

М. Ф. Сухов, Д. А. Кожанов

Нелинейные задачи строительной механики

Учебное пособие

Нижний Новгород

2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»

М. Ф. Сухов, Д. А. Кожанов

Нелинейные задачи строительной механики

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Нижний Новгород
ННГАСУ
2017

ББК 38.112
С 91
К 58
УДК 624.04 (075)

Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики [Текст]: учеб. пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов; Нижегород. гос. архитектур. - строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ, 2017. – 66 с. ISBN 978-5-528-00244-6

Пособие содержит теоретические сведения и основные методы расчета нелинейных задач строительной механики с привлечением классических теорий прочности. Примеры расчета сопровождаются необходимыми пояснениями к решению. Пособие включает многочисленные примеры и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено студентам по направлению подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений для подготовки к лекционным и практическим занятиям по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики».

ISBN 978-5-528-00244-6

© М.Ф.Сухов, Д.А. Кожанов, 2017

© ННГАСУ, 2017

Содержание

1. Предмет и задачи строительной механики	4
1.1. Расчетные схемы сооружений и их классификации	4
1.2. Механические свойства материалов конструкций.....	6
1.3. Основные разрешающие уравнения строительной механики	7
1.4. Основные гипотезы строительной механики	7
1.5. Методы расчета сооружений.....	8
2. Физико-механические свойства металлов	10
3. Основы теории напряженно-деформированного	13
состояния в точке.....	13
3.1. Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженных состояний	13
3.2. Исследование плоского напряженного состояния	15
3.3. Исследование объемного напряженного состояния	19
3.4 Тензор деформаций	21
3.5 Обобщенный закон Гука.....	23
4. Теории прочности.....	25
4.1 Основные положения	25
4.2 Постановка вопроса о прочности.....	26
4.3 Примеры решения задач	28
5. Решение нелинейных и нестационарных задач.....	31
5.1. Физически и геометрически нелинейные задачи	31
5.1.1. Общие представления о нелинейных задачах	31
5.1.2. Шаговые методы решения нелинейных задач.....	32
5.2 Расчет конструкций по методу предельного равновесия	32
5.2.1. Основные положения метода предельного равновесия.....	34
5.2.2. Основы теории пластичности.....	36
5.2.3. Определение предельного состояния системы при растяжении-сжатии.....	39
5.2.4 Предельное состояние статически определимых систем при изгибе	46
5.2.5. Расчет статически неопределимых балок по предельному состоянию.	49
5.2.6. Расчет рам методом предельного равновесия	53
5.2.7 Задание на Расчетно-графическую работу «Расчет рам методом предельного равновесия»	59
5.2.8 Вопросы для самопроверки	64
5.2.9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	64

1. Предмет и задачи строительной механики

1.1. Расчетные схемы сооружений и их классификации

Единый объект, построенный (сооруженный) человеком, называется сооружением. Сооружения необходимы для удовлетворения жизненных потребностей людей и улучшения качества их жизни. Они должны быть удобными, прочными, устойчивыми и безопасными.

Вопросами расчета сооружений занимается специальная наука строительная механика, которую часто называют механикой сооружений. В результате развития методов расчета и компьютерных технологий строительная механика поднялась на современный высокий уровень, что позволило осуществлять строительство легких, экономичных и одновременно надежных конструкций.

Строительной механикой, в широком смысле, называется наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость при действии на них статических и динамических нагрузок.

Строительная механика является и теоретической, и прикладной наукой. С одной стороны, она разрабатывает теоретические основы методов расчета, а с другой стороны – является инструментом расчета, так как решает важные практические задачи, связанные с прочностью, жесткостью и устойчивостью сооружений.

Воздействие нагрузок приводит как к деформированию отдельных элементов, так и самого сооружения в целом. Расчетом и теоретической оценкой результатов их воздействия занимается механика деформированного твердого тела. Частью этой науки является прикладная механика (сопротивление материалов), занимающаяся расчетом простейших сооружений или их отдельных элементов. Другая ее часть – строительная механика уже позволяет рассчитывать разные и весьма сложные многоэлементные сооружения. Для правильного расчета таких сооружений следует правильно применять общие законы механики, основные соотношения, учитывающие механические свойства материала, условия взаимодействия элементов, частей и основания сооружения. На этой базе формируются расчетная схема сооружения в виде механической системы и ее математическая модель как система уравнений.

Чем подробнее изучаются внутреннее строение сооружения, действующая на него нагрузка и особенности материала, тем сложнее становится его математическая модель.

Основными задачами строительной механики, а точнее механики инженерных конструкций являются разработка методов для определения прочности, жесткости, устойчивости, долговечности конструкций инженерных сооружений и получения данных для их надежного и экономичного проектирования. Для обеспечения необходимой надежности сооружения, т.е. исключения возможности его разрушения, основные элементы конструкций должны иметь достаточно большие сечения. Экономика же требует, чтобы расход материалов, идущих на изготовление конструкций, был минимальным. Чтобы сочетать требования надежности с экономичностью, необходимо с большей точностью производить расчёты и строго соблюдать в процессе проектирования требования к возведению и эксплуатации сооружения.

Современная строительная механика имеет целый ряд классификаций решаемых задач. Различают *плоские задачи*, которые решаются в двух измерениях, и *пространственные задачи*, решаемые в трех измерениях. Обычно пространственные конструкции стремятся расчленить на плоские элементы, расчет которых значительно проще, однако это не во всех случаях удается. Большинство основных методов расчета и теорем излага-

ется применительно к плоским системам. Дальнейшие обобщения на пространственные системы, как правило, требуют лишь написания более громоздких формул и уравнений.

Строительная механика разделяется также на *линейную* и *нелинейную*. Обычно задачи строительной механики решаются в линейной постановке. Но при больших деформациях или использовании неупругих материалов ставятся и решаются нелинейные задачи. Различают *геометрическую* и *физическую* нелинейности. **Геометрическая нелинейность** уравнений строительной механики обычно возникает при больших перемещениях и деформациях элементов, что в строительных конструкциях встречается сравнительно редко. **Физическая нелинейность** появляется при отсутствии пропорциональности между усилиями и деформациями, то есть при использовании неупругих материалов. Физической нелинейностью в той или иной степени обладают все конструкции, однако при небольших напряжениях нелинейные физические зависимости можно заменить линейными.

Любое сооружение представляет собой пространственный объект. Действующая на него внешняя нагрузка также является пространственной. Значит, и расчетную схему сооружения надо выбирать как пространственную. Однако такая схема приводит к сложной задаче составления и решения большого числа уравнений. Поэтому реальное сооружение стараются привести к плоской системе.

Выбор и обоснование расчетной схемы – задача чрезвычайно ответственная, сложная, требующая высоких профессиональных навыков, опыта, интуиции, в определенной мере – искусства.

Можно попытаться выделить следующие основные моменты процедуры выбора расчетной схемы:

- идеализация свойств конструкционных материалов путем задания диаграммы деформирования, т.е. закона связи напряжений и деформации при нагружении;
- схематизации геометрии конструкции, состоящая в представлении ее в виде набора одно- двух- и трехмерных элементов, тем или другим образом связанных между собой;
- схематизация нагрузки, например, выделение сосредоточенной силы, распределенной и т.д.;
- ограничение на величину возникающих в конструкции перемещений, например, по сравнению с размерами конструкции.

Простейшие сооружения можно подразделять на следующие типы – *стержневые сооружения* (рис. 1.1, а, б), *складчатые сооружения* (рис. 1.1, в), *оболочки* (рис. 1.1, г) и *массивные сооружения* – подпорные стенки (рис. 1.1, д) и каменные своды (рис. 1.1, е):

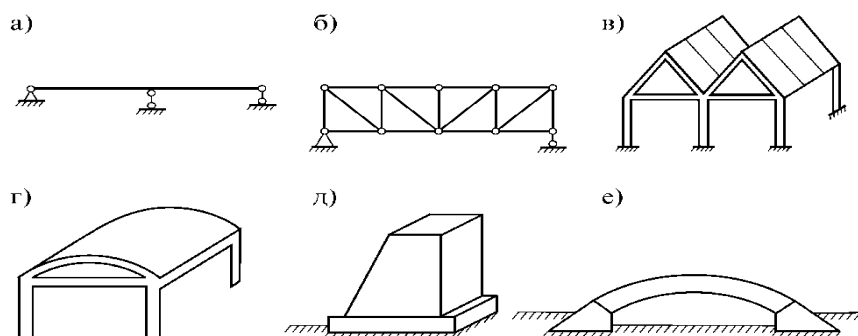


Рис. 1.1

1.2. Механические свойства материалов конструкций

Объектом исследования в строительной механике является идеально упругое тело, наделенное следующими свойствами:

- сплошности – тело, сплошное до деформации, остается сплошным и в деформируемом состоянии;
- изотропности – физико-механические свойства тела во всех направлениях одинаковы;
- однородности – свойства тела одинаковы во всех точках тела.

Свойства материала конструкции имеют важное значение для характера ее работы. При умеренных воздействиях многие материалы конструкций могут рассматриваться как **упругие**, т.е. подчиняющиеся закону Гука. Например, это относится к стали, которая имеет почти строго прямолинейный начальный участок диаграммы зависимости напряжений σ от деформаций ε (рис.1.2, а). Однако, при больших напряжениях в стальных конструкциях пропорциональность между напряжениями и деформациями нарушается и материал переходит в стадию пластического деформирования. **Действительная диаграмма** работы деформирования стали Ст.3, показанная на рис.1.2, а, часто заменяется приближенной, **условной диаграммой**, состоящей из кусочно-линейных участков. Условная диаграмма, состоящая из наклонного и горизонтального участков (рис. 1.2, б), носит название **диаграммы идеально упругопластического тела**, или **диаграммы Прандтля**.

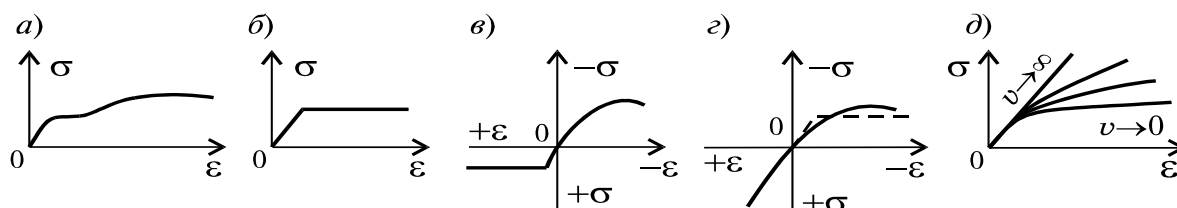


Рис. 1.2

Расчёт по диаграмме Прандтля имеет свои особенности и называется расчёт по методу **предельного равновесного состояния**. Этот расчёт дает возможность находить предельную несущую способность системы, при которой заданная система уже не может воспринимать дальнейшее приращение нагрузки, так как деформации беспредельно возрастают.

Сталь (Ст.3) допускает большие деформации без разрушения. В конце концов разрушение наступает и здесь, но предшествующие большие деформации могут быть своевременно замечены, и причина возможного разрушения может быть устранена. Поэтому, с точки зрения безопасности конструкции, сталь Ст.3 является очень хорошим материалом.

Стали с повышенным содержанием углерода и легированные допускают меньшие пластические деформации до разрушения.

У разных материалов характер деформирования может значительно отличаться от приведённой на рис.1.2 диаграммы деформирования стали Ст.3.

Следует заметить, что расчёт по нелинейной диаграмме работы материала тоже не является вполне точным и строгим, так как фактическая диаграмма зависит не только от свойств материала конструкции, но и от режима нагружения: при больших скоростях нагружения она приближается к прямой линии закона Гука, при малых скоростях наблюдается рост пластических деформаций (рис.1.2, д). Таким образом, в зависимость напряжений от деформаций входит фактор времени. Раскрытие этих зависимостей приводит к

уравнениям ползучести, которые имеют вид уже не обычных алгебраических функций, а дифференциальных или интегральных соотношений.

Наиболее хорошо разработаны методы расчёта конструкций из упругих материалов, т.е. подчиняющихся закону Гука. Строительная механика упругих линейно - деформируемых систем представляет собой стройную науку и наиболее широко применяется при выполнении практических расчетов.

1.3. Основные разрешающие уравнения строительной механики

Исходные уравнения строительной механики можно разделить на три группы:

Уравнения равновесия, представляющие статическую сторону задачи расчёта сооружения. Эти уравнения устанавливают взаимосвязь между внешними и внутренними усилиями, которые входят в них линейно. Таким образом, уравнения равновесия всегда линейные.

Уравнения совместности деформаций, представляющее геометрическую сторону задачи расчёта сооружений. В этих уравнениях деформации удлинения, сжатия, изгиба и т.п. связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения нелинейные. Но если учесть, что перемещения и деформации, как правило, малы для реальных систем по сравнению с размерами конструкций, то уравнения, связывающие их, становятся линейными.

Физические уравнения связывают напряжения с деформациями. Для многих материалов эти уравнения можно получить на основе закона Гука. Однако поскольку большинство материалов подчиняются этим зависимостям лишь при малых напряжениях, то линейную связь между усилиями и деформациями следует считать довольно грубым приближением, особенно в тех случаях, когда напряжения в конструкциях приближаются к разрушающим. Вместе с тем расчёт на основе закона Гука можно считать оправданным при работе конструкции в стадии упругой деформации, когда до разрушения конструкции еще далеко.

1.4. Основные гипотезы строительной механики

Принято считать, что при рассмотрении задач строительной механики, *деформации малы по сравнению с единицей, а перемещения – по сравнению с размерами тела*. Эта гипотеза позволяет рассматривать в нагруженном состоянии **недеформированную** форму тела. Кроме того, в основу положена *линейная связь между внешними силами и перемещениями или между деформациями и напряжениями*. Указанные гипотезы упрощают решение задач строительной механики, не искажая при этом действительную картину напряженно-деформированного состояния тела.

Если все уравнения: равновесия, совместности деформаций и физические, составленные для данной конструкции линейные, то расчётная схема представляет собой линейно - деформированную систему, для которой справедлив **принцип независимости действия сил**. Этот принцип формулируется таким образом: если на конструкцию действует несколько видов нагрузок, то суммарный результат действия этих нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки по отдельности. Этот принцип относится к усилиям, деформациям, перемещениям и другим расчётным величинам.

Из принципа независимости действия сил следует, что исходную конструкцию можно рассчитывать, как отдельные конструкции с единичными усилиями, а затем результаты умножить на значения этих усилий и просуммировать.

Если хотя бы одно из геометрических или физических уравнений будет нелинейным, то принцип независимости действия сил в общем случае неприменим, и конструкцию следует рассчитывать сразу под суммарным действием всех нагрузок.

1.5. Методы расчета сооружений

Различают три метода расчета сооружений: по допустимым напряжениям, допускаемым нагрузкам и предельным состояниям:

- Расчет по допустимым напряжениям

Максимальные для данной конструкции напряжения сопоставляются с допускаемыми, составляющими некоторую долю от разрушающих напряжений, согласно условию

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

где σ_{\max} – максимальные напряжения в опасных точках;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение,

$[\sigma] = \sigma_0/k_3$; где σ_0 – напряжения, принимаемые за опасные и определяемые экспериментально;

k_3 – коэффициент запаса прочности.

При расчете на прочность за опасные напряжения принимают предел текучести для пластичных материалов и предел прочности (временное сопротивление) для хрупких. При оценке устойчивости разрушающими считаются критические напряжения. Таким образом, при использовании метода расчета по допускаемым напряжениям о прочности всей конструкции судят по напряжениям в опасных точках, что имеет смысл для систем, напряжения в которых распределяются равномерно по сечениям, и систем, в которых разрушение одного элемента влечет за собой разрушение всей конструкции в целом (например, статически определимые фермы).

Для многих конструкций, изготовленных из пластичных материалов, появление в какой-либо точке напряжений, равных разрушающим, еще не означает, что данная система выйдет из строя (разнообразные балки, статически неопределимые системы). Это относится и к тем конструкциям, в которых появление местных трещин не является признаком начала разрушения сооружения.

- Расчет по допускаемым нагрузкам

Наиболее полно учитываются резервы прочности при использовании метода расчета по допускаемым нагрузкам, когда нагрузку, действующую на сооружение, сравнивают с допустимой:

$$P \leq [P], \quad (1.2)$$

где P – действующая нагрузка,

$[P] = P_{\text{разр}}/k_3$ – допустимая нагрузка,

$P_{\text{разр}}$ – разрушающая нагрузка.

Общим недостатком первых двух методов является наличие единого коэффициента запаса, не позволяющего дифференцированно подходить к оценке влияния всех факторов, определяющих прочность и жесткость сооружения. Этому недостатка лишен метод расчета строительных конструкций по предельным состояниям.

- Расчет по предельным состояниям

Предельным называют такое состояние конструкции, при котором она теряет способность сопротивляться внешним нагрузкам или становится непригодной для дальнейшей эксплуатации. Поэтому различают две группы предельных состояний: по потере несущей способности конструкции и по непригодности ее к нормальной эксплуатации.

Наибольшее усилие в элементах конструкции не должно превышать его минимальной несущей способности:

$$S_{\text{расч}} \leq S_{\text{пред}}, \quad (1.3)$$

где $S_{\text{расч}}$ – расчетные усилия,

$S_{\text{пред}}$ – предельное сопротивление.

Для определения $S_{\text{расч}}$ и $S_{\text{пред}}$ берется не общий коэффициент запаса, а целая система коэффициентов:

- коэффициент перегрузки $n \geq 1$, учитывающий возможное превышение нормативных нагрузок;
- коэффициент безопасности по материалу $k > 1$, учитывающий возможное отклонение прочности материала от среднестатистического значения;
- коэффициент m , характеризующий условия работы (влажность и агрессивность среды, температура, концентрация напряжений, длительность и повторяемость воздействий, приближенность расчетных схем реальному сооружению и др.);
- коэффициент надежности k_n , учитывающий степень ответственности и капитальности зданий и сооружений, а также значимость перехода в те или иные предельные состояния.

Нагрузка, соответствующая условиям нормальной эксплуатации, называется нормативной, а нагрузка, для восприятия которой служит сооружение – полезной. Все нагрузки разделяются на постоянные и временные. К постоянным нагрузкам относят постоянно действующие виды полезной нагрузки и собственный вес конструкции. Нагрузки, которые при расчете сооружения могут считаться действующими или отсутствующими в данный момент времени, называются временными. К ним относятся снеговые и ветровые нагрузки, а также подвижные (вес движущегося автомобиля, вес скопления людей и т.п.).

Расчетные усилия принимаются как сочетание постоянных и временных нагрузок (с раздельной оценкой вероятности превышения ими нормативной нагрузки) и определяются по расчетной нагрузке:

$$S_{\text{расч}} = S_{\text{норм}} n, \quad (1.4)$$

где $S_{\text{норм}}$ – нормативная нагрузка.

Предельное сопротивление (предельная внутренняя сила):

$$S_{\text{пред}} = AR, \quad (1.5)$$

где A – геометрическая характеристика сечения,

R – расчетное сопротивление, которое определяют по нормативному сопротивлению с учетом коэффициентов безопасности по материалу, условиям работы и надежности,

$$R = \left[\frac{R^H}{(k \cdot k_H)} \right] m \quad (1.6)$$

Тогда условие прочности можно записать в виде:

$$\sigma = S_{\text{расч}} / A \leq R. \quad (1.7)$$

При расчете сооружений по второй группе предельных состояний необходимо выполнить условие, обеспечивающее нормальную эксплуатацию сооружения:

$$\Delta_{\text{норм}} \leq f_{\text{пред}}, \quad (1.8)$$

где $\Delta_{\text{норм}}$ – перемещение, являющееся функцией нормативных нагрузок, механических, упругих и пластических свойств материала и геометрических характеристик сооружения, $f_{\text{пред}}$ – предельное нормативное перемещение.

2. Физико-механические свойства металлов

Испытания образцов на растяжение проводятся с целью экспериментального определения механических характеристик материалов. Наиболее распространенными в настоящее время являются испытания цилиндрических и плоских образцов в условиях одноосного растяжения.

Широкому применению этого вида испытаний способствует относительная простота их осуществления, так как имеется большой парк разрывных и универсальных испытательных машин (например, УММ-20 или МИ-40КУ). Испытание на растяжение заключается в плавном деформировании закрепленного в захватах испытательной машины образца из исследуемого материала до наступления его разрушения. При этом специальные приборы фиксируют зависимость абсолютного удлинения образца от прикладываемой к нему продольной растягивающей нагрузки.

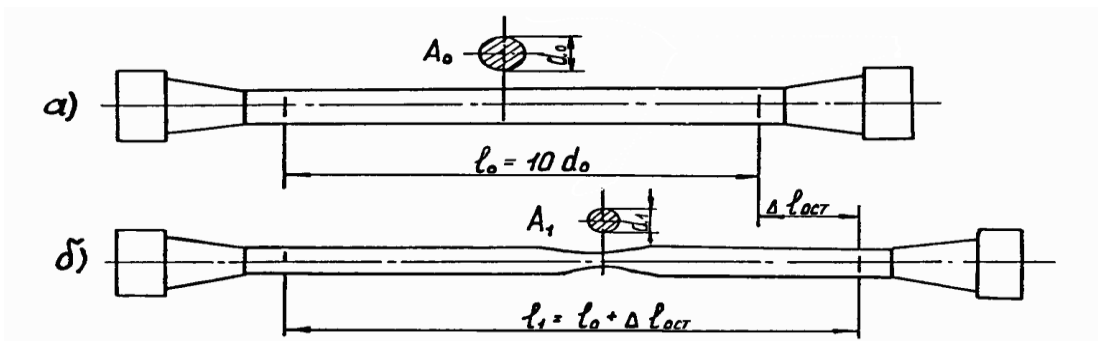


Рис. 2.1

В процессе испытаний измеряются сила, действующая на образец, и удлинение его расчетного участка. Результатом испытаний является **графическая диаграмма растяжения**.

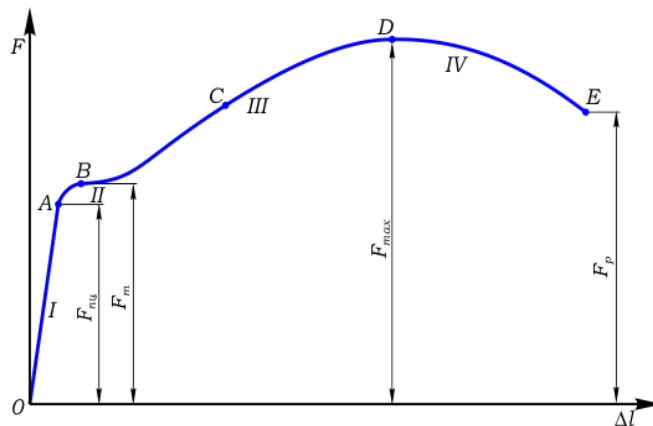


Рис. 2.2. Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали

Из рисунка 2.2 следует, что диаграмма имеет четыре характерных участка:

I - участок пропорциональности;

II - участок текучести;

III - участок самоупрочнения;

IV - участок разрушения.

Рассмотрим подробнее процесс построения диаграммы.

В самом начале испытания на растяжение, растягивающая сила F , а следовательно, и деформация Δl стержня равны нулю, поэтому диаграмма начинается из точки пересечения соответствующих осей (точка O).

На участке *I* до точки A диаграмма вычерчивается в виде прямой линии. Это говорит о том, что на данном отрезке диаграммы деформации стержня Δl растут пропорционально увеличивающейся нагрузке F . На этом участке выполняется закон Гука – математическая линейная зависимость между напряжениями и деформациями: $\varepsilon E = \sigma$, где E – модуль упругости (Юнга) равный тангенсу угла наклона прямого участка диаграммы к оси абсцисс.

После прохождения точки A диаграмма резко меняет свое направление и на участке *II*, начинающемся в точке B , линия какое-то время идет практически параллельно оси Δl , то есть деформации стержня увеличиваются при практически одном и том же значении нагрузки. Этот участок диаграммы называется площадкой текучести. В этот момент в металле образца начинают происходить необратимые изменения. Перестраивается кристаллическая решетка металла. При этом наблюдается эффект его самоупрочнения.

При дальнейшем повышении нагрузки диаграмма снова «идет вверх» (участок *III*) и в точке D растягивающее усилие достигает максимального значения. В этот момент в рабочей части испытуемого образца появляется локальное утоньшение, так называемая «шейка», вызванное нарушениями структуры материала (образованием пустот, микротрещин и т.д.).



Рис. 2.3. Стальной образец с «шейкой»

Вследствие утоньшения, и, следовательно, уменьшения площади поперечного сечения образца, растягивающее усилие, необходимое для его растяжения уменьшается, и кривая диаграммы «идет вниз».

В точке E происходит разрыв образца. Разрывается образец в сечении, где была образована «шейка».

По диаграмме также можно определить величину **упругих и остаточных деформаций** в любой момент процесса испытания.

Для получения непосредственно механических характеристик металла образца диаграмму растяжения необходимо преобразовать в **диаграмму напряжений**.

Для полученных значений точек диаграммы определяются соответствующие им нормальные напряжения σ , по формуле:

$$\sigma_i = F_i / A_0, \quad (2.1)$$

где: F_i - значение растягивающей силы в характерной точке диаграммы,

A_0 - площадь поперечного сечения рабочей части образца,

и относительные деформации ε :

$$\varepsilon_i = \Delta l / l_0, \quad (2.2)$$

где l_0 - начальная длина рабочей части испытуемого образца.

По полученным данным в системе координат σ - ε строится диаграмма напряжений (рис. 2.4).

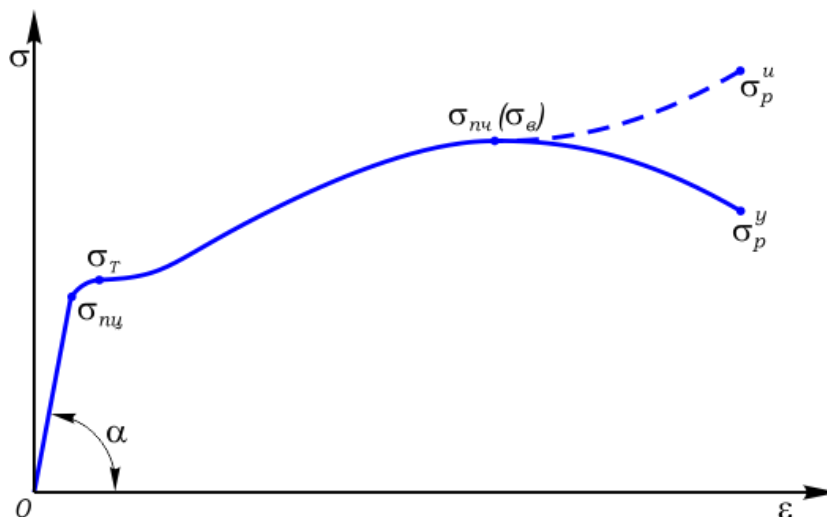


Рис. 2.4. Условная и истинная диаграмма напряжений для малоуглеродистой стали

По этой диаграмме определяются следующие механические характеристики материала:

- Предел пропорциональности $\sigma_{ну}$ - максимальное напряжение, при котором выполняется закон Гука. Определяется как крайняя верхняя точка начального прямолинейного участка диаграммы:

$$\sigma_{ну} = F_{ну} / A_0. \quad (2.3)$$

- Предел текучести материала σ_T - наименьшее напряжение, при котором деформация увеличивается без заметного увеличения нагрузки. На диаграмме - точка, после которой линия диаграммы некоторое время движется параллельно оси деформаций ε . Практически горизонтальный участок диаграммы, следующий за пределом текучести, называется *площадкой текучести*:

$$\sigma_T = F_T / A_0. \quad (2.4)$$

- Предел прочности (временное сопротивление) σ_B ($\sigma_{пч}$) - напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, предшествующей разрушению образца. При отсутствии площадки текучести (что характерно для диаграмм растяжения большинства материалов, после предварительной пластической деформации) определяют условный предел текучести $0,2\sigma_B$, который называется техническим пределом прочности. Условным пределом текучести напряжение, при котором остаточная (пластическая) деформация составляет 0,2 %.

$$\sigma_B = F_{max} / A_0. \quad (2.5)$$

Конечная точка диаграммы, при которой происходит разрыв образца:

- условное напряжение разрыва $\sigma_p^y = F_p / A_0$,
- истинное напряжение при разрыве $\sigma_p^u = F_p / A_{ш}$,

здесь $A_{ш}$ - площадь поперечного сечения в области «шейки» образца.

При более тонких испытаниях по данной диаграмме можно определить предел упругости стали. Пределом упругости $\sigma_{\text{упр}}$ называют максимальное напряжение, при котором не возникают остаточные деформации. Принято считать за максимальное то напряжение, при котором в испытуемом образце появляются деформации 0,05%.

На рисунке 2.4 штриховой линией показан фрагмент истинной диаграммы напряжений. Возрастание напряжений после прохождения предела прочности объясняется тем, что в этот момент в рабочей части образца образуется локальное утоньшение («шейка»), уменьшающая его площадь поперечного сечения A , что в свою очередь приводит к увеличению напряжений при уменьшении растягивающей силы.

Кроме того, по диаграмме напряжений можно приближенно определить величину модуля упругости E материала образца:

$$E = \sigma/\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.6)$$

Модуля упругости E определяется как отношение напряжений и относительных деформаций, для любой точки диаграммы, расположенной от ее начала до предела пропорциональности, либо как тангенс угла наклона начального участка диаграммы к оси ε .

Еще одна важная характеристика материала – это оценка интенсивности деформации $\varepsilon_{\text{и}}$, где применяют такие понятия, как: относительная продольная деформации $\varepsilon_{\text{пр}}$, приходящаяся на единицу длины, или ε' относительная поперечная деформация, приходящаяся на единицу параметра сечения (высота, ширина).

Продольная и поперечная деформации связаны соотношением (закон Пуассона)
 $\nu = \varepsilon'/\varepsilon_{\text{пр}}$, где ν – коэффициент Пуассона – постоянная материала в пределах упругости.

Предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести, модуль упругости и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) характеризуют упругие свойства материала, необходимые для создания прочных и надежных конструкций.

3. Основы теории напряженно-деформированного состояния в точке

3.1. Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженных состояний

Значения нормальных и касательных напряжений на произвольных площадках, проходящих через какую-либо точку тела, зависят от положения этих площадок.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на различных площадках, проходящих через заданную точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

В курсе теории упругости доказано, что в окрестности любой точки можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения будут отсутствовать. Такие площадки называются главными. Нормальные напряжения на главных площадках принимают экстремальные значения, называются главными напряжениями и обозначаются: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Здесь σ_1 – наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение, σ_3 – наименьшее, а σ_2 – промежуточное, т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

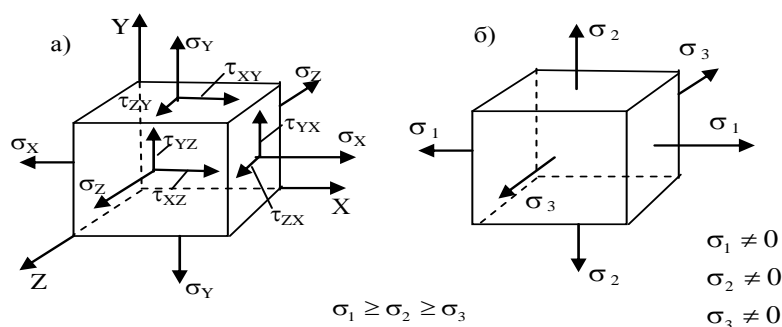
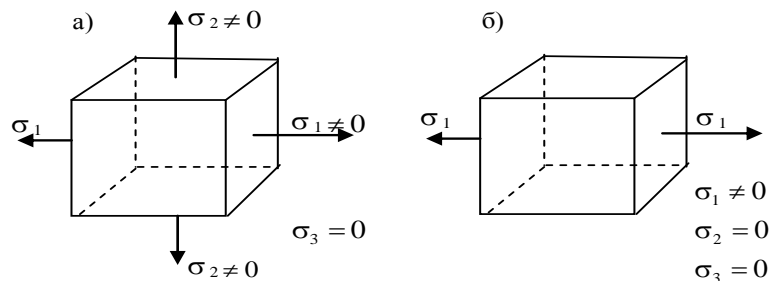


Рис. 3.1

На рис. 3.1а показаны три взаимно перпендикулярные произвольные площадки, на гранях которых действуют нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения показаны растягивающими, т.е. положительными. Касательные напряжения (на каждой грани по два) показаны с двумя индексами: первый индекс указывает параллельно какой оси координат действует, а второй – на грани с какой нормалью. В общем случае напряженное состояние в точке описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

На рис. 3.1б показан параллелепипед с бесконечно малыми размерами сторон, грани которого являются главными площадками, так как на них отсутствуют касательные напряжения. В зависимости от наличия отличных от нуля главных напряжений на главных площадках различают три вида напряженных состояний:



Другие возможные комбинации	
При ПНС	При ЛНС
$\sigma_1 \neq 0; \sigma_3 \neq 0; \sigma_2 = 0;$	$\sigma_3 \neq 0; \sigma_1 = \sigma_2 = 0$
$\sigma_2 \neq 0; \sigma_3 \neq 0; \sigma_1 = 0$	

Рис. 3.2

1. Если все три главных напряжения отличны от нуля, то имеет место в данной точке *объемное или пространственное напряженное состояние* (ОНС) (рис. 3.1б).
2. В том случае, когда два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю – имеет место *плоское напряженное состояние* (ПНС) (рис. 3.2а).
3. Если только одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю, имеет место *одноосное (линейное) напряженное состояние* (ЛНС) (рис. 3.2б).

3.2. Исследование плоского напряженного состояния

Как было указано выше, если одно из главных напряжений равно нулю, то объемное напряженное состояние исключается. Однако, чтобы точно сказать, плоское или одноосное напряженное состояние имеет место в данной точке, необходимо определить два других главных напряжения.

Вырежем параллелепипед с бесконечно малыми размерами сторон dx , dy , dz так, чтобы на одной из трех взаимно перпендикулярных площадок отсутствовали напряжения. Это будет означать, что одно главное напряжение равно нулю. В этом случае, как указывалось ранее, не будет объемного напряженного состояния. Такие элементы можно вырезать из стенки изгибаемых балок, стеновых панелей и т.п., когда одна из граней совпадает со свободной от напряжений поверхностью.

Пусть на двух оставшихся взаимно перпендикулярных площадках будут известны нормальные и касательные напряжения: σ_x , σ_y , τ_{yx} , τ_{xy} (рис. 3.3а).

Определим нормальные и касательные напряжения на произвольных площадках, повернутых к заданным на угол α и перпендикулярных к грани, свободной от напряжений.

Ранее было принято следующее правило знаков для нормальных напряжений: *растягивающие* будем считать *положительными*, а *сжимающие* – *отрицательными*.

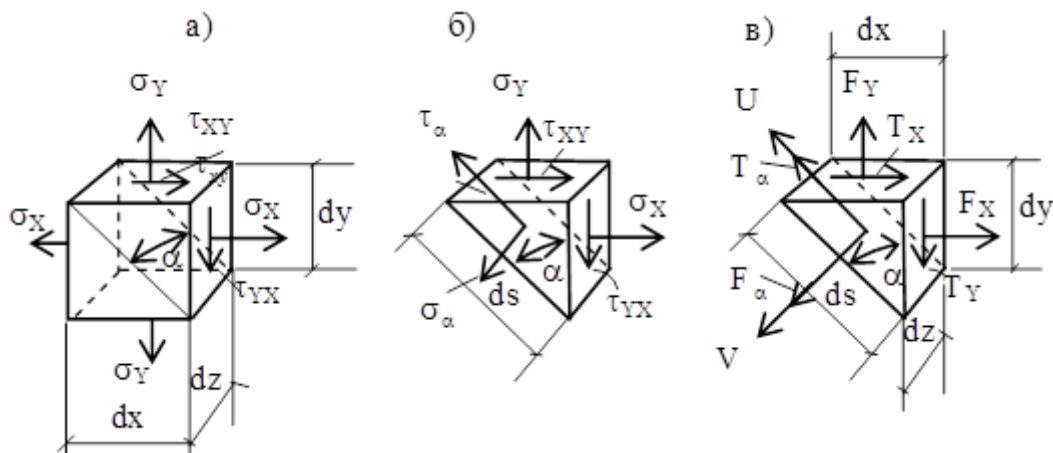


Рис. 3.3

Касательные напряжения будем считать положительными, если они стремятся сдвинуть выделенный элемент по ходу часовой стрелки, и отрицательными – если против хода часовой стрелки.

Проведем наклонное сечение под углом α к вертикальной грани против хода часовой стрелки, отбросим одну часть, приложим к наклонному сечению напряжения σ_α и τ_α и рассмотрим равновесие оставшейся части с размерами сторон dx , dy , ds (рис. 3.3б).

В связи с тем, что все размеры выделенной призмы бесконечно малы, касательные и нормальные напряжения по ее боковым и наклонным граням можно считать распределенными равномерно. Поэтому силы, действующие по граням призмы равны произведению площади грани на соответствующее напряжение. Приложим эти силы в центре тяжести соответствующих граней (рис. 3.3в).

Составим следующие уравнения равновесия для выделенной призмы:

$$1. \sum M_0 = 0; \quad T_y \cdot \frac{dx}{2} + T_x \cdot \frac{dy}{2} = 0;$$

$$\sum M_0 = \tau_{yx} dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0,$$

отсюда:

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}. \quad (3.2)$$

Следовательно, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, действующие по нормали к ребру, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Эта зависимость между τ_{yx} и τ_{xy} называется законом парности касательных напряжений (рис. 3.3в).

$$2. \sum V = F_\alpha - F_x \cdot \cos \alpha - T_x \cdot \cos \alpha - F_y \cdot \sin \alpha + T_y \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \sum V = \sigma_\alpha ds \cdot dz - \sigma_x dy \cdot dz \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} dy \cdot dz \cdot \cos \alpha - \\ - \sigma_y dx \cdot dz \cdot \sin \alpha + \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно σ_α . Учитывая, что $\frac{dx}{ds} = \sin \alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$, после элементарных преобразований, получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha. \quad (3.3)$$

$$3. \sum U = 0.$$

Расписав это уравнение равновесия и используя преобразования, приведенные для второго уравнения равновесия, получим:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha. \quad (3.4)$$

Формулы (3.3) и (3.4) позволяют определять нормальные и касательные напряжения по любым площадкам, проходящим через заданную точку, если известны нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Если необходимо определить нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной наклонной, то в формулу (3.3) вместо α подставим $\alpha + 90^\circ$. После указанной подстановки получим

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha. \quad (3.5)$$

Найдем сумму нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках σ_α и $\sigma_{\alpha+90^\circ}$, т.е. сложим напряжения по формулам (3.3) и (3.5) и получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const}. \quad (3.6)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная и от положения этих площадок не зависит.*

Следовательно, если по одной из таких площадок нормальные напряжения имеют максимальное значение, то по другой они имеют минимальное значение.

При расчете инженерных конструкций нет необходимости определять нормальные напряжения по всем площадкам, проходящим через заданную точку. Достаточно знать

максимальные и минимальные их значения, которые, как отмечалось ранее, называются главными напряжениями.

Для определения величин главных напряжений и положения главных площадок функцию для σ_α (3.3) исследуем на экстремум, т.е. приравняем нулю первую производную от напряжения σ_α по α при некотором значении угла $\alpha = \alpha_0$:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\sigma_x \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} 2\cos 2\alpha.$$

При $\alpha = \alpha_0$, используя известные тригонометрические зависимости, получим:

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + \tau_{yx} \cos 2\alpha_0 \right)}_{\tau_{\alpha_0}} = 0, \quad (3.6)'$$

здесь α_0 – угол наклона главной площадки к площадке, в которой действуют заданные напряжения σ_x (рис. 3.3б).

Сравнивая выражение (3.6)' с формулой (3.4), устанавливаем, что

$$\left(\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2 \cdot \tau_{\alpha_0} = 0.$$

Отсюда следует, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, т.е.:

$$\tau_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + \tau_{yx} \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (3.7)$$

Из соотношения (3.7) получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (3.8)$$

или, используя (3.2):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.9)$$

Формулы (3.8) и (3.9) дают значения углов α_0 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки, на которых действуют главные напряжения.

Следовательно, для определения положения главных площадок, необходимо площадки, на которых действуют заданные напряжения σ_x и σ_y , повернуть на угол α_0 против хода часовой стрелки (при $\alpha_0 > 0$) или по ходу часовой стрелки (при $\alpha_0 < 0$).

Следует иметь в виду, что наибольшее главное напряжение должно проходить в тех четвертях, где сходятся касательные напряжения τ_{yx} и τ_{xy} , и оно всегда находится ближе к тому из заданных нормальных напряжений, значения которого с алгебраической точки зрения больше.

Главные напряжения можно определить, подставляя значения угла α_0 в формулу (3.3).

Эти же напряжения можно определять и без предварительного определения угла α_0 , если (3.8) или (3.9) подставить в формулу (3.3). В результате элементарных преобразований получаем следующую формулу для определения величин главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} . \quad (3.10)$$

Определим также площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные (максимальные и минимальные) значения. Такие площадки называются *площадками сдвига*.

Для этого приравняем нулю первую производную функции (3.4) при некотором значении угла α_1 :

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_1} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 - 2\tau_{yx} \sin 2\alpha_1 = 0 ,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}} , \quad (3.11)$$

здесь α_1 – угол наклона площадки сдвига к заданной площадке, по которой действует напряжение σ_x .

Если угол α_1 положителен, то эту площадку надо повернуть против хода часовой стрелки, а если отрицателен – то по ходу часовой стрелки.

Формула (3.11) дает значение угла α_1 , определяющее положение одной из двух взаимно перпендикулярных площадок. Положение другой площадки определяется поворотом на угол $\alpha + 90^\circ$. По одной из двух площадок действует максимальное касательное напряжение τ_{\max} , а по другой – минимальное τ_{\min} . Из закона парности касательных напряжений следует, что $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$.

Если определены главные площадки, легко определить величины напряжений τ_{\max} , τ_{\min} и положение площадок, на которых они действуют.

Если в формуле (3.4) для определения касательных напряжений τ_α на произвольной площадке за исходные примем главные напряжения σ_1 и σ_3 вместо σ_x и σ_y , а $\tau_{yx} = 0$, то получим:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha . \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} , \quad (3.13)$$

так как $\sin(2\alpha) = \pm 1$ при $\alpha = \pm 45^\circ$, т.е. *площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углом $\pm 45^\circ$* .

Если в формулу (3.13) подставим выражения σ_1 и σ_3 из соотношения (3.10), найдем:

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} . \quad (3.14)$$

Определим нормальные напряжения на площадках сдвига. Для их определения формулу (3.3) перепишем, подставляя вместо напряжений на произвольных площадках σ_x и σ_y главные напряжения σ_1 и σ_3 , а $\tau_{yx} = 0$:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha . \quad (3.15)$$

При $\alpha = \pm 45^\circ$ получим формулу для определения нормальных напряжений на площадках сдвига:

$$\sigma_{\alpha=\pm 45^\circ} = \sigma_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sigma_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (3.16)$$

Таким образом, из (3.16) следует, что *нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках сдвига равны между собой по величине и знаку*.

Если *нормальные напряжения на площадках сдвига равны нулю*, то такие площадки называются *площадками чистого сдвига*.

Примерами чистого сдвига являются кручение и срез.

3.3. Исследование объемного напряженного состояния

Как было показано ранее в п. 3.1, напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда, в общем случае напряженного состояния представляются в виде тензора напряжений (рис. 3.1а), как упоминалось:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали, поскольку по закону парности касательных напряжений имеем:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Рассмотрим определение главных напряжений и положения главных площадок в случае объемного напряженного состояния (все три главных напряжения не равны нулю) (рис. 3.1б).

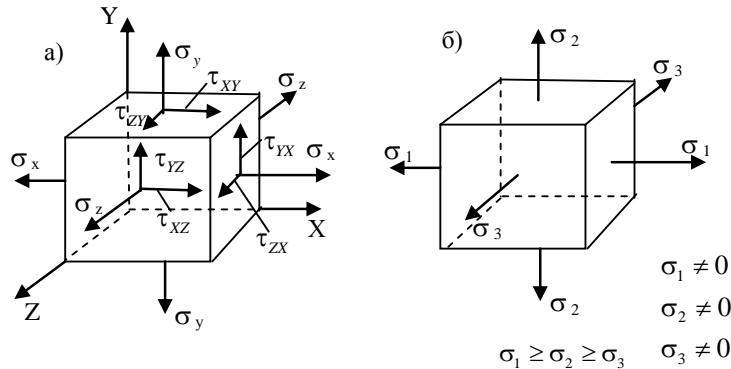


Рис. 3.4

Предположим, что нам известно положение главной площадки, определяемой нормалью v . Сечением, параллельным этой площадке, выделим из исходного параллелепипеда тетраэдр, изображенный на рис. 3.4б, и составим условия равновесия тетраэдра в виде суммы проекций действующих на него сил на оси координат. Введем обозначения для направляющих косинусов нормали v :

$$\cos(x, v) = \ell; \cos(y, v) = m; \cos(z, v) = n. \quad (3.17)$$

Примем площадь наклонной грани тетраэдра $dA = 1$, тогда площади других граней будут: $dA_x = \ell, dA_y = m, dA_z = n$.

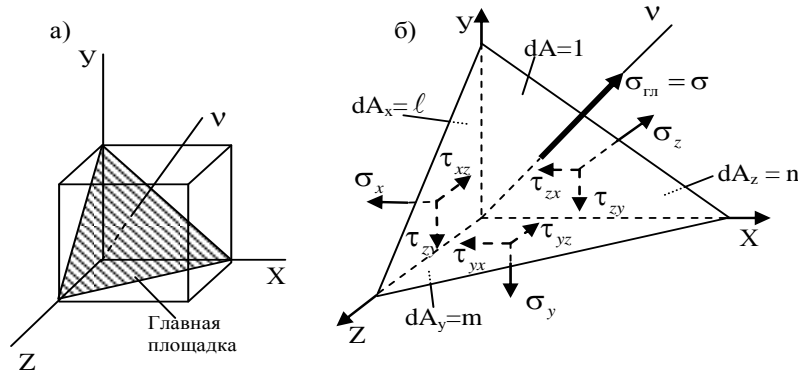


Рис. 3.5

Единственное напряжение, действующее на главной площадке, обозначим $\sigma_{\text{гл}} = \sigma$. Сумма проекций сил на ось X запишется в виде:

$$\sigma \ell - \sigma_x \ell - \tau_{yx} m - \tau_{zx} n = 0.$$

Аналогичные равенства будут для осей Y и Z. Все вместе они составят систему однородных уравнений относительно неизвестных косинусов ℓ , m и n :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \ell + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0 \\ \tau_{xy} \ell + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0 \\ \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.18)$$

Так как между неизвестными существует зависимость

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (3.19)$$

то одновременно они все не могут быть равны нулю. В этом случае (доказано в линейной алгебре) определитель однородной системы уравнений равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (3.21)$$

три корня которого и будут значениями трех главных напряжений в рассматриваемой точке.

Коэффициенты уравнения (3.21) получаются при раскрытии определителя (3.20) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{zy}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{zy}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 + 2 \tau_{yx} \tau_{zx} \tau_{zy}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Эти коэффициенты не зависят от выбора осей координат, поскольку при любых исходных площадках уравнение (3.21) должно давать одни и те же корни σ_1, σ_2 и σ_3 — главные напряжения в точке. Они называются *первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния* (тензора напряжений).

Для определения направляющих косинусов ℓ , m , n , соответствующих одной из трех главных площадок, значение главного напряжения на этой площадке надо подставить в (3.18) вместо σ . Совместное решение уравнений (3.18) и (3.19) и даст искомые значения направляющих косинусов ℓ , m , n .

3.4 Тензор деформаций

Рассмотрим вначале случай плоской деформации (рис. 3.6). Пусть плоский элемент $MNPQ$ перемещается в пределах плоскости и деформируется (изменяет форму и размеры). Координаты точек элемента до и после деформации отмечены на рисунке.

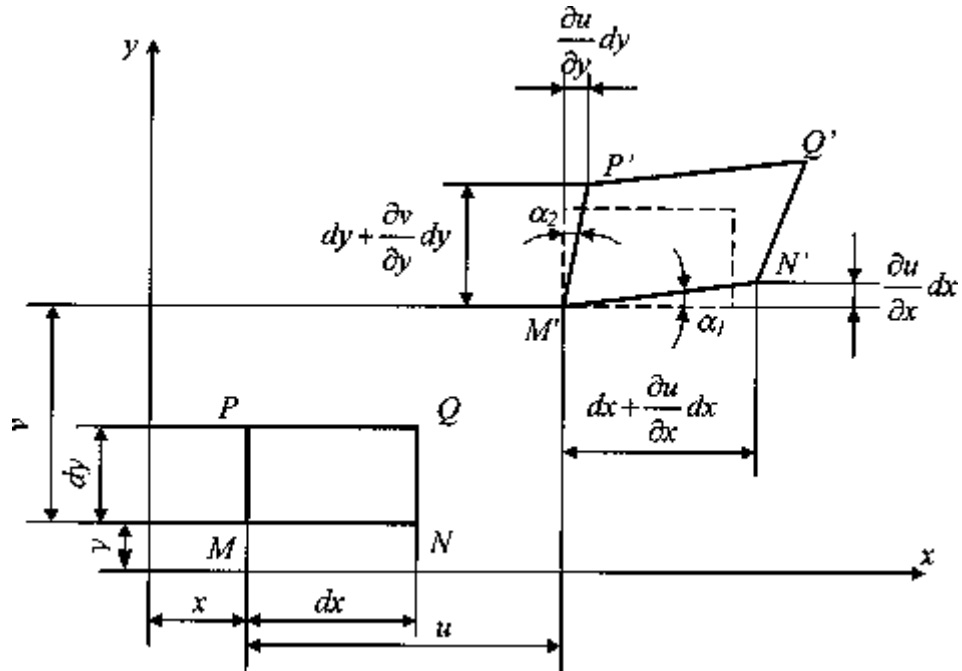


Рис. 3.6. Плоская деформация

По определению относительная линейная деформация в точке M в направлении оси Ox равна

$$\varepsilon_x = (M'N' - MN) / MN.$$

Из рис. 3.6 следует

$$M'N' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2}.$$

Учитывая, что $MN = dx$, получим

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1.$$

В случае малых деформаций, когда

$$(\partial u / \partial x) \ll 1, (\partial v / \partial x) \ll 1$$

можно пренебречь квадратичными слагаемыми.

С учетом приближенного соотношения $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$, справедливого при $x \ll 1$, окончательно для малой деформации, получим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Угловая деформация γ_{xy} определяется как сумма углов α_1 и α_2 . В случае малых деформаций

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} \approx \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для угловой деформации γ_{xy} имеем

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Проводя аналогичные выкладки в общем случае трехмерной деформации, имеем девять соотношений, связывающих линейные и угловые деформации с перемещениями. Эти соотношения носят название *соотношений Коши*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$
(3.23)

три линейных и шесть угловых деформаций (3.23) образуют *тензор малых деформаций*

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 1/2 \gamma_{xy} & 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2 \gamma_{yz} \\ 1/2 \gamma_{zx} & 1/2 \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$
(3.24)

Этот тензор полностью определяет деформированное состояние твердого тела. Он обладает теми же свойствами, что и тензор напряжений. Свойство симметрии непосредственно следует из определения угловых деформаций. Главные значения и главные направления, а также экстремальные значения угловых деформаций и соответствующие им направления находятся теми же методами, что и для тензора напряжений.

Инварианты тензора деформаций определяются аналогичными формулами, причем первый инвариант тензора малых деформаций имеет ясный физический смысл. До деформации его объем равен $dV_0 = dx dy dz$. Если пренебречь деформациями сдвига, которые изменяют форму, а не объем, то после деформации ребра будут иметь размеры

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \quad dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

(рис. 3.6), а его объем будет равен

$$dV = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) dx dy dz.$$

Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

в пределах малых деформаций составит $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, что совпадает с определением первого инварианта. Очевидно, что изменение объема есть физическая величина, не зависящая от выбора системы координат.

Так же, как и тензор напряжений, тензор деформаций можно разложить на шаровой тензор и девиатор. При этом первый инвариант девиатора равен нулю, т. е. *девиатор характеризует деформацию тела без изменения его объема.*

3.5 Обобщенный закон Гука

Установим зависимость относительной линейной деформации от нормальных напряжений в случае **объемного напряженного состояния**.

Определим относительную продольную деформацию выделенного элемента (см. рис. 2.1б) в направлении главного напряжения σ_1 , отдельно рассматривая влияние каждого из главных напряжений и складывая результаты в соответствии с принципом независимости действия сил:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}. \quad (3.25)$$

Под действием напряжения σ_1 элемент в направлении этого напряжения на основании закона Гука получит относительное удлинение, равное $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$. Аналогично определяются относительные деформации по направлениям двух других главных напряжений:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}.$$

В то же время по отношению к напряжениям σ_2 и σ_3 , ребро элемента, параллельное σ_1 , является поперечным размером, а потому под действием напряжений σ_2 и σ_3 элемент в направлении σ_1 испытывает относительные укорочения, равные:

$$\varepsilon_{12} = -\nu \cdot \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_{13} = -\nu \cdot \varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_3}{E}, \quad (3.26)$$

здесь $\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$ – коэффициент поперечной деформации, называемый коэффициентом

Пуассона; ε' – относительная поперечная деформация; ε – относительная продольная деформация.

Таким образом, полная относительная деформация элемента в направлении напряжения σ_1 выразится суммой:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (3.27)$$

Подобные же выражения получим и для деформаций в двух других направлениях. В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\}. \quad (3.28)$$

Касательные напряжения не вызывают удлинений ребер выделенного параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями. Закон Гука в общем виде (рис. 3.1а) для объемного напряженного состояния запишется:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}. \quad (3.29)$$

В соотношениях (3.29) использована зависимость между тремя упругими постоянными материала – модулем упругости 1-го рода E , коэффициентом Пуассона ν и модулем упругости 2-го рода (модулем сдвига) G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.30)$$

Формулы (3.29) показывают, что при изменении нормальных и касательных напряжений на всевозможных площадках, проходящих через заданную точку, соответственно изменяются относительные линейные деформации и углы сдвига граней выделенного элемента с бесконечно малыми размерами dx , dy , dz .

Совокупность линейных относительных деформаций и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через заданную точку, называется деформированным состоянием в точке.

Деформации элемента в трех ортогональных плоскостях представим в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

аналогичной тензору напряжений и называемой *тензором деформаций*.

Выражения (3.29), устанавливающие связь между деформациями и напряжениями в общем случае напряженного состояния, носят название *обобщенного закона Гука*. Они применимы при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности материала и при малых деформациях.

С помощью формул (3.29) обобщенного закона Гука можно определять относительные деформации по любому заданному направлению, если предварительно определить нормальные напряжения вдоль указанного направления и двух других направлений, перпендикулярных заданному.

Относительные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, определяемые по формулам (3.28), называются *главными деформациями*.

4. Теории прочности

4.1 Основные положения

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение и сжатие устанавливается их так называемое, опасное (или предельное) состояние. Оно характеризуется наступлением текучести материала, сопровождаемое значительными остаточными деформациями или появлением трещин, свидетельствующих о начале разрушения. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней из пластичного материала в момент наступления опасного состояния равны пределу текучести σ_T , а из хрупкого – пределу прочности на растяжение σ_B .

Известно, что при расчете элементов конструкций должно быть выполнено условие прочности, требующее, чтобы наибольшее напряжение в каждой точке не превышало величины расчетного сопротивления, составляющего некоторую долю опасного напряжения. Для назначения расчетного сопротивления необходимо изучить поведение материала при его деформировании от начала нагружения до момента разрушения.

Экспериментальное изучение поведения материалов под нагрузкой при линейном напряжении или сжатии на существующих лабораторных установках не встречает затруднений. Полученные в результате экспериментов диаграммы растяжения или сжатия дают наглядное представление о сопротивлении материала упругому и пластическому деформированию и позволяют определить такие важные для оценки прочности и назначения расчетных сопротивлений механические характеристики, как *предел текучести или предел прочности*.

При сложном напряженном состоянии, характеризующемся в общем случае тремя различными главными напряжениями, нахождение опасных значений этих напряжений существенно усложняется. Как показывают опыты, опасное напряженное состояние элемента конструкции (текучесть, разрушение) зависит от вида напряженного состояния, т.е. от соотношения между тремя главными напряжениями. Так как число различных возможных соотношений между ними неограниченно велико, то и соответствующих опасных состояний элемента конструкции тоже может быть неограниченно много.

Таким образом, для каждого нового соотношения между главными напряжениями необходимо заново экспериментально устанавливать величину предельных напряжений. Следует иметь в виду, что опыты при сложном напряженном состоянии осуществить гораздо труднее, чем при простом растяжении или сжатии. Они, как правило, требуют изготовления специальных дополнительных приспособлений и установок к имеющимся в лабораториях машинам, более трудоемкие и дорогостоящие.

Поэтому необходимо найти способ составления условия прочности при *сложном* напряженном состоянии, пользуясь величинами σ_T и σ_B , полученными при опытах для *линейного* (одноосного) напряженного состояния.

Поставленная задача может быть решена лишь на основании предположения (гипотезы) о том, каков вид функции, связывающей прочность материала с величиной и знаком главных напряжений, каким фактором вызывается наступление опасного состояния.

В гипотезах прочности предлагаются критерии, определяющие прочность элемента материала, находящегося в **сложном напряженном состоянии**. Соответственно этим критериям установлены эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{экв}}$ – напряжения одноосного растяжения элемента материала, который равнопрочен тому же элементу при сложном напряжен-

ном состоянии. Вне зависимости от принятой гипотезы условие прочности элемента материала при любом напряженном состоянии имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p]. \quad (4.1)$$

1-я теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений. Согласно этой теории, *опасное состояние наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения для данного материала, т.е.*

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \text{ при } \sigma_1 > 0. \quad (4.2)$$

Для случаев плоского и объемного напряженного состояний данная теория экспериментально не подтверждается и имеет историческое значение.

2-я теория прочности – теория наибольших относительных удлинений. Согласно этой теории, *опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие относительные удлинения достигают опасного значения для данного материала.*

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.3)$$

Преимуществом данной теории является то, что она учитывает все три главных напряжения и экспериментально подтверждается для хрупких материалов.

Недостаток данной теории – она не подтверждается экспериментально для пластичных материалов.

3-я теория прочности – теория наибольших касательных напряжений. Согласно этой теории, *опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения в данной точке достигают опасного значения для данного материала, т.е. разрушение материала происходит в результате среза.*

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3, \quad (4.4)$$

для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.5)$$

4-я теория прочности – энергетическая. Согласно этой теории, *опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает опасного значения $[u_\phi]$ для данного материала, определяемого опытным путем для одноосного напряженного состояния.* Она широко применяется для пластичных материалов, для хрупких материалов неприменима.

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (4.6)$$

для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (4.7)$$

Достоинством этой теории является то, что она учитывает все три главных напряжения. Она, как и 3-я теория, *объясняет высокую прочность материала* при всестороннем равномерном сжатии, *но не объясняет причины разрушения материала* при всестороннем равномерном растяжении.

4.2 Постановка вопроса о прочности

Основной областью применения сопротивления материалов и в целом механики деформируемого твердого тела является оценка прочности реальных материалов и элементов конструкций при их эксплуатации. Определение напряжений, деформаций и пере-

мещений в телах еще не дает ответа на вопрос об их прочности. Термин «прочность» требует некоторого разъяснения. В широком смысле слова под нарушением прочности (разрушением) понимается достижение такого состояния, когда нарушается конструктивная функция тела и оно становится непригодным к эксплуатации. В прямом, но более узком смысле слова, под нарушением прочности (разрушением) понимается разделение тела на части. Для пластичных материалов под разрушением следует понимать возможность появления недопустимо больших деформаций. Заметим, что для пластичных материалов выполнение условия пластичности в одной точке тела еще не означает потери его несущей способности. Например, в балке на рис. 4.1, а появление пластичности в точках А и В среднего опасного сечения не представляет реальной опасности. Поэтому расчет по методу допускаемых напряжений для пластичного материала безусловно гарантирует прочность элемента конструкции. В то же время перемещения в балке остаются ограниченными, и потому обнаруживается значительный резерв прочности.

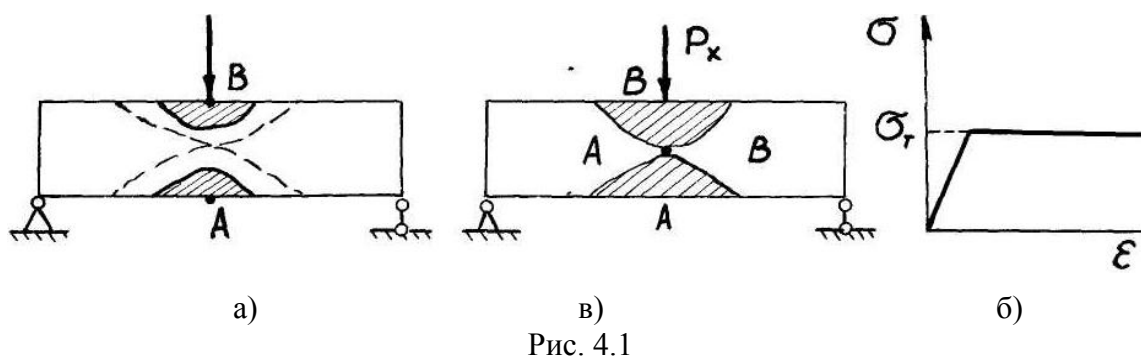


Рис. 4.1

При увеличении внешней нагрузки заштрихованные пластические зоны расширяются и, наконец, соединяются, отделяя при этом жесткие части А и В друг от друга (рис. 4.1, б). Эти части могут теперь свободно перемещаться друг относительно друга, а тело балки получает неограниченно большие деформации и перемещения (рис. 4.1, в). Поэтому расчет по методу допускаемых нагрузок представляет собой расчет на прочность. С другой стороны, пластические материалы при низких температурах разрушаются без заметных пластических деформаций. Такое разрушение называют хрупким в результате разрыва материала. Разрушение хрупкого материала начинается локально с отдельной микротрещины путем ее разрастания. Локальное разрушение служит источником концентрации напряжений и потому может послужить началом мгновенного разрушения тела в целом путем разделения на части. Поэтому расчет хрупких материалов на прочность по допускаемым напряжениям в наиболее напряженной точке тела оправдан.

Отметим, что деление материалов на пластические и хрупкие является условным. Например, хрупкие материалы (бетон, гранит и др.) при высоких давлениях и температурах обнаруживают значительные пластические деформации. Существенную роль в оценке прочности играет время.

Разрушение является *процессом*, происходящим во времени, и потому может произойти при разных уровнях напряжений. Так, в условиях ползучести мы ввели понятие о времени разрушения, пределе длительной прочности (напряжении, приводящем к разрушению через определенное время). Таким образом, проблема прочности и разрушения зависит от многих факторов и очень сложна. Несмотря на сложность проблемы, в сопротивлении материалов есть разделы, с помощью которых можно прямо и непосредственно ответить на вопрос о возможности разрушения. Это разделы об устойчивости и колебаниях упругих и упругопластических систем.

Достижение нагрузкой предельной величины можно считать за момент разрушения. Если частота возмущающей силы совпадает с частотой низших собственных колеба-

ний, наступает резонанс с недопустимо большими перемещениями, приводящими к разрушению. Отметим, что резонанс на высоких гармониках, как правило, не страшен.

4.3 Примеры решения задач

Задача 4.1

Даны напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках в окрестности некоторой точки (рис. 4.2).

$$E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,28.$$

Требуется исследовать напряженно-деформированное состояние в данной точке.

1. Поставить знаки заданных напряжений в соответствии с их направлениями на рис. 4.2 согласно принятых правил знаков для напряжений.
2. Определить величины и направления главных напряжений, изобразить главные площадки на рисунке и показать на них главные напряжения.
3. Вычислить максимальные и минимальные касательные напряжения, изобразить на рисунке площадки, на которых они действуют и показать направления напряжений. Вычислить и показать на чертеже действующие на этих площадках нормальные напряжения.
4. Определить нормальные и касательные напряжения на площадках, повернутых относительно заданных на угол $\alpha = 30^\circ$, показать эти площадки и напряжения на них. Определить полное напряжение на этой площадке и относительную деформацию по направлению σ_α .
5. Определить расчетные напряжения с использованием (1 ÷ 4)-й теорий прочности и сравнить их между собой, проанализировать применимость теорий прочности для конкретного материала.
6. Определить относительные деформации по направлениям главных напряжений (главные деформации).

Решение

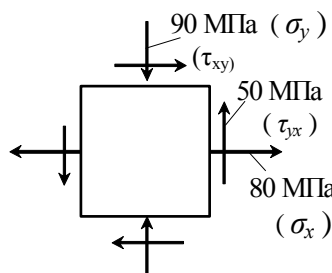
1. Постановка знаков заданных нормальных и касательных напряжений:

$\sigma_x = 80 \text{ МПа}$, («плюс» – растяжение),

$\sigma_y = -90 \text{ МПа}$ («минус» – сжатие),

$\tau_{yx} = -50 \text{ МПа}$ ("минус" – против хода часовой стрелки).

2. Вычисление главных напряжений.



$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} =$$

Рис.

$$= \frac{80 - 90}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(80 + 90)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = -5 \pm 98,62.$$

4.2

Соблюдая условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, выпишем числовые значения главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = -5 + 98,62 = 93,62 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = -5 - 98,62 = -103,62 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0 \text{ (по условию задачи)}.$$

Проверка: $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3 = 80 - 90 = 93,62 - 103,62 = -10$ МПа.

Определяем угол наклона главных площадок к заданным:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-50)}{80 + 90} = 0,588; \quad 2\alpha_0 = 30,5^\circ; \quad \alpha_0 = 15,25^\circ.$$

Угол положительный, поэтому заданные площадки должны быть повернуты *против хода часовой стрелки* и на полученных главных площадках показываем главные напряжения. При этом максимальным напряжением будет то напряжение, которое проходит в четвертях, где сходятся стрелки касательных напряжений и оно будет находиться ближе напряжению σ_x , которое алгебраически больше, чем σ_y (рис. 4.3).

3. Определение максимального и минимального касательных напряжений на площадках сдвига по формуле (3.13):

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = \pm \frac{93,62 + 103,62}{2} = \pm 98,62 \text{ МПа.}$$

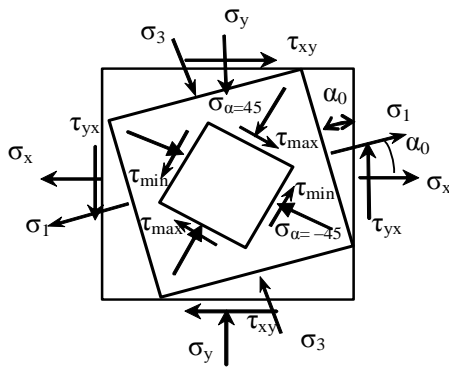


Рис. 4.3

Нормальные напряжения на этих же площадках в соответствии с соотношением (3.16) будут:

$$\sigma_{\alpha=\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{93,62 - 103,62}{2} = -5 \text{ МПа.}$$

Покажем найденные напряжения на площадках сдвига, наклоненных к главным на 45° (рис. 4.3). При этом направления максимального и минимального касательных напряжений покажем так, чтобы они сходились у того ребра элемента, где проходит главное напряжение σ_1 .

4. Вычисление нормального и касательного напряжений на площадках, наклоненных к заданным на

углы $\alpha = 30^\circ$ и $30^\circ + 90^\circ$:

$$\sin 30^\circ = 0,5, \quad \cos 30^\circ = 0,866; \quad \cos 60^\circ = 0,5, \quad \sin 60^\circ = 0,866.$$

Для этого используем формулы (3.3), (3.4), (3.5):

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha = 80 \cdot 0,7499 - 90 \cdot 0,25 + 50 \cdot 0,866 = 60 - 22,5 + 43,3 = 80,8 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha = 80 \cdot 0,25 - 90 \cdot 0,7499 - 50 \cdot 0,866 = 20 - 67,49 - 43,3 = -90,8 \text{ МПа.}$$

Проверка:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ};$$

$$80 - 90 = 80,8 - 90,8 = -10 \text{ МПа.}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha = \frac{80 + 90}{2} \cdot 0,866 - 50 \cdot 0,5 = 48,61 \text{ МПа.}$$

На рис. 4.4 показаны наклонные площадки и напряжения, действующие на этих площадках с учетом их знаков. Угол $\alpha > 0$, поэтому заданные площадки повернуты против хода часовой стрелки.

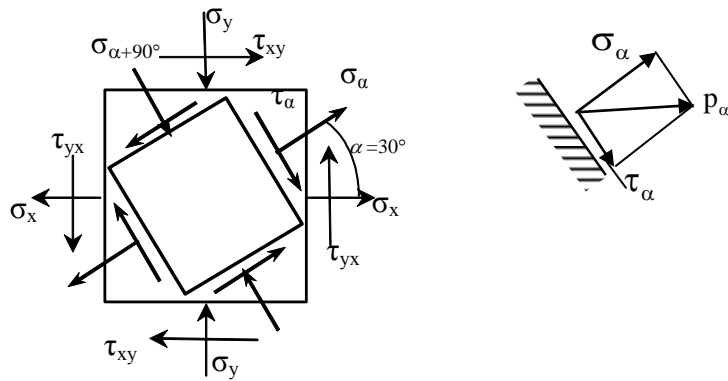


Рис. 4.4

Определим полное напряжение на наклонной площадке:

$$p_{\alpha} = \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2} = \sqrt{80,8^2 + 48,61^2} = 94,3 \text{ МПа.}$$

Относительную деформацию по направлению напряжения σ_{α} определим по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\alpha} - \nu(\sigma_{\alpha+90^{\circ}} + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [80,8 - 0,28(-90,8 + 0)] = 51,57 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

5. Определение расчетных напряжений по четырем теориям прочности и их сравнение:

1-я теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_p^I &= \sigma_1 = 93,62 \text{ МПа,} \\ \sigma_p^I &= |\sigma_3| = 103,62 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

2-я теория прочности – теория наибольших относительных удлинений:

$$\begin{aligned} \sigma_p^{II} &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 93,62 - 0,28(0 - 103,62) = \\ &= 122,63 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

3-я теория прочности – теория наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 93,62 + 103,62 = 197,24 \text{ МПа.}$$

4-я, энергетическая теория прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_p^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(93,62 - 0)^2 + (0 + 103,62)^2 + (93,62 + 103,62)^2]} = \\ &= 170,89 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Сравнительный анализ расчетных напряжений σ_p^I показывает, что наибольшее по абсолютной величине расчетное напряжение получается по третьей теории прочности. Значит, если в данном случае использован пластичный материал, то за расчетное напряжение нужно брать это напряжение и условие прочности записать в виде:

$$\sigma_p^{III} = 197,24 \text{ МПа} \leq R.$$

Если же предполагается, что материал хрупкий, то нужно использовать вторую теорию прочности и условие прочности должно быть записано в виде:

$$\sigma_p^{\text{II}} = 122,63 \text{ МПа} \leq R_t.$$

6. Вычислим относительные деформации по направлениям главных напряжений (главные деформации), используя формулы обобщенного закона Гука (3.28):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [93,62 - 0,28(0 - 103,62)] = \\ &= 59,53 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [0 - 0,28(93,62 - 103,62)] = \\ &= 1,36 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} [-103,62 - 0,28(93,62 + 0)] = \\ &= -63,03 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

5. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

5.1. Физически и геометрически нелинейные задачи

5.1.1. Общие представления о нелинейных задачах

В предыдущем разделе рассматривалось решение линейных задач – то есть таких, в которых связь между силами, действующими на конструкцию, и перемещениями ее точек принимается линейной, а в основе физических уравнений, как правило, лежит обобщенный закон Гука. Однако, это часто не соответствует действительности. Например, бетон, дерево, пластик и некоторые другие строительные материалы характеризуются нелинейной зависимостью напряжений от деформаций даже при небольших нагрузках. Такая нелинейность называется физической. Проявляется она при возникновении пластических деформаций в различных формах (текучести – деформировании при постоянных напряжениях, ползучести – росте деформаций во времени без увеличения нагрузки), при криволинейной диаграмме «напряжения-деформации», при изменении свойств материалов от внешних воздействий и т. д. При значительных перемещениях, соизмеримых с размерами конструкции, необходимо учитывать геометрическую нелинейность, например, в случае продольного и продольно-поперечного изгиба стержней, изменении координат точек конструкции из-за сравнительно больших перемещений. Особое место занимает конструктивная нелинейность, связанная с изменением расчетной схемы конструкции в процессе нагружения (учет односторонних связей): при контактом взаимодействии деформируемых тел (одностороннее основание, трещины), при расчете конструкций типа вант, с затяжками и т. п.

Расчет нелинейных систем является более сложной задачей по сравнению с решением линейных задач, т. к. здесь приходится учитывать деформированное состояние рассматриваемой области, отказаться от принципа независимости действия сил, применять специальные методы поиска и анализа решения. При этих условиях получить аналитическое решение задачи, как правило, не удастся, поэтому расчет выполняется с помощью численных методов, чаще всего МКЭ, используя при этом процедуры последовательных приближений. Учет физической нелинейности. В этом случае связь между напряжениями и деформациями в общем виде запишется так:

$$\sigma = E(\epsilon) \epsilon, \quad (5.1)$$

где $E(\epsilon)$ – матрица, характеризующая физические свойства материала – элементы ее являются функциями компонент вектора деформаций ϵ .

Таким образом, при учете физической или геометрической нелинейности получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, решение которой осуществляется при помощи шаговых или итерационных методов.

Причем среди известных алгоритмов расчета нелинейных систем нет какого-либо одного универсального – эффективность того или иного метода зависит, главным образом, от типа и параметров проявляющейся нелинейности. В связи с этим рассмотрим некоторые из часто применяемых методов, которые подразделяются на две группы: итерационные и шаговые.

Таким образом, при учете физической или геометрической нелинейности получаем систему нелинейных алгебраических уравнений вида (5.1), решение которой осуществляется при помощи шаговых или итерационных методов. Причем среди известных алгоритмов расчета нелинейных систем нет какого-либо одного универсального – эффективность того или иного метода зависит, главным образом, от типа и параметров проявляющейся нелинейности.

5.1.2. Шаговые методы решения нелинейных задач

Шаговые методы позволяют получать решение нелинейной задачи после каждого шага приращения нагрузки. В этом случае имеется возможность учета реального процесса нагружения во времени, например, ползучести материала, изменения внешней нагрузки и т. д.

Каждый шаг нагружения допускает ясную физическую интерпретацию. Поскольку приращение нагрузки считается достаточно малым, поведение конструкции на каждом шаге можно принять линейным. После выполнения шага нагружения формируется новая нелинейная составляющая матрицы жесткости и осуществляется следующее приращение нагрузки. Таким образом, нелинейное поведение конструкции полностью представляется в виде последовательности кусочно-линейных шагов.

К недостатку шаговых методов следует отнести накопление ошибок (невязки решения) при переходе от одного шага нагружения к другому. При сильной нелинейности следует уменьшать величину приращения нагрузки (т. е. необходимо большое число шагов), тем самым нелинейный расчет усложняется. Улучшение точности решения также возможно с помощью регулирования невязки узловых сил, например, через каждые несколько шагов нагружения.

5.2 Расчет конструкций по методу предельного равновесия

Основным методом расчета конструкций промышленных и гражданских зданий и сооружений, мостов и др. в настоящее время является метод предельных состояний. Этот метод был разработан учеными под руководством проф. Н.С. Стрелецкого и начал применяться с 1955 г.

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе возведения здания и сооружения.

Различают две группы предельных состояний: первая – непригодность к эксплуатации по причинам потери несущей способности; вторая – непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими или бытовыми условиями. В правильно запроектированном сооружении не должно возникнуть ни одно из

указанных предельных состояний, т.е. должна быть обеспечена его надежность. Надежностью называется способность объекта сохранять в процессе эксплуатации качество, заложенное при проектировании.

Факторы, от точного учета которых зависит уровень надежности сооружения или отдельного его элемента, следующие: нагрузки и другие воздействия, механические свойства материала, геометрические параметры конструктивных элементов, условия работы, степень ответственности сооружения и др.

Основной характеристикой сопротивления материалов силовым воздействиям является нормативное сопротивление R_H , которое устанавливается СНиПом с учетом условий контроля и статистической изменчивости механических свойств материала. В качестве нормативного сопротивления строительных сталей принимают наименьшее контролируемое (браковочное) значение предела текучести σ_T или временного сопротивления σ_B . Эти значения устанавливаются ГОСТами, техническими условиями на металл или определяются в лабораторных условиях при испытании образца металла на растяжение.

Возможное отклонение в неблагоприятную сторону от значений нормативного сопротивления учитывается коэффициентом надежности по материалу $\gamma_m > 1$. Этот коэффициент отражает статистическую изменчивость свойств материала и их отличие от свойств отдельно испытанных образцов. Например, для металла $\gamma_m = 1,025 \dots 1,15$; для бетона $\gamma_m = 1,3 \dots 1,5$. Величина, полученная в результате деления нормативного сопротивления на коэффициент надежности по материалу, называется расчетным сопротивлением: $R = R_H / \gamma_m$.

Особенности действительной работы материалов, элементов конструкций, их соединений учитываются коэффициентом условий работы γ . Он отражает влияние температуры, агрессивности среды, длительности и многократной повторяемости воздействия, приближенности расчетных схем и условность расчетных предпосылок ($\gamma < 1$), а также перераспределение усилий при развитии пластических деформаций и другие благоприятные факторы ($\gamma > 1$). Числовые значения для γ устанавливаются СНиПом на основании экспериментальных и теоретических исследований и вводятся в качестве множителя к значению расчетного сопротивления R . В большинстве случаев при нормальных условиях работы коэффициент $\gamma = 1$ и может быть опущен.

Степень ответственности и капитальности сооружений, а также значимость последствий тех или иных предельных состояний учитывается коэффициентом надежности по назначению $\gamma_n \leq 1$. Его вводят в качестве делителя к значению расчетного сопротивления или в качестве множителя к значению расчетных нагрузок, воздействий и усилий.

Существуют и другие коэффициенты, которые учитывают особенности расчета и работы сооружения, например, коэффициент η , учитывающий одновременное действие всех расчетных нагрузок. Здесь же приведены коэффициенты, учитывающие основные факторы, которые влияют на надежность сооружения.

Надежность и гарантия от возникновения предельных состояний первой группы (по несущей способности) обеспечиваются выполнением следующего условия:

$$N \leq S, \quad (5.2)$$

где N - усилие, действующее в рассчитываемом элементе конструкции (функция нагрузок и других воздействий); S - предельное усилие, которое может воспринять рассчитываемый элемент (функция физико-механических свойств материала, размеров элемента и условий работы).

Усилие N , являющееся наибольшим возможным усилием (воздействием) за время нормальной эксплуатации конструкции при коэффициенте запаса n , определяется так:

$$N = n P_H, \quad (5.3)$$

а предельное усилие:

$$S = A_{нт} (R_H \gamma) / (\gamma_H \gamma_M) = A_{нт} (R_H \gamma) / \gamma_H, \quad (5.4)$$

где $A_{нт}$ - геометрическая характеристика сечения (площадь сечения нетто).

Таким образом, условие прочности (надежности) для центрально растянутого (сжатого) элемента ($\gamma_H=1$) будет иметь вид

$$N \leq A_{нт} R \gamma \quad \text{или} \quad \sigma_{max} = N / A_{нт} \leq R \gamma. \quad (5.5)$$

5.2.1. Основные положения метода предельного равновесия

Расчет конструкций в упругой постановке задачи, как известно, проводится по методу допускаемых напряжений. Данный подход при расчете статически определимых и статически неопределимых систем не позволяет найти их истинный запас прочности, так как исчерпание несущей способности конструкции сопровождается появлением в ней пластических деформаций. Для выявления истинного запаса несущей способности конструкции необходимо проводить расчет с учетом упругопластических деформаций. Однако сложность аппарата теории пластичности не позволяет решать широкий круг очень важных инженерных задач. В этом отношении расчет конструкций по методу предельного равновесия позволяет дополнить существующий пробел по данному вопросу. Поэтому, метод расчета конструкций по предельным состояниям, по сравнению с упругим расчетом, является важным этапом для оценки истинных запасов прочности конструкции. При этом следует отметить, что расчет конструкций по методу предельных состояний является приближенным в том контексте, что, в отличие от упругопластического расчета, не позволяет описать процесс перехода от упругого к предельному состоянию.

Если при проектировании инженерных сооружений необходимо знать процесс формирования напряженно-деформированного состояния вплоть до исчерпания несущей способности конструкций, метод предельного равновесия неприменим. Однако, в тех случаях, когда необходимо определить только несущую способность конструкции этот метод является очень эффективным и имеет важное практическое значение.

При расчете конструкций по допускаемым напряжениям в упругой постановке задачи, как известно, предельной нагрузкой считается та, при которой наибольшее напряжение σ_{max} , хотя бы в одной точке опасного сечения достигает величины σ_T . При этом вводится понятие о допускаемом напряжении, определяемом по формуле $[\sigma] = \sigma_T/n$, где n - коэффициент запаса.

При расчете конструкций по методу предельного равновесия предполагается двухстадийный характер деформирования материала: в первой стадии материал подчиняется закону Гука, пока напряжения не достигнут предела текучести; а затем во второй стадии, предполагая, что в нем в определенной стадии нагружения в опасных сечениях беспрестанно развиваются пластические деформации при постоянном напряжении. С появлением пластических деформаций нарушается линейная зависимость между напряжениями и деформациями по закону Гука, и все расчетные формулы, вывод которых основан на этой зависимости, становятся неприменимыми. Нарушается прямая пропорциональность между действующими на элемент конструкции нагрузками и возникающими в нем напряжениями и деформациями. Становится неприменимым один из основных принципов сопротивления материалов – принцип независимости действия сил.

Так как зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной и для каждого материала определяется видом диаграммы растяжения, единых для различных материалов расчетных формул, учитывающих пластические деформации, получить невозможно. При выводе расчетных формул диаграммы растяжения упрощают (схематизируют). Для материалов, имеющих площадку текучести, например, для низкоуглеродистых сталей условная диаграмма зависимости напряжения от деформации состоит из наклонного и горизонтального участков и носит название диаграммы идеально упругопластического тела, или **диаграммы Прандтля**.

Суть метода состоит в том, что конструкция рассматривается в момент, непосредственно предшествующий ее разрушению, когда еще выполняются условия равновесия для внутренних и внешних сил, достигающих предельных значений. Отсюда и произошло название **метода предельного равновесия**.

Реальные конструкции представляют собой в большинстве случаев многократно статически неопределимые системы, материал которых обладает свойством пластичности. Благодаря этому конструкции обладают дополнительными резервами несущей способности. После того, как в наиболее опасных сечениях напряжения достигают предела текучести, в отличие от статически определимых систем, статически неопределимые системы могут нести дополнительные нагрузки за счет перераспределения внутренних сил.

Для пластичного материала предельным обычно считается напряженное состояние, которое соответствует возникновению заметных остаточных деформаций, а для хрупкого - такое, при котором начинается разрушение материала.

Для выполнения расчетов на прочность по методу предельного равновесия вводятся понятия коэффициента запаса прочности и эффективное напряжение.

Коэффициент запаса при данном напряженном состоянии - это число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты тензора напряжений, чтобы оно стало предельным.

Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ - это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние было равноопасно с заданным.

Для пластичных материалов критерием наступления предельного состояния принимается состояние, при котором максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения:

$$\sigma_{\text{экв}} = 2\tau_{\text{max}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (5.6)$$

Гипотеза максимальных касательных напряжений, приемлемая для пластичных материалов, обнаруживает заметные погрешности для материалов, имеющих различные механические характеристики при сжатии и растяжении.

В таких случаях применяется энергетическая гипотеза, согласно которой предельное состояние в точке наступает тогда, когда энергия формоизменения

$$U_{\text{пр}} = (1+\mu) [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] / 6E \quad (5.7)$$

принимает некоторое заранее заданное значение. Это предельное значение для $U_{\text{пр}}$ определяется следующим образом.

Для простого растяжения выражение (5.7) принимает вид:

$$U_{\text{пр}} = (1+\mu) 2\sigma^2 / 6E.$$

В сложном напряженном состоянии $U_{\text{пр}}$ принимает значение

$$U_{\text{пр}} = (1+\mu) 2\sigma_{\text{экв}}^2 / 6E. \quad (5.8)$$

При совместном рассмотрении (5.7) и (5.8), получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (5.9)$$

Следует помнить, что расчет по методу предельного равновесия можно выполнять только для элементов конструкций, изготовленных из пластичных материалов, допускающих пластические деформации в наиболее напряженных точках без появления в них трещин. Недопустимо появление пластических деформаций в деталях машин, длительно работающих при переменных, циклических напряжениях, так как при этом резко снижается число циклов до разрушения, т.е. долговечность детали.

5.2.2. Основы теории пластичности

Рассмотрим основные особенности характера деформирования материалов при их нагружении в упругопластической стадии. При напряжениях, превышающих предел упругости, после разгрузки наблюдаются заметные остаточные деформации. Свойство материалов относительно неспособности восстанавливать первоначальные размеры образцов после их разгрузки за счет возникновения остаточных деформаций, называется **пластичностью**.

Физические соотношения, взятые в основу теории, позволяющие определить переход напряженно-деформированного состояния от упругой стадии к упруго-пластической и описать процесс деформирования тела с учетом пластических свойств материалов, называются **теорией пластичности**.

Учет пластических свойств материалов является чрезвычайно важным этапом в плане совершенствования методов расчета конструкций. Если конструкции из хрупких материалов вплоть до стадии разрушения при действии внешних сил не развивают заметных пластических деформаций, то для конструкций из пластических материалов основные деформации формируются именно за счет возникновения пластических деформаций. Так, например, полные деформации, соответствующие концу площадки текучести на реальной диаграмме, для многих материалов в 30 - 40 раз превышают деформации, соответствующие концу линейного участка.

В настоящее время существуют две теории пластичности: деформационная теория пластичности и теория течения. Их различие заключается в конкретной записи физических соотношений.

В деформационной теории пластичности, разработанной А.А. Ильюшиным, взамен закона Гука устанавливаются новые соотношения между напряжениями и деформациями.

Во второй теории - теории течения, физические соотношения связывают напряжения с приращениями деформаций или скоростями деформаций.

Как показывают экспериментальные исследования, деформационная теория пластичности справедлива при относительно небольших пластических деформациях для **простого нагружения**, т.е. когда все внешние нагрузки изменяются пропорционально во времени. Теория течения является эффективным при изучении процессов, связанных с возникновением больших деформаций и при **сложном нагружении**, т.е. когда нагрузки, прикладываемые к телу, изменяются во времени независимо друг от друга.

Ограничимся рассмотрением только деформационной теории пластичности.

Процесс деформирования материалов можно условно разделить на две стадии. Начальная стадия - упругое деформирование. Компоненты тензоров напряжений и деформаций при этом связаны законом Гука. Для реальных инженерных задач, связанных с определением напряженно-деформированного состояния тела, как в упругой, так и в упруго-

пластической стадии деформирования, предварительно необходимо установить: во-первых, условие перехода от упругой стадии деформирования к пластической стадии и, во-вторых, установить физические зависимости во второй стадии деформирования.

Условия перехода от упругого состояния к пластическому могут быть определены по формулам одной из гипотез метода предельного равновесия, например, гипотезы максимальных касательных напряжений и энергии формоизменения. При этом, для построения соотношений пластичности гипотеза энергии формоизменения является наиболее приемлемой, согласно которой переход из упругого состояния в пластическое происходит тогда, когда величина

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]}, \quad (5.10)$$

называемая **интенсивностью напряжений**, достигает определенной величины, равной пределу текучести материала σ_T при одноосном напряженном состоянии, т.е.

$$\sigma_i = \sigma_T. \quad (5.11)$$

С учетом физических соотношений закона Гука выражение (5.11) принимает вид:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i, \quad (5.12)$$

где принято обозначение:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \mu)[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)]}, \quad (5.13)$$

называемое **интенсивностью деформаций**.

Следовательно, соотношение (5.12), следует рассматривать как одну из форм выражения обобщенного закона Гука.

Выражения интенсивности напряжений и интенсивности деформаций, записанные через главные напряжения и деформации можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \mu)[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

В основу деформационной теории пластичности заложены следующие гипотезы.

Первая гипотеза устанавливает связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (рис. 5.1), и гласит, что она не зависит от вида напряженного состояния, т.е.

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i) \varepsilon_i, \quad (5.15)$$

где $E(\varepsilon_i)$ - является переменной величиной и зависит от значения ε_i .

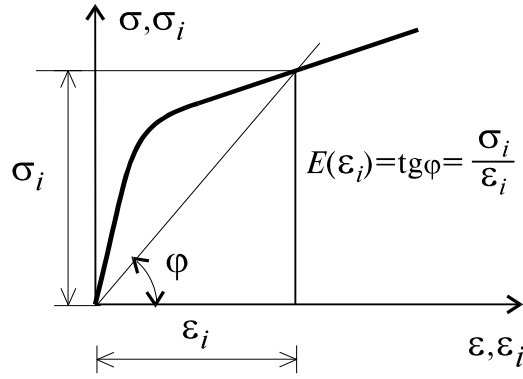


Рис. 5.1

Соотношение (5.15) является единым для всех видов напряженного состояния.

Согласно второй гипотезе, изменение объема $e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ является чисто упругой. Это положение хорошо согласуется с экспериментальными данными, так как при всестороннем сжатии в материалах заметных пластических деформаций не обнаруживается.

При деформировании материалов пластические деформации, как правило, существенно больше упругих и, учитывая, что объемная деформация e является величиной порядка упругих удлинений, поэтому принимается, что при пластическом деформировании изменение объема **пренебрежительно** мало. На основании этого положения вводится гипотеза, что **в пластической стадии деформирования материал считается несжимаемым**.

Отсюда следует, что в пластической стадии деформирования коэффициент Пуассона можно принимать равным $\mu = 0,5$.

Сначала определим физические соотношения при одноосном растяжении, когда

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu\varepsilon, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.\end{aligned}$$

Из (5.10) и (5.13), соответственно получим $\varepsilon_i = \varepsilon$ и $\sigma_i = \sigma$, что подтверждает первое положение теории, что аналитическое выражение (5.15) едино для всех видов напряженного состояния. Данное обстоятельство позволяет определить переменный модуль деформирования $E(\varepsilon_i) = \sigma_i / \varepsilon_i$ по диаграмме $\sigma \sim \varepsilon$, т.е. $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon) = \sigma/\varepsilon$.

В заключение, запишем физические соотношения между напряжениями и деформациями при пластической стадии деформирования тела:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_i / \sigma_i [\sigma_{xx} - 1/2 (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_i / \sigma_i [\sigma_{yy} - 1/2 (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]; \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_i / \sigma_i [\sigma_{zz} - 1/2 (\sigma_{yy} + \sigma_{xx})]; \\ \gamma_{xy} &= [(3 \varepsilon_i) / \sigma_i] \cdot \tau_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= [(3 \varepsilon_i) / \sigma_i] \cdot \tau_{xz}; \\ \gamma_{zy} &= [(3 \varepsilon_i) / \sigma_i] \cdot \tau_{zy},\end{aligned}\tag{5.16}$$

где $G(\varepsilon_i) = \sigma_i / (3 \varepsilon_i)$ является модулем деформации при сдвиге, который определяется следующим образом:

$$G(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i) / 2(1 + \mu) = 1/3 E(\varepsilon_i) = \sigma_i / (3 \varepsilon_i).\tag{5.17}$$

Приведенные физические соотношения деформационной теории пластичности являются справедливыми при простых нагружениях, т.е. только в тех случаях, когда все внешние силы на всех этапах нагружения во времени изменяются пропорционально. В данном случае заметим, что главные оси напряженного состояния при изменении внешних сил сохраняют свое направление независимо от стадии деформирования.

Для наглядности ниже рассмотрим наиболее представительные примеры расчета конструкций по методу предельного равновесия.

5.2.3. Определение предельного состояния системы при растяжении-сжатии

Для статически определимой системы, в элементах которой возникают лишь продольные усилия, расчеты на прочность по допускаемым напряжениям и по предельным нагрузкам дают один и тот же результат. Результаты аналогичных расчетов статически неопределимой системы различны.

Задача 5.1.

Рассмотрим систему, представляющую собой абсолютно жесткую балку, с одним концом шарнирно опертую, и подвешенную на трех одинаковых идеально упруго-пластических подвесках, длиной l , площадью поперечного сечения A , модулем упругости материала E , при заданной схеме нагружения силой P (рис.5.2, а). Заданная система дважды статически неопределима.

Решение.

По мере роста силы P , подвески 1, 2, 3 поэтапно будут переходить в пластическое состояние, причем напряжения в каждой подвеске не могут превышать σ_T .

Выделим следующие стадии деформирования заданной системы.

Первая стадия: все подвески работают упруго. Для определения реакций в подвесках составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_A = P \cdot 4d - N_1 \cdot 3d - N_2 \cdot 2d - N_3 \cdot d = 0. \quad (5.18)$$

Для определения величин усилий в подвесках N_1 , N_2 и N_3 необходимо составить еще два уравнения совместности. Учитывая, что балка абсолютно жесткая и деформации в подвесках пропорциональны возникающим в них усилиям, то из условия подобия треугольников (рис.5.2, б), имеем:

$$N_1/N_2 = 3d / 2d; \quad N_1/N_3 = 3d / d,$$

откуда

$$N_2 = 2/3 N_1; \quad N_3 = 1/3 N_1. \quad (5.19)$$

Тогда из (5.18) с учетом (5.19) определяются реакции во всех подвесках:

$$N_1 = 6/7 P; \quad N_2 = 4/7 P; \quad N_3 = 2/7 P. \quad (5.20)$$

Вторая стадия: при некотором значении P , сначала наиболее нагруженная первая подвеска переходит в пластическое состояние, то есть $N_1 = N_T = \sigma_T A$ (рис. 5.2, в). При этом из (5.19) можно установить, что в остальных подвесках усилия будут равны:

$$N_2 = 2/3 N_T; \quad N_3 = 1/3 N_T. \quad (5.21)$$

Подставляя значения усилий в уравнение равновесия (5.20), получим:

$$4d P - 3d N_T - 2d \frac{2}{3} N_T - d \frac{1}{3} N_T = 0,$$

отсюда и определим величину внешней силы P , при котором система переходит во второе состояние:

$$P = 7/6 N_T. \quad (5.22)$$

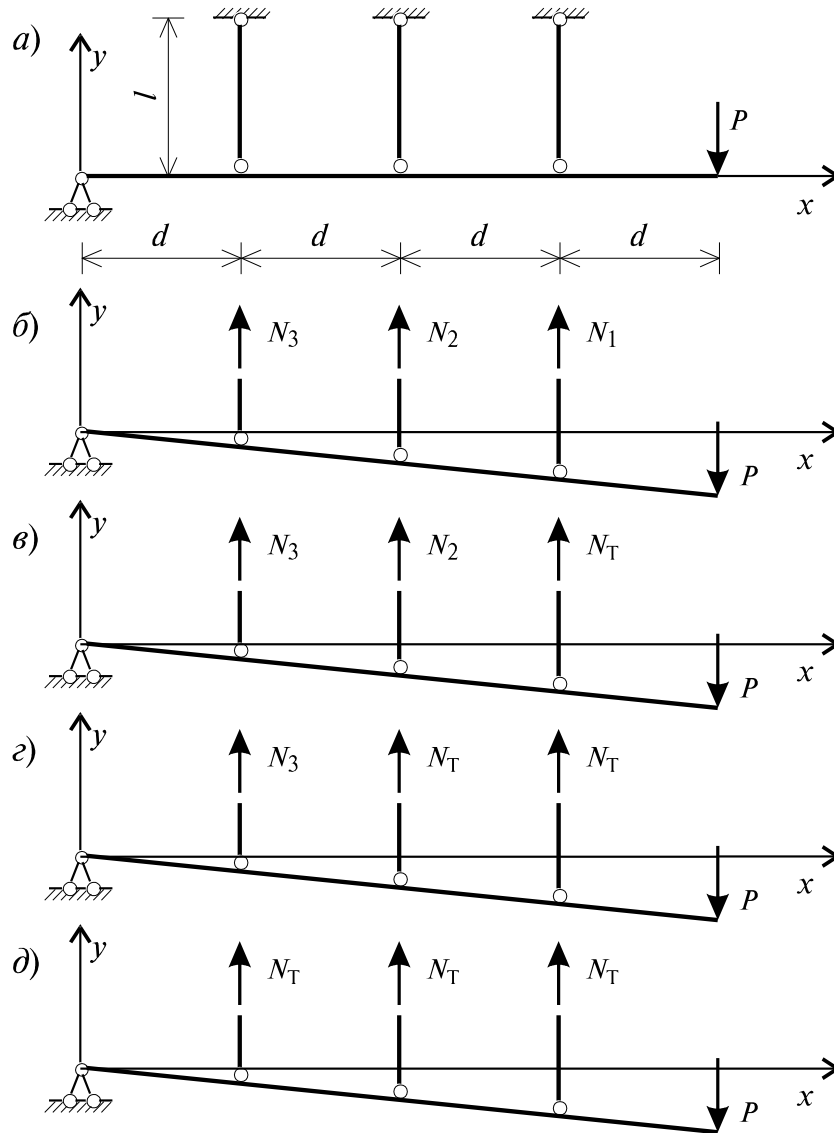


Рис. 5.2

Третья стадия: при дальнейшем росте значения силы P , и вторая подвеска переходит в пластическое состояние, то есть $N_1 = N_2 = N_T$ (рис.5.2, г). При этом, из второго и третьего соотношения (5.20), значение усилия в третьей подвеске будет равно:

$$N_3 = 1/2 N_2 = 1/2 N_T. \quad (5.23)$$

Из уравнения равновесия (5.18), с учетом значения усилий в подвесках в третьем состоянии, получим:

$$P = 11/8 N_T. \quad (5.24)$$

Четвертая стадия - предельное состояние: в этом состоянии усилия во всех трех подвесках равны своему предельному значению, т.е. N_T (рис. 5.2, д). Уравнение равновесия (5.18) при этом принимает вид:

$$4d P_{\text{пр}} - 3d N_T - 2d N_T - d N_T = 0, \quad (5.25)$$

отсюда и определяется предельная величина внешней силы:

$$P_{\text{пр}} = 6/4 N_T = 3/2 \sigma_T A. \quad (5.26)$$

Далее определим перемещение f_i балки в точке приложения внешней силы P в различных стадиях работы заданной системы.

При переходе заданной системы от первой стадии деформирования ко второй, имеем:

$$N_1 = N_T; \quad f_1 = 4/3 (N_T l) / EA.$$

При переходе заданной системы от второй стадии к третьей, имеем:

$$N_1 = N_2 = N_T; \quad f_2 = 2 (N_T l) / EA.$$

И, наконец, при переходе системы от третьей стадии к предельному состоянию, получим:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_T; \quad f_3 = 4 (N_T l) / EA.$$

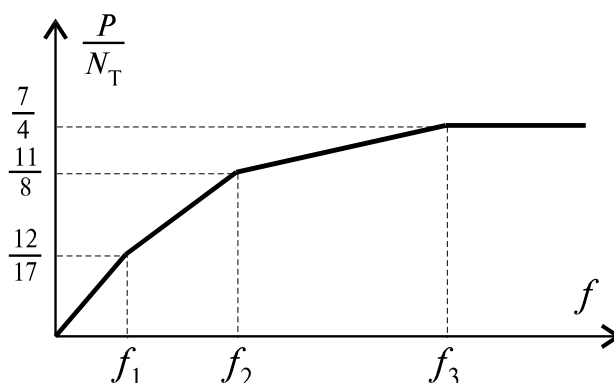


Рис. 5.3

Зависимость f от P показана на рис. 5.3. Она изображается ломаной линией, которая после предельного равновесного состояния становится горизонтальной, то есть после того, как напряжения достигнут предела текучести во всех трех подвесках. Отсюда следует, что при постоянной $P = P_{\text{пр}}$, перемещение f беспредельно возрастает, т.е. происходит разрушение системы.

Как видно из приведенного примера, расчет даже для такой простой системы оказывается довольно громоздким, хотя он дает возможность находить не только предельную силу, но и описать поведение конструкции в процессе ее нагружения. На практике, при расчете систем с учетом пластических деформаций рассматривают только предельное состояние.

Задача 5.2.

Для трехстержневой системы (рис. 5.4, а) при условии, что диаграмма растяжения для стержней имеет участок упрочнения (рис. 5.4, в), при следующих исходных данных:

$\alpha = 30^\circ$; $l = 1,0$ м; $A = 2 \cdot 10^{-4}$ м² - площади поперечных сечений стержней; $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м² - модуль упругости материалов стержней; $\sigma_T = 2,5 \cdot 10^5$ кН/м² - предел упругости ма-

териала; $\sigma_B = 3,9 \cdot 10^5$ кН/м² - временное сопротивление; $\epsilon_B = 0,02$ - значение деформации, соответствующее напряжению σ_B , требуется:

1. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_1$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают предела упругости.

2. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_2$, при котором все элементы заданной системы переходят в пластическую стадию деформирования.

3. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_3$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B , т.е. при дальнейшем увеличении силы P происходит разрушение заданной системы.

4. Рассматривая систему (рис. 5.4, а) при отсутствии среднего стержня в процессе ее нагружения, определить абсолютные и относительные удлинения элементов системы, и внешней силы $P = P_4$, при котором в ее элементах напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B .

Решение.

1. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_1$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают предела упругости. Заданная система (рис. 5.4, а) один раз статически неопределима. Применяя метод сечений (рис. 5.4, б) и составляя уравнения равновесия статики, последовательно можем определить:

$$\sum Z = N_2 + 2 \cdot N_1 \cos \alpha - P = 0;$$

или

$$N_2 + 2 \cdot N_1 \cos \alpha = P. \quad (5.27)$$

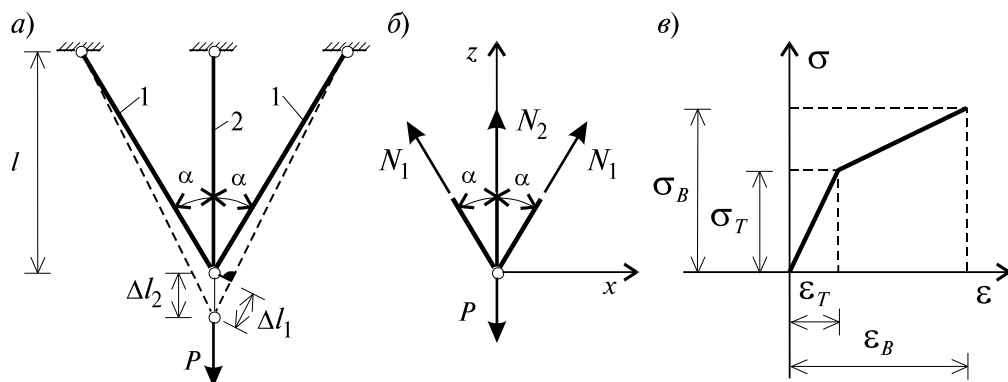


Рис. 5.4

Согласно деформированной схеме, изображенной на рис.5.4, а, из геометрических соображений, уравнения для определения относительных деформаций записываются в виде:

$$\Delta l_2 = (\Delta l_1) / \cos \alpha. \quad (5.28)$$

С учетом $\Delta l_1 = \epsilon(1) \cdot l_1$, $\Delta l_2 = \epsilon(2) \cdot l_2$, и принимая во внимание, что на первом этапе нагружения все элементы заданной системы деформируются согласно закону Гука,

т.е. $\varepsilon = \sigma/E$, получим:

$$\Delta l_1 = (N_1 l_1) / EA = (N_1 l) / EA \cos \alpha, \quad \Delta l_2 = (N_2 l_2) / EA. \quad (5.29)$$

С учетом (5.29) из (5.27) и (5.28) можно получить следующую замкнутую систему уравнений относительно усилий N_1 и N_2 :

$$2 \cdot N_1 \cos \alpha + N_2 = P; \quad N_1 = N_2 \cos^2 \alpha.$$

Откуда определяются:

$$N_1 = P (\cos^2 \alpha) / (1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha), \quad N_2 = P / (1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha). \quad (5.30)$$

Для выражения напряжения в среднем в элементах заданной системы имеем:

$$\sigma(1) = N_1 / A = P (\cos^2 \alpha) / (1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha) / A, \quad (5.31)$$

$$\sigma(2) = N_2 / A = P / (1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha) / A.$$

Отсюда следует, что $\sigma(2) > \sigma(1)$. Следовательно, в процессе нагружения сначала средний стержень переходит в пластическую стадию деформирования, а затем боковые стержни, т.е. при всех нагружения средний стержень, вплоть до стадии разрушения заданной системы, будет наиболее напряженным.

Принимая в (5.31), что $\sigma(2) = \sigma_T$ и $P = P_1$, окончательно получим:

$$P_1 = \sigma_T \cdot A (1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha) = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 2 \cdot 0,866^3) = 119,5 \text{ кН.}$$

Абсолютные удлинения стержней принимают значения:

$$\begin{aligned} \Delta l_{1a} &= \varepsilon(1) \cdot l_1 = [\sigma(1) / E] \cdot l_1 = (N_1 l_1) / EA = P_1 \cdot [\cos^2 \alpha] / (1 + 2 \cos^3 \alpha) \cdot (l / \cos \alpha) / EA = \\ &= 119,5 \cdot [(0,866^2) / (1 + 2 \cdot 0,866^3)] \cdot (1,0 / 0,866) / (2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4}) = 11,26 \cdot 10^{-4} \text{ м;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_{2a} &= \varepsilon(2) \cdot l_2 = [\sigma(2) / E] \cdot l_2 = (N_2 l_2) / EA = (P_2 l) / EA (1 + 2 \cos^3 \alpha) = \\ &= (119,5 \cdot 1,0) / (2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot (1 + 2 \cdot 0,866^3)) = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ м.} \end{aligned}$$

Относительные удлинения стержней принимают значения:

$$\varepsilon(1) = (\Delta l_1) / l_1 = (\Delta l_1 \cdot \cos \alpha) / l = (11,26 \cdot 10^{-4} \cdot 0,866) / 1,0 = 9,75 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon(2) = (\Delta l_2) / l_2 = (\Delta l_2) / l = (12,5 \cdot 10^{-4}) / 1,0 = 12,5 \cdot 10^{-4}.$$

2. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_2$, при котором все элементы заданной системы переходят в пластическую стадию деформирования. Физические уравнения взамен закона Гука в случае, когда стержни переходят в пластическую стадию деформирования, т.е. при $\sigma_T \leq \sigma \leq \sigma_B$, $\varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B$, в данном случае записываются в виде:

$$\sigma - \sigma_T = E_1 (\varepsilon - \varepsilon_T), \quad (5.32)$$

которое представляет собой уравнение прямой линии, описывающей диаграмму деформирования в области пластических деформаций (рис.5.4, в).

В начале по очевидным соотношениям определяется значение деформаций ε_T , соответствующее началу пластической стадии деформирования стержней и модуля деформаций в пластической стадии их деформирования:

$$\varepsilon_T = \sigma_T / E = (2,5 \cdot 10^5) / (2 \cdot 10^8) = 12,5 \cdot 10^{-4},$$

$$\begin{aligned} E_1 &= (\sigma_B - \sigma_T) / (\varepsilon_B - \varepsilon_T) = (3,9 \cdot 10^5 - 2,5 \cdot 10^5) / (200 \cdot 10^{-4} - 12,5 \cdot 10^{-4}) = \\ &= 1,4 \cdot 10^5 / (187,5 \cdot 10^{-4}) = 0,75 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что на данном этапе нагружения, т.е. когда $P_1 \leq P \leq P_2$, боковые элементы заданной системы деформируются упруго, а средний элемент будет находиться в пластическом состоянии.

Учитывая, что при $P = P_2$ будем иметь $\sigma(2) = \sigma_T$, $\varepsilon(2) = \varepsilon_T$, последовательно определим значения усилий и абсолютное удлинение в боковых стержнях при их переходе в пластическую стадию деформирования:

$$\begin{aligned} N_1 &= \sigma(1) A = \sigma_T A = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ кН}, \\ \Delta l_1 &= \varepsilon_T l_1 = \varepsilon_T l / \cos \alpha = \sigma_T / E \cdot l / \cos \alpha = \\ &= (2,5 \cdot 10^5) / (2 \cdot 10^8) \cdot 1,0 / 0,866 = 1,443 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned}$$

Учитывая выражения (5.28) и (5.32) определяется значение абсолютного и относительного удлинения, а также усилия в среднем стержне, в момент перехода боковых стержней в пластическую стадию их деформирования:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= (\Delta l_1) / \cos \alpha = (1,443 \cdot 10^{-3}) / 0,866 = 1,667 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ \varepsilon(2) &= (\Delta l_2) / l = (1,667 \cdot 10^{-3}) / 1,0 = 1,667 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ N_2 &= \sigma(2) \cdot A = [\sigma_T + E_1 (\varepsilon(2) - \varepsilon_T)] \cdot A = \\ &= [2,5 \cdot 10^5 + 0,75 \cdot 10^7 \cdot (1,667 - 1,25) \cdot 10^{-3}] \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50,63 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Далее из уравнения равновесия (5.27) вычисляется величина внешней силы $P = P_2$:

$$P_2 = N_2 + 2N_1 \cos \alpha = 50,63 + 2 \cdot 50 \cdot 0,866 = 137,23 \text{ кН}.$$

3. Определить абсолютные и относительные удлинения стержней и значение силы $P = P_3$, при котором в наиболее напряженном стержне напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B , т.е. при дальнейшем увеличении силы P происходит разрушение **заданной** системы. Сначала вычисляем значения удлинений в боковых стержнях, при достижении в среднем стержне предельных напряжений и деформаций $\sigma(2) = \sigma_B$, $\varepsilon(2) = \varepsilon_B$.

Учитывая, что $\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha$; $l_1 = l / \cos \alpha$, получим:

$$\varepsilon(1) = (\Delta l_1) / l_1 = (\Delta l_2) / (l \cos^2 \alpha) = \varepsilon(2) \cos^2 \alpha = \varepsilon_B \cos^2 \alpha = 0,02 \cdot 0,866^2 = 0,025 > \varepsilon_T.$$

Таким образом, к моменту разрушения среднего стержня ($\sigma(2) = \sigma_B$, $\varepsilon(2) = \varepsilon_B$) боковые стержни также находятся в пластической стадии деформирования. Напряжения в боковых стержнях, в момент разрушения среднего стержня, принимают значения:

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma_T + E_1 (\varepsilon(1) - \varepsilon_T) = 2,5 \cdot 10^5 + 0,75 \cdot 10^7 \cdot 150 \cdot 10^{-4} - 12,5 \cdot 10^4 = \\ &= 2,5 \cdot 10^5 + 1,05 \cdot 10^5 = 3,55 \cdot 10^5 \text{ кН/м}^2. \end{aligned}$$

Для определения величины внешней силы $P = P_3$, т.е. значения силы в момент разрушения среднего стержня из уравнения равновесия (5.25) имеем:

$$\begin{aligned} P_2 &= N_2 + 2 \cdot N_1 \cos \alpha = \sigma(2) A + 2 \cdot \sigma(1) A \cos \alpha = \sigma_B + 2 \cdot \sigma(1) \cos \alpha A = \\ &= (3,9 \cdot 10^5 + 2 \cdot 3,55 \cdot 10^5 \cdot 0,866) \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 200,97 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Как показывают результаты расчетов, для перехода среднего стержня в пластическую стадию деформирования необходима была внешняя сила $P = P_1 = 119,5 \text{ кН}$, а для его разрушения - $P = P_3 = 200,97 \text{ кН}$.

На основании полученных результатов можно заметить, что если бы мы ограничивались только учетом упругой стадии работы конструкции, т.е. $P = P_1$, то несущая способность заданной системы оценивалась бы как $P = P_1 = 119,5 \text{ кН}$.

Как показали расчеты, учет пластической стадии работы позволил выявить дополнительные резервы несущей способности заданной системы, т.к. величина разрушающей силы заданной системы в действительности равна $P = P_3 = 200,97$ кН.

В заключении определим величины абсолютных удлинений стержней в момент разрушения среднего стержня:

$$\Delta l_1 = \varepsilon(1) l_1 = \varepsilon(1) \cdot l / \cos \alpha = 0,0151,0 / 0,866 = 0,0173 \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon(2) \cdot l = \varepsilon_B \cdot l = 0,02 \cdot 1,0 = 0,02 \text{ м}.$$

Легко определить во сколько раз абсолютные удлинения стержней возросли за счет возникновения пластических деформаций по отношению к их абсолютным удлинениям в момент перехода среднего стержня от упругой к пластической стадии деформирования:

$$n_1 = (\Delta l_1) / (\Delta l_{1a}) = 0,0173 / 0,001126 = 15,4 \text{ раз},$$

$$n_2 = (\Delta l_2) / (\Delta l_{2a}) = 0,02 / 0,00125 = 16 \text{ раз}.$$

4. Рассматривая систему (рис.5.4, а) при отсутствии среднего стержня в процессе ее нагружения, определить абсолютные и относительные удлинения элементов системы, и внешней силы $P = P_4$, при котором в ее элементах напряжения достигают значения, равного временному сопротивлению σ_B . Исключая средний стержень, система превращается из статически неопределимой в статически определимую. Применяя метод сечений, легко установить, что уравнения равновесия в данном случае принимают следующий вид:

$$2 \cdot N_1 \cos \alpha = P. \quad (5.33)$$

В конце упругой стадии работы элементов заданной системы имеем, что

$\sigma(1) = \sigma_T$, $\varepsilon(1) = \varepsilon_T$. С учетом данного обстоятельства последовательно определим значение усилия N_1 , абсолютное удлинение стержней и величину силы $P = P_1$, соответствующих концу упругой стадии работы данной системы:

$$N_1 = \sigma_T \cdot A = 2,5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 50 \text{ кН};$$

$$\Delta l_1 = (N_1 l) / EA \cos \alpha = (50 \cdot 1,0) / (2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,866) = 14,43 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$P_1 = 2 \cdot N_1 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot 50 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ кН}.$$

При дальнейшем нагружении системы, то есть при $P > P_1 = 86,6$ кН, элементы данной системы переходят в пластическую стадию деформирования. Последовательно определим значение внутренних усилий, абсолютных удлинений и величину разрушающей силы $P = P_2$, при достижении напряжений и деформаций предельных значений, т.е. при $\sigma(2) = \sigma_B$, $\varepsilon(2) = \varepsilon_B$:

$$N_1 = \sigma_B A = 3,9 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 78,0 \text{ кН};$$

$$\Delta l_1 = \varepsilon_B l / \cos \alpha = 0,02 \cdot 1,0 / 0,866 = 2,31 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$P_2 = 2 \cdot N_1 \cos \alpha = 2 \cdot 78 \cdot 0,866 = 135,1 \text{ кН}.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы.

Как и для трехстержневой статически неопределимой системы, так и для двухстержневой статически определимой системы, учет пластических деформаций позволил выявить дополнительные резервы систем по несущей способности. Если бы мы ограничились только упругим расчетом, расчетная несущая способность двухстержневой системы была бы равна $P = P_1 = 86,6$ кН. А за счет учета упругопластической работы элементов системы, как было показано, несущая способность будет исчерпана при $P = P_2 = 135,1$ кН, т.е. при нагрузке в 1,56 раза больше, чем при упругом расчете.

Далее заметим, что за счет удаления одного среднего элемента из исходной системы, несущая способность уменьшилась в $200,96/135 = 1,49$ раза, а жесткость системы - в $(\Delta l_1 \cos \alpha)/(\Delta l_2) = (2,31 \cdot 10^{-2} \cdot 0,866)/(12,5 \cdot 10^{-4}) = 16$ раз.

5.2.4 Предельное состояние статически определимых систем при изгибе

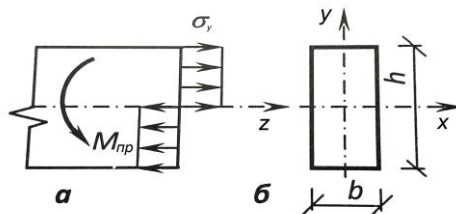


Рис. 5.5

Напряженное состояние изгибаемых конструкций (балок) определяется величинами изгибающих моментов. При плоском поперечном изгибе изгибающий момент, не может быть больше предельного момента текучести $M_{пр}$:

$$M_{пр} = \sigma_z (S_x^B + S_x^H) \text{ или } M_{пр} = \sigma_z W_T, \quad (5.34)$$

где S_x^B и S_x^H – соответственно статические моменты верхнего и нижнего полусечения относительно нейтральной оси x ;

W_T – пластический момент сопротивления, например, для прямоугольного поперечного сечения (рис. 5.5, а, б): $W_T = (bh^2)/4$.

В балках в тех сечениях, где изгибающие моменты достигают значений $M_{пр}$, образуются пластические шарниры (рис. 5.5, а). В этом случае изгибающий момент в сечении не может увеличиваться, а деформирование балки далее происходит при постоянном значении изгибающего момента $M_{пр}$ в пластическом шарнире.

Когда в статически определимой балке нагрузка достигает предельного значения, при которой образуется пластический шарнир в наиболее напряженном сечении, тогда балка превращается в механизм. Это критерий разрушения конструкции.

Статически неопределимая стержневая система или балка при разрушении тоже превращается в механизм. При этом в балках или рамах необходимо образование столько пластических шарниров, сколько требуется для превращения их в механизм, т. е. число пластических шарниров должно быть на единицу больше, чем степень статической неопределенности.

Задача 5.3

Дана стальная однопролетная шарнирно опертая балка, нагруженная по всему пролету равномерно распределенной нагрузкой $q = 20$ кН/м, расстояние между опорами $l = 3$ м. Подобрать сечение прокатной двутавровой балки, если $R_y = 240$ МПа, $\gamma_c = 1$, и определить, во сколько раз необходимо увеличить равномерно распределенную нагрузку q , чтобы в балке образовался пластический шарнир. Принять предел текучести стали $R_{yn} = 285$ МПа. Собственным весом балки пренебречь.

Решение.

Определяем максимальный изгибающий момент в середине пролета балки:

$$M_{max} = (ql^2)/8 = (20 \cdot 3^2)/8 = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Находим необходимый момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x = M_{\max} / (R_y \gamma_c) = (22,5 \cdot 10^6) / (240000 \cdot 1) = 93,75 \text{ см}^3.$$

По сортаменту выбираем двутавр № 16 с $W_x = 109 \text{ см}^3$ и статическим моментом площади полусечения относительно нейтральной оси $x - S_x^B = S_x^H = 62,3 \text{ см}^3$.

По формуле (5.34) находим предельный момент текучести:

$$M_{\text{пр}} = R_{\text{уп}} (2 S_x^B) = 285000 \cdot 2 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6} = 35,51 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

И, наконец, определяем $n = M_x / M_{\max} = 35,51 / 22,5 = 1,58$.

Следовательно, если равномерно распределенную нагрузку $q = 20 \text{ кН/м}$ увеличить в 1,58 раза, то в середине пролета в поперечном сечении балки возникнет пластический шарнир и балка превратится в механизм.

Задача 5.4

Рассмотрим предельное состояние балки с двумя шарнирно опертыми концами, от действия силы P , приложенной в середине пролета. В статически определимой балке (рис.5.6), как известно, нормальные напряжения в поперечных сечениях в упругой стадии, изменяются по высоте сечения по линейному закону и пропорциональны величине изгибающего момента.

В опасном сечении при достижении напряжений в крайних волокнах величины σ_T , заканчивается упругая стадия работы, и величина изгибающего момента по теории допускаемых напряжений будет определяться следующими известными соотношениями:

$$M_{\text{доп}} = \sigma_T W_x = (P_{\text{доп}} \cdot l) / 4, \quad (5.35)$$

откуда определяем допускаемое значение внешней силы:

$$P_{\text{доп}} = (4 \sigma_T W_x) / l, \quad (5.36)$$

где $W_x = (bh^2) / 6$ - момент сопротивления поперечного сечения балки (рис.5.6, б).

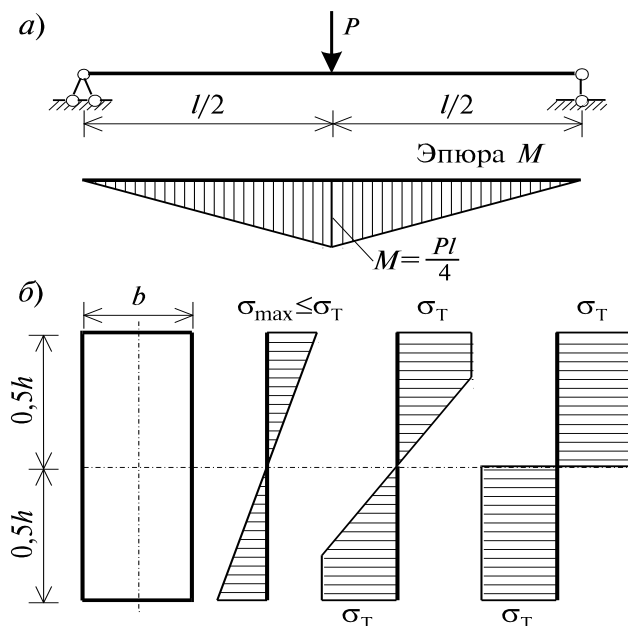


Рис. 5.6

Таким образом, при расчете балки (рис.5.6, а) по теории допускаемых напряжений, допускаемое значение внешней силы, равно:

$$P_{\text{доп}} = 2/3 (\sigma_T b \cdot h^2)/l. \quad (5.37)$$

При $P = P_{\text{доп}}$, вычисленной по формуле (5.37), заданная балка далеко не исчерпала свою несущую способность. При увеличении нагрузки, пластические деформации проникают вглубь сечения, вплоть до появления в нем пластического шарнира, т.е. состояния сечения, при котором все ее точки перешли в пластическое состояние. В пластическом шарнире момент достигает предельной величины, когда эпюра нормальных напряжений во всех точках в опасном сечении принимает значение σ_T (рис.5.6, б).

Согласно диаграмме деформирования материала по Прандтлю, продольные волокна балки в этом сечении испытывают беспредельно возрастающие деформации. В этих условиях можно говорить о формировании пластического шарнира в сечении, который превращает данную балку в механизм (рис.5.7). Это означает, что с возникновением пластического шарнира происходит полное исчерпание несущей способности балки, т.е. заданная система разрушается. Величину силы, вызывающую образование в балке пластического шарнира, называют **предельной силой метода предельного состояния**.

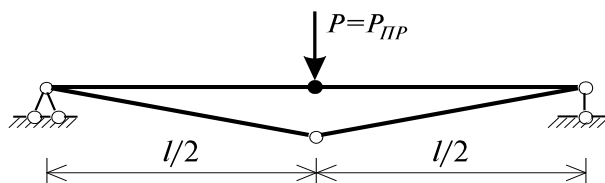


Рис. 5.7

Значение предельной силы определяется из условия равенства моментов внутренних и внешних сил для опасного срединного сечения балки:

$$M_{\text{пр}} = 2(\sigma_T b \cdot h/2) \cdot h/4 = \sigma_T W_T; \quad M_{\text{пр}} = (P_{\text{пр}} \cdot l)/4, \quad (5.38)$$

откуда получим:

$$P_{\text{пр}} = \sigma_T (b \cdot h^2)/l. \quad (5.39)$$


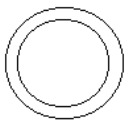
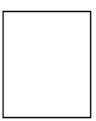


Величина $W_T = (b \cdot h^2)/4$ называется **пластическим моментом сопротивления**.

Если сравнить величину предельной силы, определенной по методу допускаемых напряжений и по методу предельного равновесия, то получим, что $P_{\text{пр}} = 3/2 P_{\text{доп}}$.

Из приведенного примера следует, что для расчета изгибаемых элементов по методу предельного состояния, необходимо предварительно определить пластический момент сопротивления в сечениях пластических шарниров.

В таблице 5.1 приведены значения отношения W_T/W_x для некоторых стандартных форм сечений.

Таблица 5.1

Форма сечения					
W_T/W_x	1,16	1,27	1,50	1,70	2,00

5.2.5. Расчет статически неопределимых балок по предельному состоянию.

Кинематический и статический способ

При расчете статически определимой балки было установлено, что ее несущая способность исчерпается, когда, хотя бы в одном, т.е. в наиболее опасном сечении пластическая область заполняет все сечение, т.е. когда в этом сечении образуется пластический шарнир и система становится геометрически изменяемой.

Для статически неопределимых балок образование одного пластического шарнира не приводит к исчерпанию несущей способности, т.к. в этом случае степень кинематической определимости системы снижается на одну единицу. В случае n раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности происходит при формировании $n + 1$ пластических шарниров. Однако в ряде случаев часть балки может стать геометрически изменяемой при значительно меньшем числе пластических шарниров.

Например, в статически многократно неопределимой балке с консолью (рис. 5.8), несущая способность заданной системы исчерпается в случае возникновения первого же пластического шарнира над крайней правой опорой.

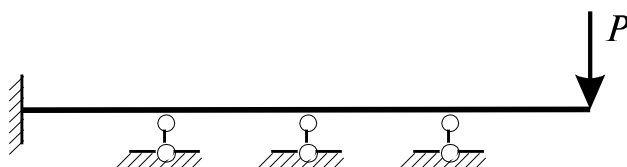


Рис. 5.8

Для расчета статически неопределимых систем по теории предельного равновесия можно воспользоваться одним из двух способов - кинематическим или статическим.

При применении кинематического способа, в предельном состоянии составляется уравнение работы всех внешних и внутренних усилий на основе принципа возможных перемещений. Этот принцип формулируется так: если система твердых тел находится в равновесии под действием системы сил, то работа, совершаемая этими силами на любом малом возможном перемещении системы, должна быть равна нулю.

При применении статического способа при отсутствии упругого расчета, на основе которого предварительно можно определить наиболее вероятную схему разрушения конструкции, задаются различные схемы разрушения предельной стадии работы рассматриваемой системы, и для каждой из них составляются уравнения равновесия и определяются предельные значения внешних сил. Из их числа, наименьшая является расчетной величиной предельной силы.

Из числа рассмотренных схем разрушения, на основании которых определяется предельная сила, является наиболее вероятной схемой разрушения конструкции.

Рассмотрим несколько характерных примеров для определения предельной нагрузки для статически неопределимых балок, принимая диаграмму растяжения-сжатия материалов без упрочнения, т.е. диаграмму Прандтля.

Задача 5.5

Пусть трехопорная балка (рис. 5.9, а) нагружена силой величиной P . Эта балка один раз статически неопределимая. На рис. 5.9, б изображена эпюра изгибающих моментов при упругой стадии деформирования. Для решения этой задачи применим статический способ.

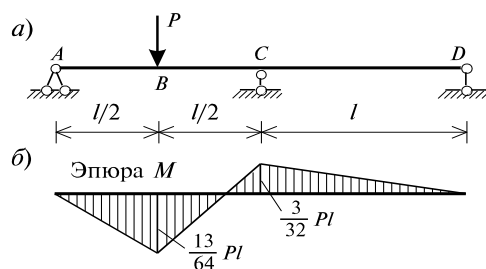


Рис. 5.9

Значение силы $P_{\text{доп}}$, при которой в наиболее опасной точке балки напряжение достигает предела текучести, может быть установлено из равенства наибольшего момента, действующего в опасном сечении, допускаемому $M_{\text{max}} = 13/64 P \cdot l = M_{\text{доп}}$:

$$P_{\text{доп}} = 64/13 M_{\text{доп}}/l.$$

Если балка имеет прямоугольное поперечное сечение, то $M_{\text{доп}} = \sigma_T (b \cdot h^2)/6$:

$$P_{\text{доп}} = 32/39 (\sigma_T b \cdot h^2)/l. \quad (5.40)$$

Увеличивая величину внешней силы $P > P_{\text{доп}}$, пластическая область в опасном сечении В балки (рис. 5.10) увеличивается. При некотором значении силы в сечении В возникает пластический шарнир, тогда величина изгибающего момента в этом сечении становится равной $M_{\text{пр}}$. При дальнейшем росте внешней силы P , момент в сечении В остается постоянным и равным $M_{\text{пр}}$. Это означает, что трехопорная балка приобретает пластический шарнир в т. В. При этом она нагружена силой P и двумя моментами $M_{\text{пр}}$, приложенных в разных торцах сечения В (рис. 5.10, а). Следовательно, в данном случае возникновение одного пластического шарнира превращает один раз статически неопределимую балку в балку статически определимую.

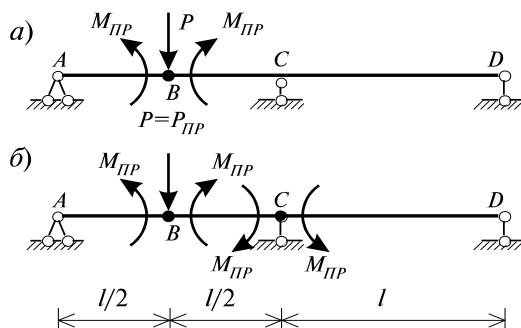


Рис. 5.10

При дальнейшем росте силы P изгибающие моменты в сечении В и на участке АВ не возрастают, а изгибающие моменты на участке ВСD, с ростом величины силы P , растут. При указанных предположениях, наибольшая величина изгибающего момента формируется в сечении С, где он раньше всего и достигает предельной величины $M_{\text{пр}}$.

Когда в сечении С изгибающий момент достигнет предельной величины $M_{\text{пр}}$, т.е. когда в этом сечении сформируется пластический шарнир, несущая способность балки исчерпается, вследствие чего, балка превращается в геометрически изменяемую систему.

Согласно статическому способу, и учитывая, что наиболее вероятная схема разрушения конструкции очевидна и изображена на рис.5.10, б, величина предельной силы определяется из уравнений равновесия и условий равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $M_{\text{пр}}$:

$$\Sigma M_A = P_{\text{пр}} \cdot l/2 - R_C \cdot l + 2 \cdot R_D \cdot l = 0;$$

$$\Sigma y = R_A + R_C - R_D = 0;$$

$$\Sigma M_B^{\text{лев}} = R_A \cdot l/2 - M_{\text{пр}} = 0;$$

$$\Sigma M_C^{\text{прав}} = R_D \cdot l - M_{\text{пр}} = 0.$$

Решая совместно последнюю систему уравнений, получим:

$$P_{\text{пр}} = 6 M_{\text{пр}}/l. \quad (5.41)$$

откуда:

$$P_{\text{пр}} = 6 (\sigma_T W_T)/l = 3/2 (\sigma_T b \cdot h^2)/l. \quad (5.42)$$

При расчете по методу допускаемых напряжений расчетная величина допускаемой силы определяется:

$$P_{\text{доп}} = P_{\text{пр}}/n = 32/39 (\sigma_T b \cdot h^2)/n \cdot l, \quad (5.43)$$

где n - коэффициент запаса по несущей способности конструкции.

В случае расчета по методу предельных состояний, величина допускаемой силы принимает значение:

$$P_{\text{доп}} = P_{\text{пр}}/n = 3/2 (\sigma_T b \cdot h^2)/n \cdot l, \quad (5.44)$$

Сопоставляя выражения (5.43) и (5.44), получим, что метод расчета по предельному состоянию дает величину допускаемой силы в $117/64 \approx 1,83$ раза больше, чем метод расчета по допускаемым напряжениям, при условии, что коэффициент запаса в обоих методах принят одинаковым.

В заключении рассмотрим балку с одним защемленным, а вторым шарнирно опертым концами, нагруженной двумя одинаковыми силами (рис. 5.11, а).

Определим величину предельной силы кинематическим способом. Рассматриваемая балка, один раз статически неопределима и, следовательно, ее несущая способность исчерпается в случае образования двух пластических шарниров.

Пластические шарниры могут формироваться в сечениях А, В и С. Для определения предельной нагрузки по кинематическому способу необходимо рассмотреть различные сочетания образования пластических шарниров в двух сечениях из трех. Число таких комбинаций равно трем, т.е. числу сочетаний из трех пластических шарниров по два.

Для различных вариантов расположения пластических шарниров составляются уравнения равновесия, при условии равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $M_{\text{пр}}$. Из полученных уравнений могут быть определены величины предельных нагрузок. Действительной предельной нагрузкой будет наименьшая из вычисленных для различных сочетаний пластических шарниров.

Необходимо заметить, что при составлении уравнений предельного равновесия системы, можно использовать из трех уравнений статического равновесия всей системы в целом, только два из них. Третье уравнение автоматически будет удовлетворяться. Недостаточные уравнения могут быть получены, из рассмотрения равновесия отсеченной части системы, предполагая, что рассматриваемое сечение проходит через пластический шарнир.

Рассмотрим различные возможные схемы предельной стадии работы конструкции.

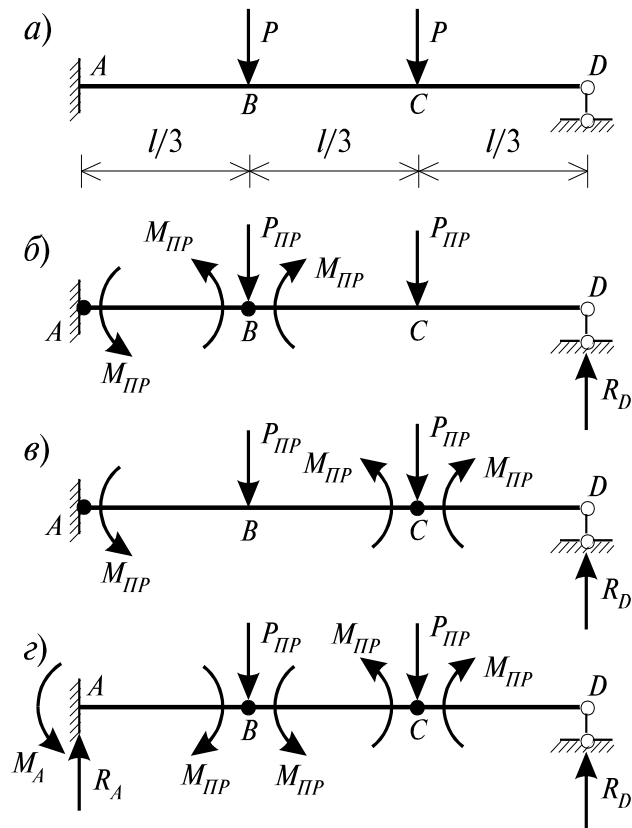


Рис. 5.11

Первая схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях А и В (рис. 5.11, б):

$$\begin{aligned}
 \Sigma y &= R_A + R_D - 2P_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_A &= P_{\text{пп}} \cdot l/3 + P_{\text{пп}} \cdot 2 \cdot l/3 - R_D \cdot l - M_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_B^{\text{прав}} &= P_{\text{пп}} \cdot l/3 - R_D \cdot 2 \cdot l/3 + M_{\text{пп}} = 0, \\
 P_{\text{пп}} &= 5M_{\text{пп}}/l.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Вторая схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях А и С (рис. 5.11, в):

$$\begin{aligned}
 \Sigma y &= R_A + R_D - 2P_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_A &= P_{\text{пп}} \cdot l/3 + 2 \cdot P_{\text{пп}} \cdot l/3 - R_D \cdot l - M_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_C^{\text{прав}} &= -R_D \cdot l/3 + M_{\text{пп}} = 0; \\
 P_{\text{пп}} &= 4M_{\text{пп}}/l.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Третья схема, предполагая, что пластические шарниры формируются в сечениях В и С (рис. 5.11, г):

$$\begin{aligned}
 \Sigma y &= R_A + R_D - 2P_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_A &= P_{\text{пп}} \cdot l/3 + 2 \cdot P_{\text{пп}} \cdot l/3 - R_D \cdot l - M_A = 0; \\
 \Sigma M_B^{\text{лев}} &= M_A - R_A \cdot l/3 - M_{\text{пп}} = 0; \\
 \Sigma M_C^{\text{прав}} &= M_{\text{пп}} - R_D \cdot l/3 = 0,
 \end{aligned}$$

отсюда, решая совместно эту систему уравнений, получим значения изгибающего момента в заделке M_A и значение предельной нагрузки $P_{пр}$:

$$\begin{aligned} P_{пр} &= 9 \cdot M_{пр}/l; \\ M_A &= 6 \cdot M_{пр} > M_{пр}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Так как условие $M_A > M_{пр}$ не может быть реализовано, то третью схему следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

Сопоставляя предельные значения внешней силы, приведенные в (5.45)-(5.46), определяем, что наименьшая предельная нагрузка имеет место при второй схеме предельного равновесия, т.е. когда пластические шарниры формируются в сечениях А и С:

$$P_{пр} = 4 \cdot M_{пр}/l.$$

Далее рассмотрим применение кинематического способа - метода предельных состояний для определения величин продольных сил. Действительная схема разрушения системы показана на рис. 5.12. Составим уравнения работ всех внутренних и внешних усилий на возможных перемещениях:

$$-M_{пр} \varphi_A + P_{пр} f_B + P_{пр} f_C - M_{пр} \varphi_C^{лев} - M_{пр} \varphi_C^{прав} = 0. \quad (5.48)$$

Составляя уравнения совместности, получим:

$$\varphi_A = (3 \cdot f_C)/2 \cdot l; \quad f_B = 1/2 f_C; \quad \varphi_C^{лев} = \varphi_A = (3 \cdot f_C)/2 \cdot l; \quad \varphi_C^{прав} = \varphi_D = 3 \cdot f_C/l. \quad (5.49)$$

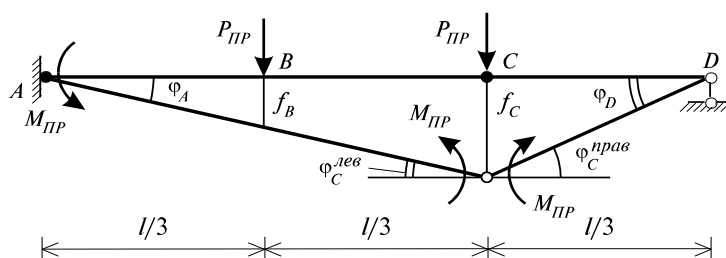


Рис. 5.12

Уравнение (5.48), с учетом (5.49), примет вид:

$$\begin{aligned} -M_{пр} (3 \cdot f_C)/2l + P_{пр} \cdot f_C + P_{пр} \cdot f_C - M_{пр} (3 \cdot f_C)/2l - M_{пр} 3 \cdot f_C/l &= 0, \\ P_{пр} &= 4 \cdot M_{пр}/l. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Сопоставляя выражения (5.50) и (5.46), заметим, что кинематический и статический способы дали идентичные результаты по значению предельной силы.

5.2.6. Расчет рам методом предельного равновесия

Для рамы с заданными размерами и поперечными сечениями элементов требуется:

1. Определить предельную нагрузку статическим методом и построить эпюру изгибающих моментов в предельном состоянии.
2. Найти допускаемую по условию прочности нагрузку и сравнить ее с предельной.
3. Определить предельную нагрузку с использованием ПК SCAD

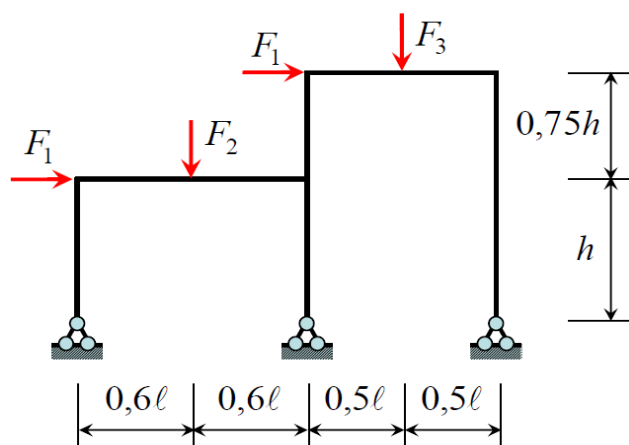


Рис. 5.13

Числовые данные для расчета:

$$\ell = 5 \text{ м}, h = 4 \text{ м}, F_1 = F, F_2 = 2F, F_3 = 3F$$

$$R = 240 \text{ Мпа}, \sigma_T = 245 \text{ Мпа}.$$

Колонна – двутавр № 30К1, ригель – двутавр № 35Ш1.

Двутавр № 30К1. характеристики сечения:

Площадь $A = 108 \text{ см}^2$, момент инерции $J_x = 18110 \text{ см}^4$, момент сопротивления $W_x = 1223 \text{ см}^3$, статический момент площади половины сечения $S_x = 672 \text{ см}^2$.

$$\text{Пластический момент сопротивления } W_t = 2S_x = 2 \cdot 672 = 1344 \text{ см}^3.$$

$$\text{Предельный изгибающий момент } M_{np} = \sigma_t W_t = 24,5 \cdot 1344 = 32928 \text{ кН} \cdot \text{см} = 330 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Двутавр № 35Ш1. характеристики сечения:

Площадь $A = 95,7 \text{ см}^2$, момент инерции $J_x = 19790 \text{ см}^4$, момент сопротивления $W_x = 1171 \text{ см}^3$, статический момент площади половины сечения $S_x = 651 \text{ см}^2$.

$$\text{Пластический момент сопротивления } W_t = 2S_x = 2 \cdot 651 = 1302 \text{ см}^3.$$

$$\text{Предельный изгибающий момент } M_{np} = \sigma_t W_t = 319 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В узле рамы пластический шарнир образуется в ригеле.

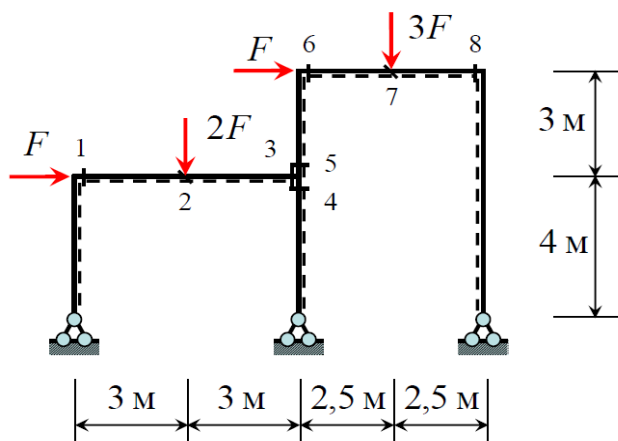


Рис. 5.14

$$n = 8, \quad L = 3K - \Pi_0 - \Pi = 3 \times 5 - 12 = 3,$$

$Y = 8 - 3 = 5$ – необходимо составить 5 уравнений равновесия.

Определение предельной нагрузки в ПК SCAD

1. Выполняем расчет в упругой стадии

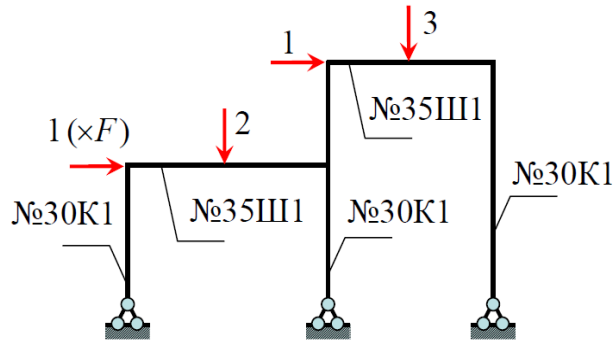


Рис. 5.15

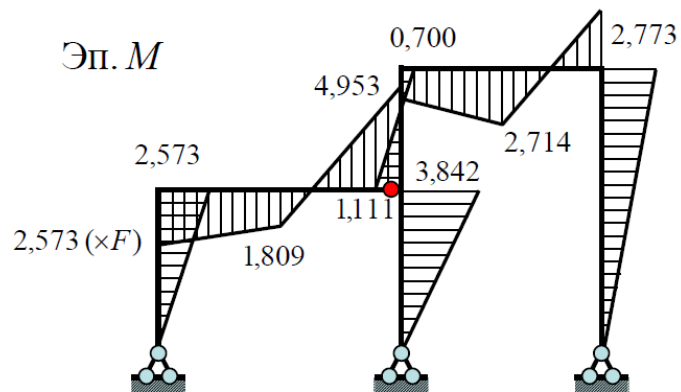


Рис. 5.16

Где образуется первый пластический шарнир?

Условие прочности:

$$\frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{4,953F}{W_z} \leq R.$$

$$F \leq \frac{R \cdot W_z}{4,953} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 1171 \cdot 10^{-6}}{4,953} = 56,7 \cdot 10^3 \text{ H},$$

$$F = 56,7 \text{ кН}, \quad \frac{F_{np}}{F} = \frac{103,5}{56,7} = 1,83$$

2. Определяем параметр нагрузки для образования первого пластического шарнира.

$$4,953F = M_{np}, \quad F = \frac{M_{np}}{4,953} = \frac{319}{4,953} = 64,4 \text{ кН}.$$

3. Расчет рамы с одним пластическим шарниром.

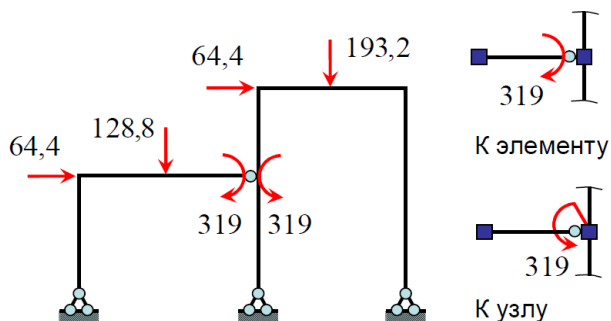


Рис. 5.17

Загружение № 1 – сила с точностью до параметра F .

Загружение № 2 – момент $M_{np} = 319 \text{ кН·м}$.

Загружение № 3 – приведено на схеме.

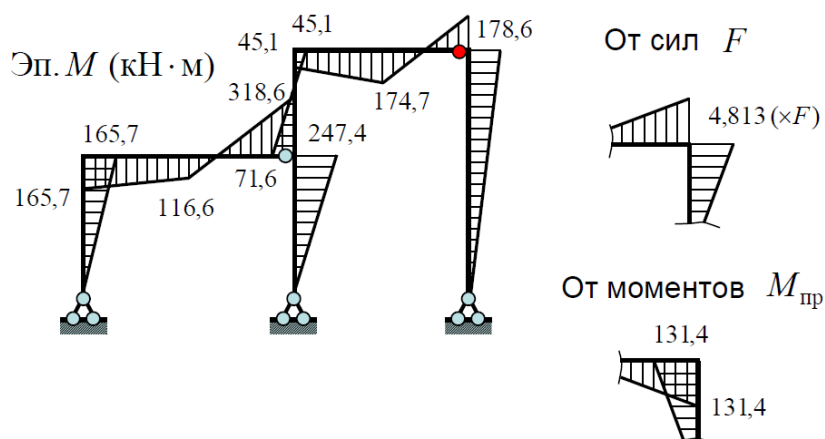


Рис. 5.18

Определяем нагрузку для образования второго шарнира:

$$4,813 F - 131,4 = M_{np}.$$

$$F = \frac{319 + 131,4}{4,813} = 93,6 \text{ кН}.$$

4. Расчет рамы с двумя пластическими шарнирами

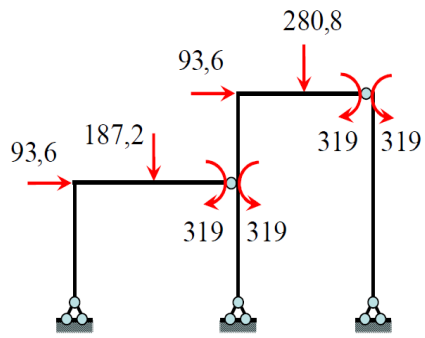


Рис. 5.19

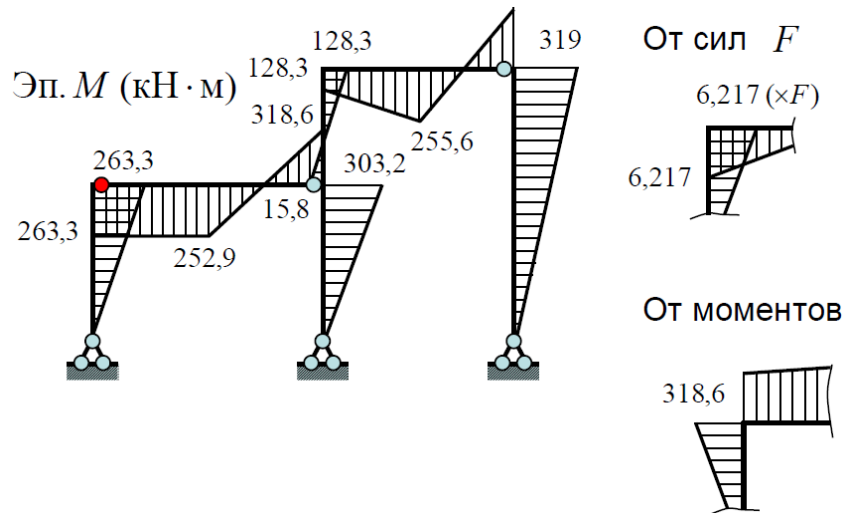


Рис. 5.20

$$6,217 F - 318,6 = M_{пр.}$$

$$F = \frac{319 + 138,6}{6,217} = 102,6 \text{ кН.}$$

5. Расчет рамы с тремя пластическими шарнирами

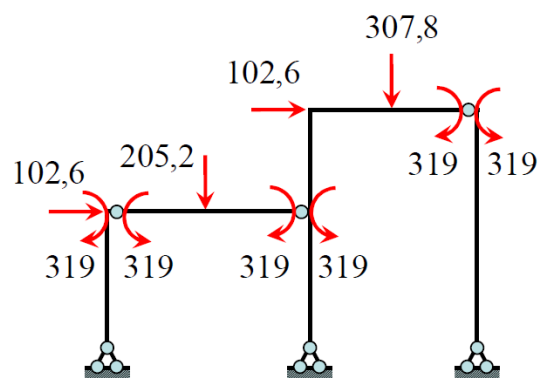


Рис. 5.21

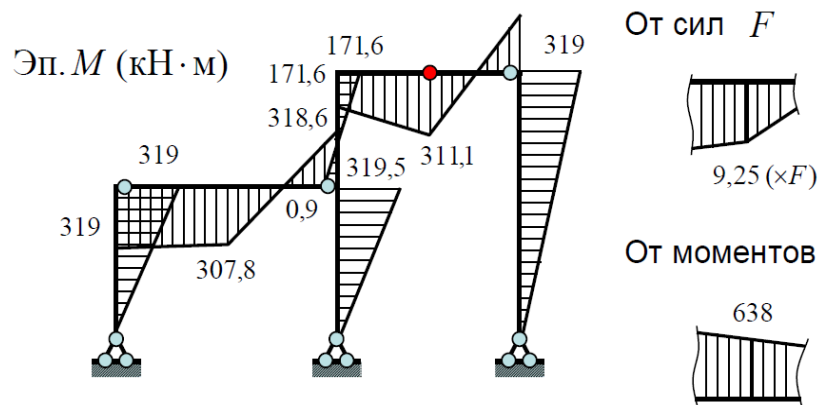


Рис. 5.22

$$9,25 F - 638 = M_{\text{пр.}}$$

$$F = \frac{319 + 638}{9,25} = 103,5 \text{ кН}$$

Расчет ординат эпюры моментов в предельном состоянии

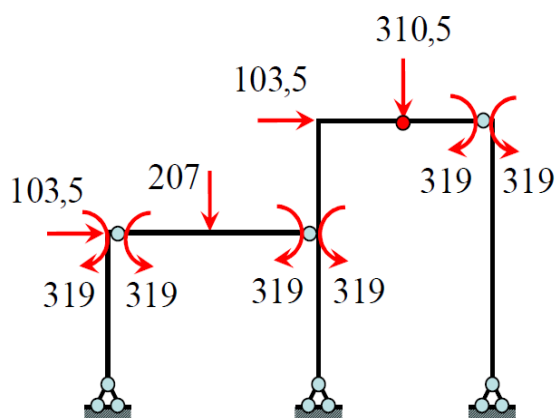


Рис. 5.23

Результаты расчета в ПК SCAD

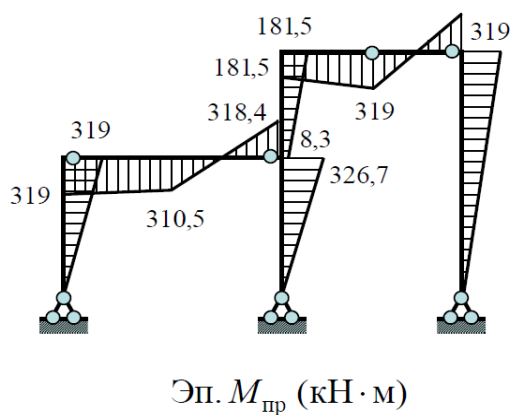


Рис. 5.24

5.2.7 Задание на Расчетно-графическую работу «Расчет рам методом предельного равновесия»

Для рамы с заданными размерами и поперечными сечениями элементов (рис. 1, табл. 1) требуется:

- определить предельную нагрузку статическим методом и построить эпюру изгибающих моментов в предельном состоянии;
- найти допускаемую по условию прочности нагрузку и сравнить ее с предельной нагрузкой;
- проверить правильность решения с помощью кинематического метода;
- определить предельную нагрузку расчетом в программном комплексе SCAD.

Характеристики материала стержней рамы:

- расчетное сопротивление материала $R = 240$ МПа;
- предел текучести $\sigma_T = 245$ МПа.

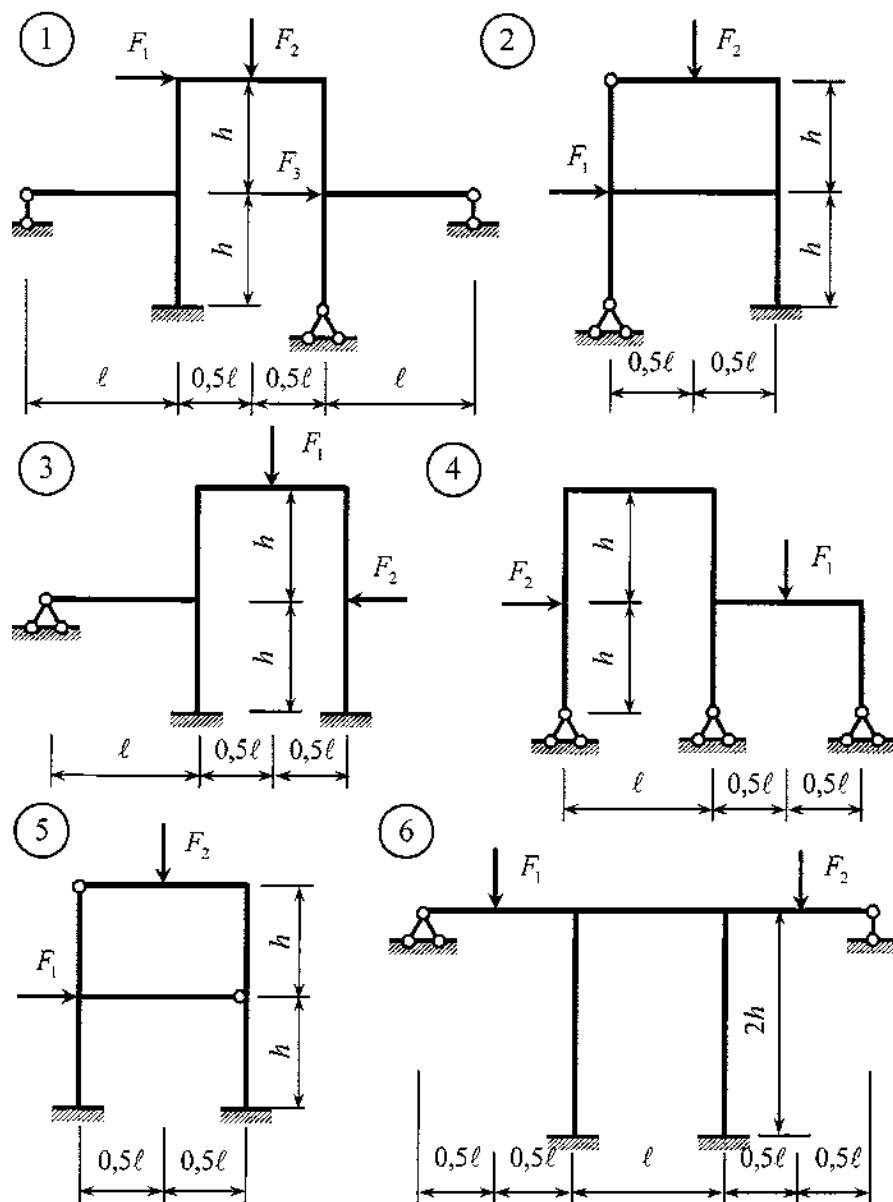
Номер варианта взять по групповому журналу

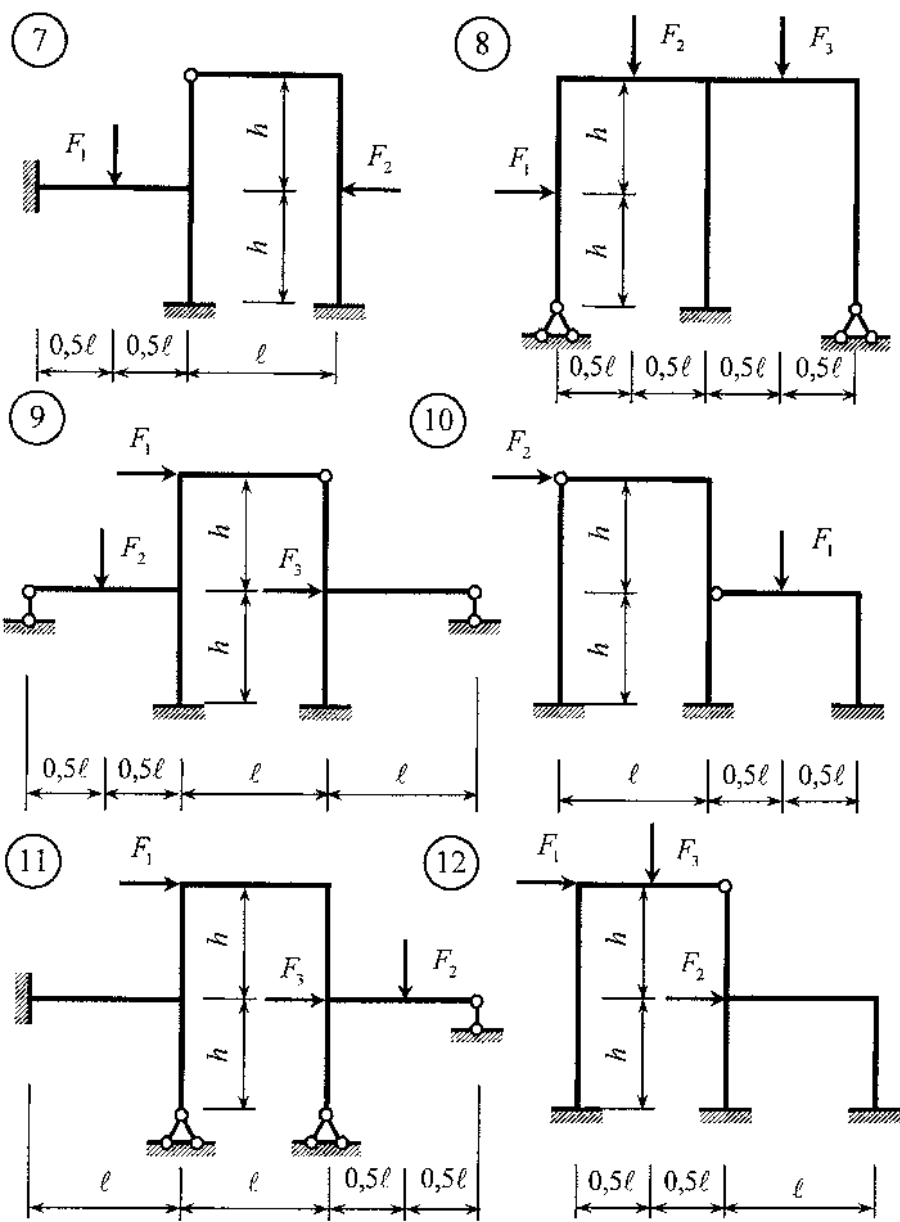
Исходные данные для расчета рамы

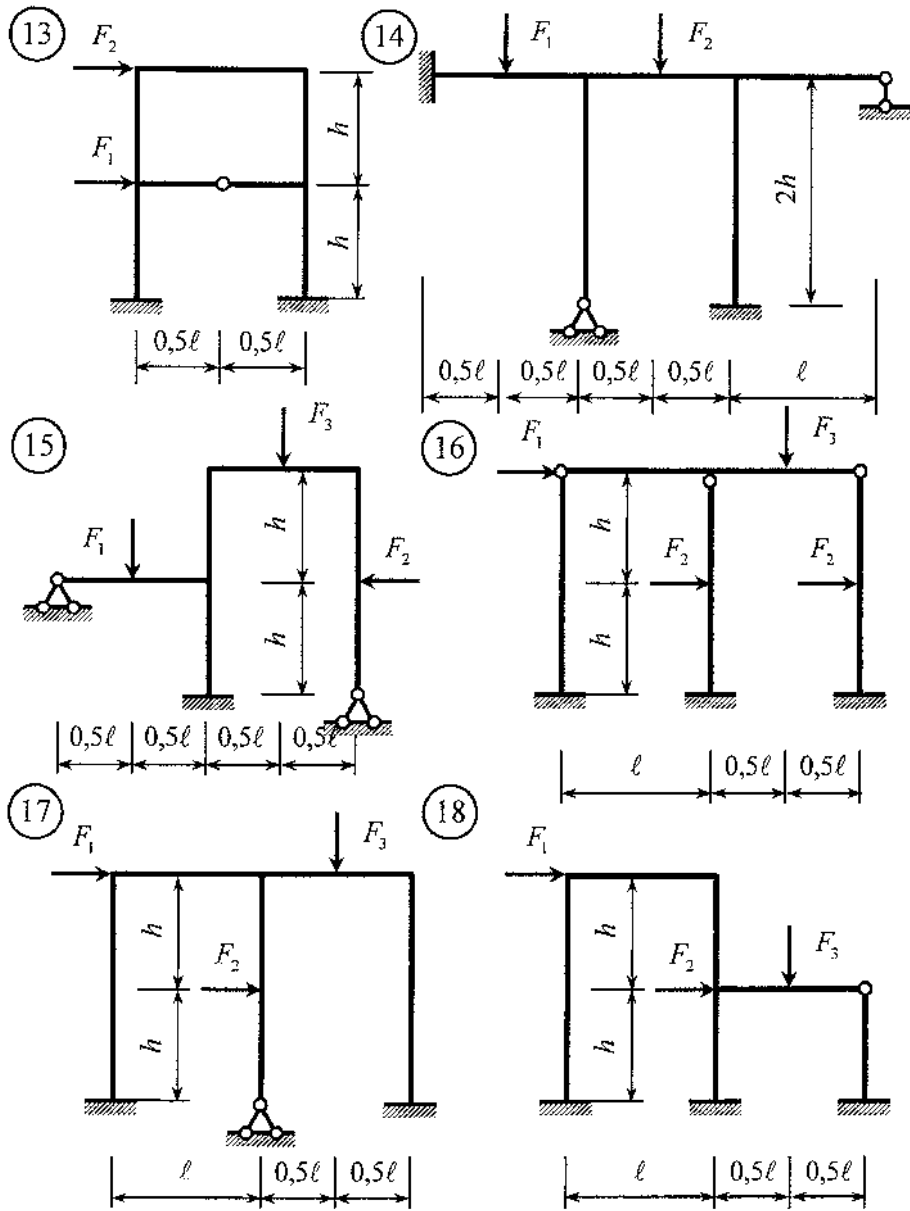
Таблица 1

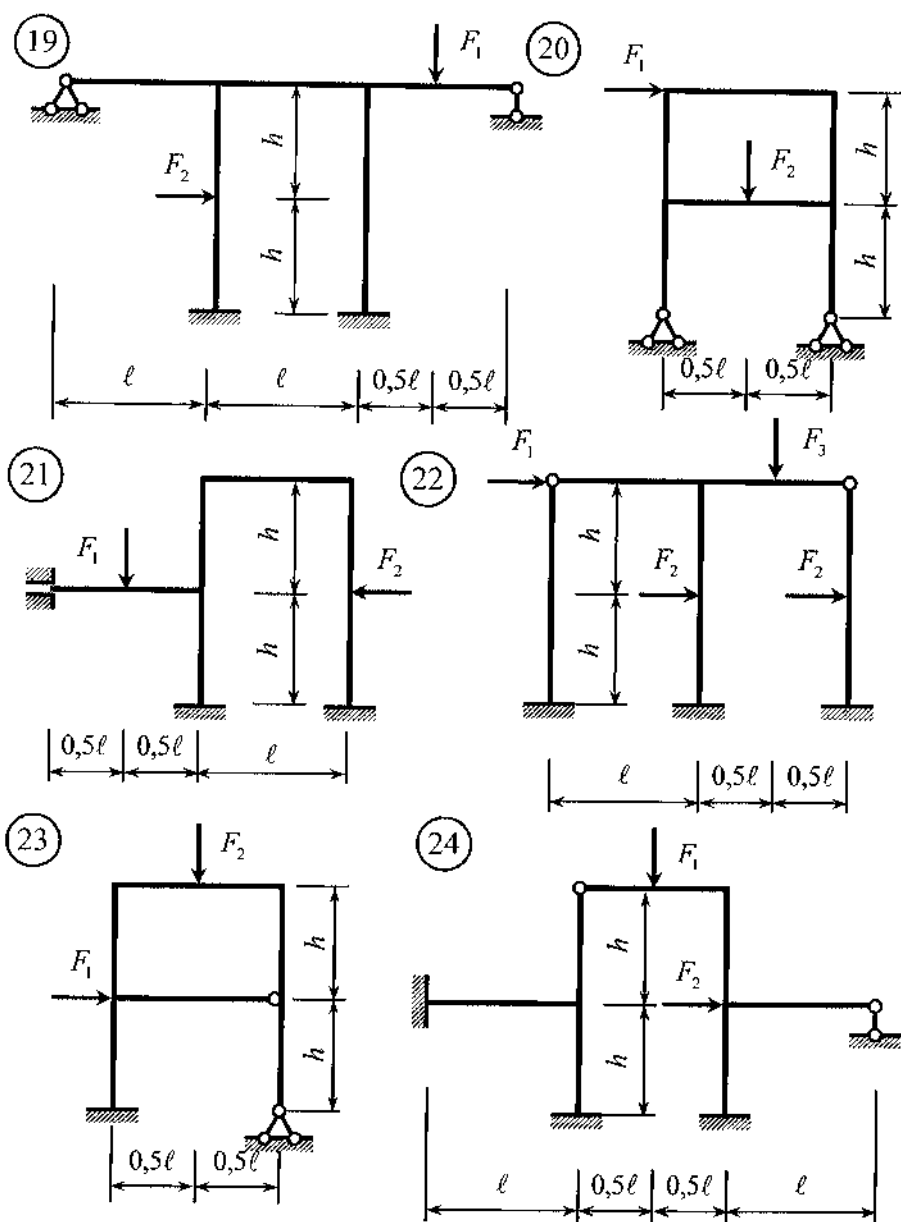
Номер группы	l , м	h , м	F_1	F_2	F_3	Колонна	Ригель
1	6	3	F	$2 F$	$3 F$	20К1*	35Ш1*
2	5	2,5	F	$2 F$	F	26К1	30Ш2
3	4	3	$3 F$	$2 F$	F	23К1	25Ш1
4	6	3,5	$2 F$	F	$3 F$	20К2	35Ш2
5	5	3	$2 F$	$3 F$	F	23К1	30Ш1

* ГОСТ 26020-83 «Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок»









5.2.8 Вопросы для самопроверки

- Поясните суть метода допускаемых напряжений.
- Поясните суть метода предельного равновесного состояния.
- Перечислите теории пластичности и дайте соответствующие пояснения.
- Перечислите основные гипотезы, взятые за основу деформационной теории пластичности.
- Поясните суть кинематического метода предельного равновесного состояния.
- Поясните суть статического метода предельного равновесного состояния.
- Дайте определение понятия пластического шарнира при изгибе конструкций.
- В чем заключается различие между расчетами на прочность по допускаемому напряжению и по предельным нагрузкам?
- Что представляет собой предельная нагрузка?
- Почему при расчете по предельным нагрузкам нельзя использовать формулы, основанные на законе Гука?
- В чем заключается схематизация диаграмм растяжения?
- Почему расчет по предельным нагрузкам выполняют только для элементов конструкции из пластичных материалов?
- Какой вид имеют эпюры напряжений в поперечных сечениях бруса изгибе при предельных значениях изгибающих моментов?
- Что представляет собой пластический шарнир?
- Как определить предельный изгибающий момент?
- Почему расчеты статически определимых стержней при растяжении и сжатии по допускаемым напряжениям и предельным нагрузкам дают одинаковые результаты?

5.2.9 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. Александров, А. В. Строительная механика. В 2 кн. Кн. 2. Динамика и устойчивость упругих систем: учеб. пособие для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, В. Б. Зылёв ; под ред. А. В. Александрова. – М. : Высш. шк., 2008. – 384 с.
3. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
4. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
5. Вялов, С. С. Реологические основы механики грунтов / С. С. Вялов. – М.: Высш. шк., 1978. – 447 с.
6. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

7. Гениев, Г. А. Вопросы механики неупругих тел / Г. А. Гениев, В. С. Лейтес. – М.: Стройиздат, 1981. – 160 с.
8. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Зылёв, В. Б. Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций / В. Б. Зылёв. – М.: НИЦ Инженер, 1999. – 145 с.
10. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
11. Киселев, В. А. Строительная механика / В. А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1967. – 550 с.
12. Лукаш, П. А. Основы нелинейной строительной механики / П. А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
13. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
14. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (основы теории устойчивости динамики сооружений и расчета пространственных систем). – М.: Высшая школа, 1972 г. – 318 с.
15. Горшков Л.К., Протосеня А.Г. Основы теории упругости и расчет стержневых систем. СПб, 2012 г.
16. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики. Минск. Высшая школа, 1990 г.

Сухов Михаил Федорович
Кожанов Дмитрий Александрович

Нелинейные задачи строительной механики

Учебное пособие

Редактор:
П.В. Сидоренко

Подписано в печать Формат 60х90 1/16 Бумага газетная. Печать трафаретная.
Уч. изд. л. 3,7. Усл. печ. л. 4,1. Тираж 300 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»
603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65.
Полиграфический центр ННГАСУ, 603950, Н.Новгород, Ильинская, 65
<http://www.nngasu.ru>, srec@nngasu.ru