

## 第四节 电弱统一理论若干专题讨论

### 一、中性弱流和Weinberg角

$$L_{\text{int}} = -e \left\{ J_{em}^\mu A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} W_\mu^+ + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu^-) + \frac{1}{\sin \theta_W \cos \theta_W} J_{NC}^\mu Z_\mu \right\}$$
$$J_{NC}^\mu = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu$$
$$(J_{em}^\mu = -\bar{e} \gamma^\mu e)$$

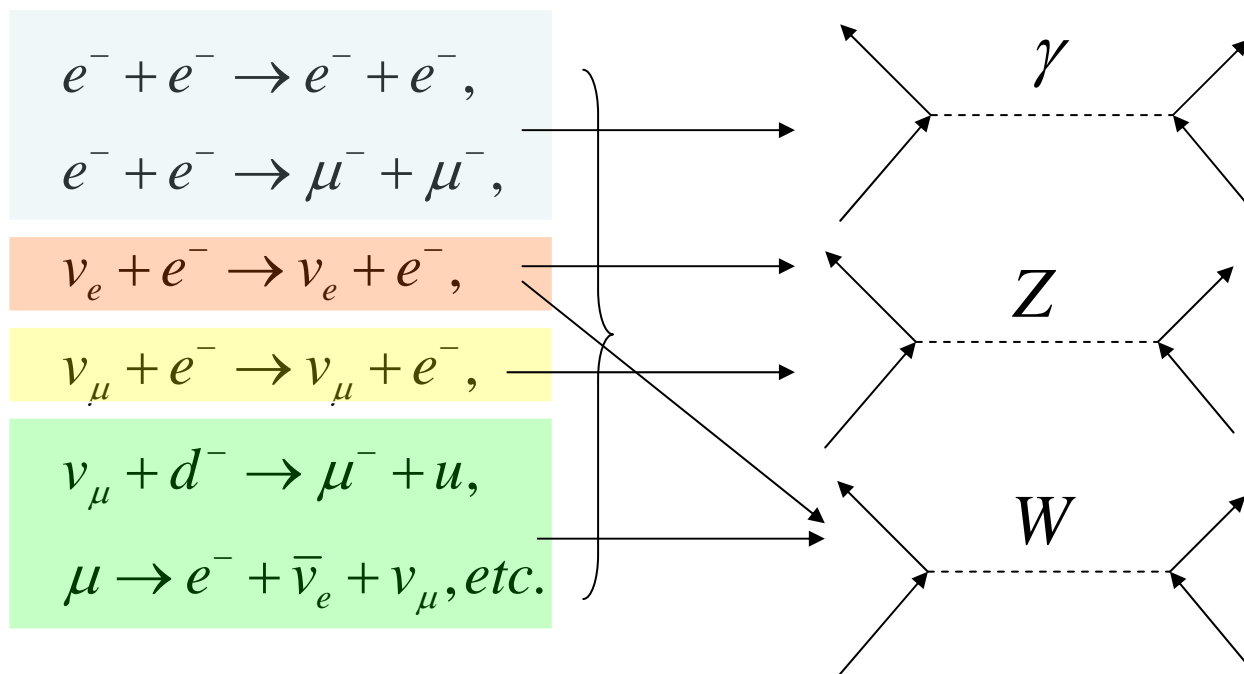
在前一节已经介绍过，这样的耦合形式可以推广到三代轻子和三代夸克。考虑到前面弱同位旋和弱荷的约定，对每一代轻子或夸克，费米子流可以写成更普遍的形式：

$$J_{em}^\mu = Q_f \bar{f} \gamma^\mu f \equiv \bar{f} \gamma^\mu (T_3 + Y) f$$

$$J_{NC}^\mu = \bar{f} \gamma^\mu T_3 f - Q_f \sin^2 \theta_W \bar{f} \gamma^\mu f$$

$$J_{CC}^{\pm, \mu} = \bar{f} \gamma^\mu (T_1 \pm iT_2) f$$

我们现在来考虑费米子——费米子散射过程，



这些过程的最低阶过程都可以用右边的相应的费曼图来描述——单中间玻色子交换。如果对于弱作用过程，动量转移相对于中间玻色子质量很小，则可以用四费米点作用来描述

$$L_{eff} = -\frac{e^2}{2m_Z^2 \cos^2 \theta_W \sin^2 \theta_W} J_{NC}^\mu J_{NC,\mu} - \frac{e^2}{2m_W^2 \sin^2 \theta_W} (J_{CC}^{-,\mu} J_{CC,\mu}^+ + h.c.)$$

对比普适的弱相互作用费米理论，可以有，

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8m_W^2 \sin^2 \theta_W} \Rightarrow m_W^2 = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W}$$

并且利用关系

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1$$

弱作用有效理论（包括带电流相互作用和中性流相互作用）可以写成更简单的形式，

$$L_{eff} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left[ J_{NC}^\mu J_{NC,\mu} + (J_{CC}^{-,\mu} J_{CC,\mu}^+ + h.c.) \right]$$

也就是说，中性流耦合和带电弱流耦合的低能理论具有相同的耦合常数——费米常数。费米常数可以通过低能实验测量（如前），如果能够测出 Weinberg 角，就能得到中间玻色子的质量（估计）。

由前面我们看到，Weinberg 角是电弱统一理论引入的；电弱统一理论也预言了弱中性流的存在，而且从弱中性流的定义看出，当过程的费米子种类确定时，弱中性流由 Weinberg 角唯一确定。如果弱中性流存在，则可以通过弱中性流过程测出 Weinberg 角并能估算中间玻色子的质量。

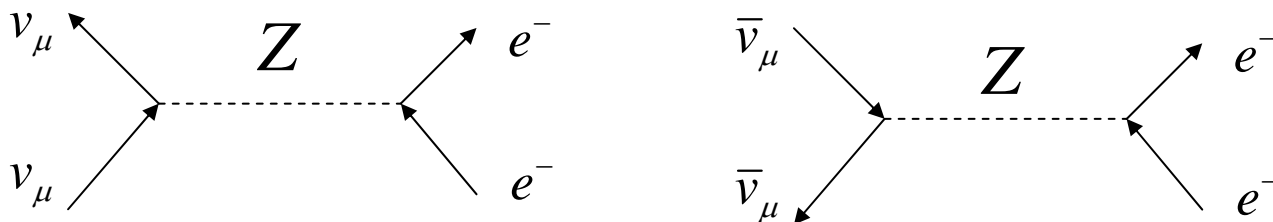
从上面的讨论可以看出，弱中性流的实验观测具有十分重要的意义。

历史上, 1973 CERN第一次实验上证实了弱中性流的存在:

$$\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + e^{-} \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + e^{-},$$

$$\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + N \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + X,$$

这证实了标准模型的预言, 并测得了  $\sin^2 \theta_W$  的范围。



a) 正反 muon 中微子——电子散射, 这是纯粹的中性流过程, 中性流为,

$$\begin{aligned} J_{NC}^{\mu} &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^{\mu} \nu_{\mu L} - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma^{\mu} e_L - \sin^2 \theta_W J_{em}^{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\mu L} \gamma^{\mu} \nu_{\mu L} + \frac{1}{2} \bar{e} (g_V^e \gamma^{\mu} - g_A^e \gamma^{\mu} \gamma_5) e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_V^e &= -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W, \\ g_A^e &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

相应的等效拉氏量为，

$$L_{eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu \bar{e} (g_V^e \gamma^\mu - g_A^e \gamma^\mu \gamma_5) e \right]$$

根据场论计算，在入射中微子能量足够大，电子质量可以忽略的情况下，有

$$\sigma(\nu_\mu e) = \frac{G_F^2}{\pi} 2m_e E_\nu \left\{ \left( \frac{g_V^2 + g_A^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{g_V^2 - g_A^2}{2} \right)^2 \right\},$$
$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e) = \frac{G_F^2}{\pi} 2m_e E_{\bar{\nu}} \left\{ \left( \frac{g_V^2 - g_A^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{g_V^2 + g_A^2}{2} \right)^2 \right\}$$

它们的比可以给出

$$R = \frac{\sigma(\nu_\mu e)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu e)} = 3 \frac{1 - \sin^2 \theta_W + 16 \sin^4 \theta_W / 3}{1 - \sin^2 \theta_W + 16 \sin^4 \theta_W}$$

1984年的试验数据给出，  $\sin^2 \theta_W = 0.215 \pm 0.032(stat.) \pm 0.012(syst.)$

b) 正反 muon 中微子——核子散射，这也是纯粹的中性流过程  
在部分子模型框架下，中性流过程为，

$$\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + u \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + u,$$

$$\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + d \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) + d,$$

相应的参与过程的中性流相互作用有效拉氏量为，

$$L_{eff} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \bar{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \nu_{\mu} \left( \bar{u} (g_V^u \gamma^{\mu} - g_A^u \gamma^{\mu} \gamma_5) u + \bar{d} (g_V^d \gamma^{\mu} - g_A^d \gamma^{\mu} \gamma_5) d \right) \right]$$

其中，

$$g_V^u = +\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, g_A^u = +\frac{1}{2};$$

$$g_V^d = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, g_A^d = -\frac{1}{2};$$

那么，散射截面可以写作，

$$\sigma(\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) N \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) X)$$

$$= \int_0^1 dx \left[ u(x) \sigma(\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) u \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) u) + d(x) \sigma(\nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) d \rightarrow \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) d) \right]$$

根据上面的有效拉氏量计算中微子和部分子的散射截面，可以得到：

$$\sigma(\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X) = \frac{G_F^2}{\pi} ME \int_0^1 dx x N(x) \left[ \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{27} \sin^4 \theta_w \right],$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \bar{\nu}_\mu X) = \frac{G_F^2}{\pi} ME \int_0^1 dx x N(x) \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{9} \sin^4 \theta_w \right],$$

带电流过程也可以类似求出，

$$\sigma(\nu_\mu N \rightarrow \mu^- X) = \frac{G_F^2}{\pi} ME \int_0^1 dx x N(x)$$

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ X) = \frac{G_F^2}{\pi} ME \int_0^1 dx x N(x) \frac{1}{3},$$

实验上可以测量

$$R_\nu = \frac{\sigma(\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X)}{\sigma(\nu_\mu N \rightarrow \mu^- X)} = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{27} \sin^4 \theta_w,$$

$$R_{\bar{\nu}} = \frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \bar{\nu}_\mu X)}{\sigma(\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \mu^+ X)} = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta_w + \frac{20}{9} \sin^4 \theta_w,$$

由此可以定出Weinberg角 (Geweniger 1984)

$$\sin^2 \theta_w = 0.225 \pm 0.007(\text{exp.}) \pm 0.006(\text{theor.})$$

有了Weinberg角的值，结合费米常数，就可以估计中间玻色子的质量，

$$\left. \begin{aligned} m_W^2 &= \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \\ \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} &= 1 \\ \rho_0 &\approx 2^{-1/4} G_F^{-1/2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\sin \theta_W \approx 0.23]{G_F \approx 1.17 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}} \left\{ \begin{aligned} m_W &\approx 77.7 \text{GeV} \\ m_Z &\approx 88.6 \text{GeV} \\ \rho_0 &\approx 246 \text{GeV} \end{aligned} \right.$$

注意：在这里我们是根据历史的过程来讲。中性流的发现和Weinberg角的估计是在1973年，而W，Z中间玻色子的试验发现是在十年以后的1983年。中性流的发现和Weinberg角的测量对Weinberg-Salam电弱统一模型是重要的支持，Weinberg和Salam也因此获得了1979年的Nobel Prize。

中性流的发现也给出了W，Z粒子质量的预言，这也促使人们进一步从实验上寻找它们。

实际上，由于现在对W, Z粒子的质量测量的很准，所以Weinberg角实际上是根据它们来定义的，这种定义对高阶微扰仍然有效：

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}$$



## 二、费米子代的混合和CKM矩阵

我们在讲弱作用低能有效理论时谈到过，Cabibbo以及后来的GIM理论为了解决弱作用普适性和味道改变中性流不存在，引入了夸克代的混合的概念——弱作用本征态是强作用本征态即质量本征态的混合。

可是，我们知道，电弱统一理论在对称性自发破缺前是没有质量的理论，拉氏量中不显含质量项。那么，在电弱统一理论中怎么来考虑费米子代的混合呢？

电弱统一理论中引入Higgs场合费米子场的Yukawa型耦合，通过对称性自发破缺，费米子获得质量，因此费米子代的混合还得从Yukawa耦合谈起。

Higgs场是弱SU(2)的二重态复标量场，

$$\Phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} : \Phi(x) \xrightarrow{U \in SU(2)} U\Phi(x) \Rightarrow i\sigma_2 \Phi^*(x) \xrightarrow{U \in SU(2)} U i\sigma_2 \Phi^*(x)$$

对于一个费米子左手二重态  $\begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix}$ ，Higgs场和它能构成两种弱同位旋单态，

$$\Phi^+ \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \Phi^T i\sigma_2 \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix}$$

考虑到

- a) Yukawa耦合应该保证弱超荷守恒;
- b) 并且由于中微子质量为零, 不存在右手中微子;
- c) 电弱统一理论中三代费米子之间除了Yukawa耦合之外没有任何区别;  
三代费米子的Yukawa耦合项可以写成紧凑的形式:

$$L_{Yukawa} = -(e_R, \mu_R, \tau_R) C_l \begin{pmatrix} \Phi^+ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \Phi^+ \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \Phi^+ \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} - (d'_R, s'_R, b'_R) C_q \begin{pmatrix} \Phi^+ \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^+ \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^+ \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (u_R, c_R, t_R) C_q \begin{pmatrix} \Phi^T(i\sigma_2) \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T(i\sigma_2) \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T(i\sigma_2) \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

显然在如下么正变换下,

$$\begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \rightarrow U_1 \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} \rightarrow U_2 \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \\ b'_R \end{pmatrix} \rightarrow U_3 \begin{pmatrix} d'_R \\ s'_R \\ b'_R \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} L_{1L} \\ L_{2L} \\ L_{3L} \end{pmatrix} \rightarrow V_1 \begin{pmatrix} L_{1L} \\ L_{2L} \\ L_{3L} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} Q_{1L} \\ Q_{2L} \\ Q_{3L} \end{pmatrix} \rightarrow V_2 \begin{pmatrix} Q_{1L} \\ Q_{2L} \\ Q_{3L} \end{pmatrix};$$

其中Q, L分别表示夸克、轻子左手二重态,  $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 \in U(3)$

只要Yukawa矩阵按照如下变换,

$$C_l \rightarrow U_1 C_l V_1^+,$$

$$C_q \rightarrow U_3 C_l V_2^+,$$

$$C'_q \rightarrow U_2 C_l V_2^+,$$

Yukawa耦合就不变。

对于轻子Yukawa矩阵,

$$C_l C_l^+ \rightarrow U_1 C_l C_l^+ U_1^+ \xrightarrow{\text{选取特定的 } U_1} C_l C_l^+ = \begin{pmatrix} c_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_l = \begin{pmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_\mu & 0 \\ 0 & 0 & c_\tau \end{pmatrix} W$$

则,  $V_1 = W^+ \in U(3)$

$$\text{相应地, 我们也有, } C'_q = \begin{pmatrix} c_u & 0 & 0 \\ 0 & c_c & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{pmatrix} \quad V_2 = I \in U(3)$$

但对于第三个Yukawa矩阵, 由于V2已经选定, 对于特定的U3, 其普遍形式只能是,

$$C_q = \begin{pmatrix} c_d & 0 & 0 \\ 0 & c_s & 0 \\ 0 & 0 & c_b \end{pmatrix} V^+, V \in U(3)$$

如果我们要求

$$U_3 = V$$

则在U3变换下,

$$C_q = V \begin{pmatrix} c_u & 0 & 0 \\ 0 & c_c & 0 \\ 0 & 0 & c_t \end{pmatrix} V^+, V \in U(3)$$

才是厄米的。

对于轻子部分，我们总可以选左右手的特定变换来使Yukawa矩阵对角化（因为中微子质量为零，耦合项只有一项，左右手单独变换的矩阵可以分别独立约定），但对于夸克代的耦合则要复杂一些：有两个耦合项，但只有三个独立的变换矩阵，可以通过一个耦合项来约定其中两个，还剩下一个，这就是V矩阵。

V矩阵是一个3x3幺正矩阵，有9个独立的实参数。但我们还可以通过一定的方式减少独立参数：通过规定C-q联系的6个夸克场的相对相角（有2x3-1个独立的相对相角），则可以使独立的参数数目减少为4个，这四个独立参数中的3个可以用3个欧拉角表示，于是还剩一个复相位因子。具体的V矩阵的标准参数化形式为，

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ut} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

其中,

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}, s_{ij} = \sin \theta_{ij}, 0 \leq \theta_i \leq \pi / 2$$

$$0 \leq \delta \leq 2\pi$$

实验上发现,

$$s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$$

所以引入Wolfenstein参数化,  $s_{12} = \lambda = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}}, s_{23} = A\lambda^2 = \lambda \left| \frac{V_{cb}}{V_{us}} \right|,$

$$s_{13}e^{i\delta} = V_{ub}^* = A\lambda^3(\rho + i\eta) = \frac{A\lambda^3(\bar{\rho} + i\bar{\eta})\sqrt{1 - A^2\lambda^4}}{\sqrt{1 - \lambda^2[1 - A^2\lambda^4(\bar{\rho} + i\bar{\eta})]}}$$

这保证  $\bar{\rho} + i\bar{\eta} = -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}$  是相位无关的,

并且CKM矩阵元对lambda的所有阶展开都是么正的。

通常, CKM矩阵可以写作

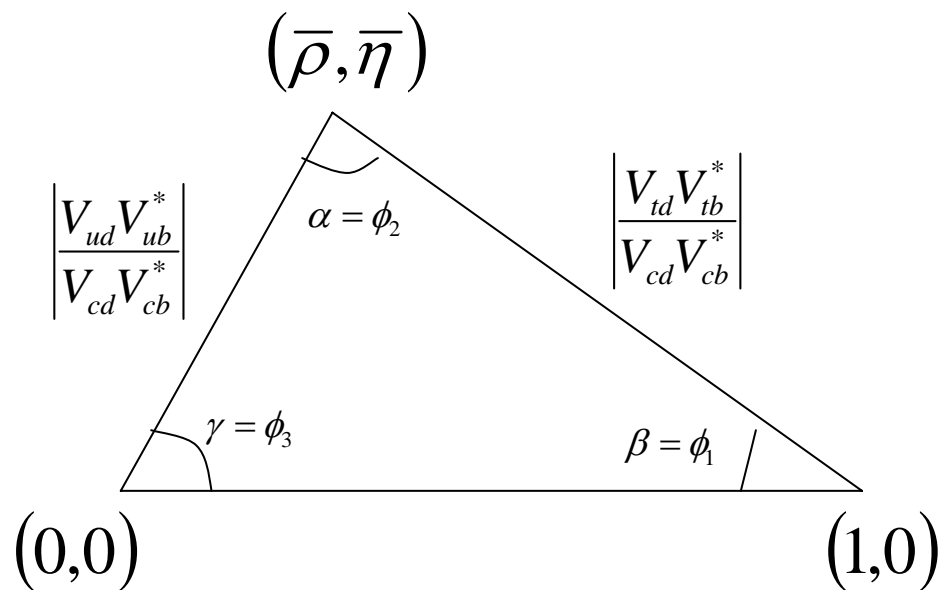
$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 / 2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2 / 2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4)$$

CKM矩阵的么正性要求:  $\sum V_{ij} V_{ik}^* = \delta_{jk}$        $\sum V_{ij} V_{kj}^* = \delta_{ik}$

六个为零和关系可以用一个复平面上的三角形来表示, 通常用

$$V_{ud} V_{ub}^* + V_{cd} V_{cb}^* + V_{td} V_{tb}^* = 0$$

来描述 **么正三角形**:



Yukawa耦合项就可以写成,

$$L_{Yukawa} = \left\{ -(\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R) \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} - (\bar{u}_R, \bar{c}_R, \bar{t}_R) \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} \right. \\ \left. - (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) V \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} V^+ \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} \right\} \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \right)$$

定义  $\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$  ,  $V$ 就是夸克质量本征态的混合矩阵,  
也就是所谓的CKM矩阵。

引入三代夸克混合矩阵后，弱流可以通过质量本征态和CKM矩阵表述，

a) 带电流:

$$J_{CC}^{\mu} = (\bar{\nu}_{eL}, \bar{\nu}_{\mu L}, \bar{\nu}_{\tau L}) \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{\nu}_{eL}, \bar{\nu}_{\mu L}, \bar{\nu}_{\tau L}) \gamma^{\mu} \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \gamma^{\mu} V \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

则通过特定的弱过程可以定出CKM矩阵元，例如

$$d \rightarrow u + W^{-} \rightarrow V_{11}(V_{ud})$$

$$s \rightarrow u + W^{-} \rightarrow V_{12}(V_{us})$$

$$b \rightarrow u + W^{-} \rightarrow V_{13}(V_{ub})$$



b) 中性弱流:

$$\begin{aligned}
 J_{CC}^{\mu} = & (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_{\mu}, \bar{\nu}_{\tau}) \gamma^{\mu} \frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix} + (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \gamma^{\mu} \left( -\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} + \sin^2 \theta_w \right) \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \\
 & + (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \gamma^{\mu} \left( +\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \\
 & + (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) \gamma^{\mu} \left( -\frac{1}{2} \frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

显然没有味道改变中性流的出现——**夸克代出现的结果。**

例如没有下面的过程

$$s \rightarrow d + Z \Rightarrow K_L(sd + ds) \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

这可以解释如下运动学相似的过程的宽度为什么很小，

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_{\mu})} \approx 3.4 \times 10^{-9}$$

下面我们简单介绍一下CKM矩阵元的试验确定:

1)  $|V_{ud}| \quad \Leftarrow d \rightarrow u + W^-$

这个矩阵元的最精确的测量来自原子核  $0^+ \rightarrow 0^+$  的beta衰变  
(九个试验的平均)

$$|V_{ud}| = 0.97377 \pm 0.00027$$

这个矩阵元的测量精度如此之高, 在于上述过程是纯矢量过程, 而且和核结构的不确定性没有关系。

2)  $|V_{us}| \quad \Leftarrow s \rightarrow u + W^-$

传统上, 这个矩阵元是通过K 介子的半轻子衰变得到的。实验上可以给出很精确的分支比  $Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)$ , 利用广泛接受的形状因子  $f_+(0) = 0.961 \pm 0.008$  可以得到

$$|V_{us}| = 0.2257 \pm 0.0021$$

$$3) \quad |V_{cd}| \quad \Leftarrow c \rightarrow d + W^+ (D \rightarrow Kl\nu, \pi l\nu)$$

这个矩阵元可以通过测量含粲介子的半轻子衰变过程得到，但需要由理论上给出精确的形状因子的计算。有关形状因子目前最精确、可靠的计算来自格点QCD。

另外，目前更精确的结果是通过中微子、反中微子相互作用来得到，但逻辑比较复杂，不在这里细说。结果是

$$|V_{cd}| = 0.230 \pm 0.011$$

$$4) \quad |V_{cs}| \quad \Leftarrow c \rightarrow s + W^+$$

对这个矩阵元的直接测量可以通过轻子衰变过程  $D_s^+ \rightarrow l^+ \nu$ ，但需要知道D介子的衰变常数  $f_{D_s}$ 。如果通过半轻子衰变过程  $D \rightarrow Kl\nu, \pi l\nu$ ，则需要知道形状因子。利用格点QCD的最新、最精确的计算结果可以得到：

$$|V_{us}| = 0.957 \pm 0.017$$

$$5) \quad |V_{ub}| \quad \Leftarrow b \rightarrow u + W^-$$

可以通过单举B介子半轻子衰变  $B \rightarrow X_u l \bar{\nu}$  来定这个矩阵元，但会受到强  $B \rightarrow X_c l \bar{\nu}$  背景的影响。也可以通过B介子半轻子衰变的遍举过程如  $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}$  但这要求从理论上知道形状因子（格点QCD已经有这方面的结果）。综合遍举过程和单举过程的结果，有

$$|V_{ub}| = (4.31 \pm 0.30) \times 10^{-3}$$

$$6) \quad |V_{td}| \quad \text{和} \quad |V_{ts}|$$

这两个矩阵元不能通过top夸克树图水平上的过程测量。实验上通过测量  $B - \bar{B}$  的震荡或者K和B通过弱圈图的高阶过程来测量。现在的实验值为

$$|V_{td}| = (7.4 \pm 0.8) \times 10^{-3}$$

$$|V_{td} / V_{ts}| = 0.208^{+0.008}_{+0.006}$$

7)  $|V_{tb}|$

直接的测量是测量top夸克弱衰变的比值

$$R = \frac{Br(t \rightarrow W^+ b)}{Br(t \rightarrow W^+ q)} = \frac{|V_{tb}|^2}{|V_{td}|^2 + |V_{ts}|^2 + |V_{tb}|^2} = |V_{tb}|^2$$

实验给出的下限是

$$|V_{tb}| > 0.78$$

如果考虑标准模型，只有三代夸克，则CKM矩阵的么正性可以要求，

$$|V_{ub}|^2 + |V_{cb}|^2 + |V_{tb}|^2 = 1$$

这样有，

$$|V_{tb}| = 0.9991^{+0.000004}_{-0.000004}$$

总的说来，在标准模型框架下，对现有的所有的数据进行拟合，可以得到如下CKM矩阵（矩阵元的绝对值）

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97383_{-0.00023}^{+0.00024} & 0.2272_{-0.0010}^{+0.0010} & \left(3.96_{-0.09}^{+0.09}\right) \times 10^{-3} \\ 0.2271_{-0.0010}^{+0.0010} & 0.97296_{-0.00024}^{+0.00024} & \left(42.21_{-0.80}^{+0.10}\right) \times 10^{-3} \\ \left(8.14_{-0.64}^{+0.32}\right) \times 10^{-3} & \left(41.61_{-0.78}^{+0.12}\right) \times 10^{-3} & 0.999100_{-0.000004}^{+0.000004} \end{pmatrix}$$

### 三、W, Z中间玻色子的若干性质

标准模型（电弱统一理论）中有三个可以精确测量的参数：

a) 精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.03599911(46)}$$

这个值可以通过正负电子的反常磁矩、量子霍尔效应等试验测量。在电弱重正化方案中，可以定义跑动的耦合常数来反映对能标的依赖。在低能时，1/137是很好的近似，但当能标到0(100MeV)的量级时则有偏差，比如：

$$\hat{\alpha}(m_\tau)^{-1} = 133.445 \pm 0.017,$$

$$\hat{\alpha}(m_Z)^{-1} = 127.918 \pm 0.018$$

一般来说，可以将跑动耦合常数写成，

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha}{1 - \Delta r}$$

可以通过微扰论在特定的正规化方案中计算，当把能标推到M<sub>Z</sub>时，则需要Higgs粒子和top夸克的质量等。这会带来一定的不确定性。

b) 费米常数

$$G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$$

这个值是通过muon轻子的弱衰变过程得到的。

c) Z玻色子质量

$$m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{GeV}$$

现在的超高能正负电子对撞实验(LEP1)可以对Z粒子的质量测量到很高精度。

如果把这些实验结果作为输入，并且在Higgs质量( $m_H$ )和top夸克质量( $m_t$ )给定的前提下，则可以在标准模型框架中对Weinberg角、W粒子质量等进行高精度的计算。或者反过来，根据后者的实验结果并结果高精度的标准模型计算，则可以对Higgs粒子的质量等未知量进行限制。

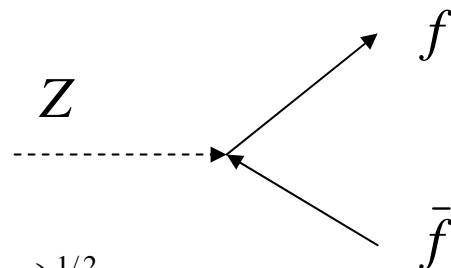


## 1. Z玻色子的宽度

从电弱统一理论的拉氏量可以看出，Z玻色子和所有的基本费米子的弱中性流耦合。通过这种耦合，Z粒子可以衰变到正反费米子对（除top夸克外）：

$$Z \rightarrow f + \bar{f}$$

这是一个二体衰变，通过场论计算可以得到其衰变到每一味费米子的分宽度：



$$\Gamma(Z \rightarrow f + \bar{f}) = \frac{\alpha m_Z}{12 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_Z^2}\right)^{1/2} \times N_c^f \left[ (g_V^f)^2 \left(1 + \frac{2m_f^2}{m_Z^2}\right) + (g_A^f)^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_Z^2}\right) \right]$$

对于中微子,  $N_c^f = 1$

对于轻子,  $N_c^f = (1 + \frac{3\alpha}{4\pi})$

对于夸克,  $N_c^f = 3(1 + \frac{\alpha_s(m_Z)}{\pi})$

显然，忽略费米子质量是很好的近似，并且Weinberg角可以用Z质量和费米常数定义，上面的公式可以近似为：

$$\Gamma(Z \rightarrow f + \bar{f}) = \frac{G_F m_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} N_c^f (g_V^2 + g_A^2) = \frac{G_F m_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} N_c^f (1 - 4|Q_f| \sin^2 \theta_W + 8Q_f^2 \sin^4 \theta_W)$$

通过比较试验的宽度和标准模型的理论预言可以检验标准模型的精确性。在考虑到高阶电磁、强辐射修正的结果后，理论给出Z宽度的预言和实验结果分别为

$$\Gamma_{th.}^Z = 2.4956 \pm 0.0007 \text{ GeV}$$

$$\Gamma_{exp.}^Z = 2.4952 \pm 0.0023 \text{ GeV}$$

特别地，对于中微子，有

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu + \bar{\nu}) = \frac{G_F m_Z^3}{12\sqrt{2}\pi}$$

上面的理论预言是假设只存在三代中微子的结果。由于每多一代中微子，将对  $Z$  的宽度贡献一个上面的值。实际上，所有中微子的分宽度可以通过正负电子湮灭的不可见宽度，对应于

$$e^+ + e^- \rightarrow Z \rightarrow \text{neutrinos}$$

来估算，并通过关系

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{neutrinos}) = \Gamma_Z - \Gamma_{l\bar{l}} - \Gamma_{\text{hadron}} = \frac{G_F m_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} N_\nu$$

来估算有几代中微子，目前实验给出  
(假设Higgs 和top夸克质量分别为117和172.7GeV)，

$$N_\nu = 2.984 \pm 0.009$$

## 2. Z玻色子的产生

Z 玻色子可以衰变到正负费米子，也可以通过正反费米子湮灭产生，比如下面过程

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

可以通过交换Z玻色子实现，也可以通过交换光子实现。通过对末态的不变质量分析，如果在  $\sqrt{s} \sim M_Z$  附近出现共振峰，则表示出现Z共振态，因为Z-玻色子对此过程截面的贡献可以计算出，

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \mu^+\mu^-) = 12\pi \frac{\Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-)\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_Z^2}$$

另外，Z 玻色子也可以通过高能质子、反质子散射产生。因为我们知道根据部分子模型，高能质子、反质子散射实际上是通过部分子——夸克、胶子进行的，Z 玻色子可以通过如下过程来产生：

$$q + \bar{q} \rightarrow Z \rightarrow X$$

有关理论公式可以在部分子模型理论框架下进行。

### 3. W玻色子的性质

W 玻色子的质量和宽度分别为

$$m_W = 80.450 \pm 0.058 \text{ GeV}, \Gamma_W = 2.138 \pm 0.044 \text{ GeV}$$

W 玻色子和费米子弱流相互作用，也可以衰变到费米子对，且分宽度为

$$\Gamma(W^+ \rightarrow l\nu_l) = \frac{G_F m_W^3}{6\sqrt{2}\pi} \approx 226.29 \pm 0.16 \text{ MeV}$$

$$\Gamma(W^+ \rightarrow q_1 \bar{q}_2) = \frac{N_c^q G_F m_W^3}{6\sqrt{2}\pi} |V_{ij}|^2 \approx (706.24 \pm 0.49) |V_{ij}|^2 \text{ MeV}$$

W 玻色子最早1983年在CERN的正反质子对撞机上看到其共振结构。

$$u + \bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, e^+ + \nu_e, \dots$$

## 四、Higgs粒子

### 1. Higgs粒子的衰变

根据电弱统一理论拉氏量，Higgs粒子可以衰变到W, Z和正反费米子：

$$H \rightarrow W^+W^-, ZZ, f\bar{f}$$

考虑拉氏量中的耦合项：

$$L_{Hf\bar{f}} = 2^{1/4} G_F^{1/2} m_f \bar{f}f H,$$

$$L_{HWW, HZZ} = 2^{5/4} G_F^{1/2} m_W^2 W_\mu^+ W^{-, \mu} H + 2^{1/4} G_F^{1/2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu H$$

在树图水平上分宽度分别为：

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_c^f G_F m_H m_f^2}{4\sqrt{2}\pi} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2},$$

$$\Gamma(H \rightarrow W^+W^-) = \frac{G_F m_H^3}{8\sqrt{2}\pi} \left(1 - 4 \frac{m_W^2}{m_H^2} + 12 \frac{m_W^4}{m_H^4}\right) \left(1 - 4 \frac{m_W^2}{m_H^2}\right)^{1/2},$$

$$\Gamma(H \rightarrow ZZ) = \frac{G_F m_H^3}{16\sqrt{2}\pi} \left(1 - 4 \frac{m_Z^2}{m_H^2} + 12 \frac{m_Z^4}{m_H^4}\right) \left(1 - 4 \frac{m_Z^2}{m_H^2}\right)^{1/2}$$

由此可以看出：

- a) Higgs粒子主要衰变到最重的费米子和中间玻色子。
- b) Higgs粒子衰变到费米子的分宽度和Higgs粒子质量的比近似为一个常数，这是Higgs粒子的一个特性。
- c) 如果Higgs粒子质量很重（远重于W, Z粒子），则Higgs粒子衰变到W, Z的分宽度将与Higgs质量立方成正比，么正性要求Higgs粒子的质量有个上限。作为粒子，一般要求其宽度不应该比它的质量大，由于

$$\Gamma_H \approx \Gamma(H \rightarrow WW) + \Gamma(H \rightarrow ZZ) \approx \frac{3G_F m_H^3}{16\sqrt{2}\pi}$$

则，

$$m_H > \Gamma_H \Rightarrow m_H < 1000 \text{ GeV}$$

## 2. 实验上对Higgs粒子的寻找

CERN的LEP实验给出了Higgs质量的下限： $m_H > 114 \text{ GeV}$

CERN在建的LHC可以在  $m_H < 1000 \text{ GeV}$  寻找Higgs粒子。