

算法与复杂性 第九次课程作业

UNikeEN

2023 年 6 月 5 日

问题解答

1. 是否有可能在多项式时间内判断无向图 $G=(V,E)$ 存在规模为 5 的团集？为什么？

解 可能。可以使用枚举法，首先从 n 个点中取出 5 个（组合，时间复杂度为 $O(n^5)$ ），再用常数时间判断其是否能构成完全子图即可。整体时间复杂度为多项式时间。

2. 已知顶点覆盖问题是 NP 完全的，那么如果所有顶点的度数都是偶数，能不能设计出多项式时间的确定性算法？证明你的结论

解 取任意图 G ，根据图的基本性质，其存在偶数个度数为奇数的结点。

在图中增加一个三角形，其中一个顶点（设为 p ）与 G 中原有度数为奇的结点相连，由于度数为奇数的结点数量为偶数，易得增加三角形后的新图 G' 中所有顶点度数都是偶数。

为了覆盖新增加的三角形，三角形有且只有两个顶点存在于 G' 的顶点覆盖中。顶点 p 的度数一定大于等于三角形剩下的两个顶点，选中顶点 p 一定比不选中顶点 p 的情况覆盖的边更多。为使顶点覆盖集尽可能小，这两个顶点中一定包含顶点 p 。

从 G' 的顶点覆盖移除三角形中的两点，即可得到 G 的顶点覆盖。综上，求参数为 (G, k) 的顶点覆盖问题可以多项式归约到求参数为 $(G', k + 2)$ 的顶点覆盖问题。因为前者是 NP 完全的，所以后者也是 NP 完全的。

3. 证明下面的算法能够以 80% 以上的概率正确判断一个给定的正整数 n 是否为素数：

算法：Primality

输入：正整数 n

输出： n 是否为素数（True 为素数，False 为合数）

- 如果 n 与 30030 的最大公约数为 1，则返回 True
- 否则返回 False

解 30030 分解质因数为： $30030 = 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13$ 。

使用以上算法会导致判断错误的情况有：

- 2、3、5、7、11、13 为质数，会被判断成合数
- 一个合数的质因数不含 2、3、5、7、11、13 但含有更大的质数，如 17×19 ，因为和 30030 没有公因数，会被判断成质数

第一种错误情况较少，在本问题的规模下可以忽略不计。

第二种情况的前提是质因数不含 2、3、5、7、11、13，此类数出现的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{10}{11} \times \frac{12}{13} = 19.2\%$ 。假设这类数全部判断错误（事实上，对这类数中的质数，算法结果是正确的），算法的判断正确性也能达到 $1 - 19.2\% = 80.8\% > 80\%$

得证算法正确率一定大于 80%。