hs_phys_probs 002

詹有丘

第 1 题　太空跳绳

一根不可伸长的长度为 l, 质量为 m 的均质软绳, 两端固定在间隔为 b 的两点. 绳子以两个固定点的连线为轴以匀角速度 ω 转动. 忽略重力的影响而只考虑离心力. 转动过程中绳子的形状保持为一个平面图形不变. (本题可以以积分及隐函数形式给出隐式解.)

(1) 用平面坐标系中的方程描述绳子的形状.

(2) 求绳子的动能.

(3) 求固定点处对绳子的拉力的大小.

第 2 题　地铁站闸机

某地铁站的出入站闸机采用三锟闸设计. 三锟闸是这样一种装置: 考虑三维空间中的三根长度均为 l 的细硬轻杆, 每根杆都有一端被固定在点 O 处, 且它们两两之间的夹角被固定为 α. 显然存在一条过 O 的轴 z 使得三锟闸绕 z 轴有 $\frac{2\pi}{3}$ 旋转对称. z 轴与地面的夹角被适当地选取, 以至于三锟闸在初始状态可以与地面达成这样一种相对位形: 其中一根杆与地面平行, 另外两根杆的自由端的连线也与地面平行. 有一堵固定在地面上的墙, 其位置满足: 在初始状态下, 三锟闸的水平杆垂直于墙, 且墙面紧贴在水平杆的自由端. 将通过闸机的人简化为刚性长方体. 人通过闸机的过程中, 长方体推动三锟闸绕 z 轴转动, 长方体的一个面紧贴地面, 另一个面紧贴墙面. 长方体足够高.

(1) 求满足以下条件的长方体的最大宽度 a_0: 人能完全通过闸机, 且长方体的厚度可以任意大.

(2) 接上问, 若长方体的宽度 $a > a_0$, 求满足以下条件的长方体的最大横截面积: 人能完全通过闸机.

(3) 若长方体的宽度为 a, 人在完全通过闸机的过程中需要克服三种摩擦: 来自墙面和地面的滑动摩擦力 (大小恒定为 f), 来自杆的滑动摩擦力 (摩擦系数为 μ), 来自三锟闸转轴的滑动摩擦力矩 (大小恒定为 K). 求人在缓慢地完全通过闸机的过程中, 来自杆的滑动摩擦耗散的能量为多少.

第 3 题　Hohmann 转移轨道

质量为 m 的物体一开始绕着质量为 $M \gg m$ 的星体在半径为 r_1 的圆轨道上运动. 某时其瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_1, 进入椭圆轨道. 在远心点处, 其再次瞬间加速, 使速度方向不变, 速率增大 Δv_2, 进入半径为 $r_2 = x r_1$ 的圆轨道上运动. 证明使 $\Delta v_1 + \Delta v_2$ 最大的 x 为 $5 + 4\sqrt{7}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)$.

第 4 题　电容势函数

有一平行板电容器. 定义变量 X 为极板间距, Q 为一个极板上的电荷量大小, F 为极板间作用力, V 为极板间的电势差. 电容 $C(X)$ 是已知函数 (不一定是反比例函数). 定义势函数 U 为电容器储存的能量.

(1) 证明 $\mathrm{d}U = V\,\mathrm{d}Q - F\,\mathrm{d}X$.

(2) 证明 $\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q = \left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F$.

(3) 若 $C(X)$ 是反比例函数, 在 F-X 图中分别作出等 V 过程和等 Q 过程的图像.

第 5 题　张拉整体

张拉整体 (tensegrity) 是一个由一些互不触碰的受压结构 (刚体) 以及连接它们的受拉结构 (绳) 组成的稳定结构. 其在建筑学, 工程学, 生物学等领域都有应用. 图 1 (Cmglee, 2012) 是一个例子, 其由顶部和底部各一个边长为 a 的正 n 边形 (图中 $n=4$) 组成. 记底面的正 n 边形为多边形 $\mathrm{A}_0\cdots\mathrm{A}_{n-1}$, 顶面上的正 n 边形为多边形 $\mathrm{B}_0\cdots\mathrm{B}_{n-1}$. A_0 与 A_n 是同一个点, B_0 与 B_n 是同一个点. 对每个 j, 用长度为 b 的轻绳连接 $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, 用长度为 l 的轻杆连接 $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_{j+1}$.

(1) 多边形 $\mathrm{A}_0\cdots\mathrm{A}_{n-1}$ 在旋转一定角度 (旋转的方向与 A_j 随 j 变化的环绕方向相同) 之后, 可以平移至与多边形 $\mathrm{B}_0\cdots\mathrm{B}_{n-1}$ 重合. 求该转角的最小正值.

(2) 记 $T(\mathrm{PQ})$ 为连接 P, Q 两点的绳或杆上的力, 正值表示张力, 负值表示压力. 已知, 对每个 j, $T(\mathrm{A}_j\mathrm{A}_{j+1})=T_0$. 对每个 j, 求 $T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j)$ 和 $T(\mathrm{A}_j\mathrm{B}_{j+1})$.

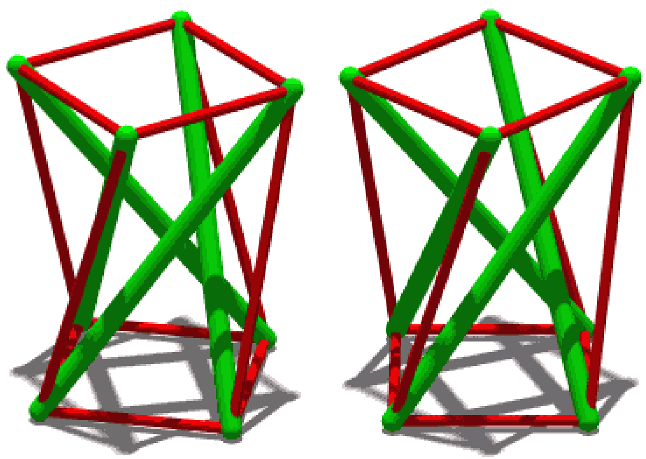


图 1

第 6 题　彩色视觉

视觉感受器 (眼睛) 中对彩色视觉至关重要的生物基础是视锥细胞 (corn cell). 在光线充足的情况下, 视锥细胞比视杆细胞 (rod cell) 更加活跃, 我们因此不考虑视杆细胞对视觉带来的影响. 某种动物的视网膜上有 n 种视锥细胞, 从而可以产生 n 色视觉 (n-chromacy) (人类有三色视觉 (trichromacy), 梅花雀有四色视觉 (tetrachromacy)[1], 青凤蝶 (*Graphium sarpedon*) 有十五色视觉[2]). 第 j 种视锥细胞对波长为 λ 的光的吸收率为 $f_j(\lambda)$, 其中 f_j 看作 $\mathbf{f}:(0,+\infty)\to$ 的第 j 个分量. 第 j 种视锥细胞在某种光刺激下的响应程度正比于它从中吸收的总功率. 视锥细胞在受到刺激后, 会将响应信号以电信号的形式告诉大脑, 大脑即可获得视网膜上某处的各种视锥细胞的响应程度 $\mathbf{c}\in[0,+\infty)^n$, 其中 $\mathbf{c}$ 的分量 c_j 为第 j 种视锥细胞的响应程度. 从而颜色可以与 $C:=[0,+\infty)^n$ 中的向量一一对应.

规定两种变换: $T_u:c_j\mapsto uc_j$ $(u>0)$ 以及 $S_v:c_j\mapsto v(c_j-l)+l$ $(0<v\le\frac{l}{c_{\min}})$, 其中 l 是 $\mathbf{c}$ 中最小分量 $c_{\min}$ 和最大分量 $c_{\max}$ 的平均值. 我们认为在这两种变换下 $\mathbf{c}$ 的色相保持不变. 我们关于色相建立一个等价关系: $\mathbf{c}\sim\mathbf{c}'$ 当且仅当存在 u,v, 使得 $\mathbf{c}=T_uS_v\mathbf{c}'$.

设某种设备 (不妨称为彩灯) 能发出固定的 n 种单色光, 其波长分别为 λ_k. 它能以任意不同的功率合成并发出这些单色光, 产生对视锥细胞的光刺激.

---

[1] Hart N. S., Partridge J. C., Bennett A. T., Cuthill I. C.. "Visual pigments, cone oil droplets and ocular media in four species of estrildid finch". *Journal of Comparative Physiology A*. Jul–Aug, 2000; **186** (7–8): 681–694. doi: 10.1007/s003590000121. PMID: 11016784. S2CID: 19458550.

[2] Chen P., Awata H., Matsushita A., Yang E., Arikawa K.. "Extreme Spectral Richness in the Eye of the Common Bluebottle Butterfly, *Graphium sarpedon*". *Frontiers in Ecology and Evolution*, vol. 4, pp. 18. Mar 8, 2016. doi: 10.3389/fevo.2016.00018. ISSN: 2296-701X.

彩虹中包含了所有的单色光.

(1) 设某个光刺激中能量随波长的分布为已知函数 $g(\lambda)$, 求该光刺激代表的颜色.

(2) 求彩灯能产生的所有的颜色的集合 $L \subseteq C$.

(3) 求彩虹中所有的颜色的集合 $R \subseteq C$.

(4) 若存在一组 $\{\lambda_k\}$, 使得 $L = C$. 求 f_j 需要满足的条件.

(5) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C$, 存在 $\mathbf{c}' \in R$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 $\mathbf{c}'$ 的方法. 若否, 是否对于几乎所有的 $\mathbf{c} \in C$, 不存在这样的 $\mathbf{c}'$?

(6) 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in C$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$? 若是, 给出构造 $\mathbf{c}'$ 的方法. 若否, 是否对于任意的 $\mathbf{c} \in R$, 存在 $\mathbf{c}' \in L$, 使得 $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$?

第 7 题　互 LC 震荡

我们知道电感有自感和互感. 但是, 虽然我们有 “互电容” 的概念, 其并不能与互感很好地对应. 我们现在来构造一种与互感相对应的概念 “互容”: 考虑四块的面积为 S 的平行极板, 依次编号为 a–d. 极板 a 和极板 c 看作一个电容器, 极板间距为 d_1; 极板 b 和极板 d 看作一个电容器, 极板间距为 d_2; 极板 b 和极板 c 的间距为 d.

(1) 求这两个电容器之间的互容系数.

(2) 设有两个 LC 电路, 电路中分别有电容 C_1 与 C_2, 电感 L_1 与 L_2. 两个电容之间的互容系数为 N, 两个电感之间的互感系数为 M. 设在 $t = 0$ 时两个电容分别带电 Q_{10} 与 Q_{20}, 求任意时刻 t 时两个电容所带的电荷量 $Q_1(t)$ 与 $Q_2(t)$.

第 8 题　球套黑球

本题中提到的黑体都是余弦辐射体. 将一个热容为 C 的半径为 r 的均匀的球形的黑体 A 放在一个半径为 R 的均匀的薄球壳 B 内. 两个球心的距离为 $d < R - r$. 在 $t = 0$ 时, A 的温度为 T_0. A 内部的热传导很快.

(1) B 是热容为 D, 初始温度为 S_0 的黑体. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$.

(2) B 的内壁是可以完全反射热辐射的镜面. 求 t 时刻 A 的温度 $T(t)$.

参考答案

第 1 题　太空跳绳

(1) 因为绳子的形状是具有最小势能的形状, 所以本题即求解最优化问题

$$\min_{y\in C^1[-b/2,b/2]} \quad \int_{-b/2}^{b/2} -\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x\cdot\omega^2\cdot y^2 \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad y(-b/2)=y(b/2)=0, \tag{2}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = l. \tag{3}$$

在目标函数中带上 Lagrange 乘子, 可以略去约束条件式 3, 而目标变为

$$\max_{y\in C^1[-b/2,b/2]} \quad \int_{-b/2}^{b/2} y^2\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x - \lambda\left(\int_{-b/2}^{b/2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x - l\right) \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\quad y(-b/2)=y(b/2)=0. \tag{5}$$

定义 Lagrangian

$$\mathcal{L} := \left(y^2-\lambda\right)\sqrt{1+y'^2}. \tag{6}$$

代入 Euler–Lagrange 方程后化简可得

$$2y\left(1+y'^2\right) = \left(y^2-\lambda\right)y''. \tag{7}$$

进行变换 $p := y'$ 后可得

$$2y\left(1+p^2\right) = \left(y^2-\lambda\right)p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{8}$$

分离变量并积分可得

$$\ln\left(1+p^2\right) = 2\ln\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}, \tag{9}$$

其中 $y_0 := y(0) > 0$, $a := \sqrt{\lambda} > y_0$. 回代 $p = y'$, 再次分离变量并积分可得

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}} = \pm x. \tag{10}$$

式 10 给出描述绳子形状的方程.

约束条件 $y(-b/2)=y(b/2)=0$ 给出

$$b = 2\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}}. \tag{11}$$

绳子上的长度微元

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{a^2-y^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{12}$$

从而

$$l = 2\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{13}$$

式 11 与式 13 隐式给出了式 10 中的参数 a 和 y_0.

(2)

$$E_\mathrm{k}=\int_{x=-b/2}^{b/2}\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s\cdot\omega^2y^2=\frac{m\omega^2}{l}\int_0^{y_0}\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}. \tag{14}$$

(3) 质心位置为

$$y_\mathrm{c}=\frac{1}{m}\int_{x=-b/2}^{b/2}y\cdot\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s=\frac{2}{l}\int_0^{y_0}\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2-y^2}\right)^2}}=\frac{y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{l}. \tag{15}$$

绳子受到的合力

$$F=m\omega^2y_\mathrm{c}=\frac{m\omega^2y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{l}. \tag{16}$$

在 $x=\pm b/2$ 处曲线的切线斜率

$$y'(\pm b/2)=\mp\tan\theta=\mp\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-y_0^2}\right)^2-1}, \tag{17}$$

从而固定点处对绳子的拉力大小

$$T_{\pm b/2}=\frac{F}{2\sin\theta}=\frac{m\omega^2y_0\sqrt{2a^2-y_0^2}}{2l\sqrt{1-\left(\frac{a^2-y_0^2}{a^2}\right)^2}}=\frac{m\omega^2a}{2l}. $$ (18)

另: 此题可用受力法解.

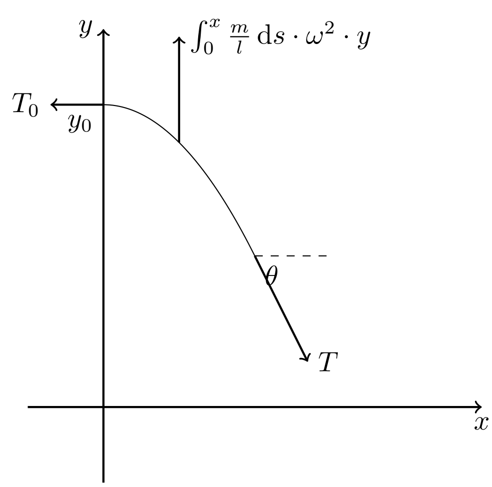


图 2

设绳子在 $x=0$ 处的张力为水平方向 T_0, 考虑 $[0,x]$ 上的一段绳子的受力平衡, 如图 2 所示. 考虑到 $\tan\theta=-y'$, 有

$$\int_0^x\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s\cdot\omega^2\cdot y=-T_0y'. \tag{19}$$

两边对 x 求导可得

$$\frac{m\omega^2}{l}\sqrt{1+y'^2}=-T_0y''. \tag{20}$$

变换 $p:=y'$, 分离变量得

$$\frac{p\,\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{m\omega^2}{T_0l}y\,\mathrm{d}y. \tag{21}$$

两边积分得

$$\sqrt{1+p^2}-1=-\frac{m\omega^2}{2T_0 l}\left(y^2-y_0^2\right). \tag{22}$$

代换 $a:=\sqrt{\frac{2T_0 l}{m\omega^2}+y_0^2}$ 可将式 22 变为与式 9 等价的形式.

第 2 题　地铁站闸机

第 3 题　Hohmann 转移轨道

物体的速度变化的全过程为

$$\underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_1}}}_{\text{圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_1} \underbrace{\sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2}+\frac{2GM}{r_1}} \to \sqrt{-\frac{2GM}{r_1+r_2}+\frac{2GM}{r_2}}}_{\text{椭圆轨道}} \xrightarrow{\Delta v_2} \underbrace{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}_{\text{圆轨道}}. \tag{1}$$

于是

$$\Delta v_1+\Delta v_2 \propto f(x):=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}-1+\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{2}{x\,(1+x)}}. \tag{2}$$

为了使 $\Delta v_1+\Delta v_2$ 极大,

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+2x)\,x^{-\frac{3}{2}}\,(1+x)^{-\frac{3}{2}}=0. \tag{3}$$

在式 3 两边乘 $2x^{\frac{3}{2}}\,(1+x)^{\frac{3}{2}}$ 可得

$$\sqrt{2}\,(1+3x)-(1+x)^{\frac{3}{2}}=0. \tag{4}$$

此方程可约化为多项式方程

$$P(x):=x^3-15x^2-9x-1=0. \tag{5}$$

注意到

$$\cos 3y=\cos y\left(2\cos^2 y-1\right)-2\cos y\left(1-\cos^2 y\right)=4\cos^3 y-3\cos y,$$

所以

$$\cos^3\frac{y}{3}=\frac{1}{4}\left(\cos y+3\cos\frac{y}{3}\right).$$

令 $x^\star:=5+4\sqrt{7}\cos\!\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)$, 则

$$\begin{aligned}
(x^\star-5)^3 &= 16\cdot 7^{\frac{3}{2}}\left(\cos\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}+3\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{37}\right)\right) &(6)\\
&= 16\cdot 7^{\frac{3}{2}}\left(\frac{37}{2\cdot 7^{\frac{3}{2}}}+3\cdot\frac{x^\star-5}{4\sqrt{7}}\right) &(7)\\
&= 84x^\star-124. &(8)
\end{aligned}$$

由此可得 $P(x^\star)=0$.

第 4 题　电容势函数

(1) $V\,\mathrm{d}Q$ 是电源对电容所做的功, $-F\,\mathrm{d}X$ 是外力对电容所做的功.

(2) 令 $H:=U+FX$, 则

$$\mathrm{d}H=V\,\mathrm{d}Q+X\,\mathrm{d}F. \tag{1}$$

从而

$$V=\left(\frac{\partial H}{\partial Q}\right)_F,\qquad X=\left(\frac{\partial H}{\partial F}\right)_Q. \tag{2}$$

由于求偏导次序可交换, $\frac{\partial^2 H}{\partial Q\partial F}=\frac{\partial^2 H}{\partial F\partial Q}$, 因此

$$\left(\frac{\partial V}{\partial F}\right)_Q=\left(\frac{\partial X}{\partial Q}\right)_F. \tag{3}$$

(3) 设 $C(X)=\alpha/X$, 则由 $Q=CV$ 可得状态方程

$$QX=\alpha V. \tag{4}$$

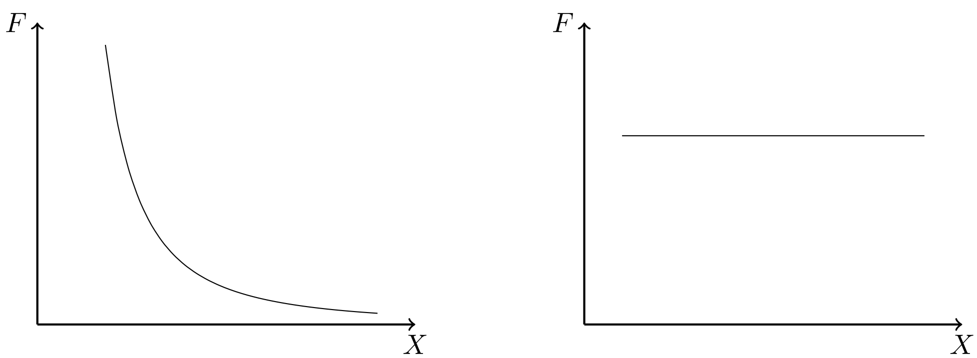
内能表达式为

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{Q^2X}{2\alpha}. \tag{5}$$

于是

$$F=-\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_Q=\frac{Q^2}{2\alpha}=\frac{\alpha V^2}{2X^2}. \tag{6}$$

于是可以在 F-X 图作出如图 3 所示的曲线. 图 3a 与图 3b 分别是等 V 过程与等 Q 过程的图像.



(a) 等 V 过程　　(b) 等 Q 过程

图 3

第 5 题　张拉整体

第 6 题　彩色视觉

第 7 题　互 LC 震荡

第 8 题　球套黑球