В работе рассматривается двумерная автономная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2 y. \end{cases} \tag{1}$$

Для системы (1) был найден первый интеграл (см. [1], [2]), но общее решение найдено не было. Для нахождения общего решения был использован метод, который основывается на построении периодической функции, опираясь на обратную функцию к неберущемуся интегралу. Такой подход к решению систем дифференциальных уравнений представляет не только теоретический интерес, но также может иметь практическое применение в различных областях, где возникают аналогичные задачи.

Рассматриваемый пример можно использовать для решения задач, связанных с 16-ой проблемой Гильберта, а точнее, локальной проблемой Арнольда-Гильберта. Для этого правую часть системы (1) следует рассматривать как невозмущенную часть системы, зависящей от малого автономного или периодического возмущения с последующим исследованием числа сохранившихся предельных циклов в случае автономного возмущения или инвариантых торов в случае периодического.

Рассмотрим систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2 y. \end{cases}$$

Составим интегрируемую комбинацию.

Реализуя общую идею убирать в правых частях какие-то слагаемые, можно избавиться от x в первом уравнении и от $-y$ во втором. Попробовать это сделать имеет смысл, так как в левой части возникнет формула производной произведения. Имеем:

$y\dot{x} + x\dot{y} = y^2 - xy^3 - x^2 + x^3 y \iff \dot{(xy)} = (x^2 - y^2)(xy - 1).$

Само по себе это уравнение ничего пока не дало, так как в правой части помимо произведения есть еще разность квадратов. Поэтому избавимся в правой части системы от кубических слагаемых тем более, что слева появляется производная суммы квадратов. Имеем:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2). \tag{2}$$

Подставляя отсюда $x^2 - y^2$ в первое уравнение, получаем интегрируемую комбинацию $\dot{(xy)} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(xy - 1)/2$.

Следовательно, $xy = 1$ или $2(xy-1)^{-1} d(xy) = d(x^2 + y^2)$.

Интегрируя, получаем $2\ln|xy-1|-x^2-y^2=C$ — первый интеграл системы, который удобно записать в виде:

$$xy-1=Ce^{(x^2+y^2)/2}, \tag{3}$$

поскольку в (3) входит решение $xy=1$.

Подставляя $xy=1$ в первое уравнение системы (1) получаем уравнение $\dot{x}=x$, из которого находим однопараметрическое семейство решений

$$x(t)=Ce^t,\ y(t)=C^{-1}e^{-t}.$$

К сожалению, еще один первый интеграл, а с ним вместе и общее решение системы, найти при помощи создания интегрируемой комбинации не удается. Поэтому будем искать общее решение другим способом.

Решая систему $-xy^2+x+y=0$ и $-x-y+x^2y=0$, находим три особые точки системы (1) : $(0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Чтобы найти ограничения на константу C в (3), исследуем функцию

$$C(x,y)=(xy-1)e^{-(x^2+y^2)/2}, \tag{4}$$

причем $C(0,0)=1, C(\sqrt{2},\sqrt{2})=C(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=e^{-2}$.

Градиент функции (4) $\nabla C(x,y)=\left(\dfrac{\partial C}{\partial x},\dfrac{\partial C}{\partial y}\right)$ имеет вид:
$\nabla C(x,y)=(e^{-(x^2+y^2)/2}(-x^2y+x+y),\ e^{-(x^2+y^2)/2}(-y^2x+x+y))$.

Следовательно, $\nabla C(x,y)=0$ только в особых точках.

Рассмотрим замкнутую окрестность $\overline{V}_2(O)=\{(x,y): x^2+y^2\le 4\}$ начала координат $\mathrm{O}=(0,0)$. Поскольку все особые точки принадлежат этому компакту, для нахождения максимального и минимального значений функции (4) на $\overline{V}_2(O)$ достаточно сравнить значения функции в особых точках (4) с ее значениями на границе $\partial\overline{V}_2(O)=\{(x,y): x^2+y^2=4\}$. Для этого в (4) удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \end{cases} \tag{5}$$

получая функцию $C(r,\theta)=\left(\dfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta-1\right)e^{-r^2/2}$.

Заметим, что:

$$C_*(r)=\left(-\frac{1}{2}r^2-1\right)e^{-r^2/2}\le C(r,\theta)\le C^*(r)=\left(\frac{1}{2}r^2-1\right)e^{-r^2/2}. \tag{6}$$

Пусть $r \geq 2$. Тогда $C_*(r) > 0$, $C_*(r)' > 0$ и $C_*(2) = -3e^{-2} \leq C_*(r) < 0$. Аналогично, $C^*(r) > 0$, $C^*(r)' \leq 0$ и $0 < C^*(r) \leq C^*(2) = e^{-2}$. Отсюда следует:

$$-3e^{-2} \leq C_*(r) < C(x,y) = C(r,\theta) < C^*(r) \leq e^{-2}.$$

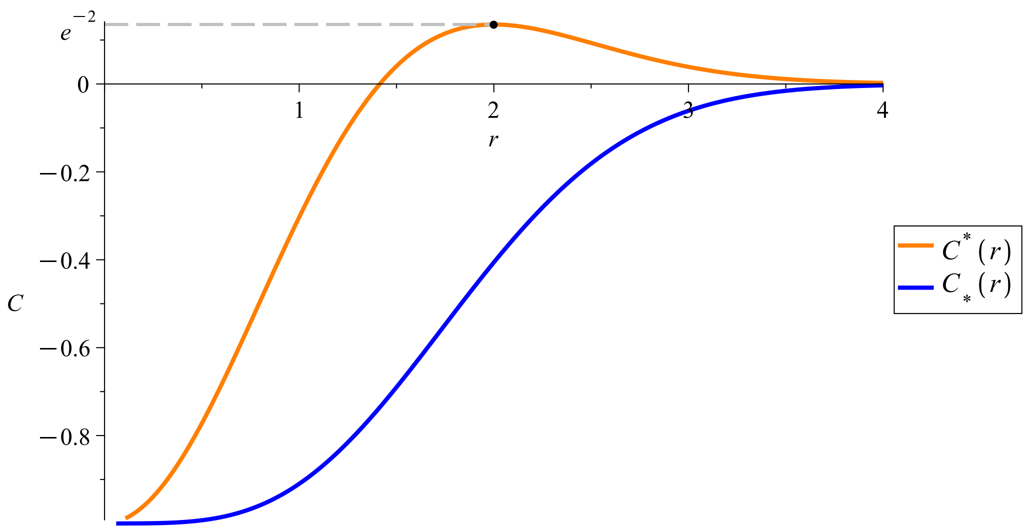

Рис. 1. Графики $C_*(r)$ и $C^*(r)$

Таким образом, для всех $(x,y) \in \overline{V}_2(O)$ верно, что $-1 \leq C(x,y) \leq e^{-2}$.

Пусть теперь $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{V}_2(O)$. Поскольку $2 < r = \sqrt{x^2+y^2}$, то $-1 \leq -3e^{-2} < C(r,\theta) = C(x,y) \leq e^{-2}$, т.е. для всех точек (x,y) верно неравенство $-1 < C(x,y) \leq e^{-2}$.

В результате, $C(x,y) \in [-1, e^{-2}]$ для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Исследуем линии уровня первого интеграла (3):

1) при $C = -1$ имеем особую точку $(0,\, 0)$;

2) для любого $C \in (-1,0)$ имеем цикл расположенный в области $xy < 1$;

3) при $C = 0$ имеем гиперболу $xy = 1$, объединяющую две траектории: $y = x^{-1}$ при $x > 0$ и $y = x^{-1}$ при $x < 0$;

4) для любого $C \in (0, e^{-2})$ имеем два симметричных цикла: первый в области $xy > 1$ и $x < 0$, второй в области $xy > 1$ и $x > 0$, охватывающие особые точки $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ соответственно.

5) при $C = e^{-2}$ имеем особые точки $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

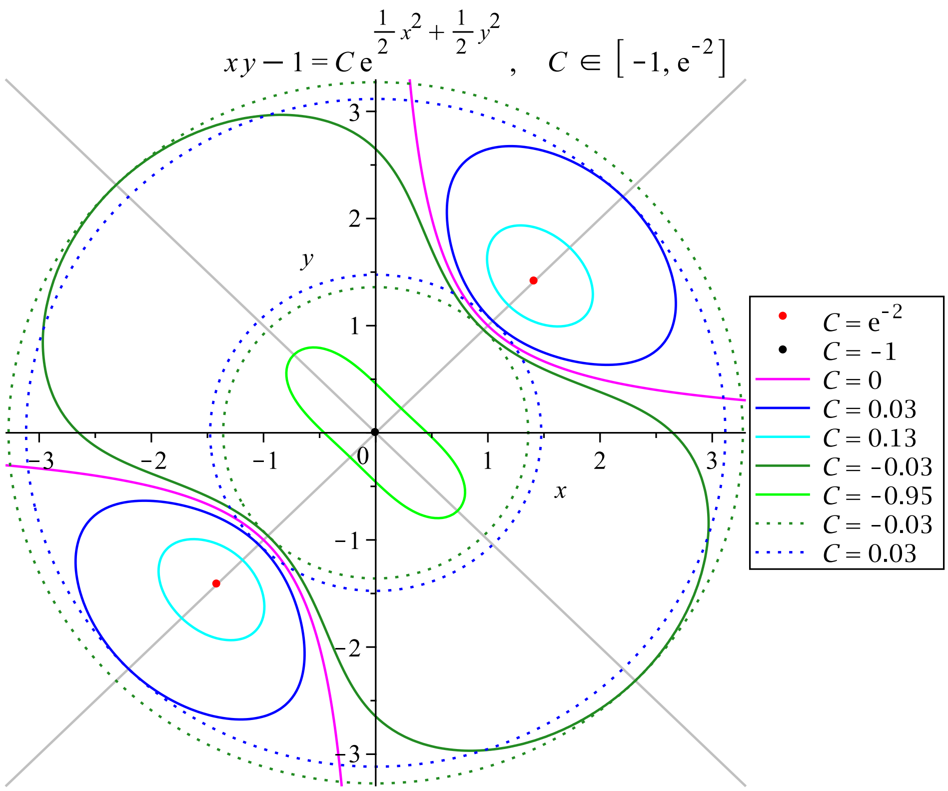

Рис. 2. Фазовый портрет системы (1)

Первый интеграл (3) после полярной замены (5) примет вид:

$$2^{-1}r^2\sin(2\theta) - 1 = Ce^{r^2/2}, \text{ или } \sin(2\theta) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1), \tag{7}$$

а уравнение (10) сведётся к уравнению

$$\dot{r}^2 = 2r^2\cos(2\theta), \text{ или } \dot{r} = r\cos(2\theta). \tag{8}$$

Поскольку $\cos(2\theta) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}$, то после подстановки (7) в (8) для вяского $C \in [-1; e^{-1}]$ получаем уравнения с разделяющимися переменными:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2}. \tag{9}$$

Найдем область определения D функции

$$f(r, C) = (r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2)^{-1/2}.$$

Из неравенств $r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2) > 0$ и $r > 0$ вытекает, что $r^2 > 2|Ce^{r^2/2} + 1|$.

Таким образом, D — это область заключенная между двумя кривыми, которые задаются функциями из (6): $C^*(r)$ и $C_*(r)$ (см. рис. 1).

Найдем область определения функции $f(r, C)$ по переменной r при фиксированной константе C.

Функция $C_*(r)$ строго монотонно возрастает при $r > 0$, поэтому существует обратная функция $(C_*)^{-1}(C)$ при $C \in (-1, 0)$.

Функция $C^*(r)$ строго монотонно возрастает при $r \in (0, 2)$ и строго монотонно убывает при $r > 2$.

Положим $C^*_+(r) = C^*(r)$ при $r \in (0, 2)$ и $C^*_-(r) = C^*(r)$ при $r > 0$. Тогда существуют обратные функции $(C^*_+)^{-1}(C)$ при $C \in (-1, e^{-2})$ и $(C^*_-)^{-1}(C)$ при $C \in (0, e^{-2})$. Пусть:

$$r_*(C) = (C^*_+)^{-1}(C) \text{ при } C \in (-1, e^{-2}), \quad r^*(C) = \left[\begin{array}{l} (C_*)^{-1}(C) \text{ при } C \in (-1, 0), \\ (C^*_-)^{-1}(C) \text{ при } C \in (0, e^{-2}). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $f(r, C)$ определена для любого $r \in (r_*(C), r^*(C))$.

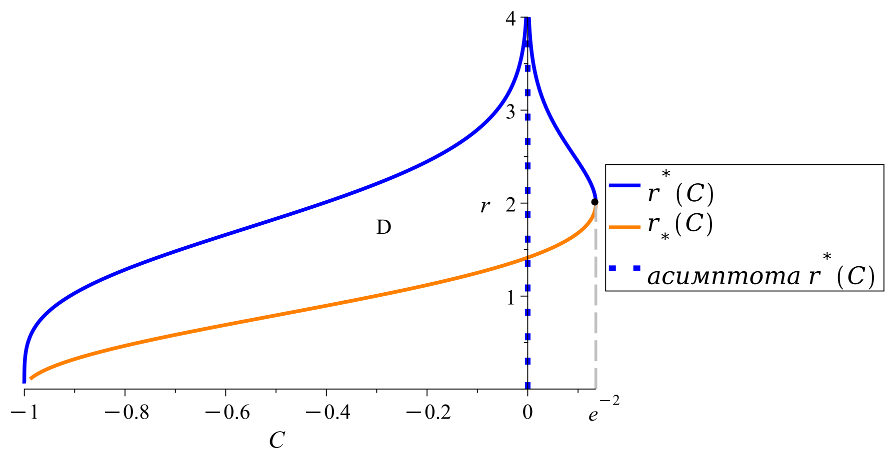

Рис. 3. Графики $r_*(C)$ и $r^*(C)$

Случаи когда константа C равна 0, -1 или e^{-2} тривиальны и в дальнейшем рассматриваться не будут (см. рис. 2).

Для всякого $C \in (-1; e^{-1})\backslash 0$ и $r, r_0 \in (r_*(C), r^*(C))$ положим:

$$F_+(r, r_0, C) = \int_{r_0}^{r} f(\xi, C) d\xi,\ F_-(r, r_0, C) = -F_+(r, r_0, C).$$

Заметим, что функция $F_+(r, r_0, C)$ строго монотонно возрастает по r, так как $f(r, C) > 0$.
Аналогично, $F_-(r, r_0, C)$ строго монотонно убывает по r.

Тогда для любого $C \in (-1; e^{-1})\backslash 0$ общими решениями уравнений (9) будут функции:

$$\left[\begin{array}{l} t(r, r_0, C) = F_+(r, r_0, C) \\ t(r, r_0, C) = F_-(r, r_0, C) \end{array}\right.$$

Введем обратные функции:

$$r_+(t, r_0, C) = F_+{}^{-1}(t, r_0, C),\ r_-(t, r_0, C) = F_-{}^{-1}(t, r_0, C).$$

Проведем анализ поведения радиус-вектора на фазовых траекториях системы (1). Рассмотрим два случая:

1) пусть $C \in (0, e^{-2})$. Для определенности возьмем цикл в области $xy > 1$ и $x > 0$. Тогда после замены координат в уравнении (3) на $x = y = r\cos\pi/4$ получим $r = \sqrt{2Ce^{r^2/2} + 2}$, что есть уравнение, которое задает $r_*(C)$ и $r^*(C)$, т.е. максимум и минимум радиуса решения, которое движется по заданной траектории достигаются в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = x$ (см. рис. 2). Аналогично для цикла в области $xy > 1$ и $x < 0$;

2) при $C \in (-1, 0)$ будем рассматривать две замены: $x = y = r\cos\pi/4$, и $x = r\cos 3\pi/4$, $y = -r\cos 3\pi/4$. Следовательно, минимум радиуса достигается в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = x$, а максимум в точках пересечения уравнения (3) и прямой $y = -x$ (см. рис. 2).

Утверждение. *Несобственный интеграл $F_+(r^*(C), r_0, C)$ сходится.*
Доказательство. От противного. Предположим, что $F_+(r^*(C), r_0, C)$ расходится, т.е. точка максимума не достигается за конечное время. Следовательно, не существует периодического решения. С другой стороны, поскольку решение определено на всей оси времени(см. [1]) и находится на замкнутой кривой, то имеем периодическое решение. Противоречие.
Аналогично для $F_-(r_*(C), r_0, C)$.

Таким образом, функции $F_\pm(r, r_0, C)$ существуют и конечны для $r \in [r_*(C), r^*(C)]$, $r_0 \in [r_*(C), r^*(C)]$.

Пусть $\omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C)$. Тогда при $C < 0$ период решения $\Omega(C) = 2F_+(r^*(C), r_*(C), C) + 2F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 4\omega(C)$,
если $C > 0$, то $\Omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C) + F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 2\omega(C)$.

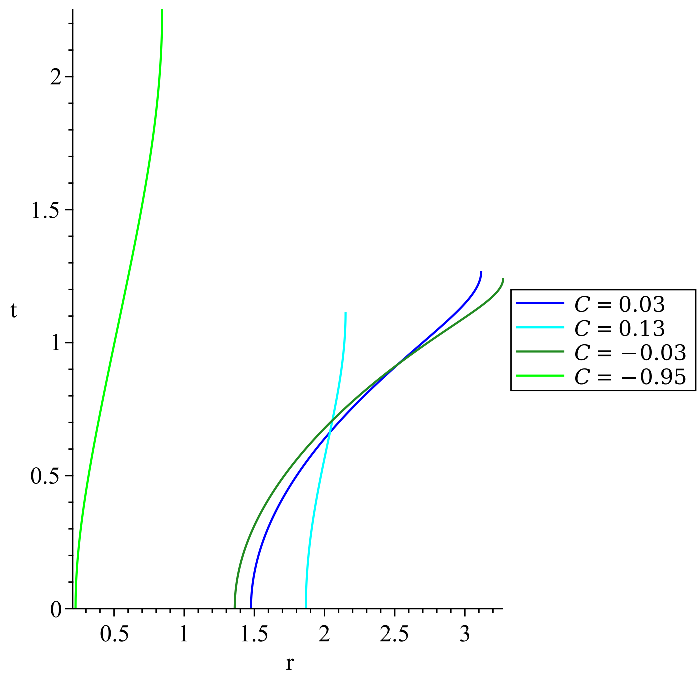

Рис. 4. Графики $F_{+}(r, r_{*}(C), C)$

Построим периодическое решение $R(t, r_0, C)$ из функций $r_{+}(t, r_0, C)$ и $r_{-}(t, r_0, C)$ на всем промежутке времени. Известно, что $r_{+}(t, r_0, C)$ монотонно возрастает в зависимости от t, а $r_{-}(t, r_0, C)$ монотонно убывает. Рассмотрим два случая:

1) пусть $\dot{r} < 0$, т.е. радиус убывает. Тогда время за которое точка дойдёт до минимума радиуса $\tau^{-}(r_0, C) = F_{-}(r_{*}(C), r_0, C)$. Имеем:

$$R_{-}(t, t_0, r_0, C) =$$
$$\left[\begin{array}{l} r_{+}(t - 2\tau^{-}(r_0, C) - 2k\omega(C) - t_0, r_{*}(C), C), \\ \qquad t \in (2k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \\ r_{-}(t - 2k\omega(C) - t_0, r^{*}(C), C), \\ \qquad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \end{array}\right.$$
$$\forall k \in \mathbb{Z};$$

2) при $\dot{r} > 0$ радиус будет возрастать. Пусть время за которое точка дой-

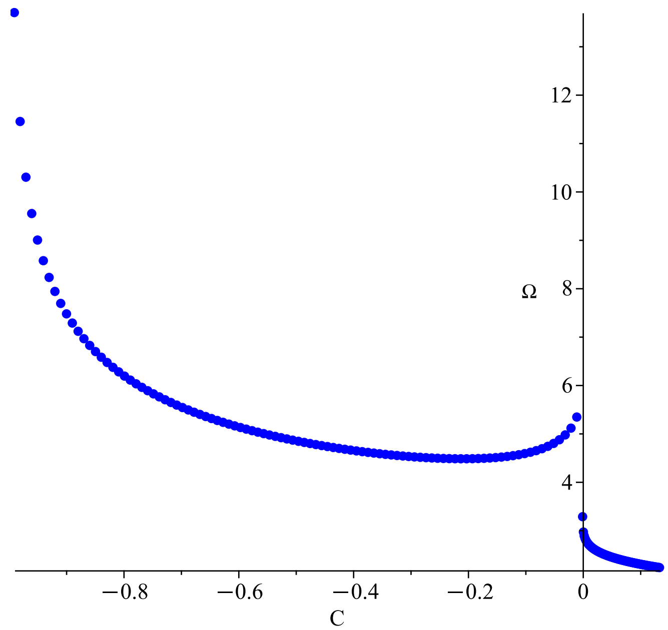

Рис. 5. График $\Omega(C)$

дёт до максимума радиуса $\tau^+(r_0, C) = F_+(r^*(C), r_0, C)$. Тогда:

$$R_+(t, t_0, r_0, C) =$$

$$\left[\begin{array}{l} r_+(t - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ \quad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \\ r_-(t - 2\tau^+(r_0, C) - 2k\omega(C) - \omega(C) - t_0, r^*(C), C), \\ \quad t \in (2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \end{array}\right.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим зависимость производной радиуса от угла в равенстве (8). Тогда $\dot{r} < 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta < 0$ и $\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta > 0$. Имеем:

$$\dot{r} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n < \theta < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi m < \theta < \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к уравнению (7). Пусть $h(r, C) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)$. Рассмотрим два случая:

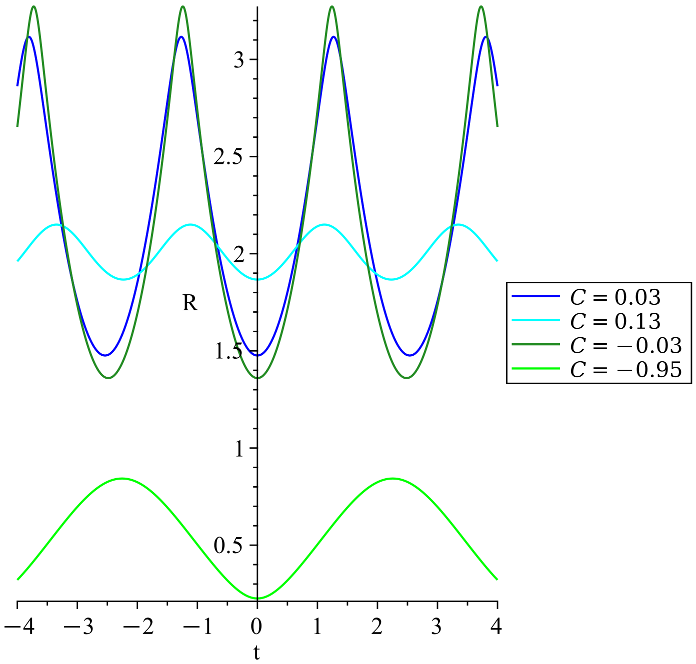

Рис. 6. Графики $R_{+}(t, 0, r_{*}(C), C)$

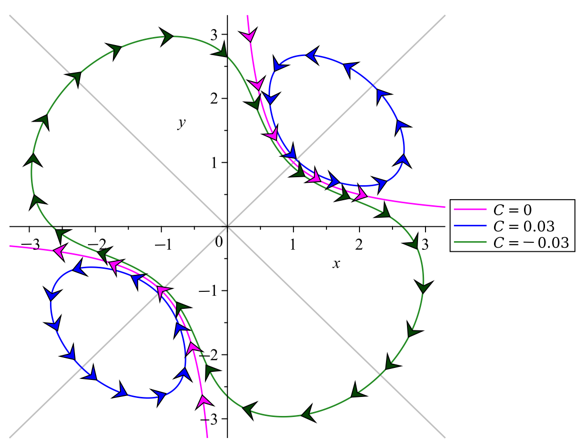

Рис. 7. Направление движения на кривых

1) при $C > 0$ возьмём для определённости цикл в области $xy > 1$ и

$x > 0$. Из уравнения (7) имеем: $\theta(r,C) = \dfrac{(-1)^k}{2} \arcsin h(r,C) + \dfrac{\pi}{2} k$. Более того, в данной области угол $\theta \in (0, \pi/2)$. Следовательно, $\theta_+(r,C) = \dfrac{1}{2} \arcsin h(r,C)$, или $\theta_-(r,C) = -\dfrac{1}{2} \arcsin h(r,C) + \dfrac{\pi}{2}$. Заметим, что $\theta_-(r,C)$ показывает изменение угла для верхней половины траектории, где $\dot{r} > 0$, а $\theta_+(r,C)$ - для нижней, где $\dot{r} < 0$. Для случая, когда радиус начальной точки убывает имеем:

$$\Theta_-^+(t, t_0, r_0, C) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \theta_+(R_-(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in (2k\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \end{array}\right.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},$$

если радиус возрастает имеем:

$$\Theta_+^+(t, t_0, r_0, C) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \theta_+(R_+(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^+(r_0,C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^+(r_0,C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in (2k\omega(C) + \tau^+(r_0,C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^+(r_0,C) + t_0], \end{array}\right.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z};$$

2) при $C < 0$ функция $h(r,C)$ монотонно убывает и неограничена. Следовательно, угол $\theta \in [-\pi/4, 7\pi/4)$. Рассмотрим случай при угле начальной точки $\theta_0 \in [-\pi/4; 3\pi/4]$. Поскольку имеем периодическое решение с периодом 4ω, то, если радиус начальной точки убывает, получаем:

$$\Theta_-^-(t, t_0, r_0, C) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \theta_+(R_-(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in (4k\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t,t_0,r_0,C),C) + \pi, \\ \qquad t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \\ \theta_+(R_-(t,t_0,r_0,C),C) + \pi, \\ \qquad t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \\ \theta_-(R_-(t,t_0,r_0,C),C), \\ \qquad t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0,C) + t_0], \end{array}\right.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z},$$

если начальный радиус возрастает получаем:

$$
\Theta_+^-(t, t_0, r_0, C) =
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
\theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C), \\
\qquad t \in (4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\
\theta_-(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\
\qquad t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\
\theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\
\qquad t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\
\theta_-(R_+(t, t_0, r_0, c), C), \\
\qquad t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0],
\end{array}\right.
$$

$$
\forall k \in \mathbb{Z}.
$$

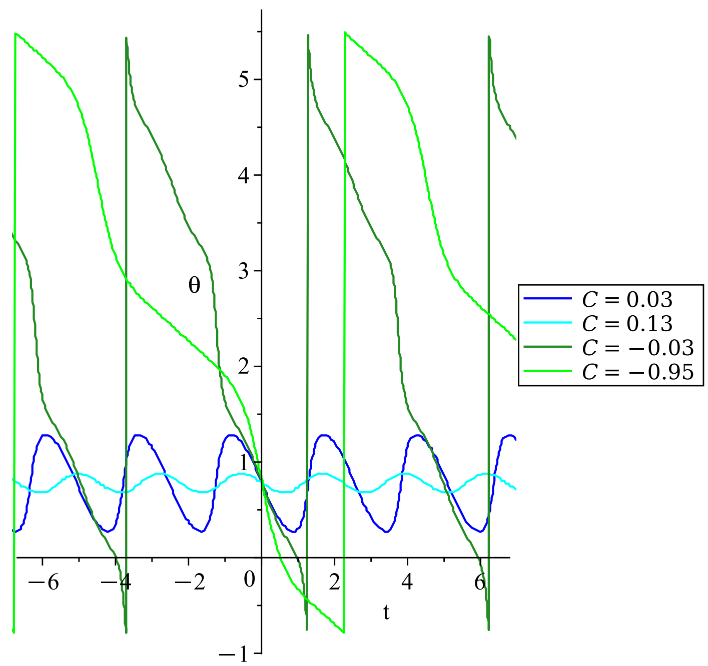

Рис. 8. Графики $\Theta_-^\pm(t, 0, r_*(C), C)$

Запишем решение задачи Коши для любых начальных данных (x_0, y_0, t_{init}). Тогда $r_{init} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $\theta_0 = \arctan 2(y_0, x_0)$(известная функция), $C_0 = (x_0 y_0 - 1)e^{(x_0^2+y_0^2)/2}$. Рассмотрим все случаи:

1) при $C_0 = 0$ имеем решение $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{t-t_{init}}, x_0^{-1} e^{-t+t_{init}})$, $t \in \mathbb{R}$;

2) при $C_0 = -1$ $(x(t), y(t)) = (0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$;

4) при $C_0 = e^{-2}$ имеем два случая. Если $x_0 > 0$, то $(x(t), y(t)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$. Если $x_0 < 0$, то $(x(t), y(t)) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $t \in \mathbb{R}$;

5) при $C_0 \in (0, e^{-2})$ имеем четыре случая:

если $\theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]$: $\begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$

если $\theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]$: $\begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$

если $\theta_0 \in (3\pi/4, \pi) \cup (-\pi, -3\pi/4]$:
$$\begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$$

если $\theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]$:
$$\begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

6) аналогично, для $C_0 \in (-1, 0)$ имеем четыре случая:

если $\theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]$: $\begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$

если $\theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]$: $\begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$

если $\theta_0 \in (3\pi/4, \pi] \cup (-\pi, -3\pi/4]$:
$$\begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$$

если $\theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]$:
$$\begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)\sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Таким образом, мы получили решение задачи Коши для произвольных начальных данных (x_0, y_0, t_{init}).

После добавления определенного малого возмущения 3-его порядка изначальная система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y - \epsilon x^3, \\ \dot{y} = -x - y + x^2 y + \epsilon y^3. \end{cases} \tag{10}$$

Для начала составим интегрируемую комбинацию. Используя те же соображения, что и в работе [1], получаем два соотношения:

$$\dot{xy} = (x^2 - y^2)(xy(1-\epsilon) - 1), \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2)(1 - \epsilon(x^2 + y^2)).$$

Подставляя отсюда $x^2 - y^2$ из второго уравнения в первое получаем интегрируемую комбинацию $d(x^2+y^2)2^{-1}(1-\epsilon(x^2+y^2))^{-1} = d(xy)(xy(1-\epsilon)-1)^{-1}$,или $xy(1-\epsilon) = 1$, или $\epsilon(x^2+y^2) = 1$.

Интегрируя, получаем первый интеграл системы (10)

$$(1-\epsilon)^{-1} \ln |(1-\epsilon)xy - 1| + 2^{-1}\epsilon^{-1} \ln |\epsilon(x^2+y^2) - 1| = C \tag{11}$$

Минуя все вычисления, имеем семь особых точек системы (10) при $\epsilon > 0$: $(0,0)$, $(u-v, u+v)$, $(v-u, -u-v)$, $(u+v, u-v)$, $(-u-v, v-u)$,$(\sqrt{2}(1+\epsilon)^{-1/2}, \sqrt{2}(1+\epsilon)^{-1/2})$, $(-\sqrt{2}(1+\epsilon)^{-1/2}, -\sqrt{2}(1+\epsilon)^{-1/2})$, где $u = \dfrac{1}{2}(\epsilon^{-1} + 2(1-\epsilon)^{-1})^{1/2}$, $v = \dfrac{1}{2}(\epsilon^{-1} - 2(1-\epsilon)^{-1})^{1/2}$.

Список литературы

[1] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.

[2] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.