



Elaborato di
Calcolo Numerico
Anno Accademico 2018/2019

Alessio Falai - 6134275 alessio.falai@stud.unifi.it
Leonardo Calbi - 6155786 leonardo.calbi@stud.unifi.it

April 25, 2019

Capitoli

1	Capitolo 1	1
1.1	Esercizio 1	1
1.2	Esercizio 2	2
1.3	Esercizio 3	3
1.4	Esercizio 4	4
2	Capitolo 2	5
2.1	Esercizio 5	5
2.2	Esercizio 6	8
2.3	Esercizio 7	9

1 Capitolo 1

1.1 Esercizio 1

Verificare che, per h sufficientemente piccolo:

$$\frac{3}{2}f(x) - 2f(x-h) + \frac{1}{2}f(x-2h) = hf'(x) + O(h^3)$$

Usando gli sviluppi di Taylor fino al secondo ordine otteniamo:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x_0) + f'(x_0)(x-h-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-h-x_0)^2 + O(h^3)$$

$$f(x-2h) = f(x_0) + f'(x_0)(x-2h-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-2h-x_0)^2 + O(h^3)$$

Dato che $x - x_0 = h$, ponendo $x_0 = x - h$, si ha che:

$$f(x-h) = f(x_0) + O(h^3)$$

$$f(x-2h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

Effettuando le opportune sostituzioni, la relazione iniziale diventa:

$$\frac{3}{2}f(x_0) + \frac{3}{2}f'(x_0)h + \frac{3}{4}f''(x_0)h^2 - 2f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0) - \frac{1}{2}f'(x_0)h + \frac{1}{4}f''(x_0)h^2 + O(h^3) = hf'(x) + O(h^3)$$

Semplificando, si ottiene che:

$$f'(x_0)h + f''(x_0)h^2 + O(h^3) = hf'(x) + O(h^3)$$

A questo punto, scriviamo lo sviluppo di Taylor anche per $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)h + O(h^2)$$

Infine, otteniamo che:

$$f'(x_0)h + f''(x_0)h^2 + O(h^3) = f'(x_0)h + f''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

Dunque, l'uguaglianza iniziale è verificata.

1.2 Esercizio 2

Quanti sono i numeri di macchina normalizzati della doppia precisione IEEE? Argomentare la risposta.

Nella doppia precisione IEEE si utilizzano 64 bit per rappresentare un numero in virgola mobile in macchina. Di questi, il primo bit è riservato al segno \pm , i 52 bit successivi rappresentano la mantissa ρ e i restanti 11 l'esponente η . Un numero reale può essere rappresentato in macchina mediante la formula $r = \pm \rho \eta$, con $\rho = \sum_{i=1}^m \alpha_i b^{1-i}$ e $\eta = b^{e-\nu}$. Nel caso dei numeri normalizzati, abbiamo delle restrizioni sui numeri rappresentabili in macchina:

- La mantissa è assunta della forma $1.f$
- Lo shift ν è pari a 1023
- Il valore e deve essere compreso tra 0 e 2047, estremi esclusi

Dunque, per ricavare il numero di numeri normalizzati della doppia precisione IEEE, contiamo le possibili combinazioni di bit, date le condizioni sopra definite:

- Per il segno abbiamo solo due possibilità, $+$ oppure $-$
- Per la mantissa abbiamo esattamente 2^{52} opzioni
- Per il valore di e abbiamo esattamente 2046 opzioni

Dato che lo shift ν non cambia il numero di combinazioni possibili, moltiplicando i dati sopra ottenuti si ottiene:

$$2 \times 2^{52} \times 2046 = 2^{53} \times 2046 = 18\,428\,729\,675\,200\,069\,632$$

1.3 Esercizio 3

Eseguire il seguente *script* Matlab:

```
1      format long e
2      n=75;
3      u=1e-300;for i=1:n,u=u*2;end,for i=1:n,u=u/2;end,u
4      u=1e-300;for i=1:n,u=u/2;end,for i=1:n,u=u*2;end,u
```

Spiegare i risultati ottenuti.

I risultati ottenuti:

```
1  u =
2      1.0000000000000000e-300
3
4  u =
5      1.119916342203863e-300
```

L'obiettivo del programma proposto è verificare, dopo una serie di operazioni, che il numero restituito sia uguale a quello di partenza e che quindi non si abbia perdita di informazione.

Prima di tutto viene impostato il formato di output a *longE*, formato long decimal (15 cifre dopo la virgola) con notazione scientifica.

Alcune premesse:

In caso di underflow, ovvero quando un calcolo produce un valore più piccolo di *realmin*, in accordo con l'opzione dello standard IEEE, in MATLAB i numeri vengono denormalizzati, perdono quindi il primo 1 sottinteso e sono definiti dalla loro rappresentazione binaria. Inoltre, il più piccolo numero positivo denormalizzato è $0,494 \times 10^{-323}$. Ogni risultato più piccolo di questo è posto a zero.

Alcune notazioni importanti:

- *realmin* è il minimo numero normalizzato rappresentabile in MATLAB
- *realmax* è il massimo numero normalizzato rappresentabile in MATLAB
- *eps* è la precisione di macchina

I primi 2 for effettuano prima 75 moltiplicazioni per 2 del numero *u* e poi lo stesso numero di divisioni per 2 di *u*, mantenendone il valore al di sopra di *realmin* e facendo sì che non ci sia perdita di informazione (underflow). I for successivi invece, a causa dello svolgersi prima delle 75 divisioni e poi delle 75 moltiplicazioni, portano alla denormalizzazione del numero e quindi a una sua approssimazione, che risulta nel valore finale di *u*.

1.4 Esercizio 4

Eseguire le seguenti istruzioni Matlab:

```
1      format long e
2      a=1.111111111111111
3      b=1.111111111111111
4      a+b
5      a-b
```

Spiegare i risultati ottenuti.

I risultati ottenuti:

```
1  a =
2      1.111111111111111e+00
3
4  b =
5      1.111111111111110e+00
6
7  ans =
8      2.22222222222221e+00
9
10 ans =
11      8.881784197001252e-16
```

L'obiettivo del programma proposto è verificare se i risultati dati da operazioni di somma e sottrazione siano soggetti a cancellazione numerica o meno.

Innanzitutto, come nel precedente esercizio, viene impostato il formato di output a *longE*, formato long decimal (15 cifre dopo la virgola) con notazione scientifica. Dopodichè, osservando gli output ottenuti, l'operazione di somma risulta ben condizionata, mentre l'operazione di sottrazione di due numeri molto vicini tra loro risulta invece mal condizionata. Tale malcondizionamento deriva dal fatto che in macchina la semplice operazione $a - b$ viene effettuata come $fl(fl(a) - fl(b))$, dove con $fl(x)$ indichiamo il valore floating point del numero x .

Dunque, il numero $a - b = realmin + eps \times 4$, mentre invece dovrebbe essere 10^{-15} . Calcolando i vari valori floating, otteniamo:

$$fl(a) = 1,111\,111\,111\,111\,110\,938\,409\,751\,724\,98$$

$$fl(b) = 1,111\,111\,111\,111\,110\,050\,231\,332\,024\,85$$

$$fl(a) - fl(b) = 8,881\,784\,197\,001\,300 \times 10^{-16}$$

$$fl(fl(a) - fl(b)) = 8,881\,784\,197\,001\,252 \times 10^{-16}$$

Abbiamo così ricostruito l'output restituito da Matlab, che è frutto di una propagazione dell'errore relativa alla rappresentazione dei numeri decimali in macchina.

2 Capitolo 2

2.1 Esercizio 5

Scrivere *function* Matlab distinte che implementino efficientemente i seguenti metodi per la ricerca degli zeri di una funzione:

- Metodo di bisezione;
- Metodo di Newton;
- Metodo delle secanti;
- Metodo delle corde.

Detta x_i , l'approssimazione al passo i -esimo, utilizzare come criterio di arresto

$$|\Delta x_i| \leq tol \cdot (1 + |x_i|),$$

essendo tol una opportuna tolleranza specificata in ingresso.

Metodo di bisezione:

```
1 function [x, i, imax] = bisection(f, a, b, tol)
2 %
3 % [x, i, imax] = bisection(f, a, b, tol) Determina uno zero della funzione in ingresso,
4 %                                     sull'intervallo [a, b],
5 %                                     utilizzando il metodo di bisezione.
6 %
7 fa = feval(f, a);
8 fb = feval(f, b);
9 if fa == 0
10     x = a;
11     return
12 end
13 if fb == 0
14     x = b;
15     return
16 end
17 if abs(fa) == Inf || abs(fb) == Inf
18     error('Funzione non valutabile in uno degli estremi.')
19     return
20 end
21 if fa * fb > 0
22     error('Funzione non soddisfacente la condizione f(a) * f(b) < 0.')
23     return
24 end
25
26 x = (a + b) / 2;
27 fx = feval(f, x);
28 imax = ceil(log2(b - a) - log2(tol * (1 + abs(x))));
29 for i = 2 : imax
30     f1x = ((fb - fa) / (b - a));
31     if abs(fx / f1x) <= tol * (1 + abs(x))
32         break
33     elseif fa * fx < 0
34         b = x;
35         fb = fx;
36     else
37         a = x;
```

```

38     fa = fx;
39     end
40     x = (a + b) / 2;
41     fx = feval(f, x);
42     imax = ceil(log2(b - a) - log2(tol * (1 + abs(x))));
43 end
44 return

```

Metodo di Newton:

```

1 function [x, i] = newton(f, f1, x0, imax, tol)
2 %
3 % [x, i] = newton(f, f1, x0, imax, tol) Determina uno zero della funzione
4 %                                     in ingresso utilizzando il metodo di Newton.
5 %
6 fx = feval(f, x0);
7 f1x = feval(f1, x0);
8 x = x0 - fx / f1x;
9 i = 0;
10 go = 1;
11 while go && i < imax
12     i = i + 1;
13     x0 = x;
14     fx = feval(f, x0);
15     f1x = feval(f1, x0);
16     if f1x == 0, error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare.
17         '), end
18     x = x0 - fx / f1x;
19     go = abs(x - x0) > tol * (1 + abs(x));
20 end
21 if go, disp('Il metodo non converge.'), end
22 return

```

Metodo delle secanti:

```

1 function [x, i] = secant(f, f1, x0, imax, tol)
2 %
3 % [x, i] = secant(f, f1, x0, imax, tol) Determina uno zero della funzione
4 %                                     in ingresso utilizzando il
5 %                                     metodo delle secanti.
6 %
7 fx = feval(f, x0);
8 f1x = feval(f1, x0);
9 if f1x == 0, error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare.'),
10     end
11 x = x0 - fx / f1x;
12 i = 0;
13 go = 1;
14 while go && i < imax
15     i = i + 1;
16     fx0 = fx;
17     fx = feval(f, x);
18     t = (fx - fx0);
19     if t == 0, error('Impossibile determinare la radice nella tolleranza desiderata.'),
20         end
21     x1 = (fx * x0 - fx0 * x) / t;
22     x0 = x;
23     x = x1;
24     go = abs(x - x0) > tol * (1 + abs(x));
25 end

```



```
24 if go, disp('Il metodo non converge.'), end
25 return
```

Metodo delle corde:

```
1 function [x, i] = chord(f, f1, x, imax, tol)
2 %
3 % [x, i] = chord(f, f1, x, imax, tol) Determina uno zero della funzione
4 %                               in ingresso utilizzando il
5 %                               metodo delle corde.
6 %
7 f1x = feval(f1, x);
8 if f1x == 0, error('La derivata prima ha valore nullo, impossibile continuare.'), end
9 go = 1;
10 i = 0;
11 while go && i < imax
12     i = i + 1;
13     x0 = x;
14     fx = feval(f, x0);
15     x = x0 - fx / f1x;
16     go = abs(x - x0) > tol * (1 + abs(x));
17 end
18 if go, disp('Il metodo non converge.'), end
19 return
```

2.2 Esercizio 6

Utilizzare la *function* del precedente esercizio per determinare un'approssimazione della radice della funzione

$$f(x) = x - e^{-x} \cos\left(\frac{x}{100}\right)$$

per $tol = 10^{-i}, i = 1, 2, \dots, 12$, partendo da $x_0 = -1$. Per il metodo di bisezione utilizzare $[-1, 1]$, come intervallo di confidenza iniziale. Tabulare i risultati, in modo da confrontare le iterazioni richieste da ciascun metodo. Commentare il relativo costo computazionale.

Codice Matlab

```

1  f = @(x) x - exp(-x) * cos(x / 100);
2  f1 = @(x) 1 + exp(-x) * cos(x / 100) + (exp(-x) * sin(x / 100)) / 100;
3  x0 = -1;
4  a = -1;
5  b = 1;
6  imax = 1000;
7  for i = 1 : 12
8      tol = 10^(-i);
9      rtol=[ 'Tolleranza: ', num2str(tol, '%e')];
10     disp(rtol)
11     [xB, it] = bisection(f, a, b, tol);
12     disp([ 'Bisezione: ', num2str(xB, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)
13           ])
14     [xN, it] = newton(f, f1, x0, imax, tol);
15     disp([ 'Newton: ', num2str(xN, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)])
16     [xC, it] = chord(f, f1, x0, imax, tol);
17     disp([ 'Corde: ', num2str(xC, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)])
18     [xS, it] = secant(f, f1, x0, imax, tol);
19     disp([ 'Secanti: ', num2str(xS, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)])
20     disp(' ')
end

```

Risultati

Tolleranza	Bisezione		Newton		Secanti		Corde	
	Risultato	Iterazioni	Risultato	Iterazioni	Risultato	Iterazioni	Risultato	Iterazioni
10^{-1}	5.000000000000e-01	3	5.663058026183e-01	2	5.662928457961e-01	3	4.021808606807e-01	3
10^{-2}	5.625000000000e-01	6	5.671373451066e-01	3	5.671339926161e-01	4	5.495185718942e-01	7
10^{-3}	5.664062500000e-01	10	5.671373451066e-01	3	5.671339926161e-01	4	5.651741531555e-01	11
10^{-4}	5.671386718750e-01	14	5.671374702932e-01	4	5.671374697616e-01	5	5.670103627779e-01	16
10^{-5}	5.671386718750e-01	14	5.671374702932e-01	4	5.671374697616e-01	5	5.671232371728e-01	20
10^{-6}	5.671386718750e-01	14	5.671374702932e-01	4	5.671374702932e-01	6	5.671358764609e-01	24
10^{-7}	5.671374797821e-01	24	5.671374702932e-01	4	5.671374702932e-01	6	5.671372918144e-01	28
10^{-8}	5.671374797821e-01	24	5.671374702932e-01	5	5.671374702932e-01	6	5.671374503070e-01	32
10^{-9}	5.671374704689e-01	31	5.671374702932e-01	5	5.671374702932e-01	6	5.671374689985e-01	37
10^{-10}	5.671374702360e-01	34	5.671374702932e-01	5	5.671374702932e-01	7	5.671374701482e-01	41
10^{-11}	5.671374702943e-01	36	5.671374702932e-01	5	5.671374702932e-01	7	5.671374702770e-01	45
10^{-12}	5.671374702943e-01	36	5.671374702932e-01	5	5.671374702932e-01	7	5.671374702914e-01	49

Analizzando i risultati ottenuti, abbiamo verificato che i metodi di bisezione e corde impiegano un numero considerevolmente maggiore di iterazioni rispetto ai metodi di Newton e secanti, a parità di tolleranza utilizzata. Questo è dato dal fatto che i primi due hanno convergenza lineare, mentre i secondi due hanno convergenza quadratica.

2.3 Esercizio 7

Calcolare la molteplicità della radice nulla della funzione

$$f(x) = x^2 \sin(x^2).$$

Confrontare, quindi, i metodi di Newton, Newton modificato, e di Aitken, per approssimarla per gli stessi valori di tol del precedente esercizio (ed utilizzando il medesimo criterio di arresto), partendo da $x_0 = 1$. Tabulare e commentare i risultati ottenuti.

Metodo di Newton modificato:

```
1 function [x, i] = modnewton(f, f1, x0, m, imax, tol)
2 %
3 % [x, i] = modnewton(f, f1, x0, m, imax, tol) Determina uno zero della funzione
4 %                                     in ingresso, con molteplicita' multipla,
5 %                                     utilizzando il metodo di Newton modificato.
6 %
7 %
8 fx = feval(f, x0);
9 flx = feval(f1, x0);
10 x = x0 - m * (fx / flx);
11 i = 0;
12 go = 1;
13 while go && i < imax
14     i = i + 1;
15     x0 = x;
16     fx = feval(f, x0);
17     flx = feval(f1, x0);
18     if flx == 0, error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare.
19         '), end
20     x = x0 - m * (fx / flx);
21     go = abs(x - x0) > tol * (1 + abs(x));
22 end
23 if go, disp('Il metodo non converge.'), end
24 return
```

Metodo di accelerazione di Aitken:

```
1 function [x, i] = aitken(f, f1, x0, imax, tol)
2 %
3 % [x, i] = aitken(f, f1, x0, imax, tol) Determina uno zero della funzione
4 %                                     in ingresso, con molteplicita' multipla,
5 %                                     utilizzando il metodo di Aitken.
6 %
7 %
8 x = x0;
9 i = 0;
10 go = 1;
11 while go && i < imax
12     i = i + 1;
13     x0 = x;
14     fx = feval(f, x0);
15     flx = feval(f1, x0);
16     if flx == 0, error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare.
17         '), end
18     x1 = x0 - fx / flx;
19     fx = feval(f, x1);
20     flx = feval(f1, x1);
21     if flx == 0
```

```

20     if abs(x1 - x0) < tol * (1 + abs(x))
21         x = x1;
22         disp('Nella tolleranza richiesta, ma con approssimazioni intermedie al metodo
                di Aitken.');
```

```

23     return
24 end
25 error('La derivata prima ha assunto valore zero, impossibile continuare.')
```

```

26 end
27 x = x1 - fx / f1x;
28 t = (x - 2 * x1 + x0);
29 if t == 0
30     if abs(x - x1) < tol * (1 + abs(x))
31         disp('Nella tolleranza richiesta, ma con approssimazioni intermedie al metodo
                di Aitken.');
```

```

32     return
33 end
34 error('Impossibile determinare la radice nella tolleranza desiderata.')
```

```

35 end
36 x = (x * x0 - (x1)^2) / t;
37 go = abs(x - x0) > tol * (1 + abs(x));
38 end
39 if go, disp('Il metodo non converge. '), end

```

Dato che il metodo di Newton modificato richiede espressamente la molteplicità della radice della funzione in esame, andiamo a calcolarla:

$$x^2 \sin(x^2) = 0 \rightarrow x^2 = 0 \vee \sin(x^2) = 0$$

Le radici del polinomio sono 0 e $k\sqrt{\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$. La molteplicità della radice $x = 0$ è pari a 3, mentre quella della radice $x = k\sqrt{\pi}$ è pari a 1. Dunque, nel nostro caso, per l'utilizzo del metodo di Newton modificato, inizializzeremo il valore m relativo alla molteplicità a 3.

Codice Matlab

```

1     f = @(x) x^2 * sin(x^2);
2     f1 = @(x) 2 * x * (sin(x^2) + x^2 * cos(x^2));
3     x0 = 1;
4     imax = 1000;
5     m = 3;
6     for i = 1 : 12
7         tol = 10^(-i);
8         rtol=['Tolleranza: ', num2str(tol, '%e')];
9         disp(rtol)
10        [xN, it] = newton(f, f1, x0, imax, tol);
11        disp(['Newton: ', num2str(xN, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)])
12        [xNM, it] = modnewton(f, f1, x0, m, imax, tol);
13        disp(['Newton Modificato: ', num2str(xNM, '%10.12e'), ' Iterazioni ',
                num2str(it)])
14        [xA, it] = aitken(f, f1, x0, imax, tol);
15        disp(['Aitken: ', num2str(xA, '%10.12e'), ' Iterazioni ', num2str(it)])
16        disp(' ')
17    end

```

Risultati

Tolleranza	Newton		Newton modificato		Aitken	
	Risultato	Iterazioni	Risultato	Iterazioni	Risultato	Iterazioni
10^{-1}	3.843178806071e-01	2	2.163225010255e-02	1	6.492908618812e-19	3
10^{-2}	2.880513930938e-02	11	1.352015482798e-03	3	6.492908618812e-19	3
10^{-3}	2.883766303035e-03	19	8.450096767474e-05	5	6.492908618812e-19	3
10^{-4}	2.887022508866e-04	27	2.112524191869e-05	6	0.000000000000e+00	4
10^{-5}	2.890282391460e-05	35	1.320327619918e-06	8	0.000000000000e+00	4
10^{-6}	2.893545954951e-06	43	3.300819049795e-07	9	0.000000000000e+00	4
10^{-7}	2.896813203496e-07	51	2.063011906122e-08	11	0.000000000000e+00	4
10^{-8}	2.900084141257e-08	59	1.289382441326e-09	13	0.000000000000e+00	4
10^{-9}	2.903358772398e-09	67	3.223456103315e-10	14	0.000000000000e+00	4
10^{-10}	2.906637101090e-10	75	2.014660064572e-11	16	0.000000000000e+00	4
10^{-11}	2.909919131508e-11	83	1.259162540357e-12	18	0.000000000000e+00	4
10^{-12}	2.913204867832e-12	91	3.147906350894e-13	19	0.000000000000e+00	4

Analizzando i risultati ottenuti, abbiamo verificato che il metodo di Newton impiega un numero considerevolmente maggiore di iterazioni rispetto ai metodi di Newton modificato e Aitken, a parità di tolleranza utilizzata. Questo è dato dal fatto che il primo ha convergenza lineare (in caso di radici multiple), mentre i secondi due hanno convergenza quadratica.