量子场论导引

贾宇

参考书目:

系统易读 1) M. Peskin & D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory

母语阅读 2) 周邦融,《量子场论》;另可参见朱洪元,戴元本,李灵峰,黄涛等人的场论书

现代 3) M. D. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model

深刻!4) S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields (Vol. 1)
但艰深,对初学者有难度

清晰 5) G. Sterman, An Introduction to Quantum Field Theory
但自由场部分有些简略

第一章 什么是QFT?为什么要学习QFT?

☆ 狭义相对论 $[E=mc^2]$ + 量子力学 $[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi]$

(Einstein, 1905) (Heisenberg, Born, Schrödinger, 1925-

= Quantum Field Theory! [QFT = SR + QM]

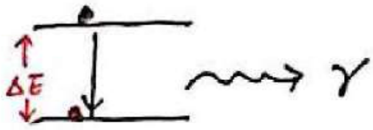
☆ 量子场论可认为是无穷多个谐振子的联合

(含有∞自由度,因此比单粒子量子力学复杂得多!)

粒子是场的激发对应的量子.

☆ 量子场论可用来描述粒子数改变的过程

比如：原子的自发辐射



原子核的β衰变 $n \to p + e + \bar{\nu}_e$

中子 质子 电子 反中微子

☆ 量子场论具有极其广泛的应用，从高能物理，核物理，原子物理，凝聚态物理一直到宇宙学. (From micro to cosmo)

☆ 量子场论有非常强大的预言能力。

比如：电子的反常磁矩 / 自然科学中最精确的预言与实验测量吻合极好

由量子电动力学给出
QED

• 第一节 历史回顾 — 相对论量子力学 — Pre-QFT era

固定粒子数的相对论量子力学始于德布罗意，薛定谔，Klein-Gordon，狄拉克，早期获得了一定的成功。但最终必须让位于QFT. 主要是以下三大困难：

1) 负能解问题 negative energy state；真空不稳定！
2) 负几率问题 不正定，波函数的几率诠释
3) 因果性破坏 在狭义相对论中，这是不可容忍的

Einstein's 光量子假设 (1905)： $E = h\nu = \hbar\omega$， $h = 2\pi\hbar$，$\omega = 2\pi\nu$ 角频率

De Broglie 物质波假设 (1923)： 由SR及光量子假设启发

自由电子的波函数 (物质波) $\sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t} = e^{ik^\mu x_\mu}$

$x^\mu = (ct, \vec{x})$ 是 4-vector，波的相位若是 Lorentz-invariant，

$\Rightarrow k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ 也必须是4-矢量！ $\Rightarrow$ k^μ 须正比于电子的4动量！（$\vec{k}$：波矢）

$$\therefore \quad \boxed{E = h\nu = \hbar\omega, \quad p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k}$$

$p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k})$ 是4-矢量

满足 $\quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$.

Davisson & Germer (1927) 观察到电子被晶体的衍射，证实了物质波

Klein-Gordon 方程 [最早由 Schrödinger 先推导出]

先看熟悉的 Non-relativistic QM：

自由粒子： $E = \frac{p^2}{2m}$， 作替换 $E = \hbar\omega \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

$\vec{p} = \hbar\vec{k} \to -i\hbar\nabla$

得到 Schrödinger 方程 $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi$.

我们从相对论性的色散关系 $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ 出发，

作如上替换： $\quad \left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2c^2\nabla^2 - m^2c^4\right]\psi(\vec{x},t) = 0$

$$\Rightarrow \left[\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(\vec{x},t) = 0 \leftarrow \text{K-G 方程}$$

$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \longleftarrow$ Lorentz 不变

K-G 方程的平面波解：　令 $\psi(\vec{x},t) = e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$

$$\Rightarrow \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \Rightarrow \quad E = \pm\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$$

负能解在经典 SR 也出现，但不导致任何严重后果！

但在 QM 世界中，这会产生严重问题：正能电子跃迁到负能态，

并释放光子／真空不稳定！

负几率问题：从 K-G 方程可推导出连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \qquad j^\mu = (\rho, \vec{j}) \text{ 是守恒流}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int d^3x\, \rho(\vec{x},t) = 0 \qquad \text{守恒荷，不随时间变化}$$

在 Non-relativistic QM 中，从 $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ 得到 $\overset{\text{单粒子}}{\text{本征态}}$，

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{|\psi|^2}_{\rho \leftarrow \text{几率密度}} - \nabla\cdot\underbrace{\left\{\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)\right\}}_{\vec{j}} = 0$$

连续性方程　$\frac{d}{dt}\underbrace{\int d^3x\, |\psi|^2}_{\equiv\, 1,\ \text{总几率守恒}} = 0$

Born 对波函数的统计诠释要求　$\rho \geq 0$

对于 K-G 方程：

$$\rho = N\,\mathrm{Im}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) \leftarrow \text{不正定！}$$

$$\vec{j} = Nc^2\,\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$$

ρ 不正定的原因是因为 K-G 方程含有 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$！（2阶微分方程）

Dirac 方程：Dirac 的出发点是给出相对论性的量子力学方程，可解决负几率问题。他认识到，若坚持方程只含 $\frac{\partial}{\partial t}$ 一阶导数，那么波函数 ψ 必须扩展为列矢量 $\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_n\end{pmatrix}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = \left[-i\hbar c\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta mc^2\right]\psi$$

α^i, β $(i=1,\cdots 3)$ 为待定 $n\times n$ 矩阵

期待 $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t})^2\psi = H^2\psi$ 会回到 K-G 方程：

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2c^2\sum_{i,j}\frac{1}{2}\{\alpha^i,\alpha^j\}\partial_i\partial_j\psi - i\hbar mc^3\sum_{i=1}^{3}\{\alpha^i,\beta\}\partial_i\psi + m^2c^4\beta^2\psi$$

令交叉项消失，$\{\alpha^i,\alpha^j\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1}_{n\times n}$,

$$\{\alpha^i,\beta\} = 0$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1$$

的确回到 K-G 方程！

发现 $\vec{\alpha},\beta$ 满足如上反对易关系，n 至少需要 $=4$ [2×2矩阵不满足！]

通常定义 $\gamma^0 = \beta$, $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$

Dirac 方程可改写为 $\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(\vec{x},t) = 0$

协变的形式

$\rho = \psi^\dagger\psi$, $\vec{j} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$ 满足 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$

正定！

负能解：Dirac 提出 Dirac 海的概念：电子满足 Pauli 不相容原理，所有负能级都被填充满了。空穴 → 反电子！

Dirac 理论的一个巨大成就：正确预言了电子磁矩

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$$ (Dirac 理论描述自旋 $\frac{1}{2}$ 的电子)

更精细的实验需要考虑量子修正，

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ 精细结构常数

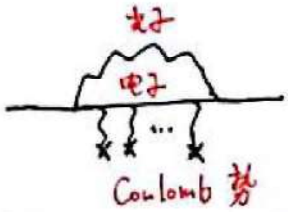
$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right]$$

J. Schwinger (1948) 因此获得诺贝尔奖

← 单圈 QED 辐射修正

另一个 QED 的成功预言是氢原子的 Lamb shift (兰姆位移)

H. Bethe (1947)



氢原子能谱， Couple K-G equation and Dirac equation with 电磁场

最小耦合： $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi$

$p^\mu \to p^\mu + \frac{e}{c}A^\mu$ $\quad \vec{p} \to -i\hbar\nabla + e\frac{\vec{A}}{c}$

$$A^\mu = (\overset{A^0}{\phi}, \vec{A})$$ 也是 4-矢量

K-G 方程， $$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)^2 - c^2\left(-i\hbar\nabla + \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2 - m^2c^4\right]\psi(\vec{x},t) = 0$$

氢原子核是质子，提供库仑势： $e\phi = \frac{e^2}{4\pi r}$, $\vec{A} = 0$

定态解 $\psi \propto e^{-iEt/\hbar}$, K-G 方程变为

$$\left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 - c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4\right]\psi(\vec{r}) = 0$$

本征能为 $$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{J+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) + \cdots\right]$$

$(n=2, j=\frac{1}{2})$ 和 $(n=2, j=\frac{3}{2})$

wrong fine structure splitting of hydrogen atom!

Dirac方程耦合经典电磁场：

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+e\phi\right)\psi=(-i\hbar c\nabla+e\vec{A})\cdot\vec{\alpha}\,\psi+\beta mc^2\psi,$$

对 $A^0=\phi=\frac{e}{4\pi r}$ 中心场 $(\vec{A}=0)$

$$[H,\underbrace{-i\hbar\vec{r}\times\nabla}_{\text{轨道}}+\underbrace{\hbar\frac{\vec{\Sigma}}{2}}_{\text{自旋}}]=0 \qquad \text{总角动量守恒}$$

$$E=mc^2\left[1-\frac{\alpha^2}{2n^2}-\frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\right]$$

$n=2,\ (j=\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ 之间的能级差

给出和实验吻合的 fine structure splitting

但Dirac理论预言 $2S_{\frac{1}{2}}$ 和 $2P_{\frac{1}{2}}$ 完全简并，因为 $(n=2,\ j=\frac{1}{2})$ 不依赖 l

1947年，Lamb发现这两个能级间有约1000 MHz的差别

成功解释Lamb shift必须依靠 Quantum Field Theory !

单粒子相对论量子力学的因果性破坏.
(causality)

考虑自由粒子从 $\vec{x}_0$ 到 $\vec{x}$ 的传播振幅：

$$U(t)=\langle\vec{x}|\underbrace{e^{-iHt}}_{\text{时间演化算符}}|\vec{x}_0\rangle$$

非相对论量子力学， $H=\frac{\vec{p}^2}{2m}$ $\qquad (c=1)$

$$U(t)=\langle\vec{x}|e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}|\vec{x}_0\rangle=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle\vec{x}|e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}t}|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|\vec{x}_0\rangle$$

当 $|\vec{x}-\vec{x}_0| \gg t$，类空间隔时，$U(t) \neq 0$.

因果性受到破坏 [在伽利略时空，信号可以瞬时传播，并没有类空，类时的区分]

相对论量子力学： $H=\sqrt{p^2+m^2}$

$$U(t)=\langle \vec{x}|e^{-i\sqrt{p^2+m^2}}|\vec{x}_0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3p\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}\, e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}$$

球座标
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\int_0^\infty dp\cdot p\sin(p|\vec{x}-\vec{x}_0|)\, e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}$$

$\sim e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}$, where $x^2=|\vec{x}-\vec{x}_0|^2$. 当 $x^2 \gg t^2$ 时

类空极限，$x^2 \gg t^2$ 非常小但并未消失，因果性依然破坏！

固定粒子数的相对论量子力学无法克服 Causality problem!

In contrast, 量子场论提供了一个非常好的方案来拯救因果性！

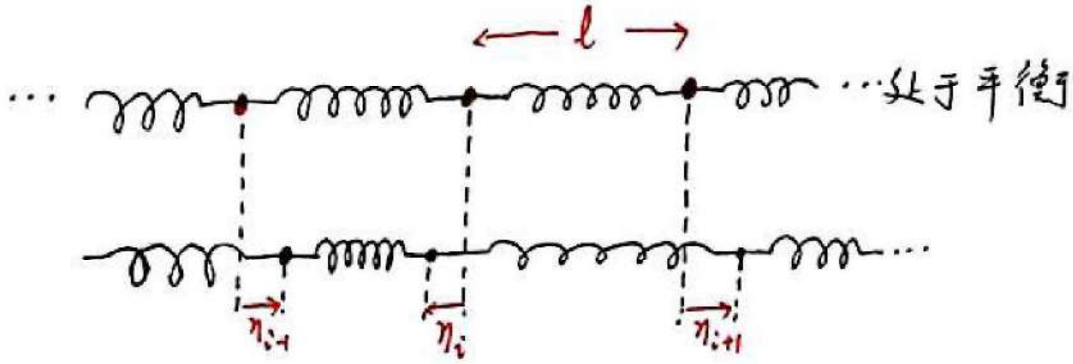
Lorentz 不变 $\longrightarrow$ 因果性 $\longrightarrow$ 必须存在"反粒子"！

第二节 量子场论的诞生 (Birth of QFT)

Born, Heisenberg, Jordan (1926) 尝试作量子化电磁场

近似：忽略光子的极化；1-dim 空间维数

用一维的经典弦 (classical string) 模拟电磁场



有N个等质量质点（质量为m），被质量可忽略的弹簧连接.

第i个粒子从平衡位置的偏移 (displaceme 为 η_i)

动能 (K.E.) $= T = \frac{1}{2}\sum_i m\dot{\eta}_i^2$,

势能 (P.E.) $= V = \frac{1}{2}\sum_i \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hooke 系数}}}{k}(\eta_{i+1}-\eta_i)^2$

考虑连续极限 ($L = Nl$ fixed, but $N\to\infty$, $l\to 0$)　L 为总弦长

$$T = \frac{1}{2}\underset{\substack{\shortparallel\\ \mu}}{\left(\frac{m}{l}\right)}\sum_i l\left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\mu\int_0^L dx\left(\frac{\partial\eta(t,x)}{\partial t}\right)^2$$

$$V = \frac{1}{2}\underset{\substack{\shortparallel\\ T}}{(kl)}\sum_i l\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{l}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}T\int_0^L dx\left(\frac{\partial\eta(t,x)}{\partial x}\right)^2$$

$[\mu] = \frac{\text{mass}}{\text{length}}$ ← 弦的线密度

$[T] = \frac{\text{energy}}{\text{length}}$ ← 弦的 tension，或杨氏模量

$$\Rightarrow \overset{\substack{\text{Lagrange}\\ \downarrow}}{L} = T - V = \int_0^L dx\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Hamiltonian}}}{H} = T + V = \int_0^L dx\left[\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right]$$

重新定义 $u(t,x) \equiv \sqrt{\mu}\,\eta(t,x)$，利用 波速 $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^L dx \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L dx \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

其中 c 为光速
因为考虑电磁场

假设弦的两端被固定：边界条件为 $u(t, x=0) = u(t, x=L) = 0$

可以把场 $u(t,x)$ 在位形空间作如下 Fourier 展开：

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k x}{c}\right)$$

$\omega_k = \frac{k\pi c}{L}$ ← 正则角频率

代入后对 x 积分，有

$$L = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \dot{q}_k^2(t) - \omega_k^2 q_k^2(t) \right\},$$

$$H = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t) \right\}.$$

← 无穷多个独立的谐振子

Euler-Lagrangian 方程 ⇒ $\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = 0$ ← 经典场方程 ~~经典场方程(波动方程)~~

General solution 为 $\cos(\omega_k t)$ 和 $\sin(\omega_k t)$ 的线性组合

或 $e^{-i\omega_k t}$ 及 $e^{+i\omega_k t}$ 的线性组合

正则"动量"：$P_k(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k(t)} = \frac{L}{2}\dot{q}_k(t) \Rightarrow H = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ \frac{P_k^2(t)}{L} + \frac{L\omega_k^2}{4} q_k^2(t) \right\}.$

量子化 (Quantization) 条件为

$$\begin{cases} [P_k(t), q_j(t)] = -i\hbar\,\delta_{kj} \\ (\text{类比于单谐振子的 } [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar) \\ [q_k(t), q_j(t)] = [P_k(t), P_j(t)] = 0 \end{cases}$$

可把 $q_k(t)$ promote 为量子场算符：

$$\hat{q}_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}\left[a_k e^{-i\omega_k t} + a_k^\dagger e^{+i\omega_k t} \right]$$

产生/湮灭算符

类比单谐振子的：$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[a + a^\dagger \right]$$

raising operator

Lower operator

欲满足 $[q_k(t), p_j(t)] = i\hbar\delta_{kj}$, $[q_k(t), q_j(t)]=0$

我们必须有 $\boxed{\begin{aligned}&[a_k, a_j^\dagger] = \delta_{kj}\\ &[a_k, a_j] = [a_k^\dagger, a_j^\dagger] = 0\end{aligned}}$

k-模式的光子数算符

$\hat{N} = a_k^\dagger a_k$

$\therefore \; H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{零点能}}\right)$ 无穷多个独立谐振子

类比单谐振子: $H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$

回忆对单谐振子: $|n\rangle = \dfrac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

量子弦的本征态为 $|\underbrace{n_1}_{\omega_1\text{模式的光子数}}, \underbrace{n_2}_{\omega_2\text{模式的光子数}}, \cdots, \underbrace{n_k}_{\omega_k\text{模式的光子数}}, \cdots\rangle$

$\omega_k \equiv k\left(\frac{\pi c}{L}\right)$

二次量子化: Fock 空间 $\mathcal{F} = \underbrace{\oplus_n}_{\text{直和}} \underbrace{\mathcal{H}_n}_{\text{固定}n\text{个光子的 Hilbert 空间}}$

Note: 1) 场论中把谐振子的第 n 个激发诠释为有 n 个粒子

粒子是场激发后对应的量子!

2) 量子化后的弦的零点能是发散的!

(真空能无穷大!) ← 实验上不能直接观测真空能, 可减除!

[重整化思想的雏形]

历史后续发展: Dirac (1927) 手工量子化 3 维空间的电磁矢势 $\vec{A}$,

推导自发辐射公式

Heisenberg & Pauli (1929) 引入场的正则量子化框架

并包括 Klein-Gordon, Dirac 场量子化