hs_phys_probs 002

詹有丘

第 1 题　太空跳绳

一根不可伸长的长度为 l, 质量为 m 的均质软绳, 两端固定在间隔为 b 的两点. 绳子以两个固定点的连线为轴以匀角速度 ω 转动. 忽略重力的影响而只考虑离心力. 转动过程中绳子的形状保持为一个平面图形不变.

(1) 用平面坐标系中的方程描述绳子的形状.

(2) 求绳子的角动量的大小.

(3) 求固定点处对绳子的拉力的大小.

第 2 题　地铁站闸机

某地铁站的出入站闸机采用三锟闸设计. 三锟闸是这样一种装置: 考虑三维空间中的三根长度均为 l 的细硬轻杆, 每根杆都有一端被固定在点 O 处, 且它们两两之间的夹角被固定为 α. 显然存在一条过 O 的轴 z 使得三锟闸绕 z 轴有 $\frac{2\pi}{3}$ 旋转对称. z 轴与地面的夹角被适当地选取, 以至于三锟闸在初始状态可以与地面达成这样一种相对位形: 其中一根杆与地面平行, 另外两根杆的自由端的连线也与地面平行. 有一堵固定在地面上的墙, 其位置满足: 在初始状态下, 三锟闸的水平杆垂直于墙, 且墙面紧贴在水平杆的自由端. 将通过闸机的人简化为刚性长方体. 人通过闸机的过程中, 长方体推动三锟闸绕 z 轴转动, 长方体的一个面紧贴地面, 另一个面紧贴墙面. 长方体足够高.

(1) 求满足以下条件的长方体的最大宽度 a_0: 人能完全通过闸机, 且长方体的厚度可以任意大.

(2) 接上问, 若长方体的宽度 $a > a_0$, 求满足以下条件的长方体的最大横截面积: 人能完全通过闸机.

(3) 若长方体的宽度为 a, 人在完全通过闸机的过程中需要克服三种摩擦: 来自墙面和地面的滑动摩擦力 (大小恒定为 f), 来自杆的滑动摩擦力 (摩擦系数为 μ), 来自三锟闸转轴的滑动摩擦力矩 (大小恒定为 K). 求人在缓慢地完全通过闸机的过程中, 来自杆的滑动摩擦耗散的能量为多少.

第 3 题　Hohmann 转移轨道

质量为 m 的物体一开始绕着质量为 $M \gg m$ 的星体在半径为 r_1 的圆轨道上运动. 某时其瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_1, 进入椭圆轨道. 在远心点处, 其再次瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_2, 进入半径为 $r_2 = \alpha r_1$ 的圆轨道上运动. 证明使 $\Delta v_1 + \Delta v_2$ 最大的 α 为 $5 + 4\sqrt{7}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)$.

第 4 题　电容势函数

有一平行板电容器. 定义变量 X 为极板间距, Q 为一个极板上的电荷量大小, F 为极板间作用力, V 为极板间的电势差. 电容 $C(X)$ 是已知函数 (不一定是反比例函数). 定义势函数 U 为电容器储存的能量.

(1) 证明 $\mathrm{d}U = V\mathrm{d}Q - F\mathrm{d}X$.

(2) 证明 $\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F$.

(3) 若 $C(X)$ 是反比例函数, 在 F-X 图中分别作出等 V 过程和等 Q 过程的图像.

参考答案

第 1 题　太空跳绳

第 2 题　地铁站闸机

第 3 题　Holmann 转移轨道

第 4 题　电容势函数