

В работе рассматривается двумерная автономная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y. \end{cases} \quad (1)$$

Для системы (1) был найден первый интеграл (см. [1], [2]), но общее решение найдено не было. Для нахождения общего решения был использован метод, который основывается на построении периодической функции, опираясь на обратную функцию к неберущемуся интегралу. Такой подход к решению систем дифференциальных уравнений представляет не только теоретический интерес, но также может иметь практическое применение в различных областях, где возникают аналогичные задачи.

Рассматриваемый пример можно использовать для решения задач, связанных с 16-ой проблемой Гильберта, а точнее, локальной проблемой Арнольда-Гильберта. Для этого правую часть системы (1) следует рассматривать как невозмущенную часть системы, зависящей от малого автономного или периодического возмущения с последующим исследованием числа сохранившихся предельных циклов в случае автономного возмущения или инвариантных торов в случае периодического.

Рассмотрим систему (1):

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y. \end{cases}$$

Составим интегрируемую комбинацию.

Реализуя общую идею убирать в правых частях какие-то слагаемые, можно избавиться от  $x$  в первом уравнении и от  $-y$  во втором. Попробовать это сделать имеет смысл, так как в левой части возникнет формула производной произведения. Имеем:

$$y\dot{x} + x\dot{y} = y^2 - xy^3 - x^2 + x^3y \Leftrightarrow (\dot{xy}) = (x^2 - y^2)(xy - 1).$$

Само по себе это уравнение ничего пока не дало, так как в правой части помимо произведения есть еще разность квадратов. Поэтому избавимся в правой части системы от кубических слагаемых тем более, что слева появляется производная суммы квадратов. Имеем:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2). \quad (2)$$

Подставляя отсюда  $x^2 - y^2$  в первое уравнение, получаем интегрируемую комбинацию  $(\dot{xy}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(xy - 1)/2$ .

Следовательно,  $xy = 1$  или  $2(xy - 1)^{-1}d(xy) = d(x^2 + y^2)$ .

Интегрируя, получаем  $2\ln|xy - 1| - x^2 - y^2 = C$  — первый интеграл системы, который удобно записать в виде:

$$xy - 1 = Ce^{(x^2 + y^2)/2}, \quad (3)$$

поскольку в (3) входит решение  $xy = 1$ .

Подставляя  $xy = 1$  в первое уравнение системы (1) получаем уравнение  $\dot{x} = x$ , из которого находим однопараметрическое семейство решений

$$x(t) = Ce^t, \quad y(t) = C^{-1}e^{-t}.$$

К сожалению, еще один первый интеграл, а с ним вместе и общее решение системы, найти при помощи создания интегрируемой комбинации не удастся. Поэтому будем искать общее решение другим способом.

Решая систему  $-xy^2 + x + y = 0$  и  $-x - y + x^2y = 0$ , находим три особые точки системы (1):  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

Чтобы найти ограничения на константу  $C$  в (3), исследуем функцию

$$C(x, y) = (xy - 1)e^{-(x^2 + y^2)/2}, \quad (4)$$

причем  $C(0, 0) = 1$ ,  $C(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = C(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = e^{-2}$ .

Градиент функции (4)  $\nabla C(x, y) = \left( \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y} \right)$  имеет вид:  
 $\nabla C(x, y) = (e^{-(x^2+y^2)/2}(-x^2y + x + y), e^{-(x^2+y^2)/2}(-y^2x + x + y))$ .

Следовательно,  $\nabla C(x, y) = 0$  только в особых точках.

Рассмотрим замкнутую окрестность  $\bar{V}_2(O) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$  начала координат  $O = (0, 0)$ . Поскольку все особые точки принадлежат этому компакт, для нахождения максимального и минимального значений функции (4) на  $\bar{V}_2(O)$  достаточно сравнить значения функции в особых точках (4) с ее значениями на границе  $\partial \bar{V}_2(O) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ . Для этого в (4) удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (5)$$

получая функцию  $C(r, \theta) = \left( \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta - 1 \right) e^{-r^2/2}$ .

Заметим, что:

$$C_*(r) = \left( -\frac{1}{2}r^2 - 1 \right) e^{-r^2/2} \leq C(r, \theta) \leq C^*(r) = \left( \frac{1}{2}r^2 - 1 \right) e^{-r^2/2}. \quad (6)$$

Пусть  $r \geq 2$ . Тогда  $C_*(r) > 0$ ,  $C_*(r)' > 0$  и  $C_*(2) = -3e^{-2} \leq C_*(r) < 0$ . Аналогично,  $C^*(r) > 0$ ,  $C^*(r)' \leq 0$  и  $0 < C^*(r) \leq C^*(2) = e^{-2}$ . Отсюда следует:

$$-3e^{-2} \leq C_*(r) < C(x, y) = C(r, \theta) < C^*(r) \leq e^{-2}.$$

Таким образом, для всех  $(x, y) \in \bar{V}_2(O)$  верно, что  $-1 \leq C(x, y) \leq e^{-2}$ .

Пусть теперь  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{V}_2(O)$ . Поскольку  $2 < r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то  $-1 \leq -3e^{-2} < C(r, \theta) = C(x, y) \leq e^{-2}$ , т.е. для всех точек  $(x, y)$  верно неравенство  $-1 < C(x, y) \leq e^{-2}$ .

В результате,  $C(x, y) \in [-1, e^{-2}]$  для всех  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Исследуем линии уровня первого интеграла (3):

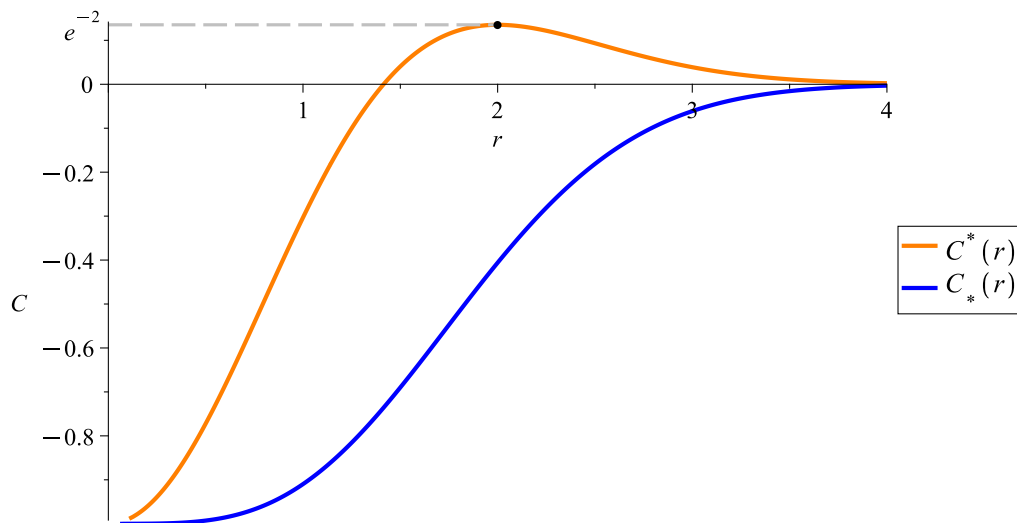


Рис. 1. Графики  $C_*(r)$  и  $C^*(r)$

- 1) при  $C = -1$  имеем особую точку  $(0, 0)$  ;
- 2) для любого  $C \in (-1, 0)$  имеем цикл расположенный в области  $xy < 1$ ;
- 3) при  $C = 0$  имеем гиперболу  $xy = 1$ , объединяющую две траектории:  $y = x^{-1}$  при  $x > 0$  и  $y = x^{-1}$  при  $x < 0$ ;
- 4) для любого  $C \in (0, e^{-2})$  имеем два симметричных цикла: первый в области  $xy > 1$  и  $x < 0$ , второй в области  $xy > 1$  и  $x > 0$ , охватывающие особые точки  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  и  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  соответственно.
- 5) при  $C = e^{-2}$  имеем особые точки  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

Первый интеграл (3) после полярной замены (5) примет вид:

$$2^{-1}r^2 \sin(2\theta) - 1 = Ce^{r^2/2}, \text{ или } \sin(2\theta) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1), \quad (7)$$

а уравнение (10) сведётся к уравнению

$$\dot{r}^2 = 2r^2 \cos(2\theta), \text{ или } \dot{r} = r \cos(2\theta). \quad (8)$$

Поскольку  $\cos(2\theta) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}$ , то после подстановки (7) в (8) для всякого  $C \in [-1; e^{-1}]$  получаем уравнения с разделяющимися переменными:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2}. \quad (9)$$

Найдем область определения  $D$  функции

$$f(r, C) = (r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2)^{-1/2}.$$

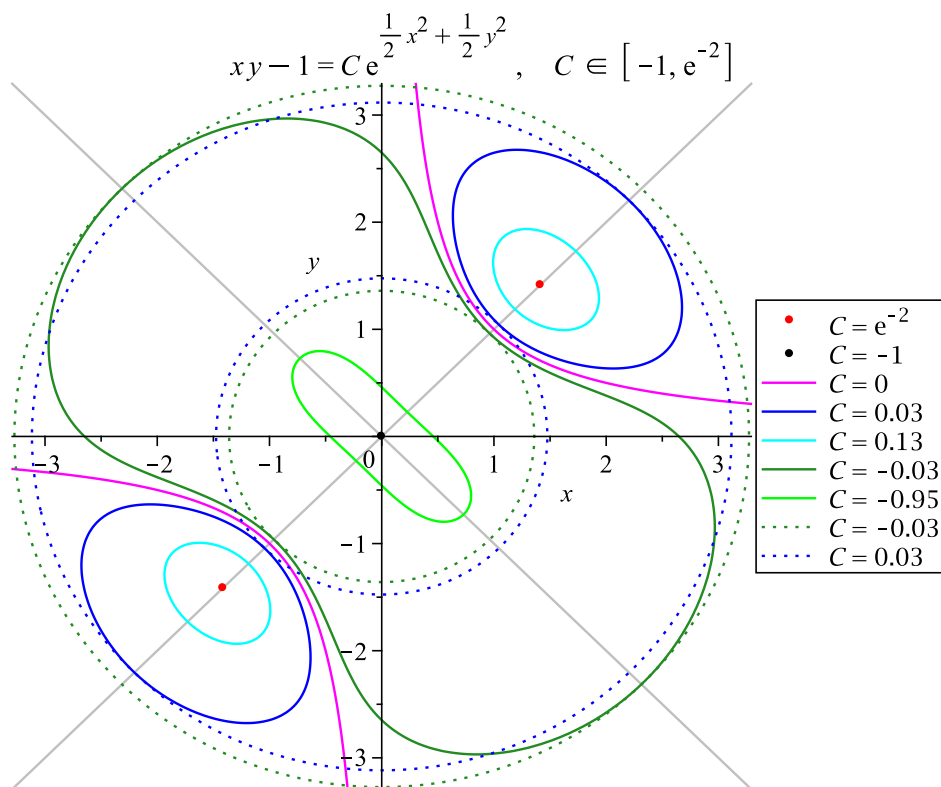


Рис. 2. Фазовый портрет системы (1)

Из неравенств  $r^2 - 4r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)^2 > 0$  и  $r > 0$  вытекает, что  $r^2 > 2|Ce^{r^2/2} + 1|$ .

Таким образом,  $D$  — это область заключенная между двумя кривыми, которые задаются функциями из (6):  $C^*(r)$  и  $C_*(r)$  (см. рис. 1).

Найдем область определения функции  $f(r, C)$  по переменной  $r$  при фиксированной константе  $C$ .

Функция  $C_*(r)$  строго монотонно возрастает при  $r > 0$ , поэтому существует обратная функция  $(C_*)^{-1}(C)$  при  $C \in (-1, 0)$ .

Функция  $C^*(r)$  строго монотонно возрастает при  $r \in (0, 2)$  и строго монотонно убывает при  $r > 2$ .

Положим  $C_+^*(r) = C^*(r)$  при  $r \in (0, 2)$  и  $C_-^*(r) = C^*(r)$  при  $r > 2$ . Тогда существуют обратные функции  $(C_+^*)^{-1}(C)$  при  $C \in (-1, e^{-2})$  и  $(C_-^*)^{-1}(C)$  при

$C \in (0, e^{-2})$ . Пусть:

$$r_*(C) = (C_+^*)^{-1}(C) \text{ при } C \in (-1, e^{-2}), \quad r^*(C) = \begin{cases} (C_*^*)^{-1}(C) & \text{при } C \in (-1, 0), \\ (C_-^*)^{-1}(C) & \text{при } C \in (0, e^{-2}). \end{cases}$$

Таким образом, функция  $f(r, C)$  определена для любого  $r \in (r_*(C), r^*(C))$ .

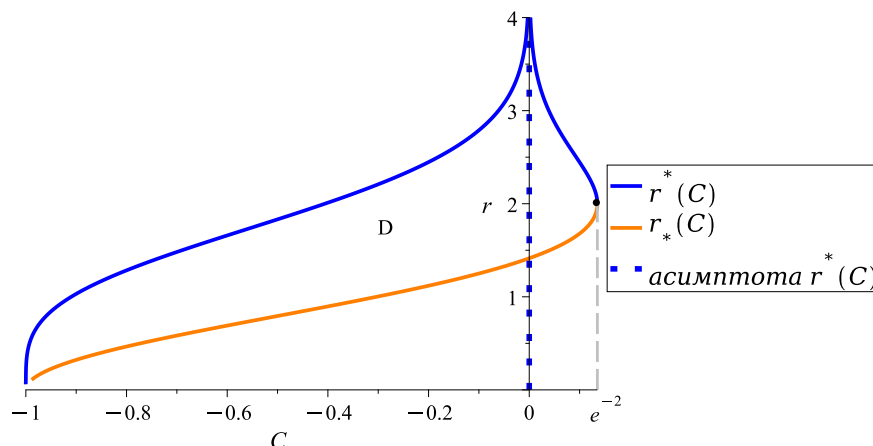


Рис. 3. Графики  $r_*(C)$  и  $r^*(C)$

Случаи когда константа  $C$  равна 0,  $-1$  или  $e^{-2}$  тривиальны и в дальнейшем рассматриваться не будут (см. рис. 2).

Для всякого  $C \in (-1; e^{-1}) \setminus 0$  и  $r, r_0 \in (r_*(C), r^*(C))$  положим:

$$F_+(r, r_0, C) = \int_{r_0}^r f(\xi, C) d\xi, \quad F_-(r, r_0, C) = -F_+(r, r_0, C).$$

Заметим, что функция  $F_+(r, r_0, C)$  строго монотонно возрастает по  $r$ , так как  $f(r, C) > 0$ .

Аналогично,  $F_-(r, r_0, C)$  строго монотонно убывает по  $r$ .

Тогда для любого  $C \in (-1; e^{-1}) \setminus 0$  общими решениями уравнений (9) будут функции:

$$\begin{cases} t(r, r_0, C) = F_+(r, r_0, C) \\ t(r, r_0, C) = F_-(r, r_0, C) \end{cases}$$

Введем обратные функции:

$$r_+(t, r_0, C) = F_+^{-1}(t, r_0, C), \quad r_-(t, r_0, C) = F_-^{-1}(t, r_0, C).$$

Проведем анализ поведения радиус-вектора на фазовых траекториях системы (1). Рассмотрим два случая:

- 1) пусть  $C \in (0, e^{-2})$ . Для определенности возьмем цикл в области  $xy > 1$  и  $x > 0$ . Тогда после замены координат в уравнении (3) на  $x = y = r \cos \pi/4$  получим  $r = \sqrt{2Ce^{r^2/2} + 2}$ , что есть уравнение, которое задает  $r_*(C)$  и  $r^*(C)$ , т.е. максимум и минимум радиуса решения, которое движется по заданной траектории достигаются в точках пересечения уравнения (3) и прямой  $y = x$  (см. рис. 2). Аналогично для цикла в области  $xy > 1$  и  $x < 0$ ;
- 2) при  $C \in (-1, 0)$  будем рассматривать две замены:  $x = y = r \cos \pi/4$ , и  $x = r \cos 3\pi/4$ ,  $y = -r \cos 3\pi/4$ . Следовательно, минимум радиуса достигается в точках пересечения уравнения (3) и прямой  $y = x$ , а максимум в точках пересечения уравнения (3) и прямой  $y = -x$  (см. рис. 2).

**Утверждение.** *Несобственный интеграл  $F_+(r^*(C), r_0, C)$  сходится.*

**Доказательство.** От противного. Предположим, что  $F_+(r^*(C), r_0, C)$  расходится, т.е. точка максимума не достигается за конечное время. Следовательно, не существует периодического решения. С другой стороны, поскольку решение определено на всей оси времени (см. [1]) и находится на замкнутой кривой, то имеем периодическое решение. Противоречие. Аналогично для  $F_-(r_*(C), r_0, C)$ .

Таким образом, функции  $F_{\pm}(r, r_0, C)$  существуют и конечны для  $r \in [r_*(C), r^*(C)]$ ,  $r_0 \in [r_*(C), r^*(C)]$ .

Пусть  $\omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C)$ . Тогда при  $C < 0$  период решения  $\Omega(C) = 2F_+(r^*(C), r_*(C), C) + 2F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 4\omega(C)$ , если  $C > 0$ , то  $\Omega(C) = F_+(r^*(C), r_*(C), C) + F_-(r_*(C), r^*(C), C) = 2\omega(C)$ .

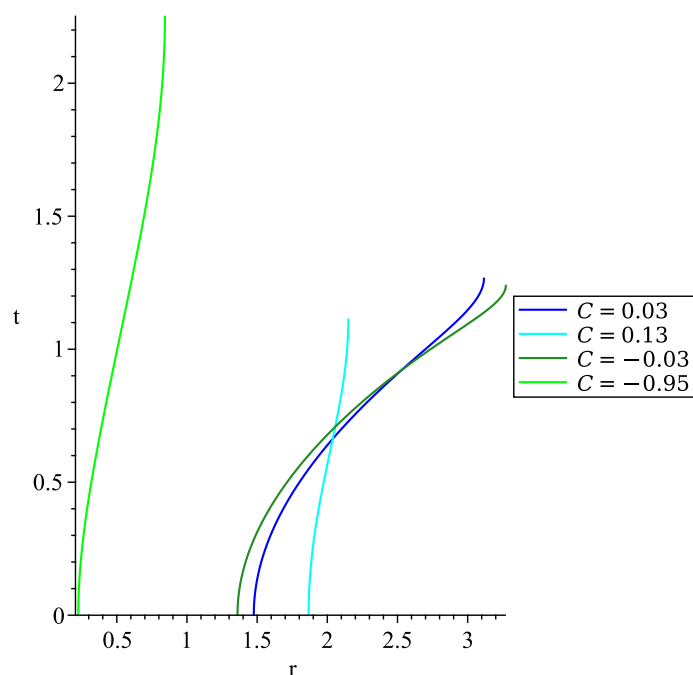


Рис. 4. Графики  $F_+(r, r_*(C), C)$

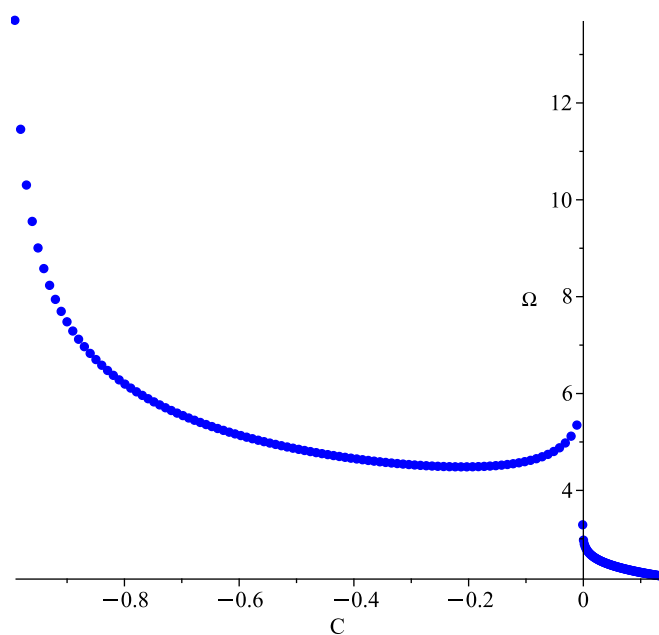


Рис. 5. График  $\Omega(C)$

Построим периодическое решение  $R(t, r_0, C)$  из функций  $r_+(t, r_0, C)$  и  $r_-(t, r_0, C)$  на всем промежутке времени. Известно, что  $r_+(t, r_0, C)$  монотонно возрастает в зависимости от  $t$ , а  $r_-(t, r_0, C)$  монотонно убывает. Рассмотрим



два случая:

- 1) пусть  $\dot{r} < 0$ , т.е. радиус убывает. Тогда время за которое точка дойдёт до минимума радиуса  $\tau^-(r_0, C) = F_-(r_*(C), r_0, C)$ . Имеем:

$$R_-(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} r_+(t - 2\tau^-(r_0, C) - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ t \in (2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ r_-(t - 2k\omega(C) - t_0, r^*(C), C), \\ t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z};$$

- 2) при  $\dot{r} > 0$  радиус будет возрастать. Пусть время за которое точка дойдёт до максимума радиуса  $\tau^+(r_0, C) = F_+(r^*(C), r_0, C)$ . Тогда:

$$R_+(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} r_+(t - 2k\omega(C) - t_0, r_*(C), C), \\ t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \\ r_-(t - 2\tau^+(r_0, C) - 2k\omega(C) - \omega(C) - t_0, r^*(C), C), \\ t \in (2k\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^+(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим зависимость производной радиуса от угла в равенстве (8). Тогда  $\dot{r} < 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta < 0$  и  $\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta > 0$ . Имеем:

$$\dot{r} < 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \pi n < \theta < \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$\dot{r} > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi m < \theta < \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к уравнению (7). Пусть  $h(r, C) = 2r^{-2}(Ce^{r^2/2} + 1)$ . Рассмотрим два случая:

- 1) при  $C > 0$  возьмём для определённости цикл в области  $xy > 1$  и  $x > 0$ . Из уравнения (7) имеем:  $\theta(r, C) = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin h(r, C) + \frac{\pi}{2}k$ . Более того, в данной области угол  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Следовательно,  $\theta_+(r, C) = \frac{1}{2} \arcsin h(r, C)$ , или  $\theta_-(r, C) = -\frac{1}{2} \arcsin h(r, C) + \frac{\pi}{2}$ . Заметим, что  $\theta_-(r, C)$

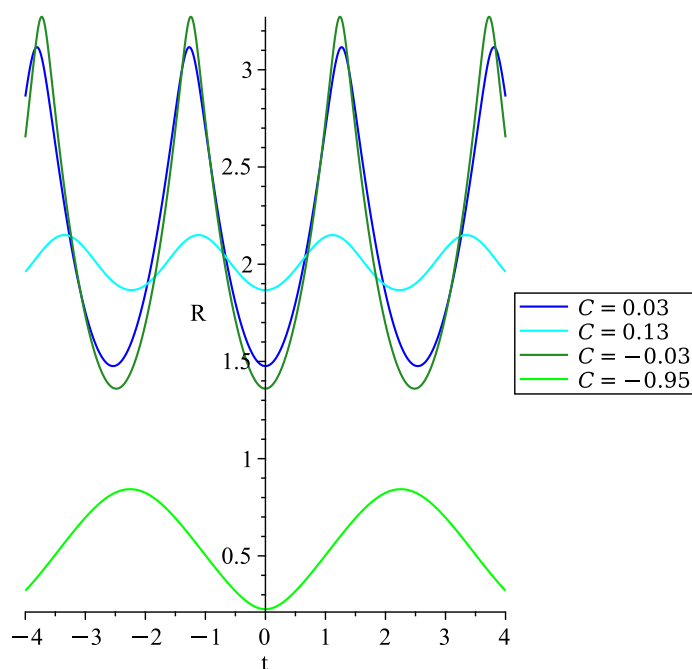


Рис. 6. Графики  $R_+(t, 0, r_*(C), C)$

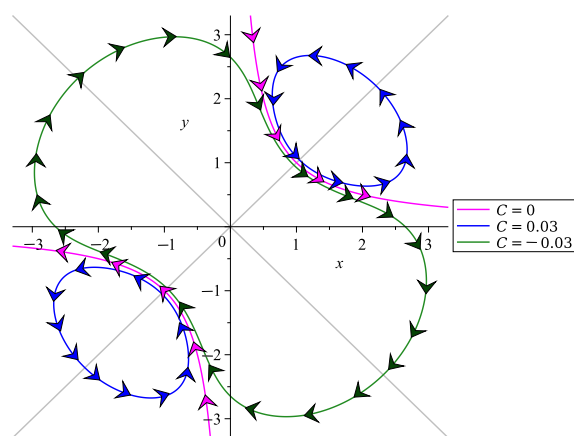


Рис. 7. Направление движения на кривых

показывает изменение угла для верхней половины траектории, где  $\dot{r} > 0$ , а  $\theta_+(r, C)$  - для нижней, где  $\dot{r} < 0$ . Для случая, когда радиус начальной

точки убывает имеем:

$$\Theta_{-}^{+}(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_{+}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in (2k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \\ \theta_{-}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \end{cases} \\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

если радиус возрастает имеем:

$$\Theta_{+}^{+}(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_{+}(R_{+}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in ((2k-1)\omega(C) + \tau^{+}(r_0, C) + t_0; 2k\omega(C) + \tau^{+}(r_0, C) + t_0], \\ \theta_{-}(R_{+}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in (2k\omega(C) + \tau^{+}(r_0, C) + t_0; (2k+1)\omega(C) + \tau^{+}(r_0, C) + t_0], \end{cases} \\ \forall k \in \mathbb{Z};$$

- 2) при  $C < 0$  функция  $h(r, C)$  монотонно убывает и неограничена. Следовательно, угол  $\theta \in [-\pi/4, 7\pi/4)$ . Рассмотрим случай при угле начальной точки  $\theta_0 \in [-\pi/4; 3\pi/4]$ . Поскольку имеем периодическое решение с периодом  $4\omega$ , то, если радиус начальной точки убывает, получаем:

$$\Theta_{-}^{-}(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_{+}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in (4k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \\ \theta_{-}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ \quad t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \\ \theta_{+}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ \quad t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \\ \theta_{-}(R_{-}(t, t_0, r_0, C), C), \\ \quad t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^{-}(r_0, C) + t_0], \end{cases} \\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

если начальный радиус возрастает получаем:

$$\Theta_+^-(t, t_0, r_0, C) = \begin{cases} \theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C), \\ t \in (4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k+1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ t \in ((4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; 4k\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_+(R_+(t, t_0, r_0, C), C) + \pi, \\ t \in ((4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-1)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \\ \theta_-(R_+(t, t_0, r_0, c), C), \\ t \in ((4k-3)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0; (4k-2)\omega(C) + \tau^-(r_0, C) + t_0], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}.$$

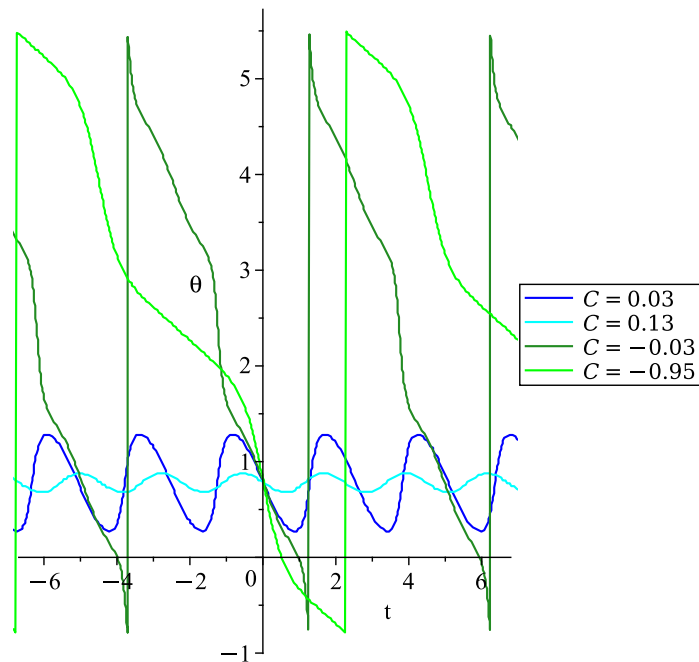


Рис. 8. Графики  $\Theta_{\pm}^{\pm}(t, 0, r_*(C), C)$

Запишем решение задачи Коши для любых начальных данных  $(x_0, y_0, t_{init})$ . Тогда  $r_{init} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $\theta_0 = \arctan 2(y_0, x_0)$  (известная функция),  $C_0 = (x_0 y_0 - 1)e^{(x_0^2 + y_0^2)/2}$ . Рассмотрим все случаи:

- 1) при  $C_0 = 0$  имеем решение  $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{t-t_{init}}, x_0^{-1} e^{-t+t_{init}})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2) при  $C_0 = -1$   $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

4) при  $C_0 = e^{-2}$  имеем два случая. Если  $x_0 > 0$ , то  $(x(t), y(t)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Если  $x_0 < 0$ , то  $(x(t), y(t)) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

5) при  $C_0 \in (0, e^{-2})$  имеем четыре случая:

$$\begin{aligned} &\text{если } \theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (3\pi/4, \pi) \cup (-\pi, -3\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^+(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

6) аналогично, для  $C_0 \in (-1, 0)$  имеем четыре случая:

$$\begin{aligned} &\text{если } \theta_0 \in (-\pi/4, \pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (\pi/4, 3\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (3\pi/4, \pi] \cup (-\pi, -3\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_+(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_+^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \\ &\text{если } \theta_0 \in (-3\pi/4, -\pi/4]: \\ &\quad \begin{cases} x(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \cos(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)), \\ y(t) = -R_-(t, t_{init}, r_{init}, C_0) \sin(\Theta_-^-(t, t_{init}, r_{init}, C_0)); \end{cases} \end{aligned}$$

$$t \in \mathbb{R}$$

Таким образом, мы получили решение задачи Коши для произвольных начальных данных  $(x_0, y_0, t_{init})$ .

После добавления определенного малого возмущения 3-его порядка изначальная система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 + x + y - \epsilon x^3, \\ \dot{y} = -x - y + x^2y + \epsilon y^3. \end{cases} \quad (10)$$

Для начала составим интегрируемую комбинацию. Используя те же соображения, что и в работе [1], получаем два соотношения:

$$xy = (x^2 - y^2)(xy(1 - \epsilon) - 1), \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(x^2 - y^2)(1 - \epsilon(x^2 + y^2)).$$

Подставляя отсюда  $x^2 - y^2$  из второго уравнения в первое получаем интегрируемую комбинацию  $d(x^2 + y^2)2^{-1}(1 - \epsilon(x^2 + y^2))^{-1} = d(xy)(xy(1 - \epsilon) - 1)^{-1}$ , или  $xy(1 - \epsilon) = 1$ , или  $\epsilon(x^2 + y^2) = 1$ .

Интегрируя, получаем первый интеграл системы (10)

$$(1 - \epsilon)^{-1} \ln |(1 - \epsilon)xy - 1| + 2^{-1}\epsilon^{-1} \ln |\epsilon(x^2 + y^2) - 1| = C \quad (11)$$

Минуя все вычисления, имеем семь особых точек системы (10) при  $\epsilon > 0$ :  $(0, 0)$ ,  $(u - v, u + v)$ ,  $(v - u, -u - v)$ ,  $(u + v, u - v)$ ,  $(-u - v, v - u)$ ,  $(\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2}, \sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2})$ ,  $(-\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2}, -\sqrt{2}(1 + \epsilon)^{-1/2})$ , где  $u = \frac{1}{2}(\epsilon^{-1} + 2(1 - \epsilon)^{-1})^{1/2}$ ,  $v = \frac{1}{2}(\epsilon^{-1} - 2(1 - \epsilon)^{-1})^{1/2}$ .

## Список литературы

- [1] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.
- [2] Басов В.В. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Лекции и практические занятия». 2023, pp. 1223-1235.