

# hs\_phys\_probs 002

詹有丘

## 第 1 题 太空跳绳

一根不可伸长的长度为  $l$ , 质量为  $m$  的均质软绳, 两端固定在间隔为  $b$  的两点. 绳子以两个固定点的连线为轴以匀角速度  $\omega$  转动. 忽略重力的影响而只考虑离心力. 转动过程中绳子的形状保持为一个平面图形不变. (本题可以以积分及隐函数形式给出隐式解.)

- (1) 用平面坐标系中的方程描述绳子的形状.
- (2) 求绳子的动能.
- (3) 求固定点处对绳子的拉力的大小.

## 第 2 题 地铁站闸机

某地铁站的出入站闸机采用三锲闸设计. 三锲闸是这样一种装置: 考虑三维空间中的三根长度均为  $l$  的细硬轻杆, 每根杆都有一段被固定在点  $O$  处, 且它们两两之间的夹角被固定为  $\alpha$ . 显然存在一条过  $O$  的轴  $z$  使得三锲闸绕  $z$  轴有  $\frac{2\pi}{3}$  旋转对称.  $z$  轴与地面的夹角被适当地选取, 以至于三锲闸在初始状态可以与地面达成这样一种相对位形: 其中一根杆与地面平行, 另外两根杆的自由端的连线也与地面平行. 有一堵固定在地面上的墙, 其位置满足: 在初始状态下, 三锲闸的水平杆垂直于墙, 且墙面紧贴在水平杆的自由端. 将通过闸机的人简化为刚性长方体. 人通过闸机的过程中, 长方体推动三锲闸绕  $z$  轴转动, 长方体的一个面紧贴地面, 另一个面紧贴墙面. 长方体足够高.

- (1) 求满足以下条件的长方体的最大宽度  $a_0$ : 人能完全通过闸机, 且长方体的厚度可以任意大.
- (2) 接上问, 若长方体的宽度  $a > a_0$ , 求满足以下条件的长方体的最大横截面积: 人能完全通过闸机.
- (3) 若长方体的宽度为  $a$ , 人在完全通过闸机的过程中需要克服三种摩擦: 来自墙面和地面的滑动摩擦力 (大小恒定为  $f$ ), 来自杆的滑动摩擦力 (摩擦系数为  $\mu$ ), 来自三锲闸转轴的滑动摩擦力矩 (大小恒定为  $K$ ). 求人在缓慢地完全通过闸机的过程中, 来自杆的滑动摩擦耗散的能量为多少.

## 第 3 题 Hohmann 转移轨道

质量为  $m$  的物体一开始绕着质量为  $M \gg m$  的星体在半径为  $r_1$  的圆轨道上运动. 某时其瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大  $\Delta v_1$ , 进入椭圆轨道. 在远心点处, 其再次瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大  $\Delta v_2$ , 进入半径为  $r_2 = x r_1$  的圆轨道上运动. 证明使  $\Delta v_1 + \Delta v_2$  最大的  $x$  为  $5 + 4\sqrt{7} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37}\right)$ .

## 第 4 题 电容势函数

有一平行板电容器. 定义变量  $X$  为极板间距,  $Q$  为一个极板上的电荷量大小,  $F$  为极板间作用力,  $V$  为极板间的电势差. 电容  $C(X)$  是已知函数 (不一定是反比例函数). 定义势函数  $U$  为电容器储存的能量.

- (1) 证明  $dU = V dQ - F dX$ .
- (2) 证明  $\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F$ .
- (3) 若  $C(X)$  是反比例函数, 在  $F$ - $X$  图中分别作出等  $V$  过程和等  $Q$  过程的图像.

## 第 5 题 张拉整体

张拉整体 (tensegrity) 是一个由一些互不触碰的受压结构 (刚体) 以及连接它们的受拉结构 (绳) 组成的稳定结构. 其在建筑学, 工程学, 生物学等领域都有应用. 图 1 (Cmglee, 2012) 是一个例子, 其由顶部和底部各一个边长为  $a$  的正  $n$  边形 (图中  $n = 4$ ) 组成. 记底面的正  $n$  边形为多边形  $A_0 \cdots A_{n-1}$ , 顶面上的正  $n$  边形为多边形  $B_0 \cdots B_{n-1}$ .  $A_0$  与  $A_n$  是同一个点,  $B_0$  与  $B_n$  是同一个点. 对每个  $j$ , 用长度为  $b$  的轻绳连接  $A_j B_j$ , 用长度为  $l$  的轻杆连接  $A_j B_{j+1}$ .

(1) 多边形  $A_0 \cdots A_{n-1}$  在旋转一定角度 (旋转的方向与  $A_j$  随  $j$  变化的环绕方向相同) 之后, 可以平移至与多边形  $B_0 \cdots B_{n-1}$  重合. 求该转角的最小正值.

(2) 记  $T(PQ)$  为连接  $P, Q$  两点的绳或杆上的力, 正值表示张力, 负值表示压力. 已知, 对每个  $j$ ,  $T(A_j A_{j+1}) = T_0$ . 对每个  $j$ , 求  $T(A_j B_j)$  和  $T(A_j B_{j+1})$ .

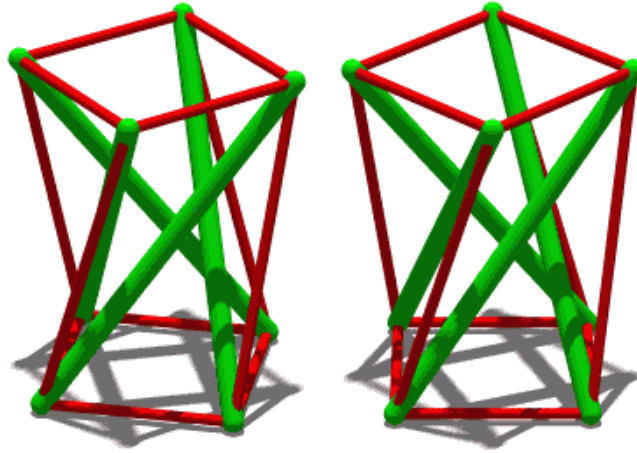


图 1

# 参考答案

## 第 1 题 太空跳绳

(1) 因为绳子的形状是具有最小势能的形状, 所以本题即求解最优化问题

$$\min_{y \in C^1[-b/2, b/2]} \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l} \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \omega^2 \cdot y^2 \quad (1)$$

$$\text{s.t. } y(-b/2) = y(b/2) = 0, \quad (2)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1+y'^2} dx = l. \quad (3)$$

在目标函数中带上 Lagrange 乘子, 可以略去约束条件式 3, 而目标变为

$$\max_{y \in C^1[-b/2, b/2]} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \sqrt{1+y'^2} dx - \lambda \left( \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1+y'^2} dx - l \right) \quad (4)$$

$$\text{s.t. } y(-b/2) = y(b/2) = 0. \quad (5)$$

定义 Lagrangian

$$\mathcal{L} := (y^2 - \lambda) \sqrt{1+y'^2}. \quad (6)$$

代入 Euler-Lagrange 方程后化简可得

$$2y(1+y'^2) = (y^2 - \lambda)y''. \quad (7)$$

进行变换  $p := y'$  后可得

$$2y(1+p^2) = (y^2 - \lambda)p \frac{dp}{dy}. \quad (8)$$

分离变量并积分可得

$$\ln(1+p^2) = 2 \ln \frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}, \quad (9)$$

其中  $y_0 := y(0) > 0$ ,  $a := \sqrt{\lambda} > y_0$ . 回代  $p = y'$ , 再次分离变量并积分可得

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}} = \pm x. \quad (10)$$

式 10 给出描述绳子形状的方程.

约束条件  $y(-b/2) = y(b/2) = 0$  给出

$$b = 2 \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}}. \quad (11)$$

绳子上的长度微元

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx = \frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2} \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (12)$$

从而

$$l = 2 \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (13)$$

式 11 与式 13 隐式给出了式 10 中的参数  $a$  和  $y_0$ .

(2)

$$E_k = \int_{x=-b/2}^{b/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l} ds \cdot \omega^2 y^2 = \frac{m\omega^2}{l} \int_0^{y_0} \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}}. \quad (14)$$

(3) 质心位置为

$$y_c = \frac{1}{m} \int_{x=-b/2}^{b/2} y \cdot \frac{m}{l} ds = \frac{2}{l} \int_0^{y_0} \frac{y dy}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2 - y^2}\right)^2}} = \frac{y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{l}. \quad (15)$$

绳子受到的合力

$$F = m\omega^2 y_c = \frac{m\omega^2 y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{l}. \quad (16)$$

在  $x = \pm b/2$  处曲线的切线斜率

$$y'(\pm b/2) = \mp \tan \theta = \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - y_0^2}\right)^2 - 1}, \quad (17)$$

从而固定点处对绳子的拉力大小

$$T_{\pm b/2} = \frac{F}{2 \sin \theta} = \frac{m\omega^2 y_0 \sqrt{2a^2 - y_0^2}}{2l \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - y_0^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{m\omega^2 a}{2l}. \quad (18)$$

另：此题可用受力法解.

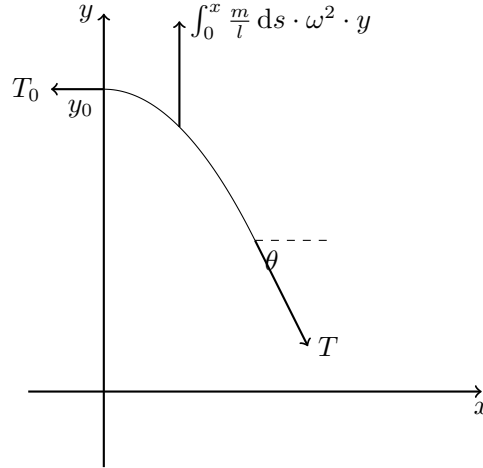


图 2

设绳子在  $x = 0$  处的张力为水平方向  $T_0$ , 考虑  $[0, x]$  上的一段绳子的受力平衡, 如图 2 所示. 考虑到  $\tan \theta = -y'$ , 有

$$\int_0^x \frac{m}{l} ds \cdot \omega^2 \cdot y = -T_0 y'. \quad (19)$$

两边对  $x$  求导可得

$$\frac{m\omega^2}{l} \sqrt{1 + y'^2} = -T_0 y''. \quad (20)$$

变换  $p := y'$ , 分离变量得

$$\frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = -\frac{m\omega^2}{T_0 l} y dy. \quad (21)$$

两边积分得

$$\sqrt{1+p^2} - 1 = -\frac{m\omega^2}{2T_0 l} (y^2 - y_0^2). \quad (22)$$

代换  $a := \sqrt{\frac{2T_0 l}{m\omega^2} + y_0^2}$  可将式 22 变为与式 9 等价的形式.

## 第 2 题 地铁站闸机

## 第 3 题 Hohmann 转移轨道

物体的速度变化的全过程为

$$\underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_1}}}_{\text{圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_1} \underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2} + \frac{2GM}{r_1}}}_{\text{椭圆轨道}} \rightarrow \underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2} + \frac{2GM}{r_2}}}_{\text{椭圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_2} \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}_{\text{圆轨道}}. \quad (1)$$

于是

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 \propto f(x) := \sqrt{\frac{2x}{1+x}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}. \quad (2)$$

为了使  $\Delta v_1 + \Delta v_2$  极大,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 0. \quad (3)$$

在式 3 两边乘  $2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{3}{2}}$  可得

$$\sqrt{2}(1+3x) - (1+x)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (4)$$

此方程可约化为多项式方程

$$P(x) := x^3 - 15x^2 - 9x - 1 = 0. \quad (5)$$

注意到

$$\cos 3y = \cos y (2 \cos^2 y - 1) - 2 \cos y (1 - \cos^2 y) = 4 \cos^3 y - 3 \cos y,$$

所以

$$\cos^3 \frac{y}{3} = \frac{1}{4} \left( \cos y + 3 \cos \frac{y}{3} \right).$$

令  $x^* := 5 + 4\sqrt{7} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37}\right)$ , 则

$$(x^* - 5)^3 = 16 \cdot 7^{\frac{3}{2}} \left( \cos \arctan \frac{\sqrt{3}}{37} + 3 \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}}{37}\right) \right) \quad (6)$$

$$= 16 \cdot 7^{\frac{3}{2}} \left( \frac{37}{2 \cdot 7^{\frac{3}{2}}} + 3 \cdot \frac{x^* - 5}{4\sqrt{7}} \right) \quad (7)$$

$$= 84x^* - 124. \quad (8)$$

由此可得  $P(x^*) = 0$ .

## 第 4 题 电容势函数

(1)  $V dQ$  是电源对电容所做的功,  $-F dX$  是外力对电容所做的功.

(2) 令  $H := U + FX$ , 则

$$dH = V dQ + X dF. \quad (1)$$

从而

$$V = \left( \frac{\partial H}{\partial Q} \right)_F, \quad X = \left( \frac{\partial H}{\partial F} \right)_Q. \quad (2)$$

由于求偏导次序可交换,  $\frac{\partial^2 H}{\partial Q \partial F} = \frac{\partial^2 H}{\partial F \partial Q}$ , 因此

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F. \quad (3)$$

(3) 设  $C(X) = \alpha/X$ , 则由  $Q = CV$  可得状态方程

$$QX = \alpha V. \quad (4)$$

内能表达式为

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2 X}{2\alpha}. \quad (5)$$

于是

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_Q = \frac{Q^2}{2\alpha} = \frac{\alpha V^2}{2X^2}. \quad (6)$$

于是可以在  $F$ - $X$  图作出如图 3 所示的曲线. 图 3a 与图 3b 分别是等  $V$  过程与等  $Q$  过程的图像.

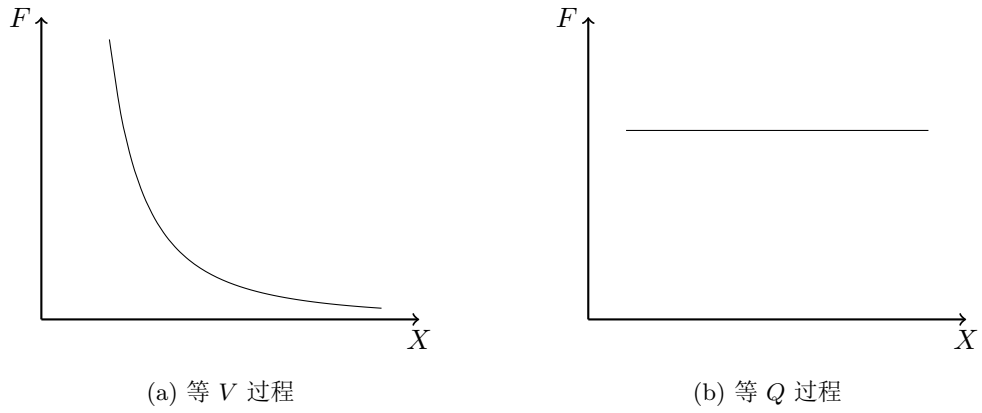


图 3