eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

CUARTA PRÁCTICA DE ORDENADOR

VARIABLE ALEATORIA: DISCRETA y CONTINUA

1 DISTRIBUCIONES

Prefijos

Función de probabilidad/densidad	d
Función de distribución	p
Crear valores aleatorios	r
Función cuantil	q

Distribuciones discretas

Binomial	binom
Geométrica	geom
Binomial negativa	nbinom
Hipergeométrica	hyper
Poisson	pois

Distribuciones continuas

Uniforme	unif
Exponencial	exp
Normal	norm
χ^2	chisq
t de Student	t
F de Snedecor	f

1 DISTRIBUCIONES

Variable aleatoria discreta – DISTRIBUCIONES IMPORTANTES				
Distribución	**Función de probabilidad:** $p(x)=P(X=x)\quad \forall x$	**Función de distribución:** $F(x)=P(X\leq x)\quad \forall x$	**Cuantiles**	**Muestras aleatorias**
Binomial: $X \sim B(n,p)$	`dbinom(x,n,p)`	`pbinom(x,n,p)`	`qbinom(pr,n,p)`	`rbinom(o,n,p)`
Geométrica: $X \sim G(p)$	`dgeom(x,p)`	`pgeom(x,p)`	`qgeom(pr,p)`	`rgeom(o,p)`
Binomial negativa: $X \sim BN(n,p)$	`dnbinom(x,n,p)`	`pnbinom(x,n,p)`	`qnbinom(pr,n,p)`	`rnbinom(o,n,p)`
Hipergeométrica: $X \sim H\left(N,n,p=\frac{r}{N}\right)$	`dhyper(x,r,N-r,n)`	`phyper(x,r,N-r,n)`	`qhyper(pr,r,N-r,n)`	`rhyper(o,r,N-r,n)`
Poisson: $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$	`dpois(x,λ)`	`ppois(x,λ)`	`qpois(pr,λ)`	`rpois(o,λ)`

1) Notación: pr: vector de probabilidad; o: número de datos

2) En las funciones `p` y `q` se puede añadir el argumento `lower.tail=F`; por defecto R tiene definido `lower.tail=T`, añadiendo el argumento `lower.tail=F`, se calcula la probabilidad: $1-F(x)=P(X>x)\quad \forall x$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

1 DISTRIBUCIONES

Variable aleatoria continua– DISTRIBUCIONES IMPORTANTES				
Distribución	**Función de densidad** $f(x)$**:** $P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$ $\forall a,b\in\mathbb{R} \quad \vee \quad a=-\infty, b=\infty$	**Función de distribución** $F(x)$**:** $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x\in\mathbb{R}$	**Cuantiles**	**Muestras aleatorias**
Uniforme: $X\sim UC(a,b)$	`dunif(x,a,b)`	`punif(x,a,b)`	`qunif(pr,a,b)`	`runif(o,a,b)`
Exponencial: $X\sim\varepsilon(\beta)$	`dexp(x,1/β)`	`pexp(x,1/β)`	`qexp(pr,1/β)`	`rexp(o,1/β)`
Normal: $X\sim N(\mu,\sigma)$	`dnorm(x,μ,σ)`	`pnorm(x,μ,σ)`	`qnorm(pr,μ,σ)`	`rnorm(o,μ,σ)`

1) Notación: pr: vector de probabilidad; o: número de datos

2) En las funciones `p` y `q` se puede añadir el argumento `lower.tail=F`; por defecto R tiene definido `lower.tail=T`, añadiendo el argumento `lower.tail=F`, se calcula la probabilidad: $1-F(x)=P(X>x) \quad \forall x$

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

1. **Considere una variable aleatoria que sigue una distribución binomial con parámetros n=10, p=0.3. Calcule:**

a) **La probabilidad de que la variable tome el valor de 4. Es decir, P(X=4).**

```
> dbinom(4,size=10,prob=0.3)#Queremos la función de probabilidad
   [1] 0.2001209
```

En modo simplificado

```
> dbinom(4,10,0.3)#Función de probabilidad en modo simplificado
   [1] 0.2001209
```

También se podría introducir la función de probabilidad de la distribución binomial en R.

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

```
>choose(10,4)*0.3^4*(1-0.3)^6#Escribiendo la función de probabilidad
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

1. **Considere una variable aleatoria que sigue una distribución binomial con parámetros n=10, p=0.3. Calcule:**

b) **La probabilidad acumulada hasta llegar al valor de 4. Es decir, P(X≤4).**

Se necesita la función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

```
> pbinom(4,size=10,prob=0.3)#Función de distribución
   [1] 0.8497317

> pbinom(4,10,0.3)#Función de distribución de forma simplificada
  [1] 0.8497317
```

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

2. **Considere una variable aleatoria que sigue una distribución geométrica con parámetro p=0.45. Calcule:**

a) **La probabilidad de que la variable tome el valor de 3. Es decir, P(X=3).**

```
> dgeom(3,prob=0.45)#Queremos la función de probabilidad
[1] 0.07486875
```

En modo simplificado

```
> dgeom(3,0.45)#Función de probabilidad en modo simplificado
[1] 0.07486875
```

También se podría introducir la función de probabilidad de la distribución geométrica en R.

$$p(x) = P(X = x) = (1-p)^x\, p$$

```
>(1-0.45)^3*0.45#Escribiendo la función de probabilidad
```

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

- **Ejemplos**

2. Considere una variable aleatoria que sigue una distribución geométrica con parámetro p=0.45. Calcule:

b) La probabilidad acumulada hasta llegar al valor de 3. Es decir, P(X≤3)

Se necesita la función de distribución

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} (1-p)^k \, p$$

```
> pgeom(3,prob=0.45)#Función de distribución
[1] 0.9084937

> pgeom(3,0.45)#Función de distribución de forma simplificada
[1] 0.9084937
```

2

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

- **Ejemplos**

3. Considere una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ=3. Calcule:

a) La probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor de 8. Es decir, P(X=8).

```
> dpois(8,lambda=3)#Queremos la función de probabilidad
  [1] 0.008101512
```

En modo simplificado

```
> dpois(8,3)#Función de probabilidad en modo simplificado
  [1] 0.008101512
```

También se podría introducir la función de probabilidad de la distribución de Poisson en R.

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$$

```
>3^8*exp(-3)/factorial(8)#Escribiendo la función de probabilidad
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

3. Considere una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ=3. Calcule:

b) La probabilidad acumulada hasta llegar al valor de 8. Esto es, P(X≤8).

Se necesita la función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k . e^{-\lambda}}{k!}$$

```
> ppois(8,lamda=3)#Función de distribución
  [1] 0.996197

> ppois(8,3)#Función de distribución de forma simplificada
  [1] 0.996197
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

4. **Una variable aleatoria que sigue una distribución binomial negativa. En un laboratorio, la probabilidad de que una medida se registre de forma correcta es de 0.78.**

a) **¿Cuál es la probabilidad de tener que realizar 15 mediciones para registrar 10 correctas?**

X: "Número de mediciones incorrectas realizadas hasta obtener 10 correctas"

n=10, p=0.78, x=(15-10)=5. Es decir, P(X=5).

mediciones

15 − 10 correctas

dnbinom (x,n,p)

En este caso: n=10 (medidas correctas), p=0.78 (probabilidad de que sea correcta), x=5 (medidas incorrectas).

```
> dnbinom(5,10,0.78)#Función de probabilidad (en modo simplificado)
  [1] 0.08600496
```

También se podría introducir la función de probabilidad de la distribución binomial negativa en R.

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n+x-1}{x} q^x p^n$$

```
>choose(14,5)*(1-0.78)^5*0.78^10#Escribiendo la función de probabilidad
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Ejemplos

4. **Una variable aleatoria que sigue una distribución binomial negativa. En un laboratorio, la probabilidad de que una medida se registre de forma correcta es de 0.78.**

b) **¿Cuál es la probabilidad de tener que realizar al menos 15 mediciones para registrar 10 mediciones correctas?**

$1 - P(X<5)$

AL SER DISCRETA

$P(x<5) = P(x\leq 4)$

El $x=5$ no entra!

Se necesita la función de distribución P(X≥5)=1-P(X≤4).

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k\leq x} \binom{n+k-1}{k} q^k p^n$$

pnbinom (x,n,p)

```
> 1-pnbinom(4,10,0.78)#Función de distribución
  [1] 0.1764678
> pnbinom(4,10,0.78,lower.tail=F)#Otra forma de hacer lo mismo
  [1] 0.1764678
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

➢ Ejemplos

5. Una variable aleatoria que sigue una distribución . Se tienen 10 bolas en una urna, 6 negras y 4 blancas. Se sacan 3 bolas sin reposición.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 bolas blancas?

X: “Número de bolas blancas de entre las 3 extraídas”

N=10, n=3, r=4, x=2. Es decir, P(X=2).

dhyper (x,r,N-r,n)

En este caso: N=10 (número de bolas), n=3 (sacadas), r=4 (número de éxitos), x=2 (resultado).

```
> dhyper(2,4,6,3)#Función de probabilidad
  [1] 0.3
```

También se podría introducir la función de probabilidad de la distribución hipergeométrica en R.

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

```
>choose(4,2)*choose(6,1)/choose(10,3)#Escribiendo la función de probabilidad
```

N=10
r=4 N-r=6
n=3

Pregunta x?

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

➢ Ejemplos

5. Una variable aleatoria que sigue una distribución hipergeométrica. Se tienen 10 bolas en una urna, 6 negras y 4 blancas. Se sacan 3 bolas sin reposición.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como máximo 2 bolas blancas?

Se debe emplear la función de distribución para conocer P(X≤2).

X="nº de bolas blancas que sacamos"

phyper (x,r,N-r,n)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \frac{\binom{r}{x} \cdot \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

```
> phyper(2,4,6,3)#Función de distribución
  [1] 0.9666667
```

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 bolas blancas?

Se debe emplear la función de distribución para conocer P(X≥2)=1-P(X≤1)

```
>1-phyper(1,4,6,3)#Función de probabilidad
  [1] 0.3333333
>phyper(1,4,6,3,lower.tail=F)#Otra forma de hacer lo mismo
  [1] 0.3333333
```

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD Y DISTRBUCIÓN

Se empleará la función plot()

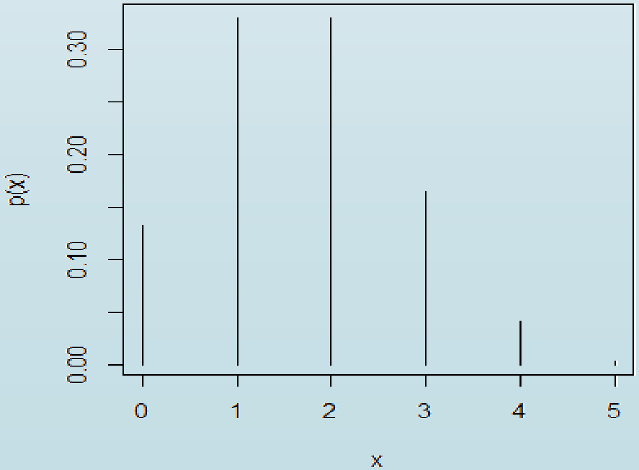
- **Ejemplo**

Lanzamiento de 5 dados y contabilizar el número de 1 o 2 obtenidos. Es decir, X: Número de 1 o 2 logrados en el lanzamiento de 5 dados. Representación:

>x<-0:5#Número de posibles éxitos (se definen todos los posibles valores que pueda tomar la variable)

Función de probabilidad $P(\text{sacar } 1) = 1/6$ $P(\text{sacar } 2) = 1/6$ $P(1) \cup P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

>plot(x,dbinom(x,size=5,prob=2/6),type="h“,ylab=“p(x)”)#Es una distribución binomial, la probabilidad de obtener 1 o 2 es de 2/6, al escribir type=“h” lo representará como un diagrama de barras.



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

2 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD Y DISTRBUCIÓN

Se empleará la función plot()

- **Ejemplo**

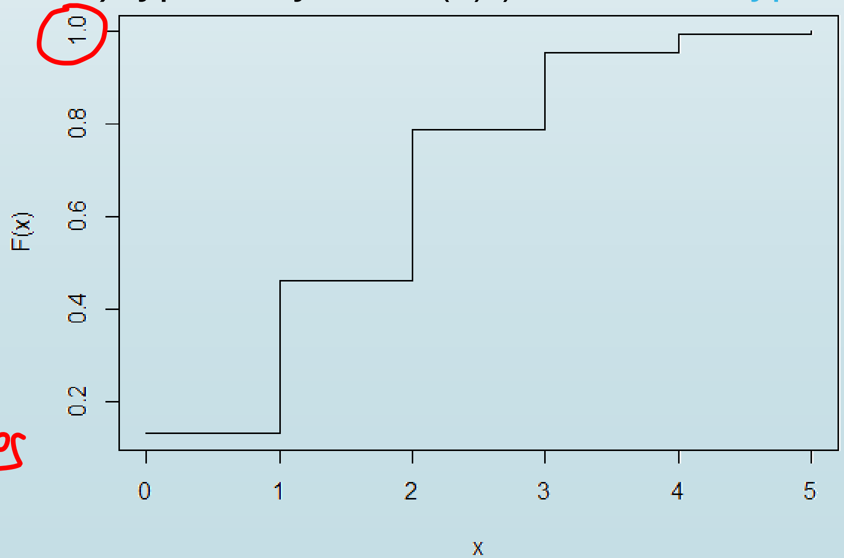
Lanzamiento de 5 dados y contabilizar el número de 1 o 2 obtenidos. Es decir, X: Número de 1 o 2 logrados en el lanzamiento de 5 dados. Representación:

Función de distribución

>plot(x, pbinom(x,size=5,prob=2/6),type="s",ylab="F(x)")#Al escribir type "s" lo dibujará en forma de escalera.

Fijarse que F(x) llega a 1

Si no llega aumentamos rango de X



3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Ejemplos

1. **Una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme. Parámetros a=10, b=40. Calcule:**

a) P(X<30) ES CONTINUA

$P(X<30)$
$P(X\leq 30)$ } lo mismo
↓
punif (30, 10,40)

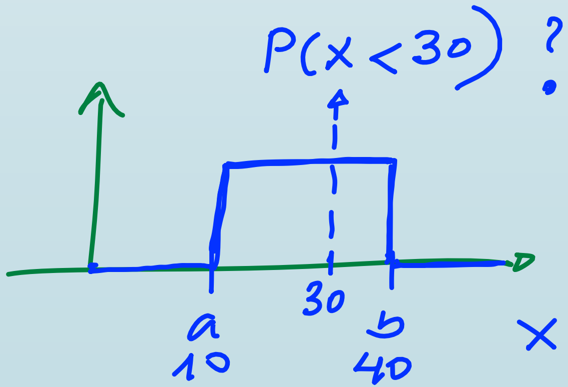
Se distribuye uniformemente entre $x=a=10$ y $x=b=40$

> punif(30,10,40)#Función de distribución
[1] 0.666667

También se podría introducir la función de distribución de la distribución de uniforme en R

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

>(30-10)/(40-10)#Escribiendo la función de distribución



3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

Ejemplos

2. **Una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial. Parámetro β=5. Calcule:**

a) **P(4 ≤ X≤6)**

```
> pexp(6,1/5)-pexp(4,1/5)#Funciones de distribución
  [1] 0.1481348
```

También se podría introducir la función de distribución de la distribución de exponencial en R

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-x/\beta} \qquad x > 0$$

```
>(1-exp(-6/5))-(1-exp(-4/5))#Escribiendo las funciones de distribución
```

3 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

➢ Ejemplos

3. Una variable aleatoria que sigue una distribución normal. Parámetros μ=65.6 σ=14.74. Calcule:

a) P(X<60)

```
> pnorm(60,65.6,14.74)#Función de distribución
   [1] 0.3520029
```

b) ¿Qué valor de x deja el 12,1% de la distribución a su derecha?

```
>qnorm(0.121,65.6,14.74,lower.tail=F)
 [1] 82.84584
>qnorm(1-0.121,65.6,14.74)
 [1] 82.84584
```

c) P(X>45)

```
>pnorm(45,65.6,14.74,lower.tail=F)
[1] 0.918877
>1-pnorm(45,65.6,14.74)
[1] 0.918877
```

3

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

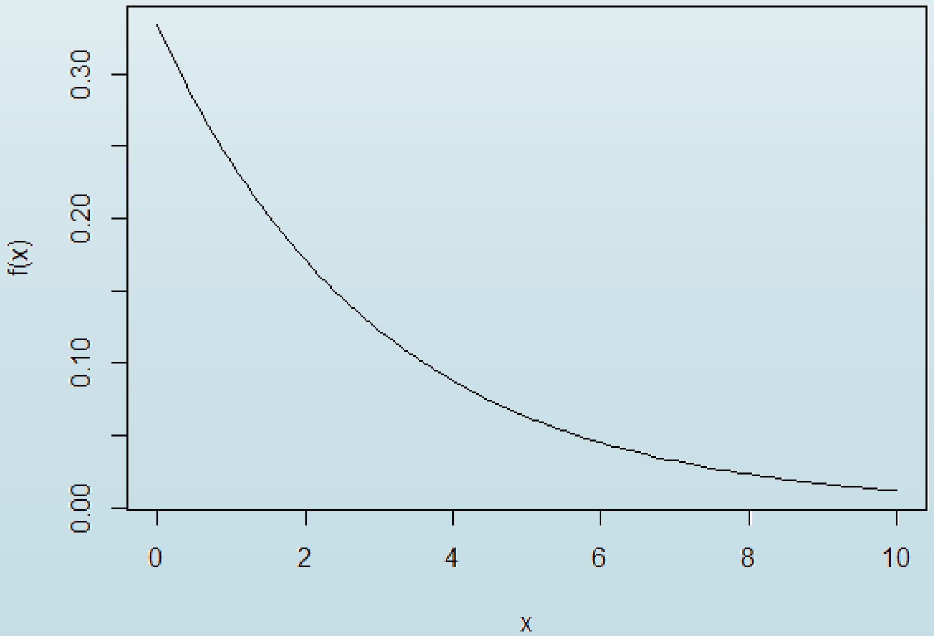
REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD Y DISTRIBUCIÓN

Se empleará la función curve()

- **Ejemplos**

1. **Una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial con β=3. Represente la función de densidad.**

```
> curve(dexp(x,1/3),from=0, to=10, ylab="f(x)")
```



3

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD Y DISTRIBUCIÓN

Se empleará la función curve()

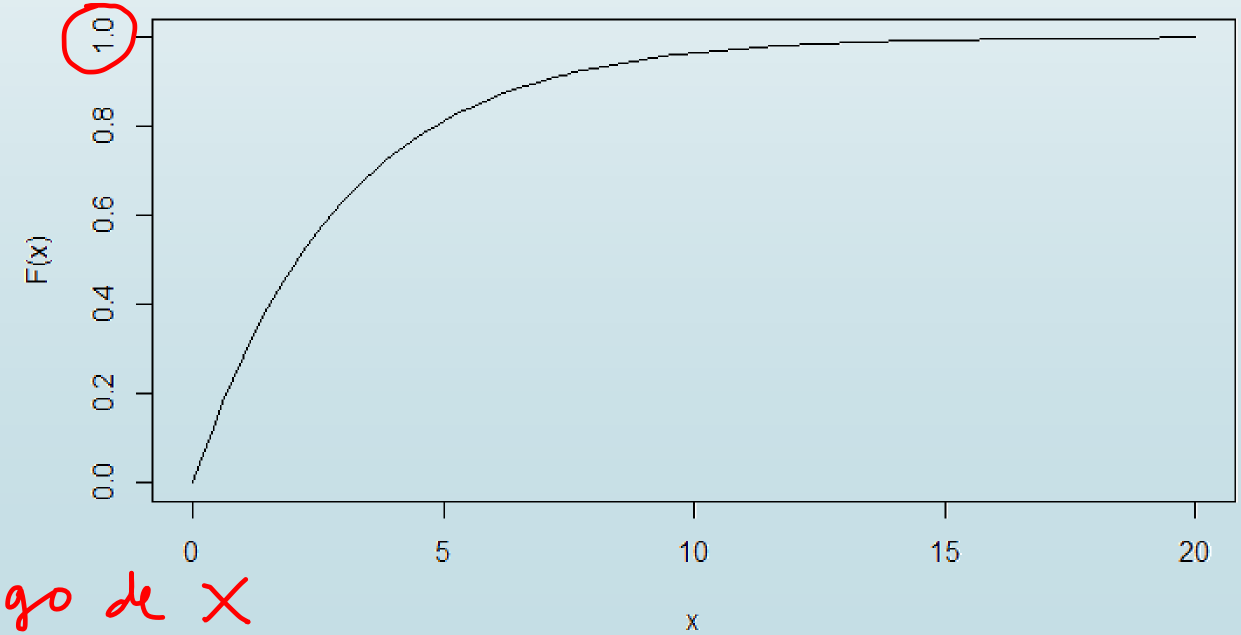
- **Ejemplos**

2. **Una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial con β=3. Represente la función de distribución.**

```
> curve(pexp(x,1/3),0,20, ylab="F(x)")
```

Fijarse que llega a $F(x) = 1$

Si no llega aumentamos rango de X



DISTRIBUCIONES CONTINUAS

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD Y DISTRIBUCIÓN

Se empleará la función curve()

- **Ejemplos**

3. **Una variable aleatoria que sigue una distribución normal con μ=4 y σ=1. Represente la función de densidad.**

```
> curve(dnorm(x,4,1),0, 8,ylab="f(x)")
```