

第五节 部分子模型和量子色动力学

在前面几节里，我们介绍了强子的分类，并引入了夸克的概念。夸克模型认为夸克是构成强子的基本粒子，并在非相对论情形下对强子的夸克组成给予对称性的描述。但简单的夸克模型对强子内部夸克的动力学性质不能很清楚地描述。

上世纪六十年代末期，高能电子和中微子对核子的散射实验揭开了研究核子内部结构的新篇章。这类试验称为**轻子——核子的深度非弹性散射实验** (deep inelastic scattering, 简称为DIS)。在DIS 实验中人们发现，**出现大能量和大动量转移的过程的几率很高**。这种大能量和大动量转移的过程暗示了这样一个事实：**质子内部有定域的散射中心**。这和Rutherford通过alpha 粒子对原子核的大角度散射实验现象而提出原子的核式结构十分类似。

DIS的这种现象促使人们提出关于核子的部分子模型 (parton model, Feymann 1969, 1972; Bjorken 1969; Drell 1971; Landshoff 1971; 等等): **核子是由点状(point-like)的部分子(parton) 组成; 部分子在DIS过程中是近似自由的**。人们进一步对DIS 实验数据的分析得出结论: 这些点状的部分子具有和夸克模型中夸克相同的量子数, 如自旋、电荷、味道(同位旋)等。除了带电的部分子, 实验数据和理论分析还表明除了带电的部分子——夸克之外, 还存在中性的部分子——即量子色动力学中的胶子。

但是实验上没有观察到自由的部分子, 那么一个自然的问题就是, 这些部分子是怎样束缚在强子中的, 或者说, 部分子之间相互作用的动力学机制什么? 后来提出的**量子色动力学(QCD)**回答了这个问题。

一、轻子——核子弹性、非弹性碰撞的一般结论

实验室系中，高能电子与静止的靶粒子——核子散射，

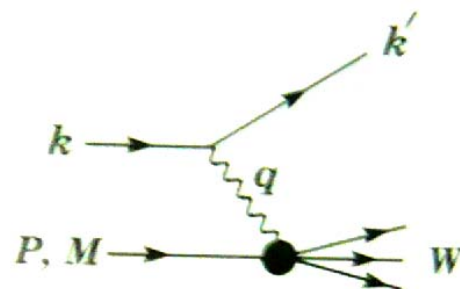
$$p = (M, \vec{0}), \quad k = (E, \vec{k}), \quad k' = (E', \vec{k}'), \quad q = k - k'$$

几个常用运动学变量（如果忽略电子质量）：

$$q^2 = (k - k')^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0, \quad Q^2 = -q^2$$

$$\nu = p \cdot q / M = E - E',$$

$$W^2 = (p + q)^2.$$



核子的电磁流

$$J_\mu \sim \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma_\mu + \kappa \frac{F_2(q^2)}{2M} i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p)$$

其中 $F_1(0) = F_2(0) = 1$ ， κ 是反常磁矩（单位为核子磁子）。

1. 电子——核子弹性散射

通过场论计算，可以得到弹性散射的微分截面：

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2)G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} \right] + \frac{Q^2 G_M^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

G_E 和 G_M 分别是核子的电、磁形状因子，

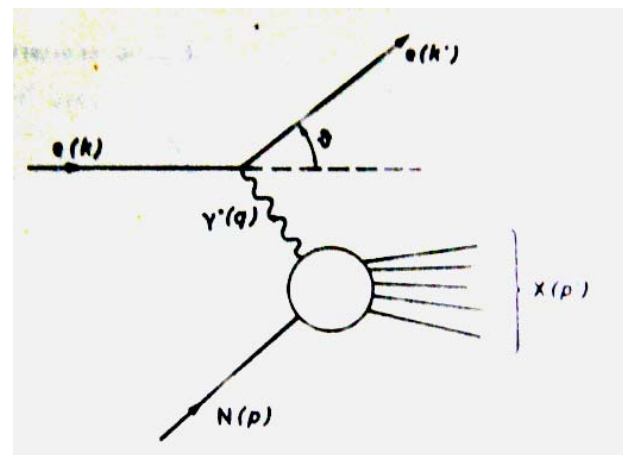
$$G_E \equiv F_1 - \frac{\kappa Q^2}{4M^2} F_2,$$

$$G_M \equiv F_1 + \kappa F_2.$$

实验数据表明， $G_{E,M}$ 随 Q^2 以偶极形式递减，

$$\frac{G_M(Q^2)}{G_M(0)} = \left(1 + \frac{Q^2}{0.7 \text{ GeV}^2} \right)^{-2}.$$

也就是说，弹性散射截面随 Q^2 迅速下降。



2. 电子——核子非弹性散射和部分子模型

在单光子交换近似下（实验支持这种图像），通过场论计算可以得到微分截面

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(\nu, q^2) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}$$

$W_{1,2}$ 称为核子的结构函数 (structure function) 。

在弹性散射情形，结构函数和形状因子的关系为，

$$W_1^{el}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right),$$
$$W_2^{el}(\nu, Q^2) = \frac{G_E^2(Q^2) + (Q^2/4M^2)G_M^2(Q^2)}{1 + Q^2/4M^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right),$$


对于点状Dirac粒子（自旋1/2），只有弹性散射，

$$W^2 = M^2 + 2M\nu - Q^2 = M^2 \Rightarrow Q^2 = 2M\nu$$

而且

$$G_E = G_M = F_1 = 1,$$

所以，

$$\begin{cases} 2MW_1^{pt}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{2M\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) = \frac{1}{\omega} \delta\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \equiv 2F_1(\omega), \\ \nu W_2^{pt}(\nu, Q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \equiv F_2(\omega), \end{cases}$$


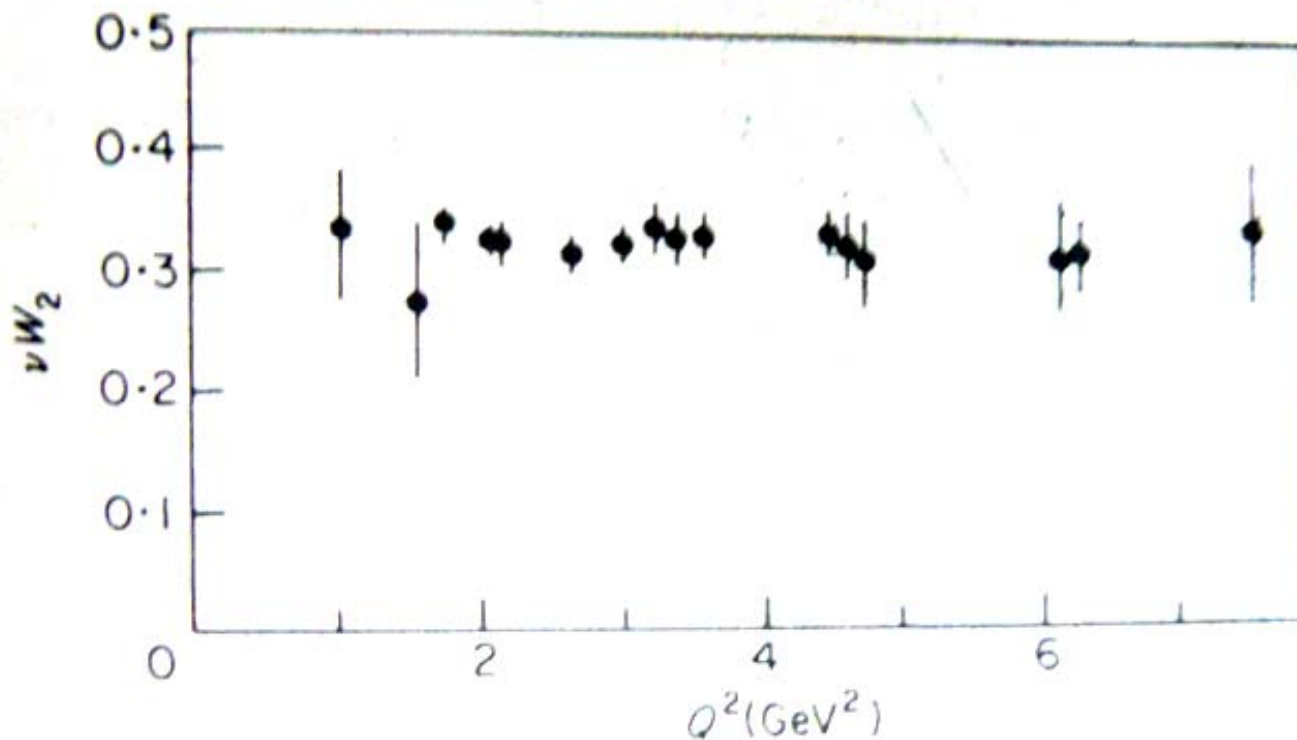
$$2\omega F_1(\omega) = F_2(\omega)$$

也就是说，对于电子和自旋为1/2的Dirac点粒子的弹性散射的结构常数只是无量纲的比 $\omega = 2M\nu/Q^2$ 的函数，不存在特定的能量标度 (mass scale)。

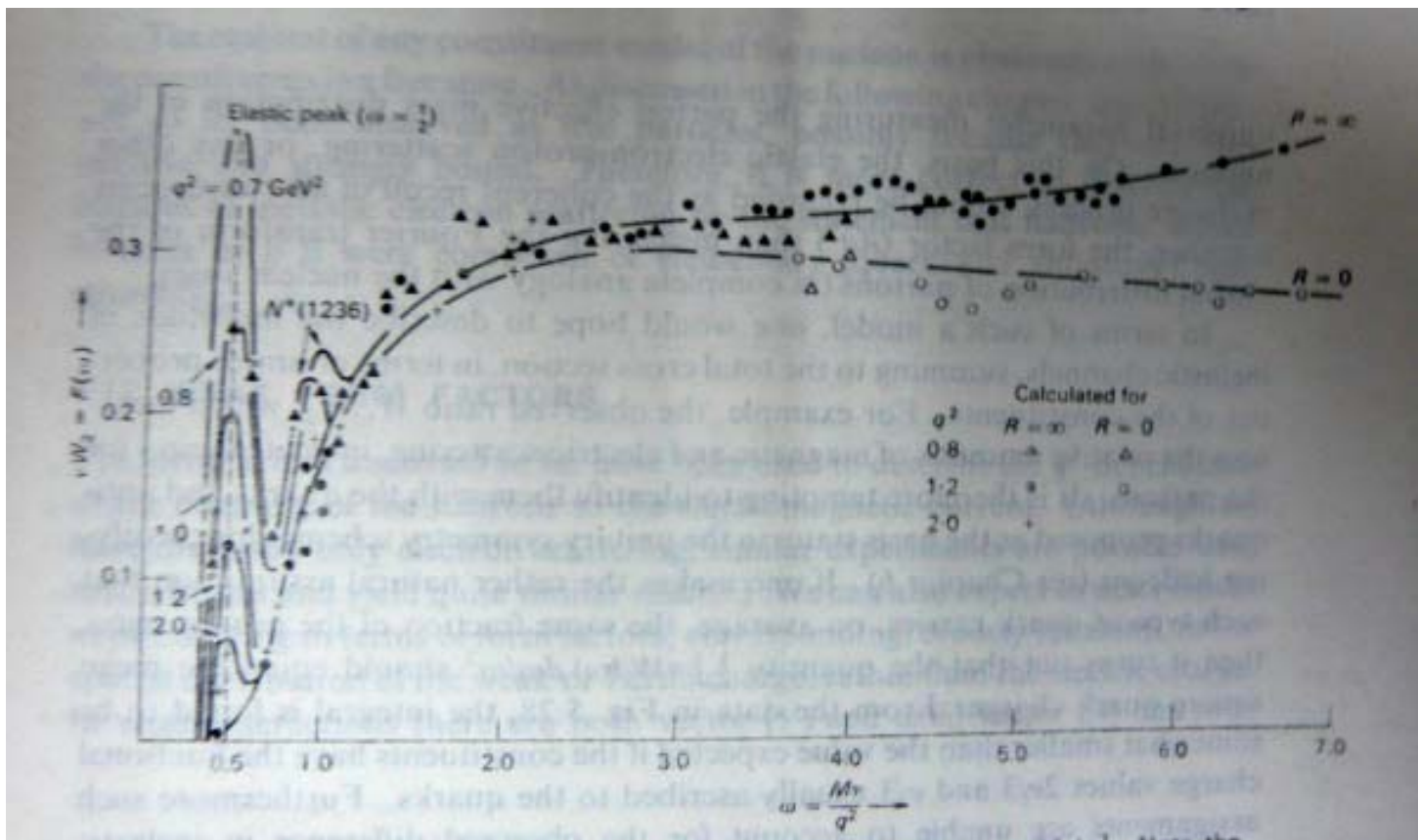
现在我们来电子——核子深度非弹性散射的实验结果。

电子DIS的一个最重要的实验现象是：在电子DIS 的所有单举(inclusive)过程中，当能量转移 (ν) 和动量转移 (Q^2) 很大时，没有共振态结构出现，但散射截面仍很大，而且对于给定的能量转移 (ν)，散射截面几乎不依赖于动量转移 (Q^2)。或者更确切地说，

a) 对于给定的 $\omega = 2M\nu/Q^2$ ，结构常数 νW_2 在 $Q^2 \geq 1\text{GeV}^2$ 接近常数；



b) 甚至当 $\omega > 4$, 结构常数 νW_2 和 ν , Q^2 的依赖都很小。

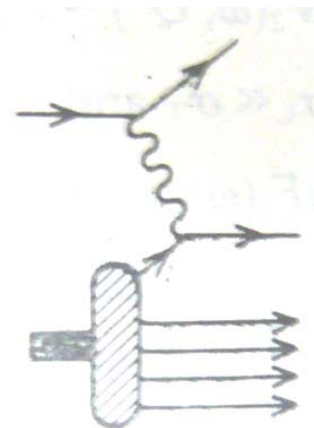


前面第一种表述对应于Bjorken Scaling:

在大动量转移并保持 ω 固定时, 结构函数和动量转移无关:

$$\begin{aligned} MW_1(\omega, Q^2) &\approx F_1(\omega); \\ \nu W_2(\omega, Q^2) &\approx F_2(\omega) \end{aligned} \quad (Q^2 \rightarrow \infty)$$

Bjorken Scaling关系和点粒子弹性散射的性质相同, 这促使人们假设在核子内部有点粒子组分存在。Feynman (1972) 根据这个现象提出假设: 核子内部有点状的带电部分子, 这些部分子是近似自由的, 它们之间的横动量交换可以忽略; 当高能电子和核子散射时, 是和这些部分子之一散射, 和其他部分子没有关系。



根据部分子模型, 如果一个部分子携带靶粒子 (核子) 的一部分动量,

$$p_{parton} = xp,$$

那么高能电子和这个部分子弹性碰撞 (部分子是点状粒子, 没有结构), 如果进一步假设带电部分子是自旋为1/2 的费米子, 电荷为 e_i , 则弹性散射的结构函数为,

$$2MW_1^{(i,x)}(\nu, Q^2) = \frac{e_i^2 Q^2}{2x^2 M \nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2xM\nu}\right) = \frac{e_i^2}{\omega x} \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right),$$

$$\nu W_2^{(i,x)}(\nu, Q^2) = e_i^2 \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2xM\nu}\right) = e_i^2 x \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right).$$

如果在动量区间 $[x, x+dx]$ 内分子的几率为 $f_i(x)$, 则对所有的分子求和得到

$$F_1(\omega) \equiv MW_1(\nu, Q^2) = \sum_i \int dx e_i^2 x f_i(x) \frac{1}{2\omega x^2} \delta(x - \frac{1}{\omega}),$$

$$F_2(\omega) \equiv \nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int dx e_i^2 x f_i(x) \delta(x - \frac{1}{\omega}).$$

两个标度函数的关系为:

$$2F_1(\omega) = \omega F_2(\omega)$$

或者,

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x), \quad (x = \frac{1}{\omega})$$

这是著名的Callan-Gross关系, 它反映了如果带电部分子的自旋为1/2 时结构函数之间的关系。实验数据支持这个关系, 也就是说核子中的带电部分子都是自旋为1/2的点粒子。

$f_i(x)$ 称为**部分子分布函数** (parton distribution function, 简称为PDF) 是研究核子结构十分重要的函数, 通过它可以给出许多有意义的物理结果。

对于DIS的第二种现象现在也可以得到自然的解释:

电子——部分子弹性散射要求

$$2xM\nu = 2m\nu = Q^2 \Rightarrow F_2(\omega) = F_2(M/m)$$

m是部分子的有效质量。显然 νW_2 和动量转移和能量转移没有关系。

3. 部分子分布函数PDF

下面我们对部分子分布函数进行简单的讨论:

如果我们假设部分子的量子数和夸克的量子数相同,

$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \dots$$

$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \dots$$

并考虑同位旋对称性,

$$u \equiv u^p = d^n, \quad d \equiv d^p = u^n, \quad s \equiv s^p = s^n$$

我们得到:

$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{4}{9} [u + \bar{u}] + \frac{1}{9} [d + \bar{d}] + \frac{1}{9} [s + \bar{s}] \cdots$$
$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{1}{9} [u + \bar{u}] + \frac{4}{9} [d + \bar{d}] + \frac{1}{9} [s + \bar{s}] \cdots$$

有

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{ep}(x)}{F_2^{en}(x)} \leq 4$$

实验值和这个结果自洽。

注意: 这里反夸克之所以出现, 是由于胶子 (后话) 和光子都可以湮灭成正反夸克对。

如果我们把夸克分为**价夸克** (valence quark, 贡献强子量子数, 与夸克模型中的夸克自由度对应) 和**海夸克** (sea quark, 来源于真空极化),

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x)$$

一个自然的猜测是:

$$u_v = 2d_v;$$

$$s_v = \bar{u}_v = \bar{d}_v = \bar{s}_v = 0;$$

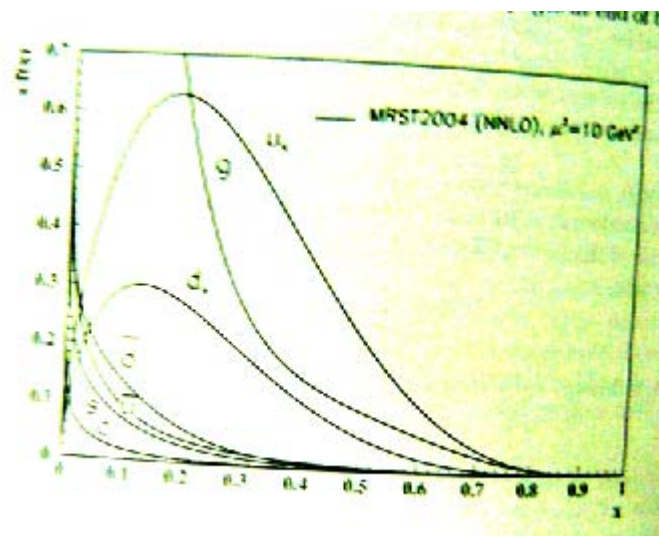
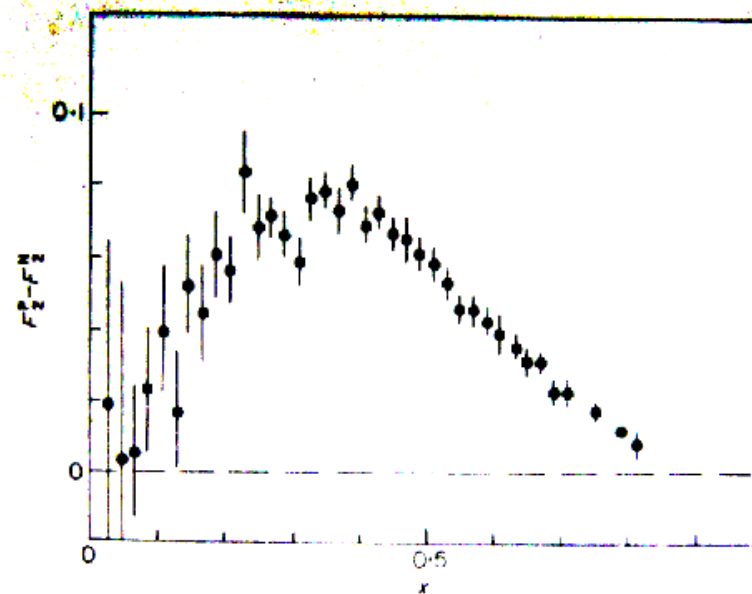
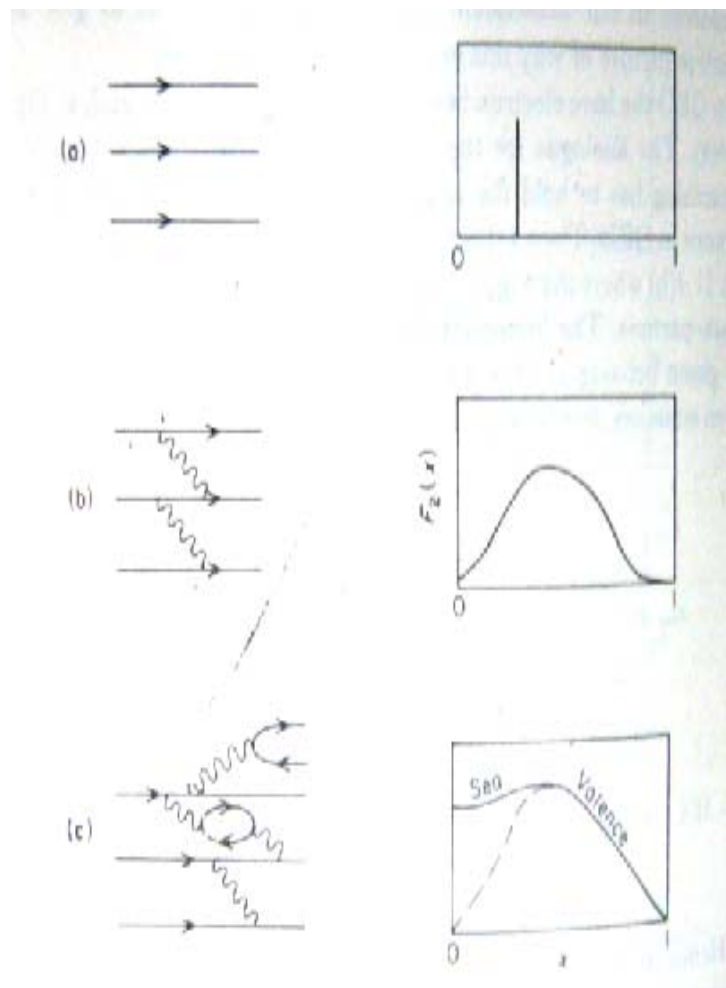
$$u_s = d_s = s_s = \bar{u}_s = \bar{d}_s = \bar{s} \equiv K;$$

最后一行来自光子和胶子都是味道单态的。

实验结果显示, 海夸克在 $x=0$ 附近为主, 价夸克在 x 比较大时占主导地位。

如果我们暂时忽略海夸克效应, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^{en} &= \frac{1}{9} [u_v + 4d_v] + \dots \\ \frac{1}{x} F_2^{ep} &= \frac{1}{9} [d_v + 4u_v] + \dots \end{aligned} \right\} F_2^{eN} \equiv \frac{1}{2} (F_2^{ep} + F_2^{en}) = \frac{5}{18} (u_v + d_v) + \dots$$

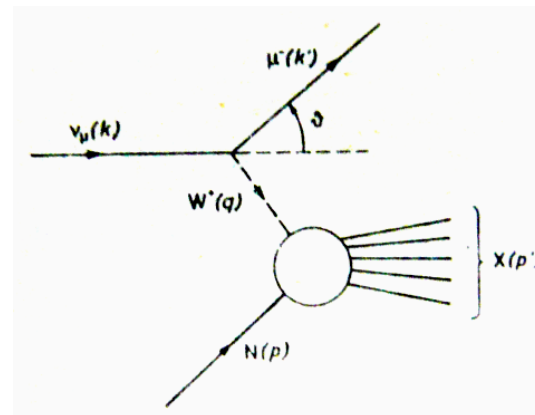


4. 中微子——核子深度非弹性散射

关于部分子的其他量子数，如电荷、同位旋等的确定还需要中微子——核子的深度非弹性散射实验。

$$\nu_{\mu} + N \rightarrow \mu^{-} + X,$$

$$\bar{\nu}_{\mu} + N \rightarrow \mu^{+} + X.,$$



其散射截面的计算和电子——核子散射类似，区别在于能动量传递时通过交换 W^{\pm} 玻色子。具体细节在这里略去，通过理论分析可以得到该过程的结构常数

$$\frac{1}{x} F_2^{\nu p}(x) = 2[d(x) + \bar{u}(x)], \quad \frac{1}{x} F_2^{\nu n}(x) = 2[u(x) + \bar{d}(x)]$$

如果暂时略去海夸克的贡献，有

$$F_2^{\nu N} \equiv \frac{1}{2} (F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) = (u_v + d_v) + \dots$$

由此得出一个很重要的关系：

$$\frac{F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}}{F_2^{ep} + F_2^{en}} \approx \frac{18}{5}$$

而实验结果恰恰就是

$$\left. \frac{F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}}{F_2^{ep} + F_2^{en}} \right|_{\text{exp.}} \approx 3.60$$

这个结果的重要之处在于确定了部分子的同位旋和电荷取与夸克相同的量子数。

5. 电中性部分子

如果夸克和反夸克是核子内部的所有自由度，那么能动量守恒要求，

$$I \equiv \int_0^1 dx x(u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}) = 1$$

上式可以通过结构函数表达，
$$I = \int_0^1 dx (9F_2^{eN} - \frac{3}{2}F_2^{\nu N})$$

将实验值代入上式得到
$$I \approx 0.50$$

这表明，在核子内部还有不参加电磁和弱作用的中性部分子，这就是QCD中的胶子。夸克携带一半核子动量说明胶子也携带另一半核子动量。

二、量子色动力学(Chromodynamics)

我们现在回顾一下我们从夸克模型和轻子——核子深度非弹性散射获得的关于强子及强子结构的性质：

- a) 轻强子按照味道SU(3)对称性的成功分类促使夸克自由度的提出。
- b) 重子的自旋统计关系要求每一味夸克还有一个内部的颜色自由度。
- c) 中性Pion介子的双光子衰变和正负电子湮灭的单举过程(R值测量)都支持每一味夸克的颜色数为3。
- d) 轻子——核子深度非弹性散射的实验结果显示，核子内部有点状的部分子存在，其中带电的部分子取夸克模型中夸克的量子数，这从实验上证明了夸克的存在。另外，核子中的部分子是近似自由的点状粒子，轻子——核子的DIS实际是和这些近似自由的部分子进行准弹性散射。
- e) 对DIS数据的进一步分析表明，带电部分子——夸克和反夸克——只携带核子的接近一半的动量。这说明在核子内部还存在电中性和味道中性的部分子存在，它们不参加电磁和弱相互作用。
- f) 夸克有颜色，但实验上至今没有发现自由的夸克的存在。由于每一味夸克的三种颜色态的质量相同，这自然地促使人们猜测夸克在内部颜色空间具有对称性，每一味夸克的三种颜色状态构成这个对称群——即SU(3)颜色对称群——的基础表示。正反夸克系统（介子）应该构成颜色多重态（一个单态和一个八重态），但实验上并没有发现介子的颜色多重态。因此人们提出夸克禁闭的思想，即夸克构成的物理上存在的系统只能是颜色单态的。

- g) 夸克可以构成束缚态——强子，这种束缚机制，即夸克间的相互作用不可能仅仅是电磁相互作用。因为一方面，电磁相互作用是一种长程相互作用，而且距离越大，作用越弱，强子可以电离为准自由的夸克；另一方面，**DIS** 表明核子（强子）内部还存在电中性的部分子，它们根本不参加电磁相互作用。
- h) 因此夸克间必然存在一种新的相互作用，这种相互作用应具备以下几个特性：这种相互作用的媒介粒子应该是带色的，它们和夸克的相互作用项是颜色单态的；这种相互作用应该和DIS 的实验现象自洽，即夸克能被囚禁在强子中，而且夸克间距离越短，作用越强（核子内的夸克是近似自由的点状粒子），这就是所谓的渐进自由特性。颜色和味道中性的部分子也可能带颜色，并参与这种相互作用，或者，这种中性的部分子可能就是传递这种相互作用的媒介粒子——胶子。
- i) DIS 实验表明，核子（强子）可以看作是由价夸克（夸克）、海夸克和中性部分子构成的束缚系统，价夸克的数目和味道等量子数是确定的，由夸克模型保证（因为夸克模型十分成功），但海夸克和中性部分子的数目没有限制。
- j) 因此夸克间相互作用应该用相对论量子场论的图像来描述。

在本节剩下的部分，我们对描述夸克间相互作用的量子场论模型——量子色动力学（QCD）进行简单介绍。

注意，在早期，QCD只是一个描述强相互作用的场论模型，但随着高能物理实验的发展，人们越来越相信QCD是描述强相互作用的正确理论。

1. 量子色动力学基础

在相对论量子场论的理论框架下，对应夸克的场称作夸克场。自由夸克场的拉格朗日密度为

$$L_q^0 = \sum_{i=1}^{n_f} \bar{q}^i(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i)q^i(x)$$

$$q^i = \begin{pmatrix} q_1^i \\ q_2^i \\ q_3^i \end{pmatrix}$$

是颜色空间的基础表示， i 代表夸克味道。

显然这个拉氏密度在整体颜色SU(3)变换下不变。但整体SU(3)对称性在物理上似乎是不自然的，因为这要求一旦我们在内部空间取定了一组基，那么在这个时空中这组基的取向都保持不变，这就要求在全时空中，内部空间有一组绝对的方向。而这个绝对的方向是不可测量的。实际上，对于Dirac场，客观测量是它们的双线形型，如流密度，

$$J^\mu(x) = \bar{q}^i(x)\gamma^\mu q^i(x)$$

它在一个定域的SU(3)变换下不变:

$$U(x) = e^{it^a \theta^a(x)} \in SU(3), \quad a = 1, 2, \dots, 8.$$

$$\left. \begin{aligned} U(x) : q^i(x) &\rightarrow U(x) q^i(x); \\ U(x) : \bar{q}^i(x) &\rightarrow \bar{q}^i(x) U^+(x) \end{aligned} \right\} \rightarrow J^\mu(x) \text{ 不变.}$$

但是，拉氏密度在这个定域SU(3)变换下是变的，因为时空偏导数的存在。

回忆量子电动力学，电子之间的电磁相互作用通过光子传递，用场论的语言就是荷电流和电磁场之间的相互作用，通过要求电磁场四矢量满足特定的U(1) 变换性质，流场相互作用项将抵消电子场的动能项在定域U(1) 变换下改变的部分。

夸克场和它的共轭可以构成色单态的流和色八重态的流。如果我们也和QED 类似引入矢量场相互作用，并且要求流场相互作用项为色单态，则色单态的夸克流只能和色单态的矢量场构成色单态，这种相互作用就是夸克的电磁相互作用；色八重态的流和色八重态的矢量场可以也可以构成色单态的相互作用项。这个色八重态的矢量场可能就是我们需要的描述夸克间色相互作用的媒介场。

具体地说，夸克场和它的共轭构成的色八重态适量流为，

$$J^\mu(x) = 2\bar{q}^i(x)\gamma^\mu t^a q^i(x)t^a \equiv 2J^{\mu a}(x)t^a$$

$$J^{\mu a}(x) = \text{Tr}J^\mu(x)t^a = \bar{q}^i(x)\gamma^\mu t^a q^i(x)$$

引入八重态的矢量场，

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a$$

色单态的流场作用项为

$$L_{\text{int}} = g\text{Tr}J^\mu(x)A_\mu(x) = gJ^{\mu a}(x)A_\mu^a(x)$$

其中g为流场相互作用的耦合常数。这样夸克和八重态外矢量场的相互作用的拉氏密度为

$$L = L_q^0 + L_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_f} \bar{q}^i(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu + g\gamma^\mu t^a A_\mu^a(x) - m_i)q^i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_f} \bar{q}^i(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m_i)q^i(x)$$

其中 $D_\mu(x) = \partial_\mu - ig t^a A_\mu^a$ 称作协变导数，这种耦合形式称作最小耦合假设。

如果令矢量场在定域SU(3)变换下按照如下变换方式，

$$U : A_\mu(x) \rightarrow U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g} U^\dagger(x) \partial_\mu U(x)$$

则L在这个定域SU(3)变换下不变。

到现在为止，这个颜色八重态的矢量场是以外场的形式出现的，如果我们把它称作胶子场。如果胶子场的量子——胶子——也是强相互作用的基本自由度（对应DIS 中发现的中性部分子），相当于光子在电磁相互作用中的地位，那么胶子场也应该是一个基本的动力学变量，并且进入拉氏密度。

胶子场量不是SU(3)协变的，因此和QED类似，我们引入SU(3) 协变的量——胶子场场强张量：

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \equiv F_{\mu\nu}^a t^a,$$
$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

拉氏密度中胶子场部分为，

$$L_g = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F^{a\mu\nu}(x)$$

这样，量子色动力学的拉氏密度就建立起来了：

$$L_{QCD} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^{n_f} \bar{q}^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) q^i$$

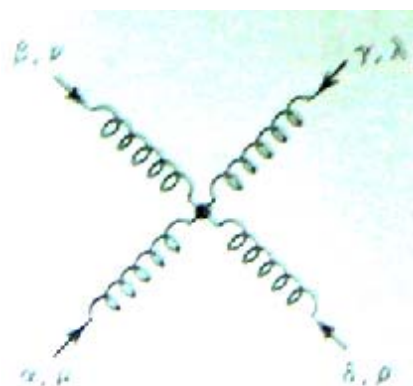
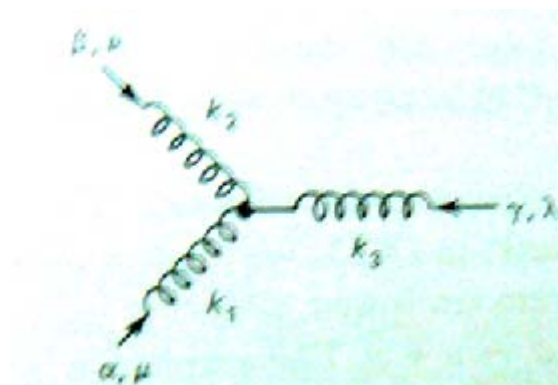
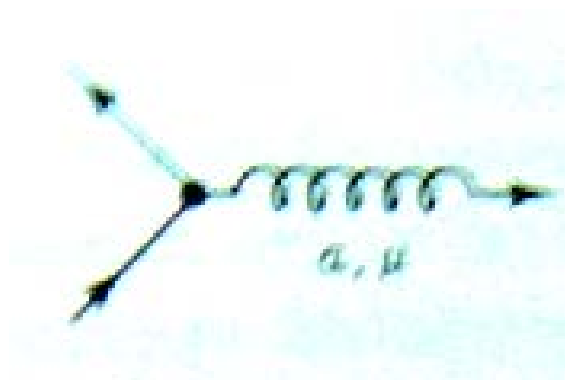
其中，

$$D_\mu(x) = \partial_\mu - ig t^a A_\mu^a$$

通过量子化，我们就可以得到基本的Feynman规则，并进行微扰计算。

关于QCD拉氏量的几点说明

- a) 胶子场是颜色SU(3)的八维表示（自伴表示，adjoint representation），所以胶子场的量子——胶子——有八种颜色状态，即胶子也带颜色。
- b) 在QCD拉氏量中，除了夸克胶子相互作用项外，还有胶子——胶子相互作用项，存在三胶子顶点和四胶子顶点。
- c) 定域对称性通常又称为规范对称性(gauge symmetry)，由于整体对称性的定域化而引入的矢量场通常称作规范场。
- d) 规范对称性分为非阿贝尔规范对称性和阿贝尔规范对称性，相应的规范场称作非阿贝尔规范场和阿贝尔规范场。
- e) 电磁相互作用和强相互作用的对比见下表：



QCD中基本相互作用顶点的Feynman图。

	电磁相互作用	强相互作用
场	电磁场 (Abelian)	胶子场 (non-Abelian)
相互作用荷	电荷	色荷
媒介粒子	光子	八种胶子
自旋	1	1
质量	0	0
媒介粒子是否带荷	否	是
作用强度	1/137	0.1-0(1)
耦合常数的动量依赖	随动量递增	随动量递减

2. QCD的高能性质——渐进自由

深度非弹要求描述强相互作用的动力学模型具有渐近自由的性质，即能量越高，相互作用强度越弱。

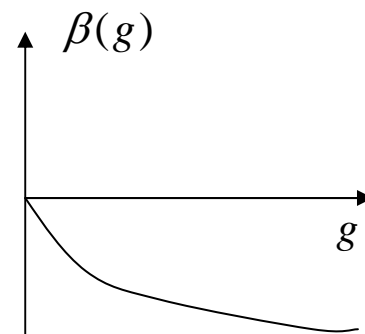
1973年，'t Hooft, Politzer, Gross和Wilczek发现非阿贝尔规范场具有渐近自由的特性；后来，Coleman和Gross进一步证明了只有非阿贝尔规范场才有渐近自由的性质。

根据场论中的重正化思想，渐近自由特性应该反映在等效耦合常数对动量转移的依赖关系上，即耦合常数是“跑动的”。具体地，根据QCD的Callan-Symanzik 重正化方程的beta函数（一圈水平）

$$\frac{d}{d \ln \mu} g \equiv \beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right)$$

对于SU(3) 非阿贝尔规范场， $C_2(G)=3$ ， $C_2(r)=\frac{1}{2}$

$$\frac{d}{d \ln \mu} g \equiv \beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right)$$



μ 为能量标度。 注意这里等式右边的负号：当夸克味道小于17时，右边恒为负，说明耦合常数随能量标度递减。

解上面的微分方程可以得到

$$g^2(\mu^2) = \frac{g^2(M^2)}{1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} (11 - \frac{2}{3}n_f) \ln \frac{\mu^2}{M^2}}$$

或者令 $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, 则有,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(M)}{1 + \frac{\alpha_s(M)}{2\pi} (11 - \frac{2}{3}n_f) \ln \frac{\mu}{M}}$$

其中 M 为减除点能量标度, 比如现在常取 $M = M_Z$ 作为动量减除点。

如果进一步按照如下方程引入参量 Λ

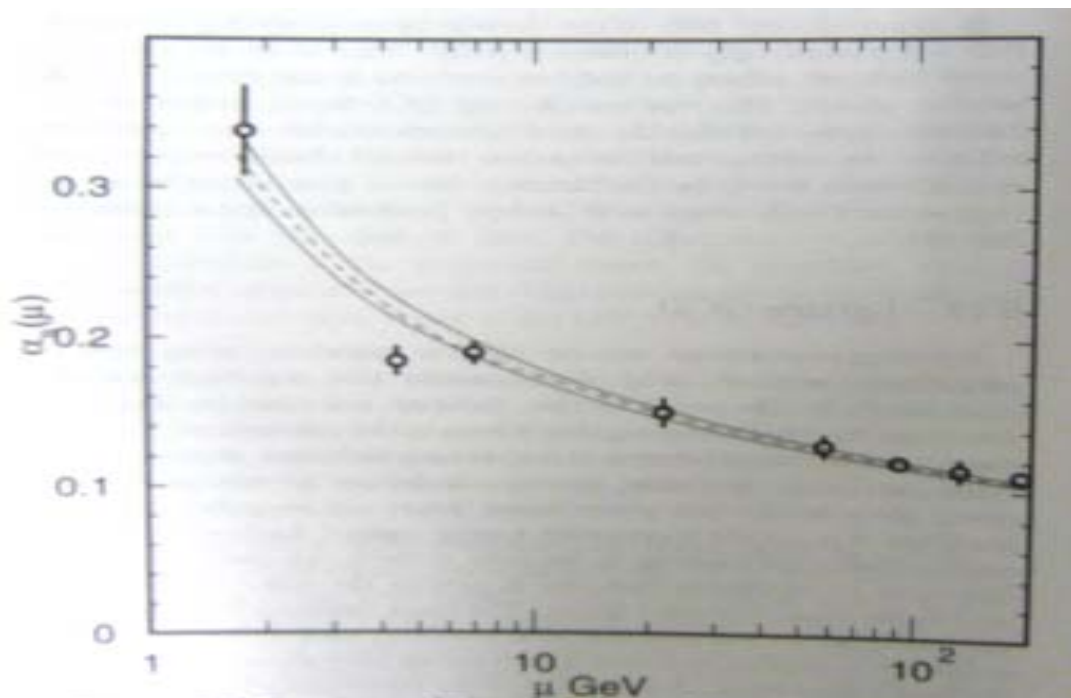
$$1 = \frac{\alpha_s(M)}{2\pi} (11 - \frac{2}{3}n_f) \ln \frac{M}{\Lambda}$$

则等效耦合常数只和 Λ 有关,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{(11 - \frac{2}{3}n_f) \ln \frac{\mu}{\Lambda}}$$

显然在 $\mu > \Lambda$ 时, 等效耦合常数随标度增大而减小。

$\Lambda \approx 200 \text{ MeV}$ 称为QCD 的基本标度参量, 它表示强相互作用耦合常数在这个能量标度已经变得很大了。



3. QCD的低能性质——夸克禁闭

QCD 的渐近自由性质能够很好地解释深度非弹性散射的现象，也正因为如此，QCD才成为描述强相互作用的理论的候选者。这是在高能量标度QCD的成功之处。

在低能区域，我们也看到夸克在较大的空间和时间尺度被囚禁在强子中，也就是夸克禁闭问题。目前夸克禁闭只是一个理论假设，如何从第一性原理解释这个现象则是一个世纪难题，从目前来看，离彻底解决这个问题还有很大距离。从强作用等效耦合常数的跑动性质可以定性地理解为能量越低，耦合越强，但这种解释远远不够，而且耦合常数的跑动性质只是在微扰解法成立的能量区域。

关于夸克禁闭的定性唯象模型有许多，这里只简单介绍几个。

a) 色流管(color flux tube)模型或弦模型

1974年，Nambu 提出色流管模型：正反夸克间的色（电）场主要集中分布在正反夸克之间的一个“管子”里，象一根弦一样将正反夸克拉在一起。根据平移不变性，色（电）场的能量密度——弦张力——沿这个管子的方向是一个常数。这样，系统地总能量正比于色流管或弦的长度，即

$$E(r) \rightarrow \sigma r$$

显然，夸克间距离越长，弦的长度约长，能量越高，也就是说不可能将正反夸克彻底拉开成自由的粒子。强子的强衰变也可以在这个图像中得到定性的描述：当夸克间距离被拉开到一定的距离时，这根弦就会断裂，真空中产生的一对新的正反夸克对占据弦的两个断头，形成两个强子，如此下去，直到不能再强衰变为止。由正反轻夸克组成的基态介子的典型质量为约1GeV，而强子的空间尺度一般为1fm左右，由此可以估计弦张力（色流管能量密度）约为

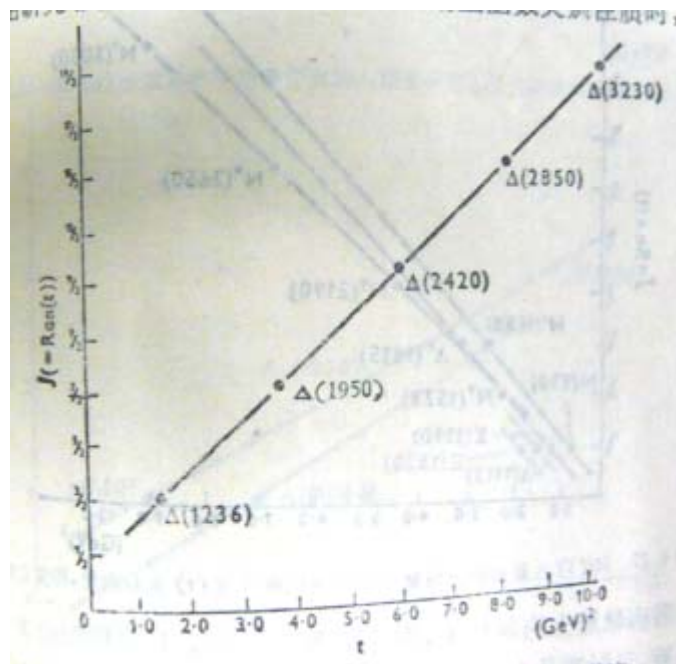
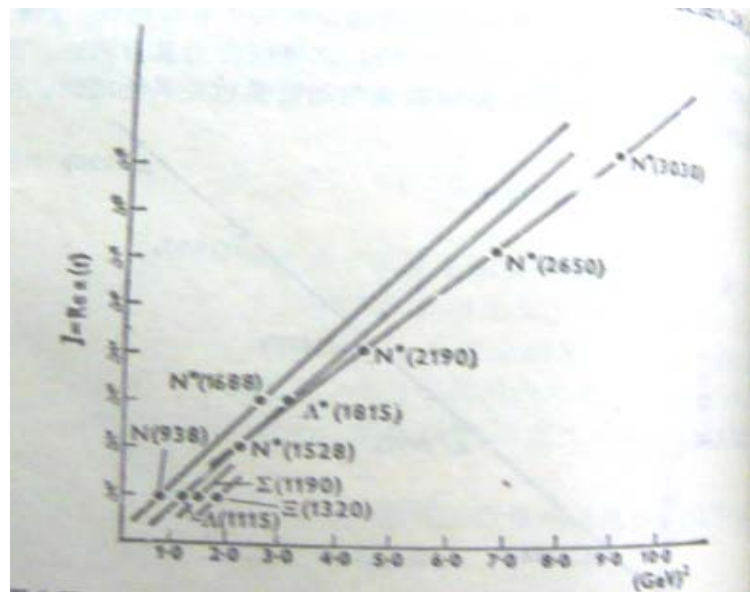
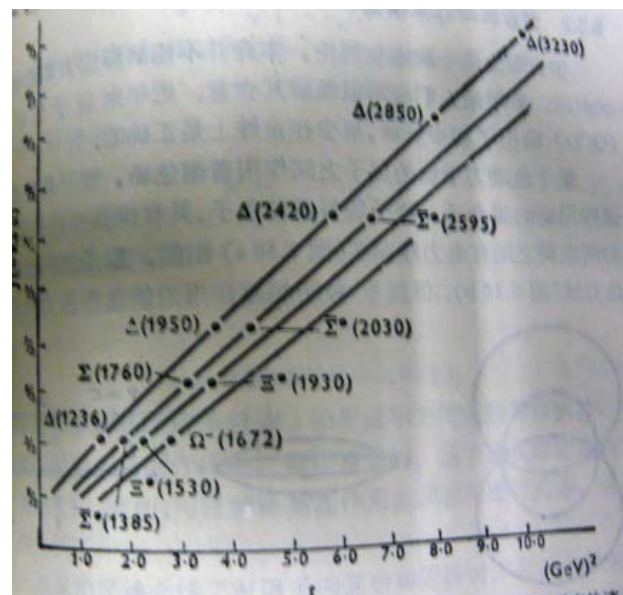
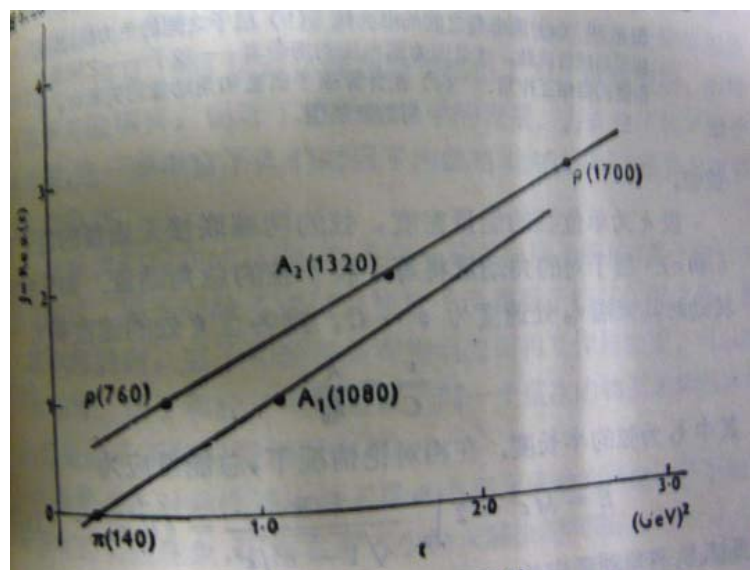
$$\sigma \sim M(\text{typical})/(\text{hadron_size}) \sim 1\text{GeV}/1\text{fm} \sim 0.2\text{GeV}^2$$

在轻强子谱方面还有另外一个有趣的现象——Regge Trajectories: 具有相同内部量子数、不同自旋的轻强子遵守自选——质量平方的如下关系（**Regge1959**）

$$J = \alpha_0 + \alpha' M^2$$

这里 α' 称作Regge斜率（Regge's slope），对所有的Regge trajectories，它大致是一个常数，

$$\alpha' \sim 0.88\text{GeV}^{-2}$$



这也可以通过上述的弦模型得到定性解释：由于是轻夸克，忽略其质量，考虑一个轻介子系统是一根以光速转动的长度为 d 的弦，弦的两头是无质量的夸克反夸克，那么这个系统的能量（介子质量）为

$$M = 2 \int_0^{d/2} \frac{\sigma dr}{\sqrt{1-v^2}} = 2 \int_0^{d/2} \frac{\sigma dr}{\sqrt{1-(2r/d)^2}} = \frac{1}{2} \pi \sigma d$$

系统的总轨道角动量（介子的自旋）为，

$$J = 2 \int_0^{d/2} \frac{\sigma r v dr}{\sqrt{1-v^2}} = 2 \int_0^{d/2} \frac{2\sigma r^2 dr}{d \sqrt{1-(2r/d)^2}} = \frac{1}{8} \pi \sigma d^2$$

所以，

$$J = \frac{1}{2\pi\sigma} M^2$$

由此得到Regge 斜率和弦张力的关系：

$$\alpha' = (2\pi\sigma)^{-1} \Rightarrow \sigma \sim 0.18 \text{GeV}^2$$

这和前面的估算定性相符。

b) 非相对论势模型 (non-relativistic potential model)

根据夸克模型，强子是由夸克(反夸克)构成的系统。在夸克模型的基础上，只考虑价夸克自由度，认为强子是由价夸克通过模型束缚机制构成的束缚态；并且假设价夸克在强子内部的运动是非相对论的，则可以引入束缚势，并求解相应的束缚态方程得到强子的质量、波函数等。

最常用的正反夸克间的束缚势为

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r$$

这个势通常称作**Cornell potential**，它由两部分构成，Coulomb势和线性势，前者是考虑夸克间单胶子交换的贡献，后者为人为引入的禁闭势。

对于具体的夸克组分，考虑相对论修正以及轨道—自旋耦合等效应，非相对论势模型在描述强子质量谱等都非常成功，其中包括对重夸克系统、甚至轻夸克系统。当然对与轻夸克系统这个模型是有原则性问题的：轻夸克在强子内部显然是相对论的。这是非相对论势模型的困难。

c) 格点规范理论，格点QCD

由于QCD 的渐近自由性质，在低能区微扰的解法已经不能成立。为了研究禁闭问题，K. G. Wilson 1974年提出了格点规范理论：将时空离散为四维超立方格子，在这个格点体系定义动力学变量和场论体系，并采用路径积分量子化方案。从理论意义上，格点规范理论提出了一个连续场论的正规化方案——自动引入一个紫外截断(格距的倒数)。在微扰区域，它和其他正规化方法结果自洽，但其使用范围并不受微扰论适用范围的限制，也可以处理强耦合（低能QCD）的情形。目前格点规范理论的研究方法主要是进行Monte Carlo 数值模拟计算。

严格地说，格点规范理论是一个基本的场论体系，它是从第一性原理出发的，没有其他理论假设，因此目前受到高能物理理论研究的十分重视。

格点规范理论的第一个重要的结果就是，利用强耦合展开方法，推导出了夸克禁闭的结果。

更精细的数值模拟也给出了无穷重夸克之间的束缚势，它的形式和Cornell势相同，

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r$$

目前，格点规范理论被广泛地应用到QCD非微扰特性的研究领域，如轻强子谱、强子矩阵元等。

d) MIT 口袋模型

口袋模型的理论图像是：强子被想象为一个口袋，夸克在这个口袋中是自由的，在口袋边界有真空压力，用口袋参数 B 描述，口袋中的夸克运动和口袋边界的压力平衡时形成稳定的状态，即强子态。

关于计算细节等请看兴趣的同学查阅有关文献。在这里就不仔细描述了。