薛定谔方程的重整化和有效理论

黄应生

目录

摘要

Abstract

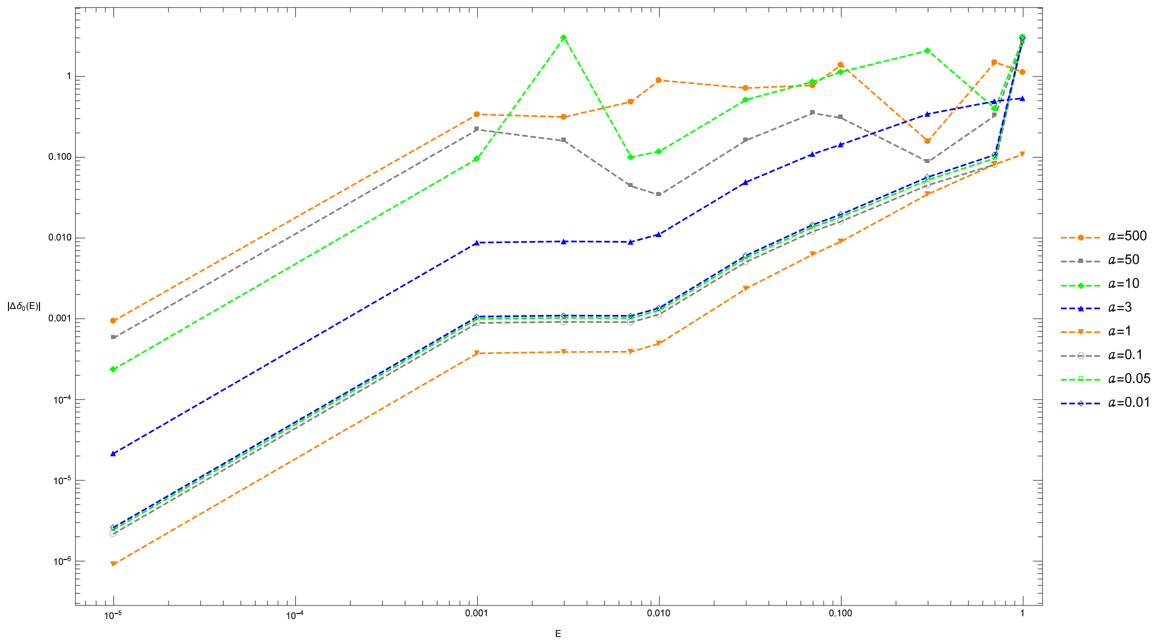

图 1: $\alpha = 1,m = 1$

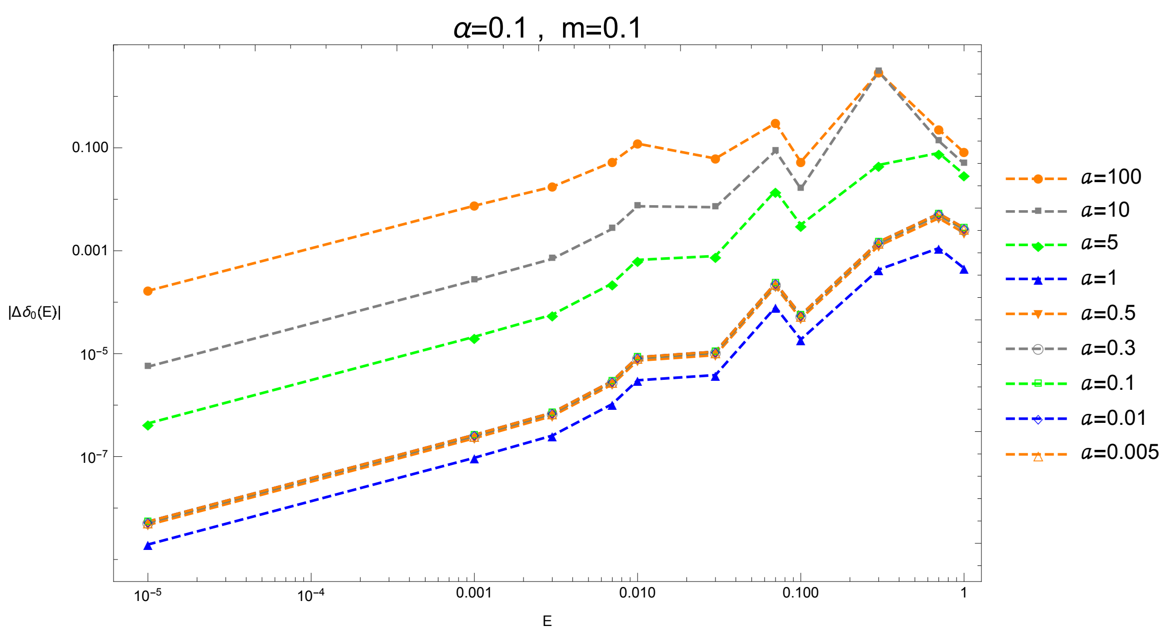

图 2: $\alpha = 0.1,m = 0.1$

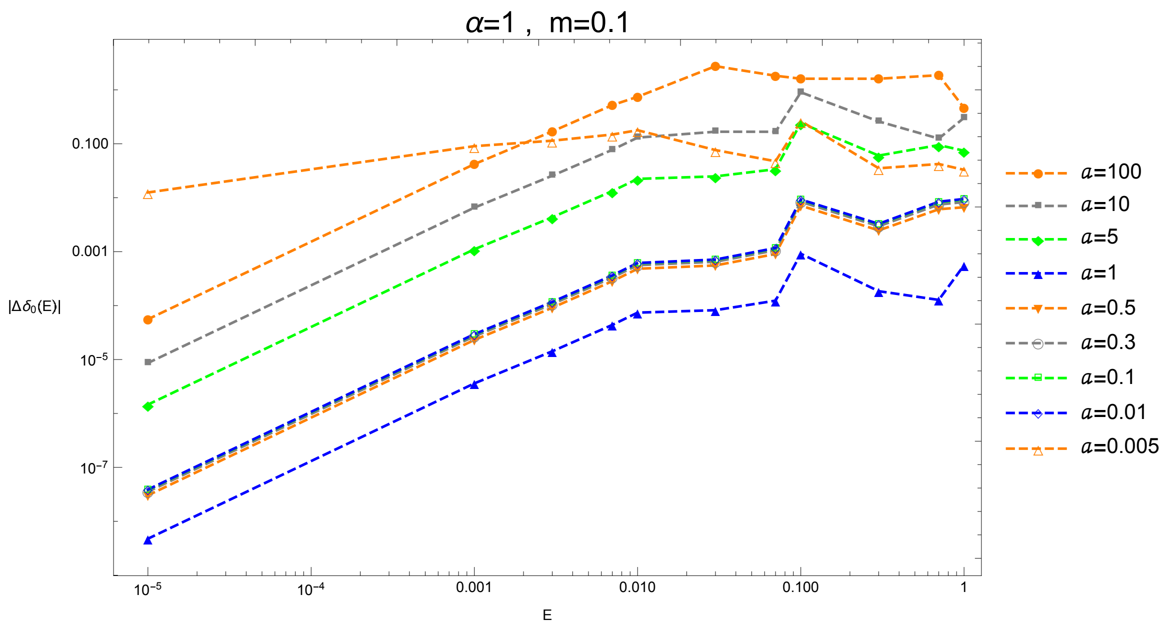

图 3: $\alpha = 1, m = 0.1$

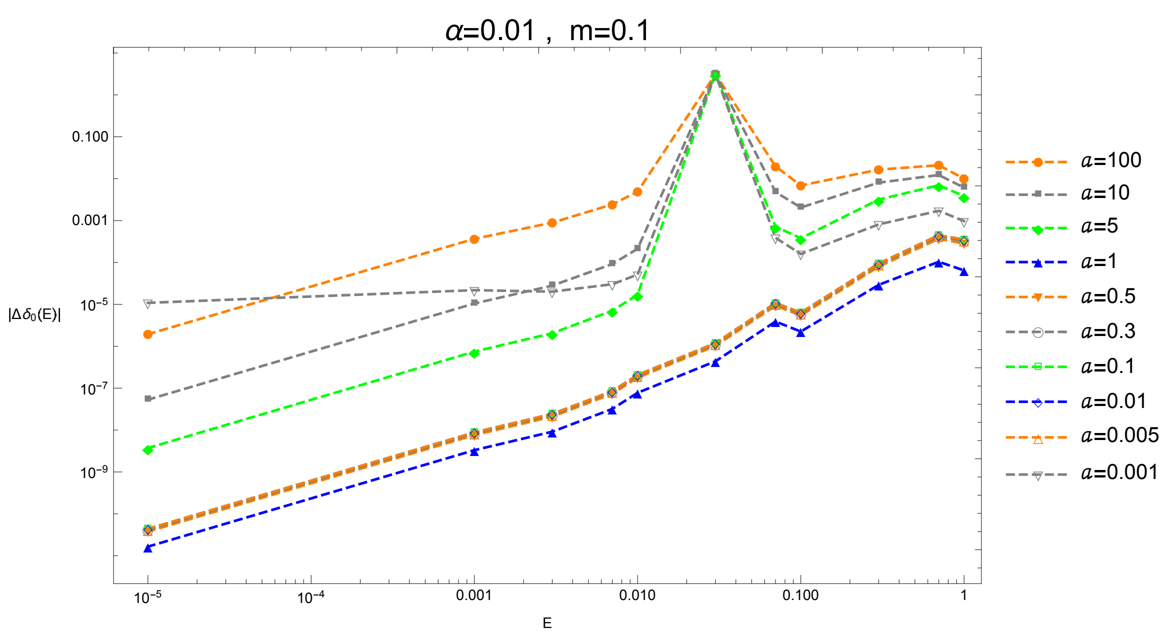

图 4: $\alpha = 0.01, m = 0.1$

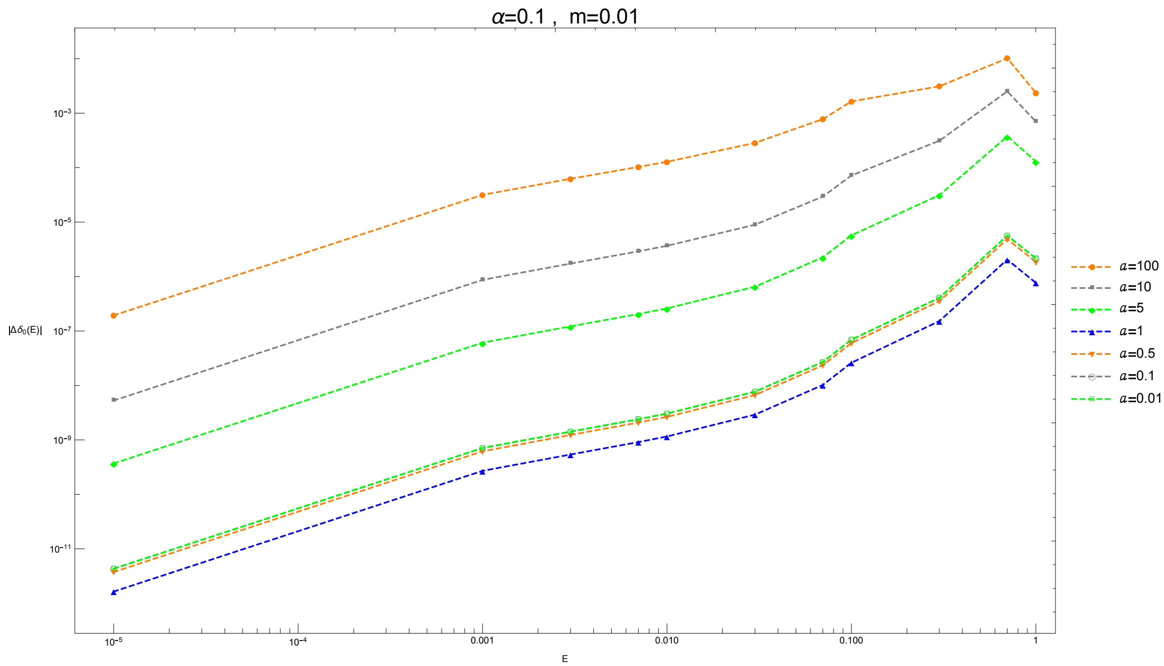

图 5: $\alpha = 0.1, m = 0.01$

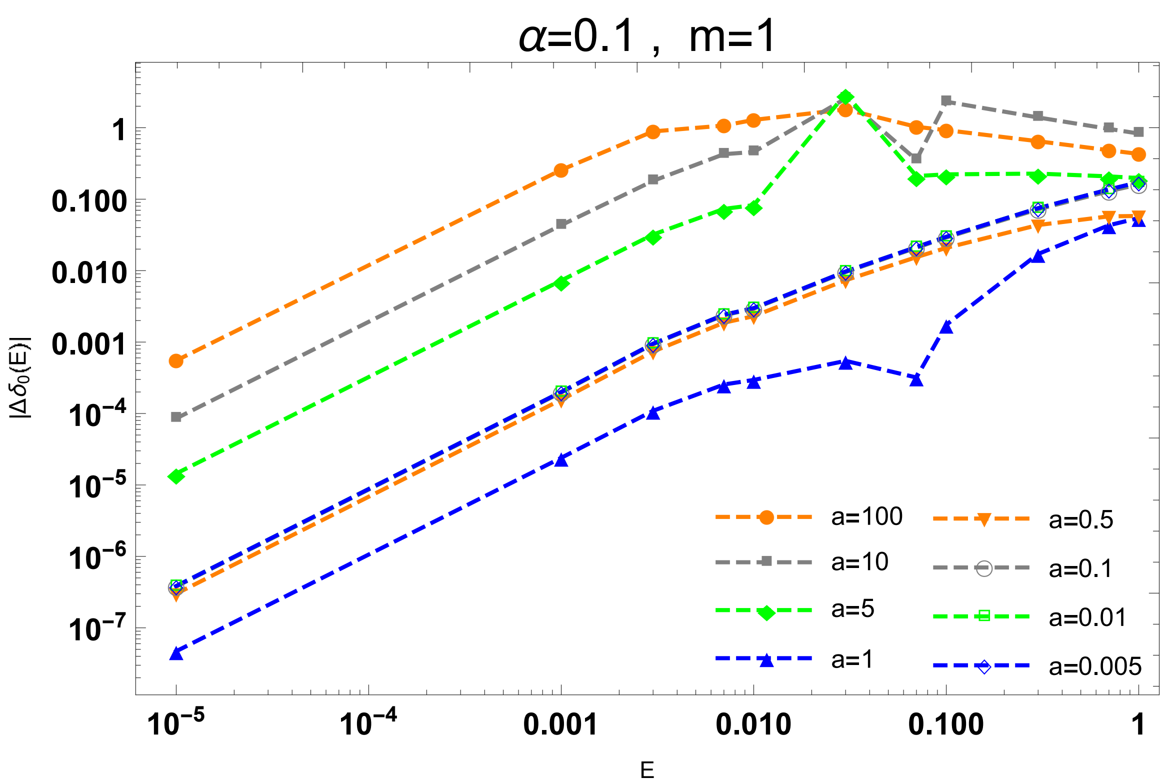

图 6: $\alpha = 0.1, m = 1$

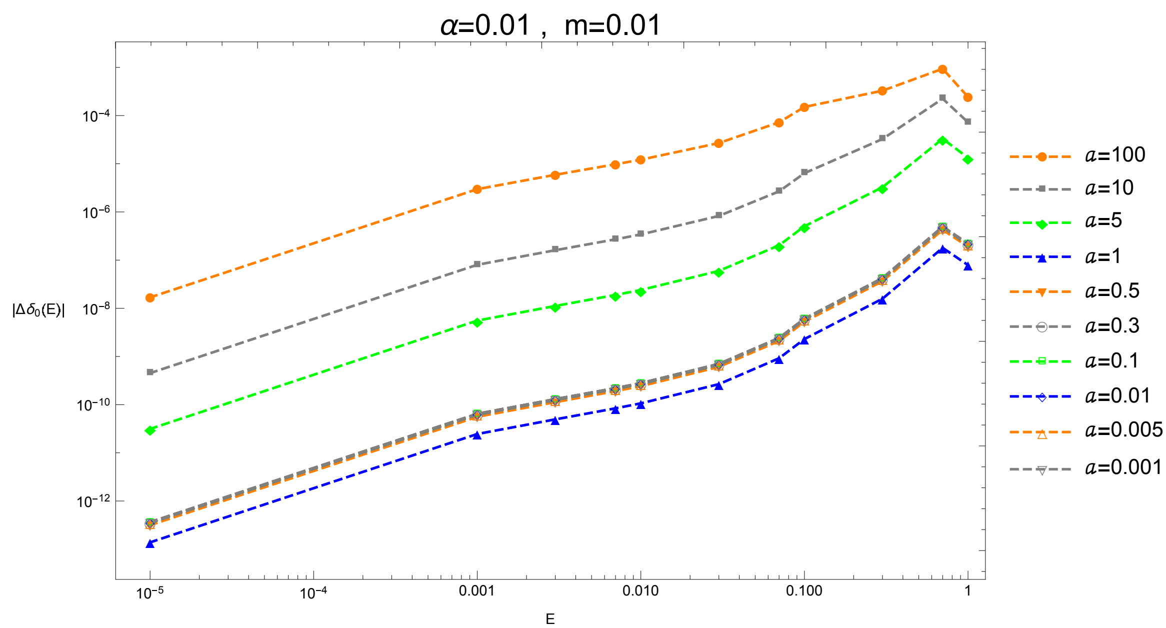

图 7: $\alpha = 0.01, m = 0.01$

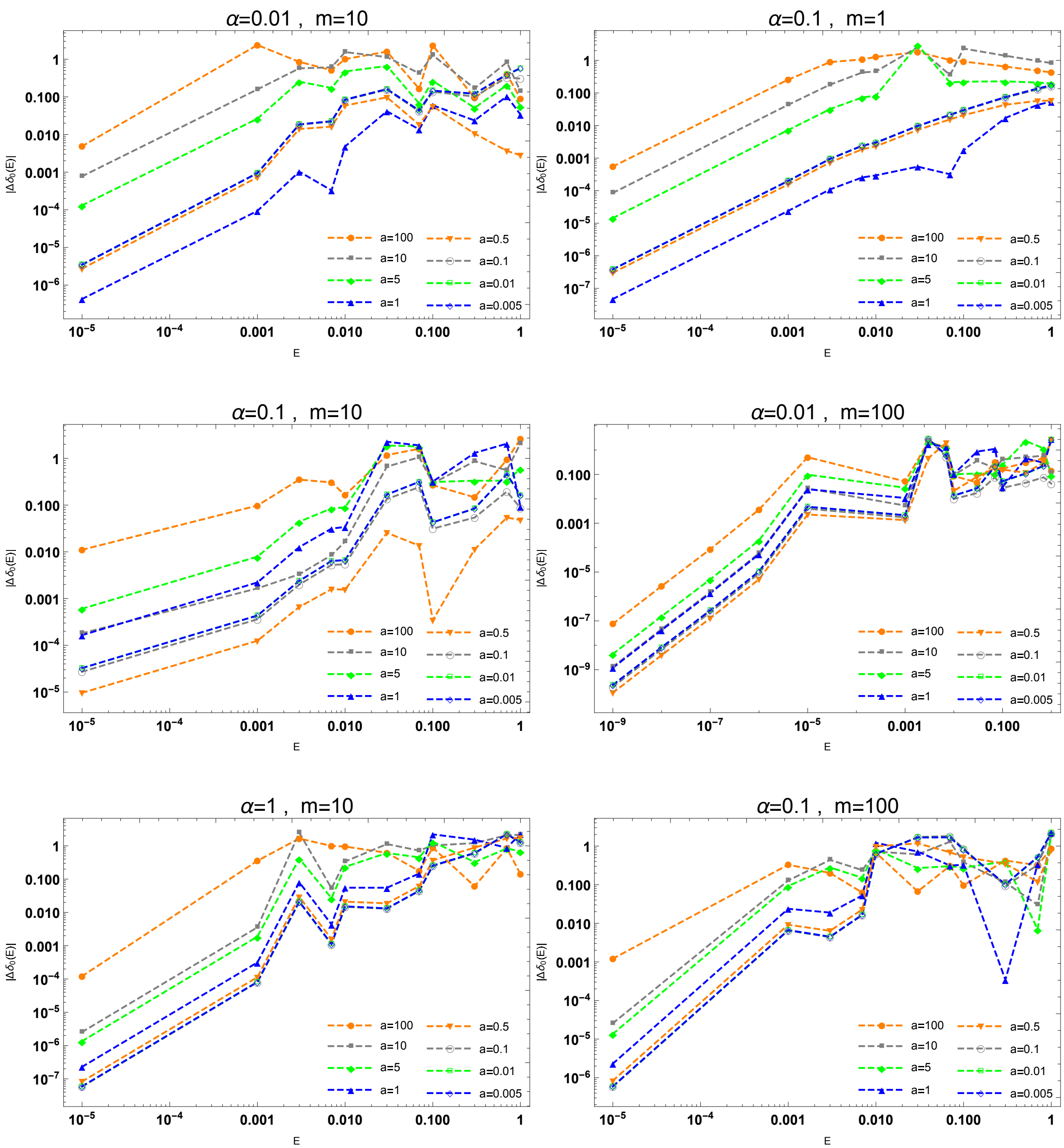

图 8: Determine a

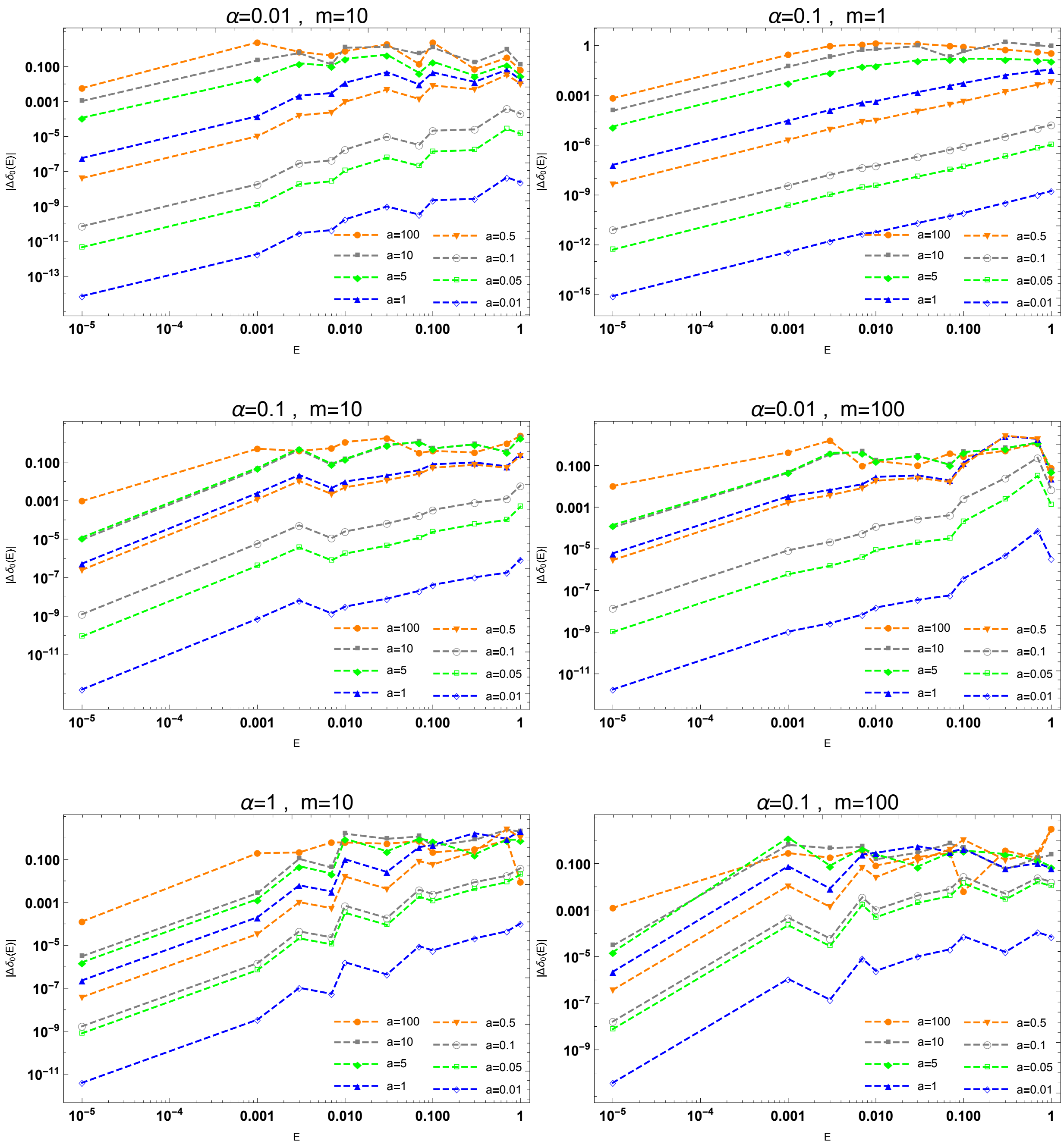

图 9: Determine a

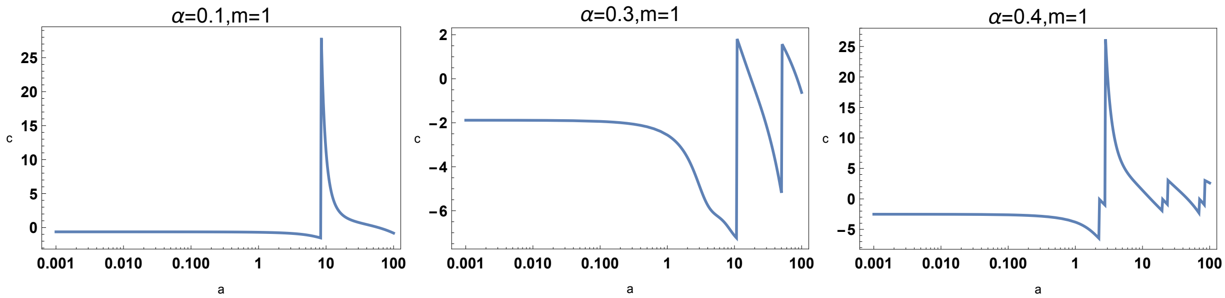

图 10: 有效势 $V_{eff}^{(a^2)}$ 的耦合常数 c 对截断 a 的依赖

0.1 $\psi(r)$

$\psi_{eff}(r)$ 修正后表达式为：

$$\psi_{true}(r) = \overline{\gamma}(r) \int \mathrm{d}^3 r \psi_{eff} \delta_a^3(\mathbf{r}) + \overline{\eta}(r) a^2 \int \mathrm{d}^3 r \psi_{eff} \nabla^2 \delta_a^3(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(a^3) \tag{0.1}$$

这一关系仅在 $r < a$ 时成立。
可以发现除了第一个能级之外，其它能级与真实波函数都符合得较好，并且能级越高，符合得越好。若 $r > a$，则

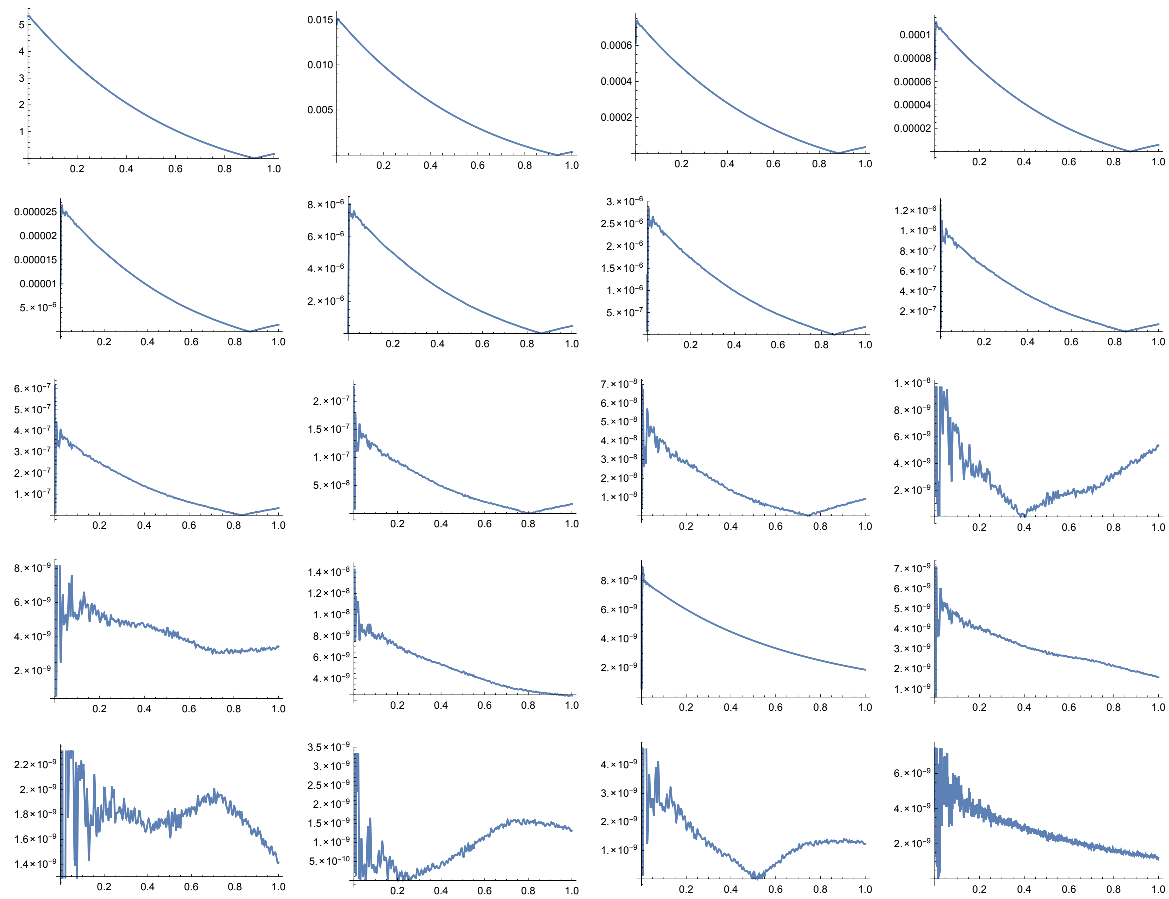

图 11: $\psi_{eff}(r)$ 在前 20 个能级与真实波函数的对比

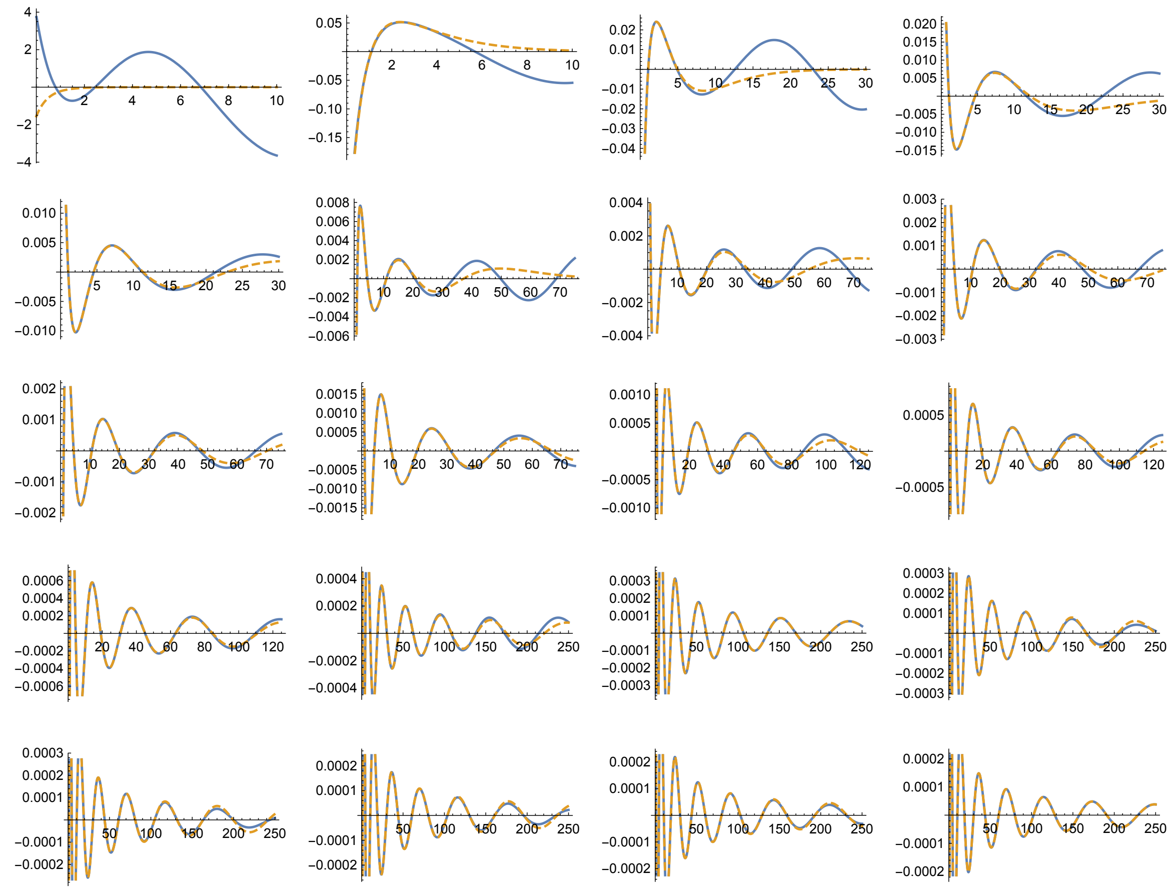

图 12: $\psi_{eff}(r)(r>a)$ 在前 20 个能级与真实波函数的对比

但若再加上 $\overline{Z}(r)\psi_{eff}(r)$，则可让 $\psi_{true}(r)$ 在 $r>a$ 时也能成立。

加上 $\overline{Z}(r)$，$\psi_{true}(r)$ 可写为

$$\psi_{true}(r)=\overline{Z}(r)\psi_{eff}(r)+\overline{\gamma}(r)\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\delta_a^3(\mathbf{r})+\overline{\eta}(r)a^2\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\nabla^2\delta_a^3(\mathbf{r})+\mathcal{O}(a^3) \quad (0.2)$$

于是可以得到 $\psi_{true}(r)$ 的图像。
可以发现，对于几乎所有能级（除了 1S 外），大范围的 r 内基本都与真实波函数一致。但是图像中的波函数并不是完全光滑的，这是因为(0.2)中的参数不止有一种可能，而不光滑的地方则是参数从一种可能跳到另一种可能所导致的。

$\nabla^2\psi_{true}(r)$ 同样可以用相同的办法求出。对方程(0.1)左右同时求导后可以得到

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi_{true}(r)=&\overline{\gamma}(r)\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\delta_a^3(\mathbf{r})+\overline{\gamma'}(r)\int \mathrm{d}^3r\nabla^2\left[\psi_{eff}\delta_a^3(\mathbf{r})\right]+\overline{\eta}(r)a^2\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\nabla^2\delta_a^3(\mathbf{r})\\&+\overline{\eta'}(r)a^2\int \mathrm{d}^3r\nabla^2\left[\psi_{eff}\nabla^2\delta_a^3(\mathbf{r})\right]+\mathcal{O}(a^3)\end{aligned} \quad (0.3)$$

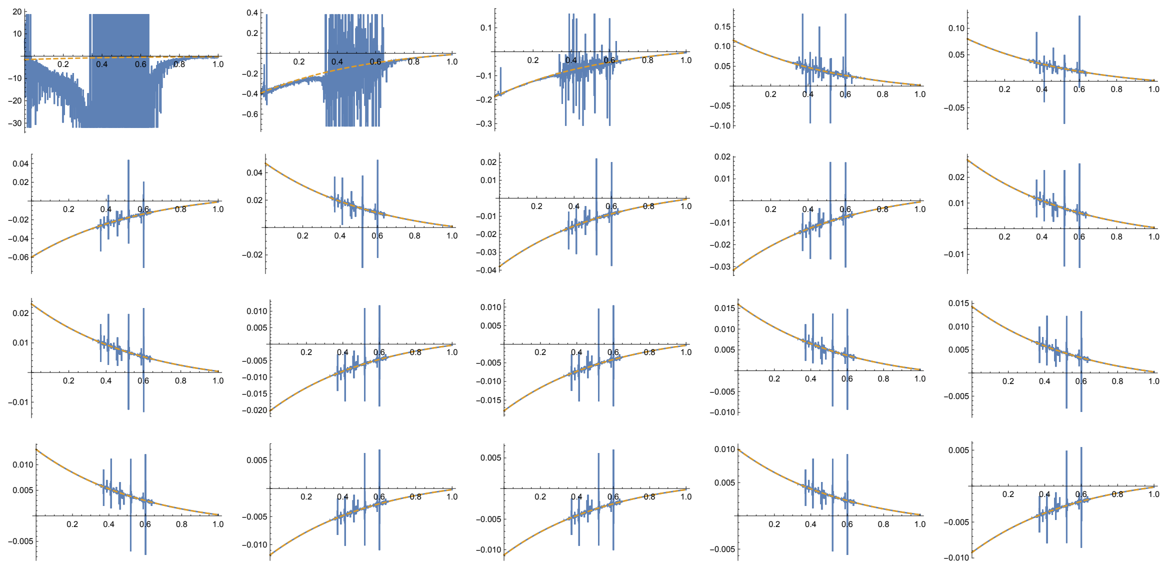

图 13: $\psi_{eff}(r)(r > a)$ 在前 20 个能级与真实波函数的对比

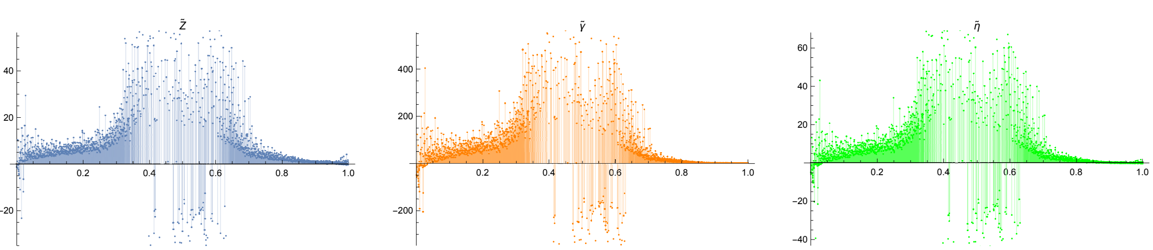

图 14: $\overline{Z}(r)$、$\overline{\gamma}(r)$、$\overline{\eta}(r)$ 的取值

其中可以证明 $\int \mathrm{d}^3r\nabla^2[\psi_{eff}\delta_a^3(\mathbf{r})]$ 与 $\int \mathrm{d}^3r\nabla^2[\psi_{eff}\nabla^2\delta_a^3(\mathbf{r})]$ 之值为 0。于是(0.3)仅剩两项

$$\nabla^2\psi_{true}(r) = \overline{\gamma}(r)\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\delta_a^3(\mathbf{r}) + \overline{\eta}(r)a^2\int \mathrm{d}^3r\psi_{eff}\nabla^2\delta_a^3(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(a^3) \tag{0.4}$$

其形式与(0.1)基本相同。画出 $r < a$ 时的图像，则为

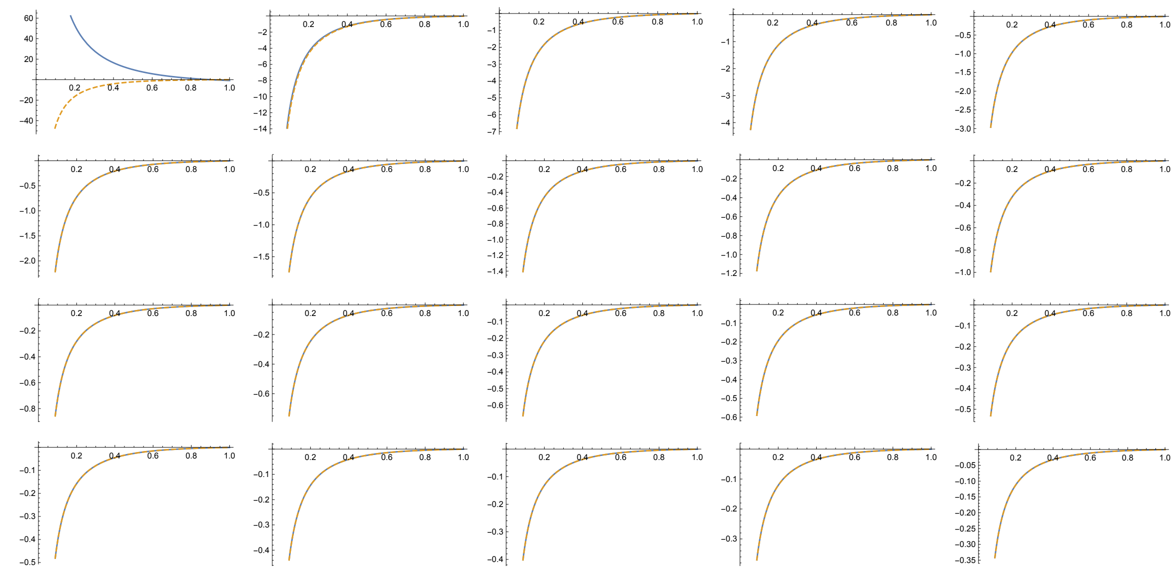

图 15: $\psi_{eff}(r)(r < a)$ 在前 20 个能级与真实波函数的对比