hs_phys_probs 005

詹有丘

第 1 题　喷流

有时对黑洞等天体的观测中能发现喷流: 沿着天体的自转轴有两束反方向运动的高速发光物质喷出. 今对某天体的喷流进行观测. 天体相对于地球的运动速度大小远小于喷流的速度大小, 因此忽略不计. 喷流离天体的距离足够远, 因此忽略引力. *本题中, 凡涉及方向, 指天体到地球连线与所说方向的夹角.*

(1) 天体到地球的距离为 D. 两束喷流在天球 (不计地球自转) 上运动的角速度大小分别为 μ_{a} 和 μ_{r} ($\mu_{\mathrm{r}} \leq \mu_{\mathrm{a}}$). 求天体的自转轴的方向.

(2) 天体以恒定角速度进动. 喷流的光谱中某谱线波长为 λ_0 (光源静止系中). 其因 Doppler 效应而变化的范围, 在两束喷流中分别是 $[\lambda_{\mathrm{a1}}, \lambda_{\mathrm{a2}}]$ 和 $[\lambda_{\mathrm{r1}}, \lambda_{\mathrm{r2}}]$. 求天体的进动角速度的方向. *注:* 已知量有冗余.

(3) 在光源静止系中, 其发光是各向同性的, 光谱为 $I_\nu \,\mathrm{d}\nu \propto \nu^\alpha \,\mathrm{d}\nu$, 且其视光度 (特定频率范围内通过位于地球的瞳孔/光圈的总电磁功率) 为 S_0. 求速率为 βc, 方向为 θ 的一束喷流的视光度.

第 2 题　轴子

在经典电磁学中, 引入轴子 (axion) 场 $a(\mathbf{r}, t)$. 其对电磁场的影响等效于电荷密度 $\rho_a \coloneqq -g\mathbf{B} \cdot \nabla a$ 和电流密度 $\mathbf{J}_a \coloneqq g\left(\mathbf{B}\dot{a} - \mathbf{E} \times \nabla a\right)$, 其中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是电场强度和磁感应强度, 而 $g > 0$ 为常数.

(1) 已知 a 无量纲, 求 g 的国际单位.

(2) 给出电位移 $\mathbf{D}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 的定义 (不考虑介质极化和介质磁化), 使得宏观 Maxwell 方程组成立.

(3) 假设 $z > 0$ 区域内 $a = 0$, 而 $z < 0$ 区域内 $a = a_0$, 另外在点 $(0, 0, d > 0)$ 处有点电荷 q. 求全空间 (不包括 $z = 0$ 平面, 不包括点 $(0, 0, d)$) 内的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$. *提示:* 设出像电荷的 “磁荷”.

第 3 题　缓慢拉伸

考虑三种会在外力作用下改变长度的装置 (所有装置均为轻质). 装置 1 为长度为 L_1 的无弹性软绳. 装置 2 为原长为 L_2 的弹簧, 其劲度系数为 k. 装置 3 为一种特殊的机械装置, 性质如下. 当它的长度为 0 时, 需要用大小为 F_{o} 的拉力才能使其长度变为正数, 此后它可以自由伸长; 当它的长度至少为 L_3 时, 需要用大小为 F_{c} 的压力才能使其长度缩减至 L_3 以下; 在长度在 0 和 L_3 之间, 或者长度大于 L_3 时, 其长度可以在没有外力的情况下自由变化. 所有装置的长度都不能小于 0. 出于清晰起见, 图 1 展示了这三种装置的势能 $U_{1,2,3}$ 与长度 $l_{1,2,3}$ 之间的关系. 用这些装置组装成如图 2 所示的装置 (图中的竖线仅表示连接情况, 并非真实物体; 实际上整个装置是一维的), 总长度为 l. 在其两端施加大小为 F 的压力 (或者大小为 $-F$ 的拉力), 以维持其长度 l 不变.

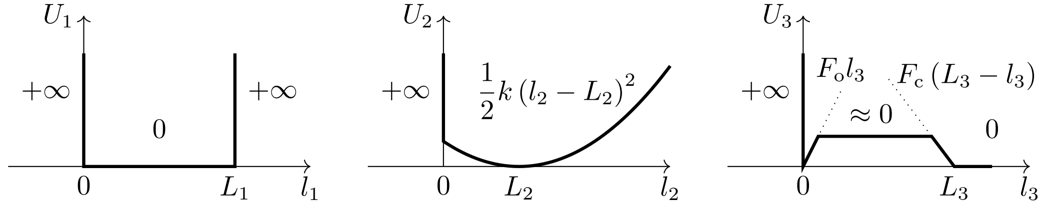

图 1

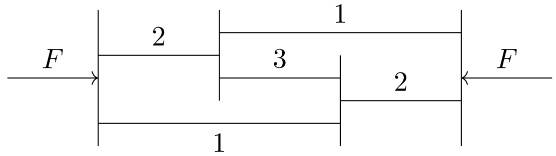

图 2

(1) 将 F 缓慢地从 $-\infty$ 变化至 $+\infty$. 定性描述 l 在这期间的变化过程.

(2) 将 F 缓慢地从 $+\infty$ 变化至 $-\infty$. 定性描述 l 在这期间的变化过程.

参考答案

第 1 题　喷流

(1) 设喷流的速度大小为 βc, 方向为 θ. 在喷流运动了 $\Delta t'$ 的时间前后各向地球发出一束光线. 如图 3 所示.

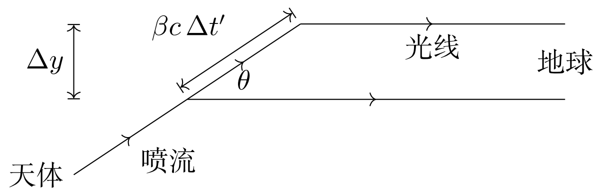

图 3

两束光线到达地球的时间分别为 D/c 和 $\Delta t' + (D - \beta c\,\Delta t' \cos\theta)/c$. 由此获得时间差

$$\Delta t = \Delta t' - \beta\,\Delta t' \cos\theta.$$

这两束光线的距离为 $\Delta y = \beta c\,\Delta t' \sin\theta$, 因此喷流的视速率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\beta \sin\theta}{1 - \beta\cos\theta} c.$$

对于锐角 θ, 这是接近喷流. 对于远离喷流, 只需替换 $\theta \to \pi - \theta$ 即可.

因此可以获得两束喷流在天球上的角速度大小:

$$\mu_{\mathrm{a}} = \frac{1}{D}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\frac{c}{D}, \quad \mu_{\mathrm{r}} = \frac{\beta\sin\theta}{1+\beta\cos\theta}\frac{c}{D}.$$

由此反解 β, θ, 获得

$$\tan\theta = \frac{2D}{c}\frac{\mu_{\mathrm{a}}\mu_{\mathrm{r}}}{\mu_a - \mu_{\mathrm{r}}}, \quad \beta\cos\theta = \frac{\mu_{\mathrm{a}} - \mu_{\mathrm{r}}}{\mu_{\mathrm{a}} + \mu_{\mathrm{r}}}.$$

(2) 设进动角速度的方向为 φ, 其与自转轴的夹角为 ψ. 在进动的过程中, θ 的变化范围是 $[|\varphi - \psi|, \varphi + \psi]$. 应用 Doppler 效应的公式时, 注意角度是观察者系中的, 于是得到

$$\lambda = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\lambda_0,$$

其中 $\gamma \coloneqq (1-\beta^2)^{-1/2}$. 因此,

$$\lambda_{\mathrm{a}1,2} = (1 - \beta\cos(\varphi \mp \psi))\gamma\lambda_0, \quad \lambda_{\mathrm{b}1,2} = (1 + \beta\cos(\varphi \pm \psi))\gamma\lambda_0.$$

题中所说已知量的冗余可以看出指的是 $\lambda_{\mathrm{a}2} + \lambda_{\mathrm{b}1} = \lambda_{\mathrm{a}1} + \lambda_{\mathrm{b}2}$, 因此这里的 4 个方程只有 3 个独立. 由这些方程反解 β, φ, ψ, 可以解得

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{\lambda_{\mathrm{b}1} - \lambda_{\mathrm{a}2}}{\sqrt{(\lambda_{\mathrm{b}1} + \lambda_{\mathrm{a}2})^2 - 4\lambda_0^2}} \pm \arccos\frac{\lambda_{\mathrm{b}2} - \lambda_{\mathrm{a}1}}{\sqrt{(\lambda_{\mathrm{b}2} + \lambda_{\mathrm{a}1})^2 - 4\lambda_0^2}}\right).$$

式中 “±” 对应于两个物理上可能的解. 还可以加上 π 的整数倍获得更多的解, 但最终只会有两个不同的锐角解.

(3) 该问题涉及多个效应: 光行差, 宏观 Doppler 效应, 以及微观 Doppler 效应. 光行差指光的传播方向变化, 导致立体角变化; 宏观 Doppler 效应指的是先后到达地球的光线时间差不等于发出它们的时间差; 微观 Doppler 效应指的是光线的频率的变化, 导致每个光子的能量变化. 具体思路是, 将视光度表达为

$$S_{\mathrm{obs}}\,\mathrm{d}t_{\mathrm{obs}} = \int_{\text{特定频率范围}} \int_{\text{光圈张成的立体角}} I_{\mathrm{obs}}(\nu, \Omega)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t_{\mathrm{obs}},$$

其中 $I_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}$ 是观察者系中单位立体角的功率随频率的分布, Ω 是 (θ,φ) 的缩写, $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$. 这里需要注意的是, 积分范围是与参考系无关的 (因为 S_{rest} 是在假设喷流与地球相对静止的情况下得到的), 所以实际上被积变量 ν,Ω 可以任意替换名字, 比如说可以换成 $\nu_{\text{rest}},\Omega_{\text{rest}}$, 只需要保证积分范围和被积函数不变即可; 但是**不能**说 $\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}=\mathrm{d}\nu_{\text{rest}}$. 然后, 研究光行差效应可获得 $\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}$ 与 $\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}$ 的关系; 研究宏观 Doppler 效应可获得 $\mathrm{d}t_{\text{obs}}$ 与 $\mathrm{d}t_{\text{rest}}$ 的关系; 研究微观 Doppler 效应可获得 $I_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}$ 与 $I_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}$ 的关系. 利用 Lorentz 不变量 (光子数不变)

$$N_{\text{obs}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}=N_{\text{rest}}(\nu_{\text{rest}},\Omega_{\text{rest}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}$$

即可最终获得 S_{obs} 与 S_{rest} 的关系, 其中 $N_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}$ 是单位立体角内单位时间发出的光子数随频率的分布.

首先考虑光行差. 利用速度合成公式, 可以容易得到, 对于在观察者系中出射角 (出射方向与运动方向的夹角) 为 θ_{obs} 的光线, 在静止系中其出射角为

$$\cos\theta_{\text{rest}}=\frac{\cos\theta_{\text{obs}}-\beta}{1-\beta\cos\theta_{\text{obs}}}.$$

于是, 可以计算得立体角 (注意 $\varphi_{\text{obs}}=\varphi_{\text{rest}}$)

$$\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}=\sin\theta_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\theta_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\varphi_{\text{rest}}=\frac{\sin\theta_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\theta_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\varphi_{\text{obs}}}{\gamma^2\left(1-\beta\cos\theta_{\text{obs}}\right)^2}=\delta^2\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}},$$

其中 $\delta:=\gamma^{-1}\left(1-\beta\cos\theta_{\text{obs}}\right)^{-1}$ 是 Doppler 因子.

然后考虑宏观 Doppler 效应. **不能**由钟慢效应简单得到 $\mathrm{d}t_{\text{obs}}=\gamma^{-1}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}$. 要理解这一点, 可以这么考虑: 光源每单位时间发射一定数量的光子, 这定义了一个频率 f_{rest}. 单位时间内, 观察者又会看到一定数量的光子, 这是另一个频率 f_{obs}. 这两个频率之间的关系 $f_{\text{obs}}=\delta f_{\text{rest}}$ 就是 Doppler 效应. 而 $\mathrm{d}t_{\text{rest}}$ 的意义是, 静止系中发射一定数量 $f_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}$ 的光子所需要的总时间, 它会反比于这个频率. 所以得到 $\mathrm{d}t_{\text{obs}}=\delta^{-1}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}$.

最后探讨微观 Doppler 效应. 我们知道

$$I_{\text{rest}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu=h\nu N_{\text{rest}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu,\quad I_{\text{obs}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu=h\nu N_{\text{obs}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu,$$

其中 $h\nu$ 是频率为 ν 的单个光子的能量. 另一方面, 题目给出了 $I_{\text{rest}}(\nu,\Omega)\propto\nu^{\alpha}$, 于是可知

$$N_{\text{rest}}(\nu,\Omega)=K\nu^{\alpha-1},$$

其中 K 是比例常数. 由 Doppler 效应知 $\nu_{\text{obs}}=\delta\nu_{\text{rest}}$, 因此由光子数的 Lorentz 不变性可知

$$\begin{aligned}
N_{\text{obs}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}&=N_{\text{rest}}(\nu_{\text{rest}},\Omega_{\text{rest}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=K\nu_{\text{rest}}^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\nu_{\text{rest}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=\delta^{-\alpha}K\nu_{\text{obs}}^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=\delta^{-\alpha}N_{\text{rest}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}.
\end{aligned}$$

综合三种效应, 可以得到

$$\begin{aligned}
I_{\text{obs}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}&=h\nu_{\text{obs}}N_{\text{obs}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}\\
&=\delta^{-\alpha}h\nu_{\text{obs}}N_{\text{rest}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\mathrm{d}\Omega_{\text{rest}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=\delta^{-\alpha}I_{\text{rest}}(\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}})\,\mathrm{d}\nu_{\text{obs}}\,\delta^2\,\mathrm{d}\Omega_{\text{obs}}\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}.
\end{aligned}$$

现在, 两边对 $\nu_{\text{obs}},\Omega_{\text{obs}}$ 积分, 然后除以 $\mathrm{d}t_{\text{obs}}$, 可得

$$\begin{aligned}
S_{\text{obs}}&=\frac{1}{\mathrm{d}t_{\text{obs}}}\int I_{\text{obs}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t_{\text{obs}}\\
&=\delta^{2-\alpha}\frac{1}{\mathrm{d}t_{\text{obs}}}\int I_{\text{rest}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=\delta^{3-\alpha}\frac{1}{\mathrm{d}t_{\text{rest}}}\int I_{\text{rest}}(\nu,\Omega)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t_{\text{rest}}\\
&=\delta^{3-\alpha}S_{\text{rest}}.
\end{aligned}$$

这里 S_{rest} 就是题目中所给的 S_0. 因此,

$$S_{\text{obs}} = \left(1-\beta^2\right)^{(3-\alpha)/2} (1-\beta\cos\theta)^{\alpha-3} S_0.$$

另: 可利用结论: I/ν^3 是 Lorentz 不变量, 其中 $I\,\mathrm{d}\nu$ 是单位立体角的功率随频率的分布. 于是可以直接获得

$$I_{\text{obs}} = I_{\text{rest}} \left(\frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{rest}}}\right)^3 = \delta^3 I_{\text{rest}} = \delta^3 K \nu_{\text{rest}}^{\alpha} = \delta^{3-\alpha} K \nu_{\text{obs}}^{\alpha}.$$

获得跟上一种解法相同的结果 (因子 $\delta^{3-\alpha}$).

第 2 题　轴子

第 3 题　缓慢拉伸

为简洁起见, 选取单位使得 $k=1$.

由对称性可知, 虽然有两个装置 1 和两个装置 2, 但是两个装置 1 的长度相同, 两个装置 2 的长度也相同. 设三种装置的长度分别为 l_1, l_2, l_3, 三种装置上的压力分别为 F_1, F_2, F_3. 以下方程和不等式在任何情况下都成立:

$$\begin{gathered} l = l_1 + l_2 = 2l_2 + l_3 = 2l_1 - l_3, \quad l_1 = l_2 + l_3, \\ F = F_1 + F_2 = 2F_1 + F_3 = 2F_2 - F_3, \quad F_2 = F_1 + F_3, \\ l_1 \geq 0, \quad l_2 \geq 0, \quad l_3 \geq 0. \end{gathered}$$

而如下三组条件中, 每一组内只有一个条件成立:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{1a}: & l_1 < L_1, & F_1 = 0, \\ \text{1b}: & l_1 = L_1, & F_1 < 0, \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{lll} \text{2a}: & l_2 = 0, & F_2 > L_2, \\ \text{2b}: & l_2 > 0, & F_2 = L_2 - l_2, \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{lll} \text{3a}: & l_3 = 0, & F_3 > -F_{\text{o}}, \\ \text{3d}: & 0 < l_3 < L_3, & F_3 = 0, \\ \text{3b}: & l_3 = L_3, & 0 < F_3 < F_{\text{c}}, \\ \text{3c}: & l_3 > L_3, & F_3 = 0. \end{array}\right.$$

总共有 $2\cdot 2\cdot 4 = 16$ 种不同的组合. 对于每一种组合, 所有的条件给出了一个线性不等式系统, 可以系统性地用 Fourier–Motzkin 消元法求解出 (l, F) 的取值范围, 也可以对每种情况用不等式操作来求解. 接下来考虑每一种情况.

对于情况 1a2a3a, 有 $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, 而 $F_1 = 0$, 以及 $F_2 = F_3 > L_2$. 因此,

$$\text{1a2a3a}: \quad l = 0, \quad F > L_2.$$

对于情况 1a2a3b, 有 $l_1 = l_3 = L_3$ 和 $l_2 = 0$. 另一方面, $F_1 = 0$, 而 $L_2 < F_2 = F_3 < F_{\text{c}}$. 因此,

$$\text{1a2a3b}: \quad l = L_3, \quad L_2 < F < F_{\text{c}}.$$

对于情况 1a2a3c 和情况 1a2a3d, 因为 $L_2 < F_2 = F_3 = 0$, 所以不可能发生.

对于情况 1a2b3a, 有 $l_2 = l_1 < L_1$ 和 $l_3 = 0$. 另外, 有 $F_1 = 0$ 和 $L_2 - l_2 = F_2 = F_3 > -F_{\text{o}}$. 该不等式给出 $l_2 < L_2 + F_{\text{o}}$. 因此,

$$\text{1a2b3a}: \quad 0 < l < \min(2L_1, 2(L_2 + F_{\text{o}})), \quad F = L_2 - \frac{1}{2} l.$$

对于情况 1a2b3b, 有 $l_3 = L_3$. 于是由 $l = 2l_2 + l_3 = 2l_1 - l_3$ 得 $L_3 < l < 2L_1 - L_3$. 另外, 有 $F_1 = 0$ 和 $0 < L_2 - l_2 = F_2 = F_3 < F_c$. 代入 $l_2 = (l - L_3)/2$ 可解得 $2L_2 + L_3 - 2F_c < l < 2L_2 + L_3$. 因此,

$$\text{1a2b3b}: \quad \max(L_3, 2L_2 + L_3 - 2F_c) < l < \min(2L_1 - L_3, 2L_2 + L_3), \quad F = L_2 + \frac{1}{2}L_3 - \frac{1}{2}l \quad (L_3 < L_1).$$

对于情况 1a2b3c, 有 $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, 因此 $F = 0$. 此时有 $L_2 = l_2 = l_1 - l_3 < L_1 - L_3$, 所以 $l = l_1 + l_2 < 2L_1 - L_3$. 另一方面, 有 $l = l_1 + l_2 < L_1 + L_2$. 另外, 有 $l = 2l_2 + l_3 > 2L_2 + L_3$. 因此,

$$\text{1a2b3c}: \quad 2L_2 < l < \min(2L_1 - L_3, L_1 + L_2), \quad F = 0 \quad (L_3 < L_1).$$

对于情况 1a2b3d, $F = 0$ 和 $l < L_1 + L_2$ 与上一种情况相同. 但是, 由 $l = 2l_2 + l_3$ 可知 $2L_2 < l < 2L_2 + L_3$. 因此,

$$\text{1a2b3d}: \quad 2L_2 < l < \min(2L_2 + L_3, L_1 + L_2), \quad F = 0.$$

对于情况 1b2a3a, 有 $L_1 = l_1 = l_2 + l_3 = 0$, 所以不可能出现.

对于情况 1b2a3b, 有 $L_1 = l_1 = l_2 + l_3 = L_3$. 因此, 这种情况只可能出现在 $L_3 = L_1$ 时. 此时, $F = 2F_1 + F_3 < F_c$, 而 $F = 2F_2 - F_3 > 2L_2 - F_c$. 因此,

$$\text{1b2a3b}: \quad l = L_1, \quad 2L_2 - F_c < F < F_c \quad (L_3 = L_1).$$

可以发现, 其实这就是将 1a2a3b 和 1b2b3b 在 $L_3 = L_1$ 时的情况合并在一起了, 所以以后可以不必考虑这种情况.

对于情况 1b2a3c 和情况 1b2a3d, 因为 $L_2 < F_2 = F_1 < 0$, 所以不可能出现.

对于情况 1b2b3a, 有 $l_1 = l_2 = L_1$ 和 $l_3 = 0$. 另外, 有 $F_2 = L_2 - l_2 = L_2 - L_1$. 因此, $F = 2F_2 - F_3 < 2(L_2 - L_1) + F_o$. 另一方面, $F = F_1 + F_2 < L_2 - L_1$. 因此,

$$\text{1b2b3a}: \quad l = 2L_1, \quad F < \min(L_2 - L_1, 2(L_2 - L_1) + F_o).$$

对于情况 1b2b3b, 有 $l_2 = l_1 - l_3 = L_1 - L_3$, 所以 $F_2 = L_2 - l_2 = L_2 - L_1 + L_3$. 由 $F = 2F_2 - F_3$ 可知 $2(L_2 - L_1 + L_3) - F_c < F < 2(L_2 - L_1 + L_3)$. 另外有 $F = F_1 + F_2 < L_2 - L_1 + L_3$. 因此,

$$\text{1b2b3b}: \quad l = 2L_1 - L_3, \quad 2(L_2 - L_1 + L_3) - F_c < F < \min(2(L_2 - L_1 + L_3), L_2 - L_1 + L_3) \quad (L_3 < L_1).$$

对于情况 1b2b3c, 有 $l = 2l_1 - l_3 < 2L_1 - L_3$, 以及 $F = 2F_2 - F_3 = 2(L_2 - l + L_1)$. 由 $F = 2F_1 + F_3 < 0$ 解得 $l > L_1 + L_2$. 因此,

$$\text{1b2b3c}: \quad L_1 + L_2 < l < 2L_1 - L_3, \quad F = 2(L_1 + L_2 - l), \quad (L_3 < L_1).$$

对于情况 1b2b3d, $F = 2(L_1 + L_2 - l)$ 和 $l > L_1 + L_2$ 与上一种情况相同. 但是, 由 $l = 2l_1 - l_3$ 得 $2L_1 - L_3 < l < 2L_1$. 因此,

$$\text{1b2b3d}: \quad \max(2L_1 - L_3, L_1 + L_2) < l < 2L_1, \quad F = 2(L_1 + L_2 - l).$$

至此, 所有情况都已讨论完毕. 视 $L_{1,2,3}, F_{o,c}$ 的大小关系不同, (l, F) 的图像会有定性上的不同, 且情况较为繁杂. 但是, 原则上, 在画出图像之后, 给出最终解答就很容易了. 只需要沿着图像上的线向上或者向下移动即可, 并且尽量不切换颜色. 在 $F = \pm\infty$ 时, 只有情况 1a2a3a 和 1b2b3a 会出现, 所以一开始一定是沿着红色的线移动. 若不得不切换颜色, 则尽量选择红色和蓝色的线, 其次选择绿色的线 (这是因为在装置 3 上有拉力或压力的情况下, 它的长度不会停留在 0 到 L_3 之间; 严格来说, 具体情况要取决于实际装置中的阻力, 外力变化的缓慢程度, 以及装置的惯性, 不过这不会影响定性结论).

(1) 首先考虑所有的红线, 包括 1a2a3a, 1a2b3a, 和 1b2b3a. 对于 $L_2 - L_1 + F_o \gtrless 0$ 两种情况, 它们的图像如图 4 所示. 图中标记的点的坐标分别为

$$\mathrm{A}(2L_1, \min(L_2 - L_1, 2(L_2 - L_1) + F_o)), \quad \mathrm{F}(2\min(L_1, L_2 + F_o), \max(L_2 - L_1, -F_o)), \quad \mathrm{M}(0, L_2).$$

可以看到, 当 $L_2 - L_1 + F_\mathrm{o} > 0$ 时, 点 A 和 F 重合, 从而仅用红线即可连接 $F = -\infty$ 和 $F = +\infty$, 不需要切换颜色. 这种情况下, l 的变化情况是先保持 $2L_1$ 不变, 然后线性减少至 0, 再保持不变. 此后, 我们只考虑 $L_2 - L_1 + F_\mathrm{o} < 0$ 的情况.

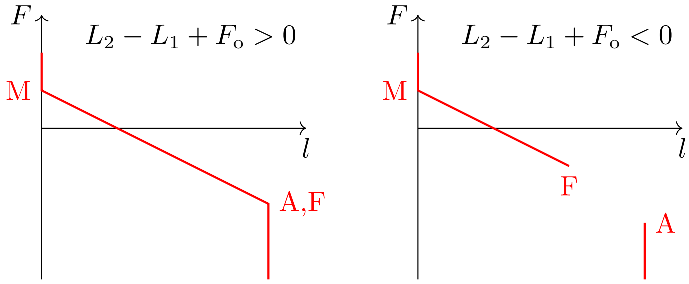

图 4

在 $F = -\infty$ 时, 位于情况 1b2b3a. 先考虑 1b2b3a, 1b2b3d 的一个端点 B, 和 1b2b3b 的一个端点 C. 对于 $2L_3 - F_\mathrm{c} \gtrless F_\mathrm{o}$ 两种情况, 它们在图像上的样子如图 5 所示. 另外要注意 1b2b3b 只在 $L_3 < L_1$ 时才存在. 图中标记的点的坐标为

$$\mathrm{B}\left(2L_1, 2\left(L_2 - L_1\right)\right), \quad \mathrm{C}\left(2L_1 - L_3, 2\left(L_2 - L_1 + L_3\right) - F_\mathrm{c}\right).$$

因此, 我们可以发现, 在 $2L_3 - F_\mathrm{c} < F_\mathrm{o}$ 且 $L_3 < L_1$ 时, 动点 (l, F) 会在到达点 A 后切换到蓝线, 因此能观察到 l 突然减小, 然后保持不变; 而在另一种情况 ($2L_3 - F_\mathrm{c} > F_\mathrm{o}$ 或 $L_3 > L_1$) 下, 它会在到达点 A 后切换到绿线, 因此能观察到 l 突然减小, 然后线性减小.

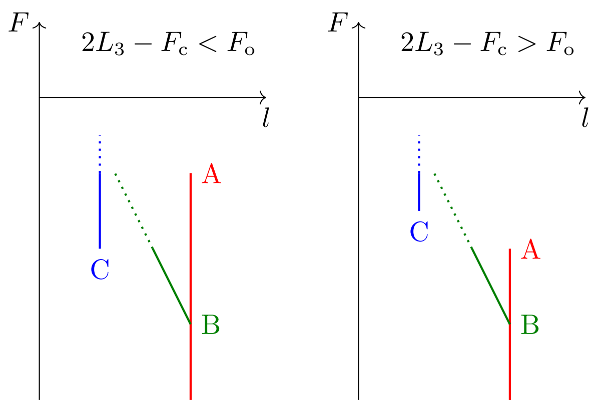

图 5

接下来考虑 1b2b3d (BD), 1b2b3b (CE), 3b2b3c (EH), 1a2b3c (HG), 1a2b3b 的一个端点 G, 以及 1a2b3d (JI). 对于 $L_2 - L_1 + L_3 \gtrless 0$ 两种情况, 它们在图像上的样子如图 6 所示. 另外要注意, 对于 $L_2 - L_1 + L_3 > 0$ 的情况, 还要考虑到图中的蓝线只在 $L_3 < L_1$ 时存在. 图中标记的点的坐标为

$$\mathrm{D}\left(\max(L_1 + L_2, 2L_1 - L_3), \min(2\left(L_2 - L_1 + L_3\right), 0)\right), \quad \mathrm{E}\left(2L_1 - L_3, \min(2\left(L_2 - L_1 + L_3\right), L_2 - L_1 + L_3)\right),$$
$$\mathrm{G}\left(\min(2L_1 - L_3, 2L_2 + L_3), \max(L_2 - L_1 + L_3, 0)\right), \quad \mathrm{H}\left(\min(2L_1 - L_3, L_1 + L_2), \max(L_2 - L_1 + L_3, 0)\right),$$
$$\mathrm{I}\left(2L_2, 0\right), \quad \mathrm{J}\left(\min(L_1 + L_2, 2L_2 + L_3), 0\right).$$

如果上一步中, 动点 (l, F) 沿着蓝线 CE 向上移动, 那么会有两种情况: 若 $L_2 - L_1 + L_3 < 0$, 则 l 会在保持不变后, 线性减小, 然后再突然减小, 然后再线性减小; 若 $L_2 - L_1 + L_3 > 0$, 则 l 会在保持不变后, 线性减小. 如果上一步中, 动点 (l, F) 沿着绿线 BD 向上移动, 那么会有两种情况: 若 $L_2 - L_1 + L_3 < 0$, 则 l 会在线性减小后, 切换到蓝线并继续线性减小, 然后突然减小, 再继续线性减小; 若 $L_2 - L_1 + L_3 > 0$ (如果 $L_3 < L_1$, 那么一定会处于这种情况; 这种情况不涉及蓝线, 所以仍然成立), 则 l 会在线性减小后, 突然减小.

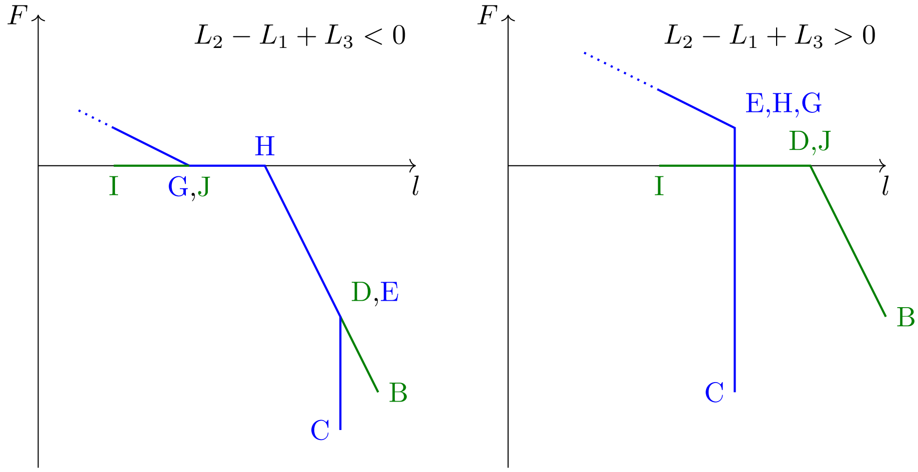

图 6

接下来考虑 1a2b3b 的另一个端点 K, 1a2a3b (KL), 1a2b3d (JI), 1a2b3a (FM), 以及 1a2a3a (M 到无穷远). 对于 $L_2 \gtrless F_c$ 两种情况, 它们在图像上的样子如图 7 所示. 注意 $L_3 > L_1$ 时蓝线不存在, 但是此时动点 (l, F) 的运动一定与蓝线无关了, 所以无需特别考虑. 图中标记的点的坐标为

$$\mathrm{K}\left(\max(L_3, L_3 + 2\left(L_2 - F_c\right)), \min(L_2, F_c)\right), \quad \mathrm{L}\left(\max(L_3, L_3 + 2\left(L_2 - F_c\right)), F_c\right).$$

如果上一步中, 动点 (l, F) 沿着绿线 JI 向左移动, 那么在 l 突然减小后, 会线性减小 (沿着红线 IM), 减小到 0 后再保持不变. 如果在上一步中, 动点 (l, F) 沿着蓝线 GK 移动, 那么会有两种情况: 若 $L_2 < F_c$, 则 l 会在线性减小之后, 保持不变, 然后再突然减小到 0 (切换到红色), 再继续保持不变; 若 $L_2 > F_c$, 则 l 会在线性减小之后, 突然减小 (切换到红色), 然后线性减小到 0, 再保持不变.

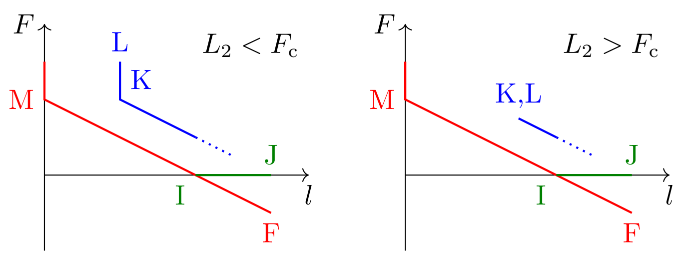

图 7

至此 F 已经到达 $+\infty$. 整个过程中 l 的变化的定性描述由图 8 中的流程图给出.

(2) 当 $F = +\infty$ 时, 装置处于 1a2a3a. 当 F 逐渐减小时, 点 (l, F) 一点先沿着红线向下移动, 然后沿着红线 MF 移动直到点 F. 此时, 若 $L_2 - L_1 + F_o < 0$, 它可以直接继续沿着红线向下移动到无穷远, 整个过程结束; 若 $L_2 - L_1 + F_o > 0$, 则它会从点 F 横向突变, 而突变至蓝线还是绿线, 以及突变时 l 会变大还是变小, 则取决于不同情况.

首先研究它会突变至蓝线还是绿线. 可以发现, 这取决于 F 的纵坐标和 C 纵坐标的大小关系. 如果 F 的纵坐标大于 C 的纵坐标 (即 $-F_o > 2\left(L_2 - L_1 + L_3\right) - F_c$) 且 $L_3 < L_1$, 则突变至蓝线, 否则突变至绿线.

当它突变至蓝线时, 又有两种情况: 如果 F 的纵坐标大于 E 的纵坐标 (即 $-F_o > 2\left(L_2 - L_1 + L_3\right)$), 则突变至线段 HE, 否则突变至线段 EC. 如果 F 在线段 HE 的左侧 (即 $-F_o < 2\left(L_1 - L_2 - 2F_o\right)$) 或者在线段 EC 的左侧 (即 $2\left(L_2 + F_o\right) < 2L_1 - L_3$), 那么突变时 l 会增大, 否则突变时 l 会减小.

当它突变至绿线时, 如果 F 在线段 BD 的左侧 (即 $-F_o < 2\left(L_1 - L_2 - 2F_o\right)$), 则突变时 l 会增大, 否则突变时 l 会减小.

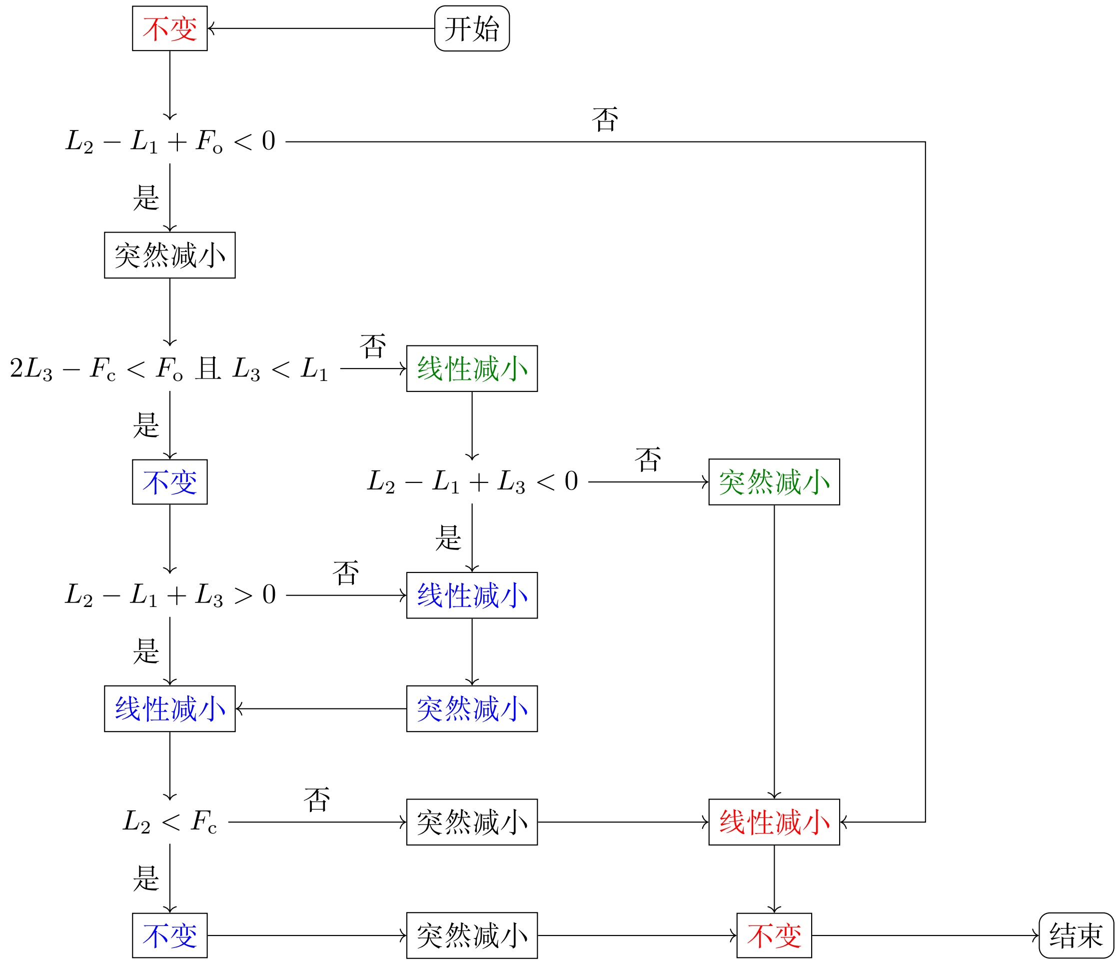

图 8

注：可以看到，对于某些情况，在缓慢拉伸的过程中，装置的长度反而会突然减小．这个看似反直觉的现象被称为 Braess 悖论．

另外要注意，对于突变到蓝线的情况，如果 $2L_3 - F_c > F_o$，那么点 (l, F) 在到达点 C 后无法直接突变到红线，所以它会先突变到绿线，最后再到达红线．

全过程的定性描述由图 9 中的流程图给出．

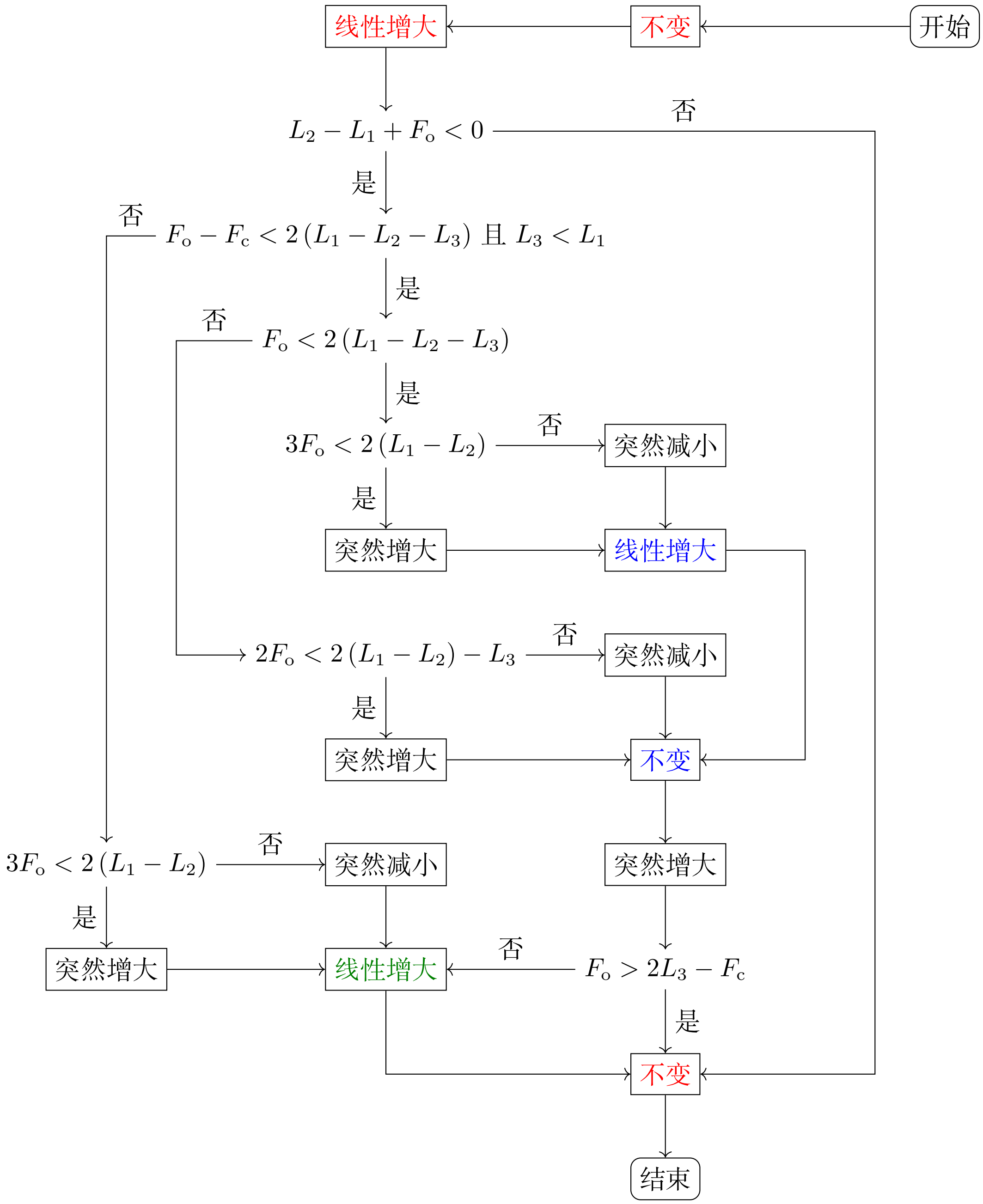
开始
不变
线性增大
$L_2 - L_1 + F_o < 0$
否
是
$F_o - F_c < 2(L_1 - L_2 - L_3)$ 且 $L_3 < L_1$
否
是
$F_o < 2(L_1 - L_2 - L_3)$
否
是
$3F_o < 2(L_1 - L_2)$
否
突然减小
是
突然增大
线性增大
$2F_o < 2(L_1 - L_2) - L_3$
否
突然减小
是
突然增大
不变
$3F_o < 2(L_1 - L_2)$
否
突然减小
突然增大
是
突然增大
线性增大
否
$F_o > 2L_3 - F_c$
是
不变
结束

图 9