题目: QCD简介

QCD是基于SU(3)对称性的规范相互作用理论

本讲座: 介绍QCD的基本元素 (SU(N)群基础)

从色荷角度来理解軔致辐射和量子色动力学的微扰辐射修正。

*) QCD和QED的差异

	QED	QCD
对称性	$U(1)_{EM}$	$SU(3)_c$
Charge	EM	color
媒介粒子	光子(γ)	胶子(g)
辐射粒子	带电物体	带色粒子和胶子

注意: 胶子的地位是特殊的, 既是载体又是辐射源。

1.1) 色代数基础

夸克: 具有3种不同的色态 (red, green, blue)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \psi_i: \text{Dirac Spinor}$$

Under the rotations in color space:

$$\begin{cases} \psi'(x) = U(x)\,\psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\,U^{+}(x) \end{cases}$$

U(x)矩阵属于SU(3)群

⊛ SU(N): special unitary N×N 矩阵

$$\begin{cases} U^{+}U = 1 \\ \mathrm{Det}\,U = e^{\mathrm{Tr}\ln U} = 1 \end{cases}$$

N×N矩阵的独立参数 $\underbrace{N^2 \times 2}$ → complex

$U^{+}U = 1$ N^2条件

$\mathrm{Det}\,U = 1$ 1个条件

⇒ 独立实参数 $\underline{N^2 - 1}$

1.1) 参数化. 无穷小变换. 和生成元

$$U(\omega) = e^{i\omega^a t^a} \qquad a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$$

ω^a → 实参数 (color rotation angles)

t^a: N×N 矩阵

$$\left.\begin{array}{l} U^{+}U = 1 \\ \mathrm{Det}\,U = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} t^a = (t^{+})^a & \text{Hermitian} \\ \mathrm{tr}(t^a) = 0 & \text{traceless} \end{cases}$$

无穷小变换

$$U = 1 + i\delta\omega^a t^a + \cdots$$

quark wave function.

$$\psi \to \psi' = U\psi \simeq \psi + \delta\psi$$

$$(\delta\psi = i\delta\omega^a t^a \psi)$$

Anti-quark wave function

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^+ = \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}$$

$$\delta\bar{\psi} = -i\delta\omega^a \underbrace{(\bar{\psi} t^a)}_{\text{矩阵乘法}}$$

生成元：在一个给定表示R中 T^a 决定对象R的无穷小变换
(T^a)

3：夸克处于基础表示3.

$$R^i = \psi^i \, , \; T^a_{(3)} = t^a .$$

$$(T^a{}_{(3)} : R)^i = (t^a)^i{}_k R^k$$

$\bar{3}$：反夸克处于共轭基础表示

$$R_i = \bar{\psi}_i \, , \; T^a(\bar{3}) = -t^a$$

$$(T^a(\bar{3}) : R)_i = -R_k (t^a)^k{}_i$$

在规范不变的QCD理论中 T^a决定夸克辐射胶子的过程

我们可以将T^a视作为"夸克色荷"

$$q: \quad T^a(3) = t^a$$

$$\bar{q}: \quad T^a(\bar{3}) = -t^a$$

夸克和反夸克的"色荷"相反. 电荷相反

1.2 色荷中性化

我们首先考虑由夸克(u)和反夸克($\bar{u}$)组成的介子

色中性系统R满足

$$T^a: R = 0 \quad (\text{对所有的}a)$$

可以验证:如下定义的R_0是色中性(或色单态)

$$R_0 \equiv R_{white} = \bar{u}_1 u^1 + \bar{u}_2 u^2 + \bar{u}_3 u^3$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i u^i = (\bar{u} u)$$

在色空间转动变化下

$$\delta R_0 = i\delta w^a \bar{u}(t^a u) + i\delta w^a(\bar{u}(-t^a)u) = 0$$

$\Rightarrow$ R_0是$SU(3)_c$的单态(也叫不可约单态表示)

生成元 $T^a(\mathbb{1}) = 0$

在实验上我们还观测到由三个夸克构成的色单态粒子。

$\Longrightarrow$ 应该如何构造？

1.3 双夸克组合（$3\times 3 = 6+\bar{3}$）

将双夸克波函数 u^i 和 d^j 直乘（为方便记述，我们选 u 和 d）

共有 $N\times N=9$ 个分量。其在色空间转动变换下，行为如下：

$$\delta\{u^i d^j\} = (\delta u^i)d^j + u^i(\delta d^j)$$

$$= i\delta w^a\{(t^a)^i_k u^k d^j + u^i (t^a)^j_k d^k\}$$

利用此9个分量，我们可构造两个张量

$$u^i d^j = R^{\{ij\}} + R^{[ij]}$$

其中 1) 对称形式

$$R^{\{ij\}} = \frac{1}{2}(u^i d^j + u^j d^i) \quad : \text{共有 } \frac{N(N+1)}{2} = 6 \text{ 分量}$$

2) 反对称形式

$$R^{[ij]} = \frac{1}{2}(u^i d^j - u^j d^i) : \text{共有 } \frac{N(N-1)}{2} = 3 \text{ 分量}$$

利用 $\delta\{u^i d^j\}$ 的形式，可以验证

$$\delta R^{\{ij\}} = \delta R^{\{ji\}} \qquad \delta R^{[ij]} = -\delta R^{[ji]}$$

$\Rightarrow$ 张量对称性在色转动操作下保持不变

即 $R^{\{ij\}}$ 和 $R^{[ij]}$ 是 $SU(3)_c$ 的不可约表示

- Sextet 6: $R^{\{ij\}}$

生成元: $T^a(6) = t^a \cdot \mathbb{1} + \mathbb{1} \cdot t^a$

作用在第1个指标　　作用在第2个指标

故而有

$$\left(T^a(6) : R\right)^{ij} = \left((t^a)^i_k \delta^j_l + \delta^i_k \cdot (t^a)^j_l\right) R^{kl}$$

- 反对称张量 $R^{[ij]}$

其维度和SU(3)的基础表示维度相同 $\frac{N(N-1)}{2} = 3$

下面我们验证:

张量 $R^{[ij]}$ 的变换性质和反含表(3̄)相同。

首先,我们将 $R^{[ij]}$ 写作为矢量形式

$$R_m = \varepsilon_{mij} u^i d^j = \varepsilon_{mij} R^{[ij]} \quad (m=1,2,3)$$

$$\begin{cases} R_1 = u^2 d^3 - u^3 d^2 \\ R_2 = u^3 d^1 - u^1 d^3 \\ R_3 = u^1 d^2 - u^2 d^1 \end{cases}$$

类似于3分量矢量

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = +1$$

其次，我们推导R_m的逆.

$$\varepsilon^{\alpha kl} R_\alpha = \varepsilon^{\alpha kl}\varepsilon_{\alpha ij} R^{[ij]} \quad (\text{对}\alpha=1.2.3\text{求和})$$

$$= (\delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_j\delta^l_i) R^{[ij]}$$

$$= (\delta^k_i\delta^l_j + \delta^k_i\delta^l_j) R^{[ij]}$$

利用$R^{[ij]}$反对称性质

$$= 2R^{[kl]}$$

$$\Rightarrow \underline{2R^{[ij]} = u^i d^j - u^j d^i = \varepsilon^{\alpha ij} R_\alpha} \quad (☆)$$

最后，我们利用上面推导的各式来检验δR_m。

$$\delta R_m = \delta(\varepsilon_{mij} u^i d^j)$$

$$= i\delta\omega^a \varepsilon_{mij}\left((t^a u)^i d^j + u^i (t^a d)^j\right)$$

$$\because \varepsilon_{mij} u^i (t^a d)^j \overset{i\leftrightarrow j}{=} \varepsilon_{mji} u^j (t^a d)^i$$

$$= -\varepsilon_{mij} u^j (t^a d)^i$$

$$\therefore \delta R_m = i\delta\omega^a \varepsilon_{mij}\left((t^a u)^i d^j - u^j (t^a d)^i\right)$$

$$= i\delta\omega^a \varepsilon_{mij} (t^a)^i_k \underbrace{(u^k d^j - u^j d^k)}_{(☆)}$$

$$= i\delta\omega^a \varepsilon_{mij} (t^a)^i_k \varepsilon^{\alpha kj} R_\alpha$$

$$= i\delta\omega^a (t^a)^i_k (\delta^\alpha_m \delta^k_i - \delta^\alpha_i \delta^k_m) R_\alpha$$

等式右方第1项为0，因为

$$(t^a)^i_k \delta^\alpha_m \delta^k_i = (t^a)^i_i \delta^\alpha_m = Tr(t^a)\delta^\alpha_m = 0$$

因此，

$$\delta R_m = -i\delta w^a (t^a)^\alpha_m R_\alpha = i\delta w^a(-Rt^a)_m$$

其变换行为和~~反~~<u>复</u>共轭波函数一致

$\Rightarrow R^{[ij]}$ 按照 $T^a(\bar{3})$ 变换

- 总结，我们将 $u^i d^j$ ~~按照~~ 波函数直乘作如下分解

$$3 \times 3 = 6 + \bar{3}$$

1.4 (qqq) 重子中性化

在了解上面 (qq) 波函数性质后，构造 (qqq) 自然非常容易了。例如 (uds) 系统

$$R_0 = \varepsilon_{mij} u^i d^j s^m$$

其变换形式如下

$$\delta(\underbrace{\varepsilon_{mij} u^i d^j}_{R_m} s^m) = (\delta R_m) s^m + R_m(\delta s^m)$$

$$= i\delta w^a \{-(Rt^a)s + R(t^a s)\} = 0$$

注意，值得指出自介子和自重子的区别

介子：$(q\bar{q})$ 是任意 $SU(N)$ 群下的单态

重子：依赖于 N.（要求重子中夸克数目 $=N$）

例如

① $SU(2)$ 同位旋 $N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

构造同位旋单态

"介子" $\bar{N}_i N^i = \bar{n}_1 n_1 + \bar{n}_2 n_2$

"重子" $\varepsilon_{ij} N^i N^j = n_1 n_2 - n_2 n_1$

② $SU(4)_c$：假设夸克具有四种颜色

$$q^i q^j = 4 \otimes 4 = R^{\{ij\}} + R^{[ij]} = 10 + 6$$

$$q^i q^j q^k = 4 \otimes 4 \otimes 4 = \cdots + \bar{4}$$

$SU(4)_c$ 的"自重子"

$$= \varepsilon_{ijkl}\, q^i q^j q^k q^l$$

1.5 对易子和结构常数

考虑两个操作的对易子（先后顺序的差异）

$$[U_2, U_1] \equiv U_2 U_1 - U_1 U_2$$

$$= (i\delta\omega_2^a)(i\delta\omega_1^b)\underbrace{[t^a, t^b]}_{\substack{\text{对易}=0\text{，阿贝耳} \\ \text{不对易}\neq 0\text{，非阿贝耳}}} + O(\delta\omega^3)$$

因为 $tr(t^a t^b) = tr(t^b t^a)$

$$\Rightarrow tr[t^a, t^b] = 0$$ 即 $[t^a, t^b]$ 无迹

所以 $$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c, \quad abc = 1\cdots, N^2-1$$

$[t^a, t^b]$：反厄米

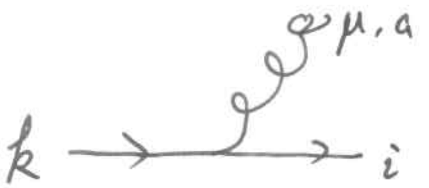
f_{abc}：实数，结构常数

1.6 t-矩阵的归一化常数

$$Tr(t^a t^b) \equiv T_R \delta^{ab} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

选定 T_R 后就确定了 $N\times N$ 无迹矩阵空间中基矢

此时具有如下的费曼顶点.



$$g_s \gamma_\mu (t^a)^i_k$$

$$(eQ_q)\gamma_\mu \delta^i_k$$

1.7 $N\times N$矩阵按照t^a展开

$$M = n^0 \mathbb{1} + n^a t^a$$

$\because$ $\mathrm{Tr}(M) = n^0 N$ 且 $\mathrm{Tr}(Mt^b) = n^a \mathrm{tr}(t^a t^b)$

$$= \frac{1}{2} n^a \delta^{ab}$$

$\therefore$ $\boxed{M = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M)\mathbb{1} + 2\,\mathrm{Tr}(Mt^a)\,t^a}$

例1) 结构常数 f_{abc}

令 $M = [t^a, t^b]$，则有

$$[t^a, t^b] = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left([t^a, t^b]\right)\mathbb{1} + 2\,\mathrm{Tr}\left([t^a, t^b]\,t^c\right)t^c$$

$$\Rightarrow \quad i f_{abc} t^c = 2\,\mathrm{Tr}\left(t^c [t^a, t^b]\right)t^c$$

$$\Rightarrow \quad i f_{abc} = 2\,\mathrm{Tr}\left(t^c [t^a, t^b]\right)$$

可利用循环置换来证明

f_{abc}对任意两个指标都是反对称的。

例2) $\underline{3\times\bar{3}=1+8}$

考虑 $(q\bar{q})$ 系统，其波函数直乘为

$$\psi^i\bar{\chi}_k=\frac{1}{N}\delta^i_k(\bar{\chi}\psi)+R^i_k$$

其中 $R^i_k=\psi^i\bar{\chi}_k-\frac{1}{N}\delta^i_k(\bar{\chi}\psi)$

是无迹张量，$\underline{R^i_i=0}$

在色旋转变换下，

$$\delta R^i_k=i\delta\omega^a(t^a)^i_l R^l_k+i\delta\omega^a R^i_l(-t^a)^l_k$$
$$=i\delta\omega^a\left([t^a,R]\right)^i_k$$

当 $i=k$ 时，$\delta R^i_i=i\delta\omega^a\left([t^a,R]\right)^i_i=i\omega^a Tr\left([t^a,R]\right)$

$$=0=R^i_i$$

所以，R^i_k 仍是无迹 $\Rightarrow$ R^i_k 构成SU(3)八重态

• 矢量形式

我们可将 R^i_k 写作矢量形式 ϕ_a，$a=1,2,\cdots,N^2-1$

$$R^i{}_k=\phi_b(t^b)^i_k$$

$$\phi_b=2Tr(Rt^b)$$

1.8) 伴随表示 — 生成元 $T^a(8)$

在前面我们已经看到 R^i_k 的无穷小变化行为是

$$\delta R^i_k = i\delta\omega^a\left([t^a, R]\right)^i_k$$

由生成元定义可知，在八重态表示中生成元是

$$T^a(8) : R = [t^a, R],$$

$$T^a(8) = [t^a, \cdots]$$ 生成元由对易子给出

将 R^i_k 表示为矢量形式，可得

$$R^i_k = \phi_c (t^c)^i_k, \quad \phi_c = 2\,\mathrm{Tr}(R t^c)$$

则有

$$T^a(8) : R = T^a(8) : (\phi_c t^c) \equiv t^b (T^a : \phi)_b$$

$$\begin{aligned} T^a(8) : (\phi_c t^c) &= \phi_c T^a(8) : t^c \\ &= \phi_c [t^a, t^c] \\ &= i f_{acb} t^b \phi_c = -i f_{abc} t^b \phi_c \end{aligned}$$

也即 $(T^a : \phi)_b = -i f_{abc} \phi_c$

矢量 ϕ 在色空间旋转变化下形式为

$$\delta\phi = i\delta\omega^a (T^a \cdot \phi)$$

$$\delta\phi_b = \delta\omega^a \underbrace{f_{abc}}_{\text{生成元}} \phi_c$$

生成元和结构常数相同的表示 —— 伴随表示

此时生成元为

$$\left(iT^a(8)\right)_{bc} = f_{abc}$$

b和c为行列指标

生成元指标

1.9) Jacobi 恒等式

$$f_{abe} f_{cde} + f_{bce} f_{ade} + f_{cae} f_{bde} = 0$$

上式对e求和，$\{a, b, c\}$ 作循环置换

下面我们验证 Jacobi 恒等式可以保证胶子场强张量满足正确的色变换.

胶子场强张量为

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

其中包含胶子场的线性和双线性。在色旋转变换下，两者的变换行为应该保持一致.

首先. $\quad iT^d(8): F^a = f_{dae} F^e$

下面我们考虑上面的右方的双线性项,

$$f_{dae} F^e \sim f_{dae} f_{ebc} A^b_\mu A^c_\nu$$

而等式左方

$$iT^d(8): \{ f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \}$$

$$= f_{abc} \{ (iT^a(8): A_\mu)^b A^c_\nu + A^b_\mu (iT^a: A_\nu)^c \}$$

$$= f_{abc} [f_{dbe} A^e_\mu A^c_\nu + f_{dce} A^b_\mu A^e_\nu]$$

$$= (f_{aec} f_{deb} + f_{abe} f_{dec}) A^b_\mu A^c_\nu$$

左右相等可得

$$f_{dae} f_{ebc} = f_{aec} f_{deb} + f_{abe} f_{dec}$$

整理后可得 Jacobi 恒等式

1.10 对易关系的普适性：

$$[T^a(R), T^b(R)] = i f_{abc} T^c(R)$$

此普适性和色荷守恒关系联系紧密。同时也保证带任意色荷的粒子（处于SU(3)群不同表示的粒子）都遵从相同的相互作用。

2 Color charge

2.1 Casmir 算符和胶子辐射强度

Casmir 算符 $T^2 \equiv T^aT^a$, $[T^2, T^a] = 0$

由 Schur's lemma 可知

T^2 正比于给定表示中的单位算符

Ⓐ 在基础表示3中

$$(T^a(3))^i_j \, (T^a(3))^j_k = (t^a)^i_j \, (t^a)^j_k = C_F \, \delta^i_k \equiv C_F \mathbb{1}$$

$$= C_F \mathbb{1} = \frac{N^2-1}{2N} \delta^i_k$$

Ⓑ

$$(T^a(8))_{bd} \, (T^a(8))_{dc} = (-if_{abd})(-if_{adc})$$

$$= f_{bad} f_{cad} = C_A \delta_{bc} \equiv C_A \mathbb{1}$$

$$= C_A \mathbb{1} = N \delta_{bc}$$

Schur's lemma的物理图像

辐射和吸收相同色态的胶子不改变辐射者的色态，但量子数应反映在 Casmir 算符上。

下面我们推导这些"平方色荷" C_F 和 C_A

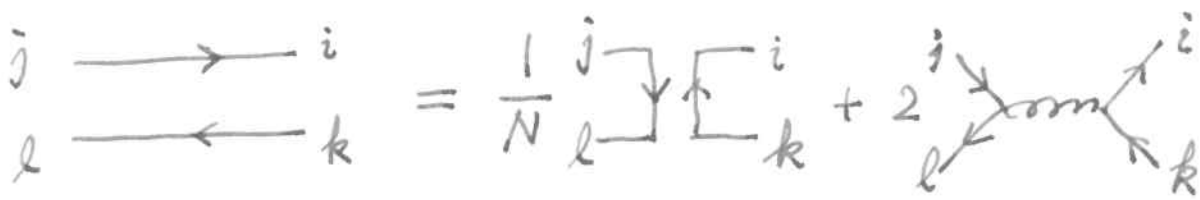
2.2 Fierz Identity

利用公式 $M=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M)\mathbb{1}+2\,\mathrm{Tr}(Mt^a)\,t^a$

取 $M^i_k=\delta^i_{(j)}\delta^{(l)}_k$ （设 j 和 l 是固定的数）

则有
$$\delta^i_j\delta^l_k=\frac{1}{N}\delta^i_k\delta^l_j+2(t^a)^i_k(t^a)^l_j$$

上式可用图示如下



物理图像:

取 M^i_k 中 i 为夸克指标, k 为反夸克指标

则上式可理解为将 $(q\bar{q})$ 分解为色单态和色八重态

色投影算符:

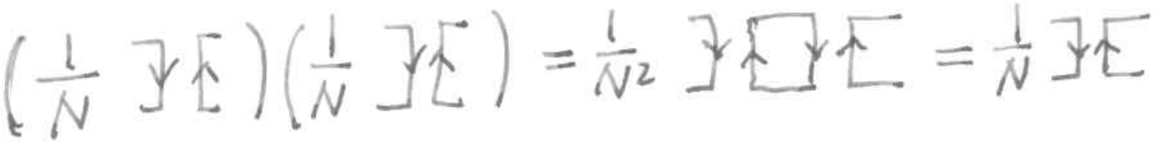
$$\mathbb{1}(3)\cdot\mathbb{1}(3)=P(0)+P(8)$$

$P_{(0)}=\frac{1}{N}$ 

$P_{(8)}=2$ 

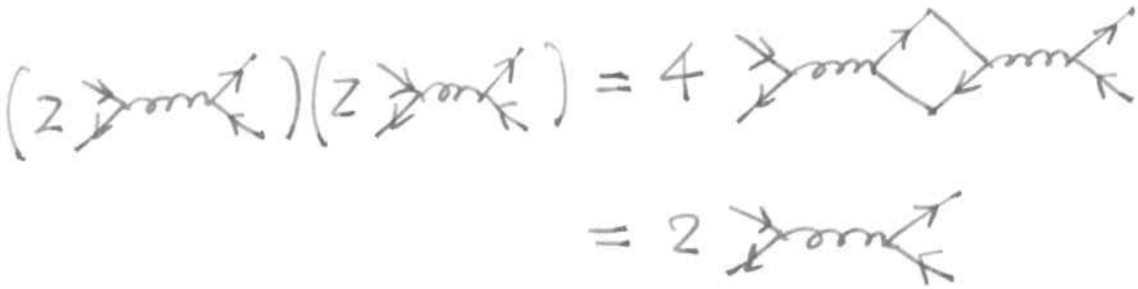
验证：$P_{(0)}$ 和 $P_{(8)}$ 满足投影算符的要求

1) $\hat{P}_{(0)}^2 = \hat{P}_{(0)}$



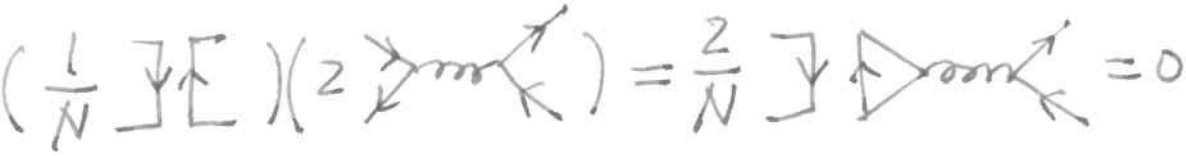
（其中用到 □ $= N$. 每个封闭圈都给出 N）

2) $\hat{P}_{(8)}^2 = \hat{P}_{(8)}$



（其中用到  $= T_R\,\delta^{ab} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$）

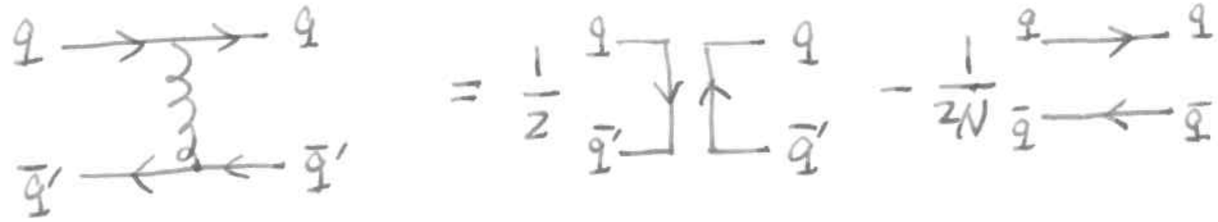
3) $\hat{P}_{(0)} \cdot \hat{P}_{(8)} = \hat{P}_{(8)} \hat{P}_{(0)} = 0$



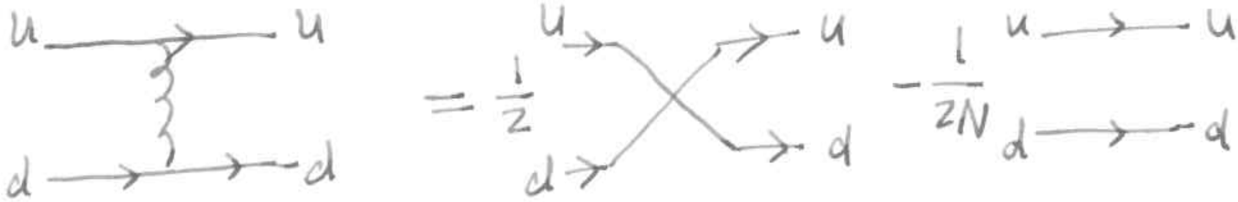
（其中用到  $= tr(t^a) = 0$）

Fierz Identity 示例：color link

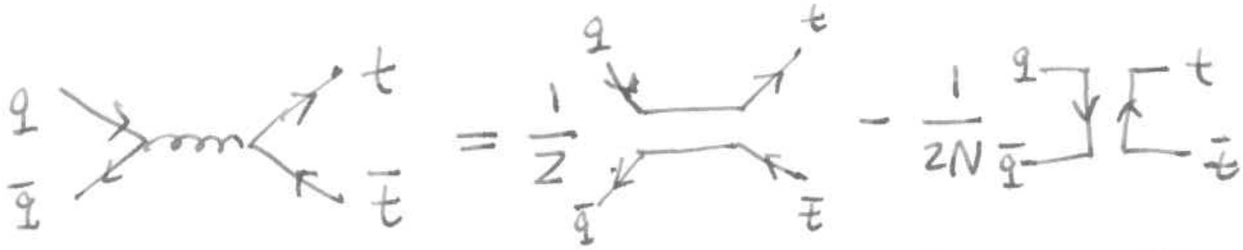
①



②

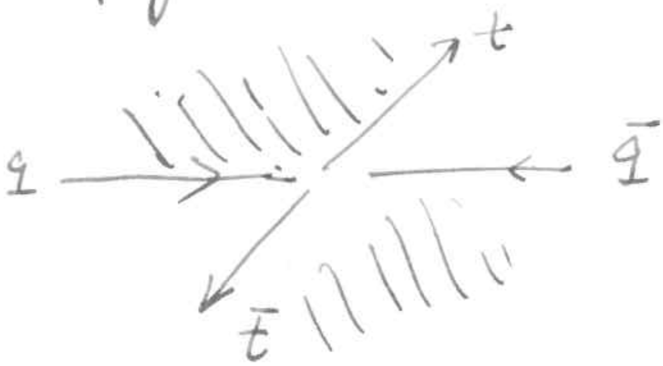


③ $q\bar{q} \to t\bar{t}$



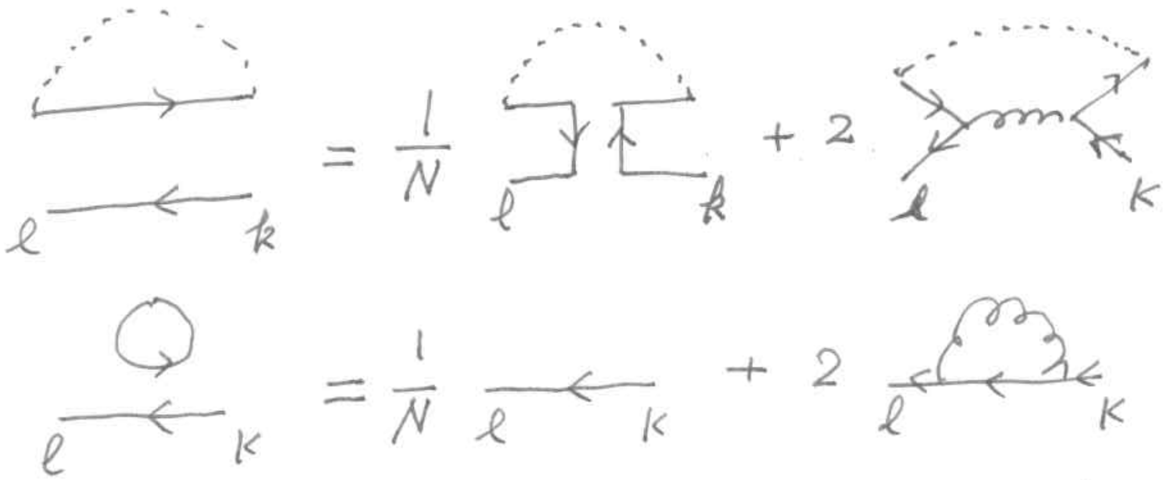
top夸克知道入射的u夸克的色荷（主要贡献）

Additional gluon radiation:



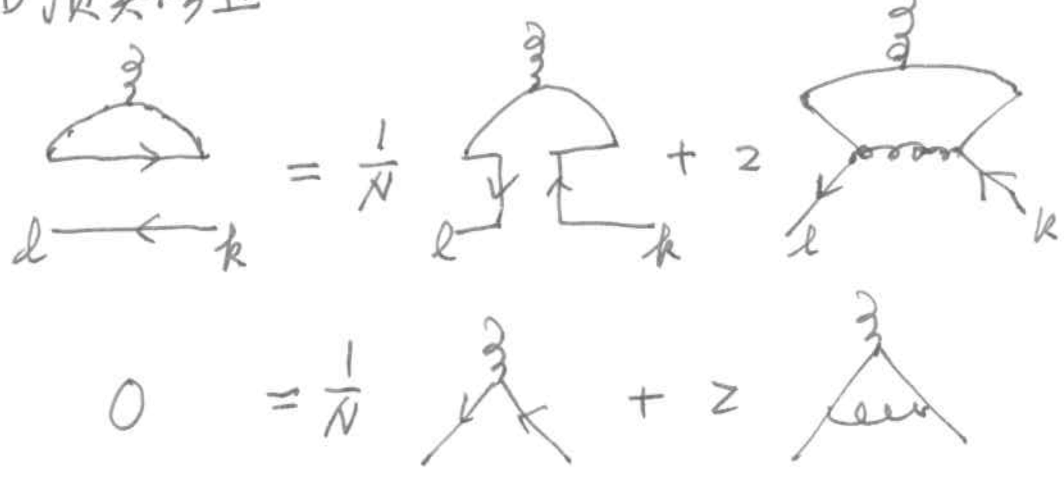
额外胶子主要出现在阴影区域

2.3) Quark "色荷" "squared color charge" $\underline{C_F}$



$$N\delta^l_k = \frac{1}{N}\delta^l_k + 2C_F\delta^l_k \Rightarrow \underline{C_F = \frac{N^2-1}{2N} = \frac{4}{3}}$$

2.4) QCD顶点修正



代数语言: $\underline{t^a t^b t^a = -\frac{1}{2N} t^b}$

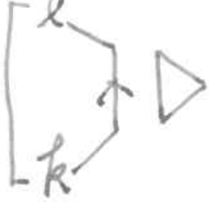
注意: 我们画的仅是色空间中的因子贡献
等式左边是真正的费曼图，但右方为"示意图".

QED 顶点:  :  C_F

我们也可用 Fierz identity 求证一下

 $= \frac{1}{N}$  $+ 2$ 

$N\delta^l_k = \frac{1}{N}$  $+ 2$ 

$\Rightarrow$  $= \frac{1}{2}\Big[$  $- \frac{1}{N}$  $\Big]$

$$= \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right) = \frac{N^2-1}{2N}\,\delta^l_k$$

QCD versus QED 修正

 $\left(-\frac{1}{2N}\right)$  $C_F = \frac{N^2-1}{2N}$

胶子修正导致排斥力

胶子修正导致吸引力

2.5 对 

的 QCD 虚修正

首先考虑我们熟悉的 

γ 过程

$\Rightarrow C_F$ 

$\Rightarrow C_F$ 

由Ward恒等式可知上面QCD修正中紫外发散相消

（注意：顶点修正和外线自能修正色因子相同）

而QCD中贡献不同


$= -\frac{1}{2N}$  δZ_{virt} (vertex)


$= \frac{N^2-1}{2N}$  $\delta Z_{w.f}$ (wave function)

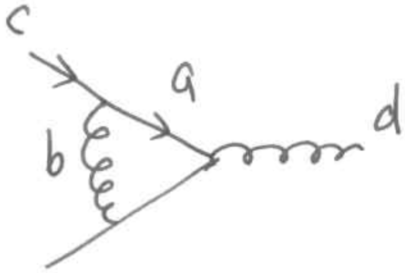
色因子不同，紫外发散无法抵消

$\Rightarrow$ 我们需要额外的贡献

$$\delta Z_{wf} + \delta Z_{virt} = \frac{N^2-1}{2N} A \ln\Lambda + \left(-\frac{1}{2N}\right)\left(-A\ln\Lambda\right)$$

（仅保留发散项，方便讨论）

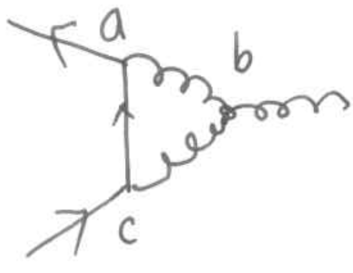
注意:  $\sim \frac{1}{N^2-1}$ 

在大N极限下  $\sim -\frac{1}{2N} \xrightarrow{\text{大}N} 0$

这说明: $c \to a+g$ 后, a夸克仅仅携带少量的色荷, 从而导致 a 和外部胶子(d)的相互作用减弱.

但因为 a 和 b 都是虚粒子, 并不会真正减少色荷。那么色荷到哪里去了?

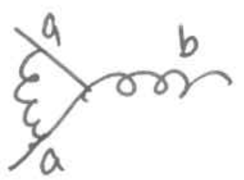
$\Longrightarrow$ 还有1个费曼图

 $= \frac{C_A}{2}$ 

代数写法 $t^a t^c i f_{abc} = \frac{C_A}{2} t^b$

我们期待这个 Non-abelian 贡献可以抵消顶点图和自能图.

$\Longrightarrow$ C_A 一定不被大N压低

( + ) 的发散项的色因子是

$$\frac{N^2-1}{2N}t^b-\left(-\frac{1}{2N}\right)t^b=\frac{N}{2}t^b$$

$\Longrightarrow$ 要求 $C_A=N$

下面我们验证 $C_A=N$。

将色矩阵显式写出如下

$$t^at^at^b-t^at^bt^a=t^a[t^a,t^b]=t^a\,if_{abc}t^c$$

$$=\left(\frac{1}{2}[t^a,t^c]+\frac{1}{2}\underbrace{\{t^a,t^c\}}_{\text{对称}}\right)if_{abc}$$

$$=\left(\frac{i}{2}f_{acd}t^d\right)if_{abc}$$

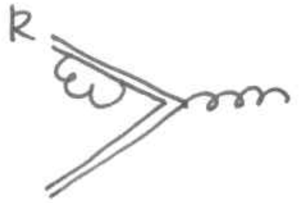
$$=\frac{1}{2}f_{acd}f_{acb}t^d\equiv\frac{C_A}{2}t^b$$ （参见 C_A 定义）

$$\Rightarrow\ \underline{C_A=N}$$

注意: $t^at^at^b-t^at^bt^a=\underline{C_Ft^b-t^at^bt^c=\frac{C_A}{2}t^b}$

在上式中我们仅仅使用了对易关系，因为对易关系与具体表示无关，因此

$$T^a(R)\,T^b(R)\,T^a(R)=\left(C(R)-\frac{C_A}{2}\right)T^b(R)$$

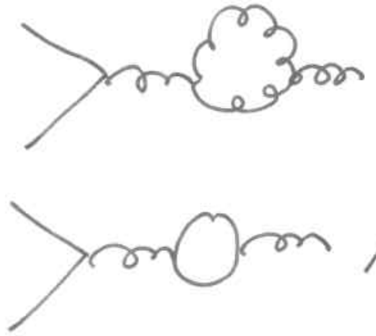
故，( + ) 的发散项为

$$= C(R)\, A \ln\Lambda - \left(C(R) - \frac{C_A}{2}\right) A \ln\Lambda$$

$$= \frac{C_A}{2} A \ln\Lambda$$

两者之和消去和表示有关的发散。

 $= \frac{C_A}{2}(G-A)\ln\Lambda$

() $= \left\{ \frac{g_s^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f\right) - \frac{C_A}{2} G \right\} \ln\Lambda$

将所有图形求和之后可得

$$\delta g_s = g_s \left(\delta Z_{wf}^{(R)} + \delta Z_{virt} + \delta_{virt}^{(NA)} + \frac{1}{2}\delta Z_{w.f}^{(gluon)} \right)$$

$$= \frac{g_s^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f\right)\ln\Lambda$$

2.6 d-符号

$$d_{abc} = 2\mathrm{Tr}\left(t^a t^b t^c + t^b t^a t^c\right)$$

在具体计算中，我们经常遇到d-符号，虽然它并不直接出现在费曼顶点中.

令 $M = t^a t^b + t^b t^a - \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1} \equiv d_{abc} t^c$

① M 关于 a, b 是对称的

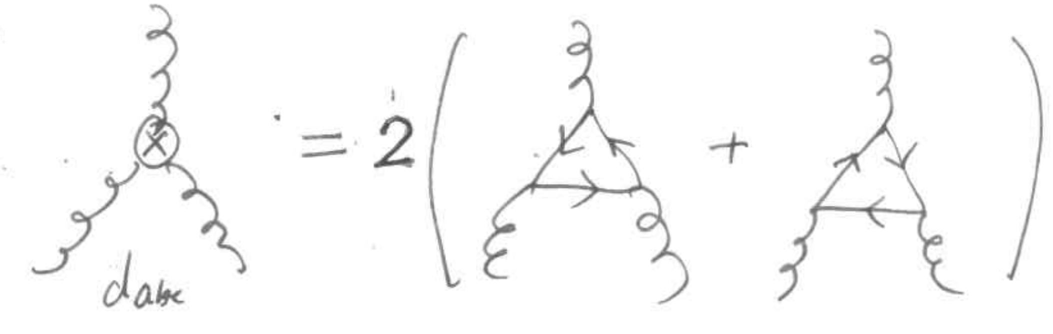
② $\mathrm{tr}(M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N}\times N = 0$

将 M 按 $\mathbb{1}$ 和 t^c 展开可得

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(M)\mathbb{1} + 2\mathrm{Tr}(M t^c)\, t^c \\ &= 2\mathrm{Tr}\left(\left(t^a t^b + t^b t^a - \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1}\right) t^c\right) t^c \\ &= 2\mathrm{Tr}\left(t^a t^b t^c + t^b t^a t^c\right) t^c \\ &\equiv d_{abc}\, t^c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_{abc} = 2\mathrm{Tr}\left(t^a t^b t^c + t^b t^a t^c\right)$$

图示:



d符号属性

1) 令 M 中的 $a=b$, 则有

$$M = t^a t^a + t^a t^a - \frac{1}{N}\delta_{aa}\mathbb{1} = d_{aac}t^c$$

$$\Rightarrow 2C_F\mathbb{1} - \frac{N^2-1}{N}\mathbb{1} = d_{aac}t^c = 0$$

$$\Rightarrow d_{aac} = 0$$

这意味 d_{abc} 是 $(N^2-1)\times(N^2-1) = 8\times 8$ 无迹矩阵

共有8个.

2) $t^b M$:

$$左方 = t^b\left(t^a t^b + t^b t^a - \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1}\right) = \left(-\frac{1}{2N} + \frac{N^2-1}{2N} - \frac{1}{N}\right)t^a$$

$$= \frac{N^2-4}{2N}t^a$$

$$右方 = d_{abc}t^b t^c$$

$$= d_{abc}\cdot\frac{1}{2}\left(t^b t^c + t^c t^b - \frac{1}{N}\delta_{bc}\mathbb{1}\right) \equiv \frac{1}{2}d_{abc}d_{bce}t^e$$

从而有

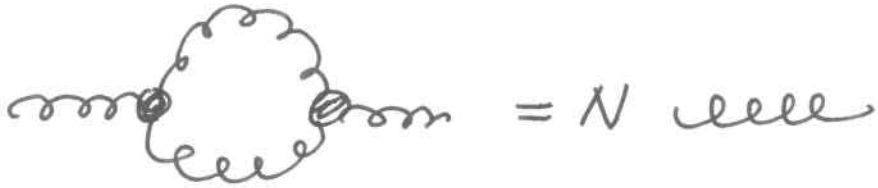
$$\frac{1}{2}d_{abc}d_{bce}t^e = \frac{N^2-4}{2N}t^a \Rightarrow \boxed{d_{abc}d_{bce} = \frac{N^2-4}{N}\delta_{ae}}$$

$$= \frac{N^2-4}{N}$$

关于结构常数 f_{abc}，我们有

$$f_{abc}f_{ebc} = N\delta_{ae}$$

即



2.7 d符号应用示例 — 从夸克线上连续辐射双胶子

令 $M = t^a t^b + t^b t^a - \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1} \equiv d_{abc}t^c$

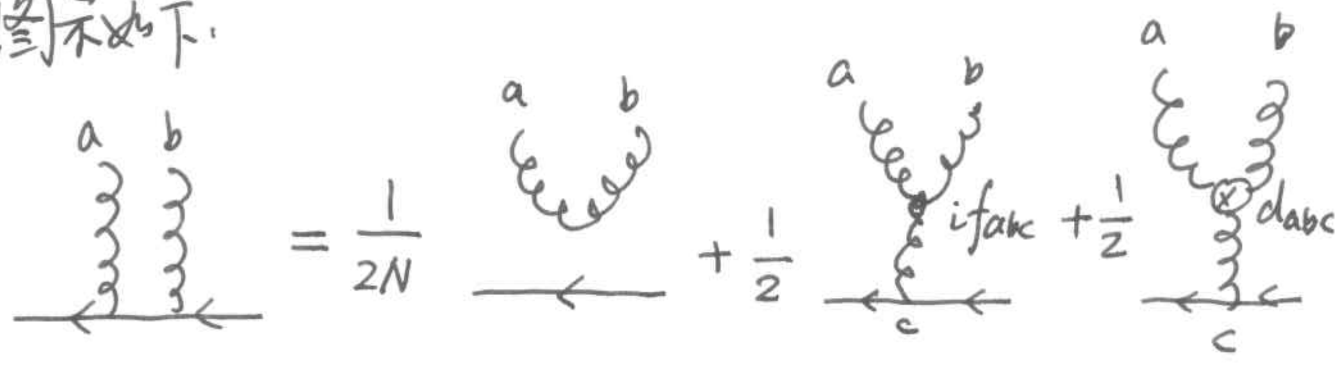
重新组合后可得

$$2t^at^b - t^at^b + t^bt^a - \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1} = d_{abc}t^c$$

$$\Rightarrow 2t^at^b = d_{abc}t^c + \frac{1}{N}\delta_{ab}\mathbb{1} + [t^a, t^b]$$

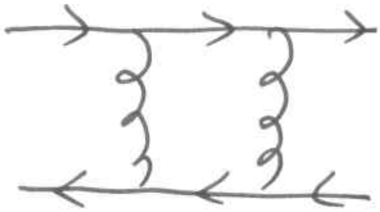
$$\Rightarrow t^at^b = \frac{1}{2}d_{abc}t^c + \frac{1}{2N}\delta_{ab}\mathbb{1} + \frac{i}{2}f_{abc}t^c$$

图示如下：

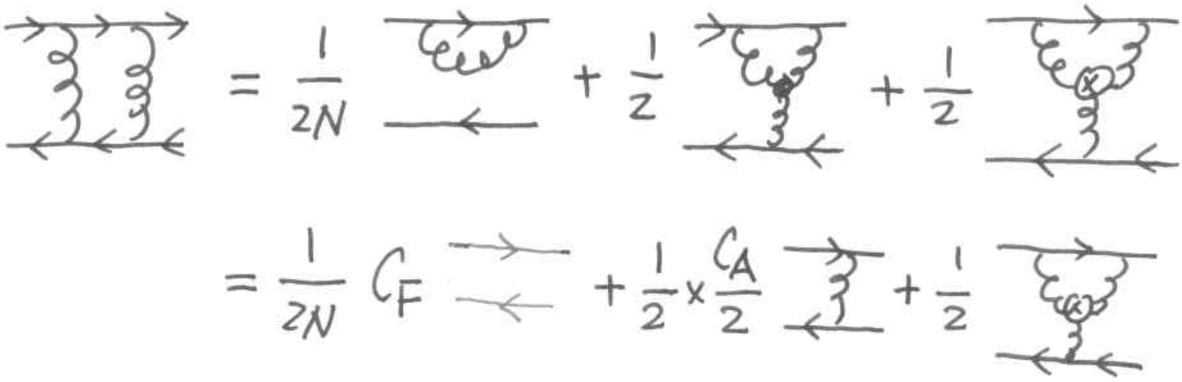


其次，我们考虑 $q\bar{q} \to q\bar{q}$ 的双胶子虚修正的色因子.

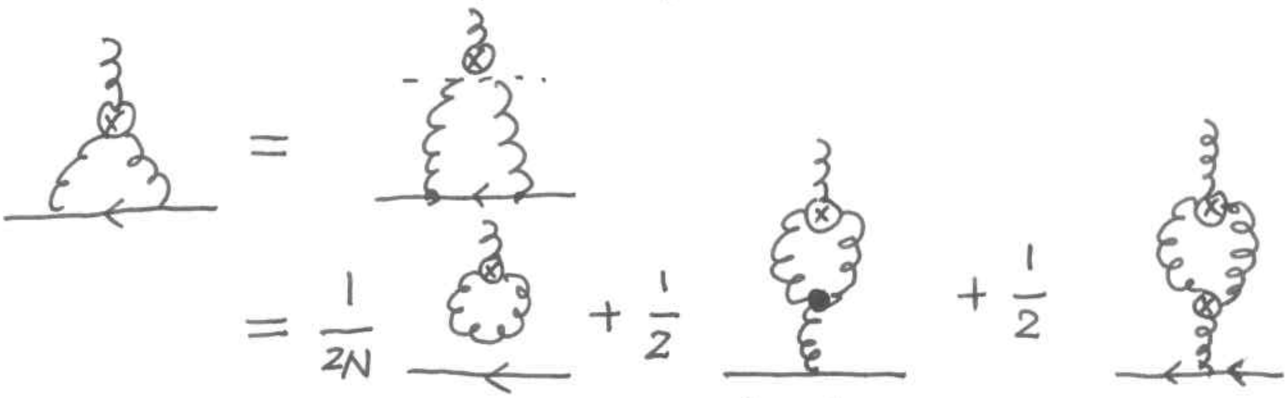
即



① 我们需把之前得到的双胶子连接到同一个夸克线上，即

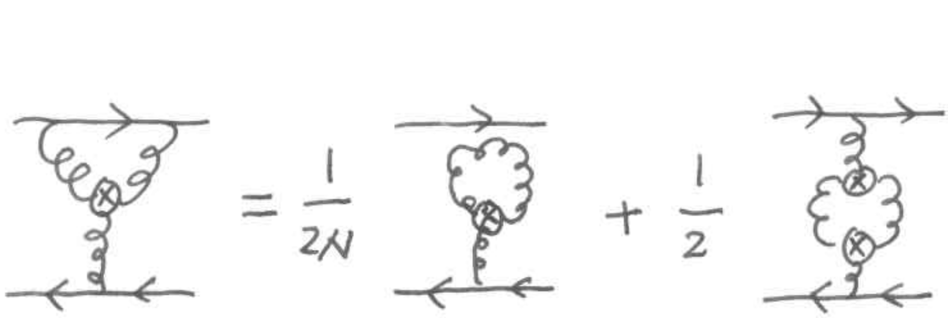


② 下面我们计算右方第3个图形



$f_{abc} \cdot d_{ebc} = 0$

即



$d_{aac} = 0$

③ 散射

$$= \frac{1}{2N} C_F \quad + \frac{1}{2}\times\frac{C_A}{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

(利用)

$$= \frac{1}{2N} C_F \quad + \frac{1}{2}\times\frac{C_A}{2} \quad + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{N^2-4}{N}$$

$$= \frac{N^2-1}{4N^2} \quad + \frac{N^2-2}{2N}$$

$$= \frac{N^2-1}{4N^2} \quad + \frac{N^2-2}{2N}\left(\frac{1}{2} \quad - \frac{1}{2N}\right)$$

$$= \frac{1}{4N^2} \quad + \frac{N^2-2}{4N}$$

$$\overset{N=3}{=} \frac{1}{36}\delta^i_j\delta^l_k + \frac{7}{12}\delta^i_k\delta^j_l$$

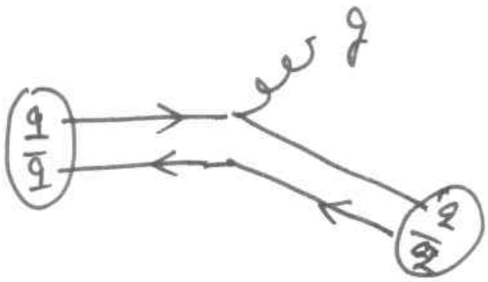
类似地可得. $(q\bar{q}\to q\bar{q})$

$$= \frac{N^2-1}{4N^2} \quad - \frac{1}{N}$$

作业：

1) 将 s-channel 散射的 $q\bar{q} \to q\bar{q}$ 过程分解为色单态和色八重态

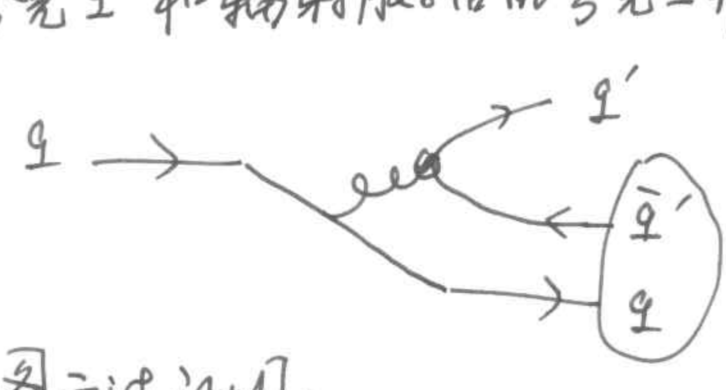
2) 设一个处于 8 重态的 $(q\bar{q})$ 束缚态。当其辐射一个胶子后，其处于 8 重态或单态的几率比值如何



$\omega_1 = ?$
$\omega_8 = ?$

$$\frac{\omega_1}{\omega_8} = \frac{1}{7}.$$

3) 初态夸克辐射一个胶子，此胶子进一步衰变成 $q'\bar{q}'$。新反夸克 $\bar{q}'$ 和辐射胶子后的夸克 q 形成束缚态介子。



请用图示法证明

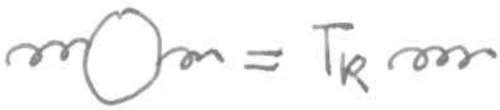
新介子处于 8 重态和单态的几率比值为

$$\frac{\omega_1}{\omega_8} = \frac{8}{1}$$

本讲座中使用的画示方法请参见 Cvitanovic 的书

基本性质: $\mathrm{Tr}\,\mathbb{1} = N_c$  $= N_c$

$\mathrm{Tr}\, t^a = 0$  $= 0$

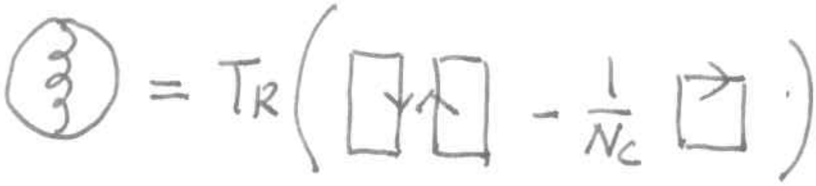
$\mathrm{Tr}(t^a t^b) = T_R \delta^{ab}$ 

示例1. 胶子的色自由度的个数

$N_g =$ 

$=$  $- \frac{1}{N_c}$  $= N_c^2 - 1$

其中用到 

$\Rightarrow$ 

示例2. 夸克自能修正

 $= T_R \Big[$  $- \frac{1}{N_c} \longrightarrow \Big]$

$$= T_R \left(N_c - \frac{1}{N_c} \right) \longrightarrow$$

$\Rightarrow$  $= C_F \longrightarrow$

代数: $t^a t^a = C_F$, $C_F = T_R \left(N_c - \frac{1}{N_c} \right)$

示例3. 三胶子相互作用顶点

由对易关系 $[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c$

可知 $$i f^{abc} = \frac{1}{T_R} \mathrm{Tr}\, [t^a, t^b]\, t^c$$

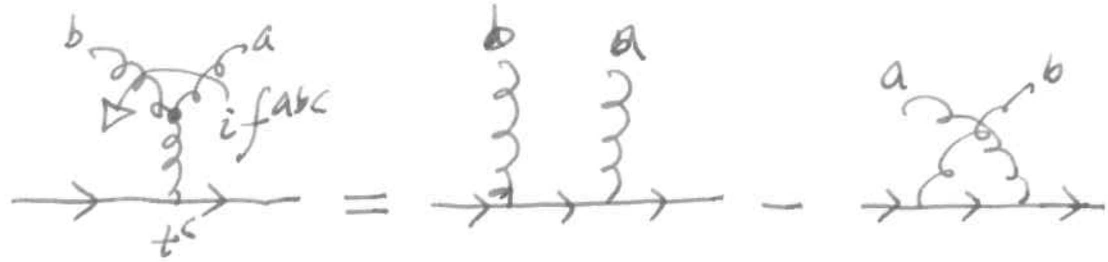
同时, $$[t^a, t^b]_+ = 2 \frac{T_R}{N_c} \delta^{ab} + d^{abc} t^c$$

$$\Rightarrow d_{abc} = \frac{1}{T_R} \mathrm{Tr}\, [t^a, t^b]_+\, t^c$$

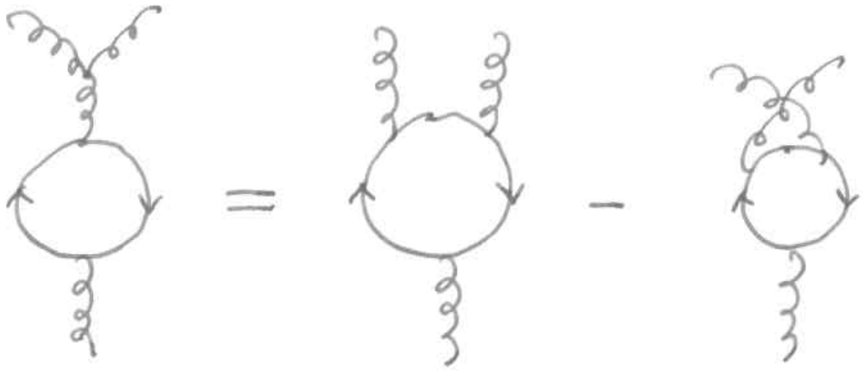
$$= \frac{1}{T_R} \mathrm{Tr}\, \{t^a, t^b\}\, t^c$$

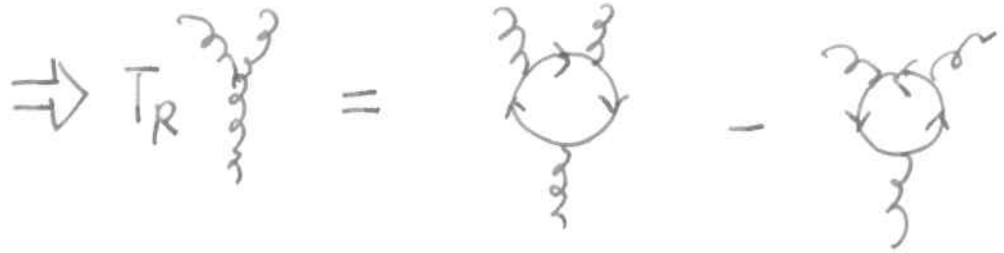
(d_{abc}是实常数)

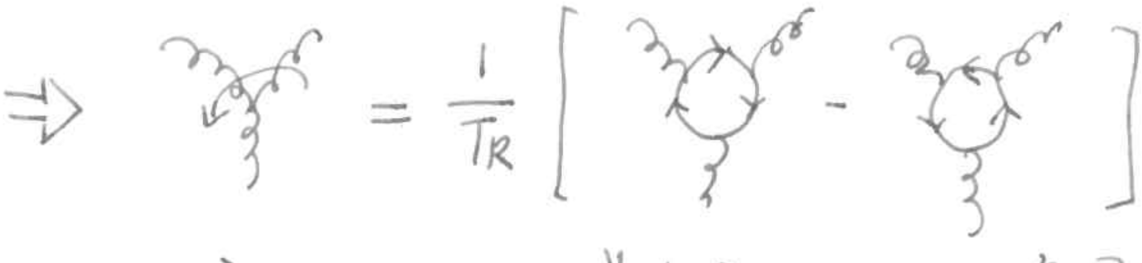
上面的生成元对易关系可用下图表示



将费米子线封闭起来，并连接到另一个胶子上。



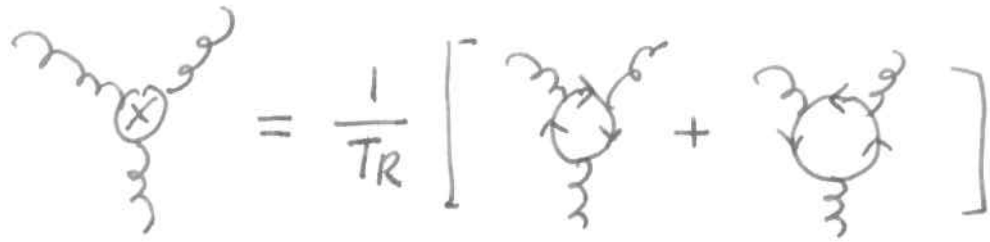




注意：上面仅仅是色空间因子的示意图
并非是费曼图!!!

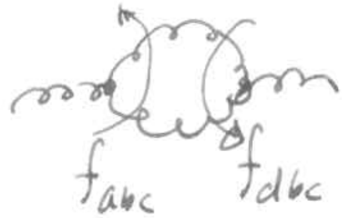
通过这种定义，我们可以将三胶子相互作用顶点从计算中去掉，仅需计算 t^a 的迹

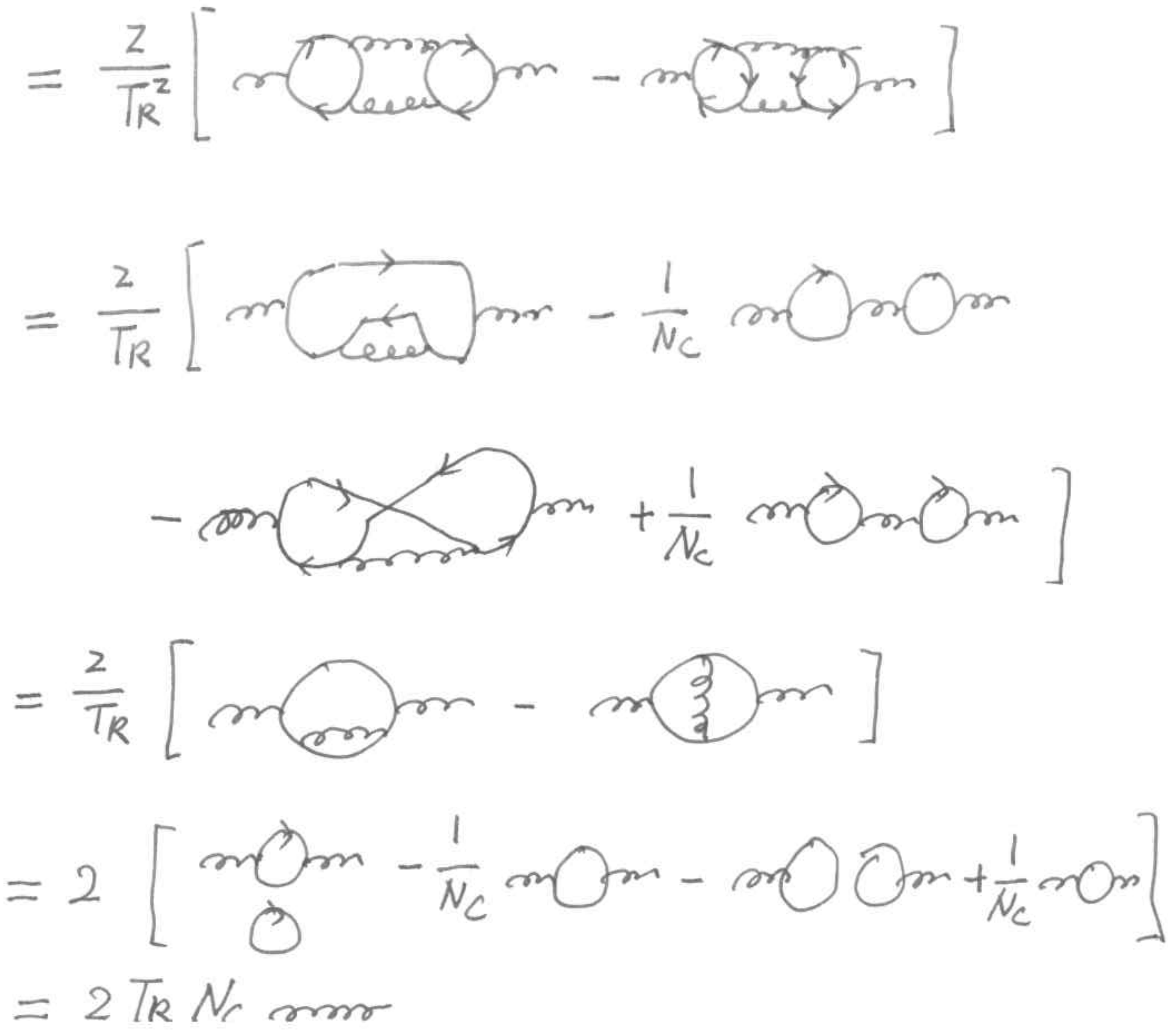
同理可得: d^{abc}

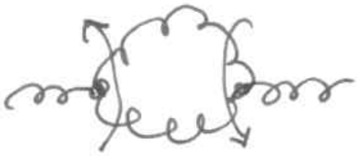


注意: d^{abc}对所有指标都对称

示例4:





此即  $= C_A$ 

$$i f^{acd} f^{bdc} = C_A \delta^{ab}$$

并且伴随表示中的Casimir算符是

$$C_A = 2 T_R N_c = N_c$$
$$(T_R = 1/2)$$

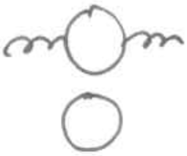
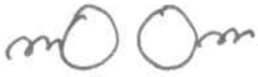
示例5:

 $= \frac{2}{T_R^2}\Big[$  $+$  $\Big]$

$= \frac{2}{T_R}\Big[$  $- \frac{1}{N_c}$ 

$+$  $- \frac{1}{N_c}$  $\Big]$

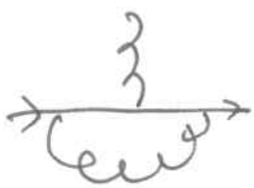
$= \frac{2}{T_R}\Big[$  $+$  $\Big] - 4\frac{T_R}{N_c}$ 

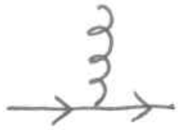
$= 2\Big[$  $- \frac{1}{N_c}$  $+$  $- \frac{1}{N_c}$  $\Big]$

$- 4\frac{T_R}{N_c}$ 

$= 2T_R\left(N_c - \frac{4}{N_c}\right)$ 

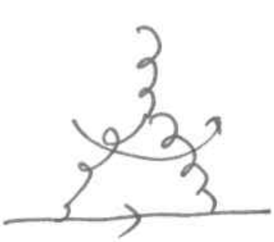
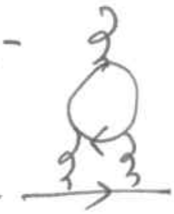
示例6

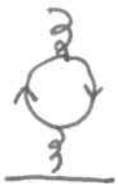
 $= T_R \Big[$  $- \frac{1}{N_c}$  $\Big]$

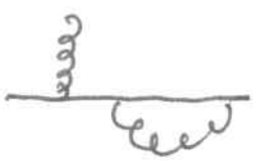
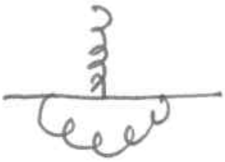
$= -\frac{T_R}{N_c}$ 

即: $t^a t^b t^c = -\frac{T_R}{N_c} t^b$, $-\frac{T_R}{N_c} = C_F - \frac{C_A}{2}$

示例7

 $= \frac{1}{T_R} \Big[$  $-$  $\Big]$

$=$  $- \frac{1}{N_c}$  $-$  $+ \frac{1}{N_c}$ 

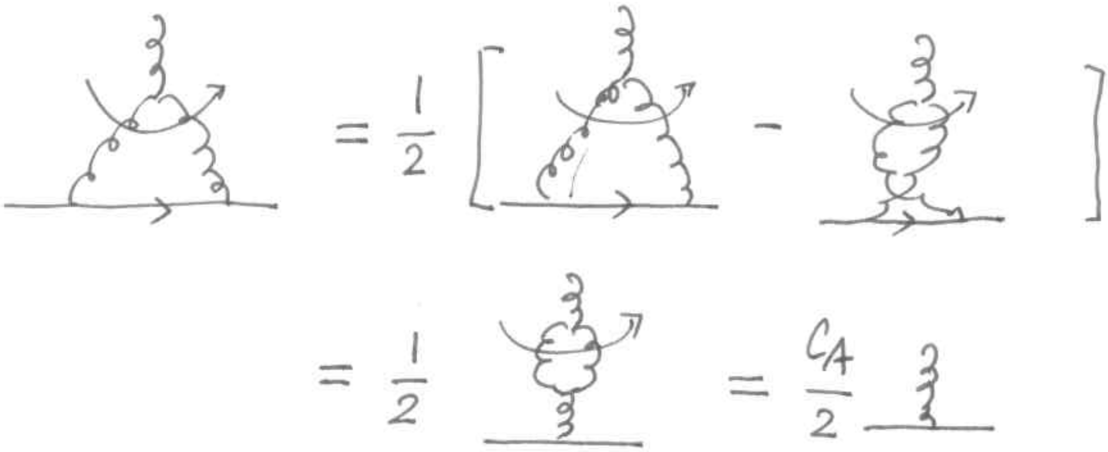
$=$  $-$ 

$= T_R \Big[$  $- \frac{1}{N_c}$  $-$  $+ \frac{1}{N_c}$  $\Big]$

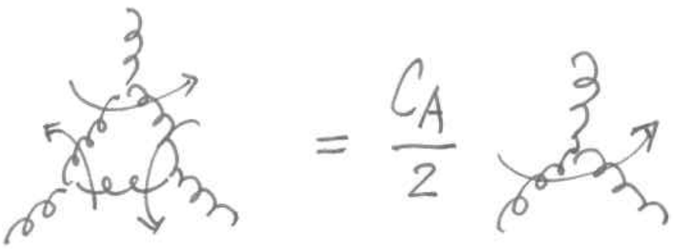
$= T_R N_c$ 

即: $if^{abc} t^b t^a = \frac{C_A}{2} t^c$

另一种简单推导方法



同样,我们也会遇到如下图形.



$$if^{adf}\, if^{bed}\, if^{cfe} = \frac{C_A}{2}\, if^{abc}$$