第二章　粒子的运动学性质和高能物理实验

第一节　粒子的运动学性质

1. 自然单位制

常数	约定	量纲	数值关系
光速	$c=1$	$[长度]=[时间]$	$1s=2.9979\times10^{8}m$
普朗克常数	$\hbar=1$	$[能量]=[时间]^{-1}$	$1(MeV)^{-1}=6.582\times10^{-22}s$
玻尔兹曼常数	$k=1$	$[能量]=[温度]$	$1eV=11604K$

粒子物理中常用的长度大单位是费米(fm)：$1\,fm=10^{-15}m$

自然单位制下唯一的单位——电子伏特

常用的单位有：eV，keV，MeV，GeV，TeV

长度单位费米(fm)和能量单位(eV)的关系：

$$\hbar c=197.3(MeV\cdot fm)=1$$
$$1\,fm=(197.3MeV)^{-1}$$

- 粒子物理中普遍使用，以避免数字写起来太麻烦，不直观
- 光速**c=1** ＝＞ **[**长度］＝［时间］

  $1s = 2.9979 \times 10^8$ m
- **ħ =1** ＝＞ **[**能量］＝ 1/［时间］

  $1\ (\mathrm{MeV})^{-1} = 6.582 \times 10^{-22}$ s
- 波尔兹曼常数 **k=1** ＝＞ **[**能量］＝［温度］

  1eV = 11604 K

- 电子伏特 eV, keV, MeV, GeV, TeV
  10^3 10^6 10^9 10^{12}
- 长度：费米1fm=10^{-15} m
- 截面：barn 1b = 10^{-28} m^2
- 往回换算时，也需应用上面的自然量
- $\hbar c$=197 MeV fm
- 普遍的自然单位制：$G_N=1$
- 或者 普朗克质量 $M_{plank} = (h\, c/G_N)^{1/2} = 1$
- 数字太大，不方便

2. 狭义相对论——Minkowski 度规和符号

度规张量： $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\mu , \nu = 0,1,2,3$

时空坐标(四矢量)： $x^{\mu} = (t, \vec{x})$ $x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} = (t, -\vec{x})$

四动量： $p^{\mu} = \left(E, \vec{p}\right)$ $p_{\mu} = g_{\mu\nu} p^{\nu} = \left(E, -\vec{p}\right)$

两个四矢量的标积： $A \cdot B = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A_{\mu} B^{\mu} = A^{\mu} B_{\mu} = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

例如： $x^2 = x_{\mu} x^{\mu} = t^2 - \vec{x}^2$ $p^2 = p_{\mu} p^{\mu} = E^2 - \vec{p}^2$

类时动量： $p^2 > 0$ 类空动量： $p^2 < 0$

质壳条件： $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ $\Rightarrow$

实的在壳粒子的4度动量 在此度规下 $p^2 = m^2 \geq 0$

3.粒子的质量——静止质量m

自由粒子波函数满足 薛定谔 方程 $$i\frac{d}{dt}|t\rangle \equiv H|0\rangle = E|0\rangle$$

哈密顿量H的测量值的物理意义是该粒子的总能量E。

对于稳定粒子，在该粒子的质心系中，E就是该粒子的质量E=m，薛定谔方程的解为

$$|t\rangle = e^{-imt}|0\rangle \qquad \langle t|t\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

归一化条件是与时间无关的, t时刻粒子在全空间中存在的概率为1,不随时间变化。

对于不稳定粒子，薛定谔方程的解为则需要修改，引入哈密顿量H的复本征值

$$E = m - i\frac{\Gamma}{2}$$ 其中负号是考虑到因果关系。

$$|t\rangle = e^{-i\left(m - i\frac{\Gamma}{2}\right)}|0\rangle$$

归一化条件为 $\langle t|t\rangle = e^{-\Gamma t}\langle 0|0\rangle = e^{-\Gamma t}$

也就是说，粒子数是时间的函数 $$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

4. 粒子的寿命——能量本征值中虚部的物理意义

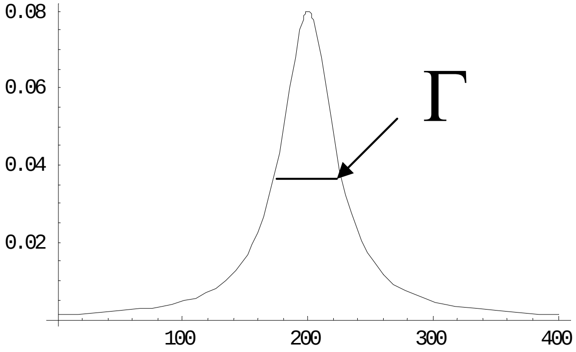
大多数已发现的粒子是不稳定的。即粒子存在一段时间后就会衰变。粒子的寿命是指其静止时的寿命，相对论造成运动的粒子寿命延长，效果很显著，可以延长很多。

对自由粒子波函数作Fourior变换

$$\varphi(M)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}e^{iMt}\left|t\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}e^{iMt}e^{-i(m-i\frac{\Gamma}{2})t}\left|0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(M-m)+i\frac{\Gamma}{2}}\left|0\right\rangle$$

我们可以得到不稳定粒子的（归一化）质量分布函数

$$\rho(M)\equiv\Gamma\varphi(M)\varphi(M)^{*}=\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(M-m)^{2}+\Gamma^{2}/4}$$



Γ 是质量分布函数的半高宽，通常称为粒子的宽度。

- **粒子的寿命通常指大量粒子的平均寿命。**

$$dN(t) = -\frac{1}{\tau}N(t)dt$$

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$$

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t dN \Big/ \int_0^\infty dN = \tau$$

令N(t) 为t时刻某种不稳定粒子的数目，在dt时间间隔中，由于衰变，粒子数改变了dN， 则dN应正比于N，还正比于dt。这样应有：

粒子的宽度和寿命的关系： $\tau = \frac{1}{\Gamma}$

- **对于不稳定粒子， 一般有不止一种衰变方式但只有唯一的寿命，对应于全（总）宽度Γ， Γ τ = 1。**

不同衰变方式对总宽度的贡献称为分宽度（即单位时间内粒子衰变到该衰变道的几率），记为 Γ_i ，这样又引入一个概念——该衰变方式的分支比：

$$R_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

- 对于寿命长的粒子，在探测器中留下径迹， 可以测量寿命 τ

$$m\tau = Et - pL = E\frac{L}{v} - pL = E^2\frac{L}{p} - pL = \frac{1}{p}\left(E^2 - p^2\right)L = \frac{m^2}{p}L$$

$$\tau = \frac{m}{p}L,$$

$$L = vt = \frac{v\tau}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p}{E}\frac{\tau}{\sqrt{1-\left(p/E\right)^2}} = \frac{p\tau}{\sqrt{E^2-p^2}} = \frac{p\tau}{m}$$

- 对于寿命短的粒子， 可以测量宽度Γ
- 但对于中间的粒子最讨厌（不长不短），可以测量分支比 Ri， 理论上计算Γi，加起来得Γ利用Γi = Γ Ri，实验和理论联系起来

- 一些粒子的寿命:

$$
\begin{array}{ll}
\gamma & \tau = \infty \\
e & \tau > 2\times 10^{22}\ yr \\
\mu & \tau = (2.19703 \pm 0.00004)\times 10^{-6}\ s \\
n & \tau = (896 \pm 10)s \\
\pi^{\pm} & \tau = (2.6029 \pm 0.0023)\times 10^{-8}\ s \\
\pi^{0} & \tau = (8.4 \pm 0.6)\times 10^{-17}\ s
\end{array}
$$

5. 粒子的电荷

基本电荷单位 $e = (1.60217733 \pm 0.00000048) \times 10^{-19} C$

质子电荷和电子电荷差的实验结果: $\frac{|q_p - q_e|}{q_e} < 10^{-21}$

电荷量子化: Dirac从理论上推出，如果自然界存在磁单极，则电荷量子化是严格成立的。

$$qg = \frac{n}{2}, n = 1,2,3,\ldots$$

夸克的电荷是分数的: $q = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

已发现的粒子的最大电荷为2: $\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$

6. 粒子的自旋

- 粒子的自旋是粒子的基本性质之一，其量子数可取整数或半整数

玻色子：自旋为整数的粒子，服从玻色统计。 $J = 0,1,2,\cdots$

费米子：自旋为半整数的粒子，服从费米统计。$J = \frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$

常见的粒子的自旋：

	e	μ	p	n	π	γ	W±	Z
J	1/2	1/2	1/2	1/2	0	1	1	1

已发现的粒子的最大的自旋是 J = 11/2

- 四度极化矢量: e_μ
- 极化矢量应有归一化条件： $e_\mu e^\mu = 1$
- 也就是 $e^0 e_0 - e_\perp e_\perp - e_{//} e_{//} = 1$
- 一般矢量粒子自旋为1， 在动量方向上投影，一般应有三个方向：1，0，–1。
- 矢量粒子只有三个独立极化方向如写

$e = (e_\perp, e_{//})$ $e_\perp$两个横向，$e_{//}$一个纵向

对于光子来说，

- 洛伦兹条件：$\partial^{\mu} A_{\mu} = 0$　　量子场论 $\partial \to k$
- 动量表象：　$k^{\mu} e_{\mu} = 0$
- 即 $k^0 e_0 - \underline{k} \cdot \underline{e} = 0$　　则有 $k^0 e_0 - |k|\, e_{//} = 0$
- 0质量 ➔ 能量 = 动量 ($k^0=|k|$, $E^2=p^2$)，所以 $e_{//} = e_0$
- 即对光子来说，有：$e_{\perp} e_{\perp} = -1$
- 所以光子有两个极化方向：它们是横向的。
- 实际上，由上面的讨论知道，只有1，–1 两个。
- 螺旋度（**helicity**）的定义：$\underline{k} \cdot \underline{S} / |k|$　或叫手征性

handedness

- 右手+1，左手－1，在三维空间是标量

7. 粒子的磁矩

- 从经典图象来看，带电粒子在外磁场中做圆周运动产生（轨道）磁矩。如果带电粒子也有内禀角动量——自旋，则也有内禀磁矩(intrinsic Magnetic momentum)，也就是我们常说的粒子的磁矩。粒子的内禀磁矩可以表示为

$$\mu = g\frac{e}{2m}S \equiv gS\mu_B$$

μ_B 是玻尔磁子(Bohr's magneton)

g 是旋磁比(gyromagnetic ratio)

- 狄拉克通过Dirac方程推出电子的旋磁比g=2，更广泛的关系是，对于点粒子场，有gS=1。粒子的内禀磁矩对磁关系的偏离成为反常磁矩。最常见的几种费米子的内禀磁矩如下:

$$\begin{array}{ll} e & gS = 1.001159622209(31) \\ \mu & gS = 1.001165923(9) \\ p & gS = 2.7928444(11) \\ n & gS = -1.91304308(54) \end{array}$$

- 电子和muon子的反常磁矩来源于电磁场的自相互作用，质子和中子的反常磁矩与正常磁矩偏离很大，是因为它们是复合粒子，反常磁矩是粒子内部结构的一种体现。

第二节　粒子的运动学描述

1. 粒子的能量和动量　$(E\ ,\ \vec{p}\ )$

- 粒子的能量和动量构成一个Lorentz四矢量：$p^\mu = (E, \vec{p})$

- 粒子的运动速度：　$\vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{E}$

如果两个参照系的相对运动速度为v，则三动量可以写成：$\vec{p} = \left(p_L, \vec{p}_T\right)$

能动量的Lorentz变换关系为：

$$p_L' = \gamma(p_L - vE)$$
$$E' = \gamma(E - vp_L)$$

其中，　$\gamma = \left(1 - v^2\right)^{-(1/2)}$

- 自由粒子的能量和动量满足“质壳条件”：　$E^2 = m^2 + \vec{p}^2$

2. 快度和赝快度

- 两个惯性系中的速度变换关系： $v_L' = \frac{v_L - v}{1 - v_L v}, v'_T = \frac{v_T \gamma}{1 - v_L v}$

为了表述方便，引入快度(rapidity) y,Y: $thy = v_L, thY = v$

$$chy = \frac{1}{\sqrt{1 - v_L^2}}, shy = \frac{v}{\sqrt{1 - v_L^2}}$$

- 两个惯性系中粒子的快度只相差一个常数：假设两个惯性系的相对速度为v，则相对快度为

$$Y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v_L}{1-v_L} = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_L}{E-p_L}$$

由快度的定义，

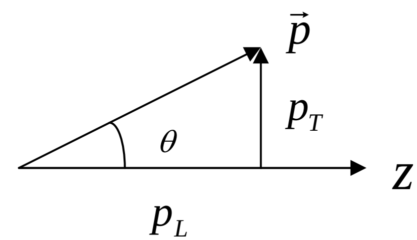
$$y' = \frac{1}{2}\ln\frac{E'+p_L'}{E'-p_L'} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1-v)(E+p_L)}{(1+v)(E-p_L)} = y - Y$$

$$Y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$$

快度在纵向平移变换中具有相加性,快度差具有Lorentz不变性。

- **在实验中一般引入赝快度：** $\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$

θ 为粒子飞行方向与纵轴之间的夹角



快度和赝快度的关系：
假设粒子的质量为0，则

$$p_L = p_T shy, E = p_T chy$$

$$\frac{p_L}{p_T} = \cot\theta = shy, \frac{p}{p_T} = \frac{1}{\sin\theta} = chy$$

$$\eta = \ln(chy + shy) = -\ln e^y = y$$

更普遍地，

$$\eta = -\ln\tan\frac{\theta}{2} = \ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \ln\frac{1+(p_L/p)}{1-(p_L/p)} \Rightarrow$$

$$th\eta = \frac{p_L}{p} = \frac{p_L}{E}\frac{E}{p} = thy\sqrt{p^2+m^2}/p = thy\sqrt{1-\frac{m^2}{p^2}}$$

$$y = th^{-1}\left[th\eta \Big/ \sqrt{1+(m^2/p^2)}\right]$$

在大横动量条件下 $(p_T >> m)$

$$\boxed{y = \eta - \frac{m^2}{2p_T^{\ 2}}\cos\theta}$$

- **在快度为0（粒子静止）附近，二者差别大一些， 在其它时候（快速运动粒子）二者差别不大。实验上定出的是η，因为角度容易测量，而理论上要用y**

3. 实验室系和质心系

粒子的许多运动性质是在其静止系中描述的，而测量是在实验室坐标系，两个基本点坐标系之间通过Lorentz变换联系起来，但很不方便。根据相对论等价原理，惯性参照系是等价的。通过寻找粒子体系的运动学Lorentz不变量来描述粒子的运动是一个简便的途径。对于多粒子体系，质心系是很有用的坐标系。

考虑两个粒子组成的系统——两粒子体系在研究粒子碰撞和粒子的两体衰变时很常见，其质心系总能量 E_{cm} 是一个重要的不变量：

$$m_{inv}^2 \equiv E_{cm}{}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = m_1^2 + m_1^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta$$

其中 θ 是两个粒子运动方向之间的夹角。如果考虑的是两个粒子的碰撞，E_{cm} 是碰撞后产生的全部粒子质量和的上限；二粒子在质心系都静止最省能量，如果这两个粒子是由一个粒子衰变而来的，E_{cm}就是初态粒子的质量。

$$\boxed{m_{inv}^2 \equiv E_{cm}{}^2 = (E_1 + E_2)^2 - \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)^2 = m_1^2 + m_1^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2\cos\theta}$$

- 对撞实验:

两个粒子经过加速实现对撞, 当其质量远小于加速能量时有

$$E_{cm}{}^2 = 4E_1E_2$$

如果是两个基本点对称粒子的对撞，则有效反应能为质心系能量，即两个粒子能量的和

$$E_{cm} = 2E$$

- 打靶实验

如果一个高速粒子去碰撞一个静止的靶粒子，即所谓打靶实验，可以简单表为（第二个粒子为靶粒子），

$$E_{cm}{}^{2}=m_1^2+m_2^2+2E_1m_2$$

考虑入射粒子的相对论极限（高能加速器），有：

$$E_{cm}{}^{2}=2E_1m_2\Rightarrow E_{cm}=\sqrt{2E_1m_2}$$

即质心系能量和入射粒子的能量的平方根成正比。

例如，**Fermi**实验室进行的正反质子 对撞实验，要得到**2TeV**的质心系能量，质子和反质子（质子和反质子质量约为**1GeV)**分别加速到**1TeV**即可，但如果换成打靶实验，则入射粒子需要加速到

$$E_1=\frac{E_{cm}{}^{2}}{2m_p}\sim 2000TeV$$

所以，高能加速器都是考虑对撞机实验，而不是打靶实验。

4. N个粒子反应的Lorentz不变量

- 考虑一个粒子的衰变或两个粒子碰撞所产生的反应，如果初态 和末态共涉及n个粒子，考察由这n个粒子的四维动量 可以组成多少个Lorentz不变量. 一般是Lorentz标量，以避免坐标系变换。

两粒子碰撞反应： $A+B \to C+D+\cdots$

单粒子衰变反应： $A \to B+C+D+\cdots$

- 二个四度矢量的内积是标量。n个四动量有n-1个独立（能动量守恒条件），它们能构成的Lorentz不变量共有n(n—1)/2，其中n个质壳条件。由此可见n个粒子反应中独立的可变的Lorentz不变量个数为

$$\frac{1}{2}n(n-1)-n=\frac{1}{2}n(n-3)$$

二体衰变 **A → B + C** 没有独立的**Lorentz**标量，动量都是确定的。

n	4	5	6	7	…
独立标量个数	2	5	9	14	…

例子： 二体到二体散射 $1+2 \rightarrow 3+4$

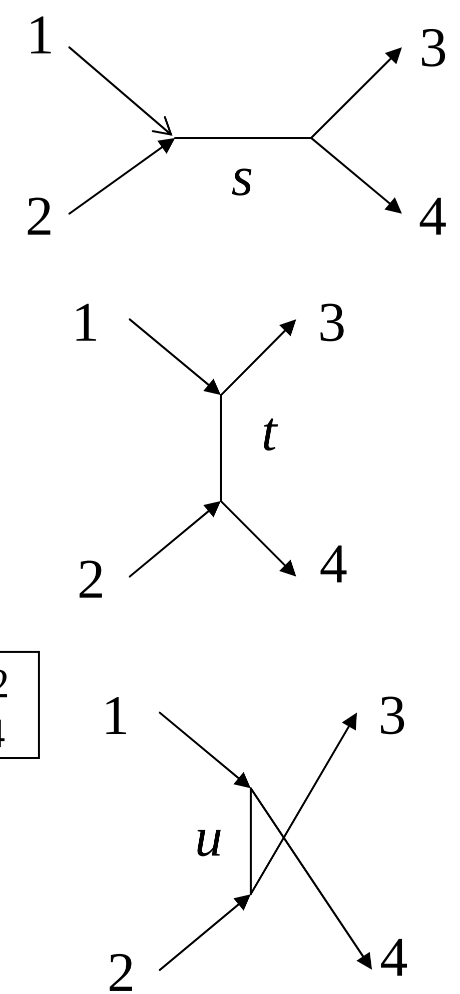
能动量守恒条件:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

三个**Lorentz**标量**:**

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$
$$t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$
$$u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

$$\boxed{s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}$$



只有两个是独立的**:**

s: 质心系总能量平方
t: 四维动量转移平方

5. N体末态相空间(动量空间)

空间体积元 $d^3\vec{x}$不是Lorentz不变的，时间间隔元dt 也不是Lorentz不变的，但四维时空体积元 $d^3\vec{x}dt$ 则是Lorentz不变的. 同样地，动量相空间体积元 $d^3\vec{p}$ 不是Lorentz不变的，能量间隔元dE也不是Lorentz不变的，但四维动量相空间体积元 $d^3\vec{p}dE$ 则是Lorentz不变的.

另外,末态粒子都是在壳的,能量和动量满足“质壳条件”: $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$

再考虑正能量条件，$E > 0.$ 引入阶梯函数:

$$\theta(E) = \begin{cases} 1, E > 0 \\ 0, E \le 0 \end{cases}$$

也是一个Lorentz不变量
因为能量在Lorentz变换下不改变符号,因此函数值在Lorentz变换下不变.

则自由粒子的四维相空间不变体积元为:

$$d^4p\delta(p^2-m^2)\theta(p^0) = dp^0d^3\vec{p}\delta(p^2-m^2)\theta(p^0) = d^3\vec{p}dE\delta(E^2-\vec{p}^2-m^2)\theta(E)$$

四维动量积分可以先把能量积掉,有:

$$\boxed{\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x)|}\delta(x)}$$

$$\int d^3\vec{p}dE\delta(E^2-\vec{p}^2-m^2)\theta(E)$$

$$= \int d^3\vec{p}\,dE\,\frac{1}{|2E|}\left[\delta\left(E-\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right)+\delta\left(E+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\right)\right]\theta(E)$$

$$= \int d^3\vec{p}\,\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E}$$

所以**n**体相空间积分元为:

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_i p_i - \sum_{f=1}^{n} p_f\right)\prod_{f=1}^{n}\frac{d^3\vec{p}_f^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_f}$$

其中, δ 函数来自初末态总能动量守恒, $(2\pi)^3$来自**Planck**常数$\hbar$ 的定义。

如果末态粒子的质量都为**0**，则计算大大简化，

$$\Phi_2 = \frac{(2\pi)^4}{4(2\pi)^5}, \Phi_3 = \frac{(2\pi)^4 s}{32(2\pi)^7}, \ldots$$

$$\frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \frac{s}{32\pi^2}$$

一般来说，多体相空间要比少体的小得多

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \frac{s}{16\pi^2 n(n-1)} \Rightarrow \Phi_n = \frac{(2\pi)^4}{4(2\pi)^5 (n-1)!(n-2)!}\left(\frac{s}{16\pi^2}\right)^{n-2}$$

运动学上考虑，有限的初态衰变质量，产生的粒子数越多，概率越小

应用举例：粒子的二体衰变 $A \to B + C$

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(p_A - p_B - p_C) \frac{1}{2m_A} \frac{d^3 \vec{p}_B^3}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3 \vec{p}_C^3}{(2\pi)^3 2E_C} |T|^2$$

$$= \frac{|T|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(E_A - E_B - E_C) \frac{|\vec{p}_B|^2 d|\vec{p}_B| d\Omega}{E_B E_C} = \frac{|\vec{p}_B| |T|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A{}^2}$$

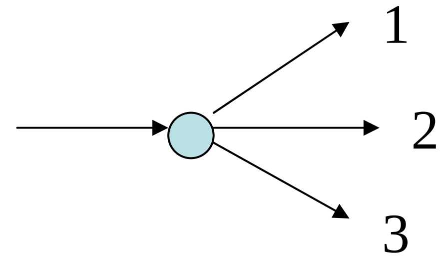
$$\boxed{dE_A = dE_B + dE_C = \frac{|p_B| d|p_B|}{E_B} + \frac{|p_B| d|p_B|}{E_C} = \frac{E_A |p_B| d|p_B|}{E_B E_C}}$$

$$\Gamma = \int \frac{|\vec{p}_B| |T|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A{}^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{p}_B|}{m_A{}^2} \overline{|T|^2}$$

6. 三体衰变，Dalitz图

粒子的三体衰变过程，初末态粒子总数为4，根据前面的讨论，共有独立的2个Lorentz不变量。类似两体散射过程，

$$m_{12} = s_1 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2$$
$$m_{23} = s_2 = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2$$
$$m_{12} = s_3 = (p_3 + p_1)^2 = (P - p_2)^2$$

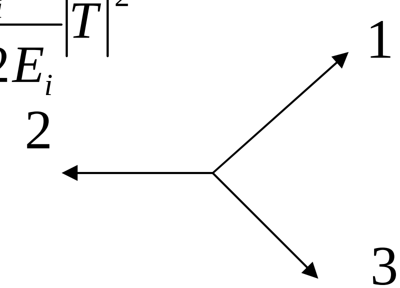


可以证明，$m_{12} + m_{23} + m_{31} = s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$

三体衰变的微分宽度为

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{2M} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3 \vec{p}_i^3}{(2\pi)^3 2E_i} |T|^2$$

在衰变粒子质心系 $\quad p = (E, \vec{0}), \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$



如果衰变粒子是标量粒子，或者对其自旋状态求平均，则

$$\Phi_3(M) = \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(M - E_1 - E_2 - E_3)$$

$$= \frac{1}{32\pi^3} \int dE_1 dE_3$$

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dE_1 dE_3 |T|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int ds_1 ds_2 |T|^2$$

另类Dalitz图的形式　　　　Dalitz图的标准形式

标准的Dalitz图是在 $s_1 s_2$ 平面上描绘三体衰变的物理允许区域。当然也可以用其他运动学变量如 $E_1 E_2$ 等来表述，只要这些量和 $s_1 s_2$ 可以通过一个线性变换联系起来。

Dalitz图的物理意义很明显：
$$\frac{d\Gamma}{ds_1 ds_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |T|^2$$

也就是说，如果三体衰变的实验数据画在Dalitz图上，数据点的密度正比于衰变矩阵元的平方。反过来，也可以通过Dalitz图上的数据点的分布来研究衰变粒子的若干性质。

•Dalitz图

s_1, s_2的积分区域的确定比较繁琐，不在这里具体介绍，有兴趣的同学可以参看E. Byckling 和K. Kajantie的书《Particle Kinematics》(John Wiley & Sons, 1973)。结果见右边的公式。

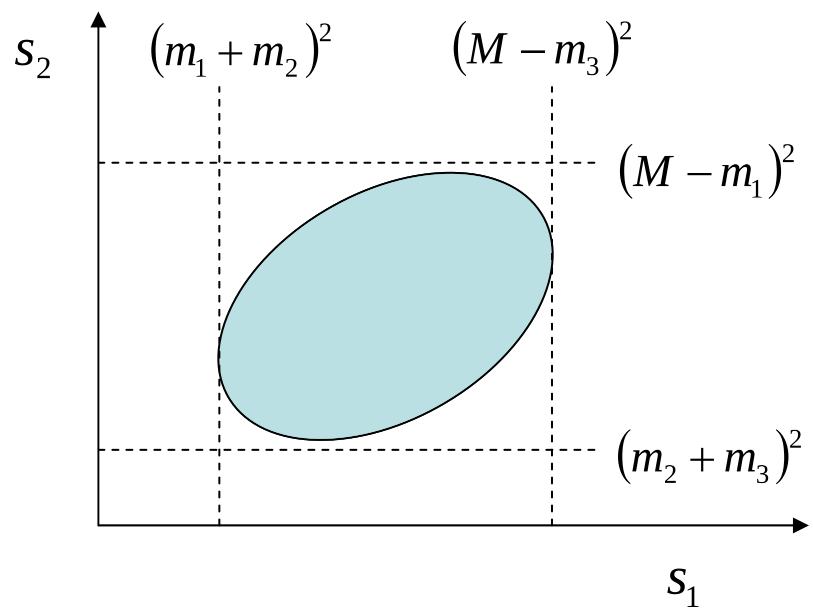
$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3}\int ds_1 ds_2 |T|^2$$

$$(m_1+m_2)^2 \le s_1 \le (M-m_3)^2$$

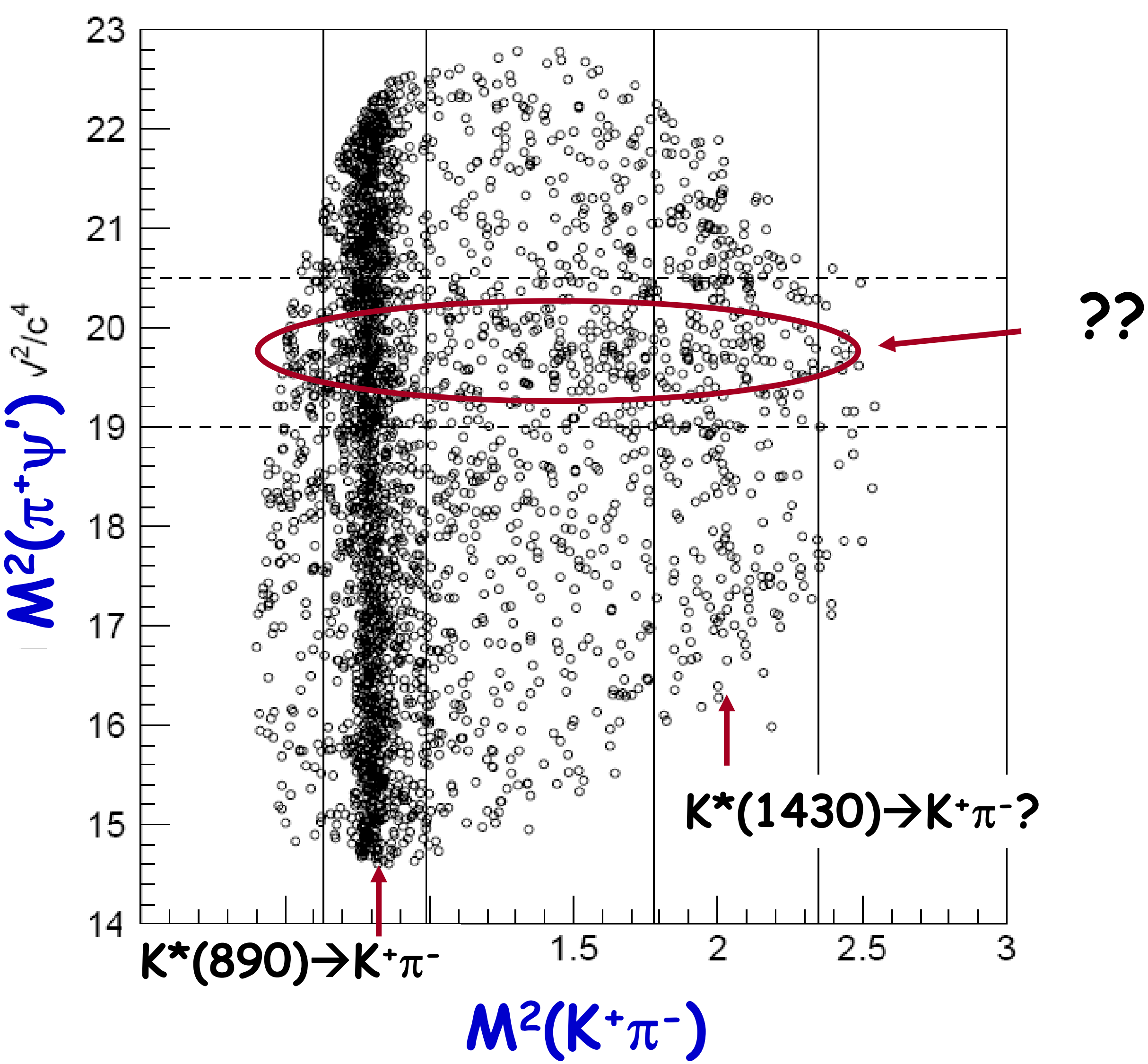
$$(m_2+m_3)^2 \le s_2 \le (M-m_1)^2$$

$$(m_3+m_1)^2 \le s_3 \le (M-m_2)^2$$

Dalitz图的边界由末态粒子的三动量共线给出。对于具体的末态粒子质量，边界线可以直接计算出来。同一粒子的不同三体末态的Dalitz图是不相同的，密度决定于衰变矩阵元平方，形状决定于末态粒子的质量。



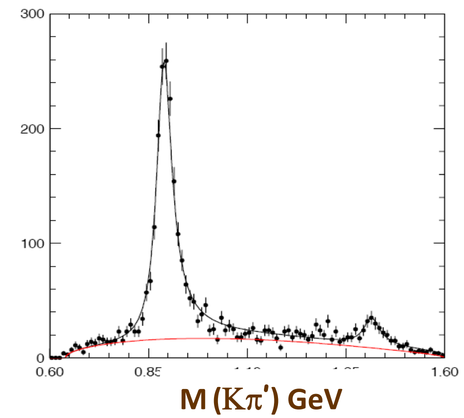
B→K$^{\pm}\pi^{\mp}$ ψ' (in Belle)



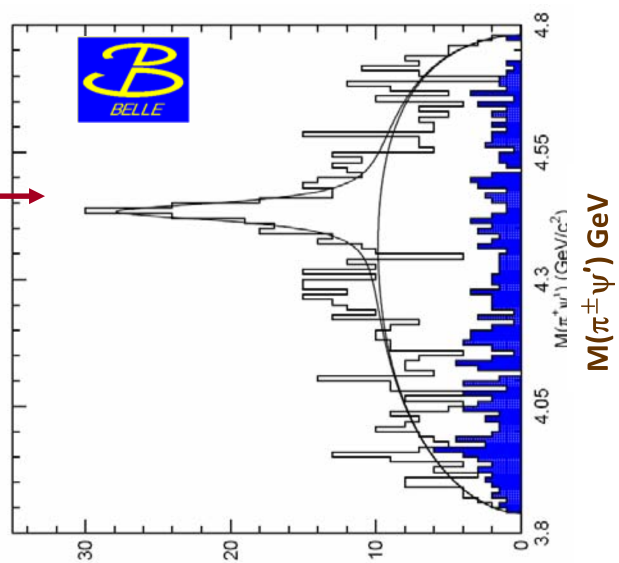
The Z(4430)$^{\pm}$ $\rightarrow \pi^{\pm}\psi'$ peak

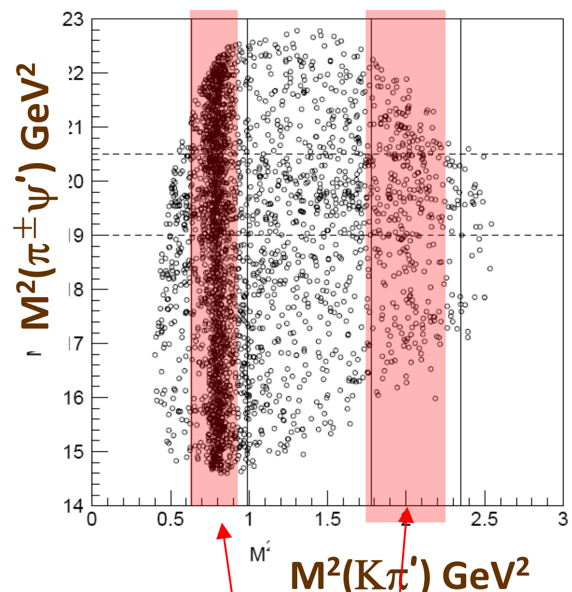
$B \rightarrow K \pi^{+}\psi'$

$M = 4433 \pm 4 \pm 2$ MeV/c^2
$\Gamma_{tot} = 45 ^{+18}_{-13} {}^{+30}_{-13}$ MeV
Nsig $= 121 \pm 30$ evts
χ^2/dof $= 80.2/94.0$ $6.5\,\sigma$



Z(4430)





"K* Veto"

•另类Dalitz图

因为粒子的动能为总能量减去静止质量， $T_1 = E_1 - m_1, T_3 = E_3 - m_3$
我们有

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dE_1 dE_3 |T|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dT_1 dT_3 |T|^2$$

另外，质心系中末态粒子的动能之和Q为常数，

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 = E_1 + E_2 + E_3 - m_1 - m_2 - m_3 = M - m_1 - m_2 - m_3$$

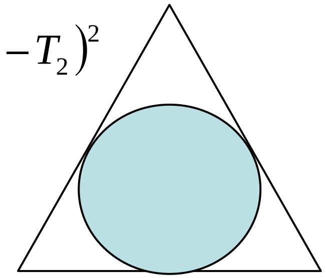
从平面几何知等边三角形内任何一点到三边的距离之和为常数，等于等边三角形的高。因此，可以将三体衰变的数据（末态粒子质心系动能）画在高为Q的等边三角形内，这样的图是另类Dalitz图。

但是，并不是三角形内的每一点都代表物理上允许的运动学分布，典型的例子是三角形的顶点——不满足能动量守恒。

考虑衰变末态三个粒子质量相同的情形： $m_1 = m_2 = m_3 = m$

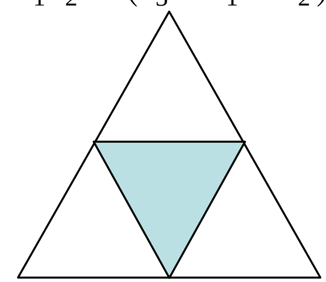
在质心系中，有 $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2\cos\theta \Rightarrow 4p_1^2 p_2^2 \le \left(p_3^2 - p_1^2 - p_2^2\right)^2$

在非相对论情形下， $T_i = \dfrac{p_i^2}{2m} \Rightarrow 4T_1T_2 \ge \left(T_3 - T_1 - T_2\right)^2$



$4T_1T_2 = \left(T_3 - T_1 - T_2\right)^2$ 表示等边三角形的内接圆

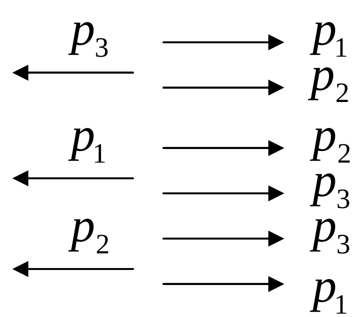
$4T_1T_2 \ge \left(T_3 - T_1 - T_2\right)^2$



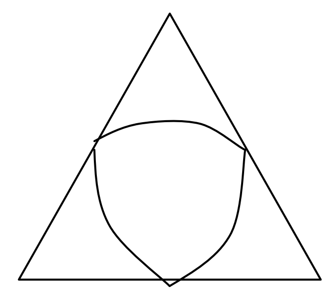
$T_i = E_i = p_i$

在极端相对论情形下： $T_i = E_i = p_i$

$$T_3 = \begin{cases} T_1 + T_2 \\ T_1 - T_2 \\ -T_1 + T_2 \end{cases}$$



物理情形介于非相对论情形和极端相对论情形之间。

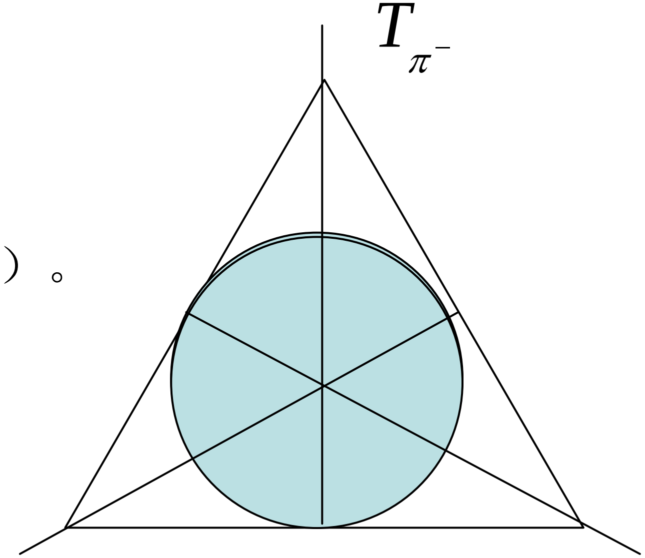


物理情形

和Dalitz图一样，三角形内阴影区的事例点密度正比于衰变矩阵元的平方。通过事例点的分布可以研究衰变的动力学机制，也有可能确定初态粒子的自旋、宇称等量子数

Dalitz图的应用示例——确定 K^+介子的自旋：

$$K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$$



设两个 π^+ 介子之间轨道角动量为L。两个介子为全同玻色子，因此 $L=0,2,4,\cdots$（偶数）。另外的 π^- 介子相对$\pi^+\pi^+$对的轨道角动量记为l ，则l的可能取值为 $l=0,1,2,\cdots$ 。

1）若 $L\geq 2$， 即$\pi^+\pi^+$对的轨道角动量具有较大值，因此$\pi^+\pi^+$对占去较多能量，于是 π^- 的动量就会减少。如果是这种情况，Dalitz图中圆的上部事例点的分布就会减少。

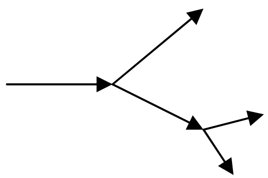
2）若 $l\geq 1$ ，则 π^-相对于$\pi^+\pi^+$对具有较大的轨道角动量，则其动能也较大，于是Dalitz图中圆的下部事例点的分布就会减少。

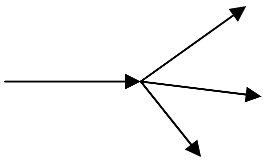
比较实验上测得的事例点分布，没有发现事例点的分布有偏移现象，事例点的分布是均匀的。因此排除了上述两种可能性。L和 l 只能为L=0和l=0。因为已经知道 π 介子的自旋为 0 ，所以 K^+ 介子的自旋只能是 0 。

综合示例——利用不变质量谱分析共振态

$$A \to B + C \to C + D + E$$

$$A \to C + D + E$$





考虑初态粒子A衰变到C，D，E末态的过程。
为方便，假设参加反应的粒子都是中性无自
旋粒子。如果末态粒子D，E也可以通过
一个中间过程产生，即A先衰变到B、C，B然后衰变到D、E，则我们可以利用
前面介绍的两体衰变宽度公式

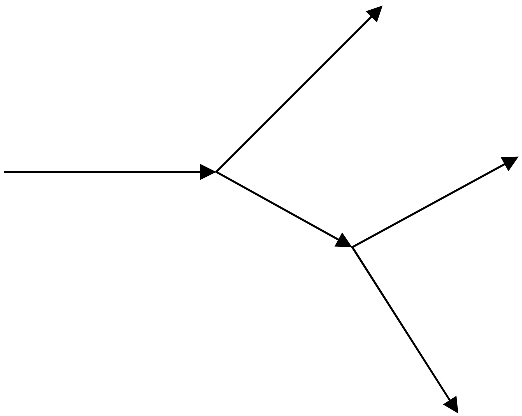
$$\Gamma_A = \int \frac{|\vec{p}_B||T|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A{}^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{|\vec{p}_B|}{m_A{}^2}\overline{|T|^2} = \frac{1}{8\pi}\frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A{}^3}\overline{|T(A \to BC)|^2}$$

$$\Gamma_B = \frac{1}{16\pi}\frac{1}{m_B}\overline{|T(B \to DE)|^2}$$

$$\boxed{m_A = \sqrt{m_B{}^2 + k_B^2} + k_B \Rightarrow k_B = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A}}$$

引入等效相互作用的拉氏量： $L_{eff} = fABC + gBDE$

则上式中的矩阵元可以用等效耦合常数代替： $\Gamma_A = \frac{f^2}{16\pi}\frac{m_A^2 - m_B^2}{m_A^3}, \Gamma_B = \frac{g^2}{16\pi}\frac{1}{m_B}$



证明见后页

如果考虑传播函数，

$$\boxed{\frac{1}{p^2-\alpha+i\beta}=\frac{1}{p^2-m_B+im\Gamma_B}}$$

也可以得到上面的A 的衰变宽度。考虑前面的等效拉氏量和左边的Feynman图，我们可以定性地写出这个过程的振幅

$$T(A\to BC\to CDE)\propto\frac{1}{s_1-m_B+im_B\Gamma_B}$$

DE的散射截面为

$$\sigma\propto\frac{1}{(s_1-m_B{}^2)^2+m_B{}^2\Gamma_B{}^2}\approx\frac{1}{4m_B{}^2(\sqrt{s_1}-m_B)^2+\frac{1}{4}\Gamma_B{}^2)}$$

窄共振近似:

$$I=\int_0^M ds_2\int_0^{M-s_2} ds_1\frac{1}{(s_1-\alpha)^2+\beta^2}\qquad (M=m_A{}^2)$$

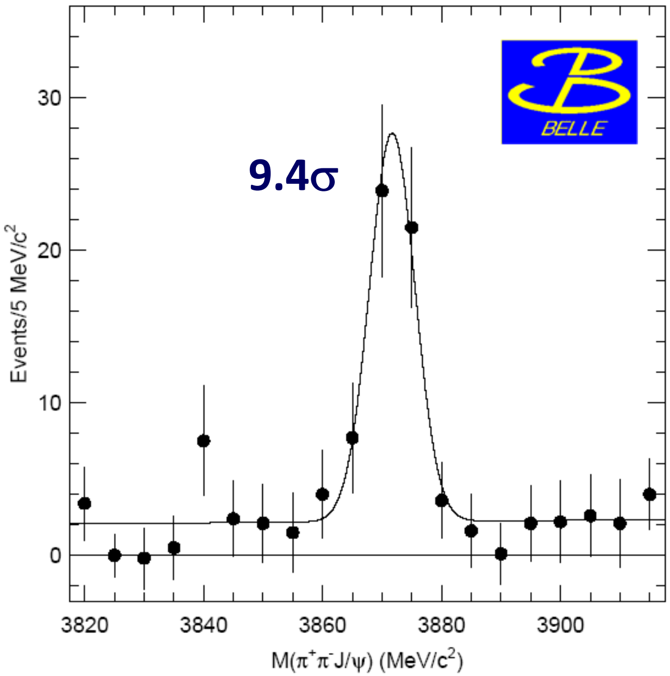
$$=\frac{M-\alpha}{\beta}\left\{\left(\arctan\frac{M-\alpha}{\beta}+\arctan\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{\beta}{M-\alpha}\ln\frac{\alpha^2+\beta^2}{(M-\alpha)^2+\beta^2}\right\}$$

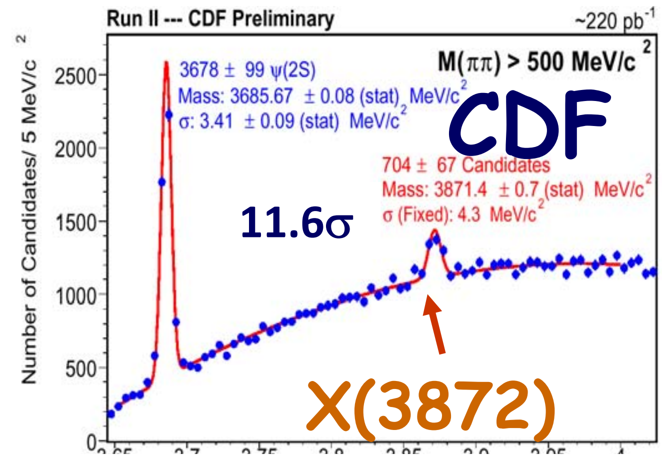
$$\boxed{\beta<<\alpha,\beta<<M-\alpha}\Rightarrow\arctan\frac{M-\alpha}{\beta}+\arctan\frac{\alpha}{\beta}\approx\pi$$

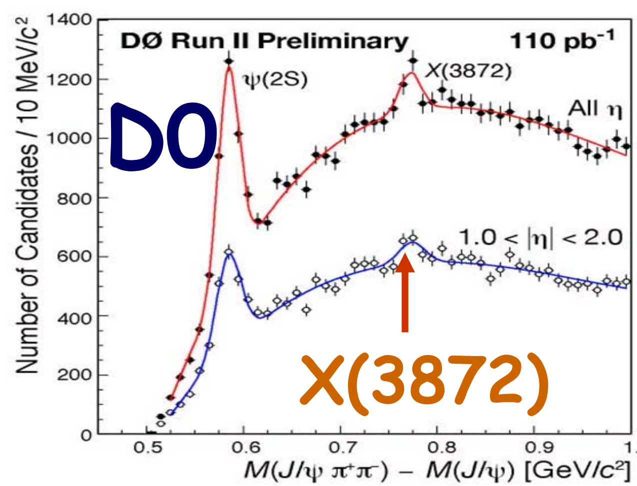
$$I\approx\pi\frac{M-\alpha}{\beta}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\Gamma_A=\dfrac{f^2}{16\pi}\dfrac{g^2}{16\pi}\dfrac{m_A^2-\alpha}{m_A^3\beta}\\ \\ \Gamma_A=\dfrac{f^2}{16\pi}\dfrac{m_A^2-m_B^2}{m_A^3},\Gamma_B=\dfrac{g^2}{16\pi}\dfrac{1}{m_B}\end{array}}$$

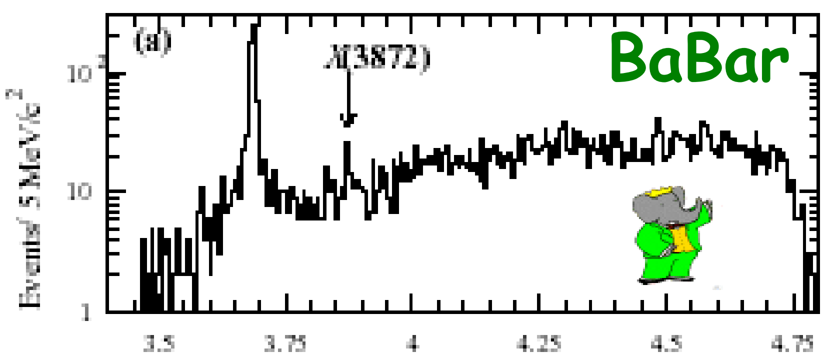
$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha=m_B^2\\ \beta=m_B\Gamma_B\end{array}}\Leftarrow$$

X_{3872} is well established
seen in 4 experiments









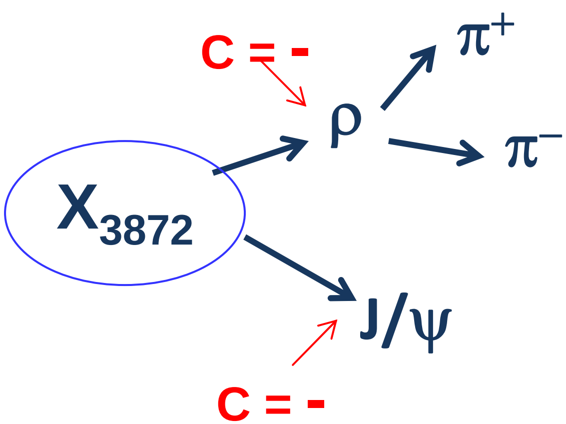
$X_{3872} \rightarrow \gamma\ J/\psi$

C = -   C = -

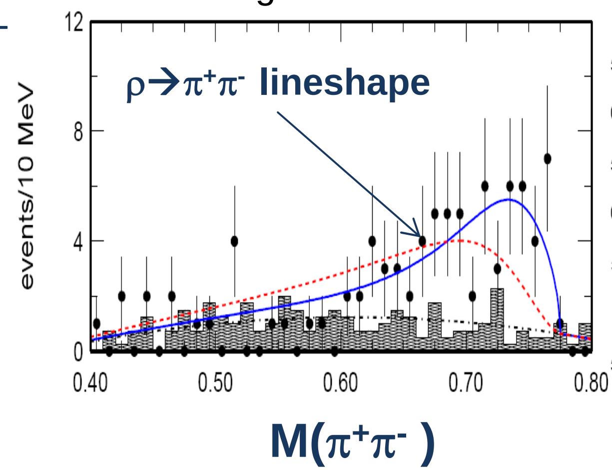
$\Longrightarrow$ $C(X_{3872})$ **must be** $(-)\times(-) = +$

if $C(X_{3872})$ **is + :**

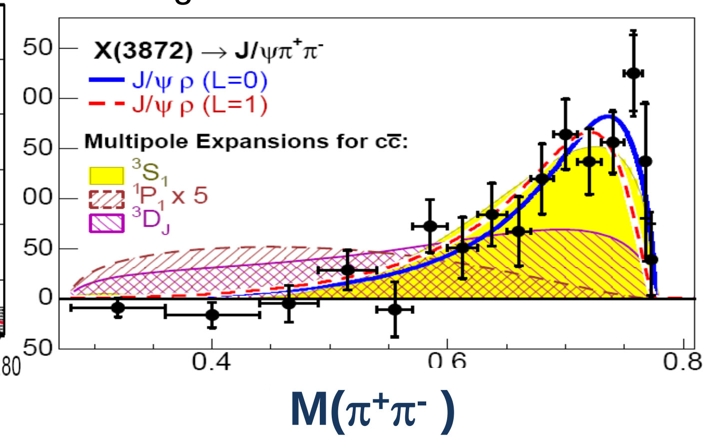
$\pi^+\pi^-$ **system in** $X_{3872} \rightarrow \pi^+\pi^-\ J/\psi$ **must come from** $\rho \rightarrow \pi^+\pi^-$



Belle agrees



CDF agrees



从实验中**A**到**CDE**所有事例中，考虑**DE**末态粒子的不变质量谱，即事例数随**DE**不变质量 $s_1=(p_1+p_2)^2$ 的分布，我们就能发现，在连续的相空间背景上会叠加一个峰结构，这个峰结构就来源于共振态**B**的存在。在**CDE**三体末态中，**DE**的相空间背景来源于**A**到**CDE**的直接衰变过程，它是可以计算的

$$\Phi_3=\int(2\pi)^4\delta(p-p_1-p_2-p_3)\prod_{i=1}^{3}\frac{d^3\vec{p}_i^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$=\int d^4p_{12}\delta(p-p_{12}-p_3)\delta(p_{12}-p_1-p_2)\prod_{i=1}^{3}\frac{d^3\vec{p}_i^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$=\int ds_1\delta(p_{12}{}^2-s_1)\int d^4p_{12}\delta(p-p_{12}-p_3)\delta(p_{12}-p_1-p_2)\prod_{i=1}^{3}\frac{d^3\vec{p}_i^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_i}$$

$$\propto\int ds_1\Phi_2(M;\sqrt{s_1},m_3)\Phi_2(\sqrt{s_1};m_1,m_2)$$

$$P(\sqrt{s_1})\propto\frac{\Phi_2(M;\sqrt{s_1},m_3)\Phi_2(\sqrt{s_1};m_1,m_2)}{\Phi_3}$$