第二节　夸克模型

1964年，Gell-Mann和Zweig分别提出了强子结构模型——夸克模型：强子是由三种更基本的粒子构成的，Gell-Mann将它们称作夸克(quark)，Zweig则称之为aces.逐渐地，人们认识到强子是有结构的，人们进入了更深层次的物质结构的研究。

一、u，d，s夸克——SU(3)对称性

1. 强子的成功SU(3)分类使人们提出夸克模型

a) 坂田模型可以成功地解释介子的SU(3)分类，但解释重子分类遇到困难，根源是由于重子数守恒，重子必须由两个坂田子和一个反坂田子组成。

b) 八正法对介子和重子的分类都很成功，但它的假设是重子和介子都是SU(3)的八重态或由八重态直乘分解得到。但八重态并不是SU(3)群的基础表示。

c) 一个合理的假设是：SU(3)群的基础表示 和其共轭表示也都有粒子填充（但不是坂田子）。根据坂田模型的成功经验，这些粒子都应该是费米子。

d) 根据SU(3)群的直乘分解，

$$\underline{3}\otimes\underline{3}^{*}\rightarrow\underline{1}\oplus\underline{8}$$

$$\underline{3}\otimes\underline{3}\otimes\underline{3}\rightarrow\underline{1}\oplus\underline{8}\oplus\underline{8}\oplus\underline{10}$$

介子八重态、重子八重态和十重态都可以通过基础表示和其共轭表示的上述直乘分解得到，而且不出现27重态。这同时解决了坂田模型和八正法的困难。我们还可以得出结论：介子由正反夸克组成；重子由三个夸克组成；重子数守恒说明夸克的重子数为1/3。

e) 如果把填充基础表示的粒子称作夸克，分别记为u，d，s（up，down，strange的首字母）；则填充基础表示的共轭表示的粒子是相应的反夸克。它们的同位旋和超荷量子数已在上一节给出。如果Gell-Mann-西岛关系对夸克也成立，还可以推出夸克的电荷分别为2/3，-1/3，-1/3（分数电荷）。这样，属于SU(3)基础表示的夸克及其反粒子的量子数就确定下来了，见下表：

	J	Q	I	I_3	Y	S	b
u	$1/2$	$2/3$	$1/2$	$1/2$	$1/3$	0	$1/3$
d	$1/2$	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	$1/3$	0	$1/3$
s	$1/2$	$-1/3$	0	0	$-2/3$	-1	$1/3$
$\bar{u}$	$1/2$	$-2/3$	$1/2$	$-1/2$	$-1/3$	0	$-1/3$
$\bar{d}$	$1/2$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	$-1/3$	0	$-1/3$
$\bar{s}$	$1/2$	$1/3$	0	0	$2/3$	1	$-1/3$

2. 介子和重子的夸克成分

a) SU(3)群不可约表示的张量表示

基础表示

$$\phi \equiv \phi^i = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \qquad \boxed{\phi'^i = S^i{}_j \phi^j}$$

则其共轭表示为

$$\phi^+ = \phi_i = (q_1, q_2, q_3) = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) \qquad \boxed{\phi'_i = \phi_j (S^+)^j{}_i}$$

由 ϕ^i 和 ϕ_i 可以生成(m, n)阶张量，

$$\boxed{T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \phi^{i_1} \phi^{i_2} \cdots \phi^{i_m} \phi_{j_1} \phi_{j_2} \cdots \phi_{j_n}}$$

其每一个上指标都按照基础表示变换，下指标都按照基础表示的共轭表示变换。例如

$$T'^i{}_{jk} = S^i{}_{i'} T^{i'}{}_{j'k'} (S^+)^{j'}{}_j (S^+)^{k'}{}_k ,$$

$$T'^{ij}{}_k = S^i{}_{i'} S^j{}_{j'} T^{i'j'}{}_{k'} (S^+)^{k'}{}_k$$

对于SU(3)群，存在三个不变张量，

Kronecker符号：
$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita符号：
$$\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{i,j,k是1，2，3的偶置换} \\ -1 & \text{i,j,k是1，2，3的偶置换} \\ 0 & \text{i,j,k有重复指标} \end{cases}$$

$$\delta'^i{}_j = S^i{}_{i'}\delta^{i'}{}_{j'}(S^+)^{j'}{}_j = S^i{}_{i'}(S^+)^{i'}{}_j = (SS^+)^i{}_j = \delta^i{}_j \qquad (SS^+ = I)$$

$$\varepsilon^{ijk}S^{i'}{}_i S^{j'}{}_j S^{k'}{}_k = \varepsilon^{i'j'k'} \qquad (\det S = 1)$$

可以证明：
$$\theta_i = \varepsilon_{ijk}\phi^j\phi^k$$

按照基础表示的共轭表示变换。

- 任意一个(m, n)阶张量都可以通过Kronecker符号和Levi-Civita符号约化为低阶张量

$$\delta^{i_a}{}_{j_b} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (a = 1,2,\cdots m; b = 1,2,\cdots n)$$ **((m-1,n-1)阶)**

$$\varepsilon^{i_{m+1} j_b j_c} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (b, c = 1,2,\cdots, n)$$ **((m+1,n-2)阶)**

$$\varepsilon_{j_{n+1} i_b i_c} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (b, c = 1,2,\cdots m)$$ **((m-2,n+1)阶)**

- 不可约张量: 所有的上指标全对称，所有的下指标全对称，任意一个上指标和下指标的矩阵迹为零。

- 任意一个张量都可以表示成为不可约张量的线性组合。

- SU(3) 群的每一个不可约表示都可以用一个不可约张量表示，不可约表示的维数就是不可约张量独立分量的个数。常见的不可约表示的不可约张量表示如下表。

表示	维数	不可约张量
$D(0,0)$	$\underline{1}$	S
$D(1,0)$	$\underline{3}$	$\overline{T}^{i}$
$D(0,1)$	$\underline{3^*}$	$\overline{T}_{i}$
$D(1,1)$	$\underline{8}$	$\overline{T}^{i}{}_{j}$
$D(2,0)$	$\underline{6}$	$\overline{T}^{ij}$
$D(0,2)$	$\underline{6}^*$	$\overline{T}_{ij}$
$D(3,0)$	$\underline{10}$	$\overline{T}^{ijk}$
$D(0,3)$	$\underline{10}^*$	$\overline{T}_{ijk}$
$D(2,1)$	$\underline{15}$	$\overline{T}^{ij}{}_{k}$
$D(1,2)$	$\underline{15}^*$	$\overline{T}^{i}{}_{jk}$

b) 介子的夸克成分（正反夸克系统 $\underline{3}\otimes\underline{3}^{*}=\underline{1}\oplus\underline{8}$ ）

- 根据夸克模型，介子由一对正反夸克组成。
- 正反夸克系统可以用一个 (1, 1) 阶张量表示:

$$T=[T^{i}{}_{j}]=[\phi^{i}\phi_{j}]=\begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & d\bar{d} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & s\bar{s} \end{pmatrix}$$

但是，这个张量是可约化的，

$$T^{i}{}_{j}=\frac{1}{3}\delta^{i}{}_{j}T^{k}{}_{k}+(T^{i}{}_{j}-\frac{1}{3}\delta^{i}{}_{j}T^{k}{}_{k})\equiv\frac{1}{3}\delta^{i}{}_{j}T^{k}{}_{k}+\bar{T}^{i}{}_{j}$$

令

$$\boxed{S=\frac{1}{\sqrt{3}}T^{k}{}_{k}=\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})}$$

$$M=[\bar{T}^{i}{}_{j}]=T-\frac{1}{\sqrt{3}}S=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2u\bar{u}-d\bar{d}-s\bar{s}) & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & \frac{1}{3}(-u\bar{u}+2d\bar{d}-s\bar{s}) & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{1}{3}(-u\bar{u}-d\bar{d}+2s\bar{s}) \end{pmatrix}$$

则，

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{3}} S + M \Leftrightarrow \underline{3} \otimes \underline{3}^* = \underline{1} \oplus \underline{8}}$$

- 不可约张量S和M的各分量的量子数如下，

$$(I_3, Y, Q)(S) = (0,0,0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

$$(I_3, Y, Q)(M) = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (1,0,1) & (\frac{1}{2},1,1) \\ (-1,0,-1) & (0,0,0) & (-\frac{1}{2},1,0) \\ (-\frac{1}{2},-1,-1) & (\frac{1}{2},-1,0) & (0,0,0) \end{pmatrix}$$

(I_3, Y, Q)	夸克组分	(I_3, Y, Q)	夸克组分
$(0,0,0)$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$(1/2,1,1)$ $(-1/2,1,0)$	$u\bar{s}$ $d\bar{s}$
$(1,0,1)$	$u\bar{d}$	$(1/2,-1,0)$	$s\bar{d}$
$(-1,0,-1)$	$d\bar{u}$	$(-1/2,-1,-1)$	$s\bar{u}$

- (0, 0, 0) 分量包含I=1和I=0的贡献。根据无迹条件，

$$\bar{T}^1{}_1 + \bar{T}^2{}_2 + \bar{T}^3{}_3 = 0$$

这三个分量中只有两个是线性独立的。考虑到介子之同位旋变换的本征态，而且已经是同位旋为零的本征态，因此我们选两个独立的分量为，

$$\boxed{\begin{aligned} I=1 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1{}_1 - T^2{}_2) \equiv T_{10}, \\ I=0 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{6}} T^3{}_3 \equiv -T_{00} \end{aligned}}$$

于是有，

$$\bar{T}^1{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} T_{00}$$

$$\bar{T}^2{}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} T_{00}$$

$$\bar{T}^3{}_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}} T_{00}$$

****许多轻介子可以按照相同的宇称自旋分别填入SU(3)的八重态:

(I,Y)	(I_3,Y,Q)	夸克组分	$J^P=0^-$	1^-	$\cdots$
$(1,0)$	$(1,0,1)$	$u\bar{d}$	π^+	ρ^+	$\cdots$
	$(0,0,0)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}-d\bar{d})$	π^0	ρ^0	
	$(-1,0,-1)$	$d\bar{u}$	π^-	ρ^-	
$(\frac{1}{2},1)$	$(\frac{1}{2},1,1)$	$u\bar{s}$	K^+	K^{*+}	$\cdots$
	$(-\frac{1}{2},1,0)$	$d\bar{s}$	K^0	K^{*0}	
$(\frac{1}{2},-1)$	$(\frac{1}{2},-1,0)$	$s\bar{d}$	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{*0}$	$\cdots$
	$(-\frac{1}{2},-1,-1)$	$s\bar{u}$	K^-	K^{*-}	
$(0,0)$	$(0,0,0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$	η_8	ω	$\cdots$

- 赝标量介子和矢量介子八重态的矩阵表示:

$$M(0^-)=\begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}$$

$$M(1^-)=\begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\omega \end{pmatrix}$$

- 不同自旋宇称的介子八重态夸克组分相同，但夸克间的空间和自旋状态不同。

c) 重子的夸克成分（三夸克系统 $\underline{3}\otimes\underline{3}\otimes\underline{3}=\underline{1}\oplus\underline{8}\oplus\underline{8}\oplus\underline{10}$ ）

- 夸克的重子数为1/3，三个夸克构成一个重子。三夸克构成一个(3, 0)阶张量，

$$\boxed{T^{ijk}=q^i q^j q^k}$$

- 它有27个分量，可以按两步约化成不可约张量的和:

$$\underline{3}\otimes\underline{3}\otimes\underline{3}=(\underline{3}^*\oplus\underline{6})\otimes\underline{3}=\underline{1}\oplus\underline{8}\oplus\underline{8}\oplus\underline{10}$$

第一步，

$$q^i q^j=\frac{1}{2}\left(q^i q^j+q^j q^i\right)+\frac{1}{2}\left(q^i q^j-q^j q^i\right)\equiv\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\theta_k+\frac{1}{2}S^{ij}$$

其中，

$$\theta_k=\varepsilon_{kmn}q^m q^n,\qquad S^{ij}=q^i q^j+q^j q^i$$

这里利用了关系:

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{kmn}=\delta^i{}_m\delta^j{}_n-\delta^i{}_n\delta^j{}_m$$

第二步，

$$\underline{3}^*\otimes\underline{3}=\underline{1}\oplus\underline{8} \Rightarrow \theta_i q^k=\frac{1}{3}\delta^k{}_i(\theta_m q^m)+\left[\theta_i q^k-\frac{1}{3}\delta^k{}_i(\theta_m q^m)\right]$$

$$\underline{6}\otimes\underline{3}=\underline{8}\oplus\underline{10} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S^{ij}q^k=\dfrac{1}{3}\left(\varepsilon^{ikm}S^{jn}+\varepsilon^{jkm}S^{in}\right)q^l\varepsilon_{nlm} \\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{3}\left(S^{ij}q^k+S^{jk}q^i+S^{ki}q^j\right) \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} q^i q^j q^k &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ijm}\theta_m q^k+\frac{1}{2}S^{ij}q^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon^{ijk}S+\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ijm}B^k{}_m+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\varepsilon^{ikm}N^j{}_m+\varepsilon^{jkm}N^i{}_m\right)+D^{ijk} \end{aligned}$$

其中，

$$S=\frac{1}{\sqrt{6}}\theta_m q^m, \qquad B^i{}_j=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\theta_j q^i-\frac{1}{3}\delta^i{}_j\theta_m q^m\right],$$

$$D^{ijk}=\frac{1}{6}\left(S^{ij}q^k+S^{jk}q^i+S^{ki}q^j\right) \qquad N^i{}_j=\frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{jmn}S^{im}q^n,$$

以上四个不可约张量也给出了重子的多个超多重态的味道波函数（注意，在这四个张量中，夸克的顺序是有物理意义的，它们和不同夸克的坐标和运动学变量有关）

i）重子八重态的味道波函数：

(I, I_3, Y, Q)	$N^i{}_j$	$B^i{}_j$	重子
$(1/2, 1/2, 1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$	$p(uud)$
$(1/2, -1/2, 1, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd + dud - 2ddu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$	$n(udd)$
$(1, 1, 0, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2uus + usu - suu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(usu - suu)$	$\Sigma^+(uus)$
$(1, 0, 0, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds + 2dus - usd - dsu - sud - sdu)$	$\frac{1}{2}(dsu + usd - sud - sdu)$	$\Sigma^0(uds)$
$(1, -1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2dds - dsd - sdd)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dsd - sdd)$	$\Sigma^-(dds)$
$(1/2, 1/2, -1, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uss + sus - 2ssu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(uss - sus)$	$\Xi^0(uss)$
$(1/2, -1/2, -1, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dss + sds - 2ssd)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(dss - sds)$	$\Xi^-(dss)$
$(0, 0, 0, 0)$	$\frac{1}{2}(usd + sud - dsu - sdu)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(sdu - sud + usd - dsu - 2dus + 2uds)$	$\Lambda(uds)$

八重态 $N^i{}_j$ 和 $B^i{}_j$ 在SU(3)变换下是不可分辨的。它们的区别在于三个夸克的交换性质上：前者对于前两个夸克交换是对称的，后者是反对称的。至于那个表示对应于物理上的重子态，是需要其它信息和假设的。

$N^i{}_j$ 和 $B^i{}_j$ 都是混合对称的。

重子八重态的矩阵表示为，

$$B(\frac{1}{2}^+) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ -\Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}$$

其中，Ξ^- 前的负号来自于同位旋子群升降操作的特定约定。

ii）重子十重态的味道波函数:

(I,I_3,Y,Q)	D^{ijk}	重子
$(3/2,3/2,1,2)$	(uuu)	$\Delta^{++}(uuu)$
$(3/2,1/2,1,1)$	$(uud+udu+duu)/\sqrt{3}$	$\Delta^{+}(uud)$
$(3/2,-1/2,1,0)$	$(udd+dud+ddu)/\sqrt{3}$	$\Delta^{0}(udd)$
$(3/2,-3/2,1,-1)$	(ddd)	$\Delta^{-}(ddd)$
$(1,1,0,1)$	$(uus+usu+suu)/\sqrt{3}$	$\Sigma^{*+}(uus)$
$(1,0,0,0)$	$(uds+usd+dus+dsu+sud+sdu)/\sqrt{6}$	$\Sigma^{*0}(uds)$
$(1,-1,0,-1)$	$(uss+sus+ssu)/\sqrt{3}$	$\Sigma^{*-}(dds)$
$(1/2,1/2,-1,0)$	$(uss+sus+ssu)/\sqrt{3}$	$\Xi^{*0}(uss)$
$(1/2,-1/2,-1,-1)$	$(dss+sds+ssd)/\sqrt{3}$	$\Xi^{*-}(dss)$
$(0,0,-2,-1)$	(sss)	$\Omega^{-}(sss)$

！！！！！重子十重态的味道波函数是全对称的。

二、SU(3)整体味道对称性的破缺——强子质量分裂公式和强子混合

1. Gell-Mann-大久保质量分裂公式(Gell-Mann-Okubo formula)

在粒子物理中关于整体对称性的研究中，常常遇到对称性破缺的问题，比如强子的整体味道SU(3) 对称性。一般我们认为，强相互作用满足味道SU(3)对称性，但从实验来看，SU(3)群的 $SU(2)\otimes U(1)$ 子群的对称性很好满足，反映为同位旋和奇异数守恒，然而SU(3) 对称性不是很好的满足，比如同一强子超多重态的中的不同同位旋多重态之间的质量有明显的差别：

	$I=1$			$I=1/2$		$I=1/2$		$I=0$
$J^P=0^-$	π^+	π^0	π^-	K^+	K^0	$\overline{K}^0$	K^-	η_8
M(MeV)	**139.6**	**135.0**	**139.6**	**493.7**	**497.6**	**497.6**	**493.7**	**547.5**
$J^P=1^-$	ρ^+	ρ^0	ρ^-	K^{*+}	K^{*0}	$\overline{K}^{*0}$	K^{*-}	ω
M(MeV)	**775.5**			**891.7**	**896.0**	**896.0**	**891.7**	**782.7**
$J^P=\frac{1}{2}^+$	Σ^+	Σ^0	Σ^-	p	n	Ξ^0	Ξ^-	Λ
M(MeV)	**1189.4**	**1192.6**	**1197.4**	**938.3**	**939.6**	**1314.8**	**1321.3**	**1115.7**

	$I=3/2$				$I=1$			$I=1/2$		$I=0$
$(3/2)^+$	Δ^{++}	Δ^{+}	Δ^{0}	Δ^{-}	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}	Ω^{-}
M(MeV)	**1232**	**1232**	**1233**	**1232**	**1383**	**1384**	**1387**	**1532**	**1535**	**1672**

考虑味道对称性破缺的最重要结果是关于质量的讨论，它也可以看作处理整体对称性破缺的典型例子。

由以上的表格看出，同一同位旋多重态中不同带电态的质量差很小，可以归结为电磁相互作用性质不同的效应(u夸克和d夸克有很小的质量差），而不同的同位旋多重态之间有较大的质量差别，则可能来源于总同位旋不同和超荷数不同造成的。

因此，理论上认为，拉氏量总体是SU(3)不变的，但有少许的SU(3)破缺项，这个破缺项应该能够反映第三维和前两维的差别，它在SU(3)变换下不是不变的，但应该是 $SU(2)\otimes U(1)$ 变换的标量。

从场论角度来看，拉氏量中的

a) 玻色子（介子）质量项为，$\Phi^+ M\Phi$ ，Φ 为介子场量的列向量，量纲为1;

b) 费米子（重子）质量项为，$\overline{\Psi}M\Psi$ ，Ψ为重子场量的列向量，两纲为3/2;

M为质量（矩阵）。

如果SU(3)对称性严格成立，对于同一个超多重态，M为一个常数乘以该表示的单位矩阵，

$$M = aI$$

如果对称性破缺，则有破缺项。

$$M = AI + V(R)$$

根据前面的讨论，这个破缺项在 $SU(2)\otimes U(1)$ 变换下不变，

$$[V, T_i] = 0 (i = 1,2,3), \qquad [V(R), T_8] = 0$$

这里，T_i 为SU(3)生成元在该表示中的表示矩阵。

在生成元构成的一阶算符中，只有 T_8 满足上述条件;
在生成元构成的二阶算符中，有三个算符满足上述条件，

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2,$$

$$I_8^2 = \frac{3}{4} Y^2$$

$$T_4^2 + T_5^2 + T_6^2 + T_7^2 \equiv C_2 - T^2 - T_8^2$$

显然第三个算符总可以用前两个表示（Casimir算子是SU(3)不变的，可以并入常数项）

（*****更加细致的群论讨论给出，最低阶质量分裂公式只需要两个独立的项）

所以V（R）可以取作

$$V(R) = B(T^2 + \eta Y^2) + CY$$

对于一个以超多重态为基张成的表示空间，V(R)是对角化的，即其对角元为相应的基 $|II_3Y\rangle$（粒子态）的相应本征值，

$$V(R)|II_3Y\rangle = (B(I(I+1) + \eta Y^2) + CY)|II_3Y\rangle$$

群论给出， $\eta = -\dfrac{1}{4}$ 。这样，我们得到SU(3)破缺的一级质量分裂公式:

(Gell-Mann-Okubo mass formula)

$$M(I,Y) = A + B\left[I(I+1) - \frac{1}{4}Y^2\right] + CY$$

说明:

1）对于同一个表示，A,B,C取相同的值;

2）对于重子多重态，由于重子和反重子属于不同的表示，所以C不为零;

3）对于介子多重态，介子和其反粒子属于同一个表示，正反粒子质量相等要求C=0。

4）对于介子，M是质量平方；对于重子，M是质量。

2. Gell-Mann-大久保质量分裂公式的应用

a. 重子八重态

$$\left.\begin{aligned}
M(N) &= M(\tfrac{1}{2},1) = A + \tfrac{1}{2}B + C,\\
M(\Sigma) &= M(1,0) = A + 2B,\\
M(\Xi) &= M(\tfrac{1}{2},-1) = A + \tfrac{1}{2}B - C\\
M(\Lambda) &= M(0,0) = A
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{2M_N + 2M_\Xi = 3M_\Lambda + M_\Sigma}$$

实验值:

$$L.H.S = 4514\,MeV$$

$$R.H.S = 4540.2\,MeV$$

相对偏差为6‰!

b. 重子十重态

$$M(\Omega) - M(\Xi^*) = M(\Xi^*) - M(\Sigma^*) = M(\Sigma^*) - M(\Delta) = -\frac{3}{2}B - C$$

实验值:

$$m_{\Sigma^*} - m_\Delta \approx 153\,MeV,$$

$$m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \approx 145\,MeV,$$

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} \approx 142\,MeV$$

c) 赝标介子八重态 $J^P=0^-$

$$\left.\begin{aligned}
M(K)&=M(\tfrac{1}{2},1)=A+\tfrac{1}{2}B\\
M(\pi)&=M(1,0)=A+2B,\\
M(\overline{K})&=M(\tfrac{1}{2},-1)=A+\tfrac{1}{2}B\\
M(\eta)&=M(0,0)=A
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{4m_K^2=3m_{\eta_8}^2+m_\pi^2}$$

实验值(如果试验观察到的 η 粒子就是八维表示的I=0，Y=0 态)，则:

$$L.H.S=0.983\,MeV^2$$
$$R.H.S=0.923\,MeV^2$$

相对偏差为**6%**!

d) 矢量介子八重态 $J^P=1^-$

$$\boxed{4m_{K^*}^2=3m_{\omega_8}^2+m_\rho^2}$$

实验值（将 ϕ 粒子的质量作为 ω_8 的质量）:

$$L.H.S=3.18\,MeV^2$$
$$R.H.S=3.71\,MeV^2$$

相对偏差为**17%**!

3. 介子的SU(3)八重态和SU(3)单态的混合

Gell-Mann-Okubo公式对重子超多重态符合得相当好,但对介子超多重态则有较大的偏差,其原因可以用SU(3)单态和八重态的混合解释.

正反u，d，s夸克构成的系统可以按照SU(3)表示的直乘分解分为一个单态（I=0，Y=0）和一个八重态（其中也包含一个I=0，Y=0的态）。实验上发现的 0^- 和 1^- 介子分别有九个，各包含两个I=0，Y=0的粒子（0^- 为 η,η' ，1^- 中为 ω,ϕ。那么它们到底哪个属于单态，哪个属于八重态呢？将它们的质量带入Gell-Mann-大久保公式发现都符合得不好。实际上，它们是单态和八重态的混合。

从理论上考虑，既然味道SU(3)对称性的破缺反映在质量上是在质量中有按照八维表示变换的部分，它也导致一维表示和八维表示之间跃迁质量项的出现，这项的出现使两个I=0,Y=0的介子的质量平方要用一个2x2矩阵描写。

$$\begin{pmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix}$$

物理上观察到的是这个质量平方矩阵的本征态，即质量本征态。 m_8^2 的值可以通过Gell-Mann-Okubo公式通过其它粒子的值算出， m_1^2 和 m_{18}^2 则是未知的量，需要通过混合态的值来推算。

以赝标介子为例。粒子物理中常用一个3x3矩阵来表示统一介子的八维表示和一维表示，

$$M(0^-)=\begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}}+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}}+\frac{\eta_8}{\sqrt{6}}+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8+\frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

味道SU(3)对称的质量项可以表为，

$$\frac{1}{2}m^2Tr(MM)$$

这时，九个粒子的质量相同，都是m。如果有对称性破缺，根据前面的讨论，质量破缺项可以写作，

$$\boxed{-\sqrt{3}\delta Tr(M\lambda_8 M)}$$

这样，介子的质量平方为，

$$m_\pi^2=m^2-2\delta, \qquad m_K^2=m^2+\delta,$$

$$m_8^2=m^2+2\delta, \qquad m_1^2=m^2.$$

混合项为，

$$m_{18}^2 = 2\sqrt{2}\delta$$

$$\begin{pmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 2\delta & 2\sqrt{2}\delta \\ 2\sqrt{2}\delta & m^2 \end{pmatrix}$$

对角化后有，

$$m_\eta^2 = m^2 - 2\delta, m_{\eta'}^2 = m^2 + 4\delta$$

这是理想混合的情况（单态和八重态的质量参数相同）。如果不同，则会使混合偏离理想混合。

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

$$\tan^2\theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K{}^2 + m_\pi^2}{4m_K{}^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2}$$

将实验值代入上式，得到

$$\tan^2\theta = 0.0352 \Rightarrow \theta \approx -11^\circ$$

这说明，η_1 和 η_8 混合比较小。

注：混合角的确定

在 $\eta_1-\eta_8$ 空间，应该有，

$$\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_8^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1 \\ \eta_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta' & \eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{\eta'}^2 & 0 \\ 0 & m_\eta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta' \\ \eta\end{pmatrix}$$

即

$$m_1^2\eta_1{}^2+m_8^2\eta_8{}^2-2m_{18}^2\eta_1\eta_8=m_\eta{}^2\eta^2+m_{\eta'}{}^2\eta'^2$$

将

$$\begin{cases}\eta_8=\eta\cos\theta+\eta'\sin\theta \\ \eta_1=-\eta\sin\theta+\eta'\cos\theta\end{cases}$$

代入上式得到:

$$m_\eta^2=m_1^2\sin^2\theta+m_8^2\cos^2\theta-2m_{18}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$m_{\eta'}^2=m_1^2\cos^2\theta+m_8^2\sin^2\theta+2m_{18}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$0=(m_8^2-m_1^2)\cos\theta\sin\theta+m_{18}^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

由此得到，

$$\tan^2\theta = \frac{m_\eta^2 - m_8{}^2}{m_8{}^2 - m_{\eta'}^2}$$

$$m_1^2 = m_\eta{}^2 + m_{\eta'}{}^2 - m_8{}^2,$$

$$\left(m_{18}{}^2\right) = \frac{1}{9}\left[\left(m_8{}^2 - m_{\eta'}^2\right)\left(m_\eta^2 - m_8{}^2\right)\right]$$

利用Gell-Mann-大久保公式 $\boxed{3m_8^2 = 4m_K^2 - m_\pi^2}$ ， 有

$$\tan^2\theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K{}^2 + m_\pi^2}{4m_K{}^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2}$$

同时，质量混合矩阵的其它各元素也可以通过实验的粒子质量确定。

对于矢量介子，$\begin{pmatrix}\phi\\ \omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_8\\ \omega_1\end{pmatrix}$

$$\tan^2\theta=\frac{3m_\phi^2-4m_{K^*}{}^2+m_\rho^2}{4m_{K^*}{}^2-m_\rho^2-3m_\omega^2}=0.708\Rightarrow\theta\approx 39^\circ$$

这说明，对于矢量介子，单态和八重态的I=0，Y=0态有明显的混合。为了说明这个很大混合的意义，我们以理想混合作为近似来讨论。

如果理想混合，取 $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$， $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\theta=\sqrt{\frac{2}{3}},\theta=35.3^\circ$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\phi=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}\omega_8-\omega_1\right)=-s\bar{s}\\ \omega=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\omega_8+\sqrt{2}\omega_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u}+d\bar{d}\right)\end{cases}$$

在理想混合情形，ϕ 纯粹由奇异夸克组成，ω 则不含奇异夸克成分。这可以定性地解释为什么ω的质量和 ρ 很接近，而 ϕ 要重得多。
如果将实际的混合角带入，则发现ϕ 主要是 $s\bar{s}$ ，ω 主要是 $u\bar{u}$ 和 $d\bar{d}$

4. ω和ϕ的衰变和OZI规则

60年代在研究短寿命介子时遇到了一个不好理解的问题:

实验上的事实:

a) ω和ϕ具有相同的量子数: $I^G J^{PC} = 0^- 1^{--}$

b) 它们的质量和宽度分别为

$$m_\omega = 782.65 \pm 0.12 MeV, \quad \Gamma_\omega = 8.49 \pm 0.08 MeV,$$

$$m_\phi = 1019.46 \pm 0.02 MeV, \quad \Gamma_\phi = 4.26 \pm 0.05 MeV,$$

c) 它们的主衰变道分别为:

$$\omega: \quad \omega \to \pi^+ \pi^- \pi^0 \qquad \Gamma_i / \Gamma = (89.1 \pm 0.7)\%$$

$$\phi: \quad \phi \to K^+ K^- \qquad \Gamma_i / \Gamma = (49.2 \pm 0.6)\%$$

$$\phi \to K_L^0 K_S^0 \qquad \Gamma_i / \Gamma = (34.0 \pm 0.5)\%$$

$$\phi \to \rho\pi + \pi^+ \pi^- \pi^0 \qquad \Gamma_i / \Gamma = (15.3 \pm 0.4)\%$$

理论上的困难:

从理论上讲，

a） ω和ϕ的量子数相同，因此他们的强相互作用性质应该相似;

b） 根据强相互作用的守恒定律，他们应该主要衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态;

c） ϕ的质量大于 ω 的质量，因此应该有较大的宽度，因为前者比后者相空间大;

d） 而且ϕ在 $K\bar{K}$ 的阈上$(m_\phi > 2m_K)$，因此可以衰变到 $K\bar{K}$，这个衰变道对ϕ的宽度有贡献;

但从实验数据来看，

a) ω的宽度反而比 ϕ 大很多;

b） ω的衰变以 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态为主，这和理论预期一致；但ϕ主要衰变到 $K\bar{K}$ 末态，$\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态被严重压低。

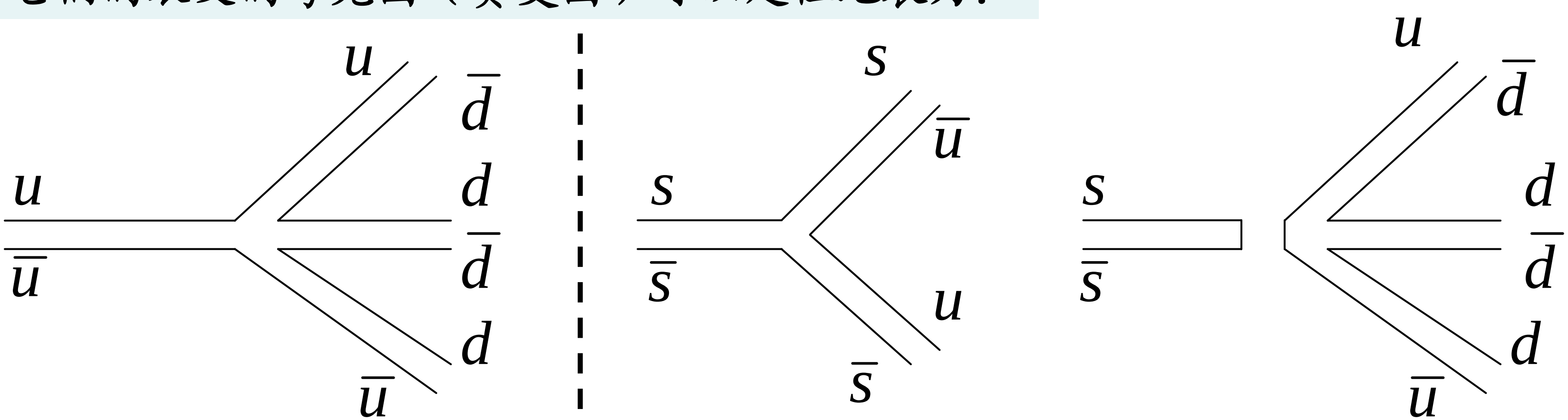
为了解释这个问题以及类似的现象，Okubo(1963)，Zweig(1964)和Iizuka(1966)分别独立地提出了一个机制——**Okubo-Zweig-Iizuka规则(OZI rule):**

强过程中，只能通过夸克湮灭得到末态的过程将被压低。

具体到ω和φ的衰变，我们已经知道它们是味道SU(3)对称性的单态和八重态混合后的质量本征态，而这种混合接近理想混合，混合的结果是，φ（几乎）只有奇异夸克成分，而ω（几乎）只有u,d夸克成分:

$$\phi = s\bar{s}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u} + d\bar{d}\right)$$

它们的衰变的夸克图（费曼图）可以定性地表为:



$\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$ $\quad$ $\phi \to K^+K^-$ $\quad$ $\phi \to \pi^+\pi^-\pi^0$

因此,OZI规则又可以形象地表述为：在强子衰变或反应过程中,如果价夸克 的Feynman图断成互不相连的两部分，则过程的概率被大大压低。这种被压低的过程称为OZI禁戒过程.OZI规则在解释重夸克偶素的窄宽度性质上起了很大的作用.