

第 1 题 太空跳绳

一根不可伸长的长度为 l , 质量为 m 的均质软绳, 两端固定在间隔为 b 的两点. 绳子以两个固定点的连线为轴以匀角速度 ω 转动. 忽略重力的影响而只考虑离心力. 转动过程中绳子的形状保持为一个平面图形不变. (本题可以以积分及隐函数形式给出隐式解.)

- (1) 用平面坐标系中的方程描述绳子的形状.
- (2) 求绳子的动能.
- (3) 求固定点处对绳子的拉力的大小.

第 2 题 地铁站闸机

某地铁站的出入站闸机采用三辊闸设计. 三辊闸是这样一种装置: 考虑三维空间中的三根长度均为 l 的细硬轻杆, 每根杆都有一段被固定在点 O 处, 且它们两两之间的夹角被固定为 α . 显然存在一条过 O 的轴 z 使得三辊闸绕 z 轴有 $\frac{2\pi}{3}$ 旋转对称. z 轴与地面的夹角被适当地选取, 以至于三辊闸在初始状态可以与地面达成这样一种相对位形: 其中一根杆与地面平行, 另外两根杆的自由端的连线也与地面平行. 有一堵固定在地面上的墙, 其位置满足: 在初始状态下, 三辊闸的水平杆垂直于墙, 且墙面紧贴在水平杆的自由端. 将通过闸机的人简化为刚性长方体. 人通过闸机的过程中, 长方体推动三辊闸绕 z 轴转动, 长方体的一个面紧贴地面, 另一个面紧贴墙面. 长方体足够高.

- (1) 求满足以下条件的长方体的最大宽度 w_0 : 人能完全通过闸机, 且长方体的厚度可以任意大.
- (2) 接上问, 若长方体的宽度大于 w_0 , 求满足以下条件的长方体的最大横截面积: 人能完全通过闸机. 只需写出它是什么函数在什么区间上的最大值即可.
- (3) 长方体的宽度为 w . 人在完全通过闸机的过程中, 与杆之间存在滑动摩擦, 摩擦系数为 μ . 在三辊闸的转轴内有滑动摩擦力矩, 其大小恒定为 K . 求人在缓慢地完全通过闸机的过程中, 对杆做的功. 可以保留积分.



图 1: 三辊闸, 版权所有 © 2021 郑州思诺电子有限公司

第 3 题 Hohmann 转移轨道

质量为 m 的物体一开始绕着质量为 $M \gg m$ 的星体在半径为 r_1 的圆轨道上运动. 某时其瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_1 , 进入椭圆轨道. 在远心点处, 其再次瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_2 , 进入半径为 $r_2 = x r_1$ 的圆轨道上运动. 证明使 $\Delta v_1 + \Delta v_2$ 最大的 x 为 $5 + 4\sqrt{7} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37}\right)$.

第 4 题 电容势函数

有一平行板电容器. 定义变量 X 为极板间距, Q 为一个极板上的电荷量大小, F 为极板间作用力, V 为极板间的电势差. 电容 $C(X)$ 是已知函数 (不一定是反比例函数). 定义势函数 U 为电容器储存的能量.

(1) 证明 $dU = V dQ - F dX$.

(2) 证明 $\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F$.

(3) 若 $C(X)$ 是反比例函数, 在 F - X 图中分别作出等 V 过程和等 Q 过程的图像.

第 5 题 张拉整体

张拉整体 (tensegrity) 是一个由一些互不触碰的受压结构 (刚体) 以及连接它们的受拉结构 (绳) 组成的稳定结构. 其在建筑学, 工程学, 生物学等领域都有应用. 图 2 是一个例子, 其由顶部和底部各一个边长为 a 的正 n 边形 (图中 $n = 4$) 组成. 记底面的正 n 边形为多边形 $A_0 \cdots A_{n-1}$, 顶面上的正 n 边形为多边形 $B_0 \cdots B_{n-1}$. A_0 与 A_n 是同一个点, B_0 与 B_n 是同一个点. 对每个 j , 用长度为 b 的轻绳连接 $A_j B_j$, 用长度为 l 的轻杆连接 $A_j B_{j+1}$. 若该结构是一个张拉整体, 求 l .

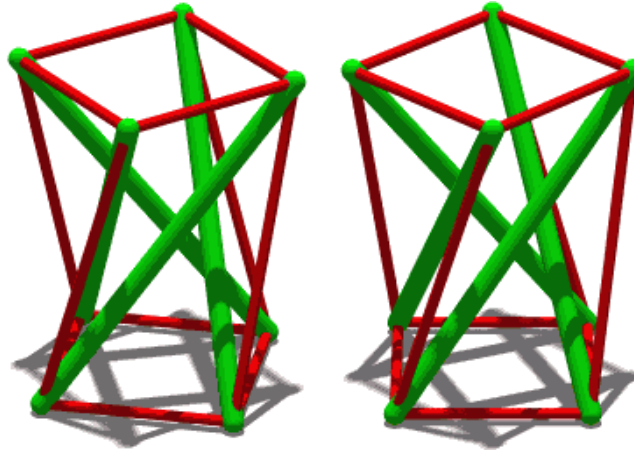


图 2: Tensegrity_simple_4.gif: Cmglee, derivative work: Cmglee, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

第 6 题 彩色视觉

视觉感受器 (眼睛) 中对彩色视觉至关重要的生物基础是视锥细胞 (cone cell). 在光线充足的情况下, 视锥细胞比视杆细胞 (rod cell) 更加活跃, 我们因此不考虑视杆细胞对视觉带来的影响. 某种动物的视网膜上有 n 种视锥细胞, 从而可以产生 n 色视觉 (n -chromacy) (人类有三色视觉 (trichromacy), 梅花雀有四色视觉 (tetrachromacy)¹, 青凤蝶 (*Graphium sarpedon*) 有十五色视觉²). 第 j 种视锥细胞对波长为 λ 的光的吸收率为 $f_j(\lambda)$, 其中 f_j 看作 $\mathbf{f}: (0, +\infty) \rightarrow [0, 1]^n$ 的第 j 个分量. $\{f_j\}$ 是线性无关的.

¹Hart N. S., Partridge J. C., Bennett A. T., Cuthill I. C.. “Visual pigments, cone oil droplets and ocular media in four species of estrildid finch”. *Journal of Comparative Physiology A*. Jul–Aug, 2000; **186** (7–8): 681–694. doi: 10.1007/s003590000121. PMID: 11016784. S2CID: 19458550.

²Chen P., Awata H., Matsushita A., Yang E., Arikawa K.. “Extreme Spectral Richness in the Eye of the Common Bluebottle Butterfly, *Graphium sarpedon*”. *Frontiers in Ecology and Evolution*, vol. 4, pp. 18. Mar 8, 2016. doi: 10.3389/fevo.2016.00018. ISSN: 2296-701X.

第 j 种视锥细胞在某种光刺激下的响应程度正比于它从中吸收的总功率. 视锥细胞在受到刺激后, 会将响应信号以电信号的形式告诉大脑, 大脑即可获得视网膜上某处的各种视锥细胞的响应程度 $\mathbf{c} \in [0, +\infty)^n$, 其中 \mathbf{c} 的分量 c_j 为第 j 种视锥细胞的响应程度. 从而颜色可以与 $C := [0, +\infty)^n$ 中的向量一一对应. 特殊地, 我们称并不是每个分量都相同的 \mathbf{c} 组成的集合为 C^* .

规定两种变换: $T_u : c_j \mapsto uc_j$ ($u > 0$) 以及 $S_v : c_j \mapsto v(c_j - l) + l$ ($0 < v \leq \frac{l}{l - c_{\min}}$), 其中 l 是 \mathbf{c} 中最小分量 c_{\min} 和最大分量 c_{\max} 的平均值. 我们认为在这两种变换下 \mathbf{c} 的色相保持不变. 我们在 C^* 上关于色相建立一个等价关系: $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$ 当且仅当存在 u, v , 使得 $\mathbf{c} = T_u S_v \mathbf{c}'$.

设某种设备 (不妨称为彩灯) 能发出固定的 n 种单色光, 其波长分别为 λ_k . 它能以任意不同的功率合成并发出这些单色光, 产生对视锥细胞的光刺激.

彩虹中包含了所有的单色光.

(1) 设某个光刺激中能量随波长的分布为已知函数 $g(\lambda)$, 求该光刺激代表的颜色.

(2) 求彩灯能产生的所有的颜色的集合 $L \subseteq C$.

(3) 求彩虹中所有的颜色的集合 $R \subseteq C$.

(4) 若存在一组 $\{\lambda_k\}$, 使得 $L = C$. 求 \mathbf{f} 需要满足的条件.

(5) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在 $\mathbf{c}' \in R$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 \mathbf{c}' 的方法. 若否, 是否对于 C^* 中的任意具有一块有限体积的区域 D , 对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in D$, 不存在这样的 \mathbf{c}' ?

(6) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 \mathbf{c}' 的方法. 若否, 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in R$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$?

第 7 题 互 LC 震荡

我们知道电感有自感和互感. 但是, 虽然我们有“互电容”的概念, 其并不能与互感很好地对应. 我们现在来构造一种与互感相对应的概念“互容”: 若两个电容器的电容量分别为 C_1 和 C_2 , 且它们之间的互容系数为 N , 则 $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{N}$, 且 $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{N}$.

考虑四块的面积为 S 的平行极板, 依次编号为 a-d. 极板 a 和极板 c 看作一个电容器, 极板间距为 d_1 ; 极板 b 和极板 d 看作一个电容器, 极板间距为 d_2 ; 极板 b 和极板 c 的间距为 d . 其中 $d < d_1 \ll \sqrt{S}$, 且 $d < d_2 \ll \sqrt{S}$.

(1) 求这两个电容器之间的互容系数.

(2) 设有两个 LC 电路, 电路中分别有电容 C_1 与 C_2 , 电感 L_1 与 L_2 . 两个电容之间的互容系数为 N , 两个电感之间的互感系数为 M . 求电路的振动频率. 若该振动由多个频率不同的简谐振动叠加而成, 求出所有的频率.

第 8 题 球套黑球

本题中提到的黑体都是余弦辐射体. 将一个热容为 C 的半径为 r 的均匀的球形的黑体 A 放在一个半径为 R 的均匀的薄球壳 B 内. 两个球心的距离为 $d < R - r$. 在 $t = 0$ 时, A 的温度为 T_0 . A 内部的热传导很快.

(1) B 是热容为 D , 初始温度为 S_0 的黑体. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$. (可保留代数方程, 积分, 微分方程等, 若数学计算过于复杂.)

(2) B 的内壁是可以完全反射热辐射的镜面. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$.

参考答案

第 1 题 太空跳绳

(1) 因为绳子的形状是具有最小势能的形状, 所以本题即求解最优化问题

$$\min_{y \in C^1[-b/2, b/2]} \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l} \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \omega^2 \cdot y^2 \quad (1)$$

$$\text{s.t. } y(-b/2) = y(b/2) = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1+y'^2} dx = l. \quad (3)$$

在目标函数中带上 Lagrange 乘子, 可以略去约束条件式 3, 而目标变为

$$\max_{y \in C^1[-b/2, b/2]} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sqrt{1+y'^2} dx - \lambda \left(\int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1+y'^2} dx - l \right) \quad (4)$$

$$\text{s.t. } y(-b/2) = y(b/2) = 0. \quad (5)$$

定义 Lagrangian

$$\mathcal{L} := (y^2 - \lambda) \sqrt{1+y'^2}. \quad (6)$$

代入 Euler-Lagrange 方程后化简可得

$$2y(1+y'^2) = (y^2 - \lambda)y''. \quad (7)$$

进行变换 $p := y'$ 后可得

$$2y(1+p^2) = (y^2 - \lambda)p \frac{dp}{dy}. \quad (8)$$

分离变量并积分可得

$$\ln(1+p^2) = 2 \ln \frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}, \quad (9)$$

其中 $y_0 := y(0) > 0$, $a := \sqrt{\lambda} > y_0$. 回代 $p = y'$, 再次分离变量并积分可得

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}} = \pm x. \quad (10)$$

式 10 给出描述绳子形状的方程.

约束条件 $y(-b/2) = y(b/2) = 0$ 给出

$$b = 2 \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}}. \quad (11)$$

绳子上的长度微元

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (12)$$

从而

$$l = 2 \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (13)$$

式 11 与式 13 隐式给出了式 10 中的参数 a 和 y_0 .

(2)

$$E_k = \int_{x=-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l} ds \cdot \omega^2 y^2 = \frac{m\omega^2}{l} \int_0^{y_0} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (14)$$

(3) 质心位置为

$$y_c = \frac{1}{m} \int_{x=-b/2}^{b/2} y \cdot \frac{m}{l} ds = \frac{2}{l} \int_0^{y_0} \frac{y dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}} = \frac{y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{l}. \quad (15)$$

绳子受到的合力

$$F = m\omega^2 y_c = \frac{m\omega^2 y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{l}. \quad (16)$$

在 $x = \pm b/2$ 处曲线的切线斜率

$$y'(\pm b/2) = \mp \tan \theta = \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}, \quad (17)$$

从而固定点处对绳子的拉力大小

$$T_{\pm b/2} = \frac{F}{2 \sin \theta} = \frac{m\omega^2 y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{2l \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{m\omega^2 a}{2l}. \quad (18)$$

另：此题可用受力法解.

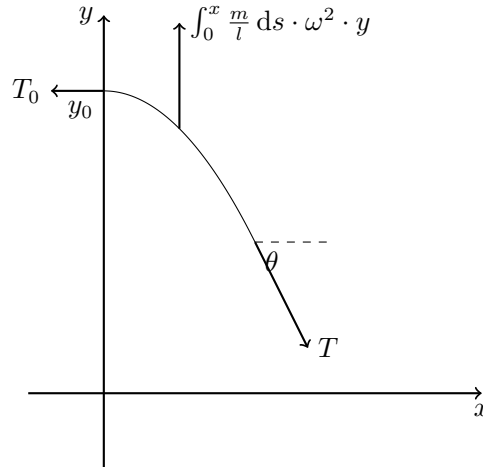


图 3

设绳子在 $x = 0$ 处的张力为水平方向 T_0 , 考虑 $[0, x]$ 上的一段绳子的受力平衡, 如图 3 所示. 考虑到 $\tan \theta = -y'$, 有

$$\int_0^x \frac{m}{l} ds \cdot \omega^2 \cdot y = -T_0 y'. \quad (19)$$

两边对 x 求导可得

$$\frac{m\omega^2}{l} \sqrt{1 + y'^2} = -T_0 y''. \quad (20)$$

变换 $p := y'$, 分离变量得

$$\frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = -\frac{m\omega^2}{T_0 l} y dy. \quad (21)$$

两边积分得

$$\sqrt{1 + p^2} - 1 = -\frac{m\omega^2}{2T_0 l} (y^2 - y_0^2). \quad (22)$$

代换 $a := \sqrt{\frac{2T_0 l}{m\omega^2} + y_0^2}$ 可将式 22 变为与式 9 等价的形式.

第 2 题 地铁站闸机

如图 4 所示, 建立坐标系. 以人前进的方向为 x 轴和 x' 轴, z' 轴水平, y, y', z, z' 四根轴在同一平面. 设 z' 轴与 z 轴的夹角为 β .

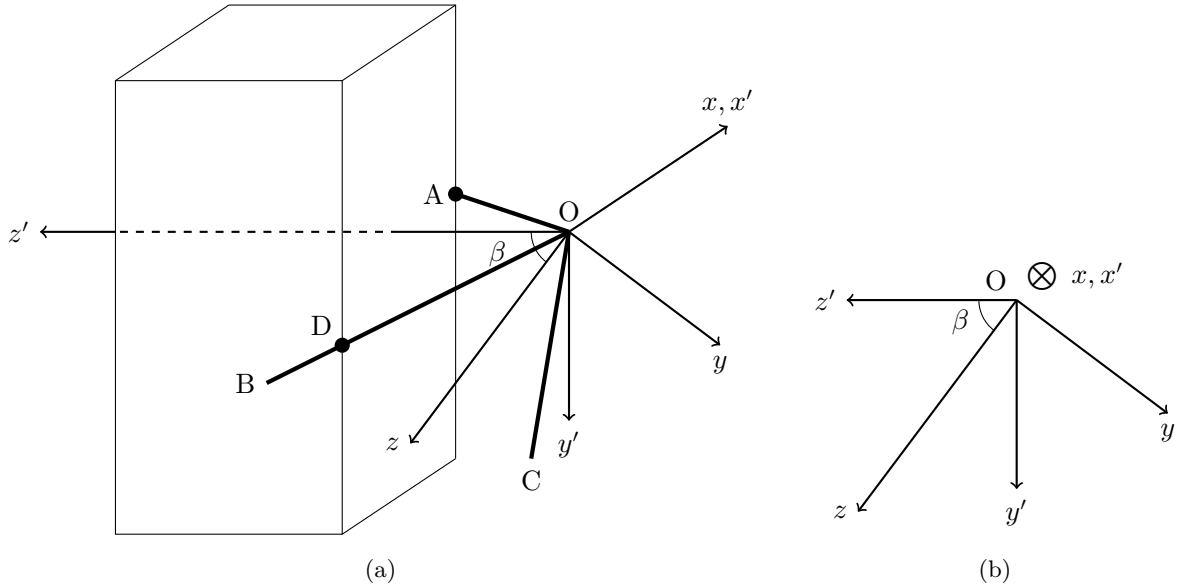


图 4

初始时, 杆 OA 水平, 于是可以写出初始时 A, B, C 三点的坐标

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta \\ \frac{1}{2} \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta \\ \frac{1}{2} \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

因为三根杆两两夹角为 α , 所以可以通过将它们的坐标点乘来获得 β 与 α 的关系

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = l^2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \alpha}{3}}. \quad (2)$$

现在研究 xyz 坐标系与 $x'y'z'$ 坐标系之间的换算关系. 可以看做绕 x 轴旋转 β :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (3)$$

再考虑三根杆的旋转变换. 设三根杆旋转了 φ 角后 A 在 xyz 坐标系中的坐标为 $\mathbf{a}(\varphi)$, 则

$$\mathbf{a}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a}(0). \quad (4)$$

令

$$\mathbf{R}(\varphi) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (5)$$

于是可得三根杆转了 φ 角后 A 在 xyz 坐标系中的坐标

$$\mathbf{a}'(\varphi) = \mathbf{R}(\varphi) \mathbf{a}'(0), \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{a}'(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}. \quad (7)$$

是 A 的初始坐标. 将式 6 全部展开后化简可得

$$\mathbf{a}'(\varphi) = l \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \varphi \\ \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

同时我们可以获得 B 和 C 的坐标

$$\mathbf{b}'(\varphi) = \mathbf{a}'\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \mathbf{c}'(\varphi) = \mathbf{a}'\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right). \quad (9)$$

(1) 若长方体的宽度小于等于三根杆的末端到墙的距离 (三个中最小的那个) 的最大值, 则它的厚度可以无限大. 很明显, 当三根杆的末端到墙的距离最大时, 应有 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 此时三根杆的位形刚好跟初始状态相反. 容易计算得

$$w_0 = l - a'_3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{l}{2} \sin^2 \beta = \frac{l}{3} (1 - \cos \alpha). \quad (10)$$

(2) 设长方体的宽度为 w . 假定长方体可以完全通过三铰闸. 令长方体的厚度逐渐增加, 直到它恰好能完全通过三铰闸. 在临界情况下, 它刚好能够把 OA 杆推至一个它不需要再推就能使它继续通过的角度 (即 $l - a'_3(\varphi) = w$). “刚好”意味着, 如果它再厚一点, OB 杆就会撞到长方体. 这表明, 在临界情况下, 当 $l - a'_3(\varphi) = w$ 时, 杆 OB 刚好触碰到长方体的另一条棱. 这一情形在图 4a 中被画出. 而杆 OC 是不必担心的, 因为 C 点的 z' 坐标不可能大于其初始值.

经过上述讨论可以得知, 我们需要考察 OB 杆上与 A 点恰好具有相同的 z' 坐标的点 D. 因为 OD 与 OB 平行, 容易写出 D 的坐标

$$\mathbf{d}'(\varphi) = \frac{a'_3(\varphi)}{a'_3\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)} \mathbf{a}'\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right). \quad (11)$$

在临界情况下, 宽度为 $l - a'_3(\varphi)$ 的长方体的厚度刚好相当于 A 与 D 的 x' 坐标之差. 于是我们可以得到所要求的横截面积与刚好能离开三铰闸时的转角 φ 的关系

$$S(\varphi) = (l - a'_3(\varphi)) \left(a'_1(\varphi) - \frac{a'_3(\varphi)}{a'_3\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)} a'_1\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (12)$$

将式 8 代入式 12 可得

$$S(\varphi) = l^2 \cdot 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(\sin \beta \sin \varphi - \frac{1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} \sin \beta \sin \left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right). \quad (13)$$

由题目中所说, 长方体的宽度大于 w_0 , 所以在研究最大厚度时 $\varphi \geq \frac{\pi}{3}$. 另一方面, 长方体的宽度不能大于初始时 B 到墙面的距离, 所以 $\varphi \leq \frac{2\pi}{3}$. 从而, 问题被转化为求 $S(\varphi)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最大值.

(3) 记人推动杆的过程中杆与长方体的棱的交点为 H. 显然 H 的 z' 坐标恒为 $l - w$, 且 OH 平行于 OA. 因此可以写出 H 的坐标

$$\mathbf{h}' = \frac{l - w}{a'_3} \mathbf{a}' = \frac{l - w}{1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \begin{bmatrix} \sin \beta \sin \varphi \\ \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

记固连在杆上的 H 点的元位移为 $d_1 \mathbf{h}'$, 固连在长方体上的 H 点的元位移为 $d_2 \mathbf{h}'$. 显然有

$$d_1 \mathbf{h}' = \mathbf{R}(d\varphi) \mathbf{h}' - \mathbf{h}' = (l-w) \frac{\sin \beta}{1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \cos \beta \sin \varphi \\ -\sin \beta \sin \varphi \end{bmatrix} d\varphi, \quad (15)$$

$$d_2 \mathbf{h}' = d\mathbf{h}' \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (l-w) \frac{\cos \varphi + 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2} \sin \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\varphi. \quad (16)$$

记长方体对杆的摩擦力为 \mathbf{f}' . 显然它应当平行于杆与长方体的相对位移. 这意味着

$$\mathbf{f}' \parallel d_2 \mathbf{h}' - d_1 \mathbf{h}' \parallel \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi + 1) \\ -\cos \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \\ \sin \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

记长方体对杆的弹力为 \mathbf{N}' . 显然它应当同时垂直于杆和长方体的棱. 这意味着

$$\mathbf{N}' \parallel \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{a}' \parallel \begin{bmatrix} 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ -\sin \beta \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (18)$$

记 $N := |\mathbf{N}'|$. 则摩擦力的大小为 μN . 于是可以获得

$$\mathbf{f}' = \frac{2\mu N}{\sin \varphi \sqrt{3 + 4 \cos 4\beta + 2 \sin^2 2\beta \cos \varphi}} \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi + 1) \\ -\cos \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \\ \sin \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{N}' = \frac{N}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^4 \frac{\varphi}{2}}} \begin{bmatrix} 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ -\sin \beta \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (20)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' := & \frac{2\mu}{\sin \varphi \sqrt{3 + 4 \cos 4\beta + 2 \sin^2 2\beta \cos \varphi}} \begin{bmatrix} 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} (\cos \varphi + 1) \\ -\cos \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \\ \sin \beta \sin \varphi (1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 2\beta \sin^4 \frac{\varphi}{2}}} \begin{bmatrix} 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ -\sin \beta \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

由于杆是轻杆, 所以由力矩平衡关系可得

$$N = \frac{K}{|\mathbf{h}' \times \mathbf{u}'|}. \quad (22)$$

于是可得长方体对杆所做的功

$$W = \int_{\varphi=0}^{2 \arcsin(\frac{1}{\sin \beta} \sqrt{\frac{w}{2l}})} \frac{K}{|\mathbf{h}' \times \mathbf{u}'|} \mathbf{u}' \cdot d_1 \mathbf{h}', \quad (23)$$

式中 $\beta, \mathbf{h}', d_1 \mathbf{h}', \mathbf{u}'$ 分别由式 2, 式 14, 式 15, 式 21 给出.

第 3 题 Hohmann 转移轨道

物体的速度变化的全过程为

$$\underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_1}}}_{\text{圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_1} \underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2} + \frac{2GM}{r_1}}}_{\text{椭圆轨道}} \rightarrow \underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2} + \frac{2GM}{r_2}}}_{\text{椭圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_2} \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}_{\text{圆轨道}}. \quad (1)$$

于是

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 \propto f(x) := \sqrt{\frac{2x}{1+x}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}. \quad (2)$$

为了使 $\Delta v_1 + \Delta v_2$ 极大,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 0. \quad (3)$$

在式 3 两边乘 $2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{3}{2}}$ 可得

$$\sqrt{2}(1+3x) - (1+x)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (4)$$

此方程可约化为多项式方程

$$P(x) := x^3 - 15x^2 - 9x - 1 = 0. \quad (5)$$

注意到

$$\cos 3y = \cos y (2 \cos^2 y - 1) - 2 \cos y (1 - \cos^2 y) = 4 \cos^3 y - 3 \cos y,$$

所以

$$\cos^3 \frac{y}{3} = \frac{1}{4} \left(\cos y + 3 \cos \frac{y}{3} \right).$$

令 $x^* := 5 + 4\sqrt{7} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37}\right)$, 则

$$(x^* - 5)^3 = 16 \cdot 7^{\frac{3}{2}} \left(\cos \arctan \frac{\sqrt{3}}{37} + 3 \cos \left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37} \right) \right) \quad (6)$$

$$= 16 \cdot 7^{\frac{3}{2}} \left(\frac{37}{2 \cdot 7^{\frac{3}{2}}} + 3 \cdot \frac{x^* - 5}{4\sqrt{7}} \right) \quad (7)$$

$$= 84x^* - 124. \quad (8)$$

由此可得 $P(x^*) = 0$.

第 4 题 电容势函数

(1) $V dQ$ 是电源对电容所做的功, $-F dX$ 是外力对电容所做的功.

(2) 令 $H := U + FX$, 则

$$dH = V dQ + X dF. \quad (1)$$

从而

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial Q} \right)_F, \quad X = \left(\frac{\partial H}{\partial F} \right)_Q. \quad (2)$$

由于求偏导次序可交换, $\frac{\partial^2 H}{\partial Q \partial F} = \frac{\partial^2 H}{\partial F \partial Q}$, 因此

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F} \right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q} \right)_F. \quad (3)$$

(3) 设 $C(X) = \alpha/X$, 则由 $Q = CV$ 可得状态方程

$$QX = \alpha V. \quad (4)$$

内能表达式为

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2 X}{2\alpha}. \quad (5)$$

于是

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_Q = \frac{Q^2}{2\alpha} = \frac{\alpha V^2}{2X^2}. \quad (6)$$

于是可以在 F - X 图作出如图 5 所示的曲线. 图 5a 与图 5b 分别是等 V 过程与等 Q 过程的图像.

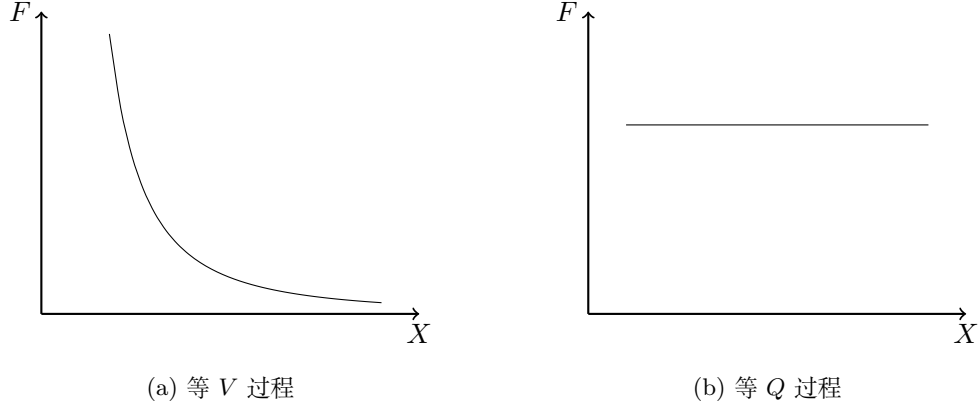


图 5

第 5 题 张拉整体

设多边形 $A_0 \cdots A_{n-1}$ 在旋转一定角度 α (旋转的方向与 A_j 随 j 变化的环绕方向相同) 之后, 可以平移至与多边形 $B_0 \cdots B_{n-1}$ 重合. 设两个正 n 边形所在平面之间的距离为 h , 两个正 n 边形的半径为

$$r := \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}. \quad (1)$$

建立坐标系. 给出点的坐标:

$$A_j \left(r \cos \frac{2j\pi}{n}, r \sin \frac{2j\pi}{n}, 0 \right), \quad B_j \left(r \cos \left(\frac{2j\pi}{n} + \alpha \right), r \sin \left(\frac{2j\pi}{n} + \alpha \right), h \right). \quad (2)$$

则几何约束为

$$(r \cos \alpha - r)^2 + (r \sin \alpha)^2 + h^2 = b^2, \quad (3)$$

$$\left(r \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) - r \right)^2 + \left(r \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) \right)^2 + h^2 = l^2. \quad (4)$$

将其看做关于 α, h 的方程组, 解得

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{n} \right) = \frac{l^2 - b^2}{4r^2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{l^2 - b^2}{a^2} \sin \frac{\pi}{n}, \quad (5)$$

考虑对称性, 每个 $T(A_j B_j)$ 相等, 每个 $T(A_j B_{j+1})$ 相等, 每个 $T(A_j A_{j+1})$ 相等. 令 $T_a := T(A_j A_{j+1})$, $T_b := T(A_j B_j)$, 以及 $T_l := T(A_j B_{j+1})$.

点 A_0 静力平衡给出条件

$$\mathbf{T}(A_0 A_1) + \mathbf{T}(A_0 A_{n-1}) + \mathbf{T}(A_0 B_0) + \mathbf{T}(A_0 B_1) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

其中各个力

$$\mathbf{T}(A_0 A_1) = \frac{T_a}{a} \begin{bmatrix} r \cos \frac{2\pi}{n} - r \\ r \sin \frac{2\pi}{n} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}(A_0 A_{n-1}) = \frac{T_a}{a} \begin{bmatrix} r \cos \frac{2\pi}{n} - r \\ -r \sin \frac{2\pi}{n} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{T}(A_0 B_0) = \frac{T_b}{b} \begin{bmatrix} r \cos \alpha - r \\ r \sin \alpha \\ h \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{T}(A_0 B_1) = \frac{T_l}{l} \begin{bmatrix} r \cos(\alpha + \frac{2\pi}{n}) - r \\ r \sin(\alpha + \frac{2\pi}{n}) \\ h \end{bmatrix}. \quad (10)$$

注意到式 6 的 y 和 z 分量给出

$$\begin{cases} \frac{T_b}{b} r \sin \alpha + \frac{T_l}{l} r \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) = 0, \\ \frac{T_b}{b} h + \frac{T_l}{l} h = 0. \end{cases} \quad (11)$$

该方程组要有非零解, 于是系数行列式为零. 从而得到条件

$$\sin \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right). \quad (12)$$

满足式 12 的最小的正的 α 为

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \pi. \quad (13)$$

将式 13 代入式 5 可得

$$l = \sqrt{\frac{a^2}{\sin \frac{\pi}{n}} + b^2}. \quad (14)$$

第 6 题 彩色视觉

(1)

$$\mathbf{c} = \int_0^\infty \mathbf{f}(\lambda) g(\lambda) d\lambda. \quad (1)$$

(2)

$$L = \left\{ \sum_k a_k \mathbf{f}(\lambda_k) \mid \mathbf{a} \in [0, +\infty)^n \right\}. \quad (2)$$

(3)

$$R = \{a\mathbf{f}(\lambda) \mid a \in [0, +\infty), \lambda \in (0, +\infty)\}. \quad (3)$$

(4) $L = C$ 的充要条件是

$$\forall j : \text{supp}(f_j) \setminus \bigcup_{l \neq j} \text{supp}(f_l) \neq \emptyset. \quad (4)$$

充分性: 取

$$\lambda_k : \in \text{supp}(f_k) \setminus \bigcup_{l \neq k} \text{supp}(f_l) \quad (5)$$

即可.

必要性: 反证法. 若

$$\text{supp}(f_{j^*}) \setminus \bigcup_{l \neq j^*} \text{supp}(f_l) = \emptyset, \quad (6)$$

则显然对于 $c_j := \delta_{j,j^*}$, 有 $C \ni \mathbf{c} \notin L$.

(5) 首先考虑 $n = 1$ 的情形. 此时显然有 $R = C$, 因此对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.

接下来考虑 $n = 2$ 的情形. 此时显然有平凡的情形: $\forall \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C^* : \mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$. 又, R 非空. 因此, 显然对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.

然后考虑 $n > 3$ 的情形. 由于等价关系 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$ 中有两个可调参量 u, v , 所以对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 与 \mathbf{c} 等色相的全体颜色组成的集合

$$[\mathbf{c}] := \{\mathbf{c}' \in C^* \mid \mathbf{c} \sim \mathbf{c}'\}. \quad (7)$$

是 C 中的二维曲面. 又, 由于在 R 上诱导的色相等价类 $[R]$ 可以构造为 C 中的一维曲线 (例如参数曲线 $\mathbf{c} = \mathbf{f}(\lambda)$ (参数 $\lambda \in (0, +\infty)$)). 当 \mathbf{c} 在曲线 $[R]$ 上运动时, 二维曲面 $[\mathbf{c}]$ 将扫过一片三维超曲面 P . 显然 P 可被定义为

$$P := \{\mathbf{c} \in C^* \mid \exists \mathbf{c}' \in R : \mathbf{c} \sim \mathbf{c}'\}. \quad (8)$$

由于 P 是三维超曲面, 然而 C 是 $n > 3$ 维空间, 所以显然对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in C^*$, 不存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.

最后考虑 $n = 3$ 的情形:

$n = 3$ 是一个特殊的情形, 在这种情形中可以容易地构造一个函数 $p : C^* \rightarrow [-\pi, \pi)$ 使得对于任意的 $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C^*$, 有 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$ 当且仅当 $p(\mathbf{c}) = p(\mathbf{c}')$. 构造方法如下:

定义

$$\mathbf{s}(\mathbf{c}) := S_{\frac{c_{\max} + c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}}} \mathbf{c}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{c}) := T_{\frac{1}{c_{\max}}} \mathbf{c}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{c}) := \mathbf{t}(\mathbf{s}(\mathbf{c})). \quad (9)$$

此时 \mathbf{u} 的作用是将 $\mathbf{c} \in C^*$ 标准化为满足 $c_{\min} = 0, c_{\max} = 1$ 的等色相的标准颜色 $\mathbf{u}(\mathbf{c})$. 于是, 我们只需要为每一个标准颜色 \mathbf{c}° 分配一个特征值 $q(\mathbf{c}^\circ)$, 即可定义出 p . 记 \mathbf{c} 的三个分量为 c_1, c_2, c_3 . 记对应于 \mathbf{c} 的最小分量的下标为 \min , 对应于 \mathbf{c} 的最大分量的下标为 \max . 定义 q 为

$$q(\mathbf{c}^\circ) := \frac{\pi}{3} (b + \varepsilon c_{\text{mid}}^\circ), \quad (10)$$

其中 c_{mid} 表示 \mathbf{c} 中除了最大和最小以外的那个分量, b 与 ε 的取值如表 1 所示. 从而, 可定义

$$p(\mathbf{c}) := q(\mathbf{u}(\mathbf{c})). \quad (11)$$

表 1

min, max	1	2	3
1		2, 1	-2, -1
2	0, -1		-2, 1
3	0, 1	2, -1	

此时各种情况都有可能出现. 可以对各种情况进行构造:

1. 按图 6a 定义 \mathbf{f} , 可知 $p(\mathbf{af}(\lambda))$ 可取遍 $[-\pi, \pi)$ 中的所有值, 从而可以取遍所有的色相, 从而对于所有的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.
2. 按图 6b 定义 \mathbf{f} , 从而 $p(\mathbf{af}(\lambda))$ 只能取 $\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\}$ 中的值, 从而对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in C^*$, 不存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.



图 6

3. 将图 6a 与图 6b 各自取一半拼起来, 从而并不是 $\forall \mathbf{c} \in C^* : \exists \mathbf{c}' \in R : \mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$, 但是, 也并不是对于所有的 C^* 中具有一块有限体积的区域 D , 对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in D$, 不存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in R$.

(6) 此题可以考虑 C 中的几何直观. 首先应用式 9 给出的标准化方法, 映射 \mathbf{u} 的像给出了一种用 C 中的 $n-2$ 维超曲面表示 C 上诱导的等价类 $[C]$ 的方法. 显然, \mathbf{u} 的像由 $n(n-1)$ 个 $n-2$ 维超立方体组成:

$$\text{Im } \mathbf{u} = \bigcup_{j \neq l} \{ \mathbf{c} \in C \mid c_j = 0, c_l = 1, c_m \in [0, 1], m \neq j, l \}. \quad (12)$$

注意到变换 S_v 可以将 $\text{Im } \mathbf{u}$ 上的点 U 变换到射线 PU 上的另外一点, 其中 P 是单位立方体的中心. 又, 变换 T_u 可以将 C 中的点 V 变换到射线 OV 上的另外一点. 从而, 与 \mathbf{c} 等色相的颜色的集合 $[\mathbf{c}]$ 可以表为 $\angle \mathbf{u}(\mathbf{c}) OP$ 所夹的二维平面区域 (不包括射线 OP). 当 \mathbf{c} 取遍所有的色相时, $[\mathbf{c}]$ 将扫过整个 C^* .

对于 $n=3$, 上面所述的几何直观由图 7 给出. $\text{Im } \mathbf{u}$ 即折线 $RYGCBMR$. 当 $p(\mathbf{c})$ 取遍 $[-\pi, \pi)$ 时, $\mathbf{u}(\mathbf{c})$ 沿着该折线绕 OP 转一圈.

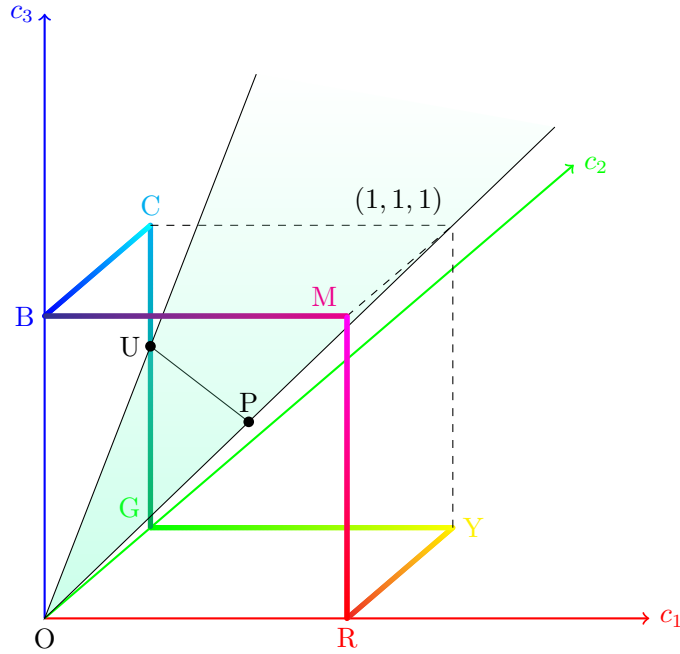


图 7

考虑到 L 实际上是 $\{\mathbf{f}(\lambda_k)\}$ 的 (具有非负系数的) 线性组合的集合. 因此, L 是以 $\{\mathbf{f}(\lambda_k)\}$ 各自延成的射线为棱边, 以 O 为顶点的超棱锥. 由几何直观可知, 当该超棱锥包含射线 OP 时 (即方程组 $\forall j : a_k f_j(\lambda_k) = 1$ 的解 \mathbf{a} 的每个分量都是正的), 超棱锥内的点可以取遍所有的色相. 反之, 则不能. 因此, 对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$ 的条件是关于 \mathbf{a} 的方程组 $\forall j : a_k f_j(\lambda_k) = 1$ 具有正的解.

不过这里我们认为 $\{\lambda_k\}$ 已经被选定而不能改变. 如果 $\{\lambda_k\}$ 可以被任意选定, 那么存在某种 \mathbf{f} 的形式, 使得对于任意 $\{\lambda_k\}$ 的选择, 都并非对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$. 例如, 我们可以构造一种 \mathbf{f} , 使得 $\forall \lambda : f_1(\lambda) > f_2(\lambda)$. 那么方程组 $\forall j : a_k f_j(\lambda_k) = 1$ 对任意的 $\{\lambda_k\}$ 都没有正的解.

若 $\{\lambda_k\}$ 的选取使得射线 OP 不被包含在超棱锥 L 内, 则曲线 $\mathbf{c} = \mathbf{f}(\lambda)$ (λ 为参数) 中的某一段可以处在超棱锥所能表达的色相之外. 该曲线也有可能完全处在超棱锥所表达的色相之内, 取决于 \mathbf{f} 的具体形式. 因此, 若并不是对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$, 那么可能对于任意的 $\mathbf{c} \in R$, 存在与 \mathbf{c} 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$, 这取决于 \mathbf{f} 的形式.

第 7 题 互 LC 震荡

(1) 如图 8 所示, 四块极板将空间分割为五个部分, 分别设为 I–V.

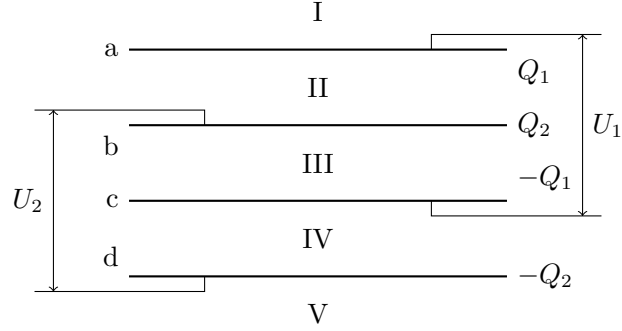


图 8

分别列出五块区域中的电场 (以向下为正):

$$2\varepsilon_0 S E_{\text{I}} = -Q_1 - Q_2 + Q_1 + Q_2 = 0, \quad (1)$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\text{II}} = Q_1 - Q_2 + Q_1 + Q_2 = 2Q_1, \quad (2)$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\text{III}} = Q_1 + Q_2 + Q_1 + Q_2 = 2(Q_1 + Q_2), \quad (3)$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\text{IV}} = Q_1 + Q_2 - Q_1 + Q_2 = 2Q_2, \quad (4)$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\text{V}} = Q_1 + Q_2 - Q_1 - Q_2 = 0. \quad (5)$$

从而电势差

$$U_1 = E_{\text{II}}(d_1 - d) + E_{\text{III}}d = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} Q_1 + \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q_2, \quad (6)$$

$$U_2 = E_{\text{III}}d + E_{\text{IV}}(d_2 - d) = \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} Q_2 + \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q_1. \quad (7)$$

比较互容的定义, 可得互容系数

$$N = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (8)$$

(2) 分别对两个 LC 电路应用 Kirchhoff 电压定律, 可得方程组

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{N} = L_1 \ddot{Q}_1 + M \ddot{Q}_2, \\ \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{N} = L_2 \ddot{Q}_2 + M \ddot{Q}_1. \end{cases} \quad (9)$$

定义电容矩阵

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (10)$$

电感矩阵

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

从而式 9 可重写为

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{L}\ddot{\mathbf{Q}}, \quad (12)$$

或者

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$. 将 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$ 特征分解:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix}$ 是对角矩阵. 令

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (15)$$

从而式 13 可重写为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1, \\ \ddot{q}_2 = -\omega_2^2 q_2, \end{cases} \quad (16)$$

其解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t, \\ q_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t. \end{cases} \quad (17)$$

从而可得解

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t \\ A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t \end{bmatrix}. \quad (18)$$

因此电路中的振动是由频率为 ω_1 和 ω_2 的简谐振动合成的.

经过一番冗长的计算后可得

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{L_1 L_2 - M^2}}, \quad (19)$$

其中

$$p := \frac{M}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} \right), \quad (20)$$

$$\Delta := \frac{L_1 L_2}{N^2} + \frac{M^2}{C_1 C_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{L_1}{C_2} - \frac{L_2}{C_1} \right)^2 - \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} \right) \frac{M}{N}. \quad (21)$$

第 8 题 球套黑球

(此解答中球坐标的方位角取值为 $[-\pi, \pi)$.)

(1) 如图 9 所示, 以两个球心的连线为 z 轴, 记 P 为 B 上 xOz 平面内具有极角 θ 的点. 考虑 B 上 P 处单位面积发出的热辐射.

以 P 为原点建立坐标系, z' 轴指向 O . 平面 $x'Pz'$ 与平面 xOz 重合. 容易获得从 $x'y'z'$ 坐标系变换到 xyz 坐标系的公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right). \quad (1)$$

于是 A 的球心 $O_A (x = d, y = 0, z = 0)$ 在 $x'y'z'$ 坐标系中的坐标为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(d - R \sin \theta) \cos \theta + R \cos \theta \sin \theta \\ 0 \\ (d - R \sin \theta) \sin \theta + R \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \cos \theta + R \sin 2\theta \\ 0 \\ d \sin \theta + R \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

考虑从 P 发出的具有极角 θ' 和方位角 φ' 的辐射. 该射线的参数方程为

$$x' = s \sin \theta' \cos \varphi', \quad y' = s \sin \theta' \sin \varphi', \quad z' = s \cos \theta'. \quad (3)$$

为了求该射线到 O_A 的距离, 考虑该射线上的点 Q, 其到 O_A 的距离为

$$\begin{aligned} |QO_A|^2 &= (-d \cos \theta + R \sin 2\theta - s \sin \theta' \cos \varphi')^2 \\ &\quad + (-s \sin \theta' \sin \varphi')^2 \\ &\quad + (d \sin \theta + R \cos 2\theta - s \cos \theta')^2 \\ &\geq u(\theta, \theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $u(\theta, \theta', \varphi')$ 为 $|QO_A|^2$ 在 s 变化时的最小取值 (二次函数最低点). 由方程 $u(\theta, \theta', \varphi') = r^2$ 可以解得 $\theta' \in [0, \frac{\pi}{2})$ 范围内的解 $\theta' = f(\theta, \varphi')$.

f 的形式在定性上有不同. 主要分为两种情形:

1. $d < r$ 的情形:

此时对于任意的 θ, z' 轴都会穿过 A. 因此, f 能定义在整个 $[0, \pi] \times [-\pi, \pi)$, 且是单值函数.

2. $d \geq r$ 的情形:

此时对于 $\theta \in [0, \arcsin \frac{r}{d}) \cup (\pi - \arcsin \frac{r}{d}, \pi]$, z' 轴会穿过 A. 因此, f 在 $\theta \in [0, \arcsin \frac{r}{d}) \cup (\pi - \arcsin \frac{r}{d}, \pi]$ 上是关于 $\varphi' \in [0, 2\pi)$ 的单值函数.

对于 $\theta \in [\arcsin \frac{r}{d}, \pi - \arcsin \frac{r}{d}]$, z' 轴不穿过 A. 因此, f 在 $\theta \in [\arcsin \frac{r}{d}, \pi - \arcsin \frac{r}{d}]$ 上是关于 $\varphi' \in [-\varphi'_m(\theta), \varphi'_m(\theta)]$ 的多值函数, 其有两支 f_1 与 f_2 . $f_1 \leq f_2$, 等号仅在 $\varphi' = \pm \varphi'_m(\theta)$ 时取到.

B 在 P 处小面积 dA 的辐射中, 能射到 A 的功率为

$$dP_{BA}(\theta) = L_B dA \cdot g(\theta), \quad (5)$$

其中 $L_B := \frac{\sigma}{\pi} S^4$ 是温度为 S 的黑体表面的辐射率 (单位面积上单位立体角的辐射通量), $dA := R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, 而

$$g(\theta) := \begin{cases} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \int_{\theta'=0}^{f(\theta, \varphi')} \cos \theta' d\Omega, & \text{若 } d < r, \text{ 或 } d \geq r \text{ 且 } \theta \in [0, \arcsin \frac{r}{d}) \cup (\pi - \arcsin \frac{r}{d}, \pi]; \\ \int_{\varphi'=-\varphi'_m(\theta)}^{\varphi'_m(\theta)} \int_{\theta'=f_1(\theta, \varphi')}^{f_2(\theta, \varphi')} \cos \theta' d\Omega, & \text{若 } d \geq r \text{ 且 } \theta \in [\arcsin \frac{r}{d}, \pi - \arcsin \frac{r}{d}], \end{cases} \quad (6)$$

其中 $d\Omega := \sin \theta' d\theta' d\varphi'$. 从而 B 对 A 的总辐射功率为

$$P_{BA} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} dP_{BA}(\theta), \quad (7)$$

或者

$$P_{BA} = \lambda S^4, \quad (8)$$

其中常数

$$\lambda := \begin{cases} \sigma R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_0^{f(\theta, \varphi')} \sin(2\theta') d\theta', & \text{若 } d < r; \\ \sigma R^2 \left(\left(\int_0^{\arcsin \frac{r}{d}} + \int_{\pi - \arcsin \frac{r}{d}}^{\pi} \right) \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_0^{f(\theta, \varphi')} \sin(2\theta') d\theta' \right. \\ \quad \left. + \int_{\arcsin \frac{r}{d}}^{\pi - \arcsin \frac{r}{d}} \sin \theta d\theta \int_{-\varphi'_m(\theta)}^{\varphi'_m(\theta)} d\varphi' \int_{f_1(\theta, \varphi')}^{f_2(\theta, \varphi')} \sin(2\theta') d\theta' \right), & \text{若 } d \geq r. \end{cases} \quad (9)$$

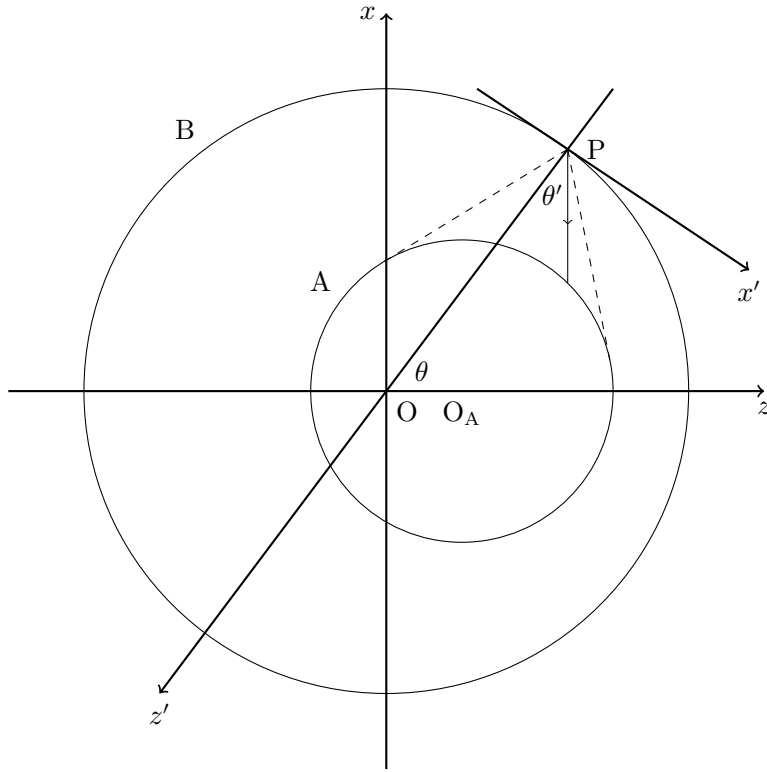


图 9

A 对 B 的总辐射功率显然为

$$P_{AB} = 4\pi\sigma T^4 r^2. \quad (10)$$

B 对外耗散的总辐射功率显然为

$$P_{B\infty} = 4\pi\sigma S^4 R^2. \quad (11)$$

从而可以建立微分方程组

$$\begin{cases} C \frac{dT}{dt} = P_{BA} - P_{AB}, \\ D \frac{dS}{dt} = P_{AB} - P_{BA} - P_{B\infty}, \end{cases} \quad (12)$$

即

$$\begin{cases} C \frac{dT}{dt} = \lambda S^4 - 4\pi\sigma T^4 r^2, \\ D \frac{dS}{dt} = 4\pi\sigma T^4 r^2 - \lambda S^4 - 4\pi\sigma S^4 R^2, \end{cases} \quad (13)$$

其中 λ 由式 9 给出. 理论上可由式 13 解出 $T(t)$.

(2) 此情形给出平凡的结果

$$T(t) = T_0. \quad (14)$$

这是因为, A 的几乎全部辐射最终总能被反射回 A. 某根辐射在球形镜面内来回反射时, 它总在某个包含球心的平面内. 每一次反射的偏转角与 2π 的比值我们可以假定为无理数 (因为几乎所有的实数都是无理数). 从而, 被反射的某根辐射可以稠密地铺满两个同心圆之间的区域. 该区域总是能与 A 有非空的交集 (因为一开始该辐射就是从 A 上射出的), 因此辐射总能回到 A.