线性代数

$$\begin{cases} 行列式 \left| \quad \right| = 0 \Rightarrow 有非零解 \Rightarrow 相关 \\ R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < m \Rightarrow 相关 \end{cases}$$

$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$ 线性相关

$\Downarrow$

$\alpha_1\ \alpha_2 \quad \alpha_m \quad \alpha_{m+1}$ 也线性相关

$(x_1, x_2, \cdots x_m)_{m\times n} \le n < m$

$(m>n)$

$m = R(x_1, x_2 \cdots x_m) \le \underbrace{R(x_1, x_2, \cdots x_m, b)}_{m} < m+1$

$\boxed{\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ 无关

$\alpha_1 \cdots \alpha_n\ \alpha$ 相关

极大无关组　　矩阵的秩和向量的秩是一样的.

求极大无关组

① $R(O)=0$　　O 线性相关

② 极大无关组不唯一

③ 线性无关 的极大无关组为本身

④

矩阵的秩＝行秩＝列秩

初等行变换不改变矩阵的列向量组的线性关系

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}_{5\times 5}
\end{array}$$

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$ 极大无关组

$R(A^T) = R(A)$

$= R(A$ 的行向量组$)$

$= R(A^T$ 的列向量组$)$.

求极大无关组

1. 行向量组化成列向量组
2. $A \xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形 B

行阶梯 → 行最简

线性方程组 第4章

高斯消元法

三种变换

1. 换位
2. 数乘
3. 倍加

同解原理

主未知量　自由未知量

增广矩阵 $\Rightarrow$ 行最简形

齐次线性方程组

解的性质：① ξ_1、ξ_2 解

$x = \xi_1 + \xi_2$ 仍为解

② ξ_1 解

$x = \lambda\xi_1$ 仍为解

基础解系：极大线性无关的解向量组

高斯：

增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简

基础解系

① $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性无关

② $Ax=0$ 的任意解都可由 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_{n-r}$ 线性表示

一把刷子刷到底

齐次方程组

1. 行最简
2. 行最简方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \frac{1}{?}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{10}x_4 = 0 \end{cases}$$

x_2、x_4 为自由未知量

x_4 为自由未知量

$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　　1. 先求通解
2. 再求基础解系　　$A_{m\times n}X=0$

ξ_1　　ξ_2

$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$

非齐次线性方程组

$\eta_1.\ \eta_2$　　$Ax=b$

$(\eta_1-\eta_2)$　　$Ax=0$

$A_{m\times n}x=b$ 通解 $x=\eta^* + \xi$
特解　　$\to Ax=0$ 的通解

$Ax=b$ 的通解 $=$ $Ax=b$ 的一个特解 $+$ $Ax=0$ 的通解

(1) $Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 只有零解

$\Updownarrow$

$R(A)=R(A|b)=$ 未知量的个数 n

(2) $Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解

$\Updownarrow$

$R(A)=R(A|b)<$ 未知量个数 n

步骤

(1) 增广 $\xrightarrow{初}$ 行阶梯

(2)

线代6月中旬结课

基础解系个数　　有解的前提 $R(A)=R(A\vdots b)$

No

Date

1) 唯一解 $\left|\begin{matrix}系数\\矩阵\end{matrix}\right| \neq 0$

(<)

2) 系数 $| = 0$ $\begin{cases} 无解 & R(A) \neq R(A;B) \\ 有无穷多个解 & R(A) = R(A;B) \end{cases}$

基础解系个数 $= \overset{未知量总数}{n} - R(A)$

β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

$\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$

$\alpha_1 = (v, v, v, v)^T$

α_2 - - -

$A_{4\times3}X = \beta$

特征值.特征向量与二次型　第五章

内积、 $x = (1, 2, 3)^T$　$y = (3, 2, 1)^T$

$(x, y) = 1\times3 + 2\times2 + 3\times1$

$= x^T y$

$\begin{cases} ① \alpha.\beta 都为列向量 & (\alpha, \beta) = \alpha^T\beta \\ ② \alpha.\beta 都 行 & (\alpha, \beta) = \alpha\beta^T \end{cases}$

① 对称性　$[x, y] = [y, x]$

② 线性性

乘 $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$

加 $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$

③非负　$[x, x] \geq 0$

正定　$[x, x] = 0$ 当且仅当 $x = 0$

Cauchy-Schwarz

$$[x, y]^2 \leq [x, x][y, y]$$

$[x+ty, x+ty] \geq 0$

$[x+ty, x+ty] = [x, x+ty] + [ty, x+ty]$

$[x, x] - 2t[x, y] + t^2[y, y] \geq 0$

Δ $\leq$ $(-2)t)^2 - 4AC$ 写成关于 t 的

$[y,y]t^2-2[x,y]t+[x,x]\geq 0$

$\Delta\leq 0$

$(-2[x,y])^2-4[x,y][y,y]\leq 0$

$\therefore [x,y]^2\leq[x,x][y,y]$

向量长度 $\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$

* $x\neq 0$时 $\frac{x}{\|x\|}$ 为单位向量

(1) $\|x\|\geq 0$ (当且仅当 $x=0$时才有$\|x\|=0$)

(2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$

(3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

向量夹角

$\cos\theta=\frac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $x\neq 0, y\neq 0$, $-1\leq\cos\theta=\frac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}\leq 1$

$\theta=\arccos\frac{[x,y]}{\|x\|\cdot\|y\|}$ (向量x与y的夹角

$\theta=90^\circ$时 x与y正交, $x\perp y$

$x\perp y \Leftrightarrow [x,y]=0$ 零向量与任何向量正交

两两正交 :正交向量组

标准正交组 $\begin{cases}①要为单位向量组\to 每个向量都是单位向量\\ ②要为正交向量组\end{cases}$

$\to$ 两个正交

定理:

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 中不含零向量 $\left.\right\}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关

(2) 两两正交

$0=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_3\alpha_m$

α_1

$0=\lambda_1+0+0+\cdots+0$

$[\alpha_1,0]=\lambda_1[\alpha_1,\alpha_1]+\lambda_2[\alpha$

$=[\alpha_1,\lambda\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_3\alpha_m]$

$=\lambda_1[\alpha_1,\alpha_2]+\lambda_2[\alpha_1,\alpha_2]\cdots$

No.

Date

$\alpha_1 = (1,1,1)^T = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{\alpha_1} \perp \vec{\alpha_3}$

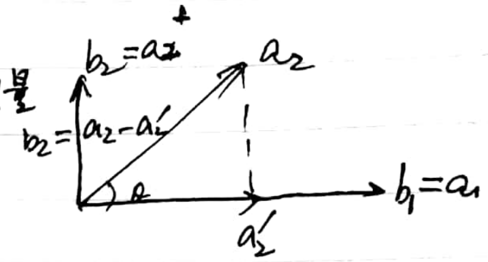
$\alpha_2 = (1,-2,1)^T = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{\alpha_2} \perp \alpha_3$

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0 \\ 1x_2 - 2x_3 + x_3 = 0 \end{cases}$$

求与α_1, α_2两两正交的α_3 $Ax = 0$

V的 (x_1, x_2, x_3)

标准正交基
- ①极大线性无关组
- ②两两正交
- ③都为单位向量

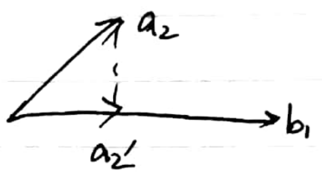


Schmidt 正交化

$$a_2' = \|a_2'\| \frac{a_2'}{\|a_2'\|}$$

$$\theta = \arccos \frac{[a_2, b_1]}{\|a_2\| \|b_1\|}$$

$$\underbrace{a_2' = \frac{[a_2, b_1]}{[b_1, b_1]} b_1}_{\text{投影向量的公式}}$$



$b_1 = a_1$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_2, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$b_3 = a \cdots -$

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

正交向量组 $\underbrace{b_1, b_2, \cdots b_r}$ 与 $a_1, a_2 \cdots a_k$ $(1 \le k \le r)$ 等价（正交化）

$\Downarrow$

单位化为 $\underbrace{e_1, e_2, e_3 \cdots e_r}_{\text{标准正交基}}$

标准正交化：①先正交化 ②再单位化 $e_i = \dfrac{b_i}{\|b_i\|}$

No.
Date

$\|b\| = \sqrt{\langle b, b\rangle}$

正交矩阵特征：正交矩阵A. $A^{-1} = A^T$ $A^TA = E$

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \\ a_n^T \end{bmatrix}(a_1, a_2, \cdots a_n) = \begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n \\ a_2^Ta_1 & a_2^Ta_2 & \cdots & a_2^Ta_n \\ \\ a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n \end{bmatrix} = E$$

A为正交矩阵的充要条件：A的列向量都是标准正交向量组

故矩阵 $\begin{cases} ①\ 每个列向量都是单位向量 \\ ②\ 两两正交 \end{cases}$

正交变换 $y = Px$ （旋转） 正交变换保长度

P 正交矩阵

特征值

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

$$AP = P\Lambda$$

$$A(P_1, P_2 \cdots P_n) = (P_1, P_2 \cdots P_n)\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$$

$$AP_i = \lambda_i P_i$$

$$PA = (P_1, P_2 \cdots P_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$$ n个特征值

$$= (\lambda P_1, \lambda P_2, \cdots, \lambda P_n)$$

方阵的特征值与特征向量

$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

λ：A的一个特征值

特征多项式

$$f(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + a \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

矩阵A的行列式（λ取0时）

No.
Date

$f(\lambda)=0$ 在复数范围内为$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \quad \Delta=b^2-4ac<0$

$a(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0$

韦达定理推广

☆ $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} \\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det(A) \end{cases}$

n阶方阵A可逆的充要条件是A的n个特征值非0

$Ax=\lambda x$

(1) $k\lambda$是kA的特征值 $\quad kA\lambda=k\lambda x$

(2) λ^m是A^m的特征值 $\quad A^m x=\lambda^m x$

$A^*A=|A|E$

若A可逆 λ^{-1}是A^{-1}的特征值，$\lambda^{-1}|A|$是A^*的特征值

$A^*A=|A|E$

λ^{-1}

$A^*=|A|A^{-1}$

$A^*x=|A|A^{-1}x$

$|A|\frac{1}{\lambda}$

$A_n x=\lambda x$

$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$

☆ $A^*x=\frac{|A|}{\lambda}x$

$A^m x=\lambda^m x$

$\varphi(x)$为x的多项式 则$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$的特征值

作业 P91. 三大(1) 二(2) P97 3, 4

$Ax=\lambda x \ (x\neq 0)$

$f(\lambda)=|A-\lambda E|$

$A^*x=\frac{|A|}{\lambda}x$

矩阵$A=\cdots$

① $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} \boxed{\cdots-\lambda} & & \vdots \\ \vdots & \boxed{\cdots-\lambda} & \\ & \cdot & \boxed{\cdots-\lambda} \end{vmatrix}=0$

$\lambda=?$

(可能有重根)

No.

Date

② $|A-\lambda E|x=0 \iff Ax=\lambda x\ (x\neq 0)$

把每个λ代入线性方程组中 $(A-\lambda E)x=0$

求基础解系

步骤 (找自由未知量)

(1) 算 $|A-\lambda E|$.

(2) 求 $|A-\lambda E|=0$ 的所有根. 即A的所有特征值

(3) 对每个 λ_i 求齐次线性方程组 $(A-\lambda E)x=0$ 的

一个基础解系 $\xi_1, \xi_2 \cdots$

(4) 线性组合为解

A是n阶方阵, P为n阶可逆方阵

$P^{-1}AP=\Lambda$ 要求P可逆

$\Rightarrow AP=P\Lambda$ 令 $P=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$

$\iff A(p_1, p_2 \cdots p_n)=(p_1, p_2, \cdots p_n)\,\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n\}$

$\iff (Ap_1, Ap_2, \cdots, Ap_n)=(\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2 \cdots, \lambda_n p_n)$

$\iff Ap_i=\lambda_i p_i\ (i=1, 2, \cdots n)$

P的列向量和矩阵中的特征值位置相互对应

对应不同特征值的特征向量线性无关

矩阵的相似关系是一种等价关系

$$\begin{cases} \text{反身: } A\sim A \\ \text{对称: } A\sim B \Rightarrow B\sim A \\ \text{传递: } A\sim B,\ B\sim C \Rightarrow A\sim C \end{cases}$$

$f_B(\lambda)=|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|$

$=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}|\,|A-\lambda E|\,|P|$

$=f_A(\lambda)$

n阶矩阵A与对角阵相似 ⟺ A有n个线性无关的特征向量

(A可对角化)

A为n阶矩阵. 当 代数重数=几何重数, A可对角化

No.

Date

$A = P\Lambda P^{-1}$

$A^2 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})$

$= P\Lambda^2 P^{-1}$

……

$A^{100} = ?$

$AB \sim BA \Leftrightarrow P^{-1}ABP = BA$

复习要求①将课后所有习题处理掉

②往年试卷

实对称矩阵的对角化

$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$AP_i = \lambda_i$

$(i=1, 2, \cdots n)$.

实对称阵可对角化

$Q^T = Q^{-1}$

$Q^T A Q = \Lambda$

实对称矩阵的特征值为实数

实对称矩阵对应于不同特征值的特征向量正交

$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow P_1^T P_2 = 0$

$\lambda_1 P_1^T P_2 = (\lambda_1 P_1)^T P_2 = (AP_1)^T P_2$

$= P_1^T A^T P_2 = P^T(A^T P_2) = P_1^T(\lambda_2 P_2) = \lambda_2 P_1^T P_2$

$k = n - R(A - \lambda E)$

未知量的个数

二次型 · 一般二次型 → 化为标准型

$2a_{12}x_1x_2 = a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_2x_1$

$= a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1$

令 $a_{21} = a_{12}$

$f = x^T A_n x$

对称矩阵A的秩 = 二次型f的秩

复习要求：1~5章书后所有总习题

非退化(非奇异)线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \quad + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 \quad + c_{nn}y_n \end{cases}$$

$x = Cy$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & & \\ c_{n1} & & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$A^T \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & \ddots \\ & & & k_n \end{pmatrix} y$$

$k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$

$x = Cy$

C^{-1}

$y = C^{-1}x$ （要求 C^{-1} 是可逆矩阵

若C为正交阵 $C^{-1} = C^T$，此时 $x = Cy$ 是正交变换

二次型的问题

$$f = x^T A x \xrightarrow{x = CA} (CA)^T A CA$$

$$= A^T C^T A C A$$

$$= A^T \underbrace{(C^T A C)}_{} A$$

寻找可逆矩阵C使

$f \longrightarrow$ 标准型

$x = Cy$

寻找可逆的C

$(C^T A C)^T$

$= (C)^T (A)^T (C^T)^T$

$= C^T A C$ 对称阵

No

Date

合同

C^TAC

先对A做一系列行变换

再对A做一系列列变换

$\therefore R(C^TAC)=R(A)$

可逆矩阵C使 $C^TAC=B$ 则A与B合同

合同的性质

(1)反身性

(2)对称性

(3)传递性

合同关系为等价关系

$$\begin{cases} y_1 = \\ y_2 = \cdots \end{cases}$$

①矩阵的等价
②向量之间等价
③矩阵相似的等价
④矩阵合同的等价

等价是将矩阵进行分类

两个矩阵等价当且仅当它们的标准形相同

矩阵 → 行阶梯 → 行最简 $\xrightarrow{\text{列变换}}$ 标准型

主轴定理 $x=Py$

$(f=\sum a_{ij}x_ix_j)$

正交变换化二次型为标准型

步骤 (1) $f=x^TAx$, 求出A

(2) 求A的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

(3) 求对应于特征值的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$

(4) $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$ 正交化,单位化

得 $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$

$C=(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$

(5) $x=Cy$ 得f的标准型

$f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

拉格朗日配方法(考)

不能书上没有的就不学

已知 $y=C_n^{-1}x$ 求 $x=C_n y$

初等行变换

分块矩阵

$C_n^{-1}=$ 上三角

$f(x_1,x_2,x_3)=\underline{1}y_1^2+\underline{1}y_2^2+\underline{0}y_3^2$

用拉格朗日

系数此时不再是特征值了

$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

$$\begin{cases} x_1=u_1+u_2 \\ x_2=u_1-u_2 \\ x_3=u_3 \end{cases}$$

正定二次型 $A>0$

负定二次型 矩阵 $A<0$

No.

Date . .

$x_1 \quad x_2 . \quad x_3$

$f_{(x_1, x_2, x_3)} = x_1^2 + 4x_2^2 + 0 x_3^2$ 不是正定

f是关于3个的.

实对称阵A正定 ⟺ A的特征值全正 ⟺ A的各阶顺序主子式都大于0（对称阵A）

对矩阵

正定(负定)矩阵可逆

对称阵A为负定 ⟺ 奇数阶顺序主子式小于0，偶数阶顺序主子式大于0

若A为正定矩阵则

A^T, A^{-1}, A^*均为正定矩阵

若A、B均为n阶正定矩阵，则 A+B也是正定矩阵

$f_{A+B} = x^T(A+B)x = x^TAx + x^TBx > 0 \ (x \neq 0)$