算法与复杂性 第六次课程作业

UNIkeEN

2023 年 5 月 7 日

问题解答

1. 平面有两组点，如何证明是否存在直线可以将这两组点分开

解 判断该直线是否存在的算法可以分为两个步骤：

1. 首先对两组点分别使用 **Graham 扫描算法**寻找凸包，时间复杂度 $O(n\log n)$。
2. 使用射线法判断两个凸包是否相交，时间复杂度 $O(n)$。

如果两个凸包相交，则不存在直线可以将这两组点分开；如果两个凸包不相交，则存在直线可以将这两组点分开，直线位于两个凸包之间。整体时间复杂度 $O(n\log n)$。

2. 已知 n 个矩形，这些矩形的边都平行于坐标轴，1）求出这些矩形的交集；2）求出这些矩形能够覆盖的面积

解 首先求矩形的交集。对于任意边平行于坐标轴的矩形，可以用四个坐标表示其位置和大小：左上角的 x_{begin} 和 y_{begin}，右上角的 x_{end}，左下角的 y_{end}。

1. 易知交集如果存在，也是矩形，其坐标设为 $(X_{begin}, Y_{begin}, X_{end}, Y_{end})$。取一个矩形作为交集的初始值。
2. 依次遍历余下的每一个矩形，如果某矩形与当前交集不相交，即
$$(x_{begin} \geq X_{end}) \vee (x_{end} \leq X_{begin}) \vee (y_{begin} \leq Y_{end}) \vee (y_{end} \geq Y_{begin})$$
为真，程序终止，交集为空。
如果矩形与当前交集相交，则计算新的交集。条件如下：
$$\begin{aligned} X_{begin} &\leftarrow \texttt{max}(X_{begin}, x_{begin}) \\ X_{end} &\leftarrow \texttt{min}(X_{end}, x_{end}) \\ Y_{begin} &\leftarrow \texttt{min}(Y_{begin}, y_{begin}) \\ Y_{end} &\leftarrow \texttt{max}(Y_{end}, y_{end}) \end{aligned}$$
3. 遍历结束，则存在交集，交集为 $(X_{begin}, Y_{begin}, X_{end}, Y_{end})$ 所代表的矩形。

对每个矩形的判断过程均为 $O(1)$，整体时间复杂度为 $O(n)$。

解 下求矩形能够覆盖的面积，同上一题，用 $(x_{begin}, y_{begin}, x_{end}, y_{end})$ 表示矩形。

将各个矩形按 x_{begin} 进行排序，扫描线从左往右开始扫描，记录当前段开始的 x 坐标和当前段存在矩形的 y 方向坐标，遇到竖直边时计算当前部分有效面积并更新状态。下图展示了扫描线的扫描过程，不同颜色的矩形代表每次更新状态前计算的部分有效面积。

数据结构可以使用最小化堆。

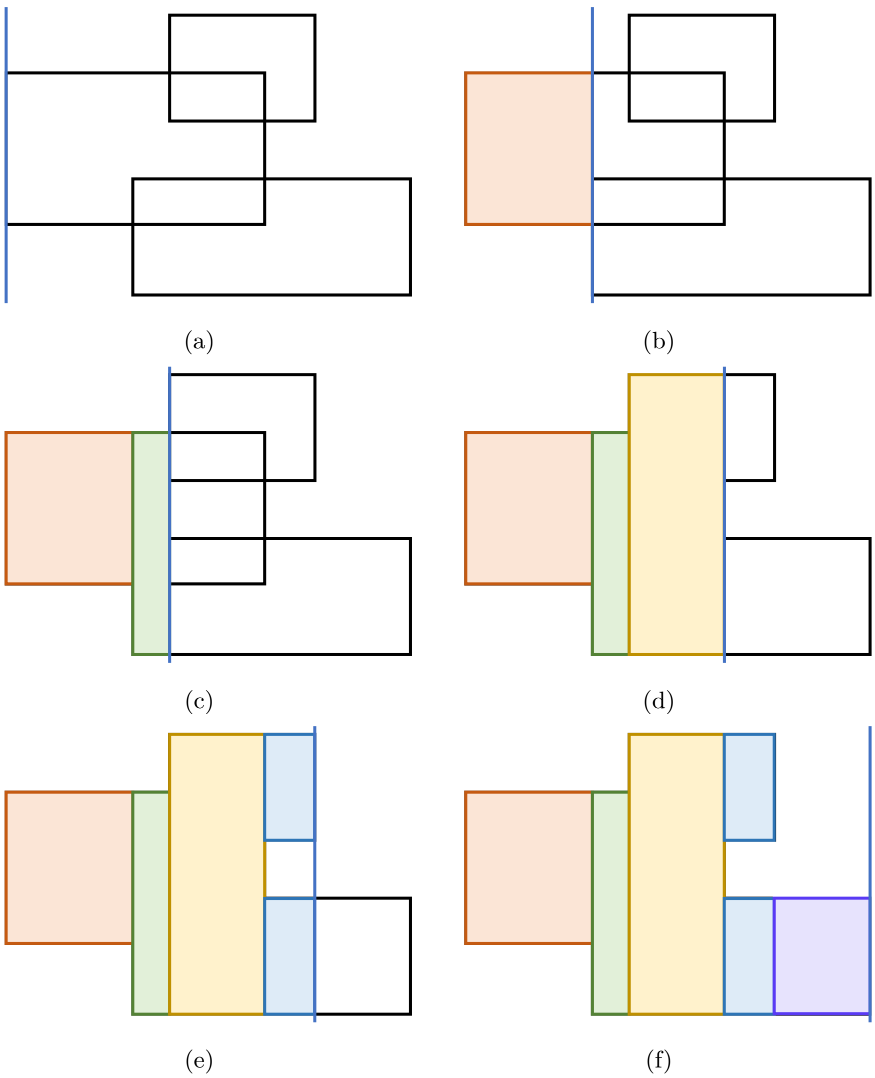

图 1

3. 有一组信封，已知每个信封的宽度和高度，当一个信封 a 的宽度和高度都比另一个信封 b 大的时候，信封 b 就可以放进信封 a 里，如同套娃一样。计算最多能有多少个信封组成一组“俄罗斯套娃”信封。注意：不允许旋转信封。

解 首先对信封按照高度升序排列，如果有高度相同者对宽度进行降序排列。再在宽度数列上求最长递增子序列的长度，即为可以组成“俄罗斯套娃”信封的最多数量。

最长递增子序列的时间复杂度 $O(n \log n)$。