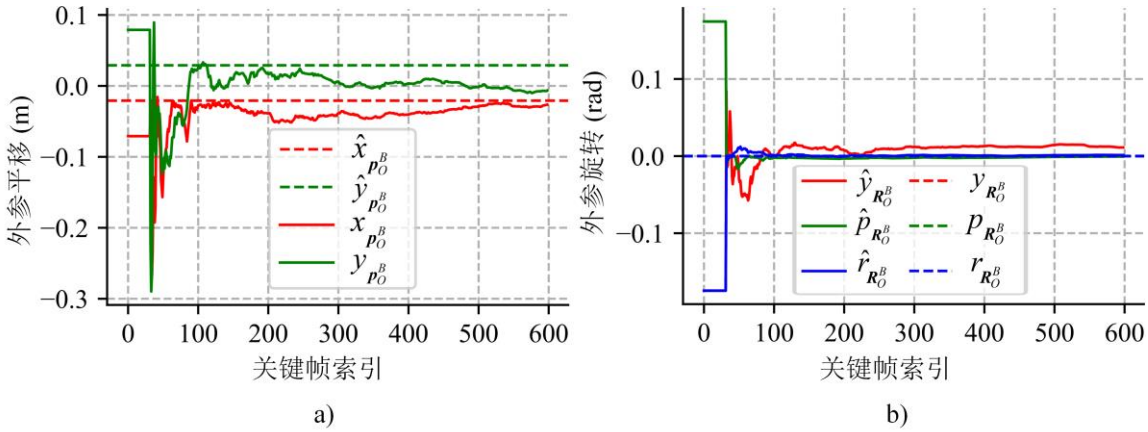


图 4-17 旋转和平移同时在线标定变化图：a) 平移变化图；b) 旋转变化图

与相机外参在线标定类似，首先对六自由度优化进行测试，结果与相机外参六自由度优化类似，$\hat{z}_{p_O^B}$ 漂移严重。由于漂移过大，不便将 $\hat{z}_{p_O^B}$ 和外参平移的其他分量一起绘制，这里不再绘制 $\hat{z}_{p_O^B}$ 的变化。旋转量在 VIWO 运行过程中的变化如图 4-17 b 所示，整体收

敛速度较快，Pitch 和 Roll 角的收敛精度较高，yaw 角在运行结束后尚有 0.01rad 量级误差。平移在 VIWO 运行过程中的变化如图 4-17 a 所示，收敛过程有一定振荡，且有一定误差。同样将 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 固定，结果如图 4-18 所示，从图 4-18 b 可知，固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 对旋转估计几乎没有影响，但是对平移的估计精度影响较大，具体误差列于表 4-5 中，固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 防止了 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 的漂移，提高了另外两个平移分量的估计精度。

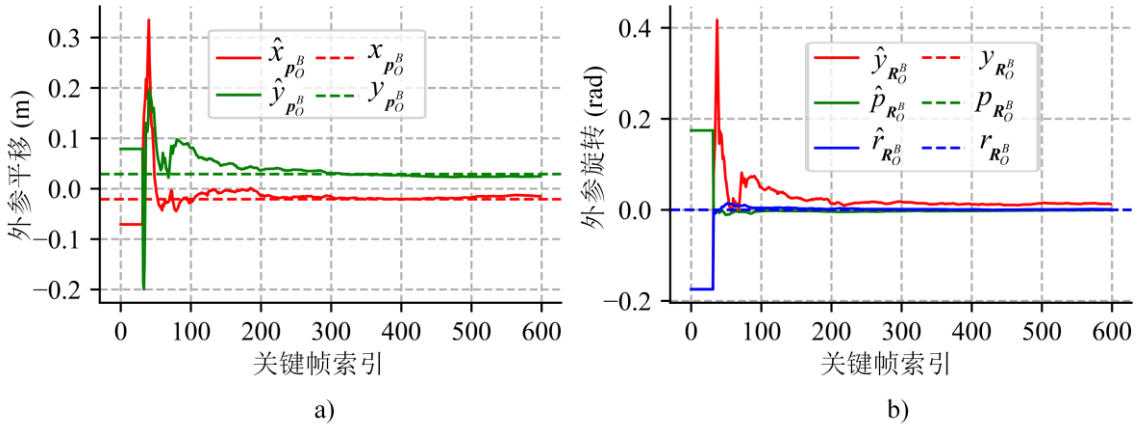


图 4-18 固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 在线标定变化图：a) 平移变化图；b) 旋转变化图

表 4-5 固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 前后平移估计误差 (平移: [x, y, z], 单位 m)

	估计值	误差
六自由度优化	[-0.0264, -0.0066, 12.9696]	[0.0056, 0.0356, 12.9864.7913]
固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$	[-0.0149, 0.0246, 0.0332]	[0.0059, 0.0000, 0.05]

为了进一步分析固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 对 VIWO 定位精度和在线标定精度的影响，在 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 真值附近 $[-0.05\text{m} \quad +0.05\text{m}]$ 以 0.01m 为间隔取值，作为每次 VIWO 运行的固定值，基本包含了手动测量 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 的误差范围，分别统计定位精度和在线标定精度，如图 4-19 所示。从图 4-19 a 可以看出，在固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 的情况下在线标定，除了 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 本身的误差，$\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 的手动测量误差对外参的其他量的标定精度并没有实质性的影响。另外从图 4-19 b 可以看出，固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_C^B}$ 后的定位精度比六自由度优化低。

考虑到轮速外参旋转量收敛速度快且精度高，可以在 VIWO 运行前期进行优化，后期固定，防止振荡。因此再次分析同时固定 $\hat{z}_{\boldsymbol{p}_O^B}$ 及优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$ 的策略，即固定优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$，

在 $\hat{z}_{p_O^B}$ 真值附近 $[-0.05\text{m} \quad +0.05\text{m}]$ 以 0.01m 为间隔取值，作为每次 VIWO 运行的固定值。从图 4-20 a 和图 4-19 a 可以看出外参平移量的标定精度和只固定 $\hat{z}_{p_O^B}$ 的标定精度相当，但是从图 4-20 b 可以看出同时固定 $\hat{z}_{p_O^B}$ 和优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$ 的定位精度比只固定 $\hat{z}_{p_O^B}$ 的定位精度高，和六自由度优化精度相当。

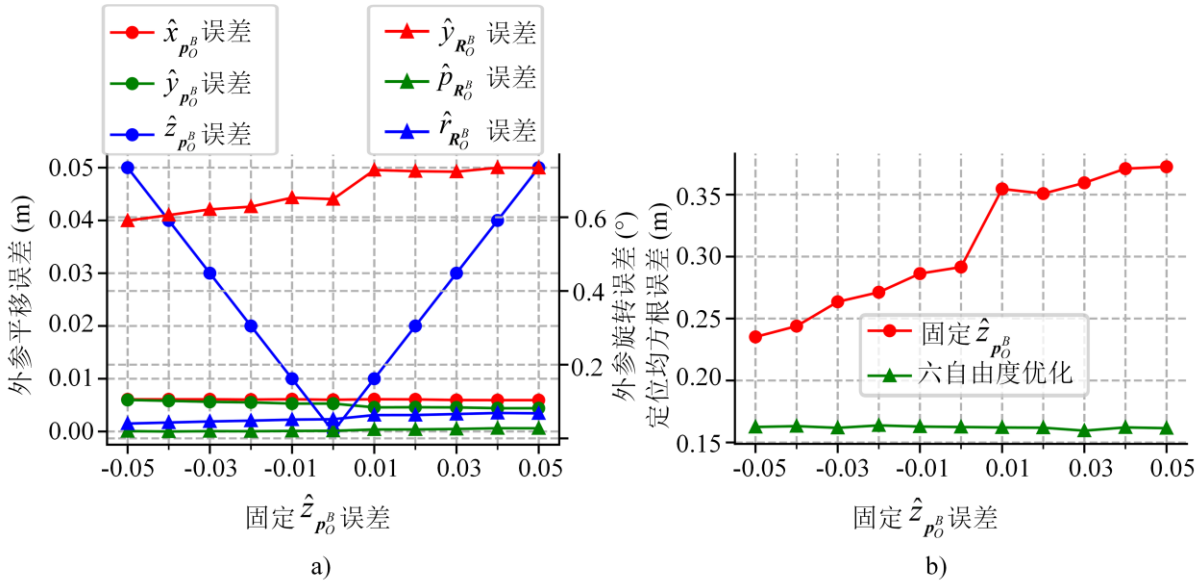


图 4-19 固定不同 $\hat{z}_{p_O^B}$ 误差下的标定误差和定位误差：a) 标定误差；b) 定位误差

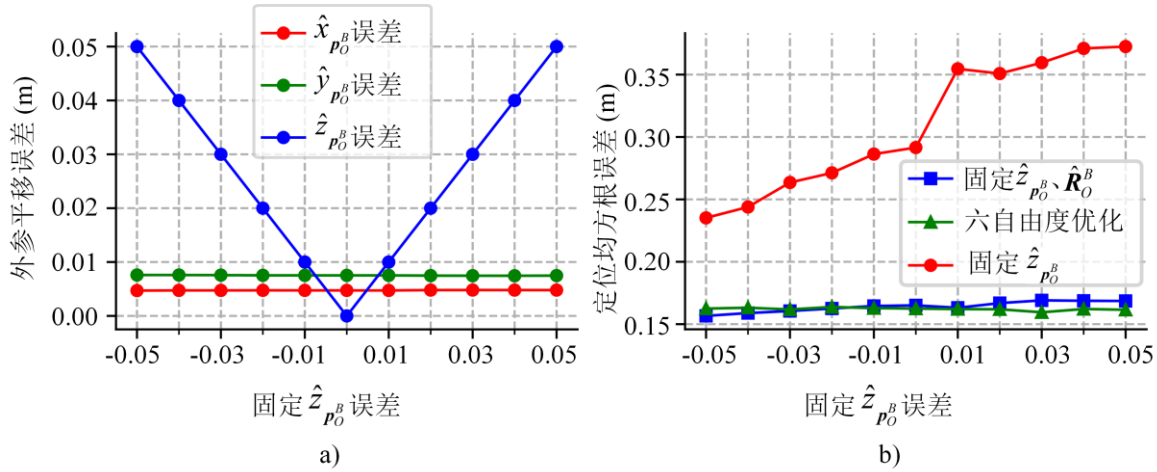


图 4-20 固定优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$ 且固定不同 $\hat{z}_{p_O^B}$ 误差的标定误差和定位误差：a) 标定误差；b) 定位误差

以上实验结果说明同时固定 $\hat{z}_{p_O^B}$ 和优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$ 可以得到更高的轮速外参标定精度以及与六自由度优化相当的定位精度。

4.4.4 时延在线标定仿真实验

设计仿真实验测试轮速-IMU 时延在线标定模型的性能，并根据实验结果总结时延在线标定的规律。为了模拟时间延迟，对仿真数据时间戳进行偏移，分别偏移±0.03s、±0.06s、±0.1s，仿真轨迹在之前的基础上重复 30 圈，每圈轨迹长度为 118m。分别使用无时延估计和有时延估计的方法进行定位，对比其 ATErmse。对比结果如图 4-21 所示，从 ATErmse 和轨迹的直观表现可以得出同时估计时延能获得更好的定位精度。

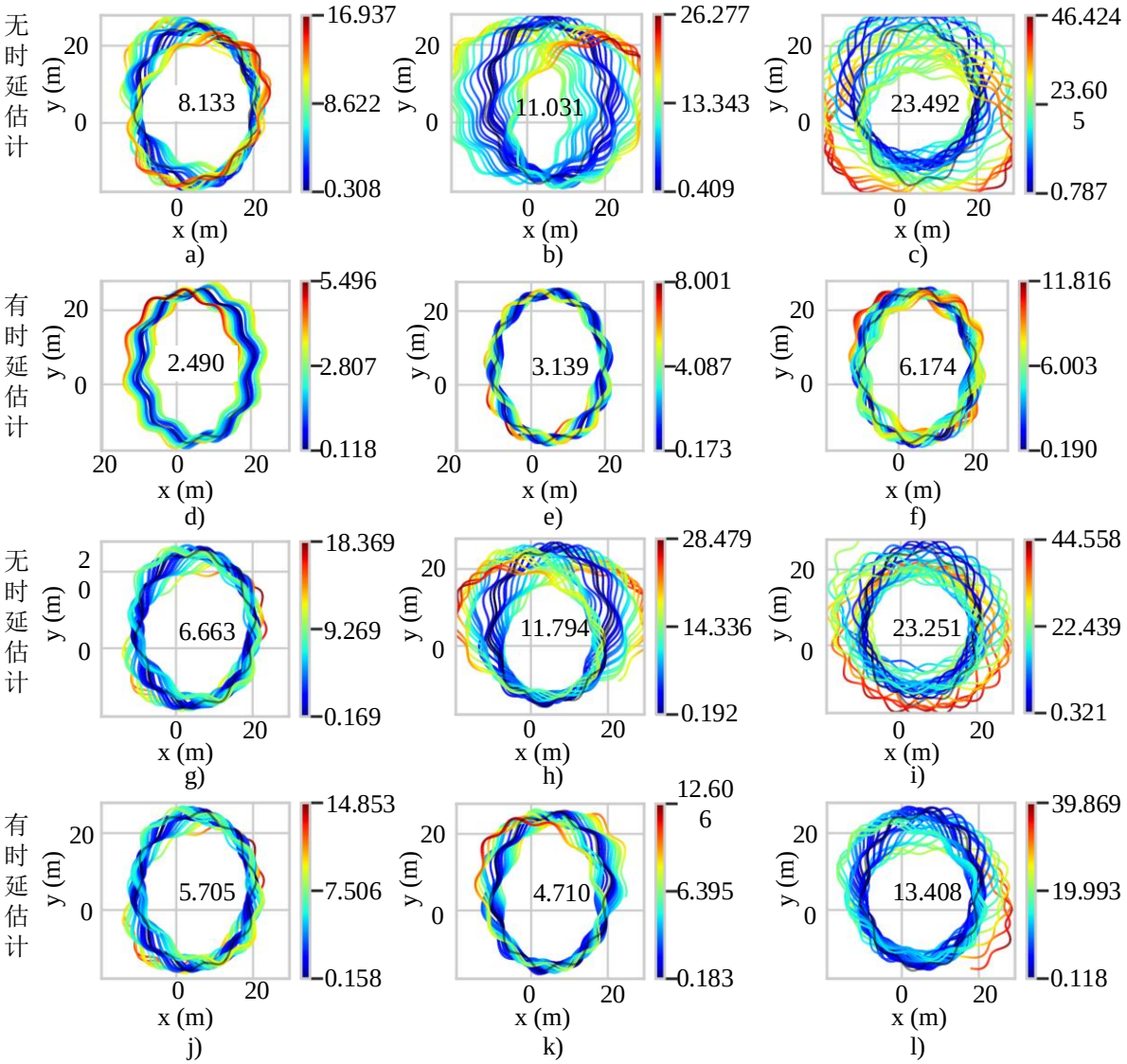


图 4-21 有时延估计和无时延估计的轨迹误差对比，图内数据为 ATErmse：a) 无时延估计 $t_d^O=-0.03\text{s}$；b) 无时延估计 $t_d^O=-0.06\text{s}$；c) 无时延估计 $t_d^O=-0.1\text{s}$；d) 有时延估计 $t_d^O=-0.03\text{s}$；e) 有时延估计 $t_d^O=-0.06\text{s}$；f) 有时延估计 $t_d^O=-0.1\text{s}$；g) 无时延估计 $t_d^O=+0.03\text{s}$；h) 无时延估计 $t_d^O=+0.06\text{s}$；i) 无时延估计 $t_d^O=+0.1\text{s}$；j) 有时延估计 $t_d^O=+0.03\text{s}$；k) 有时延估计 $t_d^O=+0.06\text{s}$；l) 有时延估计 $t_d^O=+0.1\text{s}$；

为了进一步分析时延估计的精度，将时延估计的过程绘制于图 4-22 中，可以看出估计的方向是正确的，但是存在过估计和估计不足的情况。

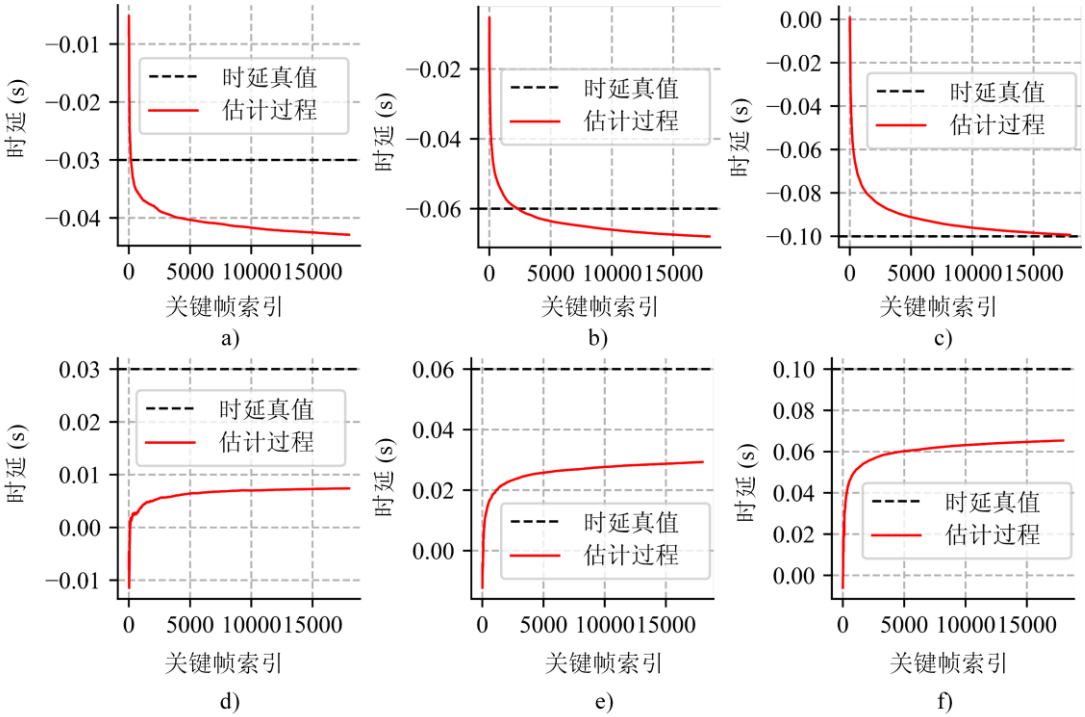


图 4-22 时延估计过程：a) $t_d^O=-0.03\text{s}$；b) $t_d^O=-0.06\text{s}$；c) $t_d^O=-0.1\text{s}$；d) $t_d^O=+0.03\text{s}$；e) $t_d^O=+0.06\text{s}$；f) $t_d^O=+0.1\text{s}$；

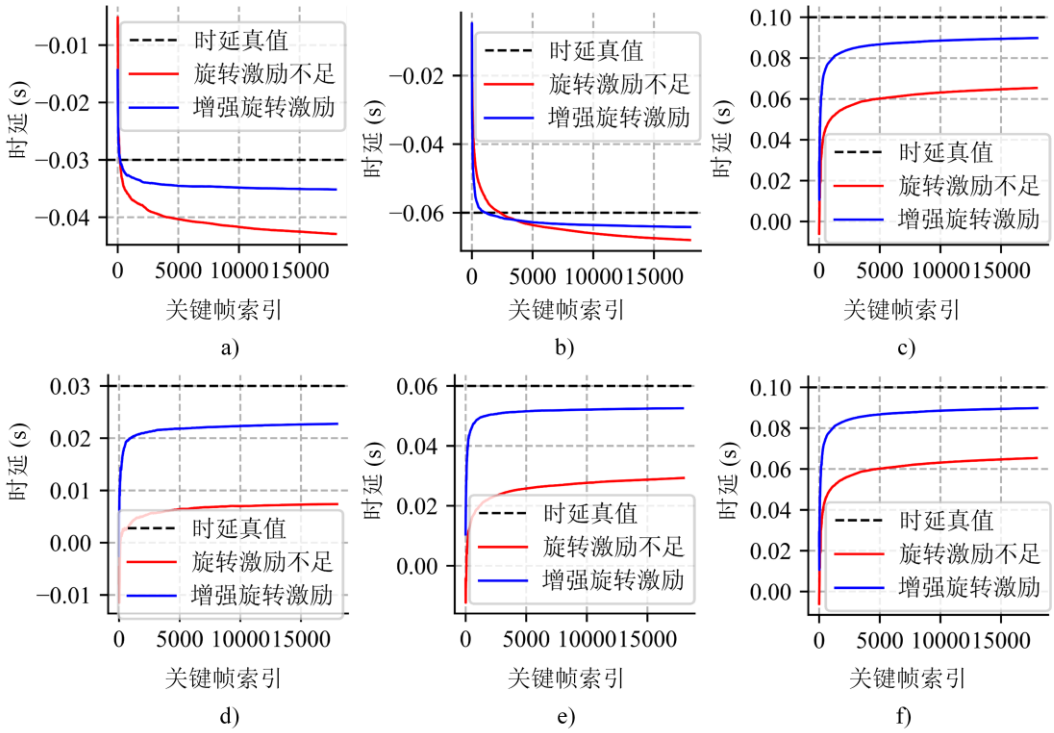


图 4-23 增强角速度激励前后时延估计过程：a) $t_d^O=-0.03\text{s}$；b) $t_d^O=-0.06\text{s}$；c) $t_d^O=-0.1\text{s}$；d) $t_d^O=+0.03\text{s}$；e) $t_d^O=+0.06\text{s}$；f) $t_d^O=+0.1\text{s}$；

过估计和估计不足的情况可能是由于角速度激励不足，为了验证该想法，使用 4.4.2 加强角速度激励后的轨迹进行测试。测试结果如图 4-23 所示，可以看出增强角速度激励后过估计和估计不足都得到了改善。

以上实验结果说明，存在轮速-IMU 时延时，使用所提轮速-IMU 时延在线标定方法可以提高定位精度，在机器人运行过程中增加角速度激励可以更准确地估计时延。

4.5 本章小结

本章研究视觉-惯性-轮速融合在线标定问题和初始化问题，主要建立了轮速内外参在线标定模型、轮速-IMU 时间延迟在线标定模型，并改进了现有的视觉-惯性融合初始化方法。实验结果表明：

1) 所改进的 VIWO 初始化方法相比于 VIO 初始化方法具有更高的尺度估计精度和鲁棒性；

2) 所提轮速内参在线标定模型是有效的，在运行初期加强角速度激励可以更快收敛到内参真值；针对平面移动机器人，进行相机-IMU 外参在线标定时，初始值使用手工测量值即可，固定 $\boldsymbol{p}_C^B$ 沿旋转轴的分量可以获得更高的外参标定精度和定位精度；所提轮速外参在线标定模型是有效的，初始值使用手工测量值即可，同时固定 $\boldsymbol{p}_O^B$ 沿旋转轴的分量和优化后 $\boldsymbol{R}_O^B$ 能够获得更高的外参标定精度以及与六自由度优化相当的定位精度；所提轮速-IMU 时间延迟在线标定模型是有效的，存在轮速-IMU 时间延迟时，使用轮速-IMU 时间延迟在线标定方法可以提高定位精度，在机器人运行过程中增加角速度激励可以更加准确地估计时延。

第五章 视觉-惯性-轮速融合定位实验研究

5.1 引言

为了验证所提方法的有效性，本章以所搭多传感双臂移动机器人为对象，设计了纯室内和室内→室外→室内两组实验，并通过导航地图构建实验验证所提定位方法在移动机器人导航方面的应用效果。

5.2 实验设置

实验所用计算资源为 Intel i5-8400 CPU、机器人平台为第二章所搭建的多传感双臂移动机器人，其中图像测量频率为 30Hz，IMU 测量频率为 50Hz，轮速测量频率为 50Hz。所提视觉-惯性-轮速融合定位方法的工作流如图 5-1 所示。

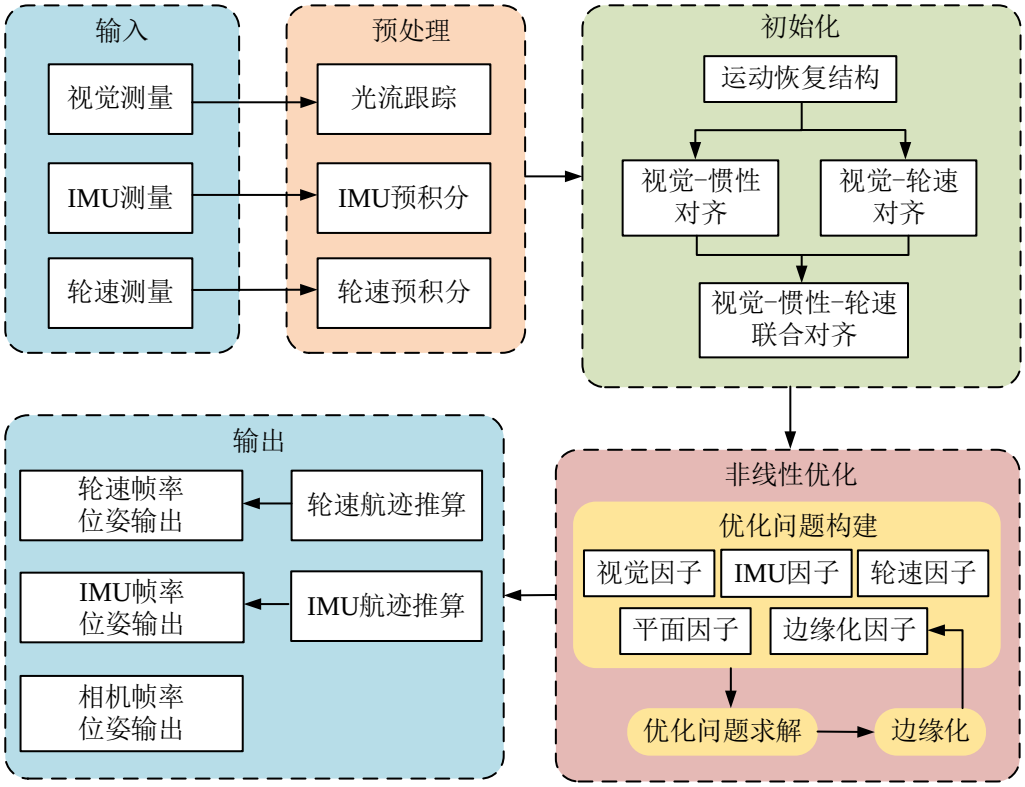


图 5-1 视觉-惯性-轮速融合定位方法工作流图

实验场景平面图如图 5-2 所示。室内实验在 201 室进行，201 室尺寸为 15m×13m，其中摆放有多种不同类型机器人，场景较为复杂，详见图 5-3。室内→室外→室内实验路线为：起点→201 室内环绕→走廊 1→走廊 2→后门→201 室→终点。

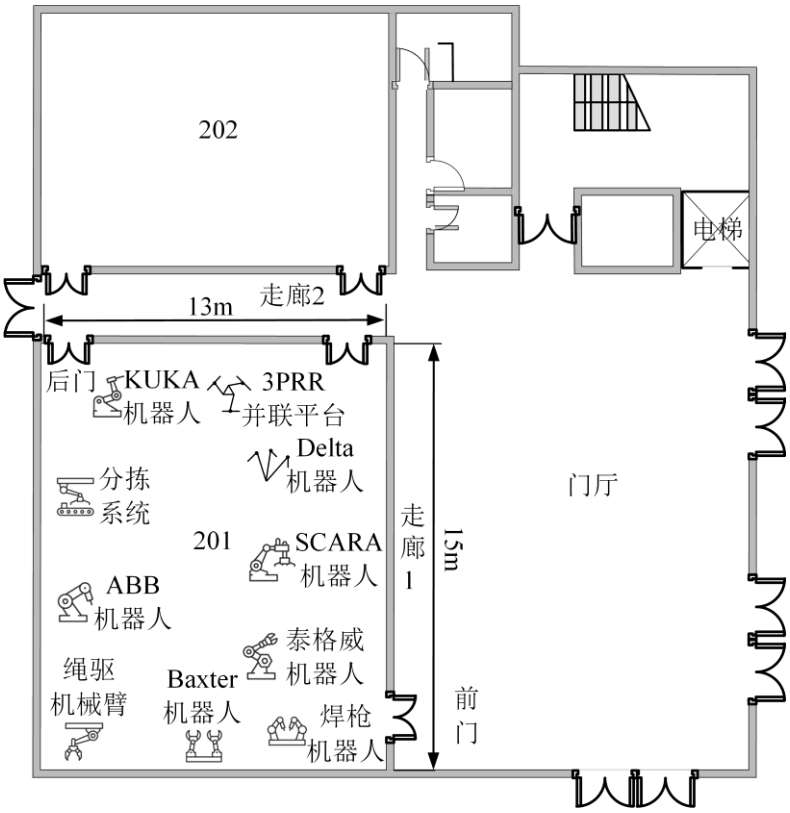


图 5-2 实验场景平面图

图 5-3 201 室内部场景

5.3 实验结果与讨论

5.3.1 室内实验

首先进行室内实验，BetaGo 机器人在室内重复一个大致相同的轨迹 20 次，每一次都分别使用 VIO 和本文的 VIWO 进行定位，将轨迹绘制于图 5-4 所示坐标系中，图 5-4 中障碍区为机器人不可到达区域，对应实际场景的设备等障碍，且机器人轨迹不应该超出该坐标系范围。

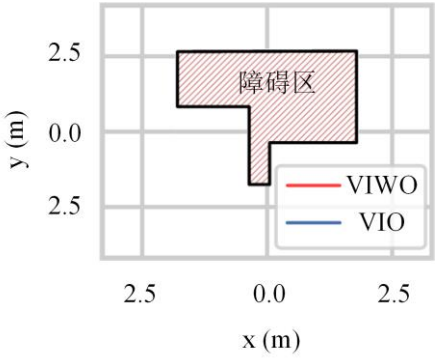


图 5-4 VIO、VIWO 轨迹对比样例坐标系

图 5-5 室内 VIO 与 VIWO 定位轨迹对比

以图 5-4 为坐标系，将 20 次定位轨迹的对比绘制于图 5-5。其中坐标为(1,1)、(2,1)、(2,3)、(3,1)、(3,2)、(3,3)、(3,4)、(5,2)、(5,3)的子图都存在 VIO 定位轨迹漂移过大，超出坐标系范围的情况，坐标为(1,2)、(1,3)、(1,4)、(2,2)、(2,3)、(2,4)、(3,3)、(3,4)、(4,2)、(4,4)、(5,1)、(5,2)、(5,3)、(5,4)的子图都存在 VIO 定位轨迹尺度过小，且与障碍区干涉。而 VIWO 的 20 次定位轨迹都比较符合现实场景，通过轨迹对比可以发现所提 VIWO 具有更高的轨迹一致性。

从图 5-5 中可以发现 VIO 定位轨迹的尺度和 VIWO 定位轨迹的尺度大部分情况下是不一致的，为了分析尺度一致性，将 VIO、VIWO 的 20 次定位轨迹的长度以箱线图的形式绘制于图 5-6 中，可以看出 VIWO 的轨迹长度具有更短的箱高、更接近现实场景的中值以及更少的异常值，因此 VIWO 具有更高的尺度一致性。另外值得注意的是，实验过程中发现机器人初始化阶段走 S 型可以获得更好的定位精度。

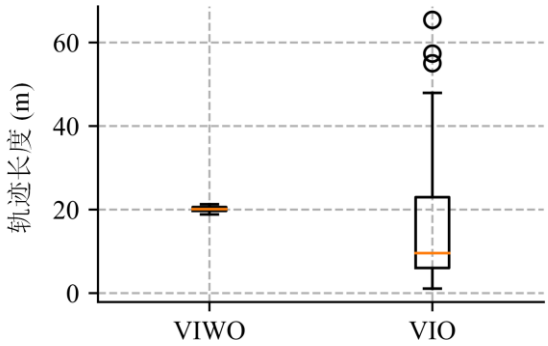


图 5-6 轨迹长度箱线图

为了进一步测试所提 VIWO 的性能，使用双目 VIO 估计这 20 次的轨迹，另外可以将本文的 VIWO 扩展为双目 VIWO，然后估计这 20 次的轨迹，将 VIWO、双目 VIO、双目 VIWO 估计的轨迹进行对比。坐标系样例如图 5-7 所示。

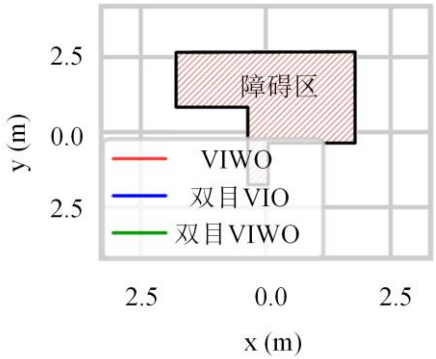


图 5-7 双目 VIO、VIWO、双目 VIWO 轨迹对比样例坐标系

从图 5-8 可以看出，双目 VIO、VIWO、双目 VIWO 的轨迹一致性类似，但是轨迹尺度存在差异，将双目 VIO、VIWO、双目 VIWO 的 20 次定位轨迹的长度以箱线图的

形式绘制于图 5-9 中，可以看出 VIWO 的轨迹长度具有更短的箱高、更少的异常值，因此 VIWO 相比双目 VIO 具有更高的尺度一致性，双目 VIWO 与单目 VIWO 的尺度一致性并无显著差别。

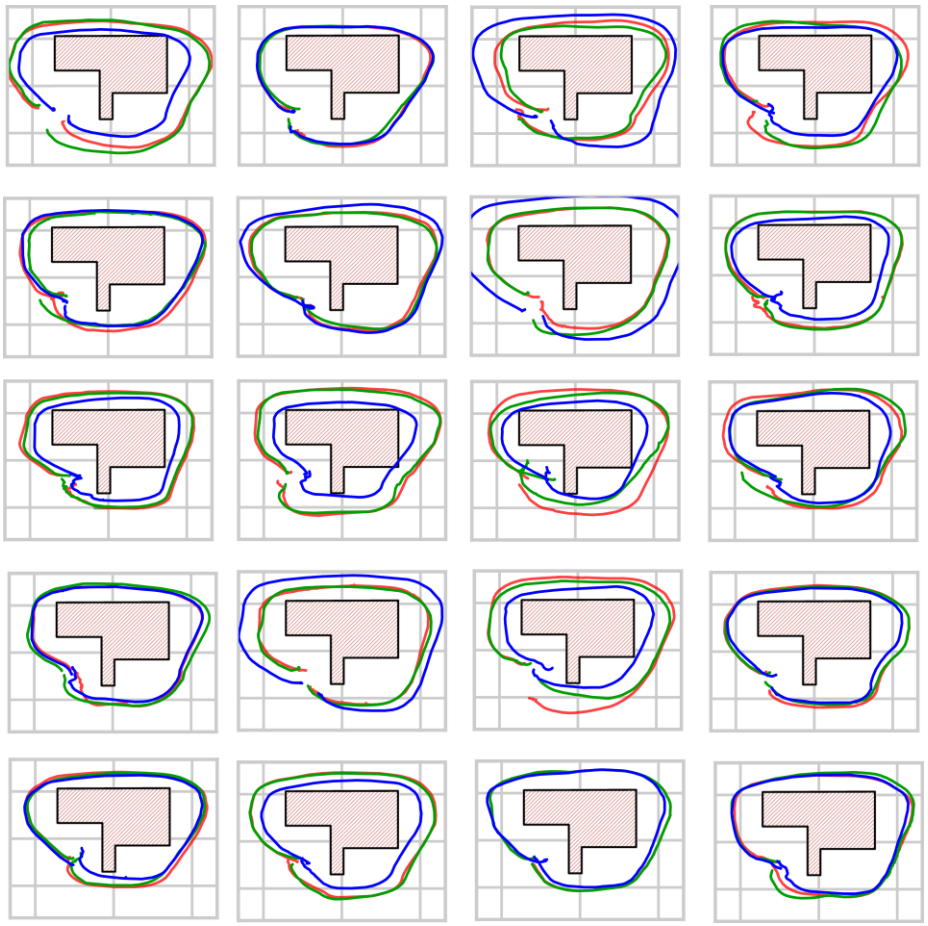


图 5-8 室内双目 VIO、VIWO、双目 VIWO 定位轨迹对比

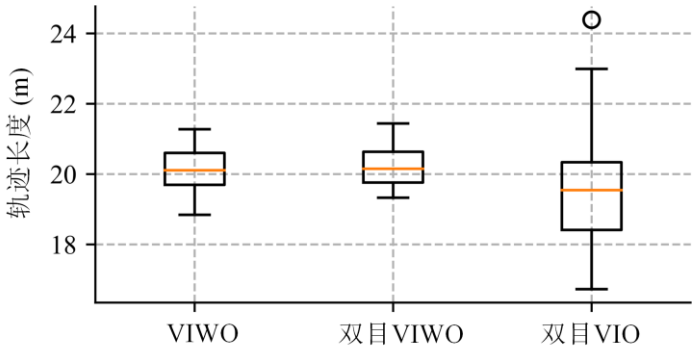


图 5-9 轨迹长度箱线图

5.3.2 室内→室外→室内大光度切换实验

为了测试 VIWO 的性能，分别在进行室内→室外→室内明暗光度切换实验和明亮光度切换实验。

■ 明暗切换实验

室内室外光度切换程度如图 5-10 所示。

a) b) c) d)

图 5-10 场景中具有光度代表性的图片：a) 室内；b) 室外走廊 1；c) 室外走廊 2；d) 室外→室内入口

分别用 VIO 和 VIWO 进行定位得到的轨迹如图 5-11 所示。VIO 所得到的轨迹漂移严重，图中两条轨迹标号相同的区域在场景中大致是同一个地方，黄色星为起始点，绿色星为终点，①为室内区域，从起始点出发，出前门来到走廊②，由于光度较暗，VIO 在走廊②开始产生大的漂移，VIWO 并未产生明显漂移。转弯进入走廊③，这是个直角弯，VIO 估计的角度过大，而 VIWO 估计的轨迹更加接近直角弯，走廊③之后转弯进入室内④，机器人的起点和终点在现实中是近似相同的，①和④有一部分重叠区域。VIO 的①和④相距甚远，VIWO 则较好地吻合了场景。

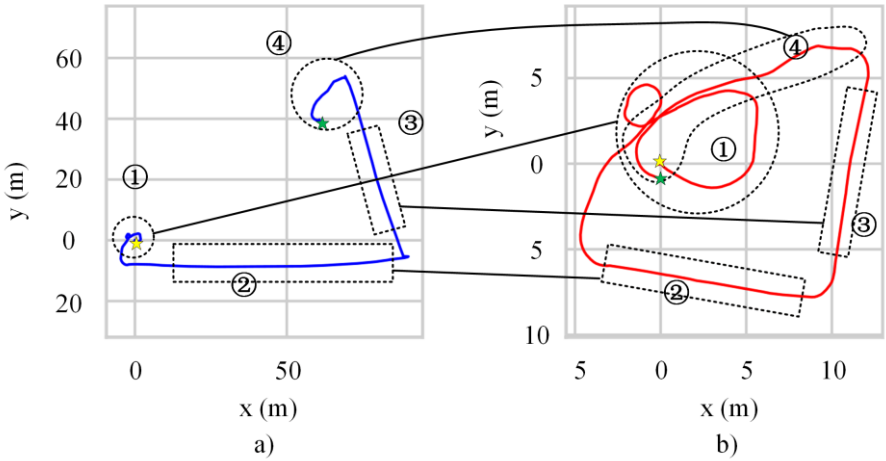


图 5-11 轨迹对比：a) VIO；b) VIWO

为了进一步测试 VIWO 的性能，将 VIWO 的轨迹和双目 VIO 的轨迹对齐至实验场景进行对比（图 5-12），图中的图片为所在场景具有光度代表性的图片，可以说明 VIWO 更优的现象有两点：1) 起点和终点在场景中是大致相同的，VIWO 的起点和终点更加相近；2) 在保证出口和入口对齐的情况下，双目 VIO 的轨迹与与建筑产生干涉，而 VIWO 的轨迹更加合理。

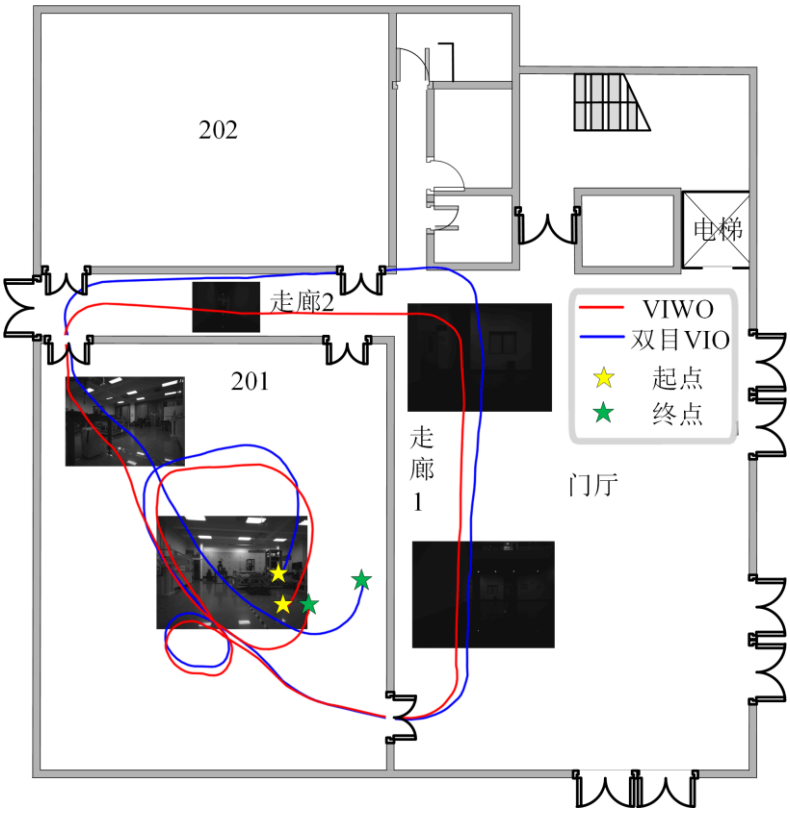


图 5-12 对齐至实验场景的轨迹对比

在缺少真值的情况下，为了进一步量化 VIWO 的误差，本文挑选三个易于测量的特征尺寸进行衡量：1) 走廊 1 长度；2) 走廊 2 长度；3) 起点和终点的距离。由于单目 VIO 肉眼可见误差过大，不对其进行对比，这里与双目 VIO 进行对比，且本文的 VIWO 可以扩展为双目 VIWO，因此，参与对比的方法有双目 VIO、VIWO 和双目 VIWO。各特征尺寸的测量如图 5-13 所示，各特征尺寸的期望值范围和估计值列于表 5-1 中，以特征尺寸为评价标准，可以得出 VIWO 的定位精度高于双目 VIO，且和双目 VIWO 相当。

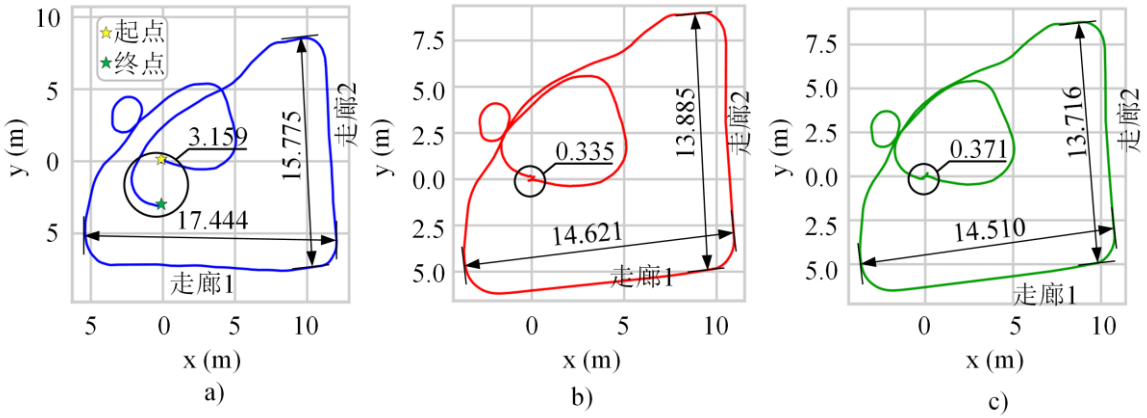


图 5-13 特征尺寸测量方式：a) 双目 VIO；b) VIWO；c) 双目 VIWO

表 5-1 特征尺寸测量结果-明暗切换 (单位 m)

	双目 VIO	VIWO	双目 VIWO	期望值
走廊 1	17.444	14.621	14.510	14.500~14.900
走廊 2	15.775	13.885	13.716	13.400~13.800
起终点	3.159	0.335	0.371	0.000~0.400

■ 明亮切换实验

明亮切换实验室内外光度切换程度如图 5-14 所示，通过与明暗切换实验对比，可以看出室内光度较为稳定，而室外光度随着时间变化，夜间过暗，正午过亮，并且室外有行人出没。

a) b) c) d)

图 5-14 场景中具有光度代表性的图片：a) 室内；b) 室内→室外；c) 室外走廊 1；d) 室外走廊 2

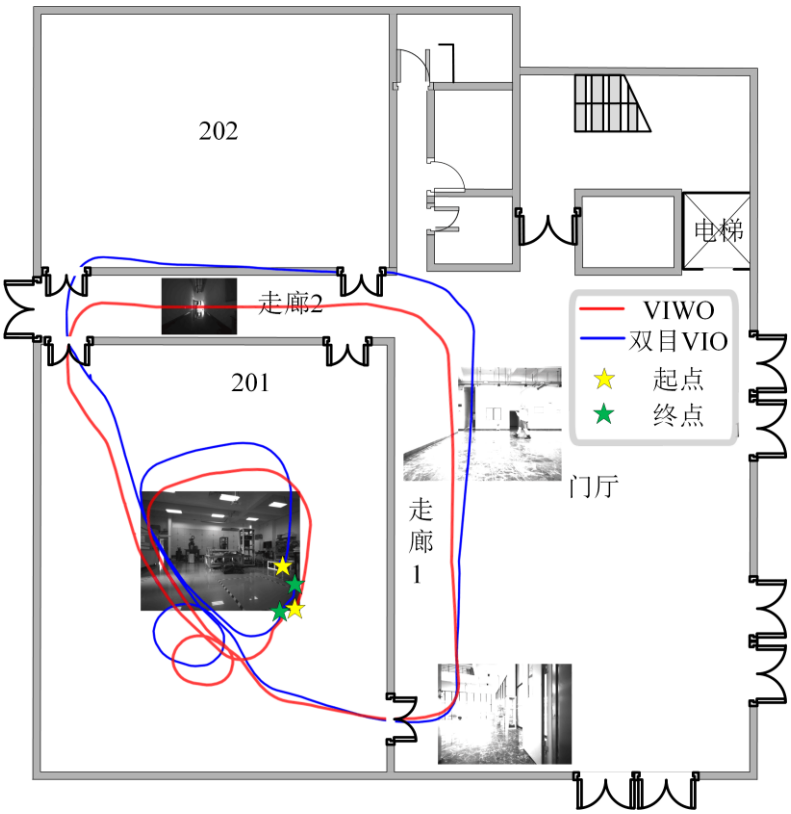


图 5-15 对齐至实验场景的轨迹对比

同样将 VIWO 的轨迹和双目 VIO 的轨迹对齐至实验场景进行对比（图 5-15），图中

的图片为所在场景具有光度代表性的图片，说明 VIWO 更优的现象有两点：1) 起点和终点在场景中是大致相同的，VIWO 的起点和终点更加相近；2) 在保证出口和入口对齐的情况下，双目 VIO 的轨迹与建筑产生干涉，而 VIWO 的轨迹更加合理。为了更好地显示，对双目 VIO 的轨迹进行了等比例缩小，实际大小会更大，具体见表 5-2。

为了进一步量化 VIWO 在明亮大光度切换场景下的误差，对三个易于测量的特征尺寸进行衡量：1) 走廊 1 长度；2) 走廊 2 长度；3) 起点和终点的距离。参与对比的方法有双目 VIO、VIWO 和双目 VIWO。各特征尺寸的测量如图 5-16 所示，各特征尺寸的期望值范围和估计值列于表 5-2 中，以特征尺寸为评价标准，可以得出 VIWO 的定位精度高于双目 VIO，且和双目 VIWO 相当。

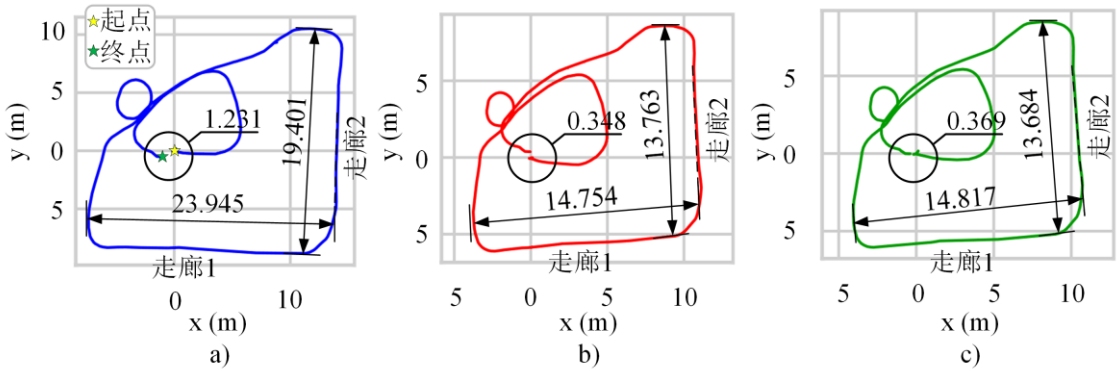


图 5-16 特征尺寸测量方式：a) 双目 VIO；b) VIWO；c) 双目 VIWO

表 5-2 特征尺寸测量结果-明亮切换 (单位 m)

	双目 VIO	VIWO	双目 VIWO	期望值
走廊 1	23.945	14.754	14.817	14.500~14.900
走廊 2	19.401	13.763	13.684	13.400~13.800
起终点	1.231	0.348	0.369	0.000~0.400

进一步根据明暗切换实验和明亮切换实验的测量结果对比可以发现，双目 VIO 对于光度变化较敏感，明暗切换实验和明亮切换实验的测量结果相差 4-7m，而所提 VIWO 对于光度变化较为鲁棒，明暗切换实验和明亮切换实验的测量结果相差 0.2m 以内，初步分析，这是由于视觉在光度变化程度较大的情况下，光流法的光度不变假设无法满足，此时特征点跟踪误差较大，视觉部分的定位精度较低，使得视觉-惯性融合定位方法的定位精度降低，对于视觉-惯性-轮速融合定位方法，视觉部分在大光度变换下同样会存在跟踪误差较大的问题，但是由于融合了轮速传感器，相对来说，轮速传感器在这种情况下拥有更加准确的测量信息，相比于视觉-惯性融合，视觉-惯性-轮速融合在这种情况下具有更多更准确的测量信息，这也正是多传感器融合体现优势的地方之一。

5.3.3 基于视觉-惯性-轮速融合的导航地图构建实验

SLAM 即同时定位与建图，将机器人状态和环境地图统一在一个框架下进行估计，前端以特征点法为基础的 SLAM 框架多为构建稀疏地图（特征点地图），本文前端采用特征点法，因此原生构建的地图为稀疏地图。为了满足机器人导航需求，使用所提双目 VIWO 进行定位，利用光流法构建的视差图进行稠密地图构建。

a)

b)

图 5-17 基于视觉-惯性-轮速融合定位结果拼接的点云

所构建的点云如图 5-17 所示，相比于单帧的深度计算，利用多帧的定位结果构建的

点云具有更大的视场和全局一致性。为了量化地图构建的误差大小，使用CloudCompare[110]对构建的点云地图的特征尺寸进行测量并与实际测量结果进行对比，特征尺寸的依附点为如图 5-18 所示的地面警戒线。CloudCompare 的测量结果如图 5-19 所示，其中特征尺寸①为两条警戒线的夹角，②③④⑤皆为所连警戒线的距离。将特征尺寸测量结果和期望值（手工测量值且考虑警戒线粘贴误差和手工测量误差）列于表 5-3 中，从表中可以看出，在一个 15m×13m 的空间内，警戒线标志的距离可以精确到 8.3cm 以内。

图 5-18 地面警戒线

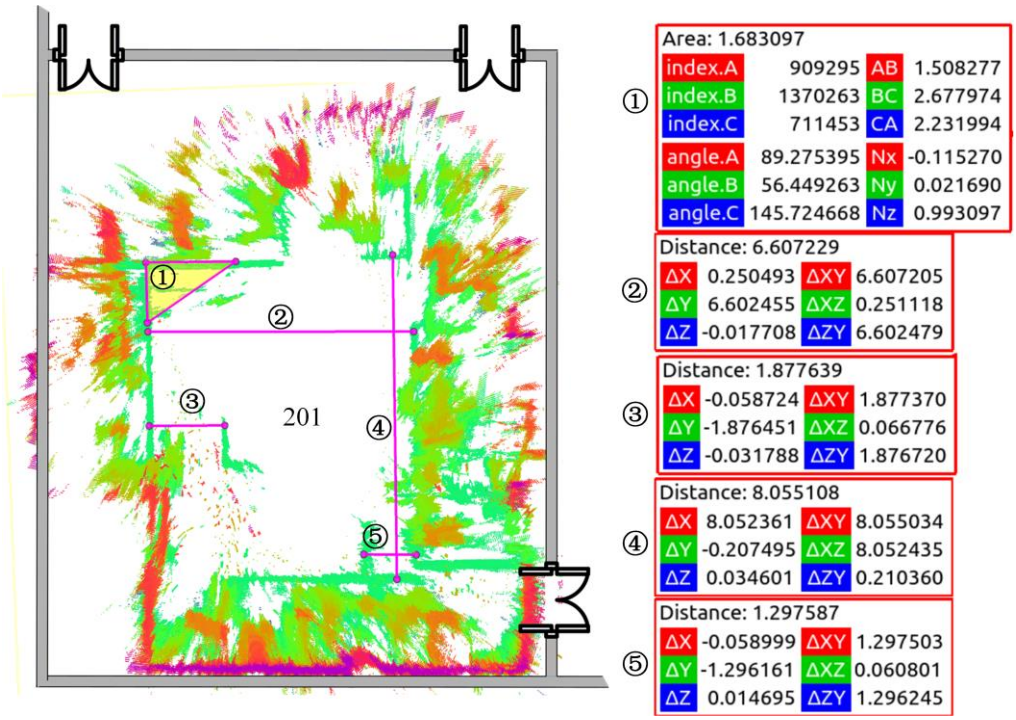
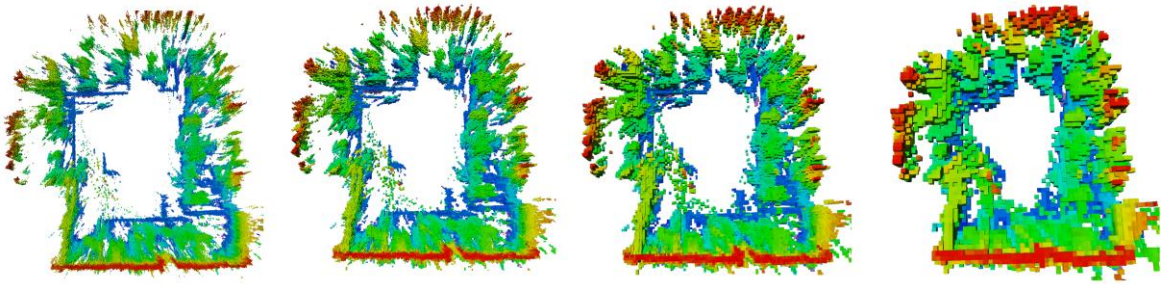


图 5-19 使用 CloudCompare 对点云特征尺寸进行测量

表 5-3 特征尺寸测量结果 (单位 m)

	①	②	③	④	⑤
点云测量值	89.3°	6.607	1.878	8.055	1.298
期望值	89°-91°	6.600-6.690	1.800-1.895	8.015-8.100	1.215-1.310
最大可能误差	1.7°	0.083	0.078	0.045	0.083

常用的三维导航地图格式为八叉树地图[111]，得到的八叉树地图如图 5-20 所示，深蓝色体素对应为可通行区域，机器人可基于该地图进行双臂+移动平台的混合规划研究。



a) b) c) d)

图 5-20 构建的八叉树地图：a) 分辨率 0.03m；b) 分辨率 0.06m；c) 分辨率 0.12m；d) 分辨率 0.24m

5.4 本章小结

本章通过在线实验测试所提视觉-惯性-轮速融合定位方法的性能，实验结果表明：

1) 所提视觉-惯性-轮速融合定位方法具有比视觉-惯性融合定位方法更高的定位精度、轨迹一致性和尺度一致性。

2) 所提视觉-惯性-轮速融合定位方法具有比双目视觉-惯性融合定位方法更高的定位精度。并且可以将本文的视觉-惯性-轮速融合定位方法扩展为双目视觉-惯性-轮速融合定位方法，拓展前后定位精度相当。

3) 基于所提视觉-惯性-轮速融合定位方法构建点云地图和可导航多分辨率八叉树地图，点云地图的特征尺寸测量误差在 8.3cm 以内。

总结与展望

1 论文总结

本文以移动操作中移动机器人的多传感器融合定位方法为研究对象，搭建了多传感双臂移动机器人平台及其仿真系统，围绕现有视觉-惯性融合定位方法用于移动机器人存在的可观性弱、定位精度低等问题，研究了视觉-惯性-轮速融合定位方法和在线标定方法。具体总结如下：

(1) 针对智能工厂的移动操作需求，搭建了一台多传感双臂移动机器人样机，并构建了对应的仿真系统。所搭样机主要由移动平台、双操作臂、末端灵巧手以及多传感器等部件组成，搭建过程中的关键技术和主要参数进行了分析。针对该类型机器人系统复杂度高、难以快速开展实验研究的问题，基于 ROS 构建了对应的仿真系统，标定实验和多传感器融合 SLAM 实验验证了该仿真系统的有效性。

(2) 研究了移动机器人的多传感器融合定位问题。针对视觉-惯性融合定位方法在移动机器人中存在的可观性弱、定位精度低等问题，提出了视觉-惯性-轮速融合定位方法，具体推导了轮速预积分模型、平面约束模型，并将视觉-惯性融合 SLAM 中的滑动窗口与边缘化算法推广到视觉-惯性-轮速融合定位方法中。仿真实验结果表明所提视觉-惯性-轮速融合定位方法的定位精度比视觉-惯性融合定位方法的定位精度高。

(3) 研究了移动机器人的多传感器融合在线标定问题。针对移动机器人运行过程中标定参数的漂移问题，提出了视觉-惯性-轮速融合在线标定方法，建立了轮速内外参、时间延迟的在线标定模型。针对视觉-惯性初始化在平面移动机器人上难以成功的问题，提出了视觉-惯性-轮速融合初始化方法。仿真实验结果验证了所提方法的有效性，根据实验结果得到了视觉-惯性-轮速融合在线标定的规律。最后在线实验结果说明所提视觉-惯性-轮速融合定位方法具有比双目视觉-惯性融合 SCLAM 更高的定位精度，并且基于所提方法构建了 15m×13m 空间的点云地图和多分辨率八叉树地图，其特征尺寸测量误差在 8.3cm 以内。

2 研究展望

本文对移动操作中的多传感器融合定位技术进行了深入的研究，获得一定效果。展望未来，仍有一些问题需要深入研究

(1) 融合单线激光雷达。本文所用外感式传感器为相机，相比于视觉的被动测量，

单线激光雷达是一种主动测量传感器，一般认为激光雷达的距离测量比视觉更加准确。另外，视觉受环境光度的限制，而激光雷达并不会。综上，融合激光雷达有望进一步提升定位精度。

(2) 融合多种特征，如线特征，面特征。本文只用到了点特征，一般认为结构化特征的鲁棒性高于点特征，且线特征和面特征在人造环境中普遍存在，因此有望提高视觉定位精度，从而提升系统的定位精度。

(3) 研究三维重建技术。本文主要研究多传感器融合定位技术，未来需要进一步研究三维重建技术以获得更高质量的点云。

参考文献

[1] Madsen O, Bøgh S, Schou C, et al. Integration of mobile manipulators in an industrial production[J]. Industrial Robot: An International Journal, 2015, 42(1): 11-18.

[2] BostonDynamics. Stretch™: Mobile, automated case handling for more efficient warehouse operations.[OL]. https://www.bostondynamics.com/stretch, 2021.

[3] Cadena C, Carlone L, Carrillo H, et al. Past, Present, and Future of Simultaneous Localization and Mapping: Toward the Robust-Perception Age[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2016, 32(6): 1309-1332.

[4] Bailey T, Durrant-Whyte H. Simultaneous localization and mapping (SLAM): Part II[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006, 13(3): 108-117.

[5] Durrant-Whyte H, Bailey T. Simultaneous localization and mapping: Part I[J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2006, 13(2): 99-108.

[6] Bresson G, Alsayed Z, Yu L, et al. Simultaneous Localization and Mapping: A Survey of Current Trends in Autonomous Driving[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2017, 2(3): 194-220.

[7] Huang G. Visual-Inertial Navigation: A Concise Review[A]. 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2019: 9572-9582.

[8] Wu K, Guo C, Georgiou G, et al. VINS on wheels[A]. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2017: 5155-5162.

[9] Lee W, Eckenhoff K, Yang Y, et al. Visual-Inertial-Wheel Odometry with Online Calibration[A]. 2020 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)[C]. IEEE, 2020: 24-30.

[10] Zuo X, Zhang M, Chen Y, et al. Visual-inertial localization for skid-steering robots with kinematic constraints[J]. arXiv preprint arXiv:1911.05787, 2019.

[11] Liu J, Gao W, Hu Z. Visual-Inertial Odometry Tightly Coupled with Wheel Encoder Adopting Robust Initialization and Online Extrinsic Calibration[A]. 2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)[C]. IEEE, 2019: 5391-5397.

[12] 陆泽早. 结合轮速传感器的紧耦合单目视觉惯性 SLAM[D]. 武汉: 华中科技大学, 2019.

[13] Srinivasa SS, Ferguson D, Helfrich Casey J, et al. HERB: a home exploring robotic butler[J]. Autonomous Robots, 2009, 28(1): 5.

[14] Bischoff R, Huggenberger U, Prassler E. KUKA youBot - a mobile manipulator for

research and education[A]. 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2011: 1-4.

[15] Yamaguchi U, Saito F, Ikeda K, et al. HSR, Human Support Robot as Research and Development Platform[A]. The Abstracts of the international conference on advanced mechatronics: toward evolutionary fusion of IT and mechatronics: ICAM[C]. The Japan Society of Mechanical Engineers, 2015: 39-40.

[16] Yamamoto T, Terada K, Ochiai A, et al. Development of Human Support Robot as the research platform of a domestic mobile manipulator[J]. ROBOMECH journal, 2019, 6(1): 4.

[17] Borst C, Wimbock T, Schmidt F, et al. Rollin' Justin - Mobile platform with variable base[A]. 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2009: 1597-1598.

[18] Chitta S, Cohen B, Likhachev M. Planning for autonomous door opening with a mobile manipulator[A]. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2010: 1799-1806.

[19] Lemburg J, Fernandez JD, Eich M, et al. AILA - Design of an autonomous mobile dual-arm robot[A]. 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2011: 5147-5153.

[20] Srinivasa SS, Berenson D, Cakmak M, et al. HERB 2.0: Lessons Learned From Developing a Mobile Manipulator for the Home[J]. Proceedings of the IEEE, 2012, 100(8): 2410-2428.

[21] Wu Y, Balatti P, Lorenzini M, et al. A Teleoperation Interface for Loco-Manipulation Control of Mobile Collaborative Robotic Assistant[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(4): 3593-3600.

[22] 蒋林, 闫继宏, 臧希喆, 等. 全方位移动操作臂运动控制研究[J]. 西安电子科技大学学报, 2008(04): 733-738.

[23] 姚玉峰. 8 自由度轮式移动操作机避障能力及其运动规划方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.

[24] 姚玉峰, 王展, 周磊. 作业型助老/助残机器人系统的研究[J]. 机械设计, 2008(02): 18-20.

[25] 刘昊, 盛鑫军, 张恒, 等. 基于多传感器融合的移动操作机器人定位与导航系统设计[J]. 机电一体化, 2018, 24(03): 35-40.

[26] 王剑, 王挺, 姚辰, 等. 一种新的反恐防暴机器人受限操作方法[J]. 科学通报, 2013, 58(S2): 91-96.

[27] 陈飞, 王振华, 陈国栋, 等. 基于 ROS 的移动操作臂运动规划研究[J]. 煤矿机械, 2018, 39(06): 36-38.

[28] Yu L, Cao Q, Xu X. An approach of manipulator control for service-robot FISR-1 based on motion imitating[A]. 2008 IEEE International Conference on Industrial Technology[C]. IEEE, 2008: 1-5.

[29] Qiu C, Cao Q, Yu L, et al. Improving the stability level for on-line planning of mobile manipulators[J]. Robotica, 2009, 27(3): 389-402.

[30] 邱长伍. 面向任务的全维移动双臂机器人运动规划方法研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2010.

[31] Yu L, Cao Q, Li C, et al. On-line planning of nonholonomic mobile manipulators based on stability twist constraint[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2010, 32(2): 165-170.

[32] Zhang Z, Cao Q, Zhang L, et al. A CORBA-based cooperative mobile robot system[J]. Industrial Robot: An International Journal, 2009, 36(1): 36-44.

[33] Zhang Z, Cao Q, Lo C, et al. A CORBA-based simulation and control framework for mobile robots[J]. Robotica, 2009, 27(3): 459-468.

[34] Martinelli A. State Estimation Based on the Concept of Continuous Symmetry and Observability Analysis: The Case of Calibration[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 27(2): 239-255.

[35] Martinelli A. Vision and IMU data fusion: Closed-form solutions for attitude, speed, absolute scale, and bias determination[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2011, 28(1): 44-60.

[36] Jones ES, Soatto S. Visual-inertial navigation, mapping and localization: A scalable real-time causal approach[J]. International Journal of Robotics Research, 2011, 30(4): 407-430.

[37] Kelly J, Sukhatme GS. Visual-Inertial Sensor Fusion: Localization, Mapping and Sensor-to-Sensor Self-calibration[J]. International Journal of Robotics Research, 2011, 30(1): 56-79.

[38] Lynen S, Achtelik MW, Weiss S, et al. A Robust and Modular Multi-Sensor Fusion Approach Applied to MAV Navigation[A]. 2013 IEEE/RSJ international conference on intelligent robots and systems[C]. IEEE, 2013: 3923-3929.

[39] Weiss S, Achtelik MW, Lynen S, et al. Real-time Onboard Visual-Inertial State Estimation and Self-Calibration of MAVs in Unknown Environments[A]. 2012 IEEE international conference on robotics and automation[C]. IEEE, 2012: 957-964.

[40] Mourikis AI, Roumeliotis SI. A multi-state constraint Kalman filter for vision-aided inertial navigation[A]. IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2007: 3565-3572.

[41] Pinies P, Lupton T, Sukkarieh S, et al. Inertial aiding of inverse depth SLAM using a monocular camera[A]. Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2007: 2797-2802.

[42] Kleinert M, Schleith S. Inertial aided monocular SLAM for GPS-denied navigation[A]. 2010 IEEE Conference on Multisensor Fusion and Integration[C]. IEEE, 2010: 20-25.

[43] Li M, Mourikis AI. High-precision, consistent EKF-based visual-inertial odometry[J]. The International Journal of Robotics Research, 2013, 32(6): 690-711.

[44] Schinstock DE. GPS-aided INS Solution for OpenPilot[J]. Kansas State University, Tech. Rep, 2014.

[45] Leutenegger S, Lynen S, Bosse M, et al. Keyframe-based visual–inertial odometry using nonlinear optimization[J]. The International Journal of Robotics Research, 2014, 34(3): 314-334.

[46] Triggs B, McLauchlan PF, Hartley RI, et al. Bundle adjustment—a modern synthesis[A]. Proceedings of the International Workshop on Vision Algorithms: Theory and Practice,[C]. Springer, 1999: 298-372.

[47] Forster C, Carlone L, Dellaert F, et al. On-Manifold Preintegration for Real-Time Visual--Inertial Odometry[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2016, 33(1): 1-21.

[48] Qin T, Li P, Shen S. VINS-Mono: A Robust and Versatile Monocular Visual-Inertial State Estimator[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2018, 34(4): 1004-1020.

[49] Qin T, Pan J, Cao S, et al. A general optimization-based framework for local odometry estimation with multiple sensors[J]. arXiv preprint arXiv:1901.03638, 2019.

[50] Campos C, Elvira R, Rodríguez JJG, et al. ORB-SLAM3: An Accurate Open-Source Library for Visual, Visual-Inertial and Multi-Map SLAM[J]. arXiv preprint arXiv:2007.11898, 2020.

[51] Mur-Artal R, Tardos JD. ORB-SLAM2: An Open-Source SLAM System for Monocular, Stereo, and RGB-D Cameras[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2017, 33(5): 1255-1262.

[52] Eckenhoff K, Geneva P, Huang G. Closed-form preintegration methods for graph-based visual–inertial navigation[J]. The International Journal of Robotics Research, 2019, 38(5): 563-586.

[53] Quan M, Piao S, Tan M, et al. Tightly-Coupled Monocular Visual-Odometric SLAM Using Wheels and a MEMS Gyroscope[J]. IEEE Access, 2019, 7: 97374-97389.

[54] Zheng F, Liu Y. Visual-Odometric Localization and Mapping for Ground Vehicles Using SE(2)-XYZ Constraints[A]. 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2019: 3556-3562.

[55] Jing W, Shi Z, Zhong Y. Visual SLAM Incorporating Wheel Odometer for Indoor Robots[A]. 2017 36th Chinese Control Conference (CCC)[C]. IEEE, 2017: 5167-5172.

[56] Peng G, Lu Z, Chen S, et al. Pose Estimation Based on Wheel Speed Anomaly Detection in Monocular Visual-Inertial SLAM[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 21(10): 11692-11703.

[57] Furgale P, Barfoot TD, Sibley G. Continuous-time batch estimation using temporal basis functions[A]. 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation[C]. IEEE, 2012: 2088-2095.

[58] Rehder J, Nikolic J, Schneider T, et al. Extending kalibr: Calibrating the extrinsics of multiple IMUs and of individual axes[A]. 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2016: 4304-4311.

[59] Oth L, Furgale P, Kneip L, et al. Rolling Shutter Camera Calibration[A]. 2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition[C]. IEEE, 2013: 1360-1367.

[60] Maye J, Furgale P, Siegwart R. Self-supervised calibration for robotic systems[A]. 2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)[C]. IEEE, 2013: 473-480.

[61] Furgale P, Rehder J, Siegwart R. Unified temporal and spatial calibration for multi-sensor systems[A]. 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems[C]. IEEE, 2013: 1280-1286.

[62] Nutalapati MK, Arora L, Bose A, et al. A Generalized Framework for Autonomous Calibration of Wheeled Mobile Robots[J]. arXiv preprint arXiv:2001.01555, 2020.

[63] Della Corte B, Andreasson H, Stoyanov T, et al. Unified Motion-Based Calibration of Mobile Multi-Sensor Platforms With Time Delay Estimation[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(2): 902-909.

[64] Kümmerle R, Grisetti G, Burgard W. Simultaneous calibration, localization, and mapping[A]. 2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems[C]. 2011: 3716-3721.

[65] Martinelli A. Closed-Form Solution of Visual-Inertial Structure from Motion[J]. International Journal of Computer Vision, 2014, 106(2): 138-152.

[66] Jiao J, Ye H, Zhu Y, et al. Robust Odometry and Mapping for Multi-LiDAR Systems with Online Extrinsic Calibration[J]. ArXiv, 2020, abs/2010.14294.

[67] Ye H, Chen Y, Liu M. Tightly Coupled 3D Lidar Inertial Odometry and Mapping[A]. 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2019: 3144-3150.

[68] Yang Y, Geneva P, Zuo X, et al. Online IMU Intrinsic Calibration: Is It Necessary?[J]. Proc. of the Robotics: Science and Systems, Corvallis, Oregon, 2020: 716-720.

[69] Li M, Mourikis AI. Online temporal calibration for camera-IMU systems: Theory and algorithms[J]. International Journal of Robotics Research, 2014, 33(7): 947-964.

[70] Qin T, Shen S. Online temporal calibration for monocular visual-inertial systems[A]. 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)[C]. IEEE, 2018: 3662-3669.

[71] Liu J, Gao W, Hu Z. Online Temporal Calibration of Camera and IMU using Nonlinear Optimization[A]. 2018 24th International Conference on Pattern Recognition (ICPR)[C]. IEEE, 2018: 1761-1766.

[72] Li M, Yu H, Zheng X, et al. High-fidelity sensor modeling and self-calibration in vision-aided inertial navigation[A]. 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2014: 409-416.

[73] Kaiser J, Martinelli A, Fontana F, et al. Simultaneous State Initialization and Gyroscope Bias Calibration in Visual Inertial Aided Navigation[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2(1): 18-25.

[74] Campos C, Montiel JMM, Tardós JD. Fast and Robust Initialization for Visual-Inertial SLAM[A]. 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2019: 1288-1294.

[75] Mur-Artal R, Tardós JD. Visual-Inertial Monocular SLAM With Map Reuse[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2017, 2(2): 796-803.

[76] Campos C, Montiel JMM, Tardós JD. Inertial-Only Optimization for Visual-Inertial Initialization[J]. arXiv preprint arXiv:2003.05766, 2020.

[77] 刘荣海，袁晖，杨迎春，等. 移动操作臂研究现状和发展方向[J]. 工具技术, 2017, 51(05): 3-8.

[78] Huang Y, Chen K, Wang K, et al. Estimation of human arm motion based on sEMG in human-robot cooperative manipulation[A]. IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)[C]. IEEE, 2018: 1771-1776.

[79] Huang Y, Chen K, Zhang X, et al. Joint torque estimation for the human arm from sEMG using backpropagation neural networks and autoencoders[J]. Biomedical Signal Processing and Control, 2020, 62.

[80] Lievendag N. Sensor Shootout: Realsense D415 VS. SR300 VS. ORBBEC Astra S[OL]. https://3dscanexpert.com/3d-scan-sensor-shootout-realsense-d415-vs-sr300-vs-orbbec-astra-s/, 2018.

[81] Giancola S, Valenti M, Sala R. A survey on 3d cameras: Metrological comparison of time-of-flight, structured-light and active stereoscopy technologies[M].Springer Nature, 2018

[82] Support R. Will the pattern emitted by D400 series influence the structure light emitted by sr300?[OL]. https://forums.intel.com/s/question/0D70P000006GEHLSA4, 2019.

[83] Koenig N, Howard A. Design and use paradigms for Gazebo, an open-source multi-robot simulator[A]. 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)[C]. IEEE, 2004: 2149-2154 vol.2143.

[84] Chitta S, Sucan I, Cousins S. MoveIt! [ROS Topics][J]. IEEE Robotics & Automation Magazine, 2012, 19(1): 18-19.

[85] Zhang Q, Pless R. Extrinsic calibration of a camera and laser range finder (improves camera calibration)[A]. 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)(IEEE Cat. No. 04CH37566)[C]. IEEE, 2004: 2301-2306.

[86] He Y. CamLaserCalibraTool[OL]. https://github.com/MegviiRobot/CamLaserCalibraTool, 2021.

[87] Grupp, Michael. evo: Python package for the evaluation of odometry and SLAM[OL]. https://github.com/MichaelGrupp/evo, 2017.

[88] Usenko V, Demmel N, Schubert D, et al. Visual-Inertial Mapping With Non-Linear Factor Recovery[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2020, 5(2): 422-429.

[89] Rosinol A, Abate M, Chang Y, et al. Kimera: an open-source library for real-time metric-semantic localization and mapping[A]. 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2020: 1689-1696.

[90] Kschischang FR, Frey BJ, Loeliger HA. Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2): 498-519.

[91] Kaess M, Johannsson H, Roberts R, et al. iSAM2: Incremental smoothing and mapping using the Bayes tree[J]. The International Journal of Robotics Research, 2012, 31(2): 216-235.

[92] Barfoot TD. State estimation for robotics[M].Cambridge University Press, 2017

[93] Others SAaKMa. Ceres Solver. http://ceres-solver.org, 2020.

[94] Shen S, Michael N, Kumar V. Tightly-coupled monocular visual-inertial fusion for autonomous flight of rotorcraft MAVs[A]. 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2015: 5303-5310.

[95] Ei-Sheimy N, Hou H, Niu XJ. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2008, 57(1): 140-149.

[96] Hartley R, Zisserman A. Multiple view geometry in computer vision[J]. Kybernetes, 2003, 30(9/10): 1865 - 1872.

[97] Murray RM, Li Z, Sastry SS, et al. A mathematical introduction to robotic manipulation[M].CRC press, 1994

[98] Crassidis JL. Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(2): 750-756.

[99] Lupton T, Sukkarieh S. Visual-Inertial-Aided Navigation for High-Dynamic Motion in Built Environments Without Initial Conditions[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2012, 28(1): 61-76.

[100] Chirikjian GS. Stochastic models, information theory, and Lie groups, volume 2: Analytic methods and modern applications[M].Springer Science & Business Media, 2011

[101] Labbé M, Michaud F. RTAB‐Map as an open‐source lidar and visual simultaneous localization and mapping library for large‐scale and long‐term online operation[J]. Journal of Field Robotics, 2019, 36(2): 416-446.

[102] Engel J, Koltun V, Cremers D. Direct Sparse Odometry[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2018, 40(3): 611-625.

[103] Walter MR, Eustice RM, Leonard JJ. Exactly Sparse Extended Information Filters for Feature-based SLAM[J]. The International Journal of Robotics Research, 2007, 26(4): 335-359.

[104] Shen S, Mulgaonkar Y, Michael N, et al. Initialization-Free Monocular Visual-Inertial State Estimation with Application to Autonomous MAVs[A]. Experimental robotics[C]. Cham: Springer, 2016: 211-227.

[105] Sibley G, Matthies L, Sukhatme G. Sliding window filter with application to planetary landing[J]. Journal of Field Robotics, 2010, 27(5): 587-608.

[106] Zhang Z, Scaramuzza D. A Tutorial on Quantitative Trajectory Evaluation for Visual(-Inertial) Odometry[A]. 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)[C]. IEEE, 2018: 7244-7251.

[107] Tungadi F, Kleeman L. Time synchronisation and calibration of odometry and range sensors for high-speed mobile robot mapping[A]. Proc. Australasian Conference on Robotics and Automation[C]. 2008

[108] Lee W, Eckenhoff K, Geneva P, et al. Intermittent GPS-aided VIO: Online Initialization and Calibration[A]. 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)[C]. IEEE, 2020: 5724-5731.

[109] Qin T, Shen S. Robust Initialization of Monocular Visual-Inertial Estimation on Aerial Robots[A]. 2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)[C]. IEEE, 2017: 4225-4232.

[110] CloudCompare (version 2.11.1). http://www.cloudcompare.org/, 2021.

[111] Hornung A, Wurm KM, Bennewitz M, et al. OctoMap: An efficient probabilistic 3D mapping framework based on octrees[J]. Autonomous robots, 2013, 34(3): 189-206.