

Нелинейные методы строительной механики

Введение

Черновик

СМиМ

ЗабГУ

2019

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Материалы курса

vetrovs.github.io/NLST/

Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики [Текст]: учеб. пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов; Нижегор. гос. архитектур. - строит. ун-т – Н.Новгород: ННГАСУ , 2017. – 66 с

Нелинейность

“A view of nature as dense and nonlinear is at the core of our contemporary science”

— Gregory Benford

Нелинейность

Какие уравнения называют линейными?

Нелинейность

Какие уравнения называют линейными?

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Какие уравнения называют нелинейными?

Линейная строительная механика

- ▶ Принцип отвердевания
- ▶ Принцип малых перемещений
- ▶ Принцип независимости действия сил
- ▶ Закон Гука

Линейная строительная механика

- ▶ Принцип отвердевания
- ▶ Принцип малых перемещений
- ▶ Принцип независимости действия сил
- ▶ Закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z$$

...

Нелинейная строительная механика

- ▶ Расчёт конструкции для всех этапов нагружения, включая разрушения
- ▶ Рассматриваются в том числе неупругие деформации
- ▶ Принцип отвердевания неприменим. Размеры и форма конструкции могут изменяться.

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Виды нелинейности

В механике выделяют три вида нелинейности:

- ▶ Физическая нелинейность
- ▶ Геометрическая нелинейность
- ▶ Конструктивная нелинейность

Физическая нелинейность (ФН)

- ▶ Бетон, дерево, пластик и некоторые другие строительные материалы характеризуются **нелинейной зависимостью напряжений от деформаций** даже при небольших нагрузках
- ▶ Такая нелинейность называется **физической**
- ▶ Проявляется при возникновении пластических деформаций в различных формах (текучести – деформировании при постоянных напряжениях, ползучести – росте деформаций во времени без увеличения нагрузки), при криволинейной диаграмме «напряжения-деформации», при изменении свойств материалов от внешних воздействий и т. д.

Физическая нелинейность (ФН)

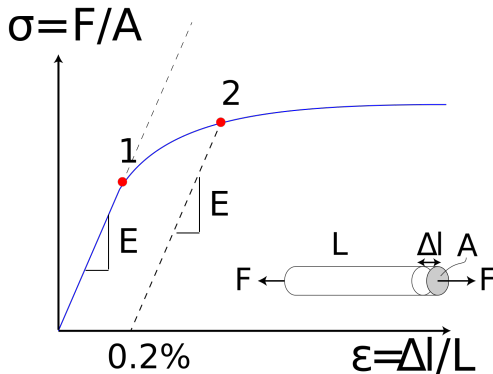


Диаграмма деформирования.

Физическая нелинейность (ФН)

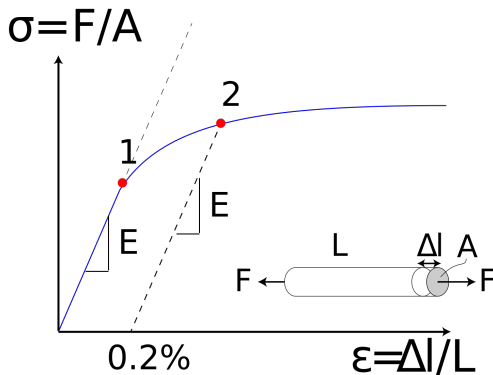


Диаграмма деформирования.

Упругие деформации (линейные) - слева от т. 1

Пластические деформации - справа от т. 1

Задачи рассматривающие обе части деформаций называются упругопластическими.

Физическая нелинейность (ФН)

Физическая нелинейность (ФН)

- ▶ Связь между напряжениями и деформациями в общем виде

$$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon$$

где $E(\varepsilon)$ – матрица, характеризующая физические свойства материала – элементы ее являются функциями компонент вектора деформаций ε . То есть физические свойства материала зависят от того, насколько он деформирован.
 ε – вектор деформаций.

- ▶ Причем приведённая система уравнений (в матричной форме) в случае присутствия физической нелинейности превращается в систему нелинейных уравнений.
- ▶ Закон Гука не учитывает такую нелинейность

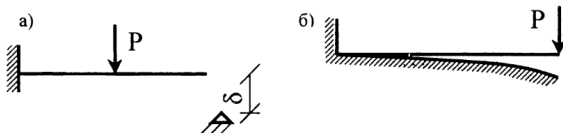
Геометрическая нелинейность (ГН)

- ▶ Большие перемещения
- ▶ Значительные деформации
- ▶ Нелинейная зависимость между нагрузками и перемещениями
- ▶ Учитывается в уравнениях связывающих деформации с перемещениями
- ▶ Например, в случае продольного и продольно-поперечного изгиба стержней, изменении координат точек конструкции из-за сравнительно больших перемещений

Конструктивная нелинейность (КН)

- ▶ Изменение расчётной схемы из-за нагружения
- ▶ Включение и выключение связей
- ▶ Например, возникновение контакта с опорой в из-за прогиба.
- ▶ Уравнения равновесия должны включать перемещения

Конструктивная нелинейность (КН)



изменение расчётной схемы в результате появления новой связи
(опоры)

Методы расчёта нелинейно деформируемых систем

Классификация задач

Классификация задач нелинейной строительной механики (без учёта конструктивной нелинейности):

- ▶ ФЛ, ГЛ
- ▶ ФН, ГЛ
- ▶ ФЛ, ГН
- ▶ ФН, ГН

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

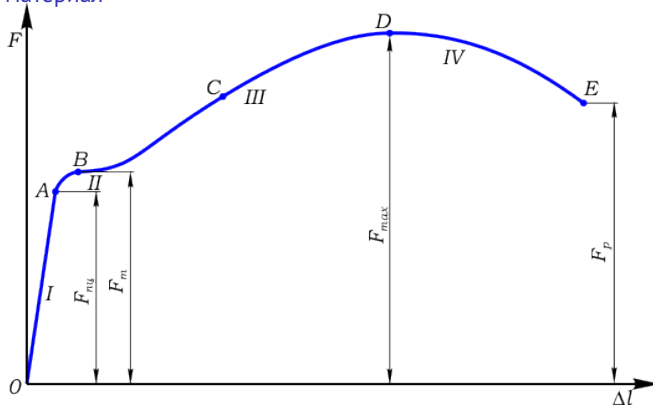
Ссылки

Диаграмма деформирования

- ▶ Как будет вести себя стержень из малоуглеродистой стали если приложить к нему небольшое растягивающее усилие, а затем постепенно увеличивать?
- ▶ Как будет изменяться его длина?
- ▶ Что будет если на определённом этапе убрать нагрузку?
- ▶ Стержень сможет восстановить свою исходную форму любой деформации?

Диаграмма деформирования

Пластичный материал

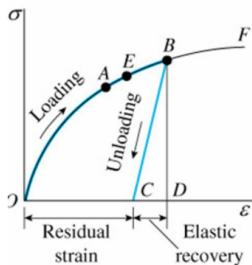
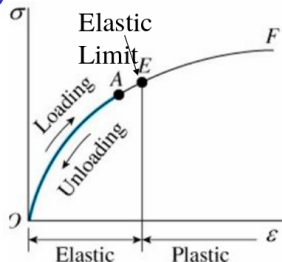


F — продольная растягивающая сила, [Н]; Δl — абсолютное удлинение рабочей части образца, [мм]

- I — участок пропорциональности;
- II — участок текучести;
- III — участок самоупрочнения;
- IV — участок разрушения.

$F_{пл}$ — предел пропорциональности; F_T — предел текучести; F_{max} — предел прочности; F_p — предел упругости.

Нагрузка и разгрузка



Упругие деформации (до точки E) исчезнут (верхняя схема), если убрать нагрузку с материала.

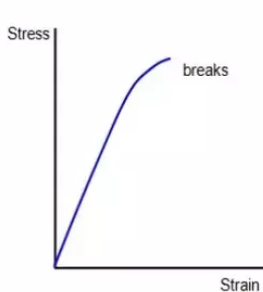
Запредельные деформации (после точки E) не исчезают (нижняя схема)

Предел текучести материала – наименьшее напряжение, при котором деформация увеличивается без заметного увеличения нагрузки. На диаграмме – точка, после которой линия диаграммы некоторое время движется параллельно оси деформаций ε . Практически горизонтальный участок диаграммы, следующий за пределом текучести, называется *площадкой текучести*.

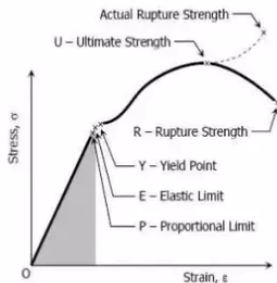
Пластичные материалы (малоуглеродистая сталь, латунь, алюминий и многие другие металлы) обладают свойствами текучести (увеличения деформаций без увеличения нагрузки) при нормальных температурах.

Хрупкие и пластичные материалы

Stress-Strain Curve



BRITTLE MATERIAL

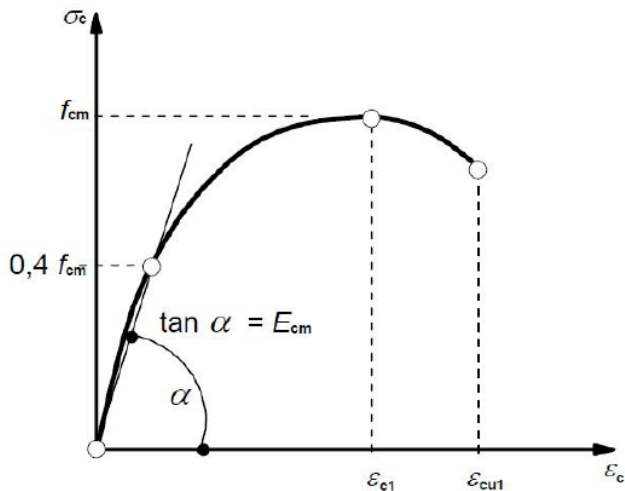


DUCTILE MATERIAL

Диаграмма деформирования (растяжения) для хрупкого (слева) и пластичного материала (справа)

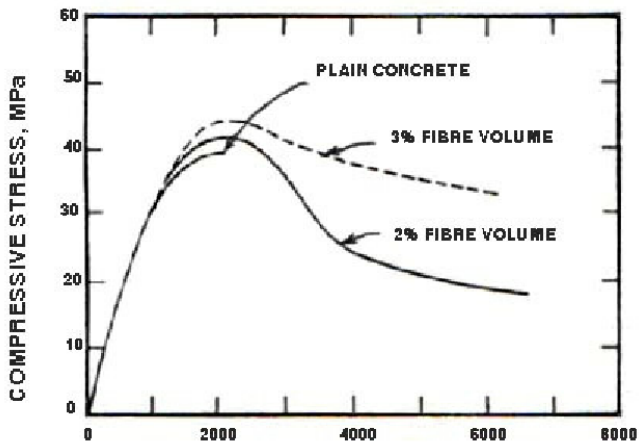
Бетон

Диаграмма одноосного сжатия



Фибробетон

Диаграмма одноосного сжатия



Фибробетон



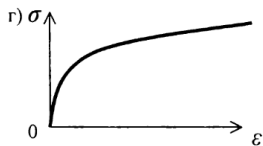
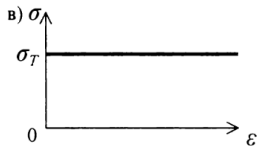
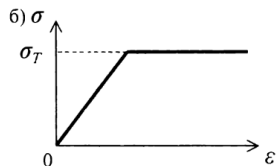
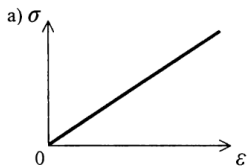
Тесты материалов на растяжение и сжатие

<https://youtu.be/D8U4G5kcpcM>

Первая часть ролика - В ролике упоминается yield-point – это предел текучести.

Тест бетона на сжатие <https://youtu.be/c7U91LbKFjI>

Модели деформирования



Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

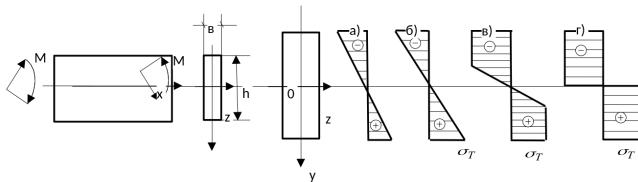
Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

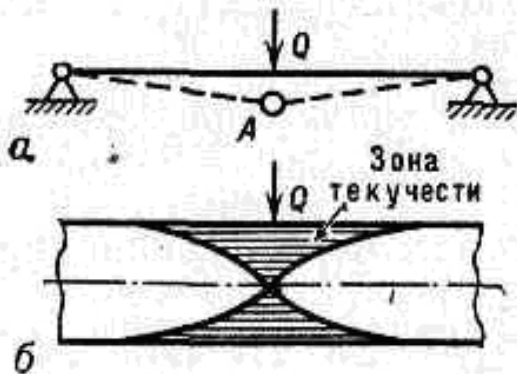
Пластический шарнир

- Этапы изменения напряжений в балке в условиях чистого сгиба.



Пластический шарнир образуется в опасных сечениях балки: там где действует или в месте соединения с опорой (связью)

Пластический шарнир



Пластический шарнир

Допускаемая нагрузка

- ▶ Интерес представляет величина внешней силы Q при котором элемент ещё не исчерпал свою несущую способность
- ▶ Будем называть такую величину – **допускаемым значением** – $Q_{\text{доп}}$
- ▶ Допускаемое значение внешней силы связано с **допускаемым моментом** $M_{\text{доп}}$, возникающем в опасном сечении.

Пластический шарнир

Допускаемая нагрузка

- ▶ Допускаемый момент зависит от свойств материала и элемента конструкции:

$$M_{\text{доп}} = \sigma_T W_x \quad (1)$$

где σ_T – предел текучести,

W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

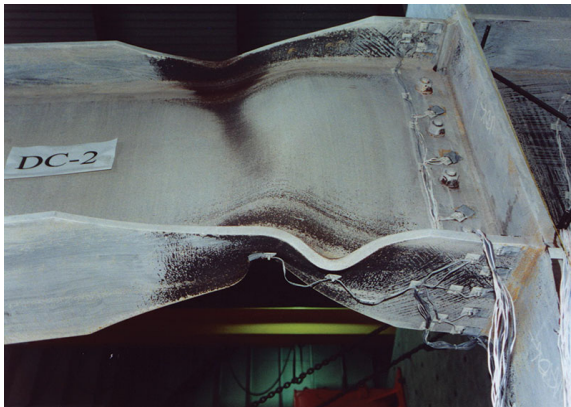
Таблица моментов сопротивления

Пластический шарнир

Предельная нагрузка

- ▶ Кроме допускаемой нагрузки, интерес представляет **предельное значение нагрузки** – $Q_{\text{пр}}$
- ▶ Это значение, при котором возникает пластический шарнир
- ▶ $Q_{\text{пр}} > Q_{\text{доп}}$
- ▶ Приложить силу больше чем $Q_{\text{пр}}$ невозможно, ибо балка разрушится.
- ▶ *Значение предельной силы определяется из условия равенства моментов внутренних и внешних сил для опасного сечения балки.*

Пластический шарнир



Пластический шарнир



Пластический шарнир

<https://youtu.be/F5RtSUbrifg>

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Методы расчёта сооружений

- ▶ Расчет по допускаемым напряжениям
- ▶ Расчет по допускаемым нагрузкам
- ▶ Метод предельных состояний

Расчет по допускаемым напряжениям

В методе расчета по допускаемым напряжениям должно соблюдаться неравенство:

$$\sum S_i \leq A[\sigma] \quad (2)$$

где S_i – воздействие на рассчитываемый элемент i -ой *нормативной* нагрузки (постоянной или временной)

A - геометрическая характеристика сечения

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение в элементе

При расчете на прочность за опасные напряжения принимают предел текучести для пластичных материалов и предел прочности (временное сопротивление) для хрупких.

Расчет по допускаемым напряжениям

Значения допускаемых напряжений включают коэффициенты надёжности.

Введя коэффициенты надёжности получим неравенство 2 в виде:

$$\sum \gamma_i S_i \leq A \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\gamma_R}$$

где γ_i – коэффициент надёжности по нагрузке

γ_R – коэффициенты надёжности по материалам

Расчет по допускаемым напряжениям

- ▶ о прочности всей конструкции судят по напряжениям в опасных точках
- ▶ Метод подходит для систем, напряжения в которых распределяются равномерно по сечениям, и систем, в которых разрушение одного элемента влечет за собой разрушение всей конструкции в целом.
- ▶ Однако для многих конструкций, изготовленных из пластичных материалов, появление в какой-либо точке напряжений, равных разрушающим, еще не означает, что данная система выйдет из строя (статически неопределимые системы).

Расчет по предельным состояниям

Предельное состояние – состояние конструкции (сооружения), при котором она перестаёт удовлетворять эксплуатационным требованиям.

- ▶ используется несколько коэффициентов запаса, учитывающих особенности работы сооружения, независимых коэффициентов
- ▶ учёт вероятностных свойств действующих на конструкции нагрузок и сопротивлений этим нагрузкам
- ▶ ...

Предельные состояния

- ▶ **Первое предельное состояние** характеризуется потерей устойчивости и полной непригодностью к дальнейшей эксплуатации.
- ▶ **Второе предельное состояние** характеризуется наличием признаков, при которых эксплуатация конструкции или сооружения хотя и затруднена, но полностью не исключается

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Предельные состояния

Первое предельное состояние



изображение с сайта

lib.dystlab.com/index.php/engineering/civil/structural/87-limit-states

Проверки по предельным состояниям

$$N_{max} \leq N$$

N_{max} – фактор характеризующий нагрузку

Например: изгибающий момент, напряжение, деформация, перемещение, ...

N – нормативное значение соответствующего N_{max} фактора или расчётное значение соответствующего сопротивления

В настоящее время расчёт по предельным состояниям заменил расчёт по допускаемым напряжениям и определяется ГОСТом и Eurocode.

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

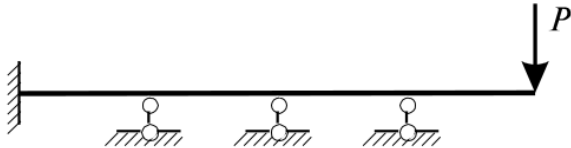
Ссылки

Расчет статически неопределимых балок по допускаемым напряжениям

- ▶ Несущая способность *статически определимой* балки исчерпается, когда, хотя бы в одном сечении образуется пластический шарнир и система становится геометрически изменяемой.
- ▶ Для *статически неопределимых* балок образование одного пластического шарнира не приводит к исчерпанию несущей способности, т.к. в этом случае степень кинематической определимости системы снижается на одну единицу.
- ▶ В случае n раз статически неопределимой балки исчерпание несущей способности происходит при формировании $n + 1$ пластических шарниров.

Расчет статически неопределимых балок по допускаемым напряжениям

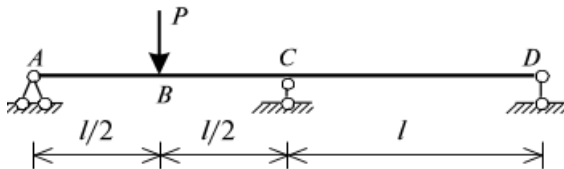
- ▶ Однако в ряде случаев часть балки может стать геометрически изменяемой при значительно меньшем числе пластических шарниров.



Пример 1

Задача

Для балки прямоугольного сечения ($b \times h$) требуется определить допускаемое и предельное значения нагрузки P .



Пример 1

Решение

1. Значение силы $P_{\text{доп}}$ определим используя значение $M_{\text{доп}}$.
2. $M_{\text{доп}}$ будем считать равным M_{max} – наибольшему моменту, действующему в опасном сечении.

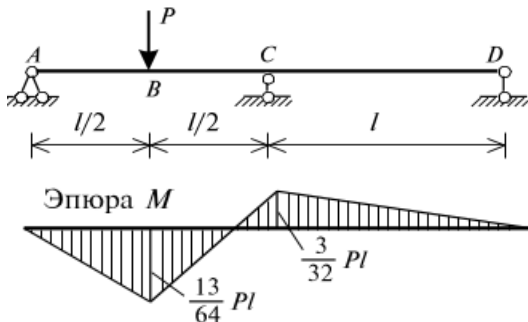
$$M_{\text{доп}} = M_{\text{max}}$$

При этом значение, напряжение в опасном сечении достигает предела текучести, но пластический шарнир ещё не образуется.

Пример 1

Решение

1. Определим наиболее опасное сечение и M_{max} построив эпюру M



2. $M_{доп} = M_{max} = 13/64Pl$
3. Вместо P используем $P_{доп}$
4. $M_{доп} = 13/64P_{доп}l$

Пример 1

Решение

1. $R_{\text{доп}} = 13/64 \cdot M_{\text{доп}}/l$

2. Определим $M_{\text{доп}}$ из формулы (1):

$$M_{\text{доп}} = \sigma_T W_x$$

$$R_{\text{доп}} = \frac{13}{64} \sigma_T W_x / l$$

3. Для балки прямоугольного сечения $W_x = \frac{bh^2}{6}$

4. $R_{\text{доп}} = \frac{13}{64} \sigma_T \frac{bh^2}{6l}$

$$R_{\text{доп}} = \frac{32}{39} \sigma_T \frac{bh^2}{l}$$

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Пример 1

Решение

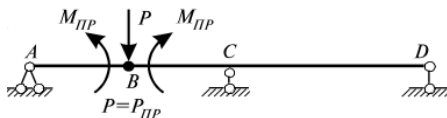
Определим предельное значение силы P .

- ▶ Увеличивая величину внешней силы $P > P_{доп}$, пластическая область в опасном сечении B балки увеличивается.
- ▶ При некотором значении силы в сечении B возникает пластический шарнир, тогда величина изгибающего момента в этом сечении становится равной $M_{пр}$.
- ▶ При дальнейшем росте внешней силы P , момент в сечении B остается постоянным и равным $M_{пр}$.
- ▶ Возникновение пластического шарнира в т. B превращает один раз статически неопределимую балку в балку статически определимую

Пример 1

Решение

1. Определим способ разрушения балки

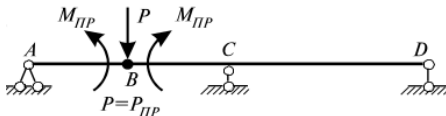


Что будет происходить с балкой дальше, если сила P продолжит действовать?

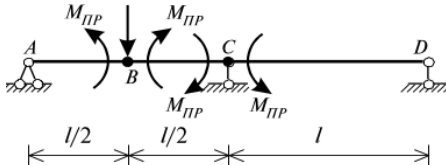
Пример 1

Решение

1. Определим способ разрушения балки



Что будет происходить с балкой дальше, если сила P продолжит действовать?



Наибольшая величина изгибающего момента формируется в сечении С, достигает предельной величины $M_{\Pi P}$, формируется пластический шарнир, балка превращается в геометрически изменяемую систему.

Пример 1

Решение

- ▶ 2. Составим уравнения равновесия:
...
- ▶ 3. ...и равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $M_{пр}$:
...
- ▶ 4. Из уравнений выразим $R_{пр}$ через $M_{пр}$
- ▶ 5. $M_{пр}$ выразим через уравнение (1)
- ▶ 6. Сравним $R_{пр}$ и $R_{доп}$.

Пример 1

Решение

- ▶ 2. Составим уравнения равновесия:
...
- ▶ 3. ...и равенства изгибающего момента в сечениях пластического шарнира предельному моменту $M_{пр}$:
...
- ▶ 4. Из уравнений выразим $R_{пр}$ через $M_{пр}$
- ▶ 5. $M_{пр}$ выразим через уравнение (1)
- ▶ 6. Сравним $R_{пр}$ и $R_{доп}$.
Какой способ определения нагрузки позволяет экономичнее использовать материал?

Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

Статически допустимым считается такое поле напряжений, которое удовлетворяет условиям равновесия, граничным условиям и при котором ни в одной точке напряжения не превосходят значений, определяемых условиями пластичности

Статическая теорема

Нагрузка соответствующая статически возможному состоянию меньше чем предельная.

Статически допустимым считается такое поле напряжений, которое удовлетворяет условиям равновесия, граничным условиям и при котором ни в одной точке напряжения не превосходят значений, определяемых условиями пластичности

Таким образом нагрузка определённая статическим способом даёт приближение для предельной нагрузки снизу.

Статическая теорема

Таким образом нагрузка определённая статическим способом даёт приближение для предельной нагрузки снизу.

Значит наибольшее напряжение из возможных будет ближе всего к предельной.

Статический метод

1. Выявляются места образования пластических шарниров (в точках действия сосредоточенных сил, в том числе реакций связей)
2. Рассматриваются различные схемы образования пластических шарниров.
3. Для каждой схемы:
 - 3.1 Возле каждого из пластических шарниров изображаются внутренние моменты¹ $M_{пр}$
 - 3.2 Для каждой из схем составляются уравнения равновесия и уравнения равенства моментов, определяются предельные значения внешней силы.
 - 3.3 Проверяется неравенство: $|M| < M_{пред}$, где M - момент в произвольной точке конструкции, исключая пластические шарниры.
 - 3.4 Схемы, где неравенство не выполняется, исключаются из рассмотрения как статически недопустимые.

¹ чтобы правильно изобразить моменты можно нарисовать возможное положение конструкции при изгибах в пластических шарнирах. Тогда направление моментов будет от деформированного к недеформированному положению части конструкции. Если положение деформированной

Статический метод

4. Наибольшее значение из всех схем является расчетной величиной предельной силы.
5. Схема с *наибольшей* внешней силой - наиболее вероятная схема разрушения.

Задача

Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики: учеб.
пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов;
стр. 51

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Кинематический способ

- ▶ Жестко-пластическое приближение.
- ▶ Составляется уравнение работы всех внешних и внутренних усилий на основе принципа возможных перемещений.
- ▶ Принцип возможных перемещений: если система твердых тел находится в равновесии под действием системы сил, то работа, совершаемая этими силами на любом малом возможном перемещении системы, должна быть равна нулю.

$$\Sigma \delta A = 0$$

- ▶ Возможное перемещение

Кинематический способ

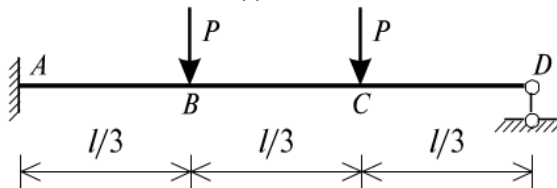
- ▶ Примеры возможные перемещений

Кинематический способ

Как выбрать схему разрушения?

Пример 2

Расчёт кинематическим методом.



Кинематическая теорема

Нагрузка соответствующая кинематически возможному состоянию больше, чем предельная нагрузка.

В кинематически возможном состоянии уравнения равновесия могут не выполняться.

Таким образом выбирается *наименьшая* нагрузка из возможных. Она будет ближе к предельной.

Определение предельной нагрузки

- ▶ Для того чтобы статически возможное состояние было действительным, оно должно быть кинематически возможным и наоборот.
- ▶ Если предельные нагрузки определённые статическим и кинематическим методом совпадают, то полученная предельная нагрузка считается действительной, а решение полным.

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

Вопросы

- ▶ Что такое нелинейность?
- ▶ Какие виды нелинейности бывают? Примеры.
- ▶ Что такое упругие и пластические деформации?
- ▶ Какую часть диаграммы деформирования описывает закон Гука?
- ▶ Что такое пластический шарнир?
- ▶ Что такое допускаемое значение нагрузки?
- ▶ Что такое предельное значение нагрузки?
- ▶ Какое соотношение между этими двумя величинами?

Вопросы

- ▶ Как изменяется статически неопределимая система при возникновении пластического шарнира?

В чем разница метода допускаемых напряжений и метода предельных состояний? Какой метода даёт большую величину для внешней нагрузки?

- ▶ Объясните статический метод определения предельной нагрузки.

Вопросы

- ▶ Как изменяется статически неопределимая система при возникновении пластического шарнира?

В чем разница метода допускаемых напряжений и метода предельных состояний? Какой метода даёт большую величину для внешней нагрузки?

- ▶ Объясните статический метод определения предельной нагрузки.
- ▶ Какие проверки нужно делать для каждого варианта образования пластических шарниров?
- ▶ Как выбирается значение предельной силы из всех вариантов для схем образования пластических шарниров?

Вопросы

- Объясните кинематический метод определения предельной нагрузки.

Вопросы

- ▶ Объясните кинематический метод определения предельной нагрузки.
- ▶ Что такое возможное перемещение?
- ▶ Как вычислить работу момента на возможном перемещении?

Outline

Введение

Виды нелинейности

Диаграмма деформирования

Пластический шарнир

Расчёт по предельным состояниям

Расчет по допускаемым напряжениям

Расчет по предельным состояниям

Статический способ

Кинематический способ

Вопросы

Ссылки

- ▶ Сухов М. Ф. Нелинейные задачи строительной механики: учеб. пособие / М.Ф. Сухов, Д.А. Кожанов;
- ▶ Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести : учебник для бакалавриата и магистратуры / Н. Н. Малинин. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 402 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: biblio-online.ru/bcode/415958
biblio-online.ru/viewer/prikladnaya-teoriya-plastichnosti-i-polzuchesti-415958page/208