hs_phys_probs 002

詹有丘

第 1 题　太空跳绳

一根不可伸长的长度为 l, 质量为 m 的均质软绳, 两端固定在间隔为 b 的两点. 绳子以两个固定点的连线为轴以匀角速度 ω 转动. 忽略重力的影响而只考虑离心力. 转动过程中绳子的形状保持为一个平面图形不变. (本题可以以积分及隐函数形式给出隐式解.)

(1) 用平面坐标系中的方程描述绳子的形状.

(2) 求绳子的动能.

(3) 求固定点处对绳子的拉力的大小.

第 2 题　地铁站闸机

某地铁站的出入站闸机采用三锟闸设计. 三锟闸是这样一种装置: 考虑三维空间中的三根长度均为 l 的细硬轻杆, 每根杆都有一端被固定在点 O 处, 且它们两两之间的夹角被固定为 α. 显然存在一条过 O 的轴 z 使得三锟闸绕 z 轴有 $\frac{2\pi}{3}$ 旋转对称. z 轴与地面的夹角被适当地选取, 以至于三锟闸在初始状态可以与地面达成这样一种相对位形: 其中一根杆与地面平行, 另外两根杆的自由端的连线也与地面平行. 有一堵固定在地面上的墙, 其位置满足: 在初始状态下, 三锟闸的水平杆垂直于墙, 且墙面紧贴在水平杆的自由端. 将通过闸机的人简化为刚性长方体. 人通过闸机的过程中, 长方体推动三锟闸绕 z 轴转动, 长方体的一个面紧贴地面, 另一个面紧贴墙面. 长方体足够高.

(1) 求满足以下条件的长方体的最大宽度 w_0: 人能完全通过闸机, 且长方体的厚度可以任意大.

(2) 接上问, 若长方体的宽度大于 w_0, 求满足以下条件的长方体的最大横截面积: 人能完全通过闸机. 只需写出它是什么函数在什么区间上的最大值即可.

(3) 长方体的宽度为 w. 人在完全通过闸机的过程中, 与杆之间存在滑动摩擦, 摩擦系数为 μ. 在三锟闸的转轴内有滑动摩擦力矩, 其大小恒定为 K. 求人在缓慢地完全通过闸机的过程中, 对杆做的功. 可以保留积分.

图 1: 三锟闸, 版权所有 © 2021 郑州思诺电子有限公司

第 3 题　Hohmann 转移轨道

质量为 m 的物体一开始绕着质量为 $M \gg m$ 的星体在半径为 r_1 的圆轨道上运动. 某时其瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_1, 进入椭圆轨道. 在远心点处, 其再次瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_2, 进入半径为 $r_2 = xr_1$ 的圆轨道上运动. 证明使 $\Delta v_1 + \Delta v_2$ 最大的 x 为 $5 + 4\sqrt{7}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)$.

第 4 题　电容势函数

有一平行板电容器. 定义变量 X 为极板间距, Q 为一个极板上的电荷量大小, F 为极板间作用力, V 为极板间的电势差. 电容 $C(X)$ 是已知函数 (不一定是反比例函数). 定义势函数 U 为电容器储存的能量.

(1) 证明 $\mathrm{d}U = V\,\mathrm{d}Q - F\,\mathrm{d}X$.

(2) 证明 $\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F$.

(3) 若 $C(X)$ 是反比例函数, 在 F-X 图中分别作出等 V 过程和等 Q 过程的图像.

第 5 题　张拉整体

张拉整体 (tensegrity) 是一个由一些互不触碰的受压结构 (刚体) 以及连接它们的受拉结构 (绳) 组成的稳定结构. 其在建筑学, 工程学, 生物学等领域都有应用. 图 2 是一个例子, 其由顶部和底部各一个边长为 a 的正 n 边形 (图中 $n = 4$) 组成. 记底面的正 n 边形为多边形 $\mathrm{A}_0 \cdots \mathrm{A}_{n-1}$, 顶面上的正 n 边形为多边形 $\mathrm{B}_0 \cdots \mathrm{B}_{n-1}$. A_0 与 A_n 是同一个点, B_0 与 B_n 是同一个点. 对每个 j, 用长度为 b 的轻绳连接 $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, 用长度为 l 的轻杆连接 $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_{j+1}$. 若该结构是一个张拉整体, 求 l.

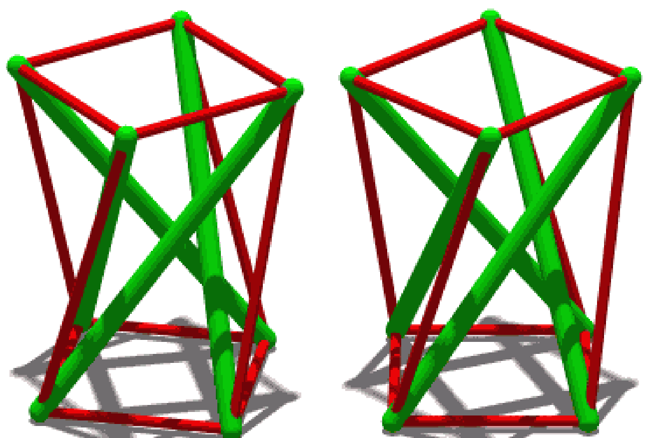


图 2: Tensegrity_simple_4.gif: Cmglee, derivative work: Cmglee, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

第 6 题　彩色视觉

视觉感受器 (眼睛) 中对彩色视觉至关重要的生物基础是视锥细胞 (corn cell). 在光线充足的情况下, 视锥细胞比视杆细胞 (rod cell) 更加活跃, 我们因此不考虑视杆细胞对视觉带来的影响. 某种动物的视网膜上有 n 种视锥细胞, 从而可以产生 n 色视觉 (n-chromacy) (人类有三色视觉 (trichromacy), 梅花雀有四色视觉 (tetrachromacy)[1], 青凤蝶 (*Graphium sarpedon*) 有十五色视觉[2]). 第 j 种视锥细胞对波长为 λ 的光的吸收率为 $f_j(\lambda)$, 其中 f_j 看作 $\mathbf{f}: (0, +\infty) \to [0, 1]^n$ 的第 j 个分量. $\{f_j\}$ 是线性无关的.

[1] Hart N. S., Partridge J. C., Bennett A. T., Cuthill I. C.. "Visual pigments, cone oil droplets and ocular media in four species of estrildid finch". *Journal of Comparative Physiology A*. Jul–Aug, 2000; **186** (7–8): 681–694. doi: 10.1007/s003590000121. PMID: 11016784. S2CID: 19458550.

[2] Chen P., Awata H., Matsushita A., Yang E., Arikawa K.. "Extreme Spectral Richness in the Eye of the Common Bluebottle Butterfly, *Graphium sarpedon*". *Frontiers in Ecology and Evolution*, vol. 4, pp. 18. Mar 8, 2016. doi: 10.3389/fevo.2016.00018. ISSN: 2296-701X.

第 j 种视锥细胞在某种光刺激下的响应程度正比于它从中吸收的总功率. 视锥细胞在受到刺激后, 会将响应信号以电信号的形式告诉大脑, 大脑即可获得视网膜上某处的各种视锥细胞的响应程度 $\mathbf{c} \in [0, +\infty)^n$, 其中 $\mathbf{c}$ 的分量 c_j 为第 j 种视锥细胞的响应程度. 从而颜色可以与 $C := [0, +\infty)^n$ 中的向量一一对应. 特殊地, 我们称并不是每个分量都相同的 $\mathbf{c}$ 组成的集合为 C^*.

规定两种变换: $T_u : c_j \mapsto uc_j$ $(u > 0)$ 以及 $S_v : c_j \mapsto v\,(c_j - l) + l$ $(0 < v \leq \frac{l}{l - c_{\min}})$, 其中 l 是 $\mathbf{c}$ 中最小分量 $c_{\min}$ 和最大分量 $c_{\max}$ 的平均值. 我们认为在这两种变换下 $\mathbf{c}$ 的色相保持不变. 我们在 C^* 上关于色相建立一个等价关系: $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$ 当且仅当存在 u, v, 使得 $\mathbf{c} = T_u S_v \mathbf{c}'$.

设某种设备 (不妨称为彩灯) 能发出固定的 n 种单色光, 其波长分别为 λ_k. 它能以任意不同的功率合成并发出这些单色光, 产生对视锥细胞的光刺激.

彩虹中包含了所有的单色光.

(1) 设某个光刺激中能量随波长的分布为已知函数 $g(\lambda)$, 求该光刺激代表的颜色.

(2) 求彩灯能产生的所有的颜色的集合 $L \subseteq C$.

(3) 求彩虹中所有的颜色的集合 $R \subseteq C$.

(4) 若存在一组 $\{\lambda_k\}$, 使得 $L = C$. 求 $\mathbf{f}$ 需要满足的条件.

(5) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在 $\mathbf{c}' \in R$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 $\mathbf{c}'$ 的方法. 若否, 是否对于 C^* 中的任意具有一块有限体积的区域 D, 对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in D$, 不存在这样的 $\mathbf{c}'$?

(6) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 $\mathbf{c}'$ 的方法. 若否, 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in R$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$?

第 7 题　互 LC 震荡

我们知道电感有自感和互感. 但是, 虽然我们有 “互电容” 的概念, 其并不能与互感很好地对应. 我们现在来构造一种与互感相对应的概念 “互容”: 若两个电容器的电容量分别为 C_1 和 C_2, 且它们之间的互容系数为 N, 则 $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{N}$, 且 $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{N}$.

考虑四块的面积为 S 的平行极板, 依次编号为 a–d. 极板 a 和极板 c 看作一个电容器, 极板间距为 d_1; 极板 b 和极板 d 看作一个电容器, 极板间距为 d_2; 极板 b 和极板 c 的间距为 d. 其中 $d < d_1 \ll \sqrt{S}$, 且 $d < d_2 \ll \sqrt{S}$.

(1) 求这两个电容器之间的互容系数.

(2) 设有两个 LC 电路, 电路中分别有电容 C_1 与 C_2, 电感 L_1 与 L_2. 两个电容之间的互容系数为 N, 两个电感之间的互感系数为 M. 求电路的振动频率. 若该振动由多个频率不同的简谐振动叠加而成, 求出所有的频率.

第 8 题　球套黑球

本题中提到的黑体都是余弦辐射体. 将一个热容为 C 的半径为 r 的均匀的球形的黑体 A 放在一个半径为 R 的均匀的薄球壳 B 内. 两个球心的距离为 $d < R - r$. 在 $t = 0$ 时, A 的温度为 T_0. A 内部的热传导很快.

(1) B 是热容为 D, 初始温度为 S_0 的黑体. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$. (可保留代数方程, 积分, 微分方程等, 若数学计算过于复杂.)

(2) B 的内壁是可以完全反射热辐射的镜面. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$.

参考答案

第 1 题　太空跳绳

(1) 因为绳子的形状是具有最小势能的形状, 所以本题即求解最优化问题

$$\min_{y\in C^1[-b/2,b/2]} \quad \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\cdot\omega^2\cdot y^2 \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad y(-b/2)=y(b/2)=0, \tag{2}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=l. \tag{3}$$

在目标函数中带上 Lagrange 乘子, 可以略去约束条件式 3, 而目标变为

$$\max_{y\in C^1[-b/2,b/2]} \quad \int_{-b/2}^{b/2} y^2\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x-\lambda\left(\int_{-b/2}^{b/2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x-l\right) \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad y(-b/2)=y(b/2)=0. \tag{5}$$

定义 Lagrangian

$$\mathcal{L}:=\left(y^2-\lambda\right)\sqrt{1+y'^2}. \tag{6}$$

代入 Euler–Lagrange 方程后化简可得

$$2y\left(1+y'^2\right)=\left(y^2-\lambda\right)y''. \tag{7}$$

进行变换 $p:=y'$ 后可得

$$2y\left(1+p^2\right)=\left(y^2-\lambda\right)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{8}$$

分离变量并积分可得

$$\ln\left(1+p^2\right)=2\ln\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}, \tag{9}$$

其中 $y_0:=y(0)>0$, $a:=\sqrt{\lambda}>y_0$. 回代 $p=y'$, 再次分离变量并积分可得

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}}=\pm x. \tag{10}$$

式 10 给出描述绳子形状的方程.

约束条件 $y(-b/2)=y(b/2)=0$ 给出

$$b=2\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}}. \tag{11}$$

绳子上的长度微元

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{12}$$

从而

$$l=2\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{13}$$

式 11 与式 13 隐式给出了式 10 中的参数 a 和 y_0.

(2)

$$E_{\mathrm{k}}=\int_{x=-b/2}^{b/2}\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s\cdot\omega^2y^2=\frac{m\omega^2}{l}\int_0^{y_0}\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{14}$$

(3) 质心位置为

$$y_{\mathrm{c}}=\frac{1}{m}\int_{x=-b/2}^{b/2}y\cdot\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s=\frac{2}{l}\int_0^{y_0}\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}=\frac{y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{l}. \tag{15}$$

绳子受到的合力

$$F=m\omega^2y_{\mathrm{c}}=\frac{m\omega^2y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{l}. \tag{16}$$

在 $x=\pm b/2$ 处曲线的切线斜率

$$y'(\pm b/2)=\mp\tan\theta=\mp\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}, \tag{17}$$

从而固定点处对绳子的拉力大小

$$T_{\pm b/2}=\frac{F}{2\sin\theta}=\frac{m\omega^2y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{2l\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2}\right)^2}}=\frac{m\omega^2a}{2l}. \tag{18}$$

另: 此题可用受力法解.

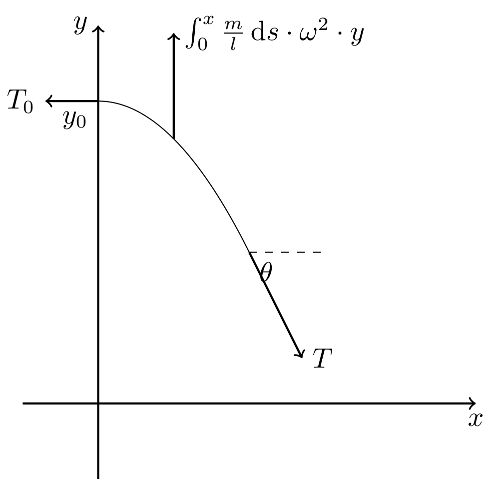


图 3

设绳子在 $x=0$ 处的张力为水平方向 T_0, 考虑 $[0,x]$ 上的一段绳子的受力平衡, 如图 3 所示. 考虑到 $\tan\theta=-y'$, 有

$$\int_0^x\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s\cdot\omega^2\cdot y=-T_0y'. \tag{19}$$

两边对 x 求导可得

$$\frac{m\omega^2}{l}\sqrt{1+y'^2}=-T_0y''. \tag{20}$$

变换 $p:=y'$, 分离变量得

$$\frac{p\,\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{m\omega^2}{T_0l}y\,\mathrm{d}y. \tag{21}$$

两边积分得

$$\sqrt{1+p^2}-1=-\frac{m\omega^2}{2T_0 l}\left(y^2-y_0^2\right). \tag{22}$$

代换 $a:=\sqrt{\frac{2T_0 l}{m\omega^2}+y_0^2}$ 可将式 22 变为与式 9 等价的形式.

第 2 题　地铁站闸机

如图 4 所示, 建立坐标系. 以人前进的方向为 x 轴和 x' 轴, z' 轴水平, y, y', z, z' 四根轴在同一平面. 设 z' 轴与 z 轴的夹角为 β.

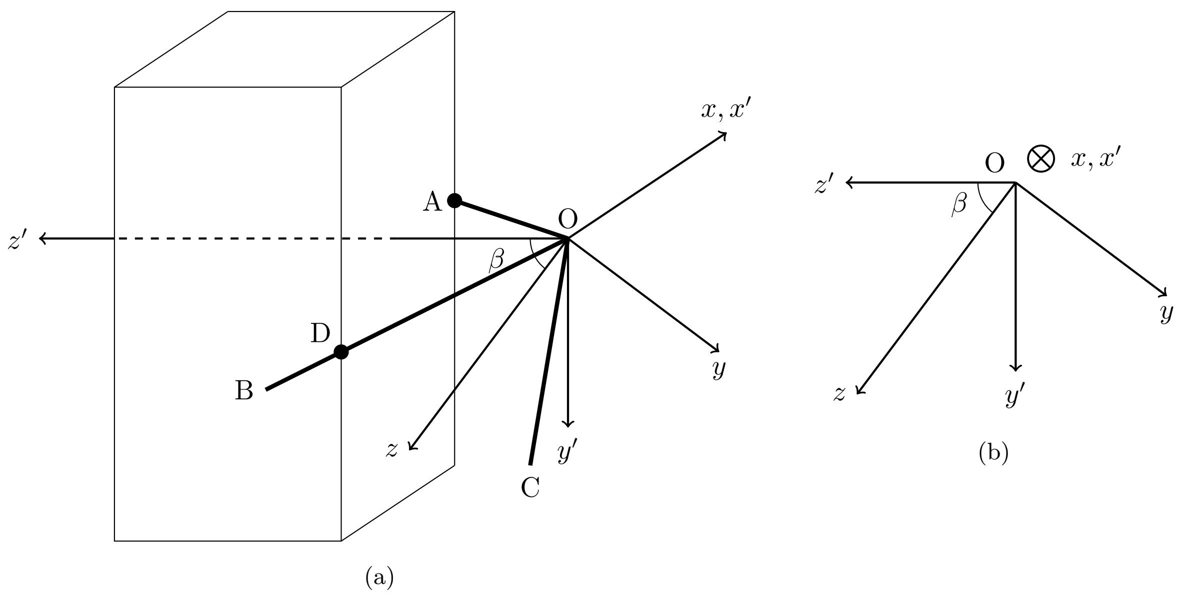


图 4

初始时, 杆 OA 水平, 于是可以写出初始时 A, B, C 三点的坐标

$$\begin{bmatrix}x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{A}\\z_\mathrm{A}\end{bmatrix}=l\begin{bmatrix}0\\-\sin\beta\\\cos\beta\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}x_\mathrm{B}\\y_\mathrm{B}\\z_\mathrm{B}\end{bmatrix}=l\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\\\frac{1}{2}\sin\beta\\\cos\beta\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}x_\mathrm{C}\\y_\mathrm{C}\\z_\mathrm{C}\end{bmatrix}=l\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\\\frac{1}{2}\sin\beta\\\cos\beta\end{bmatrix}. \tag{1}$$

因为三根杆两两夹角为 α, 所以我们可以通过将它们的坐标点乘来获得 β 与 α 的关系

$$\begin{bmatrix}x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{A}\\z_\mathrm{A}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_\mathrm{B}\\y_\mathrm{B}\\z_\mathrm{B}\end{bmatrix}=l^2\cos\alpha\Rightarrow\cos\beta=\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{3}}. \tag{2}$$

现在研究 xyz 坐标系与 $x'y'z'$ 坐标系之间的换算关系. 可以看做绕 x 轴旋转 β:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\beta&-\sin\beta\\0&\sin\beta&\cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}. \tag{3}$$

再考虑三根杆的旋转变换. 设三根杆旋转了 φ 角后 A 在 xyz 坐标系中的坐标为 $\mathbf{a}(\varphi)$, 则

$$\mathbf{a}(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}\mathbf{a}(0). \tag{4}$$

令

$$\mathbf{R}(\varphi) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, \tag{5}$$

于是可得三根杆转了 φ 角后 A 在 xyz 坐标系中的坐标

$$\mathbf{a}'(\varphi) = \mathbf{R}(\varphi)\,\mathbf{a}'(0)\,, \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{a}'(0) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}. \tag{7}$$

是 A 的初始坐标. 将式 6 全部展开后化简可得

$$\mathbf{a}'(\varphi) = l \begin{bmatrix} \sin\beta\sin\varphi \\ \sin 2\beta \sin^2\frac{\varphi}{2} \\ 1 - 2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

同时我们可以获得 B 和 C 的坐标

$$\mathbf{b}'(\varphi) = \mathbf{a}'\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad \mathbf{c}'(\varphi) = \mathbf{a}'\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right). \tag{9}$$

(1) 若长方体的宽度小于等于三根杆的末端到墙的距离 (三个中最小的那个) 的最大值, 则它的厚度可以无限大. 很明显, 当三根杆的末端到墙的距离最大时, 应有 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 此时三根杆的位形刚好跟初始状态相反. 容易计算得

$$w_0 = l - a_3'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{l}{2}\sin^2\beta = \frac{l}{3}\left(1 - \cos\alpha\right). \tag{10}$$

(2) 设长方体的宽度为 w. 假定长方体可以完全通过三锟闸. 令长方体的厚度逐渐增加, 直到它恰好能完全通过三锟闸. 在临界情况下, 它刚好能够把 OA 杆推至一个它不需要再推就能使它继续通过的角度 (即 $l - a_3'(\varphi) = w$). “刚好” 意味着, 如果它再厚一点, OB 杆就会撞到长方体. 这表明, 在临界情况下, 当 $l - a_3'(\varphi) = w$ 时, 杆 OB 刚好触碰到长方体的另一条棱. 这一情形在图 4a 中被画出. 而杆 OC 是不必担心的, 因为 C 点的 z' 坐标不可能大于其初始值.

经过上述讨论可以得知, 我们需要考察 OB 杆上与 A 点恰好具有相同的 z' 坐标的点 D. 因为 OD 与 OB 平行, 容易写出 D 的坐标

$$\mathbf{d}'(\varphi) = \frac{a_3'(\varphi)}{a_3'(\varphi - \frac{2\pi}{3})}\mathbf{a}'\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right). \tag{11}$$

在临界情况下, 宽度为 $l - a_3'(\varphi)$ 的长方体的厚度刚好相当于 A 与 D 的 x' 坐标之差. 于是我们可以得到所要求的横截面积与刚好能离开三锟闸时的转角 φ 的关系

$$S(\varphi) = (l - a_3'(\varphi))\left(a_1'(\varphi) - \frac{a_3'(\varphi)}{a_3'(\varphi - \frac{2\pi}{3})}a_1'\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right). \tag{12}$$

将式 8 代入式 12 可得

$$S(\varphi) = l^2 \cdot 2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\sin\beta\sin\varphi - \frac{1 - 2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1 - 2\sin^2\beta\sin^2(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{3})}\sin\beta\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right). \tag{13}$$

由题目中所说, 长方体的宽度大于 w_0, 所以在研究最大厚度时 $\varphi \geq \frac{\pi}{3}$. 另一方面, 长方体的宽度不能大于初始时 B 到墙面的距离, 所以 $\varphi \leq \frac{2\pi}{3}$. 从而, 问题被转化为求 $S(\varphi)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最大值.

(3) 记人推动杆的过程中杆与长方体的棱的交点为 H. 显然 H 的 z' 坐标恒为 $l-w$, 且 OH 平行于 OA. 因此可以写出 H 的坐标

$$\mathbf{h}' = \frac{l-w}{a_3'}\mathbf{a}' = \frac{l-w}{1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}\begin{bmatrix}\sin\beta\sin\varphi\\ \sin2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ 1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

记固连在杆上的 H 点的元位移为 $\mathrm{d}_1\mathbf{h}'$, 固连在长方体上的 H 点的元位移为 $\mathrm{d}_2\mathbf{h}'$. 显然有

$$\mathrm{d}_1\mathbf{h}' = \mathbf{R}(\mathrm{d}\varphi)\,\mathbf{h}' - \mathbf{h}' = (l-w)\,\frac{\sin\beta}{1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \cos\beta\sin\varphi\\ -\sin\beta\sin\varphi\end{bmatrix}\mathrm{d}\varphi, \tag{15}$$

$$\mathrm{d}_2\mathbf{h}' = \mathrm{d}h'\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = (l-w)\,\frac{\cos\varphi+2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^2}\sin\beta\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{d}\varphi. \tag{16}$$

记长方体对杆的摩擦力为 $\mathbf{f}'$. 显然它应当平行于杆与长方体的相对位移. 这意味着

$$\mathbf{f}' \parallel \mathrm{d}_2\mathbf{h}' - \mathrm{d}_1\mathbf{h}' \parallel \begin{bmatrix}2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\,(\cos\varphi+1)\\ -\cos\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\\ \sin\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\end{bmatrix}. \tag{17}$$

记长方体对杆的弹力为 $\mathbf{N}'$. 显然它应当同时垂直于杆和长方体的棱. 这意味着

$$\mathbf{N}' \parallel \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\times\mathbf{a}' \parallel \begin{bmatrix}1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ 0\\ -\sin\beta\sin\varphi\end{bmatrix}. \tag{18}$$

记 $N := |\mathbf{N}'|$. 则摩擦力的大小为 μN. 于是可以获得

$$\mathbf{f}' = \frac{2\mu N}{\sin\varphi\sqrt{3+4\cos4\beta+2\sin^2 2\beta\cos\varphi}}\begin{bmatrix}2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\,(\cos\varphi+1)\\ -\cos\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\\ \sin\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathbf{N}' = \frac{N}{\sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^4\frac{\varphi}{2}}}\begin{bmatrix}1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ 0\\ -\sin\beta\sin\varphi\end{bmatrix}. \tag{20}$$

令

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' :=& \frac{2\mu}{\sin\varphi\sqrt{3+4\cos4\beta+2\sin^2 2\beta\cos\varphi}}\begin{bmatrix}2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\,(\cos\varphi+1)\\ -\cos\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\\ \sin\beta\sin\varphi\left(1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\end{bmatrix}\\ &+\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 2\beta\sin^4\frac{\varphi}{2}}}\begin{bmatrix}1-2\sin^2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2}\\ 0\\ -\sin\beta\sin\varphi\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{21}$$

由于杆是轻杆, 所以由力矩平衡关系可得

$$N = \frac{K}{|\mathbf{h}'\times\mathbf{u}'|}. \tag{22}$$

于是可得长方体对杆所做的功

$$W=\int_{\varphi=0}^{2\arcsin\left(\frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{w}{2l}}\right)}\frac{K}{|\mathbf{h}'\times\mathbf{u}'|}\mathbf{u}'\cdot\mathrm{d}_1\mathbf{h}', \tag{23}$$

式中 $\beta,\mathbf{h}',\mathrm{d}_1\mathbf{h}',\mathbf{u}'$ 分别由式 2, 式 14, 式 15, 式 21 给出.

第 3 题　Hohmann 转移轨道

物体的速度变化的全过程为

$$\underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_1}}}_{\text{圆轨道}}\xrightarrow{\Delta v_1}\underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2}+\frac{2GM}{r_1}}\to\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2}+\frac{2GM}{r_2}}}_{\text{椭圆轨道}}\xrightarrow{\Delta v_2}\underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}_{\text{圆轨道}}. \tag{1}$$

于是

$$\Delta v_1+\Delta v_2\propto f(x):=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}-1+\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{2}{x\,(1+x)}}. \tag{2}$$

为了使 $\Delta v_1+\Delta v_2$ 极大,

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+2x)\,x^{-\frac{3}{2}}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}=0. \tag{3}$$

在式 3 两边乘 $2x^{\frac{3}{2}}\,(1+x)^{\frac{3}{2}}$ 可得

$$\sqrt{2}\,(1+3x)-(1+x)^{\frac{3}{2}}=0. \tag{4}$$

此方程可约化为多项式方程

$$P(x):=x^3-15x^2-9x-1=0. \tag{5}$$

注意到

$$\cos 3y=\cos y\left(2\cos^2 y-1\right)-2\cos y\left(1-\cos^2 y\right)=4\cos^3 y-3\cos y,$$

所以

$$\cos^3\frac{y}{3}=\frac{1}{4}\left(\cos y+3\cos\frac{y}{3}\right).$$

令 $x^\star:=5+4\sqrt{7}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)$, 则

$$\begin{aligned}(x^\star-5)^3&=16\cdot 7^{\frac{3}{2}}\left(\cos\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}+3\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)\right) &(6)\\&=16\cdot 7^{\frac{3}{2}}\left(\frac{37}{2\cdot 7^{\frac{3}{2}}}+3\cdot\frac{x^\star-5}{4\sqrt{7}}\right) &(7)\\&=84x^\star-124. &(8)\end{aligned}$$

由此可得 $P(x^\star)=0$.

第 4 题　电容势函数

(1) $V\,\mathrm{d}Q$ 是电源对电容所做的功, $-F\,\mathrm{d}X$ 是外力对电容所做的功.

(2) 令 $H:=U+FX$, 则

$$\mathrm{d}H=V\,\mathrm{d}Q+X\,\mathrm{d}F. \tag{1}$$

从而

$$V=\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)_F,\qquad X=\left(\frac{\partial H}{\partial F}\right)_Q. \tag{2}$$

由于求偏导次序可交换, $\frac{\partial^2 H}{\partial Q \partial F} = \frac{\partial^2 H}{\partial F \partial Q}$, 因此

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F. \tag{3}$$

(3) 设 $C(X) = \alpha / X$, 则由 $Q = CV$ 可得状态方程

$$QX = \alpha V. \tag{4}$$

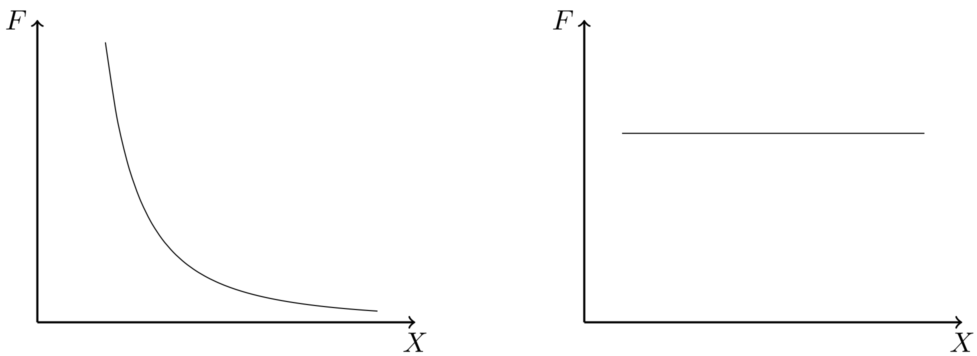
内能表达式为

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{Q^2 X}{2\alpha}. \tag{5}$$

于是

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_Q = \frac{Q^2}{2\alpha} = \frac{\alpha V^2}{2X^2}. \tag{6}$$

于是可以在 F-X 图作出如图 5 所示的曲线. 图 5a 与图 5b 分别是等 V 过程与等 Q 过程的图像.



(a) 等 V 过程

(b) 等 Q 过程

图 5

第 5 题　张拉整体

设多边形 $\mathrm{A}_0 \cdots \mathrm{A}_{n-1}$ 在旋转一定角度 α (旋转的方向与 A_j 随 j 变化的环绕方向相同) 之后, 可以平移至与多边形 $\mathrm{B}_0 \cdots \mathrm{B}_{n-1}$ 重合. 设两个正 n 边形所在平面之间的距离为 h, 两个正 n 边形的半径为

$$r := \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}. \tag{1}$$

建立坐标系. 给出点的坐标:

$$\mathrm{A}_j \left(r \cos \frac{2j\pi}{n}, r \sin \frac{2j\pi}{n}, 0\right), \quad \mathrm{B}_j \left(r \cos\left(\frac{2j\pi}{n} + \alpha\right), r \sin\left(\frac{2j\pi}{n} + \alpha\right), h\right). \tag{2}$$

则几何约束为

$$(r \cos \alpha - r)^2 + (r \sin \alpha)^2 + h^2 = b^2, \tag{3}$$

$$\left(r \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) - r\right)^2 + \left(r \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + h^2 = l^2. \tag{4}$$

将其看做关于 α, h 的方程组, 解得

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{l^2 - b^2}{4r^2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{l^2 - b^2}{a^2} \sin \frac{\pi}{n}, \tag{5}$$

考虑对称性, 每个 $T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j)$ 相等, 每个 $T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_{j+1})$ 相等, 每个 $T(\mathrm{A}_j\mathrm{A}_{j+1})$ 相等. 令 $T_a := T(\mathrm{A}_j\mathrm{A}_{j+1})$, $T_b := T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j)$, 以及 $T_l := T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_{j+1})$.

点 A_0 静力平衡给出条件

$$\mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1) + \mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{n-1}) + \mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0) + \mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1) = \mathbf{0}, \tag{6}$$

其中各个力

$$\mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1) = \frac{T_a}{a}\begin{bmatrix} r\cos\frac{2\pi}{n} - r \\ r\sin\frac{2\pi}{n} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{n-1}) = \frac{T_a}{a}\begin{bmatrix} r\cos\frac{2\pi}{n} - r \\ -r\sin\frac{2\pi}{n} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0) = \frac{T_b}{b}\begin{bmatrix} r\cos\alpha - r \\ r\sin\alpha \\ h \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{T}(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1) = \frac{T_l}{l}\begin{bmatrix} r\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) - r \\ r\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) \\ h \end{bmatrix}. \tag{10}$$

注意到式 6 的 y 和 z 分量给出

$$\begin{cases} \dfrac{T_b}{b} r\sin\alpha + \dfrac{T_l}{l} r\sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{n}\right) = 0, \\ \dfrac{T_b}{b} h + \dfrac{T_l}{l} h = 0. \end{cases} \tag{11}$$

该方程组要有非零解, 于是系数行列式为零. 从而得到条件

$$\sin\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right). \tag{12}$$

满足式 12 的最小的正的 α 为

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi. \tag{13}$$

将式 13 代入式 5 可得

$$l = \sqrt{\frac{a^2}{\sin\frac{\pi}{n}} + b^2}. \tag{14}$$

第 6 题　彩色视觉

(1)

$$\mathbf{c} = \int_0^\infty \mathbf{f}(\lambda)\, g(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{1}$$

(2)

$$L = \left\{ \sum_k a_k \mathbf{f}(\lambda_k) \,\middle|\, \mathbf{a} \in [0, +\infty)^n \right\}. \tag{2}$$

(3)

$$R = \{a\mathbf{f}(\lambda) \mid a \in [0, +\infty)\,, \lambda \in (0, +\infty)\}\,. \tag{3}$$

(4) $L=C$ 的充要条件是

$$\forall j:\operatorname{supp}(f_j)\setminus\bigcup_{l\neq j}\operatorname{supp}(f_l)\neq\varnothing. \tag{4}$$

充分性: 取

$$\lambda_k:\in\operatorname{supp}(f_k)\setminus\bigcup_{l\neq k}\operatorname{supp}(f_l) \tag{5}$$

即可.

必要性: 反证法. 若

$$\operatorname{supp}(f_{j^*})\setminus\bigcup_{l\neq j^*}\operatorname{supp}(f_l)=\varnothing, \tag{6}$$

则显然对于 $c_j:=\delta_{j,j^*}$, 有 $C\ni\mathbf{c}\notin L$.

(5) 首先考虑 $n=1$ 的情形. 此时显然有 $R=C$, 因此对于任意的 $\mathbf{c}\in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.

接下来考虑 $n=2$ 的情形. 此时显然有平凡的情形: $\forall\mathbf{c},\mathbf{c}'\in C^*:\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'$. 又, R 非空. 因此, 显然对于任意的 $\mathbf{c}\in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.

然后考虑 $n>3$ 的情形. 由于等价关系 $\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'$ 中有两个可调参量 u, v, 所以对于任意的 $\mathbf{c}\in C^*$, 与 $\mathbf{c}$ 等色相的全体颜色组成的集合

$$[\mathbf{c}]:=\{\mathbf{c}'\in C^*\,|\,\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'\}\,. \tag{7}$$

是 C 中的二维曲面. 又, 由于在 R 上诱导的色相等价类 $[R]$ 可以构造为 C 中的一维曲线 (例如参数曲线 $\mathbf{c}=\mathbf{f}(\lambda)$ (参数 $\lambda\in(0,+\infty)$)). 当 $\mathbf{c}$ 在曲线 $[R]$ 上运动时, 二维曲面 $[\mathbf{c}]$ 将扫过一片三维超曲面 P. 显然 P 可被定义为

$$P:=\{\mathbf{c}\in C^*\,|\,\exists\mathbf{c}'\in R:\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'\}\,. \tag{8}$$

由于 P 是三维超曲面, 然而 C 是 $n>3$ 维空间, 所以显然对于几乎所有的 $\mathbf{c}\in C^*$, 不存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.

最后考虑 $n=3$ 的情形:

$n=3$ 是一个特殊的情形, 在这种情形中可以容易地构造一个函数 $p:C^*\to[-\pi,\pi)$ 使得对于任意的 $\mathbf{c},\mathbf{c}'\in C^*$, 有 $\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'$ 当且仅当 $p(\mathbf{c})=p(\mathbf{c}')$. 构造方法如下:

定义

$$\mathbf{s}(\mathbf{c}):=S_{\frac{c_{\max}+c_{\min}}{c_{\max}-c_{\min}}}\mathbf{c},\quad \mathbf{t}(\mathbf{c}):=T_{\frac{1}{c_{\max}}}\mathbf{c},\quad \mathbf{u}(\mathbf{c}):=\mathbf{t}(\mathbf{s}(\mathbf{c}))\,. \tag{9}$$

此时 $\mathbf{u}$ 的作用是将 $\mathbf{c}\in C^*$ 标准化为满足 $c_{\min}=0$, $c_{\max}=1$ 的等色相的标准颜色 $\mathbf{u}(\mathbf{c})$. 于是, 我们只需要为每一个标准颜色 $\mathbf{c}^\circ$ 分配一个特征值 $q(\mathbf{c}^\circ)$, 即可定义出 p. 记 $\mathbf{c}$ 的三个分量为 c_1,c_2,c_3. 记对应于 $\mathbf{c}$ 的最小分量的下标为 min, 对应于 $\mathbf{c}$ 的最大分量的下标为 max. 定义 q 为

$$q(\mathbf{c}^\circ):=\frac{\pi}{3}\left(b+\varepsilon c^\circ_{\mathrm{mid}}\right), \tag{10}$$

其中 c_{mid} 表示 $\mathbf{c}$ 中除了最大和最小以外的那个分量, b 与 ε 的取值如表 1 所示. 从而, 可定义

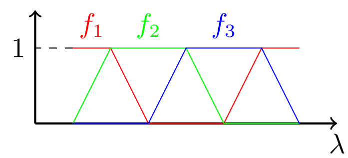
$$p(\mathbf{c}):=q(\mathbf{u}(\mathbf{c}))\,. \tag{11}$$

表 1

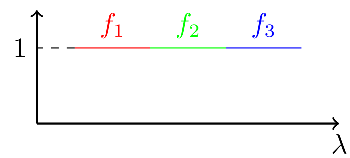
min, max	1	2	3
1		$2,1$	$-2,-1$
2	$0,-1$		$-2,1$
3	$0,1$	$2,-1$	

此时各种情况都有可能出现. 可以对各种情况进行构造:

1. 按图 6a 定义 $\mathbf{f}$, 可知 $p(a\mathbf{f}(\lambda))$ 可取遍 $[-\pi,\pi)$ 中的所有值, 从而可以取遍所有的色相, 从而对于所有的 $\mathbf{c}\in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.
2. 按图 6b 定义 $\mathbf{f}$, 从而 $p(a\mathbf{f}(\lambda))$ 只能取 $\left\{-\frac{2\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3}\right\}$ 中的值, 从而对于几乎所有的 $\mathbf{c}\in C^*$, 不存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.
3. 将图 6a 与图 6b 各自取一半拼起来, 从而并不是 $\forall\mathbf{c}\in C^*:\exists\mathbf{c}'\in R:\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'$, 但是, 也并不是对于所有的 C^* 中具有一块有限体积的区域 D, 对于几乎所有的 $\mathbf{c}\in D$, 不存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}'\in R$.



(a)



(b)

图 6

(6) 此题可以考虑 C 中的几何直观. 首先应用式 9 给出的标准化方法, 映射 $\mathbf{u}$ 的像给出了一种用 C 中的 $n-2$ 维超曲面表示 C 上诱导的等价类 $[C]$ 的方法. 显然, $\mathbf{u}$ 的像由 $n\,(n-1)$ 个 $n-2$ 维超立方体组成:

$$\operatorname{Im}\mathbf{u}=\bigcup_{j\neq l}\{\mathbf{c}\in C\,|\,c_j=0,c_l=1,c_m\in[0,1]\,,m\neq j,l\}\,. \tag{12}$$

注意到变换 S_v 可以将 $\operatorname{Im}\mathbf{u}$ 上的点 U 变换到射线 PU 上的另外一点, 其中 P 是单位立方体的中心. 又, 变换 T_u 可以将 C 中的点 V 变换到射线 OV 上的另外一点. 从而, 与 $\mathbf{c}$ 等色相的颜色的集合 $[\mathbf{c}]$ 可以表为 $\angle\mathbf{u}(\mathbf{c})\,\mathrm{OP}$ 所夹的二维平面区域 (不包括射线 OP). 当 $\mathbf{c}$ 取遍所有的色相时, $[\mathbf{c}]$ 将扫过整个 C^*.

对于 $n=3$, 上面所述的几何直观由图 7 给出. $\operatorname{Im}\mathbf{u}$ 即折线 RYGCBMR. 当 $p(\mathbf{c})$ 取遍 $[-\pi,\pi)$ 时, $\mathbf{u}(\mathbf{c})$ 沿着该折线绕 OP 转一圈.

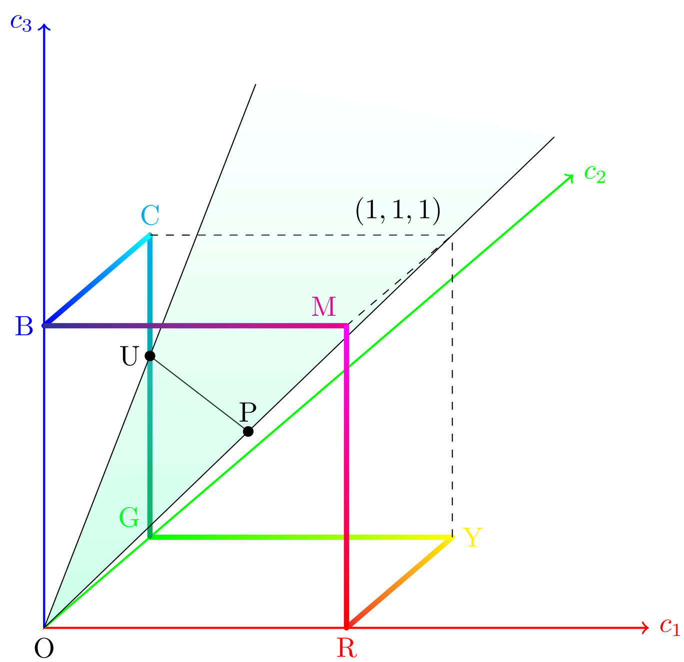


图 7

考虑到 L 实际上是 $\{\mathbf{f}(\lambda_k)\}$ 的 (具有非负系数的) 线性组合的集合. 因此, L 是以 $\{\mathbf{f}(\lambda_k)\}$ 各自延成的射线为棱边, 以 O 为顶点的超棱锥. 由几何直观可知, 当该超棱锥包含射线 OP 时 (即方程组 $\forall j:a_kf_j(\lambda_k)=1$ 的

解 **a** 的每个分量都是正的), 超棱锥内的点可以取遍所有的色相. 反之, 则不能. 因此, 对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$ 的条件是关于 **a** 的方程组 $\forall j : a_k f_j(\lambda_k) = 1$ 具有正的解.

不过这里我们认为 $\{\lambda_k\}$ 已经被选定而不能改变. 如果 $\{\lambda_k\}$ 可以被任意选定, 那么存在某种 **f** 的形式, 使得对于任意 $\{\lambda_k\}$ 的选择, 都并非对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$. 例如, 我们可以构造一种 **f**, 使得 $\forall\lambda : f_1(\lambda) > f_2(\lambda)$. 那么方程组 $\forall j : a_k f_j(\lambda_k) = 1$ 对任意的 $\{\lambda_k\}$ 都没有正的解.

若 $\{\lambda_k\}$ 的选取使得射线 OP 不被包含在超棱锥 L 内, 则曲线 $\mathbf{c} = \mathbf{f}(\lambda)$ (λ 为参数) 中的某一段可以处在超棱锥所能表达的色相之外. 该曲线也有可能完全处在超棱锥所表达的色相之内, 取决于 **f** 的具体形式. 因此, 若并不是对于任意的 $\mathbf{c} \in C^*$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$, 那么可能对于任意的 $\mathbf{c} \in R$, 存在与 $\mathbf{c}$ 等色相的 $\mathbf{c}' \in L$, 这取决于 **f** 的形式.

第 7 题　互 LC 震荡

(1) 如图 8 所示, 四块极板将空间分割为五个部分, 分别设为 I–V.

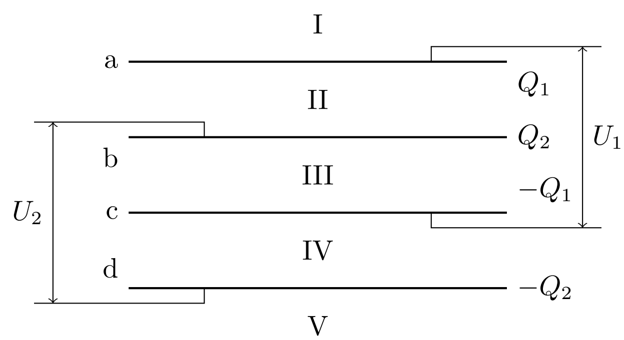


图 8

分别列出五块区域中的电场 (以向下为正):

$$2\varepsilon_0 S E_{\mathrm{I}} = -Q_1 - Q_2 + Q_1 + Q_2 = 0, \tag{1}$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\mathrm{II}} = Q_1 - Q_2 + Q_1 + Q_2 = 2Q_1, \tag{2}$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\mathrm{III}} = Q_1 + Q_2 + Q_1 + Q_2 = 2\left(Q_1 + Q_2\right), \tag{3}$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\mathrm{IV}} = Q_1 + Q_2 - Q_1 + Q_2 = 2Q_2, \tag{4}$$

$$2\varepsilon_0 S E_{\mathrm{V}} = Q_1 + Q_2 - Q_1 - Q_2 = 0. \tag{5}$$

从而电势差

$$U_1 = E_{\mathrm{II}}\left(d_1 - d\right) + E_{\mathrm{III}} d = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} Q_1 + \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q_2, \tag{6}$$

$$U_2 = E_{\mathrm{III}} d + E_{\mathrm{IV}}\left(d_2 - d\right) = \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} Q_2 + \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q_1. \tag{7}$$

比较互容的定义, 可得互容系数

$$N = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{8}$$

(2) 分别对两个 LC 电路应用 Kirchhoff 电压定律, 可得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_2}{N} = L_1 \ddot{Q}_1 + M \ddot{Q}_2, \\ \dfrac{Q_2}{C_2} + \dfrac{Q_1}{N} = L_2 \ddot{Q}_2 + M \ddot{Q}_1. \end{cases} \tag{9}$$

定义电容矩阵

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{10}$$

电感矩阵

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

从而式 9 可重写为

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{L}\ddot{\mathbf{Q}}, \tag{12}$$

或者

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Q}, \tag{13}$$

其中 $\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$. 将 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1}$ 特征分解:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}, \tag{14}$$

其中 $\mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 \end{bmatrix}$ 是对角矩阵. 令

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}, \tag{15}$$

从而式 13 可重写为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\omega_1^2 q_1, \\ \ddot{q}_2 = -\omega_2^2 q_2, \end{cases} \tag{16}$$

其解为

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t, \\ q_2 = A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t. \end{cases} \tag{17}$$

从而可得解

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t \\ A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t \end{bmatrix}. \tag{18}$$

因此电路中的振动是由频率为 ω_1 和 ω_2 的简谐振动合成的.

经过一番冗长的计算后可得

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{L_1 L_2 - M^2}}, \tag{19}$$

其中

$$p := \frac{M}{N} - \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1}\right), \tag{20}$$

$$\Delta := \frac{L_1 L_2}{N^2} + \frac{M^2}{C_1 C_2} + \frac{1}{4}\left(\frac{L_1}{C_2} - \frac{L_2}{C_1}\right)^2 - \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1}\right)\frac{M}{N}. \tag{21}$$

第 8 题 球套黑球

(此解答中球坐标的方位角取值为 $[-\pi, \pi)$.)

(1) 如图 9 所示, 以两个球心的连线为 z 轴, 记 P 为 B 上 xOz 平面内具有极角 θ 的点. 考虑 B 上 P 处单位面积发出的热辐射.

以 P 为原点建立坐标系, z' 轴指向 O. 平面 $x'\mathrm{P}z'$ 与平面 $x\mathrm{O}z$ 重合. 容易获得从 $x'y'z'$ 坐标系变换到 xyz 坐标系的公式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - R \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \right). \tag{1}$$

于是 A 的球心 $\mathrm{O_A}\,(x=d, y=0, z=0)$ 在 $x'y'z'$ 坐标系中的坐标为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(d - R\sin\theta)\cos\theta + R\cos\theta\sin\theta \\ 0 \\ (d - R\sin\theta)\sin\theta + R\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d\cos\theta + R\sin 2\theta \\ 0 \\ d\sin\theta + R\cos 2\theta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

考虑从 P 发出的具有极角 θ' 和方位角 φ' 的辐射. 该射线的参数方程为

$$x' = s\sin\theta'\cos\varphi', \quad y' = s\sin\theta'\sin\varphi', \quad z' = s\cos\theta'. \tag{3}$$

为了求该射线到 $\mathrm{O_A}$ 的距离, 考虑该射线上的点 Q, 其到 $\mathrm{O_A}$ 的距离为

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{QO_A}\right|^2 =& \left(-d\cos\theta + R\sin 2\theta - s\sin\theta'\cos\varphi'\right)^2 \\ &+ \left(-s\sin\theta'\sin\varphi'\right)^2 \\ &+ \left(d\sin\theta + R\cos 2\theta - s\cos\theta'\right)^2 \\ \geq& u(\theta, \theta', \varphi'). \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $u(\theta, \theta', \varphi')$ 为 $\left|\mathrm{QO_A}\right|^2$ 在 s 变化时的最小取值 (二次函数最低点). 由方程 $u(\theta, \theta', \varphi') = r^2$ 可以解得 $\theta' \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 范围内的解 $\theta' = f(\theta, \varphi')$.

f 的形式在定性上有不同. 主要分为两种情形:

1. $d < r$ 的情形:

   此时对于任意的 θ, z' 轴都会穿过 A. 因此, f 能定义在整个 $[0, \pi] \times [-\pi, \pi)$, 且是单值函数.

2. $d \geq r$ 的情形:

   此时对于 $\theta \in \left[0, \arcsin\frac{r}{d}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{r}{d}, \pi\right]$, z' 轴会穿过 A. 因此, f 在 $\theta \in \left[0, \arcsin\frac{r}{d}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{r}{d}, \pi\right]$ 上是关于 $\varphi' \in [0, 2\pi)$ 的单值函数.

   对于 $\theta \in \left[\arcsin\frac{r}{d}, \pi - \arcsin\frac{r}{d}\right]$, z' 轴不穿过 A. 因此, f 在 $\theta \in \left[\arcsin\frac{r}{d}, \pi - \arcsin\frac{r}{d}\right]$ 上是关于 $\varphi' \in [-\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta), \varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)]$ 的多值函数, 其有两支 f_1 与 f_2. $f_1 \leq f_2$, 等号仅在 $\varphi' = \pm\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)$ 时取到.

B 在 P 处小面积 $\mathrm{d}A$ 的辐射中, 能射到 A 的功率为

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{BA}}(\theta) = L_{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}A \cdot g(\theta), \tag{5}$$

其中 $L_{\mathrm{B}} := \frac{\sigma}{\pi}S^4$ 是温度为 S 的黑体表面的辐射率 (单位面积上单位立体角的辐射通量), $\mathrm{d}A := R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, 而

$$g(\theta) := \begin{cases} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi}\int_{\theta'=0}^{f\left(\theta,\varphi'\right)} \cos\theta'\mathrm{d}\Omega, & \text{若 } d < r \text{, 或 } d \geq r \text{ 且 } \theta \in \left[0, \arcsin\frac{r}{d}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{r}{d}, \pi\right]; \\ \int_{\varphi'=-\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)}^{\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)}\int_{\theta'=f_1(\theta,\varphi')}^{f_2\left(\theta,\varphi'\right)} \cos\theta'\mathrm{d}\Omega, & \text{若 } d \geq r \text{ 且 } \theta \in \left[\arcsin\frac{r}{d}, \pi - \arcsin\frac{r}{d}\right], \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega := \sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'$. 从而 B 对 A 的总辐射功率为

$$P_{\mathrm{BA}} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \mathrm{d}P_{\mathrm{BA}}(\theta), \tag{7}$$

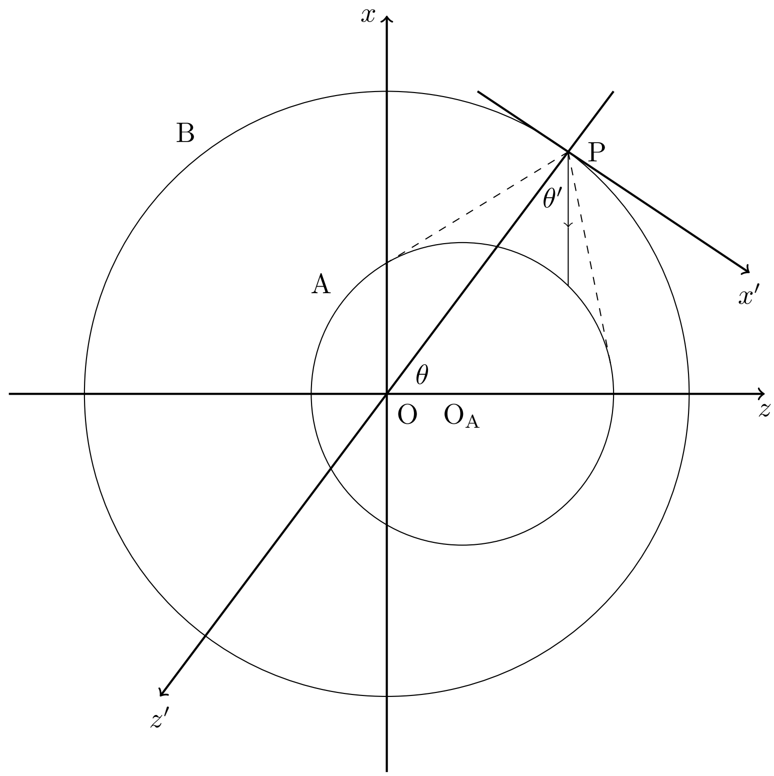


图 9

或者

$$P_{\mathrm{BA}} = \lambda S^4, \tag{8}$$

其中常数

$$\lambda := \begin{cases} \sigma R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^{f\left(\theta,\varphi'\right)} \sin(2\theta')\,\mathrm{d}\theta', & \text{若 } d < r; \\ \sigma R^2 \left(\begin{array}{c} \left(\int_0^{\arcsin\frac{r}{d}} + \int_{\pi-\arcsin\frac{r}{d}}^{\pi}\right) \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi' \int_0^{f\left(\theta,\varphi'\right)} \sin(2\theta')\,\mathrm{d}\theta' \\ + \int_{\arcsin\frac{r}{d}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{d}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{-\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)}^{\varphi'_{\mathrm{m}}(\theta)} \mathrm{d}\varphi' \int_{f_1(\theta,\varphi')}^{f_2\left(\theta,\varphi'\right)} \sin(2\theta')\,\mathrm{d}\theta' \end{array} \right), & \text{若 } d \geq r. \end{cases} \tag{9}$$

A 对 B 的总辐射功率显然为

$$P_{\mathrm{AB}} = 4\pi\sigma T^4 r^2. \tag{10}$$

B 对外耗散的总辐射功率显然为

$$P_{\mathrm{B}\infty} = 4\pi\sigma S^4 R^2. \tag{11}$$

从而可以建立微分方程组

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_{\mathrm{BA}} - P_{\mathrm{AB}}, \\ D\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = P_{\mathrm{AB}} - P_{\mathrm{BA}} - P_{\mathrm{B}\infty}, \end{cases} \tag{12}$$

即

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lambda S^4 - 4\pi\sigma T^4 r^2, \\ D\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 4\pi\sigma T^4 r^2 - \lambda S^4 - 4\pi\sigma S^4 R^2, \end{cases} \tag{13}$$

其中 λ 由式 9 给出. 理论上可由式 13 解出 $T(t)$.

(2) 此情形给出平凡的结果

$$T(t) = T_0. \tag{14}$$

这是因为, A 的几乎全部辐射最终总能被反射回 A. 某根辐射在球形镜面内来回反射时, 它总在某个包含球心的平面内. 每一次反射的偏转角与 2π 的比值我们可以假定为无理数 (因为几乎所有的实数都是无理数). 从而, 被反射的某根辐射可以稠密地铺满两个同心圆之间的区域. 该区域总是能与 A 有非空的交集 (因为一开始该辐射就是从 A 上射出的), 因此辐射总能回到 A.