

В работе рассматривается двумерная автономная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y. \end{cases} \quad (1)$$

Для системы (1) был найден первый интеграл (см. [1], [2]), но общее решение найдено не было. Для нахождения общего решения был использован метод, который основывается на построении периодической функции, опираясь на обратную функцию к неберущемуся интегралу. Такой подход к решению систем дифференциальных уравнений представляет не только теоретический интерес, но также может иметь практическое применение в различных областях, где возникают аналогичные задачи.

Рассматриваемый пример можно использовать для решения задач, связанных с 16-ой проблемой Гильберта, а точнее, локальной проблемой Арнольда-Гильберта. Для этого правую часть системы (1) следует рассматривать как невозмущенную часть системы, зависящей от малого автономного или периодического возмущения с последующим исследованием числа сохранившихся предельных циклов в случае автономного возмущения или инвариантных торов в случае периодического.

Рассмотрим систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y. \end{cases}$$

Составим интегрируемую комбинацию.

Реализуя общую идею убирать в правых частях какие-то слагаемые, можно избавиться от x в первом уравнении и от $-y$ во втором. Попробовать это сделать имеет смысл, так как в левой части возникнет формула производной произведения. Имеем:

$$y\dot{x} + x\dot{y} = y^2 - xy^3 - x^2 + x^3y \Leftrightarrow (xy)' = (x^2 - y^2)(xy - 1).$$

Само по себе это уравнение ничего пока не дало, так как в правой части помимо произведения есть еще разность квадратов. Поэтому избавимся в правой части системы от кубических слагаемых тем более, что слева появляется производная суммы квадратов. Имеем:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2). \quad (2)$$

Подставляя отсюда $x^2 - y^2$ в первое уравнение, получаем интегрируемую комбинацию $(xy)' = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(xy - 1)/2$.

Следовательно, $xy = 1$ или $2(xy - 1)^{-1}d(xy) = d(x^2 + y^2)$.

Интегрируя, получаем $2 \ln |xy-1| - x^2 - y^2 = C$ — первый интеграл системы, который удобно записать в виде:

$$xy - 1 = Ce^{(x^2+y^2)/2}, \quad (3)$$

поскольку в (3) входит решение $xy = 1$.

Подставляя $xy = 1$ в первое уравнение системы (1) получаем уравнение $\dot{x} = x$, из которого находим однопараметрическое семейство решений

$$x(t) = Ce^t, \quad y(t) = C^{-1}e^{-t}.$$

К сожалению, еще один первый интеграл, а с ним вместе и общее решение системы, найти при помощи создания интегрируемой комбинации не удастся. Поэтому будем искать общее решение другим способом.

Решая систему $-xy^2 + x + y = 0$ и $-x - y + x^2y = 0$, находим три особые точки системы (1) : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Чтобы найти ограничения на константу C в (3), исследуем функцию

$$C(x, y) = (xy - 1)e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad (4)$$

причем $C(0, 0) = 1$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = e^{-2}$.

Градиент функции (4) $\nabla C(x, y) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right)$ имеет вид:
 $\nabla C(x, y) = (e^{-(x^2+y^2)/2}(-x^2y + x + y), e^{-(x^2+y^2)/2}(-y^2x + x + y)).$

Следовательно, $\nabla C(x, y) = 0$ только в особых точках.

Рассмотрим замкнутую окрестность $\bar{V}_2(O) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ начала координат $O = (0, 0)$. Поскольку все особые точки принадлежат этому компакт, для нахождения максимального и минимального значений функции (4) на $\bar{V}_2(O)$ достаточно сравнить значения функции в особых точках (4) с ее значениями на границе $\partial \bar{V}_2(O) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$. Для этого в (4) удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (5)$$

получая функцию $C(r, \theta) = \left(\frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta - 1 \right) e^{-r^2/2}$.

Заметим, что:

$$C_*(r) = \left(-\frac{1}{2}r^2 - 1 \right) e^{-r^2/2} \leq C(r, \theta) \leq C^*(r) = \left(\frac{1}{2}r^2 - 1 \right) e^{-r^2/2}. \quad (6)$$

Пусть $r \geq 2$. Тогда $C_*(r) > 0$, $C_*(r)' > 0$ и $C_*(2) = -3e^{-2} \leq C_*(r) < 0$. Аналогично, $C^*(r) > 0$, $C^*(r)' \leq 0$ и $0 < C^*(r) \leq C^*(2) = e^{-2}$. Отсюда следует:

$$-3e^{-2} \leq C_*(r) < C(x, y) = C(r, \theta) < C^*(r) \leq e^{-2}.$$

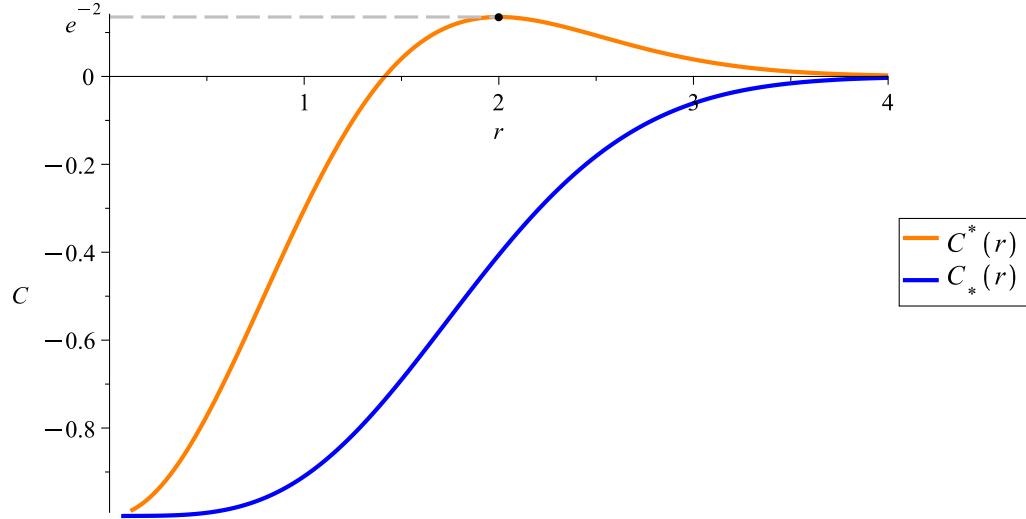


Рис. 1. Графики $C_*(r)$ и $C^*(r)$

Таким образом, для всех $(x, y) \in \bar{V}_2(O)$ верно, что $-1 \leq C(x, y) \leq e^{-2}$.

Пусть теперь $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{V}_2(O)$. Поскольку $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $-1 \leq -3e^{-2} < C(r, \theta) = C(x, y) \leq e^{-2}$, т.е. для всех точек (x, y) верно неравенство $-1 < C(x, y) \leq e^{-2}$.

В результате, $C(x, y) \in [-1, e^{-2}]$ для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Исследуем линии уровня первого интеграла (3):

- 1) при $C = -1$ имеем особую точку $(0, 0)$;
- 2) для любого $C \in (-1, 0)$ имеем цикл расположенный в области $xy < 1$;
- 3) при $C = 0$ имеем гиперболу $xy = 1$, объединяющую две траектории: $y = x^{-1}$ при $x > 0$ и $y = x^{-1}$ при $x < 0$;
- 4) для любого $C \in (0, e^{-2})$ имеем два симметричных цикла: первый в области $xy > 1$ и $x < 0$, второй в области $xy > 1$ и $x > 0$, охватывающие особые точки $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ соответственно.
- 5) при $C = e^{-2}$ имеем особые точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

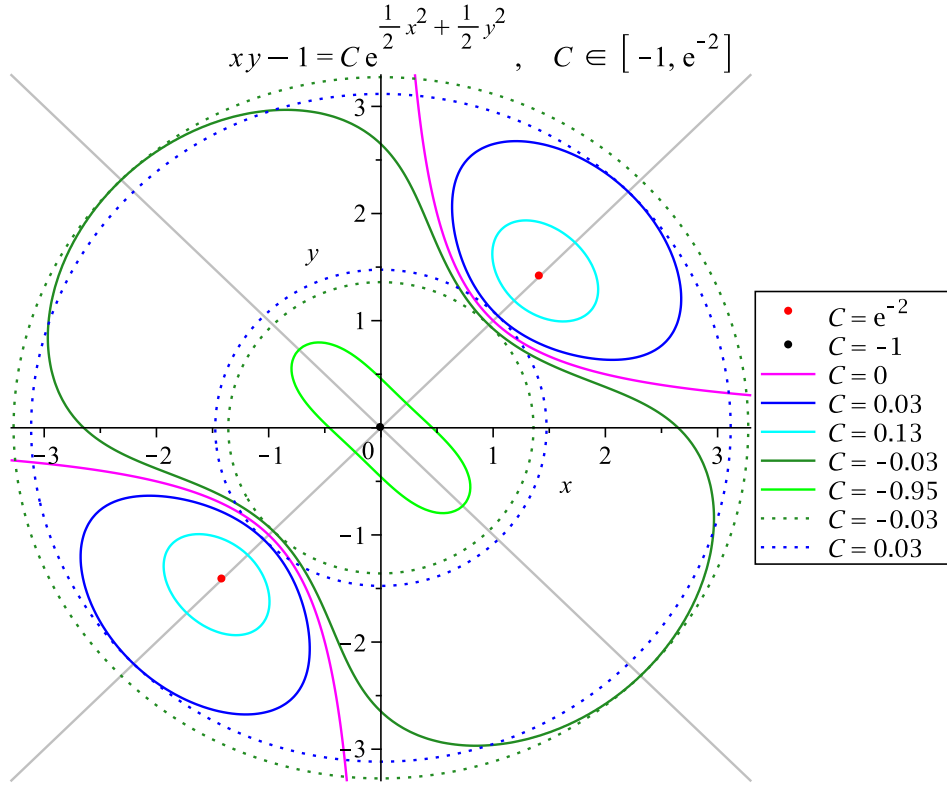


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1)

Первый интеграл (3) после полярной замены (5) примет вид:

$$2^{-1}r^2 \sin(2\theta) - 1 = C e^{r^2/2}, \text{ или } \sin(2\theta) = 2r^{-2}(C e^{r^2/2} + 1), \quad (7)$$

а уравнение (10) сведётся к уравнению

$$\dot{r}^2 = 2r^2 \cos(2\theta), \text{ или } \dot{r} = r \cos(2\theta). \quad (8)$$

Поскольку $\cos(2\theta) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}$, то после подстановки (7) в (8) для всякого $C \in [-1; e^{-1}]$ получаем уравнения с разделяющимися переменными:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{r^2 - 4r^{-2}(C e^{r^2/2} + 1)^2}. \quad (9)$$

Найдем область определения D функции

$$f(r, C) = (r^2 - 4r^{-2}(C e^{r^2/2} + 1)^2)^{-1/2}.$$

Из неравенств $r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2 > 0$ и $r > 0$ вытекает, что $r^2 > 2|Ce^{r^2/2} + 1|$.

Таким образом, D — это область заключенная между двумя кривыми, которые задаются функциями из (6): $C^*(r)$ и $C_*(r)$ (см. рис. 1).

Найдем область определения функции $f(r, C)$ по переменной r при фиксированной константе C .

Функция $C_*(r)$ строго монотонно возрастает при $r > 0$, поэтому существует обратная функция $(C_*)^{-1}(C)$ при $C \in (-1, 0)$.

Функция $C^*(r)$ строго монотонно возрастает при $r \in (0, 2)$ и строго монотонно убывает при $r > 2$.

Положим $C_+^*(r) = C^*(r)$ при $r \in (0, 2)$ и $C_-^*(r) = C^*(r)$ при $r > 2$. Тогда существуют обратные функции $(C_+^*)^{-1}(C)$ при $C \in (-1, e^{-2})$ и $(C_-^*)^{-1}(C)$ при $C \in (0, e^{-2})$. Пусть:

$$r_*(C) = (C_+^*)^{-1}(C) \text{ при } C \in (-1, e^{-2}), \quad r^*(C) = \begin{cases} (C_*)^{-1}(C) & \text{при } C \in (-1, 0), \\ (C_-^*)^{-1}(C) & \text{при } C \in (0, e^{-2}). \end{cases}$$

Таким образом, функция $f(r, C)$ определена для любого $r \in (r_*(C), r^*(C))$.

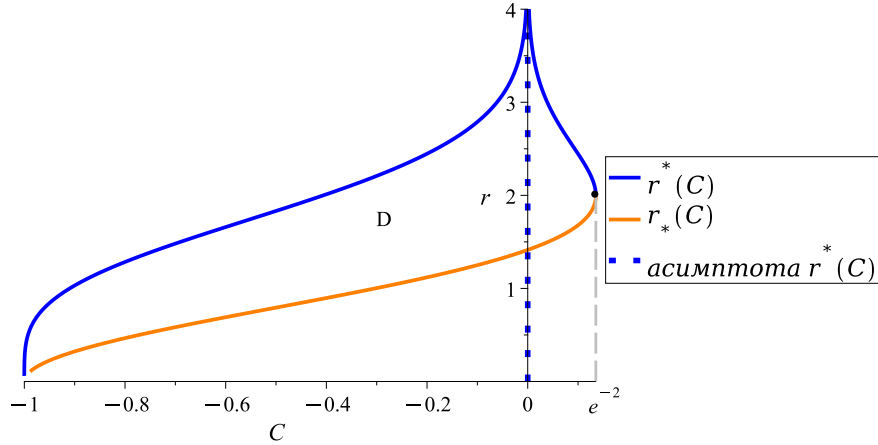


Рис. 3. Графики $r_*(C)$ и $r^*(C)$

Случаи когда константа C равна 0, -1 или e^{-2} тривиальны и в дальнейшем рассматриваться не будут (см. рис. 2).

Для всякого $C \in (-1; e^{-1}) \setminus 0$ и $r, r_0 \in (r_*(C), r^*(C))$ положим:

$$F_+(r, r_0, C) = \int_{r_0}^r f(\xi, C) d\xi, \quad F_-(r, r_0, C) = -F_+(r, r_0, C).$$

Заметим, что функция $F_+(r, r_0, C)$ строго монотонно возрастает по r , так как $f(r, C) > 0$.

Аналогично, $F_-(r, r_0, C)$ строго монотонно убывает по r .

Тогда для любого $C \in (-1; e^{-1}) \setminus 0$ общими решениями уравнений (9) будут функции:

$$\begin{cases} t(r, r_0, C) = F_+(r, r_0, C) \\ t(r, r_0, C) = F_-(r, r_0, C) \end{cases}$$

Введем обратные функции:

$$r_+(t, r_0, C) = F_+^{-1}(t, r_0, C), \quad r_-(t, r_0, C) = F_-^{-1}(t, r_0, C).$$

Проведем анализ поведения радиус-вектора на фазовых траекториях системы (1). Рассмотрим два случая:

- 1) пусть $C \in (0, e^{-2})$. Для определенности возьмем цикл в области $xy > 1$ и $x > 0$. Тогда после замены координат в уравнении (3) на $x = y = r \cos \pi/4$ получим $r = \sqrt{2Ce^{r^2/2} + 2}$, что есть уравнение, которое задает $r_*(C)$ и $r^*(C)$, т.е. максимум и минимум радиуса решения, которое движется по заданной траектории достигаются в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = x$ (см. рис. 2). Аналогично для цикла в области $xy > 1$ и $x < 0$;
- 2) при $C \in (-1, 0)$ будем рассматривать две замены: $x = y = r \cos \pi/4$, и $x = r \cos 3\pi/4$, $y = -r \cos 3\pi/4$. Следовательно, минимум радиуса достигается в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = x$, а максимум в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = -x$ (см. рис. 2).

Утверждение. *Несобственный интеграл $F_+(r^*(C), r_0, C)$ сходится.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $F_+(r^*(C), r_0, C)$ расходится, т.е. точка максимума не достигается за конечное время. Следовательно, не существует периодического решения. С другой стороны, поскольку решение определено на всей оси времени (см. [1]) и находится на замкнутой кривой, то имеем периодическое решение. Противоречие. Аналогично для $F_-(r_*(C), r_0, C)$.

Таким образом, функции $F_{\pm}(r, r_0, C)$ существуют и конечны для $r \in [r_*(C), r^*(C)]$, $r_0 \in [r_*(C), r^*(C)]$.

Пусть $\omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C)$. Тогда при $C < 0$ период решения $\Omega(C) = 2F_+(r^*(C), r_*(C), C) + 2F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 4\omega(C)$, если $C > 0$, то $\Omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C) + F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 2\omega(C)$.

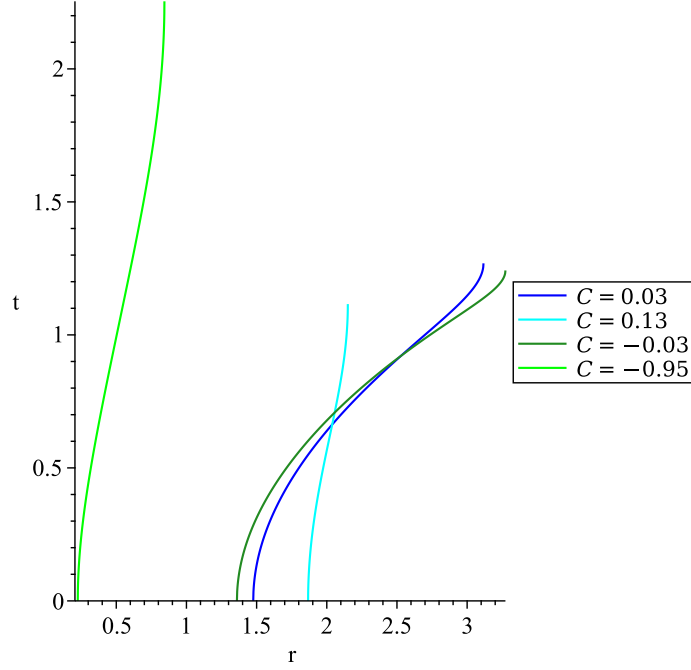


Рис. 4. Графики $F_+(r, r_*(C), C)$

Построим периодическое решение $R(t, r_0, C)$ из функций $r_+(t, r_0, C)$ и $r_-(t, r_0, C)$ на всем промежутке времени. Известно, что $r_+(t, r_0, C)$ монотонно возрастает в зависимости от t , а $r_-(t, r_0, C)$ монотонно убывает. Рассмотрим два случая:

- 1) пусть $\dot{r} < 0$, т.е. радиус убывает. Тогда время за которое точка дойдёт до минимума радиуса $\tau^-(r_0, C) = F_-(r_*(C), r_0, C)$. Имеем:

$$R_-(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} r_+(t - 2\tau^-(r_0, C) - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ \quad t \in (2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ r_-(t - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ \quad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z};$$

- 2) при $\dot{r} > 0$ радиус будет возрастать. Пусть время за которое точка дой-

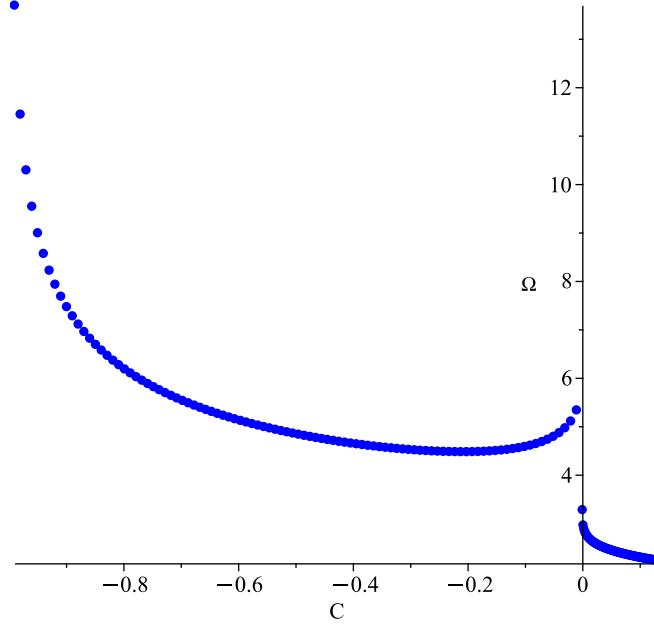


Рис. 5. График $\Omega(C)$

дёт до максимума радиуса $\tau^+(r_0, C) = F_+(r^*(C), r_0, C)$. Тогда:

$$R_+(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} r_+(t - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ \quad t \in ((2k - 1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \\ r_-(t - 2\tau^+(r_0, C) - 2k\omega(C) - \omega(C) - t_0, r^*(C), C), \\ \quad t \in (2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; (2k + 1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \end{cases} \\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим зависимость производной радиуса от угла в равенстве (8). Тогда $\dot{r} < 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta < 0$ и $\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta > 0$. Имеем:

$$\dot{r} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n < \theta < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi m < \theta < \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к уравнению (7). Пусть $h(r, C) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)$. Рассмотрим два случая:

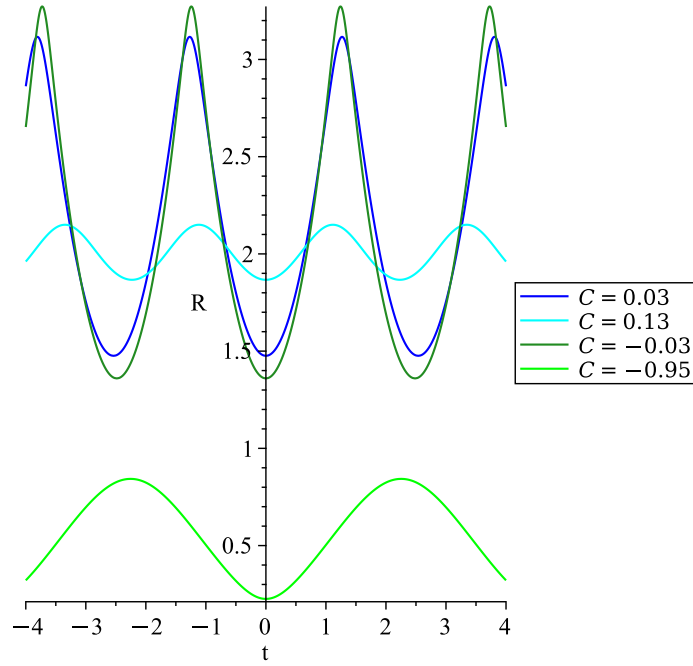


Рис. 6. Графики $R_+(t, 0, r_*(C), C)$

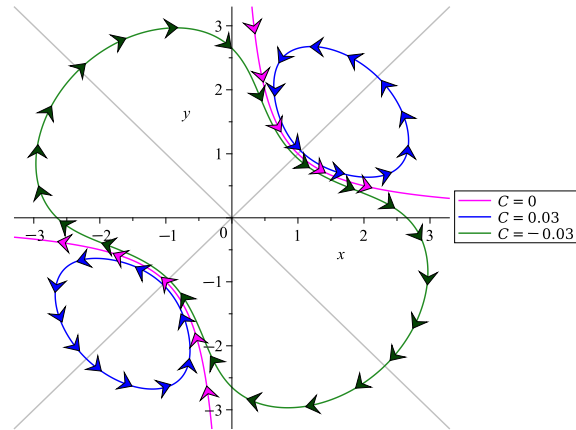


Рис. 7. Направление движения на кривых

1) при $C > 0$ возьмём для определённости цикл в области $xy > 1$ и

$x > 0$. Из уравнения (7) имеем: $\theta(r, C) = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin h(r, C) + \frac{\pi}{2}k$. Более того, в данной области угол $\theta \in (0, \pi/2)$. Следовательно, $\theta_+(r, C) = \frac{1}{2} \arcsin h(r, C)$, или $\theta_-(r, C) = -\frac{1}{2} \arcsin h(r, C) + \frac{\pi}{2}$. Заметим, что $\theta_-(r, C)$ показывает изменение угла для верхней половины траектории, где $\dot{r} > 0$, а $\theta_+(r, C)$ - для нижней, где $\dot{r} < 0$. Для случая, когда радиус начальной точки убывает имеем:

$$\Theta_-^+(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_+(R_-(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in (2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z},$$

если радиус возрастает имеем:

$$\Theta_+^+(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in (2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z};$$

- 2) при $C < 0$ функция $h(r, C)$ монотонно убывает и неограничена. Следовательно, угол $\theta \in [-\pi/4, 7\pi/4]$. Рассмотрим случай при угле начальной точки $\theta_0 \in [-\pi/4; 3\pi/4]$. Поскольку имеем периодическое решение с периодом 4ω , то, если радиус начальной точки убывает, получаем:

$$\Theta_-^-(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_+(R_-(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in (4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_+(R_-(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z},$$

если начальный радиус возрастает получаем:

$$\Theta_+^-(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in (4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ \quad t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ \quad t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t, t_0, r_0, c), C), \\ \quad t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}.$$

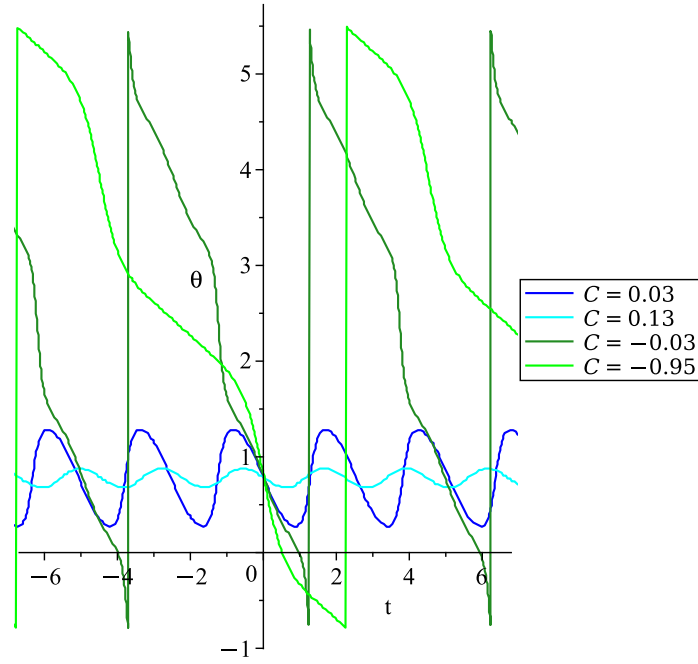


Рис. 8. Графики $\Theta_{\pm}^{\pm}(t, 0, r_*(C), C)$

Запишем решение задачи Коши для любых начальных данных (x_0, y_0, t_{init}) . Тогда $r_{init} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\theta_0 = \arctan 2(y_0, x_0)$ (известная функция), $C_0 = (x_0 y_0 - 1)e^{(x_0^2 + y_0^2)/2}$. Рассмотрим все случаи:

- 1) при $C_0 = 0$ имеем решение $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{t-t_{init}}, x_0^{-1} e^{-t+t_{init}})$, $t \in \mathbb{R}$;

2) при $C_0 = -1$ $(x(t), y(t)) = (0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$;

4) при $C_0 = e^{-2}$ имеем два случая. Если $x_0 > 0$, то $(x(t), y(t)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$. Если $x_0 < 0$, то $(x(t), y(t)) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$;

5) при $C_0 \in (0, e^{-2})$ имеем четыре случая:

$$\begin{aligned} \text{если } \theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]: & \begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (3\pi/4, \pi) \cup (-\pi, -3\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

6) аналогично, для $C_0 \in (-1, 0)$ имеем четыре случая:

$$\begin{aligned} \text{если } \theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]: & \begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (3\pi/4, \pi] \cup (-\pi, -3\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ \text{если } \theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]: & \begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Таким образом, мы получили решение задачи Коши для произвольных начальных данных (x_0, y_0, t_{init}) .

После добавления определенного малого возмущения 3-его порядка изначальная система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y - \epsilon x^3, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y + \epsilon y^3. \end{cases} \quad (10)$$

Для начала составим интегрируемую комбинацию. Используя те же соотношения, что и в работе [1], получаем два соотношения:

$$\dot{x}y = (x^2 - y^2)(xy(1 - \epsilon) - 1), \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2)(1 - \epsilon(x^2 + y^2)).$$

Подставляя отсюда $x^2 - y^2$ из второго уравнения в первое получаем интегрируемую комбинацию $d(x^2 + y^2)2^{-1}(1 - \epsilon(x^2 + y^2))^{-1} = d(xy)(xy(1 - \epsilon) - 1)^{-1}$, или $xy(1 - \epsilon) = 1$, или $\epsilon(x^2 + y^2) = 1$.

Интегрируя, получаем первый интеграл системы (10)

$$(1 - \epsilon)^{-1} \ln |(1 - \epsilon)xy - 1| + 2^{-1} \epsilon^{-1} \ln |\epsilon(x^2 + y^2) - 1| = C \quad (11)$$

Минуя все вычисления, имеем семь особых точек системы (10) при $\epsilon > 0$: $(0, 0)$, $(u - v, u + v)$, $(v - u, -u - v)$, $(u + v, u - v)$, $(-u - v, v - u)$, $(\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2}, \sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2})$, $(-\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2}, -\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2})$, где $u = \frac{1}{2}(\epsilon^{-1} + 2(1 - \epsilon)^{-1})^{1/2}$, $v = \frac{1}{2}(\epsilon^{-1} - 2(1 - \epsilon)^{-1})^{1/2}$.

Список литературы

- [1] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.
- [2] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.