

# Нелинейные методы строительной механики

Введение

Черновик

СМиМ

ЗабГУ

2019

# Outline

## Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

# Материалы курса

[vetrovs.github.io/NLST/](https://vetrovs.github.io/NLST/)

Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики [Текст]: учеб. пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ , 2017. – 66 с

# Нелинейность

*“A view of nature as dense and nonlinear is at the core of our contemporary science”*

---

— Gregory Benford

# Нелинейность

Какие уравнения называют линейными?

# Нелинейность

Какие уравнения называют линейными?

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Какие уравнения называют нелинейными?

# Линейная строительная механика

- ▶ Принцип отвердевания
- ▶ Принцип малых перемещений
- ▶ Принцип независимости действия сил
- ▶ Закон Гука



# Линейная строительная механика

- ▶ Принцип отвердевания
- ▶ Принцип малых перемещений
- ▶ Принцип независимости действия сил
- ▶ Закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

...

# Нелинейная строительная механика

- ▶ Расчёт конструкции для всех этапов нагружения, включая разрушения
- ▶ Рассматриваются в том числе неупругие деформации
- ▶ Принцип отвердевания неприменим. Размеры и форма конструкции могут изменяться.

# Outline

Введение

**Виды нелинейности**

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

# Виды нелинейности

В механике выделяют три вида нелинейности:

- ▶ Физическая нелинейность
- ▶ Геометрическая нелинейность
- ▶ Конструктивная нелинейность

# Физическая нелинейность (ФН)

- ▶ Бетон, дерево, пластик и некоторые другие строительные материалы характеризуются **нелинейной зависимостью напряжений от деформаций** даже при небольших нагрузках
- ▶ Такая нелинейность называется **физической**
- ▶ Проявляется при возникновении пластических деформаций в различных формах (текучести – деформировании при постоянных напряжениях, ползучести – росте деформаций во времени без увеличения нагрузки), при криволинейной диаграмме «напряжения-деформации», при изменении свойств материалов от внешних воздействий и т. д.

# Физическая нелинейность (ФН)

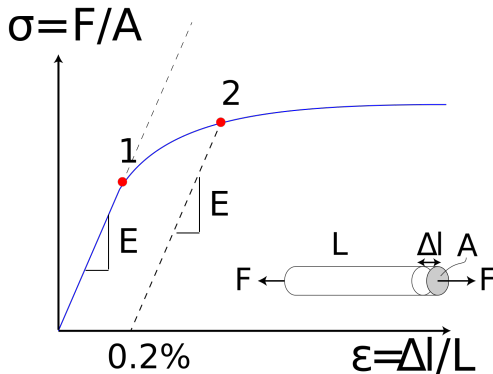


Диаграмма деформирования.

# Физическая нелинейность (ФН)

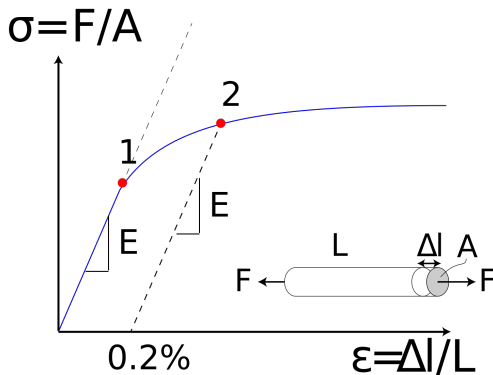


Диаграмма деформирования.

Упругие деформации (линейные) - слева от т. 1

Пластические деформации - справа от т. 1

Задачи рассматривающие обе части деформаций называются упругопластическими.

# Физическая нелинейность (ФН)



# Физическая нелинейность (ФН)

- ▶ Связь между напряжениями и деформациями в общем виде

$$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon$$

где  $E(\varepsilon)$  – матрица, характеризующая физические свойства материала – элементы ее являются функциями компонент вектора деформаций  $\varepsilon$ . То есть физические свойства материала зависят от того, насколько он деформирован.  
 $\varepsilon$  – вектор деформаций.

- ▶ Причем приведённая система уравнений (в матричной форме) в случае присутствия физической нелинейности превращается в систему нелинейных уравнений.
- ▶ Закон Гука не учитывает такую нелинейность

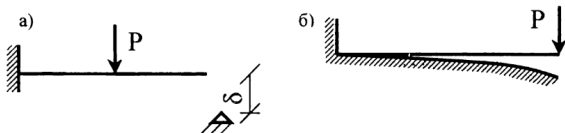
# Геометрическая нелинейность (ГН)

- ▶ Большие перемещения
- ▶ Значительные деформации
- ▶ Нелинейная зависимость между нагрузками и перемещениями
- ▶ Учитывается в уравнениях связывающих деформации с перемещениями
- ▶ Например, в случае продольного и продольно-поперечного изгиба стержней, изменении координат точек конструкции из-за сравнительно больших перемещений

# Конструктивная нелинейность (КН)

- ▶ Изменение расчётной схемы из-за нагружения
- ▶ Включение и выключение связей
- ▶ Например, возникновение контакта с опорой в из-за прогиба.
- ▶ Уравнения равновесия должны включать перемещения

# Конструктивная нелинейность (КН)



изменение расчётной схемы в результате появления новой связи  
(опоры)

# Методы расчёта нелинейно деформируемых систем

# Классификация задач

Классификация задач нелинейной строительной механики (без учёта конструктивной нелинейности):

- ▶ ФЛ, ГЛ
- ▶ ФН, ГЛ
- ▶ ФЛ, ГН
- ▶ ФН, ГН

# Outline

Введение

Виды нелинейности

**Диаграмма деформирования**

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

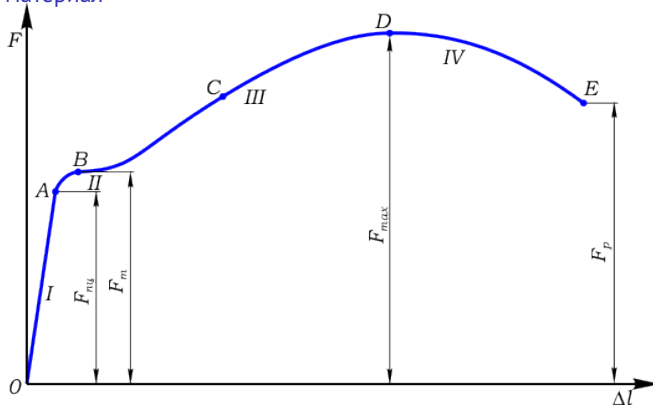
# Диаграмма деформирования

- ▶ Как будет вести себя стержень из малоуглеродистой стали если приложить к нему небольшое растягивающее усилие, а затем постепенно увеличивать?
- ▶ Как будет изменяться его длина?
- ▶ Что будет если на определённом этапе убрать нагрузку?
- ▶ Стержень сможет восстановить свою исходную форму любой деформации?



# Диаграмма деформирования

Пластичный материал

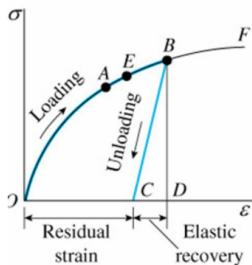
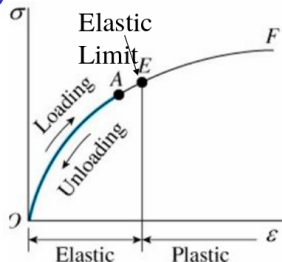


$F$  — продольная растягивающая сила, [Н];  $\Delta l$  — абсолютное удлинение рабочей части образца, [мм]

- I — участок пропорциональности;
- II — участок текучести;
- III — участок самоупрочнения;
- IV — участок разрушения.

$F_{пл}$  — предел пропорциональности;  $F_T$  — предел текучести;  $F_{max}$  — предел прочности;  $F_p$  — предел упругости.

# Нагрузка и разгрузка



Упругие деформации (до точки  $E$ ) исчезнут (верхняя схема), если убрать нагрузку с материала.

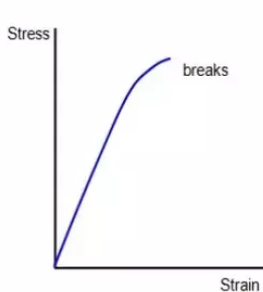
Запредельные деформации (после точки  $E$ ) не исчезают (нижняя схема)

**Предел текучести** материала – наименьшее напряжение, при котором деформация увеличивается без заметного увеличения нагрузки. На диаграмме – точка, после которой линия диаграммы некоторое время движется параллельно оси деформаций  $\varepsilon$ . Практически горизонтальный участок диаграммы, следующий за пределом текучести, называется *площадкой текучести*.

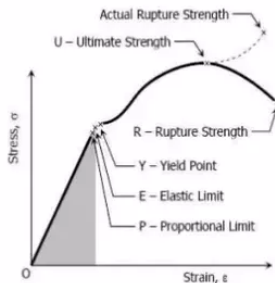
Пластичные материалы (малоуглеродистая сталь, латунь, алюминий и многие другие металлы) обладают свойствами текучести (увеличения деформаций без увеличения нагрузки) при нормальных температурах.

# Хрупкие и пластичные материалы

## Stress-Strain Curve



**BRITTLE MATERIAL**

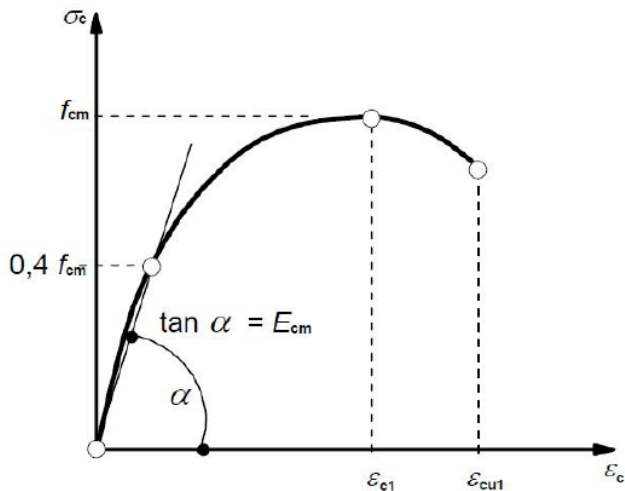


**DUCTILE MATERIAL**

Диаграмма деформирования (растяжения) для хрупкого (слева) и пластичного материала (справа)

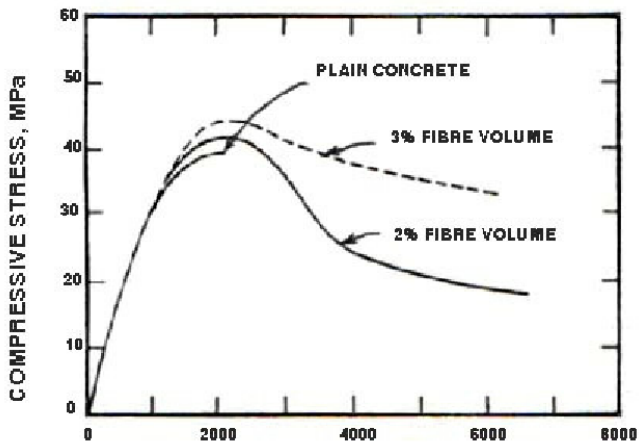
# Бетон

## Диаграмма одноосного сжатия



# Фибробетон

Диаграмма одноосного сжатия



# Фибробетон



# Тесты материалов на растяжение и сжатие

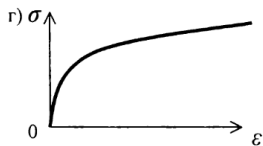
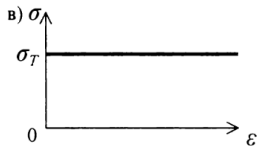
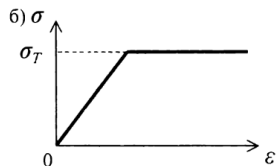
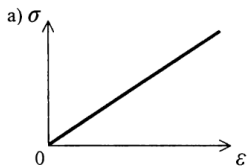
<https://youtu.be/D8U4G5kcpcM>

Первая часть ролика - В ролике упоминается yield-point – это предел текучести.

Тест бетона на сжатие <https://youtu.be/c7U91LbKFjI>



# Модели деформирования



# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

**Пластический шарнир**

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

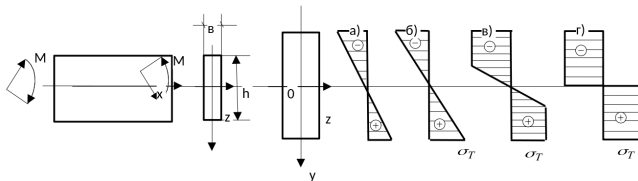
Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

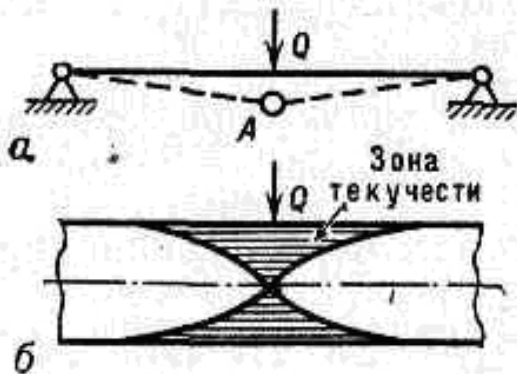
# Пластический шарнир

- Этапы изменения напряжений в балке в условиях чистого сгиба.



Пластический шарнир образуется в опасных сечениях балки: там где действует или в месте соединения с опорой (связью)

# Пластический шарнир



# Пластический шарнир

## Допускаемая нагрузка

- ▶ Интерес представляет величина внешней силы  $Q$  при котором элемент ещё не исчерпал свою несущую способность
- ▶ Будем называть такую величину – **допускаемым значением** –  $Q_{\text{доп}}$
- ▶ Допускаемое значение внешней силы связано с **допускаемым моментом**  $M_{\text{доп}}$ , возникающем в опасном сечении.

# Пластический шарнир

## Допускаемая нагрузка

- ▶ Допускаемый момент зависит от свойств материала и элемента конструкции:

$$M_{\text{доп}} = \sigma_T W_x \quad (1)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести,

$W_x$  – момент сопротивления поперечного сечения балки.

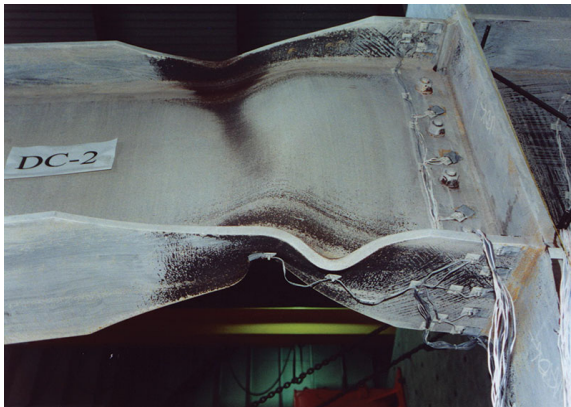
Таблица моментов сопротивления

# Пластический шарнир

## Предельная нагрузка

- ▶ Кроме допускаемой нагрузки, интерес представляет **предельное значение нагрузки** –  $Q_{\text{пр}}$
- ▶ Это значение, при котором возникает пластический шарнир
- ▶  $Q_{\text{пр}} > Q_{\text{доп}}$
- ▶ Приложить силу больше чем  $Q_{\text{пр}}$  невозможно, ибо балка разрушится.
- ▶ *Значение предельной силы определяется из условия равенства моментов внутренних и внешних сил для опасного сечения балки.*

# Пластический шарнир





# Пластический шарнир



# Пластический шарнир

<https://youtu.be/F5RtSUbrifg>

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

**Расчёт по предельным состояниям**

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

# Методы расчёта сооружений

- ▶ Расчет по допускаемым напряжениям
- ▶ Расчет по допускаемым нагрузкам
- ▶ Метод предельных состояний

# Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаться неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \quad (2)$$

где  $S_i$  – воздействие на рассчитываемый элемент  $i$ -ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)

$A$  - геометрическая характеристика сечения

$[\sigma]$  - допускаемое напряжение в элементе

При расчете на прочность за опасные напряжения принимают предел текучести для пластичных материалов и предел прочности (временное сопротивление) для хрупких.

# Расчет по допускаемым напряжениям

Значения допускаемых напряжений включают коэффициенты надёжности.

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 2 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где  $\gamma_i$  – коэффициент надёжности по нагрузке

$\gamma_R$  – коэффициенты надёжности по материалам

# Расчет по допускаемым напряжениям

- ▶ о прочности всей конструкции судят по напряжениям в опасных точках
- ▶ Метод подходит для систем, напряжения в которых распределяются равномерно по сечениям, и систем, в которых разрушение одного элемента влечет за собой разрушение всей конструкции в целом.
- ▶ Однако для многих конструкций, изготовленных из пластичных материалов, появление в какой-либо точке напряжений, равных разрушающим, еще не означает, что данная система выйдет из строя (статически неопределимые системы).

# Расчет по предельным состояниям

**Предельное состояние** – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- ▶ используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- ▶ учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ▶ ...



# Предельные состояния

- ▶ **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- ▶ **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

# Предельные состояния

## Первое предельное состояние



изображение с сайта

[lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states](http://lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states)

# Предельные состояния

## Первое предельное состояние



изображение с сайта

[lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states](http://lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states)

# Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

$N_{max}$  – фактор характеризующий нагрузку

Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, перемещение, ...

$N$  – нормативное значение соответствующего  $N_{max}$  фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode.

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

**Расчет по допускаемым напряжениям**

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

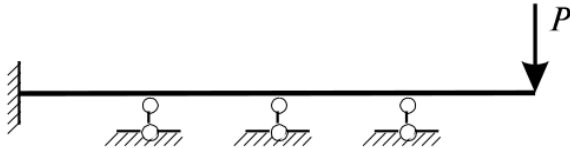
Ссылки

# Расчет статически неопределимых балок по допускаемым напряжениям

- ▶ Несущая способность *статически определимой* балки исчерпается, когда, хотя бы в одном сечении образуется пластический шарнир и система становится геометрически изменяемой.
- ▶ Для *статически неопределимых* балок образование одного пластического шарнира не приводит к исчерпанию несущей способности, т.к. в этом случае степень кинематической определимости системы снижается на одну единицу.
- ▶ В случае  $n$  раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности происходит при формировании  $n + 1$  пластических шарниров.

## Расчет статически неопределимых балок по допускаемым напряжениям

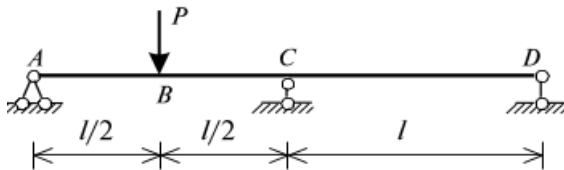
- ▶ Однако в ряде случаев часть балки может стать геометрически изменяемой при значительно меньшем числе пластических шарниров.



# Пример 1

## Задача

Для балки прямоугольного сечения ( $b \times h$ ) требуется определить допускаемое и предельное значения нагрузки  $P$ .





# Пример 1

## Решение

1. Значение силы  $P_{\text{доп}}$  определим используя значение  $M_{\text{доп}}$ .
2.  $M_{\text{доп}}$  будем считать равным  $M_{\text{max}}$  – наибольшему моменту, действующему в опасном сечении.

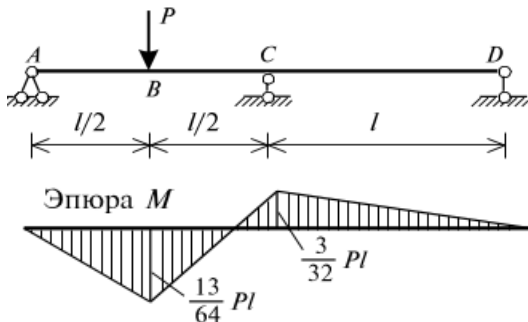
$$M_{\text{доп}} = M_{\text{max}}$$

При этом значение, напряжение в опасном сечении достигает предела текучести, но пластический шарнир ещё не образуется.

# Пример 1

## Решение

1. Определим наиболее опасное сечение и  $M_{max}$  построив эпюру  $M$



2.  $M_{доп} = M_{max} = 13/64Pl$
3. Вместо  $P$  используем  $P_{доп}$
4.  $M_{доп} = 13/64P_{доп}l$

# Пример 1

## Решение

1.  $R_{\text{доп}} = 13/64 \cdot M_{\text{доп}}/l$

2. Определим  $M_{\text{доп}}$  из формулы (1):

$$M_{\text{доп}} = \sigma_T W_x$$

$$R_{\text{доп}} = \frac{13}{64} \sigma_T W_x / l$$

3. Для балки прямоугольного сечения  $W_x = \frac{bh^2}{6}$

4.  $R_{\text{доп}} = \frac{13}{64} \sigma_T \frac{bh^2}{6l}$

$$R_{\text{доп}} = \frac{32}{39} \sigma_T \frac{bh^2}{l}$$

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

**Расчет по предельным состояниям**

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

**Расчет по предельным состояниям**

**Статический способ**

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

# Пример 1

## Решение

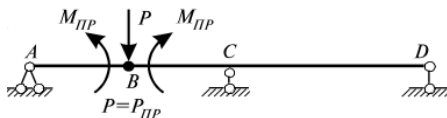
Определим предельное значение силы  $P$ .

- ▶ Увеличивая величину внешней силы  $P > P_{доп}$ , пластическая область в опасном сечении  $B$  балки увеличивается.
- ▶ При некотором значении силы в сечении  $B$  возникает пластический шарнир, тогда величина изгибающего момента в этом сечении становится равной  $M_{пр}$ .
- ▶ При дальнейшем росте внешней силы  $P$ , момент в сечении  $B$  остается постоянным и равным  $M_{пр}$ .
- ▶ Возникновение пластического шарнира в т.  $B$  превращает один раз статически неопределимую балку в балку статически определимую

# Пример 1

## Решение

1. Определим способ разрушения балки

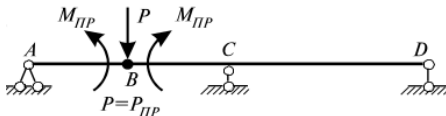


Что будет происходить с балкой дальше, если сила  $P$  продолжит действовать?

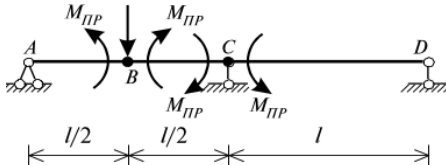
# Пример 1

## Решение

1. Определим способ разрушения балки



Что будет происходить с балкой дальше, если сила  $P$  продолжит действовать?



Наибольшая величина изгибающего момента формируется в сечении С, достигает предельной величины  $M_{\Pi P}$ , формируется пластический шарнир, балка превращается в геометрически изменяемую систему.



# Пример 1

## Решение

- ▶ 2. Составим уравнения равновесия:  
...
- ▶ 3. ...и равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту  $M_{пр}$ :  
...
- ▶ 4. Из уравнений выразим  $R_{пр}$  через  $M_{пр}$
- ▶ 5.  $M_{пр}$  выразим через уравнение (1)
- ▶ 6. Сравним  $R_{пр}$  и  $R_{доп}$ .

# Пример 1

## Решение

- ▶ 2. Составим уравнения равновесия:  
...
- ▶ 3. ...и равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту  $M_{пр}$ :  
...
- ▶ 4. Из уравнений выразим  $R_{пр}$  через  $M_{пр}$
- ▶ 5.  $M_{пр}$  выразим через уравнение (1)
- ▶ 6. Сравним  $R_{пр}$  и  $R_{доп}$ .  
Какой способ определения нагрузки позволяет экономичнее использовать материал?

# Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

# Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

*Статически допустимым* считается такое поле напряжений, которое удовлетворяет условиям равновесия, граничным условиям и при котором ни в одной точке напряжения не превосходят значений, определяемых условиями пластичности

# Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

*Статически допустимым* считается такое поле напряжений, которое удовлетворяет условиям равновесия, граничным условиям и при котором ни в одной точке напряжения не превосходят значений, определяемых условиями пластичности

Таким образом нагрузка определённая статическим способом даёт приближение для предельной нагрузки снизу.

# Статическая теорема

Таким образом нагрузка определённая статическим способом даёт приближение для предельной нагрузки снизу.

Значит наибольшее напряжение из возможных будет ближе всего к предельной.

# Статический метод

1. Выявляются места образования пластических шарниров (в точках действия сосредоточенных сил, в том числе реакций связей)
2. Рассматриваются различные схемы образования пластических шарниров.
3. Для каждой из схем составляются уравнения равновесия и уравнения равенства моментов, определяются предельные значения внешней силы.
4. Для каждой схемы проверяется неравенство:  $M < M_{\text{пред}}$   
Проверяются моменты в опасных сечениях.
5. Наибольшее значение из всех схем является расчетной величиной предельной силы.
6. Схема с *наибольшей* внешней силой - наиболее вероятная схема разрушения.

# Задача

Суков М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики: учеб.  
пособие / М.Ф. Суков, Д.А. Кожанов;  
стр. 51



# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

**Расчет по предельным состояниям**

Статический способ

**Кинематический способ**

Вопросы

Ссылки

# Кинематический способ

- ▶ Жестко-пластическое приближение.
- ▶ Составляется уравнение работы всех внешних и внутренних усилий на основе принципа возможных перемещений.
- ▶ Принцип возможных перемещений: если система твердых тел находится в равновесии под действием системы сил, то работа, совершаемая этими силами на любом малом возможном перемещении системы, должна быть равна нулю.

$$\Sigma \delta A = 0$$

- ▶ Возможное перемещение

# Кинематический способ

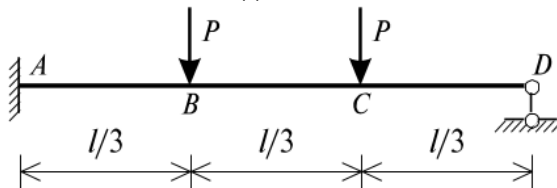
- ▶ Примеры возможные перемещений

# Кинематический способ

Как выбрать схему разрушения?

## Пример 2

Расчёт кинематическим методом.



# Кинематическая теорема

Нагрузка соответствующая кинематически возможному состоянию больше, чем предельная нагрузка.

В кинематически возможном состоянии уравнения равновесия могут не выполняться.

Таким образом выбирается *наименьшая* нагрузка из возможных. Она будет ближе к предельной.

# Определение предельной нагрузки

- ▶ Для того чтобы статически возможное состояние было действительным, оно должно быть кинематически возможным и наоборот.
- ▶ Если предельные нагрузки определённые статическим и кинематическим методом совпадают, то полученная предельная нагрузка считается действительной, а решение полным.

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки



# Вопросы

- ▶ Что такое нелинейность?
- ▶ Какие виды нелинейности бывают? Примеры.
- ▶ Что такое упругие и пластические деформации?
- ▶ Какую часть диаграммы деформирования описывает закон Гука?
- ▶ Что такое пластический шарнир?
- ▶ Что такое допускаемое значение нагрузки?
- ▶ Что такое предельное значение нагрузки?
- ▶ Какое соотношение между этими двумя величинами?

# Вопросы

- ▶ Как изменяется статически неопределимая система при возникновении пластического шарнира?

В чем разница метода допускаемых напряжений и метода предельных состояний? Какой метода даёт большую величину для внешней нагрузки?

- ▶ Объясните статический метод определения предельной нагрузки.

# Вопросы

- ▶ Как изменяется статически неопределимая система при возникновении пластического шарнира?

В чем разница метода допускаемых напряжений и метода предельных состояний? Какой метода даёт большую величину для внешней нагрузки?

- ▶ Объясните статический метод определения предельной нагрузки.
- ▶ Какие проверки нужно делать для каждого варианта образования пластических шарниров?
- ▶ Как выбирается значение предельной силы из всех вариантов для схем образования пластических шарниров?

# Вопросы

- Объясните кинематический метод определения предельной нагрузки.

# Вопросы

- ▶ Объясните кинематический метод определения предельной нагрузки.
- ▶ Что такое возможное перемещение?
- ▶ Как вычислить работу момента на возможном перемещении?

# Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

- ▶ Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики: учеб. пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов;