Исследование одной двумерной системы автономных дифференциальных уравнений с малым параметром возмущения

Василий Горелов

5 июля 2023 г.

1 Вступление

Имеется первоначальная система без возмущений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2 y. \end{cases} \tag{1}$$

После добавления определенного малого возмущения 3-его порядка изначальная система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y - \epsilon x^3, \\ \dot{y} = -x - y + x^2 y + \epsilon y^3. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку система (1) была достаточно изучена в предыдущей работе, то сосредоточимся на возмущенной системе (2).

Для начала составим интегрируемую комбинацию. Используя те же соображения, что и в работе [1], получаем два соотношения:

$$\dot{xy} = (x^2 - y^2)(xy(1-\epsilon) - 1), \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2)(1 - \epsilon(x^2 + y^2)).$$

Подставляя отсюда $x^2 - y^2$ из второго уравнения в первое получаем интегрируемую комбинацию $d(x^2+y^2)2^{-1}(1-\epsilon(x^2+y^2))^{-1} = d(xy)(xy(1-\epsilon)-1)^{-1}$,или $xy(1-\epsilon) = 1$, или $\epsilon(x^2+y^2) = 1$.

Интегрируя, получаем первый интеграл системы (2)

$$(1-\epsilon)^{-1} \ln |(1-\epsilon)xy - 1| + 2^{-1}\epsilon^{-1} \ln |\epsilon(x^2+y^2) - 1| = C \tag{3}$$

Минуя все вычисления, имеем семь особых точек системы (2) при $\epsilon > 0$: $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2(1+\epsilon)^{-1}}, \pm\sqrt{2(1+\epsilon)^{-1}})$, ()

Список литературы

[1] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.